DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN
BAND XXVII

D. HILBERT UND W. ACKERMANN

GRUNDZÜGE DER THEORETISCHEN LOGIK

ZWEITE AUFLAGE

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

G. D. BIRKHOFF · W. BLASCHKE · R. COURANT
R. GRAMMEL · M. MORSE · F. K. SCHMIDT
B. L. VAN DER WAERDEN

BAND XXVII

GRUNDZÜGE DER THEORETISCHEN LOGIK

VON

D. HILBERT UND W. ACKERMANN

ZWEITE AUFLAGE

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1938

GRUNDZÜGE DER THEORETISCHEN LOGIK

VON

D. HILBERT
GEHEIMER REGIERUNGSRAT
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

UND

W. ACKERMANN
BURGSTEINFURT

ZWEITE, VERBESSERTE AUFLAGE

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1938

Die redaktionelle Leitung der Sammlung
DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
liegt in den Händen von
Prof. Dr. F. K. SCHMIDT, Jena, Abbeanum,

für das angelsächsische Sprachgebiet
in den Händen von
Prof. Dr. R. COURANT, New Rochelle (N.Y.) USA.,
142 Calton Road

ISBN 978-3-662-41780-5 ISBN 978-3-662-41928-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41928-1

URSPRÜNGLICH ERSCHIENEN BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN 1938

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch behandelt die theoretische Logik (auch mathematische Logik, Logikkalkül oder Algebra der Logik genannt) in einer Form, wie ich sie in meinen Universitätsvorlesungen über die Prinzipienfragen in der Mathematik (Prinzipien der Mathematik, Wintersemester 1917/18; Logikkalkül, Wintersemester 1920; Grundlagen der Mathematik, Wintersemester 1921/22) entwickelt und verwendet habe. Bei der Vorbereitung der genannten Vorlesungen bin ich von meinem Kollegen P. Bernays wesentlich unterstützt und beraten worden; derselbe hat diese Vorlesungen auch aufs sorgfältigste ausgearbeitet. — Unter Benutzung und Ergänzung des so entstandenen Materials hat W. Ackermann, ein Schüler von mir, der sich inzwischen durch selbständige, bedeutende Arbeiten auf dem Gebiete der Grundlagen der Mathematik hervorgetan hat, die vorliegende Gliederung und definitive Darstellung des Gesamtstoffes durchgeführt.

Das Buch soll zugleich zur Vorbereitung und Erleichterung des Verständnisses für ein weiteres Buch dienen, das P. Bernays und ich demnächst herausgeben wollen und das die Grundlagen der Mathematik nach derjenigen Methode behandelt, wie ich sie ebenfalls unter tätigster Mitwirkung von P. Bernays in einer Reihe von Abhandlungen (Neubegründung der Mathematik, Abhandlungen des mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität, Bd. 1, S. 157. 1922; Die logischen Grundlagen der Mathematik, Math. Ann. Bd. 88, S. 151. 1922; Über das Unendliche, Math. Ann. Bd. 95, S. 161. 1925) dargestellt habe.

Göttingen, den 16. Januar 1928.

Hilbert.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der zweiten Auflage der „Grundzüge der theoretischen Logik" sind Aufbau und Gang der ersten Auflage durchweg beibehalten. Die in der Zwischenzeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritte machten aber eine genaue Durchsicht und die Anbringung verschiedener Verbesserungen und Zusätze erforderlich, ohne daß der dem Buch gesteckte Rahmen dabei überschritten wurde.

Wesentlich unverändert geblieben sind das I. und II. Kapitel, abgesehen von einer kurzen Berücksichtigung der neueren Forschungen zur Axiomatik des Aussagenkalküls im I. Kapitel. Von einem Ausbau der Darstellung des Klassenkalküls im II. Kapitel, der an und für sich wünschenswert gewesen wäre, wurde noch abgesehen, da dieser Kalkül im Gesamtaufbau des Buches doch eine isolierte Stellung einnimmt. Im III. Kapitel ist vor allem die Fassung der Ableitungsregeln für den Prädikatenkalkül, deren bisherige Formulierung nicht genau genug war, verbessert worden. Beweise für die Unabhängigkeit und Vollständigkeit des dort benutzten Axiomensystems wurden neu aufgenommen, der Abschnitt über das Entscheidungsproblem durch Berücksichtigung neuerer Ergebnisse ergänzt. Das IV. Kapitel konnte insofern eine Kürzung erfahren, als ein Eingehen auf die verzweigte Typentheorie von Russell und Whitehead nicht mehr nötig war, nachdem diese ziemlich allgemein aufgegeben worden ist. Dafür hat der Aufbau des Prädikatenkalküls der zweiten Stufe und des Stufenkalküls überhaupt eine wesentliche Verbesserung und Abrundung erfahren.

Die Terminologie wurden den „Grundlagen der Mathematik" von Hilbert und Bernays angepaßt. So ist z. B. der Ausdruck „Funktionenkalkül" überall durch „Prädikatenkalkül" ersetzt worden. Die Ausdrücke „logische Summe" und „logisches Produkt" sind, dem allgemeinen logistischen Sprachgebrauch entsprechend, überall in „Konjunktion" und „Disjunktion" verändert worden.

Herrn P. Bernays-Zürich, der auch die Fahnenkorrektur gelesen hat, bin ich für zahlreiche Ratschläge besonders verpflichtet. Verschiedene Anregungen und Hinweise verdanke ich auch den Herren G. Gentzen-Göttingen, der auch das Manuskript durchgesehen hat, Arnold Schmidt-Marburg und H. Scholz-Münster. Ihnen allen gilt mein herzlichster Dank.

Burgsteinfurt, im November 1937.

W. Ackermann.

Inhaltsverzeichnis.

Viertes Kapitel.

Der erweiterte Prädikatenkalkül.

Einleitung.

Die *theoretische Logik*, auch *mathematische* oder *symbolische Logik* genannt, ist eine Ausdehnung der formalen Methode der Mathematik auf das Gebiet der Logik. Sie wendet für die Logik eine ähnliche Formelsprache an, wie sie zum Ausdruck mathematischer Beziehungen schon seit langem gebräuchlich ist. In der Mathematik würde es heute als eine Utopie gelten, wollte man beim Aufbau einer mathematischen Disziplin sich nur der gewöhnlichen Sprache bedienen. Die großen Fortschritte, die in der Mathematik, z. B. in der Algebra, seit der Antike gemacht worden sind, sind zum wesentlichen Teil mit dadurch bedingt, daß es gelang, einen brauchbaren und leistungsfähigen Formalismus zu finden. — Was durch die Formelsprache in der Mathematik erreicht wird, das soll auch in der theoretischen Logik durch diese erzielt werden, nämlich eine exakte, wissenschaftliche Behandlung ihres Gegenstandes. Die logischen Sachverhalte, die zwischen Urteilen, Begriffen usw. bestehen, finden ihre Darstellung durch Formeln, deren Interpretation frei ist von den Unklarheiten, die beim sprachlichen Ausdruck leicht auftreten können. Der Übergang zu logischen Folgerungen, wie er durch das Schließen geschieht, wird in seine letzten Elemente zerlegt und erscheint als formale Umgestaltung der Ausgangsformeln nach gewissen Regeln, die den Rechenregeln in der Algebra analog sind; das logische Denken findet sein Abbild in einem *Logikkalkül*. Dieser Kalkül macht die erfolgreiche Inangriffnahme von Problemen möglich, bei denen das rein inhaltliche, logische Denken prinzipiell versagt. Zu diesen gehört z. B. die Frage, wie man die Sätze charakterisieren kann, die aus gegebenen Voraussetzungen überhaupt gefolgert werden können. — Eine besondere Bedeutung hat der Logikkalkül in den letzten Jahrzehnten noch bekommen, indem er sich zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel der mathematischen Grundlagenforschung entwickelt hat.

Die Idee einer mathematischen Logik wurde zuerst von LEIBNIZ in klarer Form gefaßt. Die ersten Ergebnisse erzielten A. DE MORGAN (1806—1876) und G. BOOLE (1815—1864). Auf BOOLE geht die gesamte spätere Entwicklung zurück. Unter seinen Nachfolgern bereicherten W. S. JEVONS (1835—1882) und vor allem C. S. PEIRCE (1839—1914) die junge Wissenschaft. Die verschiedenen Resultate seiner Vorgänger wurden systematisch ausgebaut und vervollständigt von ERNST SCHRÖDER in seinen „Vorlesungen über die Algebra der Logik" (1890—1895), die einen gewissen Abschluß der von BOOLE ausgehenden Entwicklungsreihe darstellen.

Teilweise unabhängig von der Entwicklung der Boole-Schröderschen Algebra erfuhr die logische Symbolik neue Anregung durch die Bedürfnisse der Mathematik nach exakter Grundlegung und strenger axiomatischer Behandlung. G. FREGE veröffentlichte seine „Begriffsschrift" (1879) und seine „Grundgesetze der Arithmetik" (1893—1903). G. PEANO und seine Mitarbeiter begannen 1894 mit der Herausgabe des „Formulaire de Mathématiques", in dem alle mathematischen Disziplinen im Logikkalkül dargestellt werden sollten. Das Erscheinen der „Prinzipia mathematica" (1910—1913) von A. N. WHITEHEAD und B. RUSSELL bildet einen Höhepunkt dieser Entwicklung. — In jüngster Zeit hat HILBERT in einer Reihe von Abhandlungen und Universitätsvorlesungen den Logikkalkül dazu verwendet, um auf einem neuen Wege zu einem Aufbau der Mathematik zu gelangen, der die Widerspruchsfreiheit der zugrunde gelegten Annahmen erkennen läßt. Der erste zusammenfassende Bericht über diese Untersuchungen ist jetzt in dem ersten Bande der „Grundlagen der Mathematik" (1934) von D. HILBERT und P. BERNAYS erschienen.

Erstes Kapitel.

Der Aussagenkalkül.

Einen ersten, unentbehrlichen Bestandteil der mathematischen Logik bildet der sogenannte Aussagenkalkül. Unter einer Aussage ist jeder Satz zu verstehen, von dem es sinnvoll ist, zu behaupten, daß sein Inhalt richtig oder falsch ist. Aussagen sind z. B.: „Die Mathematik ist eine Wissenschaft“, „der Schnee ist schwarz“, „9 ist eine Primzahl“. In dem Aussagenkalkül wird auf die feinere logische Struktur der Aussagen, die etwa in der Beziehung zwischen Prädikat und Subjekt zum Ausdruck kommt, nicht eingegangen, sondern die Aussagen werden als Ganzes in ihrer logischen Verknüpfung mit anderen Aussagen betrachtet.

§ 1. Einführung der logischen Grundverknüpfungen.

Aussagen können in bestimmter Weise zu neuen Aussagen verknüpft werden. Z. B. kann man aus den beiden Aussagen „2 ist kleiner als 3“, „der Schnee ist schwarz“ die neuen Aussagen bilden: „2 ist kleiner als 3 *und* der Schnee ist schwarz“, „2 ist kleiner als 3 *oder* der Schnee ist schwarz“, „*wenn* 2 kleiner als 3 ist, *so* ist der Schnee schwarz“. Endlich kann man aus „2 ist kleiner als 3“ die neue Aussage bilden „2 ist *nicht* kleiner als 3“, die das logische Gegenteil der ersten Aussage ausdrückt.

Diese Verknüpfungen von Aussagen sind sprachlich durch die Worte „*und*“, „*oder*“, „*nicht*“, „*wenn — so*“ gegeben.

Wir wollen nun diese Grundverknüpfungen von Aussagen durch eine geeignete Symbolik darstellen. Als Bezeichnungen für Aussagen verwenden wir große lateinische Buchstaben: $X, Y, Z, U, \ldots$ Zur Wiedergabe der logischen Verknüpfung der Aussagen führen wir die folgenden 5 Zeichen ein:

1. $\bar{X}$ (lies „X *nicht*“) bezeichnet das kontradiktorische Gegenteil von X. $\bar{X}$ bedeutet die Aussage, die richtig ist, wenn X falsch ist, und die falsch ist, wenn X richtig ist.

2. $X \mathbin{\&} Y$ (lies „X *und* Y“) bezeichnet die Aussage, die dann und nur dann richtig ist, wenn sowohl X als Y richtig ist.

3. $X \vee Y$ (lies „X *oder* Y“) bezeichnet die Aussage, die dann und nur dann richtig ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen X, Y richtig ist.

4. $X \rightarrow Y$ (lies „*wenn* X, *so* Y“) bezeichnet die Aussage, die dann und nur dann falsch ist, wenn X richtig und Y falsch ist.

5. $X \sim Y$ (lies „X *gleichwertig* Y"), auch wohl $X \rightleftarrows Y$ oder $X \leftrightarrow Y$ geschrieben, bezeichnet die Aussage, die dann und nur dann richtig ist, wenn X und Y beide richtig oder X und Y beide falsch sind. $X \sim Y$ bedeutet also, daß X und Y beide denselben Wahrheitswert haben.

Zu 3. bemerken wir, daß die Verknüpfung „X oder Y" nicht mit dem ausschließenden oder, im Sinne des lateinischen *aut* — *aut*, verwechselt werden darf. Dieses „oder" hat vielmehr die Bedeutung von „oder auch" im Sinne des lateinischen *vel*, d. h. die Möglichkeit des Zusammenbestehens von X und Y wird mit zugelassen[1].

Die Beziehung „wenn X, so Y" ist nicht so aufzufassen, als ob damit ein Verhältnis von Grund und Folge bezeichnet werden soll. Vielmehr ist die Aussage $X \rightarrow Y$ immer schon dann richtig, wenn X eine falsche oder auch, wenn Y eine richtige Aussage ist.

So haben z. B. folgende Aussagen als richtig zu gelten:

Wenn „2mal 2 gleich 4", so „ist der Schnee weiß".
Wenn „2mal 2 gleich 5", so „ist der Schnee weiß".
Wenn „2mal 2 gleich 5", so „ist der Schnee schwarz".

Falsch wäre dagegen die Aussage: Wenn „2mal 2 gleich 4", so „ist der Schnee schwarz". Immerhin hat die Beziehung $X \rightarrow Y$ mit der Beziehung von Grund und Folge das gemeinsam, daß im Falle der Richtigkeit von $X \rightarrow Y$ aus dem Bestehen von X das Bestehen von Y entnommen werden kann.

Die Beziehung $X \sim Y$ hat nicht etwa den Sinn, daß X mit Y gleichbedeutend ist, sie besteht vielmehr zwischen irgend zwei richtigen und auch zwischen irgend zwei falschen Aussagen. Z. B. sind die Aussagen

(2 und 2 gleich 4) $\sim$ (der Schnee ist weiß)

$(2 > 3) \sim$ (der Schnee ist schwarz)

richtig.

Besonders wichtig ist noch die allgemeine Bemerkung, daß nach unserer Definition der logischen Grundverknüpfungen die *Richtigkeit oder Falschheit einer Aussagenverknüpfung nur von der Richtigkeit und Falschheit der verknüpften Aussagen, nicht aber von ihrem Inhalt abhängig ist.* Bezeichnen wir zur Abkürzung eine richtige Aussage mit $\mathfrak{R}$ und eine falsche Aussage mit $\mathfrak{F}$, so ist z. B. die Verknüpfung $\rightarrow$ dadurch gekennzeichnet, daß die Aussagen $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ richtig sind, $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F}$ aber falsch ist. Für die Verknüpfung & ist $\mathfrak{R}$ & $\mathfrak{R}$ richtig, $\mathfrak{R}$ & $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ & $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$ & $\mathfrak{F}$ sämtlich falsch. Weiter ist $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{R}$ richtig, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F}$ falsch. Die Verbindung $\sim$ ist dadurch gekennzeichnet, daß $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{F}$ richtig, dagegen $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{R}$ falsch sind. Endlich

[1] Das ausschließende „entweder — oder" kann durch eine Kombination der Grundzeichen ausgedrückt werden. „Entweder X oder Y" ist die Negation von $X \sim Y$ und wird dargestellt durch $\overline{X \sim Y}$.

ist $\overline{\mathfrak{R}}$ falsch, $\overline{\mathfrak{F}}$ richtig. Wir sind demnach berechtigt, die Grundverknüpfungen als Wahrheitsfunktionen aufzufassen, d. h. als bestimmte Funktionen, für die als Argumente und als Funktionswerte nur $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ in Frage kommen.

Zur formalen Kennzeichnung der eingeführten Operationen ist zu bemerken, daß die Negation $\overline{X}$ allein eingliedrig ist, während die übrigen Operationen alle zweigliedrig sind.

§ 2. Äquivalenzen; Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen.

Durch mehrfache Anwendung der Grundverknüpfungen lassen sich aus gegebenen Aussagen kompliziertere Aussagenverbindungen bilden. Z. B. entsteht so aus den Grundaussagen X, Y, Z die zusammengesetzte Aussage $\big((X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow Z)\big) \,\&\, (X \vee Z)$. Jede derartige Aussagenverbindung stellt, genau wie die Grundverknüpfungen, eine bestimmte Wahrheitsfunktion dar. Bei der obigen Aussagenverbindung haben wir für X, Y, Z die acht möglichen Werte $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}, \mathfrak{F}$; $\mathfrak{R}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}$; $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R}$; $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}$. Jedem dieser Werte wird durch

$$\big((X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow Z)\big) \,\&\, (X \vee Z)$$

entweder der Wert $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{F}$ zugeordnet. Z. B. entspricht der Kombination $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}, \mathfrak{F}$ der Wert $\mathfrak{F}$. Wir können nämlich für

$$\big((\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{R}) \,\&\, (\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{F})\big) \,\&\, (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{F})$$

gemäß der Definition der Grundverknüpfungen

$$(\mathfrak{R} \,\&\, \mathfrak{F}) \,\&\, \mathfrak{F}$$

setzen, und weiter $\mathfrak{F} \,\&\, \mathfrak{F}$ und endlich $\mathfrak{F}$.

Es ist nun bemerkenswert, daß verschiedene dieser Grundverknüpfungen gleichbedeutend sind, d. h. dieselbe Wahrheitsfunktion darstellen. So ist $\overline{\overline{X}}$ gleichbedeutend mit X; die doppelte Verneinung ist dasselbe wie die Bejahung. In der Tat ergibt $\overline{\overline{X}}$ ebenso wie X für eingesetztes $\mathfrak{R}$ den Wert $\mathfrak{R}$ und für eingesetztes $\mathfrak{F}$ den Wert $\mathfrak{F}$. Solche gleichbedeutende Aussagenverknüpfungen wollen wir im folgenden „äquivalent" nennen. Zur Abkürzung schreiben wir

(1) $$\overline{\overline{X}} \text{ äq } X.\,*$$

Wir wollen im folgenden eine Reihe weiterer Äquivalenzen zusammenstellen. Zunächst zeigt sich in der Wirkungsweise der Zeichen & und v eine Analogie mit den Zeichen + und · in der Algebra. Es bestehen nämlich die folgenden Äquivalenzen:

* Es sei hervorgehoben, daß die hier gebrauchte Schriftabkürzung äq nicht zu unseren logischen Symbolen gehört.

(2) $$X \mathbin{\&} Y \text{ äq } Y \mathbin{\&} X,$$

(3) $$X \mathbin{\&} (Y \mathbin{\&} Z) \text{ äq } (X \mathbin{\&} Y) \mathbin{\&} Z,$$

(4) $$X \lor Y \text{ äq } Y \lor X,$$

(5) $$X \lor (Y \lor Z) \text{ äq } (X \lor Y) \lor Z,$$

(6) $$X \lor (Y \mathbin{\&} Z) \text{ äq } (X \lor Y) \mathbin{\&} (X \lor Z).$$

Die Richtigkeit dieser (und aller sonstigen) Äquivalenzen bestätigt man, wie aus dem Gesagten schon hervorgeht, auf die folgende Weise: Man nimmt alle möglichen Kombinationen, die sich aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}$ für die Grundaussagen bilden lassen, und überzeugt sich davon, daß für jede einzelne Kombination jedesmal die beiden Seiten der betrachteten Äquivalenz den gleichen Wahrheitswert ergeben. Diese Nachprüfung sei dem Leser überlassen.

Aus den Äquivalenzen (2) bis (6) ergibt sich ein *kommutatives*, *assoziatives* und *distributives* Gesetz. Wegen dieser Analogie zur Algebra hat man auch $X \mathbin{\&} Y$ als die *logische Summe* und $X \lor Y$ als das *logische Produkt* bezeichnet. Aus den angegebenen Gesetzen folgt, daß man bei logischen Ausdrücken in ähnlicher Weise wie in der Algebra „ausmultiplizieren" bzw. einen gemeinsamen Faktor ausklammern kann. — Ebensogut hätten wir übrigens $X \mathbin{\&} Y$ als logisches Produkt und $X \lor Y$ als logische Summe bezeichnen können, und diese Bezeichnung ist sogar in der Logik gebräuchlicher. Es gilt nämlich, im Unterschied zur Algebra, noch ein *zweites distributives Gesetz:*

(7) $$X \mathbin{\&} (Y \lor Z) \text{ äq } (X \mathbin{\&} Y) \lor (X \mathbin{\&} Z).$$

Ein Beispiel zur Erläuterung des zweiten distributiven Gesetzes ist folgendes: Es werde die Wetterprophezeiung ausgesprochen: „Es regnet heute, und morgen scheint die Sonne oder übermorgen scheint die Sonne." Dieselbe Behauptung läßt sich auch so ausdrücken: „Es regnet heute, und morgen scheint die Sonne, oder es regnet heute und übermorgen scheint die Sonne". —

Da der Sprachgebrauch in der Logik bezüglich der Worte „Summe" und „Produkt" schwankt, wollen wir lieber diese Ausdrücke überhaupt vermeiden. Wir bezeichnen statt dessen $X \mathbin{\&} Y$ als die *Konjunktion* von X und Y, $X \lor Y$ als die *Disjunktion* von X und Y. Für $X \rightarrow Y$ ist die Bezeichnung *Implikation* gebräuchlich.

Wegen des kommutativen und assoziativen Gesetzes können mehrgliedrige Konjunktionen oder Disjunktionen ohne Klammern geschrieben werden. Ferner setzen wir zur weiteren Ersparung von Klammern fest, daß v *enger bindet als* & und & wieder enger als $\rightarrow$ und $\sim$. Das Zeichen v kann auch ebenso wie in der Algebra das Zeichen $\cdot$ fortgelassen werden.

Für die Vereinfachung von Konjunktionen und Disjunktionen sind die folgenden Äquivalenzen wesentlich,

(8) $$X \mathbin{\&} X \text{ äq } X\,,$$

(9) $$X \vee X \text{ äq } X\,.$$

Es braucht also in einer Konjunktion oder Disjunktion, in der ein Glied mehrfach vorkommt, dieses nur einmal geschrieben zu werden. Ebenso sind die folgenden Äquivalenzen geeignet, kompliziertere Aussagenverbindungen durch einfachere zu ersetzen.

(10) $$X \mathbin{\&} \mathfrak{R} \text{ äq } X\,,$$

(11) $$X \mathbin{\&} \mathfrak{F} \text{ äq } \mathfrak{F}\,.$$

(10) sagt aus, daß ein richtiges Konjunktionsglied stets fortgelassen werden darf, (11), daß eine Konjunktion falsch ist, in der eine falsche Aussage vorkommt.

Entsprechend haben wir für die Disjunktion:

(12) $$X \vee \mathfrak{R} \text{ äq } \mathfrak{R}\,,$$

(13) $$X \vee \mathfrak{F} \text{ äq } X\,.$$

Eine Disjunktion ist richtig, wenn sie ein richtiges Glied enthält. Ein falsches Glied darf in einer Disjunktion fortgelassen werden.

Auch bei der Implikation haben wir ähnliche Beziehungen.

(14) $$\mathfrak{R} \rightarrow X \text{ äq } X\,,$$

(15) $$\mathfrak{F} \rightarrow X \text{ äq } \mathfrak{R}\,.$$

Eine Implikation mit richtigem Vorderglied ist mit ihrem Hinterglied äquivalent. Eine Implikation mit falschem Vorderglied stellt immer eine richtige Aussage dar.

Für die Gleichwertigkeitsbeziehung haben wir endlich

(16) $$X \sim \mathfrak{R} \text{ äq } X\,,$$

(17) $$X \sim \mathfrak{F} \text{ äq } \overline{X}\,.$$

Bei der Verbindung der Negation mit & und v ist die folgende Beziehung wesentlich:

(18) $$\overline{X \mathbin{\&} Y} \text{ äq } \overline{X} \vee \overline{Y}\,.$$

Es bedeute z. B. X die Behauptung: „Das Dreieck △ ist rechtwinklig“, Y bedeute: „Das Dreieck △ ist gleichschenklig“. Der Verbindung $X \mathbin{\&} Y$ entspricht dann die Aussage: „Das Dreieck △ ist rechtwinklig und das Dreieck △ ist gleichschenklig“. Das kontradiktorische Gegenteil hiervon ist die Aussage: „Das Dreieck △ ist nicht rechtwinklig oder das Dreieck △ ist nicht gleichschenklig“, und diese Aussage wird durch $\overline{X} \vee \overline{Y}$ dargestellt.

Ebenso gilt:

(19) $$\overline{X \vee Y} \text{ äq } \overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}\,.$$

Z. B. werde bei einer Prüfung in Mathematik verlangt, daß der Kandidat mindestens in einem der Gebiete Arithmetik und Geometrie beschlagen sei. X bedeute die Aussage: „Der Kandidat kann Arithmetik", Y bedeute: „Der Kandidat kann Geometrie". Die Anforderung des Examens wird von dem Kandidaten erfüllt, wenn $X \vee Y$ richtig ist. Fällt nun der Kandidat bei der Prüfung durch, liegt also das Gegenteil von $X \vee Y$ vor, so bedeutet dies: „Der Kandidat kann nicht Arithmetik und er kann nicht Geometrie," was durch $\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$ dargestellt wird.

Weitere Äquivalenzen ergeben sich, wenn wir die Zeichen $\rightarrow$ und $\sim$ heranziehen.

Da die Aussage $X \rightarrow Y$ bedeutet, daß nicht gleichzeitig X richtig und Y falsch ist, so hat man

(20) $$X \rightarrow Y \text{ äq } \overline{X \,\&\, \bar{Y}}.$$

Unter Benutzung von (18) kann man für $\overline{X \,\&\, \bar{Y}}$ auch $\bar{X} \vee \bar{\bar{Y}}$, und nach (1) auch $\bar{X} \vee Y$ schreiben. Es gilt also auch

(21) $$X \rightarrow Y \text{ äq } \bar{X} \vee Y.$$

Nimmt man in dieser Äquivalenz $\bar{X}$ statt X und benutzt man, daß $\bar{\bar{X}}$ äq X, so erhält man die neue Beziehung

(22) $$X \vee Y \text{ äq } \bar{X} \rightarrow Y.$$

Nach (20) hat man $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ äq $\overline{\bar{Y} \,\&\, \bar{\bar{X}}}$. Nach (1) kann man dafür $\overline{\bar{Y} \,\&\, X}$, nach (2) $\overline{X \,\&\, \bar{Y}}$ und nach (20) $X \rightarrow Y$ setzen. Es ergibt sich also:

(23) $$X \rightarrow Y \text{ äq } \bar{Y} \rightarrow \bar{X}.$$

Bestehen ferner die beiden Aussagen $X \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow X$ zu Recht, so heißt das, daß nicht gleichzeitig X richtig und Y falsch, und auch nicht gleichzeitig Y richtig und X falsch ist. Die Aussage $(X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow X)$ bedeutet also, daß X und Y beide den gleichen Wahrheitswert haben. Mit anderen Worten, es besteht die Äquivalenz

(24) $$X \sim Y \text{ äq } (X \rightarrow Y) \,\&\, (Y \rightarrow X).$$

Aus der Bedeutung der Verknüpfung $\sim$ ergibt sich unmittelbar, daß

(25) $$X \sim Y \text{ äq } Y \sim X,$$

(26) $$X \sim Y \text{ äq } \bar{X} \sim \bar{Y}.$$

Weiter erhält man aus (19) und (18), indem man von beiden Seiten der Äquivalenz das Gegenteil nimmt und benutzt, daß die doppelte Verneinung nach (1) fortgelassen werden kann:

(27) $$X \vee Y \text{ äq } \overline{\bar{X} \,\&\, \bar{Y}},$$

(28) $$X \,\&\, Y \text{ äq } \overline{\bar{X} \vee \bar{Y}}.$$

An diesen Äquivalenzen zeigt sich eine *Vielfachheit in der Darstellung von Aussagenverknüpfungen durch die eingeführten Zeichen.* Es wird so die Frage nahegelegt, ob nicht *einige von den logischen Grund-*

verknüpfungen entbehrlich sind. Das ist tatsächlich der Fall. Aus (24) ergibt sich zunächst, daß man das Zeichen $\sim$ entbehren kann, da sich die Verknüpfung $X \sim Y$ durch $\rightarrow$ und & wiedergeben läßt. Aus (20) und (27) folgt weiter, daß auch $\rightarrow$ und v entbehrlich sind, daß man also mit & und $^{-}$ auskommen kann. Ebenso ergibt sich aus (21) und (28), daß auch v und $^{-}$ genügen. Desgleichen sind $\rightarrow$ und $^{-}$ ausreichend; denn nach (28) läßt sich zunächst & durch v und $^{-}$, und nach (22) v durch $\rightarrow$ und $^{-}$ ausdrücken.

Die Darstellung mit $\rightarrow$ und $^{-}$ hat FREGE, die mit v und $^{-}$ RUSSELL zugrunde gelegt (d. h. unter Benutzung anderer Symbole). Am natürlichsten ist es wohl, von der Darstellung durch & und $^{-}$ auszugehen, wie es in BRENTANOs Urteilslehre geschieht. Besonders zweckmäßig ist der Gebrauch der drei Zeichen &, v, $^{-}$, da sich infolge der Äquivalenzen (2) bis (6) dann eine besonders einfache rechnerische Behandlung der logischen Ausdrücke ergibt.

Mit $\sim$ und $^{-}$ können nicht alle Verknüpfungen dargestellt werden. So ist schon X & Y nicht mit diesen Zeichen darstellbar. Zum Beweis wollen wir zunächst annehmen, daß nur die Grundaussagen X und Y gebraucht werden. Wir betrachten dann die 8 Aussagen:

$$X;\quad Y;\quad \overline{X};\quad \overline{Y};\quad X \sim X;\quad X \sim \overline{X};\quad X \sim Y;\quad X \sim \overline{Y}.$$

Negiert man eine dieser Aussagen, oder setzt man zwei dieser Aussagen durch $\sim$ zusammen, so erhält man wieder Aussagen, die einer der 8 Aussagen äquivalent sind. Z. B. ist $(X \sim Y) \sim Y$ äq Y; $(X \sim Y) \sim (X \sim Y)$ äq $X \sim X$ usw. Da die Grundaussagen X und Y unter den 8 Aussagen selbst vorkommen, so ergibt sich, daß jede Aussage, die aus X und Y nur durch Anwendung von $\sim$ und $^{-}$ gebildet wird, einer dieser 8 Aussagen äquivalent ist. X & Y ist aber keiner dieser Aussagen äquivalent. — Gäbe es eine mit X & Y äquivalente und nur mit $\sim$ und $^{-}$ gebildete Aussagenverknüpfung, die noch die Grundaussagen $Z, U, \ldots, T$ enthält, so müßte die Äquivalenz auch bestehen, falls man $Z, U, \ldots, T$ alle durch X ersetzt. Damit kommen wir auf den vorigen Fall zurück.

Die Negation ist bei der Darstellung der Aussagenverknüpfungen unentbehrlich. Z. B. läßt sich $\overline{X}$ ohne Anwendung der Negation nicht darstellen. Alle mit dem unbestimmten Zeichen X durch Anwendung von &, v, $\rightarrow$, $\sim$ gebildeten Ausdrücke stellen nämlich nur solche Aussagen dar, welche richtig sind, sofern X richtig ist, während $\overline{X}$ den entgegengesetzten Wahrheitswert hat wie X.

Bemerkenswert ist, daß die Verknüpfung v durch $\rightarrow$ allein, ohne Anwendung der Negation ausgedrückt werden kann. Es gilt nämlich

$$X \text{ v } Y \text{ äq } (X \rightarrow Y) \rightarrow Y.$$

Für X & Y ist eine derartige Darstellung nicht möglich.

Als Kuriosität sei erwähnt, daß man auch mit einem einzigen logischen Zeichen auskommt, wie es SHEFFER gezeigt hat. Dieser benutzt als einzige Grundverknüpfung X/Y, in Worten: „X und Y bestehen nicht beide“. X/X ist dann gleichbedeutend mit $\overline{X}$. $X/X\ /\ Y/Y$ ist äquivalent mit $\overline{X}\ /\ \overline{Y}$, d. h. $X \vee Y$. Da man v und $\overline{}$ durch den Shefferschen Strich ausdrücken kann, so gilt das auch für die übrigen Grundverknüpfungen.

Als wichtig für die Darstellung der Gleichwertigkeitsbeziehung seien noch folgende Äquivalenzen erwähnt:

(29) $$X \sim Y \text{ äq } \overline{X} \vee Y \mathbin{\&} \overline{Y} \vee X,$$

(30) $$X \sim Y \text{ äq } (X \mathbin{\&} Y)\,(\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}).$$

(29) geht aus (24) hervor, indem man nach (21) die Verknüpfung $\rightarrow$ durch v und $\overline{}$ ersetzt. (30) ergibt sich unmittelbar aus der Bedeutung von $\sim$.

§ 3. Normalform für die logischen Ausdrücke.

Wir haben bisher gesehen, wie man aus bestimmten Grundaussagen, die wir mit $X, Y, Z \ldots$ bezeichnen, durch ein- oder mehrmalige Anwendung der Verknüpfungen &, v, $\rightarrow$, $\overline{}$ neue Aussagen bilden kann. Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Äquivalenzen lehren uns, daß es für inhaltlich gleichbedeutende Verbindungen von Grundaussagen eine Vielfachheit der Darstellung gibt, bei denen man von einer zur anderen nach Belieben übergehen kann. Es ist nun bemerkenswert, daß jede *Aussagenverbindung durch äquivalente Umformung auf eine gewisse Normalform gebracht werden kann*; und zwar besteht diese Normalform aus einer Konjunktion von Disjunktionen, in denen jedes Disjunktionsglied entweder eine Grundaussage oder die Negation einer solchen ist.

Wir bilden uns auf Grund der aufgestellten Äquivalenzen folgende Regeln für die Umformung von Ausdrücken:

a 1) *Mit den Zeichen & und* v *kann, wie in der Algebra, assoziativ, kommutativ und distributiv gerechnet werden.*

a 2) $\overline{\overline{X}}$ *kann ersetzt werden durch* X.

a 3) *Für* $\overline{X \mathbin{\&} Y}$ *kann man* $\overline{X} \vee \overline{Y}$, *für* $\overline{X \vee Y}$ *kann man* $\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}$ *schreiben.*

a 4) $X \rightarrow Y$ *kann durch* $\overline{X} \vee Y$, $X \sim Y$ *durch* $\overline{X}Y \mathbin{\&} \overline{Y}X$ * *ersetzt werden.*

Es ist hier immer die gegenseitige Ersetzbarkeit gemeint.

Die Umformung geschieht nun in der folgenden Weise: Zunächst kann jeder Ausdruck unter Benutzung der Regel a 4) durch einen äquivalenten ersetzt werden, der nicht mehr die Zeichen $\rightarrow$ und $\sim$ enthält. Der so entstehende Ausdruck baut sich dann durch Anwendung der drei

* Wir gebrauchen hier und im folgenden häufig die schon erwähnte bequeme Schreibweise, bei der das Zeichen v fortgelassen wird.

Zeichen &, v, auf. Durch sukzessive Anwendung der Regel a 3) kann man dann erreichen, daß die Negationsstriche immer weiter nach innen rücken und schließlich nur über den Grundaussagen stehen. Z. B. wird aus

$$\overline{(XY \mathbin{\&} \bar{Y}) \vee (Z \mathbin{\&} Y)}$$

zunächst

$$\overline{(XY \mathbin{\&} \bar{Y})} \mathbin{\&} \overline{(Z \mathbin{\&} Y)},$$

dann durch nochmalige Anwendung von a 3):

$$\overline{XY} \vee \bar{\bar{Y}} \mathbin{\&} \bar{Z} \vee \bar{Y}$$

und schließlich

$$(\bar{X} \mathbin{\&} \bar{Y})\, \bar{\bar{Y}} \mathbin{\&} \bar{Z}\, \bar{Y}.$$

Der so entstehende Ausdruck setzt sich dann aus negierten und unnegierten Grundaussagen durch & und v zusammen. Nun wendet man das distributive Gesetz an. Bei unserem Beispiel erhält man so:

$$\bar{X} \bar{\bar{Y}} \mathbin{\&} \bar{Y} \bar{\bar{Y}} \mathbin{\&} \bar{Z} \bar{Y}.$$

Ersetzen wir nun schließlich nach a 2) $\bar{\bar{X}}$ durch X, $\bar{\bar{\bar{X}}}$ durch $\bar{X}$ usw., so ist der Ausdruck auf die Normalform gebracht.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir den Ausdruck

$$(X \rightarrow Y) \sim (\bar{Y} \rightarrow \bar{X}).$$

Schafft man hier zunächst nach a 4) das Zeichen $\rightarrow$ fort, so erhält man:

$$\bar{X}\, Y \sim \bar{\bar{Y}} \bar{X}.$$

$\bar{\bar{Y}}$ wird durch Y ersetzt:

$$\bar{X}\, Y \sim Y \bar{X}.$$

Durch abermalige Anwendung von a 4) erhält man

$$\overline{(\bar{X} Y)}\; Y \bar{X} \mathbin{\&} \overline{(Y \bar{X})}\, \bar{X} Y,$$

$$(\bar{\bar{X}} \mathbin{\&} \bar{Y})\; Y \bar{X} \mathbin{\&} (\bar{Y} \mathbin{\&} \bar{\bar{X}})\, \bar{X}\, Y \quad \text{[nach a 3)]}.$$

$\bar{\bar{X}}$ wird durch X ersetzt:

$$(X \mathbin{\&} \bar{Y})\; Y \bar{X} \mathbin{\&} (\bar{Y} \mathbin{\&} X)\, \bar{X}\, Y.$$

Durch Anwendung des distributiven Gesetzes erhält man dann

$$X Y \bar{X} \mathbin{\&} \bar{Y} Y \bar{X} \mathbin{\&} \bar{Y} \bar{X}\, Y \mathbin{\&} X \bar{X}\, Y.$$

Das ist eine Normaldarstellung von $(X \rightarrow Y) \sim (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$.

Es sei übrigens bemerkt, daß die zu einer Aussagenverbindung gehörige Normaldarstellung nicht eindeutig ist. Z. B. gehört zu $X \sim Y$ einmal nach (29) die Normaldarstellung $\bar{X}\, Y \mathbin{\&} \bar{Y} X$. Andererseits erhält man, indem man auf die rechte Seite von (30) das distributive Gesetz anwendet,

$$X \bar{X} \mathbin{\&} X \bar{Y} \mathbin{\&} Y \bar{X} \mathbin{\&} Y \bar{Y}.$$

§ 4. Charakterisierung der immer richtigen Aussagenverbindungen.

Ob eine Aussagenverbindung, die sich aus den Grundaussagen X_1, $X_2, \ldots, X_n$ in bestimmter Weise mit Hilfe der logischen Zeichen &, v, $\rightarrow$, $\sim$, $^-$ aufbaut, richtig oder falsch ist, hängt nur davon ab, wie sich Richtigkeit und Falschheit auf die Grundaussagen verteilt. Der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung bleibt ungeändert, falls eine Teilaussage durch eine gleichwertige ersetzt wird. Daraus ergibt sich übrigens, daß das Zeichen $\sim$ in unserem Kalkül eine ähnliche Rolle spielt wie das Zeichen $=$ in der Algebra.

Die erste Aufgabe für die Logik ist es nun, *diejenigen Verbindungen von Aussagen zu finden, welche stets, d. h. unabhängig davon, ob die Grundaussagen richtige oder falsche Behauptungen darstellen, richtig sind.*

Da wir zu jedem logischen Ausdruck einen äquivalenten in der Normalform angeben können, so kommt es zur Beantwortung dieser Frage nur darauf an, *zu entscheiden, wann ein Ausdruck in der Normalform eine immer richtige Aussagenverbindung* darstellt. Diese Feststellung geschieht mit Hilfe der folgenden, leicht zu verifizierenden Regeln:

b 1) $X\bar{X}$ ist immer richtig.

b 2) Wenn X richtig ist und Y eine beliebige Aussage bedeutet, so ist auch XY richtig.

b 3) Wenn X richtig und Y richtig ist, dann ist auch X & Y richtig.

Diese Regeln sind so aufzufassen, daß für X und Y irgendwelche Aussagen und Aussagenverbindungen eingesetzt werden dürfen.

Gemäß den Regeln b 1), b 2), b 3) und a 1) werden alle Ausdrücke in *der Normalform als richtig statuiert, die dadurch charakterisiert sind, daß in jeder Disjunktion mindestens eine der Grundaussagen zugleich mit ihrer Negation auftritt.* Daß ein derartiger Ausdruck bei beliebigem Inhalt der Grundaussagen eine richtige Aussage darstellt, geht auch unmittelbar aus der Bedeutung der Negation sowie der Verknüpfungen „und" und „oder" hervor. Dies sind aber auch die einzigen Ausdrücke, die stets richtig sind. Denn wenn bei einem Konjunktionsgliede einer Normalform, das ja die Form einer Disjunktion hat, jede Grundaussage entweder nur unverneint oder nur verneint als Faktor auftritt, so kann diese Disjunktion zu einer falschen Aussage gemacht werden, indem für die unverneinten Aussagezeichen falsche und für die verneinten richtige Aussagen eingesetzt werden. Es stellt dann ein Konjunktionsglied der Normalform eine falsche Aussage dar, und daher muß auch der ganze Ausdruck eine falsche Aussage darstellen, unabhängig davon, was man für die noch unbestimmten Aussagezeichen einsetzt.

Wir wollen an einigen Beispielen zeigen, wie man nach der angegebenen Methode Aussagen als immer richtig nachweist.

1. $X \sim X$.
Die Umformung nach Regel a 4) ergibt:

$$\bar{X} X \,\&\, \bar{X} X .$$

Der letzte Ausdruck in der Normalform enthält in jedem Konjunktionsgliede eine Grundaussage und ihr Gegenteil, er ist also richtig.

2. $X \,\&\, Y \to X$.
Die Umformung ergibt:

$$\overline{X \,\&\, Y} \vee X \quad \text{[nach a 4)]},$$
$$\bar{X} \bar{Y} X \quad \text{[nach a 3)]}.$$

Die letzte Disjunktion enthält X und $\bar{X}$, ist also richtig.

3. $(X \,\&\, (X \to Y)) \to Y$.
Man erhält

$$\overline{X \,\&\, \overline{\bar{X} Y}} \vee Y \quad \text{[durch zweimalige Anwendung von a 4)]},$$
$$\bar{X}(\bar{\bar{X}} \,\&\, \bar{Y})\, Y \quad \text{[nach a 3)]},$$
$$\bar{X} \bar{\bar{X}} Y \,\&\, \bar{X} \bar{Y} Y \quad \text{[nach a 1)]},$$
$$\bar{X} X Y \,\&\, \bar{X} \bar{Y} Y \quad \text{[nach a 2)]}.$$

Die erste Disjunktion enthält X und $\bar{X}$, die zweite Y und $\bar{Y}$. $(X \,\&\, (X \to Y)) \to Y$ ist also eine immer richtige Aussagenverbindung.

§ 5. Das Prinzip der Dualität.

Eine wichtige Bemerkung zur Charakterisierung unseres Kalküls schließt sich an die Regel a 3) an. Aus dieser läßt sich entnehmen, daß *von einem Ausdruck, welcher aus den Grundaussagen und ihren Negationen allein durch konjunktive und disjunktive Verknüpfung gebildet ist, das Gegenteil dadurch erhalten wird, daß man die Zeichen & und* v *miteinander vertauscht und die Grundaussagen gegen ihre Negationen auswechselt.*

Hiervon können wir folgende Anwendung machen. Es sei ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, oder wie wir auch sagen, eine logische Gleichung als immer richtig erwiesen. (Wir gebrauchen deutsche Buchstaben zur Bezeichnung von Aussagenverbindungen, deren genaue formale Gestalt unbestimmt gelassen wird, mitunter auch zur Abkürzung.) Da $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ gleichbedeutend ist mit $\bar{\mathfrak{A}} \sim \bar{\mathfrak{B}}$, so erhalten wir wieder einen richtigen Ausdruck, indem wir von beiden Seiten der Gleichung das Gegenteil bilden. Sind nun die beiden Seiten der Gleichung aus den Grundaussagen und ihren Negationen nur durch Konjunktion und Disjunktion gebildet, so können wir die eben genannte Regel anwenden. Wir erhalten demnach eine Formel, die aus der anfänglichen Gleichung $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ dadurch entsteht, daß die Zeichen & und v unter sich und die Grundaussagen mit ihrem Gegenteil vertauscht werden. Da diese Gleichung immer richtig ist, so können wir sie anwenden, indem wir für eine jede Grundaussage das Gegenteil einsetzen. Dadurch heben wir aber die Vertauschung der Grundaussagen mit ihren Negationen auf.

Somit ergibt sich folgendes *Dualitätsprinzip: Aus einer Formel* $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, *die stets richtig ist, und deren beide Seiten aus Grundaussagen und deren Negationen nur durch konjunktive und disjunktive Verknüpfung gebildet sind, erhält man wieder eine richtige Gleichung, indem man* & *und* v *miteinander vertauscht.*

So ist z. B.

$$X(Y \mathbin{\&} Z) \sim XY \mathbin{\&} XZ$$

immer richtig. Es ist die Formel des ersten distributiven Gesetzes. Aus dieser gewinnt man gemäß dem Dualitätsprinzip die Formel:

$$X \mathbin{\&} YZ \sim (X \mathbin{\&} Y)\,(X \mathbin{\&} Z),$$

welche gleichfalls richtig ist und das zweite distributive Gesetz darstellt.

Ebenso ist der richtigen Formel

$$(X \mathbin{\&} \overline{X})\,Y \sim Y$$

nach dem Dualitätsprinzip die ebenfalls richtige Formel

$$X\overline{X} \mathbin{\&} Y \sim Y$$

zugeordnet.

§ 6. Die disjunktive Normalform für logische Ausdrücke.

Von der Regel zur Bildung des Gegenteils läßt sich eine wichtige Anwendung machen. Wir hatten gesehen, daß jeder logische Ausdruck auf eine Normalform gebracht werden kann. Diese Normalform besteht aus einer Konjunktion von Disjunktionen, wo jedes Disjunktionsglied eine negierte oder unnegierte Grundaussage ist. Die Umformung eines Ausdrucks zur Normalform geschieht mit Hilfe der Regeln a 1) bis a 4). — Daneben gibt es noch eine *zweite Normalform*, die aus einer Disjunktion von Konjunktionen besteht. Jedes Konjunktionsglied ist eine negierte oder unnegierte Grundaussage. Wir bezeichnen diese Normalform als „*disjunktive*" und die frühere zur Unterscheidung als „*konjunktive*".

Die Umformung eines Ausdrucks zur disjunktiven Normalform kann man in der folgenden Weise vornehmen: Man negiert den ursprünglichen Ausdruck, bringt ihn dann auf die konjunktive Normalform und bildet dann wieder das Gegenteil gemäß unserer Regel. Man kann auch den Umstand benutzen, daß in bezug auf die Regeln a 1) bis a 4) sich Konjunktion und Disjunktion vollkommen dual verhalten.

Wie man aus der konjunktiven Normalform ablesen kann, ob ein Ausdruck immer richtig ist oder nicht, so kann man mit Hilfe der disjunktiven entscheiden, ob er immer falsch ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn jedes Disjunktionsglied mit einer Grundaussage zugleich ihr Gegenteil enthält.

Der Beweis dafür ergibt sich sofort, wenn man berücksichtigt, daß das Gegenteil einer disjunktiven Normalform durch eine konjunktive Normalform dargestellt wird, und daß eine Formel dann und nur dann immer falsch ist, wenn das Gegenteil immer richtig ist.

Als Beispiel für die Anwendung der disjunktiven Normalform betrachten wir die Aussagenverbindung:

$$\overline{X} Y \,\&\, \overline{Y} Z \,\&\, X \,\&\, \overline{Z}\,.$$

Durch Anwendung des zweiten distributiven Gesetzes, erhält man die Normalform:

$$(\overline{X} \,\&\, \overline{Y} \,\&\, X \,\&\, \overline{Z}) \vee (\overline{X} \,\&\, Z \,\&\, X \,\&\, \overline{Z}) \vee (Y \,\&\, \overline{Y} \,\&\, X \,\&\, \overline{Z}) \vee (Y \,\&\, Z \,\&\, X \,\&\, Z)\,.$$

Hier enthält jedes Disjunktionsglied eine Grundaussage und ihre Negation, die ersten beiden X und $\overline{X}$, das dritte Y und $\overline{Y}$, das vierte Z und $\overline{Z}$. $\overline{X} Y \,\&\, \overline{Y} Z \,\&\, X \,\&\, \overline{Z}$ stellt also eine Aussage dar, die immer falsch ist.

Die disjunktive Normalform hat den Vorzug einer besonderen Übersichtlichkeit. Die einzelnen Disjunktionsglieder geben die verschiedenen Möglichkeiten, unter denen die gegebene Aussagenverbindung zu Recht besteht. So lautet z. B. die zu $X \sim Y$ gehörige disjunktive Normalform $(X \,\&\, Y)\ (\overline{X} \,\&\, \overline{Y})$, und diese läßt erkennen, daß X und Y entweder beide bestehen oder beide nicht bestehen müssen, falls $X \sim Y$ richtig sein soll.

§ 7. Mannigfaltigkeit der Aussagenverbindungen, die aus gegebenen Grundaussagen gebildet werden können.

Eine weitere wichtige Bemerkung über den Kalkül bezieht sich auf die Mannigfaltigkeit der Aussagen, die durch Kombination von endlich vielen Grundaussagen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gebildet werden können. Wir wollen dabei nur diejenigen Aussagen als verschieden betrachten, die nicht logisch äquivalent sind. Unter dieser Voraussetzung besteht die Mannigfaltigkeit nur aus endlich vielen Aussagen.

Wie wir früher erwähnten, ist eine aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gebildete Aussage mit einer anderen derartigen Aussage dann und nur dann äquivalent, wenn beide Aussagen für beliebige Werte der $X_1, \ldots, X_n$ den gleichen Wahrheitswert haben. Es kommen zunächst für die Richtigkeit oder Falschheit der Grundaussagen 2^n Möglichkeiten in Betracht, da ja jede einzelne der Aussagen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ richtig oder falsch sein kann. Eine aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zusammengesetzte Aussage ist nun dadurch bestimmt, daß für jeden der 2^n Fälle ausgemacht wird, ob sie dabei richtig oder falsch ist. Es gibt demnach genau $2^{(2^n)}$ verschiedene Aussagen, die sich aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zusammensetzen.

