

**Aufgaben
aus der Flugzeugstatik**

Von

K. Thalan und A. Teichmann

Aufgaben aus der Flugzeugstatik

Im Auftrage der
Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V.,
Berlin-Adlershof

herausgegeben von

Dr.-Ing. K. Thalau und **Dr.-Ing. A. Teichmann**

a. o. Professor an der Techn. Hochschule Berlin
Leiter der Statischen Abteilung der Deutschen
Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V.,
Berlin-Adlershof

Assistent in der Statischen Abteilung der
Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt,
E. V., Berlin-Adlershof

Mit 90 Einzelaufgaben, 106 Tabellen
und 291 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1933

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

**Copyright 1933 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1933
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1933**

**ISBN 978-3-662-27850-5 ISBN 978-3-662-29350-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-29350-8**

Vorwort.

Dieses Buch ist eine Sammlung von Aufgaben für die Anwendung der Statik auf Flugzeugteile. Es ist entstanden aus der ursprünglichen Absicht, einem noch in Bearbeitung befindlichen Lehrbuch eine Anzahl von Übungsbeispielen beizufügen, die der erstgenannte Verfasser in seiner Tätigkeit als Privatdozent für Flugzeugbau an der Technischen Hochschule Berlin vorgetragen hat. Diese Aufgabensammlung hat in den letzten Jahren wider Erwarten einen solchen Umfang angenommen, daß ihre Unterbringung in einem Anhang nicht mehr möglich gewesen wäre; andererseits ergaben wiederholt vorgenommene Sichtungen, daß in jeder Aufgabe etwas Lernenswertes verarbeitet war, so daß diese Sammlung nach erfolgter Einfügung einer Reihe von Ergänzungsaufgaben nach Ansicht der Verfasser eine ziemlich abgerundete Übersicht über die wichtigsten täglich wiederkehrenden einfachen statischen Aufgaben eines Flugzeugbauers darstellte.

Da diese früher einzeln vervielfältigten Aufgaben ständig von einer größeren Zahl von Interessenten, nicht nur von Studierenden, begehrt wurden, entschlossen sich die Verfasser, die vorliegende Aufgabensammlung bereits vor dem Lehrbuch in Buchform herauszugeben, da ihr Erscheinen andernfalls wesentlich verzögert worden wäre. Die Verfasser glauben, damit einem Wunsche der Praxis zu entsprechen.

Das Buch wendet sich an die Luftfahrzeug-Techniker, die über die grundlegenden Kenntnisse der Statik bereits verfügen, etwa in dem Maße, wie sie eine gute Ingenieurschule oder auch das Hochschulstudium bis zum Vorexamen vermittelt; es soll ihnen als Unterweisung in der praktischen Anwendung des Gelernten hinsichtlich der Inangriffnahme von Einzelaufgaben dienen. Die Begrenzung des Stoffs ist damit gezogen; Aufgaben, deren Durcharbeitung höhere Anforderungen als die hier vorausgesetzten stellen, sind nicht behandelt. Insbesondere sind solche Aufgaben fortgelassen, die ohne langwierige textliche Erläuterungen nur das Einsetzen von Zahlen in fertige Formeln gezeigt hätten. Daher fehlen z. B. Aufgaben über die Tragfähigkeit von Platten und Schalen, über die Verbundwirkung der Holme und Rippen in beplankten Flügeln, über Flügel Junkersscher Bauart sowie auch über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme jenseits der Gültigkeitsgrenze des Hooke'schen Gesetzes („Bruchstatik“). Die Behandlung solcher tiefergehenden Fragen an anderer Stelle ist dagegen beabsichtigt.

Entsprechend dem Zweck einer statischen Berechnung im engeren Sinne, an beliebigen Stellen eines Tragsystems die dort wirksamen inneren Kräfte und Momente anzugeben, ist ferner mit wenigen Ausnahmen von Spannungsermittlungen abgesehen worden; derartige Untersuchungen gehören zur Festigkeitslehre und dürften demnach eher Teil einer Konstruktionslehre sein.

Die Belastungen, mit denen der Flugzeugstatiker im allgemeinen zu rechnen hat, sind in Deutschland den sog. „Belastungsannahmen für die Festigkeitsberechnung von Flugzeugen“ zu entnehmen, die zur Zeit vom Deutschen Luftfahrzeug-Ausschuß (DLA) bearbeitet werden. Da die praktische Anwendung dieser Belastungsannahmen wegen der großen Zahl verschiedenartiger Lastfälle für die einzelnen Bauteile schwieriger ist als etwa die Anwendung der Hoch- oder Brückenbauvorschriften in der Bautechnik — da andererseits aber im richtigen Ansatz der äußeren Belastung durch Luftschrauben-, Luft-, Schwer-, Trägheits- und Stoßkräfte bzw. Motordreh- und Schraubenkreismomente eine äußerst wichtige Vorarbeit liegt — sind im I. Abschnitt dieses Buches einige Beispiele für die Anwendung der zur Zeit ihrer Bearbeitung gültigen „Belastungsannahmen“ gegeben; ihre Auswahl erfolgte unter Berücksichtigung der erfahrungsgemäß am häufigsten sich wiederholenden Handhabungsschwierigkeiten.

Im 2. Abschnitt sind dann in 85 Beispielen die Übungsaufgaben für die Durchführung der statischen Berechnung von Flugzeugbauteilen zusammengefaßt. (Die Zahlenbeispiele sind mit Rechenschiebergenauigkeit gerechnet.) Der Abschnitt gliedert sich in vier Kapitel, die sich mit der Beanspruchung und Formänderung statisch bestimmter bzw. unbestimmter Systeme und mit einigen Stabilitätsaufgaben befassen. Ausgehend von allgemeinen und elementaren Aufgaben über auf Biegung, Schub und Drillung beanspruchte Balken und in ihrer Ebene beanspruchte Rahmen erfolgt im Kapitel I die Behandlung von ebenen Fachwerken, von senkrecht zu ihrer Ebene belasteten Stabzügen und von Raumbauwerken. Die im Kapitel II folgenden Formänderungsaufgaben nehmen inhaltlich Bezug auf die im Kapitel I behandelten Beanspruchungsaufgaben; in einem besonderen Paragraphen des Kapitels II erfolgt die Berücksichtigung der Formänderungseinflüsse auf die Beanspruchung zweifach gestützter quer- und längsbelasteter Holme, wie sie unter der Bezeichnung „Knickbiegung“ bekannt sind. Im Kapitel III werden die wichtigsten statisch unbestimmten Systeme des Flugzeugbaus behandelt; auch hier sind einige Grundaufgaben vorangestellt; dabei ist besonders auf den Einfluß von Stützenverschiebungen, Rüst- und Schweißfehlern bzw. Temperaturschwankungen eingegangen. Einigen Beispielen über durchlaufende Holme auf mehreren Stützen folgen Aufgaben über sog. Rippenverbundwirkung, über freitragende

und verspannte Doppeldecker mit Verbundstreben und über Rumpffachwerke. Den Schluß dieses Kapitels bilden zwei Beispiele zur Ermittlung von Nebenspannungen. Die im Kapitel IV zusammengestellten Stabilitätsaufgaben behandeln das Knicken einfacher ebener Stabgruppen in bzw. senkrecht zu ihrer Ebene, das Knicken quergestützter Stäbe und eines Baldachinbocks.

Sowohl den beiden Hauptabschnitten als auch den einzelnen Kapiteln bzw. Aufgabengruppen ist jeweils eine Zusammenfassung der für die Bearbeitung der Aufgaben notwendigen Grundlagen vorangestellt. Der Leser soll darin eine gedrängte Wiederholung des früher Gelernten erblicken. Zum besseren Verständnis des Zusammenhangs der einzelnen oft absichtlich allgemein gefaßten Beispiele mit den besonderen Aufgaben des Flugzeugbaus sind entsprechende Hinweise eingefügt. Außerdem ist im Anhang ein Verzeichnis der wichtigsten deutschsprachigen Arbeiten über Fragen der Flugzeugstatik und -festigkeit angegeben sowie eine Reihe von häufig benötigten Zahlen- und Formeltafeln.

Wurde oben die engere Aufgabe bezeichnet, die dem Flugzeugstatiker obliegt und zu deren Behandlung dieses Buch gedacht ist, so erscheint es angebracht, auch die weiter gespannte Aufgabe des Statikers bzw. Konstrukteurs hier kurz anzudeuten. Diese liegt beim Flugzeugbauer noch mehr als bei anderen Konstrukteuren in der richtigen Einschätzung der Voraussetzungen und des Genauigkeitsgrades seiner Rechnungen, ferner in der richtigen Abwägung der Anforderungen, die er an die Baustoffe stellen darf. Hier begegnet man noch häufig Fehlern in der Anschauung.

Der Name „Flugzeugstatik“ enthält in sich einen Widerspruch deshalb, weil die Belastungszustände der Flugzeuge mehr oder weniger rasch zeitlich veränderlich sind; die maßgebenden Belastungszustände sind stets Beschleunigungszustände. Durch Einführung der nach d'Alembert benannten Trägheitskräfte erhält man bekanntlich ein momentanes Gleichgewicht in allen den Fällen, in denen die äußeren Lasten allein zunächst nicht im Gleichgewicht miteinander stehen. Erst dann kann, wie es in diesem Buch geschieht, nach den Regeln der allgemeinen Statik an die Ermittlung der Beanspruchungen und Formänderungen gegangen werden.

Hinsichtlich der späteren Spannungsermittlung und konstruktiven Gestaltung muß jedoch zwischen zwei Arten von Beschleunigungszuständen unterschieden werden; nämlich zwischen solchen, die hohe Belastungen erzeugen, dafür aber weniger häufig sind, und solchen, die kleine Belastungsschwankungen erzeugen, dafür aber sehr häufig bzw. dauernd vorhanden sind. Beispiele für die erste Art sind fast alle Belastungsfälle mit hohen Lastvielfachen, darunter auch die

nach den Belastungsannahmen anzusetzenden Böenbelastungsfälle für Flügel und Leitwerke; Beispiele für die zweite Art bieten die dauernd auftretenden kleinen Geschwindigkeitsänderungen der Luftströmung, ferner alle Schwingungserscheinungen infolge Unwichtigkeit des Triebwerks u. a. Während für die erste Beanspruchungsart die zulässigen Spannungen der Baustoffe nahezu wie für ruhende (statische) Belastung gewählt werden können, müssen bei der zweiten Beanspruchungsart die auftretenden Spannungen mit genügender Sicherheit unterhalb der jeweils maßgebenden Ermüdungsgrenze des geformten Baustoffs bleiben; die Formgebungseinflüsse, welche örtliche Spannungshäufungen bedingen, wie z. B. scharfe Querschnittsübergänge, Kerben, Löcher, örtliche Krafteinleitungen durch Bolzen, Niete u. ä. sind dabei zu berücksichtigen⁵.

Der Zweck des Luftfahrzeugbaus, ein wirtschaftliches Fliegen zu ermöglichen, verlangt größte Gewichts- und Widerstandersparnis. Die Erfüllung dieser Forderungen bedingt die Eigenheiten des sog. Leichtbaus: Die Verwendung hochwertiger Werkstoffe in Form möglichst ausgenutzter schlanker und dünnwandiger Bauglieder. Damit ist aber die Notwendigkeit gegeben, alle sog. Nebeneinflüsse in stärkerem Maße zu beachten als in anderen Zweigen der Technik. Neben den oben bereits erwähnten örtlichen Spannungshäufungen sind hier besonders zu nennen die bei der Herstellung und Rüstung unvermeidbaren Vorspannungen sowie die sog. Nebenspannungen infolge steifer bzw. unvollkommen gelenkiger Knoten, exzentrischer Anschlüsse und vorgekrümmter Stäbe. Die oben gekennzeichneten Merkmale der Leichtbauweise bedingen ferner das Auftreten von Formänderungen, die im Gegensatz zu den Annahmen der gewöhnlichen Statik nicht immer als sehr klein gegenüber den Abmessungen des Systems betrachtet werden können; dadurch können einerseits zusätzliche innere Kräfte und Momente, andererseits Änderungen in der äußeren Belastung des ganzen Flugzeugs entstehen. Diesen Eigenheiten der Flugzeugstatik sollte durch die Auswahl der Aufgaben Rechnung getragen werden.

Die Durchrechnung der Beispiele erfolgte in der Statischen Abteilung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., durch einige Werkstudenten. Diesen, insbesondere den Herren Dipl.-Ing. Kaul, Dipl.-Ing. Borkmann und cand. ing. Gronert, sei für die mühevollen, mit großem Eifer und Verständnis durchgeführte Arbeit volle Anerkennung ausgesprochen.

Die Bearbeitung des Buches wäre nicht möglich gewesen ohne das weitgehende Entgegenkommen des Leiters der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Hoff. Ihm sei für seine tatkräftige und unermüdete Förderung dieser Aufgabe besonderer Dank gesagt; nicht minder auch Herrn Dr.-Ing. H. Ebner für

die zeitraubende Arbeit des Korrekturlesens und seine damit verbundenen wertvollen Ratschläge.

Dem Verleger, Herrn Dr.-Ing. E. h. Julius Springer, sei nicht nur für die sorgfältige Herstellung des Buches, sondern auch für die Geduld gedankt, die er trotz der wiederholt verzögerten Ablieferung des Manuskriptes bewiesen hat.

Berlin, im November 1932.

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.		Seite
Beispiele für den Ansatz der äußeren Belastungen nach den deutschen Belastungsannahmen für die Festigkeitsberechnung von Flugzeugen.		
Einleitung		1
Allgemeine Bemerkungen zu den Belastungsannahmen.		1
1. Bedeutung der Belastungsannahmen.		1
2. Überblick über die Entwicklung der Belastungsannahmen.		1
3. Belastung des Flugzeugs		3
4. Zulässige Beanspruchungen und Sicherheitsfaktoren.		4
Beispiele		4
§ 1. Hauptflugfälle.		
Aufgabe 1: Belastung des Flügels		4
„ 2: Belastung des Triebwerks		14
§ 2. Hauptlandungsfälle.		
Aufgabe 3: Belastung des Flugzeugs bei zentrischem Stoß.		17
„ 4: Belastung des Flugzeugs bei exzentrischem Stoß.		19
§ 3. Belastungsfälle durch Leitwerkskräfte.		
Aufgabe 5: Belastung des Flugzeugs durch Seitenleitwerkskräfte		22
Zweiter Abschnitt.		
Beispiele zur Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen von Flugzeugbauteilen.		
Einleitung		25
Allgemeine Bemerkungen zur Durchführung statischer Berechnungen		25
1. Das Flugzeug als Tragwerk.		25
2. Gliederung des Flugzeugs als Tragwerk		26
3. Grundbegriffe hinsichtlich des Systemaufbaus		26
4. Aufgaben der Flugzeugstatik		29
5. Darstellung von Kräften und Momenten; Verschiebungen		29
6. Aufbau und Stützung tragfähiger Systeme.		31
7. Beanspruchung der Einzelstäbe eines Stabwerks		36
8. Bezeichnungen und Vorzeichenregeln		38
Beispiele		41
Erstes Kapitel: Beanspruchung statisch bestimmter Systeme		41
Allgemeines zu den § 4 bis 7		41
§ 4. Freitragende Holme (Kragbalken).		
Aufgabe 6 bis 12: Beanspruchung auf Biegung		44
„ 13 „ 14: Beanspruchung auf Drillung		50

	Seite
§ 5. Holme mit beiderseitiger Endstützung (Balken auf zwei Stützen).	
Aufgabe 15 bis 17: Beanspruchung auf Biegung	52
§ 6. Holme mit überkragenden Enden (zusammengesetzte Balken).	
Aufgabe 18 bis 20: Überkragende, zweifach gestützte Holme . .	55
„ 21: Überkragender, vierfach gestützter Holm mit zwei Gelenken	61
§ 7. In ihrer Ebene beanspruchte Stabzüge (Rahmen).	
Aufgabe 22 bis 24: Offene Rahmen	62
„ 25 „ 26: Geschlossene Rahmen mit Gelenken	65
§ 8. Ebene Fachwerke.	
Allgemeines	69
Aufgabe 27: Fachwerkholm eines freitragenden Flügels	69
„ 28: Zweifach abgestrebter Holm	70
„ 29: Endstück einer Rumpfwand in K-Verband	72
„ 30: Abgestrebter Fachwerkholm	74
„ 31: Flügelfachwerk (System mit veränderlicher Gliederung)	77
„ 32: Vollwandiger Holm mit sehr dünnem Stegblech . .	81
§ 9. Senkrecht zu ihrer Ebene beanspruchte ebene Stabzüge.	
Allgemeines	85
Aufgabe 33 bis 35: Dreifach gestützte Stabzüge	85
§ 10. Räumlich gestützte Systeme.	
Allgemeines	88
Aufgabe 36: Motoreinbau	88
§ 11. Raumbachwerke.	
Allgemeines	92
Aufgabe 37: Baldachin-Bock	92
„ 38: Fahrgestell	93
„ 39: Doppeldecker-Tragwerk	95
„ 40: Rumpf-Fachwerk	98
Zweites Kapitel: Formänderung statisch bestimmter Systeme . .	112
Allgemeines	112
§ 12. Holme (gerade Balken).	
Aufgabe 41 bis 43: Grundaufgaben	117
„ 44 „ 47: Zweifach gestützte, auf Biegung und Schub beanspruchte Holme	119
„ 48: Einseitig eingespannter, auf Drillung beanspruchter Holm	136
§ 13. In ihrer Ebene beanspruchte Stabzüge (Rahmen).	
Aufgabe 49: Holm mit exzentrischen Anschlüssen	137
„ 50: Aufgeschnittener Spantring	139
„ 51: Abgestrebter Stabzug	139
„ 52: Geschlossener Rahmenspant mit drei Gelenken . .	141
§ 14. Ebene Fachwerke.	
Aufgabe 53: Abgestrebter Fachwerkholm	148
„ 54: Abgestrebter Fachwerkholm. (Zeichnerische Ermittlung seiner Knotenpunktswege)	159

	Seite
§ 15. Berücksichtigung des Einflusses der Formänderung auf die Beanspruchung zweifach gestützter, quer- und längsbelasteter Holme (Knickbiegung).	
Allgemeines	164
Aufgabe 55 bis 56: Holme konstanter Steifigkeit mit konstanter Längskraft	169
„ 57: Holm konstanter Steifigkeit mit abgestufter Längskraft.	173
„ 58: Holm veränderlicher Steifigkeit mit konstanter Längskraft.	181
„ 59: Aufgeschnittener Holmrippenrost	187
Drittes Kapitel: Statisch unbestimmte Systeme.	189
Allgemeines	189
§ 16. Grundaufgaben über Ansatz und Durchführung statisch unbestimmter Rechnungen.	
Aufgabe 60: Ausgekreuzte Tragwand unter Vorspannung	196
„ 61: Ebener geschlossener Sechseck-Rahmen (Rumpfwandaussparung)	198
„ 62: Räumlich belasteter offener Dreieckrahmen (Fahrgestellrahmen)	203
„ 63: Beiderseitig eingespannte Strebe mit Stützenverschiebungen.	206
„ 64: Achtstäbiger Motoreinbau	211
„ 65: Rahmenvorspannungen infolge von Rüstfehlern	214
„ 66: Rahmenvorspannungen infolge Schweißung	215
„ 67 bis 68: Temperaturspannungen in Tragwänden	218
„ 69: Baldachinholmfeld unter dem Einfluß von Längs- und Querbelastung sowie Temperaturänderung	221
„ 70 bis 71: Zwei Beispiele für die zweckmäßige Wahl der statisch unbestimmten Größen	225
§ 17. Durchlaufende Holme auf mehreren Stützen.	
Aufgabe 72: Einseitig eingespannter zweifach abgestrebter Holm	229
„ 73: In sechs Punkten elastisch gestützter Höhenruderholm	234
§ 18. Zweiholmige Flügel mit Verbundrippen.	
Aufgabe 74: Freitragender Flügel mit einer bzw. zwei überzähligen Verbundrippen	236
„ 75: Abgestrebter Flügel mit drei Verbundrippen.	245
§ 19. Rumpffachwerke.	
Aufgabe 76 bis 77: Eingespannte Flechtwerke	251
„ 78: Flechtwerk mit ausgesteiften Querwänden (Zellwerk)	254
§ 20. Freitragende Doppeldecker mit Verbundstreben.	
Aufgabe 79: Doppeldecker mit drei Verbundstreben	262
„ 80: Doppeldecker mit fünf Verbundstreben	266
§ 21. Verspannte Doppeldecker mit Verbundstreben.	
Aufgabe 81: Doppeldecker mit gelenkig angeschlossenen Holmen	269
„ 82: Doppeldecker mit durchgehenden Oberflügelholmen	280

Inhaltsverzeichnis.

XI

	Seite
§ 22. Nebenspannungen.	
Allgemeines	285
Aufgabe 83: Nebenspannungen in einem abgestrebten Fachwerk- holm.	286
„ 84: Nebenspannungen in einem dreiständigen Baldachin- bock.	291
Viertes Kapitel: Stabilitätsaufgaben.	297
Allgemeines	297
§ 23. Stabilität ebener Stabgruppen.	
Aufgabe 85 bis 87: Knicken ebener Stabgruppen mit räumlich festgelegten Knoten	300
„ 88: Knicken einer ebenen Stabgruppe mit einem räumlich nicht festgelegten Knoten	313
„ 89: Knicken einer elastisch quergestützten Flügelstrebe	317
§ 24. Stabilität räumlicher Stabgruppen.	
Aufgabe 90: Knicken eines Baldachinbocks	321
Anhang.	
I. Formeln zur Berechnung von Formänderungen $\delta_{i,k}$	322
II. Formeln und Zahlenwerte zur Berechnung von Balken, die auf Biegung oder auf Knickbiegung beansprucht werden	324
III. Verfahren zur Auflösung von symmetrischen Systemen linearer Glei- chungen und von symmetrischen Determinanten	332
Schrifttum	338
Sachverzeichnis	342

Erster Abschnitt*.

Beispiele für den Ansatz der äußeren Belastungen nach den deutschen Belastungsannahmen für die Festigkeitsberechnung von Flugzeugen.

Einleitung.

Allgemeine Bemerkungen zu den Belastungsannahmen.

1. Bedeutung der Belastungsannahmen.

Unter „Belastungsannahmen“ für Flugzeuge versteht man denjenigen Teil der Bauvorschriften für Flugzeuge, in welchem die Annahmen über Art, Größe und Verteilung der im praktischen Betrieb als wahrscheinlich erachteten Belastungen und die gegenüber diesen Belastungen innezuhaltenden Festigkeitsgrenzen und Sicherheitszahlen niedergelegt sind. Sie enthalten in Deutschland im Gegensatz zu manchen anderen Ländern keine Angaben über statische oder dynamische Berechnungsmethoden der Gesamtkonstruktion oder einzelner Bauteile.

Mit der Bezeichnung Belastungsannahmen ist betont, daß es sich nicht um unverrückbar feststehende Erkenntnisse handelt, sondern um Richtlinien, die u. U. sowohl seitens des Konstrukteurs als auch seitens einer Prüfstelle Abweichungen zulassen bzw. erfordern; sie haben also den Charakter von Vereinbarungen über Mindestforderungen, die sich dem fortschreitenden Stand der technischen Erkenntnis unter Berücksichtigung der wirtschaftlichen Ziele des Luftfahrtgedankens anzupassen haben.

2. Überblick über die Entwicklung der Belastungsannahmen**.

Der Weg, den alle Konstrukteure im Anfang gingen, um genügend feste Flugzeuge zu bauen, bestand in der schrittweisen Verstärkung

* Dieser Abschnitt kann ohne Schaden für das Verständnis des zweiten Abschnitts übergangen werden.

** Näheres siehe z. B. bei Küßner-Thalau¹.

Thalau-Teichmann, Beispiele.

einzelner Teile ihrer Konstruktionen auf Grund von Unfallereignissen; wenn auch theoretische Überlegungen über die mögliche Höhe der Betriebsbeanspruchungen sehr bald einsetzten, so ist dieser Weg bis heute noch fast der wichtigste geblieben. Von 1912 bis heute hat man ferner immer wieder empfohlen, durch praktische Beanspruchungsmessungen im Flugbetrieb das notwendige Erfahrungsmaterial in so großem Umfang zu sammeln, daß daraus mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen wirklich begründete Zahlen über Beanspruchungshöhen und Sicherheitsforderungen gewonnen werden können. Die Schwierigkeiten, die diesen Bestrebungen bei uns und auch im wirtschaftlich stärkeren Ausland entgegentraten, lagen vor allem auf instrumentellem Gebiet; sie sind bekannt und brauchen an dieser Stelle nicht wieder angeführt zu werden.

Bereits in allen anläßlich eines grundlegenden Vortrags von Reißner im Jahre 1912² auftauchenden Vorschlägen zur formelmäßigen Angabe der bei der Festigkeitsberechnung anzunehmenden Höchstbeschleunigungen war als richtige Einflußgröße die Flugzeuggeschwindigkeit enthalten; trotzdem wurden in die ersten deutschen Vorschriften über Belastungsannahmen (BLV³), die im Laufe des Krieges 1915, 1916 und 1918 ausgearbeitet wurden, für die einzelnen Flugzeugkategorien feste Vielfache der Erdbeschleunigung, die sogenannten „Bruch-Lastvielfachen“, eingeführt. Diese fälschlich häufig mit „Sicherheit“ bezeichneten Zahlen waren zustande gekommen durch Multiplikation der aus Bruchereignissen und aus bis dahin vorliegenden Beanspruchungsmessungen gewonnenen Zahlen über die Betriebsbeanspruchungen mit einer Sicherheitszahl. Für die damals gewählten Flächen- und Leistungsbelastungen bzw. Profil- und Flügelumrißformen konnten diese Zahlen als gute Mittelwerte benutzt werden; es bedarf jedoch keines Hinweises, daß die in hohem Maße von den aerodynamischen und konstruktiven Daten eines Flugzeugs abhängigen „Lastvielfachen“ sich ändern müssen, wenn diese Grundlagen Änderungen erfahren, daß also eine kritiklose Übernahme früher gültig gewesener Ansichten auf neuzeitliche Konstruktionen gefährlich ist.

Mit dem Neuaufbau der Belastungsannahmen auf Grund der BLV 1918 wurde in der DVL* etwa 1925 begonnen. Als wichtigsten Schritt zu einer Vorwärtsentwicklung kann man die damals erfolgte Einführung des Begriffs der sog. „sicheren Belastungszustände“ ansehen; das sind Belastungszustände, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind und bei denen noch bestimmte Sicherheitszahlen, beispielsweise gegen unzulässig große Formänderung oder gegen Bruch, vorhanden sein sollen. Die Belastungsannahmen für Fahr-, Schwimm-

* Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

und Triebwerke wurden den verschiedenartigen Betriebsbedingungen besser angepaßt; diejenigen für die Leitwerke wurden in Beziehung zu den Flügelbelastungen gesetzt (1926).

Die Höhe der Lastvielfachen und der davon in Abhängigkeit gebrachten Werte gründete sich dabei im wesentlichen noch auf die letzten Kriegserfahrungen, in geringerem Umfang auf ausländische Vorschriften. Beibehalten wurde bis auf den heutigen Tag die in den BLV und in ausländischen Vorschriften eingeführte Einteilung aller Belastungsmöglichkeiten in eine begrenzte Zahl von typischen „Belastungsfällen“ im Betrieb eines Flugzeugs; diese einzelnen Belastungsfälle, deren Zahl allerdings mit zunehmender Erfahrung stetig gewachsen ist, sind häufig nur idealisierte Annahmen und sollen die verschiedenartigen wirklichen Beanspruchungen überdecken.

Neubearbeitungen der DVL-Belastungsannahmen (1927 bzw. 1928) enthielten einige Verbesserungen; diese betrafen insbesondere neuere Überlegungen über die Aufgabe und die Höhe der Sicherheitsfaktoren und versuchten dem Verhalten der Werkstoffe, besonders bei dynamischer Beanspruchung, besser Rechnung zu tragen.

Seit dem Jahre 1930 ist der Deutsche Luftfahrzeug-Ausschuß (DLA) für die weitere Bearbeitung der Belastungsannahmen⁴ zuständig.

3. Belastung des Flugzeugs.

Die in einer Anzahl von „Belastungsfällen“ ausgewählten Belastungsmöglichkeiten des Flugzeugs in seinem Betrieb sind sehr verschiedener Art je nach der Aufgabe, die es zu erfüllen hat; die Erfüllung dieser Aufgaben hat das Auftreten von Luft-, Trägheits- und Schwerkraften, Steuer-, Stoßkräften u. a. zur Folge.

Wenn ein Flugzeug sich in irgend einem stationären Betriebszustand befindet, also keinerlei Beschleunigungen oder Verzögerungen erfährt, so sind keine Trägheitskräfte wirksam. Diese „statischen“ Belastungszustände sind, außer wenn das Flugzeug am Boden steht, sehr selten. Die meisten Betriebszustände sind instationär; es treten mehr oder weniger rasch wechselnde Beschleunigungen bzw. Verzögerungen und damit Trägheitskräfte auf; das Flugzeug wird also „dynamisch“ belastet. In den Belastungsannahmen sind nun die erfahrungsgemäß zu erwartenden bzw. als wahrscheinlich erachteten Luft- oder Stoßkräfte unter der Bezeichnung „sichere“ Belastungen zusammengestellt; dadurch sind die jeweils zu untersuchenden Beschleunigungen als Vielfache der Erdbeschleunigung festgelegt. Bei allen derartigen Zuständen ist erst noch die Ermittlung der Trägheitskräfte notwendig; indem diese den ursprünglichen äußeren Kräften zugesellt werden, ermöglichen sie mit diesen zusammen die zur Durchführung einer statischen Berechnung notwendige Herstellung eines Kräftegleichgewichts.

4. Zulässige Beanspruchungen und Sicherheitsfaktoren.

Die Behandlung der stationären und instationären Belastungszustände in der statischen Berechnung weist nach Einführung der Trägheitskräfte keine Unterschiede auf. Wohl aber sind entsprechend dem Charakter der Belastung — je nachdem, ob ruhend oder schwingend — Unterschiede in den zulässigen Grenzen der Beanspruchungen zu machen.

Um nun die im Betrieb auftretenden bzw. als wahrscheinlich erachteten Anstrengungen der einzelnen Bauglieder in hinreichendem Abstand von allen Gefahrgrenzen der Beanspruchung zu halten, sind in den Belastungsannahmen bestimmte Sicherheitsfaktoren vorgeschrieben; hinsichtlich der einzelnen Gefahrgrenzen, nämlich der 0,2-Grenze, der Knick-, Beul- und Kippgrenze, der statischen sowie der

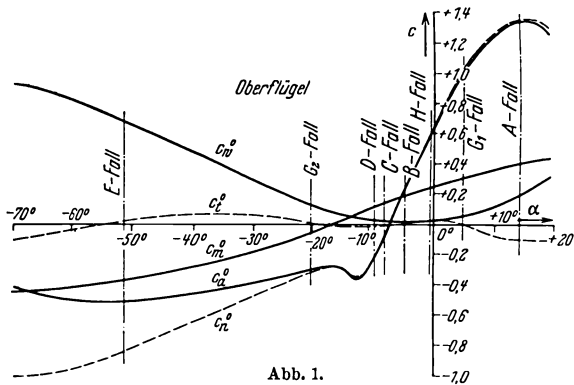


Abb. 1.

dynamischen Bruchspannung des geformten Baustoffs, sind diese Faktoren verschieden hoch, weil die für ihre Höhe maßgebenden Einflüsse sich je nach der Beanspruchungsart verschieden auswirken. Diese Vorichtsmaßregel ist nötig, um Fehlern in der Erkenntnis der wirklich auftretenden Belastungen, Ungenauigkeiten in der Durchführung der Kräfte- und Spannungsermittlungen, Fehlern in den Baustoffen und bei deren Verarbeitung und schließlich Fehlern bei der Rüstung und Wartung des Flugzeugs Rechnung zu tragen^{1, 4, 5}.

Beispiele.

§ 1. Hauptflugfälle.

Aufgabe 1: Belastung des Flügels.

Die für den Festigkeitsnachweis eines Doppeldeckertragwerks maßgebenden Belastungen sind nach den deutschen Belastungsannahmen aufzustellen; das Flugzeug gehöre zur Beanspruchungsgruppe 4, „Flug-

zeuge für hohe Beanspruchung“. Die aerodynamischen Beiwerte seien gegeben (Abb. 1, 2 und 3).

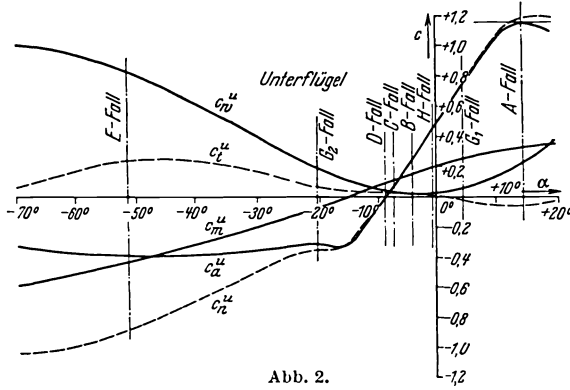


Abb. 2.

1. Vom Flugfall unabhängige Festwerte.

- $F^o = 19,2 \text{ m}^2$: Aerodynamisch wirksame Fläche des Oberflügels,
- $F^u = 18,0 \text{ m}^2$: „ „ „ „ „ Unterflügels,
- $F = 37,2 \text{ m}^2$: „ „ „ „ „ Gesamttragwerks,
- $b^o = 12,0 \text{ m}$: Spannweite des Oberflügels,
- $b^u = 12,0 \text{ m}$: „ „ „ „ „ Unterflügels,
- $t^o = 1,6 \text{ m}$: Mittlere Tiefe des Oberflügels*,
- $t^u = 1,5 \text{ m}$: „ „ „ „ „ Unterflügels*,
- $t = 1,55 \text{ m}$: „ „ „ „ dem Doppeldecker aerodynamisch

gleichwertigen Eindeckers, $t = \frac{F^o t^o + F^u t^u}{F^o + F^u}$,

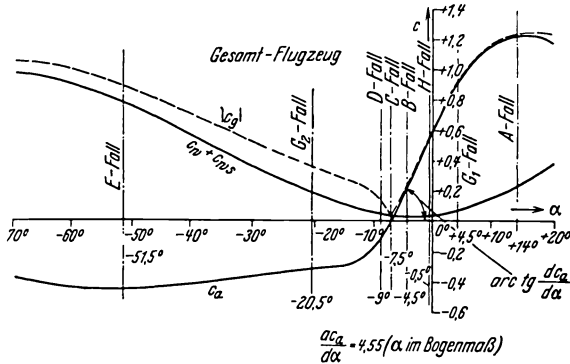


Abb. 3.

* Bei Flügeln mit trapezförmlichem Umriß oder Flügeln mit Pfeilstellung kann die mittlere Flügeltiefe dem Flügelschnitt im Abstand $\frac{2b}{3\pi}$ von Rumpfmittle entnommen werden.

- $G = 1600 \text{ kg}$: Gewicht des Flugzeugs,
 $\frac{G}{F} = 43 \text{ kg/m}^2$: Mittlere Flächenbelastung des Flugzeugs,
 $G_F^o = 140 \text{ kg}$: Gewicht des Oberflügels,
 $G_F^u = 120 \text{ kg}$: „ „ „ Unterflügels,
 $G_F = 260 \text{ kg}$: „ „ „ Tragwerks,
 $G_R = 1340 \text{ kg}$: Rechnungsgewicht $= G - G_F$,
 $c_{ws} = 0,02$: Beiwert* des schädlichen Widerstands,
 $c_{wL} = 0,014$: „ „ „ Luftschraubenwiderstands (für Sturzflug mit abgestelltem Motor)
 (c_{ws} und c_{wL} auf die Gesamtflügelfläche bezogen),
 $2\sigma = 2^\circ$: Schränkung der beiden Flügel**,
 $V_h = 175 \text{ km/h}$: Höchste Waagrechtgeschwindigkeit.

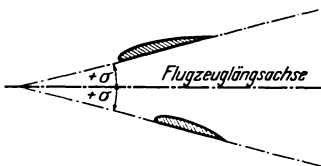


Abb. 4.

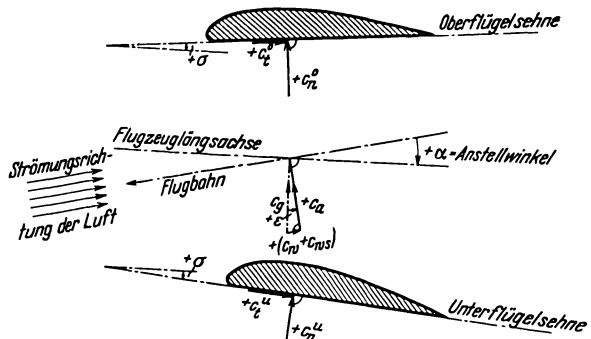


Abb. 5.

2. Vom Flugfall abhängige Werte. (Vorzeichen nach Abb. 5).

- $\alpha [^\circ]$: Anstellwinkel des Flugzeugs,
 $\alpha^o [^\circ]$: „ „ „ Oberflügels: $\alpha^o = \alpha - \sigma$,
 $\alpha^u [^\circ]$: „ „ „ Unterflügels: $\alpha^u = \alpha + \sigma$,
 c_a^o : Beiwert* der Auftriebskraft
 c_w^o : „ „ „ Widerstandskraft
 c_n^o : „ „ „ Normalkraft
 c_t^o : „ „ „ Tangentialkraft
 c_m^o : „ „ „ des Flügelmoments
 c_a : „ „ „ der Auftriebskraft
 c_w : „ „ „ Widerstandskraft
 c_g : „ „ „ Gesamtluftkraft am Flugzeug (Vektor mit den
- am Oberflügel, bezogen auf F^o ;
 entspr. mit Index „u“ am
 Unterflügel
 (Abb. 1 und 2),
 am Gesamttragwerk, bezogen
 auf F (Abb. 3),

* Die Bedeutung dieser „Beiwerte“ folgt aus den Formeln in den Unterabschnitten 3 und 4. Vgl. hierzu z. B. die Ausführungen von Hoff⁶; s. auch Prandtl-Betz⁷.

** Einführung der Schränkung nach Abb. 4.

Komponenten c_a und $c_w + c_{ws}$; Betrag von c_g :

$$|c_g| = \sqrt{c_a^2 + (c_w + c_{ws})^2},$$

- $\text{tg } \varepsilon$: Gleitzahl, $\text{tg } \varepsilon = \frac{c_w + c_{ws}}{c_a}$ (c_{ws} siehe oben; ist $\text{tg } \varepsilon$ negativ, so ist ε als negativer Winkel einzuführen),
- n : Lastvielfaches (durch die Belastungsannahmen festgelegter Erfahrungswert, der die in den einzelnen Flugfällen bei den verschiedenen Flugzeugarten auftretenden Beschleunigungen als Vielfache der Erdbeschleunigung angibt),
- $q[\text{kg/m}^2]$: Staudruck des Flugzeugs, $q = \frac{v^2 \gamma}{2g}$ (in Bodennähe* $\sim \frac{v^2}{16}$), wobei:
- $v[\text{m/sec}]$: Fluggeschwindigkeit,
- $\gamma[\text{kg/m}^3]$: Luftwichte,
- $g[\text{m/sec}^2]$: Erdbeschleunigung.

3. Festlegung der sicheren Werte q, n, α und damit der Beiwerte c für die einzelnen Flugfälle.

Zwischen q, n und den Werten c besteht die Gleichgewichtsbedingung:

Die Vektorsumme der Luftschraubenkräfte, der Trägheitskräfte und der Schwerkraft ist gleich der gesamten Luftkraft am Flugzeug.

Im folgenden wird die Luftschraubenkraft vernachlässigt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Schwerkraft und die Trägheitskräfte des Flugzeugs dieselbe Wirkungslinie besitzen. Sie werden im folgenden zusammengefaßt als „Massenkraft“ $n \cdot G$.

Die Gleichgewichtsbedingung heißt dann (Abb. 5):

$$\begin{aligned} G \cdot n \cdot \cos \varepsilon &= c_a \cdot F \cdot q, \\ G \cdot n \cdot \sin \varepsilon &= (c_w + c_{ws}) \cdot F \cdot q, \\ G \cdot n &= F \cdot q \cdot \sqrt{c_a^2 + (c_w + c_{ws})^2} = F \cdot q \cdot c_g. \end{aligned}$$

Da vorausgesetzt wurde, daß die Trägheitskräfte und die Schwerkraft in gleiche Richtung fallen, muß c_g in die Schwerrichtung fallen.

Zwei der Werte q, n und α sind für jeden Flugfall durch die Belastungsannahmen festgelegt, der dritte folgt dann durch die vorhergehende Gleichgewichtsbedingung.

Die Angaben „Nach Abs. 9032“ usw. geben die in Frage kommenden Stellen der Belastungsannahmen des DLA^{4**} an. Die Zahlenwerte

* Bei allen Zahlenrechnungen im Unterabschnitt 3 wird mit dem Näherungswert $v^2/16$ gerechnet.

** Bis zur Herausgabe des Buches gültig gewesene Fassung.

sind daraus für Flugzeuge der Gruppe S_4 entnommen. (Für die übrigen Gruppen schreiben die Belastungsannahmen andere Werte vor.)

Die im folgenden angegebenen Werte n und q sind „sichere“ Werte (S. 2).

Belastungsfall A: Abfangen.

Nach Abs. 9032.

α : Der Wert $c_{a\max}$ des am steilsten angestellten Flügels (hier des Unterflügels) liegt bei $\alpha = 14^\circ$ (Abb. 2). Durch diesen Anstellwinkel ist also der A-Fall gekennzeichnet. Dazu gehört: $c_{gA} = 1,24$.

n : $n_A = 4$.

Aus α und n folgt q .

$$q_A = \frac{n_A \cdot G/F}{c_{gA}} = 139 \text{ kg/m}^2.$$

Dem entspricht: $v_A = 47,2 \text{ m/sec}$ bzw. $V_A = 170 \text{ km/h}$.

Belastungsfall C: Sturzflug.

Nach Abs. 9034.

q : $q_C = q_h + 400 \text{ kg/m}^2$ bzw. $q_C = 2,25 q_h$, wobei $q_h =$ Staudruck des schnellsten unbeschleunigten Waagerechtfuges.

Aus $V_h = 175 \text{ km/h}$ bzw. $v_h = 48,6 \text{ m/sec}$ (S. 6) folgt $q_h = 148 \text{ kg/m}^2$.
Damit: $q_C = 148 + 400 = 548 \text{ kg/m}^2$ bzw. $q_C = 2,25 \cdot 148 = 333 \text{ kg/m}^2$.
Der größere der beiden Werte ist maßgebend, also $q_C = 548 \text{ kg/m}^2$.

