Mathematisches Repetitorium

für

Studirende der Forstwissenschaft.

Von

Dr. J. Schubert,
Privatdocent an der Forstakademie zu Eberswalde.

Mit 32 Abbildungen im Text.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1890.

Mathematisches Repetitorium

für

Studirende der Forstwissenschaft.

Von

Dr. J. Schubert,
Privatdocent an der Forstakademie zu Eberswalde.

Mit 32 Abbildungen im Text.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1890

ISBN 978-3-662-31964-2 ISBN 978-3-662-32791-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-32791-3

Vorwort.

Die vorliegende Schrift beabsichtigt eine Uebersicht derjenigen mathematischen Lehren zu geben, die in der Forstwissenschaft hauptsächlich zur Anwendung gelangen. Außer den grundlegenden allgemeinen Entwickelungen aus der Elementarmathematik enthält sie Formeln und Sätze, die in der Waldwerthrechnung, in der Vermessungslehre und in der Holzmeßkunde gebraucht werden. Mit Rücksicht auf die leichtere Verständlichkeit sind die Sätze nicht immer in ihrer allgemeinsten Form ausgesprochen. So wird, auch wo es nicht besonders bemerkt ist, die Annahme gemacht, daß die in Rechnung gezogenen Größen reell sind. Die Beweise sind nicht mit aufgenommen; auch sind keine Literaturangaben gemacht.

Eberswalde, 1. März 1890.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Proportionen.

1. Die Proportion

$$a : b = c : d$$

ist gleichbedeutend mit

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

$\frac{b}{a}$ wird Verhältnißexponent genannt; das Verhältniß $a : b$ heißt steigend, wenn der Verhältnißexponent > 1, fallend, wenn er < 1 ist. Die Verhältnisse einer Proportion sind entweder beide steigend oder beide fallend.

In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren,

$$ad = bc.$$

2. Aus der Proportion

$$a : b = c : d$$

folgen die anderen

$$b : a = d : c,$$

$$a : c = b : d$$

oder

$$d : b = c : a$$

und vier weitere, welche sich aus diesen durch Vertauschung der beiden Verhältnisse ergeben; ferner verhält sich

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b \text{ oder } = c : d,$$

$$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c \text{ oder } = b : d,$$

$$pa : qb = pc : qd,$$

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2,$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d} \text{ u. s. w.}$$

In der letzten Proportion sind die Vorzeichen der Wurzeln entsprechend zu wählen.

3. In der Proportion

$$a : b = c : x$$

heißt

$$x = \frac{bc}{a}$$

die vierte Proportionale zu a, b, c.

Sind die beiden inneren Glieder gleich, wie in

$$a : x = x : b$$

so heißt die Proportion stetig und

$$x = \sqrt{ab}$$

die mittlere Proportionale zu a und b oder das geometrische Mittel) aus a und b.

4. Die Größen

$$a, b, c, \ldots .$$

heißen den Größen

$$a', b', c', \ldots .$$

proportionirt, wenn sich verhält

$$a : a' = b : b' = c : c' = \cdots,$$

wofür man auch schreibt

$$a : b : c : \cdots \quad = a' : b' : c' : \cdots$$

Setzt man das Verhältniß

$$\frac{a}{a'} = \lambda,$$

so ist $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$, $c = \lambda c'$, ... und es folgt

---

) $\frac{a+b}{2}$ heißt das arithmetische Mittel aus a und b; allgemein heißt $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n}{n}$ das arithmetische Mittel aus den n Größen a_1, a_2, $a_3 \cdots a_n$.

$$\frac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdot$$

oder allgemeiner

$$\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdot}{pa'+qb'+rc'+\cdots\cdot}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdot$$

II. Potenzen und Wurzeln.

5. Die Potenz a^n, wo a die Grundzahl und n der Exponent genannt wird, bedeutet ein Product aus n Factoren a. Diese Definition erfordert, daß n eine positive ganze Zahl ist.

Aus derselben folgt

$$1)\qquad \begin{aligned} a &= a^1, \\ aa &= a^2, \\ aaa &= a^3, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$2)\qquad \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \end{aligned}$$

$$3)\qquad (ab)^n = a^n b^n,$$

$$4)\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Ist m ebenfalls eine ganze positive Zahl, so ergeben sich die weiteren Regeln

$$5)\qquad a^m a^n = a^{m+n},$$

$$6)\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n,$$

$$7)\qquad (a^m)^n = a^{m\cdot n}.$$

1*

6. Wird in Gleichung 6) die Bedingung $m > n$ aufgehoben, so gelangt man zu den Definitionen

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Für die so eingeführten Potenzen mit negativen Exponenten gelten die Gleichungen 3) bis 7) ebenfalls.

7. Unter der Quadratwurzel aus a versteht man die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt a giebt;

$x = \sqrt{a}$ ist definirt durch die Gleichung $x^2 = a$.

Ist a eine positive Zahl, so hat $\sqrt{a}$ zwei reelle Werthe die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden; z. B. hat

$\sqrt{9}$ die beiden Werthe $+3$ und -3.

Ist a negativ, so hat $\sqrt{a}$ keine reellen, sondern 2 imaginäre Werthe. Wird

$\sqrt{-1} = i$ gesetzt, so hat z. B. $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$

die beiden Werthe $+3i$ und $-3i$. Sind u und v reelle Zahlen, so nennt man $u + iv$ eine complexe Größe, und die beiden Größen

$$u + iv \text{ und } u - iv$$

heißen conjugirt imaginär.

8. Die n^{te} Wurzel aus a, wo n eine positive ganze Zahl sein soll, d. h.

$x = \sqrt[n]{a}$, ist definirt durch die Gleichung $x^n = a$

und hat n Werthe; n heißt Wurzelexponent.

Aus der Definition folgt für positive ganze m und n

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m,$$

d. h. unter den n Werthen der linksstehenden Wurzelgröße kommt auch a^m vor. Für $mn = l$ wird hieraus

$$\sqrt[n]{a^l} = a^{\frac{l}{n}}.$$

Hebt man die Beschränkung auf, daß l ein ganzes Vielfaches von n ist, so gelangt man zur Definition der Potenzen mit gebrochenen Exponenten, z. B.

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Die Regeln 3) bis 7) gelten auch für diese. Dabei kann die Vieldeutigkeit der Wurzeln beseitigt werden durch die Bestimmung, daß a und b, sowie die Wurzelgrößen, reell und für den Fall gerader Wurzelexponenten positiv sein sollen.

III. Logarithmen.

9. Sind A und x positive Zahlen, erstere von 1 verschieden, so heißt die (reelle) Größe y, welche der Gleichung

$$A^y = x$$

genügt, der Logarithmus von x in Bezug auf die Grundzahl A,

$$y = \log x;$$

x heißt der Numerus.

Das Logarithmensystem mit der Grundzahl 10 heißt das gemeine oder Brigg'sche, man schreibt

$$y = \log x, \text{ wenn } 10^y = x \text{ ist.}$$

10. In jedem System ist der Logarithmus von 1 gleich 0 und der Logarithmus der Grundzahl gleich 1 denn es ist

$$A^0 = 1, \quad A^1 = A.$$

Ferner ist

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

Vermöge dieser Gleichungen läßt sich eine Multiplication, Division, Potenzirung, Wurzelausziehung mit Hülfe der Logarithmen zurückführen bezw. auf eine Addition, Subtraction, Multiplication, Division.

11. Im System der gemeinen Logarithmen ist

$$\begin{array}{ll} \log 1 = 0 & \\ \log 10 = 1 & \log 0{,}1 = -1 \\ \log 100 = 2 & \log 0{,}01 = -2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Die linksstehenden Gleichungen besagen: Die ganzen Einheiten eines Logarithmus (Kennziffer, Characteristik) betragen immer eins weniger als die Stellenzahl des Numerus. Um negative Logarithmen (bei echten Brüchen) zu vermeiden, wendet man dekadische Ergänzungen an und schreibt z. B.

$$\log 0{,}5 = 9{,}69897 - 10 \text{ statt } -0{,}30103.$$

Oder man schreibt auch

$$\log 0{,}5 = 0{,}69897 - 1,$$

und zwar hat man beim Logarithmus immer soviel negative Einheiten anzufügen, wie im Numerus (links) Nullen stehen.

12. Die Logarithmen mit der Grundzahl

$$e = 2{,}7182818\,..$$

nennt man natürliche und setzt

$$y = \log \operatorname{nat} x \text{ wenn } e^y = x \text{ ist.}$$

Man findet den Logarithmus einer Zahl in einem beliebigen System, wenn man ihren natürlichen mit Log e (genommen in dem betreffenden System) multiplicirt. Log e heißt der Modulus des Logarithmensystems; für die gewöhnlichen Logarithmen ist der Modulus

$$\log e = 0{,}4342945\,..$$

IV. Gleichungen.

13. Jede Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten x läßt sich auf die Form

$$x + a = 0$$

bringen und hat eine Wurzel

$$x = -a.$$

14. Zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten (x, y) haben im Allgemeinen die Form

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a_1x + b_1y &= c_1 \end{aligned}\right\}.$$ Dieselben ergeben je einen Werth für x und y, nämlich

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - ba_1}, \quad y = \frac{ac_1 - ca_1}{ab_1 - ba_1}.$$

Zur Auffindung dieser Lösung hat man folgende Methoden:

1) Die Substitutionsmethode: Man bestimmt eine Unbekannte (x) aus der ersten Gleichung und setzt den Werth in die zweite, so ergiebt sich eine Gleichung mit einer Unbekannten (y).

2) Die Combinationsmethode: Man bestimmt ein und dieselbe Unbekannte aus beiden Gleichungen und setzt die gefundenen Ausdrücke einander gleich.