Die 4 verschiedenen, mit X allein gebildeten Aussagen sind

$$X; \quad \overline{X}; \quad X \vee \overline{X}; \quad X \,\&\, \overline{X}.$$

Die 16 verschiedenen Aussagen, welche sich aus X und Y bilden lassen, sind

$$X;\quad Y;\quad X \mathbin{\&} Y;\quad X \vee Y;\quad X \rightarrow Y;\quad Y \rightarrow X;\quad X \sim Y;\quad X \vee \overline{X}$$

und deren Negationen:

$$\overline{X};\quad \overline{Y};\quad \overline{X} \vee \overline{Y};\quad \overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y};\quad X \mathbin{\&} \overline{Y};\quad Y \mathbin{\&} \overline{X};\quad X \sim \overline{Y};\quad X \mathbin{\&} \overline{X}.$$

Unter den $2^{(2^n)}$ Aussagen haben zwei eine Sonderstellung, nämlich die immer richtige Aussage, welche z. B. durch $X_1 \vee \overline{X}_1$ (oder auch $X_1 \sim X_1$) darstellbar ist, und die immer falsche, die man durch $X_1 \mathbin{\&} \overline{X}_1$ darstellen kann.

Einen formalen Überblick über die verschiedenen, aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zu bildenden Aussagen gewinnt man durch den folgenden Satz:

Jeder mit den Grundaussagen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gebildete Ausdruck ist eine Teilkonjunktion des nach dem ersten distributiven Gesetz entwickelten Ausdrucks:

$$(X_1 \mathbin{\&} \overline{X}_1) \vee (X_2 \mathbin{\&} \overline{X}_2) \vee \cdots \vee (X_n \mathbin{\&} \overline{X}_n)$$

äquivalent. Eine Ausnahme bilden dabei nur die immer richtigen Ausdrücke. Man kann aber auch die uneigentliche Teilkonjunktion, die entsteht, wenn man alle Glieder fortläßt, als einen immer richtigen Ausdruck ansehen. Die Konjunktionsglieder des obigen, entwickelten Ausdrucks bezeichnet SCHRÖDER als die *Konstituenten* von $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Der Beweis für diese Behauptung ergibt sich folgendermaßen: Man bringe den mit $X_1, \ldots, X_n$ gebildeten Ausdruck zunächst auf die konjunktive Normalform. Da der Wahrheitswert eines Ausdrucks ungeändert bleibt, wenn man ein richtiges Konjunktionsglied fortläßt, so brauchen wir die Konjunktionsglieder nicht aufzuschreiben, die zu einem X ein $\overline{X}$ enthalten. Benutzt man ferner die Regel, daß man statt $X \vee X$ nur X zu schreiben braucht, so ist jedes der noch übrigbleibenden Konjunktionsglieder eine Disjunktion von lauter verschiedenen Gliedern aus der Reihe $X_1, \ldots, X_n, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$. Fehlt in einer Disjunktion sowohl X_i als $\overline{X}_i$, so können wir diese Disjunktion durch das immer falsche Glied $(X_i \mathbin{\&} \overline{X}_i)$ erweitern und wieder das erste distributive Gesetz anwenden, ohne daß der Wahrheitswert der ganzen Aussage geändert wird. Schließlich enthält jedes Konjunktionsglied für jedes i entweder X_i oder $\overline{X}_i$. Wir brauchen dann von den Konjunktionsgliedern, die sich nur durch die verschiedenen Anordnungen der durch v verknüpften Glieder unterscheiden, nur je einen zu schreiben. Damit hat dann der Ausdruck die verlangte Form bekommen.

Wir erhalten so für jede aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gebildete Aussage eine Darstellung durch eine *„ausgezeichnete" konjunktive Normalform.*

Diese Normalform ist (bis auf eine Vertauschung der Konjunktions- oder Disjunktionsglieder unter sich) eindeutig in dem Sinne, daß zwei äquivalente Aussagenverbindungen durch dieselbe Normalform dargestellt werden. Es gibt nämlich zu $X_1, \ldots, X_n$ genau $2^{(2^n)}$ verschiedene Ausdrücke in der Normalform, also ebensoviel, wie sich verschiedene Aussagen aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bilden lassen.

Die angegebene ausgezeichnete Normalform gestattet die verschiedensten Anwendungen. Sie kann zunächst dazu dienen, unter Umständen eine *einfachere Darstellung* für eine gegebene Aussagenverbindung zu finden. Man bringt zu diesem Zweck den Ausdruck auf die ausgezeichnete Normalform und vereinfacht ihn dann eventuell unter Anwendung der folgenden *Eliminationsregel:*

$$X\mathfrak{A} \mathbin{\&} \bar{X}\mathfrak{A}, \quad \textit{d. h.} \quad (X \mathbin{\&} \bar{X}) \vee \mathfrak{A}$$

ist äquivalent mit $\mathfrak{A}$.

Als Beispiel betrachten wir die Aussagenverbindung $A \mathbin{\&} AB$. Um die Entwicklung nach A und B zu bekommen, ersetzen wir das Konjunktionsglied A durch $A \vee (B \mathbin{\&} \bar{B})$ und lösen die Klammern nach dem ersten distributiven Gesetz auf. Schreibt man das doppelt auftretende Glied AB nur einmal, so erhält man als ausgezeichnete Normalform:

$$AB \mathbin{\&} A\bar{B}.$$

Klammert man hier A aus, so erhält man $A(B \mathbin{\&} \bar{B})$ und nach dem angegebenen Eliminationssatz A. A ist also die einfachste Darstellung für $A \mathbin{\&} AB$.

Ein anderes Beispiel liefert uns der Ausdruck $A \mathbin{\&} \bar{A}B$. Hier erhält man als Normalform:

$$AB \mathbin{\&} A\bar{B} \mathbin{\&} \bar{A}B.$$

Hier lassen sich das erste und zweite und das erste und dritte Glied zusammenfassen. Um beide Eliminationen ausführen zu können, schreiben wir das erste Glied doppelt:

$$(AB \mathbin{\&} A\bar{B}) \mathbin{\&} (AB \mathbin{\&} \bar{A}B).$$

Die Elimination ergibt $A \mathbin{\&} B$.

Es sei ferner bemerkt, daß man aus der benutzten ausgezeichneten Normalform ersehen kann, ob *eine Aussage, welche aus den Grundaussagen* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *zusammengesetzt ist, ohne Anwendung des Negationszeichens dargestellt werden kann.* Das ist dann und nur dann der Fall, wenn in der ausgezeichneten Normalform der betrachteten Aussage das Konjunktionsglied $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \ldots \vee \bar{X}_n$ nicht vorkommt. Hat man nämlich eine Aussage, die sich aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ohne Negation aufbaut, so ist diese Aussage immer richtig, falls für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ richtige Aussagen eingesetzt werden. Eine Aussage, die $\bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \ldots \vee \bar{X}_n$ als Konjunktionsglied enthält, hat aber nicht diese Eigenschaft. Die genannte Bedingung ist also notwendig. Andererseits ist sie auch hinreichend, denn man kann jedes Glied der ausgezeichneten Normalform, das nicht gleich $\overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee \ldots \vee \overline{X}_n$ ist, ohne Negation ausdrücken. Z. B. schreibt man

$$X_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 \ldots \overline{X}_n \quad \text{als} \quad (X_2 \,\&\, X_3 \,\&\ldots\&\, X_n) \rightarrow X_1$$

$$X_1 \overline{X}_2 X_3 \overline{X}_4 X_5 \overline{X}_6 \ldots \quad \text{als} \quad (X_2 \,\&\, X_4 \,\&\, X_6 \,\&\ldots) \rightarrow X_1 \vee X_3 \vee X_5 \vee \ldots \text{usw.}$$

Es sind demnach gerade die Hälfte der $2^{(2^n)}$ Aussagen, die aus $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gebildet werden können, ohne die Negation ausdrückbar.

§ 8. Ergänzende Bemerkungen zum Problem der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit.

Die im vorigen angegebene ausgezeichnete Normalform für einen Ausdruck, der sich aus den Grundaussagen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zusammensetzt, wollen wir auch kurz als *Entwicklung des Ausdrucks nach* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bezeichnen.

Es sei uns nun eine Aussagenverbindung gegeben, in der außer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ noch die Grundaussagen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ vorkommen. Auch bei einem derartigen Ausdruck können wir in gewissem Sinne von einer Entwicklung nach $X_1, \ldots, X_n$ sprechen. Es läßt sich nämlich der Ausdruck darstellen als eine *Konjunktion, bei der jedes Konjunktionsglied die Disjunktion eines Ausdrucks, der nur von* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *abhängt, und eines der Konstituenten von* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ist.*

Der Beweis ist sehr einfach. Wir brauchen den Ausdruck nur nach sämtlichen vorkommenden Grundaussagen, also nach $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ zu entwickeln und die Glieder, die die gleichen Konstituenten in bezug auf $X_1, X_2, \ldots, X_n$ enthalten, zusammenzufassen.

Diese Entwicklung eines Ausdrucks nach $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bietet uns gewisse Vorteile. Wir hatten gesehen, daß die Entscheidung über die *Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks*, d. h. die Aufgabe, bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch ein bestimmtes, endliches Verfahren zu entscheiden, ob er immer richtig ist oder nicht, im Aussagenkalkül vollständig gelöst ist. Die Beantwortung dieser Frage geschieht durch die Umformung auf die konjunktive Normalform. Dual zu dem Problem der Allgemeingültigkeit ist das Problem der *Erfüllbarkeit*, d. h. das Problem, zu entscheiden, ob ein vorgelegter logischer Ausdruck immer falsch ist oder ob es Aussagen gibt, die ihn erfüllen, d. h. für die er richtig ist. Die Lösung dieses Problems kann durch Umformen zur disjunktiven Normalform geschehen, oder man kann auch den negierten Ausdruck auf die konjunktive Normalform bringen. An diese Probleme der Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit schließen sich nun noch weitere ähnliche Fragestellungen an.

Man habe einen Ausdruck, in dem die Grundaussagen $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ vorkommen. $Y_1, \ldots, Y_m$ mögen hier bestimmte, feste Aussagen bedeuten. Wir fragen nun, welcher Bedingung müssen die

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ genügen, damit der Ausdruck bei beliebiger Wahl der X richtig ist? Ferner: unter welchen Bedingungen für $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ ist der Ausdruck immer falsch?

Wir wollen bei der Beantwortung dieser Fragen, der Einfachheit halber, n gleich 2 annehmen. Für beliebiges n ist die Lösung genau analog. Es laute die Entwicklung des Ausdrucks nach X_1 und X_2

$$\text{(A)}\quad \Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) X_1 X_2 \,\&\, \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) X_1 \overline{X}_2 \,\&\, \Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \overline{X}_1 X_2 \,\&\, \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)\, \overline{X}_1 \overline{X}_2 .$$

Wir dürfen hier annehmen, daß alle 4 Glieder wirklich vorkommen. Sollte z. B. das Glied mit $X_1 \overline{X}_2$ fehlen, so kann man einen Ausdruck $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) X_1 \overline{X}_2$ hinzufügen, in dem $\Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m)$ eine immer richtige Aussagenverbindung ist.

Wir behaupten nun: *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Formel* (A) *für beliebige X_1 und X_2 richtig ist, ist die Richtigkeit der Aussage:*

$$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \,\&\, \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \,\&\, \Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \,\&\, \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m).$$

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist klar. Sie ist aber auch notwendig, denn wäre z. B. $\Phi_3(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ nicht richtig, so ersetzen wir X_1 durch eine richtige und X_2 durch eine falsche Aussage. (A) ist dann äquivalent mit $\Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m)$, also nicht richtig.

Entsprechend ergibt sich die Lösung des dualen Problems. Der Ausdruck (A) ist in den $X_1, \ldots, X_n$ dann und nur dann erfüllbar, wenn die $Y_1, \ldots, Y_m$ so beschaffen sind, daß

$$\Phi_1(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_2(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_3(Y_1, \ldots, Y_m) \vee \Phi_4(Y_1, \ldots, Y_m)$$

zutrifft.

§ 9. Systematische Übersicht über alle Folgerungen aus gegebenen Axiomen.

Wir hatten in § 4 eine Methode erhalten, die es uns ermöglichte, alle Verbindungen von Aussagen zu finden, die aus rein logischen Gründen richtig sind, und bei einer gegebenen Aussagenverbindung zu entscheiden, ob sie von dieser Art ist oder nicht. Es entsteht nun die *weitere Aufgabe, aus gegebenen Voraussetzungen (Axiomen) alle Folgerungen abzuleiten, insoweit das möglich ist, falls wir die Aussagen nur als ungetrenntes Ganzes betrachten.*

Denken wir uns eine bestimmte endliche Anzahl von Axiomen, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$*, gegeben. Die Frage, ob dann eine bestimmte andere Aussagenverbindung $\mathfrak{C}$ eine logische Folgerung dieser Axiome darstellt, läßt sich mit den bisherigen Mitteln durchaus beantworten. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \,\&\ldots \mathfrak{A}_n) \rightarrow \mathfrak{C}$ eine

* Über den Gebrauch der deutschen Buchstaben vgl. § 5.

allgemeingültige logische Formel ist. Z. B. entspricht dem Schluß von A und $A \to B$ auf B die Allgemeingültigkeit der Formel

$$(A \,\&\, (A \to B)) \to B.$$

Wir haben aber noch keinen systematischen Überblick über alle möglichen Folgerungen, die man ziehen kann. Zu einem solchen verhilft uns erst die ausgezeichnete konjunktive Normalform.

Es mögen in unseren Axiomen die Grundaussagen $X_1, \ldots, X_n$ vorkommen. Wir denken uns dann sämtliche Axiome durch & verbunden und die so entstehende Aussagenverbindung nach $X_1, \ldots, X_n$ entwickelt. Nehmen wir nun irgendeinen Konstituenten von $X_1, X_2, \ldots, X_n$, der in der entstandenen ausgezeichneten Normalform nicht als konjunktives Glied vorkommt. Durch geeignete Einsetzung von richtigen bzw. falschen Aussagen für die $X_1, \ldots, X_n$ kann man diesen Konstituenten in eine Disjunktion von lauter falschen Aussagen, also in eine falsche Aussage verwandeln. Andererseits geht durch diese Einsetzung unsere ausgezeichnete Normalform in eine richtige Aussage über; denn jedes ihrer Konjunktionsglieder unterscheidet sich von dem betrachteten Konstituenten dadurch, daß mindestens an einer Stelle ein Disjunktionsglied durch sein Gegenteil ersetzt ist. Der betrachtete Konstituent ist also keine logische Folgerung aus den Axiomen. Daraus ergibt sich, daß für jede Folgerung aus den Axiomen die ausgezeichnete Normalform nur solche Konstituenten enthält, die auch schon in der Entwicklung der Voraussetzung vorkamen.

Unter Anwendung dieser Bemerkung ergibt sich für die Ableitung der Folgerungen aus einem System von Axiomen das folgende allgemeine Verfahren:

Man verbinde sämtliche Axiome durch & und bilde für den so entstehenden Ausdruck die ausgezeichnete konjunktive Normalform. Von den Konjunktionsgliedern kann man nun irgendwelche auswählen und durch & verbinden, und erhält so alle Konsequenzen der Axiome in der ausgezeichneten Normalform. Mit Hilfe der S. 17 erwähnten Eliminationsregel läßt sich dann unter Umständen noch eine einfachere Schreibweise für die Folgerung gewinnen.

In dem erwähnten Fall, wo A und $A \to B$ als Axiome genommen werden, sieht das Verfahren folgendermaßen aus:

$A \,\&\, (A \to B)$ wird zunächst nach A und B entwickelt.

$$A \,\&\, (A \to B) \text{ äq } A \,\&\, \bar{A}B,$$

$$A \,\&\, \bar{A}B \text{ äq } A(B \,\&\, \bar{B}) \,\&\, \bar{A}B,$$

$$A(B \,\&\, \bar{B}) \,\&\, \bar{A}B \text{ äq } AB \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}B.$$

$AB \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}B$ stellt die ausgezeichnete Normalform für die Axiome dar. $AB \,\&\, \bar{A}B$ äq $(A \,\&\, \bar{A})\, B$ äq B ist also eine Folgerung aus den Axiomen.

Die anderen Folgerungen, die man noch aus A und $A \rightarrow B$ gewinnen kann, sind AB; $A\bar{B}$; $\bar{A}B$; $AB \,\&\, A\bar{B}$ äq $A\,(B \,\&\, \bar{B})$ äq A; $A\bar{B} \,\&\, \bar{A}B$ äq $A \sim B$ und natürlich $AB \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}B$ äq $A \,\&\, B$. Will man auch die Folgerungen erhalten, in denen noch eine andere nicht in den Axiomen vorkommende Aussage C vorkommt, so muß man die Voraussetzung statt nach A und B, nach A, B, C entwickeln.

Ein anderes Beispiel ist das folgende: Man habe zwei Axiome $A \sim B$, $B \sim C$. Ich schreibe zunächst die Axiome in der Normalform:

$$\bar{A}B \,\&\, \bar{B}A\,; \qquad \bar{B}C \,\&\, \bar{C}B\,.$$

Entwickelt man die Voraussetzung nach A, B und C, so erhält man:

$$AB\bar{C} \,\&\, A\bar{B}C \,\&\, A\bar{B}\bar{C} \,\&\, \bar{A}BC \,\&\, \bar{A}B\bar{C} \,\&\, \bar{A}\bar{B}C\,.$$

Eine Konsequenz ist hier z. B.:

$$AB\bar{C} \,\&\, A\bar{B}\bar{C} \,\&\, \bar{A}BC \,\&\, \bar{A}\bar{B}C\,.$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich:

$$A\bar{C}\,(B \,\&\, \bar{B}) \,\&\, \bar{A}C\,(B \,\&\, \bar{B})$$

oder

$$A\bar{C} \,\&\, \bar{A}C\,, \qquad \text{d. h.} \qquad A \sim C\,.$$

Es sollen noch zwei Beispiele für die Anwendung solcher Schlüsse angeführt werden:

Es bedeute A die Aussage „jede reelle Zahl ist algebraisch", B bedeute „die Menge der reellen Zahlen ist abzählbar". In der Mathematik wird gezeigt:

erstens: $A \rightarrow B$, d. h. „wenn jede reelle Zahl algebraisch ist, so ist die Menge der reellen Zahlen abzählbar";

zweitens: $\bar{B}$, d. h. „die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar". Die Voraussetzung ist hier

$$\bar{A}B \,\&\, \bar{B}$$

oder in entwickelter Form:

$$\bar{A}B \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}\bar{B}\,.$$

Eine Konsequenz ist hier $\bar{A}B \,\&\, \bar{A}\bar{B}$ äq $\bar{A}\,(B \,\&\, \bar{B})$ äq $\bar{A}$. D. h. man findet:

„Nicht jede reelle Zahl ist algebraisch." Dies ist der Schluß auf die Existenz transzendenter Zahlen.

Als ein zweites Beispiel mögen die Aussagen A, B, C folgendes bedeuten:

A: „Der Additionssatz der Geschwindigkeiten ist gültig."

B: „Das Licht pflanzt sich im Fixsternsystem nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort."

C: „Das Licht pflanzt sich auf der Erde nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fort."

Dann besteht zunächst der mathematische Satz: $(A \,\&\, B) \rightarrow \bar{C}$, d. h.: „Wenn der Additionssatz der Geschwindigkeiten gültig ist und das Licht sich im Fixsternsystem nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt, dann ist auf der Erde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht nach allen Richtungen die gleiche."

Ferner entnehmen wir der physikalischen Erfahrung, daß B und C richtig sind. Wir haben also die Axiome

$$(A \,\&\, B) \rightarrow \bar{C}; \quad B; \quad C.$$

In der konjunktiven Normalform lautet die Voraussetzung:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \,\&\, B \,\&\, C$$

und entwickelt:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \,\&\, BAC \,\&\, BA\bar{C} \,\&\, B\bar{A}C \,\&\, B\bar{A}\bar{C} \,\&\, CA\bar{B} \,\&\, C\bar{A}\bar{B}.$$

Als Folgerung ergibt sich hier

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \,\&\, B\bar{A}\bar{C} \,\&\, B\bar{A}C \,\&\, \bar{B}\bar{A}C.$$

Durch Zusammenfassen erhält man weiter:

$$(\bar{B} \,\&\, B)\,\bar{A}\bar{C} \,\&\, (B \,\&\, \bar{B})\,\bar{A}C,$$

$$\bar{A}\bar{C} \,\&\, \bar{A}C,$$

$$(\bar{C} \,\&\, C)\,\bar{A},$$

$$\bar{A}.$$

Es ergibt sich also die Folgerung, daß der Additionssatz der Geschwindigkeiten nicht gültig ist. —

Aus irgend zwei einander widersprechenden Axiomen kann jeder beliebige Satz bewiesen werden. Hat man nämlich A und $\bar{A}$ als Axiome und ist B irgendeine andere Aussage, so ergibt die Entwicklung der Voraussetzung $A \,\&\, \bar{A}$ nach A und B:

$$AB \,\&\, A\bar{B} \,\&\, \bar{A}B \,\&\, \bar{A}\bar{B}.$$

Daraus folgt:

$$AB \,\&\, \bar{A}B, \quad \text{also} \quad B.$$

Das angegebene Verfahren ermöglicht uns, sämtliche Folgerungen aus gegebenen Axiomen zu ziehen, oder mit anderen Worten, sämtliche Aussagenverbindungen zu finden, die *schwächer* sind als eine vorgelegte. Man kann nun umgekehrt fragen, welche Aussagenverbindungen *stärker* sind als die vorgelegte, d. h. aus welchen Voraussetzungen sie sich als Folgerung ergibt. Die Lösung dieses Problems geschieht in ähnlicher Weise wie vorher: Die Folgerung wird zunächst nach sämtlichen Grundaussagen entwickelt, also auf die ausgezeichnete Normalform gebracht. Man wählt nun von den nicht vorkommenden Konstituenten irgendwelche aus, fügt sie mit & zu der Folgerung hinzu und erhält so alle möglichen Voraussetzungen.

§ 10. Die Axiome des Aussagenkalküls.

Die axiomatische Form für die Theorie des Aussagenkalküls wird dadurch erhalten, daß man unter den immer richtigen Aussagenverbindungen eine Auswahl trifft und dann formale Regeln angibt, nach denen sich alle übrigen immer richtigen Formeln aus jenen ableiten lassen. Diese Regeln spielen im Logikkalkül dieselbe Rolle, welche sonst in den mathematischen und physikalischen Theorien das logische Schließen hat. Daß das logische Schließen hier nicht in der gewöhnlichen inhaltlichen Weise benutzt werden darf, liegt daran, daß ja die logischen Schlußweisen den Gegenstand unserer Untersuchung bilden.

Wir unterscheiden zwischen *logischen Grundformeln* (Axiomen) und *Grundregeln zur Ableitung richtiger Formeln.* Als logische Grundformeln wollen wir die folgenden vier einführen:

a) $X \vee X \rightarrow X$.

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

Das erste Axiom bedeutet, daß eine Aussage richtig ist, wenn die Disjunktion der Aussage mit sich selbst richtig ist. Das zweite Axiom ist nichts anderes als die auf S. 12 erwähnte Regel b2), das dritte postuliert die Kommutativität der Disjunktion und das vierte sagt, daß bei einer richtigen Implikation $X \rightarrow Y$ beide Seiten mit einer beliebigen Aussage Z disjunktiv verknüpft werden dürfen.

Das Zeichen $\rightarrow$ wollen wir übrigens nur als Abkürzung gebrauchen. $X \rightarrow Y$ soll eine bequemere Schreibweise sein für $\overline{X} \vee Y$. Das Axiom a) z. B. heißt also ohne Abkürzungen geschrieben: $\overline{X \vee X} \vee X$.

Für die Gewinnung neuer Formeln aus den zugrunde gelegten Ausgangsformeln, sowie aus bereits abgeleiteten Formeln haben wir die folgenden beiden Regeln:

α) Einsetzungsregel.

Für eine Aussagenvariable (d. h. für einen großen lateinischen Buchstaben) *darf überall, wo sie vorkommt, ein und dieselbe Aussagenverbindung eingesetzt werden.*

β) Schlußschema.

Aus zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gewinnt man die neue Formel $\mathfrak{B}$.

In dem nächsten Paragraphen werden wir die Handhabung der beiden Regeln zur Gewinnung von neuen Formeln aus bereits abgeleiteten, bzw. den Axiomen, ausführlich erläutern. Hier seien noch einige Bemerkungen allgemeiner Art zur Axiomatik des Aussagenkalküls überhaupt angeknüpft.

Bei der Aufstellung des Axiomensystems haben wir nur die Verknüpfungen v und $\overline{}$ benutzt. Es entspricht dies der früher erwähnten Tatsache, daß diese beiden Verknüpfungen zur Darstellung aller Aussagenverbindungen ausreichend sind. Der Bequemlichkeit halber verwenden wir allerdings auch die Zeichen $\rightarrow$, &, $\sim$. Doch sind die Formeln, in denen diese Zeichen gebraucht werden, dann nur als Abkürzungen für Formeln aufzufassen, die nur die Zeichen v und $\overline{}$ enthalten. So ist eine Formel $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $\overline{\mathfrak{A}} \mathrm{\ v\ } \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $\overline{\overline{\mathfrak{A}} \mathrm{\ v\ } \overline{\mathfrak{B}}}$ und $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ als Abkürzung für $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$, d. h. $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}} \mathrm{\ v\ } \mathfrak{B}} \mathrm{\ v\ } \overline{\overline{\mathfrak{B}} \mathrm{\ v\ } \mathfrak{A}}}$ anzusehen [vgl. die Äquivalenzen (21), (28), (24) in § 2].

Das von uns benutzte Axiomensystem ist im wesentlichen von WHITEHEAD und RUSSELL (in der 1. Auflage der Principia Mathematica) angegeben worden. Ein von den Verfassern außerdem noch benutztes Axiom

$$X \mathrm{\ v\ } (Y \mathrm{\ v\ } Z) \rightarrow Y \mathrm{\ v\ } (X \mathrm{\ v\ } Z),$$

das die Assoziativität der disjunktiven Verknüpfung ausdrückt, erwies sich später als entbehrlich[1].

Da die Verknüpfungen & und $\overline{}$, ebenso wie $\rightarrow$ und $\overline{}$ ebenfalls zur Darstellung aller Aussagenverbindungen ausreichen, kann man auch Axiome zugrunde legen, in denen nur & und $\overline{}$, oder nur $\rightarrow$ und $\overline{}$ vorkommen. Eines besonderen Interesses haben sich in den letzten Jahren die Axiomensysteme der letztgenannten Art, die also nur *Implikation* und *Negation* zugrunde legen, erfreut. Das erste dieser Axiomensysteme, bei denen übrigens als Ableitungsregeln ebenfalls unsere Regeln α) und β) verwendet werden, stammt bereits von FREGE[2]. Es besteht aus den folgenden sechs Axiomen:

1. $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$,
2. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$,
3. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (Y \rightarrow (X \rightarrow Z))$,
4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\overline{Y} \rightarrow \overline{X})$,
5. $\overline{\overline{X}} \rightarrow X$,
6. $X \rightarrow \overline{\overline{X}}$.

Dieses FREGEsche Axiomensystem läßt sich, wie J. LUKASIEWICZ gezeigt hat, durch das folgende einfachere, aus nur drei Axiomen bestehende System ersetzen:

---

[1] BERNAYS, P.: Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica. Math. Z. Bd. 25 (1926).

[2] FREGE, G.: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.

1. $X \to (Y \to X)$,

2. $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,

3. $(\bar{X} \to \bar{Y}) \to (Y \to X)$.

Es ist sogar möglich, nur eine einzige mit Implikation und Negation gebildete Ausgangsformel zugrunde zu legen[1].

Unter alleiniger Benutzung der SHEFFER*schen Strichverknüpfung* X/Y, die wir früher erwähnten, hat zuerst J. NICOD ein Axiomensystem des Aussagenkalküls aufgestellt[2]. Dieses System verwendet als einzige Ausgangsformel

$$[X/(Y/Z)]/\{[U/(U/U)]/[(V/Y)/((X/V)/(X/V))]\}.$$

An Stelle unseres Schlußschemas β benutzt es die Regel: Aus zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C})$ gewinnt man die neue Formel $\mathfrak{C}$.

Unter Umständen verdient auch ein Axiomensystem des Aussagenkalküls den Vorzug, in dem gleich von vornherein alle Grundverknüpfungen eingeführt werden, dann nämlich, wenn es sich darum handelt, die Rolle, die einer jeden dieser Grundverknüpfungen beim logischen Schließen zufällt, möglichst deutlich zum Ausdruck zu bringen. Ein unter diesem Gesichtspunkt ausgewähltes Axiomensystem ist von HILBERT und BERNAYS angegeben worden[3].

Übrigens ist auch in unseren Regeln a1) bis a4), b1) bis b3) (§ 3 und § 4) eine Axiomatik des Aussagenkalküls enthalten. Es handelt sich hier um ein System mit der einzigen Ausgangsformel $X \vee \bar{X}$ und 6 Regeln zur Ableitung neuer Formeln.

Wir erwähnen endlich noch als eine Sonderstellung einnehmend den von G. GENTZEN aufgestellten „Kalkül des natürlichen Schließens"[4], der aus dem Bestreben hervorgegangen ist, das formale Ableiten von Formeln mehr als bisher dem inhaltlichen Beweisverfahren, wie es z. B. in der Mathematik üblich ist, anzugleichen. Der Kalkül enthält keine logischen Axiome, sondern nur Schlußfiguren, die angeben, welche Folgerungen aus gegebenen Annahmen gezogen werden können, sowie solche, die Formeln liefern, bei denen die Abhängigkeit von den Annahmen beseitigt ist.

---

[1] LUKASIEWICZ, J. u. A. TARSKI: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. (C. R. Soc. Sci., Varsovie, Bd. 23, Klasse III, Warschau 1930.)

[2] NICOD, J. G. P.: A reduction in the number of the primitive propositions of logic. Proc. Camb. Phil. Soc. Bd. 19 (1917). Vgl. dazu auch W. V. QUINE: A note on Nicod's postulate, Mind 41.

[3] HILBERT, D. u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I, S. 66.

[4] GENTZEN, G.: Untersuchungen über das logische Schließen I und II. Math. Z. Bd. 39 (1934). — Verwandte Gedanken sind unabhängig von JASKOWSKI entwickelt worden. Vgl. S. JASKOWSKI: On the rules of suppositions in formal logic. Studia logica Nr. 1 (1934).

§ 11. Beispiele für die Ableitung von Formeln aus den Axiomen.

Wir kehren nun zurück zu unserem aus den Grundformeln a) bis d) und den Ableitungsregeln α) und β) bestehenden Axiomensystem.

Es sollen eine Reihe von Beispielen für die streng formale Ableitung von Formeln aus den Axiomen gegeben werden. Wir wollen uns etwas länger dabei aufhalten, da erfahrungsgemäß dem Anfänger die Wahrung des rein formalen Standpunktes besondere Schwierigkeiten zu machen pflegt.

Bei der Ableitung der Formeln empfiehlt es sich, gewisse sehr häufig wiederkehrende Operationen in Form von *abgeleiteten Regeln* zusammenfassen. Durch eine solche Regel wird ein für allemal das Ergebnis des betreffenden formalen Übergangs vorweggenommen, und der Beweis für die Regel besteht darin, daß allgemein das Verfahren angegeben wird, durch welches in jedem einzelnen Fall jener Übergang gemäß den Grundregeln zu vollziehen ist.

Regel I: Ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ *eine beweisbare Formel, so gilt dasselbe für* $\mathfrak{A}$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Axiom a). Durch Einsetzung in a) erhält man:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}.$$

Da ferner $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ beweisbar ist, so liefert das Schlußschema die Formel $\mathfrak{A}$.

Regel II: Ist $\mathfrak{A}$ *eine beweisbare Formel und* $\mathfrak{B}$ *eine beliebige andere, so ist auch* $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ *eine beweisbare Formel.*

Diese Regel ergibt sich in derselben Weise aus dem Axiom b) wie Regel I aus a).

Ebenso entsprechen den Axiomen c), d) die Regeln III und IV, wie überhaupt zu jeder Formel, die eine Folgebeziehung ausdrückt, auch eine entsprechende Regel gehört:

Regel III: Ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ *eine beweisbare Formel, so gilt dasselbe für* $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

Regel IV: Ist $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *eine beweisbare Formel und* $\mathfrak{C}$ *eine beliebige andere Formel, so ist auch* $\mathfrak{C}\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}\mathfrak{B}$ *eine beweisbare Formel.*

Formel (1):

$$(X \to Y) \to [(Z \to X) \to (Z \to Y)].$$

Beweis: $(X \to Y) \to [\bar{Z}X \to \bar{Z}Y]$ entsteht durch Einsetzung von $\bar{Z}$ für Z aus Axiom d). Das ist aber schon die Formel (1), wenn wir die Abkürzung $\to$ durch ihre Bedeutung ersetzen.

Regel V: Sind $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *beweisbare Formeln, so ist auch* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ *eine beweisbare Formel.*

Diese Regel entspricht der Formel (1). Man beweist sie, indem man in (1) für X, Y, Z bezüglich $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ einsetzt und dann zweimal das Schlußschema anwendet.

Formel (2): $\bar{X} \vee X$.

Beweis: $X \to X \vee X$ [durch Einsetzung von X für Y in b)],
$X \vee X \to X$ [nach a)],
$X \to X$ [nach Regel V].

Die letzte Formel ist eine abgekürzte Schreibweise für $\bar{X} \vee X$.

Formel (3): $X \vee \bar{X}$.

Diese Formel ergibt sich aus (2) durch Anwendung der Regel III.

Formel (4): $X \to \bar{\bar{X}}$.

Beweis: (4) ist eine Abkürzung für $\bar{X}\bar{\bar{X}}$, und diese Formel geht aus (3) hervor, indem man $\bar{X}$ für X einsetzt.

Formel (5): $\bar{\bar{X}} \to X$.

Beweis: $\bar{X} \to \bar{\bar{\bar{X}}}$ [durch Einsetzung in (4)],
$X\bar{X} \to X\bar{\bar{\bar{X}}}$ [nach Regel IV],
$X\bar{\bar{\bar{X}}}$ [wegen (3) und Regel β)],
$\bar{\bar{\bar{X}}}X$ [nach Regel III].

Das letzte ist die Formel (5).

Formel (6): $(X \to Y) \to (\bar{Y} \to \bar{X})$.

Beweis: $Y \to \bar{\bar{Y}}$ [Formel (4)],
$\bar{X}Y \to \bar{X}\bar{\bar{Y}}$ [Regel IV],
$\bar{X}\bar{\bar{Y}} \to \bar{\bar{Y}}\bar{X}$ [Einsetzung in c)],
$\bar{X}Y \to \bar{\bar{Y}}\bar{X}$ [Regel V].

Das ist die gesuchte Formel.

Regel VI: Tritt ein Ausdruck $\mathfrak{A}$ als Bestandteil in einer Aussagenverbindung auf, die in diesem Sinne mit $\Phi(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden möge, und sind $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ beweisbare Formeln, so sind auch $\Phi(\mathfrak{A}) \to \Phi(\mathfrak{B})$ und $\Phi(\mathfrak{B}) \to \Phi(\mathfrak{A})$ beweisbare Formeln. — Durch die Form von $\mathfrak{A}$ und durch den Gesamtausdruck ist übrigens noch nicht eindeutig bestimmt, was $\Phi(\mathfrak{A})$ bedeuten soll. Der Ausdruck $X \to XY$ kann z. B. in dreierlei Sinne als $\Phi(X)$ bezeichnet werden, da für $\Phi(\mathfrak{A})$ jeder der drei Ausdrücke $\mathfrak{A} \to XY$, $X \to \mathfrak{A}Y$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}Y$ genommen werden kann. Die Regel VI trifft für jede mögliche Definition von $\Phi(\mathfrak{A})$ zu.

Diese Regel läßt sich auch so aussprechen: *Zwei Ausdrücke, die in gegenseitiger Folgebeziehung stehen, dürfen in einer beweisbaren Formel für einander eingesetzt werden.*

Beweis: Es genügt, die Regel für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{A}$ nur einmal in $\Phi(\mathfrak{A})$ vorkommt, und daß $\Phi(\mathfrak{A})$ eine der Formen $\bar{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$

hat. Die allgemeine Regel läßt sich durch mehrfache Anwendung dieser einfachen Regel gewinnen, indem man Φ von innen heraus aufbaut. Für jeden Teilausdruck Φ' von Φ erhält man nämlich sukzessive

$$\Phi'(\mathfrak{B}) \to \Phi'(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \Phi'(\mathfrak{A}) \to \Phi'(\mathfrak{B}).$$

Es seien also $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ schon bewiesen. Wir beweisen dann:

α) $\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$.

Man erhält diese beiden Formeln, indem man zunächst durch Einsetzung in Formel (6)

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}),$$

und

$$(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{B}})$$

beweist, und benutzt, daß $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ schon bewiesen sind.

β) $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}\,\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}\,\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}\,\mathfrak{A}$.

Beide Formeln erhält man aus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ durch Anwendung der Regel IV.

γ) $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$; $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}$.

Dieser Fall läßt sich auf β) zurückführen, indem man mehrmals das Axiom c) und die Regel V anwendet.

Als Anwendung von Regel VI und Axiom c) ergibt sich die *Kommutativität der Disjunktion.* Da man nämlich durch Einsetzung in c) erhält

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$

so darf in jeder Aussagenverbindung für eine Disjunktion $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ immer $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ eingesetzt werden.

Desgleichen ergibt sich aus Formel (4) und (5) und der Regel VI, daß man $\mathfrak{A}$ durch $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ ersetzen darf und umgekehrt.

Formel (7): $\overline{X \mathbin{\&} Y} \to \overline{X} \vee \overline{Y}$.

Beweis: $X \mathbin{\&} Y$ ist eine Abkürzung für $\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}$. Die Formel $\overline{\overline{\overline{X}\,\overline{Y}}} \to \overline{X}\,\overline{Y}$ entsteht durch Einsetzung aus $\overline{\overline{X}} \to X$.

Ebenso gewinnt man aus $X \to \overline{\overline{X}}$ die folgende Formel:

Formel (8): $\overline{X} \vee \overline{Y} \to \overline{X \mathbin{\&} Y}$.

Formel (9): $\overline{X \vee Y} \to \overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y}$.

Formel (10): $\overline{X} \mathbin{\&} \overline{Y} \to \overline{X \vee Y}$.

Beweis: Die beiden Formeln (9) und (10) schreiben sich ohne Abkürzung

$$\overline{X \vee Y} \to \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \quad \text{und} \quad \overline{\overline{\overline{X}} \vee \overline{\overline{Y}}} \to \overline{X \vee Y}.$$

Sie entstehen aus $\overline{X \vee Y} \to \overline{X \vee Y}$, indem nach Regel VI auf der rechten bzw. linken Seite X durch $\overline{\overline{X}}$ und Y durch $\overline{\overline{Y}}$ ersetzt wird.

Die Formeln (7), (8) und (9), (10) liefern uns in Verbindung mit Regel VI die frühere Regel a 3), S. 10.

Eine weitere Anwendung der Regel VI ist die folgende: Da nach Axiom a) $X \vee X \to X$ gilt, und da man aus Axiom b) durch Einsetzung $X \to X \vee X$ erhält, so darf ein Ausdruck von der Form $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ immer durch $\mathfrak{A}$ ersetzt werden und umgekehrt.

Formel (11): $X \,\&\, Y \to Y \,\&\, X$.

Beweis: $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \overline{\bar{Y}\bar{X}}$ entsteht aus $\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \overline{\bar{X}\bar{Y}}$, indem man die Regel von der Kommutativität der disjunktiven Verknüpfung anwendet.

Formel (12): $X \,\&\, Y \to X$.

Beweis: $\bar{X} \to \bar{X}\bar{Y}$ [nach Axiom b],

$\overline{\bar{X}\bar{Y}} \to \bar{\bar{X}}$ [nach Formel (6)],

$X \,\&\, Y \to \bar{\bar{X}}$,

$X \,\&\, Y \to X$.

Formel (13): $X \,\&\, Y \to Y$.

Der Beweis ergibt sich aus (11) und (12).

Formel (14): $X(YZ) \to Y(XZ)$.

Beweis: $Z \to XZ$ [aus Axiom b) durch Vertauschung der Disjunktionsglieder],

$YZ \to Y(XZ)$ [Regel IV],

$X(YZ) \to X\big(Y(XZ)\big)$ [Regel IV],

$X(YZ) \to \big(Y(XZ)\big)X$* [Kommutativität der Disjunktion],

$X \to ZX$ [aus Axiom b) durch Vertauschung der Disjunktionsglieder],

$XZ \to Y(XZ)$ [Einsetzung in die vorige Formel],

$X \to Y(XZ)$ [Regel V],

$\big(Y(XZ)\big)X \to \big(Y(XZ)\big)\big(Y(XZ)\big)$ [Regel IV],

$\big(Y(XZ)\big)X \to Y(XZ)$**.

(Ersetzung von $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}$.)

* und ** ergeben nach Regel V:

$$X(YZ) \to Y(XZ).$$

Formel (15): $X(YZ) \to (XY)Z$.

Beweis: $X(YZ) \to X(ZY)$ [kommutatives Gesetz],

$X(ZY) \to Z(XY)$ [Formel (14)],

$X(YZ) \to Z(XY)$ [Regel V].

Daraus entsteht Formel (15) durch Anwendung des kommutativen Gesetzes.

Formel (16): $(XY)Z \rightarrow X(YZ)$.

Beweis: $Z(YX) \rightarrow (ZY)X$ [Einsetzung in (15)].

Unter Anwendung des kommutativen Gesetzes kann $Z(YX)$ durch $(XY)Z$ und $(ZY)X$ durch $X(YZ)$ ersetzt werden.

Aus Formel (15) und (16) und Regel VI ergibt sich, daß nicht nur die Reihenfolge, sondern auch die Zusammenfassung der Disjunktionsglieder gleichgültig ist. Wir haben also auch das *assoziative Gesetz* für die disjunktive Verknüpfung abgeleitet.

Formel (17): $X \& (Y \& Z) \rightarrow (X \& Y) \& Z$,

$(X \& Y) \& Z \rightarrow X \& (Y \& Z)$.

Beweis: $X \& (Y \& Z)$ ist eine Abkürzung für $\overline{\bar{X}\,\overline{\overline{\bar{Y}\bar{Z}}}}$, $(X \& Y) \& Z$ eine solche für $\overline{\overline{\overline{\bar{X}\bar{Y}}}\,\bar{Z}}$. Beide Ausdrücke sind aber nach unseren bisherigen Regeln äquivalent und dürfen beliebig füreinander eingesetzt werden.

Formel (18): $X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y)$.

Beweis: $(\bar{X}\bar{Y})\,\overline{\bar{X}\bar{Y}}$ [Einsetzung in (3)].

$\bar{X}(\bar{Y}\,\overline{\bar{X}\bar{Y}})$ entsteht daraus durch anderes Zusammenfassen der Disjunktionsglieder. Dies ist die gesuchte Formel.

Regel VII: $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ ist durch $\mathfrak{B} \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{C}$ ersetzbar.

Der Beweis ergibt sich sofort aus unseren Regeln, falls man die Abkürzungen $\rightarrow$ und $\&$ durch ihre Bedeutung ersetzt.

Regel VIII: $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ kann durch $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ersetzt werden.

Beweis: $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})$ kann durch $(\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{A}})\mathfrak{B}$ oder durch $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ ersetzt werden.

Formel (19): $X(Y \& Z) \rightarrow XY \& XZ$.

Beweis: $Y \& Z \rightarrow Y$ [Formel (12)],

$X(Y \& Z) \rightarrow XY$ [nach Regel IV].

Ebenso erhält man aus Formel (13):

$X(Y \& Z) \rightarrow XZ$,

$XY \rightarrow (XZ \rightarrow XY \& XZ)$ [Formel (18)],

$X(Y \& Z) \rightarrow (XZ \rightarrow XY \& XZ)$ [nach Regel V],

$XZ \rightarrow \big(X(Y \& Z) \rightarrow XY \& XZ\big)$ [nach Regel VII],

$X(Y \& Z) \rightarrow \big(X(Y \& Z) \rightarrow XY \& XZ\big)$ [nach Regel V],

$X(Y \& Z) \rightarrow XY \& XZ$ [Regel VIII].

Formel (20): $XY \& XZ \to X(Y \& Z)$.

Beweis: $Y \to (Z \to Y \& Z)$ [Formel (18)],

$(Z \to Y \& Z) \to (XZ \to X(Y \& Z))$ [Axiom d)],

$Y \to (XZ \to X(Y \& Z))$ [Regel V],

$XZ \to (Y \to X(Y \& Z))$ [Regel VII],

$(Y \to X(Y \& Z)) \to [XY \to X(X(Y \& Z))]$ [Einsetzung in Axiom d)],

$XZ \to [XY \to X(X(Y \& Z))]$ [Regel V],

$X(X(Y \& Z))$ kann durch $(XX)(Y \& Z)$ und weiter durch $X(Y \& Z)$, ersetzt werden.

$$XZ \to (XY \to X(Y \& Z)).$$

Daraus ergibt sich die obige Formel nach Regel VII.

Aus Formel (19) und (20) zusammen mit Regel VI erhält man die Ableitung des Distributivgesetzes.

Ein weiteres Ableiten von Formeln und Regeln erweist sich als unnötig. Es zeigte sich nämlich, daß die Regeln a 1) bis a 4), b 1) bis b 3). die wir früher aufgestellt hatten, sich aus den Axiomen als abgeleitete Regeln gewinnen lassen. Daraus folgt, daß alle die Bemerkungen, die wir früher im Anschluß an diese Regeln machten, z. B. die, die das Prinzip der Dualität und die Normalform betrafen, sich auch axiomatisch wiedergewinnen lassen. Demnach braucht man, um die Beweisbarkeit einer Formel zu zeigen, nicht jedesmal bis auf die Axiome zurückzugehen, Denn eine Aussagenformel ist dann und nur dann aus den Axiomen beweisbar, wenn in der zugehörigen konjunktiven Normalform jede Disjunktion zwei Glieder enthält, von denen das eine das Gegenteil des anderen ist.

§ 12. Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems.

Die axiomatische Einführung des Aussagenkalküls macht es uns möglich, auf den Aussagenkalkül die Fragestellungen und Betrachtungen, die der axiomatischen Methode eigentümlich sind, anzuwenden. Die wichtigsten der entstehenden Fragen sind die nach der *Widerspruchsfreiheit*, *Unabhängigkeit* und *Vollständigkeit* des Axiomensystems. Wir wollen uns zunächst mit der Widerspruchsfreiheit der Axiome befassen.

Die Frage nach der Widerspruchsfreiheit kann hier in einem übertragenen Sinne gestellt werden. Wir wollen die Axiome widerspruchsfrei nennen, wenn es unmöglich ist, mit Hilfe des Kalküls zwei Aussagenverbindungen abzuleiten, die in der Beziehung des Gegenteils zueinander stehen, die man also aus dem Aussagenpaar X, $\overline{X}$ erhält, wenn man X beide Male in gleicher Weise ersetzt.

Die angegebene Definition der Widerspruchsfreiheit macht eine Erläuterung notwendig. Es wird hier scheinbar ein bestimmtes logisches

Prinzip, nämlich der Satz vom Widerspruch, vor den anderen Prinzipien ausgezeichnet. In Wirklichkeit ist es aber so, daß das Auftreten eines formalen Widerspruchs, d. h. die Beweisbarkeit zweier Formeln $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ den ganzen Kalkül zur Bedeutungslosigkeit verurteilen würde; denn wir hatten schon früher bemerkt, daß, wenn zwei Aussagen von der Form $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ beweisbar sind, für jede beliebige andere Aussage dasselbe gelten würde. Die Widerspruchsfreiheit des Kalküls im Sinne der Definition ist also gleichbedeutend damit, daß nicht jede beliebige Formel beweisbar ist.

Um die Widerspruchsfreiheit des Kalküls einzusehen, verfahren wir in folgender Weise:

Wir fassen die Aussagezeichen $X, Y, Z, \ldots$ als arithmetische Variable auf, für welche nur die Werte 0, 1 in Betracht kommen. $X \vee Y$ deuten wir als das arithmetische Produkt, und $\overline{X}$ erklären wir so, daß $\overline{0}$ gleich 1 und $\overline{1}$ gleich 0 ist. Auf Grund dieser Interpretation stellt jede Aussagenverbindung eine arithmetische Funktion der Grundaussagen dar, welche nur die Werte 0 oder 1 haben kann. Ist diese Funktion identisch gleich 0, so wollen wir der Kürze halber auch von dem symbolischen Ausdruck sagen, daß er identisch gleich 0 ist.

An Hand der gegebenen Deutung können wir nun eine gemeinsame Eigenschaft aller derjenigen Formeln angeben, die sich aus unseren Axiomen ableiten lassen. Diese besteht darin, daß auf Grund der arithmetischen Interpretation die Formeln für jedes in Betracht kommende Wertsystem der Variablen den Wert 0 ergeben, daß sie also identisch gleich 0 sind.

Daß diese Eigenschaft zunächst den Axiomen a) bis d) zukommt, machen wir uns folgendermaßen klar:

Wir stellen durch Probieren fest, daß $X \vee X$ immer den Wert 0 hat. Daraus folgt, daß auch $\overline{X \vee X} \vee X$ [Axiom a)] stets gleich 0 ist, weil $X \vee X$ immer denselben Wert hat wie X. — Ferner hat $\overline{X}(XY)$ [Axiom b)] denselben Wert wie $(\overline{X} \vee X)\, Y$ wegen der Assoziativität des arithmetischen Produktes. Es ist also stets 0, weil $0 \vee Y$ stets gleich 0 ist. Da $Y \vee X$ stets den gleichen Wert hat wie $X \vee Y$, so ist $\overline{X \vee Y} \vee (Y \vee X)$ als Spezialfall von $\overline{X}X$ stets gleich 0. Formel c) ergibt also stets den Wert 0. Endlich gilt dasselbe für die Formel d): Für $Z = 0$ ist nämlich ein Faktor 0 und für $Z = 1$ hat $Z \vee X$ denselben Wert wie X, $Z \vee Y$ denselben Wert wie Y, so daß die ganze Formel denselben Wert ergibt wie $\overline{\overline{X}Y}\,\overline{X}Y$, was wieder ein Spezialfall von $\overline{X}X$ ist.

Die Formeln der vier Axiome haben also in der Tat alle die genannte Eigenschaft. Bei der Anwendung der beiden in Betracht kommenden Regeln für die Ableitung neuer Formeln, nämlich der Einsetzungsregel und des Schlußschemas bleibt aber diese Eigenschaft immer erhalten. Denn was die erste Regel betrifft, so ist klar, daß durch Einsetzen eines Ausdrucks an Stelle einer Variablen der Wertevorrat für die Variablen jedenfalls nicht erweitert werden kann. Und wenn wir mit Hilfe der zweiten Regel aus zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}$ die Formel $\mathfrak{B}$ ableiten, so überträgt sich die Eigenschaft, immer den Wert 0 zu liefern, von jenen beiden Formeln auf die abgeleitete Formel; denn da die Formel $\mathfrak{A}$ immer den Wert 0 ergibt, so hat $\overline{\mathfrak{A}}$ immer den Wert 1, also hat $\overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}$ denselben Wert wie $\mathfrak{B}$, und hiernach hat $\mathfrak{B}$ ebenso wie $\overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{B}$ immer den Wert 0.