Dem entspricht: $v_C = 93,6 \text{ m/sec}$ bzw. $V_C = 337 \text{ km/h}$.

α : Der Auftriebsbeiwert ist Null bei $\alpha = -7,5^\circ$ (Abb. 3). Durch diesen Anstellwinkel ist also der C-Fall gekennzeichnet. Dazu gehört unter Berücksichtigung des Luftschraubenwiderstandes c_{wL} :

$$c'_{gC} = c_{gC} + c_{wL} = c_{wC} + c_{ws} + c_{wL} = 0,02 + 0,02 + 0,014 = 0,054.$$

Aus α und q folgt n .

$$n_C = \frac{c'_{gC} \cdot q_C}{G/F} = 0,69 \text{ (also noch nicht stationärer Sturzflug, s. u.)}$$

Sollte das Flugzeug der Beanspruchungsgruppe 5 genügen, so wäre für die Berechnung der Endstaudruck maßgebend, d. h.:

n : $n = 1$ („stationärer“ Sturzflug).

α : $\alpha_C = -7,5^\circ$ entsprechend $c_{aC} = 0$.

Dazu gehört:

$$c'_{gC} = 0,054 \text{ (s. o.)}$$

Aus α und n folgt q .

$$q_C = \frac{n_C \cdot G/F}{c'_{gC}} = 796 \text{ kg/m}^2.$$

Dem entspricht: $v_C = 113 \text{ m/sec}$ bzw. $V_C = 407 \text{ km/h}$.

Belastungsfall *B*: Gleitflug.

Nach Abs. 9033.

$$n: \quad n_B = \frac{2}{3} n_A = 2,67.$$

$$q: \quad q_B = 0,8 q_C = 438 \text{ kg/m}^2.$$

Dem entspricht: $v_B = 83,6 \text{ m/sec}$ bzw. $V_B = 301 \text{ km/h}$.Aus n und q folgt α . α : Die Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$c_{qB} = \frac{n_B \cdot G/F}{q_B} = 0,26.$$

Nach den Belastungsannahmen ist dieser Wert gleich c_{aB} zu setzen;
also (Abb. 3)

$$\alpha_B = -4,5^\circ.$$

Belastungsfall *D*: Rückenflug.

Nach Abs. 9035.

$$n: \quad n_D^* = -\frac{1}{3} n_A = -1,33.$$

$$q: \quad q_D = 0,8 q_C = 438 \text{ kg/m}^2.$$

Dem entspricht: $v_D = 83,6 \text{ m/sec}$ bzw. $V_D = 301 \text{ km/h}$.Aus n und q folgt α . α : Die Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$c_{qD} = \frac{n_D \cdot G/F}{q_D} = -0,13.$$

Nach den Belastungsannahmen ist dieser Wert gleich c_{aD} zu setzen;
also (Abb. 3)

$$\alpha_D = -9^\circ.$$

Belastungsfall *E*: Abfangen in den Rückenflug.

Nach Abs. 9036.

$$n: \quad n_E^* = -\frac{1}{2} n_A = -2.$$

α : Der Wert $c_{a\min}$ des Gesamttragwerks liegt bei $\alpha = -51,5^\circ$ (Abb. 3). Durch diesen Anstellwinkel ist der *E*-Fall gekennzeichnet. Dazu gehört: $c_{qE} = \pm 0,89$.

Aus n und α folgt q .

$$q: \quad q_E = \frac{n_E \cdot G/F}{c_{qE}} = 96,6 \text{ kg/m}^2.$$

Dem entspricht: $v_E = 39,3 \text{ m/sec}$ bzw. $V_E = 141 \text{ km/h}$.

* Nach dem Wortlaut der Belastungsannahmen müßte es heißen: $n_D = +\frac{1}{3} n_A$; dann wäre das Fluggewicht G als negative Größe einzuführen. Ähnliches gilt für den Belastungsfall *E*.

Belastungsfall G : Böenbeanspruchung.Nach Abs. 9038 (vgl. hierzu Wagner⁸ und Küßner⁹).

$$n: \quad n_G = 1 \pm \frac{1}{16} \cdot v_h \cdot w \cdot \eta \cdot \frac{F}{G} \cdot \frac{dc_a}{d\alpha}$$

$$= 1 \pm 2,12 = + 3,12 \text{ bzw. } - 1,12;$$

hierin ist:

$$v_h = 48,6 \text{ m/sec (s. oben),}$$

$$w = \text{senkrechte Luftgeschwindigkeit; nach den Belastungsannahmen} \\ = 10 \text{ m/sec,}$$

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 4,55 \text{ (Abb. 3; } \alpha \text{ im Bogenmaß),}$$

η = Abminderungsbeiwert zur Berücksichtigung des allmählichen Einsetzens der Strömungsänderung, der elastischen Nachgiebigkeit der Flügel und des Ausweichens des Flugzeugs (Weg und Drehung). Abb. 6 zeigt η als Funktion von K , wobei $K = 0,612 \cdot \frac{dc_a}{d\alpha} \cdot t \cdot \frac{F}{G}$ ist (vgl. hierzu

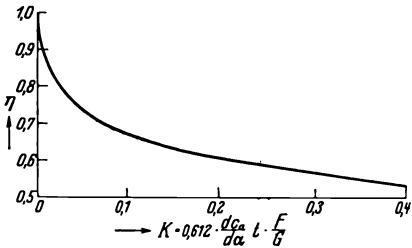


Abb. 6.

Uding¹⁰). Hier ergibt sich mit $K = 0,1$ der Wert $\eta = 0,66$.

$$q: \quad q_G = q_h = 148 \text{ kg/m}^2.$$

Aus n und q folgt α .

α : Die Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$c_{aG} = \frac{n_G \cdot G/F}{q_G} = 0,91 \text{ bzw. } - 0,33.$$

Nach den Belastungsannahmen ist dieser Wert gleich c_{aG} zu setzen; also (Abb. 3)

$$\alpha_G = 4,5^\circ \text{ bzw. } - 20,5^\circ.$$

Je nachdem, ob die Bö von unten nach oben bzw. von oben nach unten auf den Flügel wirkt, sind die positiven oder negativen Werte einzusetzen.

Belastungsfall H : Hochreißen vor Hindernissen.

Nach Abs. 9039.

Braucht für Beanspruchungsgruppe 4 nicht untersucht zu werden.

Sollte das Flugzeug der Beanspruchungsgruppe 3 genügen, dann wäre zu setzen:

$$n: \quad n_H = 1 + \frac{v_H^2}{g \cdot R}, \text{ aber höchstens: } n_H = q_H \cdot c_{a \max} \cdot \frac{F}{G}.$$

Darin ist:

$$R = 250 + 10G \text{ (} R = \text{Krümmungsradius der Flugbahn. } G \text{ in t, } R \text{ in m)} \\ = 266 \text{ m,}$$

$$v_H = v_h = 48,6 \text{ m/sec, } q_H = q_h = 148 \text{ kg/m}^2, \quad c_{a \max} = 1,23,$$

$$n_H = 1 + 0,9 = 1,9, \text{ aber höchstens } n_H = 4,23,$$

also maßgebend: $n_H = 1,9$.

$$q: \quad q_H = 148 \text{ kg/m}^2 \text{ aus } v_H = 48,6 \text{ m/sec (s. oben).}$$

Aus n und q folgt α .

α : Die Gleichgewichtsbedingung liefert:

$$c_{qH} = \frac{n_H \cdot G/F}{q_H} = 0,55.$$

Nach den Belastungsannahmen ist dieser Wert gleich c_{aH} zu setzen; also (Abb. 3)

$$\alpha_H = -0,5^\circ.$$

Die nunmehr festgelegten Flugfälle sind in den Abb. 1 bis 3 gekennzeichnet.

Der in den Belastungsannahmen unter den für das Tragwerk maßgebenden Belastungsfällen aufgeführte Fall F' : „Landing“ (Abs. 9037) wird in Aufgabe 3 und 4 gesondert behandelt.

4. Ermittlung der die Tragglieder beanspruchenden Normal- und Tangentialkräfte.

Die am Oberflügel angreifende Luftkraft R^o ist die Resultierende (Abb. 7) der Normalkraft:

$$N^o = F^o \cdot q \cdot c_n^o \text{ [kg]},$$

senkrecht zur Flügelsehne,

und der Tangentialkraft:

$$T^o = F^o \cdot q \cdot c_t^o \text{ [kg]},$$

parallel zur Flügelsehne.

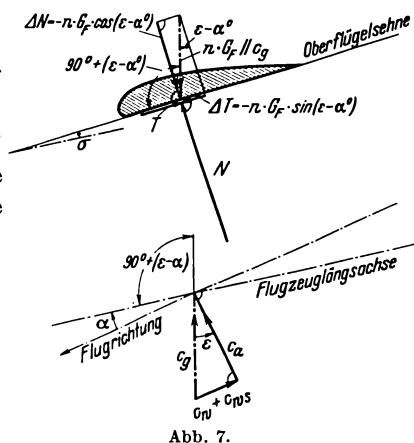


Abb. 7.

Die Lage der Wirkungslinie von N^o folgt aus dem Moment der Luftkraft R^o am Oberflügel, bezogen auf die Flügelvorderkante (vgl. Unterabschn. 6):

$$M^o = F^o \cdot l^o \cdot q \cdot c_m^o \text{ [kgm]}.$$

Bei Berechnung des Tragwerks sind außer den Luftkräften (Normal- und Tangentialkraft) noch die Massenkraft $n \cdot G_F$ des Flügels zu berücksichtigen. Die parallel und senkrecht zur Flügelsehne wirkenden Anteile dieser Massenkraft sind beim Oberflügel in Richtung

der Normalkraft: $\Delta N^o = -n \cdot G_F^o \cdot \cos(\epsilon - \alpha^o)$,

der Tangentialkraft: $\Delta T^o = -n \cdot G_F^o \cdot \sin(\epsilon - \alpha^o)$.

Für den Unterflügel ist überall der Index o durch u zu ersetzen.

Bei überschläglicher Rechnung werden die Massenkraft des Flügels durch Multiplikation der aus den Luftkräften allein berechneten Werte T^o und N^o mit G_R/G berücksichtigt (Rechnungsgewicht $G_R =$ Fluggewicht G - Flügelgewicht G_F).

5. Lastverteilung über die Spannweite.

Nach Abs. 9042.

Die Verteilung der auf die Flächeneinheit bezogenen Luftkräfte über die Spannweite ist folgendermaßen anzunehmen:

a) Rechteckig über die ganze Spannweite (Abb. 8a):

$$p_a = N/F: \quad \text{Normalkraft*},$$

$$w_a = T/F: \quad \text{Tangentialkraft*}.$$

Dabei ist F die (aerodynamisch wirksame) Fläche des Einzelflügels (Abb. 9a).

b) In Flügelmitte rechteckig, aber an den Flügelenden längs einer Strecke, die gleich der mittleren Flügeltiefe t ist, geradlinig auf die Hälfte abnehmend (Abb. 8b):

$$p_b = N/F': \quad \text{Normalkraft*},$$

$$w_b = T/F': \quad \text{Tangentialkraft*}.$$

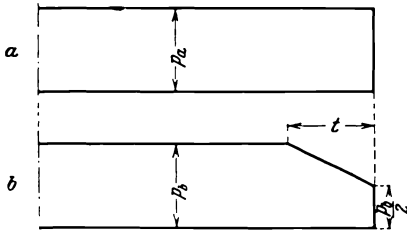


Abb. 8.

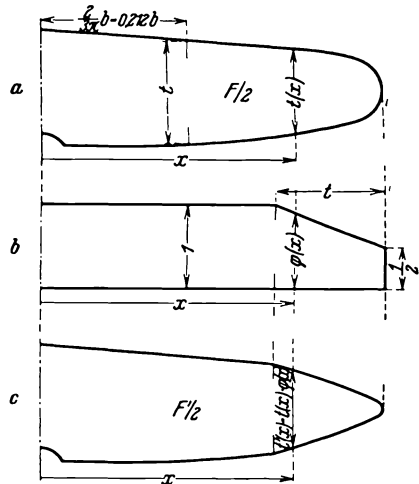


Abb. 9.

Dabei ist F' die (aerodynamisch wirksame) Fläche des Einzelflügels mit reduzierter Tiefe $t'(x) = t(x) \cdot \varphi(x)$ (Abb. 9c), wobei $\varphi(x)$ die Ordinate des Diagramms Abb. 9b an der Stelle x bedeutet.

Die laufende Last an der Stelle x ist:

$$\text{Bei Verteilung a) } p_a \cdot t(x) \quad \text{bzw.} \quad w_a \cdot t(x),$$

$$\text{,, ,, b) } p_b \cdot t'(x) \quad \text{,,} \quad w_b \cdot t'(x).$$

6. Lastverteilung über die Flügeltiefe.

Nach Abs. 9043.

Der Druckpunkt, d. h. der Angriffspunkt der Luftkraft R^* , ist von der Flügelvorderkante um den Betrag $s(x)$ entfernt (Abb. 10; vgl. Unterabschn. 4):

$$s(x) = t(x) \cdot c_m / c_n.$$

* Der Index o für den Oberflügel bzw. u für den Unterflügel ist weggelassen.

Der Druckpunkt liegt im C -Fall beim Eindecker im Unendlichen, beim Doppeldecker sehr weit von der Flügelvorderkante entfernt. Daher wird zur Vermeidung von Fehlern die Ermittlung der Lastverteilung auf die Holme unmittelbar mit M durchgeführt.

Das Moment M liefert bei zweiholmigen Flügeln die Verteilung der Normalkraft auf die beiden Holme folgendermaßen (Abb. 10):

Die laufende Normalkraft des Vorderholms sei $p^v \cdot t(x)$, die des Hinterholms $p^h \cdot t(x)$. Dann ergibt sich p^v und p^h aus:

$$\begin{aligned} p^v + p^h &= p, \\ p^v \cdot r^v + p^h \cdot r^h &= c_m \cdot q \cdot t(x). \end{aligned}$$

(Für p ist je nach der Verteilung p_a oder p_b zu setzen.)

Die Luftkraftverteilung in Flügeltiefe (Rippenbelastung) wird entsprechend den Belastungsannahmen (siehe auch Heimann und Madelung¹¹⁾) entsprechend Abb. 11 ange-

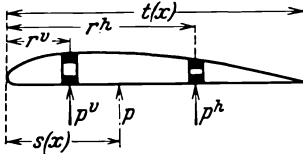


Abb. 10.

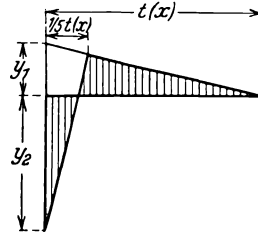


Abb. 11.

setzt. Die schraffierte Fläche ergibt die Belastung für den laufenden Meter Flügelbreite.

Die für die Verteilung maßgebenden Ordinatenabschnitte sind (Abb. 11)

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,5 \cdot q \cdot (15 c_m - c_n), \\ y_2 &= [12 \cdot q \cdot (2,5 c_m - c_n)]. \end{aligned}$$

7. Unsymmetrische Belastungen.

Nach Abs. 9044.

a) Luftkraftmomente um die Längsachse.

Zusätzlich zu den Flugfällen A, B, D, E, G und H ist folgender unsymmetrischer Belastungsfall zu untersuchen: Auf die eine Tragwerkshälfte wirke 70 vH, auf die andere 100 vH der ursprünglichen Belastung, aber in sonst gleichartiger Verteilung über die Spannweite und die Flügeltiefe wie vorher. Das hierdurch entstehende Moment wird im allgemeinen durch die Massenkkräfte des Tragwerks, Fahrwerks usw., dagegen weniger durch Leitwerksbetätigung ausgeglichen; der Belastungszustand ist also nicht als stationär anzusehen.

Dann treten am Baldachin oder Rumpf Zusatzkräfte auf, die besonders bei schmalen Baldachinen beachtenswert sein können.

- b) Luftkraftmoment um die Hochachse.
(Vgl. hierzu Aufgabe 5.)

Aufgabe 2: Belastung des Triebwerks.

Es sind die Belastungsannahmen für einen Triebwerkseinbau aufzustellen. (Nach Abs. 9164 der Belastungsannahmen.) Die Festwerte und die aerodynamischen Beiwerte des Flugzeugs seien dieselben wie bei Aufgabe 1.

Der in das Flugzeug eingebaute Motor habe die

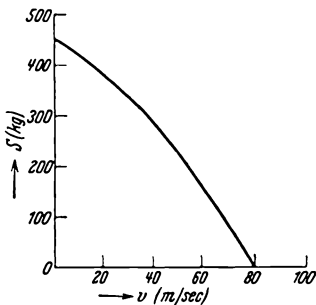


Abb. 12.

Maximalleistung: $N = 190$ PS,
Umdrehungszahl: $\bar{n}^* = 1500$ min⁻¹.

Das angenommene Luftschraubenschub-Diagramm ist in Abb. 12 dargestellt.

1. Abfangen bei ganz gedrosseltem Motor.

Es sind als sichere Lasten anzunehmen: Die Gewichte von Motor und Luftschraube einschließlich aller Zubehörteile, vervielfacht mit dem sicheren A -Fall-

Lastvielfachen n_A des Tragwerks. Ihre Resultierende ist

$$\mathfrak{P} = n_A \cdot G_m = 4 \cdot 350 = 1400 \text{ kg};$$

sie ist um den Winkel $(\alpha - \epsilon)$ gegen die Lotrechte zur Flugzeuglängsachse geneigt (Abb. 13).

2. Abfangen mit Spitzenleistung des Motors.

Es sind als sichere Lasten anzunehmen:

- n_A -faches Gewicht von Motor usw. wie bei 1. Dazu tritt:
- 1-facher größter Schraubenschub,
- 1-faches größtes Motordrehmoment,
- 1-faches Luftschrauben-Kreiselmoment bei der engsten senkrechten Kurve.

Zu 2, b) Ermittlung des Schraubenschubs S .

Für $v_A = 47,2$ m/sec (S. 8) folgt aus dem Luftschraubenschub-Diagramm (Abb. 12)

$$S = \text{rd. } 250 \text{ kg},$$

in Richtung der Längsachse nach vorn wirkend.

* \bar{n} zum Unterschied vom Lastvielfachen n .

Zu 2, c) Ermittlung des Motordrehmoments M_d .

$$M_d = 716,2 \text{ N}/\bar{n} = 90,7 \text{ kgm},$$

entgegengesetzt dem Drehsinn der Luftschraube wirkend.

Zu 2, d) Ermittlung des Luftschrauben-Kreiselmoments M_{kr} .

$$M_{kr} = 2 J_z [\omega_1 \cdot \omega_2] \text{ [kgm]}.$$

J_z [kgmsec²] = Massenträgheitsmoment der Luftschraube, bezogen auf die zur Hochachse parallele Achse durch die Nabe,

ω_1 [sec⁻¹] = Winkelgeschwindigkeit der Luftschraube,

ω_2 [sec⁻¹] = Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs.

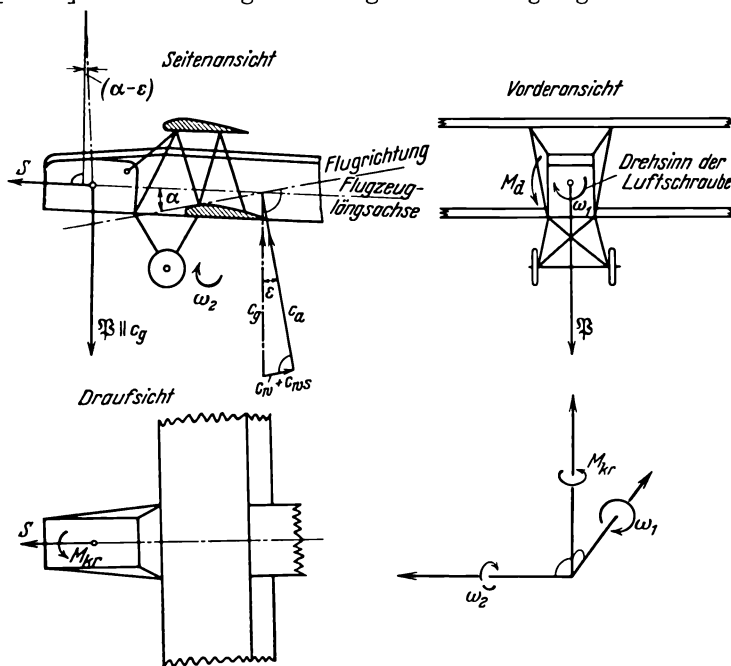


Abb. 13.

ω_1 und ω_2 sind als Vektoren*, $[\omega_1 \cdot \omega_2]$ ist als äußeres Produkt aufzufassen. (Da hier $\omega_1 \perp \omega_2$, so ist der Betrag von $[\omega_1 \cdot \omega_2]$ gleich dem Produkt der Beträge von ω_1 und ω_2 . Die Vektoren der Größen ω_1 , ω_2 und M_{kr} bilden ein Rechtssystem, Abb. 13; vgl. auch S. 30.)

α) Ermittlung von ω_1 .

$$\omega_1 = \frac{2 \pi \bar{n}}{60} = 157 \text{ sec}^{-1}.$$

* Auf verschiedenartige Bezeichnung von Vektoren und Vektorbeträgen wurde verzichtet, da Mißverständnisse hier ausgeschlossen sind.

β) Ermittlung von ω_2 der engsten senkrechten Kurve mit dem Radius R_{\min} . Der kleinstmögliche Radius R'_{\min} und das dazugehörige ω'_2 folgen aus den Gleichungen:

$$75 N \eta = (c_w + c_{ws}) F \frac{\gamma}{2g} v^3 \text{ [mkg/sec]} = \text{Leistung,}$$

$$Z + G = c_a F \frac{\gamma}{2g} v^2 \text{ [kg]} = \text{Gesamtauftriebskraft,}$$

$$Z = \frac{G}{g} \frac{v^2}{R} \text{ [kg]} = \text{Zentrifugalkraft,}$$

$$\omega_2 = \frac{v}{R} \text{ [sec}^{-1}\text{].}$$

Hieraus durch Elimination:

$$R = \frac{G/g \sqrt[3]{\left(\frac{150 N \eta g}{F \gamma}\right)^2}}{c_a F \frac{\gamma}{2g} \sqrt[3]{\left(\frac{150 N \eta g}{F \gamma}\right)^2} - G^3 (c_w + c_{ws})^2} \text{ [m].}$$

Es wird $\eta = 0,65$ und $\gamma = 1,25 \text{ kg/m}^3$ gesetzt. Für verschiedene Wertepaare c_a und $(c_w + c_{ws})$, die aus Abb. 3 entnommen werden, wird R berechnet. Daraus ergibt sich $R'_{\min} = \text{rd. } 145 \text{ m}$; mit dem dazugehörigen Wert $(c_w + c_{ws})$ liefert die erste Gleichung $v = 33 \text{ m/sec}$; daraus folgt:

$$\omega'_2 = 0,23 \text{ sec}^{-1}.$$

Andererseits folgt der kleinstzulässige Radius R''_{\min} und das dazugehörige ω''_2 im A -Fall aus den Gleichungen:

$$G \cdot n_A = G + Z = G \left(1 + \frac{v_A^2}{g R''_{\min}}\right),$$

$$\omega''_2 = \frac{v_A}{R''_{\min}}$$

mit $n_A = 4$ und $v_A = 47,2 \text{ m/sec}$ (nach Aufgabe 1) zu $R''_{\min} = 76 \text{ m}$ bzw.

$$\omega''_2 = 0,62 \text{ sec}^{-1}.$$

Da es widersinnig wäre, mit einem Radius zu rechnen, der kleiner als der kleinstmögliche ist, und es andererseits nicht folgerichtig wäre, der Berechnung des Triebwerkseinbaus einen kleineren Radius zugrunde zu legen, als er dem zulässigen A -Fall-Lastvielfachen des Tragwerks entspricht, genügt es, mit dem größeren der beiden Werte R'_{\min} und R''_{\min} zu rechnen, also hier mit $R_{\min} = \text{rd. } 145 \text{ m}$ und dazu $\omega_2 = 0,23 \text{ sec}^{-1}$.

γ) Ermittlung von J_z . Im folgenden bedeutet J_p das polare Trägheitsmoment der Luftschraube.

Es ist:

$$J_p \sim \left(\frac{D}{6}\right)^2 \frac{G_L}{g} \text{ bis } \left(\frac{D}{5}\right)^2 \frac{G_L}{g},$$

wobei

$G_L = 20$ kg das Gewicht der Luftschraube,

$D = 2,80$ m der Luftschraubenkreisdurchmesser ist; daraus folgt:

$$J_p \sim 0,44 \div 0,64 \text{ (gewählt zu rd. } 0,55 \text{ kgmsec}^2\text{)}.$$

Bei einer zweiflügeligen Luftschraube ist:

$$J_z \sim J_p \sin^2 \alpha,$$

wobei α den Öffnungswinkel zwischen Luftschraubenflügel und Bezugsachse des Trägheitsmomentes bedeutet (Abb. 14).

Bei einer drei- und mehrflügeligen Luftschraube ist:

$$J_z = \frac{J_p}{2}.$$

Im vorliegenden Falle sei die Luftschraube zweiflügelig; daher ergibt sich:

$$J_z \sim 0,55 \sin^2 \alpha \text{ [kgmsec}^2\text{]}.$$

Mithin ist das Kreiselmoment:

$$M_{kr} = 2J_z [\omega_1 \cdot \omega_2] = \text{rd. } 40 \sin^2 \alpha \text{ [kgm]}.$$

M_{kr} ist also periodisch veränderlich zwischen 0 und 40 kgm (Periodendauer $60/2\bar{n}$ sec, da auf 1 Umdrehung 2 Perioden von $\sin^2 \alpha$ kommen);

im Mittel ist $M_{kr} = 20$ kgm. (Vgl. auch Abs. 9163 und 9165 der Belastungsannahmen.)

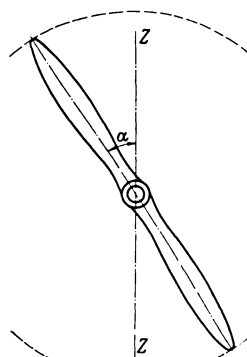


Abb. 14.

§ 2. Hauptlandungsfälle.

Aufgabe 3: Belastung des Flugzeugs bei zentrischem Stoß.

Für diejenigen Landungsfälle, bei denen die Resultierende der Stoßkräfte durch den Schwerpunkt des Flugzeugs geht, sind die am Flugzeug auftretenden Massenkräfte zu ermitteln. (Nach Abs. 9121 und 9122 der Belastungsannahmen.)

Die auf das Fahrwerk wirkende Stoßkraft P muß mit den Massenkräften des gesamten Flugzeugs im Gleichgewicht stehen:

$$P = e \cdot G.$$

Hierin ist:

G [kg] das Fluggewicht,

e das „sichere Stoßvielfache“ für zentrische Landung; es gibt für die verschiedenen Landungsfälle und Flugzeugarten die beim Aufsetzen zu erwartenden Beschleunigungen als Vielfache der Erdbeschleunigung an.

Ein Teil A der im Augenblick der Landung vorhandenen kinetischen Energie des Flugzeugs soll durch die Federung und Bereifung umgesetzt werden. Nach den Belastungsannahmen ist zu setzen:

$$\text{Hierin ist* :} \quad A = c \cdot m \cdot v_L^2 \text{ [mkg].}$$

c ein von der Verwendungs- und Beanspruchungsgruppe abhängiger, durch die Belastungsannahmen festgelegter Beiwert,

$$m = G/g \left[\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}} \right] \text{ die Masse des Flugzeugs,}$$

$$v_L \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}} \right] \text{ die Landegeschwindigkeit,}$$

$$v_L = \sqrt{q_{\min} \cdot \frac{2g}{\gamma_0}} = \sqrt{\frac{G|F}{c_{a \max}} \cdot \frac{2g}{\gamma_0}} \sim 4 \sqrt{\frac{G|F}{c_{a \max}}} \text{ (in Bodennähe).}$$

Der Zusammenhang zwischen der zur Motorachse lotrechten Auflagerkraftkomponente P des Fahrwerks und der zu P parallelen Komponente f des Federwegs wird durch das „Federungsdiagramm“ (Abb. 15) dargestellt.

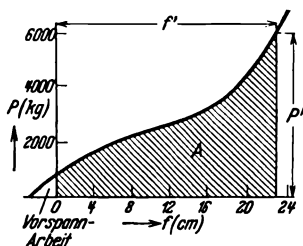


Abb. 15. Federungs- oder Arbeitsdiagramm.

Die von der f -Achse und der P -Kurve eingeschlossene Fläche stellt die jeweils vom Fahrwerk aufgenommene Arbeit dar. Diese erreicht den vorgeschriebenen Betrag A bei $f = f'$ und $P = P'$. Dann ist das sichere Stoßvielfache für zentrische Landung $e = P'/G$. (Das Flächenstück, das der Vorspannung der Fahrwerksfederung entspricht, darf bei A nicht mitgemessen werden!)

Zahlenbeispiel. 1. Ermittlung von e . Es sei:

$$c = 0,0070 \text{ (Verwendungs- und Beanspruchungsgruppe } S_4),$$

$$G = 1600 \text{ kg,} \quad F = 37,2 \text{ m}^2,$$

$$c_{a \max} = 1,23,$$

$$v_L = 23,6 \text{ m/sec} \quad \text{bzw.} \quad V_L = 85 \text{ km/h.}$$

Also:

$$A = 635 \text{ mkg.}$$

Der Wert $A = 635$ mkg wird erreicht bei $f' = 23$ cm und $P' = 5920$ kg (Abb. 15), daher ist

$$e = \frac{5920}{1600} = 3,7.$$

2. Dreipunktlandung (Abb. 16). Rad- und Spordruck (Stoßkräfte) sowie die Flugzeugmassenkraft $e \cdot G$ stehen senkrecht zur Landesebene.

* Bezeichnungen wie auf S. 5÷7.

Mit $P = e \cdot G = 5920 \text{ kg},$

$l_1 = 1,00 \text{ m},$

$l_2 = 4,00 \text{ m},$

$l = 5,00 \text{ m}$

ergibt sich

$P_1 = 4735 \text{ kg}, \quad P_2 = 1185 \text{ kg}.$

Das Flugzeug wird in die einzelnen Hauptmassen aufgeteilt. Jeder dieser Teilmassen entspricht eine sichere Massenkraft von der Größe $P_i = e \cdot G_i$, senkrecht zur Landungsebene; dabei ist G_i das Gewicht der Teilmasse i (vgl. Tabelle 1 und Abb. 16).

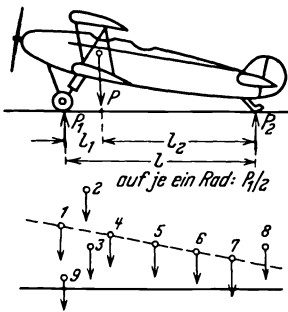


Abb. 16.

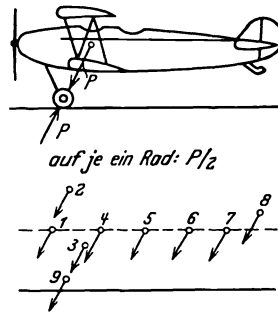


Abb. 17.

Tabelle 1. Teilmassen.

i	Teilmasse	G_i [kg]	P_i [kg]
1	Triebwerk	640	2368
2	Oberflügel mit Tank.	375	1388
3	Unterflügel mit Tank	145	536
4	Fluggast mit Gepäck	150	555
5	Flugzeugführer mit Gepäck	150	555
6	Rumpfstück.	20	74
7	„	20	74
8	Leitwerk	30	111
9	Fahrwerk.	70	259
	Summe:	1600	5920

3. Normale Radlandung (Abb. 17). Die Resultierende der Stoßkräfte und die der Flugzeugmassenkräfte gehen durch den Flugzeug-Schwerpunkt. Die sichere Massenkraft $P_i = e \cdot G_i$ jeder Teilmasse ist gleich groß wie bei der Dreipunktlandung und wirkt parallel der resultierenden Stoßkraft.

Aufgabe 4: Belastung des Flugzeugs bei exzentrischem Stoß.

Es sind die auf das Flugzeug wirkenden Massenkräfte für „Einseitige Radlandung“ zu bestimmen. (Nach Abs. 9123 der Belastungsannahmen.)

Bei diesem Landungsfall geht die resultierende Stoßkraft \mathfrak{P} nicht durch den Flugzeugschwerpunkt. \mathfrak{P} hat die Komponenten:

P_x bzw. P_y bzw. P_z in Richtung der Längs- bzw. Quer- bzw. Hochachse (Rechtssystem, Vorzeichensinn nach Abb. 18).

Im Flugzeugschwerpunkt werden die entgegengesetzt gleichen (also sich aufhebenden) Kräfte $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$, parallel und gleich \mathfrak{P} , an-

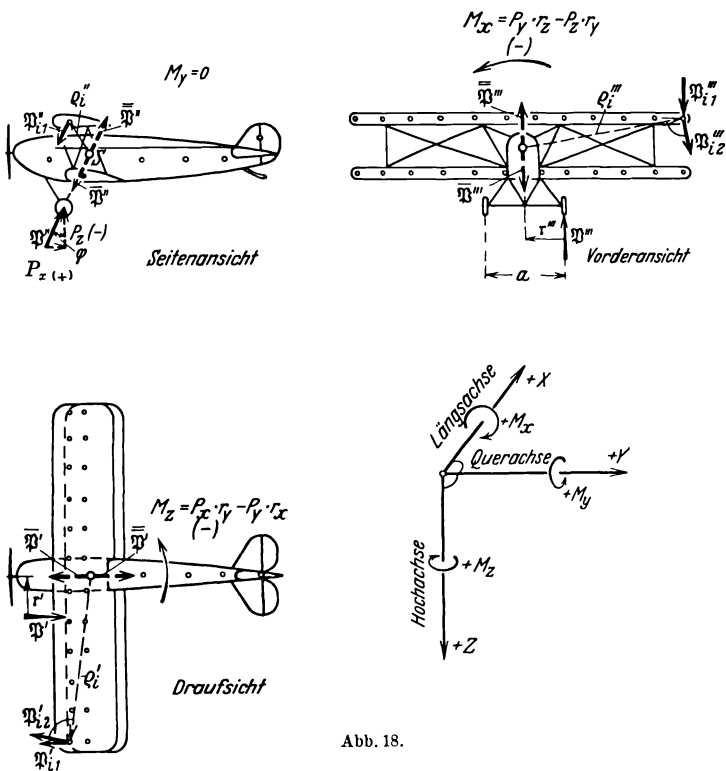


Abb. 18.

gebracht. Dann bildet $\bar{\mathfrak{P}}$ mit \mathfrak{P} das Kräftepaar: $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P} \cdot r]$, wobei r den Hebelarm von \mathfrak{P} in bezug auf den Schwerpunkt bedeutet; r hat die Komponenten r_x, r_y, r_z und die Länge r (vgl. S. 30).

Da die Einführung von $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$ keine Änderung des Gesamtbelastungszustandes bedeutet, kann die Belastung durch \mathfrak{P} im Abstände r vom Schwerpunkt durch eine Belastung des Systems mit $\bar{\mathfrak{P}} \neq \mathfrak{P}$ im Schwerpunkt und gleichzeitig mit dem Kräftepaar $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P} \cdot r]$ ersetzt werden. (Es wird also \mathfrak{P} unter Einführung des Kräftepaares $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P} \cdot r]$ zum Schwerpunkt parallel verschoben; vgl. S. 29.)

Auch der Vektor des Momentes \mathfrak{M} wird in drei Komponenten zerlegt:

$$\begin{aligned} M_x &= +P_y \cdot r_z - P_z \cdot r_y \quad (\text{Moment um die Längsachse}), \\ M_y &= -P_x \cdot r_z + P_z \cdot r_x \quad (\quad , \quad , \quad , \quad \text{Querachse}), \\ M_z &= +P_x \cdot r_y - P_y \cdot r_x \quad (\quad , \quad , \quad , \quad \text{Hochachse}). \end{aligned}$$

Die Gesamtmasse G/g des Flugzeugs wird in eine Reihe einzelner Teilmassen G_i/g aufgeteilt; unter Vernachlässigung ihrer einzelnen Teil-Massenträgheitsmomente werden sie durch entsprechende Massenpunkte i ersetzt (Abb. 18), die in den Schwerpunkten dieser einzelnen Teilmassen liegen.

Im Massenpunkt i wirkt

1. infolge $\overline{\mathfrak{P}} \# \mathfrak{P}$ die Massenkraft \mathfrak{P}_{i1} , parallel zu \mathfrak{P} , aber entgegengesetzt gerichtet:

$$P_{i1,x} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_x, \quad P_{i1,y} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_y, \quad P_{i1,z} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_z;$$

2. infolge seiner durch das Moment $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P} \cdot \mathbf{r}]$ hervorgerufenen Tangentialbeschleunigung die Massenkraft \mathfrak{P}_{i2} , so gerichtet, daß ihr Moment bezüglich des Schwerpunktes parallel, aber entgegengesetzt dem Moment \mathfrak{M} ist:

$$\begin{aligned} P_{i2,x} &= -\frac{G_i}{g} \left(\frac{M_y \varrho_{iz}}{J_y} - \frac{M_z \varrho_{iy}}{J_z} \right), \\ P_{i2,y} &= -\frac{G_i}{g} \left(-\frac{M_x \varrho_{iz}}{J_x} + \frac{M_z \varrho_{ix}}{J_z} \right), \\ P_{i2,z} &= -\frac{G_i}{g} \left(\frac{M_x \varrho_{iy}}{J_x} - \frac{M_y \varrho_{ix}}{J_y} \right). \end{aligned}$$

Darin sind ϱ_{ix} , ϱ_{iy} , ϱ_{iz} die Koordinaten des Punktes i , bezogen auf den Schwerpunkt, und J_x , J_y , J_z die Massenträgheitsmomente des Flugzeugs, bezogen auf die Längs-, Quer- und Hochachse.

Es ist:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{g} \sum G_i (\varrho_{iy}^2 + \varrho_{iz}^2), & J_y &= \frac{1}{g} \sum G_i (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2), \\ J_z &= \frac{1}{g} \sum G_i (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iy}^2). \end{aligned}$$

Die Trägheitsmomente ergeben sich um so genauer, in je mehr Teilmassen das System zerlegt wird. Besonderen Einfluß haben die von den Drehachsen weit entfernten Teilmassen.

Zahlenbeispiel. Es sei (vgl. Tabelle 2):

$$\begin{aligned} \sum G_i (\varrho_{iy}^2 + \varrho_{iz}^2) &= g \cdot J_x = 3050 \text{ kgm}^2, \\ \sum G_i (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2) &= g \cdot J_y = 2700 \text{ kgm}^2, \\ \sum G_i (\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iy}^2) &= g \cdot J_z = 4375 \text{ kgm}^2. \end{aligned}$$

Tabelle 2. Ermittlung von $g \cdot J_y$.

i	Teilmasse	G_i [kg]	$\sqrt{\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2}$ [m]	$G_i(\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2)$ [kgm ²]
1	Luftschraube	20	1,90	72
2	Motor	620	0,95	560
3	Oberflügel mit Betriebsstoff	375	1,00	375
4	Unterflügel mit Betriebsstoff	145	0,80	93
usw.	usw.	usw.	usw.	usw.
usw.	usw.	usw.	usw.	usw.
		$\sum G_i = G = 1600$ kg		$\sum G_i(\varrho_{ix}^2 + \varrho_{iz}^2) = g \cdot J_y = 2700$ kgm ²

Die Werte für $g \cdot J_x$ und $g \cdot J_z$ werden in gleicher Weise gefunden.

Gesamtstoßkraft nach Abs. 9123 der Belastungsannahmen mit $e = 3,7$ (Aufgabe 3):

$$\mathfrak{P} = 0,5 e \cdot G = 2960 \text{ kg:}$$

$$P_x = \mathfrak{P} \sin \varphi = + 1480 \text{ kg, } P_y = 0, P_z = - \mathfrak{P} \cos \varphi = - 2563 \text{ kg (Abb. 18).}$$

Hebelarm der Stoßkraft (von der Stoßkraft zum Schwerpunkt gerichtet):

$$r = 1,00 \text{ m:}$$

$$r_x = 0, \quad r_y = - \frac{a}{2} = - 1,00 \text{ m, } \quad r_z = 0;$$

Momentenkomponenten:

$$M_x = - 2563 \text{ kgm, } M_y = 0, M_z = - 1480 \text{ kgm;}$$

Massenkraftkomponenten für z. B. das Oberflügelendstück mit $G_i = 7,5$ kg, $\varrho_{ix} = - 0,10$ m, $\varrho_{iy} = + 5,60$ m, $\varrho_{iz} = - 1,00$ m:

$$\begin{array}{lll} P_{i1,x} = - 6,9 \text{ kg} & P_{i1,y} = 0 & P_{i1,z} = + 12,0 \text{ kg} \\ P_{i2,x} = - 14,2 \text{ kg} & P_{i2,y} = + 6,05 \text{ kg} & P_{i2,z} = + 35,3 \text{ kg} \\ P_{i,x} = - 21,1 \text{ kg,} & P_{i,y} = + 6,05 \text{ kg,} & P_{i,z} = + 47,3 \text{ kg.} \end{array}$$

§ 3. Belastungsfälle durch Leitwerkskräfte.

Aufgabe 5: Belastung des Flugzeugs durch Seitenleitwerkskräfte.

Die auf das Seitenleitwerk wirkende Luftkraft sowie die dadurch im gesamten Flugzeug hervorgerufenen Massenkkräfte sind zu ermitteln. (Nach Abs. 9056 der Belastungsannahmen. Die Belastungsannahmen für das Seitenleitwerk sind im DLA in Umarbeitung begriffen. Die hier angegebenen Berechnungen beziehen sich auf die zur Zeit geltenden Belastungsannahmen.)

1. Leitwerkskräfte durch Böenbelastung (unwillkürliche Beanspruchung).

Für die mittlere sichere Leitwerksbelastung ist zu setzen (vgl. Aufg. 1, S. 10):

$$p_s = \pm \frac{1}{16} v_h \cdot w \cdot \eta \cdot \frac{dc_{a_s}}{d\alpha_s} \text{ [kg/m}^2\text{]}.$$

Hierin ist:

v_h [m/sec] die höchste Waagrechtgeschwindigkeit,

w [m/sec] die Böengeschwindigkeit (in der Formel für p_s senkrecht zur Leitwerksfläche wirkend angenommen),

η der Wirkungsbeiwert des Einsetzens der Strömungsänderung,

$\frac{dc_{a_s}}{d\alpha_s}$ die Änderung des Auftriebsbeiwerts der Seitenleitwerksfläche mit dem Anblase(Schiebe)-Winkel (im Bogenmaß).

Das Produkt $w \cdot \eta$ ist wenigstens gleich 10 m/sec zu setzen.

