

Die  
Dampfturbinen

Von

Dr. A. Stodola

# Die Dampfturbinen

und die

## Aussichten der Wärmekraftmaschinen.

Versuche und Studien

von

**Dr. A. Stodola,**

Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.

---

Mit 119 Textfiguren und 1 Tafel.



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1903.

Erweiterter Sonderabdruck  
aus der  
Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903.

---

Alle Rechte,  
insbesondere das der Uebersetzung in fremde Sprachen,  
vorbehalten.

**Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>.**

ISBN 978-3-662-36140-5      ISBN 978-3-662-36970-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-36970-8

Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1903

## Vorwort.

---

Auf Anregung einiger Freunde aus der Praxis wird hiermit die gleichnamige Studie des Verfassers in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure Jahrgang 1903, mit erläuternden Zusätzen versehen, als Sonderabdruck der Oeffentlichkeit übergeben. Dank dem Entgegenkommen mehrerer Turbinenbaufirmen ist der Verfasser in der Lage, eine weitere Reihe wichtiger konstruktiver Einzelheiten, die zum grofsen Teil unbekannt sein dürften, mitzutheilen, und hofft so seinem Ziele, eine Konstruktionslehre der Dampfturbinen zu schaffen, einen Schritt näher gekommen zu sein.

Im gegenwärtigen Stadium des Dampfturbinenbaues muß indessen das Hauptgewicht auf die Erörterung der wissenschaftlichen Grundlagen dieser hohe Bedeutung erlangenden Motorenart gelegt werden. Wir Ingenieure wissen ja sehr wohl, daß der Maschinenbau durch das grofs angelegte praktische Experiment vielfach mit spielender Leichtigkeit Aufgaben gelöst hat, welchen die Forschung jahrelang ratlos gegenüber stand. Allein das »Probieren«, wie der Ingenieur das Experiment ironisch-gemütlich gerne nennt, ist häufig über alle Maßen kostspielig, und einer der obersten Gesichtspunkte aller technischen Tätigkeit: das wirtschaftliche Moment, sollte uns dazu führen, auch die Ergebnisse der wissenschaftlichen technischen Arbeit nicht zu unterschätzen, vor allem auf so neuen Gebieten wie das vorliegende.

Hin und wieder tauchen Stimmungen auf, die unverkennbar darauf hinzielen, den Maschinenbau ganz auf die durch das Grofsexperiment unterstützte Empirie zu begründen. Unmöglich wäre ein solches Beginnen nicht, aber auch nicht wirtschaftlich, mithin nicht technisch. Die Industrie kann die wissenschaftliche Mitarbeit nie entbehren, nicht aus Idealismus, sondern weil diese unter gewissen Umständen das »billigere Verfahren« bildet, ans Ziel zu gelangen. Gegenüber der erwähnten sehr einseitigen Auffassung darf wieder einmal daran erinnert werden, welche bedeutenden Opfer schon Ingenieure und Maschinenbauanstalten fruchtlos dargebracht haben, weil zufolge mangelnder Einsicht in die wissenschaftlichen Grundlagen der unternommenen Aufgabe ein von Anfang an grundfalscher Weg eingeschlagen wurde. Die Gesamtheit mag ruhig

zusehen, wie der Einzelne an einem aussichtslosen Experiment ökonomisch verblutet, die Einsichtigen werden den Vorgang, der sich leider so häufig wiederholt, als volkswirtschaftlichen Schaden empfinden, abgesehen davon, daß niemand sich gerne in der Lage der Betroffenen befinden möchte. Der Dampfturbinenbau bietet besonders zahlreiche Beispiele für die Notwendigkeit, die konstruktive Tätigkeit mit wissenschaftlichen Gesichtspunkten zu verknüpfen. So darf darauf hingewiesen werden, wie wichtig es ist, die Dimensionen der Laufräder, deren Umfänge fast die Geschwindigkeit eines Geschosses erreichen, genau vorher zu bestimmen, damit die herrschende Materialbeanspruchung an keiner Stelle die zulässige Grenze überschreitet. Oder wie unvorteilhaft es wäre, bei den neuerdings in Aufnahme kommenden horizontal rotierenden Scheibenrädern, die bedeutende Durchmesser erhalten, etwa erst nach der Ausführung experimentell ermitteln zu wollen, wie stark sich die Scheiben unter ihrem Eigengewicht durchbiegen, und um wieviel sie durch die Fliehkraft wieder gerade gerichtet werden, was mit Rücksicht auf das Streifen im engen Spiel zwischen den Schaufeln von Wichtigkeit ist. Welchen Gefahren geht ein Konstrukteur entgegen, der sich an den Bau von Dampfturbinen heranwagt, ohne genaue Kenntnis von den Erscheinungen der sogenannten kritischen Geschwindigkeit zu haben! Schließlich kann man fragen, ob es »wirtschaftlich« ist, auch nur die Patentgebühr für gewisse Turbinensysteme zu erlegen, bei welchen die größere Hälfte des erzielbaren Arbeitsgewinnes vernichtet wird, bevor noch der Dampf das Laufrad erreicht hat?

Selbstverständlich darf anderseits dem im praktischen Leben stehenden vielbeschäftigten Ingenieur nicht zugemutet werden, daß er der wissenschaftlichen Arbeit in ihre verwickelten Einzelheiten folge. Auch für Studierende technischer Hochschulen ist es ratsam, sich erst in die Grundbegriffe nach Möglichkeit einzuleben, bevor sie zur Behandlung schwierigerer Aufgaben schreiten. Hingegen von den Ergebnissen der Forschung Kenntnis zu nehmen, hierzu darf wohl jeder Beteiligte eingeladen werden, und diesem Zwecke möchte vorliegendes Werklein ebenfalls dienen. Es ist stets darauf Bedacht genommen worden, die Ergebnisse durch den Versuch nach Möglichkeit zu kontrollieren und sicher zu stellen. So darf angeführt werden, daß außer den schon veröffentlichten Versuchen weitere über die Ausströmung durch Düsen ins Freie, über die Widerstände der Turbinenschaukeln, und eine Reihe von Versuchen über die kritischen Umlaufzahlen mehrfach belasteter Wellen angestellt worden sind.

Unter den Zusätzen wird vielleicht Interesse erwecken das Auffinden der bisher unbekannt gewesenen kritischen Geschwindigkeit »zweiter Art«; die Wirkung der »Resonanz«

der Umlaufzahl mit der Fundamentalschwingung; die Verbiegung horizontaler Scheiben und die Wirkung ihrer Fliehkräfte; die strenge Lösung der Frage nach der Druckverteilung bei der Strömung einer elastischen Flüssigkeit, u. a.

Die Darstellung mußte außerst knapp gehalten werden und beschränkt sich vielfach auf bloße Andeutungen in der Entwicklung; doch dürfte dem sich näher interessierenden Leser auch die Begründung überall klar werden.

Um die Uebersicht zu erhöhen, erfolgte eine Trennung in drei Teile; im ersten ist das eigentliche Turbinenthema behandelt, im zweiten finden sich einige weitergehende, mehr mathematische Vorbereitung erheischende Untersuchungen vereinigt. Der dritte Teil ist stark erweitert und bietet einen kurzen Abriss der Wärmemechanik, denn es ist unzweifelhaft, daß ein tieferes Verständnis der Energieumwandlung in der Dampfturbine nur auf thermodynamischer Grundlage gewonnen werden kann. Die theoretische Abstraktion widerstandsloser Strömungen muß aufgegeben werden, wenn es sich um die Wirklichkeit handelt; dieser zu folgen gibt es aber nur ein anschauliches Hilfsmittel: den Begriff der Entropie, welche mithilfe unserer Entropietafel alle Wärmerechnungen leicht zu erledigen gestattet. Um dem praktischen Ingenieur Anregung zu bieten, die vielleicht etwas verblaßten Grundlehren der Thermodynamik aufzufrischen, sind die beiden Hauptsätze dieser eigentlichen Wissenschaft der Wärmemotoren kurz entwickelt. Für den tiefer eindringenden Leser müßte mithin die Lektüre dieses Abschnittes als Einleitung empfohlen werden. Ich benutzte die Gelegenheit, den zweiten Hauptsatz in einer den modernen Anschauungen entsprechenden Form wiederzugeben, vom perpetuum mobile zweiter Art ausgehend. Die Plancksche Herleitung, der bei näherem Zusehen noch einige Unklarheiten anhaften, wurde durch eine, wie ich hoffe, befriedigende Fassung ersetzt. Je mehr der zweite Hauptsatz angefochten wurde, um so gefestigter ging er jedesmal aus dem Streite hervor, und so durfte den Erfindern bei diesem Anlaß zugerufen werden, daß sie ihren aussichtslosen Feldzug gegen dieses Fundament unserer Wissenschaft einstellen möchten. Den Schluß bildet eine kurze Uebersicht neuerer Vorschläge für Arbeitsverfahren von Wärmekraftmaschinen, unter welche es mir bei den Fortschritten der Kohlenvergaser zeitgemäÙs schien, auch die Gasturbine aufzunehmen.

Zürich, August 1903.

Der Verfasser.

---

## Inhaltsangabe.

Vorwort . . . . .	Seite I
Häufiger gebrauchte Bezeichnungen . . . . .	VIII

### Abteilung I.

#### A. Die strömende Bewegung des Dampfes.

Abschnitt 1. Thermodynamische Grundgleichungen . . . . .	2
» 2. Die Reibungsarbeit und der Verlust an kinetischer Energie . . . . .	4
» 3. Die Entropietafel . . . . .	7
» 4. Versuche über die Bewegung des Dampfes in Düsen . . . . .	8
Die Versuchsanordnung . . . . .	10
Die Druckmessung . . . . .	10
Die Bewegungswiderstände . . . . .	11
Pressung am Strahlrande . . . . .	17
Künstlich erhöhter Gegendruck . . . . .	18
Zur Theorie des Dampfstoßes . . . . .	20
Kleine Druckunterschiede vor und hinter der Düse . . . . .	22
» 5. Der Einfluss einer Querschnittserweiterung . . . . .	23
» 6. Isentropische Linien . . . . .	25
» 7. Rechnerische Behandlung . . . . .	27
» 8. Düse mit verlängertem Einströmungshals . . . . .	30
» 9. Die Strahlkontraktion . . . . .	32
» 10. Dampfausfluß aus Mündungen . . . . .	33
» 11. Ausströmung aus einer konisch erweiterten Düse ins Freie . . . . .	35
» 12. Versuche mit Turbinenschaufeln . . . . .	37

#### B. Die Festigkeit rotierender Scheiben.

Abschnitt 13. Scheibe mit veränderlicher Dicke . . . . .	44
Die Randbedingungen . . . . .	46
» 14. Scheibe gleicher Festigkeit . . . . .	49

#### C. Erschütterungsfreiheit rotierender Scheiben und Wellen.

Abschnitt 15. Massenausgleich rotierender starrer Körper . . . . .	52
» 16. Die biegsame Welle von Laval . . . . .	57

	Kritische Geschwindigkeit nach Föppl . . . . .	57
	Schiefstellung der rotierenden Scheibe. . . . .	59
	Kritische Geschwindigkeit mehrfach belasteter Wellen . . . . .	60
<b>Abschnitt 17.</b>	<b>Zwei Einzelräder . . . . .</b>	<b>60</b>
»	18. Graphische Behandlung bei beliebiger Verteilung der Massen und beliebig veränderlicher Wellenstänke . . . . .	62
»	18a. Stetig und gleichmäßig belastete Welle mit unveränderlichem Durchmesser . . . . .	63
	Schiefstellung der Scheiben . . . . .	66
»	19. Die glatte Welle unter dem Einfluß ihrer Eigenmasse . . . . .	68
»	19a. Versuche über die kritische Geschwindigkeit glatter und stetig belasteter Wellen . . . . .	69
»	20. Die Dampfturbinenlager . . . . .	71
»	21. Dampfreibung rotierender Scheiben . . . . .	72

#### D. Der Energieumsatz in der Dampfturbine.

<b>Abschnitt 22.</b>	<b>Thermodynamischer Wirkungsgrad . . . . .</b>	<b>75</b>
	Achsal-Turbinen . . . . .	76
»	23. Die einstufige Druckturbine . . . . .	76
»	24. Die mehrstufige Druckturbine . . . . .	82
»	25. Die vielstufige Turbine . . . . .	84
	Das verfügbare Gesamtgefälle . . . . .	87
	Wahl der Umfangsgeschwindigkeit . . . . .	88
	Wahl der Winkel . . . . .	89
	Wahl der Dampfgeschwindigkeiten . . . . .	89
	a) die vielstufige Ueberdruckturbine . . . . .	89
	b) die vielstufige Druckturbine . . . . .	97
	Radialturbinen . . . . .	99
»	26. Die Regulierung der Dampfturbinen . . . . .	101

#### E. Die Dampfturbinensysteme.

<b>Abschnitt 27.</b>	<b>Turbine von de Laval . . . . .</b>	<b>105</b>
»	28. » » Stumpf . . . . .	111
»	29. » » Zoelly . . . . .	113
»	30. » » Curtis . . . . .	114
»	31. » » Parsons . . . . .	124
»	32. » » Rateau . . . . .	138
»	33. Anderweitige Vorschläge . . . . .	143
»	34. Dampfturbine und Kolbendampfmaschine . . . . .	146

## Abteilung II.

<b>Abschnitt 35.</b>	<b>Druckverteilung im Querschnitte eines expandierenden Gas- oder Dampfstrahles . . . . .</b>	<b>151</b>
»	35a. Druckverteilung in einer Turbinenschaufel . . . . .	160
»	36. Biegung einer horizontalen ungleich dicken Scheibe unter dem Einflusse ihres Eigengewichtes . . . . .	161
»	37. Geraderichten der wagerecht rotierenden Scheibe durch die Eigenfliehkräfte . . . . .	167
»	38. Kritische Geschwindigkeit einer stetig und gleichmäßig belasteten Welle mit veränderlichem Durchmesser . . . . .	171
»	38. Mitschwingen des Fundamentes; Ungefährlichkeit der Resonanz . . . . .	174
»	40. Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes über der kritischen Geschwindigkeit . . . . .	177
»	41. Kritische Geschwindigkeit zweiter Art, hervorgebracht durch die Biegung der glatten Welle unter ihrem Eigengewicht . . . . .	181
»	42. Differentialgleichung für die Druckverteilung in der vielstufigen achsialen Ueberdruckturbine . . . . .	186
»	43. Leerlauf und Grenzgeschwindigkeit der vielstufigen Turbine . . . . .	192

## Abteilung III.

## Die Aussichten der Wärmekraftmaschinen.

<b>Abschnitt 44.</b>	<b>Das perpetuum mobile erster Art . . . . .</b>	<b>195</b>
»	45. » » » zweiter Art . . . . .	195
»	46. Der Carnotsche Kreisprozess . . . . .	197
»	47. Kreisprozess mit Wärme-Zu- und -Abfuhr bei beliebigen Temperaturen . . . . .	200
»	48. Die Entropie . . . . .	202
»	49. Entropietafel für Wasserdampf . . . . .	204
»	50. Ungeschlossene Prozesse mit umkehrbaren und nicht umkehrbaren Zustandsänderungen . . . . .	206
»	51. Die Oekonomie der Wärmekraftmaschinen . . . . .	207
»	52. Neuere Vorschläge . . . . .	210
	Vermeidung der Wärmezufuhr bei niedrigerer Temperatur . . . . .	210
	Der Wärmergenerator . . . . .	211

<b>Abschnitt 52. Dauerüberhitzung (Verbindung von Dampf- und Gasturbine)</b> . . . . .	212
Pictets Dampf-Gasmaschine . . . . .	213
Seiglesche Solarölmaschine. . . . .	213
Mehrstoff-Dampfmaschine von Schreber . . . . .	213
Die Abwärmemaschine . . . . .	214
Pictets Auspuffmaschine . . . . .	215
Der Gasmotor . . . . .	216
Bánki- und Dieselmotor . . . . .	216
Dampfmaschine mit Verbrennung des Auspuffdampfes von Friedenthal . . . . .	216
Elektrizität aus Kohle . . . . .	218
Die Gasturbine . . . . .	219

---

## Häufiger gebrauchte Bezeichnungen.

---

- $q$  Flüssigkeitswärme pro kg  
 $r$  Verdampfungswärme pro kg  
 $x$  spezifische Dampfmenge  
 $T$  absolute Temperatur  
 $T_s$  absolute Temperatur an der Grenzkurve der Sättigung  
 $\lambda = q + x r$  bzw.  $= q + r + c_p (T - T_s)$  »Dampfwärme«  
 $p$  absoluter Druck kg/qm  
 $v$  spezifisches Volumen m/kg  
 $u$  { innere Energie pro kg (in Wärmerechnungen)  
 { Umfangsgeschwindigkeit (in Geschwindigkeitsplänen)  
 $A = \frac{1}{424}$  Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit  
 $c$  absolute Dampfgeschwindigkeit  
 $w$  relative (oder auch absolute) Dampfgeschwindigkeit  
 $Q$  Wärmemenge  
 $R$  Reibungsarbeit (in Wärmemaß)  
 $Z$  Verlust an kinetischer Energie (in Wärmemaß)  
 $S$  { Entropie (in Wärmerechnungen)  
 { Schubkraft (in Festigkeitsrechnungen)  
 $f, F$  Querschnitte  
 $G$  sekundlich durchströmendes Dampfgewicht  
 $M$  sekundlich durchströmende Dampfmasse  
 $\gamma = 1 : v$  spezifisches Gewicht  
 $\mu = \gamma : g$  spezifische Masse  
 $\zeta$  Widerstandskoeffizient  
 $\sigma_r, \sigma_t$  radiale bzw. tangentielle Spannung in einer rotierenden Scheibe  
 $\omega$  Winkelgeschwindigkeit  
 $\omega_k$  kritische Winkelgeschwindigkeit  
 $m$  Verhältnis der elastischen Längendehnung zur Querkontraktion  
 $\nu = 1 : m$   
 $E$  Elastizitätsmodul  
 $\xi$  radiale Ausdehnung einer rotierenden Scheibe  
 $J$  Flächen-Trägheitsmoment bezogen auf die neutrale Achse  
 $\Theta$  Massenträgheitsmoment  
 $t$  { die Zeit,  
 { Temperatur in °C bei Wärmerechnungen  
 $\eta$  Wirkungsgrad  
 $h, H$  »Wärmegefälle«  
 $L$  mechanische Arbeit  
 $N$  Leistung in PS.
-

Wer vor etwa 15 Jahren die ersten Triumphe der dreistufigen Dampfexpansion miterlebt und den gewaltigen Aufschwung der Dampfüberhitzung mit Aufmerksamkeit verfolgt hat, würde wohl kaum geglaubt haben, daß der Dampfmaschine sobald ein lebenskräftiger Mitbewerber auf ihrem eigenen Gebiete erstehen werde. Und doch kann an dieser Tatsache seit der Bekanntgabe der Versuchsergebnisse, welche an Parsons- und Laval-Turbinen gewonnen worden sind, kaum mehr gezweifelt werden. Die früher dem neuen Motor wohl nicht mit Unrecht vorgeworfene Unwirtschaftlichkeit kann heute als beseitigt angesehen werden, und auch in bezug auf das Verhalten im Betriebe blicken die genannten Turbinen auf jahrelange praktische Erprobung zurück. So beginnt denn ein allseitiges Interesse sich für die Dampfturbine geltend zu machen, und ihre Ausbreitung in der Industrie nimmt von Tag zu Tage zu. Die Leistungsfähigkeit der sich heute im Betriebe oder in der Ausführung begriffenen Dampfturbinen dürfte die Zahl von 500 000 PS überschritten haben, darunter Einheiten von bedeutenden Leistungen, z. B. vier Turbinen zu 5000 KW, welche Westinghouse für die Untergrundbahnen in London liefert, und die 5000 PS-Turbinen von Brown Boveri & Co. für Frankfurt a/M.

Daß die uralte Idee der Dampfturbine, die uns das langgehegte Ideal des rotierenden Dampfmotors zu verwirklichen verspricht, so spät Würdigung gefunden hat, liegt an den ungeheuern Schwierigkeiten, welche die Konstruktion dieser Maschine darbietet. Unter anderm haben folgende Umstände hemmend gewirkt:

1) Man war nicht hinreichend aufgeklärt über die Gesetze der Dampfströmung, insbesondere über deren Bewegungswiderstände. Es zwang sich die Anschauung auf, daß der Dampf beim Durchgange durch viele enggestellte Schaufeln eine Art von Zerstäubung erfahren und soviel von seiner Energie einbüßen werde, daß die Oekonomie infrage gestellt sein müsse;

2) man zweifelte, ob es gelingen werde, Konstruktionsformen und Stoffe zu finden, welche den Turbinenrädern so außerordentlich hohe Geschwindigkeit zu erteilen gestatten, wie sie notwendig sind, um dem Dampfe die Strömungsenergie zu entziehen;

3) es waren keine Mittel bekannt und die Fabrikationsmethoden waren zu unvollkommen, um den Gefahren der Erschütterung zu begegnen, welche die ungleiche Massenverteilung bei den unvermeidlichen hohen Umlaufzahlen im Gefolge hat.

Bevor auf die Besprechung ausgeführter Dampfturbinen eingegangen wird, sollen mithin die erwähnten drei Umstände einer einlässlicheren Untersuchung unterzogen werden.

## A. Die strömende Bewegung des Dampfes.

### 1. Thermodynamische Grundgleichungen.

Wir betrachten in Fig. 1 zwei beliebige Querschnitte  $A_1$  und  $A_2$  des Dampfstromes einer im Beharrungszustande arbeitenden Turbine, und es seien  $p_1$  und  $p_2$  die in  $A_1$  und

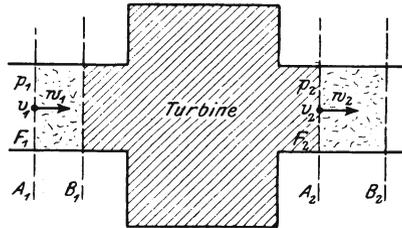


Fig. 1.

$A_2$  herrschenden Drücke,  $w_1$  und  $w_2$  die Geschwindigkeiten,  $u_1$  und  $u_2$  die (inneren) Energien oder Arbeitsfähigkeiten pro kg,  $v_1$  und  $v_2$  die Volumina pro kg,  $F_1$  und  $F_2$  die Querschnitte. Während des Zeitelementes  $dt$  werde zwischen den Stellen  $A_1$  und  $A_2$  die äußere »Nutz«arbeit  $E dt$  geleistet und die Wärmemenge  $Q, dt$  (durch Leitung und Strahlung) nach außen abgeleitet. Die Querschnitte  $A_1$   $A_2$  verschieben sich während dieser Zeit nach  $B_1$   $B_2$ , und es strömt eine Dampfmasse von  $G dt$  kg durch sie hindurch. Die Gesamtenergie zu Beginn des Zeitelementes der zwischen  $A_1$   $A_2$  eingeschlossenen Dampfmenge findet sich wieder in der Gesamtenergie zu Ende des Zeitelementes und in der nach außen abgegebenen Arbeit sowie der abgeleiteten Wärmemenge. Die Gesamtenergie der zwischen  $A_2$  und  $B_1$  eingeschlossenen Dampfmenge ist zu Beginn und zu Ende gleich groß und fällt aus der Gleichung heraus; indem wir zur Nutzarbeit noch diejenigen Anteil hinzufügen, die der Oberflächendruck in den sich verschiebenden Querschnitten  $A_1$ ,  $A_2$  positiv bzw. negativ geleistet hat, erhalten wir unter Vernachlässigung der auch bei vorhandenen Höhenunterschieden stets geringfügigen Arbeit der Schwerkraft die Gleichung

$$G dt u_1 + A \frac{G}{g} \frac{w_1^2}{2} dt = A G E dt + G Q_e dt + G dt u_2 + A \frac{G}{g} \frac{w_2^2}{2} dt + A F_2 p_2 w_2 dt - A F_1 p_1 w_1 dt,$$

worin  $A = \frac{1}{424}$  das mechanische Wärmeäquivalent,  $g$  die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Beachtet man, daß

$$G = \frac{F_1 w_1}{v_1} = \frac{F_2 w_2}{v_2},$$

und ersetzt man  $F_1 w_1, F_2 w_2$  aus diesen Gleichungen, so folgt:

$$[u_1 + A p_1 v_1] - [u_2 + A p_2 v_2] = A E + Q_e + A \left[ \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right] \quad (1).$$

Der Dampf kann sich bei  $A_1$  und  $A_2$  in nassem, gesättigtem oder überhitztem Zustande befinden; in allen Fällen ist

$$\lambda = u + A p v$$

diejenige Wärme, welche 1 kg Wasser von 0° Temperatur zugeführt werden muß, um es bei konstantem Drucke  $p$  in Dampf vom Zustande  $p v$  zu verwandeln. Ist der Dampf gerade trocken gesättigt, so stimmt  $\lambda$  mit der gesamten Verdampfungswärme in der Bezeichnung von Zeuner überein, wenn wir, was bei allen Dampfturbinenproblemen zulässig ist, das spezifische Volumen des flüssigen Wassers neben dem des gesättigten Dampfes vernachlässigen.

Für nassem Dampf gilt, wenn wir mit  $\sigma$  das spezifische Volumen des gesättigten Dampfes bezeichnen,

$$\lambda = u + A p x \sigma = q + x \rho + A p x \sigma = q + x r, \quad \left. \begin{array}{l} \text{für überhitzten} \\ \lambda = q + r + c_p (T - T_s), \end{array} \right\} \quad (1 a)$$

worin  $T_s$  die absolute Temperatur des gesättigten Dampfes,  $T$  diejenige des überhitzten bedeutet. Die Größe  $\lambda$  bezeichnen wir hier der Kürze halber als Dampfwärme.

Die Grundgleichung lautet alsdann:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = A E + Q_e + A \left[ \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right] \quad . \quad (1 b),$$

oder in Worten:

Die Abnahme der »Dampfwärme« ist dem Betrage nach gleich dem Wärmewert der gewonnenen »Nutzarbeit«, zuzüglich der nach außen abgeleiteten Wärme, zuzüglich der Zunahme der kinetischen Energie pro kg Dampf<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Formel (1 b) ist dem Wesen nach altbekannt; die äußerst zweckmäßige Einführung der von Gibbs »Wärmefunktion für konstanten Druck« genannten Größe  $\lambda$  verdanken wir in der technischen Literatur Prof. Mollier, der sie »Erzeugungswärme« bezeichnet. Der Wunsch nach noch größerer Kürze führt mich dazu, die Bezeichnung »Dampfwärme« zu empfehlen.

Besteht der Vorgang in reiner Strömung ohne Wärmeableitung und ohne Abgabe von Nutzarbeit, so erhält man

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{1}{A} (\lambda_1 - \lambda_2) \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

oder in Worten: Die Zunahme der Strömungsenergie ist bei arbeitsloser adiabatischer Strömung gleich dem Arbeitswert der Abnahme der Dampfwärme pro kg Dampf.

Gl. (2) wird somit (angenähert) anwendbar sein für die Strömung in einer Düse und einem einzelnen Leitrad- oder Laufradkanal.

Die zweite grundlegende Beziehung ergibt sich, wenn wir die Energiegleichung auf die Dampfmenge in einem unendlich kleinen Volumen-Elemente des Dampfstromes anwenden, und zwar auf die Relativbewegung seiner Massenteile gegen den Schwerpunkt des Elementes. Wir müssen zu diesem Behufe die sogenannten Ergänzungskräfte der Relativbewegung (Fliehkraft usw.) an den Massenteilchen angreifend, den Schwerpunkt aber in Ruhe befindlich denken. Die innere Energie erfährt in einem Zeitelemente den Zuwachs  $dG \cdot du$ , die Arbeit der Oberflächenkräfte ist  $-dG p dv$  entsprechend der Ausdehnung des Elementes um  $dG \cdot dv$ . Die erwähnten Zusatzkräfte leisten die Arbeit null, da der Schwerpunkt in relativer Ruhe verharrt. Der Zuwachs der lebendigen Kraft (für die Bewegung relativ zum Schwerpunkt) ist unendlich klein höherer Ordnung und kann vernachlässigt werden. Die zugeführte Wärme besteht aus dem Betrag  $dQ$ , welcher der Umgebung entnommen, und dem Betrage  $dR$ , welcher durch die Umwandlung der Reibungsarbeit an der Wand, oder der inneren Wirbelungsarbeit in Wärme erzeugt wird. (Siehe die ungemein klare Darstellung bei Grashof, Theoret. Maschinenlehre, Bd. I S. 61). Benutzen wir den Energiesatz etwa in der Form: die zugeführte Wärme dient zur Vermehrung der inneren Energie und zur Ueberwindung der Oberflächenkräfte, so erhalten wir

$$dQ + dR = du + A p dv \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist sowohl  $dQ = 0$  wie  $dR = 0$ , so führt der Dampf eine reibungsfreie adiabatische Zustandsänderung aus. Ist aber nur  $dQ = 0$ , so wird wohl keine Wärme von außen zugeführt, die Zustandsänderung ist jedoch trotzdem nicht im früheren Sinne adiabatisch.

## 2. Die Reibungsarbeit und der Verlust an kinetischer Energie.

Betrachten wir eine adiabatische widerstandslose Strömung mit dem Anfangszustande  $p_1 v_1$  und dem Endzustande  $p_2 v_2'$ , Fig. 2. Die hierbei erreichte Endgeschwindigkeit sei

$w_2'$ , die Dampfwärme  $\lambda_2'$ ; diese Größen hängen durch die Formel

$$\frac{w_2'^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{1}{A} (\lambda_1 - \lambda_2')$$

zusammen.

Hiermit vergleichen wir eine vom gleichen Anfangszustand ausgehende, indessen mit Widerständen verbundene Bewegung, welche beim gleichen Enddruck  $p_2$  ein an-

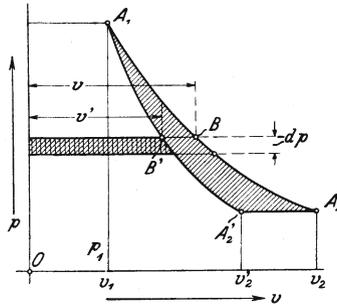


Fig. 2.

deres Volumen  $v_2$ , eine andere und zwar kleinere Geschwindigkeit  $w_2$ , eine andere Dampfwärme  $\lambda_2$  aufweist, und für die

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + \frac{1}{A} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

gilt.

Der Verlust an lebendiger Kraft  $\frac{Z}{A}$ , auf welchen es uns allein ankommt, ist

$$\frac{1}{A} Z = \frac{w_2'^2}{2g} - \frac{w_2^2}{2g} = \frac{1}{A} (\lambda_2 - \lambda_2')$$

oder

$$Z = \lambda_2 - \lambda_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

d. h. der Wärmewert des Energieverlustes ( $Z$ ) ist diejenige Wärmemenge, welche notwendig ist, um 1 kg Dampf aus dem Endzustand der reibungsfreien adiabatischen Expansion in den wirklichen Endzustand überzuführen.

Es kann nun Gl. (3) auch in der Form

$$dQ + dR = du + Adpv - Avdp = d\lambda - Avdp \quad (3a)$$

geschrieben werden. Ist  $dQ = 0$ ,  $dR = 0$ , d. h. die Bewegung widerstandslos, so gibt die Integration zwischen  $A_1$  und  $A_2$

$$0 = \lambda_2' - \lambda_1 - \int_1^{2'} Av' dp,$$

werin  $v'$  ein zu  $p$  gehörendes Volumen der Kurve  $A_1 A_2'$  ist. Wenn  $dQ = 0$  aber  $dR > 0$ , so wird

$$R = \lambda_2 - \lambda_1 - \int_1^2 A v dp,$$

worin sich  $v$  auf  $A_1 A_2$ , d. h. die tatsächliche Expansionslinie, bezieht. Durch Subtraktion folgt:

$$R = \lambda_2 - \lambda_2' - A \left[ \int_1^2 v dp - \int_1^{2'} v' dp \right]$$

oder

$$R = Z + \text{Wärmewert der Arbeitsfläche } A_1 A_2 A_2' \dots \quad (3b);$$

d. h.  $R$  und  $Z$  sind durchaus nicht identisch; vielmehr ist der effektive Verlust an kinetischer Energie gegenüber der reibungsfreien adiabatischen Expansion um den Inhalt der Arbeitsfläche  $A_1 A_2 A_2'$  geringer als der Betrag der Reibungs- (und Wirbelungs-) Arbeit. Diese wohl zu beachtende Erscheinung hat ihren Grund darin, dass die Reibungsarbeit stets unmittelbar in Wärme umgewandelt wird und hierdurch in den jeweilig folgenden Zeitelementen noch einen Beitrag zur Nutzarbeit liefern kann.

Aus Gl. (3a) in Verbindung mit Gl. (1) geht mit  $dQ = 0$ ,  $Q_s = 0$  noch die bekannte Beziehung

$$\lambda_1 - \lambda_2 = A \left( \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} \right) = -A \int_1^2 v dp - R \quad (3c)$$

hervor, von welcher ebenfalls Gebrauch gemacht werden soll.

### 3. Die Entropietafel.

Um die Rechnungen über die Zustandsänderung des Dampfes in der Turbine zu vereinfachen, ist auf Tafel (I) die Entropie des Dampfes als Funktion der absoluten Temperatur in bekannter Weise entworfen<sup>1)</sup>, und für das Ueberhitzungsgebiet zunächst mit dem konstanten Wert  $c_p = 0,48$  der spezifischen Wärme für unveränderlichen Druck gerechnet. Die Tafel ist vervollständigt durch die Linien  $v = \text{konst}$  und  $\lambda = \text{konst}$ , sodafs zu irgend einem durch  $p$  und  $x$  oder durch  $p$  und  $T$  gegebenen Zustand sogleich die Entropie, das Volumen und die Dampfwärme abgelesen werden können. Die Linien  $v = \text{konst}$  zeigen an der Grenzkurve eine Unterbrechung, indem die bisher maßgebenden Werte des  $v$  mit den Werten von Tumirz-Battelli, welche im Ueberhitzungs-

<sup>1)</sup> Für die sorgfältige Berechnung und zeichnerische Durchführung dieser Tafel bin ich Hrn. Ingenieur Roehrich, chem. Assistenten am Eidgen. Polytechnikum, zu besonderem Danke verpflichtet.



die »verfügbare« Dampfwärme  $\lambda_1 - \lambda_2' =$  Fläche  $B_2 B_1 C_1 A_1 A_2' C_2 B_2$ ,

der Verlust an kinetischer Energie (in Wärmemaß) für die wahre Zustandsänderung  $Z = \lambda_2 - \lambda_2' =$  senkrecht schraffierte Fläche  $A_2' A_2 A_2'' A_1''$ ,

die eigentliche Reibungsarbeit (in Wärmemaß)  $R =$  schräg schraffierte Fläche  $A_1 A_2 A_2'' A_1'' A_1$  ist.

Dasselbe gilt, wenn  $A$  mit  $D$  vertauscht wird, für eine Zustandsänderung im gesättigten Gebiete.

Mit dieser Darstellungsart möchte der Leser sich genau vertraut machen, da auf ihr die weiteren Entwicklungen beruhen.

Um die Geschwindigkeit in  $A_2$  zu berechnen, wird dem Diagramme entnommen, auf welcher Linie  $\lambda_2 = \text{konst.}$   $A_2$  liegt; die Differenz  $\lambda_1 - \lambda_2$  liefert den Zuwachs der kinetischen Energie, also z. B.  $\frac{1}{A} \frac{w_2^2}{2g}$  selbst, falls  $w_1 = 0$  war.

#### 4. Versuche über die Bewegung des Dampfes in Düsen.

Die Thermodynamik lehrt bekanntlich, daß beim Ausflusse von elastischen Flüssigkeiten durch eine einfache Mündung die Geschwindigkeit in der Mündungsebene die Schallgeschwindigkeit, welche dem Gaszustande in der Mündung entspricht, nicht übertreffen kann, und daß demzufolge der Druck in der Mündung nur auf etwas über die Hälfte des Anfangsdruckes sinkt<sup>1)</sup>. Da aber dann auch die Dampfwärme dortselbst noch bedeutend ist, wird nur ein Teil des verfügbaren »Gefälles« ausgenutzt, auch wenn vor der Mündung ein noch so gutes Vakuum hergestellt worden ist. Um den ganzen Druck in Geschwindigkeit umzusetzen, verwendet de Laval eine kegelförmig divergente Ansatzdüse, deren Theorie von Zeuner<sup>2)</sup> entwickelt und für gesättigten oder anfänglich wenig nassen Dampf durch seine Formeln festgelegt ist und hier als bekannt vorausgesetzt wird. Zeuners Theorie beruht auf der Annahme einer reibungslosen adiabatischen Strömung und voller Ausfüllung des Düsenquerschnittes durch den Dampfstrahl.

Die Form der Lavaldüse kann übrigens mithilfe der Entropietafel graphisch sehr leicht ermittelt werden<sup>3)</sup>. Man zieht zu diesem Zwecke durch den Anfangspunkt auf der Drucklinie  $p_1$  mit der Dampfwärme  $\lambda_1$  die vertikale Adia-

<sup>1)</sup> Zeuner, Techn. Thermodynamik 1900 S. 237. Emden, Ueber die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase, Wiedemanns Annalen Bd. 69 1899 S. 264.

<sup>2)</sup> Zeuner, Theorie der Turbinen 1899 S. 267 u. f.

<sup>3)</sup> Siehe den lesenswerten Aufsatz von Lorenz, Wärmeausnutzung der Heißluftturbine, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900 S. 252.

bate bis auf den im allgemeinen vorgeschriebenen Enddruck  $p_2$  herab und liest in einigen Zwischenpunkten die Größe der zusammengehörenden Drucke  $p_x$ , Volumen  $v_x$  und der Dampf Wärmen  $\lambda_x$  ab. Bei der zulässigen Vernachlässigung der Zuströmgeschwindigkeit  $w_1$  erhält man, wie oben, die Geschwindigkeit aus der Gleichung

$$A \frac{w_x^2}{2g} = \lambda_1 - \lambda_x,$$

welche in Fig. 4 als Funktion des von rechts nach links abgetragenen Druckes  $p_x$  dargestellt ist. Nun gibt  $\frac{1}{v_x} = \gamma_x$

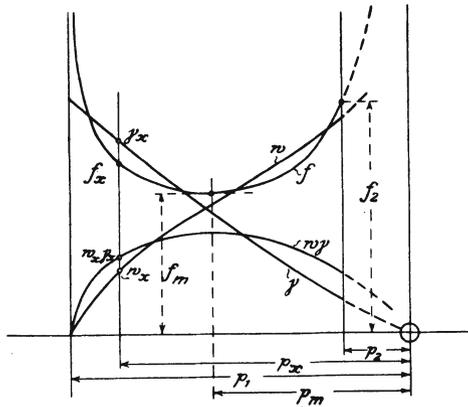


Fig. 4.

das spezifische Gewicht im gleichen Punkte, und aus der »Kontinuitätsgleichung«

$$G = f_x w_x \gamma_x$$

den zum Drucke  $p_x$  gehörenden Düsenquerschnitt

$$f_x = \frac{G}{w_x \gamma_x}.$$

Da für  $p = p_1$  die Geschwindigkeit  $w_1 = 0$ , für  $p = p_2$  das spezifische Gewicht sehr klein ist, besitzt das Produkt  $w_x \gamma_x$  ein Maximum, mithin der Querschnitt ein Minimum  $f_m$ , dessen Größe und Lage hiermit graphisch ermittelt sind. Der Anfangsquerschnitt ergibt sich mit  $w_1 = 0$  naturgemäß unendlich groß; das  $f_2$  am Düsenende bestimmt mit  $f_m$  das »Erweiterungsverhältnis«

$$\frac{f_2}{f_m}.$$

Den Einstromungshals von  $f_1$  bis  $f_m$  machen wir bei Turbinen möglichst kurz, von  $f_m$  bis  $f_2$  wird die Düse als gerader

Kegel gebildet mit einem erfahrungsmäßig zulässigen Kegelswinkel von rd.  $10^\circ$ .

Wären die Widerstände der Bewegung, mithin die wahre Zustandsänderung bekannt,

so würde statt der Adiabate die wahre Zustandskurve, nach Art der Linie  $A_1 A_2$  in Fig. 3, in die Entropietafel einzutragen und die Zwischenpunkte auf dieser zu wählen sein.

Um über diese Bewegungswiderstände einige Aufklärung zu verschaffen, unternahm ich eine Anzahl von Versuchen an kegelförmig erweiterten Düsen.

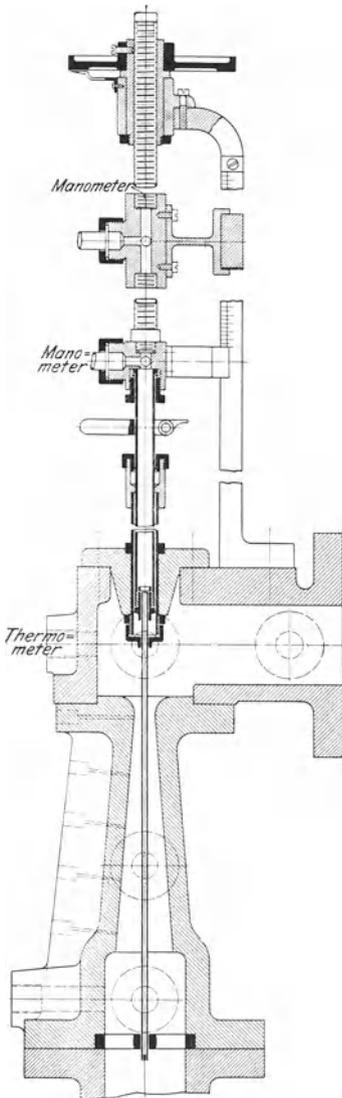


Fig. 5.

Die Versuchseinrichtung, Fig. 5, besteht aus der eigentlichen Düse mit einem zentrisch durchgeführten dünnen Messrohre, das an einem Ende verschlossen, am andern mit einem Mano- (bezw. Vakuum-)meter verbunden wird und in der Mitte eine 1 bis 1,5 mm weite Querbohrung besitzt. Durch eine Mikrometerschraube kann das Röhrchen hin- und hergeschoben und die Messöffnung an irgend eine Stelle der Düsenachse gebracht werden. Außerdem befinden sich zur Kegelfläche senkrechte Bohrungen in der Wand der Düse, welche ebenfalls mit Manometern verbunden werden.

#### Die Druckmessung

musste auf ihre Zuverlässigkeit geprüft werden, da ohne weiteres einleuchtet, daß es nicht genügt, eine Messöffnung tangential zum Dampfstrom zu stellen, vielmehr die Lage und die Beschaffenheit der Kanten eine störende Wirkung hervorrufen können. Es wurden u. a. zwei Messröhrchen von 5 mm Außendurchmesser angewendet, welche in einem mittleren dick-

wandigen Teile um  $45^\circ$  gegen die Achse geneigte rd. 1,2 mm weite Bohrungen besaßen, Fig. 6. Wie zu erwarten stand, erzeugte die dem Strome eine scharfe Kante zukehende Bohrung *a* einen Wirbel mit Stau, und sie gibt demzufolge eine höhere Druckanzeige als Bohrung *b*. Es kann wohl

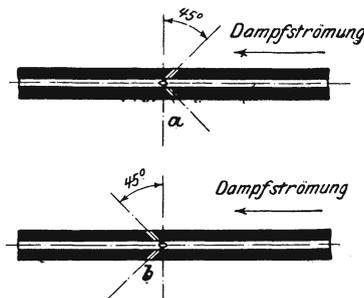


Fig. 6.

kaum angezweifelt werden, daß die Anzeige von *a* höher, die Anzeige von *b* tiefer ist als der wahre an der Mündung herrschende Druck; die dazwischen liegende Angabe des gewöhnlichen (dünnwandigen) Röhrchens mit normaler Anbohrung wird mithin vom wahren Drucke nicht wesentlich verschieden sein können. Der Unterschied des mit *a* bzw. *b* gemessenen Druckes betrug im Gebiete des Vakuums 5 bis 10 mm Quecksilbersäule und nahm bei etwa 2 bis 3 at abs. bis auf 0,15 kg/qcm zu, um bei höheren Drücken (und entsprechend kleineren Dampfgeschwindigkeiten) wieder abzunehmen. Ziemlich dasselbe ergaben am weiteren Ende der Düse in der Wandung angebrachte schräge Bohrungen. Diese Beträge bedeuten mithin die Genauigkeitsgrenze der unten mitzuteilenden Beobachtungen.

#### Die Bewegungswiderstände,

insbesondere der Verlust an Strömungsenergie bis zu einem beliebigen Querschnitt  $f_z$ , können rechnerisch ermittelt werden unter der Voraussetzung, daß die Pressungen und die Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten des Querschnittes hinlänglich wenig verschieden sind, um die Einführung von Mittelwerten zu rechtfertigen. Dies wird, was eine Pressung anbelangt, für den Fall ungehinderter Expansion an der von mir benutzten Düse durch den Versuch wahrscheinlich gemacht, indem der mit dem zentralen Röhrchen beobachtete Druck in der Düsenachse nur wenig von dem am Rande durch die äußeren Anbohrungen angezeigten abweicht.

Es seien nun

- $p_1, t_1, x_1$  Druck, Temperatur, spezif. Dampfmenge vor der Düse (beobachtet),  
 $p_x$  der beobachtete Druck im Querschnitt  $f_x$ ,  
 $G$  das durchströmende Dampfgewicht in kg/sk,  
 $\lambda_1$  die Dampfwärme vor der Düse,  
 $w_1$  » Geschwindigkeit vor der Düse.

Im Querschnitt  $f_x$  sei der Dampf naß, mit der unbekanntem spezif. Dampfmenge  $x$ :

$$\lambda_x = q + xr.$$

Die Energiegleichung liefert

$$A \frac{w_x^2}{2g} = A \frac{w_1^2}{2g} + \lambda_1 - (q + xr) \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Stetigkeit verlangt

$$G = \frac{f_x w_x}{v_x} \text{ oder annähernd } = \frac{f_x w_x}{x \sigma} \quad . \quad . \quad (6),$$

wo  $\sigma$  die Differenz des Volumens von 1 kg Dampf gegen 1 kg Wasser gleichen Zustandes bedeutet. Man setzt  $x$  aus Gl. (6) in Gl. (5) ein und erhält:

$$A \frac{w_x^2}{2g} = A \frac{w_1^2}{2g} + (\lambda_1 - q) - \frac{f_x r}{G \sigma} w_x \quad . \quad . \quad (7),$$

woraus  $w_x$  zu berechnen ist.  $w_1$  ist hierbei durch den Anfangszustand und  $G$  bestimmt; das Glied  $\frac{w_1^2}{2g}$  bildete indes bei den Versuchen nur eine unbedeutende Berichtigung.

Aus Gl. (6) findet man

$$x = \frac{f_x w_x}{G \sigma}$$

und schließlich

$$\lambda_x = q + xr.$$

Nun wird auf bekannte Weise die spezif. Dampfmenge  $x'$  bei adiabatischer Expansion vom Anfangszustand auf den Druck  $p_x$  berechnet oder von der Entropietafel entnommen und liefert

$$\lambda_{x'} = q + x'r.$$

Der Energieverlust beträgt somit nach Gl. (4)

$$Z = \lambda_x - \lambda_{x'} = (x - x')r.$$

Zur Veranschaulichung stellen wir in Fig. 7 den Verlauf dar, welchen der Druck in der untersuchten Düse einmal bei adiabatischer, das anderemal bei einer Zustandsänderung mit 10 vH und 20 vH Energieverlust aufweisen müßte. Die Hauptmaße der Düse sind in Fig. 8 eingetragen; die Düse war im engen Ende etwas unregelmäßig, deshalb für Messungen bei höheren Drücken weniger geeignet. Die Beobach-

tungen<sup>1)</sup> sind aus diesem Grunde nur für den erweiterten Teil eingetragen und entsprechen den Anfangswerten  $p_1 = 10,48$  kg/qcm,  $t_1 = 198^\circ\text{C}$ , d. h. einer leichten Ueberhitzung, um Zweifel über die Dampfmasse auszuschließen. Das Meßröhrchen hatte hierbei 5 mm Dmr. und wurde in seiner äußeren Führung, welche mit dem Eintrittsdampf in Verbindung steht, durch Aufgießen von kaltem Wasser gekühlt. Immerhin mag es sich einmal mehr, einmal weniger ausgedehnt haben, so daß hierin eine weitere Fehlerquelle zu erblicken ist.

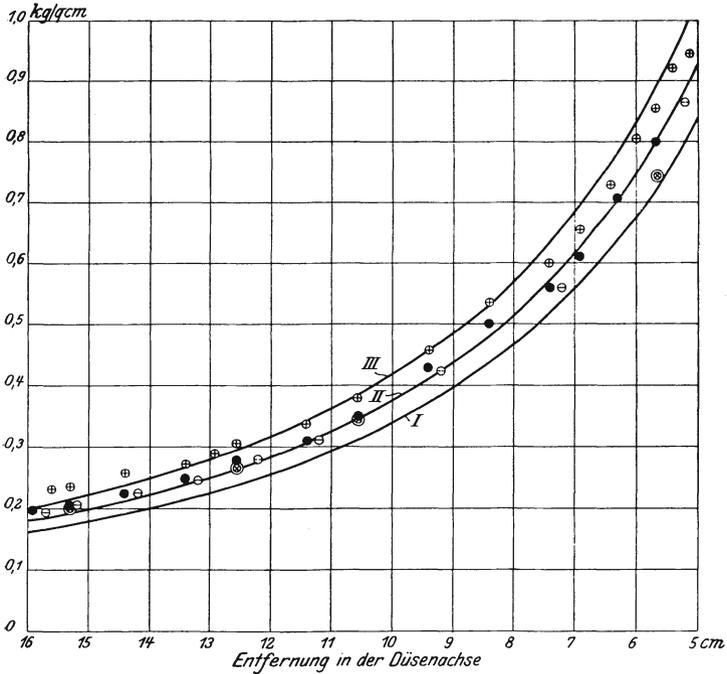


Fig. 7. Druckabfall in der Düse.

- ⊕ Bohrung am Meßröhrchen schräg gegen den Strom gerichtet (Druckanzeige zu groß)
- Bohrung am Meßröhrchen senkrecht
- ⊞ Bohrung am Meßröhrchen schräg in Richtung des Stromes (Druckanzeige zu klein)
- ⊙ Druck am Rande des Strahles (Bohrung senkrecht)
- Schaulinie I: adiabatische widerstandsfreie Strömung
- > II: Strömung mit 10 vH Energieverlust
- > III: > > 20 vH >

<sup>1)</sup> Bei diesen und den folgenden Versuchen wurde ich in sehr dankenswerter Weise unterstützt von den Herren Ing. Keller, Konstrukteur, und Ing. Merenda, ehem. Assistent am Eidgen. Polytechnikum.

Ein Zwischendurchmesser der Düse kann durch die Formel

$$d = 12,19 + \frac{L}{6,485} \text{ mm}$$

dargestellt werden, wenn  $L$  den Abstand eines Querschnittes von dem vorderen Stirnende der Düse (in mm) bedeutet, und zwar zwischen den Grenzen  $L = 60$  bis  $160$ . Für kleinere  $L$  war die Meridianlinie nicht genau geradlinig.

Das sekundlich durchströmende Dampfgewicht betrug  $G = 0,153$  kg. Die engste Stelle der Düse hatte einen Durchmesser von  $12,5$  mm. Hiermit ergibt sich nach der Zeuner'schen Formel für gesättigten Dampf

$$G = 199 f \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = 0,151 \text{ kg/sk.}$$

Die leichte Ueberhitzung bewirkt mithin eine Vergrößerung des konstanten Faktors, indessen bloß um rd.  $1,5$  vH, während Lewicki für hochgradige Ueberhitzung  $6$  vH gefunden hat.

Um den Druckverlauf bei widerstandsloser adiabatischer Strömung darzustellen, berechnet man zu irgend einem Drucke  $p_x$  die spezifische Dampfmenge  $x$  der adiabatischen Expansion, die Dampfwärme

$$\lambda_x' = q + x r,$$

und erhält mit der anfänglichen Dampfwärme  $\lambda_1$  die Geschwindigkeit  $w$  aus der Formel

$$A \frac{w^2}{2g} = \lambda_1 - \lambda_x'$$

unter Vernachlässigung der sehr kleinen anfänglichen Dampfgeschwindigkeit. Das spezifische Volumen  $v$  ist angenähert  $x \sigma$ , und die »Kontinuitätsgleichung«  $Gv = fw$  gibt den Querschnitt  $f$ , aus welchem der zugehörige Abstand in der Düsenachse (mit Berücksichtigung des Meßröhrchenquerschnittes) ermittelt werden kann.

In gleicher Weise wird gerechnet, um den Druckverlauf darzustellen, wenn durchweg z. B.  $\zeta$  Bruchteile als Energieverlust angenommen worden sind. Die spezifische Dampfmenge erfährt für den Zwischendruck  $p_x$  eine Vergrößerung

$$\Delta x = \frac{\zeta (\lambda_1 - \lambda_x')}{r},$$

sodafs

$$x_\zeta = x + \Delta x,$$

und die Geschwindigkeit wird aus Formel

$$A \frac{(w)^2}{2g} = (1 - \zeta) (\lambda_1 - \lambda_x')$$

ermittelt. So ergeben sich für die benutzte Düse folgende Werte<sup>1)</sup>:

I. Widerstandslose adiabatische Strömung.

Druck . . . . .	$p_x =$	2	1,5	1	0,7	kg/qcm
spez. Dampfmenge . . . . .	$x =$	0,9172	0,9025	0,8828	0,8668	
Geschwindigkeit . . . . .	$w =$	764,2	823,0	894,5	950,2	m
Entfernung in der Düsenachse	$L =$	19,8	28,2	42,7	58,2	mm
Druck . . . . .	$p_x =$	0,5	0,3	0,2	0,1	kg/qcm
spez. Dampfmenge . . . . .	$x =$	0,8532	0,8320	0,8175	0,7935	
Geschwindigkeit . . . . .	$w =$	997,2	1070	1111	1184	m
Entfernung in der Düsenachse	$L =$	75,9	107,6	140,0	209,0	mm

II. Strömung mit 10 vH Energieverlust.

Druck . . . . .	$p_x =$	1	0,7	0,5	0,3	0,2	kg/qcm
spez. Dampfmenge	$x =$	0,9007	0,8868	0,8750	0,8664	0,8438	
Geschwindigkeit . . . . .	$w =$	848,8	901,5	946,2	1010	1054	m
Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	46,6	63,2	81,7	115,6	149,0	mm

III. Strömung mit 20 vH Energieverlust.

Druck . . . . .	$p_x =$	1	0,7	0,5	0,3	0,2	kg/qcm
spez. Dampfmenge	$x =$	0,9186	0,9068	0,8968	0,8808	0,8701	
Geschwindigkeit . . . . .	$w =$	800,3	850,0	892,2	953,2	994,2	m
Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	51,5	68,8	88,3	113,9	159,4	mm

Die Beobachtung hat demgegenüber in dem hier inbetracht kommenden Teile der Düse folgende Werte des Druckes ergeben:

A) Meßröhrchen mit schräger gegen den Strom gerichteter Anbohrung.

Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	51	54	57	60	64	69	mm
Druck . . . . .	$p_x =$	0,945	0,922	0,857	0,804	0,728	0,654	kg/qcm
Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	74	84	94	106	114	125,5	mm
Druck . . . . .	$p_x =$	0,599	0,536	0,462	0,355	0,337	0,306	kg/qcm
Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	129	134	144	153	156	164	mm
Druck . . . . .	$p_x =$	0,289	0,272	0,257	0,235	0,231	0,222	kg/qcm

B) Normales Meßröhrchen mit senkrechter Anbohrung.

Entfernung in der Düsenachse . . . . .	$L =$	56,7	63	74	84	94	105,5	mm
Druck . . . . .	$p_x =$	0,797	0,708	0,558	0,501	0,428	0,348	kg/qcm

<sup>1)</sup> Für diese und die weiteren Rechnungen ist ein vierstelliger Rechenschieber benutzt worden, da es bei der Unsicherheit der Dampftabellen wertlos wäre, eine größere Genauigkeit anzuwenden.



für Element summieren und anstelle von  $\frac{dl}{2r}$ , da es sich um einen Ringquerschnitt handelt, den Wert  $dl \frac{U}{4F}$  setzen, wo  $U$  die Summe der Umfänge der Düse und des Mefsrohres,  $F$  den Inhalt des Ringquerschnittes bedeutet. Eine graphische Integration liefert uns für  $\zeta$  bei 29,7 WE als Gesamtverlust und mit 5 und 160 mm als Grenzen für  $l$  den Wert

$$\zeta = 0,039.$$

Die Düse mit dem inneren Mefsrohr wäre mit einem einfachen zylindrischen Rohre von etwa 17 mm Bohrung hinsichtlich der Reibung gleichwertig, für welches sich nach Darcy, bezogen auf die wirkliche Reibungsarbeit, z. B. ein Reibungskoeffizient  $\zeta_r$  von 0,049 ergeben würde. Auch für die Düse wäre, bezogen auf die wirkliche Reibungsarbeit,  $\zeta_r$  im Verhältnisse der Gröfsen  $R$  und  $Z$  gröfser als  $\zeta$ . Der obige Vergleich zeigt nun, dafs es berechtigt ist, die Bewegungswiderstände der erweiterten Düse als einfache Rohrreibung anzusehen. So lange eine freie Expansion möglich ist, liegt hiernach kein zwingender Grund vor, besondere (auf Stöfsen, Wirbeln usw. beruhende) Widerstände vorzusetzen. Die Widerstände der vorliegenden Versuche sind überdies höchst wahrscheinlich etwas zu grofs ausgefallen, indem das Vakuum in dem benutzten Strahlkondensator nur etwa 0,43 kg/qcm erreichte; nahe hinter der Düse stieg der Druck von den erreichten 0,2 at auf 0,4, und der hierdurch bewirkte Stau dürfte den Druck im Düsenende teilweise doch beeinflusst haben<sup>1)</sup>.

#### Die Pressung am Strahlrande

erweist sich als nahezu gleich grofs wie die gleichartig gemessene Pressung in der Strahlmitte. Hierdurch wird auch die hin und wieder vertretene Anschauung

<sup>1)</sup> Im übrigen ist es klar, dafs das Rechnen mit einem gleichförmigen mittleren Zustande in einem Querschnitte nur eine erste Näherung darstellt. Beobachtet man den austretenden Strahl im Freien, so ist deutlich eine hellere Aufsenschicht und ein milchig getrübert Kern wahrnehmbar, zum Zeichen, dafs am Rande die Wandreibung eine teilweise Ueberhitzung bewirkt hat, während in der ungestörten Strahlmitte die adiabatische Expansion mit stärkerem Flüssigkeitsniederschlag vor sich geht. Andererseits ist die Möglichkeit offen zu halten, dafs bei der geringen Zeit, welche für die Expansion des Dampfes verfügbar ist, die der Druckabnahme entsprechende Kondensation nicht vollständig eingetreten ist, d. h. dafs der Dampf nicht die rechnungsmäfsige latente Energie voll abgab. Für den Ausflufs heifsen Wassers ist diese Erscheinung in Form des »Siedeverzuges« durch Prof. Knoblauch in München experimentell nachgewiesen worden. Bei Dampf dürfte die Abweichung indes blofs minimal sein, da sonst die Ausflufsmenge nicht mit dem theoretischen Werte so nahe übereinstimmen könnte.

widerlegt, als könnte sich der Strahl in einer Düse mit der hier benutzten Konizität von der Wand ablösen, um als isolierter Strahl, natürlich mit ungeheuern Verlusten, die umgebende ruhende Dampfschicht zu durchdringen. Die Pressung am Rande scheint durchweg um ein geringes niedriger zu sein als die in der Strahlmitte und würde hiermit auf den an sich wahrscheinlichen Ueberdruck in der Achse hinweisen. Doch sind die Unterschiede mit Ausnahme des Punktes  $L = 56,7$  mm zu klein, um diese Frage mit Sicherheit zu entscheiden.

Vorläufige Versuche, den »Reaktions«-Druck eines Strahles durch Wägung im Vakuum mithilfe der in Fig. 24 und 25 abgebildeten Vorrichtung zu bestimmen, haben der Größenordnung nach den Betrag dieses Widerstandes bestätigt und sollen mit Düsen verschiedener Weite fortgesetzt werden.

Delaporte hat gemäß einer Mitteilung in *Revue de Mécanique*, Mai 1902, bei einer Düse von 6 auf 9 mm Dmr. durch Wägung des Strahldruckes in freier Luft einen Verlust von blofs 5,2 vH erhalten. Abgesehen davon, dafs die Düse von Delaporte nach einer a. a. O. abgebildeten Skizze nur etwa 50 mm lang war, erscheint das Ergebnis fraglich, da sich in jenen Versuchen der Einflufs mitgerissener Luft zugunsten des ausgeübten Druckes geltend machen konnte. Immerhin sei erwähnt, dafs mir auch von der Gesellschaft de Laval in Stockholm mitgeteilt worden ist, dafs sie Versuche mit Düsen angestellt und hierbei ebenfalls nur geringe Verluste habe nachweisen können.

#### Künstlich erhöhter Gegendruck.

Durch teilweises Schliessen eines zwischen Düse und Kondensator angebrachten Ventiles konnte man hinter der Düse einen beliebig hohen Gegendruck erzeugen. Der Verlauf der sich hierbei ergebenden Druckkurven ist in Fig. 9 dargestellt. Man bemerkt, dafs der Druck zunächst der Linie der freien Expansion folgt, um dann je nach der Höhe des Gegendruckes mehr oder weniger sprunghaft zuzunehmen. Stellenweise, wie z. B. bei Kurve *E*, beträgt die Druckzunahme  $1\frac{1}{2}$  at auf eine Rohrlänge von 3 mm. Ich erblicke in dieser ungemein heftigen Drucksteigerung eine Verwirklichung des von Riemann<sup>1)</sup> auf theoretischem Wege abgeleiteten »Verdichtungsstofses«, indem die mit grosser Geschwindigkeit begabten Dampftheile gegen eine ungenügend rasch ausweichende Dampfmasse stofsen und hierbei auf höheren Druck verdichtet werden.

Derartige Verdichtungsstöße werden stets auftauchen, wenn die Düse eine gröfsere Länge, d. h. eine stärkere

<sup>1)</sup> Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 1901, S. 469 u. f.

Querschnittserweiterung besitzt, als dem Anfangs- und dem Enddruck entspricht.

Besonders auffallend sind die bei niedrigen Pressungen hinter dem Sprunge auftretenden wellenförmigen Druckschwankungen, welche als beginnende, aber durch Reibung alsbald aufgezehrte (und auch durch die Konizität der Düse

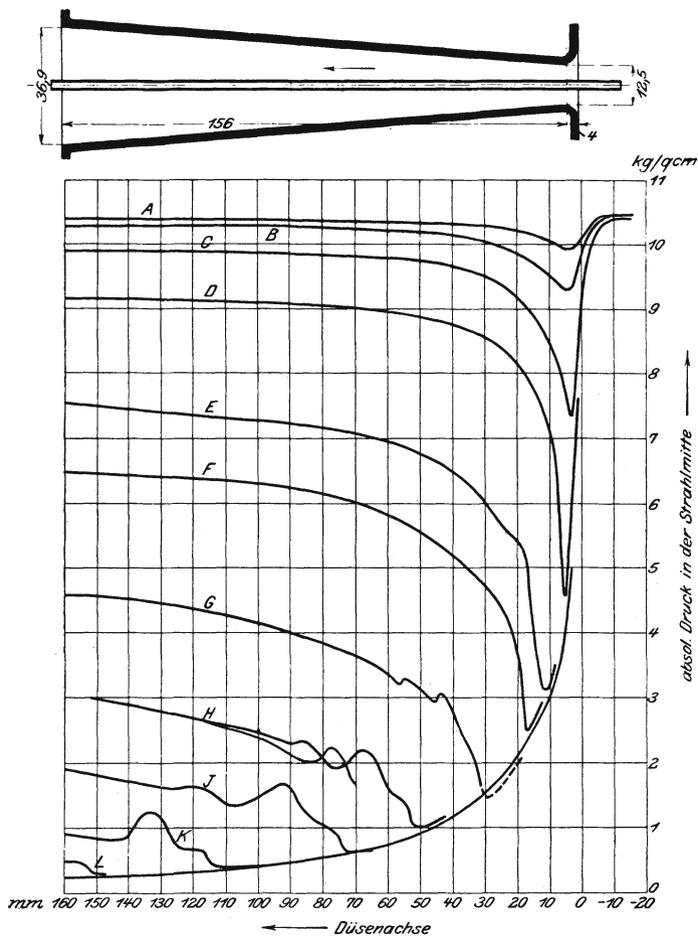


Fig. 8 und 9.

an ihrer Ausbreitung gehinderte) Schallerschwingungen anzusehen sind und weiter unten näher besprochen werden. Der Ort des Sprunges ändert sich leicht, wenn der Anfangszustand (z. B. die Temperatur) vor der Düse die geringste Aenderung erfährt; mit ihm verschieben sich auch die Schallwellen, wie

an Kurve *H* angedeutet ist. Da es bei diesen Kurven mehr auf die Art der Vorgänge ankam, wurde von der genauen Erhaltung der Anfangstemperaturen Abstand genommen und Schwankungen in den Grenzen von 194 bis 200°C zugelassen. Auch sind in Fig. 9 Beobachtungen mit Meßröhrchen von 3 und von 5 mm Dmr. zusammengetragen, weshalb nicht alle Kurven sich an die durchgehende Expansionslinie vollkommen anschließen.

Zur Theorie des Dampfstoßes.

Es sei *C* die im Raume still stehende Stoffebene, Fig. 10, von rechts ströme der Dampf mit einer Geschwindigkeit  $w_1$ ; dem Druck  $p_1$  und dem spezifischen Gewicht  $\gamma_1$  gegen sie, links seien die entsprechenden Größen  $w_2, p_2, \gamma_2$ . Wir setzen das Rohr zylindrisch voraus und grenzen um *C* herum das unendlich kleine Element  $A_1 B_1$  ab. Die Riemannsche Theorie wird auf diesen einfachen Fall wie folgt angewendet: Im Zeitelement  $dt$  verschieben sich die Querschnitte  $A_1 B_1$  nach  $A_2 B_2$ ; der Zuwachs der Bewegungsgröße ist nach dem Satze vom »Antrieb«

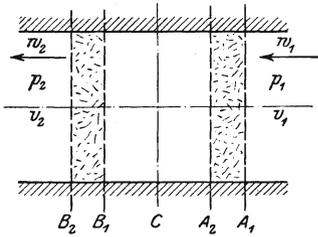


Fig. 10.

$$\left(f w_2 dt \frac{\gamma_2}{g}\right) w_2 - \left(f w_1 dt \frac{\gamma_1}{g}\right) w_1 = f(p_1 - p_2) dt$$

oder

$$w_2^2 \gamma_2 - w_1^2 \gamma_1 = g(p_1 - p_2) \quad \dots \quad (9);$$

hierzu tritt die Gleichung der Stetigkeit für den Beharrungszustand

$$w_1 \gamma_1 = w_2 \gamma_2 \quad \dots \quad (10),$$

und die Auflösung ergibt

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \cdot \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) g} \\ w_2 &= \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) g} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11).$$

Hiernach könnte es scheinen, als ob  $p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2$  beliebig gewählt werden dürften und das Vorkommen des Stoßes nur an das Einhalten der Geschwindigkeiten  $w_1, w_2$  gebunden wäre.

Lord Rayleigh hat nun die Möglichkeit eines derartigen Verdichtungsstoßes in Abrede gestellt<sup>1)</sup> aufgrund folgender Ueberlegung. Er schreibt

<sup>1)</sup> Theory of sound, 1896 II S. 32.

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \dots \dots \dots (12),$$

oder mit Gl. (10)

$$w_1^2 \left( \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} - 1 \right) = w_1^2 \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) = - 2g \int_{p_1}^{p_2} v dp.$$

Betrachten wir hier  $w_1, p_1$  als gegeben,  $p_2, v_2$  als veränderlich und bezeichnen sie mit  $p, v$ , so ergibt eine Differentiation der vorstehenden Gleichung

$$\frac{w_1^2}{v_1^2} dv = - g dp$$

und hieraus

$$p = \text{konst.} - \frac{w_1^2}{g v_1^2} v \dots \dots \dots (13)$$

als dasjenige Gesetz, welches gemäß Rayleigh zwischen  $p$  und  $v$  bestehen müßte, wenn ein Verdichtungsstofs mit der Erhaltung der Energie im Einklang stehen sollte. Da dieses Gesetz den Tatsachen nicht entspricht, folgert Rayleigh, daß auch ein Stofs nicht in der Wirklichkeit vorkommen könne.

Rayleigh hat hier übersehen, daß die Ausgangsgleichung (12) nur für Vorgänge ohne innere Stofsverluste gültig ist; da aber der Dampfstofs selbstverständlich bedeutende innere Verluste an kinetischer Energie bedingt, muß die Gleichung

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp - R \dots \dots \dots (14)$$

oder einfacher

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \lambda_1 - \lambda_2 \dots \dots \dots (15)$$

benutzt werden. Die Gleichungen (9), (10) und (15) bestimmen dann drei Veränderliche. Es ist z. B. bei gewähltem Anfangszustand mit  $p_1, x_1, w_1$  der Endzustand vollständig (durch  $p_2, x_2, w_2$ , aus welchen sich  $\lambda_2$  und  $R$  ergeben) bestimmt. Dieser Punkt ist auch bei H. Weber<sup>1)</sup> im unklaren gelassen, und es könnte aufgrund seiner Ausführung die Meinung bestehen bleiben, daß bei allen Werten von  $p_1, \gamma_1, w_1$ , welche den Gleichungen (9) und (10) genügen, ein Verdichtungsstofs möglich ist und dem Gesetz der Energie nicht widerspricht. In Wahrheit ist bei gegebenem Anfangszustand vor dem Stofs der Zustand nach dem Stofs vollkommen bestimmt und der Verlust an kinetischer Energie ebenfalls ein ganz bestimmter.

Zum Zwecke zahlenmäßiger Rechnung würde man z. B.  $p_2$  probeweise annehmen, aus Gl. (10) und (15)  $x_2$  eliminieren,

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 489 und 497.

$w_2$  berechnen und in Gl. (9) einsetzen, mit Wiederholung, bis letztere Kontrolle stimmt.

Der Anblick der Figur 9 lehrt auch, daß die Rückverwandlung der im Dampfe aufgehäuften Strömungsenergie in Druck auch da, wo kein eigentlicher Stofs, sondern ein allmählicher Uebergang stattfindet, mit bedeutenden Verlusten verbunden ist. Wenn wir nämlich zwei Punkte bei gleichem Drucke auf dem ab- und dem aufsteigenden Linienzweige vergleichen, so findet sich die kinetische Energie an ersterem Orte bedeutend kleiner als an letzterem.

Kleine Druckunterschiede vor und hinter der Düse führen auf eine interessante Erscheinung, die von der älteren Theorie nicht vorhergesehen worden ist. Es zeigt sich nämlich, daß der Druck an der engsten Stelle der Düse schon beim geringsten Druckabfall hinter der Düse tief sinkt und sich keineswegs auf die Höhe des Gegendruckes einstellt<sup>1)</sup>. Die Düse übt gewissermaßen eine intensive Saugwirkung aus, und die durchströmenden Dampfmenge nehmen ungemein rasch zu, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Druck vor der Düse . . .	$p_1 = 10,45$	10,48	10,45	10,40 kg/qcm
» hinter der Düse . . .	$p_2 = 10,40$	10,36	10,30	9,90 »
Druckunterschied . . .	$p_1 - p_2 = 0,05$	0,12	0,15	0,50 »
Druck an der engsten Stelle sekundlich durchströmendes Dampfgewicht . . . .	$p_2 = 9,89$	9,74	9,17	7,32 »
	$G = 0,073$	0,109	0,113	0,152 kg

Es ist ersichtlich, daß mithilfe der Druckbeobachtung an der engsten Stelle ein dem Venturi-Wassermesser ähnlicher Dampfmesser von großer Empfindlichkeit und Einfachheit konstruiert werden könnte.

Nach Zeuners Formel müßte, solange die durchströmende Dampfmenge in allen Querschnitten gleich groß ist, der Druck an der engsten Stelle scheinbar stets den besonderen Wert  $p_m = 0,57 p_1$  (für gesättigten Dampf) erreichen. Daß dem nicht so ist, wird wie folgt erklärt. Wenn durch eine Düse einmal  $G$ , das andere mal  $G'$  kg Dampf im Beharrungszustande durchströmt, so gelten für widerstandslose Bewegung die Beziehungen

$$G = f q(p)$$

$$G' = f' q(p),$$

worin  $q(p)$  den Zeunerschen Ausdruck

$$q(p) = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[ \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (16),$$

<sup>1)</sup> Dieselbe Beobachtung ist auch von A. Fliegner schon gemacht worden (s. Schweiz. Bauzeitung Bd. XXXI Nr. 10 bis 12).

welcher einen größten Wert bei

$$p_m = p_1 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

erreicht,  $f$  und  $f'$  die zu  $p$  gehörenden veränderlichen Querschnitte bedeuten. Ist nun  $G'$  kleiner als  $G$ , so wird bei gleichem  $p$  auch  $f'$  kleiner als  $f$  sein müssen; die Strömung entspricht dann einer engeren, in Fig. 11 punktiert angedeuteten

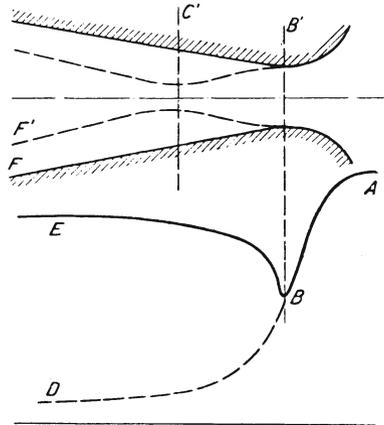


Fig. 11.

Düse, welche nur den Einströmungsteil mit der wahren Düse gemein hat. Bei  $B'$  tritt aber, bevor  $p_m$  erreicht worden ist, eine Erweiterung ein, welche die Geschwindigkeit verlangsamt und bedeutende Widerstände einführt. Von diesem Zeitpunkt an gilt die Beziehung (16) nicht mehr, und hiermit ist der nicht uninteressante scheinbare Widerspruch behoben.

### 5. Der Einfluss einer Querschnittserweiterung

ist an der Dampfströmung durch zwei mit ihren weiten Enden zusammengelegten Düsen untersucht worden. In Fig. 12 stellt Schaulinie  $A$  den Druckverlauf für den Fall dar, daß die Mündung der zweiten Düse gleiche Weite habe wie der engste Querschnitt auf der Einströmseite. Der Druck sinkt beim Eintritt in die engste Stelle von 10,5 auf etwa 6,5 kg/qcm abs., um in der konischen Erweiterung auf rd. 8 kg/qcm zu steigen. Erst in der zweiten Düse sinkt er wieder und fällt gegen die Mündung zu und darüber hinaus rasch bis auf den Vakuumdruck herab. Es wurde nun die zweite Düse durch eine schlankere Reibahle auf einen Mündungsdurchmesser  $d_2$  von 10,8 mm ausgerieben, während das weite Ende unverändert einen Durchmesser von  $d_3 = 12,1$  mm und die

Einströmung  $d_1 = 10,3$  mm beibehält. Die Wirkung dieser Maßnahme ist durch die Schaulinie *B* dargestellt. In gleicher Weise entsprechen die Schaulinien *C* und *D* einer Erweiterung der Mündung auf 11,4 bzw. 12,0 mm. Schließlich wurde die zweite Düse vollkommen zylindrisch auf 12,1 mm Weite ausgebohrt und ergab die Schaulinie *E*, in welcher der

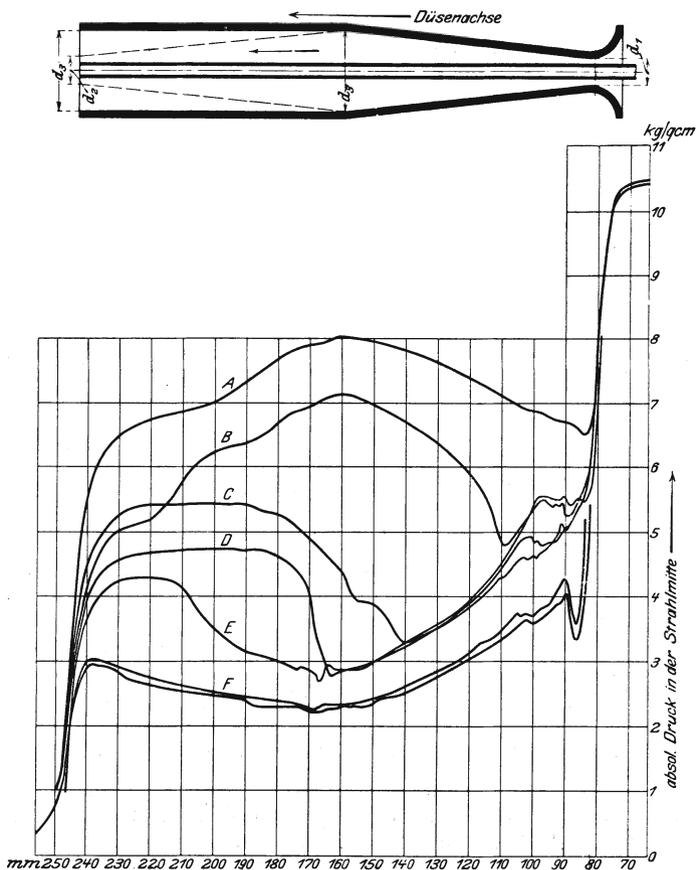


Fig. 12 und 13.