3) Die Additions- oder Multiplicationsmethode (Methode der Multiplicatoren): Man multiplicirt beide Gleichungen mit solchen Factoren, daß bei der Addition nur eine Unbekannte übrig bleibt.

15. Bei einer größeren Anzahl von Gleichungen und ebensoviel Unbekannten wendet man entweder eine der genannten Methoden nacheinander immer auf je zwei Gleichungen an oder man schafft nach der Methode der Multiplicatoren alle Unbekannte bis auf eine fort.

Bei drei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, z

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned}$$

hat man

die	erste Gleichung	mit	$b_1c_2 - b_2c_1$
"	zweite "	"	$b_2c - bc_2$
"	dritte "	"	$bc_1 - b_1c$

zu multipliciren um y und z zu eliminiren. Ausdrücke von der Form dieser Multiplicatoren nennt man Determinanten und schreibt sie in folgender Weise

$$b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{oder} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

16. Jede Gleichung zweiten Grades (quadratische Gleichung) läßt sich auf die Form bringen

$$x^2 + ax + b = 0$$

und hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Die beiden Wurzeln sind (bei reellem a und b)

1) reell und verschieden, wenn $\frac{a^2}{4} > b$ ist,

2) reell und gleich, wenn $\frac{a^2}{4} = b$ ist,

3) conjugirt imaginär, wenn $\frac{a^2}{4} < b$ ist.

Zwischen den Coefficienten a und b und den Wurzeln x_1 und x_2 besteht der Zusammenhang

$$a = -(x_1 + x_2), \quad b = x_1 x_2.$$

17. Gleichungen von der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0$$

haben die Lösung

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}}.$$

18. Aus Exponentialgleichungen von der Form

$$a^x = b$$

findet man mit Hülfe der Logarithmen

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

V. Reihen.

19. In einer arithmetischen Reihe ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder constant.

Bezeichnet

s die Summe einer arithmetischen Reihe,
a das erste, t das letzte Glied,
d die constante Differenz,
n die Anzahl der Glieder, so ist

$$t = a + (n - 1)\,d,$$

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots\cdots + t$$
$$= n\,\frac{a + t}{2} = na + \frac{n(n - 1)}{2}\,d;$$

z. B.

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdot + m = \frac{m(m + 1)}{2}.$$

Sind a, b, c drei aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist b das arithmetische Mittel aus a und c,

$$b = \frac{a + c}{2}.$$

20. In einer geometrischen Reihe ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder constant.

Bezeichnet

s die Summe einer geometrischen Reihe,
a das erste, t das letzte Glied,
q den constanten Quotienten, den wir hier der Einfachheit wegen positiv annehmen,
n die Anzahl der Glieder, so ist

$$t = aq^{n-1},$$

$$s = a + aq + aq^2 + \cdots \quad + t$$
$$= a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{tq - a}{q - 1};$$

z. B.

$$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\cdots+\frac{1}{\alpha^{n-1}}=\frac{1}{\alpha^{n-1}}\cdot\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}.$$

Sind a, b, c drei aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe, so ist b das geometrische Mittel aus a und c,

$$b=\sqrt{ac}.$$

Die geometrische Reihe a, aq, aq^2 u. s. w. heißt steigend, wenn der Quotient $q>1$, fallend, wenn $q<1$ ist.

21. Eine unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots$ heißt convergent, wenn der Ausdruck

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$$

sich mit unendlich wachsendem n einem endlichen, bestimmten Werthe unbegrenzt nähert; dieser Werth heißt die Summe der unendlichen Reihe. Divergent heißt jede unendliche Reihe, die nicht convergent ist.

Die unendliche geometrische Reihe a, aq, $aq^2 \ldots\ldots$ ist convergent, so lange q ein echter Bruch bleibt, d. h. wenn die Reihe eine fallende ist; ihre Summe ist

$$a+aq+aq^2+\cdots=\frac{a}{1-q}.$$

Andrerseits convergirt die Reihe

$$1,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^2},\ \ldots\ldots \text{ für alle Werthe von } \alpha,$$

welche größer als eins sind, und zwar ist die Summe

$$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\cdots=\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

22. Die Reihe $u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots$ ist convergent, wenn ihre Glieder derart abnehmen, daß das Verhältniß zweier aufeinanderfolgender Glieder — beide positiv genommen —

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

bei unendlich wachsendem n kleiner als eins bleibt, d. h. für

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n=\infty} < 1.$$

So ist z. B. die Reihe a, $(a + d)q$, $(a + 2d)q^2$, ... convergent, so lange q ein echter Bruch bleibt, und zwar ist ihre Summe

$$a + (a + d)q + (a + 2d)q^2 + \cdots = \frac{a}{1 - q} + \frac{dq}{(1 - q)^2}.$$

23. Der binomische Lehrsatz. Für ein ganzes positives n ist

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Der Binomialcoefficient

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$$

ist gleich der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen von n Elementen zur m^{ten} Klasse, d. h. gleich der Anzahl der Combinationen, die entstehen, wenn von n Elementen je m verschiedene ausgewählt werden.

Für negative und gebrochene Exponenten (n) ist

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

unter der Bedingung $-1 < \frac{b}{a} < 1$, oder

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots$$

unter der Bedingung $-1 < x < 1$.

24. Die Reihe für den natürlichen Logarithmus

$$\log \text{nat}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

convergirt ebenfalls für $-1 < x < 1$.

Die Reihen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

gelten für beliebige (endliche) x.

VI. Zins- und Rentenrechnung.

25. Einfache Zinsen. Ein Kapital C wächst in n Jahren mit p % (Prozent) jährlichen Zinsen auf

$$K = C\,(1 + n \cdot 0{,}0p),$$

wo 0,0p für $\frac{p}{100}$ geschrieben ist.

Ein Kapital C, welches in n Jahren mit p % Zinsen auf K angewachsen ist, hatte die Größe

$$C = \frac{K}{1 + n \cdot 0{,}0p}.$$

Man nennt C Vorwerth, K Nachwerth. — Ein Kapital prolongiren heißt den Nachwerth, discontiren den Vorwerth berechnen.

27. Zinseszinsen. Werden alljährlich p % Zinsen zum Kapital hinzugerechnet, so wächst ein Kapital C in n Jahren auf

$$K = C \cdot 1{,}0p^n,$$

wo 1,0p für $1 + \frac{p}{100}$ geschrieben ist:

Man prolongirt ein Kapital auf n Jahre, indem man es mit $1{,}0p^n$ multiplicirt.

Ein Kapital C, das in n Jahren auf K angewachsen ist, hatte den Werth

$$C = \frac{K}{1{,}0p^n} = K \cdot 1{,}0p^{-n}:$$

Man discontirt ein Kapital auf n Jahre, indem man es durch $1{,}0p^n$ dividirt.

28. Die Nutzung (der Zinsgenuß) eines Kapitals C in n Jahren d. i. der Ueberschuß des um die Zinseszinsen vermehrten Kapitales über das ursprüngliche beträgt

$$C\,(1{,}0p^n - 1).$$

30. Renten. Der Werth sämmtlicher Renten ist immer nur für einen Zeitpunkt gegeben. Für einen beliebigen andern Zeitpunkt findet man den zugehörigen Werth durch Prolongirung oder Discontirung mit Hülfe der eben angegebenen Formeln (Nr. 27). Unter „Werth" ist immer der Summenwerth aller Rentenbezüge, berechnet auf ein und denselben Zeitpunkt, zu verstehen.

30a. Eine jährliche, dauernde (ewige) Rente r hat ein Jahr vor ihrem ersten Einlaufen den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p}.$$

Man nennt diese Rente Vollrente oder, wenn sie für einen weiter zurück gelegenen Zeitpunkt berechnet wird, hinteres Rentenstück.

30b. Eine jährliche, n mal einlaufende Rente r hat zur Zeit des letzten Eintreffens den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p}(1{,}0p^n - 1).$$

Man nennt diese Rente **vorderes Rentenstück**, wenn sie für den Zeitpunkt ein Jahr vor ihrem ersten Einlaufen berechnet wird, und **mittleres Rentenstück**, wenn sie auf einen früheren Zeitpunkt bezogen wird.

31. Ein Kapitel A, das alle Jahre um r vermehrt (+) oder vermindert (—) wird, erlangt mit Zinseszinsen in n Jahren den Werth

$$A \cdot 1{,}0p^n \pm \frac{r}{0{,}0p}(1{,}0p^n - 1).$$

32 a. Eine alle u Jahre wiederkehrende dauernde Rente R hat n Jahre vor dem ersten Einlaufen den Werh

$$\frac{R}{1{,}0p^u - 1}.$$

32 b. Eine alle u Jahre, im Ganzen n mal, einlaufende Rente R hat zur Zeit ihres letzten Eintreffens den Werth

$$\frac{R}{1{,}0p^u - 1}(1{,}0p^{nu} - 1).$$

33. Eine jährliche, dauernde Rente r, die immer nach n jähriger Unterbrechung m mal einläuft, hat n + 1 Jahre vor dem ersten Eintreffen den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p} \cdot \frac{1{,}0p^m - 1}{1{,}0p^{m+n} - 1}.$$

Läuft die Rente z. B. ein

am Ende des 7., 8., 9., 10. Jahres, dann wieder
" " " 17., 18., 19., 20. " u. s. f.

also 4 mal in je 10 Jahren, so hat sie gegenwärtig den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p} \cdot \frac{1{,}0p^4 - 1}{1{,}0p^{10} - 1}.$$

34 a. Eine jährliche, dauernde Rente, die mit r anfängt und jedesmal um d wächst, hat ein Jahr vor ihrem ersten Einlaufen den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p} + \frac{d}{0{,}0p^2}.$$

34 b. Eine jährliche Rente, die n mal einläuft, zuerst in der Höhe r, dann jedesmal um d vermehrt, hat zur Zeit ihres letzten Eintreffens den Werth

$$\left(\frac{r}{0{,}0p} + \frac{d}{0{,}0p^2}\right)(1{,}0p^n - 1) - \frac{nd}{0{,}0p}.$$