Ergibt sich damit p_s größer als „ $p_{s\max}$ “ (s. unten), dann braucht nur $p_{s\max}$ in die weitere Rechnung eingesetzt zu werden; „ $p_{s\max}$ “ wird folgendermaßen ermittelt:

Es liege eine Messung vor, die den Auftriebsbeiwert c_{a_s} des Seitenleitwerks in Abhängigkeit vom Anblasewinkel α_s für verschiedene Ruderausschläge zeigt (Abb.19). Aus den Geschwindigkeiten v_h und w

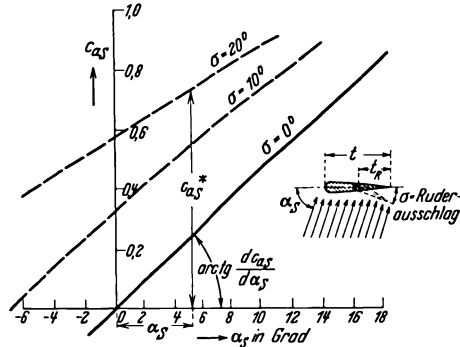
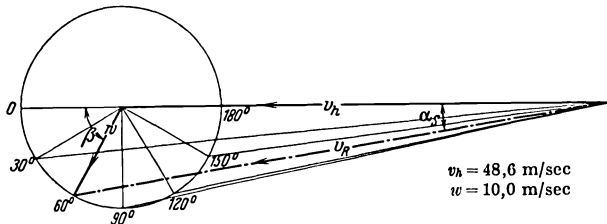


Abb. 19.

(s. oben*), die unter einem Winkel β zusammentreffen (Abb. 20), ergibt sich eine resultierende Geschwindigkeit v_R , ein resultierender



$v_h = 48,6 \text{ m/sec}$
 $w = 10,0 \text{ m/sec}$

Abb. 20.

Staudruck $q_R \sim v_R^2/16$ (in Bodennähe) und ein resultierender Anblasewinkel α_s . Der bei diesem Anblasewinkel α_s größtmögliche Auftriebs-

* w jetzt aber zu 10 m/sec in beliebiger Richtung wirkend angenommen.

beiwert ist c_{aS}^* (er wird hier beim größtmöglichen Ruderausschlag des vorliegenden Flugzeugs: $\sigma \sim 20^\circ$ erreicht, Abb. 19). Die dazugehörige mittlere Leitwerksbelastung ist $p_S = q_R \cdot c_{aS}^*$. Für verschiedene Winkel β

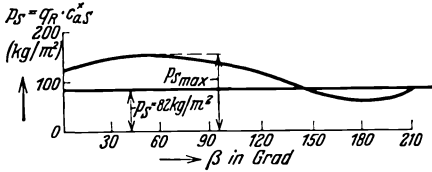


Abb. 21.

wird diese mittlere Leitwerksbelastung berechnet und in Abhängigkeit von β aufgetragen (Abb. 21). Daraus ergibt sich der überhaupt größtmögliche Wert $p_{S\max}$.

In dem hier gezeigten Beispiel ist $p_{S\max}$ wesentlich größer als der zum Vergleich eingetragene Wert p_S , der sich mit der eingangs genannten Formel ergibt.

Für die auf das Seitenleitwerk wirkende Kraft ist also zu setzen:

$$P = p_S F_S^{\text{II}}.$$

2. Massenkkräfte im gesamten Flugzeug infolge einer Seitenleitwerksbetätigung.

Die Belastung des Seitenleitwerks ruft außer der Drehmomentenkomponente M_z um die Hochachse wegen seiner zur Längsachse exzentrischen Lage auch eine Komponente M_x um die Längsachse hervor:

$$M_x = p_S F_S h_S, \quad M_z = p_S F_S l_S.$$

Hierin ist:

F_S [m²] die Fläche des Seitenleitwerks (Flosse + Ruder),

h_S [m] die Höhe des Flächenschwerpunkts des Seitenleitwerks über der Längsachse,

l_S [m] der Abstand der Ruderachse des Seitenleitwerks vom Flugzeugschwerpunkt. Richtiger müßte hier der Abstand des zu jeder Verteilung gehörigen Druckmittels vom Flugzeugschwerpunkt eingesetzt werden, doch ist dieser Unterschied gering.

Auf einen Massenpunkt i wirken die Kräfte (vgl. Aufgabe 4):

\mathfrak{P}_{i1} mit den Komponenten:

$$P_{i1,x} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_x \quad (\text{hier} = 0),$$

$$P_{i1,y} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_y \quad (\text{,,} = -\frac{G_i}{G} \cdot p_S F_S),$$

$$P_{i1,z} = -\frac{G_i}{G} \cdot P_z \quad (\text{,,} = 0).$$

\mathfrak{B}_{i2} mit den Komponenten:

$$P_{i2,x} = -\frac{G_i}{g} \left(\frac{M_y \varrho_{iz}}{J_y} - \frac{M_z \varrho_{iy}}{J_z} \right) \left[\text{hier} = + \frac{G_i p_s F_s l_s \varrho_{iy}}{g J_z} \right],$$

$$P_{i2,y} = -\frac{G_i}{g} \left(-\frac{M_x \varrho_{iz}}{J_x} + \frac{M_z \varrho_{ix}}{J_z} \right) \left[\text{,,} = + G_i p_s F_s \left(\frac{l_s \varrho_{iz}}{g J_x} - \frac{l_s \varrho_{ix}}{g J_z} \right) \right],$$

$$P_{i2,z} = -\frac{G_i}{g} \left(\frac{M_x \varrho_{iy}}{J_x} - \frac{M_y \varrho_{ix}}{J_y} \right) \left[\text{,,} = - \frac{G_i p_s F_s l_s \varrho_{iy}}{g J_x} \right].$$

Für den Fall mehrmotoriger Flugzeuge vgl. auch Abs. 9058.

Bemerkung: In entsprechender Weise werden die Belastungen des Höhenleitwerks und die dadurch bedingten Massenkräfte gefunden. Es ist zu beachten, daß der vom Längsmomentenausgleich herrührende Anteil der Höhenleitwerksbelastung keine Drehbeschleunigung verursacht, da er mit dem Schwerpunktsmoment der Flügelluftkräfte im Gleichgewicht steht.

Zweiter Abschnitt.

Beispiele zur Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen von Flugzeugbauteilen.

Einleitung.

Allgemeine Bemerkungen zur Durchführung statischer Berechnungen.

1. Das Flugzeug als Tragwerk.

Ein „Tragwerk“ ist ein körperliches Gebilde, welches bestimmte Lasten tragen soll; d. h. die Angriffspunkte einer Anzahl von Lasten sollen durch zweckentsprechenden Aufbau dieses Gebildes gegeneinander räumlich festgelegt sein, und zwar derart, daß die seinen einzelnen Teilen zugemuteten Beanspruchungen mit den Eigenschaften der verwendeten Baustoffe und die dadurch bedingten Formänderungen mit dem Verwendungszweck des Tragwerks verträglich bleiben.

Die „Lasten“ sind im allgemeinen Sinn Kräfte und Kräftepaare (Momente), die in verschiedenen Wirkungslinien bzw. -ebenen am Tragwerk angreifen; zwischen diesen soll das Tragwerk „Gleichgewicht“ vermitteln.

Ein Flugzeug ist ein freies Tragwerk, d. h. die an ihm angreifenden äußeren Kräfte und Momente bilden ohne Zuhilfenahme von „Auflagerkräften“ oder „Einspannmomenten“ ein Gleichgewichts-System. Diese

äußeren Kräfte und Momente setzen sich zusammen aus Luftschraubenkraft, Luftkräften, Massen-(Trägheits- und Schwer-)Kräften, Stoßkräften, Motordrehmoment, Luftschrauben-Kreiselmoment usw.

Ein Flugzeug-Bauteil ist ein gelagertes Tragwerk; z. B. ist ein Flügel am Rumpf, bzw. ein Rumpf am Flügel gelagert; eine Rippe ist an den Holmen gelagert usw. Bei einem solchen Teiltragwerk stehen die äußeren Kräfte mit den „Auflagerkräften“ bzw. „Einspannmomenten“, die den Anschluß dieses Tragwerks an ein anderes Gebilde vermitteln, im Gleichgewicht. Nach Ermittlung und Anbringung der Auflagerkräfte bzw. Einspannmomente als weitere äußere Kräfte bzw. Momente neben den ursprünglich gegebenen geht das „gelagerte“ in ein „freies“ Tragwerk über.

2. Gliederung des Flugzeugs als Tragwerk.

Die allgemeinste „Gliederung“ eines Flugzeugs ist durch die natürliche Einteilung in Flügel, Rumpf, Leitwerke, Fahr- und Schwimmwerk usw. gegeben. Diese Hauptglieder bestehen weiterhin wieder je nach ihrer Aufgabe und Ausbildung aus Holmen, Rippen, Gurten, Verspannungen, Streben, Pfosten usw.

Jedes dieser Glieder kann bei entsprechender Ausbildung weiterhin aufgeteilt werden, z. B. ein Holm in Gurte und Füllstäbe (Streben und Pfosten).

Häufig wird eine solche Gliederung zur Veranschaulichung des Kräfteverlaufs auch nur angenommen; z. B. wird eine mit Versteifungen versehene Sperrholzwand in Anlehnung an die vorhandenen Versteifungen in gedachte Pfosten und Streben zergliedert.

3. Grundbegriffe hinsichtlich des System-Aufbaus.

Durch die Gliederung zerfällt jedes Tragwerk in einzelne „Stäbe“. Je nach dem Grad der Gliederung kann also ein ganzer Flügel bzw. ein Rumpf einen „Stab“ darstellen; bei weitergehender Gliederung kann ein Holm oder eine Rippe als Stab gelten; bei noch weitergehender Unterteilung bedeutet ein Stab z. B. eine Strebe oder einen Pfosten. Im allgemeinen besitzen alle Stäbe eine gewisse Längs-, Biege-, Schub- und Drillsteifigkeit.

Unterschieden werden jedoch „einfache Stäbe“, die nur axial gerichtete Kräfte (Zug und Druck) aufnehmen und nur die zu ihrer Knicksicherheit nötige Biegesteifigkeit haben, und „biegesteife Stäbe“, die sich durch eine große Biegesteifigkeit auszeichnen, die sie befähigt, quer zur Achse gerichtete Lasten aufzunehmen. Daneben gibt es noch Stäbe, die nur in einem Richtungssinn widerstandsfähig sind, z. B. Drähte, Seile und Ketten, die nur Zug aufnehmen können.

Ein Stab kann gerade oder gekrümmt sein. Es liegt nahe, einen ge-

krümmten Stab durch eine Folge von geraden Teilstäben zu ersetzen. Ebenso kann ein gerader Stab mit über seine Länge veränderlichen Abmessungen durch eine Folge von Einzelstäben mit für sich konstanten Abmessungen ersetzt werden. Ein Stab, der durch quergerichtete Kräfte auf Biegung beansprucht wird, wird häufig als „Balken“ bezeichnet.

Soll ausgesprochen werden, daß sich ein Bauteil seiner Ausbildung gemäß in einzelne Stäbe gliedert, so wird er als „Stabwerk“ bezeichnet. Wird z. B. ein Holm ohne Rücksicht auf seine Ausbildung betrachtet, so gilt er als Stab bzw. Balken; wird er aber im Hinblick auf seine Gliederung in Gurte, Streben und Pfosten betrachtet, so wird er als „Stabwerk“ bezeichnet.

Soll nur ausgesprochen werden, daß eine Folge von Stäben ein zusammenhängendes Gebilde darstellt, so wird diese als „Stabzug“ bezeichnet. Für ein ebenes Stabwerk, welches nur zur Aufnahme von Kräften und Momenten innerhalb seiner Ebene geeignet ist, wird wie für vollwandige ebene Systeme die Bezeichnung „Scheibe“ bzw. „gegliederte Scheibe“ gebraucht.

Hinsichtlich ihrer statischen Eigenschaften werden die Stabwerke nach folgenden Gesichtspunkten unterteilt:

Die Stäbe können so angeordnet bzw. in so großer Zahl vorhanden sein, daß sie in sog. Knotenpunkten nur gelenkig miteinander verbunden zu werden brauchen, um das Stabwerk zur Aufnahme beliebig gerichteter und angeordneter Lasten geeignet zu gestalten; in diesem Falle wird es als „Fachwerk“ bezeichnet. Falls ein Fachwerk aus nur einfachen Stäben besteht, dürfen die Lasten nur in Form von Einzelkräften in den Knotenpunkten angreifen.

Häufig liegt aber auch der Fall vor, daß es nicht genügt, die Stäbe bloß durch Gelenke zu verbinden, sondern daß biege feste bzw. drill feste Knoten erforderlich werden, um das System für beliebig gerichtete Kräfte aufnahmefähig zu gestalten. Solche Stabwerke werden als „Rahmenwerke“ oder bei einfacher Gestaltung kürzer als „Rahmen“ bezeichnet; ihre nicht gelenkig angeschlossenen Stäbe müssen dann biege- bzw. auch drillsteif sein.

Praktisch liegen bei den meisten Fachwerken, obwohl theoretisch nicht erforderlich, biege- und drill feste Knoten vor. Soll dies ausgedrückt werden, so wird von „Fachwerken mit steifen Knoten“ im Gegensatz zu „Gelenkfachwerken“ gesprochen. Umgekehrt wird in Rahmenwerken häufig eine Reihe von Gelenken eingeschaltet, sofern dadurch die Tragfähigkeit des Systems nicht beeinträchtigt wird; solche Systeme werden vielfach als „ n -Gelenk-Rahmen“ (z. B. Dreigelenkrahmen) bezeichnet.

Sonderfälle des Rahmenwerks bzw. der Stabzüge mit steifen oder zum Teil steifen Knoten sind „mehnteilige Balken“; solche liegen z. B.

vor bei auskragenden Holmen, die sich aus „Balken mit beiderseitiger Endstützung“ und „Kragbalken“ zusammensetzen. Hierzu gehören auch durchlaufende Holme auf mehreren Stützen, sowie gekrümmte Holme oder Holme mit ungleichmäßigem Steifigkeitsverlauf, sofern sie zur Vereinfachung der Behandlung in eine Reihe aneinander gefügter Einzelstäbe zerlegt gedacht werden.

Ferner wird von „Stabwerken mit veränderlicher Gliederung“ gesprochen. Solche Stabwerke liegen z. B. dann vor, wenn sie Glieder enthalten, die nur gegen Zug widerstandsfähig sind und dann ausschalten, wenn ihnen infolge irgendeines Belastungszustandes Druck zugemutet wird, oder wenn sie Gelenke enthalten, die sich bei gewissen Formänderungen schließen, so daß sie von bestimmten Laststufen ab steife Knoten darstellen.

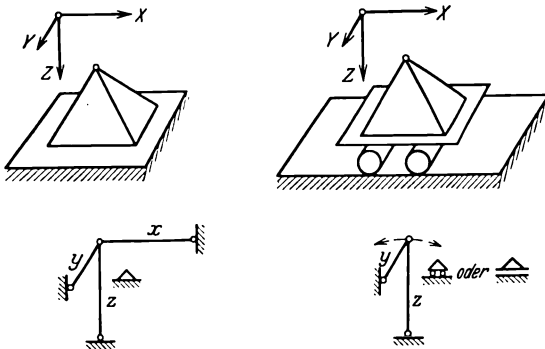


Abb. 22.

Sofern die aufzunehmende Belastung, die an einem Stabwerk bzw. einem Stab angreift, nicht von vornherein für sich im Gleichgewicht steht, bedarf jedes Stabwerk bzw. jeder Stab einer „Stützung“, d. h. er muß an ein anderes System angeschlossen sein. Die Stützung erfolgt

durch eigens dafür vorgesehene „Anschlußstäbe“ oder durch „Lager“. Die „Stützung“ in irgend einem Punkt des betrachteten Systems gegen ein anderes System kann so erfolgen, daß sie im Anschlußpunkte jede gegenseitige Bewegung des einen gegen das andere System oder nur gewisse Bewegungskomponenten ausschaltet. Demgemäß spricht man bei jeder Stützung von der Anzahl der durch sie bedingten „Fesseln“.

Ein räumlich unverschieblich, aber drehbar angeschlossener Punkt (sog. „feste“ Lagerung) besitzt 3 Fesseln. Ein räumlich vollständig, auch gegen Drehung fest angeschlossener Punkt besitzt 6 Fesseln. Wird ein ebenes System nur hinsichtlich der Stützung in seiner Ebene betrachtet, so hat ein unverschieblich, aber drehbar angeschlossener Punkt zwei, bzw. ein verschiebe- und drehfest angeschlossener Punkt drei Fesseln. Eine Fessel, die die Drehung in irgendeinem Sinne verhindert, heißt „Einspannung“.

Zur Veranschaulichung der Fesseln einer Stützung können Lagerkonstruktionen sinnbildlich durch 1 ÷ 3 starre Stäbe bzw. 1 ÷ 3 Einspannungen dargestellt werden (Abb. 22).

4. Aufgaben der Flugzeugstatik.

Die Aufgaben der Flugzeugstatik sind grundsätzlich die gleichen wie die der Baustatik:

Hinsichtlich eines ganzen Stabwerks besteht die eine Aufgabe der Statik darin, diejenigen Kräfte und Momente anzugeben, die an den Enden eines jeden einzelnen Stabes auf diesen wirken. Hinsichtlich jedes einzelnen Stabes besteht die entsprechende Aufgabe darin, diejenigen Kräfte und Momente zu ermitteln, die an irgendeiner gedachten Schnittstelle des Stabes anzubringen sind, wenn im durchschnittenen gedachten Stab dieselbe Beanspruchung wirksam sein soll wie am nicht durchschnittenen Stab. Die Durchführung dieser Aufgabe beginnt im allgemeinen mit der Ermittlung der in den Lager-Fesseln (Anschlußstäben bzw. Einspannungen) auftretenden Kräfte bzw. Momente.

Die zweite Aufgabe der Statik besteht in der Ermittlung der Formänderungen der einzelnen Glieder sowie des Gesamtsystems unter dem Einfluß der Belastungen. Bei der Berechnung sog. statisch bestimmter Systeme kann die erste Aufgabe unabhängig von der zweiten gelöst werden; bei sog. statisch unbestimmten Systemen ist dagegen die Zuhilfenahme der zweiten Aufgabe zur Lösung der ersten erforderlich (vgl. Abschn. 6, S. 35).

Nicht mehr Aufgabe der „Statik“ ist es, den weiteren Verlauf der Kräfte innerhalb eines nicht weiter in Stäbe zerlegbaren Einzelglieds zu verfolgen. Nicht mehr zur Statik gehören also beispielsweise Fragen über die Verteilung der Beanspruchungen auf Gurte und Stege eines Kastenholms oder über die Verteilung der Spannungen in der Nähe eines Bolzenlochs. Aufgaben dieser Art, die über eine von vornherein gegebene Gliederung hinausgehen, gehören in die „Festigkeitslehre“. Sie sollen hinsichtlich des Flugzeugbaus an anderer Stelle behandelt werden.

5. Darstellung von Kräften und Momenten; Verschiebungen.

Kräfte und Momente: Die äußere Belastung eines Tragwerks erfolgt durch Kräfte. Je zwei parallele entgegengesetzt gleiche Kräfte bilden ein Kräftepaar; das Produkt aus Größe und Abstand der Kräfte eines Kräftepaars wird als Moment des Kräftepaars bezeichnet. Da bei Belastung eines Bauteils durch Kräftepaare meist nur deren Momente von Bedeutung sind, wird in solchen Fällen im allgemeinen nur von Belastung durch „Momente“ gesprochen.

Soll eine Kraft P , die an einer Stelle x_1 angreift und senkrecht zur Koordinatenachse X gerichtet ist, in bezug auf eine Stelle x_0 betrachtet werden, so erfordert dies in bekannter Weise die Einführung ihres (Dreh-) Momentes in bezug auf die Stelle x_0 :

$$M = P \cdot (x_1 - x_0),$$

d. h. die Kraft P wird von der Stelle x_1 zur Stelle x_0 parallel verschoben und ein Kräftepaar entspr. Abb. 23, dessen Moment gleich M ist, wird hinzugefügt, so daß äußerlich wieder ein mit dem ursprünglichen gleichbedeutender Zustand herbeigeführt wird.

Die vektoriellen Begriffe „Kraft“ und „Moment“ bzw. „Kräftepaar“ werden sinnbildlich durch Pfeile dargestellt, und zwar:

Kräfte P durch Pfeile, parallel der Wirkungslinie der Kraft, gerichtet im Sinne der Kraft,

Kräftepaare oder Momente M durch Pfeile, senkrecht zur Ebene des Kräftepaars, so gerichtet, daß, im Sinne des Pfeils gesehen, dem Pfeile ein im Uhrzeigersinn drehendes Kräftepaar entspricht (Korkzieher-Regel*).

Häufig erfolgt die Darstellung eines Momentes aber auch durch ein Pfeilepaar im Sinne eines dem Moment entsprechenden Kräftepaars oder

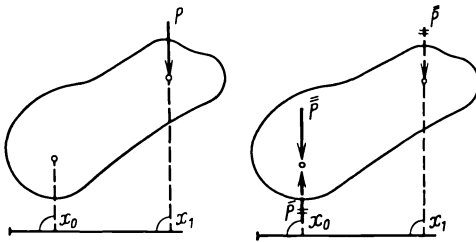


Abb. 23.

durch einen krummen Pfeil, der den Drehsinn des Momentes angibt.

Verschiebungen:

Unter dem Einfluß der Belastung erleiden die Tragwerke Formänderungen infolge der elastischen Nachgiebigkeit der Baustoffe.

Die einzelnen Punkte bzw.

Querschnitte des Systems ändern dabei ihre Lage, sie werden verschoben; hinsichtlich der Verschiebungen wird unterschieden zwischen Wegen und Drehungen; ein Weg hat im Raum 3, in der Ebene 2 Komponenten, eine Drehung hat deren im Raum 3, in der Ebene 1.

Die Verschiebungen werden ebenfalls durch Pfeile dargestellt, und zwar:

Wegen durch Pfeile, parallel und richtungsgleich dem zurückgelegten Weg,

Drehungen durch Pfeile, senkrecht zur Ebene der Drehung, so gerichtet, daß, im Sinne des Pfeils gesehen, dem Pfeile eine Drehung im Uhrzeigersinn entspricht (Korkzieher-Regel).

Die Darstellung einer Drehung erfolgt häufig auch durch einen krummen Pfeil.

* Häufig erfolgt die Einführung des Pfeiles in umgekehrtem Sinne; der hier eingeführten „Korkzieher-Regel“ wurde der Vorzug gegeben, weil sie sich besonders leicht einprägt. Sie entspricht der Vektor-Schreibweise des Momentes einer Kraft \mathfrak{P} bezüglich eines Punktes i :

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{P} \cdot \mathbf{r}],$$

wobei der Pfeil des Hebelarmes \mathbf{r} der Kraft \mathfrak{P} bezüglich des Punktes i zum Punkte i hinweist.

6. Aufbau und Stützung tragfähiger Systeme (Stabilitätskriterien).

Die folgenden Angaben beziehen sich zunächst auf räumliche Systeme; der Sonderfall ebener, nur in ihrer Ebene belasteter Systeme ist aus den jeweils in Klammern beigefügten Zahlen bzw. Formeln ersichtlich.

Die Ermittlung der Lagerkräfte bzw. Einspannmomente, d. h. die Ermittlung der von den Fesseln ausgeübten Kräfte bzw. Momente erfolgt durch die 6 (bzw. 3) Gleichgewichtsbedingungen:

„Die Summe aller (Dreh-)Momente in bezug auf 6 Achsen (bzw. 3 Punkte) in allgemeiner Lage verschwindet“:

$$\sum M = 0.$$

Hiervon können 3 (bzw. 2) Bedingungen durch die gleichwertigen Forderungen ersetzt werden:

„Die Summe aller Kräfte in 3 (bzw. 2) Richtungen verschwindet“:

$$\sum P = 0.$$

Dementsprechend erfordert die Stützung eines Tragwerks im allgemeinen 6 (bzw. 3) Fesseln. (Gewisse, hier nicht näher behandelte Fesselanordnungen führen nicht zu linear voneinander unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen und sind daher unzulässig; so dürfen z. B. bei einem durch 3 Stäbe gestützten ebenen System die Achsen der Auflagerstäbe nicht alle durch einen Punkt gehen; ferner dürfen bei einem durch 6 Stäbe gestützten räumlichen System die Auflagerstäbe nicht so angeordnet sein, daß ihre Achsen alle von einer Geraden geschnitten werden können.)

Nachdem die Fesselkräfte bzw. -momente ermittelt und als äußere Belastung zusätzlich zu der ursprünglich gegebenen Belastung hinzugenommen sind, besteht die weitere Aufgabe zunächst darin, die in jedem Knotenpunkt auf die daran angeschlossenen Stäbe wirkenden Momente und Kräfte anzugeben. Für jedes Stabende bestehen in diesem Sinne 6 (bzw. 3) Unbekannte, nämlich 3 Kraftkomponenten und 3 Momentenkomponenten (bzw. 2 Kraftkomponenten und 1 Momentenkomponente); das sind, da jeder Stab zwei Enden hat, insgesamt $2 \cdot 6 s$ (bzw. $2 \cdot 3 s$) Unbekannte, wenn s die Anzahl der vorhandenen Stäbe des Stabwerks bedeutet. Es kann also gesagt werden, daß jeder steife Stabanschluß 6 (bzw. 3) „innere Fesseln“ darstellt.

Zur Berechnung dieser Unbekannten stehen folgende Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung ($k = \text{Knotenzahl}$, $s = \text{Stabzahl}$):

1. Knotengleichungen: $\sum \mathfrak{M}$ an jedem Knoten gleich Null,
 $\sum \mathfrak{P}$ „ „ „ „ „
2. Stabgleichungen: $\sum \mathfrak{M}$ über jeden Stab gleich Null,
 $\sum \mathfrak{P}$ „ „ „ „ „

Da jedes Moment bzw. jede Kraft in 3 Komponenten zerfällt (bzw. 1 Moment, 2 Kraftkomponenten), so liegen insgesamt vor:

$2 \cdot 3 k$ Knotengleichungen [bzw. $(1 + 2) k$ Knotengleichungen
und $2 \cdot 3 s$ Stabgleichungen und $(1 + 2) s$ Stabgleichungen].

Es ist aber zu beachten, daß 6 (bzw. 3) Gleichgewichtsbedingungen bereits aufgebraucht sind zur Ermittlung der äußeren Fesselkräfte; insgesamt stehen also einander gegenüber:

$12 s$ gesuchte Größen (Fesseln)
und $6 s + 6 k - 6$ Gleichgewichtsbedingungen
[bzw. $6 s$ gesuchte Größen
und $3 s + 3 k - 3$ Gleichgewichtsbedingungen].

Jeder in das System eingeschaltete gelenkige Stabanschluß bringt je nach seiner Ausbildung 1, 2 oder 3 Freiheitsgrade (einfache, Kreuz-, Kugel-Gelenke). Werden also gelenkige Stabanschlüsse eingeschaltet oder angenommen, so sinkt die Anzahl der gesuchten statischen Größen (Fesseln) um die Anzahl f der Freiheitsgrade, die aus den vorhandenen Gelenken folgen.

Dann stehen nur noch einander gegenüber:

$12 s - f$ gesuchte Größen (Fesseln)
und $6 s + 6 k - 6$ Gleichgewichtsbedingungen
[bzw. $6 s - f$ gesuchte Größen
und $3 s + 3 k - 3$ Gleichgewichtsbedingungen].

Hierbei ist folgendes zu beachten: Greifen an einem Knoten s_i Stäbe an und werden die Anschlüsse dieser Stäbe an den betreffenden Knoten bis auf einen vollkommen gelenkig gemacht, so fallen $3 s_i - 3$ (bzw. $s_i - 1$) Fesseln fort. Dann werden nach den Knotengleichungen „ $\sum \mathfrak{M} = 0$ “ die 3 (bzw. 1) vom Knoten aus auf den letztgenannten Stabanschluß wirkenden Momentenkomponenten ebenfalls zu Null (sofern nicht unmittelbar im Knoten ein äußeres Moment angesetzt wird). Ein vollständig gelenkiger Knoten liegt also bereits dann vor, wenn an einem ursprünglich steifen Knoten $3 s_i - 3$ (bzw. $s_i - 1$) Fesseln verschwinden. (Denn wenn z. B. von zwei Stäben einer gelenkig an den anderen angeschlossen ist, so sind beide Stäbe gelenkig miteinander verbunden.)

Die Einführung eines vollkommen gelenkigen Knotens kann natürlich auch als Beseitigung von $3 s_i$ (bzw. s_i) Fesseln gedeutet werden, dann sind aber 3 (bzw. 1) der Knotengleichungen als überflüssig auszuschalten.

Hinsichtlich eines Stabes, der über seine Länge nicht durch äußere Lasten belastet ist, wie es z. B. bei reiner Knotenpunktsbelastung der

Fall ist, sprechen die 3 (bzw. 2) letzten Stabgleichungen die Tatsache aus, daß die an den Enden i und j eines Stabes „ i, j “ wirksamen Kräfte bzw. ihre entsprechenden Komponenten entgegengesetzt gleich sein müssen; werden also bei Knotenpunktsbelastung von vornherein die auf die beiden Stabenden wirkenden Kräfte einander entgegengesetzt gleich eingeführt („Stab-Längskräfte“, „Stab-Querkräfte“), so fallen 3 s (bzw. 2 s) Unbekannte und gleichzeitig 3 s (bzw. 2 s) dadurch überflüssige Stabgleichungen fort. In gleicher Weise können auch von vornherein die an den Stabenden wirkenden, den Stab verdrillenden Momenten-Komponenten einander entgegengesetzt gleich eingeführt werden; dadurch fallen s weitere Stabgleichungen fort (letzteres bezieht sich nur auf räumliche Systeme). Dann stehen nur noch einander gegenüber:

$$\begin{aligned} & 8s - f \text{ gesuchte Größen (Fesseln)} \\ & \quad \text{und } 2s + 6k - 6 \text{ Gleichgewichtsbedingungen} \\ & [\text{bzw. } 4s - f \text{ gesuchte Größen (Fesseln)} \\ & \quad \text{und } s + 3k - 3 \text{ Gleichgewichtsbedingungen}]. \end{aligned}$$

Wenn nun ein vollständiges Gelenkfachwerk vorliegt, so fallen an jedem Stabende 2 (bzw. 1) Komponenten der dort wirkenden Momente fort (Vektorkomponenten senkrecht zur Stabachse). Ferner fällt die an beiden Enden entgegengesetzt gleiche Endmomenten-Komponente fort, die den Stab auf Drillung beansprucht (Drillung ist nur bei räumlichen Systemen vorhanden). Dann ist die Anzahl der fortfallenden Fesseln $f = 5s - 3k$ (bzw. $f = 2s - k$); denn nach vorstehendem liegen vollkommen gelenkige Knoten bereits dann vor, wenn an jedem Knoten $3s_i - 3$ (bzw. $s_i - 1$) Fesseln fortfallen.

Beim Gelenkfachwerk stehen also einander gegenüber:

$$\begin{aligned} & 8s - (5s - 3k) \text{ gesuchte Größen (Fesseln)} \\ & \quad \text{und } 2s + 6k - 6 \text{ Gleichgewichtsbedingungen} \\ & [\text{bzw. } 4s - (2s - k) \text{ gesuchte Größen (Fesseln)} \\ & \quad \text{und } s + 3k - 3 \text{ Gleichgewichtsbedingungen}]. \end{aligned}$$

Es besteht nun die Möglichkeit, daß mehr oder weniger innere Fesseln vorliegen als Gleichgewichtsbedingungen vorhanden sind. Sind weniger innere Fesseln als Gleichgewichtsbedingungen vorhanden, so ist im allgemeinen kein Gleichgewicht am System möglich; die Mindestzahl s der Stäbe, die zur Herstellung eines tragfähigen („stabilen“) Systems mit k Knoten und f fortfallenden inneren Fesseln notwendig ist, ergibt sich also aus den vorhergehenden Gegenüberstellungen nach Wegstreichen der rechts und links gleichen Glieder gemäß folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} & 6s - f = 6k - 6 \\ & (\text{bzw. } 3s - f = 3k - 3), \end{aligned}$$

und zwar im ganz allgemeinen Fall sowie bei sinngemäßer Einführung an den Enden entgegengesetzt gleicher Stab-Längskräfte, Stab-Querkräfte und Stab-Drillmomente.

Im Sonderfall eines Gelenkfachwerks wird die Mindest-Stabzahl:

$$s = 3k - 6$$

(bzw. $s = 2k - 3$).

Bei Gelenkfachwerken können diese „Abzähl-Kriterien“ ersetzt werden durch „Aufbau-Kriterien“. Diese besagen, daß Fachwerke stets stabil sind, wenn sie Tetraederverbände, Flechtwerke bzw. ebene Dreieckverbände darstellen.

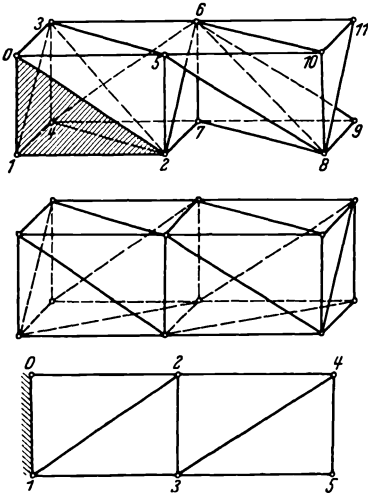


Abb. 24.

Wird, ausgehend von drei Punkten, ein Knoten nach dem anderen durch 3 räumlich angeordnete Stäbe angeschlossen, so entsteht ein Tetraederverband; wird ein Vielflach mit einem vollständigen Dreieckmaschen-Netz überdeckt, so entsteht ein Flechtwerk; wird, ausgehend von zwei Punkten, ein Knoten nach dem anderen durch je 2 Stäbe angeschlossen, und liegen alle Knoten in einer Ebene, so liegt ein ebener Dreieckverband vor (Abb. 24). Aus solchen Verbänden können andere stabile Fachwerke gebildet werden, indem einzelne Stäbe herausgenommen und unter gewissen Einschränkungen durch andere ersetzt werden; sog. Stab-

vertauschung (Henneberg, Müller-Breslau^{12, 13}). Auf diese Weise kann z. B. aus dem in Abb. 24 dargestellten Tetraederverband das darunter abgebildete Flechtwerk gewonnen werden.

Zu dem Gesagten ist Voraussetzung, daß das Stabwerk 6 (bzw. 3) Lagerfesseln besitzt. Es besteht aber wieder die Möglichkeit, durch Stabvertauschung zu anders gelagerten bzw. anders aufgebauten stabilen Systemen zu gelangen. Insbesondere kann unter gewissen Einschränkungen je eine innere Fessel (bei Gelenkfachwerken je 1 Stab) herausgenommen und dafür eine weitere Auflagerfessel eingeführt werden und umgekehrt. Die Mindestzahl 6 (bzw. 3) der Lagerfesseln darf durch Vertauschung natürlich nicht verringert werden.

Die Erfüllung dieser Abzähl- bzw. Aufbau-Kriterien, die allgemein als „Stabilitätskriterien“ bezeichnet werden, ist hinsichtlich der Mindestzahl von Stäben notwendig, aber nicht allgemein hinreichend zur Erzielung stabiler, d. h. tragfähiger Stabwerke; von der Behand-

lung weiterer Kriterien über die Stabilität von Stabwerken wird hier abgesehen.

Falls die Anzahl der inneren und der äußeren Fesseln den vorhergehenden Abzähl- oder Aufbau-Kriterien entspricht, wird das System als „statisch bestimmt“ oder „einfach stabil“ bezeichnet. Dann erfolgt die Ermittlung der gesuchten statischen Größen aus den Gleichgewichtsbedingungen allein. Sehr häufig liegt aber der Fall vor, daß mehr Stäbe bzw. mehr Fesseln vorhanden sind, als die vorstehenden Kriterien fordern; dann wird das System als „statisch unbestimmt“ oder „mehrfach stabil“ bezeichnet.

Aus Anschaulichkeitsgründen wird häufig von innerer bzw. äußerer statischer Unbestimmtheit gesprochen, je nachdem, ob überzählige Lagerfesseln oder überzählige innere Fesseln vorhanden sind. Diese Unterscheidung ist aber strenggenommen nicht haltbar; denn es bleibt sich gleich, ob innere oder äußere Fesseln als überzählig betrachtet werden.

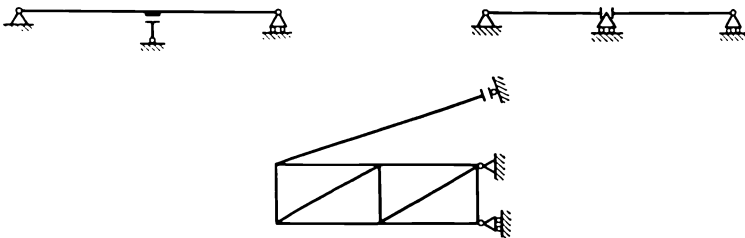


Abb. 25.

In vielen Fällen ist es zulässig, ein statisch unbestimmtes System durch Ausschaltung einer entsprechenden Zahl überzähliger innerer, u. U. auch äußerer Fesseln für die statische Untersuchung näherungsweise auf ein gedachtes statisch bestimmtes System zurückzuführen; z. B. wird bei Fachwerken mit steifen Knoten fast immer angenommen, die Knoten seien gelenkig. In vielen Fällen aber sind die Beanspruchungen eines durch Vernachlässigung einer Reihe von Fesseln entstandenen statisch bestimmten Systems wesentlich verschieden von den Beanspruchungen des wirklich vorhandenen statisch unbestimmten Systems.

Zur Berechnung eines solchen statisch unbestimmten Systems muß den überzähligen Fesseln entsprechend zu den „Gleichgewichtsbedingungen“ eine Reihe von „Formänderungsbedingungen“ hinzugenommen werden, damit die notwendige Anzahl von Gleichungen erhalten wird. Diese Formänderungsbedingungen lauten allgemein (Abb. 25. Näheres darüber in Kap. III):

„Die Schnittpuffer einer beliebigen gedachten Schnittstelle dürfen sich bei der elastischen Formänderung des aufgeschnittenen Systems nicht gegeneinander bewegen.“

Zur Ermittlung der Formänderungen, die in erster Linie bei statisch unbestimmten Systemen, aber auch in anderen Fällen, erforderlich ist, dient allgemein das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Dieses lautet (Näheres darüber in Kap. II):

„Von einem im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystem wird keine Arbeit geleistet, wenn eine willkürliche (aber mit den kinematischen Bedingungen des Systems verträgliche) Formänderung angenommen wird.“

Die Formänderungsbedingungen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme können auch durch Bedingungen, die diesem Prinzip der virtuellen Verrückungen entsprechen, ersetzt werden:

Um die Berechnung statisch unbestimmter Systeme nicht zu umständlich zu gestalten, wird einstweilen in der Praxis meist noch die Annahme gemacht, daß die Verformungen in geradlinigem Zusammenhang mit den Beanspruchungen stehen. Diese als Hookesches Gesetz bekannte Voraussetzung ist aber nur bis zu gewissen Beanspruchungen (Proportionalitätsgrenze) zulässig; daher gilt die statische Berechnung, sofern sie wie meistens unter Annahme des Hookeschen Gesetzes durchgeführt ist, praktisch nur für die in den deutschen Belastungsannahmen des Flugzeugbaus als „sicher“ bezeichneten Belastungszustände. Es besteht natürlich die Möglichkeit, auch für höhere Belastungszustände eine einwandfreie Berechnung statisch unbestimmter Systeme durchzuführen („Bruchstatik“). Aufgaben der letzten Art sind in vorliegender Sammlung noch nicht behandelt^{14 ÷ 17}.

7. Beanspruchung der Einzelstäbe eines Stabwerks.

a) Äußere Kräfte und Momente.

Die äußeren Belastungen eines jeden für sich betrachteten stabförmigen Einzelgliedes können sowohl aus Einzelkräften und Einzelmomenten als auch aus verteilten Kräften und verteilten Momenten bestehen. Diese werden an ihrer Angriffsstelle zur einfacheren Darstellung zerlegt in solche Kräfte, die an der betreffenden Stelle parallel bzw. senkrecht zur Stabachse gerichtet sind: „Axiale Lasten“ bzw. „Querlasten“, und in solche Momente, deren Vektoren parallel bzw. senkrecht zur Stabachse gerichtet sind: „Verdrillende Momente“ bzw. „biegende Momente“. Jede exzentrisch angreifende axiale Last wird gleichwertig ersetzt durch ein biegendes Moment und eine zentrisch, d. h. im Schwerpunkt des betreffenden Angriffs-Querschnitts angreifende axiale Kraft. Verteilte Lasten und verteilte Momente werden häufig durch eine Reihe nahe aufeinanderfolgender, angenähert gleichwertiger Einzelkräfte und -momente ersetzt (und umgekehrt).

Die äußeren Kräfte und Momente, die an einem System bzw. an einem für sich betrachteten Einzelglied eines Systems wirken, müssen

für sich im Gleichgewicht stehen. Ein Teil von ihnen, die sog. Lagerkräfte und Einspannmomente des betrachteten Gliedes, ist daher nicht beliebig wählbar, sondern durch Gleichgewichtsbedingungen in Abhängigkeit von den übrigen Kräften und Momenten festgelegt (Stabgleichungen, S. 31).

b) Innere Kräfte und Momente.

Um die Anstrengungen in irgendeinem Querschnitt eines Stabes (Rahmen- oder Fachwerkstabes, Balkens) angeben zu können, denkt man sich den Stab an der betrachteten Stelle durchgeschnitten; dann sind diejenigen Kräfte bzw. Momente zu bestimmen, welche an den „Ufern“ der gedachten Schnittstelle anzubringen sind, um an jedem der durch den gedachten Schnitt abgetrennten Teile des Stabwerks den ursprünglichen Zustand wiederherzustellen (Abb. 28 bis 30).

Bei den hier behandelten Gebilden, die sich aus stabförmigen Gliedern zusammensetzen, wird zwecks einfacherer Darstellung die an der Schnittstelle anzubringende Kraft zerlegt in eine Komponente in Stabrichtung und eine Komponente senkrecht zur Stabrichtung: „Längskraft“ und „Querkraft“; desgl. wird das Moment, das an der Schnittstelle anzubringen ist, zerlegt in eine Komponente, deren Vektor in Richtung des Stabes fällt, und eine Komponente, deren Vektor senkrecht zur Stabachse gerichtet ist; „Drillmoment“ und „Biegemoment“.