Druckverlauf bei allmählicher Erweiterung und Wiederverengung des Querschnittes.

Druck beim Eintritt in die engste Stelle auf rd. 5,5 kg/qcm, von da bis an das Ende der Kegeldüse weiter auf rd. 3 kg/qcm sinkt. Im zylindrischen Rohr ergibt sich nun das scheinbar durchaus widersinnige Verhalten, daß der Druck nicht sinkt, sondern um mehr als eine Atmosphäre

steigt; erst etwa 10 mm vor dem Rohrende macht sich das Vakuum geltend und zieht den Druck wieder herab.

Linie  $F$  erhielt man, nachdem die Abrundung an der Einmündungsstelle bei  $d_1$  abgedreht war, sodafs ein scharfkantiger Absatz entstand, welcher eine Strahlkontraktion, auf die wir weiter unten noch zurückkommen, beim Eintritte herbeiführen mußte. Der Erfolg ist eine tief herabreichende Zacke im Druckverlauf und eine Verminderung der durchströmenden Dampfmenge (wegen Verkleinerung des engsten Querschnittes), welche den Druck im ganzen tiefer hielt. Das Ansteigen des Druckes im zylindrischen Rohr ist auch hier vorhanden<sup>1)</sup>.

### 6. Isentropische Linien.

Ein Einblick in das Gesetz der experimentell ermittelten Erscheinungen wird erleichtert durch Verzeichnen der sogenannten isentropischen Linien folgender Art<sup>2)</sup>. Setzen wir voraus, der Dampf expandiere adiabatisch reibungsfrei, d. h. bei konstanter Entropie vom Anfangszustande  $A_1$  auf den Enddruck bei  $A_2$  gemäß Fig. 14, in welcher die Koordinaten Entropie und absolute Temperatur sind. Durch das früher angegebene Verfahren ermitteln wir, wie in Fig. 5, für

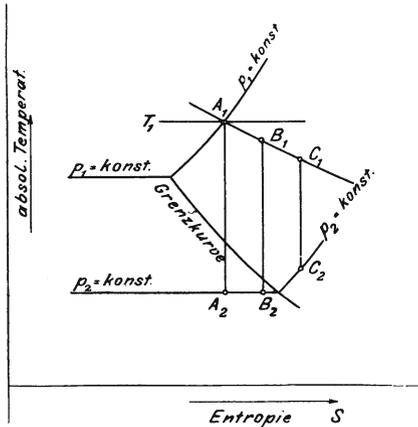


Fig. 14.

<sup>1)</sup> Die Unregelmäßigkeiten im Anfange der Schaulinien  $B$  bis  $E$  sind durch leichte Porosität des Gusses an der betreffenden Stelle, d. h. durch Beeinflussung des Reibungskoeffizienten verursacht.

<sup>2)</sup> Die Anregung zum Entwerfe der Isentropen verdanke ich Hrn. Prof. Prandtl-Hannover; dieselben eignen sich in der Tat besser zur Kontrolle der wahren Zustandsänderung, wie die in Fig. 7 benutzten Linien konstanten Verlustes an kinetischer Energie, weil sie sowohl für die Verdichtung wie für die Expansion in der Düse Geltung haben.

die Ausgangsgeschwindigkeit  $w_1 = 0$  die Querschnitte  $f_x$ , die z. B. pro 1 kg Dampf bei dem jeweiligen Druck  $p_x$  erforderlich sind.

Nun denke man den Dampf vor dem Eintritt in die Düse auf einen kleineren Druck bis auf den Zustand  $B_1$ , Fig. 14, abgedrosselt. Der Wärmeinhalt ändert sich nicht, d. h.  $B_1$  liegt auf der Kurve  $\lambda_1 = \text{konst}$ , die durch  $A_1$  hindurchgeht, aber die Entropie hat zugenommen. Expandiert der Dampf von hier aus adiabatisch nach  $B_2$ , so läßt sich in gleicher Weise eine neue Querschnittsfolge als Funktion von  $p$  ermitteln, ebenso die weiteren zu  $C_1, D_1$  usw. gehörenden Kurven. Statt 1 kg Dampf wählen wir nun die tatsächlich durch unsere Düse pro sk durchgeströmte Dampfmenge als Bezugseinheit, statt des Querschnittes aber den von ihm eindeutig abhängigen Abstand des betreffenden Querschnittes von einem festen Punkt in der Düsenachse gemessen. Auf diese Weise erhält man die mit I, II, III, . . . bezeichneten Kurven der Fig. 14 a, welche mithin zu jedem Punkte der

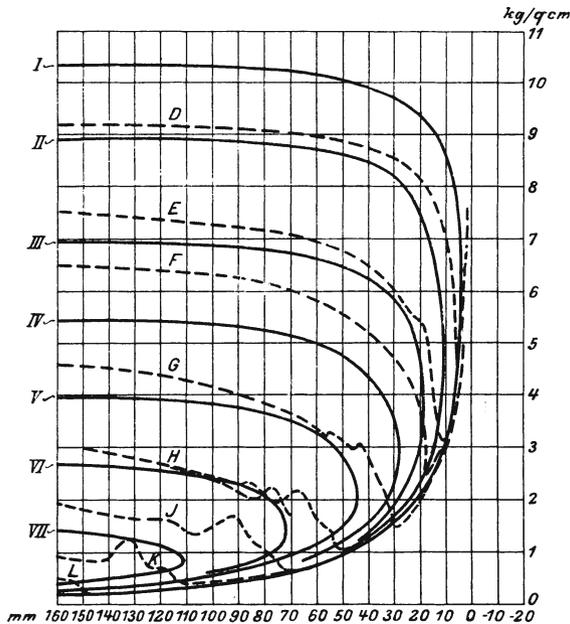


Fig. 14 a.

Düsenachse zwei mögliche Pressungen ergeben. Eine reibungsfreie Strömung wäre umkehrbar, d. h. der Dampf könnte die Düse sowohl expandierend als auch sich verdichtend durchströmen. Die oberen Zweige der Isentropen entsprechen

dichtem Dampf und kleinen Geschwindigkeiten, die unteren einem Zustande starker Expansion und großer Geschwindigkeit. Die wahre Strömung aber findet stets unter Vermehrung der Entropie statt (siehe Anhang) und so muß die wahre Zustandskurve, ob sie ab- oder aufsteigt, die Adiabaten in der Reihenfolge I, II, III, . . . schneiden. In dieser Figur sind auch die Kurven der Fig. 8 gestrichelt eingetragen, und es zeigt sich z. B. bei Kurve *D* eine schöne Uebereinstimmung mit der Adiabate während der Druckzunahme in der konischen Erweiterung. Bei allen Kurven konstatieren wir, daß während der Periode des eigentlichen Dampfstoßes mehrere Isentropen überschreiten, als Beweis des großen Stromverlustes, der hier stattfindet. Im weiteren Verlauf zeigen Linien *F*, *G* und *H* ein zu starkes Ansteigen, was auf die Variation der Dampfüberhitzung während eines Versuches zurückzuführen ist, da es uns, wie oben erwähnt, mehr um das Qualitative zu tun war. Aus allen Kurven geht deutlich hervor, daß der Hauptteil des Widerstandes auf die Periode des Dampfstoßes entfällt, und bei eingetretener ruhigerer Strömung die Rückumwandlung an Geschwindigkeit in Druck viel geringere Verluste bedingt. Die Analogie mit dem Bidoneschen Wassersprung ist in die Augen springend.

**7. Rechnerische Behandlung.**

Auf eine allgemeine Integration der Bewegungsgleichungen muß man begreiflicher Weise von vornherein verzichten, und es bleibt nichts übrig, als sich auf die Betrachtung eines Elementarvorganges zu beschränken.

Wenden wir die »Gleichung der lebendigen Kraft«, d. h. Gl. (3c) auf ein unendlich kurzes Teilstück der Düse an, so erhalten wir

$$\frac{w \, dw}{g} = -v \, dp - \frac{dR}{A} \dots \dots (17).$$

Die elementare Reibungsarbeit wollen wir wie bei hydraulischen Widerständen durch den Ansatz

$$\frac{dR}{A} = \zeta_r \frac{dz}{2r} \frac{w^2}{2g} \dots \dots (17a)$$

wiedergeben, wobei  $\zeta_r$  den konstanten Widerstandskoeffizienten,  $r$  den Radius,  $dz$  die elementare Achsenlänge der Düse bedeutet. Hinzu tritt die ebenfalls auf ein Element bezogene Gl. (2).

$$\frac{w \, dw}{g} = -d\lambda \dots \dots (18)$$

und die »Kontinuitätsgleichung«

$$Gv = fw. \dots \dots (19)$$

Aus diesen Gleichungen könnte durch Eliminierung von  $dw$  und  $dv$  der Wert der Differentialquotienten  $dp:dz$  durch die augenblicklichen Werte der übrigen Veränderlichen bestimmt werden und so wenigstens Aufschluss über das Fallen oder Steigen einer Drucklinie geben. Führt man die Rechnung aus, so erweist sich der Ausdruck indessen wenig übersichtlich. Es liegt nun nahe, eine Vereinfachung durch eine Näherungsannahme über die Zustandänderung zu suchen. Dies gelingt durch die Voraussetzung des Gesetzes

$$pv^k = \text{konst} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

oder auch  $(p + \alpha)v^k = \text{konst} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$

von welchen man sicher ist, daß sie sich für kleine Intervalle der Zustandskurve anpassen lassen. Gl. (20) enthält zwei Konstanten, man kann mithin einen Punkt und die Tangente dortselbst mit der wahren Zustandskurve zusammenfallen lassen. In Gl. (20a) verfügen wir über drei Konstanten, es kann also ein Punkt, die Tangente und der Krümmungsradius gleich gemacht werden. Beide Näherungen gelten indes nicht an Unstetigkeitsstellen, z. B. Spitzen. Hierdurch wird Gl. (18) überflüssig, und man kann Gl. (19) und (19a) differenzieren,  $dv$  und  $dw$  eliminieren, wobei sich zeigt, daß man zweckmäßigerweise die dem Zustande  $p, v$  entsprechende Schallgeschwindigkeit des Dampfes

$$w_s = \sqrt{gkp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

in die Formeln einführen kann. Es ergibt sich für die Druckänderung in Richtung der Düsenachse

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\left[ \frac{\zeta_r}{2r} - \frac{2}{f} \frac{df}{dz} \right] w^2}{[w^2 - w_s^2]} kp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Für die kreisrunde Düse ohne inneres Messrohr nimmt beispielsweise mit  $r$  als Halbmesser der Zähler den Wert

$$\left[ \frac{\zeta_r}{2r} - \frac{4}{r} \frac{dr}{dz} \right]$$

an, oder wir haben, wenn  $q = 2 \frac{dr}{dz}$  der Kegelwinkel der Düse ist

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\left( \frac{\zeta_r}{2r} - 4q \right) w^2 kp}{[w^2 - w_s^2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Mit Formel (20a) wäre bloß anstelle von  $p$  zu setzen  $(p + \alpha)$ .

Der Druck steigt oder sinkt im Sinne der Strömung, je nachdem das Vorzeichen von  $dp:dz$  positiv oder negativ ausfällt. Da nun die tatsächliche Geschwindigkeit  $w$  anfänglich nahezu null ist, später  $w_s$  erreicht oder übertrifft, so haben wir einen anfänglich negativen Nenner. Bei abgerundeter

Einmündung ist  $dr:dz$ , d. h. der »Kegelwinkel«  $q$ , anfänglich negativ, mithin der Zähler wesentlich positiv. Für den Anfang ist also  $dp:dz$  negativ, der Druck sinkt. Der weitere Verlauf hängt davon ab, ob und wie bald es zu einem Zeichenwechsel kommt. Für die Schaulinie  $A$  tritt er im Zähler zuerst auf, da die kegelförmige Erweiterung  $q$  positiv und den Zähler negativ macht. Die abermalige Verengung in der zweiten Düse bedeutet wieder negatives  $q$  und positiven Zähler: der Druck nimmt wieder ab.

Ein ganz eigenartiges Spiel der Werte des Reibungskoeffizienten, des Kegelwinkels, der wahren und der Schallgeschwindigkeit bedingt mithin das Auf- und Absteigen des Druckes. Der Fall, daß  $w$  allmählich wachsend  $w_c$  erreicht und übertrifft, ist besonders interessant, weil da  $dp:dz$  durch den Wert  $\infty$  vom Negativen zum Positiven übergeht, mithin eine Spitze mit senkrechten Tangenten zu erwarten sein wird, falls nicht gleichwertig im Zähler ein Zeichenwechsel vor sich geht. Doch ist zu beachten, daß, wie früher gezeigt, die Umwandlung der Geschwindigkeit in Druck mit großen Verlusten verbunden ist, und an der Umkehrstelle auch  $\zeta_r$  sowie  $\lambda$  stark schwankt, sodaß für diese kritischen Punkte unsere Gleichung nicht mehr volle Gültigkeit besitzt.

Was insbesondere das zylindrische Rohr anbelangt, so ist  $q = 0$ , und das Vorzeichen hängt nur vom Nenner ab. Man kann mithin den Satz aussprechen: Im zylindrischen Rohr wird der Druck im Sinne der Strömung (unabhängig vom Betrage des Gegendruckes) wachsen oder abnehmen, je nachdem die tatsächliche Dampfgeschwindigkeit größer oder kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Es liegt auf der Hand, daß eine Integration der Bewegungsgleichungen, falls sie allgemein möglich wäre, und falls das Gesetz der Widerstände genau bekannt wäre, dasselbe Bild des Druckverlaufes geben müßte. Praktisch brauchbare Ergebnisse erhält man jedoch lediglich für das zylindrische Rohr unter der Voraussetzung, daß  $\zeta_r$  konstant ist. Diesen Fall hat bereits Grashof. Theoret. Maschinenlehre Bd. I S. 658, ebenfalls unter Annahme des Gesetzes

$$pv^k = C$$

gelöst. Die nicht schwierige Rechnung ergibt in unserer Bezeichnung vereinfacht die Formel

$$\ln \xi - \alpha^2 (\xi - 1) = \beta z \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

worin

$$\xi = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}; \quad \alpha = \frac{w_{s0}}{w_0}; \quad \beta = \frac{\zeta_r (k+1)}{4r};$$

zu setzen ist, und  $p_0, w_0$  Druck und Geschwindigkeit für die Einmündung ( $z = 0$ ),  $w_{s0}$  aber die Schallgeschwindigkeit für den an der Einmündung herrschenden Zustand bedeutet. Hätte Grashof eine Diskussion

Für Luft ist die Einführung einer Näherungsgleichung überflüssig, wie Lorenz in einem bemerkenswerten Artikel der *Physikalischen Zeitschr.*, IV. Jahrg. S. 333, mitgeteilt hat. Während Gl. (17) und (17a) unverändert bleiben, müssen wir in Gl. (18) anstelle der Dampfwärme  $\lambda$  wie, man leicht ein- sieht, die Größe  $c_p T + \text{konst}$  einführen und erhalten

$$\frac{w dw}{g} = -c_p dT = -\frac{k}{k-1} d(pv) \quad \dots (18a),$$

worin  $k = c_p : c_v$  ist. Führt man die Schallgeschwindigkeit, die widerstandsloser adiabatischer Zustandsänderung ent- spricht, d. h. die Größe

$$w_k = \sqrt{kgpv} \quad \dots \dots (21a)$$

ein, so ergeben die Gleichungen (17), (17a), (18a), (19) mit der Abkürzung

$$\zeta = \frac{\zeta_r}{4r}; \quad \alpha = \frac{w^2}{w_k^2}(k-1) + 1 \quad \dots (21b)$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\alpha \zeta - \frac{f d}{d f z}}{w^2 - w_k^2} k p w^2 \quad \dots \dots (22a)$$

Lorenz bestätigt an der genauen Formel (22a) zunächst unseren Satz, dafs. wenn die Schallgeschwindigkeit erreicht wird, im allgemeinen  $dp : dz = \infty$  werden, d. h. die Druck- linie eine vertikale Tangente besitzen mufs. Von seinen weiteren, sehr interessanten Schlußfolgerungen seien hier folgende angegeben:

Die Geschwindigkeit kann ein Maximum ganz allgemein nur bei sinkendem Drucke annehmen; dieses Maximum ist nur innerhalb eines Rohres mit zunehmendem Querschnitt möglich.

Im Diagramm des Druckes als Funktion des Querschnittes berühren die Druckkurven in den Punkten größter Geschwindigkeit eine gleichsei- tige Hyperbel. Betreffs der übrigen Ausführungen von Lorenz mufs auf die Originalarbeit verwiesen werden.

### 8. Die Düse mit verlängertem Einströmhals,

Fig. 15, durch Zusammenlegen zweier kongruenter Düsen ge- bildet, sollte dazu dienen, die Vorgänge, die an der engsten Stelle stattfinden, und welche sich bei gewöhnlichen Düsen

seiner Gleichung unternommen, so würde er ohne weiteres die so un- glaublich vorkommende Drucksteigerung für den Fall  $\alpha > 1$  bemerkt haben. Wegen der wahrscheinlichen Veränderlichkeit von  $\zeta_r$  (da bei der Verdichtung auch innere Verluste auftreten) wird indes im letzteren Fall Gl. (24) den ganzen Druckverlauf nicht richtig darstellen, wie in der Tat auch aus dem Vergleiche der beobachteten Schaulinien her- vorgeht.

auf einer Länge von wenigen Millimetern abspielen, gleichsam durch Vergrößerung des Horizontalmaßstabes zu klarerem Ausdruck zu bringen. Schaulinie *A*, Fig. 16, zeigt den Druckverlauf bei freier Expansion, Linie *B* bei auf 4 at abs. eingestelltem Gegendruck. Der Verdichtungsstofs ist im letzteren Falle knapp vor der Mündung aufgetreten und zeigt einen höchst ausgeprägten Druckanstieg. Linien *C*, *D*, *E*, *F* sind mit mehr

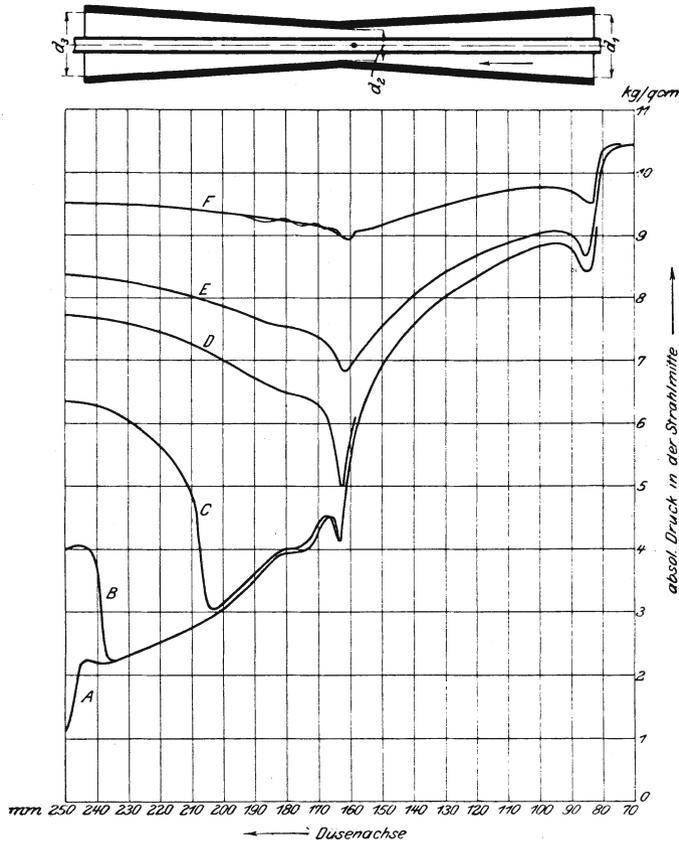


Fig. 15 und 16.

und mehr erhöhtem Gegendruck aufgenommen. Das Eigentümlichste dieser Versuche liegt in den Zacken, welche die Schaulinien beim Uebergange aus dem verengten in den erweiterten Kegel aufweisen. Anfänglich war die vordere Düse an der engen Stelle um rd. 0,1 mm weiter als die andere, so daß sich ein wenn auch kaum merklicher Absatz bildete. Aber auch nachdem man die Düsen mit einer gemeinschaft-

lichen Reibahle auf genau gleichen Durchmesser gebracht hatte, verschwand die Zacke nicht. Nur das Polieren mittels Schmirgels, und zwar vor allem in der Strömungsrichtung, brachte die mittleren Zacken schliesslich für gewisse Ueberhitzungsgrade weg, während sie für andere noch immer auftraten. Diese Erscheinung erklärt sich durch den je nach der Dampfart und der Wandungsglätte an verschiedenen Stellen der Düse eintretenden Zeichenwechsel des Zählers und des Nenners in Gl. (23). Wenn die Drucklinie glatt verläuft, findet der Wechsel in einem und demselben Querschnitt des Rohres statt; in allen andern sind die Orte für Zähler und Nenner getrennt. Eine weitere Komplikation tritt dadurch auf, dass die Dampfströme in der Mitte sich wohl anders verhalten als die am Rande, welche der grössten Reibung ausgesetzt sind.

### 9. Die Strahlkontraktion

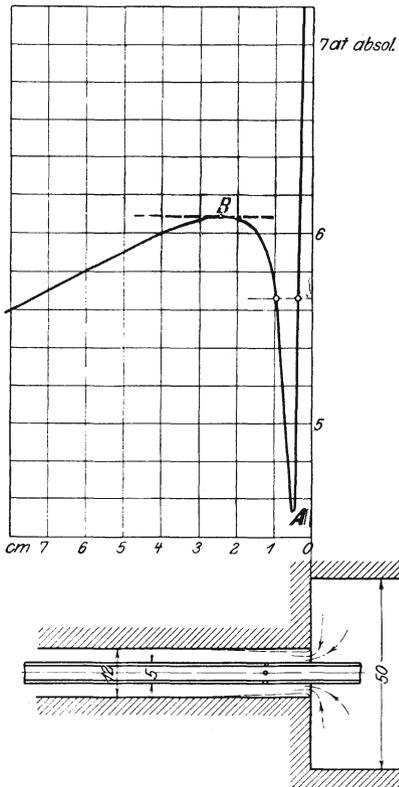


Fig. 17 und 17 a.

bei der Einmündung tritt stets bei scharfkantigem Rohransatz auf und kommt bereits bei den Schaulinien *F* in Fig. 13 zum Vorschein. Ebenso ist sie an den Drucklinien *A* bis *E* in Fig. 15 gut wahrnehmbar, ganz besonders in die Augen springend aber schliesslich bei einem geraden zylindrischen Rohr von 12 mm Weite mit 5 mm weitem Messrohr und scharfen Kanten, welches in die Versuchseinrichtung, Fig. 5, anstelle der Düse eingefügt wurde. In Fig. 17 a ist der mutmaßliche Umriss des Strahles mit darüber liegender beobachteter Druckkurve — Fig. 17 — aufgezeichnet. Es ist wahrscheinlich, dass im betreffenden Gebiet die Schallgeschwindigkeit noch nicht erreicht worden ist, mithin der Nenner unserer Formel (23) negativ bleibt. Der Zähler hingegen hat zweifellos zwei Zeichenwechsel; er geht bei *A*,

Additional material from *Die Dampfturbinen und die Aussichten der  
Wärme­kraft­ma­schin­en*

ISBN 978-3-662-36140-5 (978-3-662-36140-5\_OSFO1),  
is available at <http://extras.springer.com>



Fig. 17 aus dem Positiven ins Negative und bei *B* wieder ins Positive über. Sowohl *A* wie *B* entsprechen mithin Nullstellen des Zählers, d. h. wagerechten Tangenten; es tritt aber bei *A* der Druckwechsel plötzlich auf, da die Geschwindigkeit immerhin der Schallgeschwindigkeit nahe gekommen sein mag, mithin der Nenner einen kleinen Wert aufweist.

Die Formel  $dp : dz$  eignet sich auch zur Berechnung des Reibungskoeffizienten  $\zeta$ , aus der Neigung der Tangente an die Druckkurve. Indessen ist in jedem Falle die experimentelle Bestimmung von  $G$ , um daraus  $w$  zu berechnen unerlässlich, und wenn  $w$  bekannt ist, so berechnet sich, der Energieverlust unmittelbar, ohne daß man auf  $dp : dz$  zurückzukommen braucht.

### 10. Versuche über den Dampfausfluß aus Mündungen.

Die Mündungen hatten rd. 12 mm Bohrung und wurden in das Meßgerät, Fig. 18, so eingebaut, daß anstelle der Düse zunächst ein 50 mm weites Zufuhrrohr, dann die »Mündung« in Form einer 20 mm langen Bohrung in einer Bronzeplatte und schließlich ein 70 mm weites Abfuhrrohr aufeinander folgten, während der Anschluß zum Kondensator wieder durch Rohre von 50 mm Weite gebildet wurde. Das Meßröhrchen hatte 5 mm Dicke und war mit zur Oberfläche senkrechten Bohrungen von 1,5 mm Weite versehen.

In Fig. 19 ist der Druckverlauf bei Anwendung einer abgerundeten Mündung, wie Fig. 18, dargestellt. Beim Ausfluß in Vakuum von rd. 0,4 kg/qcm abs. Druck ist dem Anschein nach ein aperiodischer Zustand vorhanden; höchst wahrscheinlich gestattete indessen bloß die ungenügende Länge der Röhrchen nicht, die Wiederkehr der Druckschwankung zu beobachten. Denn schon die unmittelbar folgende Schaulinie *B* mit rd. 1,3 at Gegendruck zeigt deutlich die regelmäßige Zu- und Abnahme des Druckes. Die Linien *C* und *D* weisen eigentümlicherweise (trotz unveränderten Zustandes der Strömung) eine nur schwach ausgeprägte Periodizität auf. Ungemein heftig und vollkommen regelmäßig sind hingegen »gedämpfte« Schwingungen bei *E* ausgebildet, um bei *F* abzunehmen und bei *G* gänzlich aufzuhören.

Ganz ähnliche Druckkurven erhält man bei der in Fig. 20 abgebildeten konischen Mündung mit beiderseits scharfen Rändern. Der Eintritt verursacht eine kleine in Fig. 21 nicht mehr zur Darstellung kommende Einbuchtung; beim Austritt ist der Druckabfall noch gleichmäßiger als bei der abgerundeten Mündung. Auch hier ist die Periodizität bei Kurve *A* fraglich, bei *F* hingegen zweifellos nicht mehr vorhanden.

Eine wesentliche Abweichung hingegen kommt bei der beiderseits scharfkantigen zylindrischen Mündung, Fig. 22, wegen der beim Eintritte unvermeidlichen Strahlkon-

traktion zustande. Wie aus Fig. 23 erhellt, findet zunächst eine Expansion in eine bis auf rd. 3,3 kg/qcm herabreichende Spitze statt. Hierauf schnellert der Druck auf 4,4 kg/qcm hinauf, um nach einigen kleinen Schwankungen gegen das Vakuum abzufallen. Die Kontraktion hat zur Folge, daß die Mündung in ihrem Eintrittsteil wie eine kegelig divergente Düse wirkt und den Mündungsdruck gegenüber den früheren Versuchen herabzieht. Der Druckverlauf hinter der Mündung ist wieder derselbe und zeigt insbesondere bei Kurve *D* prachttvoll ausgeprägte Schwingungen. Bei Kurve *G* mit auf rd. 5,2 kg/qcm gesteigertem Gegendruck kommt knapp vor der Ausmündung ein sehr deutlicher Verdichtungsstofs zustande. Bei *H* haben wir nur noch die tiefe Druckfurchen der Strahlkontraktion.

Die Versuche bringen die erwünschte Klarheit in die so vielfach besprochenen Ausströmungserscheinungen. Bekanntlich haben Mach<sup>1)</sup> und Emden<sup>2)</sup> auf photographischem Wege das Vorhandensein von regelmäfsig aufeinander folgenden hellen und dunklen Linien im Ausflufsstrahle nachgewiesen, welche folgerichtig nicht anders denn als Schallwellen gedeutet werden konnten; allein über die Höhe des herrschenden Druckes war man vollkommen im unklaren. Emden nimmt an, daß an den Verdichtungsstellen derselbe Zustand herrsche wie in der Mündung (a. a. O. S. 440). Indessen sagt er S. 436 im Widerspruche mit sich selbst, daß im Strahle an jeder Stelle der Druck der Umgebung herrsche, und will lediglich eine Dichtenänderung zulassen. Auf diese Weise müßten z. B. für Luft Stellen kleinster Geschwindigkeit, d. h. kleinster kinetischer Energie, zusammenfallen mit Stellen kleinster Temperatur, d. h. kleinster potentieller Energie, was offenbar unmöglich ist. Durch seine Rechnungen glaubt er ferner den Nachweis erbracht zu haben, daß nur der Unterschied zwischen Anfangs- und Mündungsdruck zur Erzeugung von fortschreitender Geschwindigkeit verwendet wird; der Restbetrag der verfügbaren Arbeitsfähigkeit soll in »Schallenergie« umgesetzt werden. Unsere Versuche machen diese Anschauungsweise gegenstandslos; es geht aus ihnen hervor, daß der Dampf zunächst unter den vor der Mündung herrschenden Druck expandiert, daß mithin im ersten Anlaufe (wie etwa bei einer plötzlich frei werdenden gespannten Feder) zu viel potentielle Energie in lebendige Kraft umgesetzt wird. Nur dieses Zuviel geht in Schallschwingungen über und wird durch die Reibung und Wirbelung am Strahlrande in Wärme rückverwandelt.

<sup>1)</sup> E. Mach und P. Salcher, Wiedemanns Annalen 1890 Bd. 41 S. 144.

<sup>2)</sup> R. Emden, Wiedemanns Annalen 1899 Bd. 69 S. 264.

### 11. Ausströmung aus einer konisch erweiterten Düse ins Freie.

Der aus einer erweiterten Düse austretende Strahl weist genau dieselben Erscheinungen auf, wie bei der einfachen Mündung. In Fig. 24 ist der Druckverlauf für den aus einer Düse von ungefähr 7 auf 12 mm Weite tretenden Strahl dargestellt. Der Druck im Endquerschnitte der Düse erreichte etwa 1,05 kg/qcm absolut. Der Strahl trat in den weiten Hohlraum der unten besprochenen Versuchsbombe aus, in welchem der Druck variiert werden konnte. Wurde Vakuum hergestellt, so expandiert der Dampf gemäß Kurve A, bei

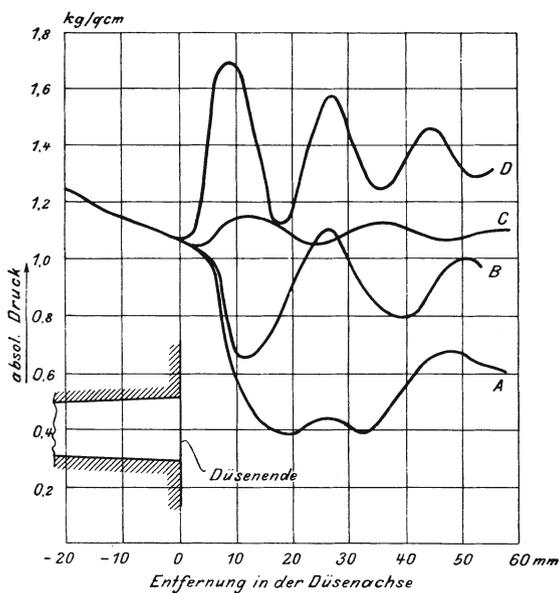


Fig. 24.

geringerem Unterdrucke gemäß B. Der allerkleinste Ueberdruck wie bei C lief schon kleine Schwankungen auftreten, bei etwas größerem Ueberdruck erschienen die sehr ausgeprägten Schallschwingungen gemäß Schau-Linie D. In Fig. 24a ist eine zweite Versuchsreihe dargestellt, bei welcher der Dampf in der Düse auf etwa 0,7 kg/qcm absolut expandierte. Die Ausmündung in höheres Vakuum ergab die sehr regelmäßige Schallschwingung nach Kurve A. Bei B gelang es, den Gegendruck so einzustellen, daß jede Spur einer Schwingung verschwand. Sowie man den Gegendruck steigerte, traten die Schwingungen wieder auf, wie Schau-

linie *C* lehrt. Linie *D* entspricht schließlich einem so hohen Gegendruck, daß sich die Stauung in das Innere der Düse erstreckt, und die Schwingung wohl zufolge dieses Umstandes bedeutend geringere Intensität aufweist, wie im ersten Versuch. Der Verlauf der regelmäßigen Expansionslinie im Innern der Düse wird durch den Gegendruck nicht beeinflusst, und es treten dortselbst keine Schwingungen auf.

Aus diesen Versuchen ist die Folgerung zu ziehen, daß der Dampf in der Düse zunächst unabhängig vom Gegendruck nahezu adiabatisch expandiert. Strömt der Strahl in einen Raum aus, in welchem ein Gegendruck herrscht, der dem Enddrucke der Expansion genau gleich ist, so ändert sich die Pressung im

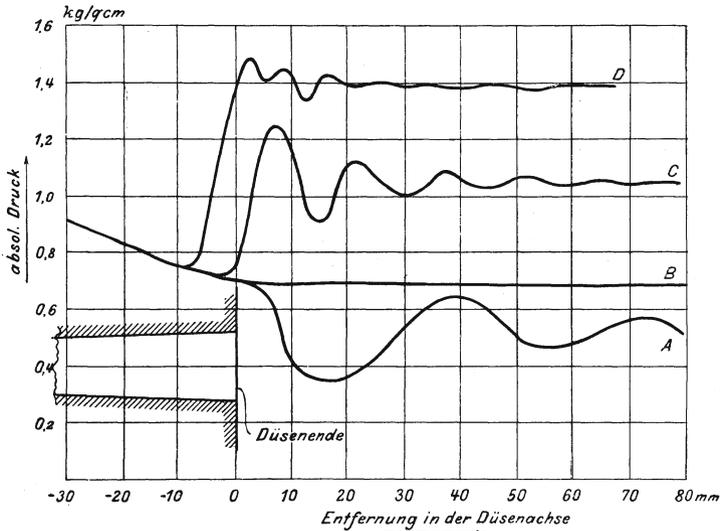


Fig. 24 a.

Strahl durchaus nicht. Ist der Gegendruck niedriger, so entstehen Schallschwingungen, wie bei der einfachen Mündung; ist der Gegendruck zu hoch, so entsteht ein Dampfstoß mit mehr oder weniger stark ausgeprägten Schwingungen. Bei vollständig ausgefülltem Querschnitt ist indessen eine Schwingung in der sich erweiternden Düse erschwert, wenn nicht unmöglich. Man geht eben kaum fehl, wenn man die ausgeprägte Schwingung bei der einfachen Mündung in erster Linie der plötzlich auftretenden Druckdifferenz am Strahlrande gegen die Umgebung zuschreibt, welche den Strahl zu einer raschen Verbreiterung veranlaßt. Es wird mithin die Annahme wahrscheinlich, daß, wenn trotzdem im Innern der

Düse Schwingungen auftreten, der Strahl sich an solchen Stellen von der Wandung ablöst. Die Abwesenheit jeder Druckschwankung in der beobachteten regelmäßigen Expansionslinie ist umgekehrt ein weiterer Beweis dafür, daß der Strahl den Querschnitt vollständig ausfüllt<sup>1)</sup>.

## 12. Versuche mit Turbinenschaufeln.

Obwohl bekannt ist, daß der Widerstand bewegter Laufschaufeln wegen des stets wechselnden Einflusses der Kanalverengung durch die Stege der Leitschaufeln erheblich verschieden sein kann von dem, den man in der Ruhelage erhält, dürften doch Versuche mit ruhenden Schaufeln im gegenwärtigen mangelhaften Zustande unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete manch wünschbaren Aufschluß bringen. Um derartige Versuche durchführen zu können, wurde die in Fig. 25 und 25 a dargestellte Vorrichtung entworfen und benutzt. Sie besteht aus einem geschlossenen Hohlgefäß, in welchem zur Aufnahme der Laufschaufeln ein in cardanischer Aufhängung festgemachter Rahmen untergebracht ist. Die Reibung, welche die tragenden Körnerspitzen verursachen, hat sich, wie vorausgesehen, unschädlich erwiesen, da die Dampfströmung stets mit soviel Erschütterung verbunden ist, daß die an sich geringfügige Reibung keine Klemmungen hervorruft. Der Zweck der zwei zueinander senkrechten Drehachsen ist die gleichzeitige Ermittlung der Umfangskomponente und des Achsialdruckes der Dampfreaktion.

<sup>1)</sup> Das Vorhandensein von Schwingungen beim Austritte des Dampfes aus Düsen haben auch schon Oberingenieur Kienast, Prof. Gutermuth und P. Emden beobachtet. Ueber die Versuche des letzteren wurde von A. Fliegner in der Schweiz. Bauzeitung 1903, Bd. XLI S. 173, berichtet. Die von Emden benutzte Düse hatte eine Weite von 5,5 auf 11 mm bei etwa 30 mm Länge, sie war mithin für einen Anfangsüberdruck von bis zu 5 kg/qcm und atmosphärischen Gegenruck viel zu stark erweitert, und dieser Umstand, unterstützt durch den scharfen Ansatz beim Eintritt, läßt es nach Obigem begreiflich erscheinen, daß der Strahl sich von der Düsenwand ablöste. Eine Uebertragung der sich hieraus ergebenden ungünstigen Folgerungen auf richtig bemessene Düsen ist, wie unsere Versuche beweisen, unstatthaft. Gegenüber dem Nachdruck, mit welchem von mancher Seite an der Anschauung festgehalten wird, daß bei der Laval-Turbine der Dampf keine höhere als die Schallgeschwindigkeit, d. h. rd. nur etwa 450 m erlangen könne, sei darauf hingewiesen, daß diese Turbine dann nimmermehr einen Dampfverbrauch von bloß 7 kg pro PS<sub>e</sub>-st aufweisen könnte. Die »theoretische« Geschwindigkeit ist höher wie 1000 m; bleibt nur soviel Energie übrig als der lebendigen Kraft bei 450 m Geschwindigkeit entspricht, und wird der Rest durch die Schallerschwingung in Wärme umgewandelt, so könnte auch eine Idealturbine noch nicht 25 vH der verfügbaren Energie in Arbeit umwandeln, während in Wahrheit mehr als 50 vH geliefert werden. Die Tatsachen widerlegen also diese hartnäckig verfochtene Ansicht aufs Bestimmteste.

Zu diesem Behufe greifen am Rahmen eine senkrechte und eine wagerechte Federwage an, welche durch Gewichte geeicht werden und an Mikrometerschrauben die Spannung geeicht werden und an Mikrometerschrauben die Spannung

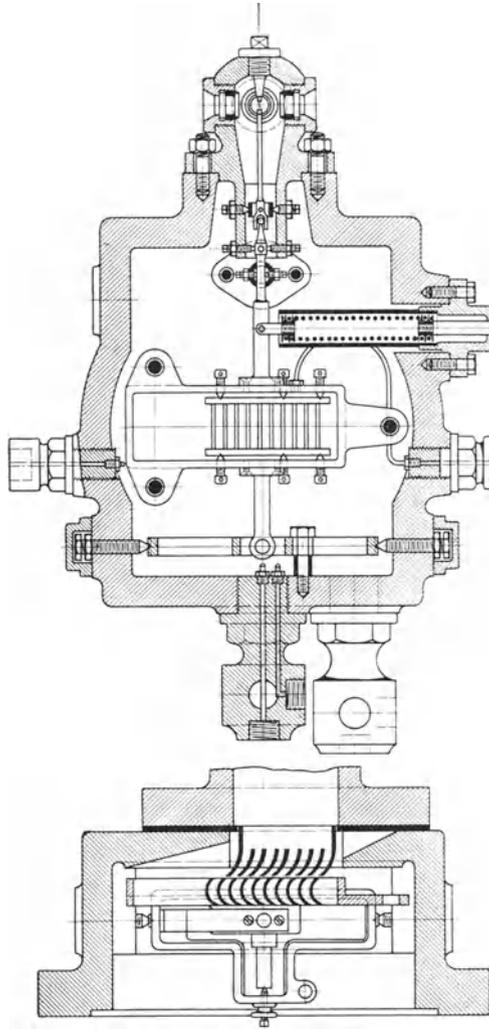


Fig. 25 und 25 a.

erkennen lassen. Eine Verlängerung des Rahmens bewegt einen leichten Zeiger, der jede Verschiebung mit 10facher Uebersetzung anzeigt und mittels festgelegter Marke, welche

durch zwei Glasfenster beobachtet werden kann, den Rahmen auf genau denselben Punkt sowohl in der Lot- wie in der Wagerechten einzustellen gestattet. Nachdem die in der Nullstellung vorhandene Federspannung des unbelasteten Rahmens notiert ist, läßt man Dampf eintreten und führt den Rahmen in die Nullstellung zurück. Der Unterschied der Federspannungen gibt die ausgeübten Kräfte, und auf diese Weise werden die tangentielle und die achsiale Komponente  $T$  und  $A$  der »Gesamtreaktion« des Dampfes gemessen, Fig. 26.

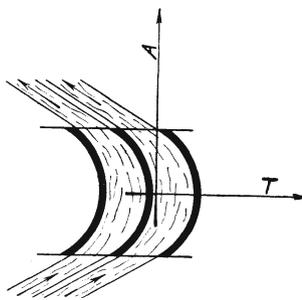


Fig. 26.

Die Schaufelmodelle bestanden aus Bronzeblech mit Stegen von überall gleicher Dicke. Es wurden geprüft: 1) Leit- und Laufapparat von je 30 mm Breite mit einem rd. 0,8 mm breiten Spalt; 2) dieselben mit rd. 4,5 mm breitem Spalt; 3) dieselben Laufschaufeln mit einem Leitapparat von 25 mm und Spalt von 1 mm Breite; 4) dieselben Laufschaufeln mit einem Leitapparat von 15,5 mm und Spalt von 1 mm Breite. Der Austrittswinkel aus dem Leitrade und Ein- und Austrittswinkel am Laufrade waren sämtlich  $= 30^\circ$ . Die Figuren 27 bis 30 stellen die erhaltenen Ergebnisse in obiger Reihenfolge dar. Die Abszissenachse bedeutet den Druck vor den Leitschaufeln; der Druck hinter der Laufschaufel ist an die Schaulinien jeweils angeschrieben. Die Ordinaten sind die Schaufeldrücke in kg. Die steiler ansteigenden Linien geben die Umfangskomponente, die weniger steilen den Achsialdruck. Beide erreichen den Wert Null, wenn der Druck vor der Schaufel dem Gegendruck gleich geworden ist. Da der Kesseldruck unveränderlich etwa 10 at betrug, so wurde der Dampf durch Drosselung etwas überhitzt.

Das Bemerkenswerte der Schaulinien besteht darin, daß in den Fällen 1) und 2) die achsiale Kraft trotz der unzweifelhaft vorhandenen Schaufelreibung bei kleinen Ueberdrücken negativ wird, und zwar umsomehr, je größer die Pressungen an sich sind. Es liegt dies wahrscheinlich daran, daß bei der vorhandenen gleichen Anzahl der Leit- und der Laufkanäle der Querschnitt am Ende des Leitkanales die engste Stelle des ganzen von Leit- und Laufschaufel gebildeten Kanales ausmacht. Bei geringem Ueberdruck findet eine Expansion unter den Druck der Umgebung statt, so zwar, daß der Aufsendruck das Uebergewicht erhält und die Schaufel gegen den Leitapparat preßt. Wie mächtig dieser Einfluß ist, zeigt Fall 2), bei welchem trotz des 4,5 mm breiten Spaltes der negative Ueberdruck besteht. Allerdings

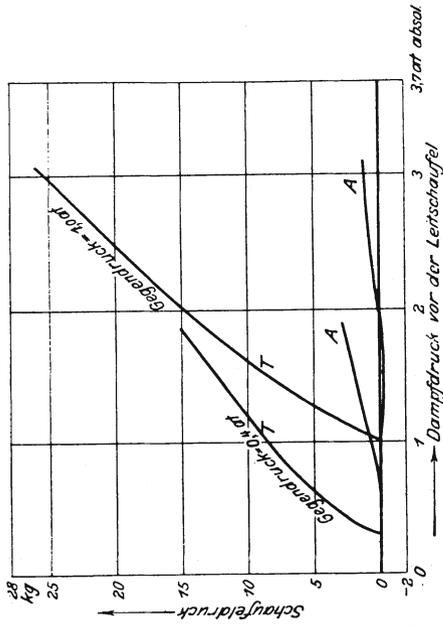
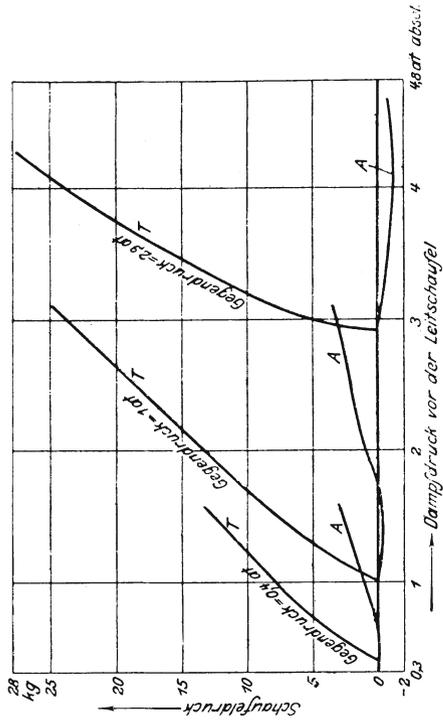


Fig. 27 und 28. Umfangsdruck T und Achseldruck A.

Breite der Leitschaukeln 30 mm  
 » Laufschaufeln 30 »  
 » des Spaltes 0,8 »

Breite der Leitschaukeln 30 mm  
 » Laufschaufeln 30 »  
 » des Spaltes 4,5 »



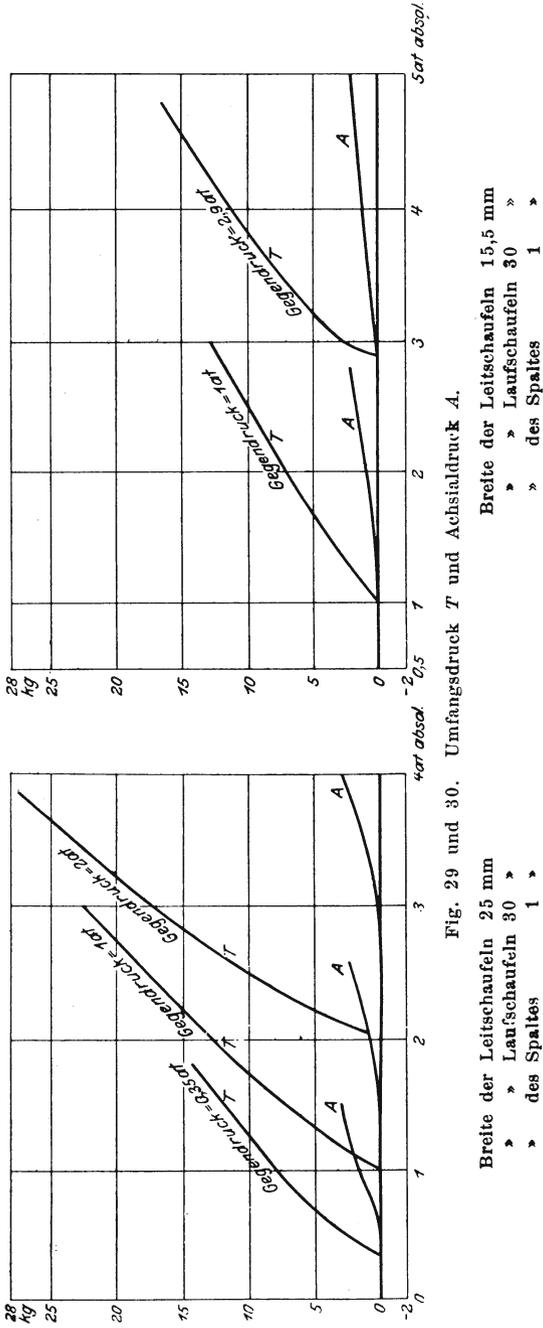


Fig. 29 und 30. Umfangsdruck  $T$  und Achsialdruck  $A$ .

Breite der Leitschaufeln 25 mm  
 » Laufschaufeln 30 »  
 » des Spaltes 1 »

Breite der Leitschaufeln 15,5 mm  
 » Laufschaufeln 30 »  
 » des Spaltes 1 »

wird die Druckänderung im Spalte selbst noch experimentell näher untersucht werden müssen.

Aus der sekundlichen Dampfmasse  $M$ , die man beobachtet, und aus dem Zustande des Dampfes vor und hinter den Schaufeln, kann mit der theoretischen Geschwindigkeit  $w$  auch der »theoretische« Schaufeldruck

$$P_0 = 2 M w \cos \alpha$$

in tangentialer Richtung für die reibungslose Strömung (wobei  $\alpha$  der Ein- und Austrittswinkel an der Laufschaufel ist) berechnet werden. Da der Verlust in der Leitschaufel wegen allmählich zunehmender Geschwindigkeit gering ist, darf man in erster Näherung voraussetzen, es werde beim Austritt aus dem Leitrade die theoretische Geschwindigkeit vorhanden sein, die wegen der Reibung auf einen kleineren Austrittswert  $w'$  sinkt. Der effektive Tangentialdruck wäre dann

$$P_e = M(w + w') \cos \alpha$$

und gestattet  $w'$  zu ermitteln. Der Verlust an lebendiger Kraft in der Schaufel in Teilen der verfügbaren Energie ist

$$\zeta = \frac{w^2 - w'^2}{w^2}.$$

Bei einem weiteren Versuch mit Laufschaufeln, welche wie bei »Grenzturbinen« mit überall gleichem Querschnitt, also einer starken Verdickung in der Mitte konstruiert waren, ergab sich bei einer Geschwindigkeit von rd. 400 m der wie oben gerechnete Verlustkoeffizient  $\zeta = 0,30 - 0,40$  und zwar wie natürlich am kleinsten, wenn die Schaufeln (bei gleicher Teilung in Leit- und Laufrad) sich gegenüberstehen, am größten, wenn sie versetzt sind. Ob bei kleineren Geschwindigkeiten der Verlust abnimmt, konnte noch nicht festgestellt werden. Die Versuche sollen fortgesetzt werden.

In Fig. 31 ist das Bild eines aus den Laufschaufeln bei rd. 6 at Druck ins Freie tretenden Strahles wiedergegeben. Die hellen Linien entsprechen den Wirbeln in den Zwischenräumen zwischen zwei Strahlteilen, die durch die Schaufelstege bedingt sind. Das Bild zeigt, daß der Strahl recht kompakt aus der Schaufel tritt und auf eine ziemliche Strecke einer Mischung mit der Luft widersteht.

Ein eigentümliches Bild bietet der Anprall eines Dampfstrahles auf eine offene Schaufel Peltonscher Form, wie in Fig. 32 und 33. Der aus einer Düse von  $7 \times 12$  mm Weite tretende Strahl verbreitert sich beim Auftreffen auf die Schaufel in außerordentlichem Maße. Die etwas verdickten Ränder des Strahles verlassen die Schaufel auf einer Breite von rd. 54 mm, d. h. dem  $4\frac{1}{2}$ fachen des Düsendurchmessers. Eine kleinere Menge Dampf geht übrigens noch weiter auseinander. Der großen Ausbreitung entsprechend erscheint der Strahl in

der Stirnansicht wie ein Schleier von blofs etwa Papierstärke. Bei  $a$  ist eine Verdichtungsstelle, die offenbar durch das Auftreffen des Dampfes auf die Kante verursacht ist, bemerkbar. Diese Wahrnehmungen mahnen zur Vorsicht; insbesondere



Fig. 31.

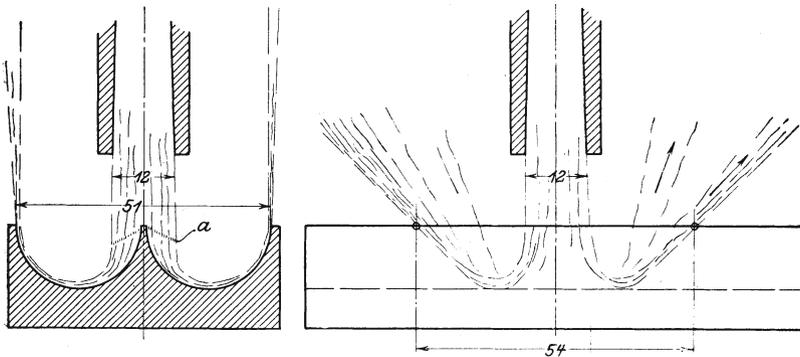


Fig. 32 und 33.

geht aus dem Dargelegten hervor, daß ein Turbinenentwurf Erfolge nur versprechen kann, wenn sich der Konstrukteur durch Vorversuche mit den eigentümlichen Erscheinungen der Dampfströmung nach Möglichkeit vertraut gemacht hat.

## B. Die Festigkeit rotierender Scheiben.

Die raschlaufenden Turbinenräder müssen als Scheiben durchgebildet werden, da die Festigkeit von Ringen mit oder ohne Versteifung durch Arme bei höheren Geschwindigkeiten bekanntlich nicht hinreicht. In der Tat ist die Beanspruchung eines freien Schwungringes bei der Umfangsgeschwindigkeit  $w$  durch die Formel

$$\sigma = \mu w^2$$

gegeben, worin  $\mu$  die spezifische Masse bedeutet. Hieraus ergibt sich für Flußeisen die Zahlenreihe

$w =$	25	50	75	100	150	200	400 m/sk
$\sigma =$ rd.	50	200	450	800	1800	3200	12 800 kg/qcm.

Ueber eine Geschwindigkeit von etwa 100 m hinaus ist mithin die Beanspruchung des Ringes, oder was dasselbe ist, diejenige einer zylindrischen Trommel unzulässig hoch.

Die Theorie der Festigkeit rotierender Scheiben ist wiederholt behandelt worden<sup>1)</sup>; doch fehlt noch in der Literatur die Behandlung der ungleich dicken Scheibe und diejenige der Scheibe gleicher Festigkeit, welche sehr einfache Lösungen gestatten und hier mitgeteilt werden sollen.

### 13. Scheibe mit veränderlicher Dicke.

Es bedeute in Fig. 34 und 35

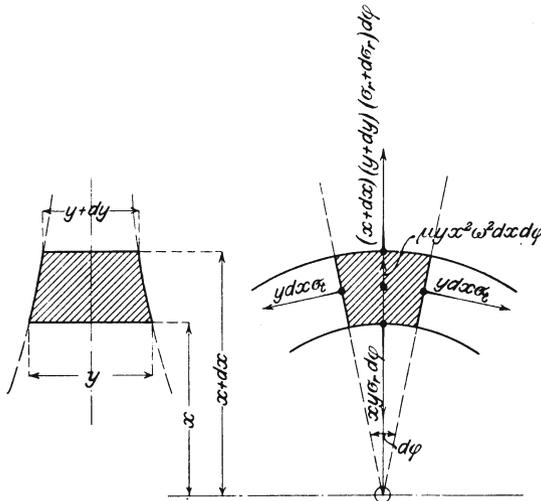


Fig. 34 und 35.

<sup>1)</sup> Grüber, Die Festigkeit der Schmirgelscheiben, Z. 1897 S. 860.

$x$  den radialen Abstand eines Punktes von der Achse,  
 $y$  die Dicke der Scheibe im Abstände  $x$ ,  
 $\sigma_r$  die radiale Spannung pro Flächeneinheit,  
 $\sigma_t$  » tangentielle » » »  
 $\mu$  die spezifische Masse des Scheibenmaterials,  
 $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Rotation,  
 $m = \frac{1}{\nu}$  das Verhältnis der Längendehnung zur sogen.  
 Querkontraktion.

Wir nehmen die Dicke als so wenig veränderlich an, daß man von der Neigung der radialen Spannungen gegen die Symmetrieebene des Rades absehen kann, was für die Anwendungen meist zutrifft. Das Gleichgewicht der Spannungen und der Fliehkraft an einem Element, das durch die Zylinder vom Radius  $x$  und  $x + dx$  sowie zwei achsiale den Winkel  $d\varphi$  umschließende Ebenen herausgeschnitten wird, liefert die Beziehung

$$\frac{d(xy\sigma_r)}{dx} - y\sigma_t + \mu\omega^2 x^2 y = 0 \quad . \quad . \quad (25).$$

Es sei ferner

$\xi$  die radiale Verschiebung im Endpunkte des Radius  $x$ ,  
 $\epsilon_r$  die spezifische Dehnung in radialem Sinn,  
 $\epsilon_t$  » » » » tangentialem Sinn.

Das Grundgesetz der elastischen Deformation<sup>1)</sup> lehrt, daß wenn ein elastischer Körper einer reinen Zugbeanspruchung unterworfen wird, durch welche in Richtung des Zuges die spezifische (d. h. auf die Längeneinheit bezogene) Dehnung  $\epsilon$  hervorgerufen werde, in allen Richtungen senkrecht dazu eine Kontraktion eintritt, deren Betrag (ebenfalls auf die Längeneinheiten bezogen)  $= \nu\epsilon$  ist. Ein Element unserer Scheibe erfährt durch die radiale Spannung  $\sigma_r$  zunächst die radiale Ausdehnung  $\sigma_r : E$ . Die gleichzeitig wirkende Tangentialspannung  $\sigma_t$  ruft indessen die sich algebraisch summierende Querkontraktion  $\nu\sigma_t : E$  hervor, und die resultierende Ausdehnung in radialer Richtung wird:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu\sigma_t] \\ \epsilon_t &= \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu\sigma_r] \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

ebenso findet man

Andererseits ist aber bei der im Umfange vollkommen gleichartigen Ausdehnung

$$\epsilon_t = \frac{\xi}{x}, \quad \epsilon_r = \frac{d\xi}{dx},$$

welche Werte in Gl. (26) eingesetzt die Auflösung

<sup>1)</sup> Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit 1878, S. 32.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\xi}{x} + \frac{d\xi}{dx} \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{\xi}{x} + \nu \frac{d\xi}{dx} \right] \end{aligned} \quad . . . \quad (27)$$

ergeben. Durch Einführung in Gl. (25) entsteht

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \left[ \frac{d(\lg y)}{dx} + \frac{1}{x} \right] \frac{d\xi}{dx} + \left[ \frac{\nu}{x} \frac{d(\lg y)}{dx} - \frac{1}{x^2} \right] \xi + A x = 0 \quad (28)$$

mit der abkürzenden Bezeichnung

$$A = \frac{(1-\nu^2)\mu\omega^2}{E}.$$

Gl. (28) wird integrierbar, wenn wir z. B.

$$y = \alpha x^{2\beta}$$

setzen, und ergibt die Lösung

$$\xi = a x^3 + b_1 x^{\psi_1} + b_2 x^{\psi_2} \quad . . . \quad (29)$$

worin

$$a = \frac{-A}{8 + (3 + \nu) 2\beta}$$

und  $\psi_1 \psi_2$  die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\psi^2 + 2\beta\psi + (2\beta\nu - 1) = 0,$$

$b_1$  und  $b_2$  aber zwei durch die Randbedingungen bestimmte Konstanten bedeuten. Aus Gl. (29) findet man  $\xi : x$  und  $d\xi : dx$ , mithin gemäß Gl. (27) auch die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$ . Bei negativen Werten von  $\beta$  nimmt die Scheibe die Form des von de Laval angewendeten Scheibenprofils für kleinere Räder an, welche, wie Fig. 36 angibt, aus der Verbindung dieser Scheibe mit einer Nabe und einem verstärkten Außenringe (zur Aufnahme der Schaufeln) bestehen.

#### Die Randbedingungen.

Die aus einem Stücke mit dem Rade gedachten Schaufeln üben eine Fliehkraft aus, die pro cm Umfangslänge des Kreises  $x_3$  mit  $p_3$  bezeichnet werde. Der erwähnte Ring erfährt unter dem Einflusse der eigenen Fliehkraft, der von der Scheibe auf die Breite  $y_2$  ausgeübten radialen Spannung  $\sigma_{r2}$  und der Belastung  $p_3$  eine Ausdehnung  $\xi_2'$  gemäß der Formel

$$\xi_2' = \frac{x_3^2}{E \delta_3 y_3} \left[ p_3 + \mu \omega^2 \delta_3 y_3 x_3 - \sigma_{r2} \frac{x_2 y_2}{x_3} \right] \quad (30),$$

wobei für  $\sigma_{r2}$  der Ausdruck Gl. (27) darin für  $\xi : x$  und  $d\xi : dx$  die Werte aus Gl. (29) mit  $x = x_2$  einzusetzen sind.

Aehnlich gilt für die Nabe, wenn wir von der Unstetigkeit des Ueberganges zwischen Scheibe und Nabe sowie den radialen Spannungen in der letzteren absehen:

$$\xi_1' = \frac{x_0^2}{E \delta_0 y_0} \left[ p_0 + \mu \omega^2 \delta_0 y_0 x_0 + \sigma_{r1} \frac{x_1 y_1}{x_0} \right] \quad (30a),$$

worin  $p_0$  den von der Welle auf die Nabe ausgeübten Montierungsdruck pro cm des Kreisumfanges  $2\pi x_0$  bedeutet. Andererseits beträgt die radiale Dehnung der Scheibe zufolge ihres eigenen Spannungszustandes bei  $x_1$  bzw.  $x_2$ :

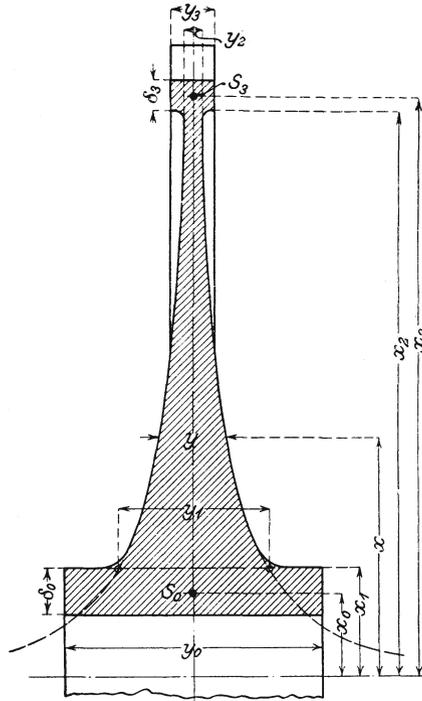


Fig. 36.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a x_1^3 + b_1 x_1 \psi_1 + b_2 x_1 \psi_2 \\ \xi_2 &= a x_2^3 + b_1 x_2 \psi_1 + b_3 x_2 \psi_2 \end{aligned} \quad (30c),$$

und der Zusammenhang der Scheibe erfordert, daß

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1' \\ \xi_2 &= \xi_2' \end{aligned} \quad (30d)$$

sei, aus welchen linearen Gleichungen, nachdem man in (30) und (30a) die Spannungen mithilfe von (27) und (29) durch  $\xi$  ausgedrückt hat, die Werte der Konstanten  $b_1, b_2$  zu bestimmen sind. Die komplizierte Form der Gleichungen erheischt eine probeweise Annahme aller Abmessungen und Kontrolle der entstehenden Spannungen. Insbesondere ergibt sich aus

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu x_1^{2\beta} \\ y_2 &= \mu x_2^{2\beta} \end{aligned}$$

der Wert der für die Rechnung erforderlichen Zahl  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\lg \left( \frac{y_1}{y_2} \right)}{\lg \left( \frac{x_1}{x_2} \right)},$$

und zwar, wenn wie hier  $y_1 > y_2$ , als negative Größe.

Will man die Genauigkeit weiter treiben, so müßte auch die »Querkontraktion« des Außenringes und der Nabe inbetracht gezogen werden. Für ersteren ergibt sich eine Tangentialspannung

$$\sigma_t' = \frac{x_3}{\delta_3 y_3} \left[ p_3 + \mu \omega^2 \delta_3 y_3 x_3 - \sigma_{2r} y_2 \frac{x_2}{x_3} \right].$$

Die radiale Spannung kann wie folgt geschätzt werden: Am äußeren Umfang wirkt angenähert der Zug  $p_3$  pro Längeneinheit, und erzeugt die Spannung  $p_3 : y_3$ . Am inneren Umfang haben wir  $\sigma_{2r} y_2$  pro Längeneinheit, welche durch geeignete Hohlkehlen gleichmäßig auf die Breite  $y_3$  übertragen gedacht ist, und die Spannung  $\sigma_{2r} y_2 : y_3$  ergibt. Als Mittelwert für den ganzen Ring setzen wir angenähert

$$\sigma_r' = \frac{1}{2} \frac{p_3 + \sigma_{2r} y_2}{y_3}.$$

Nunmehr ist die tangentielle Dehnung im Ring pro Längeneinheit

$$\epsilon' = \frac{1}{E} (\sigma_t' - \nu \sigma_r') \quad \dots \quad (30 e)$$

und die Ausdehnung im Radius

$$\xi_2' = x_3 \epsilon' \quad (30 f),$$

welcher Wert anstelle von Gl. (30) zu benutzen wäre. In gleicher Weise wäre bei der Nabe zu verfahren, ja man könnte hier die nachfolgend entwickelten Formeln für die »Scheibe gleicher Dicke« anwenden. Im allgemeinen ist indessen  $\sigma_r'$  gering gegenüber  $\sigma_t'$ , und die Benutzung der Formeln (30) und (30 a) dürfte statthaft sein, um die schon genügend komplizierte Rechnung zu vereinfachen. Aus gleichem Grunde sei hier der Rat ausgesprochen, daß man die Auflösung nach den Konstanten  $b_1 b_2$  nicht in Buchstabenausdrücken vornehmen, vielmehr die gegebenen und anzunehmenden Werte gleich als Zahlen in die Gl. (30) usw. einführen

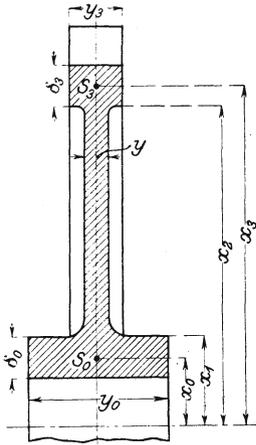


Fig. 36 a.  
Scheibe gleicher Dicke.

möchte, da auf diese Weise die Rechnung bedeutend abgekürzt wird.

Für die Scheibe gleicher Dicke, Fig. 36 a,  $y = \text{konst.}$ , vereinfacht sich die Lösung bedeutend, und es wird

$$\xi = a x^3 + b_1 x + \frac{b_2}{x} \quad \text{mit } a = -\frac{\mu \omega^2 (1 - \nu^2)}{8 E} \quad (31).$$

Die Grenzbedingungen liefern wie vorhin für die Ausdehnung der Nabe und des Kranzes die Werte  $\xi_1' \xi_2'$  nach Gl. (30) und (30 a), während für die Scheibe

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a x_1^3 + b_1 x_1 + \frac{b_2}{x_1} \\ \xi_2 &= a x_2^3 + b_1 x_2 + \frac{b_2}{x_2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (32)$$

gilt, und nachdem man aus Gl. (27) die entsprechenden Werte von  $\sigma_{r1}, \sigma_{r2}$  eingesetzt hat, sind wieder die Gleichungen

$$\xi_1 = \xi_1' \quad \text{und} \quad \xi_2 = \xi_2'$$

zur Berechnung von  $b_1$  und  $b_2$  zu gebrauchen. Mit  $b_1 b_2$  findet man  $\xi$  und nach Gl. (27) die Spannungen selbst.

#### 14. Die Scheibe gleicher Festigkeit

erhalten wir durch die Forderung, daß die radiale und die tangentielle Spannung überall denselben konstanten Wert annehmen sollen. Setzen wir mithin

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma$$

in Gl. (25) ein, so entsteht

$$\frac{d y}{d x} + \frac{\mu \omega^2}{\sigma} x y = 0$$

und durch Integration

$$y = y_a e^{-\frac{\mu \omega^2}{2 \sigma} x^2} = y_a e^{-\frac{\mu \omega^2}{2 \sigma} x^2} \dots \quad (33),$$

wenn  $y_a$  die Scheibendicke im Wellenmittel,  $w$  die Umfangsgeschwindigkeit im Abstände  $x$  bedeutet.

Die Dehnung wird ebenfalls nach allen Richtungen gleich groß und

$$\xi = \frac{1 - \nu}{E} \sigma x \dots \dots \quad (34).$$

Es sei hierbei darauf hingewiesen, daß durch Vernachlässigung der Querkontraktion (d. h. durch die Annahme  $\nu = 0$ ) in diesem Falle ein erheblicher Fehler begangen wird, wie insbesondere aus den Grenzbedingungen hervorgeht.

Man kann die Scheibe sei es voll ausführen, sei es mit einer Nabe versehen, Fig. 37, und auf letzteren Fall näherungsweise die Formeln (30) und (30a), indessen mit den Sonder-

werten  $\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = \sigma$ , anwenden. Die Bedingungen  $\xi_1 = \xi_1'$  und  $\xi_2 = \xi_2'$  lauten dann voll ausgeschrieben:

$$\frac{1-\nu}{E} \sigma x_1 = \frac{x_0^2}{E \delta_0 y_0} \left[ p_0 + \mu \omega^2 \delta_0 y_0 x_0 + \sigma \frac{x_1 y_1}{x_0} \right] \quad (35)$$

$$\frac{1-\nu}{E} \sigma x_2 = \frac{x_3^2}{E \delta_3 y_3} \left[ p_3 + \mu \omega^2 \delta_3 y_3 x_3 - \sigma \frac{x_2 y_2}{x_3} \right]$$

und dienen zur Berechnung von  $y_0$  und  $y_3$ , während  $y_1, y_2$  aus Gl. (33) zu berechnen,  $\delta_0, \delta_3$  nach Belieben anzunehmen sind.

Im übrigen gilt hier dasselbe, was aus Anlaß der Gl. (30e) (30f) bemerkt wurde.

Die Ausführung als volle Scheibe nach de Laval empfiehlt sich wo nur möglich, da die Berücksichtigung des Nabeneinflusses in der Rechnung nur eine roh angenäherte ist. In diesem Falle braucht man nur die zweite der Gleichungen (35) zu berücksichtigen und die Unbekannte  $y_3$  zu ermitteln. de Laval bringt zum Zwecke der Wellenbefestigung zwei Verstärkungsringe an, mit der Absicht, die Beanspruchungen an dieser Stelle zu verringern und den schwachen Punkt der Scheibe an den Umfang zu verlegen; s. Fig. 68.

Grübler hat in der Erörterung seiner Formeln für die Scheibe gleicher Dicke nachgewiesen, daß eine noch so

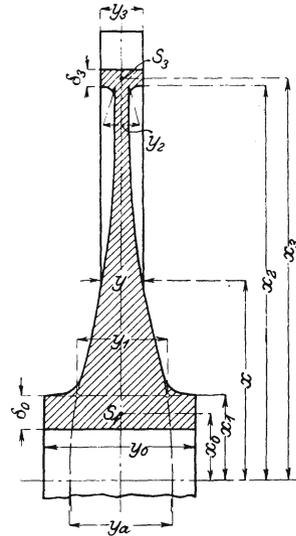


Fig. 37.  
Scheibe gleicher Festigkeit.

kleine Bohrung im Mittelpunkte einer Scheibe die Beanspruchung daselbst gegenüber derjenigen einer vollen Scheibe verdoppelt. Auf einen ähnlichen Einfluß müssen wir uns auch bei ungleich dicken Scheiben und bei exzentrisch gelegenen Bohrungen gefaßt machen, und es ist in dieser Hinsicht die äußerste Vorsicht geboten<sup>1)</sup>.

Fragen wir uns nun, welche höchste Geschwindigkeit erreicht werden könne, so ist zunächst die Vorfrage zu erledigen: Welches Material verwenden wir und welche Beanspruchung lassen wir zu? Die Firma Fried. Krupp in Essen war so freundlich, sich ausführlich über diese Frage zu äußern, und empfiehlt als zweckmäßigstes Material für Turbinenscheiben einen Nickelstahl von etwa 90 kg/qmm

<sup>1)</sup> Man vergleiche auch die höchst interessanten Ausführungen von Kirsch, Z. 1897 S. 798.

Zerreißfestigkeit und 12 vH Dehnung, sowie 65 kg Festigkeit an der Elastizitätsgrenze. Weiterhin spricht sich Krupp wörtlich wie folgt aus:

»Es gibt allerdings auch Nickelstahl mit noch höherer »Festigkeit, natürlich bei entsprechend geringerer Dehnung, »und lassen sich bei Schmiedestücken von geringeren Abmes- »sungen sogar Festigkeiten von über 200 kg und über »160 kg/qmm an der Elastizitätsgrenze erreichen. So wurden »unter andern hier folgende Zahlen festgestellt:

Zerreißfestigkeit kg/qmm	Dehnung vH	Elastizitätsgrenze kg/qmm	
180	7,0	96	} 100 mm Mefs- länge und 12 mm Stab- durchmesser.
178	5,5	108	
177	6,0	148	
182	4,1	160	
149	6,8	132	
219	? <sup>1)</sup>	150	

»Ob die Verwendung eines so harten Nickelstahles für »Turbinenscheiben zweckmäßig ist, könnte nur durch Ver- »suche und durch die Praxis erwiesen werden. Geliefert »wurden bisher Turbinenscheiben, die bei der Erprobung rd. »95 kg Festigkeit, 14 vH Dehnung und 73 kg Festigkeit an »der Elastizitätsgrenze aufwiesen.

»Was die Größe der zulässigen Dauerbeanspruchung der »Konstruktionsteile betrifft, so muß diese selbstverständlich »dem Ermessen des Konstrukteurs überlassen bleiben. Meiner »Ansicht nach wird man jedoch bei Beanspruchung in einer »und derselben Richtung etwa bis zu  $\frac{1}{3}$  der Elastizitäts- »grenze gehen können, eventuell auch noch höher.

»Bei den von mir bisher gelieferten Scheibenrädern »traten Erscheinungen, welche auf innere Spannungen hin- »weisen, sowie Sprünge bei den fertig bearbeiteten Stücken »nicht auf, und ist auch anzunehmen, daß innere Spannungen »in denselben nicht vorhanden sind.«

Soweit Krupp, und der Maschinenbau kann sich be- glückwünschen, daß die moderne Hüttentechnik ihn mit einem Material von so ausgezeichneten Eigenschaften be- schenkt. Der Preis der fertig vorgedrehten Scheibenräder von 1000 bis 3000 mm Dmr. wird von Krupp als etwa in den Grenzen von 350 bis 270  $\mathcal{M}$  pro 100 kg liegend ange- geben; da aber ein Rad von 2000 mm Dmr. mit 1000 kg Gewicht ausführbar ist, wird dieser Preis den Turbinenbau in keiner Weise in der Entfaltung behindern.

<sup>1)</sup> Dehnung wurde nicht gemessen, weil der Stab in der Körner- marke dicht am Kopfe brach.

### C. Erschütterungsfreiheit rotierender Scheiben und Wellen.

Bei einem Lavalschen Rade von 760 mm Dmr. und 420 m Umfangsgeschwindigkeit erzeugt ein am Umfange vorhandenes Uebergewicht von 0,1 kg eine Fliehkraft von nahezu 500 kg, woraus man auf die Gröfse der hier drohenden Erschütterungsgefahr und auf die Notwendigkeit möglichst vollkommenen Massenausgleiches, d. h. der sogenannten Balanzierung schliessen kann.

#### 15. Massenausgleich rotierender starrer Körper.

Darf man die Rotationsachse als starr ansehen, so ist für den vollständigen Massenausgleich notwendig und hinreichend, dafs der Schwerpunkt aller Massen in die Achse falle, und dafs die sogenannten Zentrifugalmomente verschwinden. Gegenüber noch immer vielfach vorhandenen Mißverständnissen sei nachdrücklich betont, dafs die erste Bedingung allein nicht hinreicht, wie am Beispiele der Fig. 38 sofort klar wird, und wollen wir auf die Methode, wie der vollständige Ausgleich zu erzielen wäre, etwas näher eintreten. Der

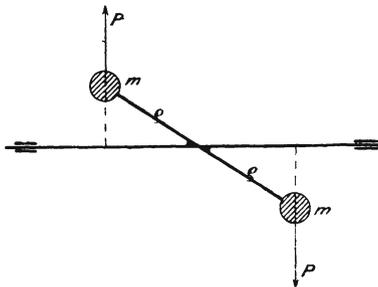


Fig. 38.