35. Eine jährliche Rente, die mit r anfängt, jedesmal um d wächst und dann, nachdem sie n mal eingelaufen ist, dauernd in der Höhe $r + (n - 1)d$ wiederkehrt, hat ein Jahr vor dem ersten Einlaufen den Werth

$$\frac{r}{0{,}0p} + \frac{d}{0{,}0p^2}\left(1 - \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\right).$$

36 a. Eine alle u Jahre wiederkehrende, dauernde Rente, die mit R anfängt und jedesmal um d wächst, hat u Jahre vor dem ersten Einlaufen den Werth

$$\frac{R}{1{,}0p^u - 1} + \frac{d}{(1{,}0p^u - 1)^2}.$$

36 b. Eine alle u Jahre wiederkehrende Rente, die n mal einläuft, zuerst in der Höhe R, dann jedesmal um d vermehrt, hat zur Zeit ihres letzten Eintreffens den Werth

$$\left(\frac{R}{1{,}0p^u - 1} + \frac{d}{(1{,}0p^u - 1)^2}\right)(1{,}0p^{nu} - 1) - \frac{nd}{1{,}0p^u - 1}.$$

37. Eine alle u Jahre wiederkehrende Rente, die mit R anfängt, jedesmal um d wächst und dann, nach dem sie n mal eingelaufen ist, dauernd in der Höhe $R + (n - 1)$ d fortgeht, hat u Jahre vor dem ersten Eintreffen den Werth

$$\frac{R}{1{,}0p^u - 1} + \frac{d}{(1{,}0p^u - 1)^2}\left(1 - \frac{1}{1{,}0p^{(n-1)u}}\right).$$

VII. Waldwerthrechnung.

38. Unter Bodenerwartungswerth versteht man die Summe der Jetztwerthe aller von einem Boden zu erwartenden Einnahmen, vermindert um die Jetztwerthe aller Kosten, welche zur Gewinnung jener Einnahmen aufgewendet werden müssen.

Bezeichnet u die Umtriebszeit,

A die Hauptnutzung am Ende der Umtriebszeit,

D_n eine Vor- oder Nebennutzung, die zuerst nach n und dann immer in u Jahren einläuft,

v die jährlich am Jahresschlusse aufzuwendenden Kosten,

c die Culturkosten, so berechnet sich bei p % Zinseszinsen der Bodenerwartungswerth (für den Anfang eines Umtriebes) nach der Formel

$$\frac{A + \Sigma D_n \cdot 1{,}0p^{u-n} - c \cdot 1{,}0p^u}{1{,}0p^u - 1} - \frac{v}{0{,}0p}.$$

Hierin bedeutet das Zeichen Σ, daß der dahinter stehende Ausdruck für alle im Umtrieb vorkommenden Vor- und Nebennutzungen zu bilden und hiervon die Summe zu nehmen ist.

39. Unter dem Erwartungswerth eines Bestandes versteht man die Summe der Jetztwerthe aller von dem Bestand zu erwartenden Einnahmen vermindert um die Jetztwerthe aller Kosten, welche zur Gewinnung jener Einnahmen aufgewendet werden müssen.

Bezeichnet m das gegenwärtige Bestandesalter,

B den Bodenwerth,

D_n wieder eine am Schlusse des n^{ten} Bestandesjahres einlaufende Vor- oder Nebennutzung u. s. w.,

so ist der Bestandeserwartungswerth

$$= \frac{A + \Sigma D_n \cdot 1{,}0p^{u-n} - \left(B + \frac{v}{0{,}0p}\right)(1{,}0p^{u-m} - 1)}{1{,}0p^{u-m}}.$$

40. Unter dem Kostenwerth eines Bestandes versteht man die Summe der Jetztwerthe aller zur Hervorbringung des Bestandes aufgewendeten Kosten vermindert um die Jetztwerthe aller Einnahmen, welche der Bestand schon geliefert hat. In der bisherigen Bezeichnung ist dieser Werth

$$= \left(B + \frac{v}{0{,}0p}\right)(1{,}0p^m - 1) + c \cdot 1{,}0p^m - \Sigma D_n \cdot 1{,}0p^{m-n}.$$

VIII. Rechtwinkelige und Polar-Coordinaten.

41. Unter einem rechtwinkeligen Coordinatensystem in der Ebene versteht man zwei sich rechtwinkelig schneidende Gerade, auf welchen je eine positive (und eine negative) Richtung angenommen ist. Die beiden Geraden heißen Axen und zwar die eine Abscissenaxe, die andere Ordinatenaxe; erstere wird gewöhnlich mit X, letztere mit Y bezeichnet. Der Schnittpunkt der beiden Axen heißt Anfangspunkt oder Nullpunkt.

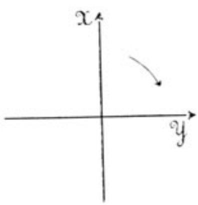

Fig. 1.

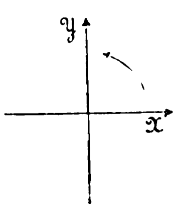

Fig. 2.

Um aus der positiven X Richtung in die positive Y Richtung zu gelangen, hat man eine Drehung um einen rechten Winkel auszuführen. Diese kann entweder

mit dem Uhrzeiger (Fig. 1) oder
gegen den Uhrzeiger (Fig. 2)

erfolgen. Dadurch sind zwei verschiedene Coordinatensysteme bestimmt, von denen das erstere in der Geodäsie, das andere in der analytischen Geometrie üblich ist.

42. Um in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem (Fig. 3) die Lage eines Punktes P zu bestimmen, fällt man von demselben Lothe auf die beiden Axen (PB und PC). Die Abschnitte der Axen vom Anfangspunkt bis zu den Fußpunkten der Lothe (AB und AC), und zwar mit dem Zeichen +, wenn sie auf der positiven und mit dem Zeichen —, wenn sie auf der negativen

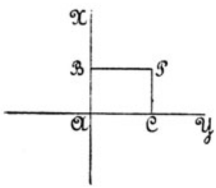

Fig. 3.

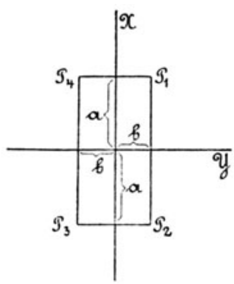

Fig. 4.

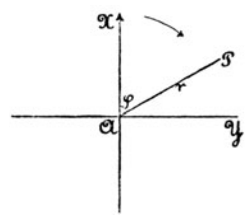

Fig. 5.

Seite der Axe liegen, nennt man die **rechtwinkeligen Coordinaten** des Punktes P. Auf der Abscissenaxe liegt die Abscisse (x), auf der Ordinatenaxe die Ordinate (y).

Für die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 4) sind z. B. die Coordinaten

$$\begin{array}{llll} x_1 = a & x_2 = -a & x_3 = -a & x_4 = a \\ y_1 = b & y_2 = b & y_3 = -b & y_4 = -b. \end{array}$$

43. Die Lage eines Punktes P (Fig. 5) kann ferner bestimmt werden durch seine Entfernung (r) vom Anfangspunkt A und den Winkel (φ), welchen die Verbindungslinie AP mit der positiven X-Richtung einschließt. Die Drehung, bei welcher dieser Winkel beschrieben wird, kann wieder mit oder gegen den Uhrzeiger erfolgen. Die Entfernung AP = r und der Winkel XAP = φ heißen die Polarcoordinaten des Punktes P; r heißt auch der Radiusvector; A der Pol, AX die Axe. Bei einer Vermehrung oder Verminderung des Winkels φ um 4 Rechte ändert sich die Lage von P nicht.

Der Winkel kann in Gradmaß oder Bogenmaß gegeben sein. Als Einheit (1°) gilt beim älteren Gradmaß der 90ste, beim neueren der 100ste Theil eines Rechten. Beim Bogenmaß

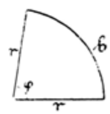

Fig. 6.

denkt man sich um den Scheitelpunkt des Winkels einen Kreis beschrieben (Fig. 6) und definirt den Winkel als Verhältniß des Bogens zum Radius,

$$\varphi = \frac{b}{r}.$$

Als Einheit gilt also der Winkel (Centriwinkel), dessen Bogen gleich dem Radius ist. Die Zahl π bezeichnet den flachen Winkel. Um einen in älterem Gradmaß gegebenen Winkel in Bogenmaß umzurechnen, hat man die Anzahl der Grade mit $\frac{\pi}{180}$ zu multipliciren.

IX. Die trigonometrischen Functionen.

44. Zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten x, y und den Polarcoordinaten r, φ eines Punktes P (Fig. 7) bestehen folgende Beziehungen, welche dazu dienen können, die trigonometrischen Functionen zu definiren:

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r},$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y},$$
$$\sec\varphi = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{r}{y}.$$

Der Winkel φ ist dabei in der Richtung positiv zu rechnen, in welcher man durch Drehung um einen Rechten aus der positiven

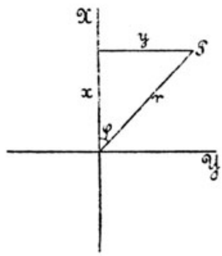

Fig. 7.

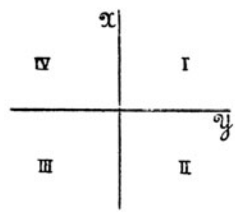

Fig. 8.

X Axe in die positive Y Axe gelangt. (In Fig. 7 mit dem Uhrzeiger.) Man kommt also aus dem ersten Quadranten über die positive Y Axe in den zweiten u. s. w. (z. B. Fig. 8).