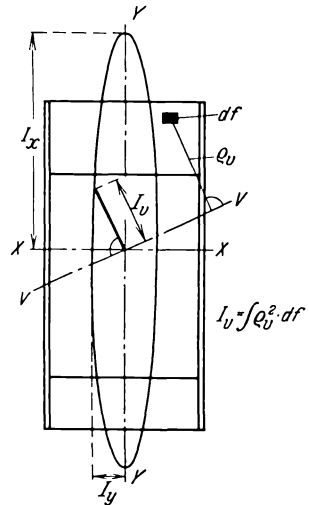


Abb. 26.

Zur weiteren Vereinfachung wird die Querkraft und das Biegemoment in je zwei weitere Komponenten zerlegt, deren Vektorpfeile mit den Haupt-Trägheitsachsen des betrachteten Querschnitts zusammenfallen.

[Ist der Baustoff über die Querschnittsfläche homogen, so sind diese Hauptträgheitsachsen die beiden zueinander senkrechten durch den Schwerpunkt gehenden Geraden, bezüglich derer das Trägheitsmoment $J_v = \int \rho_v^2 df$ des Querschnitts (Abb. 26) seinen Größt- bzw. Kleinstwert annimmt; bei Querschnitten mit einer Symmetrieachse ist diese eine Hauptträgheitsachse; bei mehrfach symmetrischen Querschnitten kann jedes Paar aufeinander senkrechter Schwerachsen als Hauptträgheits-Achsenpaar aufgefaßt werden.]

Die an der gedachten Schnittstelle anzubringenden Kräfte und Momente werden allgemein als innere Kräfte und Momente bezeichnet;

sie sind im Gegensatz zu den äußeren Kräften und Momenten als Gruppen von je zwei entgegengesetzt gleichen Kräften bzw. Momenten aufzufassen; denn je nachdem, ob an einer Schnittstelle das linke oder rechte „Schnittufer“ betrachtet wird, muß die daran anzubringende Kraft oder das daran anzubringende Moment aus Gleichgewichtsgründen am linken Schnittufer entgegengesetzt gleich sein der Kraft oder dem Moment, das am rechten Schnittufer anzubringen ist (Abb. 28 bis 30).

Der Sinn der behandelten Aufgaben geht dahin, diese (inneren) Längs- und Querkräfte, Drill- und Biegemomente für beliebige Systeme und deren beliebige Belastungen zu ermitteln.

c) Allgemeines.

Die Ermittlung der Längs- und Querkräfte, Biege- und Drillmomente, Lagerkräfte und Einspannmomente erfolgt mittels der Knoten- und Stabgleichungen (S. 31). Bei Systemen mit gelenkigen Lageranschlüssen bzw. mit gelenkigen Knoten wird häufig von folgender geometrischer Deutung der Knoten- und Stabgleichungen Gebrauch gemacht:

Die Resultierende aller Auflager-Reaktionskräfte fällt mit der Resultierenden aller gegebenen äußeren Kräfte zusammen und ist ihr entgegengesetzt gleich; wenn alle Auflager-Reaktionskräfte und gegebenen äußeren Kräfte richtungstreu aneinandergereiht werden, entsteht ein in sich geschlossenes räumliches (bzw. ebenes) Vieleck.

Werden alle an einem Gelenkknoten angreifenden äußeren Kräfte und alle von den daran anschließenden Stäben auf den Knoten ausgeübten inneren Kräfte richtungstreu aneinandergereiht, so entsteht ebenfalls ein geschlossenes Vieleck.

8. Bezeichnungen und Vorzeichenregeln.

In den folgenden Aufgaben werden einheitlich folgende Bezeichnungen für die äußeren Kräfte und Momente eingeführt:

Einzelkräfte: P [kg], verteilte Kräfte: p [kg/cm],
 Einzelmomente: M [kgcm], „ Momente: m [kg].

Die Resultierende mehrerer Kräfte wird mit R bezeichnet. (Gelegentlich werden die entsprechenden Frakturbuchstaben benutzt, wenn der vektorielle Charakter einer Größe angedeutet werden soll; die Unterscheidung zwischen Vektoren und Vektorbeträgen bzw. Skalaren ist jedoch nicht streng durchgeführt, da hier Mißverständnisse im allgemeinen nicht zu erwarten sind.)

Soll betont werden, daß die Richtung der Kraft oder die des Momentenvektors parallel der Stabachse ist, so wird eingeführt:

- Einzelne axiale Kraft: N [kg],
 verteilte axiale Kräfte: n [kg/cm].
 Einzelnes verdrellendes Moment: T [kgcm],
 verteilte verdrellende Momente: t [kg].

Die Komponenten der äußeren Kraft- und Momentenvektoren werden im folgenden stets dann als positiv bezeichnet, wenn sie im Sinne der positiven Koordinatenrichtungen wirken (Abb. 27).

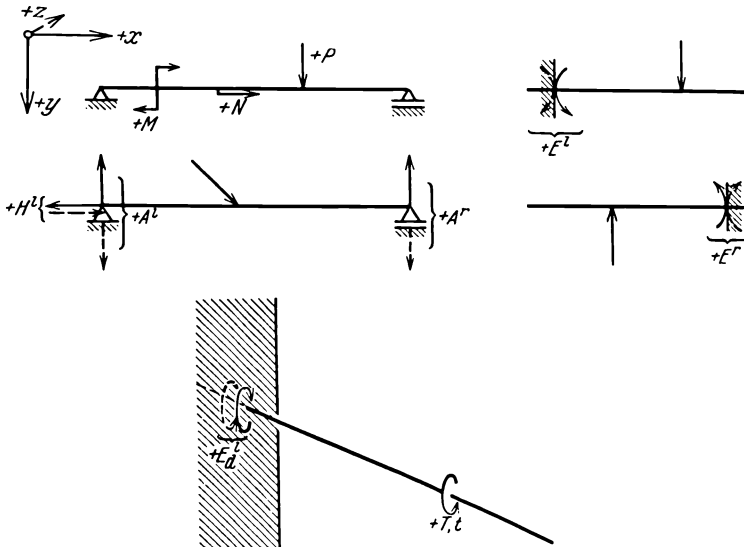


Abb. 27.

Zum Unterschied gegen die beliebig wählbaren äußeren Kräfte und Momente werden die dadurch bedingten, jedoch auch zu den äußeren Kräften und Momenten gehörigen

Auflagerkräfte mit A bzw. H und R [kg],

Einspannmomente mit E bzw. E_a [kgcm]

bezeichnet.

Die Komponenten der Auflagerkraft- und Einspannmomentenvektoren werden im folgenden stets dann als positiv bezeichnet, wenn sie als Aktionen auf das Lager bzw. auf die Einspannung im Sinne der positiven Koordinatenachsen wirken. Im allgemeinen werden in die Zeichnung die vom Lager bzw. von der Einspannung auf das System ausgeübten Reaktionskräfte bzw. -momente eingetragen. Die Vektorkomponenten dieser Reaktionskräfte und -momente sind somit dann positiv, wenn sie entgegen den positiven Koordinatenrichtungen wirken (Abb. 27).

Für die inneren Kräfte und Momente werden zum Unterschied gegen die äußeren folgende Bezeichnungen gewählt:

- Längs- oder Stabkräfte: S [kg],
- Querkräfte: Q [kg],
- Drillmomente: D [kgcm],
- Biegemomente: B [kgcm].

An jedem Querschnitt werden drei gerichtete Achsen ξ, η, ζ eingeführt, die mit der Stabachse und den beiden Hauptträgheitsachsen (vgl. S. 37) zusammenfallen und im Sinne eines Rechtssystemes angeordnet sind, derart, daß $+\xi$ im Sinne steigender Bezifferung $(i-1) \rightarrow (i)$ weist (Abb. 28).

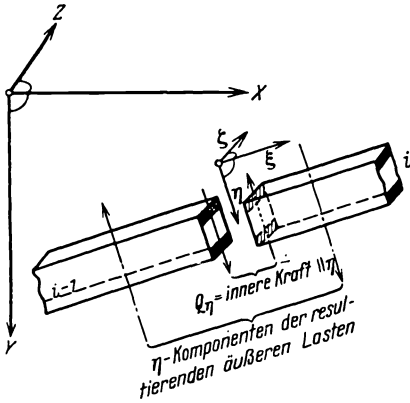


Abb. 28.

Bezüglich der beiden Hauptträgheitsachsen eines Querschnitts zerfallen Biegemoment und Querkraft weiterhin je in die beiden Komponenten:

$$B_\eta \text{ und } B_\zeta,$$

$$Q_\eta \text{ „ } Q_\zeta.$$

Die Vorzeichen sind dann im allgemeinen durch die Bezifferungs-

richtung der einzelnen Stäbe $i-1, i$ in folgender Weise festgelegt (Abb. 29 u. 30):

Die inneren Größen S, Q_η, Q_ζ und D sind dann positiv, wenn ihre Vektorpfeile an demjenigen Schnittufer im Pfeilsinne dieser Achsen

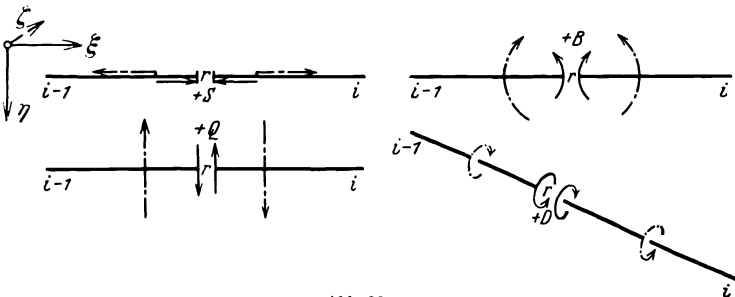


Abb. 29.

ξ, η, ζ wirken, welches zunächst dem niedriger bezifferten Stabende liegt. Gleichbedeutend damit ist folgende Vorzeichenregel: Die Größen S, Q_η, Q_ζ und D sind dann positiv, wenn die ξ, η, ζ -Komponenten der resultierenden äußeren Kräfte und verdrillenden Momente (einschließ-

lich der Lagerreaktionen) an demjenigen Stabteil im Pfeilsinn der Achsen wirken, dem das höher bezifferte Ende i des Stabes $i - 1$, i angehört.

Dagegen sind die inneren Größen B_{ζ} bzw. B_{η} dann positiv, wenn sie in derjenigen Stabfaser Druck erzeugen, die der Richtung $+\eta$ bzw. $+\zeta$ abgewandt ist.

Nur bei Beachtung dieser Vorzeichenregeln gelten z. B. beim Balken mit verteilter Belastung die bekannten Beziehungen:

$$Q + m = + \frac{dB}{dx} [\text{kg}], \quad p = - \frac{dQ}{dx} [\text{kg/cm}], \quad t = - \frac{dD}{dx} [\text{kg}].$$

(„ x “ im Sinne steigender Bezifferung positiv.)

Ausnahmen von diesen Vorzeichenregeln werden bei Rahmen- und Fachwerken in bezug auf die Längs- oder Stabkräfte gemacht, indem dort ohne Berücksichtigung der Bezifferung der Stabenden die Stablängskräfte stets dann als positiv bezeichnet werden, wenn sie Zugkräfte sind.

Die bei räumlichen Aufgaben in folgendem benutzten Koordinatensysteme sind ausschließlich Rechts-Systeme (Abb. 28).

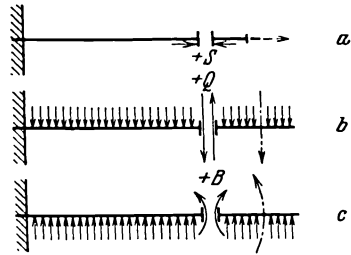


Abb. 30.

Beispiele.

Erstes Kapitel.

Beanspruchung statisch bestimmter Systeme.

Allgemeines zu den § 4 bis 7.

Zunächst wird eine Reihe von Balken und ebenen Rahmen (Stabzügen) behandelt; die Belastung besteht aus Kräften und biegenden Momenten in einer Hauptträgheitsebene der Balken bzw. in der Rahmenebene, die mit einer Hauptträgheitsebene der einzelnen Rahmenglieder zusammenfallen möge (Vektoren der äußeren Momente senkrecht zur Belastungsebene). Ferner werden Balken behandelt, die durch verdrehende Momente beansprucht werden (Vektoren der äußeren Momente parallel der Balkenachse).

Bei den einzelnen Systemen werden die Längs- und Querkräfte, sowie die Biege- und Drillmomente ermittelt.

Eine Anzahl von Aufgaben behandelt zusammengesetzte Belastungszustände; zur Ermittlung der resultierenden Längskraft-, Querkraft-

und Momentenflächen wird die Gesamtbelastung in einzelne Teilbelastungszustände (kurz: Zustand I, Zustand II, usw.) zerlegt.

Durch die Bezifferungsrichtung der Balkenenden bzw. der Stabzug-ecken mit $i - 1$, i liegt eine positive X -Richtung für jedes Glied fest. Entsprechend vorhergehendem werden die aus Abb. 29 u. 30 ersichtlichen Vorzeichenregeln angewandt.

Zur Berechnung der Fessel-Kräfte und -Momente (Lagerkräfte und Einspannmomente) dienen die Gleichgewichtsbedingungen. Bei ebenen, in ihrer Ebene belasteten Systemen lauten diese:

Für jeden von drei Punkten $k = 1, 2, 3$, die nicht auf einer Geraden liegen, muß die Summe aller Momente gleich Null werden; also kann hinsichtlich jedes der drei Punkte k geschrieben werden:

$$\sum_i P_i \cdot r_{ik} + \sum M_i = 0,$$

(r_{ik} = Hebelarm der Kraft P_i in bezug auf den jeweiligen Bezugspunkt k ; Momente M_i und $P_i \cdot r_{ik}$ dann positiv, wenn im Uhrzeigersinn drehend*).

Eine dieser drei Gleichgewichtsbedingungen kann ersetzt werden durch die Bedingung, daß die Summe aller Kraftkomponenten P_{ix} in der X -Richtung verschwinden muß, also:

$$\sum_i P_{ix} = 0,$$

eine weitere durch die Bedingung, daß die Summe aller Kraftkomponenten P_{iy} in der Y -Richtung verschwinden muß, also:

$$\sum_i P_{iy} = 0.$$

Statt dessen wird auch geschrieben:

$$\begin{aligned} \text{„}\sum H = 0\text{“} & \quad \text{oder} \quad \text{„}\sum X = 0\text{“}, \\ \text{„}\sum V = 0\text{“} & \quad \text{oder} \quad \text{„}\sum Y = 0\text{“}. \end{aligned}$$

Sämtliche Summen erstrecken sich dabei über das ganze System; d. h. über alle am System angreifenden äußeren Kräfte und Momente einschl. der Auflagerkräfte und Einspannmomente (Reaktionen!).

Die (inneren) Längskräfte, Querkräfte und Biegemomente an einer Stelle n sind:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i P_i \cdot \sin \varphi_i, \\ Q &= \sum_i P_i \cdot \cos \varphi_i, \\ B &= \sum_i P_i \cdot r_{in} + \sum M_i \quad (\varphi_i \text{ und } r_{in} \text{ s. Abb. 31}), \end{aligned}$$

* In Vektordarstellung: $[\sum_i \tau_{ik}]$, wobei τ von der Kraftlinie aus gemessen wird.

wobei diese einzelnen Summen sich nur über einen der abgetrennt gedachten Systemteile erstrecken. Die Vorzeichen der einzelnen Summanden sind dabei gemäß den Vorzeichenregeln auf S. 38 ÷ 40 als positiv bzw. negativ einzusetzen.

Bei Drillung erfolgt in entsprechender Weise die Berechnung des Einspannmoments aus:

$$\sum_i T_i = 0,$$

erstreckt über das ganze System (s. oben); das Drillmoment an einer Stelle n ist:

$$D_n = \sum_i T_i,$$

erstreckt über einen der abgetrennt gedachten Systemteile. Die Einführung der Vorzeichen der einzelnen Summanden erfolgt wieder gemäß den Vorzeichenregeln auf S. 38 ÷ 40.

Bei Balken auf zwei Stützen mit auskragenden Enden kann jeder auskragende Teil für sich als Kragträger und der mittlere Teil als Balken auf zwei Stützen, ebenfalls für sich, berechnet werden; dabei

ist aber zu beachten, daß die Einspannmomente, welche an auskragenden Teilen als Reaktionen angreifen, am mittleren Teil in umgekehrtem Sinne als äußere Kräfte wirken.

Entsprechendes gilt bei Zerlegung von Rahmen (Stabzügen) in einzeln für sich behandelte Stäbe bzw. Balken.

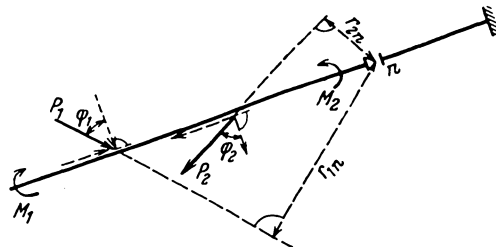


Abb. 31.

§ 4. Freitragende Holme (Kragbalken).

Für die angegebenen Belastungszustände sind die Auflager-, Längs- und Querkräfte A , H , S und Q , sowie die Einspann-, Biege- und Drillmomente E , B und D zu ermitteln*. (Vgl. dazu die Vorzeichenregeln auf S. 38 ÷ 40 und Abb. 27 bis 30.)

Systeme der in diesem Paragraphen behandelten Art treten beispielsweise auf in Form von Flügel- und Leitwerksholmen oder Einzelstäben im Verband zusammengesetzter Bauteile.

* Bei den Querkraftflächen in den Abb. 32 bis 37, 40 und 41 ist die Beschriftung der linken Endordinate zu lesen: $A = Q$ „am linken Ende“. Entsprechendes gilt für die Biege- und Drillmomentenflächen in den Abb. 32 ÷ 41.

Aufgabe 6 bis 12: Beanspruchung auf Biegung.

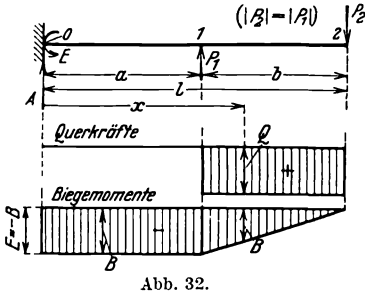


Abb. 32.

Aufgabe 6 (Abb. 32).

In Feld *b*: $Q = + P_2,$
 $B = - P_2 l \left(1 - \frac{x}{l}\right);$

In Feld *a*: $Q = 0,$
 $A = 0,$
 $B = - P_2 b,$
 $E = + P_2 b.$

Aufgabe 7 (Abb. 33 und Tabelle 3).

Tabelle 3. Quer- und Auflagerkräfte, Biege- und Einspannmomente.

	allgemein für beliebiges p	Zustand I $p = p_0 \left[1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]^*$	Zustand II $p = p_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 *$
Q	$+\int_{\xi=x}^l p \cdot d\xi$	$\frac{p_0 l}{3} \left[2 - 3 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$\frac{p_0 l}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^3$
A	$+\int_{\xi=0}^l p \cdot d\xi$	$p_0 \cdot \frac{2}{3} l$	$p_0 \cdot \frac{1}{3} l$
B	$-\int_{\xi=x}^l Q \cdot d\xi$	$-\frac{p_0 l^2}{12} \left[3 - 8 \frac{x}{l} + 6 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$	$-\frac{p_0 l^2}{12} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^4$
E	$+\int_{\xi=0}^l Q \cdot d\xi$	$\frac{p_0 l^2}{4}$	$\frac{p_0 l^2}{12}$

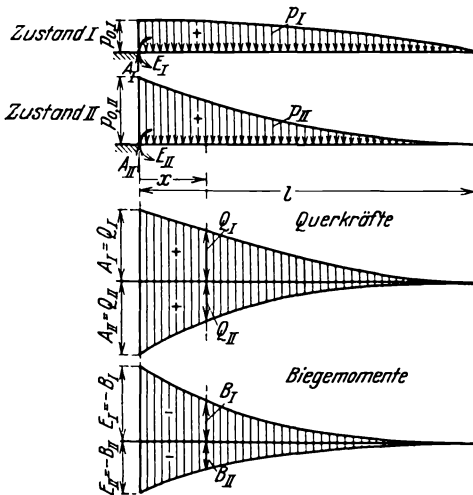


Abb. 33.

Aufgabe 8 (Abb. 34 und 35).

In Feld *b*:

$$Q = + p l \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

$$B = - \frac{p l^2}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2;$$

In Feld *a*:

$$Q = + p \cdot b,$$

$$A = + p \cdot b,$$

$$B = - \frac{p b^2}{2} \left(1 + 2 \frac{a}{b} - 2 \frac{x}{b}\right),$$

$$E = + \frac{p b^2}{2} \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right).$$

* Bei Einführung dieser Ausdrücke in die Integrale ist x durch ξ zu ersetzen.

Auf zeichnerischem Wege ergibt sich die Biegemomentenfläche wie folgt:

Die laufende Belastung wird in Einzellasten P_1 bis P_6 (Abb. 35a) aufgeteilt. Diese werden aneinandergereiht (Abb. 35b); von einem beliebigen Pol aus werden nach den Endpunkten der einzelnen Kräfte die Polstrahlen 0 bis 6 gezogen. Die Parallelen zu diesen Polstrahlen liefern das Seileck ($//0$) bis ($//6$) (Abb. 35c). Dieses und der Strahl ($//6$) begrenzen die gesuchte Biegemomentenfläche (Abb. 35c).

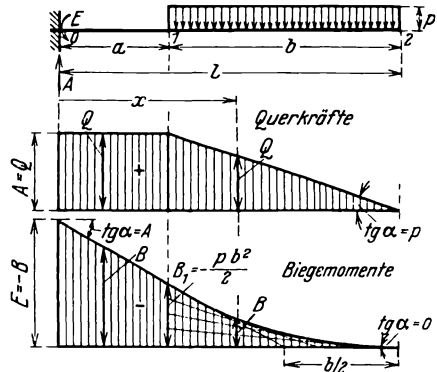


Abb. 34.

Die Resultierende der Belastung, $R = \sum P$, geht (immer!) durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahls ($//0$) und ($//6$).

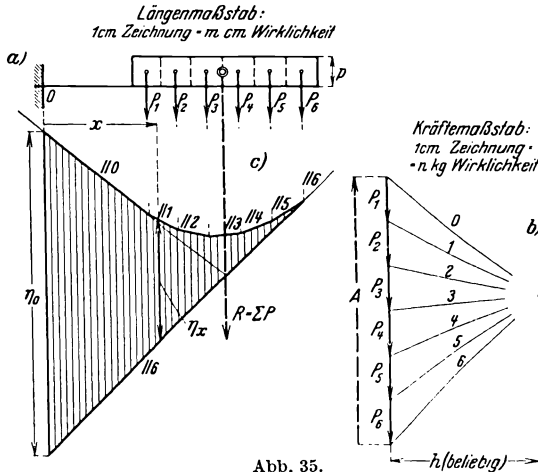


Abb. 35.

An der Stelle x : $B_x = -\eta_x \cdot h \cdot m \cdot n$ [kgcm];
 an der Stelle 0: $E = -B_0 = +\eta_0 \cdot h \cdot m \cdot n$ [kgcm].

(η bzw. h sind die aus der Zeichnung abgegriffenen Längen der Ordinaten η bzw. des Polabstandes h in cm.)

Aufgabe 9 (Abb. 36).

Zustand I.

In Feld b:
$$Q = +\frac{p_0 l}{4} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(2 + \frac{l}{b} - \frac{x}{b}\right),$$

$$B = -\frac{p_0 l^2}{12} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(3 + \frac{l}{b} - \frac{x}{b}\right);$$

In Feld a: $Q = + \frac{p_{0I} l}{4} \left(4 - \frac{b}{l} - 4 \frac{x}{l} \right),$

$$A = + \frac{p_{0I} l}{4} \left(4 - \frac{b}{l} \right),$$

$$B = - \frac{p_{0I} l^2}{4} \left[2 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{b}{l} \left(1 - \frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{b}{l} \right) \right],$$

$$E = + \frac{p_{0I} l^2}{12} \left(6 - 3 \frac{b}{l} + \frac{b^2}{l^2} \right).$$

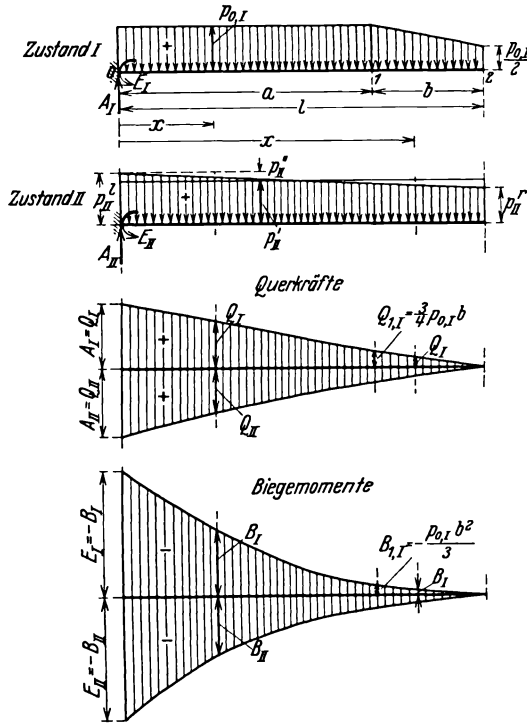


Abb. 36.

Zustand II.

$$\left. \begin{aligned} p'_{II} &= p'_{II} - p''_{II}, \\ p^1_{II} &= p'_{II} + p''_{II} \end{aligned} \right\} p_{II} = p'_{II} + p''_{II} \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right).$$

$$Q = + \left(p'_{II} - p''_{II} \frac{x}{l} \right) l \left(1 - \frac{x}{l} \right),$$

$$A = + p'_{II} l,$$

$$B = - \left[3 p'_{II} - p''_{II} \left(1 + 2 \frac{x}{l} \right) \right] \frac{l^2}{6} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2,$$

$$E = + (3 p'_{II} - p''_{II}) \frac{l^2}{6}.$$

Die Zustände I und II erzeugen gleiche Auflagerdrücke bzw. Einspannmomente, wenn

$$p'_{II} = \frac{p_{0I}}{4} \left(4 - \frac{b}{l} \right),$$

$$p''_{II} = \frac{p_{0I} b}{4l} \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right) \text{ ist.}$$

Aufgabe 10 (Abb. 37).

$$Q = P_y = P \sin \alpha^*,$$

$$A = P_y = P \sin \alpha,$$

$$H = P_x = -P \cos \alpha,$$

$$B = -P \cdot \varrho_x$$

oder $= -M - P_y(a - x)$

oder $= -P_y(a + b - x),$

$$E = +P_y \cdot \varrho_0$$

oder $= +M + P_y \cdot a$

oder $= +P_y(a + b).$

Aufgabe 11 (Abb. 38).

$$A_I = A_{II} = 0,$$

$$E_I = +m \cdot l,$$

$$E_{II} = +(M_2 + M_1)$$

$$= +(2 - 1) \text{ kgcm.}$$

Aufgabe 12 (Abb. 39 und 40).

Auflagerkräfte in „0“ (s. Tabelle 4):

$$A = \sum P_i = +150 \text{ kg,}$$

$$H = \sum N_i = +70 \text{ ,, .}$$

Einspannmoment in „0“ (s. Tabelle 4):

$$E = \sum M_i + \sum P_i \cdot \xi_i$$

$$= +45650 \text{ kgcm.}$$

Querkraft zwischen $i - 1$ und i :

$$Q_{i-1,i} = A - \sum_{k=0}^{i-1} P_k$$

$$= Q_{i-2,i-1} - P_{i-1}.$$

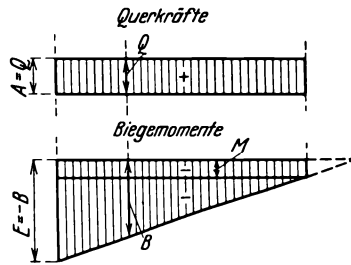
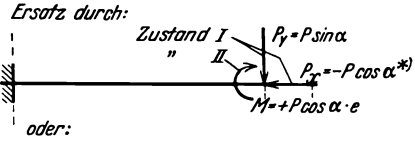
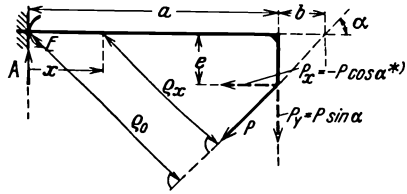


Abb. 37.

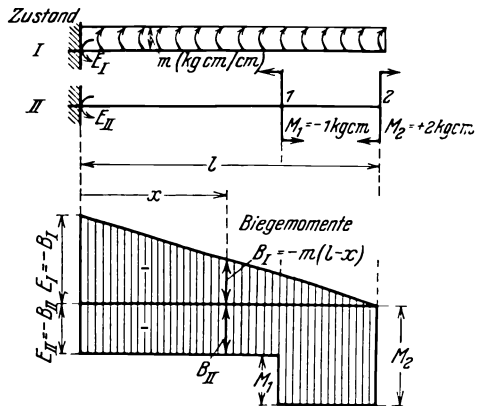


Abb. 38.

* P ist hier als vorzeichenfrei anzusehen; P_y ist eine positive, P_x eine negative Größe.

48 Beispiele zur Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen.

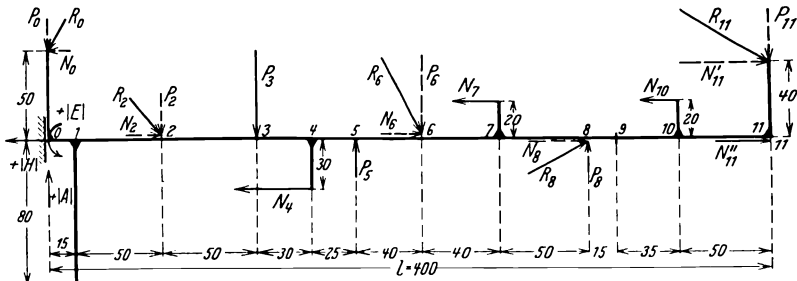


Abb. 39.
Längen in cm; Reaktionen A , H und E in positivem Richtungssinn eingetragen.

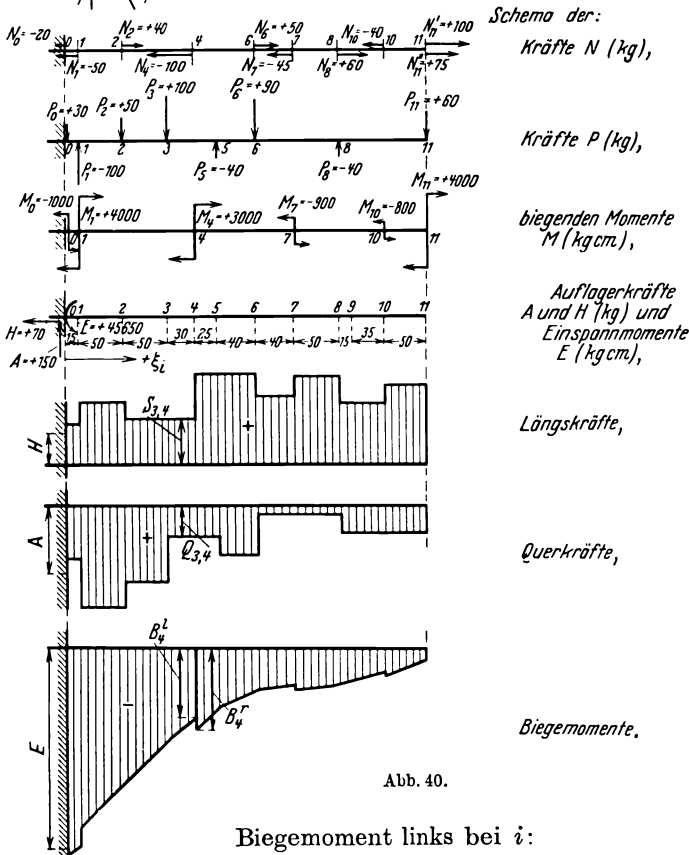


Abb. 40.

Biegemoment links bei i :

$$\begin{aligned}
 B_i^L &= -E + \sum_{k=0}^{i-1} M_k + A(\xi_i - \xi_0) - \sum_{k=0}^{i-1} P_k(\xi_i - \xi_k) \\
 &= B_{i-1}^L + Q_{i-1, i} \cdot \lambda_{i-1, i} \\
 (\lambda_{i-1, i} &= \text{Abstand } i - 1, i).
 \end{aligned}$$

Biegemoment rechts bei i :

$$B_i^r = B_i^l + M_i$$

[beginnend mit: $B_0^l = -E$,

$$B_0^r = -E + M_0,$$

$$B_1^l = -E + M_0 + (A - P_0)(\xi_1 - \xi_0)$$

$$(\xi_0 = 0)$$

usw.].

Tabelle 4. Rechenschema.

Stelle i	$\lambda_{i-1,i}$ [cm]	ξ_i [cm]	P_i [kg]	$10^{-3} P_i \cdot \xi_i$ [kgcm]	M_i [kgcm]	$Q_{i-1,i}$ [kg]	$10^{-3} M_{i-1}$ $10^{-3} Q \cdot \lambda$ [kgcm]	$10^{-3} B_i^l$ $10^{-3} B_i^r$ [kgcm]	N_i [kg]	$S_{i-1,i}$ [kg]
0		0	+ 30		-1000			-45,65	- 20	+ 70
	15					$A - P_0 =$ +120	- 1,00	-46,65		+ 90
1		15	- 100	- 1,50	+4000		+ 1,80	-44,85	- 50	
	50						+ 4,00	-40,85		+140
2		65	+ 50	+ 3,25		+220	+11,00	-29,85	+ 40	
	50							-29,85		+100
3		115	+100	+11,50		+170	+ 8,50	-21,35		
	30							-21,35		+100
4		145			+3000	+ 70	+ 2,10	-19,25	-100	
	25						+ 3,00	-16,25		+200
5		170	- 40	- 6,80		+ 70	+ 1,75	-14,50		
	40							-14,50		+200
6		210	+ 90	+18,90		+110	+ 4,40	-10,10	+ 50	
	40							-10,10		+150
7		250			- 900	+ 20	+ 0,80	- 9,30	- 45	
	50						- 0,90	-10,20		+195
8		300	- 40	-12,00		+ 20	+ 1,00	- 9,20	+ 60	
	15							- 9,20		+135
9		315				+ 60	+ 0,90	- 8,30		
	35							- 8,30		+135
10		350			- 800	+ 60	+ 2,10	- 6,20	- 40	
	50						- 0,80	- 7,00		+175
11		400	+ 60	+24,00	+4000	+ 60	+ 3,00	- 4,00	+175	
							+ 4,00	0		
			$\Sigma P_i =$ +150	$\Sigma P_i \cdot \xi_i =$ + 37350	$\Sigma M_i =$ + 8300				$\Sigma N_i =$ + 70	

Längskraft zwischen $i - 1$ und i :

$$S_{i-1, i} = +H - \sum_{k=0}^{i-1} N_k$$

$$= S_{i-2, i-1} - N_{i-1}.$$

(Zahlenmäßige Durchrechnung in Tabelle 4.)

Aufgabe 13 bis 14. Beanspruchung auf Drillung.

Aufgabe 13 (Abb. 41). (Vorzeichenübung.)

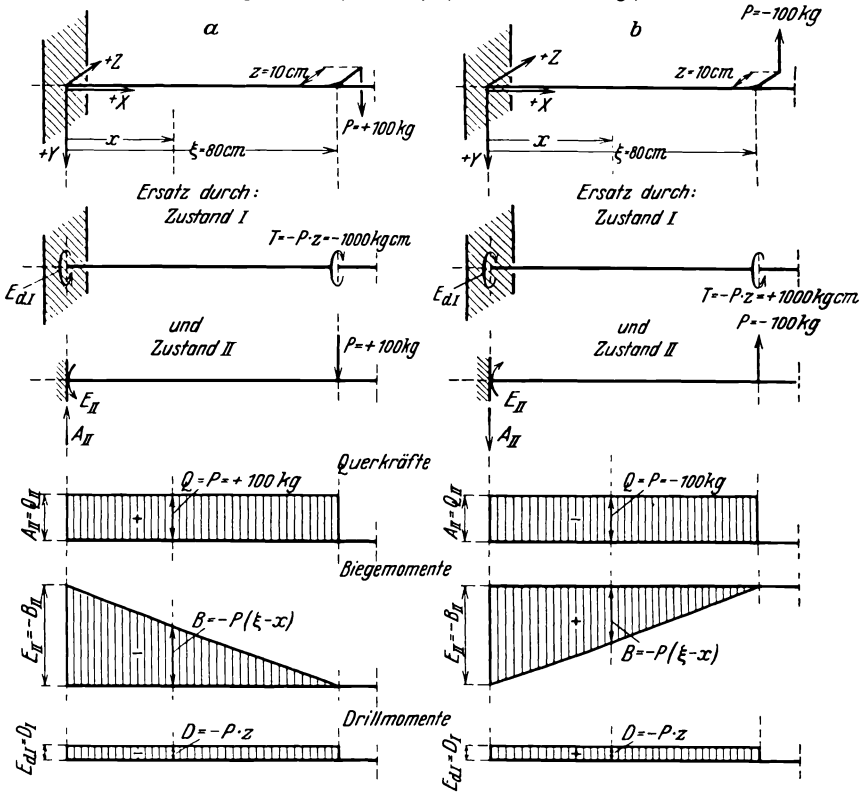


Abb. 41.

Fall a.

$$A_I = 0,$$

$$E_I = 0,$$

$$E_{dI} = T = -P \cdot z = -1000 \text{ kgcm};$$

$$A_{II} = P = +100 \text{ kg},$$

$$E_{II} = P \cdot \xi = +8000 \text{ kgcm},$$

$$E_{dII} = 0.$$

Fall b.

$$A_I = 0,$$

$$E_I = 0,$$

$$E_{dI} = T = -P \cdot z = +1000 \text{ kgcm};$$

$$A_{II} = P = -100 \text{ kg},$$

$$E_{II} = P \cdot \xi = -8000 \text{ kgcm},$$

$$E_{dII} = 0.$$

Aufgabe 14 (Abb. 42).

Zustand I.

$$E_{dI} = + t \cdot l,$$

$$D_I = E_{dI} - t \cdot x$$

$$= t (l - x);$$

Zustand II (vgl. Tabelle 5).

$$E_{dII} = + \sum T_i,$$

$$D_{i-1, iII} = E_{dII} - \sum_{k=0}^{i-1} T_k$$

$$= \sum_{k=i}^5 T_k$$

$$= D_{i-2, i-1II} - T_{i-1},$$

beginnend mit

$$D_{0, 1II} = E_{dII} - T_0.$$

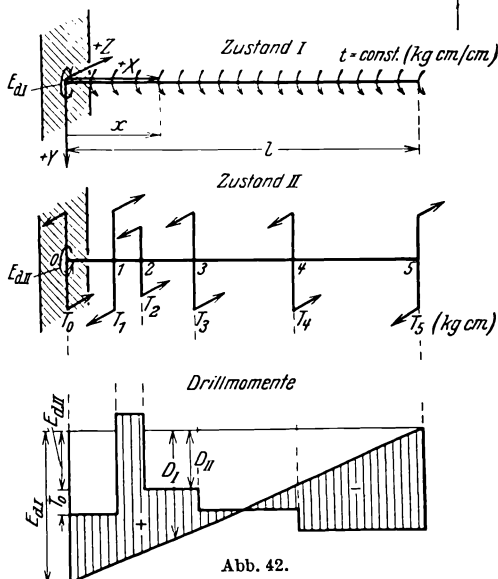


Tabelle 5. Rechenschema für Zustand II.

Stelle i	T_i [kgcm]	$D_{i-1, i}$ [kgcm]
0	+1000	-2300
1	-4000	-3300
2	+3000	+700
3	+900	-2300
4	+800	-3200
5	-4000	-4000
$\Sigma = -2300$		

$$E_{dII} = -2300 \text{ kgcm.}$$

**§ 5. Holme mit beiderseitiger Endstützung
(Balken auf zwei Stützen).**

Für die angegebenen Belastungszustände sind die Auflager-, Längs- und Querkräfte A , H , S und Q , sowie die Biegemomente B zu ermitteln. (Vgl. dazu S. 42 sowie die Vorzeichenregeln auf S. 40 und Abb. 27 bis 30.)

In sämtlichen Formeln werden die Auflagerdrücke A^l und A^r bzw. H zunächst als positiv gerichtete Reaktionen eingeführt (+ A nach oben, + H nach links gerichtet; vgl. auch Abb. 27 und S. 39); in Abb. 46 sind die Reaktionen jedoch im wirklichen Richtungssinn eingetragen.

Da bei ebenen Systemen nur drei voneinander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen bestehen, ist die Lagerung nur dann statisch bestimmt, wenn sie nicht mehr als drei Fesseln aufweist. Bei den Auf-

gaben dieser Paragraphen ist dies durch Einführung eines festen und eines längsbeweglichen Lagers erreicht.

Systeme der in diesem Paragraphen behandelten Art treten beispielsweise auf in Form von Holm- und Rippenteilen bzw. als Einzelstäbe zusammengesetzter Bauteile.

Aufgabe 15 bis 17: Beanspruchung auf Biegung.

Aufgabe 15 (Abb. 43).

Einführung der gesuchten Auflagerkräfte als positive Reaktionen für den Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen:

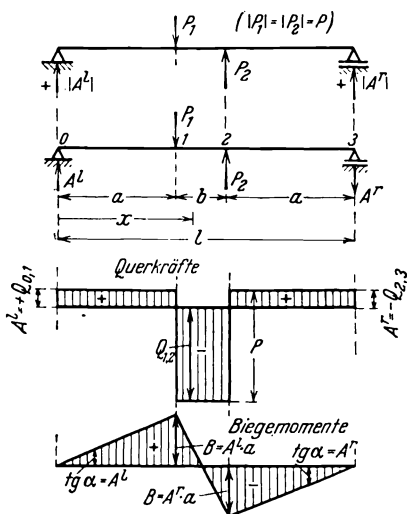


Abb. 43.

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0: & A^l \cdot l - P_1(a+b) - P_2 \cdot a &= 0^*, \\ \sum M_0 &= 0: & -A^r \cdot l + P_2(a+b) + P_1 \cdot a &= 0^*, \\ & & A^l &= -A^r = +P_1 \frac{b}{l}. \end{aligned}$$

In Feld 0, 1:

$$\begin{aligned} Q &= +A^l, \\ B &= +A^l \cdot x. \end{aligned}$$

In Feld 1, 2:

$$\begin{aligned} Q &= +A^l - P_1, \\ B &= +A^l \cdot x - P_1(x-a). \end{aligned}$$

In Feld 2, 3:

$$\begin{aligned} Q &= -A^r, \\ B &= +A^r(l-x). \end{aligned}$$

Aufgabe 16 (Abb. 44 und 45).