Schwerpunkt der beiden gleich großen und in gleichen Abständen befindlichen Massen  $m$  fällt in die Achse, ihre Fliehkräfte aber gleichen sich nicht aus, sondern bilden ein Moment und rufen in den Lagern Gegendrucke hervor. Wäre die Lage der »Ueberwucht« genau bekannt, so ließe sich vollkommener Ausgleich erreichen, indem man z. B. in zwei Hülfebenen  $E'$  und  $E''$  Zusatzmassen unterbringt; s. Fig. 38 a. Gehören zur Masse  $m_1$ , am Radius  $r_1$ , die Zusatzmassen  $m_1'$  und  $m_2'$  an den Radien  $r_1', r_1''$ , so müssen, um den gewollten Zweck zu erreichen,  $r_1 r_1' r_1''$  in derselben Ebene liegen, und ihre Fliehkräfte müssen sich das Gleichgewicht halten. Es muß mithin

$$m_1 r_1 \omega^2 = m_1' r_1' \omega^2 + m_1'' r_1'' \omega^2$$

$$m_1' r_1' \omega^2 a_1' = m_1'' r_1'' \omega^2 a_1'',$$

wo  $a_1' a_1''$  die Abstände der Ebenen  $E' E''$  von  $m_1$  bedeutet.  
 Diese Gleichungen werden insbesondere befriedigt, wenn man

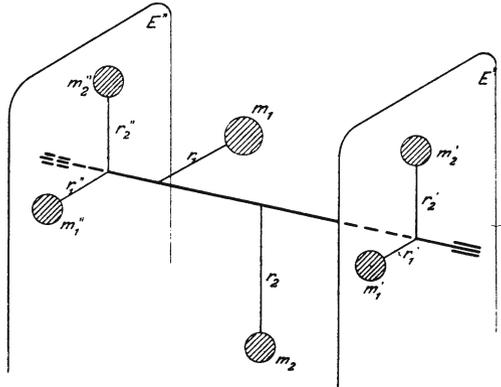


Fig. 38 a.

$$m_1 = m_1' + m_1''$$

wählt, und die Radien aus

$$r_1 = r_1' + r_1''$$

$$r_1' a_1' = r_1'' a_1''$$

bestimmt; was nichts anderes besagt, als dafs die Radien  $r_1' r_1''$  in deren Endpunkten die mit  $m_1$  gleich grofsen Zusatzmassen unterbracht sind, als Kräfte betrachtet mit  $r_1$  im Gleichgewicht sein müssen. Ebenso verfahren wir mit  $m_2$ , und auf diese Weise ergibt sich durch »Zerlegung« der Radien eine anschauliche Methode, um beliebig viele Massen auszugleichen. Die Einzelmassen  $m_1', m_2', \dots m_k' \dots$  in  $E'$ , ebenso  $m_1'', m_2'' \dots$  in  $E''$  werden je durch eine in ihrem gemeinsamen Schwerpunkte angebrachte Masse, deren Gröfse gleich ihrer Gesamtsumme ist, ersetzt. Obwohl nun die Bestimmung wegen Unkenntnis der Lage der  $m_k$  nicht in der zitierten Weise ohne weiteres möglich ist, verdient das Ergebnis doch die Beachtung des Konstrukteurs. Es steht fest, dass bei starrer Rotationsachse durch Hinzufügen von zwei geeigneten Zusatzmassen in zwei sonst willkürlichen zur Achse senkrechten Ebenen vollkommener Massenausgleich erzielt werden kann.

Für das Ausfindigmachen der Lage und Gröfse der Ueberwuchmassen bietet uns die theoretische Mechanik Hilfsmittel dar, die darauf hinauslaufen, z. B. durch Pendelversuche die sogenannten Zentrifugalmomente zu bestimmen.

Es ist indessen meines Wissens noch nicht praktisch erprobt, ob bei den hier in Frage kommenden schweren Maschinenteilen diese Methoden hinreichend genaue Ergebnisse liefern würden. Hin und wieder pflegt man bei Trommeln, nachdem ihr Schwerpunkt durch Zusatzmassen auf die gewohnte Art in die Welle versetzt worden ist, die Lage der Ueberwucht dadurch zu bestimmen, daß man sie durch vertikal geführte Riemen in Lagern, die auf Rollen horizontal verschieblich sind, in Drehung versetzt. Die Trommel führt hierbei Schwingungen um eine vertikale Achse aus, so daß man durch Kreidestreifen die Stellen größten Ausschlages bezeichnen und auf die Lage der Ueberwuchtmassen schließen kann. Auch zu einer rechnerischen Bestimmung der Ueberwucht könnte dies Verfahren benutzt werden. Man hat die Empfindlichkeit der Methode dadurch zu erhöhen verstanden, daß man auf die Lager horizontal angebrachte Federn wirken läßt. Erreicht die Umlaufzahl die Höhe der Eigenschwingung des aus Trommel und Federn bestehenden Systemes, so tritt die »Resonanz« ein, d. h. die Schwingung wird bis zu einem durch die Luftreibung u. a. bedingten Maße vergrößert, so daß schon sehr

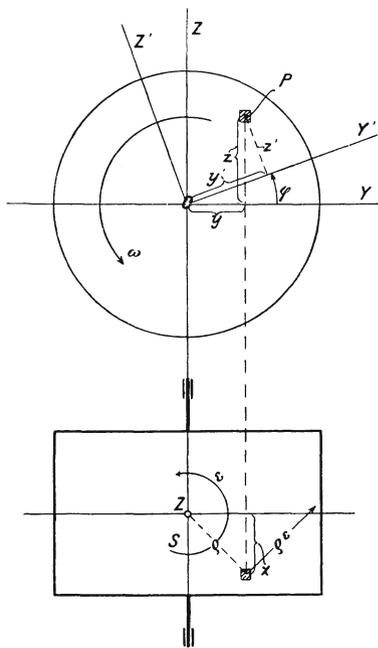


Fig. 38 b.

der Drehung um die Achse  $O$ , und die Geschwindigkeit  $q\epsilon$  vermöge der Drehung um die Achse  $Z$ , mit den Bezeichnungen der Figur 38 b. Das Impulsmoment für  $Z$  wird mithin

kleine Fehlermassen hinreichen, um sichtbare Ausschläge zu geben. Der Einfluss der Federn ließe sich in der unten mitgeteilten Rechnung leicht berücksichtigen<sup>1)</sup>. Im großen ganzen zieht die Praxis es vor, den Weg des Probierens zu beschreiten.

<sup>1)</sup> Es sei die auf gewöhnliche Art gefundene »Balanzmasse«, die in der Mittelebene am Umfang im Abstand  $r_0$  angebracht werden soll, mit  $m$  bezeichnet.

Während der Rotation gilt für die Schwingung um die durch  $S$  gehende vertikale Achse  $Z$ , Fig. 38 b, der Grundsatz, daß die Ableitung des Momentes der Bewegungsgröße (des »Impulsmomentes«) nach der Zeit gleich sei dem Momente der äußeren Kräfte. Ein beliebiger Punkt  $P$  besitzt die Geschwindigkeit  $r\omega$  vermöge

Bei diesem versuchsweisen Vorgehen dürfte es zweckmässig sein, sich vor Augen zu halten, daß man die Wirkung einer freien Fliehkraft und eines Momentes auszuglei-

$$\Theta = \Sigma \delta m \rho^2 \varepsilon + \Sigma \delta m \alpha x z \dots (1).$$

Es sei  $\varphi$  der Winkel, den die  $y'x'$ -Ebene eines im Körper festen Koordinatensystems  $x'y'z'$  mit  $yx$  einschließt, wobei  $x$  mit  $x'$  zusammenfällt. Es gilt dann

$$z = y' \sin \varphi + z' \cos \varphi.$$

Das Zentrifugalmoment ist

$$\Sigma \delta m \alpha x z = \sin \varphi \Sigma \delta m \alpha x y' + \cos \varphi \Sigma \delta m \alpha x z'$$

und erlangt, wie man sich in Polar-Koordinaten anschaulich macht, bei einem bestimmten Wert von  $\varphi$  ein Maximum. Wir wählen diese Stellung der  $xy$ -Ebene zur Anfangsstellung, und verlegen auch die  $x'y'$ -Ebene des mit dem Körper rotierenden Systems in dieselbe. Wie man leicht einsieht, wird dann  $\Sigma \delta m \alpha x z' = 0$ , und es gilt

$$\Theta = \varepsilon \Sigma \delta m \rho^2 + \omega \sin \varphi \Sigma \delta m \alpha x y' \dots (2).$$

Das Moment der äusseren Kräfte ist = 0, es gilt mithin  $d\Theta : dt = 0$ , oder mit  $\varphi = \omega t$ , wenn wir in erster Näherung  $\omega$  konstant ansehen

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \Sigma \delta m \rho^2 = -\omega^2 \cos \omega t \cdot \Sigma \delta m \alpha x y' \dots (3),$$

hieraus bestimmen wir durch Integration, mit  $\varepsilon = d\psi : dt$  den Schwingungswinkel  $\psi$  der für unsere Annahme eine rein periodische Funktion sein muß und finden die Formel

$$\psi \Sigma \delta m \rho^2 = \cos \omega t \cdot \Sigma \delta m \alpha x y' \dots (4),$$

Wenn schliesslich  $\psi_0$  die Amplitude von  $\psi$  ist, so erhalten wir das gesuchte Zentrifugalmoment, welches mit  $C$  bezeichnet werde:

$$C = \Sigma \delta m \alpha x y' = \psi_0 \Sigma \delta m \rho^2 \dots (5).$$

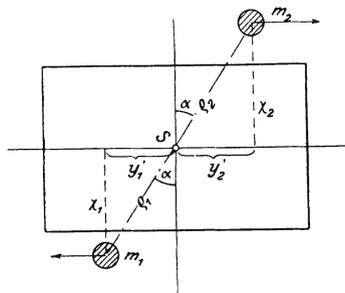


Fig. 38 c.

Dies Moment soll durch die Zusatzmassen  $m_1 m_2$  auf Null zurückgeführt werden, zu welchem Behufe notwendig ist, daß dieselben ein Zentrifugalmoment  $C$  ergeben, während ihr Schwerpunkt mit  $S$  zusammenfällt, d. h. es gilt (s. Fig. 38 c)

chen hat. Man darf sich mithin die nicht ausgeglichenen Massen unter dem Bilde der Figur 38d vorstellen, wo von  $m_0$  die freie Fliehkraft und von den beiden gleich großen Massen

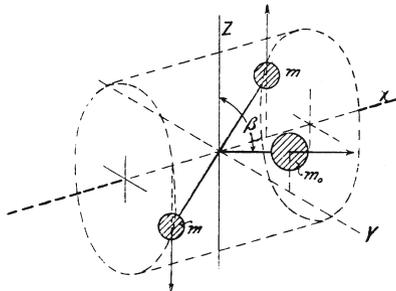


Fig. 38 d.

$m$  bei  $A$  und  $A'$  das Moment geliefert wird. Die Ebene der  $m$  kann mit der von  $m_0$  auch zusammenfallen. Man bestimmt zunächst auf gewöhnliche Weise das Gegengewicht zu  $m_0$  und ersetzt dies beispielsweise durch Massen  $m_0', m_0''$  etwa in den Stirnebenen der Trommel. Nun muß mit zwei weiteren aber gleich großen Massen  $m'$  welche bezüglich des Schwerpunktes zentrisch symmetrisch ebenfalls in den Stirnebenen der Trommel unterbracht werden, der Versuch gemacht werden, das Moment der  $m$  aufzuheben, wobei man sowohl die Größe wie die Lage von  $m'$  variiert. Ist durch versuchsweises Laufenlassen der Trommel nachgewiesen, daß der Ausgleich gelang, dann können  $m_0'$  und  $m'$  auf der einen,  $m_0''$  und  $m'$  auf der andern Seite je in ihren gemeinsamen Schwerpunkten zu einer Masse vereinigt werden. Es empfiehlt sich aber, diese Massen nicht unwandelbar, sondern in zwei Ringen beweglich zu befestigen, um eine Nachstellung bei einer durch Erschütterung nachträglich nicht selten verursachten Verschiebung des Schwerpunktes, z. B. eines Dynamoankers zu ermöglichen.

$$\begin{aligned} m_1 \varrho_1 &= m_2 \varrho_2 \\ m_1 x_1 y_1' + m_2 x_2 y_2' &= -C, \end{aligned}$$

woraus bei angenommenen  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $a$  die Massen  $m_1, m_2$  zu finden sind. Die Ebene von  $C$ , in welcher auch  $m_1, m_2$  zu liegen haben, wird durch Ankreiden im Laufe bestimmt und  $m_1, m_2$  so unterbracht, daß sie dem Sinne von  $C$  entgegenwirken. Nun kann man auch  $m$  in die Normalebenen von  $m_1$  und  $m_2$  zerlegen, und die Teilbeträge  $m'$  bzw.  $m''$  mit  $m_1$  bzw.  $m_2$  nach dem Schwerpunktsatz (s. oben) vereinigen. Wenn man die Wirkung der oben erwähnten Hilfsfedern untersuchen will, muß  $d\theta : dt$  dem Momente der Federn + dem Momente des Luftwiderstandes gleich gesetzt werden. Das erste kann man als  $k\psi$ , das zweite als  $k' (d\psi : dt)$  in die Rechnung einführen, integrieren, und  $C$  bestimmen.  $k'$  ließe sich aus Pendelungsversuchen finden, wenn nicht die ganze Rechnung an ihrer Umständlichkeit scheiterte.

### 16. Die biegsame Welle von Laval.

Wäre der Massenausgleich wie oben geschildert auch mathematisch genau durchgeführt worden, so würde hierdurch der tadellose Lauf der Welle noch immer nicht gewährleistet. Da die Welle nicht starr ist, wird sie durch die Fliehkräfte der gegeneinander verschobenen Ueberwucht- und Balanzierungsmassen verbogen, und kann stark unrund laufen. In Wirklichkeit ist aber auch der Ausgleich nie vollkommen, es bleibt eine freie Fliehkraft übrig, deren Wirkung de Laval dadurch unschädlich zu machen trachtet, daß er seine Turbinenwelle eigens weit lagert und ihre dadurch große Biegsamkeit verleiht. Hierdurch wird es dem Rade bei großer Geschwindigkeit möglich, um eine dem Schwerpunkt nahekommende, fast »freie« Drehachse zu rotieren, und es tritt die eigentümliche, schon von Laval wohl erkannte Erscheinung der kritischen Geschwindigkeit ein, welche indes erst von Föppl wissenschaftlich klargelegt worden ist.

Denken wir uns eine (sonst symmetrische) Scheibe mit einem um  $e$  exzentrisch liegenden Schwerpunkt, Fig. 39, in

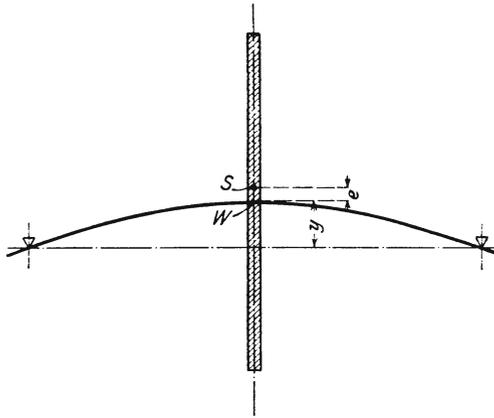


Fig. 39.

verhältnismäßig langsame Rotation versetzt, so wird die Welle durch die Fliehkraft um einen Betrag  $y$  durchgebogen (zu rechnen von der Gleichgewichtslage, welche der Biegung durch das Eigengewicht entspricht), der für den Fall des relativen Gleichgewichtes aus der Bedingung zu berechnen ist, daß die Fliehkraft  $m(y+e)\omega^2$ , worin  $m$  die Masse der Scheibe (bei gewichtslos gedachter Welle) bedeutet, gleich sein müsse der von der Welle entwickelten elastischen Gegenkraft  $P$ , welche wir  $= \alpha y$ , mit  $\alpha$  als konstanter aus Wellenstärke,

Lagerentfernung usw. zu berechnenden Verhältniszahl, setzen dürfen. Aus der Gleichung

$$m(y + e)\omega^2 = \alpha y$$

ergibt sich die Durchbiegung

$$y = \frac{m\omega^2 e}{\alpha - m\omega^2} \dots \dots \dots (36).$$

Steigern wir die Winkelgeschwindigkeit, so wächst  $y$  und würde bei  $\alpha - m\omega^2 = 0$ , oder

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \omega_k,$$

unendlich groß, d. h. die Fliehkraft würde die Welle bis zum Bruche (bezw. bis an etwa vorhandene Hubbegrenzung) verbiegen. Diesen Betrag von  $\omega_k$  bezeichnen wir nach Föppl als »kritische« Winkelgeschwindigkeit und sprechen ebenso von der kritischen Umlaufzahl. Ueber den »kritischen« Wert hinaus können wir die Umlaufzahl nur steigern, wenn Führungen vorhanden sind, die ein übergroßes Ausbiegen der Welle beim Durchschreiten durch die kritische Umlaufzahl verhindern<sup>1)</sup>. Theorie und Erfahrung zeigen nun übereinstimmend, daß sich dann ein neuer stabiler Gleichgewichtszustand einstellt, bei welchem der Wellendurchstoßpunkt  $W$  und der Schwerpunkt  $S$  ihre Lagen vertauschen, wie in Fig. 40 angedeutet. Die Größe der Durchbiegung berechnet man aus der Gleichung

$$m(y - e)\omega^2 = \alpha y$$

und erhält

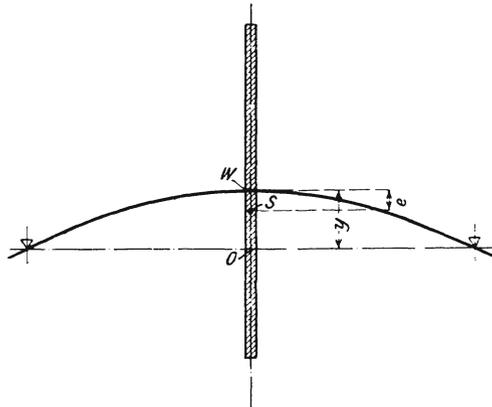


Fig. 40.

<sup>1)</sup> oder wenn die Geschwindigkeit so rasch zunimmt, daß die Scheibe »keine Zeit hat« sich von der Achse zu weit zu entfernen.

$$y = \frac{m\omega^2 e}{-\alpha + m\omega^2} = \frac{e}{1 - \frac{\alpha}{m\omega^2}}$$

Je mehr wir also  $\omega$  steigern, desto kleiner wird  $y$ , um bei unendlich rascher Rotation mit  $e$  zusammenzufallen. Führen wir die kritische Geschwindigkeit  $\omega_k$  ein, so wird

$$y = \frac{e}{1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} \dots \dots \dots (37).$$

Die Gröfse der noch vorhandenen Fliehkraft, welche auf die Lager übertragen wird, ergibt sich zu

$$P = \alpha y = \frac{m e \omega^2}{\frac{\omega^2}{\omega_k^2} - 1} \dots \dots \dots (38).$$

Durch geeignete Wahl von  $\frac{\omega}{\omega_k}$ , d. h. bei gegebenem  $\omega$  sind wir mithin durch Verkleinerung von  $\omega_k$  in der Lage,  $P$  nach Belieben zu verkleinern, ohne Rücksicht auf die Exzentrizität  $e$ , welche indes in Wirklichkeit selbstverständlich ebenfalls so klein wie irgend möglich gemacht wird. So erteilt de Laval seinen Turbinenwellen eine so grofse Biegsamkeit, dafs  $\omega$  den 7fachen Wert von  $\omega_k$  erreicht, und es ist der gute Gang Lavalscher Turbinen gewifs dieser ausgezeichneten Idee ihres Erfinders zu verdanken.

Dafs die in Fig. 40 dargestellte Gleichgewichtslage nicht blofs eine mögliche, sondern eine stabile ist, hat Föppl durch seine theoretischen Untersuchungen unter vereinfachten Annahmen erwiesen. Der allgemeine Beweis folgt unten.

Die durch die Wellenbiegung unter Umständen eintretende

Schiefstellung der rotierenden Scheibe

hat auf die kritische Geschwindigkeit einen merklichen, wenn auch nicht erheblichen Einflufs, wie am Beispiele einer fliegend im Endpunkte einer Welle von der Länge  $l$  und dem Trägheitsmoment  $J$  angeordneten Scheibe, Fig. 41, nachgewiesen

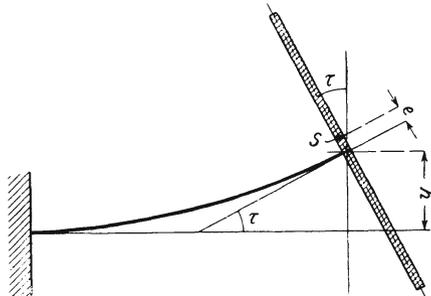


Fig. 41.

werden kann. Die Fliehkräfte ergeben bei einem Neigungswinkel  $\tau$  der Scheibe ein im Sinne des Uhrzeigers wirkendes Moment  $\Theta \omega^2 \tau$ , wo  $\Theta$  das Massenträgheitsmoment der Scheibe in Bezug auf die in  $S$  sich projizierende Achse bedeutet. Unter dem Einflusse dieses Momentes und der Fliehkraft  $m(y+e)\omega^2$  ergibt sich eine Durchbiegung

$$y = \frac{m e \omega^2 l^3}{3 J E} \frac{A}{N}$$

mit

$$A = 1 - \frac{3}{4 \left( 1 + \frac{J E}{\Theta \omega^2 l} \right)}$$

$$N = 1 - \frac{m \omega^2 l^3}{3 J E} A$$

. . . . . (39).

Diese Durchbiegung wächst über alle Grenzen, wenn  $N = 0$ , d. h. wenn  $\omega$  den aus Gleichung

$$m \omega_k^2 = \frac{3 J E}{l^3 A} \quad . . . . . (40).$$

zu berechnenden Wert erreicht. Wäre  $\Theta = 0$ , so hätte man

$$m \omega_k'^2 = \frac{3 J E}{l^3} .$$

Wenn man mithin  $J = \frac{m \omega_k'^2 l^3}{3 E}$  in Gl. (40) einführt und in der Klammer  $\omega_k$  angenähert durch  $\omega_k'$  ersetzt, so folgt vereinfacht

$$\omega_k^2 = \frac{\omega_k'^2}{1 - \frac{m l^2}{3 \Theta}} \quad . . . . . (40a).$$

Die Schiefstellung bewirkt mithin für die gewählte Anordnung eine Vergrößerung der kritischen Geschwindigkeit. War die Scheibe von anfang an schief aufgekeilt, so ändert dies an Formel (40) nichts, wie man leicht nachrechnen kann.

Für die modernen vielstufigen Dampfturbinen kommt nun vor allem der Fall inbetracht, wo eine durchgehende Welle eine Anzahl von Rädern zu tragen hat, deren Schwerpunkte im allgemeinen sämtlich aus dem Wellenmittel verschoben sein werden, und durch ihre freien Fliehkräfte zu analogen Erscheinungen Veranlassung geben wie bei der einzelnen Scheibe.

**Kritische Winkelgeschwindigkeit mehrfach belasteter Wellen.**

**17. Zwei Einzelräder.**

Fig. 42 stellt den zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gehörigen Gleichgewichtszustand dar. In dem mitrotierenden Koordi-

natensystem  $XYZ$  seien  $O_1, O_2$  die Durchstoßpunkte der die Lager verbindenden geometrischen Rotationsachse,  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Nabenmittelpunktes der einen,  $x_2, y_2$  desgl. der andern Scheibe. Für die nach diesen Punkten verschob-

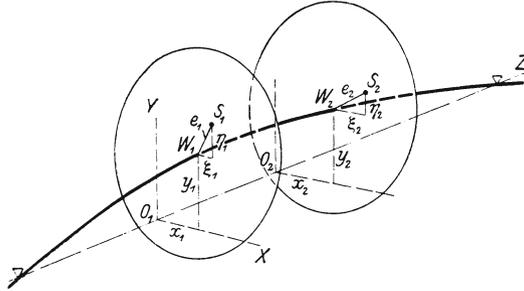


Fig. 42.

benen parallelen Achsen der  $\xi$  und  $\eta$  seien  $\xi_1, \eta_1$  und  $\xi_2, \eta_2$  die Koordinaten der Schwerpunkte  $S_1, S_2$ , mithin  $e_1, e_2$  deren »Exzentrizitäten«. Die Torsionsdeformation ist gegenüber der Biegung wohl immer so gering, daß von einer Aenderung des ursprünglich von  $e_1$  und  $e_2$  gebildeten Winkels abgesehen werden kann. Die von den Scheibenmassen  $m_1, m_2$  entwickelten Fliehkräfte können in die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= (x_1 + \xi_1) m_1 \omega^2, & Y_1 &= (y_1 + \eta_1) m_1 \omega^2 \\ X_2 &= (x_2 + \xi_2) m_2 \omega^2, & Y_2 &= (y_2 + \eta_2) m_2 \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

zerlegt werden. Unter ihrer Einwirkung erfährt die Welle eine Einbiegung, für welche

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2, & y_1 &= a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 \\ x_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2, & y_2 &= a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

mit  $a_{12} = a_{21}$  gesetzt werden kann und die Konstanten  $a$  aus den Wellenabmessungen, der Lagerungsart usw. zu berechnen sind. Setzen wir die Ausdrücke der Kraftkomponenten ein, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) x_1 + a_{12} m_2 \omega^2 x_2 + a_{11} \xi_1 m_1 \omega^2 + a_{12} \xi_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ a_{21} m_1 \omega^2 x_1 + (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) x_2 + a_{21} \xi_1 m_1 \omega^2 + a_{22} \xi_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ (a_{11} m_1 \omega^2 - 1) y_1 + a_{12} m_2 \omega^2 y_2 + a_{11} \eta_1 m_1 \omega^2 + a_{12} \eta_2 m_2 \omega^2 &= 0 \\ a_{21} m_1 \omega^2 y_1 + (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) y_2 + a_{21} \eta_1 m_1 \omega^2 + a_{22} \eta_2 m_2 \omega^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die hieraus ermittelten Werte  $x_1, x_2, y_1, y_2$  wachsen ins Unendliche, falls die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (a_{11} m_1 \omega^2 - 1), & a_{12} m_2 \omega^2 \\ a_{21} m_1 \omega^2, & (a_{22} m_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die kritische Geschwindigkeit  $\omega_k$  ist mithin aus der Gleichung

$$D = (a_{11} m_1 \omega_k^2 - 1) (a_{22} m_2 \omega_k^2 - 1) - a_{12}^2 m_1 m_2 \omega_k^4 = 0 \quad (43)$$

zu berechnen. Für den Fall gleicher Massen  $m_1 = m_2 = m$  von symmetrischer Anordnung (auch hinsichtlich Wellenstärke und Lagerung) wird  $a_{11} = a_{22} = \alpha$ ,  $a_{12} = \beta$  und

$$\alpha m \omega_k^2 - 1 = \pm \beta m \omega_k^2,$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} m \omega_{k_1}^2 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \\ m \omega_{k_2}^2 &= \frac{1}{\alpha + \beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44),$$

zwei Werte für die kritische Geschwindigkeit, entsprechend z. B. einer Lage der Schwerpunkte auf einer oder auf verschiedenen Seiten der geometrischen Achse, bei von Anfang an in einer Ebene liegenden Schwerpunkten.

Schon die Anordnung dreier Massen gibt indessen vollständig undurchsichtige Ergebnisse.

**18. Graphische Behandlung bei beliebiger Verteilung der Massen und beliebig veränderlicher Wellenstärke.**

Die Ermittlung der kritischen Geschwindigkeiten in andern als den einfachsten Fällen, führt auf verwickelte Rechnungen, wie an einem Beispiele in Art 18 a und 38 dargetan werden wird. Auf graphischem Wege hingegen gelingt die Lösung unter allen Umständen, allerdings nur in Form einer planmäßigen Annäherung. Eine Methode dieser Art wurde angewendet von Vianello, um Knickungsaufgaben zu lösen, und Delaporte beschreibt ein verwandtes Verfahren in »Revue de mécanique« 1903, Bd. XII S. 517. Die Anwendung setzt die gründliche Kenntnis des Mohrschen Satzes zur Bestimmung der elastischen Linie von gebogenen Balken voraus, und läßt sich wie folgt kurz beschreiben.

Eine Welle mit beliebiger Lagerung sei durch die zur Balkenachse senkrechten Kräfte  $P_1, P_2, \dots$  belastet, welche an ihren Angriffspunkten die Durchbiegungen  $y_1, y_2, \dots$  hervorrufen. Werden alle Kräfte  $P$  auf das  $k$ -fache ihres Betrages gebracht, so wachsen auch die Durchbiegungen auf das  $k$ -fache. Die Welle trage eine Anzahl Massen, deren Schwerpunkte je in das Wellenmittel hereinfallen; die Kräfte  $P$  seien die Fliehkräfte, welche durch die Massen entwickelt werden, wenn die Welle rotiert und um die Beträge  $y_1, y_2, \dots$  ausgelenkt wird. Solange die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  klein ist, sind die Fliehkräfte ungenügend, um die Welle durchzubiegen; erst bei der kritischen Umlaufzahl besteht Gleichgewicht zwischen Fliehkräften und den elastischen Kräften. Ist dies für eine Gruppe von Auslenkungen  $y_1, y_2, \dots$  der Fall, so trifft es auch für das  $k$ -fache hiervon zu, denn mit der Vergrößerung von  $y$  wachsen im gleichen Verhältnis auch die  $P$ , mit anderen Worten: bei der kritischen Umlaufzahl befindet

sich die Welle für jede Auslenkung im indifferenten Gleichgewicht.

Wir zeichnen nun die elastische Linie der in ihren Stärken gegebenen Welle zunächst willkürlich auf, und berechnen die Fliehkräfte  $P_1, P_2, \dots$  aus den Durchbiegungen  $y_1, y_2, \dots$  mit einer zunächst ebenfalls willkürlichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ . Aus den Kräften ergibt sich die Biegemomentenfläche, und nach Mohr die wahre elastische Linie, welche den Kräften  $P$  entspricht. Die Durchbiegung etwa in der Mitte der Welle,  $y'_m$ , wird sich von dem anfänglich angenommenen Wert  $y_m$  unterscheiden, kann aber dieser Größe gleich gemacht werden, wenn wir statt  $\omega$  die Geschwindigkeit

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{y'_m}{y_m}}$$

angewendet denken. Vergrößern wir also alle Ordinaten im Verhältnis  $\omega'^2 : \omega^2$ , so müßte die so erhaltene wahre elastische Linie mit der angenommenen übereinstimmen, wenn wir schon das erstemal richtig geraten hätten. In diesem Falle wäre  $\omega'$  die kritische Geschwindigkeit. In Wahrheit werden die beiden Linien abweichen, und wir müssen das Verfahren wiederholen, indem wir die vorhin als »wahre« bezeichnete elastische Linie nur als 2. Annahme gelten lassen. Die Konstruktion der zweiten elastischen Linie nach Mohr ergibt als Einsenkung am gleichen Punkte wie vorhin  $y''_m$ , und wir müssen wieder ein neues  $\omega = \omega''$  gemäß Gleichung

$$\omega'' = \omega' \sqrt{\frac{y''_m}{y'_m}}$$

wählen, und die Ordinaten im Verhältnis von  $\omega''^2 : \omega'^2$  vergrößern. Stimmt die elastische Linie mit der »2. Annahme« überein, so ist  $\omega''$  die kritische Geschwindigkeit; im andern Falle muß das Verfahren wiederholt werden.

### 18a. Stetig und gleichmäßig belastete Welle mit unveränderlichem Durchmesser in rechnerischer Behandlung.

Die Welle sei durch ungemein dicht gestellte gleichmäßig über die ganze Länge verteilte Scheibenräder belastet, Fig. 43, welche die Biegsamkeit der Welle indessen nicht beeinträchtigen sollen. Die auf die Längeneinheit entfallende Masse der Scheiben sei  $m_1$ , das unveränderliche Flächen-Trägheitsmoment der Welle  $J$ . Um die Rechnung in der einfachsten Form durchzuführen, werde angenommen, der Schwerpunkt aller Scheiben liege in einer und derselben achsialen Ebene, um den konstanten Betrag  $e$  nach derselben Seite gegen das Wellenmittel verschoben. Das Eigengewicht der Welle wird zum Gewichte der Scheiben geschlagen.

Wenn bei der Geschwindigkeit  $\omega$  Gleichgewicht eingetreten ist, so findet sich ein Stabelement, Fig. 43a, von der Länge  $dx$ , wenn wir von der Schiefstellung der Scheiben zunächst absehen, der Wirkung der Fliehkraft

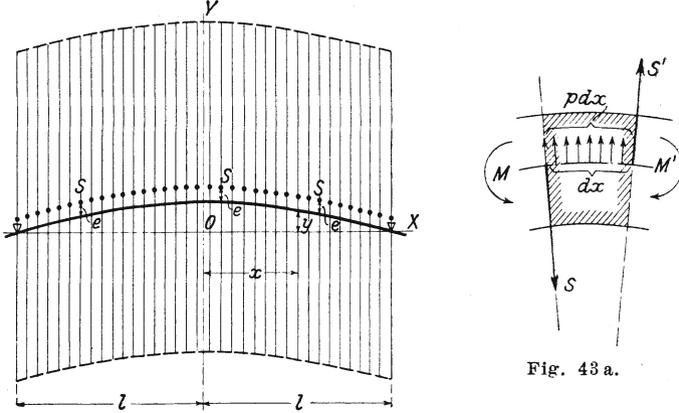


Fig. 43.

$m_1 (y + e) dx \omega^2$  (als der Ergänzungskraft der relativen Bewegung) und den Biegemomenten  $M'$  und  $M$ , sowie den Scherkräften  $S'$  und  $S$  unterworfen.

Bezeichnen wir die Fliehkraft mit  $p dx$ , unter  $p$  die »Belastung« der Längeneinheit verstanden, so ergibt sich aus dem Verschwinden der vertikalen Kraftkomponenten

$$S' - S + p dx = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dS}{dx} = -p \quad . \quad . \quad (45)$$

und aus dem Verschwinden der Momente für den Schwerpunkt

$$M' - M - S' \frac{dx}{2} - S \frac{dx}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dM}{dx} = S \quad (45a).$$

Zu diesen Gleichungen fügen wir die bekannte Grundformel der Biegung hinzu, welche für die in Fig. 43 eingezeichnete Richtung der Koordinatenachsen, und wenn der Sinn von  $M'$  als positiv gilt, wie folgt lautet:

$$JE \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad . \quad . \quad . \quad (45b)$$

Hieraus ergibt sich

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} = p = m_1 \omega^2 (y + e) \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Diese Gleichung besitzt das allgemeine Integral

$$y = ae_0 e^{ix} + a' e_0^{-ix} + b \cos kx + b' \sin kx - e \quad (46a),$$

worin

$$k = +\sqrt[4]{\frac{m_1 \omega^2}{JE}} \dots \dots \dots (47),$$

$e_0$  die Basis der natürlichen Logarithmen (zum Unterschiede von  $e$ ) bezeichnet, und die Konstanten  $a, a', b, b'$  den Bedingungen der Aufgabe angepaßt werden müssen, was für die nachfolgenden Sonderfälle geschehen mag.

$\alpha$ ) Die beiderseits frei aufliegende Welle wird sich offenbar entweder so verbiegen, daß wie Beispiele  $\alpha, \beta$  in Fig. 44 zeigen die elastische Linie in bezug auf die Mittelsenkrechte symmetrisch bleibt, oder aber so, daß  $\gamma, \delta$  dargestellt, die elastische Linie in bezug auf die Mitte der Lagerdistanz zentrisch-symmetrisch wird, wobei freilich  $e$  verschwindend klein gedacht ist.

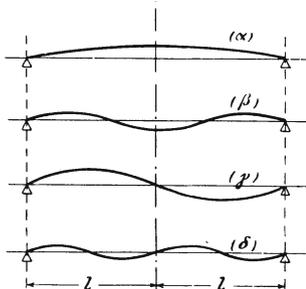


Fig. 44.

Im ersten Falle muß  $y$  in Formel (76), wenn wir die Abszisse von der Wellenmitte aus zählen, eine gerade, im zweiten eine ungerade Funktion von  $x$  werden, beide male tritt als weitere Bedingung die Forderung hinzu, daß für  $x = l$  sowohl  $y = 0$  als auch das biegende Moment, d. h.  $dy^2 : dx^2 = 0$  sein muß. Hieraus folgt für die gerade Funktion  $a' = a, b' = 0$ , und

$$a = \frac{s}{2(e_0^{kl} + e^{-kl})}, \quad b = \frac{e}{2 \cos kl}$$

mithin die Durchbiegung unendlich, falls  $\cos kl = 0$  oder

$$kl = \frac{\pi}{2}, \dots \frac{3\pi}{2} \dots \frac{5\pi}{2} \dots$$

Für die ungerade Funktion erhält man

$$a' = -a, b = 0, \quad a = \frac{e}{2(e_0^{kl} - e^{-kl})}, \quad b' = \frac{e}{2 \sin kl}$$

also wieder kritische Umlaufzahlen, falls

$$kl = \frac{2\pi}{2}, \frac{4\pi}{2}, \frac{6\pi}{2}, \dots$$

Es gibt mithin eine endlose Anzahl kritischer Werte  $kl$ , welche sich wie  $1 : 2 : 3 : 4 : \dots$  zu einander verhalten. Da nun gemäß Gl. (47)  $w$  zu  $k^2$  proportional ist, folgt, daß sich die kritischen Geschwindigkeiten selbst verhalten wie

$$1 : 2^2 : 3^2 : 4^2 : \dots$$

Insbesondere finden wir den niedrigsten Wert derselben mit  $kl = \frac{\pi}{2}$  zu

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\pi^4 JE}{16 m_1 l^4}} = 3,489 \sqrt{\frac{JE}{M l^3}} \quad (49),$$

insofern wir unter  $M$  die Gesamtmasse aller Scheiben und der Welle verstehen<sup>1)</sup>. Umgekehrt findet sich der Wellenhalbmesser, welcher der kritischen Geschwindigkeit  $\omega_k$  entspricht, zu

$$r = 0,5686 \sqrt[4]{\frac{M l^3 \omega_k^2}{E}} \quad (50).$$

Berücksichtigt man die

Schiefstellung der Scheiben,

so lautet die Gleichgewichtsbedingung der an einem Wellenelement, Fig. 44a, angreifenden Kräfte:

$$M' - M + \Theta_1 dx \omega^2 \frac{dy}{dx} - S dx = 0 \text{ oder } \frac{dM}{dx} = S - \Theta_1 \omega^2 \frac{dy}{dx} \quad (51).$$

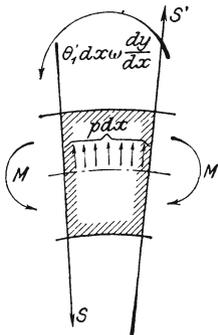


Fig. 44 a.

Hierin ist  $\Theta_1$  das Massenträgheitsmoment der Scheiben mitbezug auf die in  $S$  sich projizierende Achse pro Längeneinheit der Stabachse.

Mit  $dS : dx = -p$  erhält nun die Differentialgleichung der Wellenbiegung die Form

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} - \Theta_1 \omega^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = m_1 \omega^2 y \quad (52),$$

wenn wir hier  $e = 0$  voraussetzen und die kritische Umlaufzahl in einfacherer Weise aus der Bedingung bestimmen, daß sich die Fliehkräfte und die elastischen Kräfte im indifferenten Gleichgewichte befinden sollen.

Für die freiaufliegende Welle von der Länge  $2l$  ergibt sich mit dem Ansatz  $y = a \cos kx$  zur Berechnung von  $k$  die Gleichung

$$JE k^4 + \Theta_1 \omega^2 k^2 - m_1 \omega^2 = 0 \quad (53)$$

andererseits wegen der Randbedingung für die Verbiegung nach ( $\alpha$ )

$$kl = \frac{\pi}{2}$$

welcher Wert in (53) eingesetzt, die kritische Geschwindigkeit zu

$$\omega_k^2 = \frac{JE \pi^4}{16 m_1 l^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi^2 \Theta_1}{4 m_1 l^2}\right)} \quad (53).$$

<sup>1)</sup> Hr. Wifslers, leitender Ingenieur bei Sautter, Harlé & Cie in Paris, teilt mir mit, daß er für den behandelten Fall auch schon Formeln zum Gebrauche seines Bureau aufgestellt habe.

ergibt. Der kritische Wert wird mithin in diesem Falle durch die Schiefstellung der Scheiben unter Umständen erheblich vergrößert.

β) Die **beidseitig eingespannte Welle** von der Länge  $2l$ . gibt ebenfalls die Möglichkeit einer bezüglich der Mittelsenkrechten und einer bezüglich des Halbierungspunktes der Lagerdistanz symmetrischen Verbiegung. Die weiteren Grenzbedingungen sind  $y=0$  und  $dy:dx=0$  für  $x=l$ . Es ergibt sich für  $y$  als gerade Funktion das Auftreten einer kritischen Geschwindigkeit, falls

$$\operatorname{tg}(kl) = -\operatorname{tg}h(kl)$$

wo  $\operatorname{tg}h$  die sogen. hyperbelische Tangente bedeutet, für deren Werte in der »Hütte« (des Ingenieurs Taschenbuch) ausführliche Tabellen mitgeteilt sind. Die Auflösung ergibt als Wurzeln

$$kl = \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi, \quad \frac{11}{4}\pi \dots$$

Ist  $y$  eine ungerade Funktion, so folgt

$$\operatorname{tg}(kl) = +\operatorname{tg}h(kl)$$

mit den Wurzeln

$$kl = \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{9}{4}\pi, \quad \frac{13}{4}\pi \dots$$

Die kritischen Umlaufzahlen verhalten sich mithin wie

$$3^2 : 5^2 : 7^2 : 9^2 : \dots = 1 : 2,8 : 5,4 : 9 : \dots$$

und die niedrigste derselben ist

$$\omega_k = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^4 \frac{JE}{m_1 l^4}} = 7,852 \sqrt{\frac{JE}{Ml^3}}$$

woraus der Wellenhalbmesser

$$r = 0,3790 \sqrt[4]{\frac{Ml^3 \omega_k^2}{E}}$$

Setzt man voraus, daß die Welle im Lager mit der geometrischen Achse stets einen kleinen Winkel einschließt, also während der Rotation einen Kegel zu beschreiben gezwungen wird, so ergibt die Rechnung auffallenderweise dieselben kritischen Geschwindigkeiten wie bei horizontaler Einspannung. Dasselbe trifft zu, wenn die Welle durch schiefe (festgelegte) Lager von Anfang an verspannt ist.

γ) Die **einseitig wagerecht eingespannte Welle** ergibt mit dem in Fig. 44b eingezeichneten Koordinatensystem

die Bedingungen  $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  für  $x=0$ , ferner Biegemoment und Schubkraft  $=0$ , d. h.  $\frac{d^2y}{dx^2}=0$  und  $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ , für

$x = l$ , also vier Gleichungen zur Bestimmung von  $a, a', b, b'$  in Formel (46).

Wenn die Determinante der Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen verschwindet, so ergeben sich wieder un-

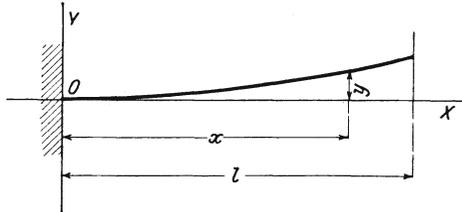


Fig. 44 b.

endlich große Werte der Durchbiegung. Die Rechnung führt auf den Ausdruck

$$\cos kl [e^{kl} + e^{-kl}] + 2 = 0 \quad \dots \quad (55),$$

und die größte Wurzel  $kl$  dieser Gleichung ist  $kl = 1,875$  oder rd.  $1,19 (\pi : 2)$  gegenüber  $(\pi : 2)$  im vorigen Fall; also ist schließlich mit Gl. (47) die kritische Geschwindigkeit

$$\omega_k = 3,492 \sqrt[2]{\frac{JE}{Ml^3}} \quad \dots \quad (56)$$

oder der Wellenhalbmesser

$$r = 0,5682 \sqrt[4]{\frac{Ml^3 \omega_k^2}{E}} \quad \dots \quad (57).$$

In Wirklichkeit wird die Steifheit der Welle durch die Naben der Scheibenräder erhöht werden. Es muß der Erfahrung vorbehalten bleiben zu ermitteln, wie groß dieser Einfluss ist, d. h. ein wie großer Teilbetrag des Trägheitsmomentes der Nabe zum Trägheitsmoment der Welle hinzugefügt werden darf.

**19. Die glatte Welle unter dem Einflusse ihrer Eigenmasse. Raschlaufende Transmissionen.**

Ist eine sonst unbelastete (z. B. vertikal gedachte) Welle von Anfang an verbogen, so wird sie durch die Fliehkraft weiter deformiert, und die ausgeübte elastische Gegenkraft ist hierbei der Differenz der wahren und der anfänglichen Durchbiegung proportional. Das Verhalten der Welle wird mithin dasselbe sein, als wäre eine ideale geradlinige Achse vorhanden, welche die elastischen Kräfte hergibt, während die Belastung durch die exzentrisch gelagerten (im übrigen frei gedachten) Massen der Welle geliefert wird. Die entwickelten Formeln können somit ohne weiteres angewendet werden.

Für die beidseitig frei aufliegende Welle von der Länge  $2l$  haben wir in Formel (49) einzusetzen

$$M = \mu \pi r^2 2l$$

und erhalten

$$\omega_k = 1,234 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots \dots \dots (58)$$

oder

$$r = 0,811 \omega_k l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E}} \dots \dots \dots (59).$$

Für die beidseitig eingespannte Welle

$$\omega_k = 2,776 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

$$r = 0,360 \omega_k l^2 \sqrt{\frac{\mu}{E}}.$$

Für die einseitig eingespannte Welle von der Länge  $l$  ist

$$M = \mu \pi r^2 l$$

und

$$\omega_k = 1,756 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots \dots \dots (60)$$

$$r = 0,5695 l^2 \omega_k \sqrt{\frac{\mu}{E}} \dots \dots \dots (61).$$

Schließlich ergibt sich für Flufseisen mit  $\mu = 0,0078:981$  und  $E = 2150000$  und mit Einführung der minutlichen Umdrehungszahl  $n$  in den drei Fällen

$$r = \frac{1,630}{10^7} l^2 n \text{ bzw. } \frac{0,725}{10^7} l^2 n \text{ bzw. } \frac{1,146}{10^7} l^2 n \quad (62),$$

$r$  und  $l$  in cm. Beispielsweise wird für die beidseitig frei aufliegende Welle bei  $n = 1500$  und  $l = 100$  cm  $r = 2,44$  cm.

Die entwickelten Formeln dürften auch für die Anlage rasch laufender Transmissionen Beachtung verdienen, da wir von diesen zu verlangen haben, daß sie sich hinlänglich tief unter ihrer kritischen Umdrehungszahl befinden.

### 19a. Versuche über die kritische Geschwindigkeit glatter und stetig belasteter Wellen.

Bei der Neuheit der in den vorigen Abschnitten besprochenen Erscheinungen schien es von Wert die Ergebnisse der Theorie an der Wirklichkeit zu prüfen. Es wurden demgemäß einige Versuche mit Kaliber-Rundstahl von 8,5 und 3,5 mm Dmr. vorgenommen, indem man diese dünnen Wellen unmittelbar mit der Laufradwelle einer Laval-turbine im Maschinenlaboratorium des Eidgen. Polytechnikums

verband, wodurch die Möglichkeit gegeben war, Umlaufzahlen bis zu 25000 i. d. Min. zu erreichen. Durch eine Bremse auf der Zahnradwelle liefs sich die Geschwindigkeit sehr bequem regeln. Die Lagerung erfolgte in 56 mm langen Büchsen, in welchen man die Wellen als nahezu »eingespannt« ansehen kann. Im übrigen bestand das »Fundament« blofs aus einem Holzpfosten, der auf einer Balkenunterlage aufruhete. Damit die Welle nicht brach, wurde der gröfste Anschlag durch Führungen auf etwa 10 mm im Radius beschränkt. Schon der erste Versuch erbringt den Beweis für die Existenz der kritischen Geschwindigkeiten. Die anfänglich nur etwa 1 mm schlagende Welle zeigt bei einer Steigerung der Geschwindigkeit unruhigen Lauf; in der Nähe der kritischen Zahl biegt sie sich stark aus und beginnt in der Führung stark zu streifen. Kaum hat man die kritische Zahl überholt, streckt sie sich gerade aus, und vom anfänglichen »Schlagen« ist nichts wahrzunehmen. Bei höherer Geschwindigkeit ist bald die zweite kritische Umlaufzahl erreicht, mit einem Knoten in der Lagermitte, daraufhin die dritte, mit zwei Knoten, und so fort.

Die Kaliberstähle waren übrigens so homogen und gut ausgerichtet, dafs die Welle bei der zweiten und den höheren kritischen Umlaufzahlen die Führungen nicht berührte, d. h. der Ausschlag unterhalb 10 mm radialer Weite blieb. Wir müssen also die Exzentrizität  $e$  unserer Formeln als ungewein klein voraussetzen.

Auch quantitativ geben die Versuche eine befriedigende Bestätigung der Theorie, wenn man den primitiven Charakter unseres Apparates berücksichtigt. Im übrigen kamen auch neue Erscheinungen zum Vorschein, die zu weiteren Untersuchungen anregen. In folgender Zusammenstellung sind als »kritische« Umlaufzahlen diejenigen angegeben, bei welchen der Druck auf die Führung oder das Erzittern des Gestelles der Schätzung nach sein Maximum erreichte.

1) Glatte Welle, 8 mm Dmr.,  $2l = 640$  mm, einseitig eingespannt.

Kritische Umlaufz./min	theoret. rd.	850	5400	15000	29500	
»	» beobachtet rd.	800	5000	14000	23000	
Verhältnis theoretisch	. . . . .	1	: 6,3	: 17,6	: 34,6	
»	beobachtet	. . . . .	1	: 6,2	: 17,4	: 29

2) Glatte Welle, 8 mm Dmr.,  $l = 450$  mm, einseitig eingespannt.

Kritische Umlaufzahl pro min	theoretisch	1730	11000	
»	» » beobachtet	1600	10300	
Verhältnis theoretisch	. . . . .	1	: 6,3	
»	beobachtet	. . . . .	1	: 6,4

3) Glatte Welle, 8 mm Dmr.,  $2l = 860$  mm, beidseitig eingespannt.

Kritische Umgangszahl pro min theoretisch $n_k$ . . . . .	2980	8300	16200
beobachtet . . . . .	2700	4800	12000
Verhältnis theoretisch . . . . .	1	: 2,8	: 5,4
» beobachtet . . . . .	1	: 1,8	: 4,4

4) Glatte Welle, 3,5 mm Dmr.,  $2l = 536$  mm, beidseitig eingespannt.

Kritische Umgangszahl pro min theoretisch . . . . .	3360	9400	18400
beobachtet . . . . .	3200	(5200)	8200 (9500) 17000
		(Unruhe)	(Unruhe)
Verhältnis theoretisch . . . . .	1	: 2,8	: 5,4
» beobachtet . . . . .	1	: (1,6) : 2,55	: (2,95) : 5,3

Diese dünne Welle zeigt schwache Erzitterungen (»Unruhe«) auch bei theoretisch nicht motivierten Umlaufzahlen, was ich aufgrund später gemachter Erfahrungen auf ungenaue Montierung zurückführe.

5) Welle von 8 mm Dmr. mit 20 Schmiedeisen-Scheiben von je 180 mm Dmr., 2 mm Dicke belastet; Gesamtgewicht 8,93 kg,  $2l = 860$  mm, beidseitig eingespannt.

Kritische Umgangszahl pro min theoretisch $n_k$ . . . . .	580	1620	3160	5250
beobachtet . . . . .	500	1300	2800	(7000?)
Verhältnis theoretisch . . . . .	1	: 2,8	: 5,4	: 9
» beobachtet . . . . .	1	: 2,6	: 5,6	: (14?)

Ueberblickt man diese Zahlen, so zeigt sich die beobachtete kritische Geschwindigkeit durchweg kleiner wie die theoretische, während das Verhältnis der Umlaufzahlen verschiedener Ordnung leidlich mit dem theoretischen übereinstimmt. Der Grund der ersten Abweichung dürfte im Mitschwingen des bei meinen Versuchen sehr leichten Widerlagers liegen. In der Tat ist die Abweichung bei der schwersten Welle (Nr. 5) auch die größte. Es wird Aufgabe weiterer Versuche sein, den Unterschied vollends aufzuklären. doch schien mir auch das vorliegende Material einer vorläufigen Mitteilung wert.

## 20. Die Dampfturbinenlager.

Obwohl die eingehendere Behandlung konstruktiver Einzelheiten der Dampfturbine über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht, sei doch auf die vorzüglichen Untersuchungen von Stribeck<sup>1)</sup> und Lasche<sup>2)</sup> über Lagerreibung hingewiesen.

<sup>1)</sup> Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1901 S. 1343.

<sup>2)</sup> Desgl. 1902 S. 1890.

Innerhalb der Grenzen von Druck und Geschwindigkeit, die bei Dampfturbinen inbetracht kommen, stellt Lasche für den Zusammenhang zwischen Druck  $p$  pro Flächeneinheit der Zapfenprojektion ( $dl$ ), der Gleitflächentemperatur  $t^{\circ}$  C und dem Reibungskoeffizienten  $\mu$  das Gesetz

$$p\mu t = \text{Konst} = 2$$

auf, wobei als Grenzen von  $p$  etwa 1 bis 15 kg/qcm, von  $v$  etwa 5 bis 20 m, von  $t$  etwa 30 bis 100<sup>o</sup> C anzusehen sind und der Einfluß der Geschwindigkeit in den angegebenen Grenzen ein sehr geringer ist. Die höchst wichtige Untersuchung der Ausstrahlungs- und Wärmeableitungsfähigkeit einiger Lager ergab, daß man pro Stunde, auf 1 qcm der Lagerlauffläche ( $= \pi dl$ ) und 1<sup>o</sup> C Temperaturdifferenz gegen die Umgebung auf eine Wärmeabgabe rechnen könne, die 1,5 bis 3 bis 6 mkg Reibungsarbeit äquivalent ist. Die gesamte Abfuhr ist mithin, wenn wir mit  $k$  den obigen Koeffizienten verstehen:

$$A = k\pi dl (t - t_0)$$

und muß, wenn wir sicherheitshalber von der Wärmeableitung durch die Welle absehen, der gesamten Reibungsarbeit

$$A = \mu dlpv$$

gleich sein. Verbunden mit dem Gesetze  $\mu pt = K$  ergibt sich hieraus

$$t(t - t_0) = \frac{K}{\pi k} v$$

zur Berechnung der zu erwartenden Lagertemperatur  $t$ . Fällt diese Temperatur bedenklich hoch aus, d. h. überschreitet sie 100<sup>o</sup> C, so ist eine Kühlung des Lagers, oder eine Zirkulationskühlung mit besonders gekühltem Oel vorzusehen. Zu letzterem Mittel greift die Mehrzahl der Turbinenkonstrukteure.

Um die stets in geringem Maße vorhandene Wellenerschütterung aufzufangen, konstruiert Parsons Lager aus 3 oder mehr konachsialen Büchsen, die ein geringes Spiel besitzen, durch welches Oel durchgespült wird. Die Viskosität des Oeles setzt sich seinem Hinausquetschen aus dem engen Spalte entgegen, und die Büchsen wirken als intensiv dämpfende Bremsen.

Neuere Ausführungen scheinen im übrigen als gewöhnliche Lager mit Kugelschalen und Oelspülung ebenfalls zu befriedigen.

## 21. Dampfreibung rotierender Scheiben.

Unmittelbare Bestimmungen des Reibungswiderstandes, von welchem die Leerlaufarbeit der Turbine abhängt, liegen nur in spärlicher Anzahl vor. Der Freundlichkeit der de

Laval-Gesellschaft, Stockholm, verdanke ich folgende Angaben:

Zahlentafel 1.

Maschinen- größe	Uml./min des Turbinen- rades	Durch- messer des Tur- binen- rades mm	Um- fangs- ge- schwin- digkeit m/s-k	Leerlauf einschließlich Zahn- radvorgelege bei einem Drucke des Abdampfes von			
				1 at abs.		0,12 at abs.	
				PS	$\alpha$	PS	$\alpha$
10 bis 15	24000	150	188	3,0 bis 3,3	14,1	—	—
20 » 30	20000	225	237	5,5	17,4	—	—
50 » 75	16400	300	257	10 bis 11	14,4	4	13,3
100 » 150	13000	400	272	21	13,7	—	—
100 » 150	13000	500	340	—	—	8	13,1
225 » 300	10600	500	277	rd. 35	13,8	—	—
225	11000	620	357	—	—	rd. 18	16,5
300	10600	760	422	—	—	» 30	11,1

Sehr genaue Messungen sind von E. Lewicki jun. an einer 30pferdigen de Laval-Turbine angestellt worden, worüber in Z. 1901 S. 1717 berichtet ist. Lewicki fand die Leerlaufarbeit beim Antriebe der Turbine durch einen Elektromotor und 20000 Uml./min (entsprechend 2000 am Vorgelege) wie folgt:

Zahlentafel 2.

Die Turbine lief in	Tem- peratur °C	gesamte Leerlauf- arbeit der Turbine bei atm. Druck PS	Radwiderstand allein			
			bei atm. Druck		im Vakuum von 0,36 at abs.	
			PS	$\alpha$	PS	$\alpha$
Luft . . . . .	30	6,8	4,6	—	—	—
gesättigtem Dampf	—	5,5	3,3	10,54	1,5	12,53
überhitztem Dampf	123	5,10	2,85	9,70	0,95	9,09
	184	4,55	2,25	8,83	—	—
	244	4,30	2,05	9,11	—	—
	300	4,15	1,88	8,43	0,60	8,30

Diese Angaben zeigen übereinstimmend an, daß der Leerlaufwiderstand mit dem spezifischen Gewichte der umgebenden Dampf-atmosphäre stark wächst. Die Physik lehrt nun zwar, daß die Gasreibung vom Drucke, d. h. dem spezifischen Gewichte, unabhängig ist, mit der Temperatur hingegen wächst; doch ist zu beachten, daß der Widerstand des Turbinenrades in der Hauptsache durch die ventilatorartige Wirkung der Schaufeln verursacht wird, und dieser Arbeitsaufwand ist der Dichte und angenähert der dritten

Potenz der Umfangsgeschwindigkeit proportional. Wir benutzen daher, solange keine genaueren Versuchsergebnisse bekannt sind, als einfachste Formel

$$N_0 = \alpha F \left( \frac{u}{100} \right)^3 \gamma \dots \dots (63),$$

worin  $N_0$  den Leerlaufwiderstand in PS,

$F$  den Inhalt der Kreisfläche vom Durchmesser des Turbinenrades in  $qm$ ,

$u$  die Umfangsgeschwindigkeit in  $m/sk$ ,

$\gamma$  das spezifische Gewicht des Dampfes in  $kg/cbm$

bedeutet. Für  $\alpha$  erhalten wir die in den Zahlentafeln ausgeführten Werte. Als Raddurchmesser für die Turbine von Lewicki ist das Maß von 225 mm vorausgesetzt.

Es liegt auf der Hand, daß das Gesetz des Reibungswiderstandes von der Form der Scheibe und von der Art, sowie der Länge der Schaufeln abhängen muß. Man wird die Wand des Gehäuses den Scheiben sich möglichst nahe anschmiegen lassen, insbesondere um die Schaufeln herum, um den Querschnitt des Dampfstromes, der durch die Wirbelung entsteht, d. h. die bewegte Masse zu verkleinern. Nach neueren Versuchen scheint bei glatten Scheiben der Wert der Konstante  $\alpha$  auf 5 und weniger herabzusinken. Ebenso wird mir mitgeteilt, daß der Exponent der Geschwindigkeit kleiner, und zwar = 2,7 bis 2,2 gefunden worden sei. Eine Fortsetzung diesbezüglicher Versuche ist sehr erwünscht.

Die Versuche von Lewicki, für welche in Fig. 45 der Koeffizient  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Temperatur darge-

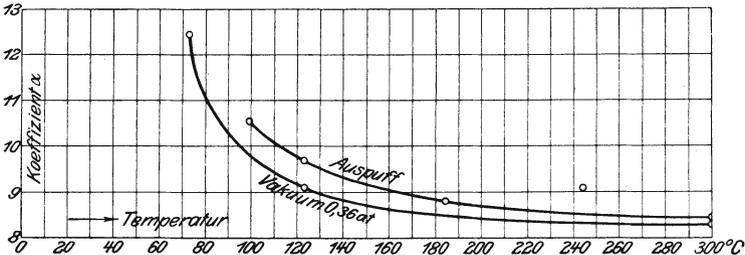


Fig. 45.

stellt ist, zeigen in ungemein klarer Weise die Abnahme der Reibung mit zunehmender Ueberhitzung, bestätigen aber die hin und wieder ausgesprochene Ansicht nicht, daß die Reibung beim Uebergang vom gesättigten Dampf zum überhitzten wegen Abwesenheit von Wassertropfen sprunghaft abnehmen müsse.

Schätzen wir den Kraftverbrauch des Zahnradvorgeleges an der 300 pferdigen Laval-Turbine zu 10 PS, sodafs für das

Rad allein 20 PS übrig blieben, so würde nach unserer Näherungsformel ein Rad von rd. 1500 mm Dmr. das 4fache, d. h. 80 PS, ein Rad von 3000 mm Dmr. abermals das 4fache, d. h. 320 PS im Vakuum an Leerlaufarbeit aufzehren. Im Dampfe von atmosphärischer Spannung würden gar nahezu die 10fachen Beträge notwendig werden! Diese Zahlen lehren, daß der Vorteil, den die Vergrößerung des Durchmessers und der Umfangsgeschwindigkeit durch Erhöhung des »hydraulischen« Wirkungsgrades gewähren, sehr leicht durch die vermehrte Leerlaufarbeit aufgehoben werden kann. Der Entwerfende einer aus Scheibenrädern zusammengesetzten Turbine muß demnach diejenigen besten Verhältnisse aufzufinden trachten, bei welchen die Summe der Verluste aus unvollständiger Dampfausnutzung und Leerlaufarbeit ein Minimum ist.

## D. Der Energieumsatz in der Dampfturbine.

### 22. Der thermodynamische Wirkungsgrad.

Man vergleicht die effektive Leistung  $L_e$ , welche von einer Turbine mit Rücksicht auf die Dampf- und Lagerreibung für einen bestimmten Anfangszustand des Dampfes und einen gegebenen Kondensatordruck erhältlich ist, mit der Leistung  $L_0$  einer idealen Turbine, in welcher keine Reibungen herrschen, und in welcher die Energie des Dampfes vollständig, d. h. so, daß die Austrittsgeschwindigkeit bis auf null herabsinkt, ausgenutzt wird. Dieselbe Arbeit liefert 1 kg Dampf in einer reibungslosen Kolbenmaschine ohne Drosselungen mit wärmedichten Zylindern, auf null reduziertem schädlichem Raume und Expansion bis auf den Kondensatordruck.

Das Verhältnis

$$\eta_e = \frac{L_e}{L_0} \quad . . . . . (1)$$

nennen wir den thermodynamischen Wirkungsgrad, bezogen auf die effektive Leistung.

Wenn die Dampfwärme des Anfangszustandes mit  $\lambda_1$ , diejenige der adiabatischen Expansion auf den Kondensatordruck mit  $\lambda_2'$  bezeichnet wird, so ist nach früherem die theoretische Leistung in mkg für 1 kg Dampf

$$L_0 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2')}{A} \quad . . . . . (2).$$

Der gesamte Wärmearaufwand  $Q_0$  ist wesentlich größer als  $AL_0$  und reicht je nach der Speisewassertemperatur mehr oder weniger an  $\lambda_1$  heran. Der »Gesamtwirkungsgrad« ist das Verhältnis

$$\eta_0 = \frac{AL_e}{Q_0} \quad . . . . . (3).$$

Die Bestimmung von  $L_0$  ist mithilfe der Entropietabelle leicht möglich; es haben indes Rateau (Annales des Mines 1897) und Mollier (Z. 1898) empirische Formeln gegeben, aus welchen man  $L_0$  berechnen kann, und zwar ersterer für gesättigten Dampf

$$K = 0,85 + \frac{6,95 - 0,92 \lg p_1}{\lg \left( \frac{p_1}{p_2} \right)} \quad . . . \quad (4),$$

letzterer für gesättigten Dampf

$$K = \frac{6,87 - 0,9 \lg p_2}{\lg \left( \frac{p_1}{p_2} \right)} \quad . . . \quad (5),$$

für überhitzten Dampf

$$K' = \frac{K}{1 + 0,000755 \left[ (T' - T) - T \ln \frac{T'}{T} \right] K} \quad . \quad (6).$$

Hierin bedeutet

$K$  bzw.  $K'$  den Dampfverbrauch der vollkommenen Turbine für 1 PS-st,  
 $p_1$  den Anfangsdruck in kg/qcm,  
 $p_2$  » Enddruck in kg/qcm,  
 $T$  die absolute Sättigungstemperatur,  
 $T'$  » » Ueberhitzungstemperatur.

Nun leistet eine Pferdestärke eine Stunde lang wirkend 270 000 mkg oder 637 WE<sup>1)</sup>; wenn hierbei  $K$  kg Dampf verbraucht worden sind, so entfällt auf 1 kg die Arbeit

$$L_0 = \frac{270\,000}{K} \text{ mkg}$$

oder die nutzbar umgewandelte Wärmemenge

$$\lambda_1 - \lambda_2' = A L_0 = \frac{637}{K} \text{ WE} \quad . . . \quad (7).$$

## Achsal-Turbinen.

### 23. Die einstufige Druckturbine.

Der Dampf wird dem Rade durch kegelförmig erweiterte Düsen zugeführt, deren Masse nach der Zeunerschen Formel

<sup>1)</sup> Wir wählen diese Zahl, um mit dem Werte von  $A = 1/424$  mkg, welcher in den Dampftabellen benutzt ist, in Uebereinstimmung zu bleiben.

berechnet, beziehentlich graphisch, wie oben dargelegt, ermittelt werden<sup>1)</sup>).

<sup>1)</sup> Eine zeichnerisch-rechnerisch gemischte Methode für überhitzten Dampf benützt bei vernachlässigbarer Geschwindigkeit im Zuleitungsrohr die Grundformel für adiabatische reibungsfreie Strömung in der Gestalt

$$\frac{w^2}{2g} = - \int_{p_1}^{p_s} v dp - \int_{p_s}^p v dp$$

und führt die Integration im Ueberhitzungs- und im Sättigungsgebiet getrennt aus. Erstere ergibt  $\frac{\lambda_1 - \lambda_s}{A}$ , wo  $\lambda_s$  die Dampfwärme an der Grenzkurve bedeutet und am einfachsten der Entropietafel entnommen wird. Der zweite Teil wird mit dem Näherungsgesetz von Zeuner

$$p v^k = C$$

oder

$$\frac{1}{p^k} v = C',$$

worin  $k = 1,135$ , durchgeführt, und so ergibt sich

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\lambda_1 - \lambda_s}{A} + \frac{C'k}{k-1} \left( p_c^{\frac{k-1}{k}} - p^{\frac{k-1}{k}} \right)$$

Nun muß, wenn  $G$  das sekundlich durchströmende Dampfgewicht,  $f$  den veränderlichen Querschnitt bedeutet,

$$Gv = fw$$

sein, woraus

$$G = f \frac{w}{v}.$$

Da, wo  $\frac{w}{v}$  ein Maximum ist, muß  $f$  ein Minimum werden, und wir finden den Druck, bei welchem dies eintritt, indem wir

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{w}{v} \right) = 0$$

setzen. Die Auflösung nach  $p$  ergibt

$$\frac{p}{p_s} = \left[ \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{k} \frac{\lambda_1 - \lambda_s}{A p_s v_s} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (8),$$

worin  $p_s, v_s$  Druck und Volumen an der Sättigungskurve bedeuten. Wenn keine Ueberhitzung vorhanden war, so erhalten wir wegen  $\lambda_1 = \lambda_s$  die Zeunersche Formel

$$\frac{p}{p_s} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (9).$$

Fällt das in (8) berechnete  $p$  in das Ueberhitzungsgebiet, so gilt die Formel (8) nicht, es ist vielmehr Formel (9) anzuwenden, in dessen mit dem für überhitzten Dampf gültigen Exponenten  $k = 1,3$ . Zu Rechnungen mit überhitztem Dampf benutzt man die bequeme Zustandsgleichung von Battelli-Tumlirz

$$p(v + 0,0084) = 46,7 T \quad p \text{ in kg/qcm, } v \text{ in cbm}.$$

Aus dem zu  $p$  zu berechnenden  $w$  und  $v$  ergibt sich der engste

$$\text{Querschnitt } f_m = \frac{Gv}{w}.$$

Die theoretische Austrittsgeschwindigkeit aus der Düse  $c_0$  erhalten wir aus Formel

$$A \frac{c_0^2}{2g} = \lambda_1 - \lambda_2' \dots \dots \dots (10),$$

die wahre Austrittsgeschwindigkeit hingegen aus

$$A \frac{c_1^2}{2g} = (1 - \zeta) (\lambda_1 - \lambda_2') \dots \dots \dots (11),$$

wo  $\zeta$  der Energieverlust ist und bei Auspuff nach Delahorte = 0,05, bei Kondensation = 0,10 . . . 0,15 . . . 0,25 anzunehmen ist, wie aus unsern Versuchen hervorgeht.

Es wird mithin

$$c_1 = \varphi c_0,$$

wo  $\varphi = \sqrt{1 - \zeta}$ . Der Energieverlust  $\zeta (\lambda_1 - \lambda_2') = Q_z$  dient zur Auffindung des Endzustandes der Expansion im Entropiediagramme, d. h. der spezifischen Dampfmenge  $x_2$  beim Drucke  $p_2$ . Hieraus erhalten wir das Endvolumen  $v_2 = x_2 \sigma_2$  und den Endquerschnitt  $f_2 = \frac{G v_2}{c_1}$ . Der Kegelwinkel der Düse betrage

10 bis 12°, woraus sich die Länge derselben bestimmt. Machen wir die Düse länger, so entstehen die früher erörterten Verdichtungsstöße, d. h. große Energieverluste; machen wir sie kürzer, so tritt der Dampf mit einer höheren Spannung aus der Düse aus, und es werden sich, sofern der Strahl zu seitlicher Ausbreitung Raum hat, Schallschwingungen einstellen. Nach Beobachtungen von Rateau<sup>1)</sup> und Delaporte<sup>2)</sup> dürfte man indessen mit dieser Kürzung ziemlich hoch gehen, ohne den Wirkungsgrad merklich zu beeinflussen.

Als Eintrittswinkel  $\alpha$  wählt man 17 bis 20°. Die graphische Konstruktion liefert aus Fig. 46 durch Angliederung der negativen Umfangsgeschwindigkeit  $-u$  an  $c_1$  die »relative« Eintrittsgeschwindigkeit  $w_1$  in das Laufrad und den Schaufelwinkel  $\alpha_1$ . Hierbei wird  $\alpha_1$ , wie auch in Fig. 46 angedeutet, auf die Neigung des abgeschrägten Schaufelrückens und nicht auf die »führende« Schaufelfläche bezogen, gegen welche der Dampf einen unvermeidlichen Stoß ausüben wird. De Laval macht den Austrittswinkel  $\alpha_2 = \alpha_1$  oder ein wenig kleiner. Die relative Austrittsgeschwindigkeit  $w_2$  ist wegen der Reibung kleiner als  $w_1$ , und zwar

$$w_2 = \psi w_1,$$

wo bis auf weiteres  $\psi = 0,9 \dots 0,8 \dots 0,7$  zu schätzen wäre, entsprechend einem Energieverlust in der Schaufel von  $(1 - \psi^2)$ , d. h. 20 bis 50 vH. Ist die Schaufel gehörig verdickt, sodafs der Querschnitt des Dampfstromes überall gleich

<sup>1)</sup> Rateau, Les Turbo-Machines. Paris 1900.

<sup>2)</sup> Delaporte, Revue de Mécanique 1902, Maiheft.

grofs ist, so wird eine ähnliche Umwandlung von Geschwindigkeit in Druck stattfinden wie beim zylindrischen Rohre in den oben beschriebenen Versuchen. In der Tat ist die relative Eintrittsgeschwindigkeit wohl stets beträchtlich gröfser als

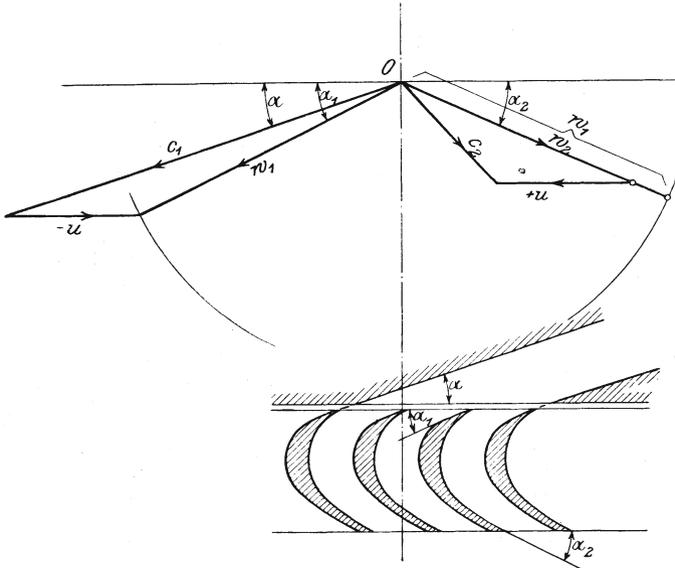


Fig. 46.

die Schallgeschwindigkeit, und man muß auf einen erheblichen Stau in der Schaufel gefasst sein. Die Vereinigung von  $w_2$  mit  $+u$  gibt die »absolute« Austrittsgeschwindigkeit  $c_2$ , welche wegen der ungenügend großen  $u$  meist schief gerichtet ist.

Die verfügbare Arbeit wird für 1 kg Dampf dargestellt durch

$$L_0 = \frac{c_0^2}{2g}.$$

Die Arbeitsverluste sind

$$L_z = \frac{c_0^2 - c_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} \dots (12);$$

die auf das Rad übertragene »indizierte«, oder, wie wir sie auch nennen wollen, die »Dampfarbeit« in mkg. für 1 kg Dampf ist

$$L = L_0 - L_z \dots (13).$$

Bringen wir  $L$  ins Verhältnis zu  $L_0$ , so entsteht der zum »hydraulischen« analoge »Wirkungsgrad der Dampfarbeit«

$$\eta_a = \frac{L_0 - L_z}{L_0} . . . . . (14).$$

Ziehen wir von der gesamten Dampfarbeit  $LG$  wobei  $G$  die sekundliche Dampfmenge bedeutet, die auf die gleiche Zeit bezogene Leerlaufarbeit  $L_r$  des Rades, welche wir bei allen Belastungen (sofern das Vakuum sich nicht ändert) nahezu gleich groß ansehen dürfen, ab, so erhalten wir die »effektive Arbeit« in mkg/sk

$$L_e G = LG - L_r = (L_0 - L_z) G - L_r,$$

mithin den Wirkungsgrad der effektiven Leistung

$$\eta_e = \frac{L_e}{L_0} = \frac{L_0 - L_z - \frac{L_r}{G}}{L_0} . . . . . (15).$$

Schließlich könnte noch das Verhältnis der elektrischen Leistung  $L_{el}$ , welche eine mit der Turbine gekuppelte Dynamo liefert, zu  $L_0$  infrage kommen und

$$\eta_{el} = \frac{L_{el}}{L_0} . . . . . (16)$$

als »elektrischer Wirkungsgrad« bezeichnet werden. Die effektive Leistung in PS ist

$$N_e = \frac{G L_e}{75} . . . . . (17).$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich der Dampfverbrauch pro PS<sub>e</sub> und st

$$3600 \frac{G}{N_e} = \frac{270000}{L_e} . . . . . (18).$$

Ein letzter Wirkungsgrad bringt noch die Dampfarbeit in Beziehung zu der Energie  $\frac{c_1^2}{2g}$ , welche dem Rade zur Verfügung gestellt wird, und könnte »Schaufelwirkungsgrad«  $\eta_s$  genannt werden, um anzudeuten, daß die Reibung des Rades und der Düse selbst nicht inbetracht fällt.