Wir sehen somit, daß tatsächlich mit Hilfe unseres Kalküls nur solche Formeln erhalten werden, die bei der arithmetischen Deutung immer den Wert 0 liefern. Indem wir dies feststellen, sind wir aber schon am Ende unseres Nachweises. Denn offenbar können zwei Formeln, die dadurch aus X und $\overline{X}$ hervorgehen, daß man für X beide Male dieselbe Aussagenverknüpfung einsetzt, nicht beide die Eigenschaft besitzen, immer gleich 0 zu sein; vielmehr wenn die eine immer den Wert 0 besitzt, so hat die andere immer den Wert 1.

§ 13. Die Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Systems.

An die Frage der Widerspruchsfreiheit, die wir für das Axiomensystem bejahend beantworten konnten, schließt sich die weitere Frage an, ob die Axiome alle *unabhängig* voneinander sind oder ob man nicht das eine oder das andere dieser Axiome entbehren kann[1].

Die Antwort lautet, daß das Axiomensystem tatsächlich der Forderung der Unabhängigkeit genügt.

Wir zeigen zunächst, daß die Formel a) $\overline{X \vee X} \vee X$ nicht aus den übrigen Axiomen abgeleitet werden kann, und zwar auch dann nicht, wenn man die Formel $\overline{X} \vee X$ als Axiom hinzunimmt, so daß also die Formel a) in dem axiomatischen System nicht durch die einfachere $\overline{X}X$ ersetzt werden kann. Auch für die anderen Axiome wird der Unabhängigkeitsbeweis in dem verschärften Sinne geführt, daß das betreffende Axiom nicht durch $\overline{X} \vee X$ ersetzt werden kann.

Der Beweis geschieht wieder mit Hilfe einer arithmetischen Interpretation. Wir nehmen als Werte für die Variablen $X, Y, Z, \ldots$ die Restklassen 0, 1, 2 modulo 4. Das Zeichen „v" soll wieder die gewöhnliche Multiplikation darstellen, und $\overline{X}$ erklären wir durch die Festsetzungen: $\overline{0}$ bedeutet 1, $\overline{1}$ bedeutet 0, 2 bedeutet 2.

Man kann nun verifizieren, daß die Formeln $\overline{X} \vee X$, b), c), d) bei der gegebenen Deutung der Variablen *immer* die Restklasse 0 ergeben, und diese Eigenschaft überträgt sich bei der Anwendung der beiden

[1] Diese Frage der Unabhängigkeit des Axiomensystems ist ebenfalls in der S. 24 zitierten Arbeit von P. Bernays, Axiomatische Untersuchung usw. gelöst worden.

Regeln auf alle aus jenen 4 Formeln abgeleiteten Formeln, was man auf gleiche Weise wie vorher beim Beweise der Widerspruchsfreiheit einsieht. Wäre daher die Formel a) aus b), c), d) und $\bar{X} \vee X$ mit Hilfe der Regeln ableitbar, so müßte $\overline{\bar{X}X} \vee X$ für jeden zulässigen Wert von X die Restklasse 0 ergeben. Dies ist aber nicht der Fall. Denn setzen wir für X den Wert 2 ein, dann ergibt sich:

$$\overline{\bar{2} \vee 2} \vee 2 = \bar{0} \vee 2 = 1 \vee 2 = 2,$$

also nicht der Wert 0.

Die Unabhängigkeit des Axioms b) $\bar{X} \vee (X \vee Y)$ von den übrigen Axiomen mit Einschluß von $\bar{X} \vee X$ zeigen wir auf folgende Weise. Es werden wieder X, Y, Z als Variable betrachtet, die die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen können. Wir definieren aber jetzt die Verknüpfung v für diese Variablen durch:

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 0; \quad 1 \vee 1 = 1 \vee 2 = 1 \vee 3 = 1;$$
$$2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 3; \quad 2 \vee 3 = 2$$

und durch die Festsetzung, daß das kommutative Gesetz gelten soll, Ferner versteht man unter $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ bezüglich 1, 0, 3, 2. Welche Werte man dann für die Variablen auch wählt, so ergeben die Formeln a), c), d) und $\bar{X} \vee X$ immer den Wert 0 oder 2. Diese Eigenschaft bleibt für alle Formeln bestehen, die man mit Hilfe der beiden Regeln aus a), c), d) und $\bar{X} \vee X$ ableitet. Dagegen hat $\bar{X}(XY)$ den Wert 1, falls man $X = 2$ und $Y = 1$ nimmt.

Entsprechend zeigt man die Unabhängigkeit des Axioms c): $\overline{XY}(YX)$. Man erklärt $\bar{0}$ durch 1, $\bar{1}$ durch 0, $\bar{2}$ durch 0, $\bar{3}$ durch 2. Ferner sei

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 \vee 2 = 0 \vee 3 = 1 \vee 0 = 2 \vee 0 = 3 \vee 0 = 0;$$
$$1 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2; \quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3;$$
$$2 \vee 3 = 0; \quad 3 \vee 2 = 3; \quad 2 \vee 2 = 2; \quad 3 \vee 3 = 3.$$

Man erkennt dann leicht, daß die Formeln a), b), d) und $\bar{X} \vee X$ bei beliebigen Ersetzungen der großen lateinischen Buchstaben durch die Zahlen 0, 1, 2, 3 den Wert 0 ergeben, und daß diese Eigenschaft bei Ableitung neuer Formeln erhalten bleibt. Dagegen erhält c) den Wert 3, falls man X durch 2 und Y durch 3 ersetzt. Dieser Unabhängigkeitsbeweis liefert uns noch mehr. Er zeigt, daß das assoziative Gesetz

$$\overline{X(YZ)}((XY)Z)$$

nicht ohne Benutzung des Axioms c) bewiesen werden kann. Ersetzt man nämlich in dieser Formel X durch 3, Y durch 2, Z durch 3, so wird

$$\overline{3 \vee (2 \vee 3)} \vee ((3 \vee 2) \vee 3) = \bar{0} \vee 3 = 1 \vee 3 = 3.$$

Das assoziative Gesetz ist also ebenfalls von den Axiomen a), c) und d) unabhängig.

Es bleibt noch übrig, die Unabhängigkeit des Axioms d) von den übrigen Axiomen zu zeigen. Dies gelingt durch das folgende System von Definitionen:

Die Variablen X, Y, Z mögen die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen können. Es sei

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{2} = 3, \quad \bar{3} = 0.$$

$$0 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 2 = 2 \vee 0 = 0 \vee 3 = 3 \vee 0 = 2 \vee 3 = 3 \vee 2 = 0.$$

$$1 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 2, \quad 1 \vee 3 = 3 \vee 1 = 3.$$

$$2 \vee 2 = 2, \quad 3 \vee 3 = 3.$$

Dann ergeben die Formeln a), b), c) und $\bar{X} \vee X$ immer den Wert 0 und ebenso alle daraus abgeleiteten Formeln. Dagegen erhält d) den Wert 2, wenn man $X = 3$, $Y = 1$ und $Z = 2$ nimmt.

Wir haben damit die *Unabhängigkeit der Axiome* a) bis d) gezeigt. Stellen wir nun die Frage nach der *Vollständigkeit*. Die Vollständigkeit eines Axiomensystems läßt sich in zweierlei Weise definieren. Einmal kann man darunter verstehen, daß sich aus dem Axiomensystem alle richtigen Formeln eines gewissen, inhaltlich zu charakterisierenden Gebietes gewinnen lassen. Man kann aber auch den Begriff der Vollständigkeit schärfer fassen, so daß ein Axiomensystem nur dann vollständig heißt, wenn durch die Hinzufügung einer bisher nicht ableitbaren Formel zu dem System der Grundformeln stets ein Widerspruch entsteht.

Die Vollständigkeit im ersten Sinne würde hier besagen, daß man aus den Axiomen a) bis d) alle immer richtigen Aussageformeln ableiten kann. Sie ist, wie wir schon sahen, erfüllt.

Es besteht aber auch die Vollständigkeit in dem schärferen Sinne. Wir können uns davon auf die folgende Weise überzeugen: Sei $\mathfrak{A}$ irgendeine aus den Axiomen nicht beweisbare Formel. $\mathfrak{B}$ sei der zu $\mathfrak{A}$ gehörige Ausdruck in der konjunktiven Normalform. Da $\mathfrak{B}$ ebensowenig wie $\mathfrak{A}$ beweisbar sein kann, so muß unter den Konjunktionsgliedern von $\mathfrak{B}$ eine Disjunktion $\mathfrak{C}$ vorkommen, bei der keine zwei Glieder einander entgegengesetzt sind. Setzt man in $\mathfrak{C}$ für jedes unverneinte Aussagezeichen X, für jedes verneinte Aussagezeichen $\bar{X}$ ein, so erhält man eine Disjunktion der Form $X \vee X \vee X \vee \ldots \vee X$, die nach den Regeln des Aussagenkalküls mit X äquivalent ist. Würde nun $\mathfrak{A}$ als richtige Formel postuliert, so würde sich auch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ und schließlich X als richtige Formel ergeben. Dann dürfte aber auch $\bar{X}$ für X eingesetzt werden, und wir erhielten einen Widerspruch. Es stellt sich also das System der betrachteten Axiome als vollständig heraus.

Zweites Kapitel.

Der Klassenkalkül (einstellige Prädikatenkalkül).

Die bisherige Form des logischen Kalküls ist zur präzisen Darstellung derjenigen logischen Zusammenhänge ausreichend, bei denen die Aussagen als ungetrenntes Ganzes auftreten. Jedoch ist keine Rede davon, daß wir mit dem Aussagenkalkül für die Zwecke der Logik überhaupt auskommen. Nicht einmal jene einfachen Arten von Schlüssen, welche in der traditionellen Logik mit den Stichworten „barbara", „celarent", „darii" usw. bezeichnet zu werden pflegen, lassen sich wiedergeben. Z. B. sucht man vergebens nach einer formalen Darstellung der logischen Beziehung, die in den drei Sätzen:

„Alle Menschen sind sterblich;
Cajus ist ein Mensch;
folglich ist Cajus sterblich."

zum Ausdruck kommt. Der Grund hierfür ist, daß es bei Schlüssen dieser Art nicht nur auf die Aussagen als Ganzes ankommt, sondern daß die innere logische Struktur der Aussagen, die sich sprachlich durch die Beziehung zwischen Subjekt und Prädikat ausdrückt, eine wesentliche Rolle spielt. Durch diese Erwägungen werden wir dazu veranlaßt, den Kalkül oder wenigstens seine inhaltliche Bedeutung zu ändern.

§ 1. Inhaltliche Umdeutung der Symbolik des Aussagenkalküls.

Wir gebrauchen im folgenden Kalkül die gleichen logischen Zeichen wie im Aussagenkalkül. Unter $X, Y, Z\ldots$ sollen aber jetzt nicht mehr ganze Aussagen verstanden werden, sondern Prädikate. Z. B. kann X eine Bezeichnung sein für das Prädikat „ist sterblich" oder „ist teilbar" oder „hat eine Ursache". Der Gebrauch des Wortes Prädikat ist hier der in der Philosophie übliche, indem darunter das verstanden wird, wodurch *ein* Subjekt näher gekennzeichnet werden kann. Im Laufe dieses Buches, nämlich im dritten und vierten Kapitel, wird aber, worauf wir hier nicht näher einzugehen brauchen, der Ausdruck Prädikat noch in einem weiteren Sinne gebraucht. Wir werden dort mit Prädikaten mit mehreren Subjekten zu tun haben. Wir bezeichnen daher die Prädikate im gewöhnlichen Sinn, von denen in diesem Kapitel ausschließlich die Rede ist, genauer als einstellige Prädikate, lassen aber im folgenden den Zusatz „einstellig" meist fort.

Ist X irgendein Prädikat, z. B. „ist schön", so soll unter $\bar{X}$ das gegenteilige Prädikat „ist nicht schön" verstanden werden. Stellen X, Y bezüglich die Prädikate „ist vergänglich", „besitzt Erkenntnis" dar, so ist $X \& Y$ das Symbol für das Prädikat „ist vergänglich und besitzt Erkenntnis", $X \mathrm{v} Y$ das Symbol für „ist vergänglich oder besitzt Erkenntnis". Die anderen logischen Zeichen können wir wieder als Abkürzungen benutzen.

Prädikate sind nun, für sich genommen, weder wahr noch falsch. Behauptet man also von einer Formel X bzw. $X \mathrm{v} Y$, daß sie richtig ist, so muß das einen anderen Sinn haben als bisher. Wir wollen jetzt darunter verstehen, daß das Prädikat X bzw. $X \mathrm{v} Y$ auf *alle* Gegenstände zutrifft.

Damit sind die Bedeutungen für alle Zeichen im einstelligen Prädikatenkalkül festgelegt. Sämtliche Formeln erhalten den Sinn von *allgemeinen Urteilen.* Um die gewöhnlichen allgemeinen Urteile, wie etwa „Alle Menschen sind sterblich", zur Darstellung zu bringen, kann man zunächst ein solches Urteil in der Form aussprechen: „Alle Gegenstände sind nicht Menschen oder sterblich". Führt man dann für das Prädikat „ist ein Mensch" das Zeichen X, für „ist sterblich" das Zeichen Y ein, so ergibt sich die symbolische Darstellung des Urteils durch: $\bar{X} \mathrm{v} Y$. Entsprechend wird ein negatives allgemeines Urteil wie „Kein Mensch ist vollkommen" durch die Formel: $\bar{X} \mathrm{v} \bar{Y}$ dargestellt, worin X, Y bezüglich die Prädikate „ist ein Mensch", „ist vollkommen" bedeuten. Die genaue Interpretation der Formel $\bar{X} \mathrm{v} \bar{Y}$ lautet: Alle Gegenstände sind nicht Menschen oder nicht vollkommen.

Wir können nun wieder nach den immer richtigen Formeln fragen, d. h. nach denjenigen Formeln, die bei Einsetzung beliebiger Prädikate für die Variablen $X, Y, \ldots$ ein auf alle Gegenstände zutreffendes Prädikat ergeben. Es ist dann leicht einzusehen, daß *bei der neuen Interpretation des Kalküls das System der immer richtigen Formeln genau dasselbe ist wie beim Aussagenkalkül.*

Es gelten nämlich zunächst wieder die Äquivalenzen a 1) bis a 4), die die Umformung der Ausdrücke zur konjunktiven Normalform ermöglichen. Ferner überzeugt man sich leicht, daß eine auf die Normalform gebrachte Formel dann und nur dann immer richtig ist, wenn jedes Konjunktionsglied eine Disjunktion $X \mathrm{v} \bar{X}$ enthält. Es kann also der Formalismus des Aussagenkalküls vollständig beibehalten werden; wir brauchen nur den Formeln eine andere Deutung zu geben.

Neben der ursprünglichen Deutung und der Deutung im Sinne des Prädikatenkalküls gibt es für die Formeln des Aussagenkalküls noch eine *dritte Interpretation.* Es handelt sich hier aber gegenüber dem

Prädikatenkalkül nicht wieder um die Einführung neuer logischer Beziehungen, sondern es wird nur den im Prädikatenkalkül ausdrückbaren Tatsachen eine veränderte Darstellung gegeben, welche für die Zwecke der Veranschaulichung Vorteile bietet. Diese Änderung der Darstellung besteht darin, daß wir die Prädikate, statt sie nach ihrem *Inhalt* zu bestimmen, durch ihren *Umfang* charakterisieren. Jedem Prädikat entspricht eine bestimmte „Klasse“[1] von Gegenständen, indem man zu der Klasse alle Gegenstände rechnet, denen das Prädikat zukommt. Natürlich ist dabei der Fall nicht ausgeschlossen, daß eine Klasse keinen Gegenstand enthält. Die Klassen sollen jetzt als Objekte des Kalküls genommen werden, welchen wir dann in dieser Interpretation als „*Klassenkalkül*“ bezeichnen.

Unter $\overline{X}$ ist die Klasse zu verstehen, die aus allen Gegenständen besteht, die nicht zur Klasse X gehören. $X \& Y$ bezeichnet den Durchschnitt der beiden Klassen X und Y, $X \mathrm{v} Y$ die Vereinigungsklasse. $X \rightarrow Y$ und $X \sim Y$ können, wie früher, als Abkürzungen für $\overline{X} \mathrm{v} Y$ bzw. $\overline{X} \mathrm{v} Y \& \overline{Y} \mathrm{v} X$ aufgefaßt werden. Sagt man, eine Formel X ist richtig, so soll das heißen, daß X die Klasse ist, die aus allen Gegenständen besteht. Sämtliche Regeln des Prädikatenkalküls gelten dann bei diesen Festsetzungen auch unverändert für den Klassenkalkül. Die Richtigkeit von $X \rightarrow Y$ bedeutet nach dieser Interpretation, daß die X entsprechende Klasse eine Teilklasse der durch Y bestimmten Klasse ist; die Formel $X \sim Y$ ist dann und nur dann richtig, wenn die Klassen X und Y identisch sind.

Das allgemeine Urteil „Alle Menschen sind sterblich“ läßt sich im Klassenkalkül so formulieren:

„Die Vereinigungsklasse, gebildet aus der Klasse der Nicht-Menschen und der Sterblichen, umfaßt alle Gegenstände.“

Es hat dieselbe formale Darstellung wie beim Prädikatenkalkül.

§ 2. Vereinigung des Klassenkalküls mit dem Aussagenkalkül.

Die Schlüsse der traditionellen Logik lassen sich in dem Prädikatenkalkül noch nicht alle formalisieren, weil uns eine Darstellung der *partikulären Urteile* fehlt. *Diese Darstellung wird erst erreicht durch die Verbindung des Aussagenkalküls mit dem Prädikaten- oder Klassenkalkül.* Wir gelangen zu dieser Vereinigung auf Grund der Erwägung, daß die Beziehungen des Prädikatenkalküls ja Aussagen darstellen, welche den Regeln des Aussagenkalküls unterworfen werden können. Dieser Gedanke führt zur Aufstellung eines *kombinierten Kalküls*, in dem die logischen

[1] In der Mathematik wendet man an Stelle des Ausdruckes „Klasse“ gewöhnlich das Wort „Menge“ an.

Zeichen &, v, $\overline{}$ teils zur Verknüpfung von Aussagen und teils zur Verknüpfung von Prädikaten gebraucht werden.

Es wäre dann aber zunächst zweifelhaft, ob eine Aussage $\overline{X}$ bedeutet, das Prädikat X trifft auf kein Ding zu, oder aber, es ist nicht richtig, daß X auf alle Dinge zutrifft. Bezeichnet z. B. X das Prädikat „schön sein", so wäre $\overline{X}$ nach der einen Deutung zu lesen: Alle Dinge sind nicht-schön, und nach der anderen: Nicht alle Dinge sind schön. Wir können diese Schwierigkeit dadurch vermeiden, daß wir die Prädikate durch zwei senkrechte Striche abschließen. $|X \vee Y|$ würde dann bedeuten: das Prädikat $X \vee Y$ trifft auf alle Dinge zu, $|X| \vee |Y|$ dagegen: das Prädikat X trifft auf alle Dinge zu oder das Prädikat Y trifft auf alle Dinge zu. Die beiden Aussagen, die eben zur Verwechslung Anlaß gaben, sind dann durch $|\overline{X}|$ und $\overline{|X|}$ unterschieden. Mit Hilfe des kombinierten Kalküls können dann die *partikulären Aussagen* dargestellt werden. Z. B. kann die Aussage „Einige Zahlen sind ungerade" folgendermaßen umgeformt werden: „Es ist nicht wahr, daß alle Zahlen gerade sind." — Bezeichnet man das Prädikat „Zahl sein" mit X, das Prädikat „gerade sein" mit Y, so schreibt sich zunächst die Aussage „Alle Zahlen sind gerade" symbolisch $|\overline{X} \vee Y|$. Das Gegenteil dieser Aussage wird also dargestellt durch $\overline{|\overline{X} \vee Y|}$. Allgemein bezeichnet $\overline{|\overline{X} \vee Y|}$ die Aussage: es gibt Dinge, für die gleichzeitig X und $\overline{Y}$ zutrifft.

In dem kombinierten Kalkül kommen eine Reihe von neuen immer richtigen Formeln zu den bisherigen hinzu. Derartige Formeln sind z. B.

$$\{|X \rightarrow Y| \,\&\, |Y \rightarrow Z|\} \rightarrow |X \rightarrow Z|$$

$$|X| \,\&\, |Y| \sim |X \,\&\, Y|.$$

Eine systematische Aufstellung und Untersuchung dieser Formeln soll, aus den am Schluß des nächsten Paragraphen angeführten Gründen, nicht gegeben werden.

§ 3. Systematische Ableitung der traditionellen Aristotelischen Schlüsse.

Nachdem unser Kalkül die erforderliche Ergänzung erfahren hat, wollen wir jetzt zur Anwendung des Kalküls auf die Lehre von den logischen Schlüssen eingehen. Es handelt sich darum, zu erkennen, wie sich die klassischen Aristotelischen Schlußfiguren in unseren kombinierten Kalkül einordnen und wie sie sich vom Standpunkte dieses Kalküls systematisieren und begründen lassen.

Die charakteristischen Eigenschaften der zu betrachtenden Schlüsse sind folgende: Sie bestehen aus drei Sätzen, von denen der dritte (der Schlußsatz) eine logische Folge der beiden ersten (der Prämissen) bildet. Jeder der drei Sätze hat eine der vier Formen:

„Alle A sind B" (allgemein bejahendes Urteil).
„Einige A sind B" (partikulär bejahendes Urteil).
„Kein A ist B" (allgemein verneinendes Urteil).
„Einige A sind nicht B" (partikulär verneinendes Urteil).

Zur abgekürzten Bezeichnung dieser vier Formen pflegt man die Vokale a, i, e, o (in der angegebenen Reihenfolge) zu verwenden. Als gemeinsames Zeichen für die vier Urteilsarten möge das Symbol AB dienen.

In den drei Sätzen treten im ganzen drei Begriffe auf, der *Subjektsbegriff* (S), der *Prädikatsbegriff* (P) und der *Mittelbegriff* (M); und zwar hat der Schlußsatz die Form SP, und von den Prämissen enthält die erste die Begriffe M und P, die zweite enthält M und S. Demnach ergeben sich folgende vier „Figuren" von Schlüssen[1]:

$$\begin{array}{cccc} MP & PM & MP & PM \\ SM & SM & MS & MS \\ \hline SP & SP & SP & SP \end{array}$$

Da bei jeder der vier Schlußfiguren für einen jeden der drei Sätze des Schlusses je nach seiner Zugehörigkeit zu einer der vier Urteilsformen a, i, e, o vier Möglichkeiten bestehen, so wären, rein kombinatorisch betrachtet, 256 verschiedene Arten von Schlüssen denkbar. Jedoch wird durch die Forderung, daß der Schlußsatz aus den Prämissen folgen soll, die Anzahl der Möglichkeiten wesentlich beschränkt. Die Aristotelische Logik lehrt, daß 19 verschiedene Schlußarten zulässig sind. Man hat für diese Schlußarten dreisilbige Merkworte eingeführt, in denen die Vokale der Reihe nach die Urteilsformen angeben, zu welchen die drei Sätze des Schlusses gehören. Bei dieser Benennung erhalten wir folgende Übersicht:

1. Figur	*2. Figur*	*3. Figur*	*4. Figur*
barbara	cesare	datisi	calemes
celarent	camestres	feriso	fresison
darii	festino	disamis	dimatis
ferio	baroco	bocardo	bamalip
		darapti	fesapo
		felapton	

Diese Zusammenstellung von Schlüssen wollen wir nun an Hand des Prädikatenkalküls daraufhin prüfen, ob sie wirklich alle in Betracht kommenden Schlußarten enthält und ob alle darin aufgezählten Schlußweisen der Anforderung der logischen Bündigkeit genügen. Hierzu stellen

[1] Man beachte, daß die Festlegung der Reihenfolge von S und P im Schlußsatz keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, da ja eine Schlußfigur mit PS als Schlußsatz stets aus einer der vier genannten Figuren durch bloße Änderung der Bezeichnung und Umstellung der Prämissen hervorgeht.

wir nun zunächst die vier Formen a, i, e, o eines Urteils AB symbolisch dar. Bezeichnen X, Y die Prädikate „ist A", „ist B", so lauten die symbolischen Bezeichnungen

$$|\bar{X} \vee Y|; \quad \overline{|\bar{X} \vee \bar{Y}|}; \quad |\bar{X} \vee \bar{Y}|; \quad \overline{|\bar{X} \vee Y|}.$$

Aus dieser Schreibweise ergeben sich ohne weiteres die auf die betrachteten Urteilsformen bezüglichen traditionellen Regeln über die *Entgegensetzung (Opposition) und die Umkehrung.* Von den vier Urteilen ist nämlich das letzte als das Gegenteil des ersten, das zweite als das Gegenteil des dritten ausgedrückt. Ferner sind die beiden mittleren Formeln in bezug auf X und Y symmetrisch, so daß sich das Urteil „Einige A sind B" als gleichbedeutend erweist mit „Einige B sind A" und ebenso das Urteil „Kein A ist B" als gleichbedeutend mit „Kein B ist A". Dagegen ist bei den Formen a und o keine solche Umkehrung möglich.

Wir wenden jetzt diese Darstellungsweise der vier Urteilsformen bei den Schlüssen an, indem wir für die Prädikate „ist S", „ist M", „ist P" die Zeichen X, Y, Z einführen. Jeder Schluß besteht dann aus drei Formeln. Die erste Prämisse wird dargestellt durch eine der vier Formen:

$$|\bar{Y} \vee Z|; \quad |\bar{Y} \vee \bar{Z}|; \quad |\bar{Z} \vee Y|; \quad |\bar{Z} \vee \bar{Y}|$$

bzw. durch deren logisches Gegenteil. Bei der zweiten Prämisse hat man entsprechend eine der Formen:

$$|\bar{Y} \vee X|; \quad |\bar{Y} \vee \bar{X}|; \quad |\bar{X} \vee Y|; \quad |\bar{X} \vee \bar{Y}|$$

oder deren Gegenteil. Beim Schlußsatz hat man, negiert oder unnegiert, eine der beiden Formen:

$$|\bar{X} \vee \bar{Z}|; \quad |\bar{X} \vee Z|.$$

(Man beachte, daß X, Y und Z unnegiert nur als zweites Glied einer Verknüpfung auftreten können.)

Zu diesen formalen Bedingungen tritt nun noch die Forderung, daß die dritte Formel eine Folge der beiden ersten sein soll, in dem Sinne, daß beim Einsetzen bestimmter Prädikate für X, Y, Z die beiden ersten Formeln nicht erfüllt sein können, ohne daß auch die dritte gültig ist.

Es kommt jetzt darauf an, zu untersuchen, wie durch diese Forderung die Mannigfaltigkeit der zulässigen Formelkombinationen beschränkt wird.

Für diese Diskussion ist die Bemerkung nützlich, daß wir, ohne an der Richtigkeit einer Formel etwas zu ändern, zwei durch v verknüpfte Glieder miteinander vertauschen können. Ferner ist die Reihenfolge der Prämissen unwesentlich, und wegen der Allgemeinheit, mit der die Schlußfolgerung gelten soll, macht es nichts aus, ob ein Prädikat mit U oder $\bar{U}$ bezeichnet wird. Auf Grund dieser Tatsachen können wir jedes

Paar von Prämissen auf eine von den folgenden sechs Normalformen zurückführen:

I. $\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert$	III. $\overline{\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert}$	V. $\overline{\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert}$
$\lvert \bar{V} \mathrm{v} \bar{W} \rvert$	$\lvert \bar{V} \mathrm{v} \bar{W} \rvert$	$\overline{\lvert \bar{V} \mathrm{v} \bar{W} \rvert}$
II. $\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert$	IV. $\overline{\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert}$	VI. $\overline{\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert}$
$\lvert V \mathrm{v} \bar{W} \rvert$	$\lvert V \mathrm{v} \bar{W} \rvert$	$\overline{\lvert V \mathrm{v} \bar{W} \rvert}$

Der Schlußsatz nimmt eine von den Formen

$$\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{W} \rvert; \quad \lvert \bar{U} \mathrm{v} W \rvert; \quad \lvert U \mathrm{v} \bar{W} \rvert; \quad \lvert U \mathrm{v} W \rvert$$

an (negiert oder unnegiert). Von der neuen Schreibweise gelangt man zu der früheren dadurch zurück, daß man für V entweder Y oder $\bar{Y}$ substituiert, ferner U, W oder aber W, U einem der Paare X, Z; $X, \bar{Z}$; $\bar{X}, Z$; $\bar{X}, \bar{Z}$ gleichsetzt und dann alle möglichen Vertauschungen von Disjunktionsgliedern in Betracht zieht, welche (bei geeigneter Reihenfolge der Prämissen) auf eines der formal zulässigen Dreiformelsysteme führen.

Prüfen wir nun jene sechs Paare von Prämissen I—VI daraufhin, was aus ihnen gefolgert werden kann, so finden wir zunächst, daß sich aus I., IV., V. kein Schluß der verlangten Art ergibt.

I. ist nämlich bei ganz beliebigem U, W erfüllt, falls das Prädikat V auf kein Ding zutrifft. IV. ist erfüllt, falls V auf alle Dinge zutrifft, sofern nur U überhaupt für ein Ding zutrifft, und V. ist für beliebige U und W, die überhaupt für ein Ding zutreffen, erfüllt, falls V für alle Dinge zutrifft.

Auch die Prämissen VI. liefern keinen der in Betracht kommenden Schlußsätze. Denn damit sie, durch geeignete Wahl von V, befriedigt werden können, genügt es, daß U und W für je ein Ding zutreffen. Die genannten Bedingungen sind jedoch mit der Falschheit eines jeden der in Frage stehenden Schlußsätze vereinbar.

Demnach kommen für unsere Schlüsse einzig die Fälle II. und III. in Betracht. Die beiden Prämissen von II. $\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert$ und $\lvert V \mathrm{v} \bar{W} \rvert$ liefern, wenn man die Abkürzung $\rightarrow$ einführt, und die erste der auf S. 39 angegebenen Formeln benutzt, unmittelbar die Beziehung $\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{W} \rvert$. Ferner ist auch $\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{W} \rvert$ die stärkste Folgerung, die aus den beiden Prämissen gezogen werden kann, da bei Gültigkeit dieser Beziehung die beiden Prämissen befriedigt werden, falls man V gleich W setzt.

Bei III. bedeutet die erste Prämisse $\overline{\lvert \bar{U} \mathrm{v} \bar{V} \rvert}$, daß es Dinge gibt (d. h. wenigstens ein Ding), auf die gleichzeitig U und V zutrifft. Die zweite Prämisse, $\lvert \bar{V} \mathrm{v} \bar{W} \rvert$, bedeutet, daß jedes Ding, das die Eigenschaft V hat, auch die Eigenschaft $\bar{W}$ besitzt. Daraus folgt, daß es

Dinge gibt, für die gleichzeitig U und $\bar{W}$ zutrifft, oder daß $|\overline{\bar{U} \vee W}|$ eine richtige Formel ist.

Ist umgekehrt die Formel $|\overline{\bar{U}\ W}|$ richtig, so werden die Prämissen III. befriedigt, indem man $\bar{V}$ gleich W setzt.

Somit ergibt sich, daß die von uns betrachteten Schlüsse sich alle auf zwei Hauptformen zurückführen lassen, nämlich:

$$
(A)\quad \frac{\begin{array}{c} |\bar{U} \vee \bar{\bar{V}}| \\ |V \vee \bar{\bar{W}}| \end{array}}{|\bar{U} \vee \bar{\bar{W}}|}
\qquad\qquad
(B)\quad \frac{\begin{array}{c} |\overline{\bar{U} \vee \bar{\bar{V}}}| \\ |\bar{V} \vee \bar{\bar{W}}| \end{array}}{|\overline{\bar{U} \vee W}|}
$$

Es handelt sich nun noch darum, von diesen beiden Hauptformen vermittels der verschiedenen zulässigen Transformationen wieder zu den früheren Darstellungen überzugehen, an Hand derer wir die verschiedenen Aristotelischen Schlußarten unterscheiden können. Dabei müssen wir die formalen Beschränkungen der Schlüsse berücksichtigen, gemäß denen die unverneinten Prädikate X, Y, Z nur an zweiter Stelle in einem Produkt auftreten und Y niemals im Schlußsatz vorkommt. Ferner ist zu beachten, daß bei der Hauptform (A) die Vertauschung von U mit W keine neuen Schlußarten liefert.

Demnach erhalten wir alle aus der Hauptform (A) entspringenden Schlußweisen durch die Substitutionen:

$$
\begin{array}{lll}
U = X, & V = Y, & W = Z; \\
U = X, & V = \bar{Y}, & W = Z; \\
U = X, & V = Y, & W = \bar{Z}.
\end{array}
$$

Von diesen führt (bei geeignet gewählter Reihenfolge der Prämissen sowie der Produktglieder) die erste auf die Schlüsse *camestres* und *calemes*, die zweite auf *celarent* und *cesare*, die dritte auf *barbara*.

Für die Hauptform (B) erhalten wir die verschiedenen Schlußarten aus den Substitutionen:

$$
\begin{array}{llllll}
U = X, & V = Y, & W = Z; \qquad & U = X, & V = Y, & W = \bar{Z}; \\
U = X, & V = \bar{Y}, & W = Z; \qquad & U = Z, & V = Y, & W = \bar{X}; \\
U = \bar{Z}, & V = Y, & W = \bar{X}. & & &
\end{array}
$$

Die erste Substitution ergibt die Schlüsse *ferio*, *festino*, *feriso*, *fresison*, die zweite *darii* und *datisi*, die dritte *baroco*, die vierte *disamis* und *dimatis*, die fünfte *bocardo*.

Die angestellte Überlegung zeigt uns, daß es von Schlüssen der verlangten Art 15 verschiedene Formen gibt. Diese gehören alle zu den Aristotelischen Schlüssen, so daß die klassische Zusammenstellung der Schlußformen alle möglichen Fälle erschöpft. Jedoch haben wir nicht sämtliche der Aristotelischen Schlußweisen bei unserem Verfahren wiedergefunden. Vielmehr fehlen in der erhaltenen Übersicht die vier Schlußarten: darapti, bamalip, felapton, fesapo. Diese Diskrepanz rührt davon her, daß die seit Aristoteles traditionell gewordene Deutung der positiven allgemeinen Sätze („Alle A sind B“) mit unserer Interpretation der Formeln $|\bar{X} \vee Y|$ nicht vollkommen in Einklang steht. Nach Aristoteles gilt nämlich eine Aussage „Alle A sind B“ nur dann als richtig, wenn es Gegenstände gibt, welche A sind. Unsere Abweichung von Aristoteles in diesem Punkte wird durch die Rücksicht auf die mathematischen Anwendungen der Logik gerechtfertigt, bei denen die Zugrundelegung der Aristotelischen Auffassung unzweckmäßig wäre.

Wir schließen damit die Bemerkungen über den Prädikaten- und Klassenkalkül ab. Es lassen sich zwar eine Anzahl interessanter Fragestellungen angeben; z. B. kann man fragen, welche Formeln des kombinierten Kalküls immer richtige Aussagen darstellen. Ein näheres Eingehen auf diese Probleme wollen wir uns aber versagen, da diese im folgenden Kapitel in einem allgemeineren Zusammenhang formuliert und behandelt werden. Z. B. wird die Frage nach den immer richtigen Formeln des kombinierten Kalküls durch die Ausführungen in § 12 des nächsten Kapitels vollständig beantwortet. Wir verzichten auch auf eine axiomatische Behandlung des einstelligen Prädikatenkalküls[1]. Der Klassenkalkül oder einstellige Prädikatenkalkül bildet überhaupt nur eine Vorbereitung für den Prädikatenkalkül im weiteren Sinne, der im folgenden behandelt wird, und wird durch dessen Einführung überflüssig, so daß wir später auf die in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen nicht mehr zurückzukommen brauchen. Dagegen bleibt der Aussagenkalkül als unentbehrliche Grundlage aller weiteren Untersuchungen bestehen.

---

[1] Ein vollständiges Axiomensystem für den kombinierten Kalkül und zugleich eine interessante Erweiterung des Klassenkalküls ist von M. Wajsberg angegeben worden, vgl. M. Wajsberg: Ein erweiterter Klassenkalkül. Mh. Math. Physik Bd. 40 (1932) [siehe auch die zugehörige Berichtigung in Mh. Math. Physik Bd. 42 (1935) S. 242]. Die in dieser Arbeit ebenfalls behandelte Frage nach den immer richtigen Aussagen des kombinierten Kalküls war in anderer Weise schon durch die in § 12 des nächsten Kapitels erwähnten Arbeiten von Löwenheim, Skolem und Behmann gelöst worden. Vgl. insbesondere die Darstellung von Behmann in Math. Ann. Bd. 86 (1922).

Drittes Kapitel.

Der engere Prädikatenkalkül.

§ 1. Unzulänglichkeit des bisherigen Kalküls.

Der kombinierte Kalkül ermöglichte eine systematischere Behandlung der logischen Fragen als die inhaltliche traditionelle Logik. Andererseits kann man aber sagen, daß in Hinsicht auf die Möglichkeit der logischen Folgerungen sich beide wesentlich gleich verhalten. Die komplizierteren Schlüsse, die im kombinierten Kalkül möglich sind, lassen sich auch durch mehrfache Anwendung der Aristotelischen Schlußfiguren gewinnen.

Nach der Meinung der früheren Logiker, die auch KANT teilte, war nun mit der Aristotelischen Schlußlehre die Logik überhaupt erschöpft. KANT sagt[1]:

„Merkwürdig ist noch an ihr (der Logik), daß sie auch bis jetzt (seit Aristoteles) keinen Schritt vorwärts hat tun können und also allem Anschein nach geschlossen und vollendet zu sein scheint."

In Wirklichkeit ist es so, daß sich der Aristotelische Formalismus schon bei ganz einfachen logischen Zusammenhängen als unzulänglich erweist. Insbesondere ist er prinzipiell unzureichend zur Behandlung der logischen Grundlagen der Mathematik. Er versagt nämlich überall da, wo es darauf ankommt, eine *Beziehung zwischen mehreren Gegenständen* zur symbolischen Darstellung zu bringen.

Wir wollen das an einem einfachen Beispiel erläutern. Betrachten wir den Satz: „Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A." Diesen können wir zwar im gewöhnlichen Aussagenkalkül in der Form $X \rightarrow Y$ aufschreiben; und dieselbe Darstellung erhält der Satz auch im einstelligen Prädikatenkalkül. Im letzteren läßt er sich ja in folgender Weise formulieren: „Wenn ein geordnetes Punktetripel die Eigenschaft hat, daß der zweite Punkt zwischen dem ersten und dritten liegt, so besitzt es auch die Eigenschaft, daß der zweite Punkt zwischen dem dritten und ersten liegt." Jedoch kommt bei dieser Darstellung das logisch Wesentliche der Behauptung, nämlich die Symmetrie der Beziehung „Zwischen" in bezug auf A und C gar nicht zum Ausdruck. Daher läßt sich diese Darstellung auch nicht dazu verwenden, um aus dem betrachteten Satze die sich aus ihm ergebenden mathematischen Folgerungen abzuleiten. Hieran ändert sich auch nichts, wenn wir die Darstellungsweise des kombinierten Kalküls benutzen.

---

[1] In der Vorrede zur 2. Ausgabe der „Kritik der reinen Vernunft".

Zur Verdeutlichung des hier vorliegenden Sachverhalts möge noch ein weiteres, übrigens nicht der Mathematik angehöriges Beispiel angeführt werden. Es ist gewiß eine logisch selbstverständliche Behauptung: „Wenn es einen Sohn gibt, so gibt es einen Vater", und von einem logischen Kalkül, der uns befriedigt, können wir verlangen, daß er diese Selbstverständlichkeit in Evidenz setzt, in dem Sinne, daß der behauptete Zusammenhang vermittels der symbolischen Darstellung als Folge von einfachen, logischen Prinzipien kenntlich wird. Davon ist aber bei unserem bisherigen Kalkül keine Rede. Wir können hier zwar (unter Anwendung des kombinierten Kalküls) die betrachtete Behauptung symbolisch ausdrücken durch die Formel: $\overline{|\overline{X}|} \rightarrow \overline{|\overline{Y}|}$, worin X, Y bezüglich die Prädikate „ist ein Sohn", „ist ein Vater" bedeuten. Doch vermag uns diese Formel gewiß nicht zur Einsicht in die Richtigkeit der Behauptung zu verhelfen, da sie ja bei anderer Einsetzung für X und Y auch falsche Sätze ausdrücken kann. Es kommt in der Formel nicht dasjenige zur Darstellung, worauf der logische Zusammenhang zwischen Vordersatz und Nachsatz beruht, daß nämlich die Prädikate des Sohn-Seins und des Vater-Seins eine Beziehung eines Gegenstandes zu einem anderen enthalten. Die entsprechende Sachlage findet sich bei fast allen komplizierteren Urteilen.

§ 2. Methodische Grundgedanken des Prädikatenkalküls.

Da sich unser bisheriger Kalkül als ungenügend herausgestellt hat, so sind wir genötigt, nach einer neuen Art der logischen Symbolik zu suchen. Dazu kehren wir noch einmal zu dem Punkt unserer Betrachtungen zurück, an welchem wir zuerst über den Aussagenkalkül hinausgingen. Den entscheidenden Schritt bildete hier die Spaltung der Aussagen in Subjekt und Prädikat. Diese Zerlegung haben wir jedoch nicht vollkommen ausgenutzt, indem wir bei der Darstellung der Aussagen nur die Prädikate, nicht aber die Subjekte explizit bezeichneten. Der Grund für diese Beschränkung der Symbolik lag darin, daß wir bestrebt waren, hinsichtlich des Formalismus uns an den Aussagenkalkül anzuschließen. Lassen wir nun diesen Gesichtspunkt der Anlehnung an den Aussagenkalkül fallen, so bietet sich als naturgemäß das Verfahren dar, daß man in der Darstellung der Aussage die *Gegenstände (Individuen)* von den über sie ausgesagten *Eigenschaften (Prädikaten)* trennt und beide ausdrücklich bezeichnet.

Das tun wir in der Weise, daß wir zur symbolischen Darstellung der Prädikate *Funktionszeichen mit Leerstellen* verwenden, wo dann in die Leerstellen die Bezeichnungen der Gegenstände einzusetzen sind. Z. B. kann das Funktionszeichen $P(\ )$ das Prädikat „ist eine Primzahl" bezeichnen. $P(5)$ ist dann die Darstellung der Aussage: „5 ist eine Primzahl". Ist $M(\ )$ die Bezeichnung für das Prädikat „Mensch sein", so bedeutet M (Cajus): „Cajus ist ein Mensch.“ Wird ferner die Beziehung des kleineren zum größeren durch das Funktionszeichen mit zwei Leerstellen $<(\,,\,)$ ausgedrückt, so ist $<(2, 3)$ die symbolische Darstellung der Aussage: „2 ist kleiner als 3.“ Ebenso wird die Aussage „B liegt zwischen A und C“ durch $Z\,(A, B, C)$ dargestellt.

Alle mathematischen Formeln stellen derartige Beziehungen zwischen zwei und mehr Größen dar. Z. B. entspricht der Formel: $x + y = z$ ein dreigliedriges Prädikat $S\,(x, y, z)$. Die Richtigkeit von $S\,(x, y, z)$ besagt, daß x, y, z durch die Beziehung $x + y = z$ verbunden sind[1].

Auf die in der neuen Weise dargestellten Aussagen lassen sich die Verknüpfungen des Aussagenkalküls anwenden. Z. B. wird das Gegenteil der Aussage $P\,(5)$ durch $\overline{P\,(5)}$ ausgedrückt. Die Formel

$$(<(2, 3) \mathbin{\&} <(3, 7)) \rightarrow <(2, 7)$$

stellt die Aussage dar: „Wenn 2 kleiner ist als 3 und 3 kleiner als 7, so ist 2 kleiner als 7.“

Es fehlt uns noch ein symbolischer Ausdruck für die *Allgemeinheit von Aussagen.* Um einen solchen zu gewinnen, führen wir nach dem Vorbilde der Mathematik neben den Zeichen für bestimmte Gegenstände (den Eigennamen) noch *Variable* $x, y, z, \ldots$ ein, mit denen wir die Leerstellen der Funktionszeichen ebenfalls ausfüllen können. Eine *bestimmte* Ausfüllung einer Leerstelle heißt ein *Wert der betreffenden Variablen.*

Die Werte einer Variablen sind im allgemeinen auf bestimmte Gattungen von Gegenständen beschränkt, die durch die Bedeutung der Funktionszeichen bestimmt werden. Z. B. stellt sich die Grundbeziehung der elementaren Geometrie der Ebene: „der Punkt x liegt auf der Geraden y“, durch ein Funktionszeichen mit zwei Argumenten $L\,(x, y)$ dar. Hier kommen als Werte für x nur Punkte, für y nur Geraden in Betracht.

Setzt man in die Leerstellen der logischen Funktionen bestimmte Argumentwerte (d. h. Eigennamen von Individuen) ein, so ergeben sich *bestimmte Aussagen,* die richtig oder falsch sein können. Sind dagegen die Leerstellen von Funktionszeichen mit Variablen ausgefüllt, so wird dadurch zunächst kein bestimmtes Urteil dargestellt, sondern wir haben nur einen symbolischen Ausdruck, der von der betreffenden Variablen abhängt. Wie man nun in der Algebra Buchstabenformeln schreibt, welche besagen, daß für beliebige Zahlenwerte, die man an Stelle der Variablen einsetzt, die entstehende Zahlengleichung richtig ist, so können wir auch im Logikkalkül verfahren. Eine Formel

$$(<(x, y) \mathbin{\&} <(y, z)) \rightarrow <(x, z)$$

[1] Es war bisher in der Logik üblich, nur die Funktionen mit einer Leerstelle als Prädikate, dagegen Funktionen mit mehreren Leerstellen als Relationen zu bezeichnen. Wir gebrauchen hier das Wort Prädikat in ganz allgemeinem Sinne.

bedeutet dann, daß für ein beliebiges Zahlentripel x, y, z, für das die Beziehungen $<(x, y)$ und $<(y, z)$ bestehen, auch $<(x, z)$ gültig ist.

Wir haben damit bereits eine Darstellung für die allgemeinen Urteile gewonnen. Um aber die Allgemeinheit in Verbindung mit der Negation und den logischen Verknüpfungen &, v, $\rightarrow$ anwenden zu können, brauchen wir ein *besonderes* „*Allzeichen*". Man würde sonst nicht wissen, ob $\overline{P(x)}$ bedeutet: „Für alle x ist $\overline{P(x)}$ der Fall", oder: „Es ist nicht richtig, daß für alle x die Aussage $P(x)$ gilt." Diese Darstellung der allgemeinen Urteile soll in der Weise geschehen, daß wir die zu der betreffenden logischen Funktion gehörige Variable in Klammern vor das Funktionszeichen setzen.

$(x)\,A(x)$ bedeutet also: Für alle x gilt $A(x)$. Die beiden eben zur Verwechslung Anlaß gebenden Urteile sind dann durch $(x)\,\overline{P(x)}$ und $\overline{(x)\,P(x)}$ unterschieden. Aus Symmetriegründen führen wir gleichzeitig zur Darstellung der *partikulären* Urteile ein besonderes „*Seinszeichen*" ein. $(E\,x)\,A(x)$ stellt das Urteil dar: „Es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt."

Für All- und Seinszeichen gebrauchen wir auch den gemeinsamen Namen „*Klammerzeichen*".

Die zu einem Allzeichen oder Seinszeichen gehörige Variable nennen wir „*gebundene Variable*". Sie spielt eine analoge Rolle wie die Integrationsvariable in der Mathematik; insbesondere ist die Benennung dieser Variablen gleichgültig. Zum Unterschied von den gebundenen Variablen nennen wir die anderen „*freie Variable*".

Bezüglich der Schreibweise ist zu bemerken, daß eine Formel, vor der ein Allzeichen oder Seinszeichen steht, in Klammern zu setzen ist, falls sie eines der Zeichen &, v, $\rightarrow$ enthält und nicht schon durch einen Negationsstrich zusammengefaßt ist. Ferner treffen wir der Übersichtlichkeit halber folgende Festsetzungen:

Statt $\overline{A(x)}$ schreiben wir einfacher $\bar{A}(x)$,

statt $\overline{(x)\,A(x)}$ schreiben wir einfacher $\overline{(x)}\,A(x)$,

und statt $\overline{(E\,x)\,A(x)}$ schreiben wir einfacher $\overline{(E\,x)}\,A(x)$.

Aus der Bedeutung des All- und des Seinszeichens ergeben sich die folgenden Äquivalenzen:

$$(E\,x)\,A(x) \text{ äq } \overline{(x)}\,\bar{A}(x)\,,$$
$$(E\,x)\,\bar{A}(x) \text{ äq } \overline{(x)}\,A(x)\,,$$
$$\overline{(E\,x)}\,A(x) \text{ äq } (x)\,\bar{A}(x)\,,$$
$$\overline{(E\,x)}\,\bar{A}(x) \text{ äq } (x)\,A(x)\,.$$

Auf Grund dieser inhaltlichen Beziehung läßt sich das Seinszeichen durch das Allzeichen ersetzen und umgekehrt. Bei der Symbolik des Prädikatenkalküls könnten wir also mit drei Verknüpfungen auskommen.

Notwendig ist nur das Negationszeichen, ferner eines der drei Symbole &, v, $\rightarrow$, und dann noch eines von den beiden Zeichen (x), $(E x)$.

Bisher haben wir nur einzeln auftretende All- und Seinszeichen betrachtet. Zu wesentlich neuen logischen Gebilden werden wir geführt, wenn wir jetzt berücksichtigen, daß die All- und Seinszeichen kombiniert auftreten können. Diese Kombination ist schon möglich, falls wir nur Prädikate mit einer Leerstelle in Betracht ziehen; eine besondere Rolle spielt sie bei den mehrgliedrigen Prädikaten. Bei einem zweigliedrigen Prädikat $A(x, y)$ z. B. haben wir die folgenden einfachsten Formen der Zusammensetzung:

$$(x)(y) A(x, y)$$

„für alle x und für alle y besteht die Beziehung $A(x, y)$";

$$(E x)(E y) A(x, y)$$

„es gibt ein x und ein y, für welche $A(x, y)$ besteht";

$$(x)(E y) A(x, y)$$

„zu jedem x gibt es ein y, so daß $A(x, y)$ besteht";

$$(E x)(y) A(x, y)$$

„es gibt ein x, welches zu jedem y in der Beziehung $A(x, y)$ steht".

Um den Sinn der Zusammensetzung deutlicher zu machen, könnte man hier jedesmal noch eine Klammer einfügen, also z. B. schreiben:

$$(x)\,[(y) A(x, y)]$$

und

$$(x)\,[(E y) A(x, y)] .$$

Da aber auch ohnedies kein Anlaß zu einem Mißverständnis vorliegt, pflegt man die Klammer fortzulassen. — Läßt man Kombinationen von drei und mehr Klammerzeichen zu, so hat man entsprechend eine größere Mannigfaltigkeit für die Zusammensetzung der All- und Seinszeichen.

Aus der Bedeutung des Allzeichens geht hervor, daß in einem Ausdruck $(x)(y) A(x, y)$ *die beiden Allzeichen ohne Änderung des Sinns der Aussage vertauscht werden können.* Dasselbe gilt von den beiden Seinszeichen in einem Ausdruck

$$(E x)(E y) A(x, y) .$$

Dagegen ist bei $(x)(E y) A(x, y)$ die Reihenfolge der Zeichen (x), $(E y)$ wesentlich.