<p>Zustand I.</p> $\begin{aligned} A^l &= +P, \\ A^r &= +P. \end{aligned}$ <p>In Feld 0, 3: $Q = +P,$ $B = +P \cdot x.$</p> <p>In Feld 3, 4: $Q = 0,$ $B = +P \cdot c.$</p>	<p>Zustand II.</p> $\begin{aligned} A^l &= \frac{1}{l} \left\{ p_1 a \left(\frac{a}{2} + b \right) + p_2 \frac{b^2}{2} \right\}, \\ A^r &= \frac{1}{l} \left\{ p_1 \frac{a^2}{2} + p_2 b \left(a + \frac{b}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$ <p>In Feld 0, 1:</p> $\begin{aligned} Q &= +A^l - p_1 \cdot x, \\ B &= +A^l \cdot x - p_1 \cdot \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$
---	---

* $P_2 = -P_1$ ist hier als negative Größe einzuführen: Bei Einführung der Absolutbeträge von P_1 und P_2 ist zu schreiben:

$$\begin{aligned} A^l \cdot l - |P_1|(a+b) + |P_2| \cdot a &= 0, \\ -A^r \cdot l - |P_2|(a+b) + |P_1| \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

Zustand I.

In Feld 4, 2: $Q = -P,$

$$B = +P(l - x).$$

Zustand II.

In Feld 1, 2:

$$Q = -A^r + p_2(l - x),$$

$$B = +A^r(l - x) - p_2 \frac{(l-x)^2}{2}.$$

B_{max} liegt unter dem Nullpunkt der Q -Fläche.

Auf zeichnerischem Wege ergibt sich die Biegemomentenfläche für gleichzeitige Wirkung der Zustände I und II wie folgt (Abb. 45):

Nach Aufteilung der laufenden Belastung in Einzellasten P_1 bis P_8 wird für die Gesamtbelastung wie in Aufgabe 8

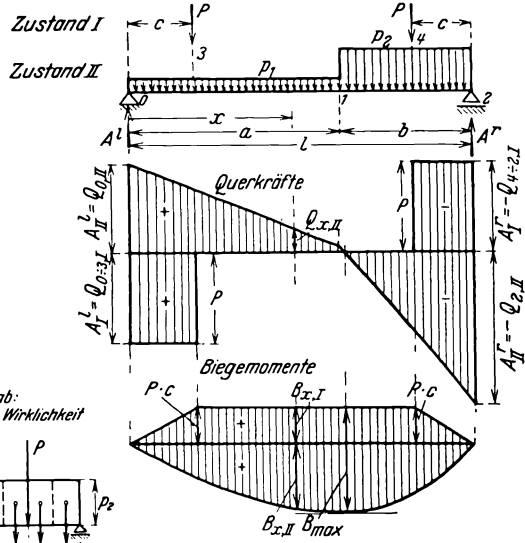
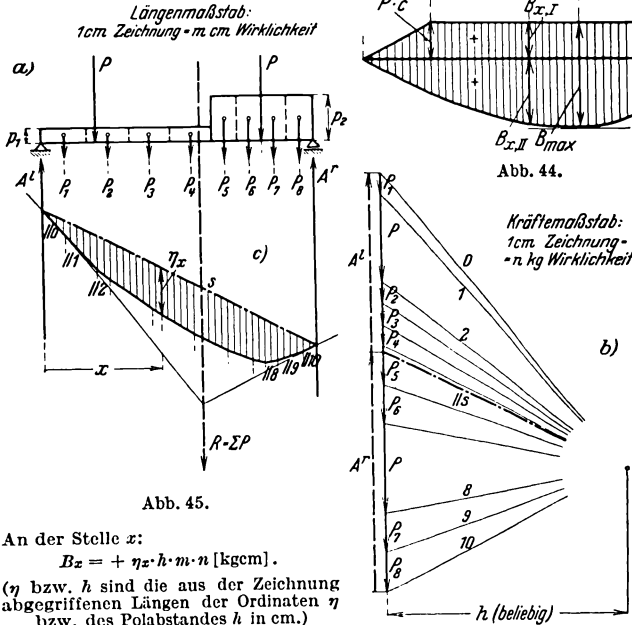


Abb. 44.



das Seileck (// 0) bis (// 10) gezeichnet. Der Schnittpunkt von Seilstrahl (// 0) und der Wirkungslinie von A^l wird mit dem Schnittpunkt von Seilstrahl (// 10) und der Wirkungslinie von A^r verbunden (Schlußlinie s).

Das Seileck und die Schlußlinie begrenzen die gesuchte Biegemomentenfläche.

Der zu s parallele Polstrahl schneidet auf der Linie der Einzelkräfte im Kräfteplan (Abb. 45b) die Auflagerkräfte A^r zwischen 10 und ($// s$) bzw. A^l zwischen 0 und ($// s$) ab.

Die Resultierende der Belastung, $R = \sum P$, geht (immer!) durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahls, ($// 0$) und ($// 10$).

Aufgabe 17 (Abb. 46).

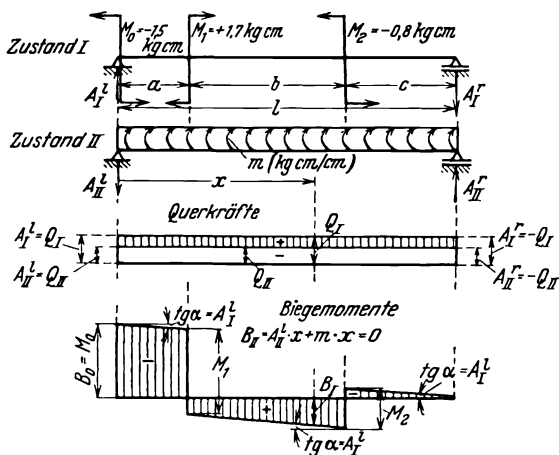


Abb. 46.

Zustand I.

$$\begin{aligned}
 A^l &= -(M_0 + M_1 + M_2) \frac{1}{l} \\
 &= -(-1,5 + 1,7 - 0,8) \frac{1}{l} \\
 &= +0,6 \cdot \frac{1}{l} \text{ [kg]}, \\
 A^r &= +(M_0 + M_1 + M_2) \frac{1}{l} \\
 &= -0,6 \cdot \frac{1}{l} \text{ [kg]}.
 \end{aligned}$$

In Feld $a \div c$: $Q = A^l = -A^r$.

In Feld a : $B = M_0 + A^l \cdot x$.

In Feld b : $B = M_0 + M_1 + A^l \cdot x$.

In Feld c : $B = A^r(l - x)$.

Zustand II.

$$A^l = -ml \frac{1}{l} = -m \text{ [kg]},$$

$$A^r = +ml \frac{1}{l} = +m \text{ [kg]}.$$

In Feld $a \div c$:

$$Q = A^l = -A^r;$$

$$B = A^l \cdot x + m \cdot x = 0.$$

§ 6. Holme mit überkragenden Enden (zusammengesetzte Balken).

Für die angegebenen Belastungszustände sind die Auflager-, Längs- und Querkräfte A , H , S und Q , sowie die Biegemomente B zu ermitteln.

Die Holme setzen sich zusammen aus Balken mit beiderseitiger Endstützung und einseitig eingespannten Balken (Kragträgern); die Einspannmomente der Kragenden wirken über den Stützpunkten als „Kragmomente“ auf die beiderseitig gestützten Balken.

Systeme der in diesem Paragraphen behandelten Art treten beispielsweise auf in Form von Holmen, abgestrebten oder verspannten Flügeln und Leitwerken oder in Form von Rippen.

Aufgabe 18 bis 20: Überkragende, zweifach gestützte Holme.

Aufgabe 18 (Abb. 47).

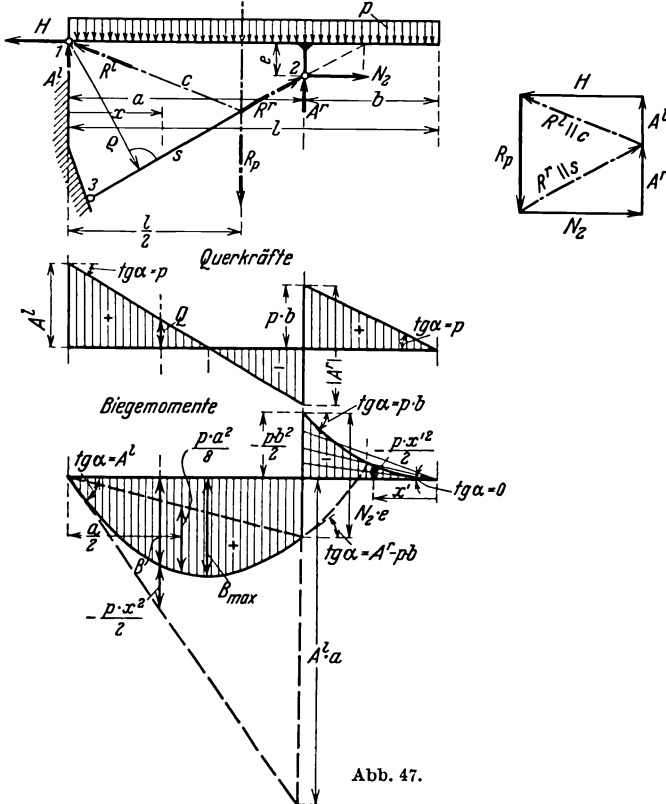


Abb. 47.

Resultierende der äußeren Belastung p :

$$R_p = p \cdot l.$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} A^l \cdot a - H \cdot e - R_p \left(a - \frac{l}{2} \right) &= 0, \\ -A^r \cdot a - N_2 \cdot e + R_p \cdot \frac{l}{2} &= 0, \\ A^l + A^r - R_p &= 0, \\ H - N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgen A^l, A^r, H, N_2 .

Die Strebekraft ist: $S = -|R^r| = -\sqrt{A^{r2} + N_2^2}$.

Aufgabe 19 (Abb. 48, 49 und Tabelle 6).

Tabelle 6. Auflager- und Querkräfte, Biegemomente.

	Zustand I	Zustand II*
A^l	$\frac{p}{4} (3a + 4b + c)$	$\frac{1}{c} [P_1(c + d + e) + P_2(c + e) - P_3 \cdot e - P_4(d + e)]$
A^r	$\frac{p}{4} (3a + 4b + c)$	$\frac{1}{c} [-P_1(d + e) - P_2 \cdot e + P_3(c + e) + P_4(c + d + e)]$
Q	Bei**: $1 : -p \frac{3}{4} a$ $2^l : -p \left(\frac{3}{4} a + b \right)$ $2^r : -p \left(\frac{3}{4} a + b \right) + A^l$ $3^l : +p \left(\frac{3}{4} a + b \right) - A^r$ $3^r : +p \left(\frac{3}{4} a + b \right)$ $4 : +p \frac{3}{4} a$	Bei**: $6^l : 0$ $6^r : -P_1$ $7^l : -P_1$ $7^r : -P_1 - P_2$ $2^l : -P_1 - P_2$ $2^r : -P_1 - P_2 + A^l$ $3^l : +P_4 + P_3 - A^r$ $3^r : +P_4 + P_3$ $8^l : +P_4 + P_3$ $8^r : +P_4$ $9^l : +P_4$ $9^r : 0$
B	$1 : -\frac{p}{3} a^2$ $2 : -\frac{p}{2} \left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{3}{2} ab + b^2 \right)$ $3 : -\frac{p}{2} \left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{3}{2} ab + b^2 \right)$ $4 : -\frac{p}{3} a^2$	$6 : 0$ $7 : -P_1 \cdot d$ $2 : -P_1(d + e) - P_2 \cdot e$ $3 : -P_4(e + d) - P_3 \cdot e$ $8 : -P_4 \cdot d$ $9 : 0$

* Im vorliegenden Fall sind P_3 und P_4 als negative Zahlenwerte einzuführen.
 ** „2^l“ bzw. „2^r“ heißt: Unmittelbar links bzw. rechts von Punkt 2.

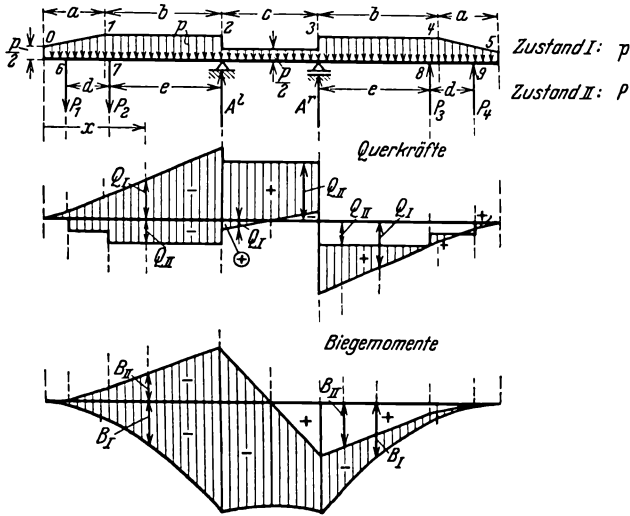


Abb. 48.

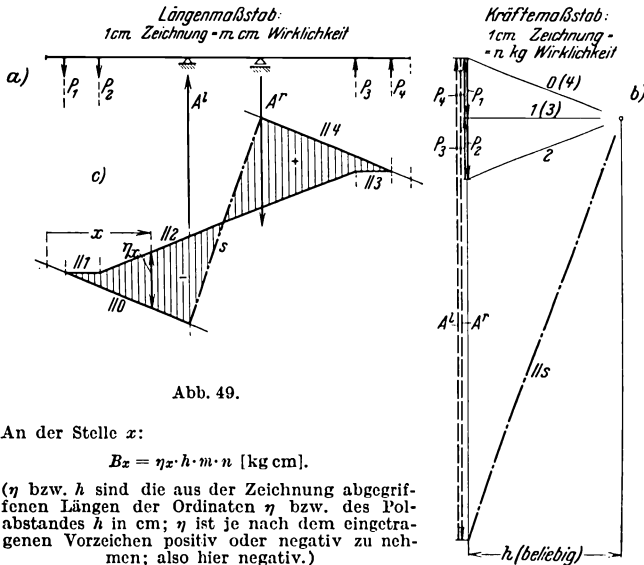


Abb. 49.

An der Stelle x:

$$B_x = \eta_x \cdot h \cdot m \cdot n \text{ [kg cm].}$$

(η bzw. h sind die aus der Zeichnung abgegriffenen Längen der Ordinaten η bzw. des Polabstandes h in cm; η ist je nach dem eingetragenen Vorzeichen positiv oder negativ zu nehmen; also hier negativ.)

Auf zeichnerischem Wege ergibt sich die Biegemomentenfläche z. B. für Zustand II wie folgt (Abb. 49):

Entsprechend Aufg. 8 und 16 wird das Seileck (// 0) bis (// 4) mit der Schlußlinie s gezeichnet.

Die Biegemomentenfläche der auskragenden Teile wird vom Seileck

und dem Seilstrahl ($// 0$) bzw. ($// 4$), die des Zwischenfeldes vom Seil-
eck und der Schlußlinie s begrenzt.

Für die Auflagerkräfte gilt entsprechendes wie in Aufg. 16.

Die Resultierende $R = \Sigma P$ ist gleich Null [Schnittpunkt des ersten
und letzten Seilstrahls, ($// 0$) und ($// 4$), liegt im Unendlichen]. Die
resultierende Belastung besteht aus einem Kräftepaar.

Aufgabe 20 (Abb. 50 und 51).

Auflagerkräfte (s. Tabelle 7): $A^r = \frac{\Sigma P_i \cdot \xi_i + \Sigma M_i}{l} = + 143,6 \text{ kg}$,
 $A^l = \Sigma P_i - A^r = + 6,4 \text{ kg}$,
 $H^l = \Sigma N_i = + 70 \text{ kg}$.

ξ_i ist der Abstand des Lastangriffspunkts i vom linken Auflager-
punkt 2; ξ ist positiv im Sinne von $+ X$.

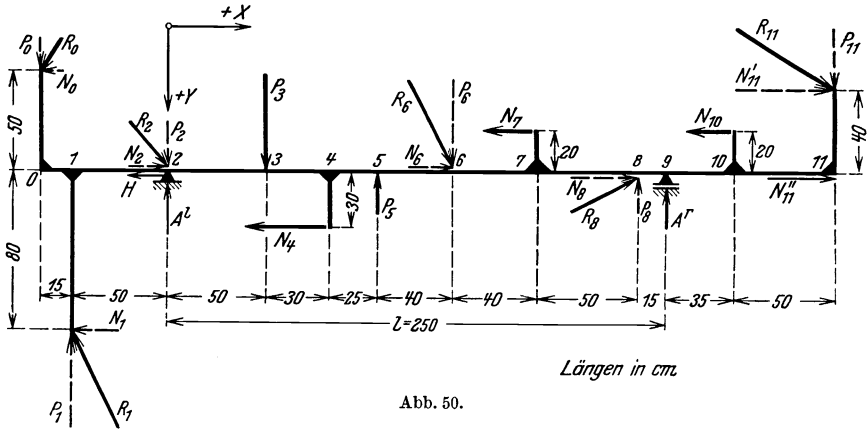


Abb. 50.

Querkraft zwischen $i - 1$ und i :

$$Q_{i-1, i} = - \sum_{k=0}^{i-1} P_k = Q_{i-2, i-1} - P_{i-1}.$$

Diese Summe enthält bei $i > 2$ die Auflagerkraft A^l und bei $i > 9$
auch A^r ; positives A ist als negative Einzelkraft P einzuführen.

Biegemoment

links bei i : $B_i^l = \sum_{k=0}^{i-1} M_k - \sum_{k=0}^{i-1} P_k (\xi_i - \xi_k)$
 $= B_{i-1}^r + Q_{i-1, i} \cdot \lambda_{i-1, i}$
 ($\lambda_{i-1, i}$ = Abstand $i - 1, i$);

rechts bei i : $B_i^r = B_i^l + M_i$;

(beginnend mit $B_0^l = 0$, $B_0^r = M_0$,

$B_1^l = + M_0 - P_0 \cdot \lambda_{0,1}$ usw.).

Die zweite Summe in dem Ausdruck für B_i^l enthält die Momente von A^l und A^r (s. oben).

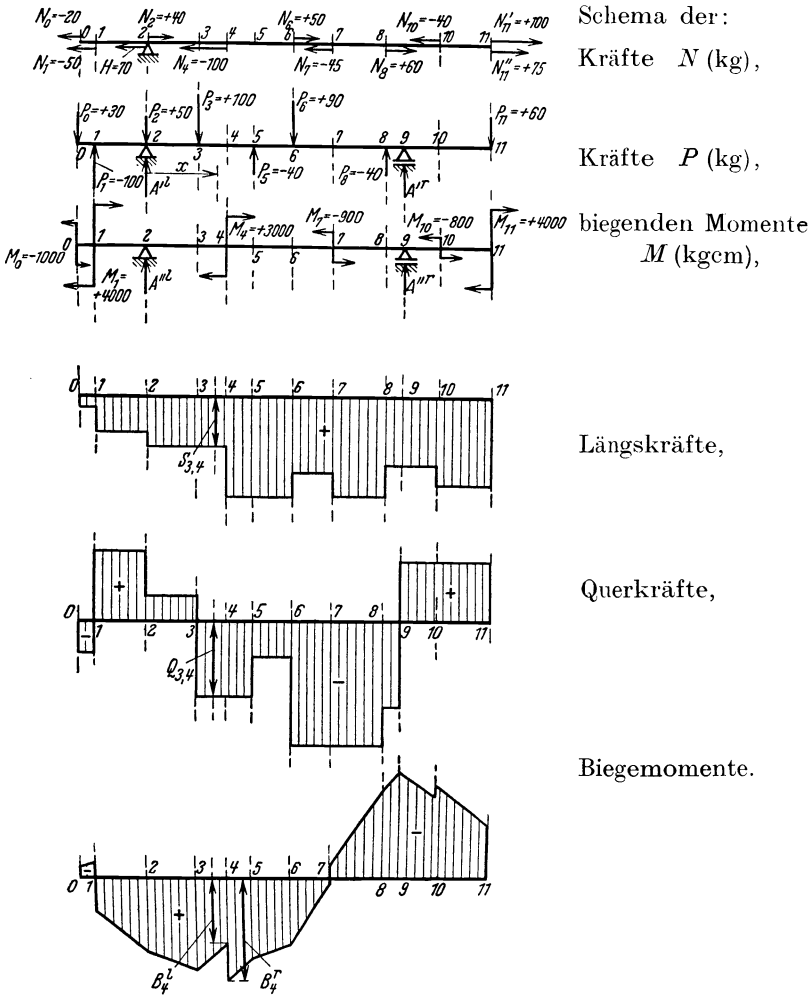


Abb. 51.

Längskraft zwischen $i - 1$ und i :

$$S_{i-1,i} = - \sum_{k=0}^{i-1} N_k = S_{i-2,i-1} - N_{i-1}.$$

Die Summe enthält bei $i > 2$ die Auflagerkraft H^l ; positives H^l ist dabei als negative Einzelkraft N einzuführen.

(Zahlenmäßige Durchrechnung in Tabelle 7.)

Tabelle 7. Rechenschema.

Stelle	$\lambda_{i-1,i}$ [cm]	ξ_i [cm]	P_i ohne A [kg]	$P_i \cdot \xi_i$ [kgcm]	M_i [kgcm]	$-P_i$ mit A [kg]	$Q_{i-1,i}$ [kg]	M_{i-1} $Q \cdot \lambda$ [kgcm]	B_i^* B_i [kgcm]	N_i ohne H [kg]	$-N_i$ mit H [kg]	$S_{i-1,i}$ [kg]
0									0	-20	+20	
1	15	-65	+30	-1950	-1000	-30		-1000	-1000	-50	+50	+20
2	50	-50	-100	+5000	+4000	+100	-30,0	-450	-1450			+70
3	50	0	+50			$-P_2 + A^t = -43,6$	+70,0	+3500	+6050	+40	-40+70 = +30	+100
4	30	+50	+100	+5000		-100	+26,4	+1320	+7370			+100
5	25	+80			+3000		-73,6	-2208	+5162	-100	+100	+200
6	40	+105	-40	-4200		+40	-73,6	+3000	+8162			+200
7	40	+145	+90	+13050		-90	-33,6	-1344	+6322	+50	-50	+150
8	50	+185			-900		-123,6	-4944	+4978	-45	+45	+195
9	15	+235	-40	-9400		+40	-123,6	-900	-866	+60	-60	+135
10	35	+250				$-P_9 + A^r = +143,6$	-83,6	-1254	-8300			+135
11	50	+285	+60	+20100		-60	+60,0	+2100	-6200	-40	+40	+175
		+335			+4000		+60,0	-800	-7000	+175	-175	
					ΣM_i			+4000	-4000	ΣN_i		
					$\Sigma P_i = +150$			+4000	0	$\Sigma N_i = +70$		
					$\Sigma P_i \cdot \xi_i = +27600$							

$$A^r = \frac{27600 + 8300}{250} = +143,6 \text{ kg}, \quad A^t = 150 - 143,6 = +6,4 \text{ kg}.$$

* Greifen keine Einzelmomente an, so kann die Trennung von B_i in B_i^t und B_i^r unterbleiben.

Aufgabe 21: Überkragender, vierfach gestützter Holm mit zwei Gelenken (Gerberträger, Abb. 52 und Tabelle 8).

$$A_1 = A_6 = \frac{p(a+b)^2}{2b};$$

Gelenkdruck (positiv, wenn positiver Querkraft entsprechend!):

$$G_2 = -\frac{p(b+a)(b-a)}{2b},$$

$$G_5 = +\frac{p(b+a)(b-a)}{2b}.$$

In Abb. 52 sind die Gelenkdrücke G_2 und G_5 in wahren Richtungssinn eingetragen; G_2 also im Sinne einer negativen, G_5 im Sinne einer positiven Querkraft.

$$A_3 = -G_2 + \frac{p(2c+d)}{2},$$

$$A_4 = +G_5 + \frac{p(2c+d)}{2}$$

$$(= A_3).$$

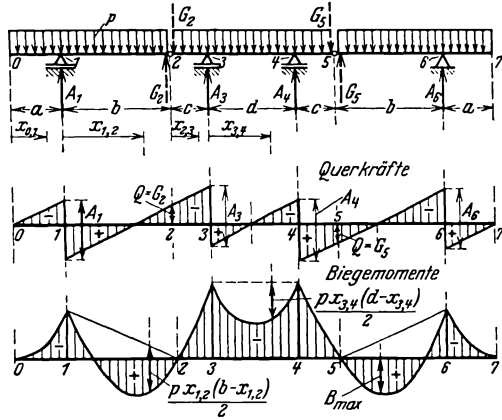


Abb. 52.

Tabelle 8. Querkräfte und Biegemomente.

Stelle	Q	B
1 ^l	$-p \cdot a$	$-\frac{p a^2}{2}$
1 ^r	$-p \cdot a + A_1$	
2 ^l	$+G_2$	0
2 ^r		
3 ^l	$+G_2 - p \cdot c$	$+G_2 \cdot c - \frac{p c^2}{2}$
3 ^r	$+G_2 - p \cdot c + A_3$	
4 ^l	$+G_5 + p \cdot c - A_4$	$-G_5 \cdot c - \frac{p c^2}{2}$
4 ^r	$+G_5 + p \cdot c$	
5 ^l	$+G_5$	0
5 ^r		
6 ^l	$+p \cdot a - A_6$	$-\frac{p a^2}{2}$
6 ^r	$+p \cdot a$	

§ 7. In ihrer Ebene beanspruchte Stabzüge (Rahmen).

Für die angegebenen Belastungszustände sind die Auflager-, Längs- und Querkräfte A, H, S und Q , sowie die Biegemomente B zu ermitteln.

Durch Lager-, Knoten- und Eckpunkte werden die Rahmen in Einzelstäbe (Balken) aufgeteilt; in den steifen Ecken sind diese gegeneinander eingespannt. Aus Anschaulichkeitsgründen ist bei der Aufgabengruppe

dieses Paragraphen auf die Einführung eigener Koordinatensysteme für jeden Einzelstab (Einzelbalken) verzichtet; die angegebenen Formeln für A , H , S , Q und B gelten daher nur für die in den Aufgaben eingetragenen Richtungen der äußeren Kräfte und Momente; d. h. diese Größen P und M sind als vorzeichenfreie Größen eingeführt. Biegemomente werden als positiv bezeichnet, wenn sie auf denjenigen Stabseiten Druck erzeugen, die in den Abbildungen durch einen Punkt (•) gekennzeichnet sind.

Systeme der in diesem Paragraphen behandelten Art kommen beispielsweise vor in Form von Spanten in Rümpfen, Booten und Schwimmern, Rumpf- und Bootwandaussparungen für Fenster, Türen und Einbauten, oder auch in Form von Baldachin- und Fahrgestellrahmen, besonderen Flügelrippen usw.

Aufgabe 22 bis 24: Offene Rahmen.

Aufgabe 22 (Abb. 53).

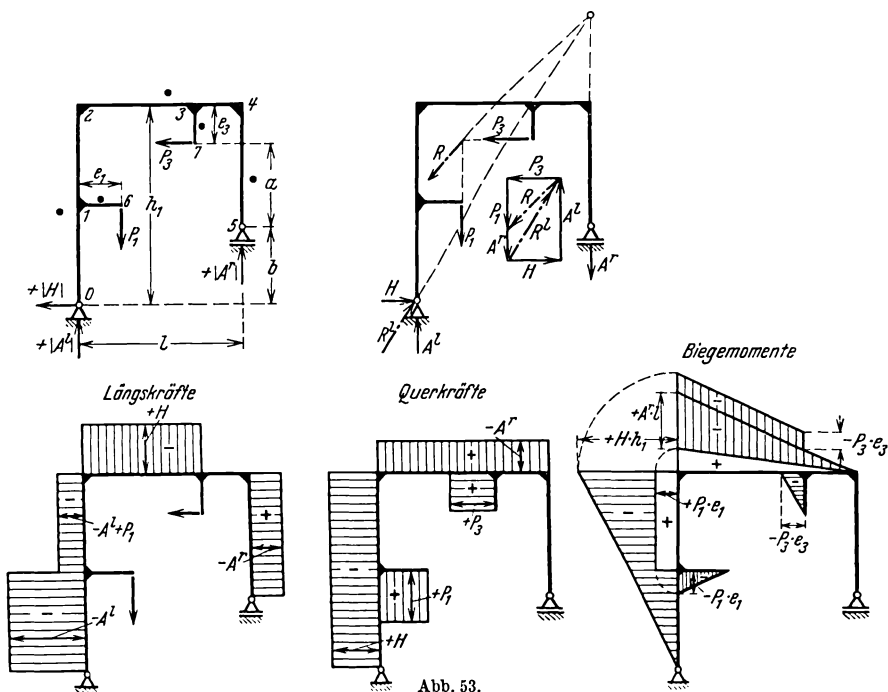


Abb. 53.

$$\begin{aligned} \sum M_5 = 0 &: A^l \cdot l + H \cdot b - P_1 \cdot (l - e_1) - P_3 \cdot a = 0; \\ \sum M_0 = 0 &: -A^r \cdot l - P_3 \cdot (a + b) + P_1 \cdot e_1 = 0; \\ \sum H = 0 &: -H - P_3 = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 23 (Abb. 54).

$$A^l = -\frac{1}{l} \left(\frac{p^o h_1^2}{2} + \frac{p^u - p^o}{2} \cdot \frac{h_1^2}{3} \right), \quad A^r = +\frac{1}{l} \left(\frac{p^o h_1^2}{2} + \frac{p^u - p^o}{2} \cdot \frac{h_1^2}{3} \right),$$

$$H = p^o \cdot h_1 + \frac{p^u - p^o}{2} \cdot h_1.$$

$$S = \begin{cases} \text{Feld 0,1: } -A^l, \\ \text{Feld 1,2: } 0, \\ \text{Feld 2,3: } -A^r. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \text{Feld 0,1: } H - \frac{1}{2} \left[2p^u - (p^u - p^o) \frac{x_{0,1}}{h_1} \right] x_{0,1}, \\ \text{Feld 1,2: } -A^r. \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \text{Feld 0,1: } H \cdot x_{0,1} - \frac{1}{6} \left[3p^u - (p^u - p^o) \frac{x_{0,1}}{h_1} \right] x_{0,1}^2, \\ \text{Feld 1,2: } A^r (l - x_{1,2}). \end{cases}$$

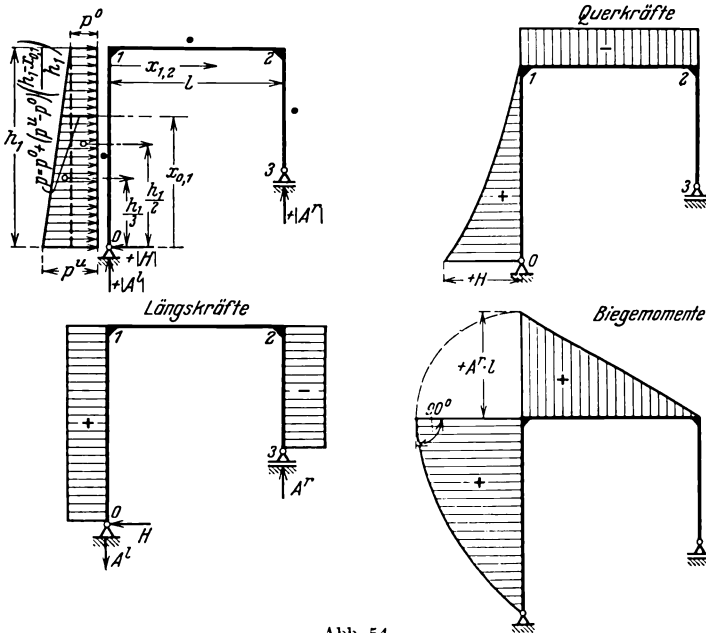


Abb. 54.

Aufgabe 24.

Allgemeine Übungsaufgabe für die Berechnung eines beliebigen Stabzugs mit beliebiger Lagerung (Abb. 55 und Tabelle 9).

Gleichung der Systemlinie des krummen Stabes zwischen 1 und 6:

$$y = 0,1 x^2 [\text{m}];$$

daraus $\text{tg } \alpha_x = y' = 0,2 x$.

Tabelle 9. Systemwerte.

Punkt <i>i</i>	<i>x</i> [m]	<i>y</i> [m]	$y' = \text{tg } \alpha_x$ [—]	$\sin \alpha_x$ [—]	$\cos \alpha_x$ [—]
1	0	0	0	0	1
2	1,2	0,14	0,24	0,23	0,97
3	2,4	0,58	0,48	0,43	0,90
4	3,6	1,30	0,72	0,58	0,81
5	4,8	2,30	0,96	0,69	0,72
6	6,0	3,60	1,20	0,77	0,64

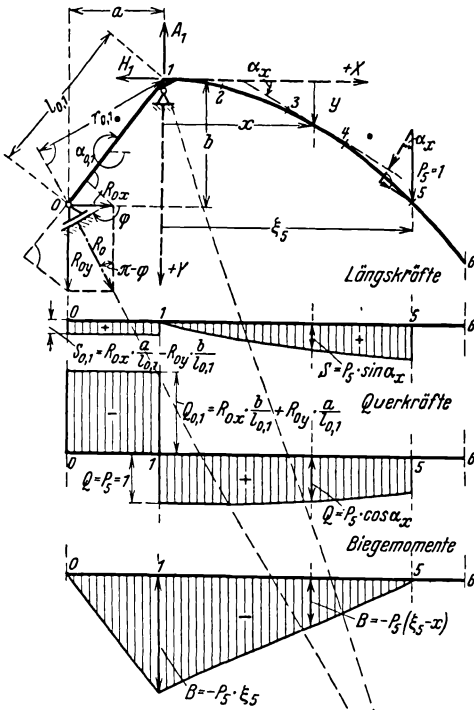


Abb. 55.

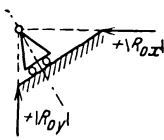


Abb. 56.

Gleitwinkel des beweglichen Lagers bei 0:

$$\varphi = 151^\circ;$$

Neigung des Stabes 0,1:

$$\alpha_{0,1} = 308^\circ 20' = -51^\circ 40'$$

(alle Winkel im Sinne \widehat{xy} gemessen, also positiv im Uhrzeigersinn).

R_{0x} und R_{0y} folgen aus:

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0: & P_5 \cdot \xi_5 + R_{0y} \cdot a \\ & + R_{0x} \cdot b = 0 \end{aligned}$$

$$\text{und } \frac{R_{0x}}{R_{0y}} = \text{tg}(\pi - \varphi).$$

Entsprechend der Vorzeichenregel für Reaktionskräfte werden die Komponenten R_{0x} und R_{0y} der Lagerreaktion R bei 0 dann als positiv bezeichnet, wenn sie entgegen der $+X$ - bzw. $+Y$ -Richtung wirken (Abb. 56).

Die Biegemomentenfläche des gekrümmten Stabzugs ist für Belastung in Y -Richtung die gleiche wie bei einem in X -Richtung verlaufenden geraden Balken.

Aufgabe 25 bis 26: Geschlossene Rahmen mit Gelenken.

Aufgabe 25 (Abb. 57 und 58).

Der in Abb. 57 dargestellte 3-Gelenkrahn ist durch eine waagerechte Einzelkraft P , angreifend in Punkt 1, belastet (P ist in den Formeln als vorzeichenfreie Größe behandelt).

1. Auflagerkräfte.

Aus: $A^l \cdot l - P \cdot h = 0,$
 $A^l + A^r = 0,$
 $-H - P = 0$ folgt:
 $A^l = \frac{P h}{l}, \quad A^r = -\frac{P h}{l}, \quad H = -P.$

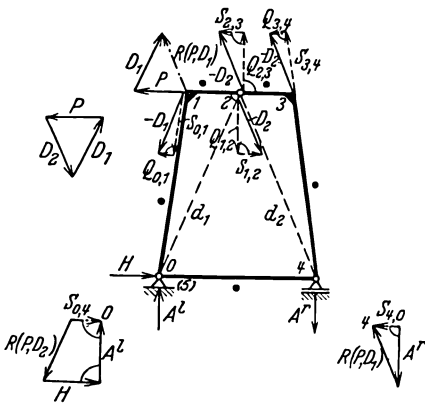
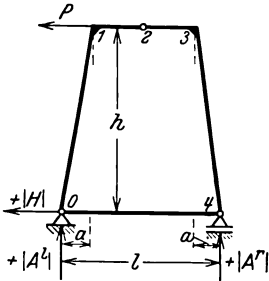
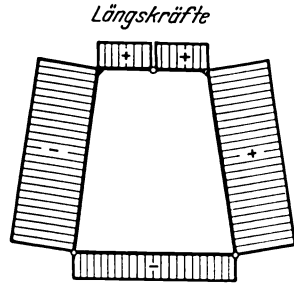
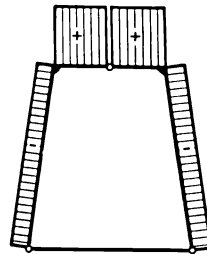


Abb. 57.



Querkräfte



Biegemomente

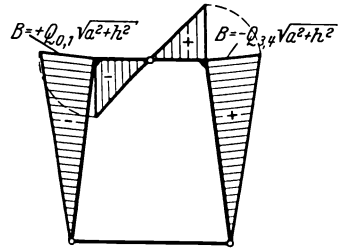


Abb. 58.

2. Geometrische Zerlegung der äußeren Kraft P .

Der Dreigelenkrahn wird ersetzt durch die gedachten Streden d_1 und d_2 ; die zugehörigen gedachten Stabkräfte D_1 und D_2 werden so bestimmt, daß sie mit P im Gleichgewicht stehen. D_2 ist die vom unbelasteten (2, 3, 4) auf den belasteten Halbrahm (0, 1, 2) ausgeübte Kraft.

Vom belasteten auf den unbelasteten Halbrahmen wirken P und D_1 , deren Resultierende $R(P, D_1)$ entgegengesetzt gleich D_2 ist.

3. Geometrische Ermittlung der Längskräfte S und Querkräfte Q .

Im Punkt 2 des Halbrahmens (2, 3, 4) wirkt die Gelenkkraft $-D_2 = R(P, D_1)$; dadurch entsteht

in Stab 2, 3: $S_{2,3}$ und $Q_{2,3}$,

in Stab 3, 4: $S_{3,4}$ und $Q_{3,4}$.

Im Punkt 4 des unteren Riegels (0, 4) tritt A' zu $-D_2 = R(P, D_1)$; dadurch entsteht in Stab 4, 0:

$$S_{4,0}; \quad (Q_{4,0} = 0).$$

Im Punkt 2 des Halbrahmens (2, 1, 0) wirkt die Gelenkkraft D_2 ; dadurch entsteht in Stab 2, 1:

$$S_{1,2} \quad \text{und} \quad Q_{1,2}.$$

Im Punkt 1 des Halbrahmens (2, 1, 0) tritt zur Gelenkkraft D_2 die Last P ; Resultierende $R(P, D_2) = -D_1$; dadurch entsteht in Stab 1, 0:

$$S_{1,0} \quad \text{und} \quad Q_{1,0}.$$

Im Punkt 0 des unteren Riegels treten H und A' zu $-D_1 = R(P, D_2)$; dadurch entsteht in Stab 0, 4:

$$S_{0,4} (\equiv S_{4,0}); \quad (Q_{0,4} \equiv Q_{4,0} = 0).$$

4. Analytische Behandlung.

$$\sum M_4 = 0 \quad \text{für Halbrahmen (2, 3, 4):} \quad Q_{2,3} \cdot \frac{l}{2} - S_{2,3} \cdot h = 0,$$

$$\sum M_0 = 0 \quad ,, \quad ,, \quad (0, 1, 2): \quad Q_{1,2} \cdot \frac{l}{2} + S_{1,2} \cdot h - P \cdot h = 0;$$

ferner:

$$S_{1,2} = S_{2,3}, \quad Q_{1,2} = Q_{2,3},$$

$$S_{4,0} = -S_{2,3}, \quad Q_{4,0} = 0.$$

Daraus:

$$S_{1,2} = S_{2,3} = + \frac{P}{2},$$

$$Q_{1,2} = Q_{2,3} = + \frac{Ph}{l}.$$

$$S_{0,1} = (S_{1,2} - P) \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} - Q_{1,2} \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad S_{3,4} = S_{2,3} \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} + Q_{2,3} \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

$$Q_{0,1} = (S_{1,2} - P) \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} + Q_{1,2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad Q_{3,4} = -S_{2,3} \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} + Q_{2,3} \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Biegemomente s. Abb. 58.

Aufgabe 26.

Der in Abb. 59 dargestellte 3-Gelenkrahmen ist belastet:

1. mit einer Gruppe von 4 Kräften P_1, P_3, P_5, P_6 nach Abb. 59, die miteinander im Gleichgewicht stehen;
2. mit Kräftepaaren nach Abb. 64.

Die angreifenden Kräfte sind in den Formeln als vorzeichenfreie Größen behandelt.

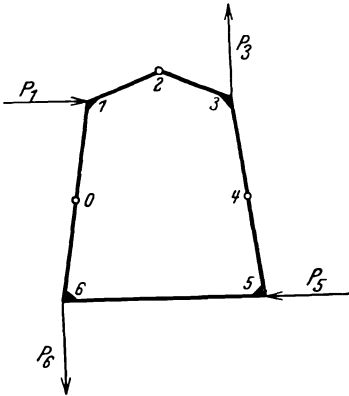


Abb. 59.

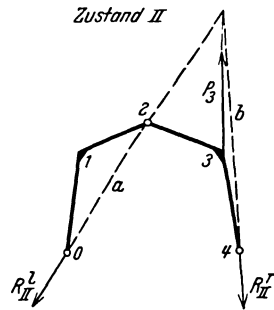
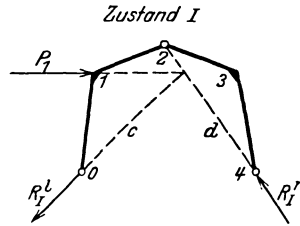


Abb. 60.

Zu 1.

Der 3-Gelenkrahmen 0, 1, 2, 3, 4 wird zunächst für sich betrachtet. Dazu wird die äußere Belastung zerlegt in

- Zustand I: Es wirkt nur P_1 ,
 und „ II: „ „ „ P_3 .

Die Richtungen der Einzelresultierenden R_I^L, R_I^R und R_{II}^L, R_{II}^R er-

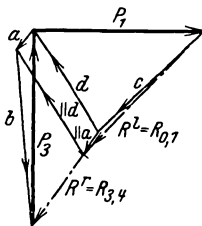


Abb. 61.