Wir finden

$$\eta_s = \frac{c_1^2 - (w_1^2 - w_2^2) - c_2^2}{c_1^2} . . . . . (19).$$

Wäre  $w_1 = w_2$  bei gleichen Winkeln  $\alpha_1 = \alpha_2$ , so hätte man

$$c_2^2 = c_1^2 + (2u)^2 - 2c_1(2u) \cos \alpha$$

und

$$\eta_s = 4 \frac{u}{c_1} \left( \frac{u}{c_1} \cos \alpha - 1 \right) . . . . . (20),$$

aus welcher Formel die Veränderung von  $\eta$ , mit dem maßgebenden Verhältnis  $\frac{u}{c_1}$  klar hervorgeht<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Für die Druckturbine mit radial gestellten peltonartigen Schaufeln gilt das in Fig. 47 dargestellte Schema der Geschwindigkeiten. Aus  $c_1$  erhält man durch Zusammensetzung mit  $(-u)$  die Geschwindigkeit  $w_1$ . Der Strahl teilt sich nach beiden Seiten so, daß die Strahlmitte näherungsweise eine Schraubenlinie mit dem Neigungswinkel  $\alpha'$  beschreibt. Man überzeugt sich leicht, daß die Zusatzkräfte der

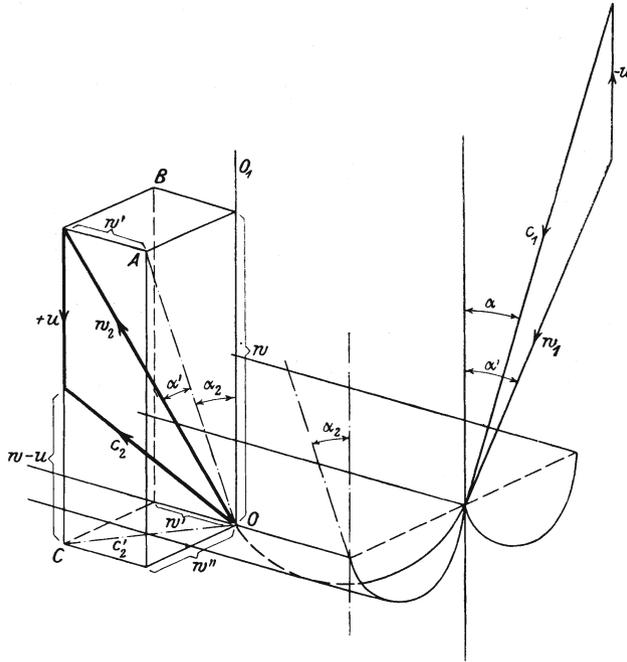


Fig. 47.

Relativbewegung eine vernachlässigbar kleine Abweichung ergeben. Die Projektion  $OA$  der Relativgeschwindigkeit  $w_2$  bildet dann mit der Umfangstangente  $OO_1$  wieder den Winkel  $\alpha_2$ , während die Neigung von  $w_2$  gegen  $OA$  den Eintrittswinkel  $\alpha'$  ergibt. Ist nun wieder  $w_2 = \psi w_1$ , so folgt mit den Bezeichnungen der Figur:

$$\begin{aligned} OA &= w_2 \cos \alpha' \\ w &= OA \cos \alpha_2 = w_2 \cos \alpha' \cos \alpha_2 \\ w' &= w_2 \sin \alpha' \\ w'' &= OA \sin \alpha_2 = w_2 \cos \alpha' \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich  $c_2'^2 = w'^2 + w''^2$  und aus den rechtwinkligen Komponenten  $c_2'$  und  $w-u$  schließlich die Austrittsgeschwindigkeit

$$c_2 = \sqrt{(w-u)^2 + c_2'^2}.$$

Bei der starken Verbreiterung des Strahles ist der Wert von  $c_2$  freilich nur als ein grober Näherungswert anzusehen.

Stodola.

In Fig. 47a sind die bekannten Parabeln, welche die Leistung einer Druckturbine als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit darstellen, für eine 10 pferdige Laval-Turbine des Maschinenlaboratoriums am Polytechnikum in Zürich verzeichnet. Die Umfangskräfte sind von der Geraden wenig abweichende

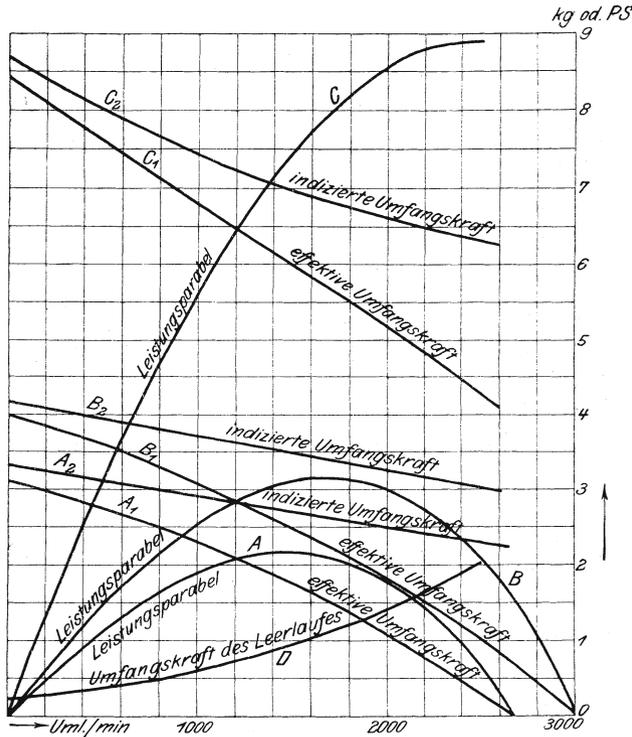


Fig. 47 a.

Linien. Es ist auch die Umfangskraft, die der Gesamtreibung entspricht, hinzugefügt, doch konnte sie nicht mit genügender Genauigkeit ermittelt werden, und es unterbleibt aus diesem Grunde auch die Berechnung des thermischen Wirkungsgrades dieser Versuche.

#### 24. Die mehrstufige Druckturbine.

Wenn nur eine kleine Zahl von Rädern (etwa 5 bis 6) verwendet werden sollen, dann wird am besten mit dem Entropiediagramm gearbeitet, indem man zunächst schätzungsweise die Druckstufen, auf welche die einzelnen Räder herunterexpandieren sollen, festlegt. Hierauf wird das erste Rad, das zwischen den Drücken  $p_1$  und  $p_2$  arbeiten soll, wie

vorhin erläutert, entworfen. Um das nächstfolgende Rad zu berechnen, muß man den dafür gültigen Anfangszustand des Dampfes ermitteln. Der Druck ist mit  $p_2$  vorgeschrieben; die spezifische Dampfmenge oder die Ueberhitzung wird aber gegenüber adiabatischer Expansion um den Wert der in Wärme umgesetzten Bewegungswiderstände erhöht. Nehmen wir an, daß von der Austrittsgeschwindigkeit  $c_2$  nur ein vernachlässigter kleiner Teil für das folgende Rad nutzbar gemacht werden kann (wie z. B. bei Pelton-Rädern, wo der Dampf erst durch längere Einführungen zum zweiten Rade gelangt) so werden die gesamte Widerstandsarbeit und der Austrittsverlust für 1 kg Dampf

$$L_z = \frac{c_0^2 - c_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} + \frac{L_r}{G} \quad (21).$$

in Wärme umgewandelt. In die Widerstandsarbeit ist hier bei grundsätzlich, wie oben geschehen, insbesondere auch die auf 1 kg Dampf bezogene Leerlaufarbeit  $\frac{L_r}{G}$  des Rades einzubeziehen. Praktisch ist freilich der Wärmewert der Leerlaufarbeit so gering, dass man ihn füglich im Entropiediagramm weglassen kann und die Leerlaufarbeit im ganzen erst zum Schluss von der indizierten Dampfarbeit abziehen darf. Hat z. B. die adiabatische Expansion vom Drucke  $p_1$  und der Temperatur  $T_1$  beim Drucke  $p_2$  auf die Temperatur  $T_2'$  geführt, so wird nunmehr eine Erhöhung auf  $T_2$  eintreten gemäß Gleichung

$$Q_z = A L_z = c_p (T_2 - T_2') \quad (22).$$

Der für das zweite Rad geltende Anfangszustand ist mithin  $p_2 T_2$  und die anfängliche Dampfwärme

$$\lambda_2 = q_2 + r_2 + c_p (T_2 - T_{2s}) \quad (23).$$

War der Dampf naß, so wird die spezifische Dampfmenge  $x_2'$  auf  $x_2$  erhöht, gemäß Gleichung

$$Q_z = r_2 (x_2 - x_2') \quad (24),$$

und es wird

$$\lambda_2 = q_2 + x_2 r_2 \quad (25).$$

In Fig. 48, welche die Entropiekurven darstellt, ist die Wärme  $Q_z = \text{Fläche } A_2' A_2 B_2 B_2'$  durch Schraffur hervorgehoben.  $Q_z$  ist nicht im ganzen verloren, weil der Dampf noch in den nachfolgenden Rädern arbeitet. Durch die Umwandlung der Widerstandsarbeit in Wärme hat die Entropie für 1 kg Dampf eine Steigerung um den Betrag  $\Delta s = B_2' B_2$  erfahren. Ist  $C_2 B_2 = T_k$  die Temperatur, die dem Kondensatordruck entspricht, so stellt nur  $\Delta s \cdot T_k = \text{Fläche } C_2' C_2 B_2 B_2'$  den Arbeitsverlust  $Z_1$  in WE dar, den die beschriebene nicht umkehrbare Verwandlung verursacht hat.

Zum Schlusse ist von Rad zu Rad eine Proberechnung zu veranstalten, ob nicht durch Verkleinerung des Durchmessers oder Veränderung des Druckes  $p_2$  soviel an Leerlaufarbeit des betreffenden Rades zu sparen ist, daß unter Umständen trotz der schlechteren Ausnutzung der Dampfergie ein Gewinn an effektiver Arbeit zu erzielen wäre.

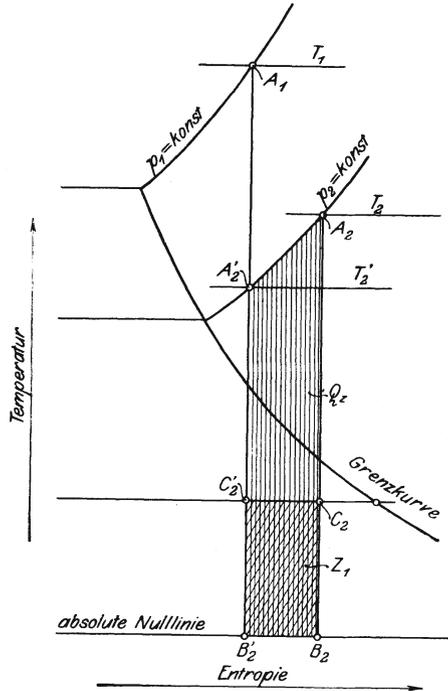


Fig. 48.

Es liegt auf der Hand, dass anstelle der Druckstufen ebenso gut Temperaturstufen vorgeschrieben werden können, doch ist dann die Darstellung der Reibungswärmen im Ueberhitzungsgebiet nicht mehr so einfach wie bis jetzt.

Bei mehr als 5 bis 6 Rädern ist dieses Verfahren zu zeitraubend, und es empfiehlt sich ein mehr summarisches Vorgehen, das am folgenden Beispiele erläutert werden soll.

## 25. Die vielstufige Turbine.

Für die Praxis von Bedeutung ist wohl nur die achsiale Turbine, für welche Parsons das Vorbild abgibt. Die Räder folgen unmittelbar aufeinander, Fig. 49, sodafs die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf ein Laufrad verlässt, für das folgende Leitrad nutzbar verwendet wird. Wir be-

ziehen uns je auf den Zustand, der im Endquerschnitte einer Leit- bzw. Laufzelle vorhanden ist<sup>1)</sup>, und bezeichnen die Austrittsgeschwindigkeit der Leitzelle mit  $c_1$ , durch deren Zusammensetzung mit  $-u$ , der negativen Umfangsgeschwindigkeit,  $w_1$  entsteht, d. h. die relative Geschwindigkeit, mit welcher der Dampfstrahl zunächst in den Spalt, dann in die Laufzelle eintritt. Im Rade wird  $w_1$  auf  $w_2$  beschleunigt, und die Resultierende aus  $w_2$  und  $+u$  ergibt  $c_2$ , die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus der Laufzelle. Die Geschwindig-

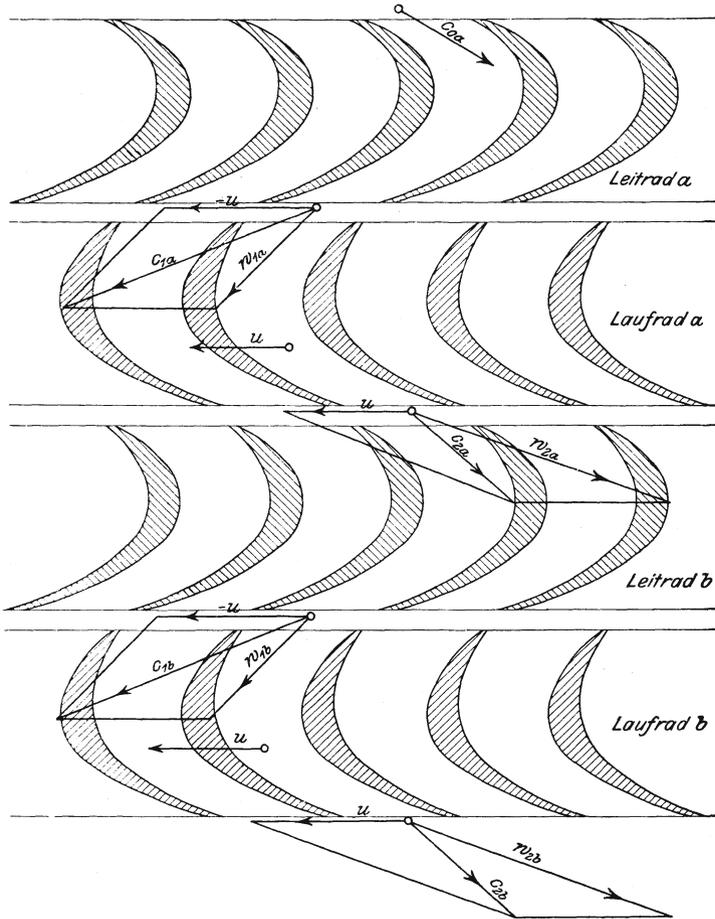


Fig. 49.

<sup>1)</sup> In Fig. 53 sind die darstellenden Punkte nur der Deutlichkeit halber in den Spalt verlegt.

keiten, die zu einem bestimmten Leit- und Laufradpaar gehören, versehen wir mit gleichartigen Buchstaben; so z. B. gelten für die aufeinander folgenden Radpaare  $a, b, c$ , die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} c_{1a}, w_{1a}, w_{2a}, c_{2a}; \\ c_{1b}, w_{1b}, w_{2b}, c_{2b}; \\ c_{1c}, w_{1c}, w_{2c}, c_{2c}; \\ \dots \end{aligned}$$

Es seien ferner die Dampfwärmen

$$\begin{aligned} &\text{am Austritt aus der Leitzelle } a \dots \lambda_a \\ &» \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Laufzelle } a \dots \lambda'_a \\ &» \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Leitzelle } b \dots \lambda_b \\ &» \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{Laufzelle } b \dots \lambda'_b \text{ usw.} \end{aligned}$$

Gemäß dem Grundgesetze der Dampfströmung gilt für das Laufrad  $a$ , bezogen auf die Relativgeschwindigkeiten:

$$A \left( \frac{w_{2a}^2 - w_{1a}^2}{2g} \right) = \lambda_a - \lambda'_a.$$

Für das Leitrad  $b$  ist  $c_{2a}$  die »Eintrittsgeschwindigkeit«; mithin haben wir

$$\left. \begin{aligned} A \left( \frac{c_{1b}^2 - c_{2a}^2}{2g} \right) &= \lambda'_a - \lambda_b, \\ \text{für das Laufrad } b \text{ wieder} & \\ A \left( \frac{w_{2b}^2 - w_{1b}^2}{2g} \right) &= \lambda_b - \lambda'_b \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

usw. Für die Zahlenrechnung empfiehlt sich die Beibehaltung der Wärmeeinheit als Maß, da man dann mit kleinen Zahlen zu hantieren hat. Die Ausdrücke auf den linken Seiten können mit  $A = 1/424$  WE je in der Form

$$A \frac{c_x^2}{2g} = \left( \frac{c_x}{91,2} \right)^2$$

geschrieben werden, was die Rechnung vereinfacht.

Der Entwurf einer neuen Turbine gestaltet sich nun am einfachsten, wenn man die Geschwindigkeiten  $c_1$ , die Winkel  $\alpha$ , die ebenfalls veränderliche Umfangsgeschwindigkeit  $u$  und den Austrittswinkel  $\alpha_2$  von Rad zu Rad nach einem bestimmten Plane wählt, sodafs durch einfache Dreiecke  $w_1, \alpha_1, w_2$  und  $c_2$  ermittelt werden können. Die Gleichungen (118) geben dann die Differenzen  $\lambda'_a - \lambda_b, \lambda_b - \lambda'_b$ , welche wir mit  $h_b', h_b''$  bezeichnen und kurz das »Wärmegefälle« (nach Analogie der hydraulischen Gefälle) nennen wollen. Insbesondere ist dann

$$h_b = h_b' + h_b'' \dots (27)$$

das in der Turbine  $b$  ausgenutzte Einzelgefälle.

## Das verfügbare »Gesamtgefälle«

wird durch folgende Angaben festgelegt: Die bisher bekanntgewordenen Dampfverbrauchszahlen von ausgeführten Turbinen weisen darauf hin, daß man in der Gesamtheit der Turbinenschaufeln bei Vollbelastung auf einen Energieverlust von 20 bis 30 vH gefaßt sein muß; zu diesem Verlust tritt die kinetische Energie des abfließenden Dampfes  $= c_2^2:2g$  (wo  $c_2$  die Auslafgeschwindigkeit des letzten Laufrades ist), für die man bei kleinen Turbinen etwa 10, bei größeren etwa 5 vH zulassen wird. Die schwerer zu schätzenden sonstigen Widerstände einschließlic die Leerlaufarbeit werden mit 10 bis 7 vH angesetzt. Schließlich kommt der Undichtheitsverlust hinzu, der wieder je nach dem Turbinensystem verschieden sein wird und 10 bis 5 vH betragen mag. Wir tragen diesem Verluste Rechnung, indem wir zum Schluss die theoretisch erforderliche Dampfmenge um den entsprechenden Betrag erhöhen, die Geschwindigkeiten aber mit der theoretischen Menge berechnen. Der Gesamtverlust beläuft sich auf 55 bis 35 vH für kleine bzw. große Einheiten.

Wenn der Kondensatordruck  $p_2 = 0,1$  kg/qcm oder darunter gewählt worden ist, berechnen wir die der adiabatischen reibungsfreien Expansion von  $p_1$  auf  $p_2$  entsprechende Dampfwärme  $\lambda_2$ . Es bildet

$$H_o = \lambda_1 - \lambda_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

das »theoretische Wärmegefälle«. Von diesem geht der Anteil  $\zeta H_o$  mit  $\zeta = 0,2$  bis  $0,3$  verloren, und es bleibt in der Herrmannschen Bezeichnung

$$H_w = (1 - \zeta) H_o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

als »wirksames Gefälle« übrig, welches zur Erzeugung der Geschwindigkeiten dient, und von dem der Auslafverlust und die Leerlaufarbeit abzuziehen sind, um die von der wirklich arbeitenden Dampfmenge gelieferte effektive Leistung zu erhalten. Wir können nun so viele Turbinen aneinanderreihen, bis durch die Teilgefälle  $h_a, h_b, h_c, \dots$  zuzüglich der beim Eintritt in das erste Leitrad aufzubringenden Geschwindigkeitshöhe  $A c_{oa}^2:2g$  in WE das wirksame Gefälle gerade aufgezehrt, d. h. bis

$$\frac{c_{oa}^2}{2g} + h_a + h_b + h_c \dots = H_w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

geworden ist. Wenn wir für ganze Gruppen von Einzelrädern gleiche Geschwindigkeiten vorschreiben können, so kann die Turbine auf diese Weise ohne Mühe berechnet werden.

Im allgemeinen läßt man aber die Geschwindigkeiten stetig zunehmen, und des wird bei 50 und mehr Stufen obige Rechnung so umständlich, daß sich die Anwen-

derung des folgenden graphischen Verfahrens empfiehlt, bei welchem man kleine Differenzen durch Differentiale ersetzt und zu bequemer graphischer Integration gelangt. Man denkt sich die einzelnen Turbinen durch die in gleichen (aber noch unbekannt) Abständen auf der Grundlinie  $B$  abgetragenen Teilpunkte, Fig. 50, dargestellt. In diesen Teilpunkten werden, wie unten erläutert, Geschwindigkeiten, Druck und Ge-

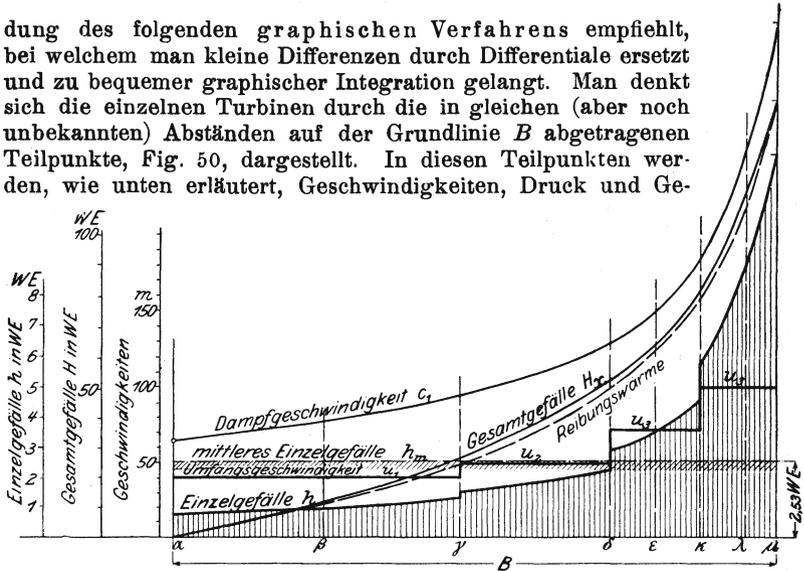


Fig. 50.

fälle der betreffenden Turbine als Ordinaten eingezeichnet. Man beginnt mit der

#### Wahl der Umfangsgeschwindigkeit $u$ .

Je größer diese sein darf, desto besser für die Dampfausnutzung; doch wird uns durch zwei Rücksichten eine Grenze gesteckt. Der Eintrittsquerschnitt, der aus dem voraussichtlichen Wirkungsgrade und der Leistung (mithin der Dampfmenge) von vornherein berechnet werden kann, erweist sich selbst bei 1000 PS Leistung so klein, daß bei etwa 1500 Umdr. und über 50 m betragender Umfangsgeschwindigkeit die Schaufeln bei voll be-

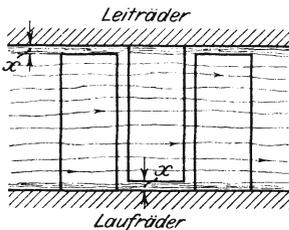


Fig. 51.

wollen, indem in der Gleichheit der Verhältnisse an Leit- und Laufschaufel) der Undichtheitsverlust dann 4 bis 5 vH beträgt. Dies führt dazu, stellenweise mit Geschwindigkeiten von 35 bis 40 m anzufangen. Bei den langen Schaufeln

schlagen Turbinen nur wenige Millimeter lang werden. Da z. B. bei der Parsonsschen Ausführung das Spiel  $\alpha$  in Fig. 51 zwischen Schaufel und Gehäuse bzw. Trommel eine Stelle der Undichtheit ist, wird man das Verhältnis dieses Zwischenraumes zur Schaufellänge wohl nicht unter  $\frac{1}{40}$  bis  $\frac{1}{50}$  herabsetzen

der letzten Räder spielt der Spalt keine Rolle mehr; hier wird  $u$  so groß gewählt, wie es die Festigkeit der Räder bezw. der Schaufelbefestigung zulässt. Von dem kleinen Anfangswert steigt  $u$  dann in Stufen, wie Fig. 50 erkennen lässt, auf den Endwert hinauf

#### Wahl der Winkel.

Je kleiner die Austrittswinkel am Leit- und Laufrade, d. h.  $\alpha$  und  $\alpha_2$ , sind, desto mehr Gefälle zehren wir bei gegebener Dampf- und Umfangsgeschwindigkeit in einer Turbine auf, desto kleiner wird die Stufenzahl, was günstig wäre. Allein zu kleine Winkel bedingen schmale und lange Kanäle, vergrößern hierdurch die Dampfreibung und rufen durch die im Verhältnis größere Schaufeldicke stärkere Querschnittserweiterungen, mithin Wirbel hervor. Als praktisches Mittel wird bei Ueberdruckturbinen der Wert 20 bis 25° gelten können. Bei Druckturbinen findet man  $\alpha_2$  größer, meist =  $\alpha_1$ .

#### Die Wahl der Dampfgeschwindigkeit

mufs mit Rücksicht auf das Bestreben getroffen werden, eine Turbine mit kleinstmöglichen Reibungsverlusten zu erhalten. Da die Reibung mit dem Quadrate der Geschwindigkeit und mit der Länge des Reibungsweges, d. h. mit der Zahl der Turbinen, wächst, so wird es einen günstigsten Wert für  $c_1$  geben, der jedoch noch nicht genau ermittelbar ist. Machen wir  $c_1$  klein, etwa so, daß wie bei hydraulischen Turbinen  $c_2$  achsial gerichtet würde, so verbrauchen wir in einem Rade zu wenig Gefälle und erhalten zu viele Stufen, einen zu großen Reibungsweg und vor allem zu viele Schaufelstöße, die wohl im Widerstandsverlust eine besondere Rolle spielen. Machen wir  $c_1$  groß, dann erhalten wir wohl wenig Räder, allein die Reibung steigt, weil  $c_1^2$  zu rasch wächst. Ein richtiges praktisches Mittel scheint für Ueberdruck zu sein  $u:c_1 = 0,5 \dots 0,3$ ; bei Druckturbinen noch weniger. Wir lassen in Fig. 50  $c_1$  nach ungefähr hyperbolischer Kurve gegen das Ende zu rascher ansteigen. Der Endbetrag von  $c_1$  wird mit Rücksicht auf den Auslaßverlust und die häufig unausführbare große Schaufellänge des letzten Rades festgelegt.

Für das Weitere ist die Behandlung der Ueberdruck- und der Druckturbine zu trennen.

#### a) Die Ueberdruckturbine.

Die Zusammensetzung der für einige Turbinen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta \dots$  herausgegriffenen  $c_1$  mit  $-u$  liefert im Geschwindigkeitsplan Fig. 52 (von welchem es bei  $\alpha = \alpha_2$  genügt, die eine Hälfte zu zeichnen) die Geschwindigkeiten  $u_1$ .

Wir dürfen den Spaltdruck frei wählen. Am einfachsten ist,  $w_2 = c_1$  und  $\alpha_2 = \alpha$  zu machen, wodurch sich  $c_2 = w_1$  ergibt und die achsialen Komponenten  $c_a$  der vier Geschwindigkeiten  $c_1, w_1, w_2, c_2$  gleich groß werden, wenn wir gleiche Sshaufelzahl und -Dicke in Leit- und Laufrad voraussetzen

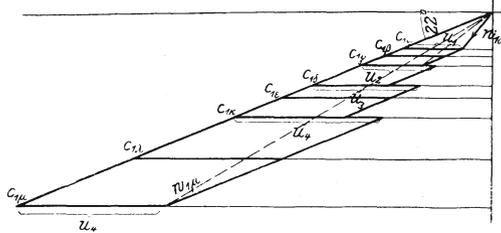


Fig. 52.

und von der sehr kleinen Aenderung des spezifischen Volumens beim Durchströmen eines Turbinensystems absehen. Auch dürfen Leit- und Laufschaufel mit übereinstimmendem Profil ausgeführt werden. Bei großer Stufenzahl wird die Austrittsgeschwindigkeit  $c_2$  wenig verschieden sein von der Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf in die Laufschaufel der eben betrachteten Turbine eintritt. Wir vernachlässigen den Unterschied zunächst ganz und schreiben mit einer praktisch genügenden Näherung:

$$\left. \begin{aligned} h' &= A \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} = A \frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} \\ h'' &= A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = A \frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} \end{aligned} \right\} \dots (31);$$

es wird also  $h' = h''$ , und wir haben halben Reaktionsgrad. Durch Addition folgt das Einzelgefälle für ein Leit- und Laufrad zusammen:

$$h = h' + h'' = 2A \frac{c_1^2 - w_1^2}{2g} \dots (32).$$

Beim Uebergang vom letzten Rade einer Gruppe mit gleichem  $u$  zum ersten Rade der nächstfolgenden entsteht wegen der plötzlichen Aenderung von  $u$  ein Sprung in  $h$ , was wohl zu beachten ist. Die Gesamtheit der  $h$ , die je an der entsprechenden Stelle aufgetragen werden, ergibt die Kurve der Einzelgefälle ( $h$ ), von welcher es genügt, für jede Gruppe etwa 3 Punkte zu bestimmen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Es wird etwas Zeit gespart, wenn man das Gefälle  $h$  mit Rücksicht auf Fig. 53 in der Gestalt

$$\begin{aligned} h &= A \frac{c_1^2 - w_1^2}{g} = A \frac{(c_1'^2 + c_1''^2) - (w_1'^2 + w_1''^2)}{g} \\ &= A \frac{c_1'^2 - w_1'^2}{g} = \frac{A}{g} (c_1' + w_1')(c_1' - w_1') \end{aligned}$$

anschreibt und beachtet, daß das geometrische Mittel  $(c_1' + w_1')(c_1' - w_1')$

Die Gesamtzahl der Stufen.

Es sei wie oben  $c_{0a}$  die Geschwindigkeit beim Eintritt in die Schaufeln des ersten Leitrades. Die Erzeugung von  $c_{0a}$  erheischt den Aufwand eines Gefälles

$$h_0 = A \frac{c_{0a}^2}{2g}$$

und die Gesamtzahl der Stufen ist nun aus der Bedingung zu bestimmen, daß die Summe der Einzelgefälle  $h$  zuzüglich der Geschwindigkeitshöhe  $h_0$  das wirksame Gefälle  $H_w$  ergibt:

$$h_0 + \sum_1^{z_0} h = H_w \dots \dots \dots (33).$$

Der unbekannte Abstand der die Turbinen darstellenden Punkte auf  $B$  ist nun

$$\Delta x = \frac{B}{z_0} \dots \dots \dots (34).$$

wo  $z_0$  die Zahl der Stufen bedeutet.

Bringen wir  $\Delta x$  im Zähler und Nenner des zweiten Gliedes in Gl. (33) als Faktor an, so folgt

$$H_w = \frac{\sum h \Delta x}{\Delta x} + h_0 = \frac{[h_1 \Delta x + h_2 \Delta x + \dots + h_n \Delta x]}{B} z_0 + h_0 \dots \dots (35).$$

graphisch erhalten werden kann, indem man von  $O_1$  aus mit  $c_1'$  den Kreis schlägt und im Endpunkte von  $w_1'$  die Lotrechte errichtet. Der

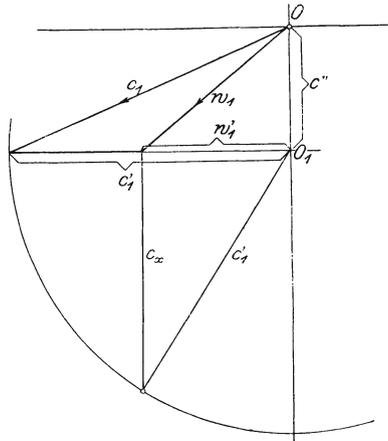


Fig. 53.

bis zum Kreise reichende Abschnitt  $c_x$  dieser Lotrechten ist das verlangte Mittel, d. h. es ist

$$h = 2 A \frac{c_x^2}{2g} = 2 \left( \frac{c_x}{91,2} \right)^2 \text{ WE.}$$

Die Zählersumme kann aber näherungsweise durch das Integral

$$\int_0^B h dx,$$

d. h. durch den Inhalt der von  $h$  begrenzten, in Fig. 50 schraffierten Fläche ersetzt werden. Die Division durch  $B$  ergibt das mittlere Wärmegefälle  $h_m$ , wir haben also

$$H_w = z_o h_m + h_o,$$

woraus die Zahl der Stufen

$$z_o = \frac{H_w - h_o}{h_m} \text{ oder einfach } \approx \frac{H_w}{h_m}. \quad (36)$$

mit der meist erlaubten Vernachlässigung von  $h_o$ .

Hierauf wird  $B$  in  $z_o$  gleiche Teile eingeteilt und die Anfänge der Gruppen auf einen Teilpunkt hingeschoben.

Die weitere Aufgabe betrifft die

Bestimmung der Druckverteilung und der Schaufelabmessungen.

Erstere hängt von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dampfreibungsverluste auf die einzelnen Räder verteilen. Die Dampfreibung wird beeinflusst durch die Weite und Länge der Schaufelkanäle, durch die Heftigkeit der Krümmungsänderungen, vor allem aber durch die Geschwindigkeit. Bis auf weiteres dürfte es zulässig sein, den Reibungsverlust in einem Rade mit dem Mittel des Geschwindigkeitsquadrates ins Verhältnis zu setzen, oder

$$R_1 = A \zeta_1 \frac{c_m^2}{2g}$$

zu schreiben, wo  $c_m$  ein Mittelwert der Dampfgeschwindigkeit wäre. Da ferner alle Geschwindigkeiten desselben Rades in einem festen Verhältnis zueinander stehen, wird auch

$$R_1 = A \zeta_1' \frac{c_1^2}{2g}$$

gelten, mit einem empirischen und unveränderlich vorausgesetzten Koeffizienten  $\zeta_1'$ . Summieren wir die Reibungswärmen vom ersten bis zu einem bestimmten Zwischenrade  $x$ , so entsteht

$$\sum_1^x R_1 = A \zeta_1' \sum_1^x \frac{c_1^2}{2g} = A \frac{\zeta_1'}{2g} \sum_1^x c_1^2 \Delta x = A \frac{\zeta_1'}{2g} \int_0^x c_1^2 dx \quad (37).$$

Diese Wärmemenge müßte als  $R_x$  im Entropiediagramm Fig. 54 in der oben beschriebenen Weise eingetragen werden, um bei dem betreffenden Zwischendrucke  $p_x$  den Punkt  $P_x$  der wahren Zustandskurve zu erhalten. Da indessen noch nicht bekannt ist, welcher Druck  $p_x$  zur Abszisse  $x$  ge-

hört, muß der Verlauf der Zustandskurve probeweise so angenommen werden, daß der Steigerung von  $c_1$  entsprechend der Verlust gegen das Ende ebenfalls rascher anwächst. Wie der Erfolg lehrt, gelangt man zu guten Er-

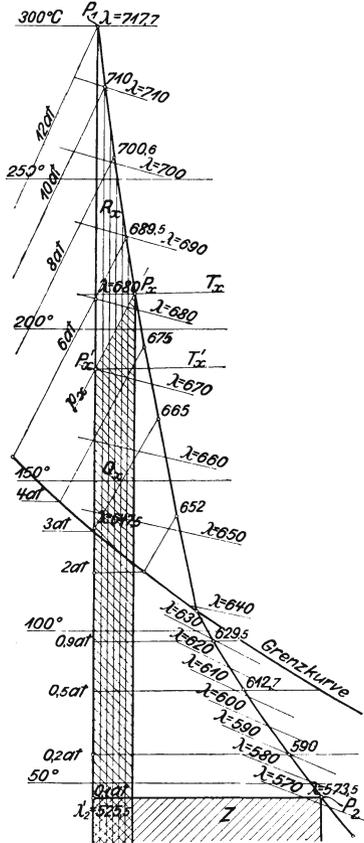


Fig. 54.

gebnissen, wenn man die in Fig. 54 kenntlich gemachte Verlustwärme  $Q_x$

$$Q_x = \zeta (\lambda_1 - \lambda_x')$$

setzt, unter  $\zeta$  den unveränderlichen durch Gl. (121) definierten Verlustkoeffizienten, unter  $\lambda_x'$  die Dampfwärme der adiabatischen Expansion auf den angenommenen Druck  $p_x$  beim Punkte  $P_x'$  verstanden. Die Punkte  $P_x$  bestimmen Druck, Temperatur, spezifische Dampfmenge und Dampfwärme der wahren Zustandsänderung<sup>1)</sup>. Insbesondere ist

<sup>1)</sup> Fällt  $P_x'$  in das Ueberhitzungsgebiet, so erhalten wir gemäß früherem aus der adiabatischen Temperatur  $T_x'$  die wahre Temperatur

$$\lambda_x = \lambda'_x + Q_x,$$

und bei  $P_2$  wird  $Q_x = Z$ , d. h. wie erforderlich gleich dem gesamten Energieverlust.

Bei der Expansion bis zum Drucke  $p_x$  ist mithin die verfügbare Dampfwärme oder das Wärmegefälle

$$H_x = \lambda_1 - \lambda_x \dots \dots \dots (38),$$

und dieses ist als Funktion von  $p_x$ , wie in Fig. 55 dargestellt, aufgetragen. Für  $p = p_1$  ist selbstverständlich  $H_x = 0$ , für  $p = p_2$   $H_x = H_w$ .

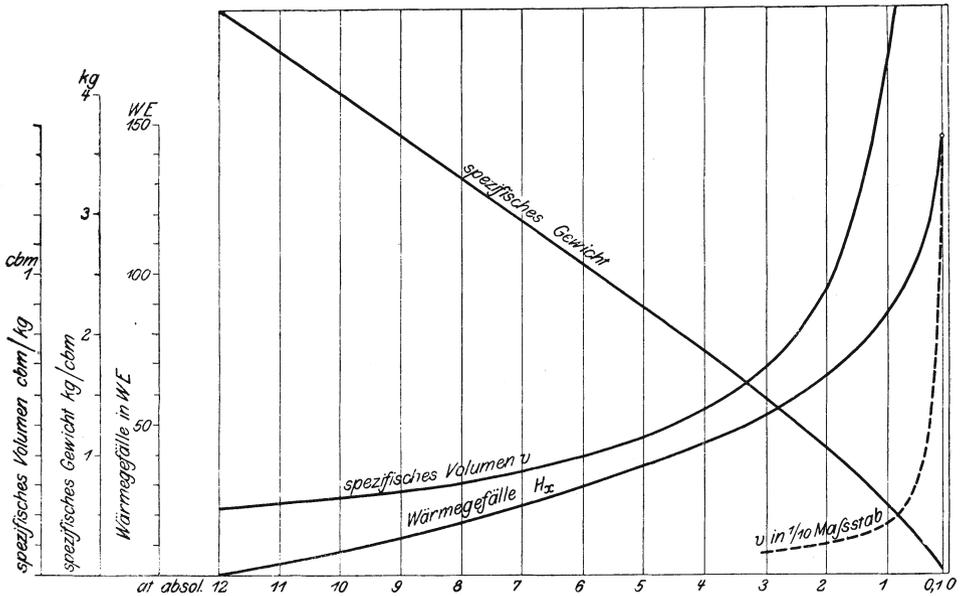


Fig. 55.

Um nun für die  $x$ te Turbine den zugehörigen Druck zu ermitteln, ist die Summe des bis zum  $x$ ten Rade aufgezehrten Gefälles zu bilden, d. h.

$$H_x = h_0 + h_1 + h_2 + \dots h_{x-1},$$

oder wenn wieder mit  $\Delta x$  multipliziert und dividiert wird,

$T_x$  durch die Beziehung

$$Q_x = c_p (T_x - T'_x).$$

Liegt  $P'_x$  im Sättigungsgebiet, so erhält man die spezifische Dampfmenge  $x$  aus Gleichung

$$Q_x = r_x (x - x'),$$

wo  $x'$  die spezifische Dampfmenge auf der Adiabate ist.

$$H_x = \frac{\sum h \Delta x}{\Delta x} + h_0 = \frac{1}{\Delta x} \int_1^x h dx + h_0 = z_0 \frac{\int_1^x h dx}{B} + h_0 \quad (39),$$

d. h. es muß die Integralkurve der  $h$  verzeichnet werden, welche als Endpunkt naturgemäß  $H_w$  ergibt und in Fig. 50 eingetragen ist. Nun wird in Fig. 55 das zu  $H_x$  gehörige  $p_x$  aufzusuchen und in Fig. 50 als Ordinate zur betreffenden Abszisse  $x$  einzutragen sein. Um nicht zu viele Linien zu häufen, ist dies in der neuen Figur 56 getan.

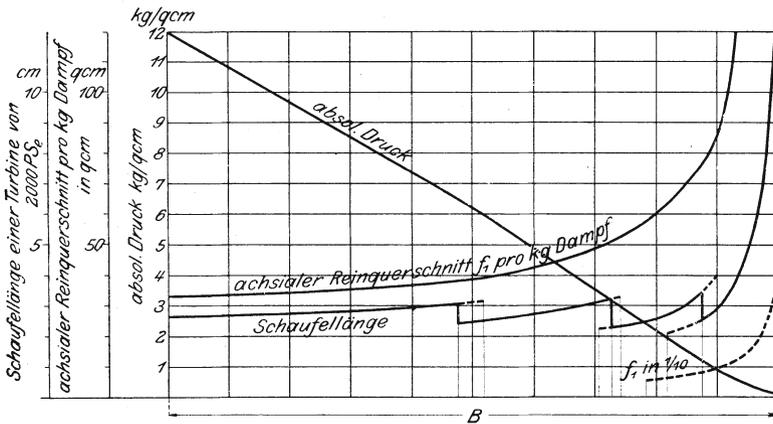


Fig. 56.

Aus dem nun bekannten  $p_x T_x$  der Zustandskurve ergibt sich schließlich das spezifische Volumen  $v_x$  an der betreffenden Stelle. Wenn somit  $G$  kg Dampf in 1 sk das Rad durchströmen sollen, so erhalten wir aus der »Kontinuitätsgleichung« die Querschnitte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Austritt aus dem } x\text{ten} \\ \text{Leitrade} \\ \text{Austritt aus dem } x\text{ten} \\ \text{Lauftrade} \end{array} \right\} f_1 = \frac{G v_x}{c_{1x}} \quad \dots \quad (40).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eintritt in das } x\text{te} \\ \text{Leitrad} \\ \text{Eintritt in das } x\text{te} \\ \text{Laufrad} \end{array} \right\} f' = \frac{G v_x}{w_{1x}} \quad \dots \quad (41).$$

Von einer Aenderung des  $v$  innerhalb einer Turbine darf man wie bemerkt absehen; doch hindert nichts, die Genauigkeit so weit zu treiben, wie man wünscht. Aus der angenommenen Schaufeldicke, Teilung und den Winkeln ergibt sich alsdann die Schaufellänge. Wären die Schaufeln unendlich dünn, so hätte man bei einer Schaufellänge  $a_0$

$$f_1 = \pi D a_0 \sin \alpha.$$

Wegen der Verengung durch die Schaufeldicke und die vorbeilaufenden Schaufeln des Laufrades muß  $a_0$  vergrößert werden, im Durchschnitt auf das etwa  $1\frac{1}{2}$ fache. Die Größe

$$\frac{f_1}{\sin \alpha} = \pi D a_0$$

ist in Fig. 56 der achsiale Reinquerschnitt genannt worden, dessen Gebrauch bei Rechnungen bequem ist.

Das in Fig. 50 bis 56 gelöste Beispiel bezieht sich auf die Anfangsdaten  $p_1 = 12 \text{ kg/qcm abs.}$ ,  $t_1 = 300^\circ \text{ C}$ , den Kondensatordruck  $p_2 = 0,1 \text{ kg/qcm}$  und den Energieverlust  $\zeta = 0,25$ . Zum Schlusse wurde die Reibungswärme gemäß Gl. (37)

$$R_x = A \frac{\zeta_1'}{2g} \int_0^x c_1^2 dx$$

bestimmt und in Fig. 50 in einem Maßstabe eingetragen, daß  $H_w$  und der Gesamtwert  $R$  sich decken. Nun müßte aus dem Entropiediagramm durch Ausmaß der senkrecht schraffierten Flächenstücke die sich von dort aus ergebende Linie der  $R_x$  aufgezeichnet und mit der schon ermittelten verglichen werden. War die Annahme der Zustandskurve richtig, so müßten die Linien von  $R_x$  zusammenfallen. Allein schon der Umstand, daß  $R_x$  von der Linie der  $H_x$ , wie Fig. 50 lehrt, wenig abweicht, zeigt, daß wir von der Uebereinstimmung nicht weit entfernt sind. Eine größere Genauigkeit anzustreben hätte nur dann Wert, wenn wir über die Größe der Widerstandskoeffizienten besser unterrichtet wären. Auch davon werde abgesehen, daß wir in  $R_x$  eigentlich einen Teil der Leerlaufreibung einbegreifen müßten.

Die achsiale Schaufelbreite wird der Länge angepaßt und dürfte in den Grenzen von 8 bis 25 mm liegen. Die Teilung sei so eng, daß eine sichere Führung des Dampfstrahles erreicht wird, etwa 5 bis 12 mm von der schmalen zur breiten Schaufel fortschreitend. Die Krümmung hat in stetiger Weise vom Eintritt- zum Austrittswinkel hinzuführen. Bei starker Verdünnung nimmt das spezifische Volumen so rasch zu, daß sich unter Umständen bei den letzten Rädern unbequem lange Schaufeln ergeben. Man schafft Abhilfe durch Annahme größerer Austrittswinkel.

Statt der stetig veränderlichen Schaufellänge wird man längere oder kürzere Abstufungen wählen und unter Umständen an der Wahl von  $c_1$  Änderungen vornehmen, um für größere Abschnitte der Turbinenlänge konstante Querschnitte zu erhalten.

Es sei die letzte Austrittsgeschwindigkeit =  $c_{2z}$ ; dann sind die gesamten Verluste in WE für 1 kg Dampf

$$L_x = A Q_w + \frac{c_{2z}^2}{2g}.$$

Die verfügbare Energie ist

$$L_0 = \lambda_1 - \lambda_2',$$

und

$$L = L_0 - L_z$$

die »indizierte« Dampfarbeit in Wärmemaß pro 1 kg Dampf.

Die sonstige Reibungsarbeit wie Dampfreibung der Trommeln, Dichtungskolben usw. einschließlich der Leerlaufarbeit (d. h. Lagerreinigung und ähnliches) in WE pro sk sei =  $L_r$ , mithin die effektive Gesamtarbeit in WE pro sk

$$G L_e = G L - L_r$$

und der Wirkungsgrad der effektiven Leistung

$$\eta_e = \frac{L_e}{L_0} = \frac{L_0 - L_z - \frac{L_r}{G}}{L_0}, \quad \dots \quad (42)$$

die effektive Leistung in PS

$$N_e = \frac{G L_e}{A 75} \quad \dots \quad (43)$$

und der Dampfverbrauch pro PS<sub>e</sub>-st

$$3600 \frac{G}{N_e} = \frac{637}{L_e} \quad \dots \quad (43)$$

### b) Die vielstufige Druckturbine

wird nach dem beschriebenen Verfahren ohne Schwierigkeit analog behandelt werden können.

Das Wärmegefälle im Leitrade erhält mit derselben Annäherung wie im vorigen Fall den Wert

$$h' = A \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} \quad \dots \quad (45).$$

Im Laufrade findet keine Beschleunigung, sondern vielmehr Umsetzung von kinetischer Energie in Wärme statt, d. h. es wird

$$h'' = A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} \quad \dots \quad (46),$$

da  $w_2$  etwa = 0,8  $w_1$  zu wählen wäre, negativ. Das Einzelgefälle für ein Turbinensystem

$$h = h' + h''$$

ist mithin kleiner wie  $h'$ . Man kann die Widerstände noch mehr ins Einzelne zerlegen, indem man z. B. von der Austrittenergie eines Rades  $c_2^2 : 2g$  den Betrag

$$\zeta \frac{c_2^2}{2g}$$

mit  $\zeta = 0,5$  bis 1 verloren gibt und nur den Restbetrag  $(1 - \zeta) \cdot (c_2^2 : 2g)$  für das nächstfolgende Leitrad in Rechnung stellt. Es wäre dann

$$h' = A \frac{c_1^2 - (1 - \zeta) c_2^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

(wobei von der Verschiedenheit der  $c_2$  für zwei aufeinanderfolgende Turbinen abgesehen wird). Im Laufrade hätte man wie vorhin

$$h'' = A \frac{u_2^2 - w_1^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Vom Austritte des Laufrades bis zum Eintritte in das Leitrad würde als dritte Gefällshöhe (algebraisch) hinzutreten

$$h''' = A \left[ (1 - \zeta) \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} \right] = -\zeta A \frac{c_2^2}{2g} \quad . \quad (49).$$

Schliesslich müfste bei Turbinen die aus Einzelscheiben bestehen, die Dampfreibung des betreffenden Rades  $L_{v,r}$  in WE pro sk durch das vorläufig zu schätzende sekundliche Dampfgewicht  $G$  dividiert als

$$h_r = \frac{L_{v,r}}{G} \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

hinbezählt werden. Die hierbei notwendige Kenntnis der Dampfdrücke müfste durch einen vorläufigen näherungsweise Entwurf erworben werden. Das Einzelgefälle

$$h = h' + h'' + h''' + h_r = \frac{A}{2g} [(c_1^2 - c_2^2) - (w_1^2 - w_2^2)] + h_r \quad (51)$$

ist unabhängig von der Verlustgröfse  $\zeta$ , womit aber nicht ausgesagt ist, dafs es auf diese nicht ankäme. Die Stufenzahl bleibt wohl dieselbe, allein je gröfser  $\zeta$  umsomehr nimmt die Entropie zu, um so gröfser ist also die schliessliche Einbuße.

Die bei Druckturbinen zulässige und allgemein angewendete teilweise Beaufschlagung bietet den Vorteil, dafs man vom ersten Rade ab mit gröfseren Umfangsgeschwindigkeiten (60 bis 80 m) arbeiten kann, wodurch die Stufenzahl erheblich verringert wird.

Man kann sich die Frage vorlegen, wie sich die Stufenzahl oder die Umfangsgeschwindigkeit ändert, wenn man von der Ueberdruck- zur reinen Druckturbine übergeht. Für den Fall der Ueberdruckturbine haben wir gemäfs Formel (32):

$$h = A \frac{c_1^2 - c_2^2 + w_2^2 - w_1^2}{2g} = A \frac{c_1^2 - w_1^2}{g}$$

Setzen wir überall gleiche Geschwindigkeiten also auch  $u = \text{konst.}$  voraus, so

ist  $h = \frac{H_w}{z_0}$  und mit leichter Umrechnung

$$A \frac{(2 c_1 \cos \alpha - u) u}{g} = \frac{H_w}{z_0} \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Für die Druckturbine mit gleichen Ein- und Austrittswinkeln im Laufrade und ohne Rücksicht auf Reibung findet man

$$A \frac{2 (c_1' \cos \alpha - u') u'}{g} = \frac{H_w}{z_0'} \quad . \quad . \quad . \quad (53),$$

indem man die Geschwindigkeiten durch Striche unterscheidet. Für den Fall achsialen Austrittes erhält man

$$\begin{aligned} c_1 \cos \alpha &= u, \\ c_1' \cos \alpha &= 2 u', \end{aligned}$$

somit

$$A \frac{u^2}{g} = \frac{H_w}{z_0} \quad \text{und} \quad A \frac{2 u'^2}{g} = \frac{H_w}{z_0'} \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Wählen wir  $z_0 = z_0'$ , so wird  $u = u' \sqrt{2}$ , hierbei aber  $c_1' = c_1 \sqrt{2}$ ; wenn anderseits  $u = u'$ , so ist  $c_1' = 2 c_1$ , und  $z_0' = \frac{z_0}{2}$ , was wir in die Aussage fassen können: Bei gleicher Stufenzahl und achsialem Austritt arbeitet die Druckturbine mit einer um rd. 30 vH kleineren Umfangsgeschwindigkeit; bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit erhält sie nur halb soviel Stufen wie die Ueberdruckturbine<sup>1)</sup>. Die Dampfgeschwindigkeiten ( $c_1$ ) sind dann bei letzterer indessen 1,4- bzw. 2 mal so groß und bedingen eine entsprechende Vergrößerung der Reibungswiderstände. Inbezug auf diese ist durch Versuche die wichtige Frage zu entscheiden, ob die einfache Reibung an den Wänden oder der Stofs an den Schaufelkanten die Hauptquelle der Verluste bildet, und ob letzterer auch dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, oder nicht. In letzterem Falle wäre die Turbine mit kleiner Stufenzahl unter Umständen im Vorteil.

### Radialturbinen.

Es bezeichne  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  die Dampfwärme bzw. vor dem Leit-, vor dem Laufrad und beim Austritt aus letzterem,  $r_0$ ,

<sup>1)</sup> Die gleichen Beziehungen ergeben sich, wenn wir die Geschwindigkeiten  $u$  und  $c_1$  nach einem hyperbolischen Gesetz

$$u = \frac{a}{x - x_1}, \quad c_1 = \frac{b}{x - x_1}$$

wo  $x$  den Abstand auf der Basislinie  $B$  bedeutet, veränderlich denken. Es zeigt sich, daß die Verhältnisse dieselben sind wie bei einer Turbine, die durchweg mit dem geometrischen Mittelwert der kleinsten und größten Geschwindigkeit  $u$  bzw.  $c_1$  arbeitet.

$r_1, r_2$ , ferner  $u_0, u_1, u_2$  die entsprechenden Halbmesser bzw. Umfangsgeschwindigkeiten einer radial beaufschlagten Turbine. Für die Strömung im Leitrad gibt wie früher

$$\frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_0^2}{2g} = \frac{1}{A} (\lambda_0 - \lambda_1) \dots \dots (55).$$

Für die Strömung im Laufrad aber ist die Arbeit der Ergänzungskraft der relativen Bewegung, d. h. der Fliehkraft, inbetracht zu ziehen, und es ergibt sich<sup>1)</sup>

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{1}{A} (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \dots (56).$$

Bei einer einstufigen Turbine kann das letzte Glied meist vernachlässigt werden, bei vielstufigen aber nicht. Durch Addition der beiden Gleichungen (55) (56) ergibt sich nämlich das Einzelgefälle eine Stufe

$$h = \lambda_0 - \lambda_2 = \frac{A}{2g} [(c_1^2 - c_0^2) + (w_2^2 - w_1^2) - (u_2^2 - u_1^2)] (57).$$

Die Summation über alle Stufen führt zum »wirksamen Gefälle«

$$H_w = h_0 + \Sigma h,$$

wenn  $h_0$  das Gefälle der Eintrittsgeschwindigkeit in das erste Leitrad bedeutet. In der Summe  $\Sigma h$  erscheint auch  $-\Sigma(u_2^2 - u_1^2)$ , welches nicht vernachlässigbar ist, auch wenn

<sup>1)</sup> Unter Zuhilfenahme der Ableitungen im Abschnitt 1 wie folgt: Die Arbeit der Fliehkraft an einem Massenelement  $dm$ , dessen Abstand von der Drehachse von  $r_a$  auf  $r_e$  zunimmt, bei einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , ist

$$\int_{r_a}^{r_e} dm r \omega^2 dr = \frac{dm \omega^2}{2} (r_e^2 - r_a^2).$$

Denken wir uns in Figur 1 die ganze zwischen den Querschnitten  $A_1, A_2$  eingeschlossene Masse in Rotation, so ist die Arbeit der auf dieselbe wirkenden Fliehkräfte =

$$\begin{aligned} \Sigma^{1/2} dm \omega^2 (r_e^2 - r_a^2) &= \Sigma^{1/2} dm \omega^2 r_e^2 - \Sigma^{1/2} dm \omega^2 r_a^2 \\ &= \Sigma^{1/2} dm u_e^2 - \Sigma^{1/2} dm u_a^2. \end{aligned}$$

Hierin ist die erste Summe die negative »potentielle Energie« des Massensystemes zu Ende —, die zweite Summe dasselbe zu Beginn des Vorganges, mit Rücksicht auf die Drehung. Wir betrachten eine stationäre Strömung und eine Verschiebung der Querschnitte  $A_1 A_2$  bis  $B_1 B_2$ ; hierbei hebt sich die potentielle Energie der zwischen den Schnitten  $B_1$  und  $A_2$  im Anfangs- und Endzustand enthaltenen Massenteile weg, und es bleibt nur

$$\frac{1}{2} \frac{dG}{g} dt u_2^2 - \frac{1}{2} \frac{dG}{g} dt u_1^2$$

übrig, welches den Arbeiten der Oberflächenkräfte in Gl. (1) hinzugefügt, die oben angeschriebene Gleichung ergibt.

die Einzelsummanden klein wären. Setzen wir voraus, daß alle Stufen (radial) unmittelbar aufeinanderfolgen und benutzen wir den Umstand, daß näherungsweise

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2} (u_2^2 - u_0^2)$$

wird, so ergibt sich

$$\Sigma(u_2^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} \Sigma(u_2^2 - u_0^2),$$

wobei, wenn man über alle Stufen summiert, die Zwischenglieder sich gegenseitig wegheben und nur

$$\frac{1}{2} (u_e^2 - u_a^2) \dots \dots \dots (58).$$

übrig bleibt, unter  $u_e$  die Geschwindigkeit des letzten, unter  $u_a$  die des ersten Rades verstanden.

Der Entwurf einer neuen Turbine wird unter Benutzung der Figur 50 nach der früher erläuterten Methode keine Schwierigkeiten machen.

Neuerdings ist von Brady eine Radialturbine vorgeschlagen worden, bei welcher die Leit- und die Laufräder mit gleicher, aber entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit notieren. Hier ist für die Bewegung in den Schaufeln sowohl des Leit- wie des Laufrades Formel (56) anzuwenden, und das Wärmegefälle für eine Stufe wird

$$h = \frac{A}{2g} [(c_1^2 - c_0^2) + (w_2^2 - w_1^2) - (u_2^2 - u_0^2)] \quad (59).$$

Die Summation über alle Stufen ergibt somit für den Einfluß der Umfangsgeschwindigkeit unmittelbar

$$\Sigma u_2^2 - u_0^2 = u_e^2 - u_a^2 \dots \dots \dots (60).$$

Beim Aufzeichnen der Geschwindigkeitsdreiecke für eine Turbine Brady'schen Systems ist übrigens zu beachten, daß wir beispielsweise  $c_1$  zunächst mit dem (auf das Laufrad bezogen) negativen  $u_1$  zusammensetzen müssen, um die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus dem Leitrad zu erhalten. Das nochmalige (geometrische) Anfügen von  $-u_1$  ergibt erst  $w_1$  usf. Abgesehen von dem im ganzen nicht großen Anteil der Fliehkraftarbeit (60) wirkt die Rotation des Leitrades somit wie eine Verdopplung der Umfangsgeschwindigkeit; oder: man kann bei vorgeschriebener Geschwindigkeit die Umlaufzahl auf die Hälfte herabsetzen.

## 26. Die Regulierung der Dampfturbinen

erfolgt bei der Mehrzahl der Systeme durch einfache Drosselung, was bekanntlich mit einem Arbeitsverlust verbunden ist, wie aus den unten mitzuteilenden Kurven des Wirkungsgrades auch zahlenmäßig deutlich hervorgeht. Das beste wäre, stets mit vollem Anfangsdrucke zu arbeiten und die Durchflußquerschnitte der Leistung anzupassen, wie bei einigen

Turbinenarten beabsichtigt und durchführbar ist. In allen Fällen erweist sich die Turbine als ein sehr fein regulierbarer Motor, auch bei der vielstufigen Expansion, obwohl hier dem Anscheine nach die in der Turbine vorhandene verhältnismäßig große Dampfmenge dem raschen Uebergang von einem Beharrungszustande zu einem andern hinderlich sein könnte<sup>1)</sup>. Dafs dem nicht so ist, dafs wir vielmehr auf ungemein kleine Geschwindigkeitsschwankungen gefafst sein dürfen, geht aus folgender Rechnung hervor, durch welche die Geschwindigkeitszunahme bei voller Entlastung ermittelt werden soll.

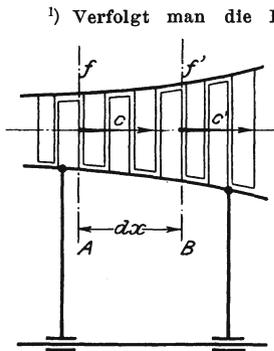


Fig. 57.

zwischen A und B enthaltenen Gewichtes  $\frac{af dx}{v}$  (worin  $a$  eine Verhältniszahl, d. h. er ist =

$\frac{d}{dt} \left( \frac{af dx}{v} \right) dt$ , und die Gleichsetzung ergibt

$$-\frac{d}{dx} \left( \frac{fc}{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{af}{v} \right)$$

Nun lautet mit der Vereinfachung  $\varepsilon=1$ ,  $\delta=1$  die weiter unten entwickelte Gl. (4) im Abschn. II, § 42

$$-v \frac{dp}{dx} \Delta x = \frac{u}{g} (2c \cos \alpha - u)$$

und aus diesen Beziehungen, mit Zuhilfenahme von  $pv=K$ , wären  $p$  und  $c$  als Abhängige des Ortes und der Zeit zu bestimmen. Setzt man, um einen übersichtlichen Fall zu haben,  $f$  und  $u$  unveränderlich, letzteres zugleich so klein voraus, dafs es neben  $2c \cos \alpha$  weggelassen werden kann, so folgt durch Eliminierung von  $c$ :

$$\left( \frac{Kg \Delta x}{2 \cos \alpha u} \right) \frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{dp}{dt}$$

und dies ist in der Tat, wenn wir anstelle von  $p$  die Temperatur setzen, die bekannte Gleichung der Wärmebewegung in einem wärmedicht umhüllten Stabe.

<sup>1)</sup> Verfolgt man die Fortpflanzung einer Druckschwankung in das Innere der Turbine, so zeigt sich unter vereinfachenden Annahmen eine unverkennbare Aehnlichkeit mit der Wärmeströmung. Es sei z. B., Fig. 57,  $AB = dx$  ein Abschnitt der Turbine (mit in der Achsenrichtung gleich breiten Rädern),  $f, f'$  und  $c, c'$  Querschnitte und Geschwindigkeiten am Leitradaustritt. Das einströmende Gewicht während der Zeit  $dt$  ist  $= \frac{fc}{v} dt$ , das ausströmende  $\frac{f'c'}{v'} dt$ ; der Ueberschufs  $\left( \frac{fc}{v} - \frac{f'c'}{v'} \right) dt = -\frac{d}{dx} \left( \frac{fc}{v} \right) dt dx$  dient zur Vermehrung des

Wir haben nachgewiesen, daß das durch die Turbine in 1 sk strömende Dampfgewicht dem Anfangsdrucke angenähert proportional ist. Denken wir uns zur Zeit  $t = t_0$  das Regulier-ventil plötzlich vollständig geschlossen, so wird der Druck allmählich abnehmen. Es sei das Gewicht des Dampfes zwischen Ventil und erstem Leitrade zu Beginn  $D_0$ , zu einer späteren Zeit  $D$  kg. Während der Elementarzeit  $dt$  fließt ein Anteil

$$- dD = \alpha p dt$$

ab. Der vorhandene Inhalt kann unter Annahme des Näherungsgesetzes

$$pv = K$$

durch

$$D = \frac{V}{v} = \frac{V}{K} p$$

ausgedrückt werden, wenn  $V$  das Volumen des betreffenden Raumes ist. Dieser Wert oben eingesetzt, ergibt

$$- \frac{V}{K} \frac{dp}{dt} = \alpha p,$$

oder integriert

$$- \frac{V}{K} \ln \frac{p_1'}{p_1} = \alpha (t_1 - t_0) \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Hierin ist

$$t_1 - t_0 = \tau$$

die Zeitdauer der Entleerung vom Drucke  $p_1$  auf  $p_1'$ , d. h. auf den Leerlaufdruck. Setzen wir noch das sekundliche Dampfgewicht bei Vollbelastung  $G = \alpha p_1$  ein, so erhalten wir

$$\tau = \frac{D_0}{G} \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Die Geschwindigkeitszunahme ergibt sich aus der Arbeitsfähigkeit des in der Kammer und in der Turbine befindlichen Dampfgewichtes  $D_0 + D_i$ , welche mit einem nicht stark veränderlichen Wirkungsgrade auf die Massen der Turbine übertragen wird. Man wird die abgegebene Arbeit

$$L' = \left( D_0 + \frac{D_i}{2} \right) L_0 \eta_m \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

setzen dürfen, unter  $L_0$  die theoretische Leistung für 1 kg Dampf und unter  $\eta_m$  ein Mittelwert verstanden, und  $D_i$  halbiert, weil der mittlere Zustand des Dampfes in der Turbine etwa der halben Arbeitsfähigkeit  $L_0$  entspricht. Ist nun  $\Theta$  das Massenträgheitsmoment der rotierenden Teile,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit, so bildet  $L'$  die Aenderung der lebendigen Kraft  $\frac{1}{2} \Theta \omega^2$ , oder angenähert

$$L' = \Theta \omega \delta \omega = \Theta \omega^2 \frac{\delta \omega}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

und die verhältnismäßige Geschwindigkeitsänderung ist

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = \frac{L'}{\Theta \omega^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (65).$$

Beispielsweise wird bei einer Turbine von 1000 KW Leistung  $D_0$  bei 10 at Anfangsdruck etwa 0,6 kg (bei knappster Anordnung des Ventiles),  $D_i$  etwa 0,75 kg und  $AL_0$  etwa 150 WE, woraus mit  $\eta_m = 0,5$  und  $\omega = 157$ , d. h.  $n = 1500$  i. d. Min., und mit  $\Theta = 50$  (mäÙsig geschätzt)

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = 0,027, \text{ d. h. } 2,7 \text{ vH folgt.}$$

Die Entleerungszeit beträgt mit  $p_2 = 0,6$  at als Leerlaufdruck

$$\tau = 0,68 \text{ sk.}$$

Bei teilweiser Entlastung haben wir natürlich noch viel kleinere Aenderungen zu gewärtigen. Diese ausgezeichneten Ergebnisse werden durch alle bisherigen Versuche, z. B. an der Parsons-Turbine, vollauf bestätigt.

## E. Die Dampfturbinensysteme.

Irgend eines der bekannten Wasserturbinensysteme könnte, wie sich von selbst versteht, ohne weiteres als Dampfturbine Verwendung finden. Wir schöpfen indessen aus dieser Möglichkeit nur geringen Vorteil, denn das Bestreben des modernen Wasserturbinenbaues ist vornehmlich darauf gerichtet, bei dem Vorherrschen der kleinen Gefälle die Umlaufzahl der Turbine zu erhöhen. Die Hauptaufgabe, welche jedes Dampfturbinensystem lösen muß, ist demgegenüber die Herabsetzung der Umlaufzahl auf ein praktisch zulässiges Maß unter Wahrung der erforderlichen Betriebszuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit.

Welche Umlaufzahl aber praktisch zulässig ist, darüber wird bei den heutigen Beziehungen des Maschinenbaues zur Elektrotechnik in erster Linie der Dynamobau zu entscheiden haben, und zwar im besonderen die Anforderungen der Wechselstrommaschine. Die in Europa sehr allgemeine Periodenzahl 50 i. d. Sek. läßt uns im großen Ganzen nur die Wahl zwischen 3000 oder 1500 Uml./min für die zwei- bzw. vierpolige Maschine (bei der sogen. Induktortype kommt wegen des Ausfalles der Hälfte der Pole nur letztere inbetracht). Die Mehrzahl der Dynamokonstruktoren teilt heute wohl die Ansicht, daß Einheiten von etwa 1000 KW nach aufwärts nicht mehr als 1500 Uml./min machen sollten. Die Länge der Trommeln, die Schwierigkeit des Massenausgleiches, die mögliche Unterstützung der Wellenschwingung durch Unsymmetrie des magnetischen Feldes, die hohe Gleitgeschwindig-

keit in den schwer belasteten Dynamolagern lassen den Bau rascher laufender Maschinen als ein gewagtes Problem erscheinen, für dessen Gelingen keine Gewähr aus schon bekannten Erfahrungen abgeleitet werden kann.

Das Ideal der Einfachheit wäre nun offenbar eine Turbine, die das gesamte Nutzgefälle in einem einzigen Rade mit einziger Wirkung, d. h. als einstufige Druckturbine, in mechanische Arbeit umwandelte. Versuchen wir eine Lösung für diese — wie wir sie vorübergehend nennen werden — »Einradturbine« bei der kleineren der praktischen Umlaufzahlen, d. h. bei 1500 i. d. Min., so stellt sich indessen sofort die Unmöglichkeit auf Seite des Turbinenbauers heraus. Um einen richtigen hydraulischen Wirkungsgrad zu erhalten, sollte bei der erreichbaren Dampfgeschwindigkeit von rd. 1200 m die Umfangsgeschwindigkeit der Turbine doch mindestens  $\frac{1}{3}$ , d. h. 400 m betragen; dies entspräche aber einem Raddurchmesser von rd. 5 m, woraus die Unausführbarkeit sofort hervorgeht. Außerdem würde man an diesem Rade gemäß unsern Formeln eine Leerlaufarbeit von etwa 700 PS zu erwarten haben. Es bleiben mithin zwei Auswege: die Erhöhung der Umlaufzahl auf 3000, oder die Zwischenschaltung eines Zahnradvorgeleges, durch welches man für die Turbine volle Freiheit erlangt. Letzteres ist bekanntlich die Ausführungsart von de Laval, während für ersteres die Räder von Stumpf und Zoelly geeignet zu werden versprechen. Man könnte auch, wie das in den Patenten von Farcot und andern vorgeschlagen ist, den Dampf, nachdem er das Rad verlassen hat, nochmals fassen und wiederholt auf dasselbe Rad einwirken lassen, wodurch eine mehrstufige Wirkung eingeleitet wäre. Doch sollen hier nur ausgeführte Konstruktionen besprochen werden, und darum verdient neben de Laval zunächst die Turbine von Curtis Erwähnung, welcher mehrere Laval-Turbinen hintereinander schaltet und so das Druckgefälle in mehrere Teile teilt, wodurch die Dampf- und die Umfangsgeschwindigkeit zugleich herabgesetzt werden. Den ausschlaggebenden Erfolg brachte bekanntlich die vielstufige Turbine von Parsons, der den Dampf in 50 bis 70 und mehr hintereinander geschalteten Rädern, und zwar nach dem Prinzip der Reaktion wie bei der Jonval-Turbine, wirken läßt. Das Gegenstück zu diesem System bildet die vielstufige Turbine von Rateau, der bei wesentlich andrer Bauart der Räder den Dampf durch seinen Massendruck (Aktion) allein zur Arbeitsleistung veranlaßt.

## 27. Turbine von de Laval.

Die wesentlichen Elemente dieser Turbine sind schon oben bei der Berechnung der Düse, der Radscheiben und der biegsamen Welle erörtert worden. Es erübrigt, auf

das in Fig. 58 und 59 kenntlich gemachte Einsetzen der einzeln aus Flußstahl geprefsten und auf Kaliber gefrästen

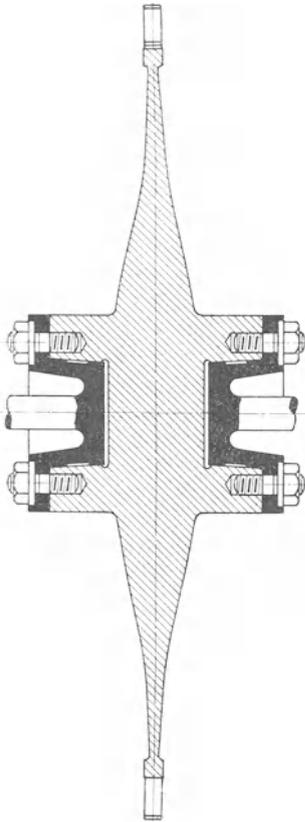


Fig. 58.

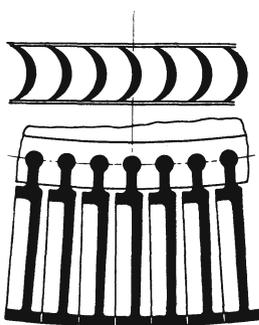


Fig. 59.

Schaufeln in das Rad hinzuweisen. Die Schaufeln sind leicht verstemmt und können ohne Gefährdung des Rades ausgetauscht werden. Die Gesamtzeichnung einer 300 pferdigen Turbine, Fig. 60 bis 62, zeigt die beweglichen, aus zwei Teilen zusammengesetzten Stopfbüchsen und das bei dieser Ausführung aus dem Vakuum herausgesetzte Endlager mit Kugelgelenk. Die Düsen sind unter einem Neigungswinkel von 17 bis 20° gleichmäßig im Kreise verteilt, die Schaufeln in der Mitte verdickt, um angenähert konstanten Querschnitt zu ergeben. Die Regulierung erfolgt durch Drosselung mittels eines Doppelsitzventiles, das von einem auf der Achse des einen Zahnrades sitzenden Kegel-Federregler durch eine metallisch dichtende Spindel und Hebel bewegt wird. Bei neueren Ausführungen wird neben dem erwähnten Ventil die in Fig. 63 dargestellte selbsttätige Absperrung angewendet. Der Dampfdruck auf die eingeschliffene Spindel hält die Feder bei der größten Leistung mit geringem Kraftüberschuß gespannt. Sinkt die Belastung, und fängt der Regler an zu drosseln, erhält so die Federkraft das Übergewicht und schließt die Düsenöffnung ab. Auf diese Weise wird die unwirtschaftliche starke Drosselung des Dampfes vermieden und die Druckabnahme auf etwa 1 at beschränkt. Die Zahnräder sind mit ungemein kleiner Teilung als Doppelschraubenräder ausgeführt, damit der achsiale Schub aufgehoben werde; es werden

Fig. 60.

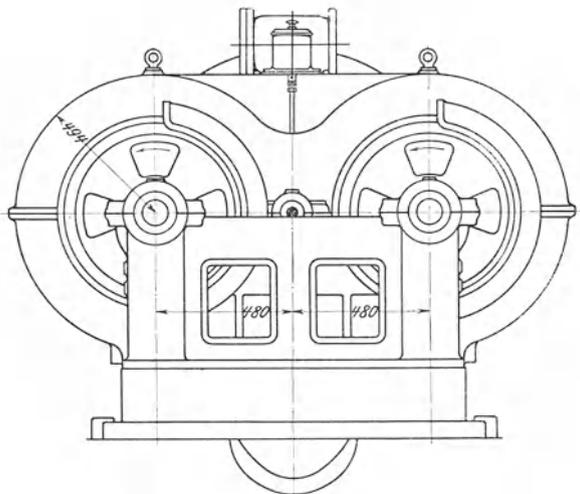
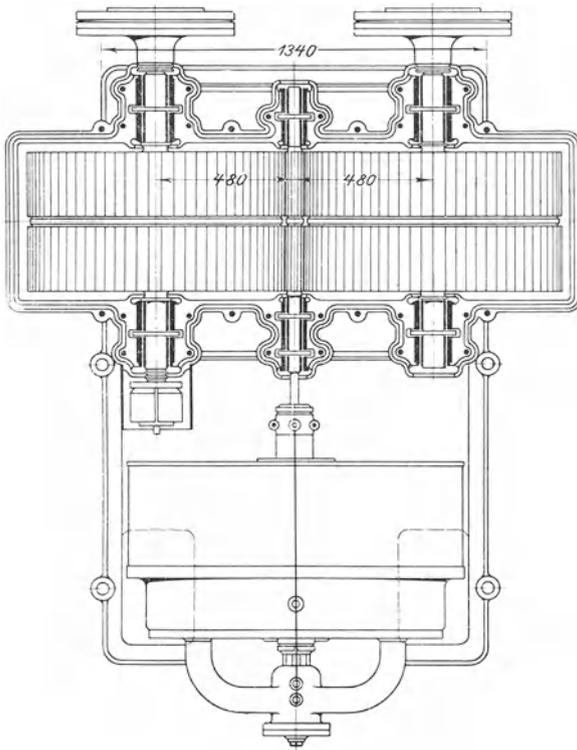


Fig. 61.

Uebersetzungen von 1 : 10 bis 1 : 13 angewendet. Der vorzüglichen konstruktiven Durchführung dieser Turbine kann nicht genug Lob gesendet werden.