Besondere Werthe der trigonometrischen Functionen*):

$\varphi =$	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\varphi =$	0	1	0	-1	wie bei 0°
$\cos\varphi =$	1	0	-1	0	
$\operatorname{tang}\varphi =$	0	∞	0	∞	
$\operatorname{cotg}\varphi =$	∞	0	∞	0	
$\sec\varphi =$	1	∞	-1	∞	
$\operatorname{cosec}\varphi =$	∞	1	∞	-1	

*) Die Winkel sind in altem Gradmaß angegeben.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}},$$
$$\operatorname{tang} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

45. Goniometrische Formeln*).

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$
$$1 + \operatorname{tang}\varphi^2 = \sec\varphi^2,$$
$$1 + \operatorname{cotg}\varphi^2 = \operatorname{cosec}\varphi^2, \qquad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin\varphi} &= \operatorname{cosec}\varphi, \\ \frac{1}{\cos\varphi} &= \sec\varphi, \\ \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} &= \operatorname{cotg}\varphi. \end{aligned}\right\}$$

In Worten: Der Sinus ist reciprok mit der Cosecante, der Cosinus mit der Secante, die Tangente mit der Cotangente.

46. Der Werth der trigonometrischen Functionen bleibt ungeändert, wenn der Winkel um ganze Vielfache von 360° vermehrt oder vermindert wird:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\varphi \pm k\cdot 360^\circ) &= \sin\varphi, \\ \cos(\varphi \pm k\cdot 360^\circ) &= \cos\varphi, \end{aligned}\right. \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

u. s. w.

Daher werden Sinus, Cosinus u. s. w. periodische Functionen genannt; 360° (oder 2π) heißt die Periode.

47.

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \varphi) &= \cos\varphi, \\ \cos(90^\circ - \varphi) &= \sin\varphi, \\ \operatorname{tang}(90^\circ - \varphi) &= \operatorname{cotg}\varphi, \\ \operatorname{cotg}(90^\circ - \varphi) &= \operatorname{tang}\varphi, \\ \sec(90^\circ - \varphi) &= \operatorname{cosec}\varphi, \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \varphi) &= \sec\varphi. \end{aligned}$$

*) Unter $\sin\varphi^2$ ist hier immer $(\sin\varphi)^2$ zu verstehen.

Diesen Gleichungen entspricht die Einrichtung der Logarithmentafeln, welche die Logarithmen der Functionen für 0 bis 45° und damit zugleich für 45 bis 90° enthalten.

48. Functionen von Winkeln über 90° können mit Hülfe folgender Tabelle auf Functionen von Winkeln unter 90° zurückgeführt werden:

Winkel	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
90° + φ	**cos φ**	**− sin φ**	**− cotg φ**	**− tang φ**	**− cosec φ**	**sec φ**
180° − φ	sin φ	− cos φ	− tang φ	− cotg φ	− sec φ	cosec φ
180° + φ	**− sin φ**	**− cos φ**	**tang φ**	**cotg φ**	**− sec φ**	**− cosec φ**
270° − φ	− cos φ	− sin φ	cotg φ	tang φ	− cosec φ	− sec φ
270° + φ	**− cos φ**	**sin φ**	**− cotg φ**	**− tang φ**	**cosec φ**	**− sec φ**
360° − φ	− sin φ	cos φ	− tang φ	− cotg φ	sec φ	− cosec φ.

z. B. $\sin 160° = \sin(90° + 70°) = \cos 70°$
oder $= \sin(180° - 20°) = \sin 20°$.

Für die Rechnung empfiehlt sich die Anwendung der ersten, dritten und fünften Horizontalreihe. Man kann sich den Inhalt der Tabelle und der vorhergehenden 6 Gleichungen (Nr. 47) in folgenden zwei **Regeln** merken:

1) Wird der Winkel zu 90 oder 270° addirt oder ergänzt, so geht Sinus über in Cosinus, Tangente in Cotangente, Secante in Cosecante, und umgekehrt, während bei 180 oder 360° die Functionen dieselben bleiben.

2) Die Vorzeichen sind dadurch bestimmt, daß im 1ten Quadranten alle Functionen, außerdem aber
   Sinus und Cosecante im 2ten,
   Cosinus und Secante im 4ten,
   Tangente und Cotangente im 3ten Quadranten
   positiv sind.

49.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \sin\alpha=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos\alpha^2-\sin\alpha^2,\qquad \cos\alpha=\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2-\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

$$1+\cos\alpha=2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,\qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$1-\cos\alpha=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2,\qquad \sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

50.

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta},$$
$$\operatorname{tang}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}.$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ+\alpha)=\operatorname{cotg}(45^\circ-\alpha)=\frac{1+\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha},$$
$$\operatorname{tang}(45^\circ-\alpha)=\operatorname{cotg}(45^\circ+\alpha)=\frac{1-\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha}.$$

$$\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\tan\alpha + \cot\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

X. Das rechtwinkelige Dreieck.

51. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

52. Im rechtwinkeligen Dreieck ist

der Sinus eines spitzen Winkels gleich der gegenüberliegenden Kathete dividirt durch die Hypotenuse,

der Cosinus gleich der anliegenden Kathete dividirt durch die Hypotenuse,

die Tangente gleich der gegenüberliegenden Kathete dividirt durch die anliegende,

die Cotangente gleich der anliegenden Kathete dividirt durch die gegenüberliegende,

die Secante gleich der Hypotenuse dividirt durch die anliegende Kathete und

die Cosecante gleich der Hypotenuse dividirt durch die gegenüberliegende Kathete.

In Formeln: (Fig. 9)

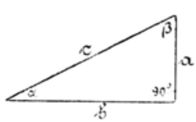

Fig. 9.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b};$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a}, \quad \sec\alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

53. Werden von den Endpunkten einer Strecke s Lothe auf eine Gerade gefällt, so ist die Länge der Projection

$$l = s \cdot \cos \alpha,$$

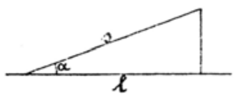

Fig. 10a.

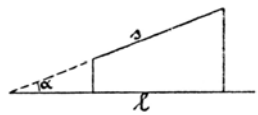

Fig. 10b.

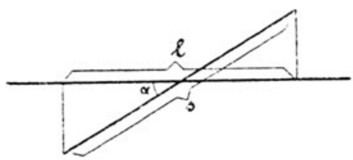

Fig. 10c.

wo α den Neigungswinkel der beiden Linien bezeichnet (Fig. 10a, b, c).*)

XI. Trigonometrische Höhenmessung.

54. Aus der horizontalen Entfernung e eines Gegenstandes (Fig. 11) und dem Höhenwinkel α erhält man die Höhe

$$h = e \operatorname{tang} \alpha.$$

Hierbei ist angenommen, daß der Fußpunkt des Gegenstandes sich mit dem Scheitelpunkt des Winkels α in derselben Horizontal-

---

*) Die Projection eines ebenen Flächenstückes F auf eine Ebene ist gleich F cos α, wenn α den Flächenwinkel bezeichnet, den die Ebene von F mit der Projectionsebene einschließt.

ebene befindet. Liegt der Fußpunkt um das Stück l tiefer (Fig. 12) so ist l zu dem obigen Ausdruck zu addiren.

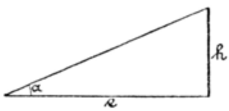

Fig. 11.

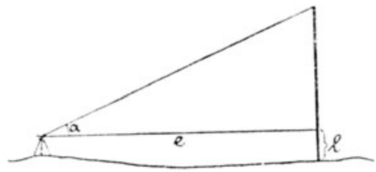

Fig. 12.

55. Erscheint die Spitze eines senkrechten Gegenstandes unter dem Höhenwinkel α, der Fußpunkt unter dem Winkel β, so ist die Höhe (Fig. 13)

$$h = e\,(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta).$$

Hier sind α und β als Höhenwinkel positiv, als Tiefenwinkel negativ zu nehmen. So ist z. B.

für $\alpha = 30°$ und $\beta = -20°$

$$h = e\,(\operatorname{tang} 30° + \operatorname{tang} 20°)$$

oder für $\alpha = -10°$ und $\beta = -40°$

$$h = e\,(\operatorname{tang} 40° - \operatorname{tang} 10°).$$

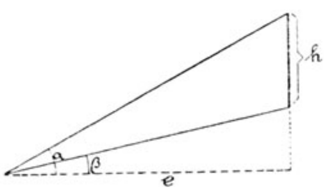

Fig. 13.

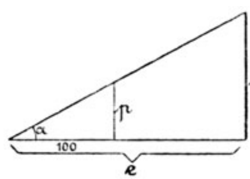

Fig. 14.

An Stelle des Höhen- oder Tiefenwinkels α kann auch das Steigungs- oder Gefällprozent p gegeben sein, und zwar ist (Fig. 14)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{p}{100} \text{ oder } p = 100 \operatorname{tang}\alpha, \text{ also } h = \frac{p}{100}\,e.$$

56. Der Höhenunterschied h_u zweier Punkte A und B der Erdoberfläche (Fig. 15), d. h. die Steigung von A nach B

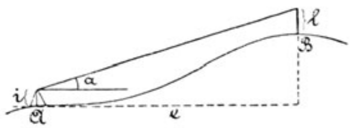

Fig. 15.

wird unter Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung näherungsweise gefunden nach der Formel

$$h_u = e \tan \alpha + (1 - k)\frac{e^2}{2R} + i - l.$$

Hierin bedeutet

- e die horizontale Entfernung von A und B,
- α den Höhenwinkel,
- k eine von der Größe der Strahlenbrechung und damit vom Luftzustande abhängige Zahl,
- R den Erdradius,
- i die Instrumenten- und
- l die Latten- oder Signalhöhe.