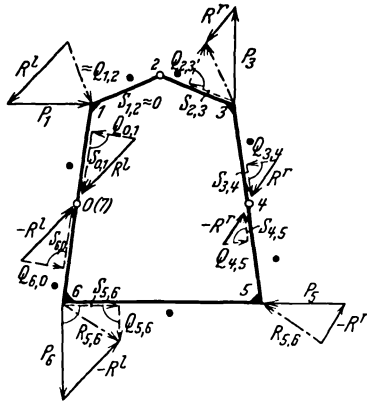


Abb. 62.

geben sich aus Abb. 60; die Größen dieser Einzelresultierenden wie der Gesamtresultierenden R^L und R^R folgen aus dem Kräfteplan in Abb. 61.

Die Berechnung der Längskräfte S , Querkräfte Q und Biegemomente B geschieht wie in Aufgabe 25, ausgehend von den Punkten 0 bzw. 4 (Abb. 62 und 63).

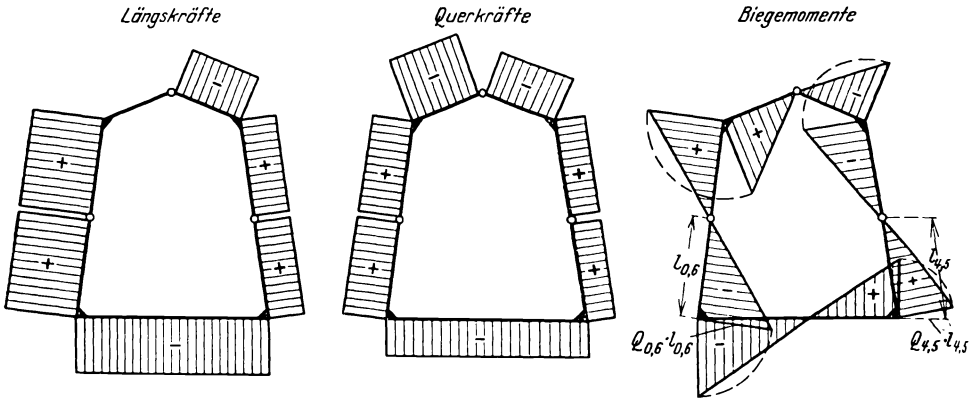


Abb. 63.

Auf den unteren Rahmenteil 4, 5, 6, 7 (0) wirken die bereits ermittelten Gelenkkräfte R^l und R^r , aber jetzt in umgekehrtem Richtungssinn, sowie die damit im Gleichgewicht stehenden äußeren Kräfte P_5 und P_6 .

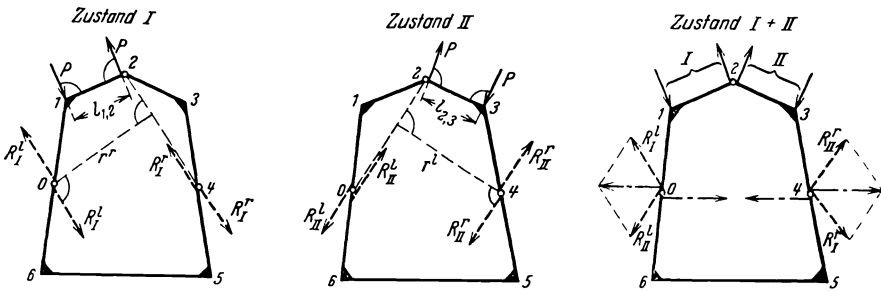


Abb. 64.

Zu 2.

Die Berechnung der Gelenkkräfte R^l und R^r für die Kräftegruppen des Zustandes I und Zustandes II erfolgt hier durch Momentengleichungen, da die Resultierenden der äußeren Lasten verschwinden.

$$\begin{array}{l|l} \text{Zustand I.} & \text{Zustand II.} \\ \sum M_0 = 0: + R^r \cdot r^r - P \cdot l_{1,2} = 0, & \sum M_4 = 0: - R^l \cdot r^l + P \cdot l_{2,3} = 0, \\ R^r = \frac{P \cdot l_{1,2}}{r^r} & R^l = \frac{P \cdot l_{2,3}}{r^l}. \end{array}$$

R^l parallel und entgegengesetzt R^r .

Weitere Berechnung wie unter 1.

§ 8. Ebene Fachwerke.

Allgemeines.

In den folgenden Aufgaben sind die Stabkräfte (Längskräfte) in den einzelnen Stäben ebener Gelenkfachwerke zu ermitteln. Zur Berechnung einer beliebigen Stabkraft, die stets dann als positiv bezeichnet wird, wenn sie eine Zugkraft ist, wird das Fachwerk durch einen gedachten Schnitt zertrennt; und zwar derart, daß dieser Schnitt durch den betreffenden Stab hindurchgeht. Der Schnitt wird entweder so geführt, daß jeder der abgetrennten Teile ein Auflager enthält, oder so, daß eine freie Gruppe von Stäben bzw. nur ein Knotenpunkt für sich abgetrennt wird.

Aus der Bedingung, daß jeder der abgeschnittenen Teile für sich allein im Gleichgewicht stehen muß, werden die Kräfte in den vom Schnitt getroffenen Stäben gefunden.

Aufgabe 27: Fachwerkholm eines freitragenden Flügels.

Zu ermitteln sind die Stabkräfte O_m , U_m , D_m und O_n , U_n , D_n (Abb. 65 und 66).

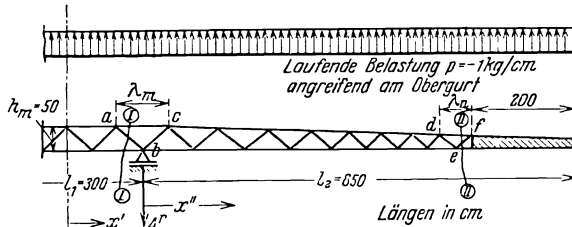
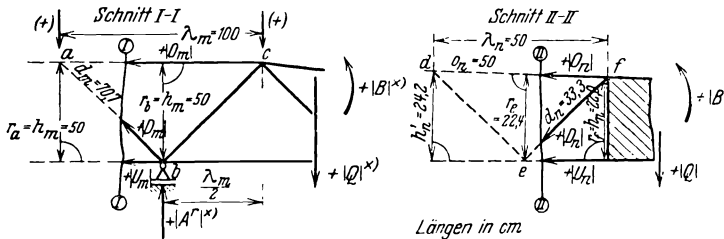


Abb. 65.



^{x)} B, Q, A positiv im Sinne von Abb. 29

Abb. 66.

Wegen Symmetrie ist:

$$A^x = A^y = p \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) = -1000 \text{ kg.}$$

Tabelle 10. Querkräfte und Biegemomente.

Bezugspunkt	Querkräfte [kg]	Biegemomente [kgem]
a ($x'_a = 100$ cm)	$Q_m = p \left[(l_2 - x'_c) + \frac{\lambda_m}{2} \right] - A^r$ $= + 150$ $(x'_c = \frac{\lambda_m}{2})$	$B = - \frac{p \left(l_2 + \frac{l_1}{2} - x'_a \right)^2}{2}$ $+ A^r \left(\frac{l_1}{2} - x'_a \right) = 355\,000$
b ($x'_b = 0$)		$B = - \frac{p l_2^2}{2} = + 361\,000$
e ($x'_e = 625$ cm)	$Q_n = p \left[(l_2 - x'_f) + \frac{\lambda_n}{2} \right] = - 225$	$B = - \frac{p (l_2 - x'_e)^2}{2} = + 25\,300$
f ($x'_f = 650$ cm)		$B = - \frac{p (l_2 - x'_f)^2}{2} = + 20\,000$

Rittersches Schnittverfahren.

Die gesuchten Stabkräfte werden am abgeschnittenen (rechten) Systemteil zunächst immer als Zugkräfte, also mit positivem Vorzeichen, angebracht. Mit den Querkräften und Biegemomenten nach Tabelle 10 folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Schnitte $I \div I$ bzw. $II \div II$ (Abb. 65 und 66):

Schnitt $I \div I$.

$$\sum M_b = 0: - O_m \cdot r_b - B_b = 0,$$

$$O_m = - 7220 \text{ kg};$$

$$\sum M_a = 0: + U_m \cdot r_a - B_a = 0,$$

$$U_m = + 7100 \text{ kg};$$

$$\sum V = 0: - D_m \frac{h_m}{d_m} + Q_m = 0,$$

$$D_m = + 212 \text{ kg}.$$

Schnitt $II \div II$.

$$\sum M_e = 0: - O_n \cdot r_e = B_e = 0,$$

$$O_n = - 1130 \text{ kg};$$

$$\sum M_f = 0: U_n \cdot r_f - B_f = 0,$$

$$U_n = + 910 \text{ kg};$$

$$\sum V = 0: + D_n \frac{h_n}{d_n} - O_n \frac{h'_n - h_n}{o_n}$$

$$+ Q_n = 0,$$

$$D_n = + 265 \text{ kg}.$$

Aufgabe 28: Zweifach abgestrebter Holm.

Die Längskräfte in den einzelnen Stäben der in Abb. 67 dargestellten Tragwand sind ähnlich wie in Aufg. 27 als Stabkräfte eines Gelenkfachwerks zu ermitteln. Es wird angenommen, der durchlaufende Holm 0, 1, 2, 3 sei im Punkt 1 durch ein Gelenk unterbrochen. Die verteilte Holmbelastung p wird durch drei Knotenlasten P_0 , P_1 , P_2 ersetzt; diese sind identisch mit den Auflager-Aktionen, die sich ergeben,

wenn die Holmabschnitte 0, 1 und 1, 3 als selbständige Balken aufgefaßt werden, die in 0 und 1 bzw. in 1 und 2 statisch bestimmt gelagert sind (vgl. S. 51):

$$P_0 = + \frac{p l_1}{2} = + 100 p \text{ [kg]},$$

$$P_1 = + \frac{p l_1}{2} + \frac{p (l_2 + l_3) (l_2 - l_3)}{2 l_2} = + 175 p \text{ [kg]},$$

$$P_2 = + \frac{p (l_2 + l_3)^2}{2 l_2} = + 225 p \text{ [kg]}.$$

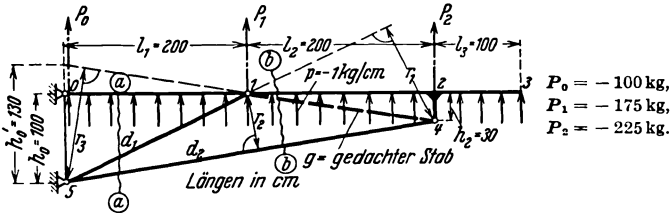


Abb. 67.

1. Ermittlung der Stabkräfte nach Ritter.

Vgl. hierzu Tabelle 11.

Tabelle 11. Berechnung der Stabkräfte.

Stab	Schnitt	Bezugspunkt <i>i</i>	$\sum M_i = 0$	Stabkräfte <i>S</i>
l_1	$a \div a$	5	$- L_1 \cdot h_0 + P_1 \cdot l_1 + P_2 (l_1 + l_2) = 0$	$L_1 = + P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4 = + 1250 p$
l_2	$b \div b$	5	$- L_2 \cdot h'_0 + P_2 (l_1 + l_2) = 0 *$	$L_2 = + P_2 \cdot \frac{400}{130} = + 692 p$
d_1	$a \div a$	4	$- D_1 \cdot r_1 - P_1 \cdot l_2 - L_1 \cdot h_2 = 0$	$D_1 = \frac{- P_1 \cdot 200 - L_1 \cdot 30}{116} = - 625 p$
d_2	$b \div b$	1	$+ D_2 \cdot r_2 + P_2 \cdot l_2 = 0$	$D_2 = \frac{- P_2 \cdot 200}{64} = - 702 p$

2. Ermittlung der Stabkräfte nach Cremona.

Am Knoten 4 besteht Gleichgewicht zwischen P_2 und den beiden gesuchten Kräften G und D_2 ; dem entspricht das Kräfte-dreieck P_2, G, D_2 des Cremonaplans (Abb. 68). Am Knoten 1 besteht Gleichgewicht zwischen G, P_1 und den beiden gesuchten Kräften L_1 und D_1 ; dem entspricht das Kräfteviereck G, P_1, L_1 und D_1 des Cremonaplans.

* L_2 ist die waagerechte Komponente der Stabkraft G in dem gedachten Stab 1 \div 4; G folgt aus (Schnitt $b \div b$, Bezugspunkt 5):

$$- G \cdot r_3 + P_2 (l_1 + l_2) = 0;$$

ferner ist:

$$L_2 : G = r_3 : h'_0.$$

(Die äußeren Kräfte folgen im Cremonaplan so aufeinander, wie sie getroffen werden, wenn das Fachwerk im Uhrzeigersinn durchlaufen wird; dementsprechend folgen in den einzelnen Kräftepolygonen des Cremonaplans die an dem zugehörigen Fachwerkknoten angreifenden Stab- bzw. äußeren Kräfte in der Weise aufeinander, wie die betreffen-

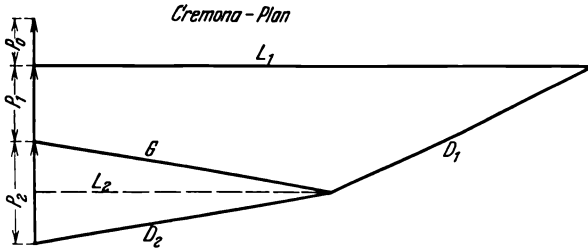


Abb. 68.

$$\begin{array}{lll}
 P_0 = -100 \text{ kg}, & L_1 = -1250 \text{ kg}, & L_2 = -692 \text{ kg}; \\
 P_1 = -175 \text{ kg}, & D_1 = +625 \text{ kg}, & D_2 = +702 \text{ kg}; \\
 P_2 = -225 \text{ kg}, & G = -698 \text{ kg}. &
 \end{array}$$

den Stäbe bzw. Kräftepeile getroffen werden, wenn die einzelnen Fachwerkknoten ebenfalls im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Die Auflagerkräfte, die auch äußere Kräfte darstellen, sind hier weggelassen, da sie im vorliegenden Fall zur Ermittlung von L_1 , L_2 , D_1 und D_2 nicht gebraucht werden, vgl. auch Aufg. 29.)

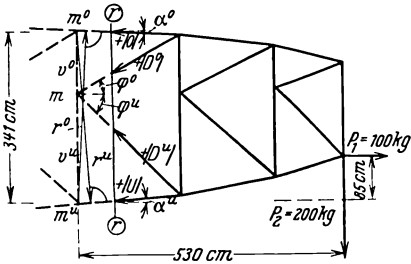


Abb. 69.

$$\begin{array}{ll}
 r^o = 340 \text{ cm}; & r^u = 340 \text{ cm}; \\
 \sin \alpha^o = 0,0477; & \sin \alpha^u = 0,0477; \\
 \sin \varphi^o = 0,467; & \sin \varphi^u = 0,709; \\
 \cos \varphi^o = 0,875; & \cos \varphi^u = 0,700.
 \end{array}$$

Aufgabe 29: Endstück einer Rumpfwand in K-Verband.

1. Rechnerische Ermittlung der Stabkräfte in den Stäben O , U , D^o und D^u nach Ritter (Abb. 69).

Biegemomente bezgl. m^u und m^o :

$$\begin{aligned}
 B(m^u) &= -100 \cdot 85 - 200 \cdot 530 = -114500 \text{ kgcm}, \\
 B(m^o) &= +100(341 - 85) - 200 \cdot 530 = -80400 \text{ kgcm}.
 \end{aligned}$$

Der Pfosten $v^o \div v^u$ nimmt wegen der Annahme gelenkiger Knoten keine seitliche Kraft auf. Die Resultierende von D^u und D^o geht also durch m^u und m^o .

Daher (Schnitt $r \div r$):

$$1. \sum M(m^u) = 0: \quad O = -\frac{B(m^u)}{r^o} = +337 \text{ kg},$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sum M(m^o) = 0: \quad U &= + \frac{B(m^o)}{r^u} = -237 \text{ kg}, \\
 3. \quad \sum H(m) = 0: \quad D^o \cdot \cos \varphi^o + D^u \cdot \cos \varphi^u &= 0, \\
 4. \quad \sum V = 0: \quad -O \cdot \sin \alpha^o + U \cdot \sin \alpha^u + D^o \cdot \sin \varphi^o \\
 &\quad - D^u \cdot \sin \varphi^u + P_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Aus 3. und 4.:

$$\begin{aligned}
 D^o &= -128,5 \text{ kg}, \\
 D^u &= +160,5 \text{ kg}.
 \end{aligned}$$

2. Ermittlung der übrigen Stabkräfte nach Cremona.

Notwendig ist vorher die unter 1. gezeigte Berechnung der Kräfte in den Gurten und Streben eines Feldes. Diese, zusammen mit P_1 und P_2

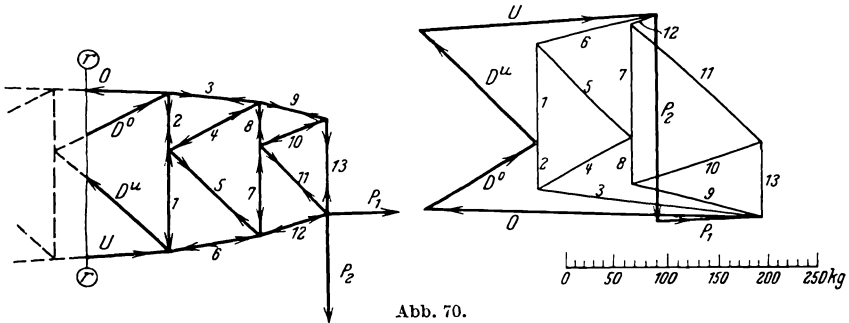


Abb. 70.

(und gegebenenfalls anderen Knotenlasten), bilden das geschlossene Polygon der „äußeren Kräfte“ (Abb. 70).

Die Kräfte D^u , U und die gesuchten Kräfte in den Stäben 6 und 1 stehen miteinander im Gleichgewicht; dem entspricht das Kräfteviereck D^u , U , 6, 1 des Cremonaplanes. Ebenso entspricht der Gleichgewichtsgruppe der Kräfte O , D^o und der gesuchten Kräfte in den Stäben 2 und 3 das Kräfteviereck O , D^o , 2, 3. Ferner entspricht der Gleichgewichtsgruppe der nunmehr bekannten Kräfte in den Stäben 2 und 1 und der gesuchten Kräfte in den Stäben 5 und 4 das Kräfteviereck 2, 1, 5, 4 des Cremonaplanes usw. (Die äußeren Kräfte folgen hier im Cremonaplan so aufeinander, wie sie getroffen werden, wenn das abgetrennte Rumpffende entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen wird; dementsprechend folgen in den einzelnen Kräftepolygone des Cremonaplanes die an den zugehörigen Fachwerksknoten angreifenden Stab- bzw. äußeren Kräfte — wozu auch die Kräfte O , D^o , D^u , U gehören — in der Weise aufeinander, wie die betreffenden Stäbe bzw. Kräftepfeile getroffen werden, wenn die einzelnen Fachwerksknoten ebenfalls entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen werden; vgl. auch Aufg. 28.)

3. Zeichnerische Bestimmung von O , U , D^o und D^u nach Culmann.

Da nach vorhergehendem die Resultierende $R(D^o, D^u)$ von D^o und D^u lotrecht verläuft, so ist zunächst die Resultierende $R(P_1, P_2)$ von P_1 und P_2 in die Richtungen O , U , V zu zerlegen.

Zunächst wird die Resultierende von z. B. $R(P_1, P_2)$ und O bestimmt; sie muß mit der Resultierenden von U und $R(D^o, D^u)$ in eine Gerade fallen, und zwar in die Verbindungslinie g der Schnittpunkte von $R(P_1, P_2)$ mit O und von $R(D^o, D^u)$ mit U , „Culmannsche Gerade“ (Abb. 71).

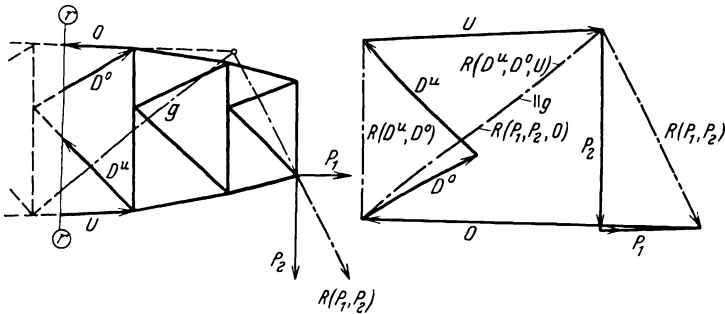
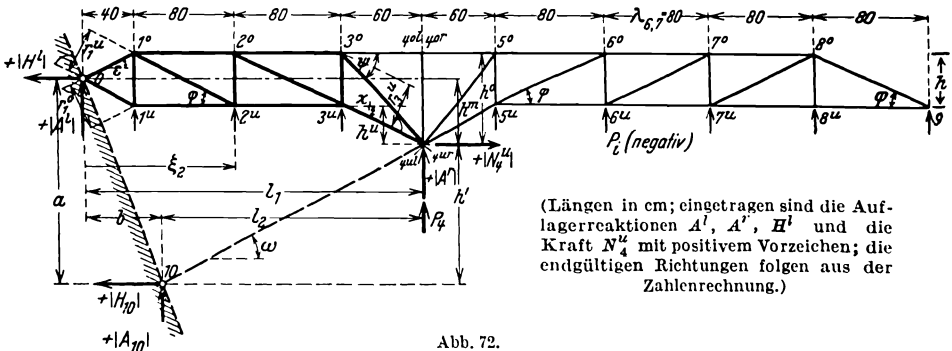


Abb. 71.

Aufgabe 30: Abgestrebter Fachwerkhalm.

Die Stabkräfte des in Abb. 72 dargestellten Fachwerkholms sind zu ermitteln für Belastung durch (negative) Knotenlasten P_i am Untergurt, die einer verteilten Belastung $p = -1$ kg/cm von unten nach oben entsprechen.



(Längen in cm; eingetragen sind die Auflagerreaktionen A^1 , A^2 , H^1 und die Kraft N^4 mit positivem Vorzeichen; die endgültigen Richtungen folgen aus der Zahlenrechnung.)

Abb. 72.

$a = 160$ cm,	$h^u = 32,3$ cm,	$\sin \varphi = \sin \varepsilon = 0,447$,
$b = 60$ cm,	$h^m = 52,3$ cm,	$\sin \chi = \sin \omega = 0,474$,
$l_1 = 260$ cm,	$h^o = 72,3$ cm,	$\sin \psi = 0,769$,
$l_2 = 200$ cm,	$h' = 107,7$ cm,	$\cos \omega = 0,881$.
$h = 40$ cm,		

1. Holmauflagerreaktionen A^l, A^r, H^l und waagerechte Kraft N_4^u .

Moment um Punkt 4^u (Holm):

$$+ A^l \cdot l_1 - H^l \cdot h^m - \sum_0^9 P_i \cdot (l_1 - \xi_i) = 0.$$

(Die Zahlenwerte P_i sind gemäß Aufgabenstellung hier als negative Größen einzusetzen!)

$$\sum V = 0: \quad - A^l - A^r + \sum_0^9 P_i = 0,$$

$$\sum H = 0: \quad - H^l + N_4^u = 0.$$

(Die Kräfte A^r und N_4^u wirken auf die Strebe im umgekehrten Sinn.)

Moment um Punkt 10 (Strebe): $+ A^r \cdot l_2 - N_4^u \cdot h = 0.$

2. Querkräfte $Q_{i,i+1}$ (als Summe aller lotrechten Kräfte rechts von i).

Zwischen 9 und 4^r :

$$Q_{i,i+1} = \sum_{k=i+1}^9 P_k,$$

zwischen 4^l und 0:

$$Q_{i,i+1} = \sum_{k=i+1}^9 P_k - A^r.$$

(4^r bzw. 4^l bedeutet: unmittelbar rechts bzw. links von $4^u \div 4^o$.)

3. Biegemomente B_i (als Summe der Momente aller Kräfte rechts von i).

Zwischen 9 und 4^r :

$$B_i = B_{i+1} - Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1},$$

zwischen 4^l und 0:

a) infolge lotrechter Kräfte:

$$B_i(P) = B_{i+1}(P) - Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1},$$

b) infolge der waagerechten Kraft N_4^u :

$$B_i^u(N) = + N_4^u \cdot h^u,$$

$$B_i^o(N) = + N_4^u \cdot h^o.$$

Gesamt-Biegemomente:

$$B_i^u = B_i(P) + B_i^u(N),$$

$$B_i^o = B_i(P) + B_i^o(N).$$

Biegemoment am Punkt 0:

$$B_0 = B_0(P) + N_4^u \cdot h^m.$$

(Zahlenmäßige Durchrechnung in Tabelle 12.)

4. Stabkräfte. Vgl. die Formeln und Zahlenwerte in Tabelle 13.

5. Zahlenrechnung.

Aus 1. und den Spalten ② und ④ der Tabelle 12 folgt:

$$A^l = - 66,3 \text{ kg}; \quad H^l = - 1064 \text{ kg};$$

$$A^r = - 573,7 \text{ ,,}; \quad N_4^u = - 1064 \text{ ,,}$$

(Vgl. die Vorzeichenregeln auf S. 38, 39)

Tabelle 12. Berechnung von Q und B.

①	②	③	④	⑤	⑥*	⑦	⑧	⑨*	⑩	⑪**	⑫*
Punkt	P_i [kg]	$l_i - \xi_i$ [cm]	$P_i (l_i - \xi_i) \cdot 10^{-2}$ [kgcm]	A [kg]	$Q_{i, i+1}$ [kg]	$h_{i, i+1}$ [cm]	$Q \cdot h \cdot 10^{-2}$ [kgcm]	$B_i(P) \cdot 10^{-2}$ [kgcm]	Punkt	$B_i(N) \cdot 10^{-2}$ [kgcm]	$B_i \cdot 10^{-2}$ [kgcm]
0	-20	+260	- 52	$A^l =$ - 66,3	0			+557	0	-557	0
1	-60	+220	-132		- 46,3	40	- 19	+538	1°	-770	-232
2	-80	+140	-112		+ 13,7	80	+ 11	+549	2°	-770	-221
3	-70	+ 60	- 42		+ 93,7	80	+ 75	+624	2 ^u	-344	+205
4	-60	0	0	$A^r =$ -573,7	+163,7	60	+ 98	+722	3°	-770	-146
5	-70	- 60	+ 42		-350	60	-210	+512	3 ^u	-344	+280
6	-80	-140	+112		-280	80	-224	+288	4° (l)	-770	- 48
7	-80	-220	+176		-200	80	-160	+128	4° (r)	—	+722
8	-80	-300	+240		-120	80	- 96	+ 32	4 ^u	—	+722
9	-40	-380	+152		- 40	80	- 32	0	5°	—	+512
					0			0	5 ^u	—	+512
									6°	—	+288
									6 ^u	—	+288
									7°	—	+128
									7 ^u	—	+128
									8°	—	+ 32
									8 ^u	—	+ 32
									9	—	0
	ΣP_i = - 640		$\Sigma P_i (l_i - \xi_i)$ = + 38 400								

* Diese Spalten sind von unten nach oben auszufüllen.

** Es ist: $N_4^u \cdot h^o = - 77 000 \text{ kgcm}$ (Obergurtpunkte zwischen 4^l und 0),
 $N_4^u \cdot h^u = - 34 400 \text{ ,,}$ (Untergurtpunkte zwischen 4^l und 0),
 $N_4^u \cdot h^m = - 55 700 \text{ ,,}$ (Punkt 0).

Tabelle 13.
Rechnerische Bestimmung der Stabkräfte zwischen 0 und 4ⁱ.

	Stabkraft	Stabkraftformeln	$B \cdot 10^{-2}$ [kgem]	Q [kg]	h bzw. r^* [cm]	S_0 [kg]
Obergurt	$O_{2,3}$	$O_{i-1,i} = -\frac{B_i^u}{h}$	+280	—	40	- 700
	$O_{1,2}$		+205	—	40	- 513
	$O_{0,1}$	$O_{0,1} = -\frac{B_1^u}{r_1^u}$	+194	—	35,8	- 543
Untergurt	$U_{3,4}$	$U_{3,4} = +\frac{B_3^o}{r_3^u}$	-146	—	35,2	- 415
	$U_{2,3}$	$U_{i-1,i} = +\frac{B_{i-1}^o}{h}$	-221	—	40	- 553
	$U_{1,2}$		-232	—	40	- 580
	$U_{0,1}$	$U_{0,1} = +\frac{B_1^o}{r_1^u}$	-232	—	35,8	- 648
Strebe	St	$St = -N_4^u \cos \omega - A^r \sin \omega$	—	—	—	+1210
Diagonalen	$D_{3,4}$	$D_{3,4} = \frac{Q_{3,4} - U_{3,4} \sin \chi}{\sin \psi}$	—	+163,7	—	+ 467
	$D_{2,3}$	$D_{i-1,i} = \frac{Q_{i-1,i}}{\sin \varphi}$	—	+ 93,7	—	+ 209
	$D_{1,2}$		—	+ 13,7	—	+ 30,6
Pfosten	$V_{3,3}$	$V_{3,3} = -D_{3,4} \sin \psi$	—	—	—	- 360
	$V_{2,2}$	$V_{2,2} = -D_{2,3} \sin \varphi$	—	—	—	- 94
	$V_{1,1}$	$V_{1,1} = -D_{1,2} \sin \varphi - O_{0,1} \sin \varepsilon$	—	—	—	+ 228

* Abb. 72.

Anmerkung: Würden auch Kräfte am Obergurt angreifen, so träte bei den Pfosten noch der Einfluß der jeweiligen Knotenlast hinzu.

Aufgabe 31: Flügel Fachwerk (System mit veränderlicher Gliederung).

Die Stabkräfte des in Abb. 73 dargestellten Einzelflügels eines verspannten Doppeldeckertragwerks mit Verbundscheibe (vgl. z. B. Aufg. 39) sind zunächst für die im folgenden angegebenen Belastungszustände *I* bzw. *II* und darauf für den durch Überlagerung dieser beiden Teilzustände gebildeten Gesamtbelastungszustand *I + II* zu ermitteln. Die (gekreuzten) Diagonalen seien aus Draht hergestellt und vorspannungsfrei (bzw. mit nur geringer Vorspannung, vgl. Aufg. 60) eingebaut. Da in solchen Diagonalen nur Zugkräfte wirksam sein können, fällt in jedem Feld diejenige Diagonale, die Druck erhalten würde, aus.

Zustand I: Von der Verbundscheibe und der Außenverspannung werden auf das Flügelfachwerk die Einzelkräfte

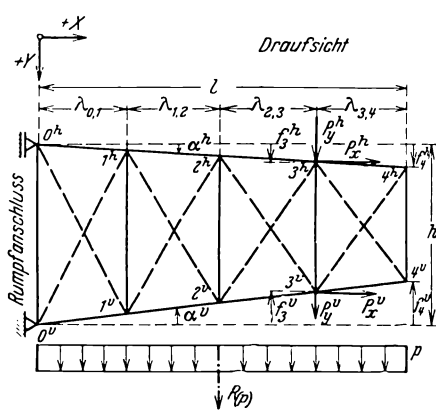


Abb. 73.

P_y^h, P_x^h, P_y^v und P_x^v ausgeübt.

Zustand II: Es wirkt in Form von Knotenlasten P_i ein gleichmäßig verteilter Stirndruck p , dessen Resultierende R_p ist.

p, P_x, P_y sind in Abb. 73 positiv eingetragen; der wirkliche Stirndruck wirkt im allgemeinen umgekehrt, also negativ. Die Größen $\alpha^h, \alpha^v, f^h, f^v$ werden im eingetragenen Richtungssinn positiv gemessen!

1. Allgemeine Berechnung der Querkräfte und Biegemomente.

Zustand I. Zwischen 0 und 3:

$$Q_{i,i+1} = P_y^h + P_y^v = \text{const.}$$

$$B_i^v = -(P_y^h + P_y^v) \cdot (l - \lambda_{3,4} - x_i) - P_x^h (h - f_3^h - f_i^v) - P_x^v (f_3^v - f_i^v)$$

$$= B_{i+1}^v - Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1} - P_x^h (h - f_3^h - f_i^v) - P_x^v (f_3^v - f_i^v),$$

$$B_i^h = -(P_y^h + P_y^v) \cdot (l - \lambda_{3,4} - x_i) + P_x^h (f_3^h - f_i^h) + P_x^v (h - f_3^v - f_i^h)$$

$$= B_{i+1}^h - Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1} + P_x^h (f_3^h - f_i^h) + P_x^v (h - f_3^v - f_i^h).$$

Zustand II. Zwischen 0 und 4:

$$Q_{i,i+1} = \sum_{j=i+1}^4 P_j,$$

$$B_i (= B_i^v = B_i^h) = B_{i+1} - Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1},$$

beginnend mit $B_4 = 0$.

Zahlenbeispiel.

$$f_i^h = f_i^v = 0, \quad \lambda = 83,5 \text{ cm}, \quad \sum \lambda = l = 334 \text{ cm}, \quad h = 60 \text{ cm}.$$

Zustand I.

$$P_y^h = -169 \text{ kg}, \quad P_x^h = 0,$$

$$P_y^v = +429 \text{ kg}, \quad P_x^v = 0.$$

Zustand II.

$$R_p = -350 \text{ kg},$$

$$P_0 = P_4 = -43,75 \text{ kg},$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = -87,5 \text{ kg}.$$

Tabelle 14. Zustand I.

Stelle	$P_y^h + P_y^v$ [kg]	Q [kg]	λ [cm]	$Q \cdot \lambda \cdot 10^{-3}$ [kgem]	$B^{h(v)}(P_y)$ $\cdot 10^{-3}$ [kgem]
4	0				0
		0	83,5	0	
3	+260				0
		+260	83,5	+21,71	
2	0				-21,71
		+260	83,5	+21,71	
1	0				-43,42
		+260	83,5	+21,71	
0	$-(A^h + A^v)$ = -260				-65,13

Tabelle 15. Zustand II.

Stelle	P_t [kg]	Q [kg]	λ [cm]	$Q \cdot \lambda \cdot 10^{-3}$ [kgem]	$B^{v(h)}$ $\cdot 10^{-3}$ [kgem]
4	-43,75				0
		-43,75	83,5	-3,65	
3	-87,5				+3,65
		-131,25	83,5	-10,97	
2	-87,5				+14,62
		-218,75	83,5	-18,28	
1	-87,5				+32,90
		-306,25	83,5	-25,58	
0	P_0 $-(A^h + A^v)$ = +306,25				+58,48

Die Querkraft ist bei

Zustand I durchweg positiv (Tabelle 14),
 „ II „ negativ (Tabelle 15).

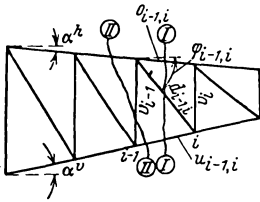


Abb. 74.

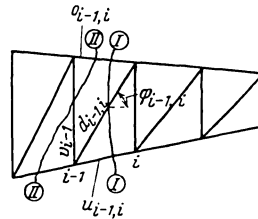


Abb. 75.

Daher sind maßgebend bei

Zustand I allein: die nach rechts fallenden Diagonalen (Abb. 74),
 „ II „ „ „ links fallenden Diagonalen (Abb. 75),
 da sie dann Zug erhalten (vgl. 2).

2. Allgemeine Berechnung der Stabkräfte infolge der Belastungszustände I bzw. II allein.

Zustand I allein:

Schnitt I ÷ I:

$$U_{i-1,i} = + \frac{B_{i-1}^h}{h_{i-1} \cdot \cos \alpha^v},$$

$$O_{i-1,i} = - \frac{B_i^v}{h_i \cdot \cos \alpha^h},$$

$$D_{i-1,i} = + \frac{Q_{i-1,i} + U_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^v - O_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^h}{\sin \varphi_{i-1,i}},$$

Schnitt II ÷ II:

$$V_{i-1} = - (Q_{i-1,i} + P_{i-1}^h) + O_{i-2,i-1} \cdot \sin \alpha^h - U_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^v.$$

Zustand II allein:

Schnitt I ÷ I:

$$\begin{aligned}
 U_{i-1,i} &= + \frac{B_i^h}{h_i \cdot \cos \alpha^v}, \\
 O_{i-1,i} &= - \frac{B_{i-1}^c}{h_{i-1} \cdot \cos \alpha^h}, \\
 D_{i-1,i} &= \frac{-Q_{i-1,i} - U_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^v + O_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^h}{\sin \varphi_{i-1,i}},
 \end{aligned}$$

Schnitt II ÷ II:

$$V_{i-1} = Q_{i-1,i} + P_{i-1}^v + U_{i-2,i-1} \cdot \sin \alpha^v - O_{i-1,i} \cdot \sin \alpha^h.$$

3. Allgemeine Berechnung der Stabkräfte für gleichzeitige Wirkung von Zustand I und II.

Wirkt Zustand I und II gleichzeitig, so ist die Querkraft in den Feldern 0, 1 und 3, 4 negativ, in den übrigen positiv. Der Berechnung wäre dann also das aus Abb. 76 ersichtliche System zugrunde zu legen.

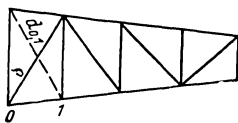


Abb. 76.

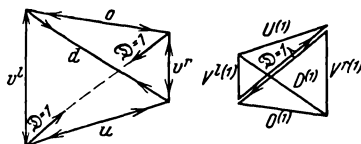


Abb. 77.

Bei diesem System müßten, ähnlich wie unter 2., Formeln für die Stabkräfte aufgestellt werden; sollen jedoch, z. B. zwischen Rumpf- und Stielanschluß, die oben hinsichtlich des Zustands I aufgestellten Formeln für nur nach rechts fallende Diagonalen angewandt werden (was bei schwierigeren Fällen u. U. zweckmäßig ist), so ist auch folgender Weg möglich (Ersatzstab-Verfahren):

Ergibt sich in einem einzelnen Feld (z. B. infolge Vorzeichenwechsels der Querkraft) eine negative Stabkraft (Druckkraft) in einem nur zur Aufnahme von Zug geeigneten Stab (z. B. in der Diagonale $d_{0,1}$ des vorliegenden Flügelfachwerks eine negative Kraft $D_{0,1}^{(0)}$), so können die Stabkräfte dieses Feldes ohne Wiederholung des ganzen Rechnungsgangs für die richtige Diagonalenrichtung, wie folgt, gefunden werden (Abb. 77).

In Richtung der in Wirklichkeit maßgebenden Diagonale δ wird eine zusätzliche Zugkraft \mathfrak{D} angebracht. Diese, zunächst gleich + 1 gesetzt, erzeugt in der Diagonale $d_{0,1}$ eine Zugkraft von der Größe $D_{0,1}^{(1)} = d_{0,1}/\delta$ (wegen $D^{(1)}/V^{(1)} = d/v'$ und $\mathfrak{D}/V^{(1)} = 1/V^{(1)} = \delta/v'$, Abb. 77). Da die Diagonale $d_{0,1}$ keine Druckkraft aufnehmen kann, muß \mathfrak{D} so groß sein, daß insgesamt $D_{0,1}^{(0)} + D_{0,1}^{(1)} \cdot \mathfrak{D} = 0$ wird.

Also muß sein

$$\mathfrak{D} = - \frac{D_{0,1}^{(0)}}{D_{0,1}^{(1)}} = - \frac{D_{0,1}^{(0)} \cdot \delta}{d_{0,1}}.$$

Infolge dieser (zusätzlich angebrachten) Diagonalkraft \mathfrak{D} in Richtung der tatsächlich wirksamen Diagonale verschwindet also die Kraft in $d_{0,1}$, so daß der wirkliche Beanspruchungszustand eintritt; dabei ergeben sich aber im Feld 0,1 noch zusätzliche Stabkräfte $\mathfrak{D} \cdot S^{(1)}$:

$$\mathfrak{D} \cdot D^{(1)} = + \frac{d}{b} \cdot \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D} \cdot O^{(1)} = - \frac{o}{b} \cdot \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D} \cdot U^{(1)} = - \frac{u}{b} \cdot \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D} \cdot V^r^{(1)} = - \frac{v^r}{b} \cdot \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{D} \cdot V^l^{(1)} = - \frac{v^l}{b} \cdot \mathfrak{D}.$$

Die wirklichen Stabkräfte im Feld 0,1 ergeben sich dann durch Überlagerung der hier berechneten zusätzlichen Stabkräfte $\mathfrak{D} \cdot S^{(1)}$ und der für die falsche Diagonalenrichtung errechneten Kräfte $S^{(0)}$:

$$S = S^{(0)} + \mathfrak{D} \cdot S^{(1)}.$$

Aufgabe 32: Vollwandiger Holm mit sehr dünnem Stegblech.

Der in Aufgabe 27 behandelte Holm sei statt als Fachwerk als Vollwandträger mit sehr dünnem, durch Pfosten ausgesteiftem Steg ausgebildet. Dieser Fall gehört streng genommen nicht mehr in das Gebiet der reinen Statik, sondern zur Festigkeitslehre, da eine Gliederung des Vollwandsystems in Einzelstäbe nicht von vornherein vorliegt; es muß vielmehr unter vereinfachenden Voraussetzungen eine solche Gliederung angenommen werden.

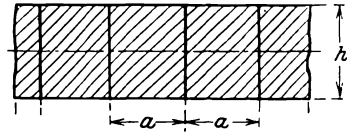


Abb. 78.

Um die Aufgabe nicht zu umfangreich zu gestalten, wird sie unter der weiteren Annahme durchgeführt, daß die Gurte innerhalb eines Bereichs von ungefähr 3facher Holmhöhe als waagrecht angesehen werden können. Zur eingehenderen Behandlung vgl. H. Wagner¹⁸, desgl. auch H. Rode¹⁹.

1. Die Diagonalstäbe.

Ist das Stegblech so dünn, daß es überhaupt keine Druckspannungen aufnehmen kann, so treten darin bei Belastung des Holms Falten auf, die im allgemeinen unter einem Winkel von ungefähr $\alpha = 40^\circ$ gegen die Waagrechte in dem Sinne geneigt sind, wie die Diagonalen eines Fachwerks geneigt sein müßten, um Zug zu erhalten. Längs einer solchen Falte herrscht im Blech konstante Zugspannung (Abb. 78).

Dementsprechend wird das Stegblech durch eine Schar von beispielsweise 1 cm breiten, unter $\alpha = 40^\circ$ gegen die Waagerechte geneigten stetig aufeinander folgenden „Diagonalstäben“ ersetzt gedacht. Zunächst wird nun angenommen, die Querkraft Q sei wenigstens innerhalb des betrachteten Bereichs konstant und die Gurte seien biegungsstarr. Dann erhalten alle „Diagonalstäbe“ dieselbe Kraft D . Ferner wird vorausgesetzt, die ganze Querkraft werde vom Stegblech übertragen.