Die praktischen Betriebsergebnisse sind nach allen Berichten durchaus zufriedenstellend. Die Schaufelabnutzung durch den mit einer bis zu 800 m reichenden Geschwindigkeit durch die Schaufel strömenden Dampf wird zugegeben, scheint indes auf Jahre hinaus den Dampfverbrauch nicht erheblich zu beeinflussen. So teilt Sosnowski in *Revue de Mécanique* 1902, Juliheft, mit, daß eine 5 Jahre lang in Betrieb

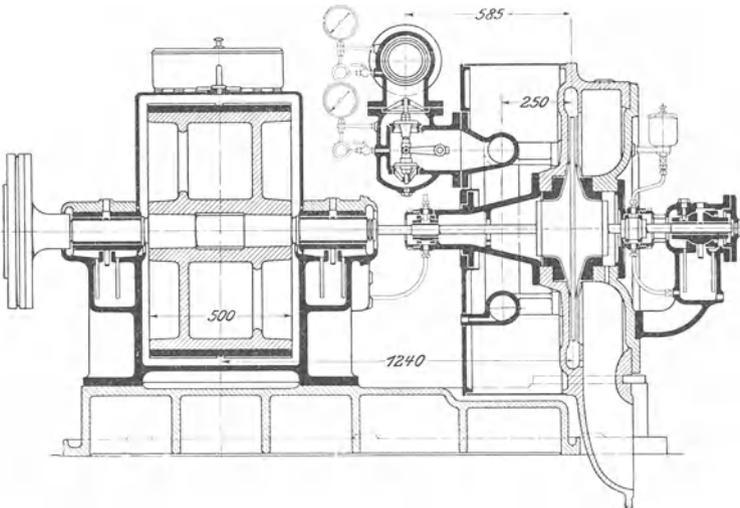


Fig. 62.

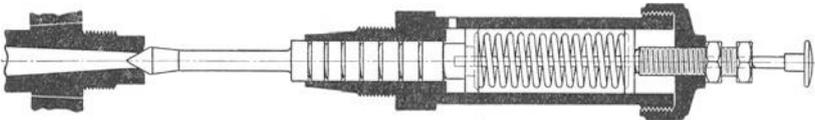


Fig. 63.

gewesene Turbine bei 64 cm Vakuum 10,07 kg Dampf pro PS<sub>e</sub>-st verbraucht habe, während diese Zahl bei einer ganz neuen, am gleichen Orte geprüften Turbine bei einem um 7 cm besseren Vakuum 9,7 kg betragen habe. Die Kosten der vollständigen Auswechslung der Schaufeln werden als geringfügig angegeben.

Ueber den Dampfverbrauch liegen ausgedehnte Versuche von Delaporte vor (*Revue de Mécanique* 1902 S. 406). Die 200 pferdige Turbine verbrauchte 6,9 kg Dampf pro PS<sub>e</sub>-st. Die näheren Angaben über den Versuch Nr. 10 sind die folgenden:  $p_1 = 10,72$  kg/qcm abs.; Dampf gesättigt;  $p_2 = 0,166$

kg/qcm abs.;  $N_e=197,5$  PS. Schädliche Widerstände: Radreibung 10,2 PS, Lagerreibung 2,5 PS, Zahnradvorlege 2,0 PS. Einen weiteren Verlust, welcher durch das Wiederausfüllen der vor der Düse einherstreifenden entleerten Laufradzellen durch den Dampf der Umgebung verursacht wird, schätzt Delaporte auf 1,1 PS. Die schädlichen Widerstände machen mithin 15,8 PS aus, und die reine Dampfarbeit ist  $N = 197,5 + 15,8 = 213,3$  PS. Bezogen auf 1 PS der Dampfarbeit allein beträgt somit der Verbrauch in 1 Stunde  $6,90 \cdot 197,5 / 213,3 = 6,39$  kg. Eine Analyse des Versuches, die rechnerisch auch von Delaporte vorgenommen worden ist, ergibt folgende Verhältnisse:

verfügbare Wärmeenergie in 1 kg Dampf . . . 154,0 WE  
 Verlust in der Düse nach D. 5,2 vH, d. s. . . . 8,0 »  
 effektive Ausströmgeschwindigkeit . . . .  $c_1 = 1102$  m  
 Umfangsgeschwindigkeit nach D. . . . .  $u = 343$  »

Der Entwurf eines Geschwindigkeitsplanes mit  $\alpha = 20^\circ$  gibt  $w_1 = 787$  m und mit dem probeweise angenommenen  $w_2 = 0,74 w_1 = 582$  m schliesslich  $c_2 = 326$  m. Die »Bilanz« der Turbine stellt sich nun wie folgt:

Verlust in der Düse 8,0 WE, d. s. 5,5 vH der verfügbaren Energie,  
 » » » Schaufel  $\left(\frac{787}{91,2}\right)^2 - \left(\frac{582}{91,2}\right)^2 = 33,7$  WE, d. s. 21,9 vH

der verfügbaren Energie,

Verlust beim Austritt  $\left(\frac{326}{91,2}\right)^2 = 12,8$  WE, d. s. 8,3 vH der verfügbaren

Energie,

Gesamtverlust 35,7 vH.

Da nun bei 154 WE pro kg die ideale Turbine  $\frac{637}{154} = 4,14$  kg Dampf pro PS-st erfordert, beträgt der Gütegrad der reinen Dampfarbeit  $\eta = \frac{4,14}{6,39} = 0,647$ , der Verlust mithin 35,3 vH, in guter Uebereinstimmung mit obigen Annahmen. Die Analyse führt somit, falls wir den von Delaporte für die Düse angenommenen kleinen Verlust als richtig zulassen, auf einen ungemein grossen Verlust in der Laufschaufel, nämlich  $1 - (0,74)^2 = 0,45$ , d. h. 45 vH der kinetischen Energie, welche zu Beginn im Rade vorhanden ist.

Noch ungünstiger stellt sich dieser Verlust bei den Versuchen von Jacobson an der 300pferdigen Turbine in der Pötschmühle (Z. 1901 S. 150). Für Ueberlast bei 342,1 PS<sub>e</sub> Leistung fand Jacobson 7,01 kg Dampfverbrauch pro PS<sub>e</sub>-st, und es war  $p_1 = 11,28$  kg/qcm abs. und  $t_1 = 192,3^\circ$  C vor dem Ventil; mit  $p_1' = 9,61$  kg/qcm abs. vor den Düsen errechnet sich die Temperatur  $t_1' = 189,8^\circ$  C, und die Expansion auf  $p_2 = 0,101$  kg/qcm liefert eine verfügbare Wärmeenergie von

164,4 WE; der Verbrauch der vollkommenen Turbine ist  $= \frac{637}{164,4} = 3,87$  kg pro PS-st. Schätzen wir den Leerlauf nach den Angaben de Laval's zu 30 PS, so ist die reine Dampf- arbeit = 372,1 PS, der entsprechende Verbrauch pro PS-st = 6,44 kg, mithin der Gütegrad  $\eta = \frac{3,87}{6,44} = 60,1$  vH, und die Verluste betragen rd. 40 vH. Um diese Verluste zu erklären, bedarf es der Annahme viel größerer Reibung in der Düse, als Delaporte gefunden haben will. In Uebereinstimmung mit unsern eigenen Versuchen setzen wir den Verlust in der Düse mit etwa 15 vH an und finden  $c_1 = 1078$  m. Die Umfangs- geschwindigkeit darf gemäß der Tabelle von de Laval zu 400 m geschätzt werden, da die Umlaufzahl nicht ganz diejenige der Tabelle erreichte. Auf graphischem Wege ermit- teln wir  $w_1 = 720$  m,  $w_2 = 0,666 w_1 = 480$  m,  $c_2 = 250$  m und finden folgende Bilanz:

Verlust in der Düse	24,7 WE = 15,0 vH	der verfügb. Energie			
» » » Schaufel	34,6 » = 21,0 »	»	»	»	»
» beim Austritt	7,5 » = 4,6 »	»	»	»	»
Gesamtverlust		40,6 vH			

in naher Uebereinstimmung mit der oben genannten Zahl. Bei diesem Versuche muß man mithin in der Schaufel den ganz bedeutenden Verlust von  $1 - (0,666)^2 =$  rd. 56 vH der zugeführten kinetischen Energie voraussetzen, um das Ge- samtergebnis zu erklären. Liegt dieses Ergebnis daran, daß der Schnitt der Radebene mit dem austretenden Strahle eine Ellipse bildet, deren Spitzen ungünstig arbeiten, und könnte durch andere Düsenformen Besseres erzielt werden, oder ist vielleicht der von Delaporte hervorgehobene Verlust des Wiederauffüllens der Schaufelzellen bedeutend? Diese Fragen sind jedenfalls weiterer Untersuchung wert.

Beziehen wir uns auf die effektive Leistung, so ist der thermodynamische Wirkungsgrad beim Versuche von

$$\text{Delaporte } \eta_e = \frac{4,14}{6,90} = 0,600,$$

$$\text{Jacobson } \eta_e = \frac{3,87}{7,01} = 0,554,$$

und es erreicht der Verbrauch von 6,9 bezw. 7,0 kg pro PS<sub>e</sub>-st bereits die Zahlen einer guten Verbundmaschine<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903 hat Lewicki über Versuche mit hochgradiger bis zu 460° C reichender Ueberhitzung berichtet, durch welche erwiesen wird, daß die Laval- turbine, wenn man nur die Düsen aus Stahl anfertigt, ohne weiteres mit so hohen Temperaturen betrieben werden kann. Eine Verwertung der Ergebnisse für eine thermodynamische Bilanz ist wegen Unkennt- nis des genauen Wertes der spezifischen Wärme derzeit nicht möglich.

### 28. Turbine von Stumpf.

Die Konstruktion von Stumpf, wie sie in den französischen Patenten 310 020, 310 021 und 310 023 vom Jahre 1901 beschrieben ist, wendet das Prinzip der reinen Druckwirkung mit eigenartig geformten Pelton-Schaufeln an. Wie Fig. 64 zeigen, sind die halbkreisförmigen Schaufeln in den verdickten Kranz des Turbinenrades eingefräst, und hierbei wird durch die ebenfalls mit Schneidzähnen versehene Achse des fliegenden Fräasers auch in der die Zellen trennenden Scheidewand ein halbkreisförmiges Stück ausgeschnitten. Da der Dampf die Zelle nur teilweise füllen darf, ist letzterer Umstand durchaus ohne Nachteil. Selbstverständlich ist auch eine doppelte Ausführung möglich, wobei der Strahl in der Mittelebene des Rades eintretend sich teilt und die symmetrisch

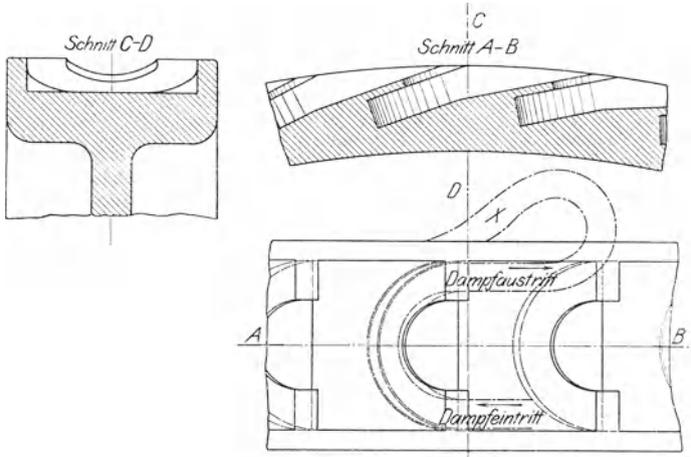


Fig. 64.

liegenden Zellen durchläuft. Bei hinlänglich großer Umfangsgeschwindigkeit verläßt der Dampf das Rad in radialer Richtung. Die Stumpfsche Schaufel bezweckt, den Dampfstrahl in kompakter Form zusammenzuhalten. Sehr sinnreich ist die Bearbeitung der Beaufschlagungsdüsen sowie die Regulierung durch allmähliches Zudecken der einzelnen Düsen mittels eines drehbaren Flachschiebers, nach einem Grundsatz, der bei hydraulischen Turbinen vielfach Anwendung gefunden hat. Die Düsen erhalten rechteckiges Profil und werden so dicht gesetzt, daß das Rad bei Vollbelastung durch einen nahezu zusammenhängenden Dampfstrahl beaufschlagt wird. In dieser Vermeidung der Unterbrechungen, auf deren Nachteile mittlerweile auch Detaporte hingewiesen hat, liegt ein Vorzug der Stumpfschen Bauart. Bezüglich der Einzelheiten muß auf

die Patente verwiesen werden. Erwähnung verdient noch der im Patente 310 023 niedergelegte Gedanke, den austretenden Strahl, welcher noch immer eine bedeutende Geschwindigkeit besitzt, durch im Gehäuse untergebrachte Leitschaufeln nochmals zurückzuführen und, wie in Fig. 76 angedeutet, im Sinne der Drehung bei X auf die Seitenflächen des Rades wirken zu lassen. Hierdurch würde die Relativgeschwindigkeit zwischen Rad und Dampf zu null gemacht, oder sogar eine treibende Kraft gewonnen, somit die Leerlaufarbeit herabgesetzt. Die Maßregel hat Interesse, nur ist es fraglich, ob bei der geringen Ausdehnung der getroffenen Fläche der Gewinn merklich sein wird. Eine Turbine Stumpfscher Bauart befindet sich bei der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin in Ausführung.

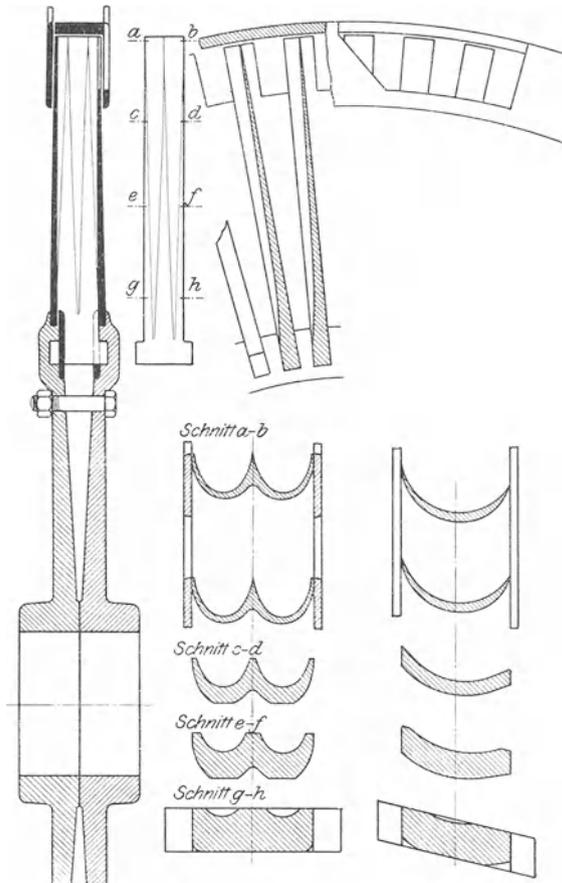


Fig. 65.

Additional material from *Die Dampfturbinen und die Aussichten der  
Wärme­kraft­ma­schin­en*

ISBN 978-3-662-36140-5 (978-3-662-36140-5\_OSFO2),  
is available at <http://extras.springer.com>



### 29. Turbine von Zoelly.

Das Kennzeichnende dieser Turbine ist die Bauart des sogenannten Strahlrades. Wie aus Fig. 65 ersichtlich ist, setzt Zoelly das Laufrad aus einzelnen stabförmigen »Strahlen«, welche durch eine kräftige zweiteilige Nabe festgehalten werden, zusammen. Jeder Strahl wird durch Fräsen in eine Form von angenähert gleicher Festigkeit gebracht und so bearbeitet, daß sein Ende eine peltonartige Schaufel bildet. Die Seitenflächen sind zur Vermeidung saugender Wirkung mit nach innen verdickten Blechscheiben verkleidet; außerdem umgibt ein U-Ring den äußeren Rand des Rades, mit Ausschnitten bloß an den Stellen, wo der durch Düsen zugeführte Dampfstrahl austritt. Zoelly fand auf dem Wege des Versuchs, daß die Schaufeln viel weiter auseinander gestellt werden müssen, als man gewöhnlich annimmt, um den besten Wirkungsgrad zu ergeben, und hofft auf diese Weise das Rad leichter konstruieren zu können, als wenn es eine massive Scheibe mit eingesetzten oder eingefrästen Schaufeln wäre. Räder dieser Bauart werden sowohl für einstufige wie für mehrstufige Turbinen verwendbar sein und gestatten jede Umfangsgeschwindigkeit, welche der Turbinenbau fordern mag. Ein Beispiel für die geplante Ausführung von vielstufigen Turbinen ist in Fig. 66 bis 68 dargestellt. Bei den ersten Rädern wird grundsätzlich an der Pelton-Schaukel festgehal-

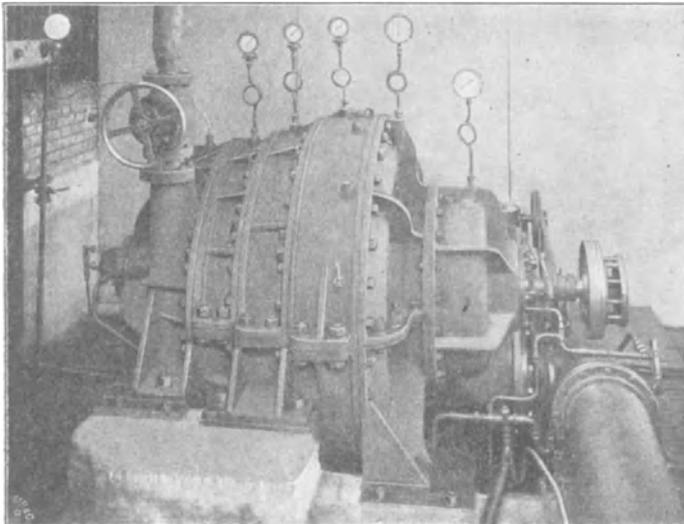


Fig. 69.

ten, die im hydraulischen Turbinenbau, freilich in der bekannten, etwas abweichenden Formgebung, sich der Girard-Schaufel erheblich überlegen gezeigt hat. Für die Niederdruckräder, die fast am ganzen Umfange beaufschlagt werden, ist achsiale Dampfströmung vorausgesetzt.

Eine Probeturbine Zoellyscher Bauart ist in den Werkstätten der A.-G. Escher Wyfs & Co. in Zürich aufgestellt und soll bei 3000 Uml./min etwa 400 PS entwickeln. Die Abbildung derselben, Fig. 69, läßt erkennen, daß die Turbine aus nur 5 bis 6 Rädern besteht; auch ist die allmähliche Zunahme der Raddurchmesser aus der Gehäuseform klar ersichtlich. Der Zweck dieser Einrichtung ist die Herabsetzung der Dampfreibung bei den in Dampf von größerer Dichte arbeitenden ersten Rädern.

### 30. Turbine von Curtis.

Die ursprünglichen Patente von Curtis betrafen verschiedene Ausführungsformen einer 4- bis 6stufigen Aktionsturbine, die im wesentlichen aus ebensoviel hintereinander geschalteten Lavalturbinen bestand. In neuerer Zeit ist der Bau dieses Systemes von der General Electric Company (Schenectady, N. Y.) aufgenommen worden, welche dasselbe weiter vervollkommnete<sup>1)</sup>. Fig. 70 zeigt eine Abwicklung des Düsen- und Schaufelprofiles. Der aus den Düsen  $A_1$  achsial austretende Dampf trifft zunächst auf die Schaufeln des ersten Laufrades  $B_1$ ; beim Austritte besitzt er eine noch so bedeutende Geschwindigkeit, daß es sich lohnt, ihn durch

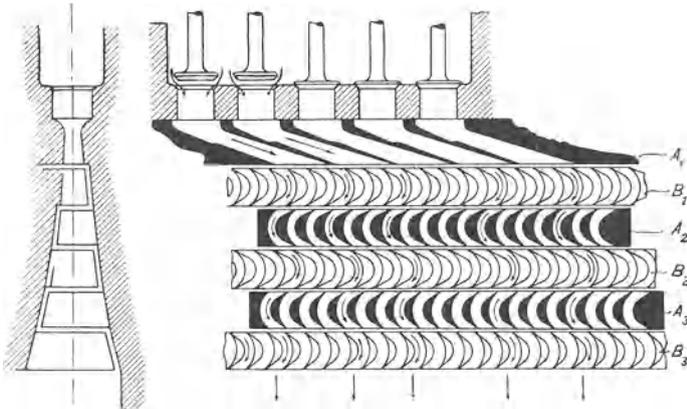


Fig. 70.

<sup>1)</sup> Nach einem Berichte in *Electrical World and Engineer* 11. April und 23. Mai 1903, sowie Mitteilungen der ausführenden Gesellschaft.

ein zweites Leitschaufelsystem  $A_2$  auf ein zweites Laufrad  $B_2$  zu leiten, und diesen Vorgang mit Leitrad  $A_3$  und Laufrad  $B_3$  nochmals zu wiederholen. Die Laufschaufeln  $B_1, B_2, B_3$  können an einem einzigen Scheibenrade in gemeinsamem Kranze befestigt werden. Damit dieses Rad keinem Ueberdrucke ausgesetzt sei, muß Gleichheit des Druckes auf seinen beiden Seiten herrschen, der Dampf muß also in der Düse bis auf diesen Druck herab expandieren. Die Strömung in den Schaufeln erfolgt dann unter konstantem Druck, der Dampf wirkt nur durch seine lebendige Kraft. Die Geschwindigkeit nimmt hierbei stark ab, einmal weil Arbeit abgegeben wird, dann wegen der Reibung; im umgekehrten Verhältnis muß der Schaufelquerschnitt zunehmen. Durch Aufzeichnen eines Geschwindigkeitplanes überzeugt man sich, daß diese Zunahme sehr bedeutend ausfällt, und nicht anders als durch Verbreiterung der Schaufeln erreichbar ist, wie durch den Querschnitt in Fig. 70 angedeutet wurde. Allein auch dann ist man gezwungen mit verhältnißmäßig großen Winkeln zu arbeiten, da die Verbreiterung sonst zu stark ausfällt, so daß Zweifel entstehen könnten, ob der Strahl sich den stark divergierenden Seitenflächen noch anschmiegen würde.

Die Turbine besteht aus zwei oder mehreren gleichen Gruppen, die hintereinander geschaltet sind. Eine ausgeführte 600 KW-Maschine arbeitet mit 1500 Uml./min und rund 130 m Umfangsgeschwindigkeit. Die Düsen sind in Gruppen dicht beisammen angeordnet, so daß nach dem angezogenen Bericht, der Dampf den Rädern in einem breiten Streifen zufließt. Die Regulierung erfolgt durch Schließen einzelner Düsen, jedoch nur für den Eintritt ins erste Rad, der Zufluß zu den andern Gruppen bleibt unverändert.

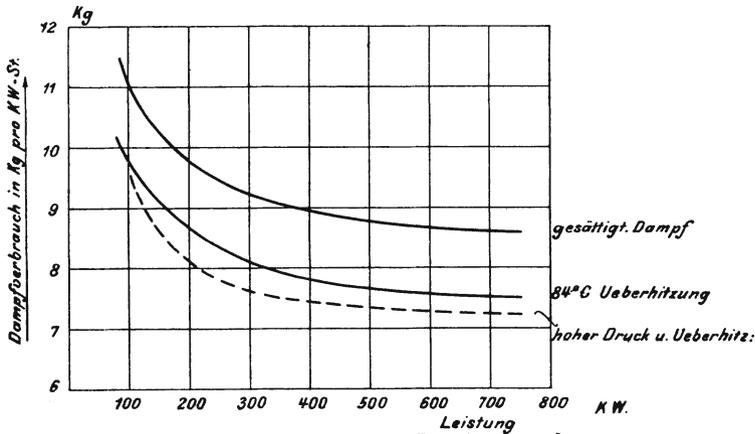


Fig. 71.

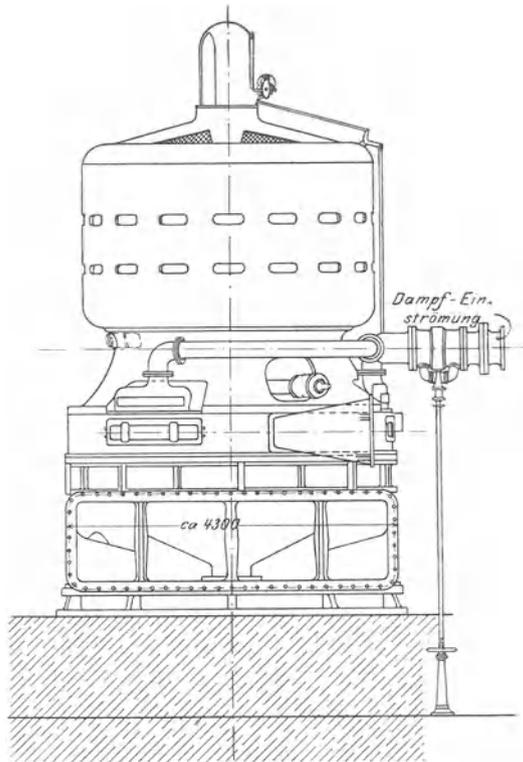


Fig. 72.

In Fig. 71 ist der Dampfverbrauch für gesättigten und mäßig überhitztem Dampf pro KW-st dargestellt, der nach Angaben der Firma an der 600 KW-Maschine ermittelt worden ist. Die gestrichelte Kurve gibt an, welche Ergebnisse die Firma bei höheren Pressungen und hoher Ueberhitzung erwartet. Es wird bemerkt, daß auch die Kurve für kleine Ueberhitzung nicht an der 600 KW-Maschine ermittelt sei, vielmehr aufgrund der Ergebnisse bei kleineren Einheiten umgerechnet worden ist. Ein Verbrauch von rd. 8,6 kg gesättigten Dampf pro KW-st wäre übrigens ein Ergebnis, welches diese Turbine als ebenbürtig an die Seite anderer Systeme stellen würde.

Eine eingehende Analyse des Dampfverbrauches wird erst durchführbar, wenn wir genauer über den Betrag der Schaufelreibung unterrichtet sind. Wenn wir dieselben Verluste voraussetzen wie in einer Lavalschaufel, so ist ein so niedriger Dampfverbrauch nicht erreichbar, dieser Verlust muß also

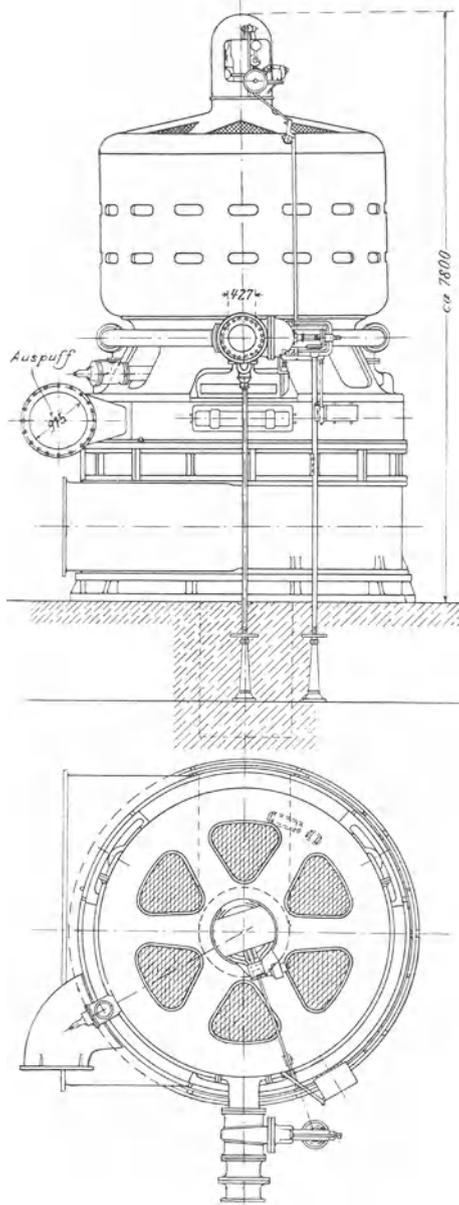


Fig. 73.

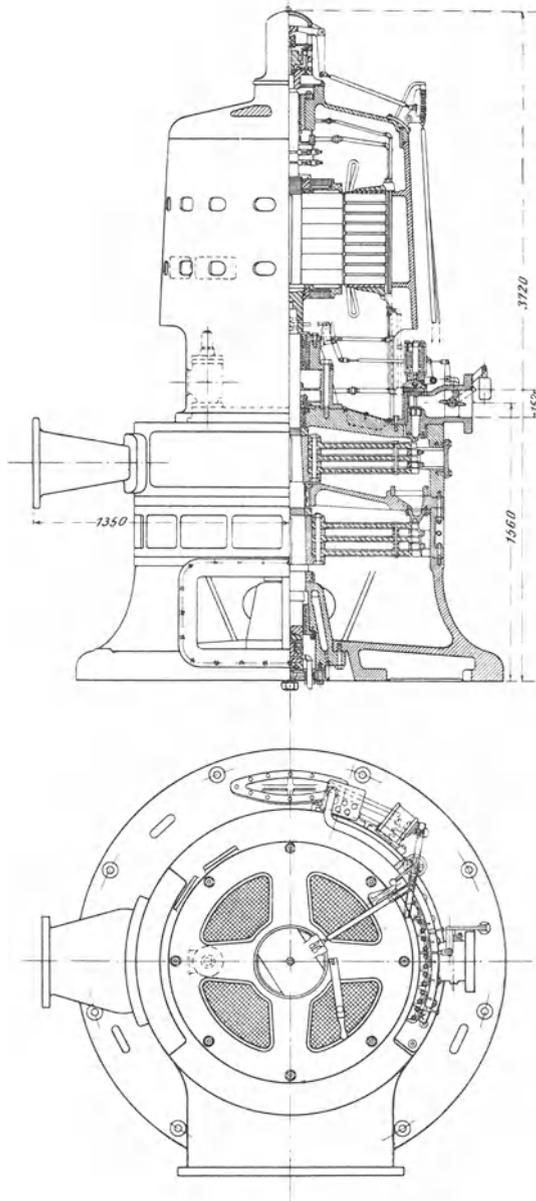


Fig. 74.

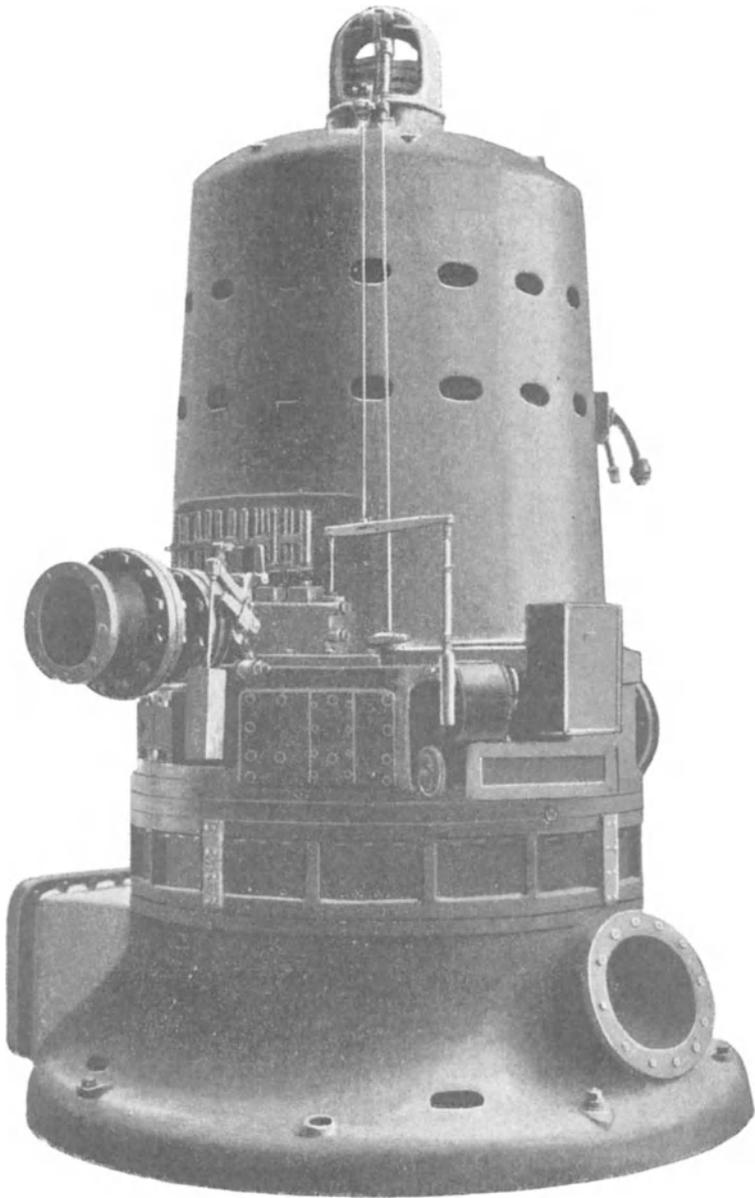


Fig. 75.

niedriger sein. Im allgemeinen kann bemerkt werden, daß Curtis mit höheren Strömungsgeschwindigkeiten, mithin auch größeren Reibungen arbeitet, als wenn er das Druckgefälle auf ebensoviele Stufen verteilt hätte, als Laufräder vorhanden sind. Dem gegenüber ist die Radreibung vermindert, indem zwei oder drei Laufräder zu einer einzigen Scheibe vereinigt sind, welche in stärker verdünntem Dampfe rotiert, als bei der erwähnten Aufteilung der Fall wäre. Die Leerlaufarbeit wird weiter dadurch herabgesetzt, daß die General Electric

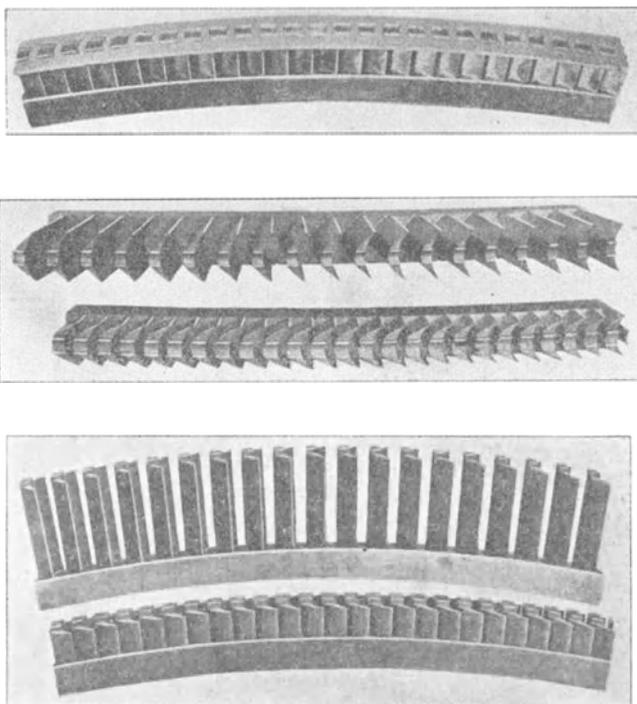


Fig. 76.

Company die vertikale Aufstellung mit oben liegender Dynamomaschine bevorzugt, sodafs die Lagerreibung fast ganz aus dem Spiele fällt. Ueber die Konstruktion geben unsere Abbildungen Auskunft. Fig. 72 und 73 zeigt die Außenumrisse einer 5000 KW-Turbine mit einigen Hauptmaßen, aus welchen man auf den ungemein geringen Raumbedarf dieses Motors schließen kann. Das Gewicht dieser Turbine mit Dynamomaschine soll sich auf nur ungefähr  $\frac{1}{8}$  des Gewichtes der un-

gefähr gleichstarken Dampfdynamos für die Zentrale der Manhattan Railway Company in New York stellen.

Die Gewichte und die Umlaufzahlen einiger Einheiten werden wie folgt angegeben:

Leistung . . . KW	15	500	1500	1500	5000
Umlaufzahl pro min	3000	1800	1800	800	500
Gewicht samt Dy- namo . . kg rd.	830	16 400	43 000	55 000	55 000 bis 175 000

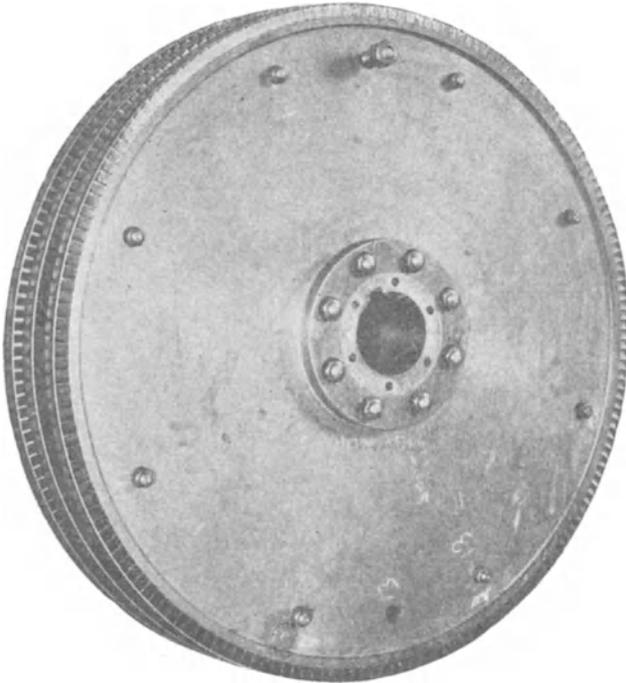


Fig. 77.

Das Gewicht bezogen auf die Einheit der Leistung ist also ungemein klein. Die Fig. 74 und 75 stellen Längenschnitt, Grundriss und Aufsicht einer kleineren Einheit (etwa 500 KW) dar, welche in zwei Hauptstufen mit je drei »Nebestufen« ausgeführt ist. Die Räder waren hier der Skizze gemäß als Scheiben konstanter Dicke gedacht, die man mit der Nabe durch achsiale Schrauben verbindet. Die Abbildung läßt deutlich erkennen, wie frei der Dampf auch die Zwischenleiträder umspült, da eine besondere Abdichtung hier eben zwecklos wäre. Die Schaufeln werden aus dem

Vollen durch Hobelmaschinen geschnitten, deren radial gestellte Stähle eine der Dampfbahn entsprechende krummlinige Führung erhalten. Ueber die Schaufelenden wird ein Band geschlungen und vernietet, um die Schaufelräume vollständig abzuschließen, s. Fig. 76. In Fig. 77 erblicken wir ein Lauf-  
rad mit drei Schaufelsystemen.

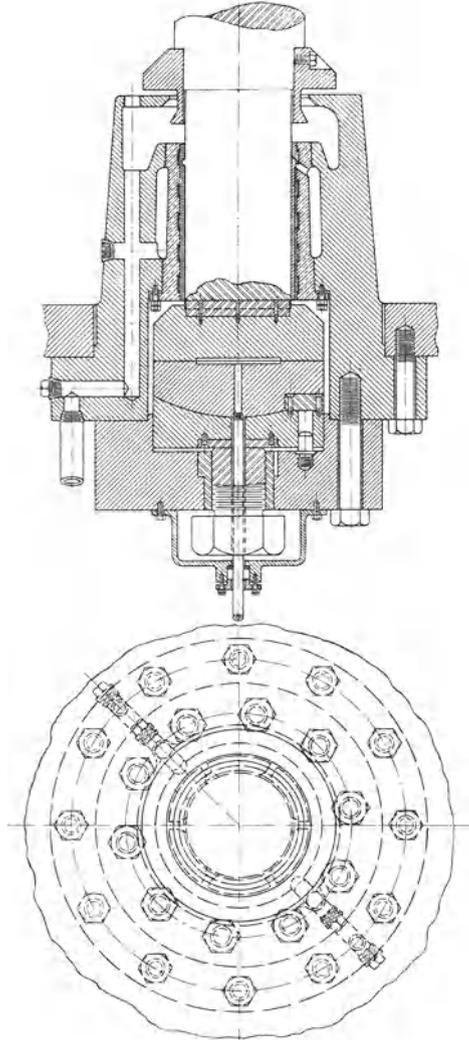


Fig. 78.

Die Regulierkegel der Hochdruckdüsen sind durch Gegenkolben entlastet, und werden durch Solenoide bewegt, die den Dampfzufuß zu den Entlastungskolben regeln. Der Regler befindet sich in einem Gehäuse über der Dynamomaschine. Ein weiterer einfacher Sicherheitsregler löst bei Ueberschreitung der normalen Geschwindigkeit die im Einströmrohre untergebrachte Drosselklappe aus. Eigenartig ist die Verkuppung der Turbinen- und der

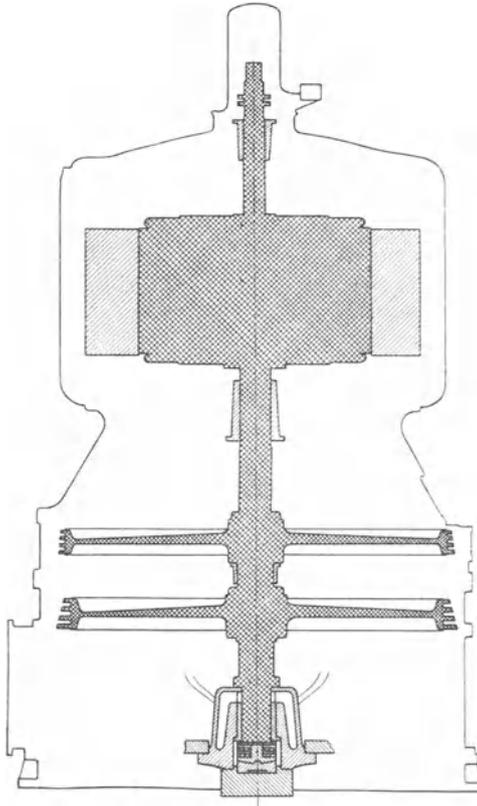


Fig. 79.

Dynamowelle durch einen Konus und Querkeile, welche Konstruktion bei der ungemein stark gehaltenen Welle hinsichtlich der Festigkeit zu keinen Bedenken Veranlassung gibt, und wesentlich an vertikaler Bauhöhe zu sparen gestattet. Das Gesamtgewicht der drehenden Teile wird durch ein Spurlager mit gußeisernen Gleitplatten und reichlicher Druckschmierung

getragen, welche Konstruktion bei großen Wasserturbinen vielfach angewendet worden ist, bei der Dampfturbine freilich was die Geschwindigkeit anbelangt ungleich höheren Anforderungen zu genügen hat. In Fig. 74 ist die Spurplatte mehrteilig, wohl um bei gleichzeitiger Drehung mehrerer Platten kleinere Gleitgeschwindigkeiten zu erhalten, welcher Zweck vielleicht bei überaus reichlicher Oelzufuhr erreichbar ist. Doch verwendet Curtis, wie Abbildung 78 zeigt, auch Fuflagerkonstruktionen mit der üblichen einfachen Spurplatte. In beiden Fällen schmirt das Drucköl auch das unmittelbar anschließende Halslager, welches in der Ausführung der Fig. 74 auch mit äußerer Wasserkühlung versehen ist.

In Abbildung 79 sind die mehrfachen Scheibenräder ersetzt durch eine einzige Scheibe mit starker Verdickung gegen die Nabe hin, für welche mithin gemäß den Festigkeitsformeln des Abschnittes (B) weit geringere Beanspruchung bei gleichem Gewicht erreichbar ist. Die wichtige Frage nach dem Betrage, um welchen sich die Scheiben vermöge ihres Eigengewichtes durchbiegen und um wieviel sie durch die Fliehkraft während der Rotation wieder gerade gerichtet werden, wird in Abteilung II genauer untersucht.

### 31. Turbine von Parsons.

Die Einrichtung dieser ältesten praktisch erprobten Turbine ist so allgemein bekannt, daß es genügt, auf wenige Einzelheiten hinzuweisen. In Fig. 80 ist der Längenschnitt durch die Turbine dargestellt, aus dem der staffelartige Aufbau der Trommeln, welche die Laufschaufeln tragen, ersicht-

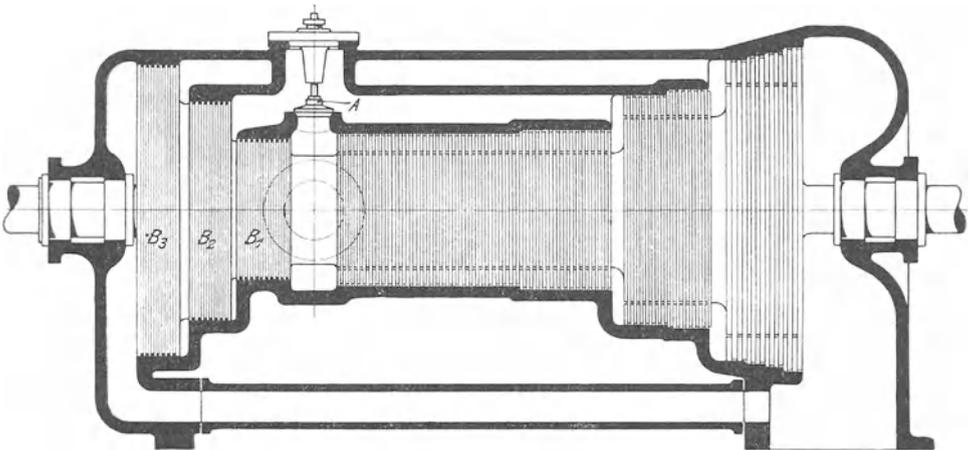


Fig. 80.

lich ist. Links befinden sich die Druckausgleichkolben<sup>1)</sup>, je einer für jede Trommel; bekanntlich werden die Räume vor jedem Kolben mit dem Dampfeintritt zur betreffenden Trommel verbunden, in der doppelten Absicht: einmal in beiden Räumen den gleichen Druck herzustellen und ferner den durch Undichtheit der Labyrinthladerung austretenden Dampf wenigstens zumteil in der Turbine nutzbar zu machen. Bei *A* hat man sich das »Überlastungsventil« zu denken, das, wie in der Bezeichnung angedeutet ist, bei einer Beanspruchung der Turbine über die normale Leistung hinaus vorhanden und durch den Regulator geöffnet wird und der nachfolgenden Trommel frischen Kesseldampf zuführt. Hierdurch wird zwar gegen die erste Trommel ein Rückstau ausgeübt, und die

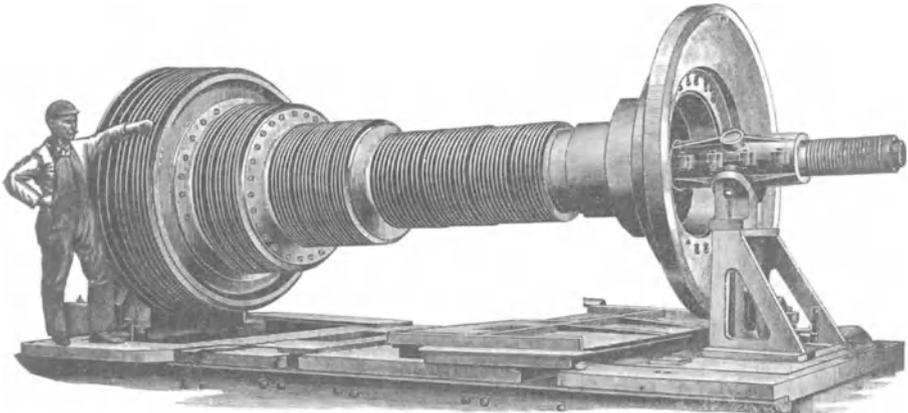


Fig. 81.

<sup>1)</sup> Der achsiale Druck, der auf ein bestimmtes Laufrad ausgeübt wird, ist bekanntlich durch den Ausdruck

$$P = F(p' - p'') - M(c_{02} - c_{01})$$

gegeben, worin  $p'$  den Druck im Spalt vor dem Laufrade,  $p''$  hinter dem Laufrade,  $F$  den Inhalt der Ringfläche zwischen dem äußeren und dem inneren Schaufelradius,  $M$  die sekundliche Dampfmasse,  $c_{01}$  und  $c_{02}$  die achsialen Komponenten der absoluten Geschwindigkeiten beim Ein- und Austritt am Laufrade bedeuten. Zu der Summe der Kräfte  $P$  kommen die Pressungen, welche der Dampf auf die Ringflächen beim Uebergange von einer Trommel zur nächstgrößeren ausübt, und schließlich der Bodendruck auf das letzte Rad. Es ist bemerkenswert, daß der Druckausgleich durch die Labyrinthkolben, wenn er bei einem bestimmten Anfangsdrucke bestand, auch bei Aenderungen der Belastung gut erhalten bleibt. Gemäß Formel 146 ändert sich der Druck an irgend einer Stelle mit dem Anfangsdrucke proportional; es werden also die Pressungen auf die Räder, die Trommeln und auf die Ausgleichkolben annähernd gleichmäßig zu- oder abnehmen, und das Gleichgewicht wird um so weniger gestört, als auch das Vakuum bei kleiner Belastung erheblich zu sinken pflegt.

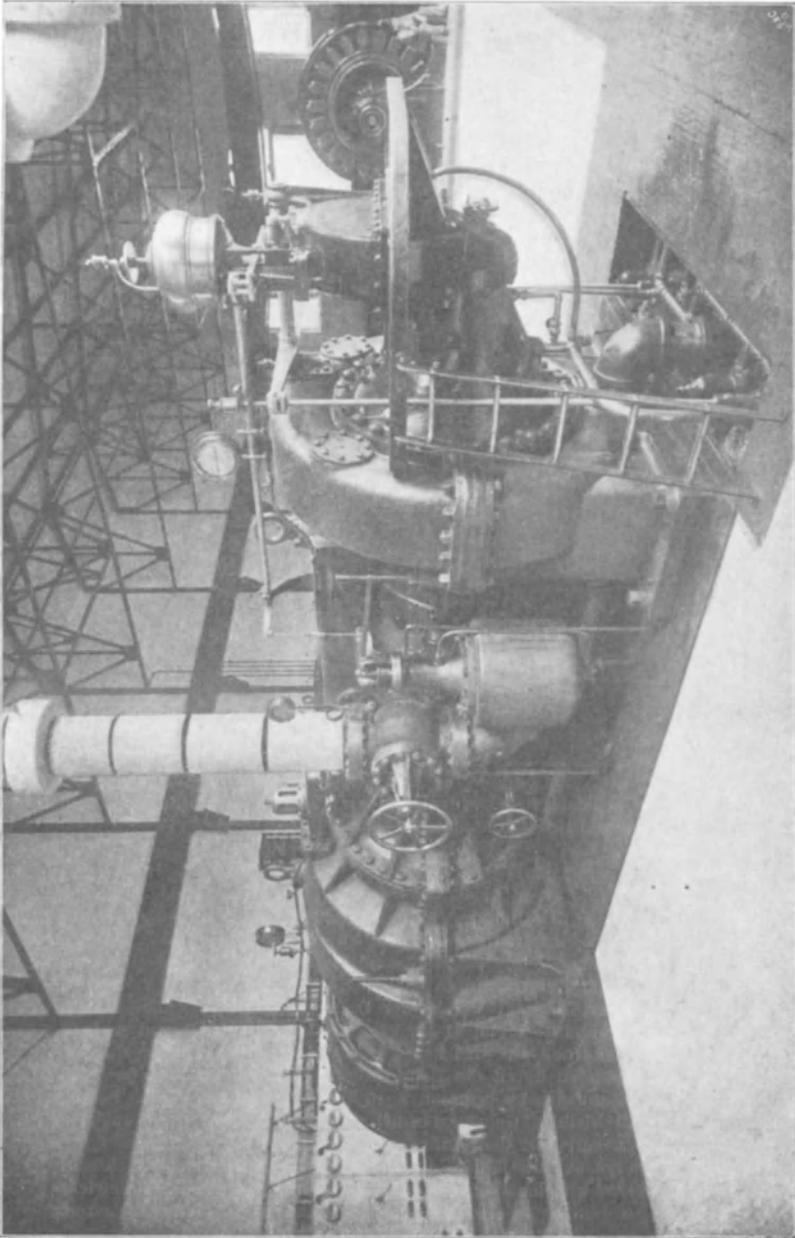


Fig. 82.

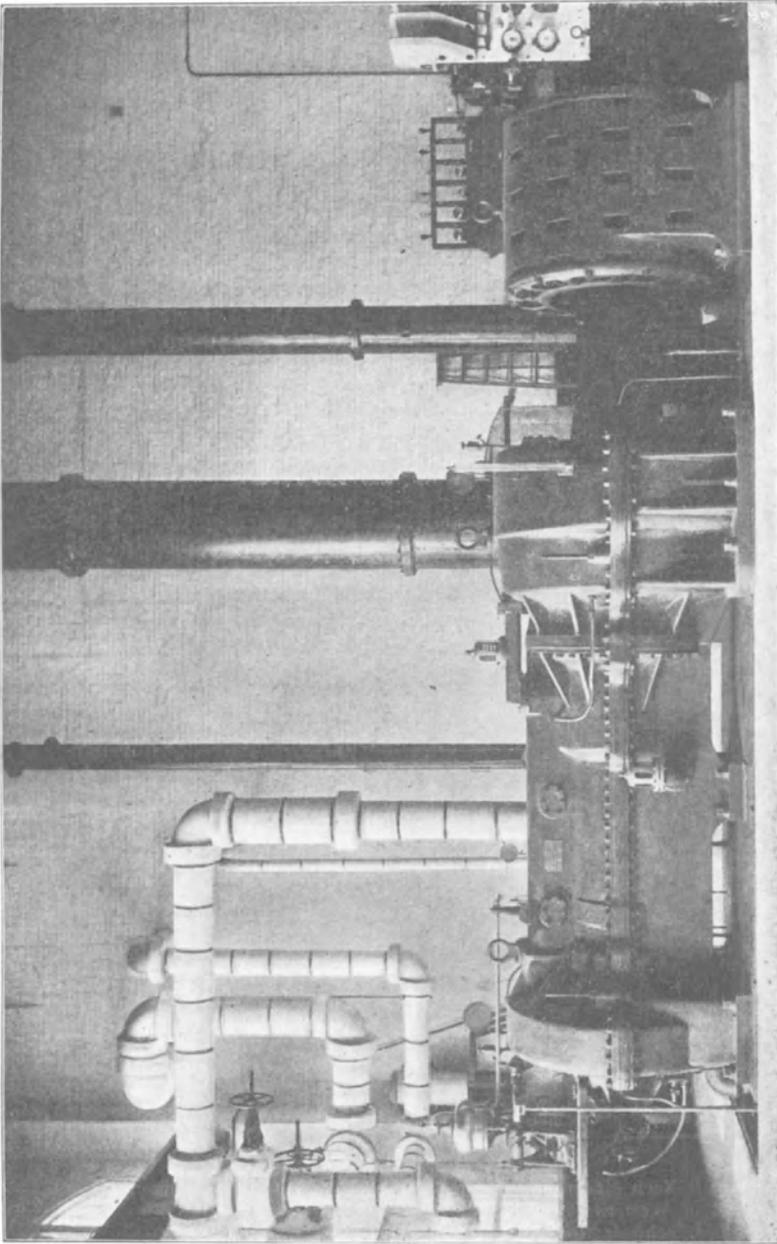


Fig. 88.

Ausnutzung des Dampfes sinkt; allein dieser Uebelstand wird durch den Vorteil mehr als aufgewogen, daß die Turbine bei normaler Leistung angenähert mit vollem Kesseldruck vor dem ersten Laufrade arbeiten kann, während sonst eine erhebliche Abdrosselung wegen der erforderlichen Kraftreserve notwendig wäre. Die austretende Welle wird ebenfalls durch ineinandergreifende Labyrinthnuten abgedichtet, in welche auf der Vakuumseite der Abdampf der Steuerung geleitet wird, um das Ansaugen von Luft zu verhüten.

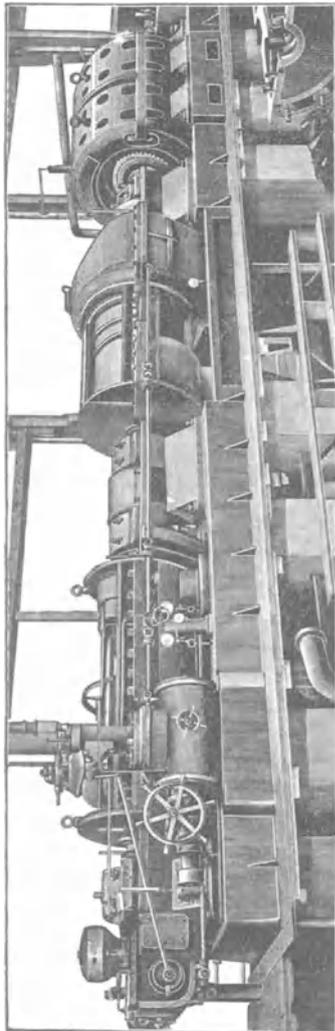


Fig. 84. Parsons-Turbine von 5000 PS, gebaut von Brown, Boveri & Co.

Fig. 81 stellt die Ansicht der Lauftrommeln und der Entlastungskolben zu einer von der Westinghouse Machine Co. in Pittsburgh gebauten 3000 pferdigen Turbine dar<sup>1)</sup>. Das Gesamtgewicht beträgt rd. 12600 kg, die Lagerentfernung 3,75 m, der größte Durchmesser 1,83 m. Fig. 82 und 83 zeigt die Gesamtansicht der konstruktiv äußerst elegant durchgeführten Turbine, welche im Elektrizitätswerk Hartford, Conn., aufgestellt ist. Die allzu sichtbaren Rohrleitungen würden freilich bei uns unterirdisch angelegt worden sein. Europäische Konstrukteure trennen die Turbine bei großen Einheiten in zwei Teile, wie die von Brown, Boveri & Co. gebaute 5000 pferdige Turbine für Frankfurt<sup>2)</sup>, Fig. 84, erkennen läßt. Mit dieser Anordnung ist freilich

Fig. 81 stellt die Ansicht der Lauftrommeln und der Entlastungskolben zu einer von der Westinghouse Machine Co. in Pittsburgh gebauten 3000 pferdigen Turbine dar<sup>1)</sup>. Das Gesamtgewicht beträgt rd. 12600 kg, die Lagerentfernung 3,75 m, der größte Durchmesser 1,83 m. Fig. 82 und 83 zeigt die Gesamtansicht der konstruktiv äußerst elegant durchgeführten Turbine, welche im Elektrizitätswerk Hartford, Conn., aufgestellt ist. Die allzu sichtbaren Rohrleitungen würden freilich bei uns unterirdisch angelegt worden sein. Europäische Konstrukteure trennen die Turbine bei großen Einheiten in zwei Teile, wie die von Brown, Boveri & Co. gebaute 5000 pferdige Turbine für Frankfurt<sup>2)</sup>, Fig. 84, erkennen läßt. Mit dieser Anordnung ist freilich

Fig. 81 stellt die Ansicht der Lauftrommeln und der Entlastungskolben zu einer von der Westinghouse Machine Co. in Pittsburgh gebauten 3000 pferdigen Turbine dar<sup>1)</sup>. Das Gesamtgewicht beträgt rd. 12600 kg, die Lagerentfernung 3,75 m, der größte Durchmesser 1,83 m. Fig. 82 und 83 zeigt die Gesamtansicht der konstruktiv äußerst elegant durchgeführten Turbine, welche im Elektrizitätswerk Hartford, Conn., aufgestellt ist. Die allzu sichtbaren Rohrleitungen würden freilich bei uns unterirdisch angelegt worden sein. Europäische Konstrukteure trennen die Turbine bei großen Einheiten in zwei Teile, wie die von Brown, Boveri & Co. gebaute 5000 pferdige Turbine für Frankfurt<sup>2)</sup>, Fig. 84, erkennen läßt. Mit dieser Anordnung ist freilich

<sup>1)</sup> Nach einem Vortrag von Fr. Hodgkinson in Proceedings of Eng Soc. of Western Pennsylvania Nov. 1900.

<sup>2)</sup> Schweiz. Bauzeitung 1902 I S. 240 u. f.

der Nachteil einer großen Wellenlänge verknüpft, der z. B. Parsons dazu geführt hat, zwischen die Hoch- und Niederdruckgruppe der Elberfelder Turbine eine bewegliche Kupplung einzubauen, damit die Labyrinthkolben jeder Gruppe durch Schrauben auf das erforderliche kleine Spiel eingestellt werden können. Bei Anwendung überhitzten Dampfes ist diese Vorsicht doppelt notwendig, da die große Ausdehnung der Welle die Kämme der Dichtungskolben aufeinander drücken oder eine klaffende Fuge hervorbringen würde. Es wird nicht an-

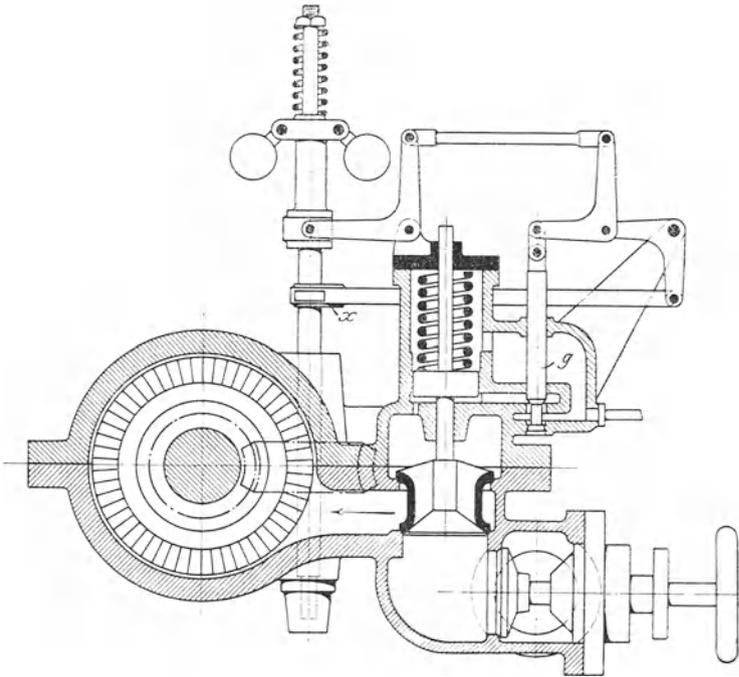


Fig. 85. Regulierung der Parsons-Turbine.

gegeben, wie man dieser Ausdehnung bei den (rückwärtigen) Stopfbüchsen Rechnung trägt.

Die Lager bestehen nur bei kleinen Turbinen aus den von Parsons ursprünglich verwendeten mehrfachen Büchsen mit etwa je 0,1 mm Spiel. Bei großen Maschinen verwendet man Lager mit Kugelschalen und Wasserkühlung, und es ist hier selbverständlich, daß alle Lager eine Druckschmierung durch eigene Pumpen erhalten. Das Oel wird in Röhrenapparaten mit Wasserumlauf gekühlt und wieder auf die Lager geleitet.

Fig. 85 zeigt das Schema einer Regulatoranordnung mit dem bekannten Dampfservomotor, welcher in stetiger Auf- und Abbewegung erhalten wird, indem das Exzenter  $\alpha$  den Steuerschieber  $g$  ebenfalls stetig auf- und abschiebt. Die Mittellage des Schiebers wird durch den Regler verstellt und hierdurch ein mehr oder weniger später Abschluss erreicht, sodafs auch die Zeitdauer des periodischen Dampfzufflusses veränderlich ist. In Fig. 86<sup>1)</sup> sind die hinter dem Drosselventil aufgenommenen Druckkurven bei voller und bei halber

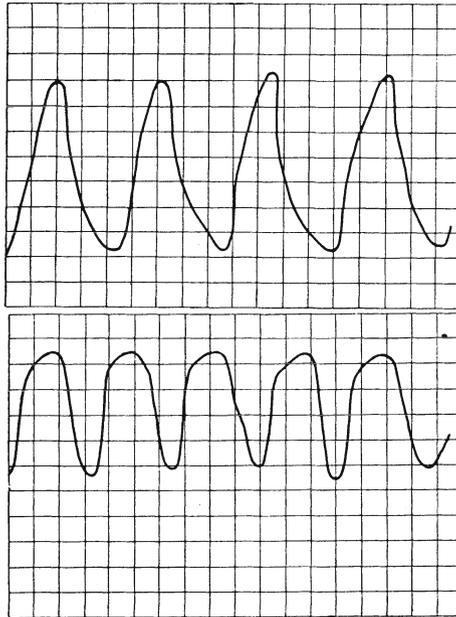


Fig. 86.

Belastung dargestellt. Die Zahl der Dampfeintritte beträgt neuerdings 150 bis 250; die Ungleichförmigkeit der Drehbewegung, welche durch die Druckschwankung künstlich herbeigeführt wird, kann mithin bei den grossen Schwungmassen der Parsons-Turbine nicht bedeutend sein.

Ueber die Abnutzungsverhältnisse der Schaufeln wird im allgemeinen Günstiges berichtet. Die Dampfgeschwindigkeit wird wohl nur selten und nur in den Niederdruckrädern Beträge von 350 bis 400 m erreichen, ist mithin um die Hälfte geringer als bei de Laval; die lebendigen Kräfte pro Massen-

<sup>1)</sup> Schweiz. Bauzeitung 1902 I S. 238.

einheit verhalten sich wie 1 : 4, und dies scheint der Grund der geringeren Abnutzung zu sein. Hier wie dort dürfte die Einführung der Ueberhitzung durch Beseitigung der Wassertropfen auch auf den Verschleifs einen günstigen Einfluss ausüben.

Ueber den Dampfverbrauch der Parsons-Turbine liegt eine gröfsere Anzahl von Versuchen vor. In erster Linie sind zu nennen die ausgezeichneten Untersuchungen von Lindley, Schröter und Weber an den Turbinen von Elberfeld<sup>1)</sup>. Die folgende Zahlentafel enthält weitere Ergebnisse, über welche Stoney<sup>2)</sup> auf dem Internationalen Ingenieurkongress zu Glasgow 1901 Mitteilung gemacht hat.

In der Spalte des Dampfverbrauches pro KW-st ist beim Leerlauf der gesamte stündliche Verbrauch (in Klammern) eingetragen. Da Angaben über den Wirkungsgrad der Dynamomaschinen nicht vorhanden sind, so ist in der letzten Spalte die wirkliche Leistung verglichen mit der Leistung einer vollkommenen Turbinendynamo, in der die ganze verfügbare Wärme  $\lambda_1 - \lambda_2'$  ohne Verlust in elektrische Energie umgewandelt würde. Der theoretische Verbrauch pro KW-st ist mithin

$$D_0 = \frac{637}{0,736 (\lambda_1 - \lambda_2')} = \frac{865,5}{A L_0} \text{ kg,}$$

und das Verhältnis  $\eta_{el} = \frac{D_0}{D_e}$  stellt den thermodynamischen Wirkungsgrad bezogen auf die elektrische Leistung dar; es sind in dieser Zahl also die Verluste der Dynamo, welche natürlich von Fall zu Fall andere sein werden, mit einbegriffen.

Ueber die zweiten Abnahmeversuche an den Elberfelder Turbinen bringt die Schweizerische Bauzeitung a. a. O. folgende Angaben:

Zahlentafel 5.

Turbine Nr.	Leistung KW	Dampf- temperatur °C	gesättigt oder überhitzt	Dampfverbrauch			mech. Wirkungsgrad der Dynamo
				pro KW-st kg	pro elektr. PS-st ab kg	pro effekt. PS-st ab kg Turbinen- welle	
I	1030	182,0	gesättigt	9,42	6,93	6,37	0,919
	735	183,6	>	10,12	7,43	6,80	0,915
	470	184,8	>	11,31	8,32	6,73	0,809
	1022	208,7	überhitzt	9,10	6,69	6,17	0,922
	758	211,0	>	9,64	7,09	6,47	0,912
	481	207,0	>	10,87	8,00	7,11	0,888
II	1042	181,0	gesättigt	9,69	7,13	6,48	0,909
	506	185,0	>	11,34	8,35	6,77	0,811
	1030	226,9	überhitzt	8,96	6,59	6,06	0,920
	510	219,0	>	10,71	7,83	7,01	0,890

<sup>1)</sup> Z. 1900 S. 829 u. f.

<sup>2)</sup> Leitender Ingenieur bei C. A. Parsons & Co., Newcastle-on-Tyne.

**Zahrentafel 4.**  
**Ergebnisse von Versuchen an Parsons-Turbinen**  
**nach Stoney.**

	Ort der Aufstellung und Art des elektrischen Stromes	Dampf- überdruck	Konden- satordruck	Ueberhitzung	Leistung	Uml./min	wirklicher Dampf- verbrauch $D_e$	theoretischer Dampf- verbrauch $D_0$	$\frac{D_0}{D_e}$ $\eta = \frac{D_0}{D_e}$
		kg/qcm	kg/qcm abs.	° C			KW	kg/KW-st	
1	Newcastle	5,62	0,0414	—	24,7	4990	13,06	5,19	0,397
2		5,41	0,0345	—	11,8	4630	15,38	5,11	0,332
3		5,20	0,0311	—	5,15	4570	20,68	5,09	0,246
4		5,48	0,138	—	23,8	4900	15,19	6,41	0,422
5		5,55	1,036	—	19,7	4780	31,07	12,79	0,412
6	Blackpool	8,86	0,0691	—	52,7	5044	12,7	5,074	0,400
7	(Wechselstrom)	9,28	0,0518	—	—	4880	(145,1)	—	—
8	Blackpool	8,93	0,104	—	108,5	4800	12,16	5,40	0,445
9	(Wechselstrom)	8,93	0,0656	—	51,4	4600	13,56	5,04	0,372
10		8,93	0,0553	—	—	4450	(136,1)	—	—
11	West-Bromwich	9,07	0,076	30	123	3500	11,57	5,01	0,433
12	(Gleichstrom)	9,42	0,079	35,6	122	3520	10,80	4,96	0,459
13	Winwick	7,03	0,0414	46,7	119	3640	11,02	4,75	0,431
14	(Gleichstrom)	6,40	0,0829	38,3	121	3685	11,48	5,40	0,470
15		6,54	0,0829	34,4	80	3500	12,88	5,41	0,420
16		6,82	0,0760	15,6	42	3200	16,33	5,40	0,331
17	Blackpool	9,07	0,0829	32,2	226	3045	9,98	5,14	0,515
18	(Gleichstrom)	8,58	0,0553	33,3	232	3010	9,93	4,81	0,484
19		8,37	0,107	—	204	3000	10,98	5,52	0,503
20		9,14	0,0691	—	—	3010	(430,9)	—	—
21	Scarborough	8,86	0,112	—	529	2400	10,30	5,47	0,531
22	(Wechselstrom)	9,00	0,0794	—	258	2400	11,98	5,15	0,430
23		11,53	0,0656	—	—	2600	(670,0)	—	—
24	Cheltenham	9,14	0,114	—	553	3000	9,84	5,46	0,554
25	(Wechselstrom)	9,14	0,117	—	278	3000	11,88	5,49	0,462
26		9,35	0,207	—	553	3000	10,70	6,12	0,572
27		9,14	0,207	—	453	3000	11,25	6,15	0,547
28		9,49	0,207	—	276	3000	13,45	6,11	0,455
29	Blackpool	10,26	0,100	38,9	515	2500	9,68	5,04	0,520
30	(Wechselstrom)	10,55	0,104	—	502	2500	10,48	5,18	0,495
31		9,49	0,0932	—	497	2500	10,89	5,26	0,483
32		9,35	0,0932	36,7	507	2500	9,57	5,08	0,531
33		10,69	0,0345	—	—	2500	(680,4)	—	—
34		11,25	0,221	—	—	2500	(1147,6)	—	—
35		10,97	0,038	2,8	—	2500	(664,5)	—	—
36	Elberfeld	9,11	0,063	10,2	1190,1	1487	8,81	4,82	0,547
37	(Drehstrom)	9,47	0,053	11,1	994,8	1461	9,14	4,69	0,513
38		9,76	0,054	8,0	745,3	1470	10,12	4,70	0,464
39		9,40	0,046	29,1	498,7	1473	11,42	4,54	0,398
40		9,14	0,050	17,0	246,5	1485	15,21	4,66	0,304
41		9,49	0,037	13,5	—	1488	(1183)	—	—

Die Wirkungsgrade der Dynamo sind durch Division der beiden vorletzten Spalten von mir berechnet und zeigen auffallende Unterschiede bei halber Belastung. Nimmt man etwa 86 KW als Mittelwert des Verlustes durch Hysteresis, Erregung, Luft- und Lagerreibung und (gestützt auf eine Bemerkung im Versuchsbericht) 4 KW als Ankerkupferwärme, mithin 90 KW insgesamt bei normaler Belastung an, so können die Versuche in Newcastle auf die effektive Leistung umgerechnet werden. Hierbei werde der Vergleich gezogen mit einer vollkommenen Maschine, welche mit gleichem Druck und gleicher Temperatur wie in der Kammer hinter dem Regulierventil arbeitet. Die Umrechnung ergibt die Werte der folgenden Zahlentafel.

<sup>1)</sup> Aufgrund der früher gemachten Bemerkungen kann folgendes über die Leerlaufarbeit der Elberfelder Turbine ausgesagt werden. Es sei dies Arbeit bei Vollbelastung =  $N_{r_1}$ , bei Leerlauf =  $N_{r_2}$  in PS, mithin die gesamte Dampfarbeit bei Vollbelastung  $N_i = N_e + N_{r_1}$ , bei Leerlauf =  $N_{r_2}$ . Rechnen wir auf Undichtheit in beiden Fällen denselben prozentischen Betrag ab und bezeichnen mit  $G_1'$ ,  $G_2'$  das nützliche sekundäre Dampfgewicht. Pro PSi-st wurde verbraucht  $C_1 = \frac{G_1'}{N_i}$  und  $C_2 = \frac{G_2'}{N_{r_2}}$ ; 1 kg Dampf leistete nutzbar

$$\frac{637}{C_1} \text{ bzw. } \frac{637}{C_2} \text{ WE.}$$

Verfügbar sind indessen (auf den Zustand in der Dampfkammer bezogen)  $A_1$  und  $A_2$  WE. Der Verlust pro kg Dampf beträgt mithin

$$Z_1 = A_1 - \frac{637}{C_1} \text{ WE und}$$

$$Z_2 = A_2 - \frac{637}{C_2} \text{ WE.}$$

Dieser Verlust ist bei Leerlauf kleiner als bei Vollbelastung, sowohl weil die Dampfgeschwindigkeiten kleiner sind, als auch weil die Ueberhitzung höher ist. Es wird mithin

$$Z_1 = k Z_2,$$

wobei  $k$  nach einer Schätzung bis auf den Wert 4 ansteigen könnte. Nimmt man als Grenze  $N_{r_1} = N_{r_2}$  und  $k = 1$  an, so folgt als Minimum

$$N_r = \text{rd. } 78 \text{ PS.}$$

Für die wahrscheinlichere Annahme  $k = 4$  folgt

$$N_r = \text{rd. } 155 \text{ PS.}$$

Letzterer Betrag erscheint allerdings sehr hoch. Eine genauere Bestimmung des Leerlaufes wäre experimental möglich, indem man die Turbine durch ihre Dynamo bei gedrosselter Dampfzufuhr antreibt und für mehrere Zwischenleistungen die Triebkraft und die noch durchgehende Dampfmenge mißt, bis der in der Fußnote auf S. 193 gekennzeichnete kritische Punkt erreicht wird.

Zahlentafel 6.

Versuche in Newcastle an einer 1000 KW-Turbine, bezogen auf die effektive Leistung und auf den Dampfzustand in der Dampfkammer.

Versuch Nr. . . . .	II	I	III	IV	V	VI	VII
						Dynamo	
elektrische Leistung . . . KW	1190	995	745	499	246	erregt	unerregt
Gesamtverlust in der Dynamo (geschätzt) . . . . . »	92	90	88	87	86	86	10
gesamter Arbeitsaufwand . . . »	1282	1085	833	586	332	86	10
d. h. effekt. Leistung an der Turbinenwelle . . . . . PS <sub>e</sub>	1742	1474	1132	796	451	117	13,6
mechan. Wirkungsgrad der Dynamo . . . . . vH	92,8	91,7	89,4	85,2	74,2	—	—
beob. Dampfverbr. pro PS <sub>e</sub> -st theor. » » » kg	6,02	6,17	6,66	7,15	8,36	15,8	87,0
thermischer Wirkungsgrad $\eta_e$ bez. auf eff. Leistung . vH	3,78	3,77	3,89	3,96	4,48	5,54	6,47
	61,9	61,0	58,5	55,3	53,5	35,0	7,5

Die Westinghouse Machine Co. in Pittsburg teilt mir mit, daß die in Fig. 88 abgebildete Turbine von 1500 KW Leistung bei 150 Pfd. = 10,54 kg/qcm Kesseldruck und 26" = 660 mm Vakuum folgende Dampfverbrauchszahlen ergeben habe:

bei Vollbelastung . . . . .	8,67 kg pro KW-st
» $\frac{3}{4}$ -Belastung . . . . .	9,20 » » »
» $\frac{1}{2}$ » . . . . .	10,44 » » »
» $\frac{1}{4}$ » . . . . .	12,70 » » »

Die Versuche, auf welche sich diese Angaben wahrscheinlich stützen, sind inzwischen in Electrical World Sept. 1902 von Prof. Wm. Lisperard Robb veröffentlicht worden und finden sich in der nachfolgenden Zahlentafel zusammengefaßt.