Z. B. stellt der Ausdruck

$$(x)(E y) < (x, y)$$

(wenn die Variablen x, y sich auf die reellen Zahlen als Definitionsbereich beziehen) einen *richtigen* Satz dar, nämlich: „Zu jeder Zahl x gibt es eine Zahl y derart, daß x kleiner ist als y", d. h. „zu jeder Zahl gibt es eine größere").

Vertauscht man aber hier die Stellung der Zeichen (x) und (Ey), so entsteht $(Ey)\,(x) < (x, y)$, und das ist der Ausdruck eines *falschen* Satzes, nämlich: „Es gibt eine Zahl y, welche größer ist als jede Zahl x.“ Durch die Vertauschung von (x) und (Ey) kommt also eine ganz andere Aussage zustande.

Das logische Verhältnis hierbei ist so, daß auf Grund der (später abzuleitenden) Formel:

$$(Ey)\,(x)\,A\,(x, y) \rightarrow (x)\,(Ey)\,A\,(x, y)$$

aus einem richtigen Satz von der Form $(Ey)\,(x)\,A\,(x, y)$ auf $(x)\,(Ey)\,A\,(x, y)$ geschlossen werden kann, aber nicht umgekehrt.

§ 3. Vorläufige Orientierung über den Gebrauch des Prädikatenkalküls.

Ehe wir daran gehen, eine systematische Darstellung der Regeln zu geben, die zur Handhabung des Kalküls notwendig sind, soll die Behandlung einiger Beispiele dazu dienen, uns mit der Symbolik vertrauter zu machen.

Zunächst zeigen wir, wie die *Axiome, durch welche die Grundeigenschaften der natürlichen Zahlenreihe* formuliert werden, sich im Prädikatenkalkül symbolisch ausdrücken lassen. Diese Axiome lauten:

1. *Zu jeder Zahl gibt es eine und nur eine nächstfolgende.*
2. *Es gibt keine Zahl, auf welche 1 unmittelbar folgt.*
3. *Zu jeder von 1 verschiedenen Zahl gibt es eine und nur eine unmittelbar vorangehende.*

In diesen Sätzen kommen als individuelle Prädikate die Beziehungen der unmittelbaren Aufeinanderfolge und die der Verschiedenheit von Zahlen vor. Die Beziehung der Verschiedenheit tritt nicht nur in der Verbindung „von 1 verschieden“, sondern auch implizite in dem Ausdruck „nur eine Zahl“ auf; denn daß es „nur eine“ Zahl von einer gewissen Beschaffenheit gibt, bedeutet, daß es nicht zwei verschiedene solche Zahlen gibt. Die Verschiedenheit ist das Gegenteil der arithmetischen Gleichheit.

Wir führen daher die Prädikate:

$$=(x, y) \quad („x \text{ ist gleich } y“)$$

und

$$F(x, y) \quad („y \text{ folgt unmittelbar auf } x“)$$

ein und können mit diesen Bezeichnungen die genannten Axiome folgendermaßen darstellen:

1. $(x)(Ey)\{F(x, y)\,\&\,(z)(F(x, z) \rightarrow\, =(y, z))\}$,

d. h. „zu jedem x gibt es ein y, das auf x unmittelbar folgt, und das einem jeden z, welches auf x unmittelbar folgt, gleich ist“.

2. $\overline{(E x)} F(x, 1)$,

d. h. „es gibt kein x, auf welches 1 unmittelbar folgt".

3. $(x)\{\overline{=(x, 1)} \rightarrow (E y)[F(y, x) \,\&\, (z)(F(z, x) \rightarrow = (y, z))]\}$,

d. h. „zu jedem x, das von 1 verschieden ist, gibt es ein y, auf welches x unmittelbar folgt und welches einem jeden z, auf das x unmittelbar folgt, gleich ist".

Wir wollen uns ferner über die Methode der *Beweisführungen* im Prädikatenkalkül an einigen einfachen Beispielen orientieren. Wir beginnen mit jenem Satze, dessen Unbeweisbarkeit im Kalkül des zweiten Kapitels eine von den Tatsachen bildete, an denen wir uns die Unzulänglichkeit jenes Kalküls klargemacht haben. Der Satz lautete:

„Wenn es einen Sohn gibt, so gibt es einen Vater." Der symbolische Ausdruck dieser Behauptung im Prädikatenkalkül lautet zunächst:

$$(E x)\, S(x) \rightarrow (E x)\, V(x).$$

Dabei bedeutet $S(x)$: „x ist ein Sohn", und $V(x)$: „x ist ein Vater." Ein Beweis dieses Satzes ist nur möglich, wenn wir die vorkommenden Prädikate begrifflich zerlegen. Im Begriff des Sohnes ist einerseits das Prädikat „männlich" und andererseits die Beziehung des Kindes zu den Eltern enthalten; im Begriff des Vaters die Beziehung zu Frau und Kind.

Führen wir demgemäß für „x ist männlich" das Zeichen $M(x)$ ein und stellen wir das Prädikat „x und y sind die Eltern von z" (oder genauer: „x und y als Mann und Frau haben z zum Kinde") durch das Symbol $K(x, y, z)$ dar, so können wir $S(x)$ definieren durch:

$$M(x) \,\&\, (E u)\,(E v)\, K(u, v, x).$$

(„x ist ein Sohn" bedeutet: „x ist männlich, und es gibt ein u und v derart, daß u als Mann und v als Frau die Eltern von x sind.")

Ebenso wird $V(x)$ definiert durch:

$$(E y)\,(E z)\, K(x, y, z).$$

(„x ist ein Vater" bedeutet: „Es gibt ein y und ein z derart, daß x und y als Mann und Frau die Eltern von z sind.")

Setzen wir die erhaltenen Ausdrücke für $S(x)$ und $V(x)$ ein, so nimmt die betrachtete Behauptung die Form an:

$$(E x)\,[M(x) \,\&\, (E u)\,(E v)\, K(u, v, x)] \rightarrow (E x)\,(E y)\,(E z)\, K(x, y, z).$$

Diese Formel stellt eine Folgebeziehung zwischen zwei Aussagen dar, und für den Beweis, den wir suchen, kommt es darauf an, von der ersten dieser Aussagen zu der zweiten durch eine Reihe von Folgebeziehungen zu gelangen, deren jede durch den Kalkül begründet ist. Dabei wenden wir das uns vom Aussagenkalkül her geläufige und natürlich auch im Prädikatenkalkül gültige Prinzip an, daß aus zwei Aussagenbeziehungen $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ stets auf $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ geschlossen werden kann.

Nun gilt zunächst im Prädikatenkalkül, entsprechend der Aussagenformel $X \,\&\, Y \rightarrow Y$, für beliebige F und G die Beziehung:

$$(E x)\big(F(x) \,\&\, G(x)\big) \rightarrow (E x)\, G(x).$$

Setzen wir für den Ausdruck $(E u)(E v) K(u, v, x)$, der ein Prädikat von x darstellt, zur Abkürzung $N(x)$, so erhalten wir

$$S(x) \text{ äq } M(x) \,\&\, N(x).$$

Die obige Schlußweise ergibt dann:

$$(E x)\, S(x) \rightarrow (E x)\, N(x),$$

oder beim Einsetzen des Ausdrucks für $N(x)$:

$$(E x)\, S(x) \rightarrow (E x)\,(E u)\,(E v)\, K(u, v, x).$$

Nun gibt es einen allgemeinen Satz des Kalküls, nach dem lückenlos aufeinanderfolgende Seinszeichen ihre Reihenfolge vertauschen dürfen. Für zwei Seinszeichen hatten wir diesen Satz bereits erwähnt; der allgemeine Satz ergibt sich daraus durch wiederholte Anwendung. Führen wir diese Vertauschung aus, so erhalten wir statt der letzten Formel:

$$(E x)\, S(x) \rightarrow (E u)\,(E v)\,(E x)\, K(u, v, x).$$

Das ist aber unsere Behauptung, nur daß die Variablen hinter dem Zeichen $\rightarrow$ anders benannt sind.

Ein weiteres Beispiel bildet der Satz:

„Wenn es eine Wirkung gibt, gibt es eine Ursache."

Wir stellen zunächst die Behauptung in der Form dar:

$$(E x)\, W(x) \rightarrow (E x)\, U(x).$$

$W(x)$ bedeutet: „x ist eine Wirkung", und $U(x)$: „x ist eine Ursache." Nun zerlegen wir wieder die Prädikate U und W durch die Einführung des zweistelligen Prädikats „x bringt y hervor", für die wir das Zeichen $K(x, y)$ wählen. Dabei ergeben sich für $U(x)$ und $W(x)$ die definierenden Ausdrücke:

$$U(x) \text{ äq } (E y)\, K(x, y)$$

und

$$W(x) \text{ äq } (E y)\, K(y, x).$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke bringen wir die Behauptung auf die Form:

$$(E x)\,(E y)\, K(y, x) \rightarrow (E x)\,(E y)\, K(x, y)$$

oder bei teilweiser Umbenennung der Variablen:

$$(E y)\,(E x)\, K(x, y) \rightarrow (E x)\,(E y)\, K(x, y).$$

Diese Formel ist eine unmittelbare Konsequenz des Satzes von der Vertauschbarkeit der Seinszeichen.

Die früher erwähnte Verschiedenheit von $(E x)\,(y)\, A(x, y)$ und $(y)\,(E x)\, A(x, y)$ läßt sich auch an dem Beispiel der *gleichmäßigen und* *gewöhnlichen Konvergenz* illustrieren. Es handle sich um eine bestimmte Folge eindeutiger arithmetischer Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$, die (wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen) für alle reellen Werte x definiert sind. Die Aussage, daß diese Funktionenfolge für jeden Wert von x gegen 0 konvergiert, läßt sich in unserer Symbolik so formulieren:

$$(x)\,(z)\,\{<(0, z) \to (E y)\,(n)\,[<(y, n) \to <(|f_n(x)|, z)]\}$$

(„für beliebiges x gibt es zu jedem z, das größer als 0 ist, ein y, so daß für alle n, welche größer als y sind, die Ungleichung $|f_n(x)| < z$ erfüllt ist"). Dabei beziehen sich die Variablen y und n auf die ganzen Zahlen als Gegenstandsgattung, während x, z auf die Gattung der reellen Zahlen bezogen sind.

Für die Behauptung, daß die Funktionenfolge *gleichmäßig* für alle Werte von x gegen 0 konvergiert, lautet der symbolische Ausdruck:

$$(z)\,\{<(0, z) \to (E y)\,(x)\,(n)\,[<(y, n) \to <(|f_n(x)|, z)]\}$$

(„für jedes z, das größer ist als 0, gibt es ein y, so daß für alle x und für alle n, welche größer als y sind, die Ungleichung $|f_n(x)| < z$ erfüllt ist").

Der Unterschied der beiden Behauptungen findet seinen Ausdruck in der verschiedenen Stellung des Allzeichens (x).

§ 4. Genaue Festlegung der Bezeichnungen im Prädikatenkalkül.

Als Vorbereitung zu einer systematischen Behandlung des Prädikatenkalküls geben wir zunächst eine genaue Übersicht über die benutzten Bezeichnungen.

Die in dem Prädikatenkalkül auftretenden Zeichen sind zunächst Zeichen für *Variable* verschiedener Gattung. Die Zeichen für Variable sind immer große oder kleine lateinische Buchstaben. Wir unterscheiden:

1. *Aussagenvariable:* $X, Y, Z, \ldots$
2. *Gegenstandsvariable* (Individuenvariable): $x, y, z, \ldots$
3. *Prädikatenvariable:* $F(.)$, $G(.,.)$, $H(.,.,.)$, ...

Dabei gelten Prädikatenvariable mit verschiedener Anzahl der Leerstellen immer als verschiedene Variable, auch wenn der große lateinische Buchstabe der gleiche ist.

Wir wollen nun erklären, was wir unter einer *Formel* des Prädikatenkalküls zu verstehen haben.

Provisorisch können wir zunächst sagen, daß wir unter einer Formel einen Ausdruck verstehen, der sich in sinnvoller Weise aus den genannten Zeichen für Variable mit Hilfe der Aussagenverknüpfung &, v, $\bar{\ }$, $\to$, $\sim$ und der All- und Seinszeichen aufbaut. Die Wahrung des im nächsten Paragraphen darzulegenden axiomatischen Standpunktes, bei dem die Beweisführungen ohne Zuhilfenahme der Bedeutung der logischen Zeichen nach rein formalen Regeln erfolgen, macht es aber erforderlich, die als Formeln bezeichneten Ausdrücke nur durch Beschreibung ihres formalen Aufbaus zu charakterisieren und Begriffe wie „sinnvoll" zu vermeiden.

Wir nehmen über die Gestalt der Formeln zunächst so viel vorweg, daß in ihnen unter Umständen Gegenstandsvariable, d. h. kleine lateinische Buchstaben und zugehörige All- und Seinszeichen vorkommen. Kommt nun in einer Formel neben einer Gegenstandsvariablen, die etwa x sei, gleichzeitig ein zugehöriges All- oder Seinszeichen, in diesem Falle also (x) oder $(E x)$ vor, so heißt die betreffende Variable innerhalb der Formel *gebunden*, im anderen Falle *frei*.

Wir wollen nun unter den *Formeln* die und nur die Zeichenkombinationen unseres Kalküls verstehen, die sich durch endliche Anwendung der folgenden Regeln als solche erweisen:

1. Eine Aussagenvariable ist eine Formel;

2. Prädikatenvariable, bei denen die Leerstellen durch Gegenstandsvariable ausgefüllt sind, sind Formeln;

3. ist irgendeine Zeichenkombination $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\overline{\mathfrak{A}}$ eine Formel;

4. sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ irgendwelche Formeln von der Art, daß nicht die gleiche Gegenstandsvariable innerhalb der einen Formel gebunden und innerhalb der anderen frei auftritt, so sind auch $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ Formeln;

5. es bedeute $\mathfrak{A}(x)$ irgendeine Formel, in der die Variable x als freie Variable auftritt; dann sind auch $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ und $(E x)\,\mathfrak{A}(x)$ Formeln. Dasselbe gilt entsprechend für andere freie Variable.

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, daß nach vorstehender Definition in einer Formel dieselbe Variable nicht gleichzeitig in freier und in gebundener Form vorkommt.

Zur *Ersparung von Klammern* werden noch die folgenden Festsetzungen getroffen: Bei der Trennung von Ausdrücken sollen die Zeichen $\rightarrow$, v, &, $\sim$ vor den All- und Seinszeichen den Vorrang haben. Z. B. ist $(x) F(x) \,\&\, A$ eine einfachere Schreibweise für $\big((x) F(x)\big) \,\&\, A$. Die früheren Festsetzungen, daß & enger bindet als $\rightarrow$ und $\sim$, und v wieder enger als &, behalten wir bei. Zu jedem in einer Formel vorkommenden All- oder Seinszeichen gehört ferner ein bestimmter Bestandteil der Formel, auf den es sich bezieht. Diesen wollen wir den *Wirkungsbereich* des betreffenden Zeichens nennen. So erstreckt sich in einer Formel

$$(x)\big(F(x) \rightarrow (E y)\, G(y)\big)$$

der Wirkungsbereich des Zeichens (x) bis an das Ende der Formel, dagegen bei

$$(x)\, F(x) \rightarrow (E y)\, G(y)$$

nur bis vor das Zeichen $\rightarrow$. Eine weitere Verminderung von Klammern erreichen wir durch die folgende Regel: Wenn mehrere All- oder Seinszeichen unmittelbar aufeinanderfolgen, ohne durch Klammern getrennt zu sein, so ist das stets so aufzufassen, daß sich ihre Wirkungsbereiche bis zur gleichen Stelle erstrecken. So ist z. B.

$$(x)\,(E\,y)\,(z)\,\big(H\,(x,\,y,\,z)\,\&\,K\,(y,\,z)\big)\,\&\,L\,(u)$$

eine einfachere Schreibweise für

$$(x)\,\big\{(E\,y)\,\big[(z)\,\big(H\,(x,\,y,\,z)\,\&\,K\,(y,\,z)\big)\big]\big\}\,\&\,L\,(u)\,.$$

Um Irrtümer zu vermeiden, erläutern wir noch den Gebrauch der *großen deutschen Buchstaben*, den wir für den Aussagenkalkül schon früher (1. Kap., § 5) kurz angegeben hatten. Diese Buchstaben sind keine Zeichen unserer Formelsprache und prinzipiell überhaupt entbehrlich. Sie dienen nur dazu, inhaltliche Mitteilungen über den Kalkül in eine kurze Form zu kleiden. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... bei derartigen Mitteilungen irgendwelche Formeln, deren genaue formale Gestalt unbestimmt gelassen wird. Z. B. steht $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ für irgendeine Implikation, z. B. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C)$ oder $(x)\,F\,(x) \rightarrow (x)\,G\,(x)$. Mit $\mathfrak{A}\,(x)$ bezeichnen wir irgendeine Formel, die die freie Variable x enthält; ebenso mit $\mathfrak{A}\,(x,\,y)$ eine Formel, in der die freien Variablen x und y vorkommen, usw.

§ 5. Die Axiome des Prädikatenkalküls.

Wir gehen jetzt dazu über, für den Prädikatenkalkül, ähnlich wie früher für den Aussagenkalkül, ein System von Axiomen aufzustellen, aus dem sich die übrigen richtigen Aussagen des Prädikatenkalküls nach gewissen Regeln gewinnen lassen.

Die Aufstellung der Axiome und Ableitungsregeln geschieht natürlich in Übereinstimmung mit der inhaltlichen Interpretation der Formeln. Die Ableitung der aus den Axiomen zu gewinnenden „richtigen“ Formeln hat aber, entsprechend dem axiomatischen Standpunkt, rein formal zu geschehen, derart, daß wir uns um den Sinn der durch die Formeln dargestellten Aussagen gar nicht kümmern, sondern lediglich die in den Regeln enthaltenen Vorschriften beachten. Nur bei der Interpretation der durch die formalen Operationen erhaltenen Ergebnisse müssen wir die Bedeutung der Zeichen unseres Kalküls berücksichtigen.

Diese inhaltliche Deutung geschieht in der folgenden Weise. Wir denken uns einen Bereich von Individuen zugrunde gelegt, auf den sich die Gegenstandsvariablen und die All- und Seinszeichen beziehen. Dieser Bereich wird unbestimmt gelassen; wir setzen nur voraus, daß er wenigstens ein Individuum enthält. Eine Formel des Prädikatenkalküls heißt nur dann immer richtig, oder, wie wir auch sagen, *allgemeingültig*, wenn unabhängig davon, wie der Individuenbereich gewählt wurde, bei jeder beliebigen Einsetzung von bestimmten Aussagen, Gegenständen des

Individuenbereichs und im Individuenbereich definierten Prädikaten für die Aussagevariablen, die freien Gegenstandsvariablen und die Prädikatenvariablen jedesmal die Formel in eine richtige Aussage übergeht. Die allgemeingültigen Formeln des Prädikatenkalküls bezeichnen wir auch als *identische Formeln.*

Wir geben nun das zugehörige Axiomensystem an. Als logische Grundformeln haben wir zunächst die Axiome des Aussagenkalküls, die wir der Einfachheit halber in derselben Form wie früher geben.

a) $X \vee X \rightarrow X$.

b) $X \rightarrow X \vee Y$.

c) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$.

d) $(X \rightarrow Y) \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$.

($\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ist hier wieder wie früher als eine Abkürzung für $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ aufzufassen.)

Dazu kommen jetzt als zweite Gruppe zwei *Axiome* für *„alle“, und „es gibt“* hinzu.

e) $(x) F(x) \rightarrow F(y)$.

f) $F(y) \rightarrow (E x) F(x)$.

Das erste dieser Axiome bedeutet: „Wenn ein Prädikat F auf alle x zutrifft, so trifft es auch auf ein beliebiges y zu.“

Die zweite Formel liest sich so: „Wenn das Prädikat F auf irgendein y zutrifft, so gibt es ein x, auf das F zutrifft.“

Für die Gewinnung neuer Formeln aus den logischen Grundformeln, sowie aus bereits abgeleiteten Formeln haben wir die folgenden Regeln.

α) Einsetzungsregeln.

α1) Man darf in einer Formel eine Aussagenvariable durch eine beliebige Formel ersetzen, vorausgesetzt, daß diese Ersetzung an allen Stellen, an denen die Aussagenvariable vorkommt, gleichzeitig geschieht und daß überhaupt wieder eine Formel im Sinne der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition entsteht. Die Einsetzung ist außerdem nur dann zulässig, falls die einzusetzende Formel keine Gegenstandsvariable enthält, die in der Ausgangsformel gebunden vorkommt.

α2) Eine freie Gegenstandsvariable darf durch eine andere Gegenstandsvariable ersetzt werden, vorausgesetzt, daß die Ersetzung an allen Stellen, an denen die freie Gegenstandsvariable vorkommt, gleichzeitig geschieht. Die eingesetzte Variable darf ferner in der ursprünglichen Formel an keiner Stelle in gebundener Form vorkommen.

α3) Eine Prädikatenvariable mit n Leerstellen kann unter bestimmten Umständen durch eine Formel, die mindestens n freie Gegenstandsvariable enthält, ersetzt werden. Es sei F die Prädikatenvariable mit

n Leerstellen, $\mathfrak{A}$ die Formel, in der F ersetzt werden soll. Wir greifen aus den Gegenstandsvariablen, die in der für F einzusetzenden Formel vorkommen, irgendwelche n heraus, die in beliebiger Weise geordnet, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien. Die einzusetzende Formel wollen wir dementsprechend mit $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bezeichnen. Die Einsetzung ist nun nur dann zulässig, falls die übrigen in $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eventuell noch vorkommenden freien Gegenstandsvariablen in der Formel $\mathfrak{A}$ nicht als gebundene Variable auftreten und das Resultat der Einsetzung überhaupt wieder eine Formel ist. Die Einsetzung geschieht in der folgenden Weise: Bei irgendeinem besonderen Auftreten der Prädikatenvariable F in $\mathfrak{A}$ sind die Leerstellen der Variablen mit irgendwelchen Gegenstandsvariablen ausgefüllt, die wir (nur für den Augenblick) mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ bezeichnen wollen. Diese $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ brauchen nicht alle verschieden zu sein, sondern es kann sich zum Teil um dieselben Variablen handeln. Wir ersetzen nun an der betreffenden Stelle $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ durch $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, d. h. durch die Formel, die aus $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dadurch hervorgeht, daß man die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ überall, wo sie vorkommen, bezüglich durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ ersetzt. Die entsprechende Ersetzung geschieht bei jedem einzelnen Vorkommen von F.

β) Schlußschema.

Aus zwei Formeln von der Gestalt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gewinnt man die neue Formel $\mathfrak{B}$.

γ) Schema für „alle" und „es gibt".

$\gamma 1$) Man habe eine Formel $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ abgeleitet, bei der der hinter dem $\rightarrow$-Zeichen stehende Teil die freie Variable x enthält, während in $\mathfrak{A}$ nicht die Variable x vorkommt. Man erhält dann als neue abgeleitete Formel $\mathfrak{A} \rightarrow (x)\,\mathfrak{B}(x)$.

$\gamma 2$) Unter denselben Bedingungen bezüglich der Gestalt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}(x)$ gewinnt man aus einer Formel $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ die neue $(Ex)\,\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$[1].

δ) Umbenennungsregeln für die gebundenen Variablen.

Man darf eine in einer Formel vorkommende gebundene Gegenstandsvariable durch eine andere gebundene Variable ersetzen. Diese Ersetzung hat gleichzeitig an allen Stellen des Wirkungsbereiches und in dem zugehörigen All- oder Seinszeichen zu erfolgen. Voraussetzung ist dabei, daß durch die Ersetzung überhaupt wieder eine Formel entsteht. Kommt die zu ersetzende Variable mehrfach, d. h. mit mehreren Wirkungsbereichen vor, so braucht die Ersetzung nur bezüglich eines Wirkungsbereiches zu erfolgen.

---

[1] Das hier benutzte Axiomensystem für „alle" und „es gibt", das in den Formeln e) bis f) sowie den Regeln γ zum Ausdruck kommt, ist von P. BERNAYS angegeben worden.

§ 6. Das System der identischen Formeln.

Wir wollen nun sehen, wie sich mit Hilfe der angegebenen logischen Grundformeln und Ableitungsregeln das Gesamtsystem der *allgemeingültigen*, oder wie wir auch sagen, *identischen* Formeln des Prädikatenkalküls aufbaut.

Mit einem Teilsystem dieser Formeln sind wir schon bekannt, nämlich demjenigen, in dem nur Aussagenvariable vorkommen. Wir hatten für dieses Teilsystem früher die Formeln (1) bis (20) und die Regeln I bis VIII abgeleitet. Wir bezeichnen dieses Teilsystem als das System der *identischen Formeln des Aussagenkalküls.*

Es soll zunächst die Methode, nach welcher man bei der Ableitung von Formeln zu verfahren hat, an verschiedenen Beispielen dargelegt werden. Ferner werden wir, wie früher im Aussagenkalkül, auch neue Ableitungsregeln gewinnen. Die früher abgeleiteten Formeln und Regeln des Aussagenkalküls werden dabei benutzt.

Regel γ': Man habe eine Formel $\mathfrak{A}(x)$ bewiesen, die die freie Variable x enthält. Dann ist auch $(x)\mathfrak{A}(x)$ beweisbar.

Beweis: Aus $\mathfrak{A}(x)$ erhält man durch Anwendung von Regel II und III

$$\overline{X \vee \bar{\bar{X}}} \vee \mathfrak{A}(x),$$

$$\overline{X \vee \bar{\bar{X}}} \vee (x)\,\mathfrak{A}(x) \quad [\text{nach Regel } \gamma)],$$

$$X \vee \bar{X} \quad [\text{Formel } (3)],$$

$$(x)\,\mathfrak{A}(x) \quad (\text{Schlußschema}).$$

Regel δ': Man kann die in einer Formel vorkommenden freien und gebundenen Gegenstandsvariablen sämtlich durch andere Variable ersetzen, falls man nur darauf achtet, daß an den Stellen, an denen gleiche Variable standen, auch nachher gleiche Variable stehen, und daß an den Stellen, an denen verschiedene Variable vorkamen, auch nachher verschiedene Variable sind.

Der Beweis ergibt sich durch mehrfache Anwendung der Regeln $\alpha 2$) und δ). z. B. gewinnt man aus der Grundformel e) die Formel $(y)\,F(x) \rightarrow F(x)$ in folgender Weise:

$$(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$$

$$(x)\,F(x) \rightarrow F(z) \quad [\text{nach Regel } \alpha 2)]$$

$$(y)\,F(y) \rightarrow F(z) \quad [\text{nach Regel } \delta)]$$

$$(y)\,F(y) \rightarrow F(x) \quad [\text{nach Regel } \alpha 2)]$$

Aus Regel δ' ergibt sich für die Regel γ), daß diese gültig bleibt, falls man in der Formulierung der Regel für x immer y oder irgendeine andere Variable gebraucht.

Formel (21): $(x)\,(F(x) \vee \bar{F}(x))$.

Beweis: $X \vee \bar{X}$ [Formel (3)],

$F(x) \vee \bar{F}(x)$ (durch Einsetzung),

$(x)\,(F(x) \vee \bar{F}(x))$ (nach Regel γ').

Formel (22): $(x)\,F(x) \rightarrow (Ex)\,F(x)$.

Beweis: $(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$ [Axiom e)],

$F(y) \rightarrow (Ex)\,F(x)$ [Axiom f)],

$(x)\,F(x) \rightarrow (Ex)\,F(x)$ (Regel V).

Formel (23): $(x)\,(A \vee F(x)) \rightarrow A \vee (x)\,F(x)$.

Beweis: $(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow A \vee F(x)$ [Einsetzung in Axiom e) und Regel δ'].

$(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow \bar{\bar{A}} \vee F(x)$ (Ersetzung von A durch $\bar{\bar{A}}$).

Unter Benutzung der Abkürzung $\rightarrow$ kann man auch schreiben:

$(y)\,(A \vee F(y)) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow F(x))$,

$[(y)\,(A \vee F(y))\,\&\,\bar{A}] \rightarrow F(x)$ (nach Regel VII),

$[(y)\,(A \vee F(y))\,\&\,\bar{A}] \rightarrow (x)\,F(x)$ (Regel γ).

Diesen Ausdruck verwandelt man mit Hilfe von Regel VII und der Regel δ zurück in

$(x)\,(A \vee F(x)) \rightarrow A \vee (x)\,F(x)$.

Formel (24): $(x)\,(A \rightarrow F(x)) \rightarrow (A \rightarrow (x)\,F(x))$.

Beweis: Diese Formel entsteht aus der vorigen, indem man $\bar{A}$ für A einsetzt:

Regel IX: Ist $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x))$ *beweisbar, so gilt dasselbe für* $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow (x)\,\mathfrak{C}(x))$. Dabei dürfen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht die Variable x enthalten.

Dies ist eine Erweiterung der Regel γ 1). Statt 2 Voraussetzungen kann man auch eine beliebige andere endliche Anzahl von Voraussetzungen nehmen. Der Beweis ist dann ganz entsprechend wie im vorliegenden Fall.

Beweis: $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x))$,

$\mathfrak{A} \rightarrow (x)\,(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}(x))$ [Regel γ)].

Daraus ergibt sich die gesuchte Formel durch Anwendung von (24) und Regel V.

Formel (25): $A \rightarrow (x)\,(A \vee F(x))$.

Beweis: $A \rightarrow A \vee B$ [Axiom (b)],

$A \rightarrow A \vee F(x)$ (durch Einsetzung),

$A \rightarrow (x)\,(A \vee F(x))$ [nach Regel γ)].

Formel (26): $(x)\big(A \vee F(x)\big) \sim A \vee (x)\, F(x)$.

Beweis: Da (23) bewiesen ist, so genügt es, die Richtigkeit der Umkehrung: $A \vee (x)\, F(x) \rightarrow (x)\big(A \vee F(x)\big)$ zu zeigen.

$(y)\, F(y) \rightarrow F(x)$ [Aus e) nach Regel δ'],

$A \vee (y)\, F(y) \rightarrow A \vee F(x)$ (nach Regel IV),

$A \vee (x)\, F(x) \rightarrow (x)\big(A \vee F(x)\big)$ [nach Regel γ) und δ)].

Formel (27): $(x)\big(A \rightarrow F(x)\big) \sim \big(A \rightarrow (x)\, F(x)\big)$.

Beweis: Diese Formel geht in derselben Weise aus (26) hervor, wie (24) aus (23).

Formel (28): $(x)\big(A \,\&\, F(x)\big) \sim A \,\&\, (x)\, F(x)$.

Beweis: Wir beweisen zunächst:

I. $(x)\big(A \,\&\, F(x)\big) \rightarrow A \,\&\, (x)\, F(x)$.

$(y)\big(A \,\&\, F(y)\big) \rightarrow A \,\&\, F(x)$,

$A \,\&\, F(x) \rightarrow F(x)$ [Formel (13)],

$(y)\big(A \,\&\, F(y)\big) \rightarrow F(x)$ (Regel V),

$(x)\big(A \,\&\, F(x)\big) \rightarrow (x)\, F(x)$ [Regel γ) und δ)],

$A \,\&\, F(x) \rightarrow A$,

$(x)\big(A \,\&\, F(x)\big) \rightarrow A$ [Regel V und δ)].

Durch Benutzung der Aussagenformel

$$(X \rightarrow Y) \rightarrow \big((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Y \,\&\, Z)\big)$$

und zweimalige Anwendung des Schlußschemas erhält man dann aus der letzten und vorvorletzten Formel die Formel I.

II. $A \,\&\, (x)\, F(x) \rightarrow (x)\big(A \,\&\, F(x)\big)$.

$(y)\, F(y) \rightarrow F(x)$;

daraus erhält man nach dem Aussagenkalkül

$A \,\&\, (y)\, F(y) \rightarrow A \,\&\, F(x)$,

$A \,\&\, (x)\, F(x) \rightarrow (x)\big(A \,\&\, F(x)\big)$ [Regel γ) und δ)].

Aus den Formeln I und II ergibt sich die gesuchte Formel.

Formel (29): $(x)\,(y)\, F(x, y) \sim (y)\,(x)\, F(x, y)$.

Beweis: $(z)\,(u)\, F(z, u) \rightarrow (u)\, F(x, u)$ [Einsetzung in Axiom e) und Regel δ'],

$(u) F(x, u) \rightarrow F(x, y)$ [Einsetzung in Axiom e) und Regel δ'],

$(z)\,(u)\, F(z, u) \rightarrow F(x, y)$ (nach Regel V),

$(z)\,(u)\, F(z, u) \rightarrow (x)\, F(x, y)$ [Regel γ)],

$(x)\,(y)\, F(x, y) \rightarrow (y)\,(x)\, F(x, y)$ [Regel γ) und δ)].

Ebenso ergibt sich $(y)\,(x)\, F(x, y) \rightarrow (x)\,(y)\, F(x, y)$ und daher auch (29).

Formel (30): $(x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \sim (x) F(x) \mathbin{\&} (x) G(x)$.

Beweis: Man zeigt zunächst:

a) $(x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \to (x) F(x) \mathbin{\&} (x) G(x)$.

$$(y)\big(F(y) \mathbin{\&} G(y)\big) \to F(x) \mathbin{\&} G(x),$$
$$F(x) \mathbin{\&} G(x) \to F(x),$$
$$F(x) \mathbin{\&} G(x) \to G(x),$$
$$(y)\big(F(y) \mathbin{\&} G(y)\big) \to F(x) \quad \text{(nach Regel V)},$$
$$(y)\big(F(y) \mathbin{\&} G(y)\big) \to G(x) \quad \text{(nach Regel V)}.$$

Nach Regel γ) und δ) kann man beide Formeln verändern zu

$$(x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \to (x) F(x),$$
$$(x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \to (x) G(x).$$

Aus beiden zusammen gewinnt man dann

$$(x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \to (x) F(x) \mathbin{\&} (x) G(x).$$

b) Beweis von $(x) F(x) \mathbin{\&} (x) G(x) \to (x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big)$.

$$(y) F(y) \to F(x),$$
$$(y) G(y) \to G(x),$$
$$(y) F(y) \mathbin{\&} (y) G(y) \to F(x) \mathbin{\&} G(x),$$
$$(x) F(x) \mathbin{\&} (x) G(x) \to (x)\big(F(x) \mathbin{\&} G(x)\big) \quad [\text{Regel } \gamma) \text{ und } \delta)].$$

Aus a) und b) ergibt sich die gesuchte Formel.

Formel (31): $(x)\big(F(x) \to G(x)\big) \to \big((x) F(x) \to (x) G(x)\big)$.

Beweis: $(y)\big(F(y) \to G(y)\big) \to \big(F(x) \to G(x)\big)$,

$$F(x) \to \big((y)\big(F(y) \to G(y)\big) \to G(x)\big) \quad \text{(nach Regel VII)},$$
$$(y) F(y) \to F(x),$$
$$(y) F(y) \to \big((y)\big(F(y) \to G(y)\big) \to G(x)\big) \quad \text{(Regel V)},$$
$$(y) F(y) \mathbin{\&} (y)\big(F(y) \to G(y)\big) \to G(x) \quad \text{(Regel VII)},$$
$$(x) F(x) \mathbin{\&} (x)\big(F(x) \to G(x)\big) \to (x) G(x) \quad [\text{Regel } \gamma) \text{ und } \delta)],$$
$$(x)\big(F(x) \to G(x)\big) \to \big((x) F(x) \to (x) G(x)\big) \quad \text{(Regel VII)}.$$

Formel (32): $(x)\big(F(x) \sim G(x)\big) \to \big((x) F(x) \sim (x) G(x)\big)$.

Beweis: $(x)\big(F(x) \sim G(x)\big)$ ist eine Abkürzung für

$$(x)\big[\big(F(x) \to G(x)\big) \mathbin{\&} \big(G(x) \to F(x)\big)\big].$$

Durch Einsetzung in Formel (30) erhält man

$$(x)\big[\big(F(x) \to G(x)\big) \mathbin{\&} \big(G(x) \to F(x)\big)\big] \sim (x)\big(F(x) \to G(x)\big) \mathbin{\&} (x)\big(G(x) \to F(x)\big).$$

Nach Formel (31) ist

$$(x)\big(F(x) \to G(x)\big) \to \big((x) F(x) \to (x) G(x)\big),$$
$$(x)\big(G(x) \to F(x)\big) \to \big((x) G(x) \to (x) F(x)\big).$$

Wir haben also drei Formeln von der Form:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C},$$
$$\mathfrak{B} \to (\mathfrak{D} \to \mathfrak{E}),$$
$$\mathfrak{C} \to (\mathfrak{E} \to \mathfrak{D}).$$

Daraus läßt sich $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{D} \sim \mathfrak{E})$ ableiten. Das ist aber unsere Behauptung, wenn wir für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ihre Bedeutungen einsetzen.

Formel (*33*):

a) $(E x) F(x) \sim \overline{(x)}\, \overline{F}(x)$.

b) $(E x)\, \overline{F}(x) \sim \overline{(x)}\, F(x)$.

c) $\overline{(E x)}\, \overline{F}(x) \sim (x) F(x)$.

d) $\overline{(E x)}\, F(x) \sim (x)\, \overline{F}(x)$.

Beweis von (33 a):

$(y)\, \overline{F}(y) \to \overline{F}(x)$,

$\overline{\overline{F}}(x) \to \overline{(y)}\, \overline{F}(y)$ [nach Formel (6)],

$F(x) \to \overline{(y)}\, \overline{F}(y)$ [Ersetzung von $\overline{\overline{F}}(x)$ durch $F(x)$]

$(E x) F(x) \to \overline{(x)}\, \overline{F}(x)$ [nach Regel γ) und δ)].

Das ist die Formel (33 a) zur Hälfte.

$F(x) \to (E y) F(y)$ [Aus Axiom f)],

$\overline{(E y)}\, F(y) \to \overline{F}(x)$ [nach Formel (6)],

$\overline{(E x)}\, F(x) \to (x)\, \overline{F}(x)$ [Regel γ) und δ)],

$\overline{(x)}\, \overline{F}(x) \to \overline{\overline{(E x)}}\, F(x)$ [nach Formel (6)],

$\overline{(x)}\, \overline{F}(x) \to (E x) F(x)$ [Ersetzung von $\overline{\overline{(E x)}}\, F(x)$ durch $(E x) F(x)$].

Das ist die andere Hälfte von (33 a).

Beweis von (33 b): $A \sim \overline{\overline{A}}$,

$F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x)$ (durch Einsetzung),

$(x)\big(F(x) \sim \overline{\overline{F}}(x)\big)$ [Regel γ')].

Unter Benutzung von Formel (32) erhält man daraus:

$(x) F(x) \sim (x)\, \overline{\overline{F}}(x)$,

$\overline{(x)}\, F(x) \sim \overline{(x)}\, \overline{\overline{F}}(x)$ [unter Benutzung von $(X \sim Y) \to (\overline{X} \sim Y)$,
[vgl. Formel (26), S. 8].

Durch Einsetzung in (33 a) ergibt sich

$$(E x)\, \overline{F}(x) \sim \overline{(x)}\, \overline{\overline{F}}(x),$$

also

$$\overline{(x)}\, F(x) \sim (E x)\, \overline{F}(x).$$

Das ist die Formel (33 b).

Aus (33a) und (33b) erhält man auch die Formeln (33d) und (33c), da aus $\mathfrak{A} \sim \overline{\mathfrak{B}}$ sich $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{B}$ beweisen läßt.

Formel (34):

$$(x)\big(F(x) \rightarrow G(x)\big) \rightarrow \big((E x)\, F(x) \rightarrow (E x)\, G(x)\big).$$

Beweis: Aus der Aussagenformel

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

erhält man durch Einsetzung

$$\big(F(x) \rightarrow G(x)\big) \rightarrow \big(\bar{G}(x) \rightarrow \bar{F}(x)\big),$$

$$(x)\,\{\big(F(x) \rightarrow G(x)\big) \rightarrow \big(\bar{G}(x) \rightarrow \bar{F}(x)\big)\} \qquad \text{[nach Regel } \gamma'\text{]}.$$

Aus der letzten Formel erhält man unter Benutzung der Formel (31)

$$(x)\{F(x) \rightarrow G(x)\} \rightarrow (x)\{\bar{G}(x) \rightarrow \bar{F}(x)\}.$$

Unter abermaliger Benutzung der Formel (31) und der Regel V erhält man daraus:

$$(x)\big(F(x) \rightarrow G(x)\big) \rightarrow \big((x)\, \bar{G}(x) \rightarrow (x)\, \bar{F}(x)\big).$$

In dieser Formel kann $(x)\bar{G}(x) \rightarrow (x)\bar{F}(x)$ unter Benutzung von Formel (6) in $\overline{(x)}\,\bar{F}(x) \rightarrow \overline{(x)}\,\bar{G}(x)$ verwandelt werden. Da $\overline{(x)}\,\bar{F}(x) \sim (E x) F(x)$, $\overline{(x)}\,\bar{G}(x) \sim (E x)\, G(x)$, so folgt dann die gesuchte Formel.

Der Formel (34) entspricht die folgende Regel: Ist $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ beweisbar, so kann man auch $(E x)\, \mathfrak{A}(x) \rightarrow (E x)\, \mathfrak{B}(x)$ ableiten. —

Man erhält nämlich aus $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ nach Regel γ'

$$(x)\big(\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)\big),$$

und unter Benutzung von (34): $(E x)\, \mathfrak{A}(x) \rightarrow (E x)\, \mathfrak{B}(x)$.

Ganz ebenso wie aus (31) die Formel (32) abgeleitet wird, erhält man aus (34) die Formel

$$(34') \qquad (x)\big(F(x) \sim G(x)\big) \rightarrow \big((E x)\, F(x) \sim (E x)\, G(x)\big).$$

Formel (35): $(x)\big(F(x) \rightarrow A\big) \sim \big((E x)\, F(x) \rightarrow A\big)$.

Beweis: $(x)\big(F(x) \rightarrow A\big)$ ist eine Abkürzung für $(x)\big(\bar{F}(x) \vee A\big)$.

Es gilt nun die Formel

$$(x)\big(\bar{F}(x) \vee A\big) \sim (x)\, \bar{F}(x) \vee A,$$

die man ähnlich wie die Formel (26) beweist.

$$(x)\, \bar{F}(x) \sim \overline{(E x)}\, F(x),$$

$$(x)\, \bar{F}(x) \vee A \sim \overline{(E x)}\, F(x) \vee A.$$

Schreibt man nun wieder die Abkürzung $\rightarrow$, so ergibt sich (35).

Formel (36): $(E x)\,(y)\, F(x, y) \rightarrow (y)\,(E x)\, F(x, y)$.

Das ist die schon früher erwähnte Vertauschungsformel, von der auch bereits hervorgehoben wurde, daß sie nur als einseitige Folgebeziehung gilt.

Beweis: $F(x, y) \rightarrow (Ez) F(z, y)$ [Einsetzung in Axiom f) und Regel δ'],

$(y)\big(F(x, y) \rightarrow (Ez) F(z, y)\big)$ [Regel γ'].

Unter Benutzung von Formel (31) ergibt sich

$(y) F(x, y) \rightarrow (y)(Ez) F(z, y)$,

$(Ex)(y) F(x, y) \rightarrow (y)(Ex) F(x, y)$ [nach Regel γ) und δ)].

§ 7. Die Ersetzungsregel; Bildung des Gegenteils einer Formel.

Nachdem wir eine Reihe von identischen Formeln abgeleitet haben, sollen nun einige allgemeine Regeln besprochen werden, die zur Gewinnung eines Überblicks über das Gesamtsystem der identischen Formeln besonders wichtig sind.

Als erste Regel haben wir eine Erweiterung der Regel VI. Diese besagte, daß Aussagen, die in gegenseitiger Folgebeziehung stehen, die also äquivalent sind, füreinander eingesetzt werden dürfen. Wir erweitern diese Ersetzungsregel in der folgenden Weise:

Regel X: Es mögen $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$ und $\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ irgendwelche Formeln bedeuten, die die freien Variablen $x, y, \ldots, u$, aber sonst keine weitere freie Variable enthalten. Ferner sei $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ eine beweisbare Formel. Hat man nun eine Formel $\mathfrak{C}$, in der als Bestandteil $\mathfrak{A}(\ldots)$ einmal oder mehrere Male mit irgendwelchen Variablen an Stelle der $x, y, \ldots, u$ auftritt, und ist $\mathfrak{D}$ eine Formel, die aus $\mathfrak{C}$ dadurch entsteht, daß man an einigen oder allen Stellen $\mathfrak{A}(\ldots)$ durch $\mathfrak{B}(\ldots)$ im Sinne unserer Regel $\alpha 3$) ersetzt, so ist auch $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$ eine beweisbare Formel.

Da wir die Regel VI schon haben, so genügt es, zu zeigen, daß man auf beiden Seiten der Äquivalenz $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ vor $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u)$ und $\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ die gleichen Klammerzeichen vorsetzen darf, daß man z. B. schreiben darf

$$(Ex)(y)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)(y)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u).$$

Es genügt, dies für ein Klammerzeichen zu zeigen. Wir zeigen also, daß

$$(x)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$$

und

$$(Ex)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (Ex)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$$

beweisbar sind.

Aus $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)$ erhält man nach der Regel γ':

$$(x)\big(\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim \mathfrak{B}(x, y, \ldots, u)\big).$$

Unter Benutzung von Formel (32) ergibt sich dann

$$(x)\,\mathfrak{A}(x, y, \ldots, u) \sim (x)\,\mathfrak{B}(x, y, \ldots, u),$$

und ebenso auf Grund der Formel (34'):

$$(Ex)\,\mathfrak{A}(x, \ldots, u) \sim (Ex)\,\mathfrak{B}(x, \ldots, u).$$

Als weiteres Ergebnis schließt sich hieran eine Regel über die Bildung des Gegenteils einer Formel.

Regel XI: Von einer Formel, in welcher die Abkürzungen $\rightarrow$ *und* $\sim$ *nicht vorkommen, bildet man das Gegenteil, indem man erstens die Allzeichen durch Seinszeichen ersetzt und umgekehrt, zweitens die Zeichen* & *und* v *miteinander vertauscht und drittens die Aussage- und Prädikatzeichen gegen ihre Verneinungen austauscht.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft folgendermaßen:

Falls die betreffende Formel keine All- und Seinszeichen enthält, so hatten wir den Satz bereits früher im Aussagenkalkül bewiesen. Indem wir nun von diesem Satz Gebrauch machen und die Kombination von Allzeichen und ihrem Wirkungsbereich als ungetrenntes Ganzes auffassen, können wir stets erreichen, daß die Negation von dem Gesamtausdruck auf die äußersten Klammerzeichen verlegt wird. Stand der Gesamtausdruck unter einem Klammerzeichen, so ist das von vornherein der Fall. Nun ergibt sich aus den Formeln (33), daß

$$\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x) \sim (E\,x)\,\overline{\mathfrak{A}}(x),$$

$$\overline{(E\,x)}\,\mathfrak{A}(x) \sim (x)\,\overline{\mathfrak{A}}(x).$$

Unter Benutzung dieser Äquivalenzen können wir die Negation von den Klammerzeichen auf ihre Wirkungsbereiche verschieben. Mit diesen Wirkungsbereichen verfährt man dann auf dieselbe Weise wie mit dem Gesamtausdruck, bis man schließlich überall bei den Aussage- oder Prädikatzeichen anlangt.

Die beschriebene Methode der Umformung möge an einem Beispiel erläutert werden: Es handle sich darum, für

$$\overline{(x)\,(E\,y)\,\bigl(F\,(x,\,y)\ \mathrm{v}\ (E\,z)\,G(x,\,y,\,z)\bigr)}$$

die dem Satz entsprechende Darstellung abzuleiten. Aus den Formeln (33) folgt zunächst, daß

$$\overline{(x)\,(E\,y)\bigl(F\,(x,\,y)\ \mathrm{v}\ (E\,z)\,G(x,\,y,\,z)\bigr)} \sim (E\,x)\,\overline{(E\,y)}\,\bigl(F\,(x,\,y)\ \mathrm{v}\ (E\,z)\,G(x,\,y,\,z)\bigr),$$

und weiter ergibt sich als äquivalenter Ausdruck

$$(E\,x)\,(y)\,\overline{F\,(x,\,y)\ \mathrm{v}\ (E\,z)\,G\,(x,\,y,\,z)}\,.$$

Unter Anwendung des Spezialfalls unseres Satzes für den Aussagenkalkül und Regel X erhält man:

$$(E\,x)\,(y)\,\bigl(\overline{F}\,(x,\,y)\ \&\ \overline{(E\,z)}\,G\,(x,\,y,\,z)\bigr)$$

und endlich:

$$(E\,x)\,(y)\,\bigl(\overline{F}\,(x,\,y)\ \&\ (z)\,\overline{G}\,(x,\,y,\,z)\bigr).$$

Das letzte ist genau die unserer Regel entsprechende Darstellung.

§ 8. Das erweiterte Dualitätsprinzip; Normalformen.

Aus der Regel XI des vorigen Paragraphen läßt sich ein *Dualitätsprinzip* ableiten, das wir als eine Erweiterung des früher für den Aussagenkalkül abgeleiteten Dualitätsprinzips auffassen können. Dieses lautet folgendermaßen:

Aus einer beweisbaren Formel, die die Form einer Implikation oder einer Gleichung hat, in deren Gliedern die Zeichen $\to$ und $\sim$ nicht vorkommen, entsteht wieder eine beweisbare Formel, wenn man überall die Allzeichen durch gleichnamige Seinszeichen ersetzt und umgekehrt und außerdem die Zeichen & und v gegeneinander auswechselt. Im Falle der Implikation hat man außerdem noch die Reihenfolge der beiden Glieder zu vertauschen.

Beweis: Ist $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine beweisbare Formel, so ist auch $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}}$ eine beweisbare Formel, und mit $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ ist auch $\overline{\mathfrak{A}} \sim \overline{\mathfrak{B}}$ eine beweisbare Formel. Man formt nun $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ nach Regel XI des vorigen Paragraphen um. Man wechselt also die Allgemeinheits- und Seinszeichen sowie die Zeichen & und v gegeneinander um und ersetzt die Aussagen- und Prädikatzeichen durch ihre Negationen. Da es sich aber um eine beweisbare Formel handelt, so kann die letzte Ersetzung wieder rückgängig gemacht werden, indem man gemäß der Einsetzungsregel sämtliche Aussagen- und Prädikatzeichen durch ihr Gegenteil ersetzt.

Das erweiterte Dualitätsprinzip liefert uns mit einem Schlage eine große Anzahl von identischen Formeln durch die duale Umformung von früher abgeleiteten Formeln. Die wichtigsten seien hier hervorgehoben[1].

Formel (26'): $(Ex)\big(A \,\&\, F(x)\big) \sim A \,\&\, (Ex)\,F(x)$.

Formel (28'): $(Ex)\big(A \vee F(x)\big) \sim A \vee (Ex)\,F(x)$.

Formel (29'): $(Ex)\,(Ey)\,F(x, y) \sim (Ey)\,(Ex)\,F(x, y)$.

Formel (30'): $(Ex)\big(F(x) \vee G(x)\big) \sim (Ex)\,F(x) \vee (Ex)\,G(x)$.

Die Formeln (29) und (29') liefern uns in Verbindung mit der Regel X eine weitere Regel.