Ein lotrecht durch den Holm gelegter Schnitt trifft $h \cdot \cos \alpha$ Diagonalstäbe; denn ein 1 cm breiter Diagonalstab schneidet auf dem Schnitt eine Strecke von $1/\cos \alpha$ cm Länge ab. Dann folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Y = 0$ (Abb. 79):

$$+(h \cdot \cos \alpha) \cdot (D \cdot \sin \alpha) + Q = 0,$$

$$D = \frac{-Q}{h \cos \alpha \sin \alpha} \text{ [kg/cm]}.$$

(Wenn die Blechdicke b cm beträgt, ist also die Blechspannung in Richtung der Zugfalten:

$$\sigma = \frac{D}{b} = \frac{-Q}{h b \cos \alpha \sin \alpha} \text{ [kg/cm}^2\text{]}.$$

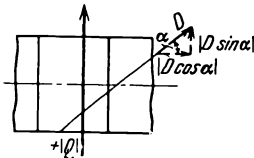


Abb. 79.

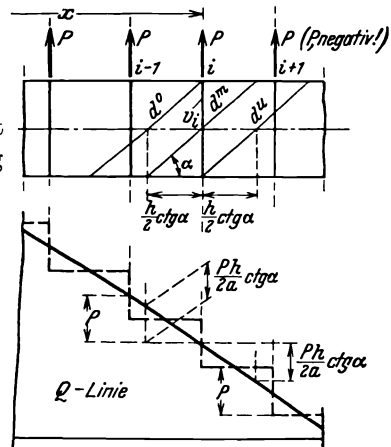


Abb. 80.

Im vorliegenden Fall ist Q negativ, σ wird also eine Zugspannung.)

Die Querkraftlinie ist nun in Wirklichkeit nicht konstant; wird die Belastung in Knotenlasten (Abb. 80)

$$P_i = a \cdot p$$

aufgeteilt, so ist die Querkraftlinie treppenförmig. Diese Querkraftlinie wird durch einen Geradenzug ersetzt, der jeweils durch die Mitte der Treppenabsätze hindurchgeht; denn durch die biegungsstarr angenommenen Gurte wird die Querkraft etwa in dieser Weise auf den Steg verteilt. Dann sind die Kräfte D der einzelnen Diagonalstäbe verschieden groß; es kann angenommen werden, daß die Kräfte D längs eines lotrechten Schnittes geradlinig ab- bzw. zunehmen. Die Bedingung $\Sigma Y = 0$ liefert dann für einen Schnitt an der Stelle „ x “ im Mittel:

$$D = \frac{-Q_x}{h \cos \alpha \sin \alpha}.$$

Da die Kraft desjenigen Diagonalstabes, der bei „ x “ durch die Mitte der Schnittlinie hindurchgeht, gleich diesem Mittelwerte ist (vgl. Abb. 83), so folgt z. B. für den Diagonalstab, der den Mittelpunkt des Pfostens v_i trifft:

$$D_i^m = \frac{-Q_i}{h \cos \alpha \sin \alpha}.$$

Diejenigen Diagonalstäbe, die den Pfosten v_i am oberen bzw. unteren Endpunkt treffen, schneiden die Holmmittellinie im Abstand $\frac{h}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ links bzw. rechts von v_i . Bei annähernd gleichen Knotenlasten P_i ergeben sich die Querkräfte an diesen Stellen aus dem angesetzten Geradenzug Q_x zu

$$Q \left(\text{an der Stelle } x_i \mp \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \alpha \right) \sim Q_i \pm \frac{P_i \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \alpha}{a}.$$

Demnach werden die Kräfte D_i^o bzw. D_i^u

$$D_i^o \sim \frac{- \left(Q_i \pm \frac{P_i h \operatorname{ctg} \alpha}{2a} \right)}{h \cos \alpha \sin \alpha} = D_i^m \mp \frac{P_i}{2a \sin^2 \alpha}.$$

2. Die Pfosten.

Es wird angenommen, daß zwei nebeneinander liegende Gurtfelder die lotrechten Komponenten der auf sie wirkenden Kräfte je zur Hälfte auf den gemeinsamen Pfosten abgeben. D_i^u ist gleich dem Mittelwert der am Untergurt zwischen $i - 1$ und $i + 1$ angreifenden Diagonalkräfte. Da im Feld von der Länge a insgesamt $a \cdot \sin \alpha$ Diagonalstäbe und keine äußeren Lasten angreifen, folgt aus der Bedingung $\Sigma Y = 0$ am Untergurtnoten i (Abb. 81):

$$-2 \cdot \left(\frac{1}{2} a \sin \alpha \right) \cdot (D_i^u \sin \alpha) - V_i = 0,$$

$$V_i = - \left(\frac{1}{2} P_i - Q_i \frac{a}{h} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

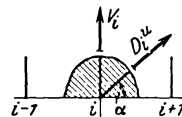


Abb. 81.

3. Die Gurte.

Die Gurtfelder werden zur Abschätzung ihrer Biegemomente als Balken von der Feldweite a betrachtet, die über den Pfosten starr eingespannt sind. Ist die laufende Belastung eines solchen Balkens q kg/cm, so liefert die Lehre der statisch unbestimmten Systeme an der Einspannstelle, also über den Pfosten, das größte Biegemoment $B = -\frac{q a^2}{12}$. Wird zur Vereinfachung reine Knotenpunktsbelastung angenommen, was praktisch im allgemeinen zulässig ist, so besteht die laufende Querbelastung q^o bzw. q^u der Gurte aus den lotrechten Komponenten der „Diagonalstab“-Kräfte.

Im Feld von der Spannweite a greifen an einem Gurt insgesamt $a \cdot \sin \alpha$ Diagonalstäbe an, da ein 1 cm breiter Diagonalstab darauf eine Strecke von $1/\sin \alpha$ cm Länge abschneidet. Somit ist im Mittel für die beiden Felder $i - 1, i$ und $i, i + 1$

$$\begin{aligned} p^u &= \pm (a \sin \alpha) \cdot (D_i^0 \sin \alpha) \cdot \frac{1}{a} \\ &= -\frac{P_i}{2a} \mp \frac{Q_i}{h} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Dann wird das Gurtbiegemoment des Ober- bzw. Untergurts über dem Pfosten v_i :

$$B_i^0 = +\frac{a}{24} \left(P_i \pm 2 Q_i \frac{a}{h} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

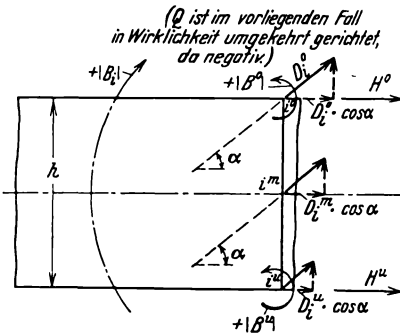


Abb. 82.

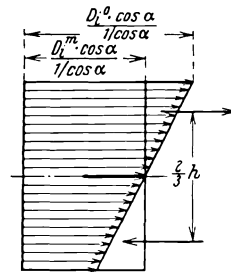


Abb. 83.

Zur Berechnung der Gurtkräfte wird rechts neben dem Pfosten v_i ein Schnitt durch den Holm gelegt. Die waagerechten Komponenten der vom Schnitt getroffenen Diagonalstabkräfte sind (Abb. 82):

$$D_i^0 \cos \alpha = - \left(\pm \frac{P_i}{2a \sin^2 \alpha} + \frac{Q_i}{h \cos \alpha \sin \alpha} \right) \cos \alpha,$$

$$D_i^m \cos \alpha = - \frac{Q_i}{h \cos \alpha \sin \alpha} \cos \alpha.$$

Da weiterhin ein einzelner 1 cm breiter Diagonalstab auf der Schnittlinie eine Strecke von der Länge $1/\cos \alpha$ cm abschneidet, entspricht dies einer längs der Schnittlinie geradlinig verteilten waagerechten Belastung nach Abb. 83. Die Bedingung $\Sigma M = 0$ bezüglich des Unter- bzw. Obergurtschnittpunkts liefert dann:

$$\pm H_i^0 \cdot h \mp B_i \pm \frac{D_i^m \cos \alpha}{1/\cos \alpha} \cdot \frac{h^2}{2} \pm \left(\frac{D_i^0 \cos \alpha}{1/\cos \alpha} - \frac{D_i^m \cos \alpha}{1/\cos \alpha} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} h - (B_i^0 + B_i^u) = 0.$$

Also:

$$H_i^0 = \mp \frac{B_i + Q_i \operatorname{ctg} \alpha}{h} \pm \frac{P_i}{12} \left(\frac{h}{a} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{a}{h} \right).$$

§ 9. Senkrecht zu ihrer Ebene beanspruchte ebene Stabzüge.

Allgemeines.

Für die angegebenen Belastungszustände sind die Auflager- und Querkräfte A und Q , sowie die Biege- und Drillmomente B und D zu ermitteln.

Durch Lager-, Knoten- und Eckpunkte werden die Stabzüge (Rahmen) in Einzelstäbe (Balken) aufgeteilt; in den steifen Ecken sind diese gegeneinander biege- und drillfest eingespannt. Aus Anschaulichkeitsgründen ist auch bei den Aufgaben dieses Paragraphen auf die Einführung eines eigenen Koordinatensystems für jeden Einzelstab (Balken) verzichtet; die angegebenen Formeln für A , Q , B und D gelten daher wiederum nur für die in den Aufgaben eingetragenen Richtungen der äußeren Kräfte und Momente; d. h. diese Größen P und M sind vorzeichenfrei eingeführt.

Die in diesem Paragraphen behandelten Systeme sind je in drei Punkten gelagert; davon ist ein Lager fest (3 Fesseln), die beiden anderen sind beweglich. Bei allgemeiner Belastung darf eines der beiden letzteren nur in einer Richtung (2 Fesseln), das andere dagegen in zwei Richtungen (1 Fessel) beweglich sein.

Systeme der in diesem Paragraphen behandelten Art kommen beispielsweise vor bei der Berechnung von Holmrippenrosten, räumlich beanspruchten Fahrgestellrahmen, Rumpfspanten usw.

Vorzeichenregeln: Lagerreaktionen positiv, wenn von unten nach oben wirkend; Biegemomente positiv, wenn sie in den oberen Fasern Druck erzeugen. Für Querkraft und Drillmoment eines Stabes $i, i+1$ an irgend einer Stelle „ m “ gilt: Wird der Stab in m durch einen gedachten Schnitt zertrennt, so ist die Querkraft positiv, wenn die Summe aller äußeren Kräfte einschließlich Auflagerkraft an demjenigen Stabteil nach unten wirkt, der die höhere Ziffer $i+1$ trägt; das Drillmoment ist positiv, wenn am höher bezifferten Stabteil $i+1$ der Vektor des resultierenden äußeren verdrillenden Moments im Sinne der Bezifferung $i, i+1$ gerichtet ist (vgl. S. 30)*.

Aufgabe 33 bis 35: Dreifach gestützte Stabzüge.

Aufgabe 33.

Im Punkt 2 des in Abb. 84 dargestellten Rahmens wirkt ein verdrillendes Moment M .

Die dadurch hervorgerufenen Auflagerkräfte, Querkräfte und Biegemomente sind aus der Abbildung ersichtlich (Drillmomente treten nicht auf).

* Um Irrtümer bei der Aufstellung der Formeln für A , Q , B und D zu vermeiden, sind in den Abbildungen zunächst alle Auflagerreaktionen in positivem Richtungssinn eingetragen. Die wirklichen Richtungen, die sich aus den Formeln ergeben, sind hier nicht besonders wiedergegeben.

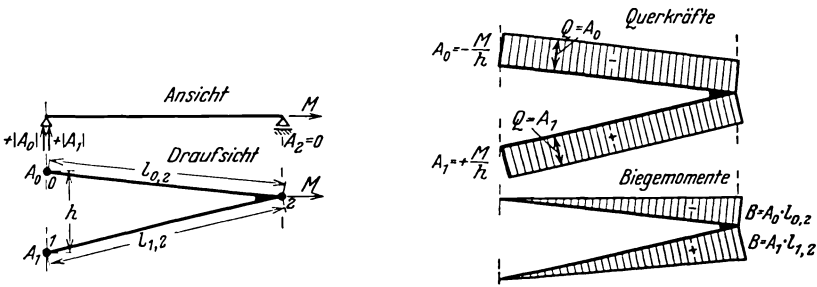


Abb. 84.

Aufgabe 34 (Abb. 85).

Zustand I: Im Punkt 4 wirkt eine Einzellast P_4 senkrecht zur XY -Ebene nach unten.

Zustand II: Längs des Stabzugs 0, 2, 3, 5 wirkt eine gleichmäßig verteilte Belastung p senkrecht zur XY -Ebene nach unten.

Zustand I. | Zustand II.

$$1. \sum M_{1,2} = 0:$$

$$A_0 = -P_4 \frac{x_4 - x_2}{x_2 - x_0}, \quad \left| \quad A_0 = p \frac{x_2 - x_0}{2} - p l_{2,5} \frac{x_5 - x_2}{2(x_2 - x_0)}, \right.$$

$$2. \sum M_{0,2} = 0:$$

$$A_1 = P_4 \frac{y_4 - y_2}{y_1 - y_2}, \quad \left| \quad A_1 = p l_{2,5} \frac{y_5 - y_2}{2(y_1 - y_2)}, \right.$$

$$3. \sum V = 0:$$

$$A_2 = P_4 - A_0 - A_1. \quad \left| \quad A_2 = p(x_2 - x_0 + l_{2,5}) - A_0 - A_1. \right.$$

Kontrolle: z. B. durch $\sum M_{3,4} = 0$.

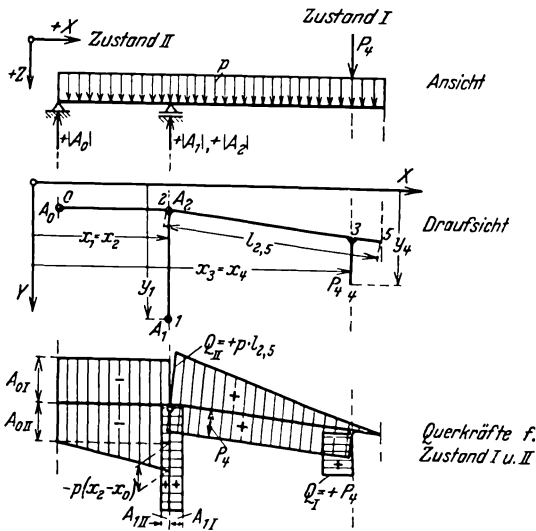


Abb. 85 a.

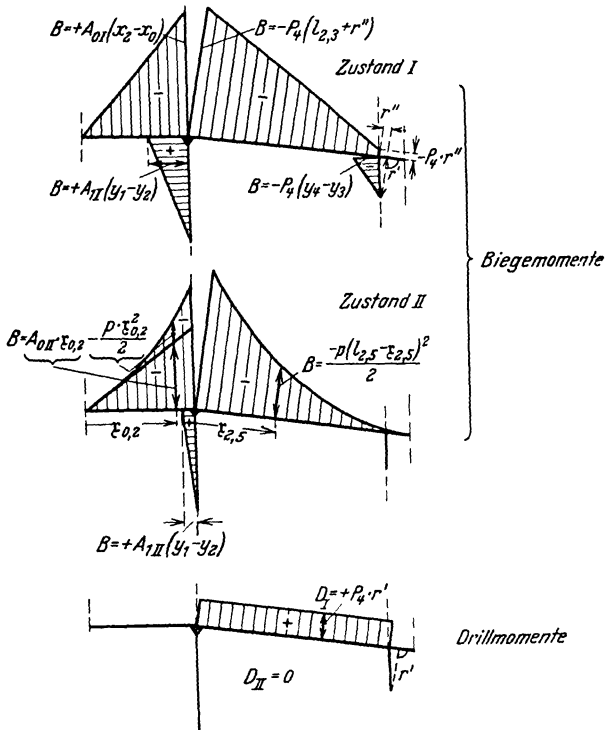


Abb. 85 b.

Aufgabe 35.

Im Punkt 4 des in Abb. 86 dargestellten krummlinigen Rahmens wirkt eine lotrechte Einzellast P_4 .

Auflagerkräfte:

$$A_0 = -P_4 \cdot \frac{r'_4}{r'_0},$$

$$A_1 = P_4 \cdot \frac{r''_4}{r'_1},$$

$$A_6 = P_4 \cdot \frac{r'_4}{r'_6}.$$

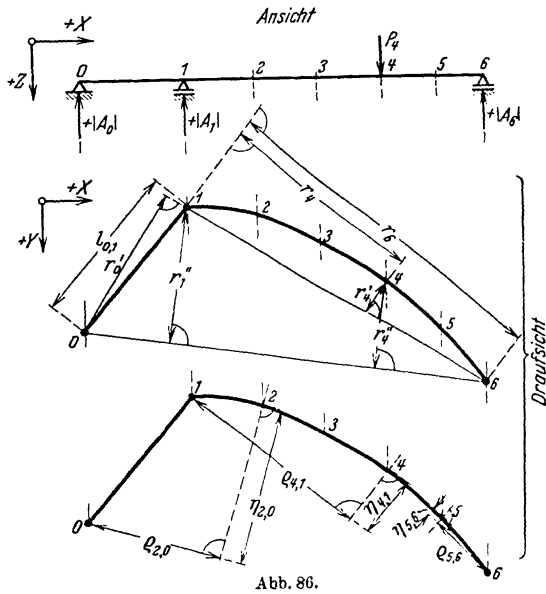


Abb. 86.

Querkräfte, Biege- und Drillmomente (s. Tabelle 16).

Tabelle 16. Berechnung von Q , B und D .

Stab	Stelle	Q [kg]	B [kgcm]	D [kgcm]
0 ÷ 1	0	A_0	0	0
	1'		$A_0 \cdot l_{0,1}$	
1 ÷ 6	1''	$A_0 + A_1$	$A_0 \cdot \varrho_{1,0}$	$A_0 \cdot \eta_{1,0}$
	2		$A_0 \cdot \varrho_{2,0} + A_1 \cdot \varrho_{2,1}$	$A_0 \cdot \eta_{2,0} + A_1 \cdot \eta_{2,1}$
	3		$A_0 \cdot \varrho_{3,0} + A_1 \cdot \varrho_{3,1}$	$A_0 \cdot \eta_{3,0} + A_1 \cdot \eta_{3,1}$
	4'		$A_0 \cdot \varrho_{4,0} + A_1 \cdot \varrho_{4,1}$	$A_0 \cdot \eta_{4,0} + A_1 \cdot \eta_{4,1}$
	4''	$-A_6$	$A_6 \cdot \varrho_{5,6}$	$-A_6 \cdot \eta_{5,6}$
	5			
	6			

§ 10. Räumlich gestützte Systeme.

Allgemeines.

Es wird eine Aufgabe behandelt, welche die Kräfteermittlung in den Verbindungsstäben zweier für sich als starre Körper betrachteter Systeme zeigt. Zur Berechnung einer beliebigen Stabkraft, die stets dann als positiv bezeichnet wird, wenn sie eine Zugkraft ist, wird das Stabwerk durch einen gedachten Schnitt zertrennt, der durch den betreffenden Stab hindurchgeht.

Aus der Bedingung, daß jeder der abgeschnittenen Teile für sich allein im Gleichgewicht stehen muß, werden die Kräfte in den vom Schnitt getroffenen Stäben gefunden.

Aufgaben dieser Art treten überall da auf, wo ein räumliches System zur einfacheren Behandlung in einzelne Teile zerlegt wird, die für sich betrachtet werden: z. B. Motoreinbau, Flügel- und Schwimmerstützung, ferner Anschluß des Rumpfes am Rumpfmittelstück usw.

Aufgabe 36: Motoreinbau.

Die Stabkräfte in den Einbaustäben eines Flugmotors (Aufbau des durch drei Projektionen gegebenen symmetrischen Systems entsprechend Abb. 87) sind für die angegebenen Belastungen zu ermitteln.

I. Belastungszustände.

1. Zustände symmetrischer Beanspruchung.

In der XZ -Ebene (Symmetrieebene) wirken:

- | | |
|---|--|
| a) eine Kraft P_x in Richtung der X -Achse, | } angreifend im Punkt
(x, z) der Symmetrie-
ebene des Systems. |
| b) „ „ P_z „ „ „ „ Z -Achse, | |
| c) ein Moment M_y „ „ der Symmetrieebene, | |

2. Zustände antisymmetrischer Beanspruchung.

Es wirken:

- d) eine Kraft P_y in Richtung der Y -Achse, angreifend im Punkt (x, z) der Symmetrieebene,
- e) ein Moment M_x in der YZ -Ebene,
- f) ein Moment M_z in der XY -Ebene.

Auf diese 6 Belastungszustände läßt sich jede beliebige Belastung (Luftschaubenschub, Schwer- und Trägheitskräfte, Motordreh- und Luftschaublenkmomente u. a.) des Systems zurückführen. Die Aufgabe ist unter der Voraussetzung zu lösen, daß das Gehäuse des Motors ausreichend bemessen ist, um die Stabkräfte aufnehmen zu können.

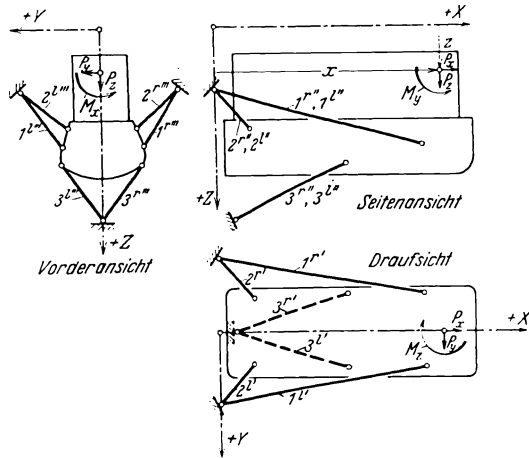


Abb. 87.

II. Gang der Berechnung.

Zu 1. Bei symmetrischer Belastung des symmetrischen Systems sind die Kräfte in symmetrisch liegenden Stäben n^r und n^l einander gleich; die Resultierende S_n^r je zweier symmetrischer Kräfte liegt in der Symmetrieebene des Systems und wird aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Die Stabkräfte S_n^r und S_n^l werden aus ihrer Projektion auf die Symmetrieebene: $S_n^{r''} = S_n^{l''} = \frac{1}{2} S_n^r$, und aus dem Verhältnis der wahren Stablängen zu den Längen ihrer Projektionen auf die Symmetrieebene ermittelt. (Die Stabkräfte und ihre Projektionen auf eine beliebige Ebene verhalten sich zueinander wie die Stablängen und ihre Projektionen auf dieselbe Ebene.)

Zu 2. Aus den Gleichgewichtsbedingungen werden die Projektionen der Stabkräfte auf die YZ - bzw. XY -Ebene ermittelt; in den Momentengleichungen gilt dabei aus Symmetriegründen die Beziehung $S_n^r = -S_n^l$. Aus den Projektionen der Stabkräfte und Stablängen werden die wahren Kräfte wie unter 1. ermittelt.

III. Durchführung der Berechnung.

Zu 1. Zustände symmetrischer Belastung.

- Belastungsfall a: Es wirkt allein P_x ;
 „ b: „ „ „ P_z ;
 „ c: „ „ „ M_y .

Es bezeichnet:

$S_n^{r,l}$ die Resultierende aus S_n^r und S_n^l ,
 m, n den Schnittpunkt der Angriffsgeraden von $S_m^{r,l}$ und $S_n^{r,l}$ (Koordinaten $x_{m,n}$, $z_{m,n}$).

Tabelle 17. Momentengleichungen in der XZ-Ebene (Abb. 88).

	Belastungsfall			
	a	b	c	
$+ S_1^{r,l} \cdot a_1 =$	$+ P_x (z_{2,3} - z)$	$+ P_z (x - x_{2,3})$	$- M_y$	$\equiv \Sigma (M \text{ um } 2, 3) = 0$
$- S_2^{r,l} \cdot a_2 =$	$+ P_x (z_{1,3} - z)$	$+ P_z (x - x_{1,3})$	$- M_y$	$\equiv \Sigma (M \text{ ,, } 1, 3) = 0$
$- S_3^{r,l} \cdot a_3 =$	$+ P_x (z_{1,2} - z)$	$+ P_z \cdot x$	$- M_y$	$\equiv \Sigma (M \text{ ,, } 1, 2) = 0$

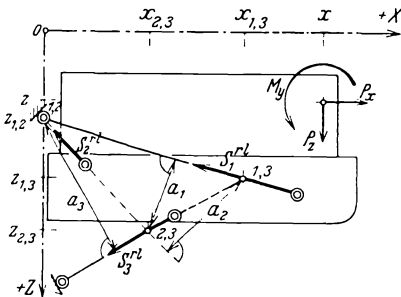


Abb. 88.

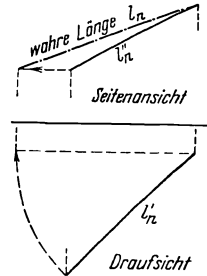


Abb. 89.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen in Tabelle 17 erhält man $S_n^{r,l}$ nach Division durch a_n ; ergibt sich für eine Kraft ein negativer Wert, so wirkt die Kraft als Druckkraft entgegengesetzt der in die Skizze eingezeichneten Zugrichtung.

Bedeutet S_n'' bzw. l_n'' die Größe der Seitenansicht einer Kraft bzw. Stablänge, so ist:

$$S_n^r = S_n^l = S_n'' \cdot \frac{l_n}{l_n''} = \frac{S_n^{r,l}}{2} \cdot \frac{l_n}{l_n''}.$$

Das Verhältnis $\frac{l_n}{l_n''}$ ergibt sich aus Abb. 89. Bedeuten l_{nx} , l_{ny} , l_{nz} die X-, Y-, Z-Komponenten von l_n (vgl. Abb. 87), so ergibt sich rechnerisch

$$\frac{l_n}{l_n''} = \sqrt{\frac{l_{nx}^2 + l_{ny}^2 + l_{nz}^2}{l_{nx}^2 + l_{nz}^2}}.$$

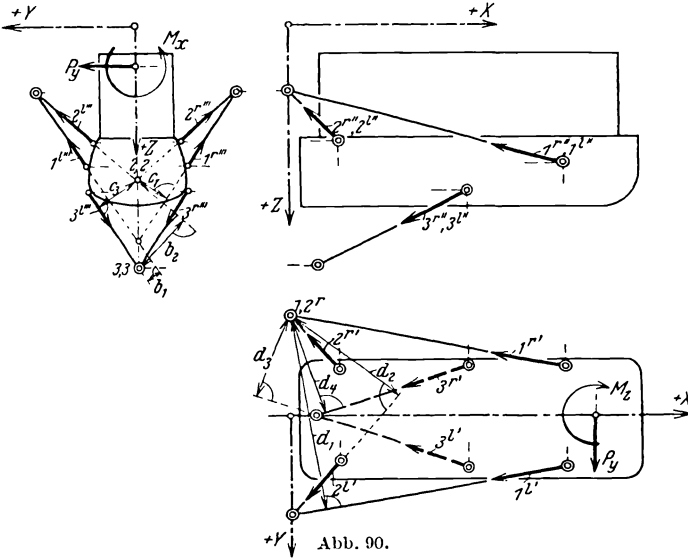
Zu 2. Zustände antisymmetrischer Belastung.

Belastungsfall d: Es wirkt allein P_y ;
 „ e: „ „ „ M_x ;
 „ f: „ „ „ M_z .

Es bezeichnet S'_n, S''_n, S'''_n bzw. l'_n, l''_n, l'''_n die Größe einer Stabkraft bzw. einer Stablänge in der Draufsicht, Seiten- und Vorderansicht.

Tabelle 18. Gleichgewichtsbedingungen, Momentengleichungen in der YZ-, bzw. XY-Ebene (Abb. 90).

In Ebene		Belastungsfall			
		d	e	f	
YZ	$+S_1'''' b_1 - S_1'''' b_1 + S_2'''' b_2 - S_3'''' b_2 =$	$+P_y(z_{3,3} - z)$	$+M_x$	0	$\equiv \Sigma M \text{ um } 3,3 = 0$
YZ	$-S_1'''' c_1 + S_1'''' c_1 + S_3'''' c_3 - S_3'''' c_3 =$	$+P_y(z_{2,2} - z)$	$+M_x$	0	$\equiv \Sigma M \text{ ,, } 2,2 = 0$
XY	$-S_1' d_1 - S_3' d_2 - S_3' d_3 - S_3' d_4 =$	$+P_y \cdot x$	0	$+M_z$	$\equiv \Sigma M \text{ ,, } (1,2)^r = 0$



Mit $S'_n = S''_n \cdot \frac{l'_n}{l''_n}$ und $S^l_n = -S^r_n$ (wegen Antisymmetrie) lauten die in Tabelle 18 aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen:

	Belastungsfall		
	d	e	f
$+ 2 b_1 S_1'''' + 2 b_2 S_2''''$	$= +P_y(z_{3,3} - z)$	$+M_x$	0
$- 2 c_1 S_1'''' + 2 c_3 S_3''''$	$= +P_y(z_{2,2} - z)$	$+M_x$	0
$+ S_1'''' \frac{l'_1}{l''_1} d_1 + S_2'''' \frac{l'_2}{l''_2} d_2 + S_3'''' \frac{l'_3}{l''_3} d_3 - S_3'''' \frac{l'_3}{l''_3} d_4 =$	$+P_y \cdot x$	0	$+M_z$

Aus diesen 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten werden die Größen der Stabkraftprojektionen S_n''' berechnet. Dann sind die wirklichen Stabkräfte:

$$S_n^r = -S_n^l = S_n''' \cdot \frac{l_n}{l_n'''}.$$

(Wahre Stablängen l_n s. unter 1.)

§ 11. Raumfachwerke*.

Allgemeines.

In den folgenden Aufgaben sind die Stabkräfte (Längskräfte) in den einzelnen Stäben räumlicher Gelenkfachwerke zu ermitteln. Zur Berechnung einer beliebigen Stabkraft, die stets dann als positiv bezeichnet wird, wenn sie eine Zugkraft ist, wird das Fachwerk durch einen gedachten Schnitt zertrennt, der durch den betreffenden Stab hindurchgeht. Der Schnitt wird entweder so geführt, daß jeder der abgetrennten Teile ein Auflager enthält, oder so, daß eine freie Gruppe von Stäben bzw. nur ein Knotenpunkt für sich abgetrennt wird.

Aus der Bedingung, daß jeder der abgeschnittenen Teile für sich allein im Gleichgewicht stehen muß, werden die Kräfte in den vom Schnitt getroffenen Stäben gefunden.

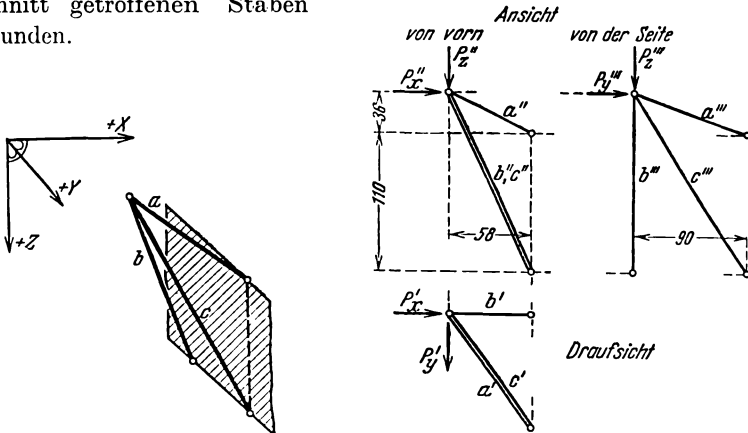


Abb. 91.

Aufgabe 37: Baldachinbock.

Die Stabkräfte des in Abb. 91 dargestellten Baldachinbocks sind zeichnerisch zu ermitteln (Abb. 92).

* Weitere Beispiele zur Berechnung statisch bestimmter Raumfachwerke sind in den Aufgaben 76 bis 82 enthalten.

Wenn s die wahre Länge eines Stabes und s' , s'' , s''' die Längen seiner Projektionen sind, so sind die wahren Stabkräfte (vgl. Aufgabe 36)

$$S = S' \frac{s}{s'} = S'' \frac{s}{s''} = S''' \frac{s}{s'''}$$

Damit ergeben sich die in Tabelle 19 zusammengestellten Einheitsstabkräfte.

Bei Belastung mit irgendeiner Einzellast P (mit den Komponenten P_x, P_y, P_z) am gemeinsamen Knoten der Stäbe a, b, c sind die resultierenden Stabkräfte:

Tabelle 19. Einheitsstabkräfte.

Zustand	$P_x = 1$	$P_y = 1$	$P_z = 1$
S_a	-2,58	0	+1,02
S_b	-2,71	+1,75	0
S_c	+4,13	-2,01	-1,64

$$S_a = -2,58 P_x + 1,02 P_z,$$

$$S_b = -2,71 P_x + 1,75 P_y,$$

$$S_c = +4,13 P_x - 2,01 P_y - 1,64 P_z.$$

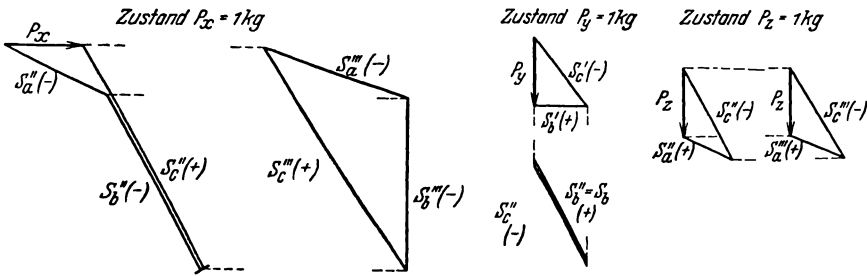


Abb. 92.

Aufgabe 38: Fahrgestell.

Für die in Abb. 93 dargestellte räumliche Stabverbindung, wie sie beispielsweise bei einem Fahrgestell vorliegt, sind die Stabkräfte infolge der eingetragenen Belastung zu ermitteln.

Das Fahrgestell ist am Rumpf (schraffiert) als gelagert anzusehen; den räumlich angreifenden Kräften P_1, P_2 und V_1 wird durch entsprechende Massenkräfte im Rumpf Gleichgewicht gehalten. Die Belastung wird in Einzelzustände zerlegt.

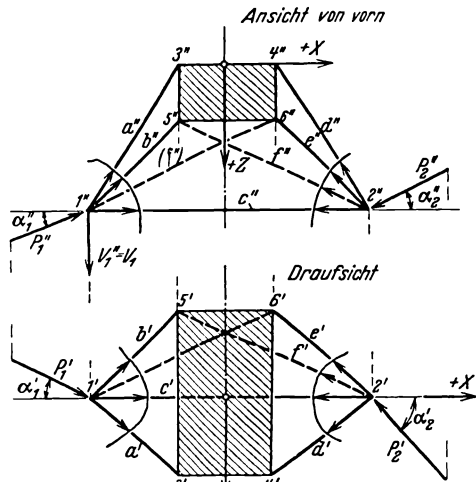


Abb. 93.

Die in Abb. 93 eingetragenen Pfeile entsprechen der zunächst vorzunehmenden Einführung der Stabkräfte als Zugkräfte. Ergibt sich also für eine Stabkraft negatives Vorzeichen, so ist sie eine Druckkraft.

Der Stab (j) bleibt außer Beachtung, da die Diagonalen als Seile ausgebildet sein sollen, und somit nur f oder nur (j) wirksam sein kann, falls die Seile nicht vorgespannt sind (vgl. Aufgabe 60). Sollte sich für f jedoch Druck ergeben, so wäre in Wirklichkeit (j) maßgebend. Die Rechnung wäre dann neu durchzuführen bzw. zu verbessern (vgl. Aufgabe 31).

Die Berechnung der Stabkräfte erfolgt aus der Bedingung, daß an den abgetrennt gedachten Knoten 1 und 2 je die Summe aller angreifenden Kraftkomponenten in den Richtungen X, Y, Z verschwinden muß, z. B. bei 1:

$$\begin{aligned} S_{a,x} + S_{b,x} + S_{c,x} + P_{1,x} + V_{1,x} &= 0, \\ S_{a,y} + S_{b,y} + S_{c,y} + P_{1,y} + V_{1,y} &= 0, \\ S_{a,z} + S_{b,z} + S_{c,z} + P_{1,z} + V_{1,z} &= 0. \end{aligned}$$

Darin bedeuten z. B.:

$S_{i,x}$ [kg] die X -Komponenten der von den Stäben a, b, c auf den Knoten 1 ausgeübten Kräfte. (Die Komponenten $S_{i,x}$ werden im folgenden als positiv bezeichnet, wenn sie im Sinne der $+X$ -Achse auf den Knoten wirken.)

$P_{1,x}, V_{1,x}$ [kg] die X -Komponenten der am Knoten 1 angreifenden äußeren Kräfte P_1 und V_1 (Vorzeichen entspr. $S_{i,x}$).

Da die Komponente einer in Richtung eines Stabes (im positiven Sinne) angebrachten Kraft sich zum wahren Betrag dieser Kraft verhält wie die entsprechende Stablängenkomponeute zur Stablänge, z. B.:

$$\frac{S_{a,x}}{S_a} = \frac{a_x}{a} = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}} \text{ usw.},$$

so kann für die Gleichgewichtsbedingungen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} S_a \frac{a_x}{a} + S_b \frac{b_x}{b} + S_c \frac{c_x}{c} + P_{1,x} + V_{1,x} &= 0, \\ S_a \frac{a_y}{a} + S_b \frac{b_y}{b} + S_c \frac{c_y}{c} + P_{1,y} + V_{1,y} &= 0, \\ S_a \frac{a_z}{a} + S_b \frac{b_z}{b} + S_c \frac{c_z}{c} + P_{1,z} + V_{1,z} &= 0. \end{aligned}$$

In die Gleichgewichtsbedingungen am Knoten 2 gehen in entsprechender Weise die Stabkräfte S_c, S_d, S_e, S_f ein; S_c ist dabei bereits vom Knoten 1 her bekannt. Die Bei- und Lastwerte der Gleichgewichtsbedingungen sind in Tabelle 20 angeschrieben.

Tabelle 20. Bei- und Lastwerte der Gleichgewichtsbedingungen.

Knoten	Beiwerte von						Lastwerte für Beanspruchung durch		
	S_a	S_b	S_c	S_d	S_e	S_f	P_1	P_2	V_1
1	$\frac{x_3 - x_1}{a}$	$\frac{x_5 - x_1}{b}$	$\frac{x_2 - x_1}{c}$				$+P_1'' \cos \alpha_1''$	—	—
	$\frac{y_3 - 0}{a}$	$\frac{y_5 - 0}{b}$	—				$+P_1' \sin \alpha_1'$	—	—
	$\frac{0 - z_1}{a}$	$\frac{z_5 - z_1}{b}$	—				$-P_1'' \sin \alpha_1''$	—	$+V_1$
2			$\frac{x_1 - x_2}{c}$	$\frac{x_4 - x_2}{d}$	$\frac{x_6 - x_2}{e}$	$\frac{x_5 - x_2}{f}$	—	$-P_2'' \cos \alpha_2''$	—
			—	$\frac{y_4 - 0}{d}$	$\frac{y_6 - 0}{e}$	$\frac{y_5 - 0}{f}$	—	$-P_2' \sin \alpha_2'$	—
			—	$\frac{0 - z_2}{d}$	$\frac{z_6 - z_2}{e}$	$\frac{z_5 - z_2}{f}$	—	$+P_2'' \sin \alpha_2''$	—

Bemerkungen: Die hier vorgenommene Einführung der Stablängenkomponenten entspricht dem Richtungssinn der in Abb. 93 eingetragenen Zugkräfte. An erster Stelle steht die Komponente des Stabendpunkts, auf den die Pfeilrichtung weist; daher z. B. bei Knoten 1: $c_x = x_2 - x_1$, jedoch bei Knoten 2: $c_x = x_1 - x_2$.

Bei der vorgenommenen Lage des Koordinatensystems haben die Koordinaten x_1, x_3, x_5, y_5, y_6 negative Zahlenwerte. Die Winkel α sowie die Kräfte P und V sind als vorzeichenfreie Größen behandelt (nicht aber die Komponenten dieser Kräfte).

Ist eine größere Anzahl von Belastungszuständen zu untersuchen, so werden zweckmäßig zunächst die „Einheits“stabkräfte für passend gewählte Einheitsbelastungen bestimmt und die für irgendeinen Belastungsfall sich ergebenden Stabkräfte durch Überlagerung berechnet.

Aufgabe 39: Doppeldeckertragwerk.

Für das in Abb. 94 dargestellte statisch bestimmte Doppeldeckertragwerk sind zu ermitteln:

a) Die Kräfte D_1, D_2, D_3 in den Stäben der N -Scheibe und die Kraft T im Haupttragseil.

b) Die von der N -Scheibe und dem Haupttragseil auf die Einzelflügel-Fachwerke in Richtung der X - und Y -Achse ausgeübten Aktionskräfte \bar{P}_x und \bar{P}_y , so daß weiterhin die Stabkräfte in den Flügel-fachwerken ähnlich wie in Aufgabe 31* für sich ermittelt werden können.

* Der hier zur Kennzeichnung der auf die Einzelflügel wirkenden Aktionskräfte beigefügte Querstrich ist in Aufgabe 31 fortgelassen, da dort keine Verwechslung mit den vom Flügel auf die N -Scheibe und das Haupttragseil ausgeübten Reaktionskräften möglich ist.

Die Knotenlasten P sind zunächst zwecks Aufstellung allgemein gültiger Formeln in positivem Richtungssinn (Richtung $+Z$ von oben nach unten) eingetragen. Da das Haupttragseil nur Zug aufnimmt, gelten die aufgestellten Formeln jedoch nur für solche Belastungszustände, die im Haupttragseil Zug erzeugen, also nicht für den zwecks Aufstellung allgemeiner Stabkraftformeln eingezeichneten Zustand.

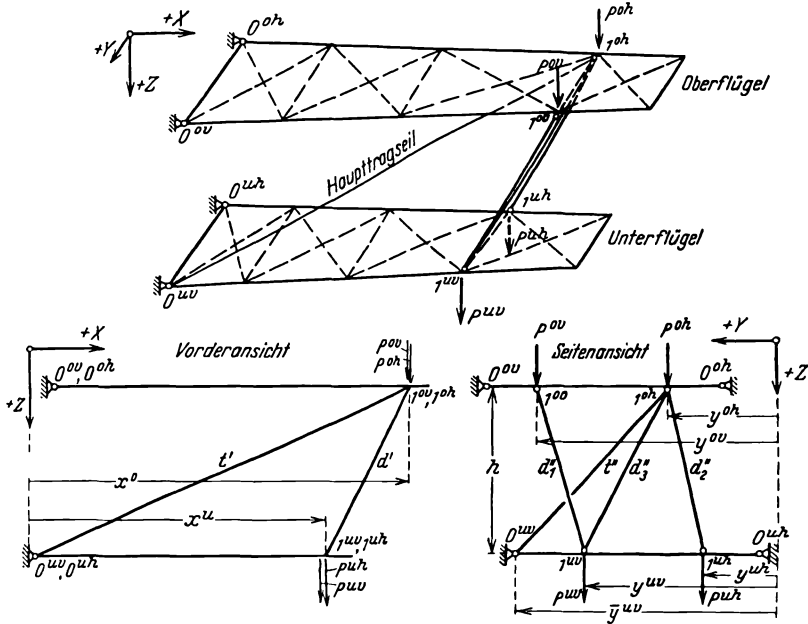


Abb. 94.