Die Versuche mußten während des gewöhnlichen Betriebes stattfinden, weshalb denn auch Schwankungen der Belastung unvermeidlich waren. Die a. a. O. mitgeteilten Schaulinien zeigen indessen keinen so sprunghaften Verlauf, daß man obigen Ergebnissen nicht Vertrauen entgegenbringen könnte. Der Verbrauch wurde durch Wägung der Speisewassermenge gemessen. Es ist nicht angegeben, ob der Dampfdruck »absolut« verstanden ist. Die aus der Reihe fallende Zahl des Versuches 5 dürfte auf das minderwertige Vakuum zurückzuführen sein.

Aus diesen Angaben, insbesondere den Versuchen von Stony, geht mit besonderer Deutlichkeit der große Einfluß der Ueberhitzung und der Tiefe der Luftleere auf den Dampfverbrauch hervor. Die Parallelversuche an den 500 KW-Maschinen in Blackpool, Zahlentafel 4 Nr. 29 und 30,

## Zahlentafel 7.

## Versuchsergebnisse einer 1500 KW-Westinghouse-Turbine in Hartford, Conn.

Nr.	Datum 1902	Leistung			Versuchsdauer st	Dampfdruck kg/cm	Vakuum kg/qcm abs.	Ueberhitzung °C	Kohle kg/KW-st	Dampf- verbrauch kg/KW-st
		mittlere	größte	kleinste						
		KW	KW	KW						
1	8. Febr.	1998	2185	1900	4	10,92	0,111	23,2	0,772	8,67
2	28. Jan.	1675	1820	1480	6	10,62	0,095	22,2	0,799	9,17
3	9. Mai	1371	1570	1110	6	10,66	0,122	17,8	0,922	9,96
4	12. »	834	940	660	6	10,76	0,105	19,7	1,067	11,17
5	8. »	888	980	750	6	10,72	0,145	18,2	1,117	12,04
6	7. »	471	780	310	6	10,66	0,113	10,6	1,330	14,51
7	13. »	364	520	150	6	10,75	0,091	16,1	1,507	15,19

weisen eine Verbesserung von 1 vH auf je  $5,1^{\circ}$  C Ueberhitzung auf, während die Abnahme des theoretischen Verbrauches nur  $5,18 - 5,04 = 0,14$  kg/KW-st = 2,7 vH von  $5,18$  beträgt, d. h. nur auf  $\frac{38,9}{2,7} = 14,4^{\circ}$  eine Ersparnis von 1 vH des Verbrauches ergibt. Aehnlich geben Nr. 31 und 32 1 vH auf  $3,3^{\circ}$  C, während theoretisch 1 vH auf  $11^{\circ}$  entfällt. In absoluten Zahlen stellen sich die Verhältnisse für Nr. 29 und 30 wie folgt: Bei einem vorausgesetzten Wirkungsgrade der Dynamo von 0,90 und einem Austritt- und Lagerreibungsverlust der Turbine von 8 vH betragen die gesamten Dampfreibungsverluste pro kg Dampf 61,6 WE bei gesättigtem und 58,5 WE bei überhitztem Dampfe. Die Ermäßigung der Reibung beträgt also 3,1 WE auf 61,6 WE, d. h. 5,7 vH. Da die Ueberhitzung  $38,9^{\circ}$  C betrug, so ergibt sich eine Abnahme der Dampfreibungsarbeit von 1 vH auf rd.  $6,8^{\circ}$  Ueberhitzung. Weitere Versuche müssen eine Bestätigung dieses Fallens der Reibungskoeffizienten bringen, welches zwar das in Fig. 44 dargestellte Sinken der Leerlaufarbeit nach Lewicki noch unterbietet, allein immerhin auf das Schlussergebnis keinen so bedeutenden Einfluss ausübt, wie von manchen erwartet worden war. Wenn man annimmt, daß die Parallelversuche in Elberfeld je unter sonst genau gleichen Umständen durchgeführt worden sind, so ergibt der Vergleich einen Gewinn von 1 vH auf rd.  $8^{\circ}$  bei Turbine I ( $27^{\circ}$  Ueberhitzung) und auf rd.  $6^{\circ}$  bei Turbine II ( $46^{\circ}$  Ueberhitzung), also auch merklich weniger als bei Versuch 31 und 32.

Ueber den Einfluss der Luftverdünnung geben die Versuche 24 und 26 an den 500 KW-Maschinen von Cheltenham Aufschluß. Der Uebergang von  $0,207$  kg/qcm Gegendruck auf  $0,114$  kg/qcm ergibt einen Gewinn im Dampf-

verbrauch von  $\frac{10,70 - 9,84}{10,70} = 8,95$  vH, während theoretisch  $\frac{6,12 - 5,46}{6,12} = 12,4$  vH zu erwarten wären. Auf 0,1 kg/qcm Erniedrigung des Gegendruckes bezogen, sind die entsprechenden Zahlen 4,65 vH und 6,40 vH; es werden mithin bei der Steigerung des Vakuums  $\frac{4,65}{6,40} = 0,73$ , d. h.  $\frac{3}{4}$  des theoretischen Gewinnes tatsächlich erzielt. Nun ist aber zu beachten, daß bei einer und derselben Turbine die Austrittsgeschwindigkeit bei kleinem Vakuum nahezu im einfachen Verhältnis mit dem größeren Dampfvolumen, der Austrittsverlust mithin im quadratischen Verhältnis wachsen muß. War dieser Verlust bei 0,114 at Vakuum 5 vH, so wird er bei 0,207 at = rd.  $\left(\frac{0,114}{0,207}\right)^2 5 = 1,4$  vH, und der Unterschied  $5 - 1,4$  vH = 3,6 vH ist nahezu der Betrag, der sich oben als Unterschied zwischen dem theoretischen (12,4 vH) und dem wirklichen Gewinn (8,95 vH) herausgestellt hat. Hieraus folgt, wie wichtig es für die Dampfturbine ist, ein möglichst tiefes Vakuum herzustellen. Die Versuche von Stoney lassen erkennen, daß dies bei den Turbinen von Parsons in ausgezeichneter Weise gelungen ist.

### 32. Turbine von Rateau.

Die Turbine von Rateau ist eine reine Druckturbine und besteht aus einer Anzahl aus dünnen Blechplatten hergestellter Räder, die auf gemeinschaftlicher Achse aufgekeilt und durch Scheidewände voneinander getrennt sind. Die ersten Räder sind teilweise beaufschlagt, sodafs die Umfangsgeschwindigkeit von Anfang an hoch gewählt werden kann, ohne daß man zu kurze Schaufeln erhielte. Die Leitschaufeln sind in die Scheidewände eingesetzt, die Laufschaufeln aus einem Stück Bronze- oder Stahlblech gebogen und auf den doppelt umgebördelten Rand der Radscheibe aufgenietet. Das erste Wellenlager ist in den Deckel der Turbine eingebaut und muß aus diesem Grunde durch Druckpumpen mit gekühltem Oele versehen werden, welches vorn eintritt und die Temperatur der Laufflächen auf der gewünschten Tiefe erhält. Das Niederdrucklager wird neuerdings von der Turbine getrennt und die Welle durch eine einfache Büchse gedichtet, in welche man durch eine Ringnut so viel Wasser einströmen läßt, daß ein vollständiger Abschluß erzielt wird. Da auf beiden Seiten jedes Laufrades gleicher Druck herrscht, so entfällt der achsiale Schub bis auf den kleinen Betrag, den der Dampfdruck auf die Vorderfläche des Stirnzapfens ausübt. Fig. 87 und 88 zeigen Schnitte durch die Maschine, wobei zu bemerken ist, daß die Rad-

Additional material from *Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen*

ISBN 978-3-662-36140-5 (978-3-662-36140-5\_OSFO3),  
is available at <http://extras.springer.com>



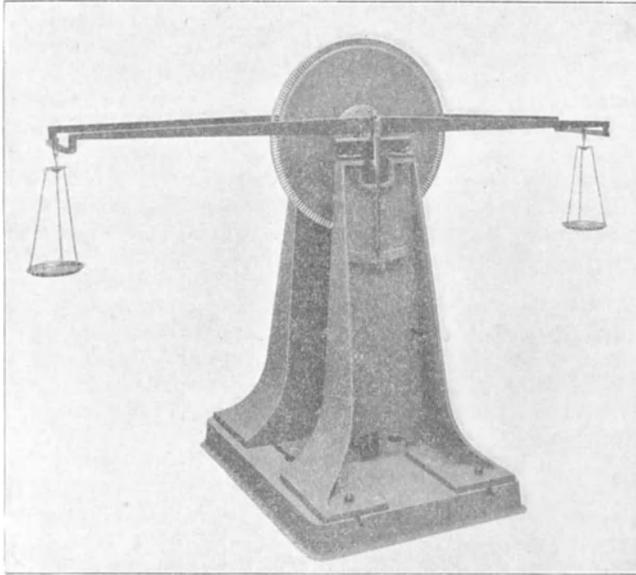


Fig. 90.

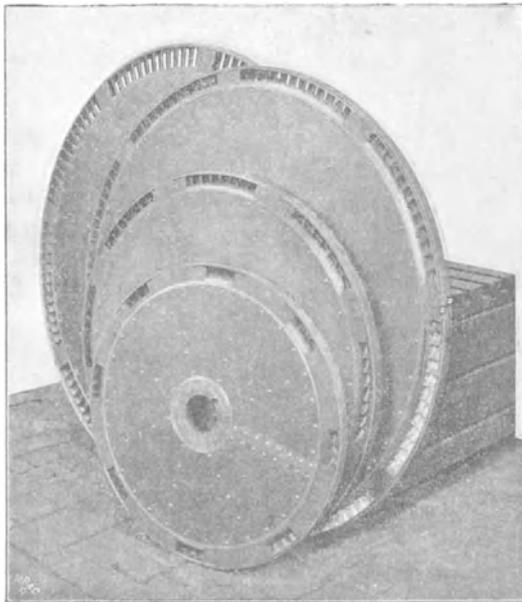


Fig. 91.

scheiben durch Nietung mit ihren Naben verbunden sind. In Fig. 89 ist die Außenansicht der Maschine mit Dynamo und Schmiervorrichtungen. Der Massenausgleich der einzelnen Räder erfolgt auf der in Fig. 90 abgebildeten Wägevorrichtung durch Auswägen der Scheiben in zwei um



Fig. 92.

90° verdrehten Stellungen. Die Beschaffenheit der Räder und Scheidewände ist aus Fig. 91 und 92 gut zu erkennen. Ein Federregulator wirkt auf ein drosselndes Doppelsitzventil und ist mit einer von Denis herrührenden Vorrichtung versehen, durch welche die Umlaufzahl nach jeder Belastungsänderung auf die ursprüngliche Höhe gebracht wird. Dieses Regu-

lierverfahren hat sich an den von Sautter, Harlé & Co. gebauten Dampfmaschinen gut bewährt.

Die genannte Firma hat letzthin eine Niederdruckturbine und in Betrieb gesetzt, welche von den Sachverständigen Sauvage Picou in Paris geprüft worden ist, nach deren mir in Abschrift mitgeteilten Bericht (vom 19. April 1902) die Turbine mit einem Rateauschen Wärmeakkumulator zusammenwirken soll. Dieser Akkumulator ist eine geeignet große Gufseisenmasse, welche den von den Fördermaschinen absatzweise gelieferten Dampf kondensieren und ihn während der Ruhepausen durch die aufgehäuften Wärme wieder verdampfen soll, damit die aufgestellte Turbine in stetigem Betriebe erhalten werden kann. Die Turbine besteht aus 7 Rädern von je 880 mm Dmr. Die Versuchsergebnisse mit dem berechneten thermodynamischen Wirkungsgrad, bezogen auf die elektrische Leistung, sind in der nachfolgenden Zahlentafel vereinigt.

Zahlentafel 8.  
Versuche von Sauvage und Picon mit einer  
Rateau-Turbine.

	Uml./min	Leistung		Druck		Eintritts- temperatur ° C	winkl. Dampf- verbrauch pro elekt. PS-st $D_d$ kg	theoret. Dampf- verbrauch pro elekt. PS-st $D_0$ kg	thermodyn. Güte- $\eta_{el} = \frac{D_0}{D_d}$
				vor der Turbine	im Kon- densator				
				kg/qcm abs.	kg/qcm abs.				
1	1610	Leerlauf ohne Erregung		0,136	0,087	111,4	(570 pro st)	—	—
2	1589	70,3	95,6	0,381	0,088	111	23,26	11,8	0,506
3	1600	140,9	191,4	0,659	0,128	135	19,14	10,1	0,526
4	1591	202,0	274,4	0,902	0,163	137	18,03	9,66	0,535
5	1598	232,5	315,8	1,034	0,196	147	17,88	9,80	0,548

Die Bauart der von Sautter, Harlé & Co. konstruierten Turbinen geht aus Fig. 93 hervor, in der eine 500 KW-Maschine für Penarroya dargestellt ist. Die Welle ist hier auch am Hochdruckende durch eine Stopfbüchse hinausgeführt, sodafs alle Lager auferhalb des Dampftraumes liegen.

Diese Stopfbüchse, Fig. 94, besteht nach der englischen Patentbeschreibung aus einer die Welle *a* eng umschließenden längeren Hülse *b* von geeigneter Metallegierung. Der durch den Spalt dringende Dampf gelangt in die Vorkammer *c*, in welcher mittels eines Reduktionsventiles ein konstanter Druck von z. B. 0,8 at absolut erhalten wird. Vom Reduktionsventil führt man den Dampf zum Kondensator. Die Abdichtung der Kammer *c* erfolgt durch zwei dreiteilige Bronzeringe *d, d*, die durch umgelegte Spiralfedern *e* mit geringem Druck gegen die Welle geprefst werden. Die Fugen in den Teilungsebenen

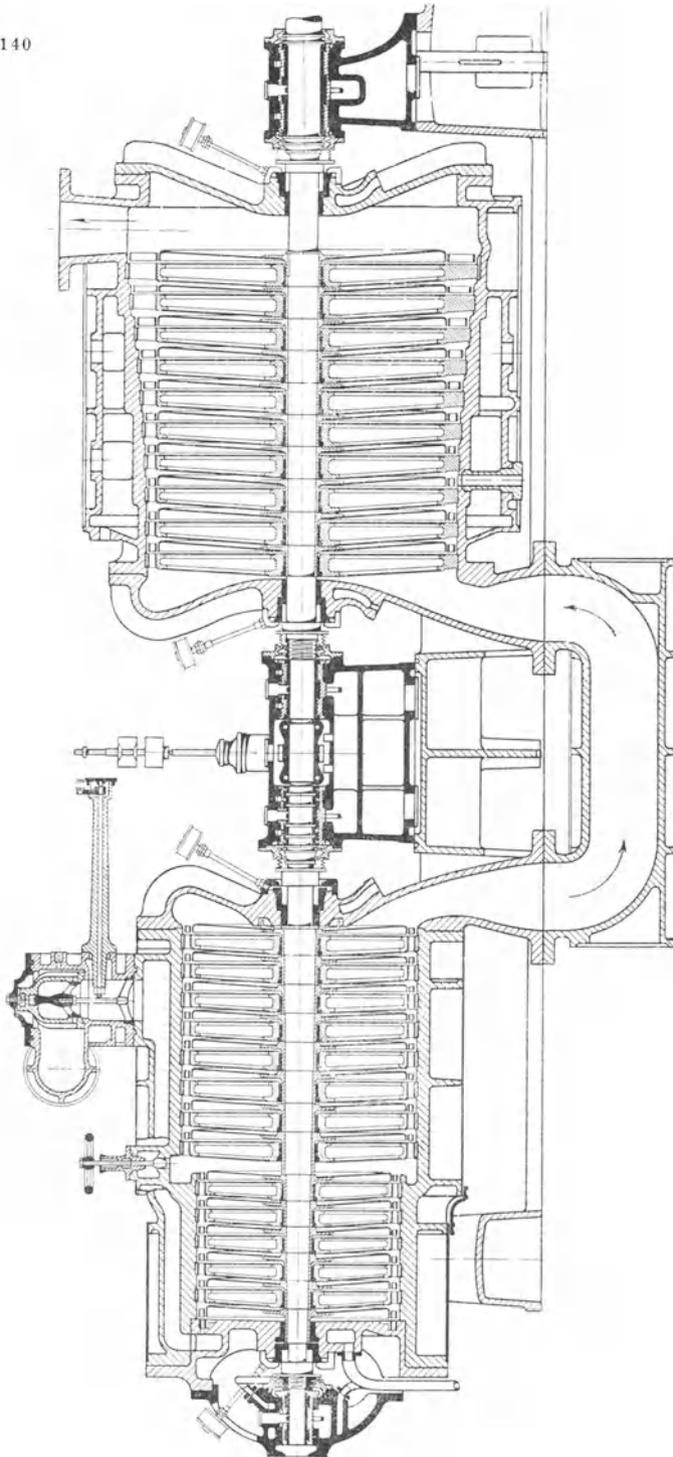


Fig. 98.

müssen durch sorgfältiges Einpassen nahezu zum Verschwinden gebracht werden. Eine Anpressung in achsialer Richtung wird durch Federn  $f$  bewirkt. Die Kammern  $c$  aller Stopfbüchsen einer Turbine stehen untereinander in Verbindung, es wird mithin ein Teil des Dampfes, der an der Hochdruckseite austritt, an der Vakuumseite durch die Stopfbüchse an-

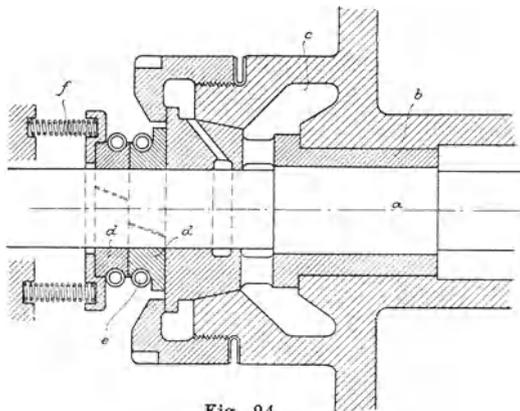


Fig. 94.

gesogen. Wenn im Leerlauf vor allen Stopfbüchsen Vakuum herrscht, gestattet das Reduktionsventil frischem Kesseldampf den Zutritt, damit nicht durch die Fugen von  $d$  zuviel Luft angesogen wird.

Ferner teilt mir die Maschinenfabrik Oerlikon mit, daß sie in ihrem Versuchsraum die durch Fig. 89 veranschaulichte Rateau-Turbine von 1000 KW einer Dampfverbrauchprobe unterworfen und die Werte in Zahlentafel 9 erhalten habe.

Zahlentafel 9.

Versuche der Maschinenfabrik Oerlikon mit einer Rateau-Turbine von 1000 KW.

	Leistung KW	Druck in kg/qcm abs.			Temperatur vor dem 1. Leitrade ° C	wirklicher Dampfverbrauch pro KW-st $D_{el}$ kg	theoretischer Dampfverbrauch pro KW-st $D_0$ kg	$\eta = \frac{D_0}{D_{el}}$
		im Kessel	vor dem 1. Leitrade	im Kondensator				
1	194	13,1	2,14	0,078	148	14,5	7,36	0,504
2	425	10,9	4,06	0,083	155	11,3	6,22	0,552
3	659	11,3	5,99	0,140	162	10,8	6,31	0,583
4	871	12,7	7,89	0,222	175	11,2	6,48	0,578
5	1024	12,6	8,19	0,171	176	9,97	6,05	0,607

Die mittlere Umlaufzahl betrug 1500. Der theoretische Verbrauch bezieht sich auf den Zustand, in dem sich der Dampf beim Eintritt in die Turbine befand. Bemerkenswert ist die langsame Abnahme des Wirkungsgrades, die ihren Grund jedenfalls darin hat, daß bei kleiner Leistung die Turbine mit Dampf von geringer Spannung angefüllt ist und der Ventilationswiderstand der Räder abnimmt. Bei verbessertem Vakuum hofft die Maschinenfabrik Oerlikon einen Dampfverbrauch von 8,4 kg pro KW-st zu erreichen, und es ist nicht

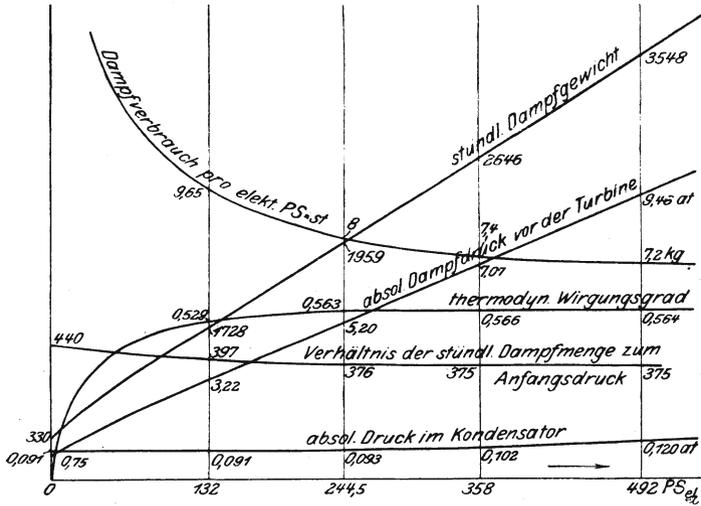


Fig. 95.

Zahrentafel 10.

Versuche von Sautter, Harlé & Co. mit einer Rateau-Turbine von 500 KW.

	Uml./min	Kessel- druck		Dampf- druck vor der Turbine	Vakuum	elek- trische Leistung	Dampfverbrauch in kg pro	
		kg/qcm abs.	kg/qcm abs.				PS	PS-e-st   KW-st
1	2050	12,0	9,6	0,115	512,2	7,17	9,62	
2	2213	»	»	»	526,5	7,00	9,69	
3	2420	»	»	»	536,0	6,95	9,21	
4	2025	16	9,6	0,115	520,0	7,05	9,48	
5	2259	»	»	»	537,0	6,83	9,19	
6	2429	»	»	»	545,3	6,72	9,04	
7	2011	16	11,0	0,128	606,4	7,05	9,48	
8	2225	»	»	»	626,5	6,81	9,16	
9	2429	»	»	»	643,9	6,61	8,89	

daran zu zweifeln, daß der Verbrauch in der Tat ähnlich wie bei der Parsons-Turbine abnehmen wird.

Neuerdings hat das Haus Sautter, Harlé & Co. in Paris an der in Fig. 93 abgebildeten 500 KW-Turbine Versuche bei rd. 2000 Uml./min durchgeführt, deren Ergebnisse in Fig. 95 zusammengestellt sind. Eine Wiederholung im September 1902 ergab durch Steigerung des Kesseldruckes und der Umlaufzahl einen noch kleineren Dampfverbrauch, wie aus Zahlentafel 10 ersichtlich ist.

Bei diesen Versuchen wurde die Kondensation durch eine unabhängige Kraftquelle angetrieben; es müssen mithin die angegebenen Zahlen wohl um 5 bis 7 vH vergrößert werden, um den auf die nutzbare Pferdestärkenstunde bezogenen Dampfverbrauch zu erhalten.

### 33. Anderweitige Vorschläge.

In dem Buche »Roues et turbines à vapeur« von K. Sosnowski (1897), das aufgrund von Studien in Pariser Archiven entstanden ist, finden sich hunderte von Dampfturbinen-Patenten beschrieben, die zumteil in das vergangene Jahrhundert zurückreichen. So sei unter vielen das Reaktionsrad von James Sadler aus dem Jahre 1791 als einer der ersten praktischen Vorschläge erwähnt. Die Turbine von Real und Pichon vom Jahre 1827 ist der Vorläufer der vielstufigen Druckturbine. Tournaire beschreibt im Jahre 1853 die vielstufige Ueberdruckturbine mit großer Klarheit und Ausführlichkeit. In der Turbine von Altham 1892 finden wir eine der Stumpfschen ähnliche Schaufelung wieder. Allein es mangelt den meisten der früheren Erfinder die klare Erkenntnis der maßgebenden Gesichtspunkte, und wir finden, daß, um die Umlaufzahl herabzusetzen, zu Mitteln gegriffen wird, welche die Wirtschaftlichkeit der Turbine von vornherein aufheben. Dies gilt insbesondere von allen Vorschlägen, welche durch die Beimischung von Gasen oder Dämpfen zum arbeitenden Dampfstrahl dessen Geschwindigkeit herabzusetzen trachten. Man übersah, daß Mischungen dieser Art gewissermaßen nach den Gesetzen des unelastischen Stoffes vor sich gehen, mithin, wenn man die Geschwindigkeit nur erheblicher herabsetzen will, Verluste an lebendiger Kraft in den Kauf genommen werden müssen, die über  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{3}{4}$  der verfügbaren Arbeit hinausgehen<sup>1)</sup>. So darf von einem inter-

<sup>1)</sup> Da selbst in die neueste Zeit hinein Patente auf diese häufige Idee genommen werden, ist es berechtigt, auf den Gegenstand wissenschaftlich strenger einzutreten. Wir benutzen die Fig. 118 weiter unten und denken uns die dort mit »Dampf« und »Luft« bezeichneten Flüssigkeiten beide gleichartig. Für die Stellen A, B, C, seien beziehungsweise die Querschnitte =  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F$ , die Geschwindigkeiten  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w$ , die Pressungen  $p_0$ ,  $p_0$ ,  $p$ , die pro Zeiteinheit durchströmenden Dampf-



auszubilden und eine vielstufige Turbine, z. B. der Parsonschen Form, so zu bauen, daß Leit- und Laufräder entgegengesetzte Drehbewegung erhielten, was die Dampfreibung auf die Hälfte beschränken würde. Hier sind es die konstruktiven Schwierigkeiten, die Zu- und Ableitung des Dampfes u. a., die sich hemmend dem an sich guten Gedanken in den Weg legen. Die Theorie einer derartigen Turbine wäre sehr einfach, da die gleichmäßige Rotation bei achsialer Beaufschlagung die relative Bewegung in den Schaufeln in keiner Weise beeinflusst, die Turbine mithin so zu entwerfen wäre, als wenn die Leiträder ruhten, die Laufräder aber mit doppelter Geschwindigkeit rotieren würden<sup>1)</sup>. Für Radialturbinen hat, wie oben erwähnt, Brady diese Gegenrotation vorgeschlagen; die ersten Mitteilungen die über seine Turbine in die Öffentlichkeit dringen, zeugen indessen von keinem besonderen Verständnis der Dampfwirkung in Turbinen.

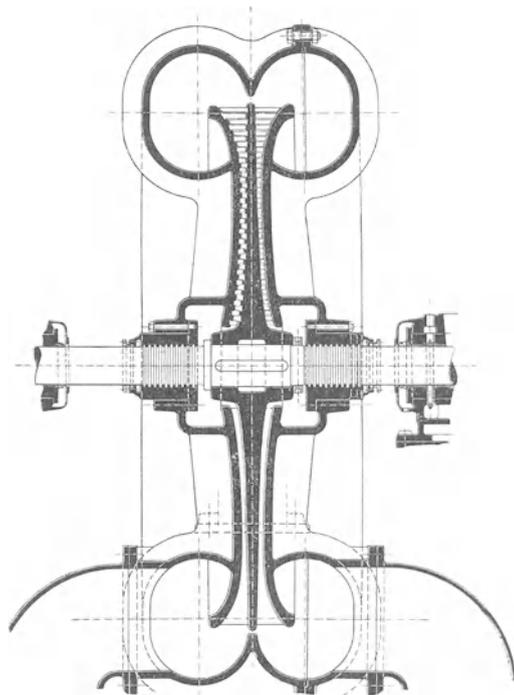


Fig. 96.

<sup>1)</sup> Der geringe Arbeitsaufwand zur Beschleunigung der Dampftheile auf die Umfangsgeschwindigkeit des ersten Leitrades kann vernachlässigt werden.

Erwähnung verdienen die Patente von Schulz (Berlin), welcher die Labyrinthkolben der Parsonsturbine zu umgehen trachtet, und zwar so, daß die Turbine in zwei Teile getrennt wird, deren Achsendruck gleich groß ist; indem man nun die eine Turbinenhälfte um  $180^\circ$  gedreht zur Aufstellung bringt, halten sich die beidseitigen Achsendrücke das Gleichgewicht. Ein anderweitiger Vorschlag von Schulz greift auf die radiale Turbine, die auch Parsons ursprünglich angewendet hat, zurück, übersieht aber, daß die Beaufschlagung auf bloß einer Seite des großen Scheibenscheibens einen unzulässig hohen axialen Druck ergibt. Beidseitige Beaufschlagung ohne Reaktion läßt Turbinen dieser Art ausführbar erscheinen, indes nur für ganz große Einheiten. Bei kleineren Leistungen werden, auch wenn man partielle Beaufschlagung (auf einem Teile des Umfanges) vorsieht, die Schaufeln unzulässig kurz. Man ist eben in der Stufenzahl bei einer einzigen Scheibe begrenzt, muß also etwas höhere Dampfgeschwindigkeiten zulassen, erhält aber anderseits große Durchmesser, um die nötige Umfangsgeschwindigkeit zu erzielen, also aus doppeltem Grund kurze Schaufeln. In Fig. 96 findet sich eine etwa 1000 pferdige Einheit dieser Turbinenart dargestellt<sup>1)</sup>.

Die ganze geistige Arbeit, die in den meisten dieser Vorschläge niedergelegt ist, hat sich mithin als unfruchtbar erwiesen, und es ist nicht sehr gewagt, vorauszusagen, daß auf diesem Gebiete wohl kaum mehr ein großer umgestaltender Gedanke zu erwarten ist.

#### 34. Dampfturbine und Kolbendampfmaschine.

Ein Vergleich der beiden Motorarten muß nach der Richtung der betriebstechnischen und der wirtschaftlichen Gesichtspunkte durchgeführt werden. In ersterer Beziehung blicken die Turbinen von de Laval und Parsons auf eine Reihe von Betriebsjahren, während deren sie sich im allgemeinen bewährt haben, zurück, und es erscheint bei kleineren Einheiten dem Argwohn, den der Mann des praktischen Betriebes einer Neuerung entgegenbringt, der Boden entzogen. Für größere Einheiten hat de Laval sein System noch überhaupt nicht durchgebildet, und den andern gegenüber scheint die Industrie eine abwartende Stellung einnehmen zu wollen, da eben die entstandenen Bedenken nur durch jahrelangen erfolgreichen und aus der Nähe kontrollierbaren Betrieb ganz behoben werden können.

Die großen Umlaufzahlen mit ihren nie ganz vermeidbaren Erschütterungen und der Gefahr des Heißlaufens, heikle höchst genaue Einstellungen gewisser Teile, schwierige

<sup>1)</sup> Einer Diplomarbeit am Eidgenöss. Polytechnikum entnommen. Maßstab  $\infty 1:30$ . Umlaufzahl 1500 pro Min.

der Abnutzung unterworfenen Abdichtungen, hohe Materialbeanspruchung sind Umstände, die eine sorgfältige und sachkundige Ueberwachung des Motors erheischen. Man ist im ungewissen über die Dauer der bei der Inbetriebsetzung nachgewiesenen hohen Oekonomie, da eben Lagerabnutzung, Schaufelverschleifs, unrichtige Einstellung eine Zunahme der Undichtheit, mithin Verschlechterung des Gütegrades bewirken können.

Wenn aber die Erfahrung diese Befürchtungen als unbegründet erwiesen haben wird, dann werden die Vorzüge der Dampfturbine in um so helleres Licht treten. Sie sind derart in die Augen springend, dafs man sie nicht erst ausführlich zu erörtern braucht, und es sei nur kurz hingewiesen auf die geringe Zahl der bewegten Teile, geringes Gewicht, geringen Raumbedarf, leichte Demontierung und Reparaturfähigkeit, Abwesenheit innerer Schmiering, vorzügliche Regulierung, Fortfall von Verspannungen durch unsymmetrische Erwärmung, Eignung für höchste Ueberhitzung, rasche Inbetriebsetzung, gleichförmigen Gang, gutes Parallelschalten u. a.

Um die Wirtschaftlichkeit der beiden Motoren zu vergleichen, empfiehlt sich eine Umrechnung der oben gegebenen Verbrauchszahlen auf die PS<sub>i</sub>-Stunde einer mit der Turbine gleichwertigen Kolbenmaschine. Für die Versuche von Stoney, zu denen wir Elberfeld und die grofse Westinghouse-Turbine hinzunehmen, ergibt sich folgende Zusammenstellung:

Leistung . . . . . KW	24,7	52,7	108,5	123	119	226	507	1190	1500
angenommener Wirkungsgrad der Dynamo . . .	0,85	0,87	0,87	0,87	0,87	0,92	0,92	0,92	0,93
angenommener Wirkungsgrad der gleichwertigen Kolbenmaschine . . .	0,85	0,87	0,87	0,87	0,87	0,92	0,92	0,94	0,94
Dampfverbrauch der Turbine pro KW-st. . . kg	13,06	12,7	12,16	11,57	11,02	9,98	9,57	8,81	8,67
Dampfverbrauch der gleichwertigen Kolbenmaschine pro PS <sub>i</sub> -st. . . . . kg	6,96	7,07	6,77	6,44	6,12	6,21	5,95	5,60	5,57

Nehmen wir die für entsprechende Kräfte ebenso guten Leistungen der Laval-Turbine hinzu, so sind wir zu dem Aussprache berechtigt, dafs die Dampfturbine die mit mäfsiger Ueberhitzung arbeitende zweistufige Verbundmaschine in der Dampfökonomie überholt hat. Alle Anzeichen sprechen dafür, dafs auch hochgradige Ueberhitzung dieses Verhältnis nicht ändern wird<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In neuester Zeit hat gemäß der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1903 S. 725 Prof. Schröter an einer 250 pferdigen Verbundmaschine von Van den Kerkhove bei gesättigtem Dampf einen

Etwas anders steht es mit der dreistufigen Dampfmaschine. Die Herren Gebr. Sulzer stellen mir die in Fig. 97 abgebildete graphische Zusammenstellung der Versuchsergebnisse an ihrer für Elberfeld gelieferten dreistufigen Kolben-Dampfmaschine zur Verfügung<sup>1)</sup>, und es sind in die Figur

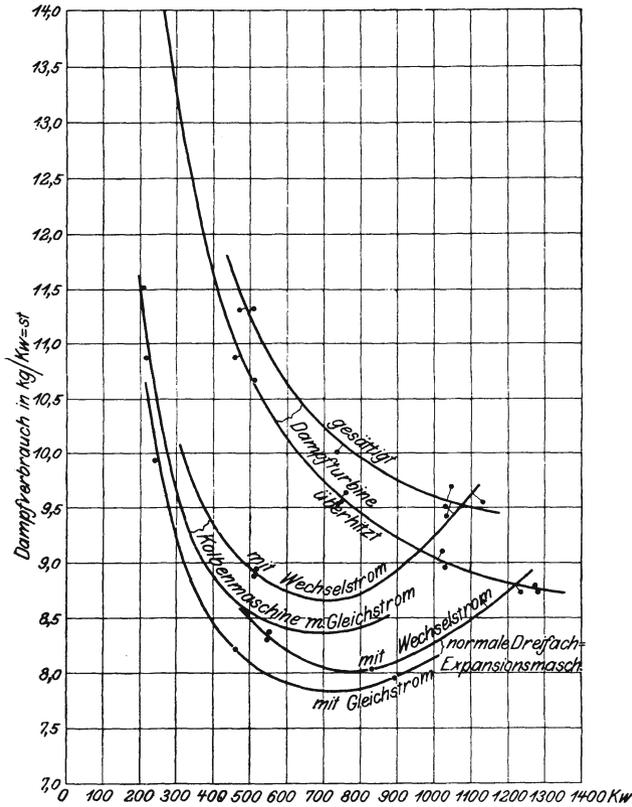


Fig. 97.

Verbrauch von 5,28 kg pro PSi-st, bei Ueberhitzung auf 304,6° C einen solchen von 4,31 kg, oder bezw. einen Wärmeverbrauch von 3490 und 3108 WE pro PSi-st festgestellt. Für diese Maschine gilt mithin obige Aussage nicht, und es muß abgewartet werden, inwieweit diese bis jetzt noch nie beobachteten niedrigen Verbrauchszahlen sich im Dauerbetriebe bewähren und auch von anderen Dampfmaschinenarten erreicht werden können.

<sup>2)</sup> Auch teilen mir Gebrüder Sulzer mit, daß die Maschine nicht mit einer normalen Ausführung verglichen werden könne. Die Verhältnisse des Werkes haben nach reiflicher Erwägung aller Umstände dazu geführt, die Maschine mit einer Drehstrom- und einer Gleichstromdynamo zu kuppeln, woraus sich eine zweifach gekröpfte

auch die auf die dort befindliche Dampfturbine bezüglichen Daten eingetragen. Die Figur läßt erkennen, daß die Dampfmaschine erst bei Belastung über ihre Normalleistung (bei etwa 960 PS) unterliegt. Bei Gleichstrombelastung ist das Verhältnis noch etwas besser; auch bemerkt man die schon mehrfach erwiesene Eigenschaft, daß die Kolbenmaschine für ein größeres Gebiet der Leistung einen wenig veränderlichen Verbrauch für die Einheit der Leistung aufweist, während die Turbine gegen den Leerlauf hin eine rascher ansteigende Kurve darbietet. Noch günstiger liegen die auf gesättigten Dampf bezogenen Zahlen einer von Gebrüder Sulzer als normal bezeichneten Dreifach-Expansionsmaschine, nämlich einer Ausführung mit bloß zwei freien Kurbeln, zwei Lagern und der Dynamo in der Mitte. Freilich muß hinwieder beachtet werden, daß nach der Schweizerischen Bauzeitung die Elberfelder Turbine von Prof. Ewing in Newcastle bis zu 2200 PS. belastet worden war und hierbei 5 kg Dampf pro PS<sub>st</sub> gebraucht hat, was wohl 8,15 kg pro KW<sub>st</sub> entsprechen dürfte.

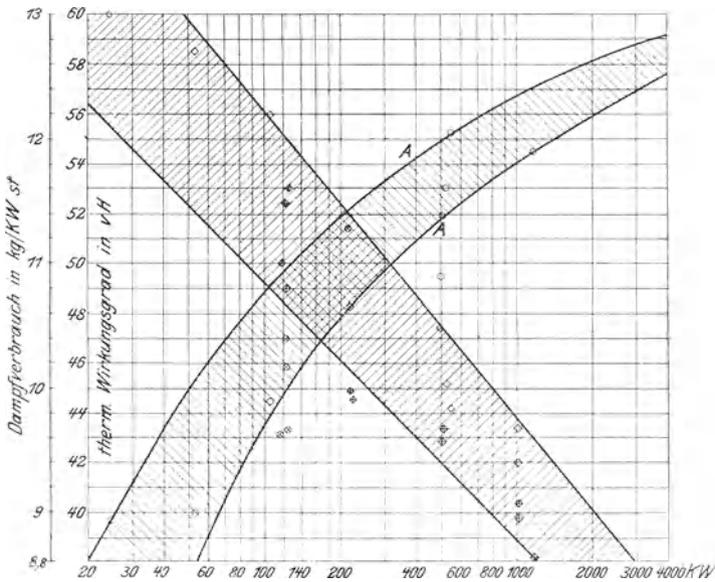


Fig. 98.

Welle mit im ganzen 7 Lagern und schweren Schwungmassen ergab. Hieraus folgte eine ungewöhnlich hohe Leerlaufarbeit, und diese Umstände drückten im Verein mit der Abwesenheit eines Mantels am Hochdruckzylinder, welcher bei der vorhandenen wider Erwarten geringen Ueberhitzung hätte angebracht sein sollen, die Dampfökonomie unter das normale Maß hinab.

Die Einführung des Ueberlastungsventiles wird es, wie oben erwähnt, ermöglichen, daß die Turbine die Normalleistung bei der besten Oekonomie liefert, um erst darüber hinaus wie die Dampfmaschine im Verbrauch zuzunehmen.

Allein zurzeit erreicht die Turbine den günstigsten Verbrauch der dreistufigen Maschine nicht, auch wenn wir uns in das Gebiet hoher Ueberhitzung begeben. Für die 5000-pferdige Turbine, die in Frankfurt in der Aufstellung begriffen ist, garantiert die Firma Brown, Boveri & Co. einen Dampfverbrauch von 4,9 kg pro PS<sub>e</sub>-st an der Turbinenwelle bei 13,8 at Kesseldruck und 300° Ueberhitzungstemperatur. Diese Zahl ist gleichwertig mit dem Aufwande von 3500 WE pro PS<sub>e</sub>-st. Dem gegenüber haben die 3000-pferdigen Dreifach-Expansionsmaschinen der Berliner Elektrizitätswerke<sup>1)</sup> bei 12,8 at Kesseldruck und 314° Ueberhitzung 4,05 kg pro PS<sub>i</sub>-st oder 3230 WE pro PS<sub>e</sub>-st, d. h. einen um 8,3 vH kleineren Betrag erreicht. Dieser Unterschied dürfte in den meisten Fällen die Entscheidung zugunsten der Kolbenmaschine beeinflussen. Die nächste Zukunft wird uns darüber belehren, ob das Verhältnis dauernd das gleiche bleibt.

Die thermodynamischen Wirkungsgrade Parsonsscher Dampfturbinen, die in Fig. 98 in Abhängigkeit von der Leistung dargestellt sind, lassen bei weiterer Steigerung der Leistung einen Gewinn erhoffen, der durch die gekrümmten Linien (A) angedeutet ist.

<sup>1)</sup> Z. 1902 S. 187.

---

## Abteilung II.

### 35. Druckverteilung im Querschnitte eines expandierenden Gas- oder Dampfstrahles.

Es wurde bereits im Abschnitt 4 darauf hingewiesen, daß das Rechnen mit einem konstanten Wert des Druckes, der Dichte und der Geschwindigkeit in einem Querschnitte nur eine erste Näherung bilde. Es gelingt nun aufgrund der strengen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen die wahre Verteilung des Druckes in einem Stromquerschnitte unter gewissen Voraussetzungen zu ermitteln, und man ist in der Lage zu beurteilen, inwiefern jene Annäherung zulässig ist oder nicht.

Es werde eine reibungslose Strömung einer elastischen Flüssigkeit mit zu einer festen Ebene parallelen Strombahnen vorausgesetzt. Wenn  $x, y$  die in dieser Ebene gerechneten rechtwinkligen Koordinaten,  $u, v$  die zu  $x$  bzw.  $y$  parallelen Geschwindigkeitskomponenten,  $p$  den Druck,  $\mu$  die Masse pro Volumeneinheit bedeuten, so lauten bekanntlich die Eulerschen Bewegungsgleichungen, falls wir von Massenkräften absehen

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{du}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \frac{dv}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Die Kontinuitätsgleichung für den Beharrungszustand d. h. die stationäre Strömung erhält die Form

$$\frac{\partial \mu u}{\partial x} + \frac{\partial \mu v}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (2).$$

Multipliziert man Gl. (1) mit  $u dt$  bzw.  $v dt$ , so ergibt sich nach Addition und unbestimmter Integration ebenfalls für die stationäre Strömung

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \int \frac{dp}{\mu} = \text{konst.} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Hierin ist  $u^2 + v^2$  die resultierende Geschwindigkeit. Die Strömung erfolge ohne »Rotation« der Flüssigkeitsteilchen, es bestehe also das sogen. Geschwindigkeitspotential, d. h. eine Funktion  $\varphi(xy)$ , der Eigenschaft, daß

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dots \dots \dots (4).$$

Der Zusammenhang zwischen Druck und spezifischer Masse sei durch Gleichung

$$p = \alpha^2 \mu \dots \dots \dots (5)$$

gegeben, oder wenn  $v'$  das spezifische Volumen (in der bisherigen Bedeutung) bezeichnet, mit  $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{v'g}$ , auch

$$pv = \frac{\alpha^2}{g} \dots \dots \dots (5a).$$

Es wird also bei Gasen die Zustandsänderung der Einfachheit halber isothermisch vorausgesetzt, weil jede andere Annahme auf unüberwindliche Schwierigkeiten führen würde. Bei Dämpfen kommt die Adiabate dem angenommenen Gesetz beträchtlich näher. Die Auflösung

$$\alpha = \sqrt{g p v} \dots \dots \dots (5b),$$

zeigt, dass  $\alpha$  die Schallgeschwindigkeit der isothermischen Zustandsänderung ist. Die Gleichungen (2) bis (5) gestatten nun  $u, v, p, \mu$  zu eliminieren und  $\varphi$  zu bestimmen. Zu diesem Behufe setzen wir zunächst  $p$  aus (5) in (3) und erhalten

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \int \alpha^2 \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + \alpha^2 \lg \mu = \text{konst.} \quad (3a).$$

Gleichung (2) lautet aber

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \mu}{\partial x} + v \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

oder wenn wir mit  $\mu$  dividieren und

$$\frac{u}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = u \frac{\partial \lg \mu}{\partial x}$$

setzen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \lg \mu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \lg \mu}{\partial y} = 0 \dots (2a).$$

Nun lösen wir Gl. (3a) nach  $\lg \mu$  auf, und setzen die partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  in (2a) ein. Dies ergibt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (6).$$

Die auf die Dimension bezug habende Gröfse  $\alpha^2$  kann, wie man sich leicht überzeugt, weggebracht werden, indem man

$$\varphi = \alpha \psi \dots \dots \dots (6a)$$

setzt. Wenn dann die Ableitungen nach  $x$  und  $y$  durch die

Fufszeichen 1 und 2 kenntlich gemacht werden, lautet die Differentialgleichung

$$\psi_{11} + \psi_{22} - [\psi_1^2 \psi_{11} + 2 \psi_1 \psi_2 \psi_{12} + \psi_2^2 \psi_{22}] = 0 \quad (6b).$$

Hr. Prof. A. Hirsch in Zürich hat sich in dankenswerter Weise der Mühe unterzogen, Methoden für die Integration dieser recht verwickelten Gleichung ausfindig zu machen, und gelangt u. a. zu folgenden Ergebnissen.

Es sei  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl  $> 1$ ,  $p$  und  $q$  seien zwei voneinander unabhängige Parameter, als deren Funktionen  $x, y$ , sowie die Lösung  $\psi$  gemeinschaftlich dargestellt werden sollen. Mit den Bezeichnungen

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$N_k = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

$$t = p^2 + q^2$$

bilde man die Funktion  $N$ ten Grades

$$F(t) = \sum_{k=0}^N (-1)^k N_k \frac{n!}{(n+k)!} \frac{t^k}{2^k}$$

und ihre Ableitung

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t).$$

Es seien ferner die Funktionen  $P_n$  und  $Q_n$  erklärt durch die Gleichung

$$(p + q i)^n = P_n + i Q_n$$

worin  $i$  die imaginäre Einheit bedeutet, so stellt sich die Lösung der Gl. (6b) wie folgt dar:

$$x = n [a P_{n-2} + b Q_{n-2}] F(t) + 2 p [a P_n + b Q_n] F'(t)$$

$$y = n [-a Q_{n-1} + b P_{n-1}] F(t) + 2 q [a P_n + b Q_n] F'(t)$$

$$\psi = [a P_n + b Q_n] [(n-1) F(t) + 2 t F'(t)]$$

worin  $a, b$ , willkürliche Konstanten bedeuten. Auch die Funktion der zu  $\psi$  orthogonalen Trajektorien  $\Omega = \text{konst.}$ , d. h. der Stromlinien unseres Problemes kann allgemein dargestellt werden, und ist

$$\Omega = [-a Q_n + b P_n] [-n(n-1) F(t) + 2 t F'(t)] e^{-\frac{t}{2}}.$$

Bezeichnet man vorliegende Lösungen wegen ihrer Zusammengehörigkeit zur Zahl  $n$  genauer mit  $x_n, y_n, \psi_n$ , so lassen sich zwei zu  $m$  und  $n$  gehörige Lösungen in der Art superponieren, dafs

$$x = x_m + x_n$$

$$y = y_m + y_n$$

$$\psi = \psi_m + \psi_n$$

und entsprechend für beliebig viele Lösungen.

Die einfachste Form erhalten wir für  $n = 2$  und  $b = 0$ , und diese läßt sich auf einem Wege gewinnen, welchen auch der Verfasser ursprünglich versucht hatte, wie folgt:

Wir setzen probeweise

$$\psi = U + V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin  $U$  eine Funktion bloß von  $x$ ,  $V$  eine solche bloß von  $y$  bedeutet. Die Ableitungen von  $U$  nach  $x$ , von  $V$  nach  $y$  bezeichnen wir durch Akzente, und erhalten

$$\psi_1 = U', \quad \psi_2 = V', \quad \psi_{11} = U'', \quad \psi_{12} = 0, \quad \psi_{22} = V'',$$

und nach Einsetzen in Gl. (6b)

$$U'' (U'^2 - 1) + V'' (V'^2 - 1) = 0,$$

welche Beziehung für alle Werte von  $x$  und  $y$  nur bestehen kann, wenn beide Ausdrücke konstant und entgegengesetzt gleich sind, d. h.

$$U'' (U'^2 - 1) = a, \quad V'' (V'^2 - 1) = -a \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Integration<sup>1)</sup> kann bewerkstelligt werden, indem man z. B. die erste Gleichung mit  $2 U'$  multipliziert, und wie folgt schreibt

$$(U'^2 - 1) \frac{d}{dx} (U'^2) = 2 a U' \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder

$$(U'^2 - 1) \frac{d}{dx} (U'^2 - 1) = 2 a \frac{dU}{dx},$$

woraus durch sofortige Integration

$$\frac{1}{2} (U'^2 - 1)^2 = 2 a U \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Die Konstante kann weggelassen werden, da auch  $\psi$  nur bis eine Konstante genau angegeben zu werden braucht.

Bezeichnen wir nun  $U'$  mit  $\xi$ , so kann Gl. (9) auch in der Form

$$(\xi^2 - 1) d\xi = a dx$$

geschrieben und integriert werden:

$$\left( \frac{\xi^3}{3} - \xi \right) = ax \quad . \quad . \quad . \quad (10a).$$

Es geben nun Gl. (10) und (10a) eine Parameter Darstellung von  $U$  als Funktion von  $x$ , u. zw.

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3a} (\xi^2 - 3) \xi \\ U &= \frac{1}{4a} (\xi^2 - 1)^2 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

<sup>1)</sup> Die Korrektur eines Versehens, welches mir hier ursprünglich unterlaufen war, verdanke ich ebenfalls Hrn. Prof. Hirsch.

wobei eine Auflösung der oberen Gleichung nach  $\xi$  und Einsetzen in den Ausdruck von  $U$  zwar möglich, aber nicht empfehlenswert wäre. In gleicher Weise ergibt sich (durch Vertauschung von  $+a$  mit  $-a$ ), wenn  $V' = \eta$

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{3a}(\eta^2 - 3)\eta \\ V &= -\frac{1}{4a}(\eta^2 - 1)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

und hiermit auch

$$\varphi = \alpha\psi = \alpha(U + V) \dots \dots (13).$$

Die nächste Aufgabe bildet das Auffinden der Stromlinien, als der orthogonalen Trajektorien zu den Kurven konstanter Potentiale. Die Tangente des Neigungswinkels an einer Linie konstanten Potentials  $\varphi(x, y) = \text{konst.}$ , wird bekanntlich

$$\text{tg } \tau = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Die im gleichen Punkte an die Strömungslinie gelegte Tangente habe einen Neigungswinkel  $\tau'$ , für welchen

$$\text{tg } \tau' = \frac{dy_1}{dx_1}$$

wobei  $x_1, y_1$  die Koordinaten der Stromlinie sind, und die Rechtwinkligkeit fordert

$$\text{tg } \tau \cdot \text{tg } \tau' = -1 \dots \dots (14).$$

Wir haben es nun mit mittelbaren Funktionen zu tun, und es werde der Kürze halber vorübergehend gesetzt

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\xi), & y &= g(\eta) \\ U &= F(\xi), & V &= G(\eta) \end{aligned} \right\} \dots \dots (11a).$$

Zunächst haben wir

$$\text{tg } \tau = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial y}}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dU}{d\xi} = \frac{F'}{f'}, \text{ ebenso } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{G'}{g'}.$$

Da  $\text{tg } \tau$  hierdurch in  $\xi$  und  $\eta$  ausgedrückt wird, empfiehlt es sich auch für  $\text{tg } \tau'$ , also auch für die Stromkurve dieselben Variablen zu wählen. Wir nehmen somit an, dafs auch

für letztere  $x_1, y_1$  vermöge der Formeln (11) (12) durch  $\xi \eta$  zu ersetzen sind, und haben dann zu schreiben

$$dy_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi = f' d\xi, \quad dy_1 = g' d\eta.$$

Dies alles in Gl. (14) eingesetzt, ergibt

$$\frac{f'^2}{F'} d\xi - \frac{g'^2}{G'} d\eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (14b).$$

Die Integration dieser Gleichung ist nach dem Einsetzen der Funktionswerte aus Gl. (11) ohne weiteres möglich und liefert nun die Gleichung der Stromlinienschar in der Form

$$\xi^2 + \eta^2 - 2 \operatorname{lg} \xi \eta = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die Geschwindigkeit in einem durch  $\xi$  und  $\eta$  bestimmten Punkte der Stromlinie erhält man durch Differentiation von  $\varphi$  als mittelbarer Funktion von  $x, y$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \alpha \xi \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\alpha \eta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (16).$$

Hiermit die resultierende Geschwindigkeit und der Druck gemäß Gl. (3a).

Die so gewonnene partikuläre Lösung der allgemeinen Differentialgleichung für  $\varphi$  erweist sich jedoch wegen der mittelbaren Darstellung in den Veränderlichen  $\xi$  und  $\eta$  als wenig handlich. Man gelangt aber zu höchst einfachen Formeln, wenn man sich auf kleine Werte von  $\xi, \eta$  beschränkt. Wenn z. B. 0,1 als obere Grenze festgestellt wird, so ist die Summe der beiden ersten Glieder in Gl. (15) stets kleiner als 0,02; das dritte Glied hingegen ist stets größer als 9,20. Wir begehen mithin einen belanglosen Fehler, wenn wir innerhalb der angegebenen Grenzen  $\xi^2 + \eta^2$  neben dem Logarithmus vernachlässigen, wodurch Gl. (15) in

$$- 2 \operatorname{lg} \xi \eta = \text{konst.}$$

oder

$$\xi \eta = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (15a)$$

übergeht. Mit gleichem Rechte kann nun auch  $\xi^2$  und  $\eta^2$  in Gl. (11) (12) neben 3 weggelassen werden, sodass vereinfacht

$$x = -\frac{\xi}{a} \quad y = +\frac{\eta}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

sich ergibt, welche Werte in (15a) eingesetzt die Gleichung

der Stromlinien in den Koordinaten  $x, y$  auszudrücken gestatten. Es wird

$$xy = \text{konst.} \quad . . . . . (17a),$$

d. h. die Stromlinien sind gleichseitige Hyperbeln. In dieser Vereinfachung ist ferner

$$U = \frac{1}{4a} (1 - a^2 x^2)^2, \quad V = -\frac{1}{4a} (1 - a^2 y^2)^2 \quad . (18)$$

und das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{\alpha}{4a} [(1 - a^2 x^2)^2 - (1 - a^2 y^2)^2] \quad . . (19),$$

oder angenähert, da  $ax, ay$  von derselben Ordnung klein sind wie  $\xi, \eta$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha a (y^2 - x^2) \quad . . . . . (19a).$$

Die Geschwindigkeiten sind nun

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha ax, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha ay \quad . . (20).$$

Die Pressung in irgend einem Punkte bestimmen wir aus Gl. (3a), welche mit  $p = \alpha^2 \mu$  die Form

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \alpha^2 \lg n \frac{p}{\alpha^2} = \text{konst.}$$

annimmt. Vereinigen wir  $-\alpha^2 \lg n \alpha^2$  mit der Konstanten und bezeichnen wir mit  $p_0$  den Druck im Koordinatenanfang, in welchem  $u = 0, v = 0$  ist, so erhalten wir

$$\lg n \frac{p}{p_0} = -\frac{1}{2\alpha^2} (u^2 + v^2) = -\frac{1}{2} a^2 (x^2 + y^2) \quad (21)$$

oder wenn  $r^2 = x^2 + y^2$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{2} a^2 r^2} \quad . . . . . (21a),$$

d. h. Druck und Geschwindigkeit hängen nur vom Abstände des betreffenden Strompunktes vom Koordinatenanfang ab.

Die Gleichung  $xy = \text{konst.}$  erweist sich übrigens als sehr angenähert zutreffend, auch wenn eine der Variablen  $\xi$  oder  $\eta$  bis zu dem Werte Eins zunimmt, wie aus folgendem Zahlenbeispiel erhellt. Es werde die Konstante in Gl. (15) = 6,52 gewählt; zusammengehörende, d. h. auf einer Stromlinie liegende Werte von  $\xi, \eta, 3ax, 3ay$  aus den Formeln (15), (11), (12) gerechnet, finden sich in folgender Tabelle vereinigt.

$\xi =$	1	0,7	0,4	0,3	0,2
$\eta =$	0,0635	0,0702	0,1046	0,1350	0,2
$3ax =$	-2	-1,757	-1,136	-0,873	-0,592
$3ay =$	0,1896	0,2102	0,3125	0,4025	0,592

Sollte hingegen  $xy = \text{konst.}$ , so würden die Werte von  $3ay$  beispielsweise in gleicher Reihenfolge wie oben

$$0,1752 \quad 0,1994 \quad 0,3083 \quad 0,4015 \quad 0,592$$

sein müssen, die Abweichung ist mithin vernachlässigbar. Da die Stromlinien in bezug auf eine unter  $45^\circ$  geneigt durch den Anfangspunkt gehende Gerade symmetrisch sind, ist durch obige Werte auch der zweite Ast der Kurve bestimmt. Ueber die Grenze  $\xi = 1$  bzw.  $\eta = 1$  hinaus ergeben unsere Formeln keine Fortsetzung der Stromlinien, und es muß zunächst dahingestellt bleiben, ob die Strömung darüber hinaus wirbelfrei bleiben kann oder nicht<sup>1)</sup>.

Um ein konkretes Beispiel zu behandeln, werde überhitzter Wasserdampf von  $440^\circ$  abs. Temperatur mit der angenähert gültigen Zustandsgleichung

$$pv = 47 T$$

vorausgesetzt. Wir erhalten  $\alpha = \sqrt{gpv} = 450$  m/sk. Die

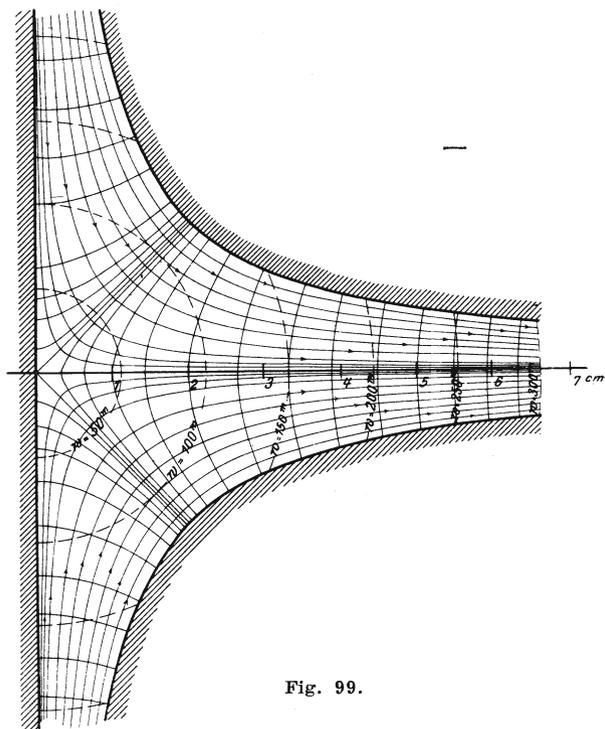


Fig. 99.

<sup>1)</sup> Für unsere Angabe ist dies ohne Belang, da wir uns den Zustand an der Strahlmündung künstlich hergestellt denken können.

willkürliche Konstante  $a$  sei = 10, und als Begrenzung des Dampfstromes nehmen wir die Gleichung

$$xy = 4$$

an für cm als Längeneinheit. Fig. 99 stellt die Strombegrenzung (hier also einen Kanal mit rechteckigem Profil), die Stromlinien, die Linien  $\varphi = \text{konst.}$ , d. h. die Stromquerschnitte, endlich die Linien gleicher Geschwindigkeit bezw. gleichen Druckes dar. Die eingeschriebenen Zahlen geben die Größe der Geschwindigkeit in m/sk an. Unsere Formeln ergeben eine Strömung gegen den Koordinatenanfang hin; da wir indessen das Vorzeichen von  $\varphi$  ohne weiteres ändern können und wieder eine Lösung der Aufgabe erhalten, ist die Stromrichtung hier der Anschaulichkeit halber entgegengesetzt eingetragen, und durch ihr Spiegelbild so ergänzt worden, daß wir die Figur als Bild der Einmündung in eine Düse auffassen können.

Als Hauptergebnis dieser Untersuchung kann der Nachweis angesehen werden, daß sich die Pressungen und Geschwindigkeiten der Dampfstrahlen, sobald man in Gebiete geringerer Krümmung der Strombahnen gelangt, sehr rasch ausgleichen, auch wenn die Geschwindigkeit schon Hunderte von Metern erreicht.

Es sei nämlich  $p_r$  die Pressung am Rande für den Punkt  $x, y$ , und  $p_m$  die Pressung in der Strahlmitte für die gleiche Abszisse  $x$ . Formel (21) gibt an

$$\lg n \frac{p_m}{p_0} = -\frac{1}{2} a^2 x^2; \quad \lg n \frac{p_r}{p_0} = -\frac{1}{2} a^2 (x^2 + y^2)$$

oder

$$\lg n \frac{p_m}{p_r} = \frac{1}{2} a^2 y^2.$$

Setzen wir  $p_m = p_r + \Delta p$ , wo  $\Delta p$  voraussichtlich eine kleine Größe ist, so können wir den Logarithmus entwickeln und erhalten

$$\frac{\Delta p}{p_r} = \frac{1}{2} a^2 y^2 \dots \dots \dots (22).$$

Es wird für unser Beispiel bei  $x = 6$  cm,  $y = \frac{4}{6}$  cm = 0,0066 m, und

$$\frac{\Delta p}{p_r} = 0,0022.$$

War also der Druck in der Strahlmitte 5 at, so wird der Druck am Strahlrande nur um etwa 0,01 at verschieden. Man wird mithin, wenn nicht außerordentlich verfeinerte Meßapparate angewendet werden, auch in einer kegelförmig erweiterten Düse vergeblich nach Pressungsunterschieden in der Mitte und am Strahlrande suchen. Dies um so weniger, als die Einmündung in eine Düse nicht wie hier durch eine

Ebene gehindert wird, mithin die Dampfteilchen in der Mitte auch lange nicht so scharf gekrümmte Bahnen einzuschlagen gezwungen werden.

### 35 a. Druckverteilung in einer Turbinenschaufel.

Schneiden wir durch zwei Stromlinien das in Fig. 100 dargestellte Stück des Dampfstromes heraus, so entsteht ein Kanal, der mit einer Turbinenschaufel viel Aehnlichkeit besitzt. Die entwickelten Formeln können ohne weiteres be-

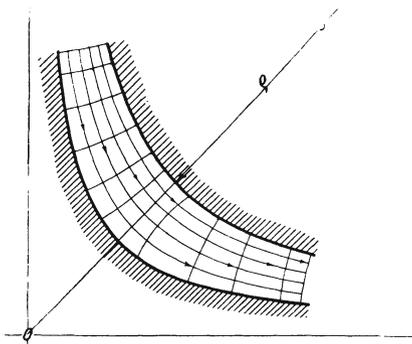


Fig. 100.

nutzt werden, und geben ein anschauliches Bild der Druckverteilung. Für den Halbierungspunkt der äußeren Schauffläche, der durch eine unter  $45^\circ$  geneigte durch den Koordinatenanfang gehende Gerade herausgeschnitten wird, berechnet man den Wert des Krümmungshalbmessers leicht zu

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die zugehörige Tangentialgeschwindigkeit ist nach Gl. (20)

$$w^2 = a^2 a^2 (x^2 + y^2) = a^2 a^2 \varrho^2.$$

Die »Normalbeschleunigung«  $k$  der Dampfteilchen ist mithin

$$k = \frac{w^2}{\varrho} = a^2 a^2 \varrho.$$

Die Druckabnahme für den Abstand  $d\varrho$  in Richtung der Bahnnormale

$$dp = -k \mu d\varrho = -a^2 a^2 \mu \varrho d\varrho$$

oder, da  $p = a^2 \mu$

$$\frac{dp}{p} = -a^2 \varrho d\varrho \dots \dots \dots (23)$$

und dies ist in der Tat derselbe Wert, der sich aus Gl. (21a) durch Differentiation ergibt. Bei kleinen Schauffeltiefen darf man für  $p$  einen Mittelwert  $\bar{p}$ , einsetzen, und erhält

$$\Delta p = -\frac{\alpha^2}{2} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2) \bar{p}, \dots (24)$$

als Formel zur näherungsweise Berechnung des Druckunterschiedes in den Endflächen des Schauffelkanales.

Für eine wirkliche Turbinenschaufel, z. B. einer Laval-turbine, liegen nun die Verhältnisse freilich insofern wesentlich anders, als der Strahl der Schaufel geradlinig mit überall gleichem Druck zufließt und ungemein großen Reibungswiderständen ausgesetzt ist, welche hier nicht berücksichtigt werden konnten. Die Strömung in der Schaufel stellt sich als ein ungemein verwickelter Vorgang dar, umso mehr, als zur Reibung noch die Zersplitterung durch die Schaufelkanten hinzutritt, und es muß dem Versuche überlassen werden, die Schaufelformen günstigster Dampfwirkung aufzusuchen.

### 36. Biegung einer horizontalen ungleich dicken Scheibe unter dem Einflusse ihres Eigengewichtes.

Die Verwendung horizontaler Turbinenräder, welche beispielsweise bei der Curtis-Turbine angeblich Größen bis zu 5 m im Durchmesser erreichen, muß dem Konstrukteur die Frage nach der Verbiegung des Rades durch sein Eigengewicht nahelegen, da dieselbe sehr wohl die Größenordnung der Spaltbreite zwischen den einzelnen Leit- und Laufrädern erlangen kann. Diese Durchbiegung läßt sich nun verhältnismäßig einfach wie folgt berechnen.

Es sei eine ungleich dicke Scheibe gleicher Form wie das Rad in Fig. 36 in wagerechter Aufstellung ruhend vor- ausgesetzt. Die in der Figur mit  $y$  bezeichnete Dicke der Scheibe im Abstände  $x$  heiße hier  $h$ . Die nach abwärts positiv gezählte Durchbiegung sei  $z$  im Abstände  $x$ . Ein äußerer Rand sei nicht vorhanden, die Nabe relativ klein im Durchmesser, also auch  $x_1$  eine kleine Größe im Verhältnis zu  $x_2$ . Das Profil der Scheibe entspreche der Gleichung

$$hx^\alpha = c \text{ oder } h = cx^{-\alpha} \dots (1)$$

und sei  $\alpha$ , d. h. die Neigung der Tangente an die Profilinie gegen die Mittelebene des Rades so gering, daß man in den Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen an einem Scheibenelement den Cosinus des Neigungswinkels = 1 setzen dürfe. Bei Abwesenheit von Randkräften werden in irgend einem zur Mittelebene der Scheibe senkrechten Schnitte nur Bieigungs- und Schubspannungen vorhanden sein. Erstere dürfen wir wie bei der ebenen Scheibe dem Abstände des fraglichen Flächenelementes von der Mittelebene proportional setzen, und sei

$\sigma_x$  der Absolutwert der Biegungsspannung in der äußersten Faser eines zum Halbmesser senkrecht stehenden Schnittes,  
 $\sigma_y$  dasselbe in einem Meridianschnitt.

Das Biegemoment  $M$ , welches auf die Stirnfläche  $x d\varphi h$  des in Fig. 101 dargestellten Scheibenelementes im Sinne

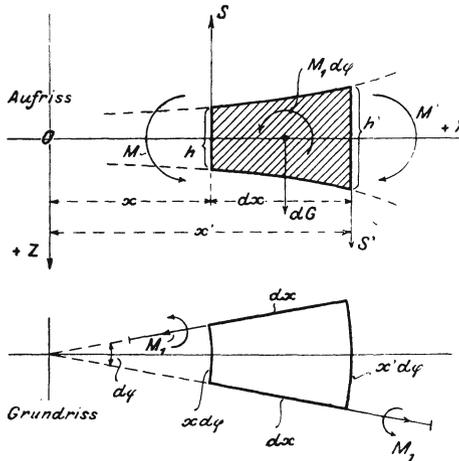


Fig. 101.

der Pfeile ausgeübt wird, hat den Wert: Widerstandsmoment  $\times$  Biegungsspannung der äußersten Faser, d. h.

$$M = \frac{1}{6} (x d\varphi) h^2 \sigma_x \dots \dots \dots (2).$$

Dasjenige auf die gegenüberliegende Stirnfläche

$$M' = \frac{1}{6} (x' d\varphi) h'^2 \sigma'_x.$$

Das Moment in den Seitenflächen  $dxh$

$$M_1 = \frac{1}{6} dx h^2 \sigma_y \dots \dots \dots (3)$$

mit dem durch seine »Achse« im Grundriss der Fig. 101 angedeuteten Sinn.

Außerdem wirkt in den Stirnflächen je eine Schubkraft, und zwar in  $x d\varphi h$  die Kraft

$$S = x d\varphi h \tau_m \dots \dots \dots (4),$$

wo  $\tau_m$  den Mittelwert der Schubspannung bedeutet<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Diese Betrachtungsweise entspricht im Wesen genau dem bisher von allen Autoren z. B. Grashof eingeschlagenem Wege, ist aber viel einfacher als die Methode des Letzteren. Der Grad der Annäherung an die strenge Lösung dürfte ebenso groß sein, wie derjenige der gewöhnlichen Biegelehre an die Theorie von de St Vénaut.

Ebenso ist

$$S' = x' d\varphi h' \tau_m'.$$

In den Seitenflächen ist die Schubkraft aus Gründen der Symmetrie = 0. Schliesslich wirkt im Schwerpunkt des Elementes vertikal nach abwärts die Eigenschwere

$$dG = x d\varphi dx h \gamma \dots (5),$$

sofern  $\gamma$  das spezifische Gewicht bedeutet.

Die angeführten Kräfte müssen miteinander im Gleichgewichte stehen, es muß also in erster Linie die Summe der Momente beispielsweise für die zur  $XOZ$ -Ebene senkrecht stehende Schwerpunktsachse verschwinden. Die Zusammensetzung der Momente  $M_1$  ergibt ein um diese Achse drehendes Moment  $M_1 d\varphi$ , dessen Sinn im Aufrisse der Fig. 101 eingetragen ist, und die erste Gleichgewichtsbedingung lautet mithin

$$M' - M - M_1 d\varphi + S dx = 0 \dots (6)$$

oder nach dem Einsetzen der Einzelwerte, da  $M' - M = \frac{dM}{dx} dx$  ist,

$$\frac{d(xh^2\sigma_x)}{dx} - h^2\sigma_y + 6xh\tau_m = 0 \dots (7).$$

Die zweite Gleichgewichtsbedingung beziehen wir nicht auf ein Element, sondern auf die ganze vom vertikalen Zylinder mit dem Radius  $x$  begrenzte Scheibe selbst. Das Gesamtgewicht derselben ist

$$G_x = \int_{x_1}^x 2\pi x dx h \gamma \dots (8).$$

Die in der Mitte vertikal nach oben wirkende Stützkraft  $P$  gleich dem Gewicht der ganzen Scheibe, mithin

$$P = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x dx h \gamma \dots (9).$$

Lotrecht nach abwärts haben wir endlich die gesamte Schubkraft  $2\pi x h \tau_m$ . Das Gleichgewicht fordert

$$G_x + 2\pi x h \tau_m = P \dots (10).$$

Hieraus berechnen wir

$$xh\tau_m = \frac{1}{2\pi} [P - G_x] = \left[ \int_{x_1}^{x_2} x dx h \gamma - \int_{x_1}^x x dx h \gamma \right]$$

oder auch

$$xh\tau_m = \int_0^{x_2} x dx h \gamma - \int_0^x x dx h \gamma = \frac{P_0}{2\pi} - \frac{\gamma h x^2}{2-\alpha} \dots (11),$$

wenn wir mit

$$P_0 = \int_0^{x_2} 2 \pi x dx h \gamma = \frac{2 \pi \gamma h_2 x_2^2}{2 - \alpha} \dots (12)$$

das »ideelle« Gewicht der bis an die Achse ausgedehnt gedachten Scheibe bezeichnen, wobei indessen  $\alpha < 2$  vorausgesetzt wird, und die Scheibe gleicher Dicke  $\alpha = 0$ , wie sich später zeigt, ausgeschlossen werden muß. Durch Einsetzen von  $x h \tau_m$  aus (11) in (7) wird die Schubspannung eliminiert, und man erhält

$$\frac{d(x h^2 \sigma_x)}{dx} - h^2 \sigma_y = -\frac{6 P_0}{2 \pi} + \frac{6 \gamma h x^2}{2 - \alpha} \dots (13)$$

Nun ist die Ausdehnung eines Scheibenelementes auf der Zugseite bei der in Fig. 102 dargestellten Verbiegung im Abstände  $\frac{h}{2}$  in radialer Richtung

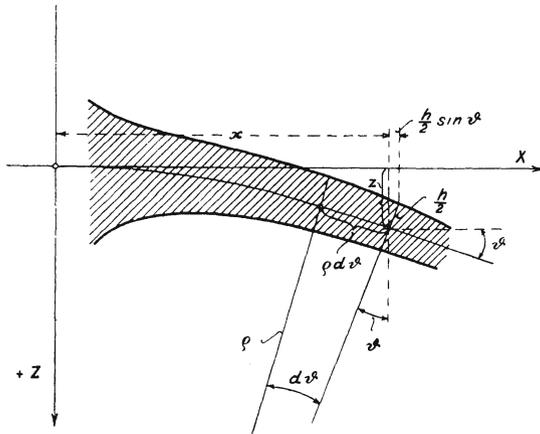


Fig. 102.

$$\epsilon_x = \frac{\left(\rho + \frac{h}{2}\right) d \delta - \rho d \delta}{\rho d \delta} = \frac{h}{2 \rho} \dots (14)$$

und nach der Richtung von  $y$  d. h. im Umfange gemessen

$$\epsilon_y = \frac{2 \pi \left(x + \frac{h}{2} \sin \delta\right) - 2 \pi x}{2 \pi x} = \frac{h}{2 x} \sin \delta \dots (14a)$$

oder mit der zulässigen Näherung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 z}{dx^2} = z''; \quad \sin \delta = \infty \operatorname{tg} \delta = \frac{dz}{dx} = z',$$

$$\epsilon_x = \frac{h}{2} z'', \quad \epsilon_y = \frac{h z'}{2 x} \dots (14b)$$

Hieraus ergibt sich, wie im Abschnitt 13

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( z'' + \nu \frac{z'}{x} \right) \frac{h}{2} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu z'' + \frac{z'}{x} \right) \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

und die Differentialgleichung (13) lautet

$$\frac{d}{dx} [h^3 (x z'' + \nu z')] - h^3 \left( \nu z'' + \frac{z'}{x} \right) = \frac{12 (1-\nu^2) ; h x^2}{E (2-\alpha)} - \frac{6 (1-\nu^2) P_0}{\pi E} \quad (16)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$z''' + (1-3\alpha) \frac{z''}{x} - (1+3\alpha\nu) \frac{z'}{x^2} = a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2} \quad (17)$$

mit den Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= 2\alpha + 1 & n_2 &= 3\alpha - 1 \\ a_1 &= \frac{12 (1-\nu^2) ; \gamma}{(2-\alpha) E c^2} & a_2 &= \frac{6 (1-\nu^2) P_0}{\pi E c^3} \end{aligned} \right\} \dots (18).$$

Zum Zwecke der Auflösung setzen wir

$$z = u + b_1 x^{k_1}$$

und bezeichnen die rechte Seite von (17) mit  $f(x)$ ; es entsteht dann

$$f(u) + b_1 [k_1 (k_1 - 1) (k_1 - 2) + (1 - 3\alpha) k_1 (k_1 - 1) - (1 + 3\alpha\nu) k_1] x^{k_1 - 3} = a_1 x^{n_1} - a_2 x^{n_2}.$$

Man bringt  $x^{n_2}$  zum Verschwinden, wenn man

$$k_1 = n_1 + 3$$

setzt, und  $b_1$  aus der Gleichung

$$(n_1 + 3) [(n_1 + 2) (n_1 + 2 - 3\alpha) - (1 + 3\alpha\nu)] b_1 = a_1 \quad (19)$$

bestimmt. Ebenso wird durch die Substitution

$$u = v + b_2 x^{n_2 + 3}$$

das zweite Glied rechts beseitigt, wobei  $b_2$  aus Gleichung

$$(n_2 + 3) [(n_2 + 2) (n_2 + 2 - 3\alpha) - (1 + 3\alpha\nu)] b_2 = -a_2 \quad (19a)$$

zu rechnen ist. Die verbleibende Gleichung

$$f(v) = 0 \dots (17a)$$

wird durch den Ansatz  $v = b_0 x^\lambda$  integriert, wobei  $\lambda$  der Gleichung

$$\lambda^3 - (2 + 3\alpha) \lambda^2 + 3\alpha(1-\nu) \lambda = 0$$

genügen muß. Die drei Wurzeln sind

$$\left. \begin{aligned} \lambda \\ \lambda' \end{aligned} \right\} = \left( 1 + \frac{3\alpha}{2} \right) \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{3\alpha}{2} \right)^2 - 3\alpha(1-\nu)}; \quad \lambda'' = 0 \quad (20),$$

somit das vollständige Integral von Gl. (17)

$$z = b_0 x^\lambda + b_0' x^{\lambda'} + b_0'' x^0 + b_1 x^{n_1+3} + b_2 x^{n_2+3}.$$

Für  $x = 0$  fordern wir  $z = 0$  und dies gibt  $b_0'' = 0$ ; ebenso soll aber für  $x = 0, z' = 0$  sein, was nur möglich ist, wenn  $b_0' = 0$ . Es ist nämlich  $(\lambda' - 1)$  stets negativ reell, wie man leicht einsehen kann, und wir erhielten, falls  $b_0'$  nicht = 0 wäre, bei  $x = 0$  unendlich große Werte von  $z'$ . Die der Aufgabe entsprechende Lösung ist mithin

$$z = b_0 x^\lambda + b_1 x^{n_1+3} + b_2 x^{n_2+3} \quad . \quad . \quad (21).$$

Die noch willkürliche Konstante  $b_0$  bestimmen wir durch die Randbedingung, daß für  $x = x_2 = r$  die Biegungsspannung  $\sigma_x$  verschwinden, d. h.

$$\left( z'' + \nu \frac{z'}{x} \right)_{x=r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21a)$$

sein müsse. Das Verschwinden der Schubspannungen ist schon dadurch erfüllt, daß  $P_0 =$  dem »ideellen« Radgewichte gemacht wurde. Die Ausführung der Rechnung ergibt

$$b_0 = - \frac{1}{\lambda(\lambda - 1 + \nu)} [(n_1 + 3)(n_1 + 2 + \nu)b_1 r^{n_1+3-\lambda} + (n_2 + 3)(n_2 + 2 + \nu)b_2 r^{n_2+3-\lambda}] \quad (22),$$

wodurch die Aufgabe vollkommen gelöst wird. Die Spannungen selbst finden wir durch Substitution der Ableitungen von (21) in Gl. (15).