Regel XII: Eine Formel geht in eine äquivalente über, wenn darin zwei oder mehrere unmittelbar aufeinanderfolgende Allzeichen, die denselben Wirkungsbereich haben, beliebig umgeordnet werden. Die entsprechende Regel gilt für die Seinszeichen.

Bei der Behandlung des Aussagenkalküls zeigte es sich, daß es möglich ist, alle Aussagenverbindungen auf eine gemeinsame Normalform zu bringen. Wir konnten die Aussagenverbindungen entweder als Konjunktion von einfachen Disjunktionen oder als Disjunktion von elementaren Konjunktionen darstellen.

[1] Durch die Bezeichnung der Formeln soll kenntlich gemacht werden, aus welcher der schon bewiesenen identischen Formeln die betreffende Formel gemäß dem Dualitätsprinzip hervorgeht.

Eine gewisse *Normalform* gibt es nun auch im Prädikatenkalkül. ***Es kann nämlich jeder Ausdruck durch einen solchen ersetzt werden, in welchem alle vorkommenden Klammerzeichen unverneint am Anfang stehen, und zwar ohne durch Klammern getrennt zu sein, so daß sich ihre Wirkungsbereiche alle bis zum Ende der Formel erstrecken***[1]. Für diese Normalform ist die Bezeichnung „*pränexe Normalform*" gebräuchlich.

Der Vorteil dieser Normaldarstellung beruht darauf, daß der hinter den Klammerzeichen stehende Ausdruck ganz wie eine Aussagenverbindung behandelt werden kann. Die Umformung zur Normalform geschieht in der folgenden Weise:

Wir ersetzen zunächst in dem zu betrachtenden Ausdruck die Abkürzungen $\rightarrow$ und $\sim$ durch ihre Bedeutung. Durch mehrfache Anwendung der Regel XI des vorigen Paragraphen kann man dann leicht erreichen, daß die Negationsstriche nur über den Aussagen- und Prädikatvariablen zu stehen kommen. Wir ändern nun die Bezeichnung der gebundenen Variablen so ab, daß alle Klammerzeichen zu verschiedenen Variablen gehören. Statt

$$(x)\,F(x) \vee (x)\,G(x)$$

schreibt man also

$$(x)\,F(x) \vee (y)\,G(y)$$

usw.

Aus dem so entstehenden logischen Ausdruck erhält man nun die Normalform, indem man sämtliche Klammerzeichen in der Reihenfolge, wie sie auftreten, an den Anfang der Formel stellt und im übrigen alles ungeändert läßt. Die Wirkungsbereiche sämtlicher Klammerzeichen sollen sich dann bis zum Ende der Formel erstrecken.

Daß die letzte Umformung wirklich zulässig ist, ergibt sich auf folgende Weise. Es sei die Richtigkeit der Umformung schon gezeigt, falls der betrachtete Ausdruck weniger Klammerzeichen enthält. Wenn kein Klammerzeichen vorkommt, so sagt die Behauptung nichts Besonderes aus. Steht nun der ganze Ausdruck unter einem Klammerzeichen, so ist die Behauptung klar. Wir brauchen dann nur für den Wirkungsbereich dieses Klammerzeichens, der selbst weniger Klammerzeichen enthält, die Umformung zu machen. Andernfalls nehmen wir das erste Klammerzeichen unseres Ausdrucks. Dieses steht selbst nicht wieder im Wirkungsbereich eines anderen Klammerzeichens. Unter Anwendung der abgeleiteten Formeln:

$$A \vee (x)\,F(x) \sim (x)\,\bigl(A \vee F(x)\bigr),$$
$$(x)\,F(x) \vee A \sim (x)\,\bigl(F(x) \vee A\bigr),$$
$$A \,\&\, (x)\,F(x) \sim (x)\,\bigl(A \,\&\, F(x)\bigr),$$
$$(x)\,F(x) \,\&\, A \sim (x)\,\bigl(F(x) \,\&\, A\bigr)$$

[1] Diese Art der Darstellung ist ebenso wie beim Aussagenkalkül keineswegs eindeutig.

bzw. der entsprechenden Formeln für das Seinszeichen kann nun erreicht werden, daß dieses Klammerzeichen an den Anfang der Formel verschoben wird und sich sein Wirkungsbereich über die ganze Formel erstreckt. Damit kommen wir auf den vorigen Fall zurück, und die Richtigkeit der Umformung ist damit allgemein bewiesen.

Die pränexe Normalform bietet den Vorteil, daß bei allgemeinen Untersuchungen im Prädikatenkalkül der Kreis der in Betracht zu ziehenden Formeln wesentlich eingeschränkt werden kann. Immerhin sind die Möglichkeiten für die Gestalt der am Anfang der Formel stehenden Kombination von All- und Seinszeichen, die wir als das *Präfix* der Formel bezeichnen wollen, noch verwirrend umfangreich. In dieser Hinsicht ist nun ein Ergebnis von TH. SKOLEM[1] von Interesse, das eine gewisse Verschärfung des Satzes über die pränexe Normalform darstellt. Dieser Skolemsche Satz besagt (in der Formulierung, wie wir sie hier brauchen) folgendes:

Zu jeder Formel des Prädikatenkalküls kann man eine andere angeben, die nicht nur die pränexe Normalform hat, sondern bei der auch jedes Seinszeichen jedem Allzeichen vorangeht, und die so beschaffen ist, daß beide Formeln gleichzeitig oder beide gleichzeitig nicht aus unserem Axiomensystem des Prädikatenkalküls ableitbar sind.

Wir wollen im folgenden eine Formel in der pränexen Normalform, bei der keine Seinszeichen auf Allzeichen folgen, als eine Formel in der Skolemschen Normalform bezeichnen. Beim Beweise des Satzes brauchen wir uns nur mit den Formeln zu befassen, die die pränexe Normalform haben. Ferner können wir annehmen, daß die Formel keine freie Gegenstandsvariable enthält. Sollten diese nämlich vorkommen, so genügt es [wegen Axiom e) und Regel γ'], die Formel zu betrachten, die aus der vorliegenden dadurch entsteht, daß die zu den freien Gegenstandsvariablen gehörigen Allzeichen hinzugefügt und an den Beginn der Formel gestellt werden. Unter dem Grad einer derartigen Formel wollen wir die Anzahl der Allzeichen verstehen, auf die noch Seinszeichen folgen. Es genügt dann zu zeigen, daß man zu jeder Formel in der pränexen Normalform, die nicht die Skolemsche Normalform hat, eine solche angeben kann, die hinsichtlich der Ableitbarkeit mit der ersten gleichbedeutend ist und deren Grad geringer ist. Wir dürfen ferner annehmen, daß das Präfix der betrachteten Formel mit einem Seinszeichen beginnt. Falls nämlich die Formel, die mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet sei, mit einem Allzeichen beginnt, so nehmen wir eine in $\mathfrak{A}$ nicht vorkommende Gegenstandsvariable, etwa u, und eine ebensolche Prädikatenvariable, etwa G, und ersetzen $\mathfrak{A}$ durch die Formel

$$(E u)\left(\mathfrak{A} \,\&\, G(u) \vee \overline{G}(u)\right),$$

[1] SKOLEM, TH.: Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse 1920, Nr. 4.

die, wie wir leicht einsehen, hinsichtlich der Ableitbarkeit mit $\mathfrak{A}$ gleichwertig ist, da innerhalb des Wirkungsbereiches von $(E u)$ ein richtiges Konjunktionsglied zu $\mathfrak{A}$ hinzugefügt ist. Die Formel $(E u)(\mathfrak{A} \,\&\, G(u) \vee \overline{G}(u))$ kann dann so auf die pränexe Normalform gebracht werden, daß das Präfix an erster Stelle ein Seinszeichen enthält.

Unsere Formel beginnt also mit $n\,(n \geqq 1)$ Seinszeichen, auf die wenigstens ein Allzeichen folgt. Sie hat demnach die Gestalt

$$\text{(I)} \qquad (E x_1) \ldots (E x_n)\,(y)\,\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).$$

$\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ ist hier eine Formel in der pränexen Normalform, die als freie Gegenstandsvariable nur $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ enthält. Es sei H eine Prädikatenvariable mit $n + 1$ Leerstellen, die in $\mathfrak{B}$ nicht vorkommt. Wir bilden die Formel

$$\text{(II)} \qquad (E x_1) \ldots (E x_n)\left[(E y)\bigl(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, \overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)\bigr) \vee (z)\,H(x_1, \ldots, x_n, z)\right].$$

Diese Formel läßt sich ableiten, falls (I) ableitbar ist und ebenso gilt das Umgekehrte.

Ersetzen wir nämlich in (II) nach Regel $\alpha\,3)$ H durch $\mathfrak{B}$, so erhalten wir

$$(E x_1) \ldots (E x_n)\left[(E y)\bigl(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y)\bigr) \vee (z)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z)\right].$$

Man kann dann den eine falsche Aussage darstellenden Bestandteil

$$(E y)\bigl(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, \overline{\mathfrak{B}}(x_1, \ldots, x_n, y)\bigr)$$

fortlassen.

Etwas umständlicher geht die Ableitung von (II) aus (I). Wir erhalten zunächst aus Formel (31) durch Umbenennung der gebundenen Variablen

$$(y)\bigl(F(y) \to G(y)\bigr) \to \bigl((y)\,F(y) \to (y)\,G(y)\bigr).$$

Nun kann man nach den Regeln des Aussagenkalküls eine Formel

$$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$$

zu

$$\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{C}$$

umformen (Regel VII). Hier erhalten wir

$$(y)\,F(y) \to (E y)\bigl(F(y) \,\&\, \overline{G}(y)\bigr) \vee (y)\,G(y),$$

falls man außer der Regel über die Bildung des Gegenteils noch beachtet, daß $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Abkürzung für $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ ist. In dieser Formel wird $F(y)$ durch $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ und $G(y)$ durch $H(x_1, \ldots, x_n, y)$ ersetzt. Wir erhalten

$$(y)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \to (E y)\bigl(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, \overline{H}(x_1, \ldots, x_n, y)\bigr) \vee (y)\,H(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Durch mehrmalige Anwendung der am Schluß des Beweises für Formel (34) stehenden Regel ergibt sich weiter

$$(E x_1) \ldots (E x_n)(y)\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \to (E x_1) \ldots (E x_n)$$
$$\left[(Ey)\left(\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \,\&\, \overline{H}(x_1, \ldots x_n, y)\right) \vee (y)\, H(x_1, \ldots, x, y)\right].$$

Berücksichtigen wir, daß nach Voraussetzung (I) bereits abgeleitet ist, so liefert das Schlußschema sowie die Umbenennungsregel δ) die Formel (II).

Wir bringen nun die Formel (II) auf die pränexe Normalform. Dies kann in der Weise geschehen, daß das Präfix mit $(E x_1) \ldots (E x_n)(E y)$ beginnt, anschließend die All- und Seinszeichen von $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ in unveränderter Reihenfolge kommen und zum Schluß das Allzeichen (z). Da der Grad der entstehenden Formel um eins niedriger ist als der Grad von (I), so ist damit der Satz über die Skolemsche Normalform bewiesen.

§ 9. Die Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit des Axiomensystems.

Die Methode der arithmetischen Interpretation, mit Hilfe derer sich früher für die Axiome a) bis d) die Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit einsehen ließ, ermöglicht es uns auch, das Gesamtsystem der *Axiome des Prädikatenkalküls als widerspruchsfrei*, in dem früher erklärten Sinne, zu erkennen. Hierzu müssen wir die arithmetische Interpretation, welche damals nur für die Aussagenvariablen bestand, auf die bisher noch nicht gedeuteten Zeichen ausdehnen. Dies geschieht in der folgenden Weise:

Wir behandeln die Prädikatzeichen in gleicher Weise wie die Aussagezeichen. Wir fassen beide als arithmetische Variable auf, welche der Werte 0 und 1 und keiner anderen fähig sind. Wie bei den Prädikatzeichen die Leerstellen ausgefüllt sind, wird dabei nicht berücksichtigt. Die Klammerzeichen werden überall fortgelassen. Die Verknüpfung v wird wieder als arithmetisches Produkt aufgefaßt, und unter $\overline{0}$ wollen wir 1 und unter $\overline{1}$ 0 verstehen.

Bei diesen Festsetzungen gilt zunächst wieder, daß alle Axiome einschließlich e) und f) bei der arithmetischen Deutung immer den Wert 0 ergeben. Haben ferner eine oder mehrere Formeln immer den Wert 0, so überzeugt man sich leicht, daß jede weitere nach unseren Regeln daraus abgeleitete Formel ebenfalls immer den Wert 0 ergibt. Da nun andererseits zwei Ausdrücke, von denen der eine die Negation des anderen ist, nicht beide immer 0 ergeben können, so folgt, daß unter den Formeln, die sich aus unseren Axiomen ableiten, keine zwei einander entgegengesetzt sein können. Die Bedingung der Widerspruchsfreiheit ist also erfüllt.

Man darf das Ergebnis dieses Beweises für die Widerspruchsfreiheit unserer Axiome übrigens in seiner Bedeutung nicht überschätzen. Der angegebene Beweis der Widerspruchsfreiheit kommt nämlich inhaltlich darauf hinaus, daß man annimmt, der zugrunde gelegte Individuenbereich bestehe nur aus einem einzigen Element, sei also endlich. Wir haben damit durchaus keine Gewähr, daß bei der symbolischen Einführung von inhaltlich einwandfreien Voraussetzungen das System der beweisbaren Formeln widerspruchsfrei bleibt. Z. B. bleibt die Frage unbeantwortet, ob nicht bei Hinzufügung der mathematischen Axiome in unserem Kalkül jede beliebige Formel beweisbar wird. Dieses Problem, dessen Lösung eine zentrale Bedeutung für die Mathematik besitzt, läßt sich in bezug auf Schwierigkeit mit der von uns behandelten Frage gar nicht vergleichen. Die mathematischen Axiome setzen gerade einen unendlichen Individuenbereich voraus, und mit dem Begriff des Unendlichen sind die Schwierigkeiten und Paradoxien verknüpft, die bei der Diskussion über die Grundlagen der Mathematik eine Rolle spielen. Um das letztgenannte Problem mit Erfolg angreifen zu können, hat D. HILBERT sich veranlaßt gesehen, eine besondere Theorie aufzustellen. Ein Eingehen auf diese Theorie, die natürlich die Ergebnisse der mathematischen Logik benutzt, ist im Rahmen dieses Buches nicht möglich. Wir verweisen dafür ein für allemal auf das Buch von HILBERT und BERNAYS[1].

Kehren wir nun zurück zu unserem Axiomensystem. Wir wollen jetzt die *Unabhängigkeit des Axiomensystems* nachweisen, indem wir zeigen, daß keines der Axiome a) bis f), sowie keine der Regeln $\alpha 1$) bis $\alpha 3$), β), γ), δ) für die Gewinnung der identischen Formeln des Prädikatenkalküls entbehrlich ist[2]. Bei den folgenden Unabhängigkeitsbeweisen wird die soeben nachgewiesene Widerspruchsfreiheit des Kalküls benutzt.

Wir zeigen zunächst, daß von den Axiomen a) bis d) keines überflüssig ist, daß es also nicht möglich ist, irgendeines dieser Axiome aus den anderen Axiomen mit Hilfe der Ableitungsregeln zu gewinnen. Wir benutzen dabei die früher (1. Kap., § 13) bewiesene Tatsache, daß im reinen Aussagenkalkül keines dieser Axiome entbehrlich ist, und zwar auch dann nicht, wenn wir $X \rightarrow X$, d. h. $\bar{X} \vee X$ als weiteres Axiom hinzunehmen.

Nehmen wir an, es läge ein Beweis für irgendeines der Axiome a) bis d) mit Hilfe der übrigen Axiome und der Ableitungsregeln des

[1] HILBERT, D. u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I. Berlin 1934.

[2] Ein Unabhängigkeitsbeweis ist inzwischen (d. h. seit Erscheinen der 1. Auflage) von MCKINSEY geliefert worden. Vgl. J. C. C. MCKINSEY: On the independence of HILBERT and ACKERMANN's postulates for the calculus of propositional functions. Amer. J. Math. Bd. 58. Einfachere (bisher nicht publizierte) Beweise sind uns von den Herren P. BERNAYS und ARNOLD SCHMIDT mitgeteilt worden. Die Ausführungen des Textes geben den Bernaysschen Gedankengang wieder.

Prädikatenkalküls vor. Wir entfernen dann aus den Formeln dieses Beweises die Prädikaten- und Gegenstandsvariablen in der folgenden Weise: Die All- und Seinszeichen werden fortgelassen. Jede Prädikatenvariable mit Argumenten wird durch die Aussagenvariable X ersetzt. Bei dieser Veränderung gehen e) und f) in die Formel $X \to X$ über.

Ferner bleibt der Beweischarakter bestehen. Eine Einsetzung gemäß den Regeln $\alpha 1$) bis $\alpha 3$) wird zu einer Einsetzung des Aussagenkalküls bzw. zu einer bloßen Wiederholung. Die Verbindung der Formeln durch das Schlußschema bleibt bestehen. Die Regel γ) und die Umbenennungsregel werden zu einer bloßen Wiederholung. Somit würde die betreffende Formel aus den übrigen Axiomen der Reihe a) bis d) und $X \to X$ nach den Regeln des Aussagenkalküls ableitbar sein, im Widerspruch zu den früher erhaltenen Resultaten.

Die Unabhängigkeit des Axioms e) zeigen wir dadurch, daß wir nachweisen, daß alle Formeln, die man ohne Benutzung dieses Axioms ableiten kann, eine charakteristische Eigenschaft haben, die diesem Axiom abgeht. Verändert man nämlich die Formeln in der Weise, daß man, mit den innersten Wirkungsbereichen beginnend, jede Teilformel $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, $(y)\,\mathfrak{A}(y)$, usw., durch $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \bar{X}$, $(y)\,\mathfrak{A}(y) \vee X \vee \bar{X}$, usw., ersetzt, so geht jede Formel, die ohne Benutzung von e) gewonnen werden kann, wieder in eine im Prädikatenkalkül ableitbare Formel über. Denn die Axiome a) bis d), f) bleiben durch die angegebene Transformation unberührt. Die Verbindung der Formeln durch die Einsetzungsregeln α), das Schlußschema, die Regel $\gamma 2$) und die Umbenennungsregel δ) bleibt erhalten. Bei dem Schema $\gamma 1$) geht die Endformel $\mathfrak{A} \to (x)\,\mathfrak{B}(x)$ in eine Formel der Form $\mathfrak{A}' \to (x)\,\mathfrak{B}'(x) \vee X \vee \bar{X}$, also in eine ableitbare Formel über. Dagegen wird

$$(x)\,F(x) \to F(y) \qquad \text{zu} \qquad (x)\,F(x) \vee X \vee \bar{X} \to F(y)\,,$$

die bestimmt nicht ableitbar ist, da sich aus ihr wegen der Richtigkeit der Voraussetzung $F(y)$, und weiter durch Einsetzung nach Regel $\alpha 3$) $\bar{F}(y)$, also ein Widerspruch ergeben würde.

In ganz ähnlicher Weise zeigt man die Unabhängigkeit von f)[1]. Statt die Teilformeln $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ durch $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \bar{X}$ zu ersetzen, wird $(E\,x)\,\mathfrak{A}(x)$ durch $(E\,x)\,\mathfrak{A}(x)\;\&\;X\;\&\;\bar{X}$ ersetzt. Im übrigen sind die Überlegungen entsprechend.

Durch dieselbe Methode zeigt man auch die Unabhängigkeit der beiden Regeln $\gamma 1$) und $\gamma 2$). Ersetzen wir diesmal in den Formeln $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ durch $(x)\,\mathfrak{A}(x)\;\&\;X\;\&\;\bar{X}$, so gehen alle Formeln, die im Prädikatenkalkül ohne Benutzung von $\gamma 1$) abgeleitet werden können, wieder in ableitbare

[1] Mit der Unabhängigkeit des Axioms f) hat selbstverständlich die Tatsache nichts zu tun, daß das Seinszeichen in dem Axiomensystem prinzipiell entbehrlich ist, da man ja $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$ als eine Abkürzung für $\overline{(x)\,\overline{\mathfrak{A}}(x)}$ auffassen kann (vgl. S. 48).

Formeln über. Die aus dem gesamten Axiomensystem ableitbare Formel $(x)\,(F(x) \vee \overline{F}(x))$ geht dagegen in die sicher nicht ableitbare Formel $(x)\,(F(x) \vee \overline{F}(x))\,\&\,X\,\&\,\overline{X}$ über. Daraus ergibt sich die Unentbehrlichkeit der Regel $\gamma\,1$). Die Ersetzung von $(E\,x)\,\mathfrak{A}(x)$ in den Formeln durch $(E\,x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$ ergibt ebenso die Unabhängigkeit der Regel $\gamma\,2$), da die Formel $\overline{(E\,x)}\,(F(x)\,\&\,\overline{F}(x))$ bei dieser Ersetzung in eine nicht ableitbare Formel übergeht.

Die Unabhängigkeit der Regel $\alpha\,1$) ergibt sich daraus, daß ohne diese Regel nur solche Formeln mit vorkommenden Individuenvariablen ableitbar sind, die eine der Gestalten

$$(x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(y); \quad \mathfrak{A}(y) \rightarrow (E\,x)\,\mathfrak{A}(x); \quad (x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (x)\,\mathfrak{A}(x);$$

$$(E\,x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow (E\,x)\,\mathfrak{A}(x); \quad (E\,z)\,\big((x)\,\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(z)\big); \quad (E\,z)\,\big(\mathfrak{A}(z) \rightarrow (E\,x)\,\mathfrak{A}(x)\big)$$

haben, bzw. aus solchen Formeln durch Einsetzung für die Individuenvariablen oder durch Umbenennung der gebundenen Variablen hervorgehen. Denn die Axiome e) und f) haben diese Form und durch die Ableitungsregeln erhält man immer wieder nur Formeln dieser Art. Es ist also z. B. die Formel $(x)F(x) \rightarrow (E\,x)F(x)$ ohne Benutzung von $\alpha\,1$) nicht ableitbar.

Die Unabhängigkeit der Regel $\alpha\,2$) ergibt sich mittels der folgenden Transformation. In allen Formeln werden bei den Prädikatenvariablen die Argumentstellen, die mit der freien Individuenvariablen z ausgefüllt sind, fortgelassen. Z. B. geht $F(x, z)$ in $F(x)$, $G(z)$ in G über. Bei dieser Transformation geht jeder Beweis, der ohne Benutzung der Einsetzungsregel für die Individuenvariablen erfolgte, wieder in einen Beweis über. Da die Axiome von der Transformation nicht berührt werden, so geht jede Formel, die ohne Benutzung von $\alpha\,2$) ableitbar ist, vermittels dieser Transformation wieder in eine ableitbare Formel über. Die ableitbare Formel $(x)F(x) \rightarrow F(z)$ geht aber bei dieser Transformation in die sicher nicht ableitbare Formel $(x)F(x) \rightarrow F$ über. (Das zweite F ist hier eine Aussagenvariable.)

In entsprechender Weise zeigt sich die Unabhängigkeit der Umbenennungsregel δ). Wir führen dieselbe Transformation, die wir bezüglich der freien Individuenvariablen z in den Formeln ausführten, jetzt mit Bezug auf die gebundene Individuenvariable z aus. Es sind dann außerdem die Zeichen (z) und $(E\,z)$ fortzulassen. Auch dann geht eine Formel, welche ohne Benutzung der Umbenennungsregel ableitbar ist, wieder in eine ableitbare Formel über. Dagegen geht die jedenfalls ableitbare Formel $(z)F(z) \rightarrow F(x)$ in die sicher nicht ableitbare Formel $F \rightarrow F(x)$ über.

Um die Unabhängigkeit der Regel $\alpha\,3$) zu zeigen, ersetzt man in den Formeln jede Teilformel $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, $(y)\,\mathfrak{A}(y)$, usw., die die Prädikatenvariable G enthält, durch $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee X \vee \overline{X}$, $(y)\,\mathfrak{A}(y) \vee X \vee \overline{X}$, usw. Es geht dann jede Formel, die ohne Benutzung der Regel $\alpha 3)$ ableitbar ist, wieder in eine ableitbare Formel über. Dagegen trifft dies nicht zu für die Formel $(x) G(x) \rightarrow G(y)$.

Die Unentbehrlichkeit des Schlußschemas ergibt sich daraus, daß ohne dieses Schema nur Formeln der Gestalt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ abgeleitet werden können. Alle Axiome haben nämlich diese Gestalt, und die Regeln mit Ausnahme von $\beta)$ liefern nur wieder Formeln dieser Art. Es ist also z. B. die Formel $X \vee \bar{X}$ nicht ohne Benutzung der Regel $\beta)$ abzuleiten.

§ 10. Die Vollständigkeit des Axiomensystems.

Wir bemerkten im ersten Kapitel (§ 13), daß sich die Vollständigkeit eines Axiomensystems in zweierlei Weise definieren läßt. Die Vollständigkeit im schärferen Sinne des Wortes ist dann vorhanden, wenn die Hinzufügung einer bisher nicht ableitbaren Formel zu den Axiomen stets einen Widerspruch ergibt. Diese Vollständigkeit ist nicht vorhanden. Um die Unvollständigkeit des Axiomensystems festzustellen, brauchen wir nur eine Formel zu finden, welche gemäß der arithmetischen Deutung, die wir beim Beweise der Widerspruchsfreiheit verwandten, identisch gleich 0, aber nicht eine Konsequenz der Axiome ist. Eine solche Formel ist

$$(E x) F(x) \rightarrow (x) F(x).$$

Daß diese Formel nicht aus den Axiomen folgt, kann man sich schon dadurch plausibel machen, daß die Behauptung, welche sie darstellt: „Wenn es ein x gibt, für das $F(x)$ besteht, so gilt $F(x)$ für alle x“, gewiß nicht allgemein richtig ist. Sie ist nämlich nicht mehr für beliebige Prädikate F richtig, falls der Individuenbereich mehr als ein Element enthält.

Der streng formale Beweis für die Unmöglichkeit, die Formel aus den Axiomen abzuleiten, geschieht in folgender Weise:

Wir geben zunächst ein Verfahren an, durch das wir die logischen Formeln in solche umwandeln, die nur Aussagenvariable enthalten. Zuerst schaffen wir die in einer Formel auftretenden freien Variablen fort, indem wir die zu den freien Variablen gehörigen Allgemeinheitszeichen vor die Formel setzen. Dann schaffen wir die Klammerzeichen fort, indem wir, etwa von außen anfangend, immer

$$(x) \mathfrak{A}(x) \text{ durch } \mathfrak{A}(1) \,\&\, \mathfrak{A}(2),$$

$$(E x) \mathfrak{A}(x) \text{ durch } \mathfrak{A}(1) \vee \mathfrak{A}(2)$$

ersetzen[1].

[1] 1 und 2 sind hier Eigennamen von Gegenständen. Unsere Auflösung der Klammerzeichen kommt also inhaltlich darauf hinaus, daß wir annehmen, der Individuenbereich enthalte nur die beiden Elemente 1 und 2.

In unseren Formeln kommen nun neben Aussagenvariablen Aussagen von der Form $F(1)$, $F(2)$, $G(1, 2)$, ... vor.

Alle diese verschiedenen Aussagen ersetzen wir dann noch durch (verschiedene) Aussagenvariable.

Wir behaupten nun, jede aus den Axiomen ableitbare Formel geht nach dieser Umformung in eine immer richtige Aussagenverbindung über.

Wir zeigen das zunächst für die Axiome. Für die Axiome a) bis d) ist es klar, da diese von der Umformung unberührt bleiben. Das Axiom $(x) F(x) \to F(y)$ wird in folgender Weise umgeformt:

$$(y)\big((x) F(x) \to F(y)\big),$$
$$\big((x) F(x) \to F(1)\big) \mathbin{\&} \big((x) F(x) \to F(2)\big),$$
$$\big(F(1) \mathbin{\&} F(2) \to F(1)\big) \mathbin{\&} \big(F(1) \mathbin{\&} F(2) \to F(2)\big),$$
$$(A \mathbin{\&} B \to A) \mathbin{\&} (A \mathbin{\&} B \to B).$$

Das letzte ist tatsächlich eine richtige Aussagenverbindung.

Analog hat man für das Axiom

$$F(y) \to (E x) F(x)$$

die Umformungen:

$$(y)\big(F(y) \to (E x) F(x)\big),$$
$$\big(F(1) \to (E x) F(x)\big) \mathbin{\&} \big(F(2) \to (E x) F(x)\big),$$
$$\big(F(1) \to F(1) \vee F(2)\big) \mathbin{\&} \big(F(2) \to F(1) \vee F(2)\big),$$
$$(A \to A \vee B) \mathbin{\&} (B \to A \vee B),$$

die ebenfalls zu einer immer richtigen Formel führen. Wir brauchen nun nur noch zu zeigen, daß die Anwendung der Regeln α), β), γ), δ) diese Eigenschaften ungeändert läßt.

Haben wir zwei Formeln, von denen die zweite aus der ersten durch Anwendung der Regeln $\alpha 1$) oder $\alpha 3$) hervorgeht, so sind die beiden Formeln nach der Umformung durch die Einsetzungsregel im Aussagenkalkül verbunden, oder aber die zweite Formel ist eine Konjunktion von Formeln, deren jede sich aus der ersten durch die Einsetzungsregel des Aussagenkalküls ergibt. Die Regeln $\alpha 2$) und δ) werden zu bloßen Wiederholungen. Das Schlußschema behält seine Form, falls in den Formeln keine freien Gegenstandsvariablen auftreten. Enthält das Schlußschema noch freie Gegenstandsvariablen, so kann es allerdings nach Vorsetzen der Allzeichen seine Form verlieren. Z. B. wird aus

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{A}(x)\\ \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)\end{matrix}}{\mathfrak{B}(x)}$$

das neue Schema

$$\frac{\begin{matrix}(x)\,\mathfrak{A}(x)\\ (x)\big(\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}(x)\big)\end{matrix}}{(x)\,\mathfrak{B}(x)}.$$

Bei der Auflösung der Allzeichen erhält man dann

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(1) \mathbin{\&} \mathfrak{A}(2)\\ \big(\mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{B}(1)\big) \mathbin{\&} \big(\mathfrak{A}(2) \to \mathfrak{B}(2)\big)\end{array}}{\mathfrak{B}(1) \mathbin{\&} \mathfrak{B}(2)}.$$

Aber auch dieses Schema entspricht den Regeln des Aussagenkalküls. Entsprechend ist es, falls mehrere freie Gegenstandsvariable auftreten.

Endlich kommen wir zu γ). Ein Ausdruck

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)$$

geht (falls $\mathfrak{A}$ keine freie Variable enthält) durch unsere Umformung über in

$$(x)\big(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(x)\big),$$
$$\big(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(1) \mathbin{\&} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(2)\big)$$

usw. $\mathfrak{A} \to (x)\,\mathfrak{B}(x)$ verwandelt sich in:

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(1) \mathbin{\&} \mathfrak{B}(2).$$

Beide Formeln sind aber nach den Regeln des Aussagenkalküls äquivalent. Ebenso ist es, falls $\mathfrak{A}$ noch freie Variablen enthält. Entsprechendes gilt für die Regel γ), soweit sie das Hinzufügen eines Seinszeichens betrifft.

Wir haben damit tatsächlich gezeigt, daß jede aus den Axiomen ableitbare Formel durch unsere Umformung in eine immer richtige Aussagenverbindung übergeht.

$$(E\,x)\,F(x) \to (x)\,F(x)$$

hat nun diese Eigenschaft nicht, denn die Umformung dafür lautet:

$$F(1) \vee F(2) \to F(1) \mathbin{\&} F(2),$$
$$A \vee B \to A \mathbin{\&} B,$$

und dies ist keine immer richtige Aussagenformel.

Nachdem wir gezeigt haben, daß das Axiomensystem nicht vollständig im schärferen Sinne des Wortes ist, fragen wir uns, ob die Vollständigkeit in dem anderen, ebenfalls auf S. 35 erwähnten Sinne hier besteht. Es handelt sich hier darum, ob aus dem Axiomensystem alle identischen Formeln des Prädikatenkalküls gemäß unserer Definition zu Eingang von § 5 dieses Kapitels abgeleitet werden können. Die Vollständigkeit in diesem Sinne ist tatsächlich vorhanden. Der Beweis ist von K. Gödel gegeben worden, dessen Ausführungen wir uns im folgenden anschließen[1].

Nach den Ausführungen zu Ende von § 8 läßt sich zu jeder Formel des Prädikatenkalküls eine Formel in der Skolemschen Normalform

[1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Physik Bd. 37 (1930).

angeben, so daß beide Formeln ableitbar oder beide nicht ableitbar sind. Wir können uns daher darauf beschränken, zu zeigen, daß alle identischen Formeln in der Skolemschen Normalform auch ableitbar sind.

Es sei

$$(E x_1) \ldots (E x_k)\,(y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l)$$

eine derartige Formel.

Wir bemerken zunächst, daß man die aus der unbegrenzten Reihe von Gegenstandsvariablen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gebildeten k-tupel $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ abzählen kann, indem man sie in bekannter Weise nach steigender Indexsumme $(i_1 + i_2 + \cdots + i_k)$ ordnet und bei gleicher Indexsumme lexikographisch. Die Reihe beginnt also mit $(x_0, x_0, \ldots, x_0)$; $(x_0, x_0, \ldots, x_1)$; $(x_0, x_0, \ldots, x_1, x_0) \ldots$. Wir wollen das n-te dieser k-tupel mit $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k})$ bezeichnen. Wir verstehen weiter unter $\mathfrak{B}_n$ die Formel

$$\mathfrak{A}\,(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k};\, x_{(n-1)l+1}, x_{(n-1)l+2}, \ldots, x_{nl})\,.$$

Wir beachten dabei, daß die in dieser Formel hinter dem Semikolon stehenden Gegenstandsvariablen von den vor diesem Zeichen stehenden, sowie von allen Variablen, die in einer Formel $\mathfrak{B}_p$ $(p < n)$ vorkommen, verschieden sind. Dagegen kommen die Variablen $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ sämtlich schon in Formeln $\mathfrak{B}_p$ $(p < n)$ vor. Weiter verstehen wir unter $\mathfrak{C}_n$ die Disjunktion $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_n$, unter $\mathfrak{D}_n$ die Formel, die aus $\mathfrak{C}_n$ dadurch entsteht, daß man die zu den freien Gegenstandsvariablen gehörigen Allzeichen sämtlich vor $\mathfrak{C}_n$ setzt. Wir ordnen nun jeder Formel $\mathfrak{C}_n$ eine Formel des Aussagenkalküls zu. Es werden nämlich die Elementarbestandteile dieser Formel, die abgesehen von Aussagenvariablen, Prädikatenvariable mit Gegenstandsvariablen als Argumenten sind, durch Aussagenvariable ersetzt, und zwar so, daß für gleiche Elementarbestandteile gleiche Aussagenvariable und für verschiedene auch verschiedene Aussagenvariable gesetzt werden. Die $\mathfrak{C}_n$ so zugeordnete Aussagenformel heiße $\mathfrak{E}_n$. Offenbar ist $\mathfrak{E}_n$ so beschaffen, daß $\mathfrak{C}_n$ aus $\mathfrak{E}_n$ nach dei Einsetzungsregel $\alpha 1$) hervorgehen kann.

Wir haben nun die folgende Alternative:

1. Es existiert ein n, so daß $\mathfrak{E}_n$ eine identische Formel des Aussagenkalküls ist.

2. Für kein n ist $\mathfrak{E}_n$ eine identische Formel des Aussagenkalküls.

Wir werden beweisen:

(A) Im Falle 1. ist die Formel

$$(E x_1) \ldots (E x_k)\,(y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l)$$

aus dem Axiomensystem des Prädikatenkalküls ableitbar.

(B) Im Falle 2. ist die genannte Formel keine identische Formel, denn es lassen sich im Individuenbereich der natürlichen Zahlen Prädikate angeben, die, für die Prädikatenvariable der Formel eingesetzt, diese in eine falsche Aussage verwandeln.

Aus diesen noch zu beweisenden Sätzen ergeben sich als Schlußfolgerungen:

Jede identische Formel des Prädikatenkalküls ist auch ableitbar; d. h. unser aus den Grundformeln a) bis f) und den Regeln $\alpha 1$) bis $\alpha 3$), β), γ), δ) bestehendes Axiomensystem besitzt die Eigenschaft der Vollständigkeit.

Ist eine Formel für den Individuenbereich der natürlichen Zahlen (oder für irgendeinen anderen abzählbar unendlichen Individuenbereich) allgemeingültig, d. h. geht sie bei beliebiger Ersetzung der Prädikatenvariable durch individuelle zahlentheoretische Prädikate und der freien Gegenstandsvariablen durch bestimmte Zahlen stets in eine richtige Aussage über, so ist sie für jeden Individuenbereich allgemeingültig, d. h. eine identische Formel.

Der letzte wichtige Satz, der hier als ein Nebenergebnis herauskommt, läßt sich an und für sich einfacher gewinnen, und wurde zuerst von L. Löwenheim bewiesen[1].

Wir haben nun den Beweis für die Behauptungen (A) und (B) zu erbringen. Zeigen wir zunächst die Richtigkeit von (A). Es sei also für irgendein n $\mathfrak{E}_n$ eine identische Aussagenformel. Da man $\mathfrak{C}_n$ aus $\mathfrak{E}_n$ durch Einsetzung nach Regel $\alpha 1$) und weiter $\mathfrak{D}_n$ aus $\mathfrak{C}_n$ durch Anwendung der Regel γ) erhält, so genügt es zu zeigen, daß für jedes n

$$\mathfrak{D}_n \rightarrow (E x_1) \ldots (E x_k) (y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

eine ableitbare Formel des Prädikatenkalküls ist. Wir zeigen das durch Induktion nach n. $\mathfrak{D}_1$ hat die Gestalt

$$(x_0)(x_1) \ldots (x_l)\, \mathfrak{A}(x_0, \ldots, x_0; x_1, \ldots, x_l).$$

$$(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_k; y_1, \ldots y_l)$$
$$\rightarrow (E x_1) \ldots (E x_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

läßt sich unter mehrfacher Benutzung des Axioms f) und der Regel V ableiten. Durch Einsetzung ergibt sich daraus

$$(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_0, \ldots, x_0; y_1, \ldots y_l)$$
$$\rightarrow (E x_1) \ldots (E x_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

und weiter nach Regel $\gamma 2$) und Formel (22)

$$\mathfrak{D}_1 \rightarrow (E x_1) \ldots (E x_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l).$$

Es sei ferner schon gezeigt

$$\mathfrak{D}_{n-1} \rightarrow (E x_1) \ldots (E x_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

$\mathfrak{D}_n$ hat nun die Gestalt

$$(x_0)(x_1) \ldots (x_{nl})\, \mathfrak{C}_n; \text{ d. h. } (x_0) \ldots (x_{nl})\, (\mathfrak{C}_{n-1} \vee \mathfrak{B}_n)$$

oder genauer

$$(x_0)(x_1) \ldots (x_{nl})\big(\mathfrak{C}_{n-1} \vee \mathfrak{A}(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}; x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl})\big).$$

[1] Löwenheim, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann. Bd. 76 (1915). Eine wesentliche Vereinfachung der Beweismethode enthält die am Schluß von § 8 dieses Kapitels erwähnte Arbeit von Th. Skolem.

Da, wie früher bemerkt, die Variablen $x_{(n-1)l+1}, \ldots, x_{nl}$ in $\mathfrak{C}_{n-1}$ nicht vorkommen, erhalten wir unter Benutzung der Formel (26)

$$\mathfrak{D}_n \to (x_0)\,(x_1) \ldots (x_{(n-1)l})\left(\mathfrak{C}_{n-1} \vee (y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}\,(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k};\, y_1, \ldots, y_l)\right)$$

als ableitbare Formel. Nun ist weiter die Formel

$$(x)\left(F(x) \vee G(x)\right) \to (x)\,F(x) \vee (Ey)\,G(y)$$

ableitbar. Sie entsteht aus Formel (34), indem man in dieser F durch $\overline{F}$ ersetzt und berücksichtigt, daß das Zeichen $\to$ nur eine Abkürzung darstellt. Durch mehrfache Benutzung der letzten Formel ergibt sich weiter

$$\mathfrak{D}_n \to (x_0)\,(x_1) \ldots (x_{(n-1)l})\,\mathfrak{C}_{n-1} \vee (Ex_1) \ldots (Ex_k)\,(y_1) \ldots (y_l)$$
$$\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots x_k;\, y_1, \ldots, y_l)$$

d. h.

$$\mathfrak{D}_n \to \mathfrak{D}_{n-1} \vee (Ex_1) \ldots (Ex_k)\,(y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l).$$

Wegen

$$\mathfrak{D}_{n-1} \to (Ex_1) \ldots (Ex_k)\,(y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l)$$

ergibt sich dann leicht

$$\mathfrak{D}_n \to (Ex_1) \ldots (Ex_k)\,(y_1) \ldots (y_l)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_k;\, y_1, \ldots, y_l).$$

Damit ist die Induktion vollständig.

Nun zum Beweise von (B). Es sei keines der $\mathfrak{E}_n$ eine identische Aussagenformel. Für das folgende ist es zweckmäßig, den Aussageformeln $\mathfrak{E}_n$ noch eine etwas speziellere Gestalt zu geben. $\mathfrak{E}_n$ entstand aus $\mathfrak{C}_n$ dadurch, daß die in $\mathfrak{C}_n$ vorkommenden Elementarbestandteile, die aus Prädikatvariablen mit Argumenten aus der Reihe x_0, x_1, $x_2, \ldots$ bestehen, durch Aussagenvariable ersetzt werden. Wir wollen nun bei dieser Ersetzung durch Aussagenvariable immer so vorgehen, daß $F(x_0)$ durch die Aussagenvariable F_0, $F(x_1)$ durch F_1, $G(x_1, x_2, x_3)$ durch $G_{1,2,3}$ ersetzt wird usw. In jeder Formel $\mathfrak{E}_{n+1}$ kommen dann sämtliche Aussagenvariable von $\mathfrak{E}_n$ vor, außerdem noch weitere. Die in den $\mathfrak{E}_n$ insgesamt vorkommenden Aussagenvariablen denken wir uns irgendwie abgezählt, so daß es Sinn hat, von der ersten, zweiten usw. Aussagenvariablen zu sprechen. Diese Abzählung kann z. B. so geschehen, daß zuerst die Aussagenvariablen von $\mathfrak{E}_1$ in irgendeiner Reihenfolge aufgezählt werden, dann die kommen, die bei $\mathfrak{E}_2$ neu hinzutreten, usw.

Da nun keines der $\mathfrak{E}_n$ eine identische Aussagenformel ist, so lassen sich die in einem $\mathfrak{E}_n$ vorkommenden Aussagenvariablen so durch die Wahrheitswerte „richtig“ und „falsch“ ersetzen, daß $\mathfrak{E}_n$ in eine falsche Aussage übergeht. Wir sprechen dann, im Anschluß an die früher im Aussagenkalkül benützte Terminologie, von einem Erfüllungssystem für $\overline{\mathfrak{E}_n}$. Für jedes $\overline{\mathfrak{E}_n}$ gibt es natürlich nur endlich viele verschiedene

Erfüllungssysteme, im ganzen aber unendlich viele, da Erfüllungssysteme, die sich auf Formeln $\mathfrak{C}_n$ mit verschiedenem Index beziehen, selbstverständlich als verschieden gelten.

Wir ordnen nun jeder der unendlich vielen Aussagevariablen in eindeutiger Weise den Wert „richtig" oder „falsch" zu. Wird die erste Aussagenvariable in unendlich vielen Erfüllungssystemen durch den Wahrheitswert „richtig" ersetzt, so sei ihr der Wert „richtig" zugeordnet, anderenfalls der Wert „falsch". Wir betrachten weiter nur die Erfüllungssysteme, bei denen die erste Aussagenvariable durch den ihr soeben zugeordneten Wert ersetzt ist. Kommt bei diesen unendlich oft die zweite Aussagenvariable mit dem Wert „richtig" vor, so wird ihr dieser Wert zugeordnet, anderenfalls der Wert „falsch". In eben dieser Weise wird der Wert für die folgenden Aussagevariablen festgelegt, indem man jedesmal nur die Erfüllungssysteme in Betracht zieht, bei denen die vorhergehenden Aussagenvariablen die schon festgelegten Werte haben.

Ersetzt man nun die Aussagenvariable durch die ihnen zugeordneten Werte, so gehen sämtliche $\mathfrak{C}_n$ zugleich in falsche Aussagen über. Wir definieren nun gewisse zahlentheoretische Prädikate, die als Einsetzung für die in $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ vorkommenden Prädikatvariablen in Betracht kommen. Kommt z. B. eine Prädikatenvariable $F(\ ,\ ,\ )$ mit drei Leerstellen vor, so hatten wir in den $\mathfrak{C}_n$ Aussagenvariable F_{i_1, i_2, i_3}. Wir definieren nun das zugehörige zahlentheoretische Prädikat Φ dadurch, daß wir festsetzen, daß $\Phi(p, q, r)$ für irgendwelche natürlichen Zahlen immer den Wahrheitswert haben soll, der $F_{p, q, r}$ zugeordnet war. So wird jeder Prädikatenvariablen ein individuelles zahlentheoretisches Prädikat mit derselben Anzahl von Leerstellen zugeordnet. Nehmen wir nun in

$$(E x_1) \ldots (E x_k)(y_1) \ldots (y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

als Individuenbereich die natürlichen Zahlen und setzen wir für die Prädikatenvariablen die oben definierten zahlentheoretischen Prädikate ein, so ist leicht einzusehen, daß die Formel in eine falsche Aussage, mit anderen Worten, daß

$$(x_1) \ldots (x_k)(E y_1) \ldots (E y_l)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$$

in eine richtige Aussage übergeht. Greifen wir nämlich etwa das n-te k-tupel von natürlichen Zahlen, das wir früher mit $(n_1, \ldots, n_k)$ bezeichnet haben, heraus, so hat

$$\mathfrak{A}(n_1, \ldots, n_k; (n-1)\,l+1, \ldots, n\,l)$$

nach Ersetzung der Prädikatvariablen den entgegengesetzten Wahrheitswert wie die letzte Teildisjunktion von $\mathfrak{C}_n$ bei der Ersetzung der Aussagevariablen durch die zugeordneten Wahrheitswerte, ist also richtig.

Da das entsprechend für jedes k-tupel gilt, so ist

$$(x_1)\ldots(x_k)\,(E\,y_1)\ldots(E\,y_l)\,\overline{\overline{\mathfrak{A}}}(x_1,\ldots,x_k;\,y_1,\ldots,y_l)$$

richtig für den angegebenen Individuenbereich. Damit ist auch (B) bewiesen.

§ 11. Ableitung der Schlußfolgerungen aus gegebenen Voraussetzungen; Zusammenhang mit den identischen Formeln.

Wir haben den Prädikatenkalkül bisher nur dazu benutzt, um identische Formeln abzuleiten. Die Prämissen unserer Schlüsse, die Grundformeln a) bis f) waren dabei selbst wieder rein logischer Natur. Wir wollen nun die allgemeine Methode der formalen Beweisführung im Prädikatenkalkül, die wir vor der Aufstellung der Axiome nur andeutungsweise beschreiben konnten, an einigen Beispielen darlegen. Es handelt sich jetzt darum, die Schlußfolgerungen aus irgendwelchen Voraussetzungen, die nicht mehr rein logischer Natur sind, abzuleiten.

In den Voraussetzungen kommen jetzt nicht nur Variable, sondern auch *individuelle Prädikate* vor, desgleichen *individuelle Gegenstände*. Als Zeichen für individuelle Prädikate nehmen wir entweder *große griechische Buchstaben* oder auch eine *Kombination von großen lateinischen mit darauffolgenden kleinen lateinischen Buchstaben* wie *St, Ms, Dsc* usw., oder auch bei mathematischen Prädikaten aus der Mathematik her bekannte Prädikatzeichen wie $<$, $>$, $=$ usw. Der Formelbegriff, wie er in § 4 eingeführt wurde, erfährt dann eine entsprechende Erweiterung.

Die formale Beweisführung geschieht in der Weise, daß die Prämissen der Schlüsse symbolisch aufgeschrieben und als Grundformeln (Axiome) zu den logischen Grundformeln a) bis f) hinzugefügt werden, mit denen zusammen sie die Ausgangsformeln für die gemäß den Ableitungsregeln α), β), γ), δ) zu vollziehenden formalen Operationen bilden.

Bei der inhaltlichen Deutung der Formeln ist darauf zu achten, daß sich die Gegenstandsvariablen im allgemeinen nicht mehr auf irgendeinen unbestimmt gelassenen Individuenbereich beziehen; vielmehr ist durch die Art der Prämissen dieser in der Regel näher gekennzeichnet, sei es, daß er aus den ganzen Zahlen, den reellen Zahlen, den Punkten einer Ebene oder irgendwelchen anderen Dingen besteht. Es ist auch möglich, daß mehrere Individuenbereiche auftreten, wie es bei dem zweiten der im folgenden behandelten Beispiele der Fall ist. In diesem Falle brauchen wir mehrere Gattungen von Gegenstandsvariablen. Die Prädikatvariablen sind dann auch nach der Art ihrer Argumente zu unterscheiden. Die Axiome e) unf f) kann man dann so oft aufschreiben, wie Gattungen von Gegenständen vorhanden sind. Die Komplikation, die der Prädikatenkalkül dadurch erfährt, läßt sich aber vermeiden, da es immer möglich ist, wie wir bei der Behandlung des zweiten der folgenden Beispiele zeigen, den Fall mehrerer Individuenbereiche auf den Fall eines einzigen Individuenbereiches zurückzuführen.

Wir geben zunächst einige einfache Beispiele.

Als erstes Beispiel möge ein Schluß dienen, in welchem ein singuläres Urteil als Prämisse auftritt. Ein Schluß dieser Art liegt vor bei dem bekannten Schulbeispiel:

„Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch, also ist Cajus sterblich."

In diesem Satz kommen drei individuelle Bezeichnungen vor. Den Worten „Mensch" und „sterblich" entsprechen zwei Prädikate $Ms(x)$ und $St(x)$, für welche als gemeinsame zugehörige Gegenstandsgattung die der Lebewesen betrachtet werden kann. Das dritte individuelle Zeichen ist der Eigenname „Cajus". Die beiden Prämissen lauten als Formeln geschrieben:

$$(x)\,(Ms(x) \rightarrow St(x)),$$
$$Ms\,(\text{Cajus}).$$

Durch Einsetzung in die Formel

$$(x)\,F(x) \rightarrow F(y)$$

erhält man:

$$(x)\,(Ms(x) \rightarrow St(x)) \rightarrow (Ms(y) \rightarrow St(y))$$

und weiter:

$$(x)\,(Ms(x) \rightarrow St(x)) \rightarrow (Ms\,(\text{Cajus}) \rightarrow St\,(\text{Cajus})),$$
$$Ms\,(\text{Cajus}) \rightarrow St\,(\text{Cajus}) \qquad [\text{Regel } \beta)],$$
$$St\,(\text{Cajus}) \qquad [\text{Regel } \beta)].$$

Die letzte Formel ist aber die symbolische Darstellung unseres Schlußsatzes „Cajus ist sterblich".

Es sollen noch zwei Beispiele von mathematischen Schlußfolgerungen gegeben werden. Zunächst behandeln wir den folgenden geometrischen Schluß:

Voraussetzung: „Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade."