Durch Einsetzen der mittleren Werthe $k = 0{,}13$, $R = 6\,380\,000$ (Meter) erhält man für die Horizontcorrection

$$(1 - k)\frac{e^2}{2R} = 0{,}068\left(\frac{e}{1000}\right)^2.$$

XII. Coordinatenrechnung.

57. In der Geodäsie ist ein rechtwinkeliges Coordinatensystem üblich, dessen positive X-Axe nach Norden (oben) und dessen positive Y-Axe nach Osten (rechts) zeigt. Den Winkel, welchen eine Richtung AB mit der positiven X-Axe einschließt, nennt man das **Azimut** der Richtung AB und bezeichnet es kurz mit (AB). Dasselbe wird von der Nordrichtung aus positiv über Osten gerechnet und heißt demgemäß östliches Azimut (Drehung mit dem Uhrzeiger, Fig. 16). Zwei verschiedene Bezeichnungsweisen des Azimuts $(AB) = \varphi$ sind aus Fig. 17a und 17b ersichtlich.

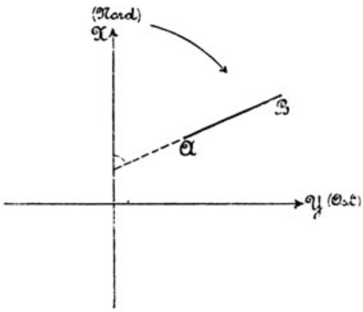

Fig. 16.

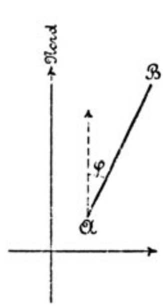

Fig. 17a

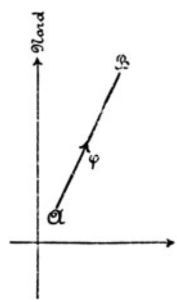

Fig. 17b.

Bei einer Aenderung des Azimuts um 360° bleibt die Richtung dieselbe. Jeder geraden Linie kommen zwei Azimute zu, die sich um 180° unterscheiden

$$(AB) = (BA) \pm 180°.$$

58. Bezeichnet w_1 (Fig. 18) den von der Zugrichtung $P_0P_1P_2$ links gelegenen Winkel der beiden Geraden P_0P_1 und

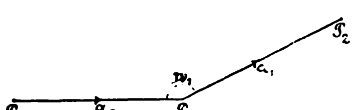

Fig. 18.

P_1P_2 (Brechungswinkel) und sind α_0 und α_1 die Azimute der Richtungen P_0P_1 und P_1P_2, so ist

$$\alpha_1 = \alpha_0 + w_1 \pm 180°.$$

Sind mehrere Punkte P_0, $P_1 \ldots P_n$, P_{n+1} durch einen geradlinigen Zug (Polygonzug) verbunden (Fig. 19) und bezeichnen $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Azimute der einzelnen Geraden (Seiten), $w_1, w_2 \ldots w_n$ die Brechungswinkel (Polygonwinkel), so ist

$$\alpha_n = \alpha_0 + (w_1 + w_2 + \cdots w_n) - n \cdot 180^\circ \pm k \cdot 360^\circ,$$

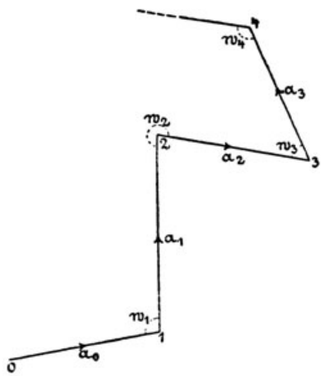

Fig. 19.

wo k eine der Zahlen 0, 1, 2 ... bedeutet und so zu wählen ist, daß α_n zwischen 0 und 360° liegt.

In einem geschlossenen Polygon von n Punkten ist die Winkelsumme

$$= (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

59. Aus Azimut und Länge der Verbindungslinie zweier Punkte, sowie den Coordinaten eines Punktes sind diejenigen des andern zu berechnen.

Gegeben: Die Coordinaten y und x des Punktes P, das Azimut (PP'), die Entfernung PP'.

Gesucht: Die Coordinaten y' und x' von P'.

Die Lösung der Aufgabe ist enthalten in den Formeln

$$y' = y + PP' \cdot \sin (PP')$$
$$x' = x + PP' \cdot \cos (PP').$$

Die Differenzen $(y'-y)$ und $(x'-x)$ nennt man Coordinatenstücke oder auch Sinus- bzw. Cosinusprodukte und bezeichnet sie mit Δy bzw. Δx.

Diese Aufgabe kommt wiederholt bei der **Berechnung eines Polygonzuges** zur Anwendung. Im geschlossenen Polygon muß man schließlich wieder auf die Anfangscoordinaten zurückkommen, d. h. die Summe der Coordinatenstücke muß Null sein,

$$\Sigma(y_n - y_{n-1}) = 0, \quad \Sigma(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

60. Aus den Coordinaten zweier Punkte ist das Azimut und die Länge der Verbindungslinie zu berechnen.

Gegeben: Die Coordinaten y und x von P
y' „ x' „ P'.

Gesucht: Das Azimut (PP') und die Entfernung PP'.

Nachdem das Azimut aus der Gleichung

$$\operatorname{tang}(PP') = \frac{y'-y}{x'-x}$$

berechnet ist, findet man

$$PP' = \frac{y'-y}{\sin(PP')} = \frac{x'-x}{\cos(PP')}.$$

Bei der Bestimmung des Azimuts ist zu beachten: die Vorzeichen von $\frac{y'-y}{x'-x}$ können sein

$$\text{erstens } \frac{+}{+}, \quad \text{zweitens } \frac{+}{-}, \quad \text{drittens } \frac{-}{-}, \quad \text{viertens } \frac{-}{+}.$$

Im ersten und dritten Falle sucht man den Winkel bei log tang auf und zwar ist derselbe im ersten Falle unmittelbar aus der Tafel zu entnehmen, während im dritten 180° zu addiren sind. Im zweiten und vierten Falle schlägt man bei der Cotangente auf und hat Neunzig Grad zu addiren, wenn das Zeichen — im Nenner, Zweihundert und siebzig, wenn es im Zähler steht.

Zur Probe kann man nach der Formel

$$\operatorname{tang}(45^\circ + (PP')) = \frac{x' + y' - (x + y)}{x' - y' - (x - y)}$$

rechnen.

Von den beiden Werthen für PP′ ist derjenige genauer, dessen Zähler und Nenner die größeren Zahlen sind. Zur directen Bestimmung der Entfernung PP′ aus den Coordinaten dient die Formel

$$PP' = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2}.$$

XIII. Das schiefwinkelige Dreieck.

61. Wir bezeichnen die Seiten mit a, b, c, die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ρ, den des umschriebenen mit r, die halbe Summe der Seiten mit s.

Der Sinussatz. In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, und zwar ist

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Dieser Satz dient zur Berechnung des Dreiecks, wenn gegeben sind

1) eine Seite und die Winkel oder
2) zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.

62. Der Cosinussatz. In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Hieraus folgen die zur logarithmischen Berechnung geeigneten Formeln

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

oder wenn $\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

eingeführt wird:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\rho}{s-a},$$

und ebenso

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\rho}{s-b}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\rho}{s-c}.$$

Hiernach findet man die Winkel des Dreiecks, wenn
3) die drei Seiten gegeben sind.

63. Die Gaußischen Formeln

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

oder die daraus folgende Tangentenformel

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

dienen zur Berechnung der fehlenden Dreieckstücke, wenn
4) zwei Seiten (a, b) und der eingeschlossene Winkel ($\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$) gegeben sind.

Letztere Aufgabe kann man auch unter Einführung eines Hülfswinkels (φ) lösen durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \tang \varphi = \dfrac{a \sin \gamma}{b}, \\ \tang \alpha = \dfrac{\sin \gamma \sin \varphi}{\sin (\gamma - \varphi)}. \end{cases}$$

XIV. Geodätische Aufgaben.

64. Vorwärtseinschneiden. Aus den Coordinaten zweier Punkte A, B und den Winkeln des Dreiecks ABC sind die Coordinaten des dritten Punktes C zu berechnen.

Gegeben: Die Coordinaten y_a und x_a von A,
y_b „ x_b „ B,
die Winkel α, β, γ.

Gesucht: Die Coordinaten y und x von C.

Die Punkte A, B, C sollen links herum aufeinander folgen (Fig. 20).

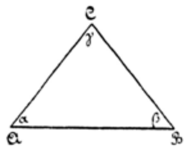

Fig. 20.

Azimut und Länge der Dreiecksseite AB findet man nach den Formeln

$$\tang (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a},$$

$$AB = \frac{y_b - y_a}{\sin (AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos (AB)}.$$

Dann berechnet man die Azimute der Dreiecksseiten AC und BC,

$$(AC) = (AB) - \alpha, \quad (BC) = (AB) + \beta \pm 180^\circ$$
$$[\text{Probe } (AC) - (BC) = \gamma],$$

ferner die Längen

$$AC = \frac{AB}{\sin\gamma}\sin\beta, \quad BC = \frac{AB}{\sin\gamma}\sin\alpha$$

und schließlich die Coordinaten von C,

$$y = y_a + AC \cdot \sin(AC) = y_b + BC \cdot \sin(BC)$$
$$x = x_a + AC \cdot \cos(AC) = x_b + BC \cdot \cos(BC).$$

65. Kann man in der Geraden AB nicht visiren, dagegen die Winkel $CAP = \varphi$ und $CBQ = \psi$ messen (Fig. 21), und

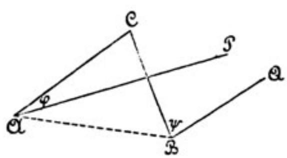

Fig. 21.

sind außer den Coordinaten von A und B diejenigen von P und Q bekannt (y_p, x_p und y_q, x_q), so bestimmt man zunächst die Azimute (AP) und (BQ) aus

$$\operatorname{tang}(AP) = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a} \text{ und } \operatorname{tang}(BQ) = \frac{y_q - y_b}{x_q - x_b}.$$

Durch Subtraction der (rechtsherum gerechneten) Winkel φ bzw. ψ erhält man die Azimute der Dreiecksseiten AC und BC, nämlich

$$(AC) = (AP) - \varphi, \quad (BC) = (BQ) - \psi.$$

Das Azimut der Grundlinie AB ist wie vorher aus den Coordinaten von A und B zu berechnen, und es ergeben sich dann die Dreieckswinkel aus den Formeln

$$\alpha = (AB) - (AC),$$
$$\beta = (BC) - (AB) \pm 180°,$$
$$\gamma = (AC) - (BC).$$

Damit ist die Aufgabe auf die vorstehende zurückgeführt.