Die Formeln sind zwar umständlich, erheischen indes wenigstens kein mühsames Probieren. Wenn der Raddurchmesser mehrere Meter erreicht, so zählt die Durchbiegung schon nach Millimetern, und die Rechnung sollte nicht unterlassen werden.

Zur Uebersicht sei die Reihenfolge des Rechnungsganges hier nochmals zusammengestellt. Durch den Entwurf des Rades ist Gl. (1) gegeben. Wir rechnen aus Gl. (12)  $P_0$ , aus Gl. (18)  $n_1, n_2, a_1, a_2$ , aus Gl. (19) und (19a)  $b_1, b_2$ , aus Gl. (20)  $\lambda$ , aus Gl. (22)  $b_0$  und erhalten in Gl. (21) die Durchbiegung.

Für die Scheibe von unveränderlicher Dicke ist die Integration getrennt auszuführen, und ergibt mit  $\alpha = 0, h = \text{konst.} = h_0,$

$$z = \frac{a_1 x^4}{32} - \frac{a_2 x^2}{4} (\ln x - 1) + \frac{a_3 x^2}{4} \quad . \quad . \quad (23)$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = \frac{6(1-\nu^2)\gamma}{E h_0^2} \quad a_2 = \frac{6(1-\nu^2)P_0}{\pi E h_0^3} \quad . \quad . \quad (24),$$

welche Formeln schon Grashof entwickelt hat.

Zur Bestimmung von  $a_3$  dient wieder Bedingung (21 a) und man erhält

$$a_3 = -\frac{3 + \nu}{4(1 + \nu)} a_1 r^2 + \left( \lg r + \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \right) a_2 \quad (25)$$

und schliesslich die Durchbiegung am Rande

$$(z)_{x=r} = \frac{3(1 - \nu)(7 + 3\nu)}{16} \frac{\gamma r^4}{E h_0^2} = 1,037 \frac{\gamma r^4}{E h_0^2}. \quad (26)$$

Durch Zahlenbeispiele kann man nachweisen, dass die Verdickung der Scheibe gegen die Welle hin, gemäss Gl. (1), welche durch Fliehkraftbeanspruchung an sich geboten ist, auch die Einsenkung durch das Eigengewicht ganz erheblich verringert. Die Wirkung eines verstärkten Randes lässt sich rechnerisch auch verfolgen, doch würde die Wiedergabe der Rechnung uns zu weit führen.

**37. Geraderichten der wagerecht rotierenden Scheibe durch die Eigenfliehkräfte.**

Bei Scheiben von bedeutenden Abmessungen könnte die Gefahr auftreten, dass die Scheibe durch die Eigenfliehkräfte mehr oder weniger gerade gestreckt würde, mithin unter Umständen wieder nach oben hin streifen könnte. Den Betrag

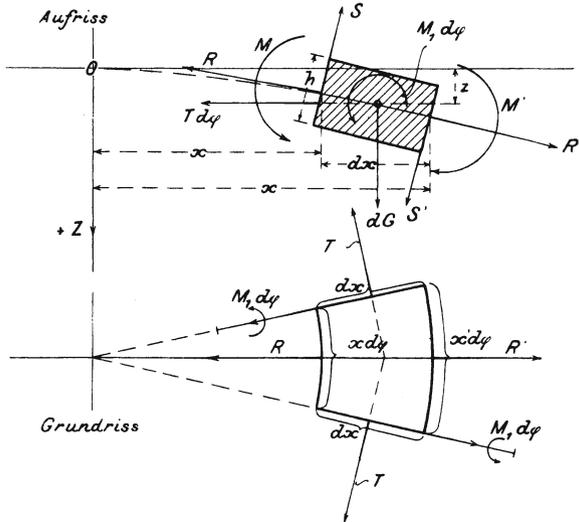


Fig. 103.

dieses Geraderichtens kann man wenigstens für eine Scheibe konstanter Dicke näherungsweise wie folgt bestimmen.

Es sei in Fig. (103) ein Scheibenelement gleicher Form wie vorhin in Aufriss und Grundriss dargestellt. Zu den durch das

Eigengewicht bedingten Kräften  $dG, S, S', M, M', M_1$  tritt nun wegen der Fliehkraft  $dF = \mu(xd\varphi h dx)\omega^2 x$ , wo  $\mu$  die spezifische Masse bedeutet, die auf die Stirnfläche  $x d\varphi h$  wirkende radiale Kraft  $R = x d\varphi h \sigma_r$ , mit ihrer Gegenkraft  $R' = x' d\varphi h \sigma_r'$  und auf die Seitenflächen  $dxh$  die tangentielle Kraft  $T = dxh \sigma_t$  hinzu und es bedeutet  $\sigma_r, \sigma_t$ , die über den Querschnitt gleichmäßig verteilt radiale bzw. tangentielle Zugspannung, während  $\sigma_x, \sigma_y$  im gleichen Sinne wie vorhin benutzt werden. Die Momente  $M_1$  ergeben wie vorhin  $M_1 d\varphi$ , welches in die Figur eingetragen ist. Die Kräfte  $T$  kann man ebenfalls zu einer Resultierenden  $Td\varphi$ , welche radial einwärts wirkt, vereinigen. Das Gleichgewicht dieses Kräftesystemes erheischt wieder das Verschwinden der Momente um irgend eine Achse und das Verschwinden der Kraftkomponentensumme nach irgend einer Richtung. Erstere Bedingung auf die zu  $XOZ$  senkrechte Schwerpunktsachse bezogen, gibt, wie vorhin

$$\frac{d(x\sigma_x)}{dx} - \sigma_y + \frac{6x}{h} \tau_m = 0 \dots (27).$$

Wir bilden ferner die Komponentensumme in der Richtung der Tangente an die elastische Linie des Meridianschnittes. Die Neigung dieser Tangente ist so klein, daß man Bogen, Sinus und Tangente vertauschen =  $dz:dx = z'$  und den Cosinus = 1 setzen darf. Zerlegen wir  $dG$  nach der Tangente und nach der Normale, so ist erstere Komponente =  $dGz'$ , und die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$R' - R - Td\varphi + dF + dGz' = 0 \dots (28)$$

oder

$$\frac{d(x\sigma_r)}{dx} - \sigma_t' + \mu \omega^2 x^2 + \gamma x \frac{dz}{dx} = 0 \dots (29).$$

Die dritte Bedingung beziehen wir wieder auf die Vertikalkräfte, die auf ein durch den vertikalen Zylinder mit dem Radius  $x$  herausgeschnittenes Scheibenstück wirken. Die Summe der vertikalen Komponenten von  $R$  ist

$$2 \pi x h \sigma_r z',$$

und wir erhalten

$$2 \pi x h \sigma_r z' + 2 \pi x h \tau_m + \gamma \pi x^2 h - P_0 = 0,$$

woraus

$$x h \tau_m = \frac{P_0}{2 \pi} - \frac{\gamma h x^2}{2} - x h \sigma_r z'$$

in Gl. (27) eingeführt

$$\frac{d(x\sigma_x)}{dx} - \sigma_y - \frac{6x\sigma_r}{h} z' - \frac{3\gamma}{h} x^2 + \frac{3P_0}{\pi h^2} = 0 \dots (30)$$

ergibt. In Gl. (29) und (30) würde man für  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_r, \sigma_t$  die Ausdrücke (15), Abschnitt (36) bzw. (27), Abschnitt (13) ein-

zusetzen, und die Unbekannten  $z$  und  $\xi$  als Funktion von  $x$  zu bestimmen haben. Die Schwierigkeit dieser Rechnung werden wir durch die Annahme umgehen, daß die Spannungen  $\sigma_r, \sigma_t$  in erster Annäherung denselben Wert besitzen, als wenn die Schwerkraft abwesend wäre. Es gilt dann für  $\xi$  Gl. (31), Artikel (13)

$$\xi = ax^3 + b_1x + \frac{b_2}{x} \text{ mit } a = -\frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2}{8E},$$

wobei für die volle Scheibe  $b_2 = 0$  ist, damit bei  $x = 0$  auch  $\xi = 0$  sei. Am Rande des Rades ist  $\sigma_r = 0$ , d. h. nach Gl. (27) Art. 13

$$\left( \nu \frac{\xi}{x} + \frac{d\xi}{dx} \right)_{x=r} = 0$$

und hieraus folgt

$$b_1 = -\frac{(3+\nu)\alpha r^2}{1+\nu}$$

und schließlic

$$\sigma_r = a'(r^2 - x^2) \text{ mit } a' = \frac{(3+\nu)\mu\omega^2}{8} \quad (31),$$

welchen Wert wir in Gl. (30) zugleich mit Gl. (15) einführen und so mit der weiteren Abkürzung

$$a'' = \frac{6(1-\nu^2)}{Eh^3} \quad (32)$$

die Differentialgleichung

$$xz''' + z'' - \frac{z'}{x} + a'' \left[ \frac{P_0}{\pi} - 2a'h(r^2 - x^2)xz' - h\gamma x^2 \right] = 0 \quad (33)$$

erhalten. Die Integration könnte durch Reihenansatz ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden, bedingt aber umständliche Rechnungen, wenn man ein Zahlenergebnis zu erhalten wünscht. Es wird deshalb ein Näherungsverfahren eingeschlagen, indem man für die Ableitung  $z'$  im Klammerausdruck eine einfache Funktion von  $x$  einführt. Da  $z$  vom Mittelpunkte ab stetig zunimmt, wird als einfachste Form

$$z = a_0 x^2 \quad (34)$$

vorauszusetzen sein, mit zunächst unbekanntem aber konstantem  $a_0$ , wobei indes zu bemerken ist, daß in Wirklichkeit  $z$  rascher zunimmt wie das Quadrat von  $x$ . Es wird mithin der Einfluß der Fliehkraft, der nur im Gliede  $2a'h(r^2 - x^2)xz'$  zum Ausdruck kommt, etwas überschätzt.

Setzen wir demgemäß

$$z' = 2a_0 x$$

in Gl. (33) ein, und benutzen wir die Bezeichnungen

$$A_0 = \frac{a''P_0}{\pi}, \quad A_1 = a''h(\gamma + 4a_0a'r^2), \quad A_2 = 4ha_0a'a'' \quad (35),$$

so nimmt dieselbe die Form

$$z''' + \frac{z''}{x} - \frac{z'}{x^2} = -\frac{A_0}{x} + A_1 x - A_2 x^3 \quad . \quad . \quad (36)$$

an, wobei die linke Seite auch als

$$z''' + \frac{d}{dx} \left( \frac{z'}{x} \right)$$

geschrieben, integriert das Ergebnis

$$z'' + \frac{z'}{x} = -A_0 \ln x + \frac{1}{2} A_1 x^2 - \frac{1}{4} A_2 x^4 + A_3$$

liefert. Die linke Seite ist  $= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x z')$ , man kann mithin nach Multiplikation mit  $x$  abermals integrieren und erhält schliesslich

$$z = -A_0 \frac{x^2}{4} (\ln x - 1) + \frac{1}{32} A_1 x^4 - \frac{1}{144} A_2 x^6 + \frac{1}{4} A_3 x^2 \quad (37).$$

Die hinzutretenden zwei letzten Integrationskonstanten sind  $= 0$ , da für  $x = 0$ , sowohl  $z = 0$  als auch  $z' = 0$  sein mufs. Das noch willkürliche  $A_3$  folgt aus der Bedingung, dafs für  $x = x_2 = r$  die Biegungsspannung, d. h.

$$\left( z'' + \nu \frac{z'}{x} \right)_{x=r} = 0$$

sein müsse. Dies liefert

$$A_3 = \frac{1}{1+\nu} \left[ A_0 \left( (1+\nu) \ln x + \frac{1-\nu}{2} \right) - \frac{1}{4} A_1 (3+\nu) r^2 + \frac{1}{12} A_2 (5+\nu) r^4 \right] \quad (38)$$

und es ergibt sich schliesslich die Durchbiegung am Rande für  $x = r$ , wenn die Werte der Konstanten  $A_0$  bis  $A_3$  eingesetzt werden

$$(z)_{x=r} = \frac{3}{16} (1-\nu) (7+3\nu) \frac{\gamma r^4}{Eh^2} - \frac{1}{96} (3+\nu) (1-\nu) (17 + 5\nu) \frac{\nu \omega^2}{Eh^2} a_0 r^6 \quad (39).$$

Wäre  $\omega = 0$ , so erhielten wir

$$z_0 = \frac{3}{16} (1-\nu) (7+3\nu) \frac{\gamma r^4}{Eh^2} \quad . \quad . \quad (40)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (26) des vorigen Abschnittes.

Setzen wir nun

$$\beta = \frac{1}{96} (3+\nu) (1-\nu) (17+5\nu) \frac{\nu \omega^2 r^4}{Eh^2} \quad . \quad . \quad (41),$$

so schreibt sich die effektive Einsenkung

$$z_r = z_0 - \beta a_0 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Die noch unbekannt Gröfse  $a_0$  mufs aber um der Annahme Gl. (34) zu genügen so berechnet werden, dafs

$$z_r = a_0 r^2$$

sei. Wir erhalten mithin

$$z_r = z_0 - \beta z_r$$

und hieraus endgültig

$$z_r = \frac{z_0}{1 + \beta} \dots \dots \dots (43).$$

Die Fliehkraft übt, wie man leicht nachweisen kann, auf die Durchbiegung einen grossen Einfluss aus. So wird beispielsweise  $z_r$  die Hälfte von  $z_0$ , wenn  $\beta = 1$ , und dies erreicht bei einer Scheibe von 4 m Dmr., 3 cm Dicke (wenn  $\mu = 7,8 \cdot 10^{-6}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$ ,  $\nu = 0,3$ ), eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 56,9$ , also eine Umdrehungszahl  $n = 543$  pro min. Würden wir aber die Umdrehungszahl auf das Dreifache, d. h. auf 1630 steigern können, so würde  $\beta = 9$ , d. h. die Durchbiegung nur ein Zehntel derjenigen die in der Ruhelage auftritt.

Die Anwesenheit eines verdickten Randes und die ungleichmäßige Dicke der Scheibe, dürfte das Verhältnis der beidartigen Durchbiegungen umso weniger beeinflussen, je höher die Geschwindigkeit ist. Man könnte übrigens die Einsenkung mittels der angewendeten Näherungsmethode auch für diese Fälle rechnen, doch berechtigt das obige einfache Beispiel schon zu dem Ausspruche: dafs bei den im Turbinenbau üblichen hohen Umlaufzahlen die aus dem Eigengewichte folgende Durchbiegung der horizontal-rotierenden Scheiben im Betriebe durch die Fliehkraft nahezu ganz aufgehoben werden dürfte. Im allgemeinen müfste mithin das Spiel zwischen den Leit- und Lauf-rädern mindestens dem Betrag dieser Durchbiegung gleich gemacht werden. Man könnte aber auch die Meridianlinie des Rades als flachen nach aufwärts konkaven Bogen gemäfs Gl. (21) ausführen, sodafs die Eigenschwere die Mittelfläche zu einer horizontalen Ebene verbiegen würde, und die Fliehkräfte nur noch wagerechte Dehnungen hervorrufen könnten. Freilich würden hiermit etwas hohe Anforderungen an die Werkstücke gestellt; die Rücksicht auf die mögliche Vibration des Rades wird uns veranlassen, das Spiel nicht zu knapp anzusetzen.

**38. Kritische Geschwindigkeit einer stetig und gleichmäßig belasteten Welle mit veränderlichem Durchmesser.**

In der allgemeinen Gl. (45) Abschnitt 18 ist in diesem Falle unter  $m_1$  zu verstehen die Summe der auf die Längeneinheit entfallenden Masse der Räder  $m_1'$  und der Eigenmasse der Welle

$\mu \pi r^2$ , und die genannte Gleichung schreibt sich mit Einsetzung von  $J = \frac{\pi}{4} r^4$ :

$$\frac{\pi}{4} r^4 E \frac{d^4 y}{dx^4} = (m_1' + \mu \pi r^2) \omega^2 (y + e) \quad (1),$$

worin nun  $r$  der Voraussetzung gemäß veränderlich sein soll. Um die Rechnung nicht über Gebühr zu erschweren, werde eine beidseitig frei aufliegende, gegen die Mitte verdickte Welle angenommen, deren Radius nach dem Gesetze

$$r^4 = r_0^4 \left( 1 - \beta^2 \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (2)$$

gegen die Wellenenden abnimmt. Der Koordinatenanfang liegt wieder in der Mitte der Lagerentfernung. Außerdem werde angenommen, daß sich entweder  $m_1'$  so ändert, daß die Summe  $m_1' + \mu \pi r^2$  einen überall konstanten Wert besitzt, oder es werde  $\mu \pi r^2$  mit einem mittleren Betrag in Rechnung gesetzt, sodafs die Summe  $m_1$  von Querschnitt zu Querschnitt unverändert bleibt. Führt man die neue Veränderliche

$$z = \beta \frac{x}{l}$$

ein, so erscheint Gl. (63) in der Form

$$\frac{\pi}{4} (1 - z^2) E \frac{\beta^4}{l^4} \frac{d^4 y}{dz^4} = m_1 \omega^2 (y + e)$$

oder mit der Bezeichnung

$$\alpha = \frac{4 m_1 \omega^2 l^4}{\pi E r_0^4 \beta^4} \quad (3)$$

und unter Voraussetzung eines gleichbleibenden  $e$ :

$$(1 - z^2) \frac{d^4 y}{dz^4} = \alpha (y + e) \quad (4).$$

Die Grenzwerte von  $z$ , welche  $x = 0$  und  $x = l$  entsprechen, sind 0 und  $\beta$ , und in diesem Zwischenraum wird die vorliegende Gleichung, wie die Differentialrechnung lehrt, durch eine konvergente Reihe von der Form

$$y = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + \dots \quad (5)$$

integriert. Die ungeraden Potenzen fallen wegen der Symmetrie weg. Führt man die Reihe in die Differentialgleichung ein, so erweisen sich  $a_0, a_2$  als zunächst willkürlich, während die übrigen Werte durch

$$\left. \begin{aligned} a_4 &= \frac{\alpha (a_0 + e)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ a_6 &= \frac{\alpha (a_0 + e)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{\alpha a_2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ a_8 &= \frac{\alpha}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left[ \left( 1 + \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right) (a_0 + e) + a_2 \right] \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dargestellt werden. Da jeder Koeffizient in  $(a_0 + e)$  und  $a_2$  linear ist, so schreibt sich  $y$  in der Form

$$y = (a_0 + e) R_0 + a_2 R_2,$$

wo  $R_0$  und  $R_2$  Potenzreihen von  $z$  sind. Die Konstanten  $a_0, a_2$  bestimmen sich nun aus der Bedingung, daß für  $x = l$ , d. h.  $z = \beta$ , sowohl  $y$  als auch das biegende Moment, d. h.  $\frac{d^2 y}{dz^2}$ , verschwinden mufs. Bezeichnen wir die zweiten Ableitungen der Reihen  $R_0, R_2$  nach  $z$  mit  $R_0'', R_2''$  und den Wert dieser Ausdrücke für  $z = \beta$  durch Anhängen des Buchstabens  $\beta$ , so entstehen die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_0 (R_0)_\beta + a_2 (R_2)_\beta &= - e (R_0)_\beta \\ a_0 (R_0'')_\beta + a_2 (R_2'')_\beta &= - e (R_0'')_\beta. \end{aligned}$$

Aus diesen lassen sich  $a_0, a_2$  im allgemeinen als bestimmte endliche Werte berechnen. Nur in dem Falle, daß die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (R_0)_\beta & (R_2)_\beta \\ (R_0'')_\beta & (R_2'')_\beta \end{vmatrix} = (R_0)_\beta (R_2'')_\beta - (R_0'')_\beta (R_2)_\beta \quad (7)$$

verschwindet, wird  $a_0, a_2$ , mithin auch die Durchbiegung  $y$ , unendlich groß. Die kritische Geschwindigkeit läßt sich mithin aus der Gleichung

$$D = 0 \quad . . . . . (8)$$

ermitteln. Zu diesem Zwecke ist es notwendig, die Werte der  $a_4 a_6 . . .$  in die Reihen  $R$  einzuführen und Gl. (8) nach der in  $\alpha$  vorkommenden Größe  $\omega^2$  aufzulösen. Dieses Verfahren ist trotz der im ganzen nicht schlechten Konvergenz der Reihen sehr umständlich, und es soll deshalb ein angenäherter Wert von  $\omega_k$  hergeleitet werden, indem man in den Reihen  $R$  alle Glieder mit einer höheren Potenz als  $z^6$  bzw.  $\beta^6$  unterdrückt. Diese Rechnung führt auf die Gleichung

$$1 - \frac{1}{6} \alpha \beta^4 - \frac{1}{45} \alpha \beta^6 = 0 \quad . . . (9),$$

oder nach Einsetzen des Wertes von  $\alpha$  schließlic auf die kritische Geschwindigkeit

$$\omega_k = \sqrt{\frac{3 \pi r_0^4 \varepsilon}{2 m_1 l^4} \frac{1}{1 + \frac{2}{15} \beta^2}} = 3,464 \sqrt{\frac{J_0 E}{M l^3} \frac{1}{1 + \frac{2}{15} \beta^2}} \quad (10),$$

worin  $J_0 = \frac{\pi}{4} r_0^4$  das Flächenträgheitsmoment des mittleren Wellenquerschnittes und  $M$  die Gesamtmasse der Scheiben und der Welle bedeutet. Wenn ferner  $r_1$  der Radius der Welle im Lager ist, so folgt aus Gl. (2)

$$\beta^2 = 1 - \frac{r_1^4}{r_0^4} \quad . . . . . (11).$$

Die kritische Geschwindigkeit zeigt sich mithin gegenüber der für die glatte Welle gültigen nur wenig verändert.

Eine besonders einfache und doch strenge Lösung gestattet der Sonderfall, in welchem die Belastung proportional ist dem Quadrate des Wellenhalbmessers und dieser selbst proportional der Durchbiegung, d. h. für den Ansatz

$$JE \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{\pi}{4} r^4 E \frac{d^4 y}{dx^4} = m_1' r^2 \omega^2 y,$$

oder

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{4 m_1' \omega^2}{\pi E a} \dots \dots \dots (12)$$

mit

$$r^2 = ay \dots \dots \dots (13).$$

Von einer Exzentrizität ( $e$ ) werde hier abgesehen und die kritische Geschwindigkeit wieder aus der Bedingung bestimmt, daß sich die Welle unter dem Einflusse der Fliehkräfte und der elastischen Gegenkraft im indifferenten Gleichgewichte befindet. Die allgemeine Integration von (12) ergibt für die beidseitig aufliegende Welle von der Länge  $2l$

$$ay = r^2 = \frac{m_1' \omega^2 l^4}{6 \pi E} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - 6 \left( \frac{x}{l} \right)^2 + 5 \right] \dots (14).$$

Wenn wir nun den Radius  $r$  z. B. in der Wellenmitte bei  $x = 0$  vorschreiben, d. h.  $r = r_0$  setzen, so muß die Winkelgeschwindigkeit einen bestimmten, den »kritischen« Wert annehmen, damit Gl. (14) bestehen könne. Wir haben also

$$r_0^2 = \frac{5}{6 \pi} \frac{m_1' \omega_k^2 l^4}{E} \dots \dots \dots (15)$$

und

$$\omega_k = r_0 \sqrt{\frac{6 \pi E}{5 m_1' l^4}} \dots \dots \dots (16).$$

### 39. Mitschwingen des Fundamentes; Ungefährlichkeit der »Resonanz«.

Die von Vibration nie ganz freie Welle überträgt auf das Fundament der Turbine eine periodisch wechselnde Kraft, durch welche ersteres in Mitschwingung versetzt werden muß. Das Fundament dürfen wir uns als eine starre Masse vorstellen, die auf einer elastischen Unterlage aufruhet, und es liegt die Befürchtung nahe, daß unter Umständen die Umdrehungszahl der Turbine mit der natürlichen Schwingungszahl des Fundamentes übereinstimmen, und daß die bei andern Schwingungsvorgängen so gefährliche Erscheinung der Resonanz auftreten könnte. Es hat nun ein praktisches Interesse festzustellen, daß diese Resonanz für die Turbine ungefährlich ist, und keineswegs zu aufsergewöhnlich gesteigerter Erschütterung führen kann, und zwar aus dem Grunde, weil die Turbinenwelle kein starrer Körper, sondern selbst elastisch

nachgiebig ist. Hingegen gewinnt das Mitschwingen Bedeutung durch den Umstand, daß die kritische Geschwindigkeit der Welle verkleinert oder vergrößert wird.

Am einfachsten überzeugt man sich von der Richtigkeit obiger Behauptung am »elastischen Doppelpendel«, z. B. an der in Fig. 104 dargestellten Verbindung der Masse  $m$  durch eine Feder mit der Masse  $m'$ , die ihrerseits durch eine Feder mit einem festen Punkte verbunden ist<sup>1)</sup>.

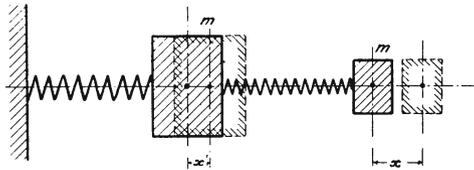


Fig. 104.

<sup>1)</sup> Die Masse  $m$  versinnbildlicht die Welle mit ihrer Federung,  $m'$  desgl. das Fundament mit seiner Nachgiebigkeit. Lassen wir auf  $m$  die periodische Kraft

$$P = a \cos \omega t$$

einwirken, durch welche eine Schwingung in der Horizontalen eingeleitet wird. Die Auslenkung von  $m$  und  $m'$  aus der Lage, wo die Federn spannungslos sind, sei  $x$  und  $x'$ , dann wirken in den Federn die Kräfte  $X$  und  $X'$ , die man der Verlängerung proportional, d. h.

$$\begin{aligned} X &= \alpha (x - x') \\ X' &= \alpha' x' \end{aligned}$$

setzen kann. Die Bewegungsgleichungen der Massen sind

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -X + P \\ m' \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -X' + X. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß eine, wenn auch sehr kleine, der Geschwindigkeit proportionale Reibung als sogen. »Dämpfung« mitwirkt, so bleibt nach hinlänglich langer Zeit nur die mit  $P$  synchrone Schwingung übrig, d. h. die Lösung der beiden Gleichungen wird durch den Ansatz  $x = A \cos \omega t$ ,  $x' = A' \cos \omega t$  wiedergegeben, worin

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta' a}{\alpha^2 - \beta \beta'}; \quad A' = -\frac{\alpha a}{\alpha^2 - \beta \beta'} \\ \text{mit } \beta &= m \omega^2 - \alpha; \quad \beta' = m' \omega^2 - (\alpha + \alpha'). \end{aligned}$$

Kritische Oszillationszahlen, d. h. unendlich große Werte von  $A$  und  $A'$  ergeben sich mithin, wenn

$$\alpha^2 - \beta \beta' = 0 \dots \dots \dots (1).$$

Würde  $m$  allein schwingen, bei festgelegtem  $m'$ , so hätte man die kritische Zahl aus der Gleichung

$$m \omega^2 - \alpha = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Für die Turbinenwelle kann man sich der Einfachheit halber das Fundament nur vertikal nachgiebig denken, und die Auslenkung eines Wellenpunktes durch die Koordinaten  $x$  in der Wellenrichtung,  $y$  wagerecht,  $z$  senkrecht bestimmt denken. Wenn man wieder die Bezeichnungen des 17. Artikels benutzt, die Exzentrizitäten  $e$  aber = 0 gesetzt werden, so wird die Bewegung der Welle durch die Gleichungen

$$JE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - m_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$JE \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = - m_1 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

dargestellt, wo auf der rechten Seite die d'Alembertschen Trägheitskräfte als »Belastung« der Welle erscheinen. Die Drehung je eines durch zwei zur Achse senkrechte Ebenen ausgeschnittenen Elementes um die Schwerpunktsachse erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, da wir Gleichgewicht der Drehmomente voraussetzen wollen. Die beiden Gleichungen genügen mithin; aus ihnen sind  $y$  und  $z$  für eine beiderseitig frei aufliegende Welle von der Länge  $2l$  so zu bestimmen, daß für  $x = l$ ,  $y = 0$ , während  $z = \zeta$  werden muß, unter  $\zeta$  eine periodische Schwingung des Fundamentes verstanden, welche durch die auf die Masse  $m'$  des Funda-

zu bestimmen. Würde die Kraft  $P$  an der Masse  $m'$  in Abwesenheit von  $m$  angreifen, so hätte man in gleicher Art

$$m' \omega^2 - \alpha' = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

zu setzen. Weder die eine, noch die andere Bedingung bewirkt indessen, daß Gl. (1) erfüllt wäre.

Es gibt mithin für das elastische Doppelpendel kritische Schwingungszahlen, allein diese stimmen nicht überein mit denjenigen, die für die einzelnen Pendel an sich Gültigkeit haben.

Die Masse  $m'$  bleibt einflußlos, falls, sei es der elastische Widerstand, d. h.  $\alpha'$ , sei es  $m'$  selbst unendlich groß wird. Nähern sich die Verhältnisse dieser Grenze, so wird sich  $\omega_k^2$  wenig vom Werte  $\alpha/m$  der aus Gl. (2) folgt, unterscheiden. Man kann diesen Wert näherungsweise in den Ausdruck von  $\beta'$  in Gl. (1) einsetzen und erhält

$$\alpha^2 - (m \omega_k^2 - \alpha) \left( m' \frac{\alpha}{m} - \alpha - \alpha' \right) = 0$$

alsdann das korrigierte

$$\omega_k^2 = \frac{\alpha}{m} \left[ 1 + \frac{1}{\frac{m'}{m} - \frac{\alpha'}{\alpha} - 1} \right]$$

woraus hervorgeht, daß die kritische Schwingungszahl durch das Mitschwingen des »Fundamentes« ( $m'$ ) vergrößert wird, falls die Masse desselben groß ist gegen  $m$ , hingegen die elastische Rückwirkung ( $\alpha'$ ) klein gegen diejenige der »Welle« ( $\alpha$ ), weil das neben der Einheit stehende Glied positiv wird. Die kritische Schwingungszahl wird verkleinert, falls die entgegengesetzten Verhältnisse eintreten.

mentes wirkende Scherkraft der Welle in ihrem Endquerschnitt und die elastische Rückwirkung =  $\alpha\zeta$  der Unterlage unterhalten wird. Hierfür ist die entsprechende Bewegungsgleichung aufzustellen, und außerdem zu beachten, daß bei  $x = l$  das biegende Moment für das freie Auflager verschwindet. Für den einfachsten Fall einer symmetrischen Verbiegung der Welle und einer Sinusschwingung des Fundamentes erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} y &= [a'(e^{kx} + e^{-kx}) + b' \cos kx] \sin \omega t \\ z &= [a(e^{kx} + e^{-kx}) + b \cos kx] \sin(\omega t + \varepsilon), \end{aligned}$$

wo  $\varepsilon$  eine von den Anfangsbedingungen abhängige Größe ist. Für die Konstanten ergeben sich, da die Exzentrizität = 0 gesetzt wurde, endliche Werte nur bei den kritischen Umlaufzahlen und zwar einerseits für die vertikale Schwingung, falls

$$\operatorname{tghyp}(kl) - \operatorname{tg}(kl) = 2\beta \quad (1),$$

worin

$$k^4 = \frac{m_1 \omega^2}{JE}; \quad \beta = \frac{m' \omega^2 - \alpha}{JEk^3}$$

ist, anderseits für die horizontalen Auslenkungen, falls

$$\cos kl = 0 \quad (2).$$

Es gibt im hier vorausgesetzten Falle des einseitig nachgiebigen Fundamentes zwei Reihen von kritischen Umlaufzahlen, eine für die vertikalen, die andere für die wagerechten Ausbiegungen der Welle. Der Synchronismus der Rotation mit der Eigenschwingung des Fundamentes, d. h.  $m' \omega^2 - \alpha = 0$ , liefert an sich keine kritische Umlaufzahl.

Setzt man das Fundament allseitig gleichmäßig nachgiebig voraus, so bleibt, wie man sich überzeugen kann, Bedingung (1) bestehen, und es ergibt sich weiterhin die interessante Tatsache, daß bei Resonanz die Welle so rotiert, als wäre sie, von der Schwere abgesehen (also z. B. bei vertikaler Aufstellung), vollkommen frei.

#### 40. Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes über der kritischen Geschwindigkeit.

Wir betrachten zunächst eine einzelne Scheibe unter Ausschluss jeder Seitenschwankung. Es bedeute in Fig. 105  $S$  den Scheibenschwerpunkt,  $W$  den Durchstoßpunkt der durchgebogenen Welle mit der Scheibe,  $O$  die Projektion der geometrischen Drehachse. Von der Anwesenheit anderer Schwungmassen auf der Welle wird vorerst abgesehen. Im Falle des relativen Gleichgewichtes liegt  $S$  auf der Verbindungslinie  $OW$  in einem Abstände  $q_0$ , welcher sich aus der Gleichsetzung der

Fliehkraft  $m \varrho_0 \omega_0^2$  und der elastischen Gegenkraft  $\alpha(e + \varrho_0)$  wie früher zu

$$\varrho_0 = \frac{\alpha e}{m \omega_0^2 - \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

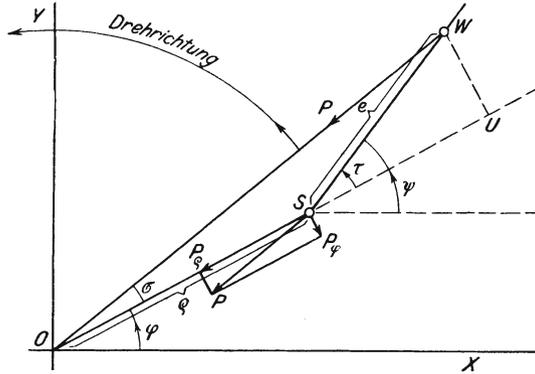


Fig. 105.

ergibt. Der Winkel  $\varphi$  wird, solange Gleichgewicht besteht, mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $\omega_0$  beschrieben und werde mit  $\varphi_0$  bezeichnet, so daß  $\varphi_0 = \omega_0 t$ , wenn  $t$  die Zeit bedeutet. Die auf die Scheibe wirkenden übrigen Kräfte sollen sich das Gleichgewicht halten; insbesondere kann man sich vorstellen, daß die treibende Dampfkraft ein reines Moment ergibt, welches durch eine entsprechende Torsion der Welle ausgeglichen und auf die zunächst massenlos gedachte Arbeitsmaschine übertragen wird. Um zu prüfen, ob die Gleichgewichtslage eine stabile ist, muß man das System aus dieser Lage unendlich wenig verrücken und die Bewegungsgleichungen aufstellen. Fig. 104 stellt diese verschobene Lage dar, in welcher

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 + z \\ \varphi &= \varphi_0 + \varepsilon \dots \dots \dots (2) \\ \psi &= \varphi + \tau \end{aligned}$$

und  $z, \varepsilon, \tau$  unendlich kleine Größen bedeuten.

Für die Bewegungsgleichungen werden  $\varrho, \varphi, \psi$  als Veränderliche betrachtet<sup>1)</sup>, und man muß zuerst die Bewegung des Schwerpunktes für sich, dann die Bewegung der Scheibe um den Schwerpunkt untersuchen. Die erstere erfolgt so, als ob die Scheibenmasse im Schwerpunkte vereinigt wäre und alle Kräfte an diesem angriffen. Die elastische Kraft  $P$ , Fig. 47,

<sup>1)</sup> Aus dieser durch die Natur der Aufgabe bedingten Wahl der Veränderlichen folgt, daß man zweckmäßigerweise auf die sogen. allgemeinen Lagrangeschen Differentialgleichungen zurückgreifen sollte, welche in der Tat mühelos die weiter unten elementar entwickelten Formeln ergeben.

ist  $= \alpha \overline{WO}$ ; da aber  $\overline{WO}$  als Strecke die Resultierende aus  $\overline{WU}$  und  $\overline{UO}$ , wobei  $\overline{WU} \perp \overline{UO}$ , ist, so kann diese Kraft als Resultierende der Kräfte  $P_\varphi = \alpha \overline{WU}$  und  $P_\rho = \alpha \overline{UO}$  mit den entsprechenden Richtungen aufgefaßt werden. Bei der Kleinheit von  $\tau$  und  $\sigma$  ist dann

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \alpha e \tau \\ P_\rho &= \alpha(e + \rho) \end{aligned} \quad \dots \quad (3),$$

und

welche Kräfte in Fig. 104 an den Schwerpunkt übertragen worden sind.

Um die Änderung von  $\rho$  zu finden, betrachten wir die relative Bewegung des Schwerpunktes in einem mit dem Radiusvektor mitrotierenden (gewichtlosen) radialen Schlitz. Wir müssen zu diesem Behufe die Ergänzungskräfte der relativen Bewegung hinzufügen, von welchen indessen nur die »Flihkraft«  $m\rho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$  für die bezeichnete Bewegung inbetracht kommt, und wir erhalten

$$m \frac{d^2 \rho}{dt^2} = m\rho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \alpha(e + \rho) \quad \dots \quad (4).$$

Des weiteren wenden wir den Flächensatz auf die absolute Bewegung des Schwerpunktes um  $O$  herum an (d. h. wir sprechen aus, daß die Ableitung des »Impulsmomentes« nach der Zeit dem Momente der äußeren Kräfte gleich sei) und erhalten

$$\frac{d}{dt} \left( m\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = -P_\varphi \rho = -\alpha e \tau \rho \quad \dots \quad (5).$$

Für die Bewegung um den Schwerpunkt ist das Kraftmoment  $= \alpha \overline{WO} e \sin(\tau - \sigma)$  oder nach leichter Umformung  $= \alpha e \tau \rho$ ; wenn also  $\Theta$  das Massenträgheitsmoment der Scheibe für  $S$  bedeutet, so wird

$$\Theta \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \alpha e \tau \rho \quad \dots \quad (6).$$

In die Gleichungen (4, 5, 6) muß man die Werte (2) einsetzen, nach  $z, \varepsilon, \tau$  entwickeln und alle höheren Potenzen als die erste streichen. Wenn man dann noch die kritische Geschwindigkeit

$$\omega_k^2 = \frac{\alpha}{m}$$

einsetzt und die Bezeichnung

$$\delta = 1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \quad \dots \quad (7)$$

einführt, sodafs  $\rho_0$  sich in der Form

$$\rho_0 = \frac{1 - \delta}{\delta} e \quad \dots \quad (8)$$

darstellt, so erhält man für  $z, \varepsilon, \tau$  die linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \delta \omega_0^2 z + 2 \varrho_0 \omega_0 \frac{d\varepsilon}{dt} \\ 2 \omega_0 \frac{dz}{dt} + \varrho_0 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= -(1-\delta) \omega_0^2 e \tau \\ \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{d^2 \tau}{dt^2} &= \frac{(1-\delta)^2}{\delta} \omega_0^2 \frac{m e^2}{\Theta} \tau \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Die Lösung erfolgt durch den bekannten Ansatz

$$z = a e_0^{\lambda t} \quad \varepsilon = b e_0^{\lambda t} \quad \tau = c e_0^{\lambda t},$$

worin (zum Unterschiede von  $e$ )  $e_0$  die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Die Einsetzung ergibt für  $\lambda$  nach Kürzung mit  $\lambda^2$  die biquadratische Gleichung

$$\lambda^4 + 2 B \omega_0^2 \lambda^2 + C \omega_0^4 = 0 \quad \dots \quad (10),$$

worin

$$\left. \begin{aligned} B &= 2 - \delta - \frac{1}{2} \frac{(1-\delta)^2}{\delta} \nu^2 \\ C &= \delta^2 - \frac{(4-\delta)(1-\delta)^2}{\delta} \nu^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nu^2 &= \frac{m e^2}{\Theta} = \frac{e^2}{q^2} \\ q &= \text{Trägheitsradius} \end{aligned} \quad \dots \quad (11),$$

bedeuten. Das Gleichgewicht ist stabil, falls die Größen  $z, \varepsilon, \tau$  für die ganze Dauer der Bewegung klein bleiben; es darf mithin  $\lambda$ , wenn reell, nicht positiv werden, wenn komplex, muß der reelle Teil negativ sein. Dies erheischt<sup>1)</sup>, daß

$$B > 0 \quad C > 0 \quad B^2 - C > \dots \quad (12)$$

sei. Für kleine Werte von  $\delta$  darf man die Bedingungen näherungsweise ersetzen durch die eine, daß

$$\delta^3 > 4 \nu^2 \quad \dots \quad (13).$$

Ist das Verhältnis des Trägheitsradius zur Exzentrizität  $e$  sehr groß, so wird  $\nu^2$  einen sehr kleinen Wert haben, und die Stabilität wird schon bei ganz kleiner Ueberschreitung der kritischen Geschwindigkeit vorhanden sein. Dies ist der praktisch ausnahmslos eintretende Fall. Ist aber das Trägheitsmoment verschwindend klein,  $\Theta = 0$ , so ist das Gleichgewicht überhaupt unstabil, es sei denn, daß gleichzeitig  $e = 0$  wird. Die Größe des Trägheitsmomentes ist mithin von ausschlaggebender Bedeutung und muß bei Veranstaltung von Versuchen inbetracht gezogen werden<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> s. Routh, Dynamik II § 289.

<sup>2)</sup> Sanford A. Moss. hat in einer der »Cornell-University« in Ithaca vorgelegten Doktorarbeit (gedruckt im Mai 1903) nach der Veröffentlichung obiger Untersuchung durch die Annahme  $e = \infty$  unendlich klein, die Rechnung vereinfachen zu können geglaubt. Die Endformeln zu welchen Sanford gelangt sind indessen mit Rechenfehlern behaftet.

Auch die Stabilität der gleichmäßig belasteten Welle kann auf dieselbe Weise untersucht werden. Man kann z. B., um die Rechnung zu vereinfachen, annehmen, daß sich die Exzentrizität nach einer Sinusfunktion ändert, sodafs

$$e = e_m \sin kx$$

ist und der Koordinatenanfang in dem einen Ende der Welle liegt, wobei  $k = \frac{\pi}{l}$  und  $l$  die Wellenlänge ist. Die Schwerpunkte aller Scheiben mögen in einer Ebene liegen; die Masse  $m_1$  pro Längeneinheit sei unveränderlich. Es ist notwendig, auf die Wellendurchbiegung nicht nur in der Ebene der Schwerpunkte, sondern auch senkrecht dazu Rücksicht zu nehmen. Die Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichungen gelingt für den Fall, daß man eine solche Schwingung um die Gleichgewichtslage inbetracht zieht, bei welcher die Welle nur Biegungen, aber keine Verdrehung erfährt, und für die Annahme, daß das auf die Längeneinheit bezogene Trägheitsmoment  $\Theta_1$  der Scheiben dem Gesetze  $\Theta_1 = \Theta_m \sin^2 kx$  gehorcht. Wenn wie vorhin

$$\delta = 1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)^2 \text{ und } \nu = \frac{m_1 e^2}{\Theta_m}$$

gesetzt wird, so gelten, in diesen Größen ausgedrückt, genau dieselben Stabilitätsbedingungen wie für die einfache Scheibe von der Masse  $m_1$  und dem Trägheitsmoment  $\Theta_m$ . Die Rechnung ist indessen zu umständlich, um hier wiedergegeben zu werden.

#### 41. Kritische Geschwindigkeit zweiter Art, hervorgebracht durch die Biegung der glatten Welle unter ihrem Eigengewicht.

Eine über den Stützen  $A_1 B_1$ , Fig. 106, wagerecht frei aufliegende Welle wird sich in der Ruhelage unter dem Einflusse ihres Eigengewichtes durchbiegen. Versetzen wir die Welle in sehr langsame Drehung, so bleibt diese Form un-

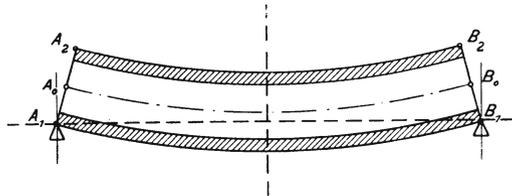


Fig. 106.

geändert, indem die gedrückte obere Faser  $A_2 B_2$  Zeit hat, den Biegespannungen zu folgen und sich so zu dehnen, daß sie nach einer halben Umdrehung die Länge  $A_1 B_1$  angenommen



Welle in  $P_0$  schneidet. Wir erteilen dem abgeschnittenen Wellenstück eine Rotation um  $OO_1$  in gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung wie  $\omega$ , d. h. wir betrachten die Relativ-Bewegung der Welle gegenüber einem um  $OO_1$  mit  $\omega$  rotierenden Raume. Hierdurch gelangt der Mittelquerschnitt  $O$  zur Ruhe, während Querschnitt  $P_0$  eine Translationsbewegung beginnt und sein Schwerpunkt einen mit  $O_1$  konzentrischen Kreis beschreibt. Um den gleichen Winkel  $\varphi$  wie  $O_1P_0$  dreht sich auch die Richtung der Schwerkraft, zu welcher wir noch die Ergänzungskräfte der Relativbewegung hinzufügen müssen. Letztere ergeben (s. Fig. 108), auf eine zur Achse senkrechte Scheibe von der Dicke  $dx$  und der Masse  $dm$  bezogen, was die negative Systembeschleunigung anbelangt, die radial auswärts gerichtete resultierende Kraft  $dmr\omega^2$  am Schwerpunkt. Die Coriolische Kraft gibt  $2dmv_r\omega = 2dmr\omega^2$  radial einwärts ebenfalls am Schwerpunkt, im ganzen also die zentripetale Kraft  $dmr\omega^2$ , durch welche die gleichmäßige Rotation des Schwerpunktes der als frei gedachten Scheibe um  $O_1$  unterhalten wird. Die Schwerkraft hat mithin nur noch die periodische elastische Durchbiegung zu bewirken. — Wir zerlegen die Kräfte wie auch die radiale Auslenkung  $r$  in

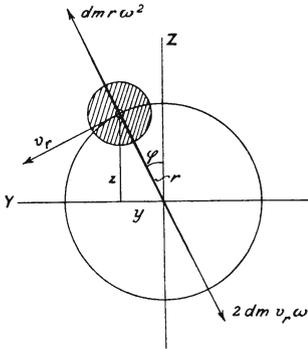


Fig. 108.

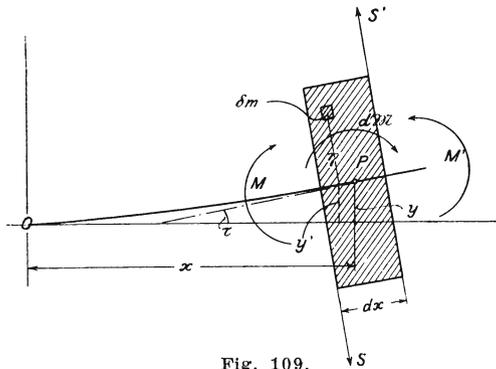


Fig. 109.

vertikale und horizontale Komponenten, und behandeln die Bewegung getrennt in den Ebenen  $XO_1Y$  und  $XO_1Z$ . In Fig. 109 findet sich die Projektion der Welle auf die  $XO_1Y$ -Ebene, insbesondere auch die erwähnte unendlich dünne

Scheibe mit den auf ihre Endflächen wirkenden Biegemomenten und Schubkräften. Die d'Alembertschen Trägheitskräfte bestehen für ein Massenteilchen  $dm$  in der zur  $Y$ -Ache parallelen Kraft  $- dm \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}$  oder in der Grenze  $= - dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  und in der horizontalen Kraft

$$- \partial m \eta \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} :$$

wenn  $\tau = \partial y : \partial x$  den sehr kleinen Neigungswinkel der Tangente,  $\eta$  den Abstand von der neutralen Achse bezeichnet. Erstere liefern die Resultierende  $dP = - dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , letztere das resultierende Moment

$$dM = - \Sigma dm \eta^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = - \mu dx J \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \quad (1),$$

wenn  $\mu$  die spezifische Masse,  $J$  das Flächenträgheitsmoment in bezug auf die im Schwerpunkt  $P$  zu  $Z$  parallele Achse bedeutet. Setzt man die Summe der vertikalen Kräfte  $= 0$ , so folgt

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial x} dx - dm r \omega^2 \sin \varphi - g \mu f dx \sin \varphi \quad (2)$$

und aus der Nullsetzung der Momente für  $P$ :

$$\mu J \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x} + S \quad . \quad . \quad . \quad (2a).$$

Da indessen, wie angegeben, die Beschleunigung des Schwerpunktes schon durch die Zusatzkraft  $dm r \omega^2$  allein hervorgebracht wird, so gilt von vornherein

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - dm r \omega^2 \sin \varphi$$

und Gl. (2) liefert

$$\frac{\partial S}{\partial x} = + \mu g f \sin \varphi.$$

Differentiieren wir (2a) nach  $x$  und setzen wir diesen Wert ein, so folgt mit der Bezeichnung

$$\mu f g = - \gamma_1 \quad \text{und mit } \varphi = \omega t,$$

sowie

$$M = J E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \mu \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma_1}{J} \sin \omega t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz

$$y = u \sin \omega t,$$

worin  $u$  bloße Funktion von  $x$  ist, integriert, und erhält mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen  $y = 0$  für  $x = 0$  und

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$  für  $x = l$ , d. h. für den frei aufliegenden Stab von der Länge  $2l$  die Form

$$y = \left[ a(1 - \cos \lambda t) + \frac{\gamma_1}{\mu J \omega^2} \frac{x^2}{2} \right] \sin \omega t \quad (4),$$

wenn wir uns, um die tiefste kritische Tourenzahl dieser Art zu erhalten, auf den Fall symmetrischer Deformation beschränken.

Hierin ist

und

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{\mu \omega^2}{E} \\ a &= \frac{\gamma_1}{\mu J \omega^2 \cos(\lambda l)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4a).$$

Eine vollkommen gleichartige Formel würde sich für die Auslenkung in der  $XO_1Z$ -Ebene ergeben mit  $\cos \omega t$  anstelle von  $\sin \omega t$ . Die Zusammensetzung der Koordinaten  $y$  und  $z$  zu  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  führt zum wahren Abstände eines Wellenpunktes von der Achse  $X$ .

Es ergibt sich  $a = \infty$ , also  $y$  und mithin auch  $r = \infty$ , d. h. die kritische Umlaufzahl tritt ein, wenn  $\cos(\lambda l) = 0$ , d. h.

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} \dots 3 \frac{\pi}{2} \dots 5 \frac{\pi}{2} \dots$$

Der kleinste Wert der kritischen Geschwindigkeit ist

$$\omega_k = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \dots \dots \dots (5)$$

wie vorausgesagt unabhängig vom Wellendurchmesser, und glücklicherweise so hoch, daß er nur bei sehr langen Wellen Bedeutung gewinnen könnte.

Man kann im übrigen leicht nachweisen, daß die Dauer der freien Longitudinalschwingung eines Stabes von der Länge  $2l$  übereinstimmt mit der Dauer einer Umdrehung bei der Geschwindigkeit  $\omega_k$ <sup>1)</sup>.

Bedeutend tiefer rückt diese kritische Geschwindigkeit bei einer durch dichtgestellte Scheiben belasteten Welle,

<sup>1)</sup> Es ist nämlich die Differentialgleichung der Longitudinalschwingung eines geraden prismatischen Stabes

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

worin  $\xi$  die Verlängerung des Stabes bedeutet. Setzt man  $\xi = \mu \cos \omega t$ , wo  $\mu$  nur von  $x$  abhängt, so ergibt sich, daß das Ende des Stabes spannungslos bleibt, d. h. daß die Schwingung eine freie ist, falls

$$\lambda^2 = \frac{\mu \omega^2}{E}, \text{ wie oben.}$$

indem die Scheiben den Trägheitswiderstand der Welle gegenüber Schwingungen um eine zur Drehachse senkrechte Gerade sehr stark vergrößern. Gl. (1) wird hier lauten:

$$d\mathfrak{M} = \mu dx (J + J') \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \dots \dots (6),$$

worin  $\mu J'$  das auf die Längeneinheit der Welle bezogene Massen-Trägheitsmoment der Scheiben bezogen auf eine zur Welle senkrechte Achse bedeutet. In Gl. (2) ist gleicherweise anstelle von  $\mu g f$  zu setzen  $\mu g (f + f')$  wobei man unter  $\mu g f'$  das Gewicht der Scheiben pro Längeneinheit der Achse zu verstehen hat. Führt man die Integration in gleicher Weise durch, so ergibt sich für die frei aufliegende Welle von der Länge  $2l$  die kritische Geschwindigkeit

$$w_k = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\mu \left(1 + \frac{J'}{J}\right)}} \dots \dots (7)$$

Die Wirkung der Scheiben ist mithin die gleiche, als wäre die spezifische Masse der Wellenmaterials im Verhältnisse  $(J + J') : J$  vergrößert worden.

Auch diese Geschwindigkeit liegt im allgemeinen sehr hoch über der kritischen Geschwindigkeit erster Art. Es folgt mithin, daß die kritische Umlaufzahl zweiter Art für praktische Ausführungen außer betracht fallen kann, daß also der Konstrukteur nicht in ihrem Vorhandensein einen Grund für das unter Umständen unbefriedigende Verhalten seiner Wellen zu suchen braucht.

**42. Die Differentialgleichung für die Druckverteilung in der vielstufigen achsialen Ueberdruckturbine.**

Während der Entwurf einer neuen Turbine, sobald man die Grundbegriffe beherrscht, wenig Mühe verursacht, ist umgekehrt die Voraussage, wie sich dieselbe Turbine bei einer wesentlich verschiedenen Belastung verhalten werde, eine kaum zuverlässig zu lösende Aufgabe. Im letzteren Falle sind eben die Umfangsgeschwindigkeit, die Winkel und die Querschnitte gegeben, aus welchen die absolute Größe und

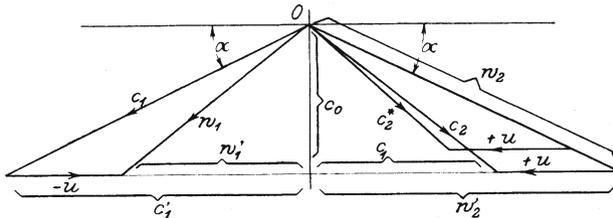


Fig. 110.

die Verteilung der Drücke zu suchen sind. Es gelingt indessen auf rechnerischem Wege in bestimmten vereinfachten Fällen, eine gewisse Einsicht in die Vorgänge zu erhalten, welche vielleicht der Mitteilung wert ist.

In Fig. 110 sei der Geschwindigkeitsplan irgend eines Rades dargestellt.  $c_2^*$  sei die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf das vorhergehende Laufrad verläßt. Die Grundgleichungen für das Leit- und das Laufrad schreiben wir gemäß Formel 3c in der Form

$$\frac{c_1^2 - c_2^{*2}}{2g} = - \int_p^{p'} v dp - R_1,$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_{p'}^{p''} v dp - R_2.$$

Die Addition ergibt

$$\frac{c_1^2 - c_2^{*2}}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_p^{p''} v dp - R \quad (1).$$

Um den Reibungsverlusten  $R$  Rechnung zu tragen, multiplizieren wir das Integral mit einem Faktor  $\varepsilon$ , welcher kleiner als 1 ist und für alle Turbinenräder als gleich angesehen wird. Man bestimmt  $\varepsilon$  so, daß die Summe der Reibungsarbeit der ganzen Turbine richtig wiedergegeben wird, d. h. man setzt etwa  $\varepsilon = 0,75$  bis  $0,60$ . Die angenommene Unveränderlichkeit dieser Größe beeinflusst dann nur die Verteilung der Widerstände. Beim Uebergange von einem Belastungsfall zu einem andern wird  $\varepsilon$  freilich wegen veränderter Geschwindigkeiten und nicht stoßfreien Dampfeintrittes streng genommen auch seinen Wert ändern.

Auf der linken Seite ersetzen wir vorläufig  $c_2^*$  durch das etwas größere  $c_2$  und schreiben:

$$c_1^2 = c_1'^2 + c_a^2; \quad c_2^2 = c_2'^2 + c_a^2; \quad w_1^2 = w_1'^2 + c_a^2; \quad w_2^2 = w_2'^2 + c_a^2,$$

lösen alsdann die Differenz der Quadrate auf und erhalten für die linke Seite

$$\frac{1}{2g} [(c_1' + c_2')(c_1' - c_2') + (w_2' + w_1')(w_2' - w_1')],$$

welcher Ausdruck wegen der Gleichheit der Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , weil  $w_2 = c_1$ ,  $w_1 = c_2$  ist, die Form

$$\frac{u}{g} (2c_1 \cos \alpha - u)$$

erhält. Da hier wegen des zu großen  $c_2$  ein zu kleiner Wert vorliegt, multiplizieren wir mit einem Faktor  $\delta > 1$ , der auch als konstanter Mittelwert eingeführt wird, übrigens von 1 wenig verschieden sein wird. Das Integral auf der rechten

Seite kann bei dem geringen Druckunterschiede  $p - p''$  nach dem Mittelwertsatz auf die Form

$$-\int_p^{p''} v dp = -v(p'' - p)$$

vereinfacht werden. Tragen wir die Anfangsdrücke zu jedem Turbinenrade wie vorhin als Ordinaten in den Abständen  $\Delta x$  auf, und verbinden wir die erhaltenen Punkte durch eine stetige Linie, so ist näherungsweise  $\frac{p'' - p}{\Delta x}$  durch den Differentialquotienten  $\frac{dp}{dx}$  ersetzbar. Es wird mithin

$$-\int_p^{p''} v dp = -v \frac{p'' - p}{\Delta x} \Delta x = -v \frac{dp}{dx} \Delta x \quad (2).$$

Wir führen nun als Unabhängige die Größe

$$z = \frac{x}{\Delta x} \quad (3)$$

ein, welche, wie ersichtlich, sofern wir solche Abszissenlängen  $x$  wählen, daß  $z$  ganzzahlig wird, die Zahl der jeweils durchlaufenen Turbinen darstellt. Es wird nun

$$\frac{dp}{dx} \Delta x = \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dx} \Delta x = \frac{dp}{dz}$$

Die Hauptgleichung (138) lautet somit:

$$-\varepsilon v \frac{dp}{dz} = \delta \frac{u}{g} (2c_1 \cos \alpha - u) \quad (4),$$

und bildet die Differentialgleichung<sup>1)</sup> unseres Problems. Um

<sup>1)</sup> Man kann diese Gleichung auch zur Lösung der interessanten Aufgabe verwenden, eine Turbine mit konstantem Durchströmungsquerschnitt für alle Räder zu entwerfen.

Aus  $(p + \beta) v = K$   
 und  $Gv = f_1 c_1$ ,  
 folgt  $p + \beta = \frac{K}{v} = \frac{KG}{f_1 c_1} \quad (1)$

folgt. Wir führen vorübergehend die neue Veränderliche

$$y = \frac{1}{c_1}$$

ein und erhalten unter Voraussetzung, daß  $f_1 = \text{konst.}$ ,

$$-\frac{dy}{dz} = \frac{\delta u^2}{\varepsilon K g} \left( \frac{2 \cos \alpha}{u} - y \right) \quad (2),$$

woraus sich, wenn auch  $u = \text{konst.}$  gedacht wird,

eine Integration möglich zu machen, müssen wir die Zustandsgleichung des Dampfes in der vereinfachten Form

$$\ln \left( \frac{\frac{2 \cos \alpha}{u} - y}{\frac{2 \cos \alpha}{u} - y_a} \right) = \frac{\delta u^2}{Kg \varepsilon} z \dots \dots \dots (3)$$

ergibt, mit  $y_a$  der Anfangswert von  $y$  bezeichnet.  
Die Auflösung ergibt

$$y = \frac{2 \cos \alpha}{u} - \left( \frac{2 \cos \alpha}{u} - y_a \right) e^{\frac{\delta u^2}{Kg^2} z} \dots \dots (4).$$

Da im allgemeinen bis zu 10, ja 20 Stufen der Exponent erheblich kleiner als 1 zu sein pflegt, so können wir entwickeln und höhere Potenzen vernachlässigen. Wenn wir mit  $c_{1a}$  und  $c_{1z}$  die erste und letzte Eintrittsgeschwindigkeit  $c_1$  bezeichnen, so entsteht die vereinfachte Formel

$$c_{1z} = \frac{c_{1a}}{1 - \frac{2 \cos \alpha u c_{1a} \delta}{\varepsilon Kg} z} \dots \dots \dots (5).$$

Man kann die Turbine auch in Gruppen von  $z_1, z_2 \dots$  usw. Rädern teilen mit je konstantem Querschnitt, und erhält für jede Gruppe die Endgeschwindigkeit  $c_{1e}$ , aus dem ersten willkürlichen Werte  $c_{1a}$  berechnet. Die Zwischenwerte müssen sich nach hyperbolischem Gesetze ändern. Da die Formel indes nur eine Annäherung darstellt, so müßte zum Schluß doch nach dem allgemeinen Verfahren eine Kontrolle durchgeführt werden.

Der Turbinenkonstrukteur, dem genauere Beobachtungswerte von ausgeführten Turbinen zugebote stehen, kann bei einem neuen Entwurf die Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit noch weiter treiben, indem er aus dem ersten Entwurf die Werte der Drücke und der spezifischen Volumen für den Ein- und Austritt einzelner aufeinander folgender Gruppen entnimmt, die Kontinuitätsgleichungen

$$G = \frac{f_{1a} c_{1a}}{v_{1a}} = \frac{f'_{1a} w_{1a}}{v_{1a}} = \frac{f'_{2a} w_{2a}}{v_{2a}} = \frac{f_{1b} c_{1b}}{v_{1b}} = \dots \dots$$

aufstellt (in welchen zusammengehörende Querschnitte und Geschwindigkeiten gleich bezeichnet sind) und hieraus die genaueren Werte  $c_{1a}, w_{1a}, w_{2a}, c_{2a}, c_{1b}, w_{1b}, \dots$  berechnet. Mit diesen Werten ergeben

$$h_b = \frac{c_{1b}^2 - c_{2a}^2}{2g} + \frac{w_{2b}^2 - w_{1b}^2}{2g}$$

$$h_c = \frac{c_{1c}^2 - c_{2b}^2}{2g} + \frac{w_{2c}^2 - w_{1c}^2}{2g}$$

.....

die genaueren Beträge der einzelnen »Gefällhöhen«, mit welchen man den Mittelwert  $h_m$  berichtigt und die genauere Stufenzahl  $z_0$  berechnet. Auch der etwas größere Abfall beim Uebergang vom letzten Rade einer Gruppe zum ersten Rade der nächst größeren muß beachtet werden. Schliesslich kann bei der Parsonsschen Ausführung die durch die Entlastungskolben abströmende Dampfmenge in geeigneter Verkleinerung von  $G$  an der betreffenden Stelle berücksichtigt werden.

$$(p + \beta)v = K \dots \dots \dots (5)$$

voraussetzen, welche sich für unsere Zwecke genügend genau der Wirklichkeit anpassen läßt. Wir beseitigen  $c_1$  durch die Kontinuitätsgleichung

$$Gv = fc_1 \dots \dots \dots (6)$$

und erhalten

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{p + \beta}{G} \right) - \frac{\delta u^2}{\epsilon K g} \frac{(p + \beta)}{G} + \frac{2 \delta \cos \alpha}{\epsilon g} \frac{u}{f} = 0 \dots (7).$$

Hierin sind

$$\begin{aligned} \frac{\delta u^2}{\epsilon K g} &= q(z) \\ \frac{2 \delta \cos \alpha}{\epsilon g} \frac{u}{f} &= \psi(z) \end{aligned}$$

gegebene (etwa durch Zeichnung dargestellte) Funktionen von  $z$ , und das allgemeine Integral von (7) ist stets ermittelbar. Setzen wir

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= e^{\int_0^z q(z) dz} \\ \Psi(z) &= \Phi(z) \int_0^z \frac{\psi(z)}{\Phi(z)} dz, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke gegebenenfalls graphisch zu ermitteln wären, so ist

$$\frac{p + \beta}{G} = C\Phi(z) - \Psi(z)$$

mit  $C$  als willkürlicher Konstante. Das im allgemeinen erlaubte Einführen der bestimmten Integration ergibt einfache Werte an den Grenzen.

Für  $z = 0$  soll  $p = p_1$  sein, d. h.

$$\frac{p_1 + \beta}{G} = C\Phi(0) - \Psi(0).$$

Da aber  $\Phi(0) = 1$ ,  $\Psi(0) = 0$ , so erhalten wir

$$C = \frac{p_1 + \beta}{G}$$

und

$$\frac{p + \beta}{G} = \frac{p_1 + \beta}{G} \Phi(z) - \Psi(z) \dots \dots (8).$$

Für  $z = z_0$ , der Gesamtzahl der Turbinen, ist  $p = p_2$ ; es ergibt mithin Gl. (8)

$$G = \frac{(p_1 + \beta)\Phi(z_0) - (p_2 + \beta)}{\Psi(z_0)} \dots \dots (9).$$

Da  $\Phi(z_0)$  stets  $> 1$  und  $\beta$  meist eine kleine Größe ist, so kann man näherungsweise

$$G = p_1 \frac{\Phi(z_0)}{\Psi(z_0)} \left\{ \dots \right. \quad (10)$$

und

$$p = p_1 \left[ \Phi(z) - \frac{\Phi(z_0)}{\Psi(z_0)} \Psi(z) \right]$$

schreiben, aus welchen Formeln der Satz hervor geht:  
 Das sekundlich durchströmende Dampfgewicht und der Druck an irgend einer Stelle der Turbine sind näherungsweise (für nicht zu weite Grenzen) dem Anfangsdrucke im ersten Leitrade proportional. Das eintretende sekundliche Dampfvolumen ist  $Gv_1 = \text{konst. } p_1 v_1$ , mithin auch angenähert konstant, woraus folgt, daß die Dampfgeschwindigkeit in den ersten Turbinen sich mit der Belastung nur wenig ändert. Die letzte Austrittsgeschwindigkeit, und mit ihr der Auslaßverlust, nimmt hingegen mit der Dampfmenge gleichmäÙig ab.

Der Einfluß einer Veränderung von  $u$  ist nicht so übersichtlich. Arbeiten wir ursprünglich mit der Geschwindigkeit  $u$ , Fig. 111, und gehen wir zu dem größeren  $u'$  über, so muß  $c_1$  abnehmen, da bei gleichbleibendem  $c_1$  die Gefällhöhe

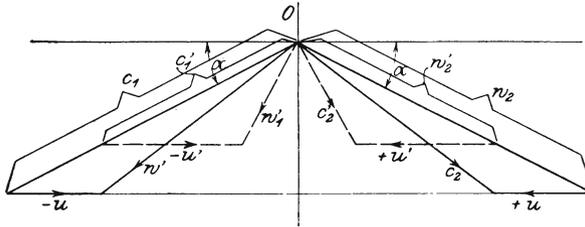


Fig. 111.

$$h = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}$$

zu groß würde, und der Vakuumdruck  $p_2$  weit früher als nach dem letzten Laufrade sich einstellen würde. Demgemäß müÙte auch  $G$  abnehmen. Hierbei würde wegen der im Durchschnitte kleineren Strömungsgeschwindigkeit die Dampfreibung abnehmen, der Wirkungsgrad zunehmen. Ueber die Grenze hinaus, bei welcher  $c_2$  achsial gerichtet ist, wird auch  $G$  wieder zunehmen.

Ebenso müssen bei abnehmender Umfangsgeschwindigkeit  $c_1$  und  $G$  zunehmen, indes nicht, wie es den Anschein hätte, ohne Grenzen, da bei solcher Folgerung der Druckunterschied, welcher zur Erzeugung der ersten Eintrittsgeschwindigkeit  $c_1$  notwendig ist, übersehen würde. Bei ganz kleinen Umfangsgeschwindigkeiten zehrt aber dieser Eintrittsfall einen bedeutenden Teil des Druckes auf, sodafs im Verein mit der Wirkung der vermehrten Widerstände die Steigerung von  $G$  nicht bedeutend zu sein braucht.

### 43. Leerlauf und Grenzgeschwindigkeit der vielstufigen Turbine.

Als Leerlauf bezeichnen wir den Betriebszustand der vollkommen entlasteten, aber der Herrschaft ihres Regulators unterworfenen, d. h. mit angenähert normaler Umlaufzahl rotierenden Turbine.

Der Speisewasserverbrauch der Parsons-Turbine stellt sich im Leerlauf auf 10 bis 20 vH des normalen, wie aus folgender Tabelle, in der die unten zu besprechenden Versuche Stoneys zusammengestellt sind, hervorgeht.

Zahlentafel 3.

Dampfverbrauch der Parsons-Turbine im Leerlauf.

Leistung . . . KW	52,7	108	232	529	1190
zugehöriger Dampfverbrauch . . kg/st	671	1320	2304	5454	10485
Verbrauch im Leerlauf . . . kg/st	145	136	431	670	1183
Verbrauch im Leerlauf . . . vH	21,6	10,3	18,7	12,3	11,3

Das Einströmungsvolumen ist im Durchschnitt größer als bei der Normalleistung; dasselbe Verhältnis besteht für die Eintritt-Dampfgeschwindigkeit. Die Austrittsgeschwindigkeit ist normal 2- bis 3 mal größer als am Eintritt, im Leerlauf hingegen nur etwa  $\frac{1}{10}$  davon. Die mittlere Geschwindigkeit im Leerlauf wird also 0,6 oder 0,4 der normalen betragen, und in entsprechender Weise nehmen die Dampfreibungsverluste ab. Der thermische Wirkungsgrad, bezogen auf die reine Dampfarbeit, ist größer. Aus dieser Sachlage ergeben sich für die Elberfelder Turbine die schon oben mitgeteilten Folgerungen für die möglichen Grenzen der Leerlaufarbeit<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Man hat wiederholt in der Darstellung des Dampfverbrauches als Funktion der Zeit durch die Verlängerung der Dampfverbrauchslinie den Schnittpunkt  $O_1$ , Fig. 112, ermittelt und  $OO_1$  als Leerlaufarbeit angesehen, was vollständig unrichtig ist. Wenn bei Gleichheit des Druckes vor und hinter dem Motor kein Dampf durch die Turbine strömt, wird ja gewiss auch keine Dampfarbeit geleistet. Allein unmittelbar vorher muß eine Strömung vorhanden sein, bei welcher, um die nur verschwindend kleine Leistung zu übertragen, ein Geschwindigkeitsdiagramm wie Fig. 113 mit fast zusammenfallenden Geschwindigkeiten  $c_1, c_2$  und  $w_1, w_2$  vorhanden sein muß, d. h. es muß  $c_1$  und mithin auch  $G$  einen endlichen Wert haben. Dies geht auch aus unserer Grundgleichung hervor:

$$-v \frac{dp}{dz} = \frac{\delta \mu}{\epsilon g} (2 c_1 \cos \alpha - u),$$

in der wir für die unmittelbare Nähe der Nulleistung (da Druck und

Wird die vollbelastete Turbine plötzlich entlastet und versagt der Regulator, so »brennt« die Maschine, wie man sagt, durch und erreicht eine gewisse Grenzgeschwindigkeit. Die Dampfleistung wird anfänglich zunehmen, weil der Wirkungsgrad ebenfalls solange wächst, bis die Umfangsgeschwindigkeit so groß geworden ist, daß der achsiale Aus-

Gegendruck nahezu gleich sein werden)  $v$  als Konstante einführen können. Mit  $Gv = f c_1$  erhalten wir

$$\frac{dp}{dz} = -G\varphi'(z) + \psi'(z),$$

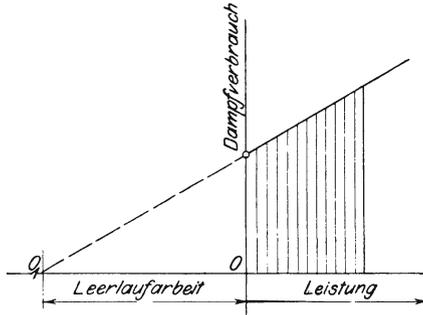


Fig. 112.

und  $\varphi'$ ,  $\psi$  sind stets positive Funktionen. Durch unmittelbare Integration ergibt sich

$$p = -G_1(z) + \psi(z) + C,$$

und aus der Bedingung  $p = p_1$  für  $z = 0$  und  $p = p_2$  für  $z = z_0$  folgt

$$p_2 - p_1 = -K_1 G + K_2$$

wo  $K_1, K_2$  positive Konstanten.

Die übertragene Leistung kann man aber dem Druckunterschiede  $p_1 - p_2$  proportional setzen, sodafs

$$N = K_3 G(p_1 - p_2)$$

ist. Setzen wir  $(p_1 - p_2)$  oben ein, so erhalten wir

$$- \frac{N}{K_3 G} = -K_1 G + K_2$$

oder

$$N = +K_1 K_3 G^2 - K_2 K_3 G,$$

d. h. im Punkte  $N = 0$  verschwindet  $G$  nicht. Es wird  $G$  durch eine Parabel mit einer im Anfangspunkt schrägen Tangente dargestellt, Fig. 114.

Stodola.

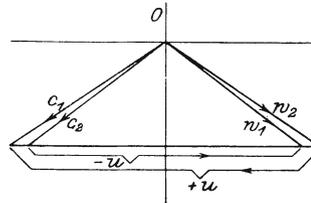


Fig. 113.