Behauptung: „Zwei verschiedene Gerade haben nicht mehr als einen Punkt gemeinsam."

Die hierin auftretenden Prädikate sind folgende: Zunächst die Relation $A(x, y)$: „x liegt auf y." Hier bezieht sich die erste Leerstelle auf die Gattung der Punkte, die zweite auf die der Geraden. Ferner kommt vor das Prädikat der Verschiedenheit, also das Gegenteil des Prädikates der Identität $\equiv(x, y)$. Die Leerstellen dieses Prädikates können sich sowohl auf Punkte als auf Geraden beziehen; natürlich ist die Behauptung der Identität eines Punktes mit einer Geraden stets als falsch zu betrachten. Der Deutlichkeit halber wollen wir die Argumente, welche sich auf die Gattung der Punkte beziehen, mit kleinen, diejenigen, welche sich auf Gerade beziehen, mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen[1]. Eigennamen von Individuen kommen nicht vor. Der symbolische Ausdruck für die Voraussetzung ist:

$$(x)\,(y)\,\{\overline{\equiv}\,(x, y) \to \overline{(EG)}\,(EH)\,[\overline{\equiv}\,(G, H)\,\&\,\varLambda\,(x, G)\,\&\,\varLambda\,(x, H)$$
$$\&\,\varLambda\,(y, G)\,\&\,\varLambda\,(y, H)]\}.$$

Die Behauptung schreibt sich:

$$(G)\,(H)\,\{\overline{\equiv}\,(G, H) \to \overline{(E\,x)}\,(E\,y)\,[\overline{\equiv}\,(x, y)\,\&\,\varLambda\,(x, G)\,\&\,\varLambda\,(x, H)$$
$$\&\,\varLambda\,(y, G)\,\&\,\varLambda\,(y, H)]\}.$$

Schreiben wir zur Abkürzung für:

$$\varLambda\,(x, G)\,\&\,\varLambda\,(y, G)\,\&\,\varLambda\,(x, H)\,\&\,\varLambda\,(y, H) : \mathfrak{A}\,(x, y, G, H),$$

und machen wir von der Definition des Zeichens $\to$ Gebrauch, so erhalten wir als Darstellung für die Voraussetzung und Behauptung:

$$(x)\,(y)\,\{\equiv (x, y) \vee \overline{(EG)}\,(EH)\,[\overline{\equiv}\,(G, H)\,\&\,\mathfrak{A}\,(x, y, G, H)]\}$$

bzw. $$(G)\,(H)\{\equiv (G, H) \vee \overline{(E\,x)}\,(E\,y)\,[\overline{\equiv}\,(x, y)\;\&\,\mathfrak{A}\,(x, y, G, H)]\}.$$

Nach der in § 8 gegebenen Regel über die Bildung des Gegenteils eines Ausdrucks kann man die beiden Ausdrücke umformen zu

$$(x)\,(y)\,\{\equiv (x, y) \vee (G)\,(H)\,[\equiv (G, H) \vee \overline{\mathfrak{A}}\,(x, y, G, H)]\},$$
$$(G)\,(H)\,\{\equiv (G, H) \vee (x)\,(y)\,[\equiv (x, y) \vee \overline{\mathfrak{A}}\,(x, y, G, H)]\}.$$

Beide Ausdrücke bringen wir nun auf die Normalform und erhalten:

$$(x)\,(y)\,(G)\,(H)\,\{\equiv (x, y) \vee (\equiv (G, H) \vee \overline{\mathfrak{A}}\,(x, y, G, H))\},$$
$$(G)\,(H)\,(x)\,(y)\,\{\equiv (G, H) \vee (\equiv (x, y) \vee \overline{\mathfrak{A}}\,(x, y, G, H))\}.$$

Aus diesen Darstellungen ersieht man ohne weiteres, daß die Behauptung sich aus der Voraussetzung ableiten läßt. Die Formel für die Voraussetzung geht nämlich in die Formel für die Behauptung über, wenn man auf die Produkte das assoziative und das kommutative Gesetz, und auf die Allzeichen die Vertauschungsregel anwendet. Zugleich erkennen wir, daß auch umgekehrt von der Gültigkeit der Behauptung auf die der Voraussetzung geschlossen werden kann.

Das gleichzeitige Auftreten von zwei Individuenbereichen läßt sich auf die folgende Art, deren Verallgemeinerung auf beliebige Fälle keiner besonderen Erläuterung bedarf, vermeiden: Wir denken uns einen einzigen Individuenbereich zugrunde gelegt, der aus den Punkten und den Geraden besteht und führen zwei individuelle Prädikate $\varPi(x)$, d. h. x ist ein Punkt, und $\varGamma(x)$, d. h. x ist eine Gerade, ein. Die Voraussetzung unseres Beispiels schreibt sich dann folgendermaßen:

$$(x)\,(y)\,\{(\varPi\,(x)\,\&\,\varPi\,(y)\,\&\,\overline{\equiv}\,(x, y)) \to \overline{(E\,z)}\,(E\,u)\,[\varGamma(z)\,\&\,\varGamma(u)$$
$$\&\,\overline{\equiv}\,(z, u)\,\&\,\varLambda\,(x, z)\,\&\,\varLambda\,(x, u)\,\&\,\varLambda\,(y, z)\,\&\,\varLambda\,(y, u)]\}.$$

Entsprechend läßt sich die Behauptung ausdrücken.

[1] Eine Verwechslung mit Aussagevariablen kann hier nicht entstehen.

Das zweite Beispiel für einen mathematischen Schluß soll darin bestehen, daß wir den *Satz von der Transitivität der Beziehung des Kleineren zum Größeren* beweisen. Dieser Satz, dessen Darstellung durch die Formel

$$< (x, y) \,\&\, < (y, z) \rightarrow\, < (x, z)$$

uns bereits bekannt ist, wollen wir hier im Sinne der Größenlehre auffassen. Wir denken uns die Leerstellen des Prädikats $<(x, y)$ auf eine bestimmte Größenart (z. B. Streckenlängen oder *positive* Maßzahlen) bezogen, und betrachten das Prädikat als abgeleitet aus der Addition der Größen. Wir führen das Zeichen $\Phi(x, y, z)$ für das dreigliedrige Prädikat „x um y vermehrt gibt z" (oder arithmetisch geschrieben: „$x + y = z$") ein. Mit Hilfe dieses Prädikats läßt sich $<(x, y)$ definieren durch

$$(E u)\, \Phi(x, u, y).$$

(„Es gibt ein u, welches zu x hinzugefügt y ergibt.")

Setzen wir diese Definition in unsere Behauptung ein, so nimmt diese folgende Gestalt an:

$$[(E u)\, \Phi(x, u, y) \,\&\, (E u)\, \Phi(y, u, z)] \rightarrow (E u)\, \Phi(x, u, z).$$

In dieser Form läßt sich der betrachtete Satz beweisen, sofern für die Addition der Größen folgende zwei Voraussetzungen zugrunde gelegt werden:

1. „Zwei Größen lassen sich stets addieren", d. h.

$$(E z)\, \Phi(x, y, z).$$

2. „Für die Größenaddition gilt das assoziative Gesetz

$$x + (y + z) = (x + y) + z\text{“},$$

d. h.

$$[\Phi(x, y, u) \,\&\, \Phi(y, z, v) \,\&\, \Phi(u, z, w)] \rightarrow \Phi(x, v, w).$$

Die beiden Voraussetzungen sind in der Normalform mit Anwendung von freien Variablen dargestellt. Bringen wir auch die Behauptung auf die Normalform, so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$(u)\,(v)\,(E w)\,\big(\overline{\Phi}(x, u, y) \vee \overline{\Phi}(y, v, z) \vee \Phi(x, w, z)\big).$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$(u)\,(v)\,(E w)\,\big(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z) \rightarrow \Phi(x, w, z)\big).$$

Diese Formel läßt sich nun auf Grund unserer Voraussetzungen folgendermaßen ableiten:

Durch Umbenennung der Variablen erhält man aus den beiden Voraussetzungen:

1. $(E w)\, \Phi(u, v, w)$.
2. $\big(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(u, v, w) \,\&\, \Phi(y, v, z)\big) \rightarrow \Phi(x, w, z)$.

Wendet man auf die zweite Voraussetzung die Regel VII, S. 30 an, so kann man sie umformen zu:

$$\Phi(u, v, w) \rightarrow [(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z)) \rightarrow \Phi(x, w, z)].$$

Unter Benutzung der zu Formel (34) gehörigen Regel kann man daraus ableiten:

$$(Ew)\,\Phi(u, v, w) \rightarrow (Ew)\,[(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z)) \rightarrow \Phi(x, w, z)].$$

Da nun $(Ew)\,\Phi(u, v, w)$ als richtig angenommen wurde, so ergibt sich weiter

$$(Ew)\,(\Phi(x, u, y) \,\&\, \Phi(y, v, z) \rightarrow \Phi(x, w, z)).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung, indem man nach Regel γ' die Allzeichen (u) und (v) vorsetzt.

Die in diesem Paragraphen auseinandergesetzte Methode der formalen Beweisführung aus Prämissen, die keine logische Identitäten darstellen, findet ihre Hauptanwendung, wenn es sich darum handelt, für irgendein Wissensgebiet die Grundsätze oder Axiome aufzustellen und aus ihnen die übrigen Sätze als Schlußfolgerungen abzuleiten. Man kann sogar sagen, daß der Begriff des Axiomensystems erst jetzt seine scharfe Fassung erfährt; denn zu einer vollständigen Axiomatik gehört nicht nur die Aufstellung der Axiome an und für sich, sondern auch die genaue Angabe der logischen Hilfsmittel, die uns den Beweis neuer Sätze aus den Axiomen ermöglichen. Auf die Frage, ob auch jeder Satz, der inhaltlich eine Konsequenz der Axiome darstellt, mittels des formalen Ableitungsverfahrens daraus gewonnen werden kann, gehen wir am Schluß dieses Paragraphen ein.

Man kann nun die Axiomensysteme, soweit sie sich überhaupt im Rahmen des hier behandelten engeren Prädikatenkalküls formalisieren lassen, in zwei Klassen einteilen. Unter einem *Axiomensystem der ersten Stufe* verstehen wir ein solches, bei dem die einzelnen Axiome keine Prädikatenvariable, sondern nur individuelle Prädikate enthalten. (Unter den Axiomen verstehen wir hier und im folgenden nur die Ausgangsformeln, die für das betreffende Gebiet charakteristisch sind, nicht die logischen Grundformeln des § 5, die zum eisernen Bestand jedes Axiomensystems gehören.) Treten in den Axiomen auch Prädikatenvariable auf, so sprechen wir von einem *Axiomensystem der zweiten Stufe.* Eine Ausnahme wird bei dieser Einteilung nur bezüglich der Axiome für die Identität gemacht. Diese Axiome haben, wenn wir für das Prädikat der Identität wieder das Zeichen $\equiv$ verwenden, die folgende Gestalt.

$$\equiv(x, x)$$

$$\equiv(x, y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))$$

(In der inhaltlichen Axiomatik werden diese Axiome meist fortgelassen, da sie rein logische Natur haben. Vgl. 4. Kap., § 1.) In dem zweiten dieser Axiome kommt eine Prädikatenvariable vor. Trotzdem rechnen wir Axiomensysteme, bei denen nur bei den Axiomen für die Identität Prädikatenvariable auftreten, noch mit zur ersten Stufe. Der Grund dafür ist der, daß sich das zweite Axiom für die Identität, soweit sein Gebrauch innerhalb des betreffenden Axiomensystems in Frage kommt, immer durch Axiome ohne Prädikatenvariable ersetzen läßt. Man kann nämlich an Stelle dieses Axioms die Axiome nehmen, die aus ihm hervorgehen, indem man für F gemäß Regel $\alpha 3$) die in dem Axiomensystem vorkommenden individuellen Prädikate einsetzt und außerdem die Symmetrie und Transitivität der Identität zum Ausdruck bringt. Haben wir z. B. in dem Axiomensystem die individuellen Prädikate $\Phi(\;)$ und $\Psi(\,,\,)$, so lauten die Axiome für die Identität

$$\begin{gathered}
\equiv(x, x) \\
\equiv(x, y) \rightarrow \equiv(y, x) \\
(\equiv(x, y) \,\&\, \equiv(y, z)) \rightarrow \equiv(x, z) \\
\equiv(x, y) \rightarrow (\Phi(x) \rightarrow \Phi(y)) \\
\equiv(x, y) \rightarrow (\Psi(x, z) \rightarrow \Psi(y, z)) \\
\equiv(x, y) \rightarrow (\Psi(z, x) \rightarrow \Psi(z, y))
\end{gathered}$$

und entsprechend in anderen Fällen. Auf den strengen Nachweis für die behauptete Ersetzbarkeit verzichten wir hier.

Zur zweiten Stufe gehört z. B. das Peanosche Axiomensystem für die natürlichen Zahlen, da die Formulierung des Axioms der vollständigen Induktion den Gebrauch einer Prädikatenvariablen nötig macht, ferner das Axiomensystem für die Mengenlehre in der ursprünglichen Zermeloschen Fassung infolge des Auftretens einer Prädikatvariablen beim Axiom der Aussonderung. Zur ersten Stufe gehört unter anderem das Hilbertsche Axiomensystem für die Geometrie, falls man von den Axiomen der Stetigkeit absieht, ferner die Axiome der Gruppentheorie.

Als grundlegendes Problem würde sich nun die Frage erheben, ob es möglich ist, bei einem bestimmten Satz eines Wissensgebietes festzustellen, ob er eine Konsequenz der Axiome ist oder nicht.

Wir wollen zeigen, daß sich dieses Problem auf ein solches des reinen Prädikatenkalküls, d. h. des in § 5 begründeten, nur Prädikat- und Individuenvariable enthaltenden Kalküls zurückführen läßt. Die Frage der logischen Abhängigkeit eines Satzes von einem Axiomensystem läßt sich nämlich auf die andere zurückführen, ob eine bestimmte Formel des reinen Prädikatenkalküls eine identische Formel ist oder nicht. Jedoch gilt dies nur, falls das Axiomensystem von der ersten Stufe ist. Wir wollen den Beweis dafür an Hand eines bestimmten Beispiels erläutern.

In der Untersuchung der logischen Abhängigkeitsverhältnisse zwischen den verschiedenen Axiomgruppen der Geometrie ist es ein besonders wichtiges und interessantes Ergebnis, daß der spezielle Pascalsche Satz, welcher bei der Begründung der Proportionenlehre ohne Anwendung der Stetigkeitsaxiome eine wesentliche Rolle spielt, aus den Axiomen der Verknüpfung, der Anordnung und dem Parallelenaxiom allein nicht bewiesen werden kann. Es handelt sich darum zu zeigen, daß die Unabhängigkeit des Pascalschen Satzes von den genannten Axiomen mit der Nichtableitbarkeit einer gewissen Formel des reinen Prädikatenkalküls gleichbedeutend ist.

Wir haben zunächst die in Betracht kommenden Axiome sowie den speziellen Pascalschen Satz in unserem Kalkül auszudrücken, und zwar so, daß nur von einer Art von Dingen die Rede ist. Wir wollen hier zur Vermeidung mehrerer Individuenbereiche nicht die früher erwähnte, allgemein anwendbare Methode benutzen, sondern eine andere, die unserem Beispiel speziell angepaßt ist. Wir brauchen dazu nur anstatt der Grundbeziehung zwischen Punkten und Geraden („der Punkt x liegt auf der Geraden y" oder „die Punkte x, y bestimmen die Gerade z") eine Beziehung zwischen drei Punkten $Ger(x, y, z)$ („x, y und z liegen auf einer Geraden") einzuführen. Ebenso nehmen wir statt der Grundbeziehungen zwischen Punkten und Ebenen eine Beziehung zwischen vier Punkten $Eb(x, y, z, u)$ („x, y, z, u liegen in einer Ebene").

Zu diesen beiden Prädikaten müssen wir noch die Identitätsbeziehung $\equiv(x, y)$ sowie die Zwischenbeziehung $Zw(x, y, z)$ („x liegt zwischen y und z") hinzunehmen.

Mit Hilfe der vier eingeführten Beziehungen lassen sich nun alle bei unserem Problem vorkommenden Axiome sowie auch der Pascalsche Satz durch logische Formeln darstellen. Es ist wesentlich dabei, daß wir in diesen Formeln freie Gegenstandsvariable vermeiden, indem wir die Allzeichen überall vorsetzen. Z. B. wird das Axiom: „durch zwei Punkte geht nur eine einzige Gerade" ausgedrückt durch die Formel

$$(x)(y)(u)(v)\{[Ger(x, y, u) \,\&\, Ger(x, y, v) \,\&\, \overline{\equiv}(x, y) \,\&\, \overline{\equiv}(u, v)] \rightarrow Ger(x, u, v)\},$$

in Worten: „Wenn x, y und u auf einer Geraden und x, y, v auf einer Geraden liegen und wenn ferner x von y und u von v verschieden ist, dann liegen auch x, u, v auf einer Geraden." Das Axiom: „Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie mindestens noch einen anderen Punkt gemeinsam", drückt sich aus durch die Formel

$$(x)(y)(z)(u)(v)(w)(p)\{[Eb(x, y, z, p) \,\&\, Eb(u, v, w, p)] \rightarrow (Eq)(\overline{\equiv}(p, q) \\ \&\, Eb(x, y, z, q) \,\&\, Eb(u, v, w, q))\}.$$

Dem für die Anordnung in der Ebene wesentlichen Axiom, „wenn eine Gerade, die in der Ebene eines Dreiecks liegt, eine Seite dieses Dreiecks schneidet, so schneidet sie auch eine andere Seite dieses Dreiecks", entspricht die folgende Formel:

$$(x)\,(y)\,(z)\,(u)\,(v)\,\{[Eb(x,y,z,u)\ \&\ \overline{Ger}(x,y,z)\ \&\ Zw(v,x,y)\ \&\ \overline{Ger}(x,y,u)\ \&\ \overline{Ger}(z,u,v)] \rightarrow (Ew)\,[Ger(u,v,w)\ \&\ (Zw(w,x,z) \vee Zw(w,y,z))]\}.$$

Zu beachten ist bei der Einführung der Beziehungen „*Ger*" und „*Eb*", daß für diese die Symmetrieeigenschaften als Axiome formuliert werden müssen. So hat man die Formel

$$(x)\,(y)\,(z)\,\{Ger(x,y,z) \rightarrow (Ger(x,z,y)\ \&\ Ger(y,x,z))\}$$

und die entsprechende für *Eb* aufzustellen. Die *Eigenschaften der Identitätsbeziehung* sind ebenfalls als Axiome zu formulieren:

$$(x)\,(y)\,(\equiv(x,y) \rightarrow \equiv(y,x))$$

$$(x)\ \equiv(x,x),$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,\{\equiv(x,z)\ \&\ \equiv(y,z) \rightarrow \equiv(x,y)\},$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,(u)\,\{(\equiv(x,u)\ \&\ Ger(x,y,z)) \rightarrow Ger(u,y,z)\},$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,(u)\,(v)\,\{(\equiv(x,v)\ \&\ Eb(x,y,z,u)) \rightarrow Eb(v,y,z,u)\}.$$

$$(x)\,(y)\,(u)\,(z)\,\{(\equiv(x,y)\ \&\ Zw(x,u,z)) \rightarrow Zw(y,u,z)\}.$$

$$(x)\,(y)\,(u)\,(z)\,\{(\equiv(x,y)\ \&\ Zw(u,x,z)) \rightarrow Zw(u,y,z)\}.$$

Die vier letzten Formeln bringen zum Ausdruck, daß in jeder vorkommenden Beziehung Identisches füreinander gesetzt werden kann.

Denken wir uns nun alle in Formeln geschriebenen Axiome durch &-Zeichen zu einer einzigen Formel verbunden. Diese stellt die Gesamtbedingung dar, welcher die Prädikate „$\equiv$", „*Ger*", „*Zw*", „*Eb*" unterworfen sind oder, wie man sich in der Axiomatik auch ausdrückt, sie enthält die implizite Definition dieser Prädikate. Zur Abkürzung für diese Formel möge

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

geschrieben werden.

Der spezielle Pascalsche Satz lautet in der gewöhnlichen Ausdrucksweise folgendermaßen: Es seien ABC und $A'B'C'$ je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden. Alle genannten Punkte seien vom Schnittpunkt der beiden Geraden verschieden. Ist dann BC' parallel zu CB' und CA' parallel zu AC', so ist auch AB' parallel zu BA'. — Dieser Satz läßt sich wieder durch eine logische Formel darstellen, wobei von den Prädikaten nur $\equiv$ und „*Ger*" auftreten. Wir wollen diese Formel mit $\mathfrak{P}(\equiv, Ger)$ bezeichnen.

Die in Rede stehende Behauptung besagt nun, daß aus

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

nicht

$$\mathfrak{P}(\equiv, Ger)$$

bewiesen werden kann. In dieser Behauptung kommt die sachlich-geometrische Bedeutung von $\equiv, Ger, Zw, Eb$ nicht mehr vor. Denn entsprechend dem axiomatischen Standpunkt darf ja beim Beweise eines Satzes aus den geometrischen Axiomen nichts anderes von den eingeführten Grundbeziehungen benutzt werden, als was in den Axiomen ausdrücklich formuliert ist.

Wir können daher diese Prädikate ganz eliminieren und an ihre Stelle vier variable Prädikate — natürlich mit der entsprechenden Zahl von Argumenten — setzen:

$$F(x, y); \quad G(x, y, z); \quad H(x, y, z); \quad K(x, y, z, u).$$

Die Beweisbarkeit des Pascalschen Satzes würde bedeuten, daß für irgend vier solche Prädikate $F, G, H, K,$ für welche

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K)$$

wahr ist, auch stets $\mathfrak{P}(F, G)$ wahr ist, daß also

$$\mathfrak{A}(F, G, H, K) \rightarrow \mathfrak{P}(F, G)$$

eine identische Formel ist. Es handelt sich also darum, zu erkennen, daß dies *nicht* der Fall ist.

Auf dieselbe Weise kann man für jeden anderen geometrischen Satz eine zugehörige Formel des Prädikatenkalküls angeben, so daß der Satz dann und nur dann eine Konsequenz der Axiome darstellt, wenn die logische Formel eine identische ist. Ebenso lassen sich Fragen der *Widerspruchsfreiheit* mit der Identität bestimmter Formeln in Zusammenhang bringen. Z. B. ist die Frage, ob die in der Formel

$$\mathfrak{A}(\equiv, Ger, Zw, Eb)$$

zusammengefaßten geometrischen Axiome miteinander logisch verträglich sind, gleichbedeutend mit der anderen, ob die Formel

$$\overline{\mathfrak{A}}(F, G, H, K)$$

keine identische Formel ist.

Wir können ferner sagen, daß *jede Konsequenz eines Axiomensystems der ersten Stufe auch mit Hilfe des zu Anfang dieses Paragraphen dargestellten formalen Ableitungsverfahrens daraus gewonnen werden kann.* Denn die die logische Abhängigkeit des Satzes von den Axiomen ausdrückende identische Formel ist nach § 10 auch beweisbar. Nach Einsetzung der speziellen Prädikate für die variablen in dieser Formel liefert das Schlußschema den Satz selbst.

Unsere letzten Bemerkungen über die Äquivalenz der Abhängigkeit eines Satzes von einem Axiomensystem mit der identischen Gültigkeit einer bestimmten Formel des Prädikatenkalküls beziehen sich, wie schon erwähnt, nur auf Axiomensysteme der ersten Stufe. Für die Axiomensysteme der zweiten Stufe liegen aber ähnliche Verhältnisse vor. Nur ist die in Frage kommende identische Formel mit den Mitteln des engeren Prädikatenkalküls nicht mehr darstellbar, sondern sie gehört dem im 4. Kapitel zu behandelnden erweiterten Prädikatenkalkül an.

§ 12. Das Entscheidungsproblem.

Aus den Überlegungen des vorigen Paragraphen ergibt sich die grundsätzliche Wichtigkeit des Problems, bei einer vorgelegten Formel des Prädikatenkalküls zu erkennen, ob es sich um eine identische Formel handelt oder nicht. Nach der in § 5 gegebenen Definition bedeutet die Identität einer Formel dasselbe wie die Allgemeingültigkeit der Formel für jeden Individuenbereich. Man pflegt deswegen auch von dem *Problem der Allgemeingültigkeit* einer Formel zu sprechen. Genauer müßte man statt Allgemeingültigkeit Allgemeingültigkeit für jeden Individuenbereich sagen. Die identischen Formeln des Prädikatenkalküls sind nach den Ausführungen des § 10 gerade die Formeln, die aus dem Axiomensystem des § 5 sich ableiten lassen. Zu einer Lösung des Problems der Allgemeingültigkeit vermag uns diese Tatsache nicht zu helfen, da wir kein allgemeines Kriterium für die Ableitbarkeit einer Formel haben.

Eine Formel des reinen Prädikatenkalküls, d. h. eine Formel, in der keine individuellen Zeichen auftreten, heißt *erfüllbar* in einem Individuenbereich, wenn man die Aussagenvariable so durch die Werte „richtig" und „falsch", die Prädikatenvariable durch irgendwelche in dem betreffenden Individuenbereich definierte speziellen Prädikate und die freien Gegenstandsvariablen so durch individuelle Gegenstände ersetzen kann, daß die Formel in eine richtige Aussage übergeht. Sagt man von einer Formel ohne nähere Angabe, daß sie erfüllbar sei, so soll damit gemeint sein, daß überhaupt ein Individuenbereich existiert, in dem Erfüllbarkeit besteht. Ist eine Formel $\mathfrak{A}$ in irgendeinem Individuenbereich nicht allgemeingültig, so ist offenbar $\overline{\mathfrak{A}}$ in dem betreffenden Bereich erfüllbar, und umgekehrt. Ebenso stehen Allgemeingültigkeit einer Formel $\mathfrak{A}$ schlechthin und Erfüllbarkeit von $\overline{\mathfrak{A}}$ im Verhältnis von Position und Negation.

Die beiden einander äquivalenten Probleme der *Allgemeingültigkeit* und *Erfüllbarkeit* pflegt man auch mit einem gemeinsamen Namen als das *Entscheidungsproblem* des engeren Prädikatenkalküls zu bezeichnen. Nach den in § 11 gemachten Bemerkungen ist man berechtigt, es als das *Hauptproblem der mathematischen Logik* zu bezeichnen.

Wir wollen die Begriffe der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit an einigen Beispielen erläutern. Allgemeingültig sind z. B. alle Formeln, die wir aus den logischen Axiomen ableiten können, z. B. die Formeln (21) bis (36) des § 6. Alle allgemeingültigen Formeln sind natürlich auch erfüllbar. Die Formel

$$(E\,x)\,F(x)$$

ist zwar nicht allgemeingültig, aber erfüllbar. Wir brauchen ja nur, bei beliebig gewähltem Individuenbereich, für F das Prädikat „mit sich selber identisch sein" zu nehmen. Dieses trifft nicht nur auf einen, sondern sogar auf alle Gegenstände zu. Daraus ergibt sich, daß auch

$$(x)\,F(x)$$

erfüllbar ist. Ferner ist erfüllbar

$$(x)\,\overline{F}(x, x) \,\&\, (x)\,(E\,y)\,F(x, y).$$

Man braucht als Individuenbereich nur die ganzen Zahlen zu nehmen und für $F(x, y)$ das Prädikat $x < y$ einzusetzen. Nicht erfüllbar ist z. B.

$$(E\,x)\,(y)\,\bigl(F(x, x) \,\&\, \overline{F}(x, y)\bigr),$$

denn das Gegenteil dieser Formel

$$(x)\,(E\,y)\,\bigl(\overline{F}(x, x) \lor F(x, y)\bigr)$$

ist eine identische Formel. Es gibt nämlich zu jedem x ein y der verlangten Art; denn wir können y gleich x selbst nehmen.

Dem Entscheidungsproblem läßt sich auch noch eine *schärfere Fassung* geben. Eine Formel, die überhaupt erfüllbar ist, braucht deswegen noch nicht in jedem Individuenbereich erfüllbar zu sein. Z. B. ist die Formel

$$(E\,x)\,(E\,y)\,\bigl(F(x) \,\&\, \overline{F}(y)\bigr)$$

gewiß erfüllbar. Man braucht nur als Individuenbereich den aus 0 und 1 bestehenden Bereich und als Einsetzung für F das Prädikat „$x = 0$“ zu nehmen. Es gibt dann ein x und ein y, so daß $x = 0$ und $y \neq 0$, nämlich 0 und 1. Die Formel ist aber nicht in einem Individuenbereich erfüllbar, der nur aus einem einzigen Element besteht, da ein Prädikat nicht gleichzeitig auf dasselbe Ding zutreffen und nicht zutreffen kann. Ebenso ist das Gegenteil der obigen Formel

$$(x)\,(y)\,\bigl(\overline{F}(x) \lor F(y)\bigr)$$

allgemeingültig, falls es nur einen Gegenstand im Individuenbereich gibt, sonst aber nicht.

Besteht Erfüllbarkeit oder Allgemeingültigkeit für eine Formel in einem Individuenbereich, so auch in jedem anderen Individuenbereich mit der gleichen Kardinalzahl, wie sich durch eine eineindeutige Abbildung der Bereiche aufeinander leicht ergibt. Abgesehen von den Formeln, die für jeden Individuenbereich allgemeingültig (bzw. erfüllbar) sind, und abgesehen von denjenigen, die für keinen Bereich diese Eigenschaft haben, ist demnach die *Postulierung der Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit einer logischen Formel äquivalent mit einer Aussage über die Anzahl der Individuen.* Im weitgehendsten Sinne kann man das Entscheidungsproblem als gelöst bezeichnen, wenn man ein Verfahren hat, das bei jeder vorgelegten Formel die Entscheidung darüber gestattet, *für welche Individuenbereiche sie allgemeingültig bzw. erfüllbar ist und für welche nicht.*

Was das Verhältnis der beiden Fassungen des Entscheidungsproblems zueinander betrifft, so hatte sich in § 10 bereits ein bemerkenswerter Satz ergeben.

Ist eine Formel in einem abzählbar-unendlichen Bereiche allgemeingültig, so ist sie überhaupt allgemeingültig, also eine identische Formel.

In bezug auf Erfüllbarkeit formuliert würde der Satz heißen:

Ist eine Formel überhaupt erfüllbar, so besteht die Erfüllbarkeit auch in einem abzählbar-unendlichen Individuenbereich.

Als (allerdings viel trivialere) Ergänzung dieses Satzes haben wir ferner:

Ist eine Formel in irgendeinem Individuenbereich erfüllbar, so auch in jedem Individuenbereich mit größerer Zahl der Individuen.

Man kann nämlich die Definition der Prädikate, die eine Formel in einem Bereiche (J) erfüllen, leicht so erweitern, daß die Erfüllung auch in einem Individuenbereich (J'), der (J) als Teil enthält, stattfindet. Wir greifen zu dem Zweck aus (J) irgendein Element α heraus und erweitern die Definition der Prädikate auf den Bereich (J'), indem wir so verfahren, als wären alle Elemente von (J'), die nicht zu (J) gehören, mit α identisch. Haben wir z. B. für den Bereich (J) ein erfüllendes Prädikat Φ mit n Leerstellen, so wird das entsprechende Prädikat Ψ in (J') folgendermaßen definiert: Für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus (J') gilt

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \Phi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n).$$

Dabei ist $\mathfrak{x}_i$ mit x_i identisch, falls x_i zu (J) gehört und sonst gleich α. Aus der Art, wie die Prädikate definiert sind, ergibt sich dann, wie hier nicht im einzelnen ausgeführt werden soll, die Erfüllbarkeit im Bereich (J').

Für den Fall, daß *der Individuenbereich eine bestimmte endliche Anzahl von Individuen enthält, läßt sich die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit immer treffen.*

In diesem Falle lassen sich nämlich die Allzeichen durch eine endliche Konjunktion, die Seinszeichen durch eine endliche Disjunktion von Aussagen ersetzen, und die Allgemeingültigkeit, bzw. Erfüllbarkeit der Formel in dem endlichen Bereich wird auf die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit einer Formel des Aussagenkalküls zurückgeführt.

Ein Beispiel möge das klarer machen. Es sei die Erfüllbarkeit der Formel

$$(E x)\,(y)\,\big(F(x, x) \,\&\, \overline{F}(x, y)\big)$$

in einem aus zwei Elementen bestehenden Bereiche zu untersuchen. Bezeichnen wir die Elemente dieses Bereiches mit 0 und 1, so ist für diesen Bereich jede Formel $(E x)\,\mathfrak{A}(x)$ mit $\mathfrak{A}(0) \vee \mathfrak{A}(1)$, jede Formel $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ mit $\mathfrak{A}(0) \,\&\, \mathfrak{A}(1)$ gleichbedeutend. Demnach kann die obige Formel zunächst durch

$$(y)\,\big(F(0, 0) \,\&\, \overline{F}(0, y)\big) \vee (y)\,\big(F(1, 1) \,\&\, \overline{F}(1, y)\big)$$

und weiter durch

$$\big(F(0,0) \,\&\, \overline{F}(0,0) \,\&\, F(0,0) \,\&\, \overline{F}(0,1)\big) \vee \big(F(1,1) \,\&\, \overline{F}(1,0) \,\&\, F(1,1) \,\&\, \overline{F}(1,1)\big)$$

ersetzt werden. Es kommt nun darauf an, die $F(0, 0)$, $F(0, 1)$, usw. so durch richtige und falsche Aussagen zu ersetzen, daß das Ganze den Wert „richtig" erhält. Mit anderen Worten, die Erfüllbarkeit der Formel im Bereiche mit zwei Elementen ist auf die Erfüllbarkeit der Aussagenformel

$$(A \mathbin{\&} \bar{A} \mathbin{\&} A \mathbin{\&} B) \vee (C \mathbin{\&} \bar{D} \mathbin{\&} C \mathbin{\&} \bar{C})$$

zurückgeführt.

Aus den letzten Sätzen ergibt sich folgendes: *Kann man für eine vorgelegte Formel zeigen, daß die Erfüllbarkeit überhaupt dann und nur dann besteht, falls Erfüllbarkeit in einem Individuenbereiche mit bestimmter endlicher Anzahl k von Individuen besteht, so ist das Problem der Erfüllbarkeit für alle Individuenbereiche entschieden.*

Denn zunächst läßt sich feststellen, ob Erfüllbarkeit in einem Bereiche mit k Individuen vorhanden ist. Ist das nicht der Fall, so ist die Formel in keinem Bereiche erfüllbar. Läßt sie sich aber in diesem Bereiche erfüllen, so auch in allen Bereichen mit größerer Individuenzahl. Wir haben dann nur noch die Erfüllbarkeit in Bereichen mit $1, 2, \ldots, k-1$ Elementen zu untersuchen, die sich ebenfalls feststellen läßt.

Es sei gleich bemerkt, daß man auf diese Weise nicht zu einer allgemeinen Lösung des Entscheidungsproblems gelangen kann. *Es gibt nämlich Formeln, die in keinem endlichen Individuenbereiche erfüllbar sind, wohl aber in einem Bereich mit unendlich vielen Elementen.* Zu diesen Formeln gehört z. B.

$$(x)\,(Ey)\,F(x, y) \mathbin{\&} (x)\,\bar{F}(x, x) \mathbin{\&} (x)\,(y)\,(z)\,\big((F(x, y) \mathbin{\&} F(y, z)) \rightarrow F(x, z)\big).$$

Diese Formel ist z. B. im Bereiche der natürlichen Zahlen durch das Prädikat $x < y$ erfüllt. Dagegen ergibt die angenommene Erfüllbarkeit in einem Bereiche mit endlicher Zahl der Individuen sofort einen Widerspruch. Sei etwa Φ das erfüllende Prädikat. Wegen der Richtigkeit von $(x)\,(Ey)\,\Phi(x, y)$ würde eine beliebig fortsetzbare Kette von Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ existieren, so daß immer $\Phi(a_i, a_{i+1})$ der Fall ist. Wegen der vorausgesetzten Endlichkeit des Individuenbereiches würde ein i und k existieren $(k > i)$, so daß a_i und a_k dasselbe Element bedeuten. Aus

$$(x)\,(y)\,(z)\,\big((\Phi(x, y) \mathbin{\&} \Phi(y, z)) \rightarrow \Phi(x, z)\big)$$

würde sich dann $\Phi(a_i, a_i)$ ergeben, während doch $(x)\,\bar{\Phi}(x, x)$ der Fall sein soll.

Während das Entscheidungsproblem im Aussagenkalkül leicht zu lösen war, z. B. durch die Benutzung der konjunktiven oder der disjunktiven Normalform (vgl. 1. Kap., § 4, § 6, auch 1. Kap., § 8) stellt das Entscheidungsproblem im Prädikatenkalkül ein sehr schwieriges und als Ganzes durchaus ungelöstes Problem dar. Gewisse, unten näher anzuführende Gründe, lassen sogar das Suchen nach einer vollständigen Lösung als aussichtslos erscheinen. Wegen der zentralen Bedeutung des Problems haben aber auch die Bemühungen, wenigstens für möglichst umfassende Klassen von Formeln die Entscheidung herbeizuführen, ein großes Interesse. Wir berichten im folgenden über die hauptsächlichen Ergebnisse in dieser Richtung.

Wir denken uns bei den sämtlichen nachstehenden Überlegungen immer Formeln zugrunde gelegt, die keine freie Gegenstandsvariable mehr enthalten. Ehe wir uns den gelösten Einzelfällen des Entscheidungsproblems selbst zuwenden, gehen wir auf einige Sätze allgemeiner Art ein, die im Zusammenhang mit dem Entscheidungsproblem stehen. Einige dieser Sätze haben wir schon in § 8 erwähnt, nämlich den Satz über die *pränexe* und über die *Skolemsche Normalform.* Sie haben den Vorteil, daß man bei Betrachtungen über Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit von Formeln diese in einer speziellen normierten oder reduzierten Gestalt zugrunde legen darf, ohne daß die Betrachtungen an Allgemeinheit verlieren. Man spricht deswegen auch von *Reduktionssätzen.* Z. B. sagt der Skolemsche Satz (wenn wir ihn hier in bezug auf die Erfüllbarkeit formulieren), daß man zu jeder vorgelegten Formel des Prädikatenkalküls eine andere mit einem Präfix der Form

$$(x_1)\ldots(x_m)(E\,y_1)\ldots(E\,y_n)$$

angeben kann, die hinsichtlich der Erfüllbarkeit mit der ersten gleichwertig ist. Man braucht sich demnach beim Erfüllbarkeitsproblem nur mit Formeln zu befassen, die ein Präfix der angegebenen Art haben.

Weitere Sätze dieser Art betreffen entweder ebenfalls die Reduktion der Formeln auf solche mit bestimmten Präfixen oder die Reduktion der Anzahl der Argumente bei den vorkommenden Prädikatvariablen oder die Reduktion der Anzahl der Prädikatvariablen usw. Von den zahlreichen Ergebnissen in dieser Richtung erwähnen wir nur die folgenden:

Zu jeder Formel läßt sich eine hinsichtlich der Erfüllbarkeit gleichwertige angeben, bei der nur ein- und zweistellige Prädikatvariable vorkommen[1]. Man kann sich weiter sogar auf solche Formeln beschränken, in denen nur eine einzige zweistellige Prädikatenvariable vorkommt und außerdem das Präfix die Form

$$(E\,x_1)\ldots(E\,x_m)(y_1)(y_2)(E\,z)(u_1)\ldots(u_n)$$

hat[2]. Ferner kann man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf solche Formeln beschränken, die ein Präfix der Form

$$(x_1)(x_2)(x_3)(E\,y_1)\ldots(E\,y_n)$$

[1] Löwenheim, L.: Siehe die in § 10 zitierte Arbeit.

[2] Kalmar, L.: Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. Comp. Math. Bd. 4 (1936). Vgl. auch die dort angegebenen früheren Arbeiten des Verfassers.

haben[1]. Endlich genügt es auch, beim Erfüllbarkeitsproblem die Formeln zu betrachten, die ein Präfix der Form

$$(E\,x)\,(y)\,(E\,z)\,(u_1)\ldots(u_n)$$

haben[2]. Bezüglich des Beweises dieser Sätze sei auf die zitierten Originalarbeiten verwiesen[3].

Wir berichten nun über die wichtigsten Spezialfälle, in denen eine Lösung des Entscheidungsproblems geglückt ist. Diese Spezialfälle bilden eine gewisse Parallele zu den obigen Reduktionssätzen. Dem Satz, daß man zu jeder Formel des Prädikatenkalküls eine bezüglich der Erfüllbarkeit gleichwertige angeben kann, in der nur ein- und zweistellige Prädikatenvariable vorkommen, entspricht der Satz, daß die *Entscheidung für den Bereich der Formeln, die nur einstellige Prädikatenvariable enthalten*, geglückt ist. Ebenso entspricht den Sätzen, die bezüglich des Entscheidungsproblems eine Reduktion der Formeln auf solche mit bestimmten Präfixen vornehmen, die Tatsache, daß für bestimmte Präfixklassen sich ebenfalls eine Lösung des Entscheidungsproblems hat erzielen lassen.

Die grundsätzliche Möglichkeit der Entscheidung im Bereich der einstelligen Prädikate ist zuerst von L. LÖWENHEIM[4] erkannt worden. Einfachere Beweise sind von TH. SKOLEM[5] und H. BEHMANN[6] gegeben worden[7]. Die genannten Beweise gehen in ihrer Tragweite über den Bereich des engeren Prädikatenkalküls hinaus, da sie das Entscheidungsproblem, soweit nur einstellige Prädikate vorkommen, auch für den im 4. Kapitel zu behandelnden Prädikatenkalkül der zweiten Stufe lösen. Wir kommen im nächsten Kapitel darauf zurück.

Bei den folgenden Überlegungen ist es uns übrigens bequemer, uns auf das Problem der Allgemeingültigkeit zu beziehen. Wir können uns von der Entscheidbarkeit der Formeln des engeren Prädikatenkalküls, die nur einstellige Prädikatenvariable enthalten, auf dem folgenden

---

[1] GÖDEL, K.: Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Physik Bd. 40 (1933).

[2] ACKERMANN, W.: Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 112 (1936).

[3] Weitere Reduktionssätze findet man in den Arbeiten: PEPIS, J.: Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems. Acta Lit. Szeged Bd. 8 (1936). — SKOLEM, TH.: Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems. Avh. Vid. Akad. Oslo, I Mat.-nat. Klasse 1936, Nr. 6.

[4] LÖWENHEIM, L.: l. c.

[5] SKOLEM, TH.: Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktation- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vid. Skrifter I, Mat.-nat. Klasse 1919, Nr. 3.

[6] BEHMANN, H.: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. Bd. 86 (1922).

[7] Eine besonders durchsichtige Behandlung des einstelligen Prädikatenkalküls findet sich in HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I (vgl. insbesondere § 5, S. 194/195).

elementaren Wege überzeugen. Es liegt eine Formel aus dem genannten Bereiche vor.

Es sei k die Anzahl der verschiedenen in der betrachteten Formel vorkommenden Prädikatzeichen $A, B \ldots K$. Wir behaupten nun: *Wenn die Formel in allen Fällen, wo der Individuenbereich aus höchstens 2^k Gegenständen besteht, allgemeingültig ist, so ist sie überhaupt allgemeingültig.*

Zum Beweise nehmen wir an, daß die betrachtete Formel für ein gewisses System von mehr als 2^k Individuen bei Ersetzung der Prädikatenvariablen $A, B, \ldots, K$ durch die bestimmten Prädikate $A_0, B_0, \ldots, K_0$ eine falsche Aussage ergäbe. Wir wollen dann aus dieser Aussage eine andere falsche Aussage ableiten, die ebenfalls durch Spezialisierung der betrachteten Formel entsteht und die sich auf ein System von höchstens 2^k Individuen bezieht.

Wir teilen die Gegenstände, auf welche sich die vorgelegte falsche Aussage (mit den Prädikaten $A_0, B_0, \ldots, K_0$) bezieht, in Klassen ein, indem wir zwei Gegenstände a, b zur selben Klasse rechnen, wenn die Aussagen

$$A_0(a),\ B_0(a), \ldots, K_0(a)$$

bezüglich wahrheitsgleich sind mit

$$A_0(b),\ B_0(b), \ldots, K_0(b),$$

also

$$\begin{aligned}
&A_0(a) \text{ wahrheitsgleich mit } A_0(b),\\
&B_0(a) \text{ wahrheitsgleich mit } B_0(b),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&K_0(a) \text{ wahrheitsgleich mit } K_0(b).
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir höchstens 2^k Klassen. Nämlich für einen Gegenstand a kann $A_0(a)$ nur richtig oder falsch sein, dasselbe gilt für $B_0(a)$ usw. Im ganzen gibt es also nur 2^k Möglichkeiten für die Verteilung von Richtigkeit und Falschheit auf die Aussagen

$$A_0(a),\ B_0(a), \ldots, K_0(a),$$

und wenn für zwei Gegenstände dieselbe Verteilung vorliegt, so gehören sie zur selben Klasse.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Klassen, die wir so erhalten, wobei also $n \leqq 2^k$ ist. Wir nehmen nun die Gesamtheit der Klassen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als ein neues System von Gegenständen. In bezug auf diese Gegenstände definieren wir k Prädikate $A_1, B_1, \ldots, K_1$ in folgender Weise: A_1 trifft für die Klasse α_p ($p = 1, \ldots, n$) dann und nur dann zu, wenn A_0 auf die zu α_p gehörigen ursprünglichen Gegenstände zutrifft. Entsprechend ist die Definition von $B_1, \ldots, K_1$.

Ersetzt man nun in einer beliebigen aus den Prädikaten $A_0, B_0, \ldots, K_0$ mit Hilfe der logischen Zeichen gebildeten Aussage A_0 durch A_1, B_0 durch $B_1, \ldots, K_0$ durch K_1, und nimmt man als Werte der Variablen anstatt der anfänglichen Gegenstände die Klassen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, und ersetzt jeden gegebenenfalls in der Aussage vorkommenden bestimmten Gegenstand durch die Klasse, zu der er gehört, so geht die Aussage in eine ihr wahrheitsgleiche über.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist sofort ersichtlich, falls die betreffende Aussage keine Allzeichen und Seinszeichen enthält. Man beweist sie allgemein, indem man die Aussage in Normalform geschrieben denkt, und von der Gültigkeit für m voranstehende Klammerzeichen auf die Gültigkeit für $m+1$ Zeichen schließt.

Aus diesem Satz folgt nun insbesondere, daß jene falsche Aussage, die gemäß unserer Annahme aus der vorgelegten Formel nach Ersetzung der Prädikatvariablen $A, B, \ldots, K$ durch die Prädikate A_0, $B_0, \ldots, K_0$ entsteht, wiederum in eine falsche Aussage übergeht, wenn wir die Prädikate $A_0, B_0, \ldots, K_0$ durch $A_1, B_1, \ldots, K_1$ ersetzen und als Werte für die Variablen die Klassen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nehmen.

Demnach brauchen wir die Entscheidung nur für den Fall auszuführen, daß es sich um höchstens 2^k, also um endlich viele Gegenstände handelt. Für diesen Fall läßt sich aber die Entscheidung, wie wir sahen, durch ein endliches Verfahren erzwingen.

Betrachten wir nun wieder Formeln, in denen beliebige Prädikatenvariable vorkommen, so kann man leicht das Entscheidungsverfahren für die Allgemeingültigkeit der Formeln angeben, bei denen *das Präfix aus lauter Allzeichen besteht, oder aus lauter Seinszeichen, oder bei denen die Allzeichen sämtlich den Seinszeichen vorangehen.*

Es handele sich zunächst um eine Formel der ersten Art, also um eine Formel der Gestalt

$$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

bei der $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ keine All- und Seinszeichen mehr enthält. *Diese Formel ist dann und nur dann allgemeingültig, falls sie in einem Bereich mit m Individuen allgemeingültig ist.*

Wäre sie nämlich in einem Bereiche mit größerer Individuenzahl als m nicht allgemeingültig, so würden in diesem Bereich Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und spezielle Prädikate existieren, so daß

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

zu einer falschen Formel wird. In diesem Falle hätten wir aber, wie sofort einzusehen, keine Allgemeingültigkeit im Bereiche $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Eine Formel

$$(E x_1)\ldots(E x_m)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$$

bei der das Präfix aus lauter Seinszeichen besteht, ist allgemeingültig, falls die Allgemeingültigkeit in einem Bereiche mit nur einem Individuum vorhanden ist.

Ist nämlich die obige Formel nicht allgemeingültig, so jedenfalls auch nicht die Formel

$$(E\,x)\,\mathfrak{A}(x, x, \ldots, x)$$

die ja eine stärkere Behauptung darstellt. Es existiert also in einem Bereich ein Element a und spezielle Prädikate, so daß $\mathfrak{A}(a, \ldots, a)$ sich zu einer falschen Formel machen läßt. Wir hätten dann auch keine Allgemeingültigkeit in dem Bereich mit dem einzigen Element a.

Auf dieselbe einfache Weise läßt sich auch zeigen, daß die Formeln

$$(x_1)\ldots(x_m)\,(E\,y_1)\ldots(E\,y_n)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

bei denen die Allzeichen sämtlich den Seinszeichen vorangehen, allgemeingültig sind, falls die Allgemeingültigkeit in einem Bereiche mit m Individuen besteht. Wir bilden nämlich die Disjunktion aller möglichen Formeln

$$\mathfrak{A}\left(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right),$$

die aus $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ dadurch entstehen, daß die $y_1, \ldots, y_n$ irgendwie durch Variable aus der Reihe $x_1, \ldots, x_m$ ersetzt werden. Diese Disjunktion wollen wir mit $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ bezeichnen. Offenbar ergibt sich für einen Bereich mit m Individuen aus der Allgemeingültigkeit von

$$(x_1)\ldots(x_m)\,(E\,y_1)\ldots(E\,y_n)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

die von

$$(x_1)\ldots(x_m)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m),$$

demnach also auch die Allgemeingültigkeit von

$$(x_1)\ldots(x_m)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$$

überhaupt. Da aber $(x_1)\ldots(x_m)\,\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ eine stärkere Aussage darstellt als

$$(x_1)\ldots(x_m)\,(E\,y_1)\ldots(E\,y_n)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

so ist die Behauptung bewiesen[1].

Von den weiteren gelösten Spezialfällen des Entscheidungsproblems, bei denen man übrigens nicht mehr mit derartigen einfachen Mitteln zum Ziele kommt, sei noch der folgende erwähnt. Für die Formeln, die ein Präfix der Form

$$(x_1)\ldots(x_m)\,(E\,y_1)\,(E\,y_2)\,(z_1)\ldots(z_n)$$

haben, kann man ebenfalls die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit vornehmen[2]. Auch in diesem Falle ließ sich die Entscheidung über

[1] Die zuletzt erwähnten Spezialfälle des Entscheidungsproblems fanden ihre Erledigung in der Arbeit von P. Bernays und M. Schönfinkel: Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 99 (1928).

[2] Vgl. K. Gödel: l. c. (Vorläufige Darstellung schon in Erg. Wien. math. Koll. Bd. 2 (1932). — Kalmar, L.: Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten. Math. Ann.

die Allgemeingültigkeit überhaupt auf die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit für einen bestimmten endlichen Individuenbereich zurückführen. Damit sind aber auch die Präfixtypen, bei denen man auf diese Weise zur Entscheidung über die Allgemeingültigkeit gelangen kann, erschöpft. Für alle anderen Präfixe kann man nämlich Formeln angeben, die in allen Bereichen mit endlicher Individuenzahl allgemeingültig sind, nicht aber in Bereichen mit unendlich vielen Individuen[1].