66. Rückwärtseinschneiden. Die gegenseitige Lage dreier Punkte A, B, C (Fig. 22) ist bestimmt durch die Entfernungen

$$AB = c, \quad CB = a$$

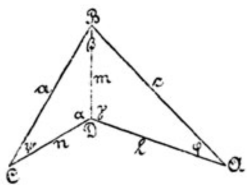

Fig. 22.

und den Winkel

$$ABC = \beta.$$

Von einem vierten Punkte D aus sind die Winkel

$$ADB = \gamma \text{ und } CDB = \alpha$$

gemessen; es sollen daraus die Winkel

$$DAB = \varphi \text{ und } DCB = \psi,$$

sowie die Entfernungen

$$AD = l, \quad BD = m, \quad CD = n$$

berechnet werden.

Diese zuerst von Snellius behandelte Aufgabe wird gewöhnlich nach einem späteren Bearbeiter Pothenot benannt.

Die Winkel φ und ψ findet man aus den Formeln

$$\varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\begin{cases} \tang \mu = \dfrac{c \sin \alpha}{a \sin \gamma}, \\ \tang \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \tang \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cotg (\mu + 45°), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}(\varphi - \psi), \\ \psi = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}(\varphi - \psi). \end{cases}$$

Die Entfernungen l, m, n ergeben sich nach dem Sinussatze:

$$l = \frac{c}{\sin\gamma}\sin(\gamma + \varphi), \quad n = \frac{a}{\sin\alpha}\sin(\alpha + \psi),$$

$$m = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\varphi = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\psi.$$

Geometrisch wird die Aufgabe gelöst, indem man über a einen Kreisbogen construirt, der den Winkel α, und über c einen, der den Winkel γ faßt. D ist der Schnittpunkt der beiden Kreise. Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn D auf dem Kreise liegt, der durch die drei Punkte A, B, C geht.

67. Die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte. Aus der Entfernung zweier (unzugänglicher) Punkte A, B (Fig. 23) und den auf zwei anderen Punkten P und Q gemessenen Winkeln

$$APB = \alpha, \quad BPQ = \beta, \quad PQA = \gamma, \quad AQB = \delta$$

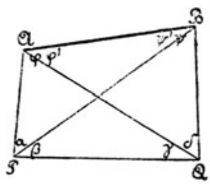

Fig. 23.

sollen die Winkel

$$BAP = \varphi, \quad BAQ = \varphi', \quad QBA = \psi, \quad PBA = \psi',$$

sowie die Entfernungen

$$AP, \quad BP, \quad AQ, \quad BQ \text{ und } PQ$$

berechnet werden.

Die Winkel φ und φ' findet man mit Hülfe der Formeln

$$\varphi - \varphi' = 180° - (\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang}\mu = \dfrac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta)}{\sin\beta\sin\delta}, \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')\operatorname{cotg}(\mu-45^\circ). \end{array}\right.$$

In gleicher Weise lassen sich die Winkel ψ und ψ' berechnen; doch können dieselben auch aus den Formeln

$$\psi = 180^\circ - (\varphi' + \delta)$$
$$\psi' = 180^\circ - (\varphi + \alpha)$$

bestimmt werden.

Die gesuchten Entfernungen ergeben sich durch Anwendung des Sinussatzes.

XV. Analytische Geometrie.

68. Wir legen das rechtwinkelige Coordinatensystem zu Grunde, in welchem man eine Drehung von 90° gegen den Uhrzeiger ausführen muß, um aus der positiven x-Richtung in die positive y-Richtung zu gelangen.

Die gerade Linie

(BC in Fig. 24) hat die Gleichung

$$y = a\,x + b.$$

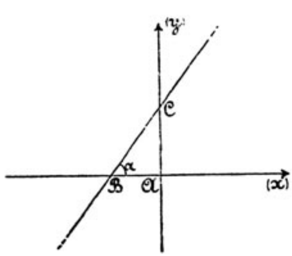

Fig. 24.

Darin bedeutet $b = AC$ den Abschnitt auf der y-Axe, $a = \dfrac{AC}{AB} = \operatorname{tang}\alpha$ die Tangente des Winkels, den die gerade Linie mit der Abscissenaxe bildet, von der positiven x-Richtung aus gegen den Uhrzeiger gerechnet.

Die Coordinaten der Schnittpunkte zweier Geraden

$$y = a_1x + b_1,$$
$$y = a_2x + b_2$$

erhält man durch Auflösung der beiden Gleichungen nach den Unbekannten x und y.

Die Kegelschnitte oder Curven zweiter Ordnung.

69. Ein Kreis mit dem Radius r hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

wenn der Coordinatenanfang im Mittelpunkt liegt (Fig. 25a), und die Gleichung

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

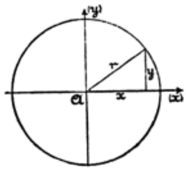

Fig. 25a.

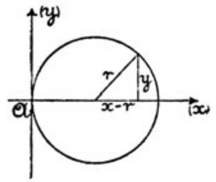

Fig. 25b.

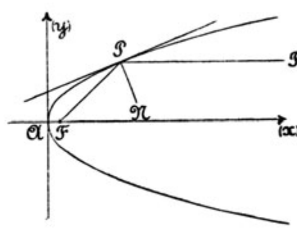

Fig. 26.

wenn der Coordinatenanfang auf der Peripherie liegt und die Abscissenaxe durch den Mittelpunkt geht (Fig. 25b).

70. Die Gleichung

$$y^2 = px \text{ oder } y = \sqrt{px}$$

stellt eine Apollonische Parabel dar (Fig. 26). Der Anfangspunkt der Coordinaten fällt mit dem Scheitel, die x-Richtung mit der Axe der Parabel zusammen.

Der Punkt F auf der Axe, der vom Scheitel A um die Strecke $AF = \frac{1}{4}p$ entfernt ist, heißt Brennpunkt. Ein durch F und einen Punkt der Parabel gehende Gerade heißt der Brennstrahl oder Radiusvector dieses Punktes.

Jede Tangente schließt mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes und der Axe gleiche Winkel ein; die Normale PN (in Fig. 26) halbirt also den Winkel FPF_1, wenn PF_1 parallel zur Axe verläuft.

Durch Drehung der Parabel um ihre Axe entsteht das Paraboloid (Rotationsparaboloid). Jeder Schnitt senkrecht zur Axe ist ein Kreis, jeder Schnitt in der Axe ist eine Parabel. (Brennspiegel.)

71. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

stellt eine Ellipse dar (Fig. 27). Der Coordinatenanfang liegt

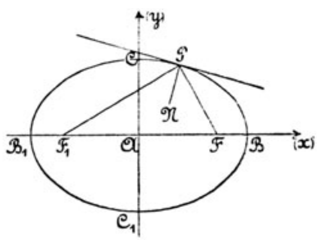

Fig. 27.

im Mittelpunkt, die Coordinatenaxen fallen mit den Axen der Ellipse zusammen.

$a = AB = AB_1$ ist die große,
$b = AC = AC_1$ die kleine Halbaxe.

Die Größe $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ heißt die lineare, $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die numerische Excentricität. Die Punkte F und F_1 auf der großen Axe, welche um die Strecke $e = AF = AF_1$ vom Mittelpunkt A entfernt sind, heißen Brennpunkte.

Für jeden Punkt (P) der Ellipse ist die Summe der Brennstrahlen gleich der großen Axe,

$$PF + PF_1 = 2a.$$

Die Tangente schließt mit den beiden Brennstrahlen des Berührungspunktes gleiche Winkel ein, die Normale halbirt also den Winkel der Brennstrahlen.

Durch Drehung der Ellipse um die große Axe entsteht ein verlängertes Rotationsellipsoid, durch Drehung um die kleine Axe ein abgeplattetes. Für die Erde ist

die halbe große Axe . . $a = 6\,378\,249$ Meter,
die halbe Rotationsaxe $b = 6\,356\,515$ „

72. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

stellt eine Hyperbel dar (Fig. 28). Der Coordinatenanfang liegt

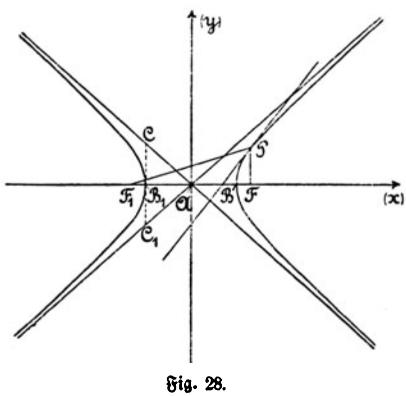

Fig. 28.

im Mittelpunkt, die Abscissenlinie fällt mit der Hauptaxe, die Ordinatenlinie mit der Nebenaxe der Hyperbel zusammen.

$$a = AB = AB_1 \text{ und } b = B_1C = B_1C_1$$

sind die beiden Halbaxen.