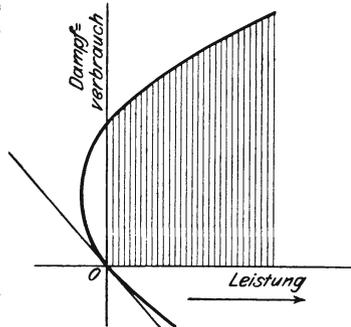


Fig. 114.

tritt aus den Laufrädern erreicht ist. Gleichzeitig nimmt die Reibungsarbeit der Räder gegen das Gehäuse rasch zu und begrenzt die sonst erreichbare Geschwindigkeit in hohem Maße. Angenommen, die letztere Dampfreibung mache normal 5 vH der Nennleistung aus und wachse mit der dritten Potenz der Umlaufzahl. Dann würde die volle

Leistung der Turbine abgebremst bei einer auf das  $\sqrt[3]{\frac{100}{5}}$  = 2,7-fache gesteigerten Umlaufzahl. Nehmen wir, um eine andere Grenze zu erhalten, an, diese besondere Reibungsarbeit sei vernachlässigbar, so würde das Geschwindigkeitsdiagramm die ungefähre Form der Fig. 113 darbieten, d. h.  $w_1$  und  $w_2$  wären nahezu gleich groß und gleich gerichtet; ebenso  $c_1$  und  $c_2$ . Der Dampfeintritt in die Lauf- (und die Leitschaufel) erfolgt mit der in Fig. 115 dargestellten außerordentlich starken

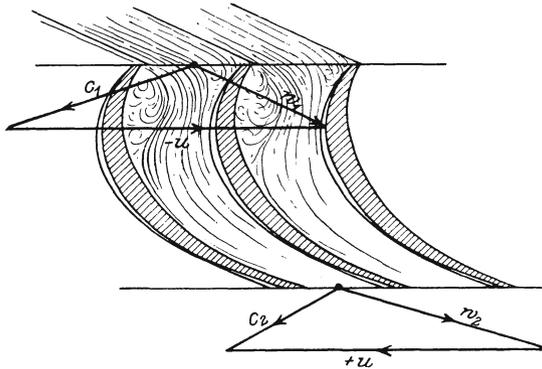


Fig. 115.

Ablenkung, sodass die Wirbelungswiderstände fast das ganze Gefälle aufzehren und nur eine geringfügige Arbeit auf das Rad übertragen wird. Ohne entsprechende Versuche lässt sich freilich das neue  $c_1$  schwer schätzen; nehmen wir es gleich groß wie im Normalbetrieb an, so würde die Umfangsgeschwindigkeit Werte bis zum 5- und 6fachen der normalen annehmen können. Da die Inanspruchnahme der rotierenden Teile im quadratischen Verhältnis der Umlaufzahl zunimmt, so bestehen nur geringe Aussichten (auch wenn man den ersten Fall in Rücksicht zieht), die vielstufige Turbine so zu bauen, dass sie ein »Durchbrennen« ohne ernstliche Gefährdung ertragen könnte.

## Abteilung III.

### Die Aussichten der Wärmekraftmaschinen.

#### 44. Das Perpetuum mobile erster Art.

Eine Maschine, die aus nichts Arbeit schafft oder mehr Arbeit liefert als ihr in irgend einer (z. B. latenten) Form zugeführt wurde, ist unmöglich. Die Unmöglichkeit dieses sogenannten Perpetuum mobile (und zwar der »ersten Art« zum Unterschiede von dem weiter unten zu besprechenden der »zweiten Art«) wurde von der Wissenschaft vor mehr als einem Jahrhundert vorausgeahnt, erhielt aber seine tiefer gehende Begründung erst durch das von Meyer, Joule und Helmholtz aufgestellte Prinzip von der Erhaltung der Energie. Dies Prinzip bildet heute die unerschütterte Grundlage der gesamten Naturwissenschaft, also auch des Maschinenbaues.

#### 45. Das Perpetuum mobile zweiter Art und der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

So oft Wärme als solche verschwindet, muß im Sinne des Energieprinzipes eine ihr äquivalente Energiemenge anderer Form, z. B. mechanische Arbeit, auftreten. Allein diese Umwandlung ist nicht unbeschränkt und nicht nach Willkür durchzuführen. Sie ist vielmehr in erster Linie an das Vorhandensein eines Temperaturgefälles und Wärmeabgabe an das tiefere Temperaturniveau gebunden. Der Wärmehalt des Meeres, der Atmosphäre des ganzen Erdballs stellt einen ungeheuren Vorrat dar, und zahlreiche Erfinder haben sich mit dem Problem beschäftigt, diese Wärme die dem Menschen kostenlos zur Verfügung steht, ohne Zuhilfenahme eines tieferen Temperaturniveaus, dessen Beschaffung eben praktisch unmöglich ist, in Arbeit umzuwandeln. Eine Maschine, die die Umwandlung der Wärme in Arbeit unter Abkühlung eines gegebenen Wärmebehälters ohne jede anderweitige Aenderung der Umgebung zu vollbringen vermöchte, wird nach Ostwald perpetuum mobile zweiter Art genannt.

Wenn auch die bezeichneten Wärmevorräte streng genommen nicht unendlich groß sind, so wird doch durch die stets auftretende Reibung und sonstige Verlustquellen immer

wieder mechanische Arbeit in Wärme zurückverwandelt und die von Ostwald gewählte Bezeichnung erscheint berechtigt.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt nun aus, daß auch das Perpetuum mobile zweiter Art, und zwar selbst bei Verwendung idealer, d. h. reibungsfreier, wärmeundurchlässiger Maschinen<sup>1)</sup>, unmöglich ist.

Die Begründung des Satzes ist nur eine mittelbare, d. h. die aus demselben gezogenen Folgerungen sind bis jetzt durch die Wirklichkeit ausnahmslos bestätigt worden. Es ist aber rein logisch nicht ausgeschlossen, daß eine neue Entdeckung die Allgemeinheit des Satzes aufhebt, und so kommt ihm streng genommen nur der Charakter einer Hypothese zu. Die völlig falsche Auffassung von der Art, wie ein Naturgesetz »bewiesen« werden müsse, verleitet viele Erfinder an Ideen festzuhalten, die in offenem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz stehen, indem sie gerne ihre jeweiligen Erfindungen als die Ausnahmen ansehen, welche seine Gültigkeit zu erschüttern berufen sind. Solchen Anschauungen gegenüber muß betont werden, daß auch das Energieprinzip nur induktiv erwiesen ist, d. h. daß wir nur soviel behaupten können, es habe sich bisher in allen beobachteten Fällen als gültig erwiesen. Der zweite Hauptsatz wurde ursprünglich von Clausius in etwas anderer Form nur für reine Wärmewandlung aufgestellt. Später haben aus demselben Gibbs, Helmholtz, van't Hoff und andere Schlußfolgerungen auf die Erscheinungen des chemischen Gleichgewichtes, des galvanischen Stromes, die Theorie der Lösungen gezogen, und glänzende wissenschaftliche Erfolge errungen, welche in unzähligen Fällen durch die Wirklichkeit bestätigt worden sind. So stellt sich der zweite Hauptsatz nunmehr als ein die Gesamtheit der Naturerscheinungen beherrschendes Prinzip dar, dem, naturwissenschaftlich gesprochen, derselbe Grad von Gewissheit zukommt, wie dem Satze von der Erhaltung der Energie. Deshalb darf die dringliche Mahnung an die Erfinder gerichtet werden, sie möchten es sich wohl überlegen, bevor sie Mittel an die Durchführung einer Idee wagen, die diesem Satze widerspricht. Doch muß anderseits betont werden, daß die Umwandlung der Wärme der Umgebung in mechanische Arbeit nicht an sich unmöglich ist. Es gibt galvanische Ketten, die mehr elektrische Energie liefern als der »Wärme-lösung« der sich chemisch bindenden Stoffmengen entspricht, wobei der Ueberschuss der Wärme der Umgebung entnommen wird. Auch bei Wärmemotoren scheint nach dem unten besprochenen Arbeitsverfahren von Friedenthal eine ähnliche

<sup>1)</sup> Der Zusatz, daß auch ideale Maschinen den angestrebten Zweck nicht ermöglichen könnten, ist, wie man weiter unten sehen wird, notwendig.

Möglichkeit vorzuliegen, die jedoch praktisch ohne jede Bedeutung ist. Es sei eben wiederholt, dafs sich das perpetuum mobile zweiter Art ausdrücklich auf Umwandlung der Umgebungswärme allein bezieht mit Ausschluß irgend welcher anderweitiger Aenderung, und dafs es in diesem Sinne als Unmöglichkeit anzusehen ist.

#### 46. Der Carnotsche Kreisprozefs.

Führen wir mit einem Körper beliebiger Art, welcher, um die Betrachtung allgemein zu gestalten, auch als ein Gemenge von chemisch aufeinander einwirkenden Stoffen vorausgesetzt werden darf, einen Prozefs aus, welcher aus einer adiabatischen Verdichtung von der Temperatur  $t_2$  auf die Temperatur  $t_1$ , einer isothermischen Ausdehnung bei der Temperatur  $t_1$  unter Zufuhr der Wärmemenge  $Q_1$ , aus einer adiabatischen Ausdehnung auf die Temperatur  $t_2$ , schließlic einer isothermischen Verdichtung bei der Temperatur  $t_2$  unter Entziehung der Wärme  $Q_2$  bis zum Erreichen des Anfangszustandes besteht und Carnotscher Prozefs genannt wird. Die Zustandsänderungen sollen umkehrbar erfolgen, d. h. die gleichmäßige Temperatur der Wärmebehälter, welche  $Q_1$  liefern und  $Q_2$  aufnehmen, darf nur um ein unendlich Kleines von der ebenfalls gleichmäßigen Temperatur des arbeitenden Körpers abweichen; die lebendige Kraft des Körpers, d. h. die Geschwindigkeit, mit der der Prozefs vor sich geht, muß vernachlässigbar klein sein. Schließlich wird vorausgesetzt, dafs die »Maschine«, in welcher unser Körper arbeitet, reibungsfrei ist. Während eines Umlaufes wird nun eine in Wärmemaß  $AL$  betragende äußere Arbeit geleistet, und es muß nach dem Energieprinzip

$$AL = Q_1 - Q_2$$

sein. Ein zweiter Körper möge denselben Prozefs zwischen denselben Temperaturgrenzen in umgekehrter Richtung durchlaufen, sein Gewicht sei so bemessen, dafs hierbei die nunmehr zu leistende Arbeit wieder gleich  $AL$  sei, während dem kälteren Wärmebehälter in diesem Fall die Wärme  $Q_2'$  entzogen und dem wärmeren die Wärme  $Q_1'$  mitgeteilt wird. Es gilt wieder

$$AL = Q_1' - Q_2',$$

somit

$$Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2' \text{ oder } Q_1' - Q_1 = Q_2' - Q_2.$$

Da die während des ersten Prozesses gewonnene äußere Arbeit durch den zweiten Prozefs gerade aufgezehrt wurde und beide Körper nach je einem Umlauf sich im Anfangszustande befinden, besteht die Wirkung des ganzen Vorganges darin, dafs eine gewisse Wärmemenge aus dem einen Behälter in den andern geschafft worden ist. Wäre  $Q_1' > Q_1$ ,

so würde die Differenz  $Q_1' - Q_1$  dem kälteren Behälter entnommen und in den wärmeren überführt worden sein. Dieser Ueberschufs würde in einem dritten »rechtsläufigen« Prozess eine Arbeit leisten können, und durch Wiederholung des Vorganges könnte man ununterbrochen Arbeit auf Kosten des kälteren Behälters allein, ohne dafs anderweitige Aenderungen aufträten, gewinnen. Dies aber ist ein Perpetuum mobile zweiter Art, also unmöglich. Dasselbe ergibt sich, wenn man  $Q_1' < Q_1$  voraussetzt, indem es nur notwendig ist, die Richtung der Prozesse 1 und 2 zu vertauschen, sodafs nur die Möglichkeit

$$Q_1 = Q_1', \text{ mithin auch } Q_2 = Q_2'$$

übrig bleibt<sup>1)</sup>. Durch Division folgt

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1'}{Q_2'}$$

d. h. dieses Verhältnis ist von der Natur des verwendeten Körpers unabhängig, wenn nur dieselben Temperaturgrenzen  $t_1, t_2$  eingehalten werden. Da über den Druck, das Volumen, den Aggregatzustand der Körper nichts vorausgesetzt wurde, kann das genannte Verhältnis nur von den Temperaturen abhängen, d. h. es muß

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2)$$

wo  $f$  eine noch unbekannte, für alle Körperarten gültige Funktion bedeutet. Die Gestalt derselben bestimmen wir mit Poincaré, indem wir Carnotsche Prozesse zwischen den Temperaturen  $t_0, t_1, t_2$  und zwischen denselben Adiabaten, und zwar in folgender Zusammenstellung, voraussetzen: 1) zwischen  $t_1, t_2$  mit den Wärmemengen  $Q_1, Q_2$ , 2) zwischen  $t_1, t_0$  mit  $Q_1, Q_0$ , 3) zwischen  $t_2, t_0$  mit  $Q_2, Q_0$ , sodafs die drei Gleichungen

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2), \quad \frac{Q_1}{Q_0} = f(t_1, t_0), \quad \frac{Q_2}{Q_0} = f(t_2, t_0)$$

bestehen müssen.

Bilden wir das Verhältnis  $Q_1$  und  $Q_2$  aus der 2. und 3. Gleichung und setzen wir es dem in der 1. Gleichung gleich, so folgt

$$\frac{f(t_1, t_0)}{f(t_2, t_0)} = f(t_1, t_2).$$

<sup>1)</sup> Man könnte freilich einwenden, dafs reibungslose Maschinen nicht existieren und der Beweis nicht streng genug geführt sei, allein einerseits bauen wir nachweisbar Dampfmaschinen, deren Reibungsarbeit, die Luftpumpenarbeit einbegriffen, blofs 5 vH der normalen Leistung ausmacht, andererseits ist die Voraussetzung idealer Maschinen für den Beweis nicht zu umgehen und darum auch deutlich ausgesprochen worden.

Diese Identität kann nach Poincaré nur bestehen, falls  $f(t_1, t_2)$  die Form

$$f(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)} \dots \dots \dots (5)$$

besitzt, wo nun Funktion  $\varphi$  noch unbekannt ist. Zu ihrer Bestimmung genügt es, an einem einzigen Körper durch den Versuch das Verhältnis  $Q_1 : Q_2$  zu ermitteln. Als solcher Körper eignet sich irgend ein »ideales« Gas, welches die Zustandsgleichung

$$pv = RT$$

besitzt, wo  $T = 273 + t$  und  $R$  eine Konstante ist, dessen spezifische Wärmen  $c_p$  für konstanten Druck und  $c_v$  für konstantes Volumen unveränderlich sind und das Verhältnis

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

bilden. Indem man die Abschnitte des Kreisprozesses im einzelnen durchgeht, findet man durch eine Rechnung, auf die hier nicht näher eingetreten werden soll,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \dots \dots \dots (5 a),$$

wenn mit  $T_1 = 273 + t_1$  und  $T_2 = 273 + t_2$  die obere und untere »absolute« Temperatur der Carnotschen Isothermen bezeichnet wird. Die Carnotsche Temperaturfunktion  $\varphi(t) = \varphi(T - 273)$  reduziert sich mithin allgemein auf die absolute Temperatur selbst,

$$\varphi(t) = T \dots \dots \dots (5 b),$$

wenn wir den noch willkürlichen konstanten Faktor = 1 setzen.

Die in »Nutzarbeit« umgesetzte Wärmemenge ist nun nichts anderes als der Unterschied der Wärmemengen  $Q_1$  und  $Q_2$ , d. h.

$$L = Q_1 - Q_2.$$

Der »Wirkungsgrad«  $\eta$  ist das Verhältnis der nutzbar gewonnenen Energie  $L$  zum Gesamtaufwand an Wärme, d. h. zu  $Q_1$ , da  $Q_2$  die Temperatur der Umgebung annahm, mithin wirtschaftlich wertlos geworden ist. Man findet

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Da aber gemäß Gl. (5 a)

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1},$$

so folgt

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \dots \dots \dots (5 c)$$

und wir haben den Satz:

Der thermische Wirkungsgrad eines Carnotprozesses hängt lediglich ab von der Temperatur der Isothermen, zwischen welchen der Prozess verläuft, und ist unabhängig von der Natur des arbeitenden Körpers. Die Wärmeausnutzung ist um so besser, bei je höherer Temperatur wir die Wärme zuführen und bei je tieferer wir sie entziehen.

**47. Kreisprozess mit Wärme-Zu- und -Abfuhr bei beliebigen Temperaturen.**

Es sei ein beliebiger Körper einer beliebigen physikalischen oder chemischen Zustandsänderung unterworfen, bei der nur umkehrbare Vorgänge auftreten, und der Verlauf der Druck- und Volumenänderung durch das sogenannte *pv*-Diagramm, Fig. 116, dargestellt wird. Teilen wir die *pv*-Ebene durch eine Schaar von Adiabaten in unendlich schmale Streifen, und bezeichnen wir die Wärmemengen, welche während der wahren Zustandsänderung zwischen zwei Adiabaten zu- bzw. abgeleitet werden, wie in die Figur eingetragen ist mit  $dQ_1, dQ_1', dQ_1'' \dots dQ_2, dQ_2', dQ_2'', \dots$

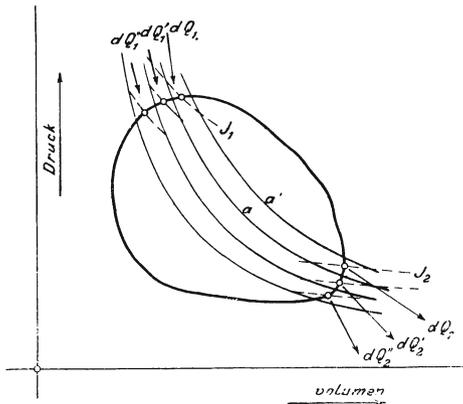


Fig. 116.

Die Wärmen  $dQ_1, dQ_2$  können wir auch als einem Carnotschen Kreisprozess angehörend denken, der durch einen Hilfskörper zwischen den Adiabaten  $a, a'$  und den zu  $T_1, T_2$ , d. h. den Temperaturen der wahren Zustandsänderung gehörenden unendlich kurzen Isothermen  $J_1, J_2$  ausgeführt wird. Die auf  $J_1, J_2$  zu- bzw. abzuleitenden Wärmen unterscheiden sich von  $dQ_1, dQ_2$  nur um unendlich kleine höherer Ordnung und es gilt nach Gl. (5a):

$$\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{T_1}{T_2} \dots \dots \dots (5d).$$

Die nutzbare Arbeit  $dL$ , die dem Elementarprozesse entspricht und durch die schraffierte Elementarfläche des  $p$ - $v$ -Diagrammes dargestellt wird, ist  $dL = dQ_1 - dQ_2$ , der thermodynamische Wirkungsgrad, wie oben

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

der vorhin ausgesprochene Satz gilt für jeden Elementarprozefs, und man darf mithin, alles zusammenfassend, den Satz aussprechen:

Die Wärmeausnutzung bei einem beliebig geführten Kreisprozefs mit nur umkehrbaren Aenderungen ist um so besser, bei je höheren Temperaturen die Wärme zugeführt, bei je tieferen sie abgeleitet wird.

Dieser Satz, der anscheinend allgemeine und ausnahmslose Gültigkeit besitzt, wird wesentlich eingeschränkt durch die Anwendung eines sogen. Regenerators. Es sei in einem Arbeitsprozefs eine »rechtsläufige«, d. h. mit Wärmemitteilung, und im weiteren Verlaufe eine »linksläufige«, d. h. mit Wärmeentziehung verbundene Zustandsänderung solcher Art vorhanden, daß Element für Element die Temperaturen und die ausgetauschten Wärmemengen gleich groß sind, während die Drücke verschieden sein können. Es wird nun im allgemeinen möglich sein, durch einen ideal wirkenden Wärmeaustauschapparat (nach dem Gegenstromprinzip) die auf dem linksläufigen Wege abgegebene Wärmemenge theoretisch ohne Verlust dem Arbeitskörper auf der rechtsläufigen Zustandsänderung zuzuführen, wodurch diese Wärme zu einer zirkulierenden gemacht wird und nicht jedesmal frisch angeliefert werden muß. Es ist mithin für den Wirkungsgrad dieses Prozesses im Gegensatze zum verallgemeinerten Carnotschen Lehrsatz gleichgültig, ob die fragliche Wärmemenge bei hohen oder niedrigen Temperaturen zu- und abgeleitet worden ist. Eine praktisch brauchbare Verwendung dieser theoretisch vielversprechenden Idee ist indessen bis heute nicht geglückt.

## 5. Das Integral von Clausius.

Schreiben wir Gl. (50) in der Form an

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2} \quad \text{oder} \quad \frac{dQ_1}{T_1} - \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

und verbinden wir sie mit den gleichartig gebildeten

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1'}{T_1'} - \frac{dQ_2'}{T_2'} &= 0 \\ \frac{dQ_1''}{T_1''} - \frac{dQ_2''}{T_2''} &= 0 \quad \text{usw.}, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch Summation

$$\sum \frac{dQ_1}{T_1} - \sum \frac{dQ_2}{T_2} = 0.$$

Wenn wir aber die zu entziehenden Wärmemengen  $dQ_2$  algebraisch auffassen, d. h. als negative Größen einführen (während hier  $dQ_2$  den Absolutwert bedeutete), so darf man einfach

$$\sum \frac{dQ}{T} = 0$$

schreiben, die Summe auf alle Wärmeelemente ausgedehnt. Ersetzen wir die Summe durch das Integralzeichen, so entsteht für einen Kreisprozess mit bloß umkehrbaren Vorgängen der Satz von Clausius

$$\left(\int\right) \frac{dQ}{T} = 0 \dots \dots \dots (6a),$$

wobei durch die Klammern die Integration über den geschlossenen Kreisprozess angedeutet ist.

#### 48. Die Entropie.

Man lasse nun von einem als »normal« definierten Zustand  $A$ , Fig. 117, durch umkehrbare Vorgänge 1 kg unseres

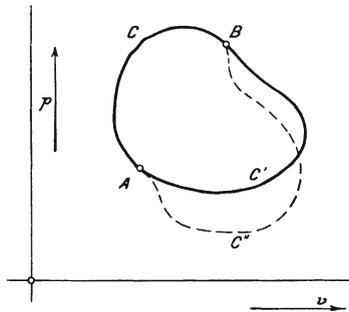


Fig. 117.

Stoffes gemäß Kurve  $C$  in den Zustand  $B$  überführen, auf dem Wege  $C'$  kehre er nach  $A$  zurück, sodass ein Kreisprozess entsteht. Das Clausiussche Integral (6a) zerlegen wir in die Teilbeträge von  $A$  über  $C$  nach  $B$ , von  $B$  über  $C'$  nach  $A$ , und schreiben

$$\int_A^A \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = 0 \dots \dots \dots (6b).$$

über  $C$  \qquad über  $C'$

Geht die Änderung von  $A$  nach  $B$  über  $C'$ , so kehren

alle Elementar-Wärmemengen, die ins Spiel kommen, ihr Vorzeichen um, und es wird

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = - \int_B^A \frac{dQ}{T},$$

über  $C'$                       über  $C'$

somit liefert Gl. (6b)

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \dots \dots \dots (6c).$$

über  $C$                       über  $C'$

Das Integral der Elemente  $dQ : T$  ist mithin unabhängig von der Art, in welcher wir einen Körper aus dem gegebenen Anfangszustand in einen gegebenen Endzustand überführen. Man bezeichnet dies Integral als den Zuwachs der Entropie des Körpers zwischen den Zuständen  $A$  und  $B$ , und schreibt

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S - S_0 \dots \dots \dots (6d).$$

Der Wert der Entropie in  $A$  bleibt unbestimmt, es ist mithin auch  $S$  nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmbar. Bezeichnet man den Zustand in  $A$  als »Nullzustand« und setzt man  $S_0 = 0$ , so wird die Entropie eine zu jedem Zustand des Körpers gehörende bestimmte Zahl, und kann von vornherein ausgerechnet werden, sofern der Zustand durch bloß umkehrbare Aenderungen erreichbar ist<sup>1)</sup>.

Aus der Definition der Entropie folgt:

$$dS = \frac{dQ}{T} \dots \dots \dots (7)$$

und

$$dQ = TdS \dots \dots \dots (7a),$$

welche wichtige Gleichung besagt, daß die (umkehrbar) zugeführte Wärmemenge  $dQ$  erhalten wird als Produkt der absoluten Temperatur und der elementaren Entropiezunahme während der betrachteten un-

---

<sup>1)</sup> Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß über die Natur des arbeitenden Körpers keine Voraussetzungen gemacht worden sind, daß also obige Definition der Entropie insbesondere auch für chemisch aufeinander einwirkende Gemenge gilt, wenn nur ihr Zustand durch gewisse Angaben bestimmbar, also ein Zustand des Gleichgewichtes der chemischen Kräfte ist. Das Vorhandensein äußeren Gleichgewichtes ist nicht notwendig, da auch in bewegten Massen ein unendlich kleines Element als im relativen Gleichgewicht gegen seinen Schwerpunkt angesehen werden kann. Bei Gasgemischen kann man auch die Bedingung des Gleichgewichtes der chemischen Kräfte fallen lassen, da hier die Entropie des einen Bestandteiles durch die Anwesenheit des andern nicht beeinflusst wird.

endlich kleinen Zustandsänderung. Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, die zugeführte Wärme graphisch als Flächeninhalt darzustellen, wenn wir ein Koordinatensystem entwerfen mit z. B.  $S$  als Abszissen- und  $T$  als Ordinatenachse. Da durch die »Zustandsparameter« z. B.  $p$  und  $v$  auch die Entropie  $s$  und die Temperatur bestimmt sind, entspricht jedem Punkte der  $p, v$ -Ebene ein Punkt der  $T, S$ -Ebene, und man kann eine Zustandskurve (z. B. Expansionslinie) aus der ersten in die zweite übertragen, oder »abbilden«. Auf diese Weise entsteht das »Entropiediagramm« Fig. 118. In diesem ist

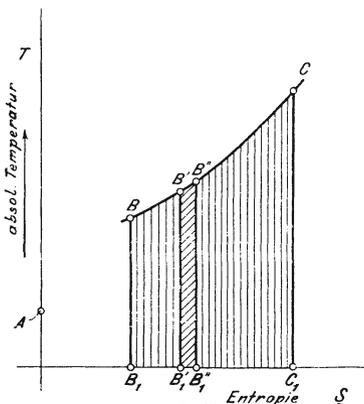


Fig. 118.

Rechteck  $B'B''B_1''B_1' = TdS = dQ$ , und die Fläche  $B_1BCC_1$  stellt im Wärmemaß die ganze während der Zustandsänderung von  $B$  nach  $C$  aufgenommene Wärme dar. Erfolgte die Änderung im Sinne von  $C$  nach  $B$ , müßte der Flächeninhalt negativ gerechnet werden, d. h. die Wärme würde nicht zu-, sondern abgeleitet.

Aus Beziehung (6c) folgt ferner, daß  $dQ:T$  ein vollständiges Differential der beiden für die Bestimmung des Zustandes gewählten »Parameter« z. B. von  $p, v$  oder  $v, T$ , usw. sein, somit die vollständige Integration von  $S$  stets möglich sein müsse.

#### 49. Entropietafel für Wasserdampf.

Für Wasserdampf gestaltet sich die Berechnung der Entropie, indem man  $0^\circ\text{C}$  und das als unveränderlich angesehene Volumen des flüssigen Wassers zum »Normalzustand« macht, die Entropie auf 1 kg Wassergewicht bezieht, und als unkehrbare Zustandsänderung zunächst adiabatische Kompression des Wassers auf den gewünschten Druck, dann Wärmezufuhr bei konstantem Druck wählt, wie folgt:

a) im flüssigen Zustand gilt, indem man von der unmerklichen Temperaturzunahme und Arbeitsleistung während der Kompression des Wassers absieht, bis zum Erreichen des Siedepunktes beim Drucke  $p$  oder der Temperatur  $T$   $dQ = c dT$ , wo  $c$  die spezifische Wärme des Wassers unabhängig ist vom Drucke. Mithin der erste Anteil der Entropie

$$s' - s_0 = \int_0^T \frac{c dT}{T} = \tau,$$

während der Verdampfung bei konstantem Drucke, also auch konstanter Temperatur

$$dQ = r dx \text{ und } s_x - s' = \int_0^x \frac{r dx}{T} = \frac{rx}{T}$$

somit im ganzen für gesättigten Dampf vom »Zustande  $T, x$ «

$$s_x - s_0 = \tau + x \frac{r}{T}$$

Die Größe  $\tau$  findet sich (unter der Bezeichnung  $\sigma$ ) in der Hütte vorgerechnet.

An der Grenzkurve ist  $s'' - s_0 = \tau + \frac{r}{T}$ .

Im Ueberhitzgebiete haben wir bei konstantem Drucke  $p$

$$dQ = c_p dT$$

und 
$$s - s'' = \int_{T'}^{T''} \frac{c_p dT}{T} = c_p \lg n \left( \frac{T''}{T'} \right).$$

wo  $T'$  die Ueberhitzungstemperatur bedeutet und  $c_p = 0,48$  konstant vorausgesetzt wird.

Diese Werte finden sich für das praktisch wichtige Gebiet der Zustandsänderung auf Taf. I graphisch dargestellt, und sind die Linien  $p = \text{konst}$  und  $x = \text{konst}$  für eine größere Zahl von Zwischenwerten gerechnet. Die Isotherme, d. h.  $T = \text{konst}$ , wird naturgemäß durch die Wagerechte wiedergegeben. Für die Adiabate gilt  $dQ = 0$  mithin  $s = \text{konst}$ , d. h. sie ist eine vertikale Gerade. Es sind auch die Linien  $v = \text{konst}$  eingezeichnet, sodafs zu zwei Bestimmungsstücken z. B.  $p, v$  sofort das dritte, d. h.  $x$  oder  $T$  gefunden werden kann. Schliesslich wurden die Linien  $\lambda = \text{Konst.}$  eingezeichnet, durch welche, wie aus dem früheren hervorgeht, das Rechnen vereinfacht wird.

### 50. Ungeschlossene Prozesse mit umkehrbaren und nicht umkehrbaren Zustandsänderungen.

Wenn ein Körper umkehrbare Zustandsänderungen ausführt, muß seine Temperatur wie oben erläutert, stets bis auf unendlich kleine Unterschiede der Temperatur des Wärme-

behälters, von welchem er jeweilig Wärme empfängt, gleich sein. Setzen wir auch im Behälter nur umkehrbare Vorgänge voraus, so wird für jedes Element der Zustandsänderung die Entropieänderung  $dS = dQ/T$  der Arbeitskörper gleich groß aber entgegengesetzt wie diejenige des Behälters, da  $T$  gleich  $dQ$  für beide auch gleich, aber entgegengesetzt ist. Die Entropieänderung beider Körper zusammengenommen ist null, und zwar auch für endliche Zustandsänderungen. Wir haben somit den Satz:

Bei einem rein umkehrbaren Vorgange bleibt die Entropiesumme aller an dem Vorgang irgendwie beteiligten Körper unverändert.

Treten hingegen nicht umkehrbare Zustandsänderungen auf, so erfährt der Satz folgende von Gibbs und Planck zuerst ausgesprochene Erweiterung:

Die Summe der Entropien aller an irgend einem Vorgange beteiligten Körper ist zu Ende der Zustandsänderung größer wie am Anfang; nur im Grenzfall einer in allen Teilen umkehrbaren Aenderung bleibt die Entropiesumme unverändert.

Der Beweis ist für geschlossene, d. h. Kreisprozesse mit nicht umkehrbaren thermischen Umwandlungen schon von Clausius auf sein Grundprinzip, daß Wärme nicht von selbst von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen könne, zurückgeführt worden<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Für ungeschlossene Prozesse beliebiger Art wird der Beweis geleistet, indem man auf die im Art 46 betrachteten zwei Carnotschen Prozesse zurückgreift. Der rechtsläufige derselben sei mit einer nicht umkehrbaren Zustandsänderung behaftet, der entgegengesetzte aber werde umkehrbar geführt und so, daß die vom ersten geleistete Arbeit gerade aufgezehrt wird. Als nicht umkehrbar definieren wir mit Planck jeden Vorgang, dessen Folgen durch keine uns zugeborene stehenden Mittel vollständig d. h. so aufgehoben werden können, daß in keinem andern Körper eine Aenderung zurückbleibe. Daß der Vorgang nicht im entgegengesetzten Sinne durchlaufen werden kann, genügt also nicht, es muß überhaupt unmöglich sein den Anfangszustand ohne anderweitige Aenderungen wiederherzustellen. Unter dieser Voraussetzung kann die dem wärmeren Behälter durch unsere Kreisprozesse entnommene Wärme  $Q_1 - Q_1'$  nur positiv sein, denn wäre sie null, so hätten wir zum Schlusse genau denselben Zustand aller beteiligten Körper wie zu Beginn, wir hätten also die nicht umkehrbare Aenderung des ersten Prozesses aufgehoben, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre aber  $Q_1 - Q_1' < 0$ , so würde man ohne Arbeitsaufwand die Wärmemenge  $Q_1' - Q_1$  aus dem kälteren Behälter in den wärmeren hinaufgeschafft haben, könnte dieselbe von hier in eine geeignete Maschine leiten, und würde ein Perpetuum mobile zweiter Art erhalten, was unmöglich ist. Es bleibt mithin nur

$$Q_1 - Q_1' > 0 \text{ und } Q_2 - Q_2' > 0$$

### 51. Die Oekonomie der Wärmekraftmaschinen.

Die Arbeitsleistung der heute bekannten Wärmemotoren beruht in letzter Linie auf der Auslösung von Energie durch chemische Verbindungen (Verbrennung), und ist mithin für die Beurteilung ihrer Oekonomie der Plancksche Satz in

und wegen der Gleichheit der Arbeiten  $Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$ . Es wird also  $Q_1 = Q_1' + \mathcal{A}$ ;  $Q_2 = Q_2' + \mathcal{A}$ , wo  $\mathcal{A}$  eine positive Größe bedeutet.

Für den umkehrbaren Kreisprozess war aber

$$\frac{Q_1'}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} = 0$$

somit erhalten wir hier, da  $T_1 > T_2$  ist

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \mathcal{A} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0.$$

Durch dieselben Ueberlegungen die im Art. 5 gemacht worden sind gelangt man bei einem beliebigen Kreisprozess zur Formel

$$\left( \int \right) \frac{dQ}{T} < 0$$

wobei aber, wie aus der Ableitung hervorgeht,  $T$  die Temperatur der Behälter ist. Es sei nun in der früheren Fig. 117 ein nicht geschlossener Prozess zwischen den Zuständen  $A$  und  $B$  mit nicht umkehrbaren Vorgängen im Arbeitskörper, aber nur umkehrbaren Aenderungen der Wärmebehälter, der über die Bahn  $C$  verläuft, gegeben. Wir machen den Prozess zu einem geschlossenen durch Anfügen der über  $C'$  laufenden und nur umkehrbaren Zustandsänderung von  $B$  nach  $A$ . Das Integral von Clausius gibt

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} - \int_A^B \frac{dQ}{T} < 0$$

über  $C$       über  $C'$       über  $C$       über  $C'$

Es sei nun  $S_A, S_B$  die Entropie des Arbeitskörpers in  $A$  bzw.  $B$ ; ebenso  $S_A', S_B'$  der Anfangs- und Endwert der Entropie der Behälter, welche während der gegebenen Zustandsänderung von  $A$  bis  $B$  (über  $C$ ) mit dem Körper in Verbindung standen. Dann ist offenbar

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}; \quad S_B' - S_A' = - \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

über  $C'$                       über  $C$

wobei das negative Vorzeichen im letzten Gliede angebracht werden mußte, da  $dQ$  die dem Körper zugeführte, mithin  $-dQ$  die dem Behälter im algebraischen Sinne mitgeteilte Wärmemenge bedeutet. Wir erhalten also

$$-(S_B' - S_A') - (S_B - S_A) < 0 \quad \text{oder} \quad (S_B + S_B') - (S_A + S_A') > 0$$

d. h. die Entropiesumme aller an der ungeschlossenen Zustandsänderung von  $A$  bis  $B$  beteiligten Körper ist am Ende des Vorganges größer wie zu Beginn derselben, was zu beweisen war.

Im entsprechenden Beweise von Planck findet sich (auf S. 86 der Thermodynamik) eine Unklarheit, welche für die Kenner dieses Werkes

seiner allgemeinen Fassung herbeizuziehen. Leider sind die betreffenden physikalischen und chemischen Konstanten unserer Arbeitsstoffe zu wenig bekannt, und wir müssen uns mit einigen wenigen allgemeinen Erwägungen begnügen. Insbesondere kann man über den Arbeitsverlust durch nicht umkehrbare Vorgänge für Prozesse wie sie bei Gasmotoren üblich sind, folgendes aussagen.

Wir denken uns alle Wärmeentwicklung im gegebenen Arbeitsvorgang durch chemische Prozesse bedingt, und setzen zum Zwecke der Rückführung der Endprodukte auf atmosphärischen Zustand eine Wärmeabfuhr  $Q_0$  an die Umgebung voraus, die bei der Temperatur  $T_0$  erfolgt. Die Nutzarbeit werde zum Heben eines Gewichtes verwendet, dessen Entropie sich nicht ändert. Die Entropie des Arbeitskörpers sei  $S$  vor, und  $S'$  nach der Umwandlung, die Vermehrung ist also  $S' - S$ . Die Entropie des unteren Wärmebehälters erfährt eine Zunahme  $\frac{Q_0}{T_0}$ . Im ganzen hat die Entropie um den Betrag

$$N = S' - S + \frac{Q_0}{T_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zugenommen. Die Gesamtenergie des Arbeitskörpers sei  $U$  bzw.  $U'$  vor, bzw. nach der Umwandlung. Die Nutzarbeit beträgt dann

$$L = U - U' - Q_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wenn das Volumen zu Anfang und zu Ende des Vorganges gleich groß ist. (Im andern Falle würde anstelle von  $U$  und  $U'$  das sogenannte Potential bei konstantem Drucke, d. h. die Größe  $U + pv$ , bei Dämpfen also die »Dampfwärme« treten.) Setzen wir  $Q_0$  aus (8) in (9) ein, so folgt:

$$L = U - U' + T_0(S - S') - NT_0 \quad . \quad . \quad (10).$$

---

hier besprochen sei. Wenn man annimmt, daß die Entropie eines Gases verkleinert werden könnte, ohne in andern Körpern Aenderungen zurückzulassen sind drei Möglichkeiten ins Auge zu fassen. Die Temperatur könnte erstens gleich bleiben, dann erhielte man durch isothermische Wärmezufuhr aus der Umgebung und Ausdehnung des Gases bis zur ursprünglichen Entropie ein Perpetuum mobile zweiter Art; zweitens könnte die Temperatur höher sein, und man erhielte durch adiabatische Expansion auf die frühere Temperatur Arbeit aus nichts; drittens könnte die Temperatur tiefer sein, man müßte Arbeit aufwenden um adiabatisch auf die Anfangstemperatur zu komprimieren, worauf man das Gas arbeitslos auf das Volumen der größeren Entropie sich ausdehnen ließe, und durch periodische Wiederholung Arbeit ohne Ende vernichten würde. Dann ist bei Planck der Uebergang zu Vorgängen chemischer Art durchaus unklar, weshalb vielleicht manchem der hier gegebene strenge Beweis gelegen kommen mag. Diese Ergänzung macht indessen das Studium des klassischen Planckschen Werkes keineswegs entbehrlich.

Hätten wir nur umkehrbare Vorgänge, so wäre

$$N = 0$$

und die Nutzarbeit

$$L_0 = U - U' + T_0 (S - S') \quad . . . \quad (11),$$

während in Wirklichkeit

$$L = L_0 - NT_0 \quad . . . \quad (12),$$

was man in den Satz fassen kann:

Bei nicht umkehrbaren Vorgängen irgend welcher (auch chemischer) Art erleidet die Nutzarbeit des beschriebenen Prozesses eine Verringerung um das Produkt aus der stattgefundenen Zunahme der Entropie der am Prozefs beteiligten Körper und der Temperatur des wärmeableitenden Behälters (d. h. im weitesten Sinne der Umgebung).

Die Energien im Anfangs- und im Endzustand  $U$  und  $U'$  sind durch die Natur des Arbeitskörpers bedingt, aber als gegeben zu betrachten (z. B. für ein Gas- und Luftgemisch die Verbrennungswärme bei konstantem Volumen), ebenso die Entropien  $S$  und  $S'$ , mithin auch die maximale Nutzarbeit  $L_0$ , und es folgt der wichtige Satz:

Bei gegebenem Anfangszustande des Arbeitskörpers oder Körpersystemes und ebenfalls gegebenem Zustande (d. h. Druck und Temperatur) der Umgebung, also des Endzustandes, erhalten wir für den beschriebenen Prozefs die maximale Nutzarbeit, wenn jede nicht umkehrbare Zustandsänderung vermieden wird. Die Gröfse dieser Nutzarbeit ist unabhängig von der Art des rein umkehrbaren Prozesses, durch welchen die Umwandlung vollzogen wird.

Ebenso wie die Verallgemeinerung des Carnotschen Satzes erfährt auch die obige Feststellung eine wesentliche Abänderung durch die Verwendung einer Wärmeaustauschvorrichtung die wir Regenerator der Abwärme nennen wollen und die freilich auf flüssige Brennstoffe von durch die Art des Arbeitsvorganges bedingten Eigenschaften beschränkt werden mufs. Im vorbeschriebenen Prozefs beispielsweise würde man die abzuleitende Wärme in diesem Regenerator zur Verdampfung des passend gewählten Brennstoffes selbst verwenden, welcher unter Atmosphärendruck bei der Temperatur  $T_0$  sieden und eine solche Verdampfungswärme besitzen müfste, dafs die pro Spiel in den Prozefs tretende Menge gerade die Wärme  $Q_0$  aufzunehmen vermag. Auf diese Weise entweichen die Abgase auf atmosphärische Temperatur abgekühlt ins Freie, und es würde der gesamte »Heizwert« des Brennstoffes in Arbeit umgewandelt werden, und zwar bis zu einer gewissen Grenze unabhängig von der Art der Zustandsände-

rung also auch bei nicht umkehrbaren Vorgängen und unrationell eingerichtetem Arbeitsvorgang, falls nur ein Brennstoff mit hinlänglich großer Verdampfungswärme gefunden werden kann.

Auf die fundamentale Bedeutung dieser besonderen Art der Abwärme-Verwertung hat zuerst Friedenthal<sup>1)</sup> hingewiesen, dessen zumteil abweichende Vorschläge unten besprochen werden.

Für die technisch wichtigen Verbrennungsprozesse ist es, wie man nachweisen kann, näherungsweise zulässig, den Vorgang so anzusehen, als würde die frei werdende chemische Energie dem verbrennenden Gemische von außen als Wärme zugeführt. Statt des Auspuffes ins Freie kann man sich weiterhin z. B. beim gewöhnlichen Viertakte die Verbrennungsprodukte im Zylinder zurückbehalten und bei konstantem Volumen auf atmosphärischen Zustand abgekühlt denken, worauf durch weitere Wärmeentziehung bei zurückweichendem Kolben die Auspufflinie, — durch Wärmeabfuhr die Sauglinie des Indikatorgrammes erzeugt würde, und das Spiel des Viertaktes von neuem beginnen kann. Durch diese Betrachtung wird der Verbrennungsmotor gewissermaßen in einen geschlossenen Heißluftmotor verwandelt und man kann auf die nun als bloß thermisch anzusehenden Vorgänge und Energieumsätze desselben die früher entwickelten Sätze anwenden.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so werden als Mittel, um höchste Energieausnutzung zu erlangen, für Wärmekraftmaschinen irgend welcher Art folgende leitenden Grundsätze aufgestellt werden können:

1) Herabsetzung der passiven Widerstände wie Reibung, Drosselung usw. Vermeidung von Wärmeverlusten jeder Art.

2) Zuführung der Wärme oder Verlauf der Verbrennung bei möglichst hoher, Ableitung der Wärme bei möglichst tiefer Temperatur, tunlichste Vermeidung nicht umkehrbarer Zustandsänderungen,

3) Verwertung der Abwärme durch Regeneratoren, wo die Art des Brennstoffes und des Arbeitsprozesses dies zulässt, sofern es gelingt, wirksame und wirtschaftliche Regeneratoren zu konstruieren.

Von den bekannten Vorschlägen für Verbesserung der thermischen Arbeitsprozesse verdienen unter diesen Gesichtspunkten die folgenden eine kurze Würdigung.

## 52. Neuere Vorschläge.

Vermeidung der Wärmezufuhr bei niedriger Temperatur an das Speisewasser, indem man den klassi-

<sup>1)</sup> Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 1902 Nr. 18.



	halbe Beaufschlagung	ganze Beaufschlagung
durch Regenerierung zu ge- winnende Wärmemenge pro PS <sub>e</sub> -st . . . . . WE	1415	1340
oder in Teilen der Gesamt- wärme . . . . . vH	12,5	14,3

Die Ersparnis wird mithin überall, wo analoge Verhältnisse vorliegen, die Anlage der Regenerativheizkörper verzinzen. Es ist jedoch zu betonen, daß die Turbine Lewickis mit zu kleiner Umfangsgeschwindigkeit lief und daß die starke Ueberhitzung des Abdampfes nicht von den Schaufelstößen herrührt, sondern in der Hauptsache die in Wärme zurückverwandelte Austrittenergie des Dampfes darstellt. Erhöhen wir die Umfangsgeschwindigkeit, so wird die Ueberhitzung des Abdampfes wohl kleiner, und der Regenerator kann weniger Wärme zurückleiten. Wir gewinnen jedoch im Verhältnis mehr Nutzarbeit, als wir Wärme aufgewendet haben, der Gesamteffekt ist ein besserer; wenn wir also die Wahl haben zwischen schlechtem hydraulischem Wirkungsgrad und Regenerierung einer großen Wärmemenge einerseits, oder gutem hydraulischem Wirkungsgrad, aber Regenerierung einer kleinen Wärmemenge andererseits, so wird letztere Einrichtung wirtschaftlicher sein.

Ein dritter Vorschlag, den ich als Kreisprozeß mit Dauerüberhitzung bezeichnen möchte, besteht darin, daß man den hoch überhitzten Dampf unter stetiger weiterer Heizung isothermisch expandieren lasse, um so des Vorteiles der Wärmezufuhr bei höchster Temperatur teilhaftig zu werden. Denkt man sich den Prozeß mit auf 400° überhitztem Dampf von 12 at Druck so durchgeführt, daß die schließliche adiabatische Expansion bei 0,1 kg/qcm zum gesättigten Zustande zurückführt, so ergibt sich gegenüber der einfachen Ueberhitzung auf 400° und sofortiger adiabatischer Expansion auf 0,1 kg/qcm ein Gewinn von rd. 12 vH. Die auf der Isotherme zuzuführende Wärmemenge beträgt rd. 30 vH der zum Verdampfen und Ueberhitzen notwendigen Wärmemenge. Leider würde die praktische Durchführung auch dieses Prozesses, den man bei der vielstufigen Dampfturbine versucht wäre anzuwenden, selbst bei unmittelbarster Verbindung des Motors mit dem Kessel an den Abkühlungs- und Reibungsverlusten der Zu- und Ableitungen scheitern. Auch der Gedanke, die dauernde Ueberhitzung durch Verbrennen eines Gas- und Luftgemisches, welches nach und nach dem Dampfe beigemischt würde, zu erreichen und so durch die innige Verbindung einer Dampf- und Gasturbine die Wärmeverluste vermeiden zu wollen, erweist sich bei näherer Prüfung als undurchführbar.

Die gleichen Bedenken treffen die im D. R. P Nr. 122950 (v. J. 1899) niedergelegte Idee des bekannten Physikers Pictet,

der in ein hochoverhitztes, vorher komprimiertes Gemisch von Dampf und Luft Kohlenwasserstoffe einspritzen, zum Verbrennen bringen und die Produkte in einem Kolbenmotor zur Arbeitsleistung veranlassen will. Arbeitet Pictet mit Auspuff, so ist seine Maschine ein Petroleummotor mit Wassereinspritzung; will er aber Kondensation anwenden, so erhält die Luftpumpe so bedeutende Abmessungen, daß die Vorteile der höheren Anfangsüberhitzung, welche die Hauptabsicht des Verfahrens bildet, wieder aufgewogen werden. Es macht sich hier der unangenehme Umstand geltend, daß der Hauptmotor eine um die Arbeit der Luftpumpe und des Kompressors größere Leistung entwickeln, mithin entsprechend größer sein muß. Man hat also einen Aufwand für den Leerlauf der erwähnten Hilfsmaschine und den vergrößerten Leerlauf der Hauptmaschine, der, wie eine Rechnung leicht nachweisen läßt, alle Vorteile wieder aufzehrt.

Schließlich haben wir in der Wahl schwer siedender Flüssigkeiten beim gewöhnlichen Dampfmaschinenprozess ein Mittel, die Wärmezufuhr bei höheren Temperaturen zu erzwingen; es seien hier die Patente von A. Seigle und die Mehrstoff-Dampfmaschine von Schreiber erwähnt. Ersterer läßt einen schwerflüchtigen Kohlenwasserstoff, z. B. Solaröl, das bei 350 bis 450° verdampft, in einem Dampfmotor Arbeit leisten, worauf in einem als Dampfkessel gebauten Oberflächenkondensator durch das sich niederschlagende Oel Wasser verdampft und in gewohnter Weise als Triebkraft verwendet wurde. Letzterer schlägt als erste Stufe Anilin vor, aufgrund der günstigen thermischen Eigenschaften, d. h. des vorteilhaften Verhältnisses der Verdampfungs- und der Flüssigkeitswärme dieses Stoffes. Will man den Vorteil der Wärmezufuhr bei hoher Temperatur ausnutzen, so darf eben das besagte Verhältnis nicht zu klein werden. Schreiber betont<sup>1)</sup> ferner die früher übersehene Notwendigkeit, durch Vorwärmer den hohen Wärmeinhalt der Abgase der Feuerung weiterhin zu verwerten.

Dieses Aufsetzen einer oder mehrerer Stufen auf den gewöhnlichen Dampfmaschinenprozess erscheint ungemein vorteilhaft und die Verbesserung des Wirkungsgrades erheblicher als durch irgend eines der vorher erwähnten Mittel. Die Mehrstoff-Dampfmaschine verdient zweifelsohne höchste Beachtung und würde es rechtfertigen, größere Mittel zum Zwecke ihrer Erprobung flüssig zu machen. Nur muß man sich ebenfalls auf große Schwierigkeiten gefaßt machen, worunter die nicht volle chemische Beständigkeit der bisher vorgeschlagenen Stoffe zu erwähnen ist, beim Anilin insbe-

<sup>1)</sup> Dinglers, Polytechnisches Journal Nov. 1902. Seither ausführlich dargestellt in der ausgezeichneten Studie: Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen, Leipzig 1903.

sondere auch dessen hochgradige Giftigkeit bei nicht ausgesprochen scharfem Geruche, weshalb auch von chemischen Fachleuten an der industriellen Verwertbarkeit dieses Stoffes gezweifelt wird.

Da somit die Absichten, den Temperatursprung der Höhe nach zu erweitern, teils unausführbar, teils auf den Weg langwieriger Versuche angewiesen sind, wendet sich der Erfindungsgeist der Tiefe zu und ist durch die Abwärmemaschine bekanntlich bestrebt, den letzten Unterschied zwischen Kondensatordampf- und Kühlwasser-Temperatur auszunutzen. Die Daseinsberechtigung dieses Vorschlages beruht in der Erfahrungstatsache, daß die Dampfmaschine in der Regel mit einem Vakuum arbeitet, welches 0,1 kg/qcm, ja häufig 0,2 kg/qcm überschreitet. Allein diesen Drücken entspricht noch eine Temperatur von rd. 45 bzw. 60° C, während die Mitteltemperatur des Einspritzwassers vielfach um 10 bis 20 °C zu liegen pflegt. Hier sind mithin theoretisch 35 bis 50 °C Temperaturgefälle zu gewinnen, was sogar bei einer Carnotschen Maschine mit z. B. 180° oberer Temperaturgrenze einen Gewinn von  $\frac{35}{135}$  bzw.  $\frac{60}{120}$ , d. h. 26 bzw. 50 vH, ergeben würde. Wir sind durch die Veröffentlichungen von Josse über die Fortschritte der Abwärmemaschine unterrichtet und wissen, daß auch hier bedeutende praktisch-konstruktive Schwierigkeiten zu überwinden waren; doch berichtet mir Prof. Josse, daß ein bedeutsamer Schritt nach vorwärts gemacht worden ist durch Konstruktion einer zuverlässigen und dauerhaften Kolbenstangen-Stopfbüchse<sup>1)</sup>.

Es erscheint in der Tat nicht einfach, die Kondensationsvorrichtungen der Dampfmaschine so zu vervollkommen, daß man mit Verdünnungen, die der Siedetemperatur von 10 bis 15°C entsprechen, dauernd arbeiten könnte. Gelingt dies, so kann der ganze Temperatursprung in der Dampfmaschine ausgenutzt werden, wobei es freilich unvermeidlich ist, daß wegen der niedrigen Temperatur der Dampf-nieder-schlag im letzten Zylinder etwas wächst. Auch muß die Dampfmaschine die »Spitze« der Expansion preisgeben, die Abwärmemaschine nutzt sie fast ganz aus. Im übrigen stehen der Abwärme noch andere weite Gebiete offen; so wird z. B. ein Gas-Abwärmemotor gegenwärtig gebaut.

Einen eigentümlichen Weg hat der bereits genannte Physiker Pictet eingeschlagen, um den Temperatursprung einer Aus-

<sup>1)</sup> Bekanntlich ist eine Abwärmemaschine im Kraft-hause Mark-grafenstrasse der Berliner Elektrizitätswerke seit längerem aufgestellt und in regelmäßigem Betrieb. Nach einem mir mitgeteilten Bericht der Betriebsleitung hat die Maschine von 1. Dez. 1901 bis 31. Mai 1902 im ganzen 1507 Betriebsstunden zurückgelegt und im mittel eine Nutzleistung von 91 KW geliefert. Eine größere Anzahl Maschinen mit Leistungen bis zu 400 PS sind in der Ausführung begriffen, eine solche von 200 PS Leistung seit Okt. 1902 in dauerndem praktischem Betriebe.

puff-Dampfmaschine nach unten zu erweitern. Er gedenkt komprimierte Luft auf die Temperatur des Dampfes erwärmt und mit diesem gemischt in die Maschine zu leiten. Stünde das Mengenverhältnis der Luft zum Dampfe ungefähr wie 2:1, so würde der Teildruck des letzteren nach Pictet ungefähr  $\frac{1}{3}$  des jeweiligen Gesamtdruckes ausmachen. Beträge dieser 1 kg/qcm, so hätte der Dampf etwa  $\frac{1}{3}$  kg/qcm Druck, er würde mithin bei freiem Auspuff der Maschine fast ebenso tief expandieren wie sonst bei Anwendung der Kondensation. Hieraus folgert Pictet, daß auch der Dampfverbrauch dieser Auspuffmaschine dem nahekäme, der sich bei Kondensationsbetrieb ergibt. Mag hier auch ein Gewinn heraus schauen, so kann doch nicht bezweifelt werden, daß die Anlage einer Wasserrückkühlung und -kondensation bedeutend bessere Ergebnisse liefern muß<sup>1)</sup>.

Einen erheblichen Vorsprung haben Gasmotoren mit Kraftgasbetrieb, die schon mehrfach Verbrauchszahlen von

<sup>1)</sup> Dem vielleicht bestehenden Aeußeren des Pictetschen Vorschlages gegenüber muß, abgesehen von den praktischen Schwierigkeiten, auf zwei grundsätzliche Verluste aufmerksam gemacht werden, die eine mit Mischung verschiedener Dampf- oder Gasarten arbeitende Maschine nie vermeiden kann. Es wird die Mischung von Dampf und Luft, die mit Rücksicht auf das Rosten des Dampfkessels nur vor dem Dampfzylinder (in einem Behälter) zusammentreffen dürfen, entweder vollständig sein oder nicht, beziehentlich in einigen Teilen vollständig, in andern nicht. Da, wo sie es nicht ist, expandiert der Dampf beim Auspuff auf 1 at und nicht auf den Teildruck, verläßt die Maschine als nasser Dampf mit 100<sup>0</sup> Temperatur und wärmt obendrein die benachbarten Luftteilchen auf die gleiche Höhe an. Da, wo die Mischung vollständig ist, findet aber ein anderer Verlust statt, zufolge der Vermehrung der Entropie der

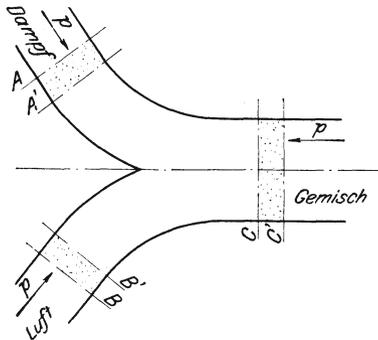


Fig. 119.

sich mischenden Teile, die ja einer Entwertung des Wärmehaltes gleichkommt. Um diesen letzteren Verlust zahlenmäßig zu ermitteln, müßte man den Vorgang der hier stattfindenden Diffusion bei konstantem Drucke anhand der Skizze Fig. 119 einer Untersuchung unterwerfen. Bei A trete der Dampf, bei B die Luft ein, bei C das Ge-

3700 und sogar 3200 WE pro PS<sub>e</sub>-st erzielt haben, d. h. 20 vH gesamte thermische Ausnutzung ergeben. Indessen ist diese Motorenart heute noch auf nur beschränkt vorkommende Brennstoffe, nämlich Koks und Anthrazit, angewiesen. Zwar hat Deutz bereits Erfolge mit dem Braunkohlenvergaser aufzuweisen, allein die Herstellung von Kraftgas aus gewöhnlicher Schwarzkohle, d. h. unserm Hauptbrennstoff, scheint noch in weiter Ferne zu liegen. Am weitesten voraus sind schliesslich die Motoren für flüssige Brennstoffe, und zwar diejenigen von Bänki und Diesel.

Letzterer hat nach Messungen von Prof. Lundholm bei einer dreizylindrigen Ausführung mit 120 PS Leistung einen Erdölverbrauch von 0,173 kg für 1 PS-st mithin eine Wärmeausnutzung von 36,8 vH auf die effektive Leistung bezogen erreicht und nimmt weitaus die führende Stellung unter den Wärmekraftmaschinen ein. Der mechanische Wirkungsgrad wird auf 85 vH geschätzt und man sieht aus diesen Zahlen, daß der Motor seit der ersten Veröffentlichung durch Prof. Schröter ganz bedeutende Fortschritte gemacht hat. Der rein thermische Prozeß dürfte bei der schon erreichten Vollkommenheit der Verbrennung kaum wesentlicher Verbesserung fähig sein, hingegen wurde der mechanische Wirkungsgrad durch Verkleinerung der Hilfsluftpumpe namhaft gehoben, und darf man nach den Erfahrungen an Großdampfmaschinen erwarten, daß derselbe bei noch größeren Einheiten eine weitere Steigerung erfährt.

Hier ist nun der Ort, den Vorschlag von Friedenthal zu erörtern, der in thermischer Beziehung über das bisher Erreichte hinaus Gewinn versprechen zu können glaubt. Friedenthal verdampft zunächst in einem möglichst vollkommenen

misch aus. Wendet man auf die zwischen den Schnitten *A*, *B* und *C* enthaltene Gemischmenge das Prinzip der Energie an, so findet man das einfache Gesetz

$$G_1 \lambda_1 + G_2 \lambda_2 = G_1 \lambda_1' + G_2 \lambda_2',$$

worin  $\lambda_1$  die Dampfwärme,  $\lambda_2$  die »Luftwärme« =  $c_p T$  vor der Mischung,  $\lambda_1'$ ,  $\lambda_2'$  dasselbe nach der Mischung,  $G_1$ ,  $G_2$  das Dampf- bzw. Luftgewicht bedeuten. Als weitere Beziehung ist die Gleichheit der Volumen der sich gegenseitig durchdringenden Dampf- und Luftmengen herbeizuziehen:

$$G_1 v_1' = G_2 v_2'.$$

Man berechnet nun die Entropie  $S = G_1 s_1 + G_2 s_2$  vor und die Entropie  $S' = G_1 s_1' + G_2 s_2'$  nach der Mischung. Das Produkt der Entropiezunahme  $S' - S$  und der absoluten Temperatur  $T_0$ , d. h.  $(S' - S) T_0$ , gibt den Arbeitsverlust an, der bei Expansion auf die Temperatur  $T_0$  durch die Mischung bedingt ist. So findet sich für  $G_1 = 1$ ,  $G_2 = 2$ , 10 at abs. Anfangsdruck, gesättigten Dampf, Luft von gleicher Temperatur nach der Diffusion: der Teildruck des Dampfes 4,3 at, derjenige der Luft 5,7, die gemeinsame Temperatur 446° abs., die Zunahme der Entropie 0,16 Einheiten, mithin bei Expansion auf 0°C ein Verlust von  $(S' - S) T_0 = \text{rd. } 44 \text{ WE}$ .

Gegenstromkessel die als Brennstoff zu verwendende Flüssigkeit und zwar, soweit dies durchführbar, bei konstantem Volumen, um die Temperatur auf das erreichbare höchste Maximum (bis über die kritische Temperatur hinaus) zu bringen. Die Expansion im Zylinder einer Dampfmaschine wird bis zum Atmosphärendruck fortgesetzt, wobei Friedenthal zugleich die atmosphärische Temperatur zu erreichen, ja zu unterschreiten hofft. Nehmen wir das erstere an, so wird der dampfförmige Teil des expandierenden Gemisches unter den Kessel geleitet und hier verbrannt, der tropfbar flüssige Teil nebst notwendigem Ersatz in den Kessel gepumpt; freilich fehlt die Angabe, wie die Trennung zu erfolgen hat. Die Verbrennungswärme muß gerade hinreichen, um die pro Spiel notwendige Menge Flüssigkeit zu verdampfen. Ist ein Brennstoff, der dieser Bedingung genügt, gefunden, (oder durch Mischung hergestellt), so wird der ganze Heizwert in Arbeit umgewandelt. Sollte bei der Expansion die Temperatur der Atmosphäre unterschritten werden, so kann man noch Wärme aus der Umgebung entlehnen und mit in Arbeit verwandeln, doch fehlen uns die Unterlagen zu einer genaueren Prüfung vorläufig ganz. Die Idee von Friedenthal beansprucht zunächst keine praktische Ausführung, welche schon in den ungeheuren Drücken der isovolumetrischen Verdampfung in der Tat auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen dürfte.

Ich habe es deshalb vorgezogen, diese Idee auf den Verbrennungsmotor wie oben geschildert anzuwenden, wobei sich praktisch auch schwere Bedenken geltend machen. Denken wir uns den Brennstoff beispielsweise durch ein Gemisch von Benzin oder Spiritus und Wasser gebildet, so ergibt eine Rechnung, daß die beizugebende Menge des Wassers sehr groß werden muß, um die Abwärme ganz durch die Anwärmung und Verdampfung der neuen Saugladung aufzunehmen. Die Brennfähigkeit sehr stark verdünnter Gemische darf aber selbst im Diesel-Motor angezweifelt werden, und so werden die Vorteile der Friedenthalschen Idee im allgemeinen nicht voll ausnutzbar. Selbstverständlich kann nie die Rede davon sein, einen Wirkungsgrad = 1 zu erzielen, da die Abkühlungs- und Strahlungsverluste stets einen bedeutenden Verlust involvieren, allein die Idee ist einer gründlichen und baldigen Prüfung durchaus wert.

Wenn auch große Schwierigkeiten zu überwinden sind, so winken doch, Dank der Mitarbeit von Wissenschaft und Praxis, den mit flüssigem Brennstoff arbeitenden Motoren recht erfreuliche Aussichten. Demgegenüber ist die Ausnützung der Kohle, unseres hauptsächlichlichen Energieträgers, noch eine ungemein mangelhafte, und auch wenn es gelingen sollte, jede Art von Kohle zu vergasen, dürfte sie kaum an die heutige Ausbeute des Diesel-Motors heranreichen wegen des Verlustes, welche die Vergasung notwendigerweise mit sich

bringt. Es entsteht mithin die berechtigte Frage, ob nicht die eingeschlagene Richtung im ganzen falsch sei, und ob wir nicht den Motorenbau überhaupt aufzugeben hätten, um uns den Probleme der unmittelbaren Erzeugung von Elektrizität aus Kohle zuzuwenden. Um über den Stand dieser Frage von berufener Seite Aufklärung zu erhalten, habe ich mich an den bekannten Elektrochemiker R. Lorenz-Zürich gewandt, dem ich folgende im Auszug wiedergegebene Mitteilungen verdanke.

Damit ein Stoff in einem galvanischen Element elektromotorisch wirksam werden könne, muß er im Zustande der sogenannten Ionen in Lösung übergehen. Es ist nun wohl gelungen, Kohlenstoff in Flüssigkeiten aufzulösen, allein es ist fraglich, ob er in der Lösung in Form von Ionen, d. h. elektrisch geladenen Atomen oder Atomgruppen, besteht. Demgemäß sind auch keine oder nur zweifelhafte elektromotorische Kräfte wahrgenommen worden. Dasselbe ist der Fall mit dem Kohlenoxyd-Element, und es darf hier die elektromotorische Wirkung sogar als unwahrscheinlich bezeichnet werden. Es bieten sich außerdem mittelbare Verfahren dar, wie z. B. der von Nernst stammende Vorschlag, die Energie der Kohle durch Verhüttung im Hochofen auf Eisen oder Zink zu übertragen und diese Metalle in galvanischen Elementen aufzuzehren. Es müßten indessen Elemente konstruiert werden, in denen die besagten Metalle durch Kohlenstoff reduzierbare Salze bilden. Dies ist der Fall bei den von Lorenz entdeckten » Fällungselementen«, deren wissenschaftliche Untersuchung jedoch noch nicht abgeschlossen ist. Schliesslich würde man auf mittelbarem Wege die Abnahme der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur in den umkehrbaren galvanischen Ketten (Akkumulatoren) derart benutzen können, daß man ein hochehitztes Element bei kleiner Spannung unter Wärmezufuhr ladet, hierauf abkühlt und unter Wärmeableitung bei großer Spannung entladet. Der Unterschied der zu- und abgeleiteten Wärmemengen würde gemäß dem Carnotschen Satze in elektrische Energie umgewandelt. Indes selbst die mit geschmolzenen Elektrolyten arbeitenden Elemente würden nur im Bereiche von etwa 500 bis 860° C verwendbar sein, was einen theoretischen Wirkungsgrad von rd. 35 vH bedeutet; dazu aber sind die zum Erwärmen und Abkühlen der Elemente notwendigen Wärmemengen gegenüber der nutzbar verwerteten so groß, daß die unvermeidlichen Verluste den Wirkungsgrad zu stark beeinflussen müßten. Es wäre mithin eine Vereinigung mit andern Elementen notwendig, um sowohl den Sprung bis auf die Temperatur der Umgebung auszunutzen, als auch den Wärmeinhalt der mit etwa 900° C entweichenden Feuergase des ersten Prozesses aufzunehmen. Es stehen also schon für den ersten Versuch höchst verwickelte und umfangreiche Anordnungen in Aussicht.

Wenn ich die sehr bemerkenswerten Mitteilungen des Hrn. Lorenz recht auslege, so ist mithin für die unmittelbare Umwandlung noch überhaupt eine Reihe von Vorfragen unerledigt; die mittelbare Umsetzung bedingt aber ausgedehnte und verwickelte Anlagen, ohne, soweit die Frage sich überblicken läßt, für einen wirtschaftlichen Gewinn Gewähr leisten zu können.

Es droht also dem Motorenbau noch keine unmittelbare Gefahr; allein wir sind in der Verteidigung unserer Stellung ganz auf die eigene Kraft angewiesen. Die Augen vieler richten sich auf einen Motor, der den hohen thermischen Effekt der Gasmaschine mit den konstruktiven Vorzügen der Dampfturbine zu vereinigen in der Lage wäre, und aus diesem Grunde zum Schlusse kurz besprochen werden soll. Es ist dies

### Die Gasturbine.

Der einfachste Arbeitsprozess, der sich für die Gasturbine naturgemäß von selbst darbietet, ist der folgende: Gas und Luft werden getrennt auf einen mehr oder weniger hohen Druck durch Kompressoren verdichtet, in einer Kammer bei konstanter Pressung verbrannt und unmittelbar der Turbine zugeführt. Das System der Turbine ist theoretisch gleichgültig; die Expansion wird vorerst bis auf den Atmosphärendruck fortgesetzt. Dieser Prozess entspricht dem wohlbekannten Zyklus von Brayton, von welchem die Gasmotorentheorie nachweist, daß er genau denselben thermischen Wirkungsgrad besitzt, wie der gewöhnliche »Viertakt«prozess, falls bei letzterem der Enddruck der Kompression gleich hoch ist, wie der Verbrennungsdruck bei Brayton. Die ideale Gasturbine würde mithin die gleiche Oekonomie darbieten wie der ideale Viertaktmotor, und die Frage ist nur, wie die Arbeits- und Abkühlungsverluste der beiden bei der praktischen Verwirklichung ausfallen? Die Kompressionsarbeit für Gas und Luft ist hüben und drüben gleich groß, der zu ihrer Verrichtung notwendige Arbeitsaufwand wohl nicht wesentlich verschieden, wenn wir beachten, daß das Gestänge des Turbinenkompressors zwar leichter ist, aber ein Zahnradvorgelege bedingt. Die übrigen Arbeitsverluste des Kolbenmotors werden aber wesentlich kleiner ausfallen da die Reibung in den Düsen, den Schaufeln und nicht zuletzt die des rotierenden Rades wohl mindestens die Beträge annimmt wie bei Laval-Turbinen. Andere als einstufige, d. h. mit Düsen arbeitende Turbinen sind wegen der hohen Temperaturen ausgeschlossen. Während aber im Gasmotor die Expansionsarbeit mit über 80 vH Wirkungsgrad auf die Welle übertragen wird, können wir bei diesen Turbinen wohl kaum auf mehr wie 60 vH rechnen. Die Abkühlungsverluste könnten zwar kleiner werden wie beim Gasmotor, falls es gelänge,

die Verbrennungskammer innerlich geeignet zu isolieren, so daß die Wasserkühlung derselben entbehrlich wäre. Allein ein Betrieb dieser Art ergäbe sehr hohe Endtemperaturen der Expansion, welche die Erhaltung der Radschaufeln fraglich machen würden. Mischt man der Verbrennungsluft zerstäubtes Wasser bei, so kann die Temperatur tiefer gehalten werden, allein auch der Wirkungsgrad sinkt in gleichem Maße<sup>1)</sup>. Die Verwendung der Abwärme zur Verdampfung des Einspritzwassers würde hier helfend eingreifen, aber alles in allem erscheint es fraglich, ob eine Gasturbine, die mit dem beschriebenen Prozeß arbeitet, Aussichten besitzt, um mit dem Kolbengasmotor in erfolgreichen Wettbewerb zu treten.

Nicht viel anders steht es mit dem ebenfalls schon vorgeschlagenen Arbeitsverfahren, die Turbine mit einem gewöhnlichen Viertaktmotor derart zu verbinden, daß die Explosionsgase während der Expansionsperiode auf die Turbine geleitet und gleichzeitig hier und im Zylinder Arbeit leisten müssten. Man könnte die Expansion bis auf den Atmosphärendruck fortsetzen und hierdurch scheinbar das leicht erreichen, was der Verbundgasmotor bis jetzt wegen der zu starken Abkühlung der Arbeitsgase vergeblich zu verwirklichen gestrebt hat. Dem theoretischen Gewinn steht indessen die viel schlechtere Ausnutzung der Expansionsarbeit in der Turbine entgegen, deren Wirkungsgrad hier noch herabgezogen wird durch die intermittierende Arbeitsweise (Vermehrung der Radreibung) und durch die höheren Verluste in der Düse, die mit stark schwankendem Druckverhältnis arbeiten muss.

---

<sup>1)</sup> Siehe die ausführlichen Rechnungen von Lorenz in Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1900 S. 252, welche auch für veränderliche spezifische Wärmen zu ungefähr gleichen Ergebnissen führen.



Additional material from *Die Dampfturbinen und die Aussichten der Wärmekraftmaschinen*

ISBN 978-3-662-36140-5 (978-3-662-36140-5\_OSFO4),  
is available at <http://extras.springer.com>



Verlag von Julius Springer in Berlin N.

---

## **Hilfsbuch für Dampfmaschinen-Techniker.**

Unter Mitwirkung von Professor A. Kás verfasst und herausgegeben

von **Joseph Hrabák,**

Oberbergrat und Professor an der k. k. Bergakademie zu Pribram.

**Dritte Auflage. In zwei Teilen.**

*Mit in den Text gedruckten Figuren.*

Zwei Bände. In Leinwand gebunden Preis M. 16,—.

---

## **Der Dampfkessel-Betrieb.**

Allgemeinverständlich dargestellt.

Von **E. Schlippe,**

Königlicher Gewerberat zu Dresden.

**Dritte, vermehrte Auflage.**

*Mit zahlreichen Abbildungen im Text.*

In Leinwand gebunden Preis M. 5,—.

---

## **Die Kontrolle des Dampfkesselbetriebes**

in Bezug auf

### **Wärmeerzeugung und Wärmeverwendung.**

Von **Paul Fuchs,**

Ingenieur der Berliner Elektrizitäts-Werke.

*Mit 16 in den Text gedruckten Figuren.*

Preis M. 2,40.

---

## **Dampfkessel-Feuerungen**

zur Erzielung einer möglichst rauchfreien Verbrennung.

Im Auftrage des Vereines deutscher Ingenieure bearbeitet von

**F. Haier,**

Ingenieur in Stuttgart.

*Mit 301 Figuren im Text und auf 22 lithographischen Tafeln.*

In Leinwand gebunden Preis M. 14,—.

---

## **Die Wärmeausnutzung bei der Dampfmaschine.**

Von **W. Lynen,**

Aachen.

Preis M. 1,—.

---

## **Die Steuerungen der Dampfmaschinen.**

Von **Carl Leist,**

Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin.

Zugleich als

**Vierte Auflage des gleichnamigen Werkes von Emil Blaha.**

(Zur Zeit vergriffen; neue Auflage unter der Presse.)

---

## **Der Reguliervorgang bei Dampfmaschinen.**

Von **Dr.-Ing. B. Rulf.**

*Mit 15 in den Text gedruckten Figuren und 3 Tafeln.*

Preis M. 2,—.

---

**Zu beziehen durch jede Buchhandlung.**

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

---

## **Die Bedingungen für eine gute Regulierung.**

Eine Untersuchung der  
Regulierungsvorgänge bei Dampfmaschinen und Turbinen.  
Von **J. Isaachsen**, Ingenieur.  
*Mit 34 in den Text gedruckten Figuren.*  
Preis M. 2,—.

---

## **Die Dampfkessel.**

Ein Lehr- und Handbuch für Studierende Technischer Hochschulen, Schüler Höherer Maschinenbauschulen und Techniken, sowie für Ingenieure und Techniker.  
Von **F. Tetzner**,  
Oberlehrer an den Königl. vereinigten Maschinenbauschulen zu Dortmund.  
*Mit 95 in den Text gedruckten Figuren und 34 lithographischen Tafeln.*  
In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.

---

## **Berechnung der Leistung und des Dampfverbrauches der Einzylinder-Dampfmaschinen.**

Ein Taschenbuch zum Gebrauch in der Praxis.  
Von **Joseph Pechan**,  
Professor des Maschinenbaues an der k. k. Staatsgewerbeschule in Reichenberg.  
*Mit 6 Textfiguren und 38 Tabellen.*  
In Leinwand gebunden Preis M. 5,—.

---

## **Die Dampfkraftanlagen auf der Industrie- und Gewerbeausstellung zu Düsseldorf 1902.**

Von **Heinrich Dubbel**,  
Ingenieur.  
*Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren und 5 Tafeln.*  
Preis M. 3,—.

---

## **Geschichte der Dampfmaschine.**

Ihre kulturelle Bedeutung, technische Entwicklung und ihre großen Männer.  
Von **Konrad Matschoss**,  
Ingenieur.  
*Mit 188 Abbildungen im Text, 2 Tafeln und 5 Bildnissen.*  
In Leinwand gebunden Preis M. 10,—.

---

## **Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren.**

Handbuch für Konstrukteure und Erbauer von Gas- u. Oelkraftmaschinen.  
Von **Hugo Güldner**,  
Oberingenieur, Gerichtlich vereideter Sachverständiger für Motorenbau.  
*Mit 12 Konstruktionstafeln und 750 Textfiguren.*  
In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

---

**Zu beziehen durch jede Buchhandlung.**