Was nun die allgemeine Lösung des Entscheidungsproblems anbetrifft, so muß das Suchen danach nach Untersuchungen, die A. CHURCH im Anschluß an Arbeiten von K. GÖDEL angestellt hat, als aussichtslos bezeichnet werden[2]. Über diese Untersuchungen kann im Rahmen dieses Buches nicht im einzelnen berichtet werden. Es sei nur bemerkt, daß eine allgemeine Entscheidungsmethode in einem gewissen rekursiven Verfahren für die einzelnen Formeln bestehen würde, das für jede Formel schließlich den Wert „richtig" oder „falsch" ergibt. Die Existenz eines derartigen rekursiven Verfahrens wird aber durch die Churchsche Arbeit verneint; zum mindesten würden die notwendigen Rekursionen nicht unter den von CHURCH aufgestellten allgemeinen Rekursionstyp fallen, durch den der inhaltlich etwas unbestimmte Begriff der Rekursion eine gewisse formale Präzisierung gefunden hat.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei bemerkt, daß die Unmöglichkeit eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens nicht etwa bedeutet, daß man bestimmte Formeln angeben kann, deren Allgemeingültigkeit nachweislich nicht zu entscheiden wäre. Das vorausgesetzte Vorhandensein eines derartigen Nachweises würde nämlich sofort einen Widerspruch ergeben. Es würde aus einem derartigen Nachweise sich ein Beweis dafür ergeben, daß die Formel nicht aus dem Axiomensystem des § 5 ableitbar wäre. Durch den Vollständigkeitssatz des § 10 würde sich aber dann die Erfüllbarkeit des Gegenteils der Formel nachweisen lassen. Somit wäre die Allgemeingültigkeit doch, und zwar in verneinendem Sinne entschieden. Jedenfalls bleibt also die Aufgabe, den Bereich der Formeln, für die das Entscheidungsproblem gelöst ist, zu erweitern, weiter lohnend und bedeutsam.

Bd. 108 (1932). — SCHÜTTE, K.: Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 109 (1934). — Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math. Ann. Bd. 110 (1934). — Für den Fall, daß das obige Präfix statt zweier nur ein Seinszeichen enthält, erfolgte die Lösung bereits früher durch W. ACKERMANN und TH. SKOLEM. Vgl. W. ACKERMANN: Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke. Math. Ann. Bd. 100 (1928). — SKOLEM, TH.: Über die mathematische Logik. Norsk. mat. Tidskr. Bd. 10 (1928). Ein Spezialfall der letzten Art wurde bereits in der in Anm. 1, S. 98, genannten Arbeit behandelt.

[1] Vgl. die erste der in der vorigen Anm. genannten Arbeiten von K. SCHÜTTE.

[2] CHURCH, A.: An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. Bd. 58 (1936). — A note on the Entscheidungsproblem; Correction to a note on the Entscheidungsproblem. J. Symb, Logic Bd. 1 (1936).

Viertes Kapitel.

Der erweiterte Prädikatenkalkül.

§ 1. Der Prädikatenkalkül der zweiten Stufe.

Zu einer ersten Erweiterung des engeren Prädikatenkalküls, oder wie er auch genannt wird, des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, gelangen wir durch Berücksichtigung der Tatsache, daß der Formalismus dieses Kalküls offenbar in sich nicht abgeschlossen ist. So können wir zwar ausdrücken, daß eine Formel für alle Werte der darin auftretenden Prädikatvariablen eine richtige Aussage darstellt; wir sind aber nicht imstande, das Gegenteil dieser Behauptung auszudrücken. Setzen wir nämlich den Negationsstrich über die ganze Formel, so bedeutet das jetzt, daß die Formel für alle Werte der Prädikatvariablen eine falsche Aussage sein soll. Es besteht aber die Möglichkeit, daß eine Formel weder für alle Werte der Prädikatvariablen eine richtige, noch für alle Werte der Prädikatvariablen eine falsche Behauptung darstellt. Z. B. ist die Formel $(x)F(x)$ sicher für keinen Individuenbereich allgemeingültig, aber auch nicht die Formel $\overline{(x)F(x)}$. Um auszudrücken, daß $(x)F(x)$ nicht allgemeingültig ist, müßten wir ein Seinszeichen für Prädikate haben.

Es ergibt sich demnach als natürliche Erweiterung des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, daß wir *das Allzeichen und das Seinszeichen auch in Verbindungen mit Aussage- und Prädikatvariablen anwenden und zwischen freien und gebundenen derartigen Variablen unterscheiden.*

Der Begriff der logischen Formel, wie er in § 4 festgelegt wurde, erfährt dann eine entsprechende Erweiterung. Wir gelangen zu einem *Prädikatenkalkül der zweiten Stufe.*

Einige Beispiele mögen die vermehrte Ausdrucksmöglichkeit erläutern. Die Formel

$$(P)\,(x)\bigl(P(x)\vee\overline{P}\,(x)\bigr),$$

besagt, daß $(x)\,\bigl(P(x)\vee\overline{P}(x)\bigr)$ für jedes Prädikat P zutrifft. Die Formel

$$(A)\,(F)\,\bigl((x)\,(A\rightarrow F(x))\sim(A\rightarrow(x)\,F(x))\bigr)$$

drückt aus, daß die durch

$$(x)\,(A\rightarrow F(x))\sim(A\rightarrow(x)\,F(x))$$

definierte Beziehung zwischen Aussagen und Prädikaten für beliebige Aussagen und Prädikate zutrifft.

Ein Fall der gleichen Art liegt vor bei der *symbolischen Formulierung des Prinzips der vollständigen Induktion*. Der Inhalt dieses Prinzips läßt sich folgendermaßen aussprechen:

„Wenn ein Prädikat von der Zahl 1 gilt, und wenn es, falls es von irgendeiner Zahl gilt, auch von der nächstfolgenden gilt, so gilt das Prädikat von jeder Zahl."

Führen wir das Zeichen $\mathrm{Seq}(x, y)$ für die Beziehung einer Zahl zur nächstfolgenden ein, so können wir das Prinzip so ausdrücken, daß wir

$$\{P(1) \mathbin{\&} (x)(y)[P(x) \mathbin{\&} \mathrm{Seq}(x, y) \to P(y)]\} \to (x)\, P(x)$$

als eine richtige Formel postulieren.

Will man nun noch durch die Schreibweise explizit zum Ausdruck bringen, daß die Formel für alle Prädikate P zutreffen soll, so kann man das Allgemeinheitszeichen (P) vor die Formel setzen.

Einen weiteren charakteristischen Fall bildet die *Definition der Identität*. Die Beziehung der Identität läßt sich definitorisch auf die logischen Grundbeziehungen zurückführen, indem man x als identisch mit y erklärt, sofern jedes Prädikat, das für x zutrifft, auch für y zutrifft, und umgekehrt. Im Sinne dieser Erklärung können wir das Zeichen der Identität, $\equiv(x, y)$, als eine Abkürzung auffassen für den Ausdruck

$$(F)\big(F(x) \sim F(y)\big).$$

In den angeführten Fällen ist der Gebrauch des Allgemeinheitszeichens, wenn auch sehr naheliegend, so doch nicht unerläßlich. Es gibt jedoch Fälle, in denen der Gebrauch des Allzeichens notwendig ist, wenn man nicht auf wichtige Ausdrucksmöglichkeiten verzichten will.

Will man z. B. ausdrücken, daß jedes Prädikat $R(x, y)$, welches mit der Identität äquivalent ist, auch die Eigenschaft der Symmetrie besitzt, so muß man dies folgendermaßen schreiben:

$$(R)\,\{(x)(y)[R(x, y) \sim (F)\big(F(x) \sim F(y)\big)] \to (x)(y)\big(R(x, y) \to R(y, x)\big)\}.$$

Hier kann das Allzeichen (F) nicht fortgelassen werden, ohne daß der Sinn der Aussage geändert wird.

Ebenso ist, wie schon oben erwähnt, das Allzeichen unentbehrlich, falls von einem bestimmten Ausdruck gesagt werden soll, daß er nicht für alle Werte dei darin vorkommenden Prädikatvariablen eine richtige Formel ist. Um etwa auszudrücken, daß $(x)(y)F(x, y)$ keine allgemeingültige Formel ist, können wir die Formel

$$\overline{(F)}\,(x)(y)\,F(x, y)$$

oder auch die gleichbedeutende

$$(EF)\,(Ex)\,(Ey)\,\overline{F}(x, y)$$

anwenden. Ebenso verhält es sich bei vielen Sätzen der Logik, die allgemein von Aussagen und Prädikaten handeln; z. B. gilt das bei dem

Satz, daß es zu jeder Aussage X eine Aussage Y derart gibt, daß von den beiden Aussagen mindestens eine und nur eine richtig ist (d. h. also bei dem Satze von der Existenz des Gegenteils einer Aussage). Hierfür ergibt sich bei der erweiterten Symbolik die Darstellung

$$(X)\,(EY)\,(X \vee Y \mathbin{\&} \overline{X \mathbin{\&} Y}).$$

Mit der bisherigen Symbolik würde sich dagegen dieser Satz nicht wiedergeben lassen.

Durch die Erweiterung der Symbolik sind wir auch instand gesetzt, Probleme und deren Lösungen symbolisch zu formulieren, bei denen wir uns bisher mit einer umständlichen inhaltlichen Beschreibung behelfen mußten. Ich erinnere z. B. an die Überlegungen, die wir in § 8 des I. Abschnittes anstellten. Die dort gefundenen Resultate lassen sich durch die folgenden Formeln wiedergeben:

$$(X)\,(A_1 X \mathbin{\&} A_2 \overline{X}) \sim A_1 \mathbin{\&} A_2,$$

$$(EX)\,(A_1 X \mathbin{\&} A_2 \overline{X}) \sim A_1 \vee A_2.$$

Diese Formeln geben *eine Regel an, wie man einen Ausdruck, der Klammerzeichen für Aussagenvariable enthält, durch einen äquivalenten ersetzt, in dem diese Klammerzeichen nicht mehr vorkommen.* Man entwickelt nämlich den Ausdruck jeweilig nach den zu den innersten Klammerzeichen gehörigen Variablen und schafft dann diese nach der in den Formeln ausgedrückten Eliminationsregel fort. Z. B. erhält man aus

$$(X_1)\,(X_2)\,(A_1 X_1 X_2 \mathbin{\&} A_2 X_1 \overline{X}_2 \mathbin{\&} A_3 \overline{X}_1 X_2 \mathbin{\&} A_4 \overline{X}_1 \overline{X}_2)$$

zunächst durch Fortschaffung des Klammerzeichens (X_2)

$$(X_1)\,\bigl((A_1 \mathbin{\&} A_2)\, X_1 \mathbin{\&} (A_3 \mathbin{\&} A_4)\, \overline{X}_1\bigr)$$

und weiter

$$A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} A_3 \mathbin{\&} A_4.$$

Diese jetzt symbolisch formulierbare *Eliminationsregel* erlaubt uns, die Richtigkeit bzw. Falschheit der Formeln zu erkennen, in denen nur Aussagenvariable und die zugehörigen Klammerzeichen vorkommen. Bei der obenerwähnten Formel

$$(X)\,(EY)\,(XY \mathbin{\&} \overline{X \mathbin{\&} Y})$$

z. B. entwickeln wir zunächst $XY \mathbin{\&} \overline{X \mathbin{\&} Y}$ nach Y. Man erhält

$$(X)\,(EY)\,(XY \mathbin{\&} \overline{X}\overline{Y}).$$

Die Elimination der innersten Klammerzeichen liefert

$$(X)\,(X\overline{X}).$$

$X\overline{X}$ ist aber ein allgemeingültiger Ausdruck, $(X)\,(EY)\,(XY \mathbin{\&} \overline{X \mathbin{\&} Y})$ demnach eine richtige Formel.

Das Entscheidungsproblem für den engeren Prädikatenkalkül findet jetzt in beiden Fassungen seine symbolische Formulierung. Der Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit z. B. einer Formel

$$(Ex)\,(y)\,\bigl(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y)\bigr)$$

in einem Individuenbereich entspricht in dem erweiterten Kalkül die Richtigkeit der Formel

$$(F)\,(G)\,(E\,x)\,(y)\,\bigl(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y)\bigr)$$

bzw.

$$(EF)\,(EG)\,(E\,x)\,(y)\,\bigl(F(x, x) \vee \overline{F}(y, y) \vee G(x, y)\bigr)$$

für diesen Bereich.

Bei der Interpretation der logischen Formeln können wir immer die Formeln zugrunde legen, die keine freien Variablen irgendwelcher Art enthalten, da wir ja in jeder Formel mit freien Variablen diese durch Vorsetzen der betreffenden Allzeichen zum Verschwinden bringen können. Demnach kann von Allgemeingültigkeit oder Erfüllbarkeit von Formeln im bisherigen Sinne im Kalkül der zweiten Stufe keine Rede sein. Trotzdem ist durch die Symbolik allein der Sinn der Formeln noch nicht eindeutig festgelegt, da wir noch nicht wissen, welcher Individuenbereich zugrunde gelegt werden soll. Z. B. stellt

$$(EF)\,(E\,x)\,(E\,y)\,\bigl(F(x)\,\&\,\overline{F}(y)\bigr)$$

eine falsche Aussage dar, falls der Individuenbereich nur aus einem Element besteht, sonst aber immer eine richtige Aussage.

Unter den *identischen Formeln* des Kalküls wollen wir nun die Formeln verstehen, die bei beliebiger Wahl des Individuenbereiches richtige Aussagen darstellen. Wenn man will, kann man auch von allgemeingültigen Formeln sprechen, wobei aber die Allgemeingültigkeit sich nur auf die Individuenbereiche bezieht. Entsprechend kann man erfüllbar diejenigen Formeln nennen, bei denen überhaupt ein Individuenbereich existiert, für den die Formel eine richtige Aussage ergibt. Allgemeingültigkeit einer Formel und Nichterfüllbarkeit der mit dem Negationsstrich versehenen Formel sind auch hier gleichbedeutend.

Zu den identischen Formeln gehören alle identischen Formeln des engeren Prädikatenkalküls, aber auch andere. Stellt $\equiv(x, y)$ wie schon früher die Abkürzung für $(F)\bigl(F(x) \sim F(y)\bigr)$, also für das Prädikat der Identität, dar, so sind

$$(x) \equiv (x, x)\,; \quad (x)\,(y)\,\bigl(\equiv(x, y) \rightarrow \equiv(y, x)\bigr)$$

identische Formeln. Weitere Beispiele sind

$$(EF)\,(E\,x)\,F(x)\,; \quad (F)\,(EG)\,(x)\,(y)\,\bigl(F(x, y) \vee \overline{G}(x, y)\bigr).$$

Zu den erfüllbaren Formeln gehören alle, die aus erfüllbaren Formeln des engeren Prädikatenkalküls durch Vorsetzen der betreffenden Seinszeichen für Prädikate hervorgehen, ohne daß damit die Gesamtheit der erfüllbaren Formeln erschöpft ist. Z. B. ist auch

$$(F)\,\bigl((E\,x)\,F(x) \rightarrow (x)\,F(x)\bigr)$$

eine erfüllbare Formel.

Die nächstliegende Frage wäre, ob sich, ähnlich wie im Prädikatenkalkül der ersten Stufe auch hier ein System von logischen Grundformeln angeben läßt, aus dem sich alle übrigen identischen Formeln durch Fortschreiten nach gewissen Regeln gewinnen lassen. Es sei hier gleich bemerkt, daß *ein vollständiges Axiomensystem für die identischen Formeln des Prädikatenkalküls der zweiten Stufe nicht existiert.* Vielmehr lassen sich, wie K. Gödel gezeigt hat, für jedes System von Grundformeln und Ableitungsregeln identische Formeln angeben, die nicht abgeleitet werden können[1]. Immerhin dürfte für die meisten Zwecke das folgende System ausreichend sein.

Wir nehmen zunächst sämtliche Grundformeln und Ableitungsregeln des engeren Prädikatenkalküls, wobei bei den Ableitungsregeln daran zu denken ist, daß der Begriff der Formel jetzt eine Erweiterung erfahren hat. Zur Grundformel e) dürfen wir beliebig viele Grundformeln der Gestalt

$$(F)\,\mathfrak{A}(F) \rightarrow \mathfrak{A}(G)$$

hinzufügen. Hierbei ist $\mathfrak{A}(F)$ eine Formel, die die freie Prädikatenvariable F, aber nicht G enthält, $\mathfrak{A}(G)$ die Formel, die aus $\mathfrak{A}(F)$ entsteht, indem in $\mathfrak{A}(F)$ für F nach Regel $\alpha 3$) G eingesetzt wird. Ebenso dürfen wir eine beliebige Anzahl von Formeln der Gestalt

$$\mathfrak{A}(G) \rightarrow (EF)\,\mathfrak{A}(F)$$

als Grundformeln hinzufügen. Dazu kommen noch Grundformeln, die eng mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre zusammenhängen. Die erste dieser Formeln ist

g) $(EF)\,\{(x)\,[(Ey)\,G(x,y) \rightarrow (Ey)\,(F(x,y)\ \&\ G(x,y)]\ \&\ (x)\,(y)\,(z)\,[(F(x,y)$
$\&\ F(x,z) \rightarrow \equiv(y,z)]\}.$

Der Sinn dieser Formel ist der folgende. Durch ein Prädikat $G(x,y)$ werden denjenigen x, für die überhaupt ein y mit der Eigenschaft $G(x,y)$ existiert, gewisse Werte von y zugeordnet. Unsere Grundformel sagt aus, daß man für jedes betreffende x einen der zugeordneten Werte herausgreifen kann, so daß die Zuordnung eindeutig wird. F stellt diese eindeutige Zuordnung dar.

Es sei ferner $\mathfrak{A}(x, F(.,..))$ eine Formel, die die freie Gegenstandsvariable x und die freie Prädikatenvariable F mit n Leerstellen enthält. $\mathfrak{A}(x, G(x, \ldots))$ möge die Formel bedeuten, die aus $\mathfrak{A}(x, F(\ldots))$ dadurch entsteht, daß in ihr gemäß Regel $\alpha 3$) jeder Teilausdruck $F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ durch $G(x, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ ersetzt wird, wobei G eine Variable mit $n+1$ Leerstellen bezeichnet. Dann kann man auch

h) $$(x)\,(EF)\,\mathfrak{A}(x, F(\ldots)) \rightarrow (EG)\,(x)\,\mathfrak{A}(x, G(x, \ldots))$$

[1] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Mh. Math. Physik Bd. 38 (1931).

als Grundformel nehmen. Die Richtigkeit dieser Formel können wir folgendermaßen einsehen. Wenn es zu jedem x ein F gibt, so daß $\mathfrak{A}(x, F(\ldots))$ der Fall ist, so können wir für jedes x eines dieser F herausgreifen, das wir F^x nennen wollen. Wenn wir nun G so definieren, daß

$$(x)\,(y_1)\,(y_2)\ldots(y_n)\,\bigl(G(x, y_1, \ldots, y_n) \sim F^x(y_1, \ldots, y_n)\bigr)$$

gilt, so haben wir ein G der durch die Grundformel h) postulierten Art gefunden.

Die Ableitungsregeln bleiben dieselben wie im engeren Prädikatenkalkül, nur sind die Regeln $\gamma 1$), $\gamma 2$), δ) jetzt so zu erweitern, daß sie auch für Prädikatenvariable gelten.

Aus diesem System ergibt sich, wie hier nicht des näheren ausgeführt werden soll, daß Ergebnisse, die wir früher für den engeren Prädikatenkalkül abgeleitet hatten, sich sinngemäß übertragen lassen. Z. B. bleiben der Satz über die pränexe Normalform, das Dualitätsprinzip, der Satz über die Bildung des Gegenteils einer Formel auch jetzt gültig. Ebenso läßt sich jeder Formel des engeren Prädikatenkalküls, die Individuenvariable enthält, eine Klasse von Formeln zuordnen, in der Prädikatenvariable auftreten. So entspricht der Tatsache, daß

$$(x)\,\bigl(F(x) \to G(x)\bigr) \to \bigl((E\,x)\,F(x) \to (E\,x)\,G(x)\bigr)$$

[Formel (34)] eine ableitbare Formel war, jetzt die Ableitbarkeit jeder Formel der Gestalt

$$(F)\,\bigl(\mathfrak{A}(F) \to \mathfrak{B}(F)\bigr) \to \bigl((EF)\,\mathfrak{A}(F) \to (EF)\,\mathfrak{B}(F)\bigr).$$

Bei der Ableitung braucht man nur den Beweis für die Formel (34) in entsprechender Abänderung zu wiederholen. Dasselbe gilt auch für alle anderen Formeln des engeren Prädikatenkalküls.

Unter dem *Entscheidungsproblem* der zweiten Stufe verstehen wir das Problem, bei einer vorgelegten Formel des Kalküls zu entscheiden, ob es sich um eine identische Formel handelt oder nicht. Bei der schärferen Fassung würde es sich darum handeln zu entscheiden, für welche Individuenbereiche die Formel eine richtige Aussage darstellt und für welche nicht. Da das Entscheidungsproblem der zweiten Stufe das der ersten Stufe in sich schließt, so ist an eine allgemeine Lösung erst recht nicht zu denken.

Als das einzige wichtige Einzelergebnis haben wir (abgesehen von den Fällen, die schon dem Bereich des engeren Prädikatenkalküls angehören und dort gelöst wurden), daß die Entscheidung für den Bereich der Formeln, die nur *einstellige* Prädikate enthalten, vollständig geglückt ist. Der Beweis wurde in den schon in § 12 des vorigen Kapitels erwähnten Arbeiten von Löwenheim, Skolem und Behmann geführt. Dabei erfolgte die Lösung des Entscheidungsproblems in dem verschärften Sinne.

Für die Darstellung des Entscheidungsverfahrens im einzelnen verweisen wir auf die besonders übersichtlich aufgebaute Behmannsche Arbeit. Es soll aber die benutzte Methode kurz charakterisiert werden. Die Lösung des Entscheidungsproblems im Bereich der einstelligen Prädikate beruht auf der Lösung des *Eliminationsproblems* für diesen Bereich. Unter dem Eliminationsproblem haben wir allgemein folgendes zu verstehen. Es sei eine Formel $\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$ gegeben, die die freien Prädikatvariablen $F, G_1, \ldots, G_m$, außerdem die freien Individuenvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ außerdem eventuell gebundene Individuenvariable, aber keine gebundenen Prädikatvariablen enthält. Wir fragen dann, ob sich eine Formel $\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$, die ebenfalls keine gebundenen Prädikatvariablen enthält, angeben läßt, so daß

$$(F)\,\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

oder was dasselbe heißt

$$(EF)\,\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \sim \overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

eine identische Formel der zweiten Stufe ist. Ist das der Fall, so kann in jeder Formel der Bestandteil

$$(F)\,\mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

bzw.

$$(EF)\,\overline{\mathfrak{A}}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

durch $\mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$ ersetzt werden. Wir können also die Prädikatenvariable F in einer derartigen Formel eliminieren.

Die Beziehung zum Entscheidungsproblem ist einleuchtend. Habe ich eine Formel des Prädikatenkalküls, für die die Entscheidung getroffen werden soll, so bringe ich zunächst die freien Prädikatvariablen zum Verschwinden, indem ich die zugehörigen Allzeichen an den Beginn der Formel setze, und kann dann, die Lösung des Eliminationsproblems vorausgesetzt, die Prädikatvariablen, von innen anfangend, eine nach der anderen eliminieren, so daß ich als letztes Resultat den Wert „richtig“ oder „falsch“ oder auch eine Anzahlbedingung erhalte.

Die Reduzierung der Formeln durch die Elimination soll an dem Beispiel der Formel

$$(F)\left\{(E\,x)\,F(x) \vee (EG)\left[(x)\left(G(x) \sim \overline{F}(x)\right) \,\&\, (x)\,G(x)\right]\right\}$$

näher erläutert werden. Wir bemerken zunächst, daß die Formel

$$(EF)\,(x)\left(A(x) \vee F(x) \,\&\, B(x) \vee \overline{F}(x)\right) \sim (x)\left(A(x) \vee B(x)\right),$$

die ein grundlegendes Eliminationsresultat angibt, eine identische Formel ist, da ja die linke Seite der Äquivalenz sich umformen läßt in

$$(EF)\,(x)\left\{\left(\overline{F}(x) \rightarrow A(x)\right) \,\&\, \left(F(x) \rightarrow B(x)\right)\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Formel sind wir imstande, in unserer Ausgangsformel die Prädikatenvariable G zu eliminieren. Wir können nämlich den den Wirkungsbereich von (EG) ausmachenden Formelbestandteil

$$(x)\big(G(x) \sim \overline{F}(x)\big) \,\&\, (x)\, G(x)$$

[Formel (29) von I, § 2, Formel (30) von III, § 6] durch

$$(x)\big(G(x) \vee F(x) \,\&\, \overline{G}(x) \vee \overline{F}(x) \,\&\, G(x)\big)$$

oder auch

$$(x)\big(G(x) \,\&\, \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)\big)$$

und weiter durch

$$(x)\,\big[\big(F(x) \,\&\, \overline{F}(x)\big) \vee G(x) \,\&\, \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)\big]$$

ersetzen. Es gilt nun, gemäß der obigen grundlegenden Eliminationsformel

$$(EG)\,(x)\,\big[\big(F(x) \,\&\, \overline{F}(x)\big) \vee G(x) \,\&\, \overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)\big] \sim (x)\,\big[\big(F(x) \,\&\, \overline{F}(x)\big) \vee \overline{F}(x)\big].$$

$$(x)\,\big[\big(F(x) \,\&\, \overline{F}(x)\big) \vee \overline{F}(x)\big]$$

läßt sich durch $(x)\,\overline{F}(x)$ ersetzen. Unsere Ausgangsformel

$$(F)\,\big\{(Ex)\,F(x) \vee (EG)\,\big[(x)\big(G(x) \sim \overline{F}(x)\big) \,\&\, (x)\,G(x)\big]\big\}$$

ist also, nach Elimination der Prädikatvariablen G, in

$$(F)\,\{(Ex)\,F(x) \vee (x)\,\overline{F}(x)\}$$

übergegangen. Diese letzte Formel, bei der ja der Wirkungsbereich von (F) die Form $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ hat, läßt z. B. unmittelbar erkennen, daß unsere Ausgangsformel eine identische Formel ist.

Wie schon oben bemerkt, läßt sich beim ausschließlichen Vorkommen von einstelligen Prädikaten das Eliminationsproblem vollständig lösen. Es liegt nun nahe, da das Eliminationsverfahren die einzige Methode von allgemeinerer Tragweite bei der Behandlung des Entscheidungsproblems darstellt, den Versuch zu machen, auch bei Zulassung von zwei- und mehrstelligen Prädikaten ein Eliminationsverfahren zu gewinnen. Für Formeln von spezieller Struktur gelingt es in der Tat, die Elimination durchzuführen. Zahlreiche Einzelergebnisse dieser Art findet man im 3. Bande von ERNST SCHRÖDERs „Vorlesungen über die Algebra der Logik". Leider zeigt es sich aber, daß man Formeln angeben kann, bei denen ein Eliminationsergebnis in dem oben definierten Sinne nicht mehr vorhanden ist, so daß das Eliminationsproblem überhaupt im allgemeinen eine weitere Fassung erhalten muß[1]. Die Beziehungen zum Entscheidungsproblem werden dann verwickelter.

---

[1] Vgl. W. ACKERMANN: Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 110 (1934). — Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. Bd. 111 (1935).

§ 2. Einführung von Prädikatenprädikaten; logische Behandlung des Anzahlbegriffs.

Für die inhaltliche Einstellung, welche wir bisher dem logischen Prädikatenkalkül zugrunde legten, war wesentlich, daß wir die Aussagen und Prädikate scharf von den Gegenständen sonderten, welche als Argumentwerte der Prädikate in Betracht kommen. Nun hindert uns aber nichts, die *Prädikate und Aussagen selbst als Gegenstände zu betrachten, die als Argumente von Prädikaten dienen.*

Betrachten wir z. B. einen logischen Ausdruck von der Form $(x)(A \rightarrow F(x))$. Dieser kann als ein Prädikat $P(A, F)$ aufgefaßt werden, dessen erste Leerstelle mit einer Aussage A und dessen zweite Leerstelle mit einem einstelligen Prädikat F besetzt ist.

Eine falsche Aussage A steht mit jedem F in der Beziehung $P(A, F)$; eine richtige Aussage A nur mit solchen F, für die $(x) F(x)$ gilt.

Weitere Beispiele liefern die Eigenschaften der *Reflexivität*, der *Symmetrie* und *Transitivität* von zweistelligen Prädikaten. Diesen entsprechen 3 Prädikate: Ref (R), Sym (R) und Tr (R), deren Argument R ein Prädikat mit zwei Leerstellen ist. Symbolisch drücken sich diese drei Eigenschaften folgendermaßen aus:

Ref (R): $(x) R(x, x)$,

Sym (R): $(x)(y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

Tr (R): $(x)(y)(z)[(R(x, y) \,\&\, R(y, z) \rightarrow R(x, z))]$.

Alle drei Eigenschaften sind bei dem Prädikat $\equiv (x, y)$ (x ist identisch mit y) erfüllt, bei dem Prädikat $< (x, y)$ hingegen nur die der Transitivität. Es stellen also die Formeln Ref $(\equiv)$, Sym $(\equiv)$, Tr $(\equiv)$, Tr $(<)$ richtige Aussagen dar, während Ref $(<)$ und Sym $(<)$ falsche Aussagen sind.

Ein zweistelliges Prädikatenprädikat ist die „*Äquivalenz*", Aeq (F, G), welche durch den Ausdruck $(x)(F(x) \sim G(x))$ definiert wird, und die darin besteht, daß die Prädikate F und G für dieselben Argumentwerte zutreffen bzw. nicht zutreffen. Weitere zweistellige Prädikatenprädikate sind *Unverträglichkeit*, Unv (F, G), und *Implikation*, Imp (F, G), die symbolisch definiert sind durch:

$$(x)(\overline{F}(x) \vee \overline{G}(x)),$$
$$(x)(F(x) \rightarrow G(x)).$$

Eine Erweiterung der Symbolik tritt allerdings durch diese Auffassung noch nicht ein, da die angegebenen Prädikatenprädikate sich mit den Mitteln des bisherigen Kalküls darstellen lassen und Formeln wie Ref (R), Sym (R) usw. nur als Abkürzungen aufzufassen sind. Die Erweiterung tritt erst dann auf, wenn Variable für Prädikatenprädikate eingeführt werden, von denen die angegebenen individuellen Prädikate besondere Werte darstellen. Wir werden im folgenden derartige Variable zunächst nur gelegentlich gebrauchen, da der systematische Aufbau des abermals erweiterten Kalküls erst später kommen soll. Wir wollen uns aber schon in diesem und im folgenden Kapitel davon überzeugen, welche Vorteile die Einführung der Prädikatenprädikate mit sich bringt.

Die erste wichtige Anwendung ergibt sich bei der *logischen Untersuchung des Anzahlbegriffs*. Eine Anzahl ist kein Gegenstand im eigentlichen Sinne, sondern eine Eigenschaft. Die Individuen, denen eine Anzahl als Eigenschaft zukommt, können die gezählten Dinge nicht selbst sein, da jedes von den Dingen nur eines ist, so daß eine von Eins verschiedene Anzahl danach gar nicht vorkommen könnte. Dagegen läßt sich die Zahl als eine Eigenschaft desjenigen Begriffes auffassen, unter welchem die gewählten Individuen vereinigt werden. So kann z. B. die Tatsache, daß die Anzahl der Erdteile fünf ist, zwar nicht so ausgedrückt werden, daß jedem Erdteil die Anzahl fünf zukommt; wohl aber ist es eine Eigenschaft des Prädikates „Erdteil sein", daß es auf genau fünf Individuen zutrifft.

Die Zahlen erscheinen hiernach als Eigenschaften von Prädikaten, und für unseren Kalkül stellt sich *eine bestimmte Zahl als individuelles Prädikatenprädikat dar*. Die Wichtigkeit dieser Darstellung der Zahlen beruht darauf, daß die Prädikatenprädikate, welche die Zahlen bilden, sich vollständig mit Hilfe der logischen Symbole ausdrücken lassen. Dadurch wird es möglich, die Zahlenlehre in die Logik einzubeziehen. Für die Zahlen 0, 1, 2, d. h. für die Prädikatenprädikate $0(F)$, $1(F)$, $2(F)$ sollen hier die Ausdrücke angegeben werden:

$$0(F):\ \overline{(Ex)}\,F(x).$$

(„Es gibt kein x, für das F zutrifft.")

$$1(F):\ (Ex)\,[F(x)\,\&\,(y)\,(F(y)\rightarrow\,\equiv(x,y))].$$

(„Es gibt ein x, für das $F(x)$ besteht, und jedes y, für das $F(y)$ besteht, ist mit diesem x identisch.")

$$2(F):\ (Ex)\,(Ey)\,\{\overline{\equiv}\,(x,y)\,\&\,F(x)\,\&\,F(y)\,\&\,(z)\,[F(z)\rightarrow\,\equiv(x,z)\vee\equiv(y,z)]\}.$$

(„Es gibt zwei verschiedene x und y, auf die F zutrifft, und jedes z, für das $F(z)$ besteht, ist mit x oder mit y identisch.")

Die Gleichzahligkeit zweier Prädikate F und G kann man als ein individuelles Prädikatenprädikat $\mathrm{Glz}(F,G)$ auffassen. Da die Gleichzahligkeit von F und G nichts anderes bedeutet, als daß man die Gegenstände, auf die F, und die Gegenstände, auf die G zutrifft, umkehrbar eindeutig aufeinander beziehen kann, so läßt sich $\mathrm{Glz}(F,G)$ durch den folgenden Ausdruck definieren:

$$\begin{aligned}(ER)\,\{(x)\,[F(x)\rightarrow(Ey)\,(R(x,y)\,\&\,G(y))]\,\&\,(y)\,[G(y)\rightarrow\\ \rightarrow(Ex)\,(R(x,y)\,\&\,F(x))]\,\&\,(x)\,(y)\,(z)\,[(R(x,y)\,\&\,R(x,z)\rightarrow\\ \rightarrow\,\equiv(y,z))\,\&\,(R(x,z)\,\&\,R(y,z)\rightarrow\,\equiv(x,y))]\}.\end{aligned}$$

Die Addition der Zahlen läßt sich auf die Disjunktion von Prädikaten zurückführen. Sind nämlich F und G unverträgliche Prädikate, und kommt dem Prädikate F die Zahl m und dem Prädikate G die Zahl n zu, so entspricht dem Prädikate $F \vee G$ die Zahl $m+n$.

Auf Grund dieser Auffassung der Addition werden Zahlengleichungen wie

$$1+1=2, \quad 2+3=5$$

zu rein logischen, beweisbaren Sätzen. Z. B. stellt sich die Gleichung $1+1=2$ dar durch die logische Formel:

$$(F)(G)\big([\mathrm{Unv}(F,G) \mathbin{\&} 1(F) \mathbin{\&} 1(G)] \rightarrow 2(F \vee G)\big),$$

deren identischer Charakter ersichtlich ist, wenn man für das Prädikatenprädikat Unv sowie für die Prädikatenprädikate 1, 2 die definierenden Ausdrücke einsetzt.

Auch der allgemeine Zahlbegriff läßt sich mit den logischen Hilfsmitteln aufstellen. Soll ein Prädikatenprädikat $\Phi(F)$ eine Zahl darstellen, so muß Φ den folgenden Bedingungen genügen:

Bei zwei gleichzahligen Prädikaten F und G muß Φ für beide zutreffen oder für beide nicht zutreffen. Sind ferner zwei Prädikate F und G nicht gleichzahlig, so darf Φ höchstens für eins der beiden Prädikate F und G zutreffen.

Formal stellt sich diese Bedingung für Φ folgendermaßen dar:

$$(F)(G)\{(\Phi(F) \mathbin{\&} \Phi(G) \rightarrow \mathrm{Glz}(F,G)) \mathbin{\&} [\Phi(F) \mathbin{\&} \mathrm{Glz}(F,G) \rightarrow \Phi(G)]\}.$$

Der ganze Ausdruck stellt eine Eigenschaft von Φ dar. Bezeichnen wir diese zur Abkürzung mit $\mathfrak{Z}(\Phi)$, so können wir also sagen:

Eine Zahl ist ein Prädikatenprädikat Φ, das die Eigenschaft $\mathfrak{Z}(\Phi)$ besitzt.

Eine Schwierigkeit tritt allerdings auf, wenn wir nach der Bedingung fragen, unter der zwei Prädikatenprädikate Φ und Ψ mit den Eigenschaften $\mathfrak{Z}(\Phi)$ und $\mathfrak{Z}(\Psi)$ dieselbe Zahl definieren. Diese Bedingung besteht darin, daß $\Phi(P)$ und $\Psi(P)$ für dieselben Prädikate P wahr und für dieselben Prädikate falsch sind, daß also die Beziehung besteht:

$$(P)\big(\Phi(P) \sim \Psi(P)\big).$$

Nehmen wir nun an, der zugrunde gelegte Individuenbereich bestände aus einer endlichen Anzahl von Gegenständen. Es tritt dann der Übelstand auf, daß alle Zahlen gleichgesetzt werden, welche größer sind als die Anzahl der Gegenstände im Individuenbereich. Denn ist diese Anzahl etwa kleiner als 10^{60}, und nehmen wir für Φ und Ψ die Prädikate, die die Zahlen 10^{60} und $10^{60}+1$ definieren, so trifft sowohl Ψ wie Φ auf kein Prädikat P zu. Die Beziehung

$$(P)\big(\Phi(P) \sim \Psi(P)\big)$$

ist also für Φ und Ψ erfüllt, d. h. Φ und Ψ würden dieselbe Zahl darstellen.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, muß man den Individuenbereich als unendlich voraussetzen. Auf einen logischen Nachweis für die Existenz einer unendlichen Gesamtheit wird dabei freilich verzichtet.

Von besonderem Interesse ist auch, wie unter Zugrundelegung der logischen Einführung des Anzahlbegriffs und allerdings wesentlicher Benutzung des genannten Axioms der Unendlichkeit die zahlentheoretischen Axiome zu logischen, beweisbaren Sätzen werden. Wir können hier aber nicht näher darauf eingehen[1]. Die gemachten Bemerkungen sollten uns nur die Anwendungsfähigkeit des erweiterten Kalküls ins rechte Licht setzen.

§ 3. Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre im erweiterten Kalkül.

Daß zwischen der Mengenlehre und der mathematischen Logik ein enger Zusammenhang besteht, ergab sich schon früher im zweiten Kapitel. Es konnten dieselben logischen Formeln nach Belieben als Beziehungen zwischen Klassen oder zwischen einstelligen Prädikaten aufgefaßt werden, ohne daß es sich bei den beiden Deutungen um verschiedene logische Zusammenhänge handelte. Auch jetzt wird es möglich sein, die in unserem Kalkül ausdrückbaren logischen Zusammenhänge als mengentheoretische Beziehungen aufzufassen.

Um diesen Zusammenhang näher zu erkennen, wollen wir zunächst die Beziehung der Mengen zu den Prädikaten im engeren Sinne, d. h. den Prädikaten mit einer Leerstelle, genauer ins Auge fassen. — Eine Menge wird entweder durch Aufzählung ihrer Elemente gegeben, oder sie wird als das System derjenigen Dinge erklärt, für die ein bestimmtes Prädikat gültig ist. Die erste Art der Bestimmung einer Menge, welche nur bei endlichen Mengen möglich ist, brauchen wir nicht eigens in Betracht zu ziehen. Es läßt sich nämlich jede Menge, die man durch Aufzählung ihrer Elemente erhält, auch mit Hilfe eines Prädikats definieren. Z. B. kann eine Menge, die aus drei Individuen a, b, c, besteht, als die Menge derjenigen Dinge x erklärt werden, für welche das Prädikat

$$\equiv(x, a) \vee \equiv(x, b) \vee \equiv(x, c)$$

zutrifft.

Wir denken uns also jede Menge durch ein Prädikat definiert. Wir müssen dabei beachten, daß zwar jedes Prädikat die zu ihm gehörige Menge, d. h. die Menge der Gegenstände, welchen es zukommt, in eindeutiger Weise bestimmt, daß aber zu einer bestimmten Menge nicht nur *ein* definierendes Prädikat gehört, sondern daß vielmehr eine Menge auf verschiedene Arten durch Prädikate definiert werden kann. So ist die Menge der gleichseitigen Dreiecke dieselbe wie die Menge der gleichwinkligen Dreiecke oder, als außermathematisches Beispiel: die Menge

[1] Für eine ausführliche und allgemeinverständliche Behandlung dieser Fragen vgl. man B. Russell: Einführung in die mathematische Philosophie. München 1922.

der jetzt lebenden Wiederkäuer stimmt überein mit der Menge der jetzt lebenden Zweihufer.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Prädikate P und Q dieselbe Menge bestimmen, besteht darin, daß die beiden Prädikate äquivalent sind, daß sie also die Beziehung $\mathrm{Aeq}(P, Q)$, d. h. $(x)\big(P(x) \sim Q(x)\big)$ erfüllen. Im Sinne der Mengenlehre ist also das Prädikatenprädikat $\mathrm{Aeq}(P, Q)$ nichts anderes als die Identität von P und Q.

Ebenso wie man die Prädikate als Mengen auffaßt, kann man ein einstelliges Prädikatenprädikat $F(P)$ als Eigenschaft von Mengen deuten. Damit diese Deutung möglich ist, ist es notwendig, daß das Zutreffen oder Nichtzutreffen von F für ein Prädikat P eindeutig durch die zu P gehörige Menge bestimmt ist, und nach dem oben Bemerkten besteht die hierfür entscheidende Bedingung darin, daß die Aussagen, welche äquivalenten Prädikaten durch das Prädikat F zugeordnet werden, gleichzeitig richtig oder gleichzeitig falsch sind. Es muß also für das Prädikat F die symbolische Beziehung

$$(P)\,(Q)\,\{\mathrm{Aeq}\,(P, Q) \rightarrow \big(F(P) \rightarrow F(Q)\big)\}$$

bestehen, die wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{M}(F)$ bezeichnen.

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt für Prädikatenprädikate, die Zahlen darstellen. Auf dieser Eigenschaft der Zahlen beruht es, daß sie auch als Prädikate von Mengen betrachtet werden können. Die Darstellung der Zahlen als Eigenschaften von Mengen hat gegenüber ihrer Darstellung als Eigenschaften von Prädikaten den Vorzug, daß die Invarianz der Anzahl bei Ersetzung eines Prädikates durch ein äquivalentes hier selbstverständlich ist.

Aus der Beziehung zwischen Mengen und Prädikaten ergibt sich weiter ein Zusammenhang zwischen den Mengen von Mengen und Prädikatenprädikaten. Jede Menge von Mengen ist definiert durch eine Eigenschaft, welche den ihr angehörigen Mengen zukommt.

Nehmen wir nun zwei Mengenprädikate, d. h. zwei Prädikatenprädikate $F(P)$ und $G(P)$, die der Bedingung $\mathfrak{M}(F)$ und $\mathfrak{M}(G)$ genügen. Diesen beiden Mengenprädikaten F und G entspricht dieselbe Menge von Mengen, wenn F und G für dieselben Mengen zutreffen bzw. nicht zutreffen. Die Beziehung $(P)\,\big(F(P) \sim G(P)\big)$ bedeutet also, daß die F und G entsprechenden Mengen von Mengen identisch sind.

Die mengentheoretische Interpretation des erweiterten Prädikatenkalküls läßt sich auch auf die Prädikate mit mehreren Leerstellen ausdehnen. Jedes Prädikat $R(x, y)$ wählt aus der Menge aller möglichen Paare (x, y) eine bestimmte Menge von geordneten Paaren heraus, nämlich die Menge derjenigen Paare (x, y), für die $R(x, y)$ besteht. Die zugehörigen Mengen sind bei zwei Prädikaten R_1 und R_2 identisch, wenn die Beziehung $\mathrm{Aeq}\ (R_1, R_2)$, d. h. $(x)\,(y)\,\big(R_1(x, y) \sim R_2(x, y)\big)$

besteht. Soll ein Prädikatenprädikat $F(R)$ als Prädikat der zugehörigen Mengen gedeutet werden können, so muß es der Beziehung

$$(R_1)\,(R_2)\{\mathrm{Aeq}(R_1, R_2) \rightarrow (F(R_1) \rightarrow F(R_2))\}$$

Genüge leisten. Das Entsprechende gilt für Prädikate mit drei und mehr Leerstellen.

Wir sehen daraus, daß der erweiterte Kalkül ebensogut eine mengentheoretische wie eine rein logische Interpretation zuläßt. Die Zahlenlehre läßt sich ganz im Sinne der mengentheoretischen Auffassung behandeln. Wir sahen schon, daß man die die Zahlen definierenden Prädikatenprädikate ebensogut als Mengenprädikate auffassen kann. Ferner wurde früher gesagt, daß zwei Prädikatenprädikaten $\Phi(P)$ und $\Psi(P)$, die Zahlen darstellen, dann dieselbe Zahl entspricht, wenn zwischen Φ und Ψ die Beziehung

$$(P)\,(\Phi(P) \sim \Psi(P))$$

besteht.

Daraus ergibt sich aber, daß man die Zahlen auch als Mengen von Mengen auffassen kann. Bei der logischen Erklärung war eine Zahl ein Prädikatenprädikat, das für alle gleichzahligen Prädikate und nur für solche zutrifft. Der Gleichzahligkeit von Prädikaten entspricht die Äquivalenz von Mengen (Äquivalenz hier in dem üblichen mengentheoretischen Sinne verstanden). Von dem logischen Anzahlbegriff gelangt man so zu einem mengentheoretischen; nach diesem ist eine Zahl nichts anderes als die *Menge aller* mit einer bestimmten Menge *äquivalenten Mengen.*

Wir wollen nun sehen, wie die üblichen Bildungen der Mengenlehre im Kalkül ihren symbolischen Ausdruck finden.

Sind $P_1(x)$ und $P_2(x)$ definierende Prädikate zweier Mengen, so wird deren *Vereinigungsmenge* durch das Prädikat $P_1(x) \vee P_2(x)$ gegeben. $P_1(x) \,\&\, P_2(x)$ stellt den *Durchschnitt* von P_1 und P_2 dar. Die Menge P_1 ist in P_2 enthalten oder P_1 ist eine *Teilmenge* von P_2, wenn $(x)\,(P_1(x) \rightarrow P_2(x))$ eine richtige Behauptung ist. Zwei Mengen P_1 und P_2 sind *äquivalent,* wenn die Elemente beider Mengen umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen werden können. Der symbolische Ausdruck dafür ist derselbe wie für die Gleichzahligkeit von Prädikaten.

Der Ausdruck

$$(x)\,(y)\,(z)\,([R(x, y) \,\&\, R(x, z) \rightarrow \equiv(y, z)] \,\&\, [R(x, z) \,\&\, R(y, z) \rightarrow \equiv(x, y)])$$

oder abgekürzt $\mathrm{Eind}(R)$ bedeutet, daß die Beziehung $R(x, y)$, falls sie besteht, beiderseits eindeutig ist. Der symbolische Ausdruck für die (mengentheoretische) Äquivalenz von P_1 und P_2 ist dann:

$$(ER)\{(x)\,[P_1(x) \rightarrow (Ey)\,(R(x, y) \,\&\, P_2(y))] \,\&\, (y)\,[P_2(y) \rightarrow (Ex)\,(R(x, y) \\ \&\, P_1(x))] \,\&\, \mathrm{Eind}(R)\}.$$

Die *Menge aller Teilmengen* einer gegebenen durch D definierten Menge wird durch ein gewisses Prädikatenprädikat $\mathrm{Te}(P)$ [oder besser $\mathrm{Te}(P, D)$] dargestellt. Jedes Prädikat P, für das $\mathrm{Te}(P)$ zutrifft, muß die Eigenschaft haben, daß alle ihre Elemente auch Elemente von D sind. Umgekehrt muß auch für jedes Prädikat P mit dieser Eigenschaft $\mathrm{Te}(P)$ zutreffen. Demnach ist $\mathrm{Te}(P)$ definiert durch den Ausdruck:

$$(x)\big(P(x) \rightarrow D(x)\big).$$

Es möge ferner $F(P)$ irgendeine Menge von Mengen darstellen. Die Elemente x der *Vereinigungsmenge dieser Menge von Mengen* lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie Element wenigstens einer zu P gehörigen Menge sind, für die $F(P)$ besteht. Demnach erhält man als definierenden Ausdruck für die Vereinigungsmenge

$$(EP)\big(F(P) \,\&\, P(x)\big).$$

Die Elemente des *Durchschnitts der Menge von Mengen* sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Element jeder Menge P sind, für die $F(P)$ gültig ist. Demnach stellt sich der Durchschnitt dar durch:

$$(P)\big(F(P) \rightarrow P(x)\big).$$

Eine Menge P heißt *geordnet*, wenn ein Prädikat R von zwei Variablen für die Elemente von P definiert ist, das nicht reflexiv, wohl aber transitiv ist, und das für beliebige voneinander verschiedene x und y entweder auf das Paar (x, y) oder auf das Paar (y, x) zutrifft. „Die Menge P ist durch das Prädikat R geordnet", stellt sich danach symbolisch dar durch:

$$(x)\,(y)\,(z)\big\{[P(x) \,\&\, P(y) \,\&\, P(z)] \rightarrow [\overline{R}(x, x) \,\&\, \big(\equiv(x, y) \vee R(x, y) \vee R(y, x)\big) \,\&\, \big(R(x, y) \,\&\, R(y, z) \rightarrow R(x, z)\big)]\big\}.$$

Wir bezeichnen diese Formel zur Abkürzung mit $\mathfrak{O}(P, R)$.

Die Menge P heißt durch das Prädikat R *wohlgeordnet*, wenn

$$\mathfrak{O}(P,R) \,\&\, (Q)\big\{(x)\big(Q(x) \rightarrow P(x)\big) \rightarrow (Ey)[Q(y) \,\&\, (z)\big(Q(z) \rightarrow \equiv(y,z) \vee R(y,z)\big)]\big\}$$

eine richtige Aussage ist.

In entsprechender Weise finden alle übrigen in der Mengenlehre gebräuchlichen Begriffsbildungen im Kalkül ihre symbolische Darstellung.

§ 4. Die logischen Paradoxien.

In den vorhergehenden Kapiteln hatten wir gesehen, welche neuen Ausdrucksmöglichkeiten sich bei der Einführung von Prädikatenprädikaten ergeben. Jede Formel, die eine freie Prädikatenvariable F enthält, kann als ein individuelles Prädikatenprädikat aufgefaßt werden. Weiter können dann Variable für Prädikatenprädikate eingeführt werden. Eine Formel, die eine freie Variable der letzten Art enthält, stellt ein individuelles Prädikat dar, dessen Argumente Prädikatenprädikate sind, usw. Dieser Aufbau kann beliebig weit fortgesetzt werden.