Die Größe $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt die lineare, $\varepsilon = \frac{e}{a}$ die numerische Excentricität. Die Punkte F und F_1 auf der Hauptaxe, welche um die Strecke $e = AF = AF_1$ vom Mittelpunkt A entfernt sind, heißen Brennpunkte.

Für jeden Punkt P der Hyperbel ist die Differenz der Brennstrahlen gleich der Hauptaxe,

$$PF_1 - PF = 2a$$

für den rechten,

$$PF - PF_1 = 2a$$

für den linken Zweig der Hyperbel.

Die Tangente im Punkte P halbirt den Winkel FPF_1 der beiden Brennstrahlen.

Die beiden geraden Linien (AC und AC_1) mit den Gleichungen

$$y = \frac{b}{a}x \text{ und } y = -\frac{b}{a}x$$

heißen die Asymptoten und berühren die Hyperbel im Unendlichen.

Ist $a = b$, so heißt die Hyperbel gleichseitig.

73. Die Gleichung

$$(y - ax - b)(y - a_1x - b_1) = 0$$

stellt ein Linienpaar dar, d. h. ein System von zwei geraden Linien.

$$y = ax + b \text{ und } y = a_1x + b_1.$$

74. Von den

Curven höherer Ordnung

betrachten wir nur die Semicubische oder Neil'sche Parabel, welche die Gleichung

$$y^2 = px^3 \text{ oder } y = \sqrt{px^3}$$

hat (Fig. 29). Der Scheitel (die Spitze) der Curve liegt im Coordinatenanfang (A), die Axe derselben fällt in die Abscissenlinie.

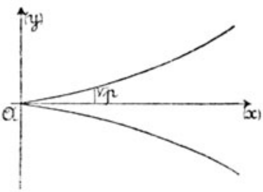

Fig. 29.

Durch Rotation der Neil'schen Parabel um ihre Axe entsteht das **Neiloid**.

XVI. Flächenberechnung.

75. Als **Flächeneinheit** gilt ein **Quadrat**, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist.

76. Ein **Parallelogramm** hat den Flächeninhalt

$$F = gh,$$

wo g die Grundlinie, h die Höhe bedeutet.

77. Für das **Dreieck** gelten die Formeln

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2} gh \\ &= \rho s \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{abc}{4r} \\ &= \tfrac{1}{2} ab \sin\gamma \\ &= \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} \\ &= 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \end{aligned}$$

Hierin bedeuten:
a, b, c die drei Seiten,
α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel,
ρ den Radius des eingeschriebenen,
r den des umschriebenen Kreises,
$s = \frac{a+b+c}{2}$ den halben Umfang.

78. Ein Paralleltrapez mit den parallelen Seiten a und c, der Höhe h und der Mittellinie m hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{a + c}{2} h = mh.$$

79. Ein Polygon von n Seiten, dessen Eckpunkte die rechtwinkeligen Coordinaten

$$\begin{cases} y_1 \\ x_1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} y_2 \\ x_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} y_3 \\ x_3 \end{matrix}, \ldots \begin{matrix} y_n \\ x_n \end{matrix}$$

haben, läßt sich berechnen nach einer der Formeln

$$\begin{aligned} 2F = & \quad (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ & + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (y_n + y_1)(x_1 - x_n), \\ -2F = & \quad (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) \\ & + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (x_n + x_1)(y_1 - y_n), \end{aligned}$$

oder einfacher

$$\begin{aligned} 2F = & \quad y_1 (x_2 - x_n) \\ & + y_2 (x_3 - x_1) \\ & + y_3 (x_4 - x_2) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ & + y_n (x_1 - x_{n-1}), \\ -2F = & \quad x_1 (y_2 - y_n) \\ & + x_2 (y_3 - y_1) \\ & + x_3 (y_4 - y_2) \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ & + x_n (y_1 - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Hierbei ist das in der Geodäsie übliche Coordinatensystem zu Grunde gelegt (x nach Norden, y nach Osten), und die Punkte 1, 2, 3 . . . folgen so aufeinander, daß die Polygonfläche zur Linken liegt. Vertauscht man y mit x, oder zählt die Punkte in umgekehrter Reihenfolge, so ändert sich das Vorzeichen von F.

80. Bezeichnet r den Radius, $d = 2r$ den Durchmesser, $u = 2\pi r$ den Umfang eines Kreises, so ist die Kreisfläche

$$F = \pi r^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2 = \tfrac{1}{2} ur = \tfrac{1}{4} ud.$$

Ein Kreisausschnitt oder Sector mit dem Bogen b und dem Centriwinkel φ (in Bogenmaß) hat den Inhalt

$$F = \tfrac{1}{2} br = \tfrac{1}{2} \varphi r^2.$$

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes oder Segmentes ist

$$F = \tfrac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi).$$

Der von zwei concentrischen Kreisen mit den Radien R und r gebildete Ring hat den Flächeninhalt

$$F = \pi (R^2 - r^2).$$

Bezeichnet $U = \pi D$ den Umfang des größeren, $u = \pi d$ den des kleineren Kreises, $b = R - r$ die Breite des Kreisringes, so hat man auch

$$F = \frac{U + u}{2} b.$$

Handelt es sich um einen Baumquerschnitt und betrachtet man den Kreisring als den in t Jahren erfolgten Zuwachs der kleineren Kreisfläche (πr^2), so ist das jährliche Zuwachsprozent

$$p = \frac{400\, b}{t\, d}\left(1 + \frac{b}{d}\right),$$

d. h. der durchschnittliche jährliche Zuwachs beträgt $p\%$ der Anfangsfläche. Bezeichnet $n = \frac{t}{b}$ die Anzahl der Jahresringe, welche durchschnittlich auf die Längeneinheit gehen, so wird

$$p = \frac{400}{n\, d}\left(1 + \frac{b}{d}\right).$$

81. Eine Ellipse mit den Halbaxen a und b hat den Flächeninhalt

$$F = \pi ab.$$

82. Zur angenäherten Berechnung einer Fläche (Fig. 30) von der Länge h, theilt man h in n Abschnitte $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$, bestimmt die Breiten $g_0, g_1, g_2, \ldots\ldots g_n$ und setzt

$$2F = l_1(g_0 + g_1) + l_2(g_1 + g_2) + \cdots\cdot l_n(g_{n-1} + g_n).$$

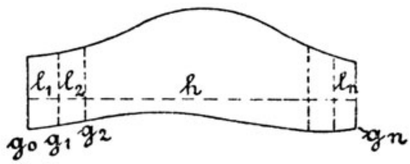

Fig. 30.

Sind die n Sectionen von gleicher Länge, so wird

$$F = \frac{h}{n}\left(\tfrac{1}{2}g_0 + g_1 + g_2 + \cdots\cdot + g_{n-1} + \tfrac{1}{2}g_n\right),$$

oder genauer, wenn n eine gerade Zahl ist, nach der Simpson-schen Regel

$$F = \frac{h}{3n}(g_0 + 4[g_1 + g_3 + \cdots g_{n-1}] + 2[g_2 + g_4 + \cdots g_{n-2}] + g_n).$$

XVII. Körperberechnung.

83. Als Raumeinheit gilt das Volumen eines Würfels, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist.

84. Ein Prisma hat den körperlichen Inhalt

$$J = Gh,$$

wo G die Grundfläche, h die Höhe, d. h. den senkrechten Abstand der beiden Endflächen bedeutet, oder

$$J = Q\,s,$$

wenn s die Länge der Seitenkanten und Q der senkrecht dazu gemessene Querschnitt (Normalschnitt) ist.

Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma (prismatischer Abschnitt) mit den Seitenkanten a, b, c und dem Normalschnitt Q hat das Volumen

$$J = Q\,\frac{a+b+c}{3}.$$

85. Der Inhalt einer Pyramide ist

$$J = \tfrac{1}{3}\,Gh,$$

und wenn dieselbe durch eine zur Grundfläche (G) parallele Ebene (g) im Abstande h abgestumpft ist.

$$J = \tfrac{1}{3}\left(G + g + \sqrt{Gg}\right)h.$$

86. Ein von zwei parallelen Grundflächen G und g, sowie von Paralleltrapezen, Parallelogrammen oder Dreiecken als Seitenflächen begrenzter Körperstumpf wird berechnet nach der Formel

$$J = \tfrac{1}{6}\,(G + g + 4\gamma)\,h.$$

Hierin bezeichnet γ den parallel zu den beiden Endflächen in der Mitte ihres Abstandes (h) geführten Querschnitt (Mittelfläche, Mittelfigur).

Sind G' und g' die Querschnitte in $^1/_4$ bzw. $^3/_4$ der Höhe, so gilt auch die Formel

$$J = \tfrac{1}{3}\,(2G' + 2g' - \gamma)\,h.$$

87. Die Oberfläche eines geraden Cylinders setzt sich zusammen aus den beiden Grundkreisen $2G = 2\pi R^2$

und dem Mantel

$$M = 2\pi Rh,$$

wenn R der Radius des Grundkreises ist.

88. Der Mantel eines geraden Kegels hat den Flächeninhalt

$$M = \pi Rs,$$

wenn s die Seitenlinie bedeutet.

Beim abgestumpften geraden Kegel (Fig. 31) ist der Mantel

$$M = \pi (R + r) s,$$

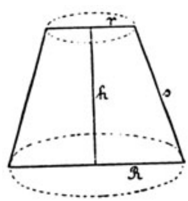

Fig. 31.

also die Oberfläche

$$O = \pi (R^2 + r^2) + \pi (R + r) s.$$

89. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist das Vierfache eines ihrer größten Kreise,

$$O = 4\pi r^2.$$

Die Kugelzone d. h. der Theil der Kugeloberfläche, der zwischen zwei parallelen, die Kugel schneidenden Ebenen liegt, ist

$$F = 2\pi rh,$$

wenn h die Höhe der Zone d. h. den senkrechten Abstand der beiden Ebenen bezeichnet.

Die Fläche eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ (in Bogenmaß) ist

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) r^2,$$

oder wenn die Winkel in älterem Gradmaße gegeben sind (A, B, C)

$$F = \frac{\pi}{180^\circ}(A + B + C - 180^\circ)\, r^2.$$

Die Größe

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

heißt sphärischer Excess; durch Einführung desselben wird

$$F = \frac{\pi}{180^\circ}\,\varepsilon r^2 \text{ oder umgekehrt } \varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot\frac{F}{r^2}.$$

Auf der Erdoberfläche beträgt der sphärische Excess für ein Dreieck von 10 Quadratmeilen Inhalt fast 3″.

90. Der Inhalt eines Cylinders mit der Grundfläche $G = \pi R^2$ und der Höhe h ist

$$C = Gh = \pi R^2 h.$$

91. Der Inhalt eines Paraboloids ist

$$P = \tfrac{1}{2}\, Gh = \gamma h,$$

wo γ wieder die Mittelfläche bedeutet.

Für ein abgestumpftes Paraboloid mit den parallelen Endflächen G und g ist der Inhalt

$$P_a = \tfrac{1}{2}(G + g)\, h$$

oder auch

$$= \gamma h.$$

92. Der Inhalt des Kegels ist

$$K = \tfrac{1}{3}\, Gh = \tfrac{1}{3}\,\gamma h,$$

der des abgestumpften Kegels

$$K_a = \tfrac{1}{3}\left(G + g + \sqrt{Gg}\right) h$$
$$= \tfrac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\, h = \pi\left(\tfrac{R+r}{2}\right)^2 h + \tfrac{\pi}{3}\left(\tfrac{R-r}{2}\right)^2 h$$
$$= \tfrac{\pi}{12}(D^2 + d^2 + Dd)\, h = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{D+d}{2}\right)^2 h + \tfrac{\pi}{12}\left(\tfrac{D-d}{2}\right)^2 h$$
$$= \gamma h + \tfrac{\pi}{48} v^2 h^3.$$

Hierin bedeutet $D = 2R$ den größeren, $d = 2r$ den kleineren Durchmesser und $v = \frac{D-d}{h}$ die Abholzigkeit d. h. die Abnahme des Durchmessers auf je eine Längeneinheit der Höhe.

93. Für Paraboloid und Kegel gilt die gemeinsame Formel

$$\left.\begin{matrix} P_a = \\ K_a = \end{matrix}\right\} \tfrac{1}{4}(g + 3\gamma')\, h,$$

wo g eine Endfläche und γ' den Querschnitt bedeutet, der um $\frac{2}{3}h$ von g entfernt ist.

Für die vollen Körper ist $(g = 0)$

$$\left.\begin{matrix} P = \\ K = \end{matrix}\right\} \tfrac{3}{4}\gamma' h.$$

Es ist dann γ' der Querschnitt in $^1/_3$ Höhe (von der Grundfläche aus gerechnet).

94. Der Inhalt eines Reiloids ist

$$N = \tfrac{1}{4} G h = 2\gamma h = \tfrac{27}{32}\gamma' h$$

und der eines abgestumpften

$$N_a = \tfrac{1}{4}\left(G + \sqrt[3]{G^2 g} + \sqrt[3]{G g^2} + g\right) h.$$

95. Ein Körper, der zwischen zwei parallelen Endflächen (g und G) liegt und dessen paralleler Querschnitt im Abstande x von der einen Endfläche (g)

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

ist, hat das Volumen

$$V = ah + \tfrac{1}{2}bh^2 + \tfrac{1}{3}ch^3 + \tfrac{1}{4}dh^4,$$

wenn h den senkrechten Abstand der beiden Endflächen bedeutet.

Für derartige Körper gelten auch die Formeln

$$V = \tfrac{1}{6}(G + g + 4\gamma)h$$

und

$$V = \tfrac{1}{3}(2G' + 2g' - \gamma)h,$$

wenn

$$\gamma = f\left(\tfrac{1}{2}h\right), \quad g' = f\left(\tfrac{1}{4}h\right), \quad G' = f\left(\tfrac{3}{4}h\right)$$

ist (vgl. Nr. 86).

Beim Paraboloid verhalten sich die Querschnitte (senkrecht zur Axe) wie die zugehörigen Höhen (von der Spitze aus gerechnet), beim Kegel wie die Quadrate der Höhen und beim Neiloid wie die dritten Potenzen.

Die eben angeführten Formeln gelten also auch für die genannten Körper.

Ebenso läßt sich der Inhalt der Kugel und des Rotationsellipsoids nach diesen Formeln berechnen ($d = 0$).

96. Körper, die in eine Spitze verlaufen und deren parallele Querschnitte sich verhalten wie die m^{ten} Potenzen der zugehörigen Höhen (von der Spitze aus gerechnet), haben das Volumen

$$V = \frac{1}{m+1} Gh.$$

m bedeutet eine positive Zahl; für $m = 1, 2, 3$ erhält man bzw. wieder die Formeln für die vollen Paraboloide, Kegel, Neiloide.

97. Mit Hülfe der Formzahl f, der Höhe h und eines im Abstande l von der Grundfläche G gemessenen Querschnittes Q bestimmt man den Inhalt eines Baumstammes nach der Formel

$$V = fQh,$$

woraus umgekehrt $f = \frac{V}{Qh}$ folgt.

Verhalten sich die Querschnitte wie die m^ten^ Potenzen der zugehörigen Höhen, so ist

$$f = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{h}\right)^m}.$$

Für das Paraboloid ist $m = 1$ also $f = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{l}{h}}$,

für den Kegel ist $m = 2$ also $f = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{h}\right)^2}$,

für das Neiloid ist $m = 3$ also $f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{l}{h}\right)^3}$.

Ist l eine constante Länge (Brusthöhe 1,3 Meter), so ergeben sich die „Brusthöhenformzahlen“. Dieselben nehmen mit wachsender Höhe ab.

Nimmt man das Verhältniß $l : h$ constant, z. B. $1 : 20$, so entstehen die von der Höhe unabhängigen „echten oder Normalformzahlen“.

Wird $l = 0$ genommen, d. h. nur der oberhalb des gemessenen Querschnittes (Q) liegende Theil des Baumes berücksichtigt, so wird $f = \frac{1}{m+1}$. „Absolute Formzahl“.

98. Bezeichnet h′ diejenige Höhe, in welcher der Durchmesser eines Baumstammes halb so groß ist, wie in der Grundfläche G, so gilt für das Paraboloid und den Kegel die gemeinsame Formel

$$\left.\begin{matrix} P = \\ K = \end{matrix}\right\} \tfrac{2}{3}\, Gh',$$

während für das Neiloid

$$N = 0{,}6756\ldots\ Gh' = \tfrac{2}{3}\,Gh' \cdot 1{,}013\ldots \text{ ist.}$$

Der Punkt des Baumes, in dem der Durchmesser die Hälfte des unteren beträgt, heißt nach Preßler „Richtpunkt“.

99. Der Inhalt einer Kugel vom Radius r ist

$$J = \tfrac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Die körperliche Kugelzone hat das Volumen

$$J = \tfrac{1}{6}\,\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2),$$

wo a und b die Radien der Grundkreise bedeuten und h die Höhe der Zone ist.

Ein Kugelabschnitt (Segment) ist

$$= \tfrac{1}{3}\,\pi h^2\,(3r - h),$$

ein Kugelausschnitt (Sector)

Fig. 32.

$$= \tfrac{2}{3}\,\pi r^2 h \quad (\text{Fig. } 32).$$

100. Die Guldin'sche Regel:

Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich der erzeugenden Linie mal dem Wege ihres Schwerpunktes;

der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich der erzeugenden Fläche mal dem Wege ihres Schwerpunktes.

101. Zur angenäherten Berechnung eines Körpers dienen dieselben Formeln, welche oben für den Flächeninhalt gegeben sind (Nr. 82). Unter $g_0, g_1 \dots g_n$ sind dann die Querschnitte des Körpers zu verstehen.

XVIII. Die Rechnung mit kleinen Zahlen.

102. Bedeutet α eine so kleine Zahl, daß man ohne wesentlichen Fehler α^2 gegen 1 vernachlässigen darf, so gelten die Näherungsformeln

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha, \quad (1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha$$

$$\sqrt{1+\alpha} = 1 + \tfrac{1}{2}\alpha,$$

allgemein $(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha$.

Sind $\beta, \gamma \dots$ ebenfalls kleine Zahlen, so daß ihre Quadrate, sowie die Producte $\alpha\beta, \beta\gamma \dots$ gegen 1 zu vernachlässigen sind, so hat man

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\cdots = 1 + \alpha + \beta + \gamma \cdots$$

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta} = 1 + \alpha - \beta \quad \text{u. s. w.}$$

Ist z. B. die Höhe (l), in welcher der Querschnitt eines Baumes gemessen wurde, sehr klein im Verhältniß zur ganzen Höhe (h), so erhält man (aus Nr. 97) die Formzahlen

$$f = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{l}{h}\right) \text{ für das Paraboloid,}$$

$$f = \frac{1}{3}\left(1 + 2\frac{l}{h}\right) \text{ für den Kegel,}$$

$$f = \frac{1}{4}\left(1 + 3\frac{l}{h}\right) \text{ für das Neiloid.}$$

103. Bezeichnet α einen kleinen Winkel (in Bogenmaß), so ist unter Fortlassung der zweiten und höheren Potenzen

$$\sin \alpha = \alpha \text{ und } \cos \alpha = 1.$$

104. Wenn zwei Größen a und b so wenig von einander verschieden sind, daß $\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden darf, so kann das geometrische Mittel von a und b dem arithmetischen gleichgesetzt werden,

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}.$$