Demnach können außer den Gegenständen des Individuenbereiches auch Prädikate, Prädikatenprädikate usw. als Gegenstände im weiteren Sinne dienen. Es fragt sich nun, ob man ohne weiteres diese Gegenstände im weiteren Sinne zu einem einheitlichen Individuenbereich vereinigen kann, so daß man außer von Individuenprädikaten, Prädikaten derartiger Prädikate, usw. auch von Prädikaten schlechthin sprechen kann, und so daß jedes Prädikat für den neuen Individuenbereich wieder selbst dem Individuenbereich angehört. In diesem Falle müßte ein Prädikat auch sich selbst als Argument enthalten können. Entsprechend allgemein wäre der Begriff des Prädikatenprädikats zu fassen usw.

Die Art, wie wir, von dem engeren Prädikatenkalkül ausgehend, zu höheren Prädikaten aufstiegen, bietet uns für ein derartiges Vorgehen keine Handhabe. Denn bei den Überlegungen der vorigen Kapitel hatten wir immer mit Individuenprädikaten, Prädikaten von derartigen Individuenprädikaten usw. zu tun. Wohl aber würde ein derartiger allgemeiner Prädikatenbegriff dem unpräzisen Sprachgebrauch entsprechen[1]. Es zeigt sich nun, daß ein derartiges logisches System nicht einmal dem Postulate der Widerspruchsfreiheit genügt. Den auftretenden Widersprüchen, den sog. *Paradoxien*, auf welche man übrigens auch unabhängig vom Gebrauch der logischen Symbolik geführt wird, kann man entsprechend der doppelten Deutung des Prädikatenkalküls eine mehr eigentlich logische oder aber eine mengentheoretische Deutung geben. Von diesen Widersprüchen sollen hier einige dargelegt werden.

Es sei $P(F)$ ein Prädikatenprädikat. Da P selbst ein Prädikat ist, so stellt der Ausdruck $P(P)$ eine Aussage dar, welche richtig oder falsch sein kann. Ein Beispiel eines Prädikatenprädikats, für welches $P(P)$ eine richtige Aussage darstellt, bildet die Negation des Prädikates $0(F)$ („F trifft auf keinen Gegenstand zu"), d. h. die Funktion $\bar{0}(F)$, welche durch den Ausdruck $(Ex)F(x)$ definiert ist. $\bar{0}(\bar{0})$ ist eine Abkürzung für $(EF)\bar{0}(F)$, wofür wiederum $(EF)(Ex)F(x)$ geschrieben werden kann. Die letzte Formel bringt in der Tat ein richtiges Urteil zur Darstellung, nämlich den Satz: „Es gibt ein Prädikat F und einen Gegenstand x derart, daß $F(x)$ besteht."

Dagegen ist $0(0)$ eine falsche Aussage. Gemäß der Definition von 0 ergibt sich nämlich

$$0(0) \sim \overline{(EF)}\,\big(0(F)\big) \sim \overline{(EF)}\,\overline{(Ex)}\,F(x) \sim (F)\,(Ex)\,F(x).$$

Der letzte Ausdruck stellt die falsche Aussage dar, daß jedes Prädikat für mindestens einen Gegenstand zutrifft.

Wir können nun den Ausdruck $P(P)$ als Prädikat von P auffassen. Dieses Prädikat drückt die Eigenschaft eines Prädikates aus, sich selber

[1] Bei der mengentheoretischen Deutung des Kalküls entspricht diese Auffassung der naiven Mengenlehre.

zuzukommen. Wir wollen dieses Prädikatenprädikat mit $Pd(P)$ bezeichnen (zu lesen: „P ist prädikabel"). Da Pd, also auch $\overline{Pd}$ selbst ein Prädikatenprädikat ist, so haben auch die Ausdrücke $Pd(\overline{Pd})$ und $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ einen Sinn. Entweder ist nun $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ richtig. D. h. das Prädikatenprädikat $\overline{Pd}$ trifft auf sich selber zu, also $Pd(\overline{Pd})$ ist richtig. Oder aber $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ ist nicht der Fall. Dann trifft das Prädikatenprädikat $\overline{Pd}$ nicht auf sich selber zu, d. h. aber $\overline{Pd}(\overline{Pd})$ ist der Fall. Es folgt also, daß

$$Pd(\overline{Pd}) \sim \overline{Pd}(\overline{Pd}).$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn ein logischer Ausdruck kann nie seinem Gegenteil äquivalent sein.

Diese Paradoxie ist zuerst von RUSSELL entdeckt worden. Man kann sie auch in der Ausdrucksweise der Mengenlehre darstellen. Hier entspricht dem Prädikatenprädikat Pd die Menge aller derjenigen Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Diese Menge ist ihrem Begriff nach widerspruchsvoll, denn gemäß ihrer Definition gehört sie dann und nur dann zu ihren eigenen Elementen, wenn sie nicht zu diesen gehört.

Die zweite der zu besprechenden Paradoxien war bereits in der griechischen Philosophie bekannt. Ihre einfachste Fassung ist die folgende: Es sage jemand „ich lüge", oder ausführlicher, „ich spreche jetzt einen falschen Satz aus"; dann ist diese Aussage richtig, sofern sie falsch ist, und sie ist falsch, sofern sie richtig ist.

Wir wollen an der Formulierung der Paradoxie eine geringe Verschärfung vornehmen. Es werde mit $\mathfrak{P}$ eine bestimmte Person benannt, und t sei die abgekürzte Bezeichnung eines bestimmten Zeitintervalls. Innerhalb dieses Zeitraums t spreche $\mathfrak{P}$ den Satz aus: „Alles was $\mathfrak{P}$ in dem Zeitraum t behauptet, ist falsch"; und weiter sage $\mathfrak{P}$ während der Zeit t nichts. Diese Annahme ist jedenfalls nicht widerspruchsvoll, da man ja ihre Verwirklichung absichtlich herbeiführen kann. Um sie in der logischen Symbolik zum Ausdruck zu bringen, bezeichnen wir die angeführte Aussage von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}$ und wenden das Prädikatzeichen $\mathrm{Bh}(X)$ an in der Bedeutung, „X wird von $\mathfrak{P}$ im Zeitraum t behauptet", wobei als Wert des Arguments X jede Aussage in Betracht kommt.

Mit Hilfe dieses Zeichens können wir zunächst die Aussage $\mathfrak{A}$ durch die Formel

$$(X)\bigl(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \overline{X}\bigr)$$

wiedergeben; und unsere Voraussetzung, daß $\mathfrak{P}$ innerhalb der Zeit t den Satz $\mathfrak{A}$ und sonst nichts ausspricht, stellt sich dar durch die beiden Formeln

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}); \qquad (X)\bigl(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \equiv (\mathfrak{A}, X)\bigr).$$

Nun kommt auf folgende Weise ein Widerspruch zustande. In der richtigen Formel $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ werde im zweiten Gliede für $\mathfrak{A}$ der Ausdruck $(X)\left(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \overline{X}\right)$, welcher ja die symbolische Darstellung der Aussage $\mathfrak{A}$ bildet, eingesetzt. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{A} \rightarrow (X)\left(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \overline{X}\right).$$

Das Allzeichen (X) kann hier nach den Regeln des Kalküls fortgelassen werden.

$$\mathfrak{A} \rightarrow \left(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \overline{X}\right).$$

Durch Einsetzung gewinnt man hieraus

$$\mathfrak{A} \rightarrow \left(\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}) \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}\right).$$

Diese Formel ist, da die Voraussetzungen vertauscht werden dürfen, ersetzbar durch

$$\mathrm{Bh}(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}).$$

Da $\mathrm{Bh}(\mathfrak{A})$ eine richtige Formel ist, so erhält man

$$\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}.$$

Andererseits läßt sich auch $\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{A}$ beweisen. Denn zunächst gilt

$$\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \overline{(X)}\left(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \overline{X}\right),$$

also

$$\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow (EX)\left(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X\right).$$

Ferner folgt aus der als richtig vorausgesetzten Formel

$$(X)\left(\mathrm{Bh}(X) \rightarrow \equiv(\mathfrak{A}, X)\right)$$

$$(X)\left(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X \rightarrow \equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X\right)$$

und hieraus

$$(EX)\left(\mathrm{Bh}(X) \,\&\, X\right) \rightarrow (EX)\left(\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X\right),$$

so daß man

$$\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow (EX)\left(\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X\right)$$

erhält.

Nun ist wegen der Bedeutung der Identität $\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X \rightarrow \mathfrak{A}$ eine richtige Formel. Nach der Regel γ) gewinnt man daraus:

$$(EX)\left(\equiv(\mathfrak{A}, X) \,\&\, X\right) \rightarrow \mathfrak{A}.$$

Diese Formel in Verbindung mit der eben erhaltenen liefert:

$$\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{A}.$$

Aus den bewiesenen Formeln $\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{A}$ folgt aber, daß sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\overline{\mathfrak{A}}$ eine richtige Formel ist, so daß wir in der Tat auf einen Widerspruch geführt werden.

Wir wollen nun noch eine dritte Paradoxie vorführen, von welcher es mannigfache verschiedene Wendungen gibt. Eine einfache Form der Darstellung ist die folgende: Jedes Bezeichnen einer Zahl, geschehe es durch Mitteilung eines konventionellen Zeichens oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft, erfordert ein gewisses Mindestmaß an Zeit. Daher können innerhalb einer endlichen Zeit von endlich vielen Menschen auch nur endlich viele Zahlen bezeichnet werden. Andererseits gibt es unendlich viele Zahlen. Somit werden im 20. Jahrhundert von den auf Erden lebenden Menschen sicher nicht alle Zahlen bezeichnet. Unter den im 20. Jahrhundert nicht bezeichneten Zahlen ist eine die kleinste. Nun ist diese Zahl aber doch im 20. Jahrhundert bezeichnet; denn ich habe sie ja durch die Eigenschaft bestimmt, die kleinste im 20. Jahrhundert nicht bezeichnete Zahl zu sein. Es ergibt sich also die Existenz einer Zahl, die sowohl bezeichnet als nicht bezeichnet ist.

Um diese Argumentation für den Zweck der Darstellung in unserem Kalkül etwas zu präzisieren, ersetzen wir den Begriff der Bezeichnung durch einen engeren Begriff. Wir ziehen nur solche Bezeichnungen einer Zahl in Betracht, welche im Sinne unserer logischen Symbolik durch das Aufschreiben eines Ausdrucks für ein die Zahl definierendes Prädikat stattfinden. Dabei verstehen wir unter einem die Zahl x definierenden Prädikat ein solches, das auf die Zahl x, sonst aber auf nichts zutrifft[1]. Auf diese Weise gelangen wir zu folgender Fassung der Paradoxie:

Es bedeute $\mathrm{Scr}(P)$ die Eigenschaft eines Prädikates P, daß unter den im 20. Jahrhundert aufgeschriebenen Ausdrücken der logischen Symbolik mindestens einer ein Ausdruck für P ist. Das Zeichen $<(x, y)$ werde wie bisher für das Prädikat „x ist kleiner als y“ angewendet; und zwar sollen die Leerstellen dieses Prädikats auf die Gattung der positiven ganzen Zahlen bezogen werden.

Ferner möge für den Ausdruck

$$P(x) \mathbin{\&} (y)\bigl(P(y) \rightarrow \equiv(x, y)\bigr),$$

welcher besagt, daß x durch das Prädikat P definiert wird, zur Abkürzung $\mathrm{Df}(P, x)$ geschrieben werden. Als Abkürzung für

$$(EP)\bigl(\mathrm{Df}(P, x) \mathbin{\&} \mathrm{Scr}(P)\bigr)$$

werde das Symbol $\mathrm{Dsc}(x)$ angewendet.

$\mathrm{Dsc}(x)$ bedeutet also: „Unter den im 20. Jahrhundert aufgeschriebenen symbolischen Ausdrücken stellt mindestens einer ein Prädikat dar, welches x definiert“, oder kurz ausgesprochen: „x ist im 20. Jahrhundert mindestens einmal symbolisch definiert“. Schließlich werde als Abkürzung für den Ausdruck

$$\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \mathbin{\&} (y)\bigl(<(y, x) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y)\bigr)$$

das Zeichen $\mathrm{Mds}(x)$ genommen, so daß also $\mathrm{Mds}(x)$ bedeutet: „x hat die Eigenschaft, kleinste, im 20. Jahrhundert nicht symbolisch definierte Zahl zu sein.“

---

[1] Daß die Zahlen sich als Prädikatenprädikate deuten lassen, braucht für die vorliegende Argumentation nicht berücksichtigt zu werden.

Als Axiome führe man nun folgende Formeln ein: zunächst die Ausdrücke für die Grundeigenschaften der Relation $<(x, y)$:

$$(x)\,\overline{<(x, x)}$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,\bigl(<(x, y)\;\&\;<(y, z) \rightarrow\;<(x, z)\bigr),$$

$$(x)\,(y)\,\bigl(\equiv(x, y) \vee <(x, y) \vee <(y, x)\bigr),$$

$$(E x)\,P(x) \rightarrow (E x)\,\bigl[P(x)\;\&\;(y)\,\bigl(<(y, x) \rightarrow \overline{P}(y)\bigr)\bigr].$$

Von diesen 4 Axiomen bedeuten die ersten drei, daß die Beziehung $<(x, y)$ die ganzen Zahlen *ordnet*, und die letzte, daß sie sie *wohlordnet*. Sodann haben wir als Axiome den symbolischen Ausdruck für die Tatsache, daß nicht alle Zahlen im 20. Jahrhundert symbolisch definiert werden können,

$$(E x)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x),$$

und endlich die Formel Scr(Mds), welche besagt, daß ein Ausdruck für $\mathrm{Mds}(x)$ im 20. Jahrhundert aufgeschrieben ist, und die also eine richtige Behauptung darstellt, da wir vorhin den Ausdruck für $\mathrm{Mds}(x)$ aufgeschrieben haben.

Jetzt kann man die folgende formale Schlußweise ausführen. In der Formel

$$(E x)\,P(x) \rightarrow (E x)\,\bigl[P(x)\;\&\;(y)\,\bigl(<(y, x) \rightarrow \overline{P}(y)\bigr)\bigr]$$

setze man für P $\overline{\mathrm{Dsc}}$ ein:

$$(E x)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \rightarrow (E x)\,\bigl[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\;\&\;(y)\,\bigl(<(y, x) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y)\bigr)\bigr].$$

Da $(E x)\,\overline{\mathrm{Dsc}}(x)$ richtig ist, so ergibt sich

$$(E x)\,\bigl[\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\;\&\;(y)\,\bigl(<(y, x) \rightarrow \mathrm{Dsc}(y)\bigr)\bigr],$$

also bei Anwendung der Abkürzung $\mathrm{Mds}(x)$:

$$(E x)\,\mathrm{Mds}(x).$$

Zufolge der Definition von Mds besteht die Beziehung

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \overline{\mathrm{Dsc}}(x).$$

Ferner läßt sich mit Hilfe der aufgestellten Axiome die Formel

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \mathrm{Mds}(x)\;\&\;(y)\,\bigl(\mathrm{Mds}(y) \rightarrow\;\equiv(x, y)\bigr),$$

d. h.

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x)$$

ableiten. Aus der letzten und vorvorletzten Formel zusammen ergibt sich:

$$\mathrm{Mds}(x) \rightarrow \overline{\mathrm{Dsc}}(x)\;\&\;\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x).$$

Nach der zu Formel (34) gehörigen Regel erhält man weiter:

$$(E x)\,\mathrm{Mds}(x) \rightarrow (E x)\,\bigl(\overline{\mathrm{Dsc}}(x)\;\&\;\mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x)\bigr).$$

Da $(E x)\,\mathrm{Mds}\,(x)$ bewiesen ist, so liefert das Schlußschema:

$$(E x)\left(\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x)\right).$$

Nimmt man hierzu die als Axiom aufgestellte Formel $\mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})$, so folgt:

$$(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\right\}.$$

Nun gilt nach Axiom f) die Formel

$$F(Q) \rightarrow (EP)\,F(P).$$

Wird hier Q durch Mds und $F(P)$ durch $(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(P, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(P)\right\}$ ersetzt, so ergibt sich:

$$(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(\mathrm{Mds}, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(\mathrm{Mds})\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow (EP)\,(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(P, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(P)\right\},$$

also, da das Vorderglied eine bewiesene Formel ist:

$$(EP)\,(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Df}(P, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(P)\right\}.$$

Da sich die Stellung der Klammerzeichen vertauschen läßt, und da

$$(EP)\left(A \,\&\, F(P)\right) \sim A \,\&\, (EP)\,F(P),$$

erhält man:

$$(E x)\left\{\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, (EP)\left(\mathrm{Df}(P, x) \,\&\, \mathrm{Scr}(P)\right)\right\}.$$

Durch Anwendung der Abkürzung Dsc geht dieser Ausdruck über in

$$(E x)\left(\overline{\mathrm{Dsc}}(x) \,\&\, \mathrm{Dsc}(x)\right).$$

Andererseits kann auch die Formel

$$(x)\left(\mathrm{Dsc}(x) \vee \overline{\mathrm{Dsc}}(x)\right)$$

abgeleitet werden; denn diese Formel entsteht aus (21) durch Einsetzung. Nach dem Dualitätsprinzip sind aber die letzten beiden Formeln einander entgegengesetzt. Wir haben somit einen Widerspruch.

Mit diesen verschiedenen Widersprüchen können wir uns auch nicht etwa in der Weise abfinden, daß wir die Beweisbarkeit gewisser einander entgegengesetzter Aussagen als eine Tatsache hinnehmen. Sobald wir nämlich irgend zwei einander entgegengesetzte Ausdrücke $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ als richtige Formeln zulassen, so wird, wie schon früher bemerkt, der ganze Kalkül bedeutungslos.

Sehen wir nun, welche Folgerungen sich für den Aufbau unseres Kalküls aus den Paradoxien ergeben. Die erste Paradoxie zeigt deutlich, daß wir einen unterschiedslosen Prädikatenbegriff von der im Anfang dieses Paragraphen geschilderten Art nicht gebrauchen können, da seine Zulassung einen Widerspruch des Prädikatenkalküls in sich ergeben würde. Einen anderen Charakter haben die beiden anderen Paradoxien, die wir nur der Vollständigkeit halber hier mit aufzählten. Diese zeigen nur die Unverträglichkeit gewisser Behauptungen. Im ersten Falle waren das

$$\mathrm{Bh}\,[(X)\,(\mathrm{Bh}\,(X) \to \overline{X})] \quad \text{und} \quad (X)\,[\mathrm{Bh}\,(X) \to \equiv (X,\,(Y)\,(\mathrm{Bh}\,(Y) \to \overline{Y}))],$$

im zweiten Falle

$$(E\,x)\,\overline{\mathrm{Dsc}}\,(x), \quad \mathrm{Scr}\,(\mathrm{Mds})$$

und

$$(P)\,\{(E\,x)\,P\,(x) \to (E\,x)\,[P\,(x)\,\&\,(y)\,(<(y,\,x) \to \overline{P\,(y)})]\}.$$

Keine von diesen Behauptungen stellt eine logische Identität dar. Die Paradoxien dieser zweiten Art, für die die Bezeichnung *„semantische Paradoxien“* gebräuchlich ist, treffen also gar nicht unseren Kalkül, da dieser nicht imstande ist, ihren rein logischen Charakter zum Ausdruck zu bringen. Vielmehr mußten wir zu der teilweisen Formalisierung inhaltliche Gedankengänge zu Hilfe nehmen. Wir brauchen daher für unseren Prädikatenkalkül keine Konsequenzen aus den Widersprüchen der letzten Art zu ziehen, und wollen daher auch nicht näher auf sie eingehen [1].

§ 5. Der Stufenkalkül.

Es handelt sich jetzt darum, den durch die Einführung der höheren Prädikate erweiterten Kalkül systematisch aufzubauen. Die Überlegungen des vorigen Paragraphen hatten uns gezeigt, daß wir keinen unterschiedslosen Prädikatenbegriff gebrauchen können, sondern daß wir die Prädikate nach der Art ihrer Argumente unterscheiden müssen. In unserem Kalkül zeigt sich das darin, daß wir nur für Prädikate derselben Gattung eine gemeinsame Prädikatenvariable gebrauchen dürfen.

Wir haben zunächst Individuenprädikate, und zwar verschiedene Gattungen oder Typen nach der Zahl ihrer Argumente. Diese Prädikate heißen die *Prädikate der ersten Stufe*. Unter einem *Prädikat der zweiten Stufe* verstehen wir ein Prädikat, dessen Leerstellen mit Individuen oder Prädikaten der ersten Stufe besetzt sind, wobei mindestens einmal ein Prädikat der ersten Stufe als Argument vorkommen muß. Die Gattungen oder Typen der Prädikate der zweiten Stufe werden unterschieden nach der Zahl und der Art ihrer Leerstellen. Entsprechend gelangt man weiter zu *Prädikaten der dritten, vierten Stufe*, usw. Für die Individuenvariablen gebrauchen wir wieder kleine lateinische, für die Prädikatenvariablen große lateinische Buchstaben. Für jede eingeführte Prädikatenvariable muß von vorneherein der Typ genau angegeben werden, da die Einsetzungsregeln so formuliert werden, daß nur Prädikate für eine Variable eingesetzt werden, die vom gleichen Typ sind wie diese Variable.

---

[1] Für eine neuere Behandlung der semantischen Paradoxien vgl. z. B. TARSKI, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia Philosophica. Leopoli 1935.

Um den Typ einer Prädikatenvariablen kurz anzugeben, können wir uns einer einfachen Symbolik bedienen. Den Typ einer Individuenvariablen bezeichnen wir mit i. Haben wir eine Prädikatenvariable mit n Leerstellen, und haben die zugehörigen Argumente die Typen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, so soll $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Typ der Prädikatenvariablen bezeichnen. Z. B. würde $\big((i, i), i\big)$ den Typ eines zweistelligen Prädikates der zweiten Stufe bedeuten, bei dem als erstes Argument ein zweistelliges Individuenprädikat, als zweites Argument ein Individuum in Frage kommt. Von den in § 2 dieses Kapitels erwähnten Prädikaten hat Sym den Typ $\big((i, i)\big)$, $0(F)$ den Typ $\big((i)\big)$, $\mathfrak{Z}(\Phi)$ den Typ $\big(((i))\big)$, Imp den Typ $\big((i), (i)\big)$, usw.

Dieser stufenförmige Aufbau der Prädikate und der darauf sich gründende Kalkül ist von WHITEHEAD und RUSSELL in ihrem grundlegenden Werke „Principia Mathematica“ in die Logik eingeführt worden. Außer der geschilderten Typenunterscheidung der Prädikate, der sog. *einfachen Typentheorie*, benutzen die Verfasser noch eine feinere Einteilung der Prädikate, die *verzweigte Typentheorie*. Nach dieser ist man z. B. nicht mehr berechtigt, für die einstelligen Individuenprädikate einen einheitlichen Typ anzunehmen, sondern die Individuenprädikate müssen nach der Art ihrer Definition unterschieden werden. Z. B. würde ein Individuenprädikat, daß mit Hilfe irgendwelcher All- oder Seinszeichen für Prädikate definiert ist, einen höheren Typ haben als die Individuenprädikate der einfachsten Ordnung, die von WHITEHEAD und RUSSELL „prädikative“ Individuenprädikate genannt werden. Diese verzweigte Typentheorie war aufgestellt worden, um die semantischen Paradoxien zu berücksichtigen. Sie ist aber unnötig, da diese Art von Widersprüchen, wie wir gesehen hatten, nicht den erweiterten Prädikatenkalkül betrifft. Sie hatte überdies eine große Anzahl von Schwierigkeiten zur Folge, auf die wir auch in der 1. Auflage dieses Buches näher eingegangen waren. Für uns besteht keine Veranlassung mehr, uns genauer mit dieser Theorie zu befassen, zumal da sich die Widerspruchsfreiheit des einfachen Stufenkalküls in einfacher Weise zeigen läßt.

Wenn wir uns nun dem Aufbau des Stufenkalküls im einzelnen zuwenden, so tritt uns noch eine gewisse Schwierigkeit der Schreibweise entgegen. Das Zutreffen eines Prädikates auf gewisse Argumente hatten wir bisher immer in der Weise ausgedrückt, daß in einer auf das Prädikatzeichen folgenden Klammer durch Kommata getrennt die Argumente stehen. Soweit die Leerstellen der Prädikatvariablen nur mit Variablen besetzt sind, ist auch jetzt diese Schreibweise ausreichend. Anders ist es aber, falls spezielle Prädikate in die Leerstellen eingesetzt werden. Es sei z. B. F eine Prädikatenvariable vom Typ $\big((i)\big)$, deren Leerstelle also für einstellige Individuenprädikate bestimmt ist. Sei ferner G eine Variable für zweistellige Individuenprädikate. Man kann aus G folgende Prädikate der Variablen x bilden: $G(x, x)$, $G(x, y)$, $G(y, x)$, wobei die beiden letzten Prädikate den Parameter y enthalten. Wir sind nicht ohne weiteres imstande, direkt auszudrücken, daß F auf irgendeines dieser Prädikate zutrifft. Denn würden wir z. B. $F(G)$ schreiben, so wäre nicht zu ersehen, welches einstellige Prädikat mit G gemeint ist. Am einfachsten ist es, sich durch eine Umschreibung zu helfen. Es sei H als Prädikatenvariable vom Typ (i) eingeführt. Dann können die Formeln

$$(EH)\big(F(H) \mathbin{\&} (x)\big(H(x) \sim G(x, x)\big)\big)$$
$$(EH)\big(F(H) \mathbin{\&} (x)\big(H(x) \sim G(x, y)\big)\big)$$
$$(EH)\big(F(H) \mathbin{\&} (x)\big(H(x) \sim G(y, x)\big)\big)$$

oder auch die Formeln

$$(H)\big((x)\big(H(x) \sim G(x, x)\big) \rightarrow F(H)\big)$$
$$(H)\big((x)\big(H(x) \sim G(x, y)\big) \rightarrow F(H)\big)$$
$$(H)\big((x)\big(H(x) \sim G(y, x)\big) \rightarrow F(H)\big)$$

als Ersatz für die fehlende Möglichkeit, das Zutreffen von F für die drei oben erwähnten Prädikate auszudrücken, genommen werden.

Es besteht allerdings auch die Möglichkeit, den Formalismus so aufzubauen, daß man ohne derartige Umschreibungen auskommt. Der Vorteil ist dann, daß die Einsetzungsregel für Prädikatenvariable [das Analogon von der Regel $\alpha 3$) des engeren Prädikatenkalküls] nicht verloren geht, und der axiomatische Aufbau des Stufenkalküls vollständig analog zu dem uns geläufigen Aufbau des engeren Prädikatenkalküls erfolgen kann. Wir müssen dabei aber eine Komplizierung der Schreibweise in Kauf nehmen. In dem oben erwähnten Falle können wir so vorgehen, daß wir der Variablen F eine Individuenvariable, z. B. x, als Index anfügen. Wir haben dann in

$$F_x\big(G(x, x)\big); \quad F_x\big(G(x, y)\big), \quad F_x\big(G(y, x)\big)$$

den symbolischen Ausdruck für die drei erwähnten Aussagen. Die Variable x ist in den drei Formeln eine gebundene Variable, und kann daher durch eine andere Variable derselben Art ersetzt werden. Z. B. sind die Formeln

$$F_z\big(G(z, z); \quad F_z\big(G(z, y)\big); \quad F_z\big(G(y, z)\big)$$

mit obigen Formeln gleichbedeutend.

Wollen wir diese Indexschreibweise allgemein durchführen, so muß jede Prädikatenvariable von der zweiten und einer höheren Stufe einen Index erhalten. Sei F eine derartige n-stellige Variable. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ seien Variable, die als Argumente von F in Betracht kommen. Kommen darunter Individuenvariable vor, so werden diese fortgelassen.

$$H_{11}, \ldots, H_{1 i_1}; \quad H_{21}, \ldots, H_{2 i_2}; \quad \ldots; \quad H_{n_1}, \ldots, H_{n i_n}$$

seien Variable, so daß jeweils $H_{k1}, \ldots, H_{k i_k}$ als Argumente von G_k in Betracht kommen. F erhält dann den Index

$$F_{H_{11}, \ldots, H_{1 i_1}; \quad H_{21}, \ldots, H_{2 i_2}; \quad \ldots; \quad H_{n_1}, \ldots, H_{n i_n}}.$$

Das gleiche gilt für individuelle Prädikatzeichen. Wir führen einige Beispiele an. Statt $\mathrm{Sym}(R)$ müßten wir jetzt $\mathrm{Sym}_{xy} R(x, y)$ schreiben, statt $\mathrm{Imp}(F, G)$ $\mathrm{Imp}_{xy}(F(x), G(y))$. Statt der in § 2 gebrauchten Formel $\mathfrak{Z}(\Phi)$ hätten wir $\mathfrak{Z}_F \Phi(F)$ zu schreiben, wobei F den Typ (i) hat. Wir sehen daraus, daß der Formalismus durch die Indexschreibweise erheblich belastet wird. Für das folgende wollen wir daher die einfachere Schreibweise zugrunde legen, und nur gelegentlich auf die Indexschreibweise hinweisen.

Wenden wir uns nun der Frage des Axiomensystems für die identischen Formeln zu. Es ist dann zunächst der Begriff der Formel festzulegen. Das kann in derselben Weise geschehen, wie früher für den engeren Prädikatenkalkül durch die Regeln 1) bis 5) vom 3. Kap., § 4. Wir haben nur zu beachten, daß wir jetzt mehr Gattungen von Variablen haben. Was das Axiomensystem selbst anbetrifft, so läßt sich allerdings kein System angeben, das restlos alle identischen Formeln liefert[1]. Immerhin dürfte das folgende Axiomensystem auch bei den komplizierten Schlußweisen, wie sie etwa in der mathematischen Analysis gebräuchlich sind (vgl. die Überlegungen des folgenden Paragraphen) kaum versagen. Dieses System ist im wesentlichen nur eine Verallgemeinerung des früher für den engeren Prädikatenkalkül aufgestellten Systems.

Dieses System setzt sich folgendermaßen zusammen: I. Zunächst gebrauchen wir als Grundformeln wieder die Formeln a) bis d) des Aussagenkalküls, die im 3. Kap., § 5 angegeben waren. II. Den Grundformeln e) und f) des engeren Prädikatenkalküls entspricht folgende Regel zur Bildung von Grundformeln: Es seien G und H Variable von irgendeinem Typ a, F eine solche vom Typ (a). Dann ist jede Formel

$$(G) F(G) \rightarrow F(H) \tag{II,1}$$

und jede Formel

$$F(H) \rightarrow (EG) F(G) \tag{II,2}$$

eine Grundformel. (Der Fall, daß G den Typ i hat, also eine Individuenvariable ist, soll dabei eingeschlossen sein). III. Es kommen weiter als besondere Gruppe für den erweiterten Prädikatenkalkül Axiome, die dem Auswahlaxiom der Mengenlehre entsprechen, und die die Verallgemeinerung des Axioms g) sind, das wir schon früher beim Kalkül

[1] Das ergibt sich aus der bereits in § 1 dieses Kapitels zitierten Arbeit von K. Gödel.

der zweiten Stufe aufgestellt hatten. Es sei F eine Variable von irgendeinem Typ a, G und L Variable irgendeines Typs b, A und H Variable vom Typ (a, b), T eine solche vom Typ (b). Dann ist

$$\text{(III)} \qquad (EH)\{(F)\,[(EG)\,A(F,G) \to (EG)\,(H(F,G)\,\&\,A(F,G))]\,\& \\ \&\,(F)\,(G)\,(L)\,[(H(F,G)\,\&\,H(F,L)) \to (T)\,(T(G) \sim T(L))]\}$$

eine Grundformel.

IV. Ferner seien $L_1, L_2, \ldots, L_n$ Variable der Typen $b_1, b_2, \ldots, b_n$, G und H Variable vom Typ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ und A eine solche vom Typ $((b_1, b_2, \ldots, b_n))$. Dann ist

$$\text{(IV)} \quad (L_1)\ldots(L_n)\,[G(L_1,\ldots,L_n) \sim H(L_1,\ldots,L_n)] \to (A(G) \to A(H))$$

eine Grundformel. (Diese „Axiome der Extensionalität" entsprechen dem Bestimmtheitsaxiom der Mengenlehre.)

Die Regeln zur Ableitung neuer Formeln sind analog denen des Prädikatenkalküls. $\alpha 1)$ und $\beta)$ bleiben unverändert. Bei $\alpha 2)$, $\gamma 1)$, $\gamma 2)$ sind die Regeln unter Berücksichtigung des Umstandes, daß jetzt mehr Typen von Variablen vorkommen, entsprechend zu ändern. Durch die Erweiterung von $\alpha 2)$ kann allerdings die frühere Regel $\alpha 3)$ nicht ganz ersetzt werden. Man muß daher das System der Grundformeln noch durch die folgenden erweitern.

Es seien $G_1, G_2, \ldots, G_n$ Variable irgendwelcher Typen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, F sei eine Variable vom Typ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{A}(G_1, \ldots, G_n)$ eine Formel, die die freien Variablen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ enthält. Dann ist jede Formel der Gestalt

$$\text{(V)} \qquad (EF)\,(G_1)\ldots(G_n)\,(F(G_1,\ldots,G_n) \sim \mathfrak{A}(G_1,\ldots,G_n))$$

eine Grundformel. Diese Formeln (V) haben den Zweck, bei den Ableitungen eine Formel mit freien Variablen, die ja ein individuelles Prädikat darstellt, durch eine Prädikatenvariable zu ersetzen.

Benutzt man die Indexschreibweise, so können die Formeln (V), für die der Name Komprehensionsaxiom gebräuchlich ist, fortfallen. Zu den Ableitungsregeln tritt dann die Verallgemeinerung der Regel $\alpha 3)$ des engeren Prädikatenkalküls hinzu. Die Formeln (V) werden dann beweisbar.

Ein anderer Weg als der hier für den Aufbau des Stufenkalküls beschrittene besteht darin, daß man beim formalen Aufbau grundsätzlich nur einstellige Prädikate der verschiedenen Stufen zugrunde legt. Man kann nämlich nach KURATOWSKI[1] z. B. ein zweistelliges Individuenprädikat als ein einstelliges Prädikat im Bereiche der geordneten Paare (x, y) ansehen. Das geordnete Paar (x, y) wird (wenn wir hier der Bequemlichkeit halber die mengentheoretische Ausdrucksweise zugrunde

[1] KURATOWSKI, C.: Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles. Fund. Math. Bd. 2 (1921).

legen) definiert als die Menge, die als Elemente nur die beiden folgenden Mengen enthält: die Menge mit x als einzigem Element und die Menge mit x und y als einzigen Elementen. Für die Definition dieser Mengen, bzw. der entsprechenden Prädikate, ist nur das zweistellige Prädikat der Identität erforderlich, das sich aber (vgl. § 1 dieses Kapitels) wieder auf einstellige Prädikate zurückführen läßt. Wir sind diesen Weg hier im Stufenkalkül nicht gegangen, weil bei diesem Aufbau ein Individuenprädikat $F(x, y)$, das sonst von der ersten Stufe ist, als Prädikat von einer verhältnismäßig hohen Stufe erscheint. Im übrigen ergibt aber die Beschränkung auf einstellige Prädikate manche formalen Vorteile.

Die Widerspruchsfreiheit des Stufenkalküls läßt sich in einfacher Weise durch eine Erweiterung des im 2. Kap., § 9 angewandten Verfahrens beweisen[1].

§ 6. Anwendungen des Stufenkalküls.

Der Stufenkalkül kann in derselben Weise, wie dies im 3. Kap., § 11 für den engeren Prädikatenkalkül näher dargelegt wurde, zur Ableitung der Folgerungen aus den Axiomen einer bestimmten Theorie benutzt werden. Gegenüber dem engeren Prädikatenkalkül haben wir dann eine erweiterte Ausdrucksfähigkeit hinsichtlich der Axiome und der Folgerungen. Wir wollen diese Anwendung des Stufenkalküls an einem Beispiele erläutern.

Wir nehmen dazu *die Grundlegung der Theorie der reellen Zahlen.* Die reellen Zahlen sollen dabei nicht durch ein eigenes Axiomensystem eingeführt, sondern auf die rationalen Zahlen zurückgeführt werden. Wir nehmen also die rationalen Zahlen als das System der Gegenstände des Individuenbereiches, und denken uns passende Axiome für die arithmetischen Grundbeziehungen im Gebiete der rationalen Zahlen, wie Addition, Subtraktion, Größerkleinerbeziehung usw. eingeführt. In der Mathematik sind nun verschiedene Arten der Zurückführung der reellen Zahlen auf die rationalen Zahlen gebräuchlich. Man definiert z. B. eine reelle Zahl mit Hilfe einer Cantorschen Fundamentalreihe oder durch einen unendlichen Dezimal-, bzw. Dualbruch. Für den Anschluß an die Logik empfiehlt sich am meisten das Dedekindsche Verfahren

Nach Dedekind definieren wir eine reelle Zahl als einen „Schnitt", d. h. als eine Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen mit den folgenden „Schnitteigenschaften":

---

[1] Vgl. A. Tarski: Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. Mh. Math. Physik Bd. 40 (1933) und G. Gentzen: Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik. Math. Z. Bd. 41 (1936). Gentzen benutzt den zuletzt erwähnten Aufbau des Stufenkalküls, bei dem nur einstellige Prädikate vorkommen. Die Übertragung seiner Methode auf unser Axiomensystem bereitet aber keine sonderlichen Schwierigkeiten.

1. Jede der beiden Klassen enthält mindestens *eine* rationale Zahl.

2. In der ersten Klasse gibt es keine größte rationale Zahl.

3. Gehört eine Rationalzahl zur ersten Klasse, so gehören auch alle kleineren Rationalzahlen zur ersten Klasse.

Wir brauchen nun bei einer Einteilung der beschriebenen Art immer nur die erste der beiden Klassen zu betrachten, und haben es dann mit einer Menge von Rationalzahlen zu tun, welche sich mit Hilfe eines sie definierenden Prädikates darstellen läßt.

Unter einer reellen Zahl verstehen wir dann eine Menge von rationalen Zahlen, für welche es ein definierendes Prädikat P gibt, das den folgenden drei Bedingungen genügt:

$$1.\ (E\,x)\,P(x)\,\&\,(E\,x)\,\overline{P}(x),$$

[„Die durch $P(x)$ und durch $\overline{P}(x)$ bestimmten Klassen sind beide nicht leer."]

$$2.\ (x)\{P(x)\rightarrow(E\,y)\,(<(x,\,y)\,\&\,P(y))\}.$$

(„Zu jeder rationalen Zahl, welche die Eigenschaft P besitzt, gibt es eine größere, die gleichfalls die Eigenschaft P hat.")

$$3.\ (x)\{P(x)\rightarrow(y)\,(<(y,\,x)\rightarrow P(y))\}.$$

(„Hat x die Eigenschaft P, so haben auch alle kleineren Rationalzahlen y die Eigenschaft P.")

Diese drei Bedingungen zusammen — wir können sie durch das Zeichen & vereinigt denken — machen die „Schnitteigenschaft" eines Prädikates aus. Diese Eigenschaft eines Prädikates wollen wir mit $\mathrm{Sc}(P)$ bezeichnen. Zwei Prädikate P und Q mit den Eigenschaften $\mathrm{Sc}(P)$ und $\mathrm{Sc}(Q)$ stellen dann und nur dann dieselbe reelle Zahl dar, wenn die zu P und Q gehörigen Mengen gleich sind, d. h. wenn $\mathrm{Aeq}(P,\,Q)$ zutrifft.

Jetzt können wir zunächst die Größenbeziehung zwischen reellen Zahlen einführen. Für zwei Prädikate P, Q mit der Eigenschaft Sc soll $\leq(P,\,Q)$ gleichbedeutend sein mit $\mathrm{Imp}(P,\,Q)$, d. h. mit

$$(x)\,(P(x)\rightarrow Q(x)).$$

Oder in Formeln:

$$\mathrm{Sc}(P)\,\&\,\mathrm{Sc}(Q)\rightarrow(\mathrm{Imp}(P,\,Q)\sim\,\leq(P,\,Q)).$$

Die Aussage $<(P,\,Q)$ wird dann zu definieren sein durch

$$\mathrm{Sc}(P)\,\&\,\mathrm{Sc}(Q)\rightarrow(<(P,\,Q)\sim(\mathrm{Imp}(P,\,Q)\,\&\,\overline{\mathrm{Aeq}}(P,\,Q))).$$

Es läßt sich dann im Kalkül beweisen, daß die beiden Beziehungen $\leq(P,\,Q)$ und $<(P,\,Q)$ transitiv sind. Ebenso lassen sich alle übrigen Eigenschaften ableiten, die für eine Ordnungsbeziehung charakteristisch sind.

Die Addition und Multiplikation reeller Zahlen läßt sich auf die der rationalen Zahlen zurückführen. Das Prädikat

$$(Ey)\,(Ez)\,\big(P(y)\,\&\,Q(z)\,\&\,(x = y + z)\big)$$

stellt die Summe,

$$(Ey)\,(Ez)\,\big(P(y)\,\&\,Q(z)\,\&\,(x = y \cdot z)\big)$$

das Produkt der durch P und Q definierten reellen Zahlen dar. ($x = y + z$ und $x = y \cdot z$ sind hier dreigliedrige Grundprädikate im Bereiche der Rationalzahlen.)

Wir sind jetzt imstande, die Begriffe der *Beschränktheit* und der *oberen Grenze* einer Menge von reellen Zahlen in der üblichen Weise einzuführen. Eine Menge von reellen Zahlen wird dargestellt durch ein Prädikatenprädikat $A(P)$, das der Bedingung genügt:

$$(P)\,\big(A(P) \rightarrow \mathrm{Sc}(P)\big)\,\&\,(P)\,(Q)\,\big(\big(A(P)\,\&\,\mathrm{Aeq}(P, Q)\big) \rightarrow A(Q)\big).$$

Daß eine Menge $A(P)$ von reellen Zahlen nach oben beschränkt ist, bedeutet, daß es eine reelle Zahl gibt, die größer oder gleich jeder Zahl der Menge ist; in Formeln:

$$(EP)\big\{\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\,\big(A(Q) \rightarrow \leqq(Q, P)\big)\big\},$$

wofür wir zur Abkürzung auch $(EP)\,\mathrm{Sch}(P, A)$ schreiben, in Worten, es gibt eine Zahl P, die eine obere Schranke der Menge A darstellt.

Wir wollen auch annehmen, daß $A(P)$ mindestens ein Element enthält, daß also die Formel gilt:

$$(EP)\,A(P).$$

Den Satz von der oberen Grenze kann man nun so formulieren: *Wenn eine Menge von reellen Zahlen eine obere Schranke hat, so hat sie auch eine kleinste obere Schranke.*

Der mathematische Existenzbeweis für die obere Grenze, auf seine einfachste Form gebracht, besteht darin, daß man zu der betrachteten Menge reeller Zahlen, welche eine Menge von Mengen erster Stufe ist, die Vereinigungsmenge bildet. Nach den Bemerkungen von § 3 dieses Kapitels drückt sich die zu $A(P)$ gehörige Vereinigungsmenge aus durch das Prädikat:

$$(EP)\,\big(P(x)\,\&\,A(P)\big).$$

Wir wollen dieses Prädikat zur Abkürzung mit $\mathrm{Vg}(x, A)$ bezeichnen.

Von dem Prädikat $\mathrm{Vg}(x, A)$ soll also gezeigt werden, daß es eine reelle Zahl darstellt, welche die obere Grenze der Menge A darstellt.

Wir müssen zuerst die durch $\mathrm{Vg}(x, A)$ bestimmte Menge überhaupt als reelle Zahl erkennen.

Zunächst läßt sich leicht zeigen, daß die drei in Sc vereinigten Eigenschaften für Vg gelten. Wir geben die Ableitung für die erste Eigenschaft.

Aus

$$(EP)\,A(P),$$
$$(P)\bigl(A(P)\rightarrow \mathrm{Sc}(P)\bigr)$$

schließt man

$$(EP)\bigl(\mathrm{Sc}(P)\,\&\,A(P)\bigr).$$

Da

$$\mathrm{Sc}(P)\rightarrow(Ex)\,P(x)$$

gilt, so hat man

$$(EP)\bigl((Ex)\,P(x)\,\&\,A(P)\bigr).$$

Die letzte Formel kann man umformen zu

$$(Ex)\,(EP)\bigl(P(x)\,\&\,A(P)\bigr),$$

d. h.

$$(Ex)\,\mathrm{Vg}(x,A).$$

Desgleichen läßt sich zeigen:

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}(x,A),\qquad \text{d. h.}\qquad (Ex)\,\overline{(EP)}\bigl(P(x)\,\&\,A(P)\bigr).$$

Diese Formel läßt sich zunächst umformen zu

$$(Ex)\,(P)\bigl(A(P)\rightarrow \overline{P}(x)\bigr).$$

Man hat nun, gemäß der Voraussetzung der Beschränktheit der Menge A,

$$(EP)\bigl\{\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\, \leq(Q,P)\bigr)\bigr\}.$$

Ferner gilt

$$\mathrm{Sc}(P)\rightarrow(Ex)\,\overline{P}(x),$$

also

$$(EP)\bigl\{(Ex)\,\overline{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\, \leq(Q,P)\bigr)\bigr\}.$$

Aus der Definition von $\leq(Q,P)$ ergibt sich leicht

$$\leq(Q,P)\,\&\,\mathrm{Sc}(Q)\,\&\,\mathrm{Sc}(P)\rightarrow(x)\bigl(\overline{P}(x)\rightarrow\overline{Q}(x)\bigr).$$
$$(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\, \leq(Q,P)\bigr)$$

darf also in der vorletzten Formel durch

$$(Q)\,\bigl[A(Q)\rightarrow(x)\bigl(\overline{P}(x)\rightarrow\overline{Q}(x)\bigr)\bigr]$$

oder auch durch

$$(x)\bigl(\overline{P}(x)\rightarrow(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\overline{Q}(x)\bigr)\bigr)$$

ersetzt werden. Aus der Formel

$$(EP)\bigl\{(Ex)\,\overline{P}(x)\,\&\,\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(x)\,\bigl[\overline{P}(x)\rightarrow(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\overline{Q}(x)\bigr)\bigr]\bigr\}$$

gewinnt man dann

$$(Ex)\,(Q)\bigl(A(Q)\rightarrow\overline{Q}(x)\bigr)$$

d. h.

$$(Ex)\,\overline{\mathrm{Vg}}(x,A).$$

Damit ist für $\mathrm{Vg}(x,A)$ die erste Schnitteigenschaft bewiesen.

In analoger Weise beweist man für $\mathrm{Vg}(x, A)$ die Eigenschaften 2. und 3. (auf S. 127), so daß also $\mathrm{Sc}(\mathrm{Vg})$ gilt.

Wir zeigen nun

$$(P)\big(A(P) \rightarrow \leqq (P, \mathrm{Vg})\big),$$

d. h. die Vg *entsprechende reelle Zahl ist eine obere Schranke für die durch $A(P)$ bestimmte Menge.*

Setzen wir für Vg und $\leqq$ den definierenden Ausdruck ein, so verwandelt sich diese Formel in

$$(P)\big(A(P) \rightarrow (x)\,[P(x) \rightarrow (EQ)\big(Q(x)\,\&\,A(Q)\big)]\big)$$

und durch Umformung in

$$(P)\,(x)\,\big((A(P)\,\&\,P(x) \rightarrow (EQ)\big(A(Q)\,\&\,Q(x)\big)\big).$$

Die letzte Form läßt die Formel als eine Anwendung des Axioms (II,2), S. 124, erkennen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{Vg}(x, A)$ die *kleinste* obere Schranke darstellt, oder in Formeln:

$$(P)\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\big(A(Q) \rightarrow \leqq (Q, P)\big)] \rightarrow \leqq (\mathrm{Vg}, P)\}.$$

Ersetzen wir hier wieder alle Abkürzungen durch ihre Definition, so erhält man:

$$\begin{aligned}(P)\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(Q)\big(A(Q) \rightarrow (x)\big(Q(x) \rightarrow P(x)\big)\big)]\\ \rightarrow (y)\,[(EP')\big(P'(y)\,\&\,A(P')\big) \rightarrow P(y)]\}.\end{aligned}$$

Man kann hier das Allzeichen (x) nach vorn bringen, erhält also:

$$\begin{aligned}(P)\{[\mathrm{Sc}(P)\,\&\,(x)\,(Q)\big(A(Q)\,\&\,Q(x) \rightarrow P(x)\big)]\\ \rightarrow (y)\,(EP')\big(P'(y)\,\&\,A(P') \rightarrow P(y)\big)\}.\end{aligned}$$

Diese Formel können wir mit Hilfe der Verallgemeinerung der Formel (22), S. 59, ableiten.

Die angegebenen Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, daß der Stufenkalkül das geeignete Mittel ist, um die Schlußweisen der Analysis zum Ausdruck zu bringen. Ein vollständiger Aufbau der Grundlagen der Mathematik mit Hilfe des Stufenkalküls ist von WHITEHEAD und RUSSELL gegeben worden[1], deren Überlegungen allerdings durch den Gebrauch der in § 4 erwähnten verzweigten Typentheorie unnötig kompliziert werden. Jedoch bereitet die Elimination dieser Theorie aus den Deduktionen der Verfasser keine besonderen Schwierigkeiten.

[1] WHITEHEAD, A. N. u. B. RUSSELL: Principia Mathematica, 2. Aufl. Cambridge 1925—1927.

Literaturverzeichnis.

An *einführenden* Werken in die mathematische Logik nennen wir

BEHMANN, H.: Mathematik und Logik. Leipzig 1927.

CARNAP, R.: Abriß der Logistik. Wien 1929.

COUTURAT, L.: L'algèbre de la logique. Paris 1905.

LEWIS, C. I. u. C. H. LANGFORD: Symbolic Logic. New York 1932.

QUINE, W. V.: A System of Logistic. Cambridge (Mass.) 1934.

RUSSELL, B.: Einführung in die mathematische Philosophie. (Deutsch von GUMBEL und GORDON.) München 1922.

— u. A. N. WHITEHEAD: Einführung in die mathematische Logik (die Einleitung der Principia Mathematica). (Deutsch von H. MOKRE.) München, Berlin 1932.

Für *umfassenderes Studium* kommen in Frage

HILBERT, D. u. P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, I. Band. Berlin 1934.

WHITEHEAD, A. N. u. B. RUSSELL: Principia Mathematica, 2. Aufl., I. Bd. 1925; II. u. III. Bd. 1927.

An *älteren*, noch immer Anregung bietenden Werken nennen wir

FREGE, G.: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.

— Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884.

— Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena 1893—1903.

PEANO, G.: Notations de logique mathématique; introduction au Formulaire de Mathématiques. Turin 1894.

— Formulaire de Mathématiques. 1895—1905.

PEIRCE, C. S.: Collected Papers, herausgegeben von C. HARTSHORNE u. P. WEISS (bisher erschienen Bd. I—IV).

SCHRÖDER, E.: Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), 3 Bände. Leipzig 1890—1905.

Für die eng mit der Logik zusammenhängenden *mengentheoretischen Fragen* verweisen wir auf

FRAENKEL, A.: Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928.

Eine vollständige Zusammenstellung der (sehr angeschwollenen) logischen Spezialliteratur kann hier nicht gegeben werden. Wir verweisen dafür auf das verdienstvolle Werk von

CHURCH, A.: A Bibliography of Symbolic Logic. (The Journal of Symbolic Logic, Vol. I, S. 121—218.),

das ein vollständiges, chronologisch geordnetes Verzeichnis sämtlicher Literatur zur mathematischen Logik bis zum Jahre 1935 enthält.

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen geben die Seiten an.)