I. Gang der Rechnung.

Zunächst erfolgt an Hand der Seitenansicht die Ermittlung der Stabkraftprojektionen D_1'' , D_2'' , D_3'' und T'' sowie der Kräfte \bar{P}_y , die in dieser Projektion in wahrer Größe erscheinen. Zu diesem Zweck wird für jeden der Knoten 1^{ov} , 1^{oh} , 1^{uv} , 1^{uh} die Seitenansicht des geschlossenen Polygons gezeichnet, das die daran angreifenden inneren und äußeren Kräfte bilden müssen:

Zum Knoten 1^{ov} gehört das Kräfdreieck, Abb. 95a, bestehend aus der gegebenen Kraft P^{ov} , der gesuchten Stabkraftprojektion D_1'' und der vom Flügelfachwerk in Y -Richtung auf den Knoten ausgeübten Reaktionskraft. Letzterer entgegengesetzt gleich ist die gesuchte Aktionskraft \bar{P}_y^{ov} , die vom Knoten aus auf das Flügelfachwerk wirkt. Ihr Richtungssinn ist in Abb. 95a durch einen der Beschriftung beigefügten Pfeil gekennzeichnet.

In gleicher Weise ergibt sich am Knoten 1^{uh} aus dem Kräfte-dreieck, Abb. 95b, die Stabkraftprojektion D_2'' und die Flügelaktionskraft \bar{P}_y^{uh} .

Zum Knoten 1^{uv} gehört das Kräfteviereck, Abb. 95c, gebildet aus P^{uv} , der nunmehr bekannten Kraft D_1'' , der gesuchten Kraft D_3'' und der zugehörigen Reaktionskraft des Flügel-fachwerks.

Die Projektion T'' der Kraft im Haupttragseil folgt in entsprechender Weise aus dem zu Knoten 1^{oh} gehörigen Kräftefünfeck, Abb. 96, in welchem P^{oh} , D_2'' und D_3'' die bekannten Kräfte sind.

Die Richtungspfeile der den Flügel-Reaktionskräften entgegengesetzt gleichen Flügel-Aktionskräfte \bar{P}_y^{uh} , \bar{P}_y^{uv} , \bar{P}_y^{oh} sind wie der von \bar{P}_y^{ov} der Beschriftung beigelegt.

Die an den Knoten 1^{ov} , 1^{uv} und 1^{uh} von der N -Scheibe auf die Flügel ausgeübten Aktionskräfte \bar{P}_x^{ov} , \bar{P}_x^{uv} und \bar{P}_x^{uh} ergeben sich unmittelbar nach Abb. 97 aus der Vorderansicht, indem die Kräfte P^{ov} , P^{uv} , P^{uh} in Komponenten \bar{P}_x und K parallel der Flügelebene und der N -Scheibenebene zerlegt werden.

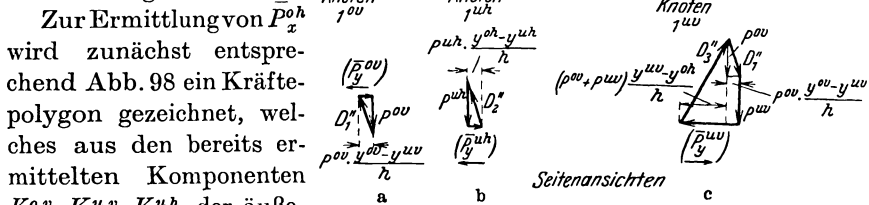


Abb. 95.

Zur Ermittlung von \bar{P}_x^{oh} wird zunächst entsprechend Abb. 98 ein Kräftepolygon gezeichnet, welches aus den bereits ermittelten Komponenten K^{ov} , K^{uv} , K^{uh} , der äußeren Kraft P^{oh} , der Vorderansichtprojektion T'' der Haupttragseilkraft und der vom Oberflügelfachwerk auf 1^{oh} ausgeübten Reaktionskraftkomponente in X -Richtung besteht. Letzterer entgegengesetzt gleich ist die gesuchte Aktionskraft \bar{P}_x , deren Richtungspfeil wieder zur Beschriftung hinzugefügt ist.

II. Berechnung der Stabkräfte.

Unter Berücksichtigung, daß z. B. $\frac{D}{d} = \frac{D''}{d''}$ ist (vgl. Aufgabe 36), folgt dann auf Grund von Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den Abb. 95 bis 98 und den Ansichten des Tragwerks:

Aus den Kräftepolygonen, Abb. 95a-c:

$$D_1 = - P^{ov} \cdot \frac{d_1}{h} \quad \text{und} \quad \bar{P}_y^{ov*} = + P^{ov} \cdot \frac{y^{ov} - y^{uv}}{h},$$

$$D_2 = + P^{uh} \cdot \frac{d_2}{h} \quad \text{und} \quad \bar{P}_y^{uh} = + P^{uh} \cdot \frac{y^{oh} - y^{uh}}{h},$$

$$D_3 = + (P^{ov} + P^{uv}) \cdot \frac{d_3}{h} \quad \text{und} \quad \bar{P}_y^{uv} = - \left(P^{uv} \cdot \frac{y^{uv} - y^{oh}}{h} + P^{ov} \cdot \frac{y^{ov} - y^{oh}}{h} \right).$$

* Die auf die Flügel-Innenfachwerke wirkenden Aktionskräfte sind positiv, wenn sie auf diese im Sinne von $+X$ bzw. $+Y$ wirken.

Aus dem Kräftefünfeck, Abb. 96:

$$T = -\frac{t}{h} \sum P$$

und

$$\bar{P}_y^{oh} = -\left[\frac{\bar{y}^{uv}}{h} \sum P - P^{oh} \cdot \frac{y^{oh}}{h} - P^{uh} \cdot \frac{y^{uh}}{h} - (P^{ov} + P^{uv}) \cdot \frac{y^{uv}}{h} \right].$$

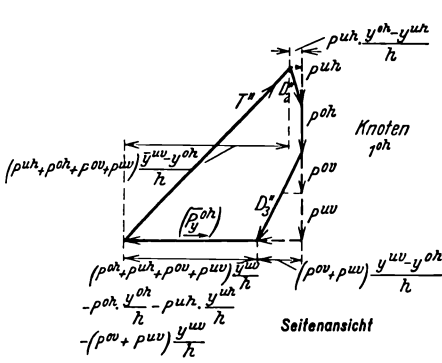


Abb. 96.

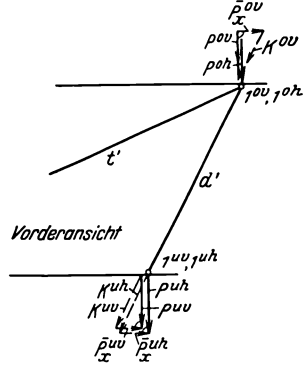


Abb. 97.

Aus der Kräftezerlegung, Abb. 97:

$$\bar{P}_x^{ov} = + P^{ov} \cdot \frac{x^o - x^u}{h}, \quad \bar{P}_x^{uh} = + P^{uh} \cdot \frac{x^o - x^u}{h}, \quad \bar{P}_x^{uv} = + P^{uv} \cdot \frac{x^o - x^u}{h}.$$

Aus dem Kräftepolygon, Abb. 98:

$$T = -\frac{t}{h} \sum P \quad \text{und} \quad \bar{P}_x^{oh} = + \frac{x^o}{h} \sum P - (P^{ov} + P^{uv} + P^{uh}) \cdot \frac{x^o - x^u}{h}.$$

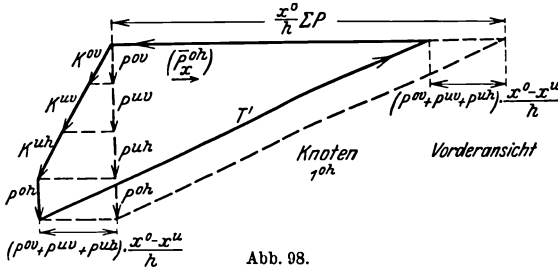


Abb. 98.

Aufgabe 40: Rumpffachwerk.

Die Stabkräfte des in Abb. 99 dargestellten Rumpffachwerks mit rechteckigen und einander parallelen Querwänden (Spanten) sind für die eingetragene Belastung zu berechnen.

Da die äußeren Kräfte so gewählt sind, daß sie für sich im Gleichgewicht stehen, ist keine besondere Annahme über die Lagerung notwendig; es liegt also ein „freies Raumfachwerk“ vor.

Mit Ausnahme von Feld 3, 4 der oberen Längswand IV seien alle Längswandfelder und die Endquerwände „0“ und „5“ ausgekreuzt; zum Ersatz für die fehlende Diagonale im Felde 3, 4 sei die Querwand „3“ ausgekreuzt.

Die Auskreuzung bestehe aus vorspannungsfreien Seilen oder Drähten. Dementsprechend ist in jedem Feld nur die Diagonale eingezeichnet, für welche Zugbeanspruchung zu erwarten ist; sollte sich in einer solchen Diagonale Druck ergeben, so kann ähnlich wie bei Aufgabe 31 eine nachträgliche Berichtigung auf Grund des Ersatzstabverfahrens vorgenommen werden.

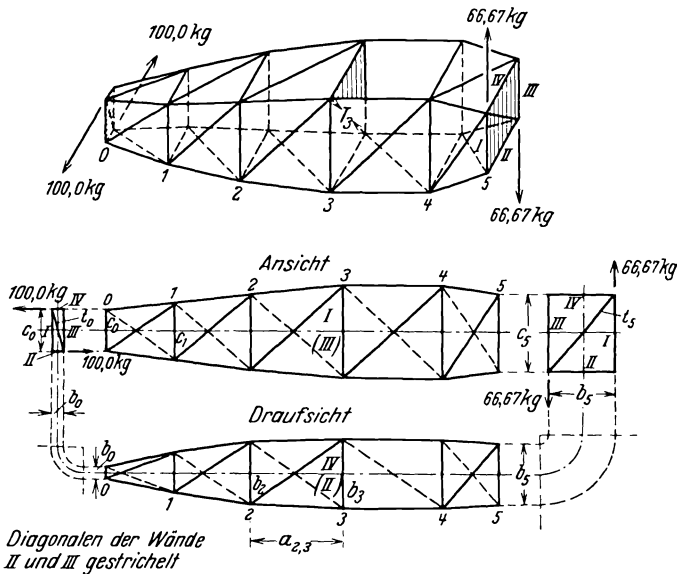


Abb. 99.

I. Gang der Rechnung.

Durch Beseitigung der Auskreuzung in der Querwand „3“ und Einführung einer Auskreuzung im Felde 3, 4 der oberen Längswand IV entsteht ein gleichmäßig aufgebautes und daher einfacher zu behandelndes „Ersatzflechtwerk“. Zunächst wird die äußere Belastung an diesem angebracht und die Berechnung der dazugehörigen Stabkräfte durchgeführt. Darauf wird am Ersatzflechtwerk eine Kraft T_3 in Richtung der Tiefendiagonale der Querwand „3“, zunächst von der Größe I, eingeführt; auch hierfür werden die Stabkräfte des Ersatzflechtwerks berechnet. Nun erfolgt die Festlegung der wirklichen Größe von T_3 so, daß die Diagonalkraft des am gegebenen System nicht ausgesteiften Längswandfeldes bei gleichzeitiger Wirkung von T_3 und der äußeren

Belastung verschwindet („Ersatzstabverfahren“, vgl. Aufgabe 31); die bei diesem kombinierten Belastungszustand des Ersatzflechtwerks entstehenden Stabkräfte sind die gesuchten Stabkräfte des wirklichen Rumpffachwerks.

Im einzelnen erfolgt die Berechnung nach Ebner^{20, 21} (vgl. auch die Arbeiten von Wagner²², Seydel^{23, 24}, Rühl²⁵). Um den Vergleich mit der Ebnerschen Arbeit zu erleichtern, werden hier ausnahmsweise die Biegemomente mit M statt bisher mit B bezeichnet.

II. Berechnung des „Ersatzflechtwerks“ für die gegebene äußere Belastung.

1. Allgemeines.

Die Längswände I, II, III, IV werden aus dem Gesamtverband herausgeschnitten und für sich betrachtet; dabei werden die äußeren

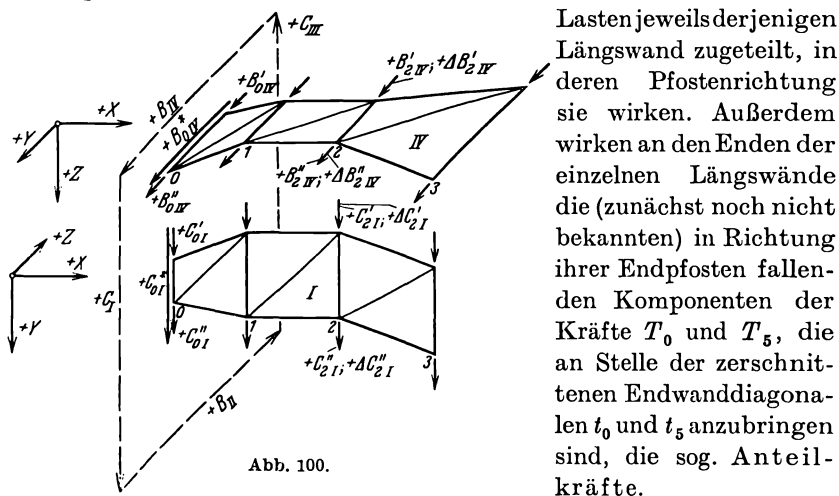


Abb. 100.

Damit dann z. B. an der Längswand IV Gleichgewicht möglich ist, werden in ihren Knotenpunkten Fesseln in Pfostenrichtung der Nachbarwände I und III (also lotrecht) angenommen; ferner werden am rechten Ende zwei gedachte Fesseln in Längsrichtung und eine in Richtung ihres Endpfostens angebracht. Die in den lotrechten Fesseln auf die Wand IV wirkenden Reaktionskräfte sind im umgekehrten Sinne als Aktionen, sog. Zusatzkräfte, neben der gegebenen äußeren Belastung und den Anteilkräften an den Nachbarwänden I und III anzubringen; entsprechend erhält die Längswand IV Zusatzkräfte von den Wänden I und III her. Ähnliches gilt für die übrigen Längswände.

Insgesamt wirken also auf die Längswände:

a) an den einzelnen Querwänden $i = „0“$ bis „5“ in Pfostenrichtung die gegebenen äußeren Kräfte $B_i = B'_i + B''_i$ (in Längswand II bzw. IV) und $C_i = C'_i + C''_i$ (in Längswand I bzw. III, Abb. 100);

b) an der Endquerwand „0“ bzw. „5“ die „Anteilkräfte“ B_0^* (in Längswand II und IV) und C_0^* (in Längswand I und III) (nämlich die an den Endpfosten wirkenden Komponenten der Tiefendiagonalkräfte T_0 bzw. T_5 , Abb. 101)*;

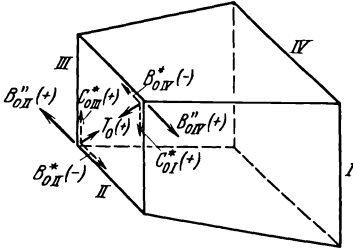


Abb. 101.

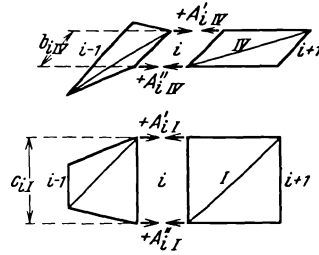


Abb. 102.

c) die an den einzelnen Querwänden angreifenden „Zusatzkräfte“ $\Delta B_i = \Delta B'_i + \Delta B''_i$ und $\Delta C_i = \Delta C'_i + \Delta C''_i$, die an einer Längswand überall da auftreten, wo ein Knick der Nachbarlängswand vorliegt (Abb. 100).

Ferner werden die „Längskräfte“ A'_{iI}, A''_{iI} bis A''_{iIV} eingeführt (Abb. 102), das sind die waagerechten Kraftkomponenten, die an den Querwand-Ecken zwischen zwei in Längsrichtung aufeinanderfolgenden Fachen als innere Kräfte bzw. an der Endquerwand „5“ als Reaktionen in den gedachten Längsfesseln wirksam sind.

2. Vorzeichen.

Bezüglich jeder Längswand wird ein (Rechts-)Koordinatensystem eingeführt, dessen + X-Achse von links nach rechts im Sinne der Bezifferung weist, dessen + Y-Achse in der Längswand liegt und dessen + Z-Achse nach dem Flechtwerksinnern weist. Die Kräfte B, C und $\Delta B, \Delta C$ sind positiv im Sinne von + Y (Abb. 100). Die Kräfte A sind positiv, wenn sie Zugkräfte sind. Momente, parallel bzw. senkrecht zu den Querwänden, sind positiv, wenn ihre Vektoren im Sinne der + X- bzw. + Z-Achse weisen**.

3. Berechnung der Zusatz-, Quer- und Längskräfte.

a) Formeln.

Alle querbelastenden Kräfte werden entsprechend Abb. 103 aufgeteilt in Paare gleicher und entgegengesetzt gleicher Kräfte zwecks Her-

* Ebner bezeichnet die Summen $C_0 + C_0^*$ bzw. $B_0 + B_0^*$ als Anteilkräfte.

** Ebner führt die Z-Achse im Sinne eines Links-Koordinatensystems ein.

beiführung symmetrischer und antisymmetrischer Belastungszustände.

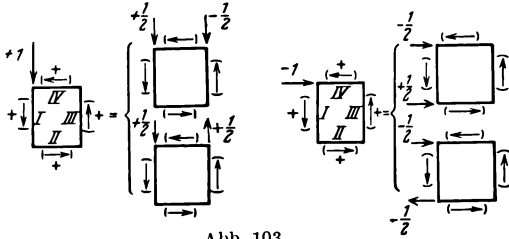


Abb. 103.

Die ersten haben nach vorhergehender Regel auf den gegenüberliegenden Wänden I und III bzw. II und IV entgegengesetztes, die zweiten gleiches Vorzeichen.

Zur Berechnung der Längskräfte A einer

Längswand dienen die Beziehungen (Abb. 102):

$$A'_{iI} = -A''_{iI} = -\frac{M_{iI}}{c_{iI}} \quad (M_{iI} = \text{Biegemoment bei } i \text{ in der Längswand } I),$$

$$A'_{iII} = -A''_{iII} = -\frac{M_{iII}}{b_{iII}}$$

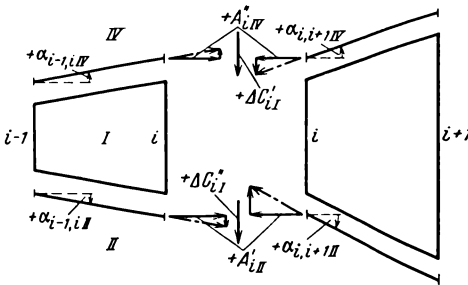


Abb. 104.

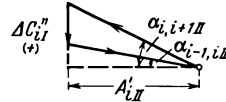
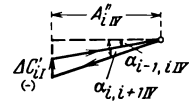


Abb. 105.

und analog für die übrigen Längswände; daraus folgen die Zusatzkräfte ΔC und ΔB (Abb. 104 und 105):

$$\left. \begin{aligned} \Delta C'_{iI} &= -A''_{iIV} (\operatorname{tg} \alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i})_{IV} \\ \Delta C''_{iI} &= +A'_{iII} (\operatorname{tg} \alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i})_{II} \end{aligned} \right\} \text{(für Längswand } I),$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta B'_{iII} &= -A'_{iI} (\operatorname{tg} \alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i})_I \\ \Delta B''_{iII} &= +A'_{iIII} (\operatorname{tg} \alpha_{i,i+1} - \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i})_{III} \end{aligned} \right\} \text{(für Längswand } II)$$

und analog für die übrigen Längswände (Einführung der Werte α nach Abb. 106).

Die Anteilkräfte $C^*_{0I} = C^*_{0III} = C^*_0$ und $B^*_{0II} = B^*_{0IV} = B^*_0$ folgen aus den Randbedingungen:

α) Das Gesamtmoment der Anteilkräfte C^*_0 und B^*_0 am Ersatzflechtwerk (z. B. bezüglich der Ecke II/III der Querwand „0“) verschwindet, da die Anteilkräfte die Komponenten der Endwanddiagonalkraft T_0 sind:

$$C^*_0 \cdot b_0 + B^*_0 \cdot c_0 = 0.$$

β) Die Summe der an einer beliebigen Ecke der Endquerwand „5“ des Ersatzflechtwerks in Längsrichtung wirkenden Kräfte A'_5 und A''_5 wird gleich der dort gegebenenfalls angreifenden äußeren Längskraft; sie verschwindet also im vorliegenden Belastungsfall, somit gilt z. B. an der Ecke I/IV :

$$A'_{5I} + A''_{5IV} = 0.$$

Die Querkräfte und Biegemomente sind wie in Aufgabe 12 bestimmt durch:

$$Q_{i,i+1I} = Q_{i-1,iI} - (C_{iI} + \Delta C_{iI}),$$

$$C_{iI} = C'_{iI} + C''_{iI},$$

$$\Delta C_{iI} = \Delta C'_{iI} + \Delta C''_{iI},$$

$$M_{iI} = M_{i-1I} + Q_{i-1,iI} \cdot a_{i-1,i} \quad (\alpha = \text{Feldweite}).$$

b) Rechenbeispiel.

Im vorliegenden Sonderfall ist wegen doppelter Symmetrie der Wände und wegen Belastung durch rein antisymmetrische äußere Kräfte die Berechnung von Wand I gleich der von Wand III , die von Wand II gleich der von Wand IV . (Wären gleichsinnige äußere Kräfte vorhanden, so wäre die Berechnung von III entgegengesetzt gleich der von I .)

Der Reihe nach erfolgt:

α) die Berechnung der Längs-, Zusatz- und Querkräfte infolge gleich „Eins“ gesetzter Anteilkräfte B_0^* bzw. C_0^* ;

β) die Berechnung der Längs-, Zusatz- und Querkräfte infolge der äußeren Belastung ohne Berücksichtigung des Einflusses der Anteilkräfte;

γ) die Berechnung der wirklichen Werte der Anteilkräfte B_0^* und C_0^* auf Grund der oben genannten Randbedingungen;

δ) die Berechnung der wirklichen Längs-, Zusatz- und Querkräfte für gleichzeitige Wirkung der äußeren Lasten und der Anteilkräfte.

$$\alpha) \text{ Einfluß von } C_0^* = 1 \text{ und } B_0^* = 1.$$

Die Berechnung der Längs-, Zusatz- und Querkräfte infolge von Anteilkräften $C_0^* = 1$ bzw. $B_0^* = 1$ erfolgt für die einzelnen Längswände zunächst bis zur Querwand „1“, darauf unter entsprechender Einfügung der dabei gefundenen Zusatzkräfte $\Delta B'_1$ bis $\Delta C''_1$ in den Rechnungsgang bis zur Querwand „2“ usw. (Tabellen 21 und 22).

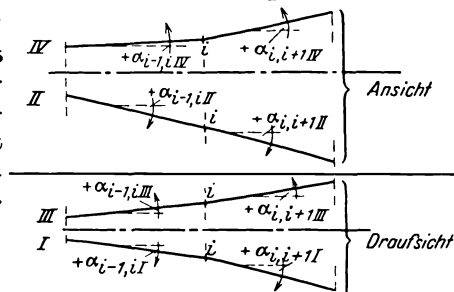


Abb. 106.

Tabelle 21. Einfluß von Anteilkräften $C^* = 1$ (bzw. eines äußeren Kräftepaars $C_{0I} = 1$, $C_{0III} = 1$ bei gleich Null gesetzten Anteilkräften) auf die Längswandverwerke (Längen in cm, Kräfte in kg, Momente in kgcm). Da hier die Berechnung für Wand I und III bzw. II und IV dieselbe ist, sind die folgenden Tabellen mit doppelten Köpfen versehen.

i	C_{II}	$\Delta C'_{II}$	$\Delta C''_{II}$	ΔC_{II}	$C_{II} + \Delta C_{II}$	$Q_{I-1,II}$	$a_{I-1,I}$	$Q_I \cdot a$	M_{II}	c_{II}	$-A'_{II} = +A_{II}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,II}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{II}$	$\frac{\Delta B'_{II}}{\Delta B'_{IV}} = \frac{\Delta C'_{II}}{\Delta C'_{IV}}$
	C_{III}	$\Delta C'_{III}$	$\Delta C''_{III}$	ΔC_{III}	$C_{III} + \Delta C_{III}$	$Q_{I-1,III}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{III} \cdot a$	M_{III}	c_{III}	$-A''_{III} = +A'_{III}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,III}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{III}$	$\frac{\Delta B'_{IV}}{\Delta B'_{II}} = \frac{\Delta C'_{IV}}{\Delta C'_{II}}$
0	<u>+1</u>	0	0	0	+1	-1	70	-70	0	40	0	+0,2143	-	0
1	0	0	0	0	0	-1	80	-80	-70	60	+1,167	+0,1250	-0,0893	-0,1042
2	0	+0,00386	+0,00386	+0,00772	+0,00772	-1,008	90	-90,7	-150	80	+1,875	+0,0556	-0,0694	-0,1301
3	0	+0,0934	+0,0934	+0,1868	+0,1868	-1,195	100	-119,5	-240,7	100	+2,407	0	-0,0556	-0,1338
4	0	+0,3157	+0,3157	+0,6314	+0,6314	-1,826	60	-109,6	-360,2	100	+3,602	-0,0833	-0,0833	-0,3000
5									-469,8	80	+5,87	+0,0833	+0,0833	+0,489

i	B_{III}	$\Delta B'_{III}$	$\Delta B''_{III}$	ΔB_{III}	$B_{III} + \Delta B_{III}$	$Q_{I-1,III}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{II} \cdot a$	M_{II}	b_{III}	$-A'_{III} = +A'_{III}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,III}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{III}$	$\frac{\Delta C'_{III}}{\Delta C'_{II}} = \frac{\Delta C''_{III}}{\Delta C''_{II}}$
	B_{IV}	$\Delta B'_{IV}$	$\Delta B''_{IV}$	ΔB_{IV}	$B_{IV} + \Delta B_{IV}$	$Q_{I-1,IV}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{IV} \cdot a$	M_{IV}	b_{IV}	$-A'_{IV} = +A'_{IV}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,IV}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{IV}$	$\frac{\Delta C'_{IV}}{\Delta C'_{III}} = \frac{\Delta C''_{IV}}{\Delta C''_{III}}$
0	0	0	0	0	0	0	70	0	0	10	0	+0,1429	-	0
1	0	-0,1042	-0,1042	-0,2084	-0,2084	+0,2084	80	+16,67	0	40	0	+0,1250	-0,0179	0
2	0	-0,1301	-0,1301	-0,2602	-0,2602	+0,4686	90	+42,2	+16,67	60	-0,2778	+0,1111	-0,0139	+0,00386
3	0	-0,1338	-0,1338	-0,2676	-0,2676	+0,7362	100	+73,6	+58,9	70	-0,841	0	-0,1111	+0,0934
4	0	-0,3000	-0,3000	-0,6000	-0,6000	+1,336	60	+80,2	+132,5	70	-1,894	-0,1667	-0,1667	+0,3157
5									+212,7	60	-3,545	+0,1667	+0,1667	-0,591

Tabelle 22. Einfluß von Anteilkräften $B_0^* = 1$ (bzw. eines äußeren Kräftepaars $B_{0II} = 1$, $B_{0IV} = 1$ bei gleich Null gesetzten Anteilkräften) auf die Längswandfachwerke (s. die Bemerkung zu Tabelle 21).

i	C_{II}	$\Delta C'_{II}$	$\Delta C''_{II}$	ΔC_{II}	$C_{II} + \Delta C_{II}$	$Q_{I-1,II}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{II} \cdot a$	M_{II}	α_{II}	$-A''_{II} = +A'_{II}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,II}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{II}$	$\frac{\Delta B'_{II}}{\Delta B''_{II}} = \Delta B''_{II}$
	C_{III}	$\Delta C'_{III}$	$\Delta C''_{III}$	ΔC_{III}	$C_{III} + \Delta C_{III}$	$Q_{I-1,III}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{III} \cdot a$	M_{III}	α_{III}	$-A''_{III} = +A'_{III}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,III}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{III}$	$\frac{\Delta B'_{IV}}{\Delta B''_{IV}} = \Delta B''_{IV}$
0	0	0	0	0	0				0	40	0			0
1	0	-0,03133	-0,03133	-0,06266	-0,06266	0	70	0	0	60	0	+0,2143	-0,0893	0
2	0	-0,03475	-0,03475	-0,06950	-0,06950	+0,06266	80	+ 5,01	+ 5,01	80	-0,0626	+0,1250	-0,0694	+0,00434
3	0	-0,3822	-0,3822	-0,7644	-0,7644	+0,1322	90	+ 11,90	+ 16,91	100	-0,1691	+0,0556	-0,0556	+0,00940
4	0	-0,818	-0,818	-1,636	-1,636	+0,8966	100	+ 89,66	+106,6	100	-1,066	0	-0,0833	+0,0888
5						+2,533	60	+152,0	+258,6	80	-3,233		+0,0833	-0,2693

i	B_{II}	$\Delta B'_{II}$	$\Delta B''_{II}$	ΔB_{II}	$B_{II} + \Delta B_{II}$	$Q_{I-1,II}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{II} \cdot a$	M_{II}	b_{II}	$-A''_{II} = +A'_{II}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,II}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{II}$	$\frac{\Delta C'_{III}}{\Delta C'_{II}} = \Delta C'_{II}$
	B_{IV}	$\Delta B'_{IV}$	$\Delta B''_{IV}$	ΔB_{IV}	$B_{IV} + \Delta B_{IV}$	$Q_{I-1,IV}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{IV} \cdot a$	M_{IV}	b_{IV}	$-A''_{IV} = +A'_{IV}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,IV}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{IV}$	$\frac{\Delta C'_{I}}{\Delta C'_{III}} = \Delta C'_{III}$
0	<u>+1</u>	0	0	0	+1				0	10	0			0
1	0	0	0	0	0	-1	70	- 70	- 70	40	+1,75	+0,1429	-0,0179	-0,03133
2	0	+0,00434	+0,00434	+0,00868	+0,00868	-1	80	- 80	- 150	60	+2,50	+0,1250	-0,0139	-0,03475
3	0	+0,00940	+0,00940	+0,01880	+0,01880	-1,009	90	- 90,8	-240,8	70	+3,44	+0,1111	-0,1111	-0,3822
4	0	+0,0888	+0,0888	+0,1776	+0,1776	-1,028	100	-102,8	-343,6	70	+4,91	0	-0,1667	-0,818
5						-1,206	60	- 72,4	-416,0	60	+6,93	-0,1667	+0,1667	+1,155

β) Einfluß der äußeren Belastung bei gleich Null gesetzten Anteilkräften.

Die Berechnung der Längs-, Zusatz- und Querkräfte infolge der äußeren Belastung B_i und C_i bei gleich Null gesetzten Anteilkräften erfolgt in gleicher Weise wie unter α); vgl. auch III, S. 110.

Dies erübrigt sich jedoch im vorliegenden Belastungsfall, weil die an Querwand „0“ eingeleiteten äußeren Kräfte B_{0II} und B_{0IV} zwischen den Querwänden „0“ und „5“ dieselben Beanspruchungen bedingen wie Anteilkräfte von der Größe $B_{0II}^* = B_{0IV}^* = 100$ kg.

Liegt ein Belastungszustand vor, der nicht für sich im Gleichgewicht steht, d. h. der im Gegensatz zum behandelten Beispiel das Vorhandensein von Lagern bedingt, so sind die Lagerreaktionen zur Herstellung des äußeren Kräftegleichgewichts zunächst zu ermitteln und zu den gegebenen Lasten als äußere Kräfte hinzuzufügen; damit ist eine solche Aufgabe auf die Behandlung eines freien Flechtwerks zurückgeführt.

γ) Berechnung der wirklichen Werte C_0^* und B_0^* .

Um die wahren Werte der Anteilkräfte C_0^* und B_0^* zu erhalten, werden die Gleichungen α , α) und β) benutzt:

$$\alpha, \alpha) C_0^* \cdot 10 + B_0^* \cdot 40 = 0,$$

$$\alpha, \beta) C_0^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } C_0^* = 1] + B_0^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } B_0^* = 1] \\ = - (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } \text{äußerer Belastung bei gleich Null} \\ \text{gesetzten Anteilkräften}].$$

Die Auswertung der letzten Gleichung ergibt mit $C_{0I} = C_{0III} = 0$ und $B_{0II} = B_{0IV} = + 100$ kg (Zahlenwerte A'_{5I} und A''_{5IV} aus Tabelle 21 bzw. 22):

$$\alpha, \beta) C_0^* \cdot (+ 5,87 + 3,545) + B_0^* \cdot (- 3,233 - 6,93) \\ = + 100 \cdot (- 3,233 - 6,93).$$

Daraus:

$$C_0^* = + 85,0 \text{ kg} \quad \text{bzw.} \quad C_0 + C_0^* = + 85,0 \text{ kg},$$

$$B_0^* = - 21,25 \text{ kg} \quad \text{bzw.} \quad B_0 + B_0^* = + 78,75 \text{ kg}.$$

δ) Berechnung der wirklichen Werte ΔC_i , ΔB_i , $Q_{i-1,i}$ und A_i .

Die wirklichen Werte der Zusatzkräfte ΔC_i und ΔB_i , der Querkräfte $Q_{i-1,i}$ und der Längskräfte A_i ergeben sich bei der hier vorliegenden Belastung mit den gefundenen Werten $C_0 + C_0^* = + 85,0$ kg und $B_0 + B_0^* = + 78,75$ kg aus den entsprechenden Werten für $C_0^* = 1$ bzw. $B_0^* = 1$ (Tabelle 21 und 22).

4. Ermittlung der Stabkräfte.

a) Ermittlung der Längswand-Stabkräfte.

Nach Festlegung der die einzelnen Fachwerkprojektionen belastenden Kräfte (Tabelle 23) kann die Ermittlung der Stabkräfte aus den Projektionen ähnlich wie bei gewöhnlichen ebenen Fachwerken vorgenommen werden.

Tabelle 23. Zusammenstellung der Zusatz-, Quer- und Längskräfte in kg infolge $C_0 + C_0^* = 85,0$ kg und $B_0 + B_0^* = 78,75$ kg.

i	$\Delta C'_{iI}$ = $\Delta C'_{iIII}$	$Q_{i-1,iI}$	$-A''_{iI}$ = $+A'_{iI}$	$\Delta B'_{iII}$ = $\Delta B'_{iIV}$	$Q_{i-1,iII}$	$-A''_{iII}$ = $+A'_{iII}$
	$\Delta C'_{iIII}$ = $\Delta C'_{iI}$	$Q_{i-1,iIII}$	$-A''_{iIII}$ = $+A'_{iIII}$	$\Delta B'_{iIV}$ = $\Delta B'_{iII}$	$Q_{i-1,iIV}$	$-A''_{iIV}$ = $+A'_{iIV}$
0	0		0	0		0
1	- 2,467	- 85,0	+ 99,2	- 8,86	- 78,8	+ 137,8
2	- 2,409	- 80,1	+ 154,5	- 10,72	- 61,1	+ 173,3
3	- 22,16	- 75,3	+ 191,3	- 10,63	- 39,7	+ 199,4
4	- 37,6	- 31,0	+ 222,3	- 18,51	- 18,4	+ 225,7
5	+ 40,8	+ 44,3	+ 244,4	+ 20,4	+ 18,6	+ 244,4

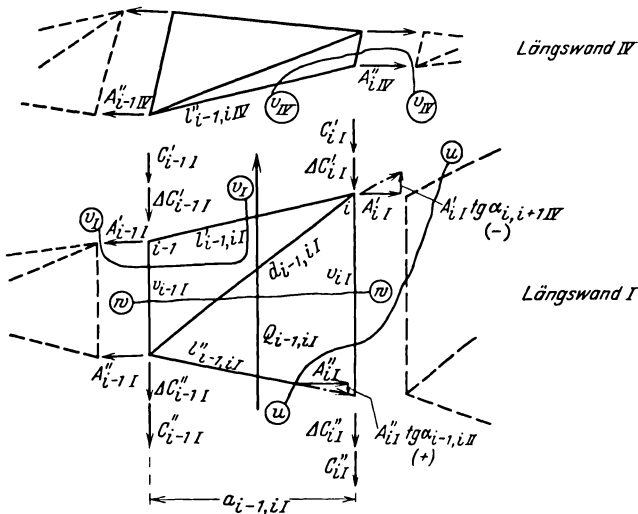


Abb. 107.

Im folgenden werden allgemeine Formeln für die sog. „bezogenen Stabkräfte“

$$\frac{S}{s} = \frac{S^*}{s^*}$$

zusammengestellt. (S bzw. s = wirkliche Stabkraft bzw. Stablänge, S' bzw. s' = Projektionen von S bzw. s .)

Bestimmung von D und V in Längswand I (Abb. 107):

Schnitt $w-w$. Aus $\sum X = 0$:

$$\frac{D_{i-1, iI}}{d_{i-1, iI}} = \frac{A'_{iI} - A'_{i-1I}}{a_{i-1, iI}};$$

Schnitt $u-u$. Aus $\sum Y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{V_{iI}}{v_{iI}} &= \frac{1}{v_{iI}} [Q_{i-1, iI} - C'_{iI} - \Delta C'_{iI} + A'_{iI} \operatorname{tg} \alpha_{i, i+1IV} - A''_{iI} \operatorname{tg} \alpha_{i-1, iII}] \\ &= \frac{1}{v_{iI}} [Q_{i-1, iI} - C'_{iI} - \Delta C'_{iI} + A'_{iI} (\operatorname{tg} \alpha_{i, i+1IV} + \operatorname{tg} \alpha_{i-1, iII})]. \end{aligned}$$

Bestimmung von L im gemeinsamen Stab der Längswände I und IV :

Schnitt v_I-v_I in Wand I . Aus $\sum X = 0$:

$$\frac{L'_{i-1, iI}}{l'_{i-1, iI}} = \frac{A'_{i-1I}}{a_{i-1, iI}},$$

Schnitt $v_{IV}-v_{IV}$ in Wand IV . Aus $\sum X = 0$:

$$\frac{L''_{i-1, iIV}}{l''_{i-1, iIV}} = \frac{A''_{iIV}}{a_{i-1, iIV}},$$

Gesamtstabkraft:

$$\frac{L_{i-1, iIV/I}}{l_{i-1, iIV/I}} = \frac{A'_{i-1I} + A''_{iIV}}{a_{i-1, i}}.$$

b) Ermittlung der Stabkräfte in der Endquerwand „0“.

Aus $T_0 \sin \psi_0 = C_0^*$ (Abb. 101 und 108):

$$T_0 = \frac{1}{\sin \psi_0} C_0^* = \frac{41,2}{40} \cdot 85,0 = + 87,6 \text{ kg.}$$

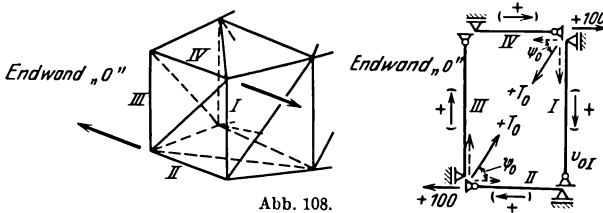


Abb. 108.

Die 4 Endquerwandpfosten werden nun als Einzelstäbe aufgefaßt, die in denjenigen Punkten fest gelagert sind, wo Längswanddiagonalen anschließen (Abb. 108). Im vorliegenden Fall gehen dann die äußeren Kräfte und die waagerechten Komponenten von T_0 unmittelbar in die festen Lager der Pfosten, d. h. sie werden an ihren Angriffsstellen ohne Beanspruchung der Pfosten in die Längswände II und IV geleitet. Es ergibt sich:

$$V_{0I} = - C_{0I}^* = - 85,0 \text{ kg}, \quad V_{0II} = 0,$$

$$V_{0III} = - C_{0III}^* = - 85,0 \text{ kg}, \quad V_{0IV} = 0.$$

Zugkräfte positiv.

c) Ermittlung der Stabkräfte in der Endquerwand „5“.

Die Anteilkräfte der Endquerwand „5“ müssen im Gleichgewicht stehen mit den daran angreifenden äußeren Kräften und den von den Längswänden ausgeübten Quer- und Zusatzkräften:

$$C_{5I}^* = Q_{4,5I} - C_{5I} - \Delta C'_{5I} - \Delta C''_{5I} = + 29,4 \text{ kg,}$$

$$B_{5II}^* = Q_{4,5II} - B_{5II} - \Delta B'_{5II} - \Delta B''_{5II} = - 22,2 \text{ kg,}$$

$$C_{5III}^* = Q_{4,5III} - C_{5III} - \Delta C'_{5III} - \Delta C''_{5III} = + 29,4 \text{ kg,}$$

$$B_{5IV}^* = Q_{4,5IV} - B_{5IV} - \Delta B'_{5IV} - \Delta B''_{5IV} = - 22,2 \text{ kg.}$$

(Probe: $C_{5I}^* = C_{5III}^*$; $B_{5II}^* = B_{5IV}^*$.)

Die Tiefendiagonalkraft T_5 folgt aus der Beziehung $T_5 \sin \psi_5 = C_5^*$ (Abb. 109) zu:

$$T_5 = \frac{1}{\sin \psi_5} C_5^* = \frac{100}{80} \cdot 29,4 = + 36,75 \text{ kg.}$$

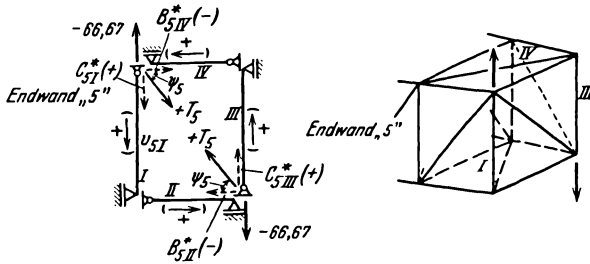


Abb. 109.

Die 4 Endquerwandpfosten werden wieder als Einzelstäbe aufgefaßt, die in denjenigen Punkten fest gelagert sind, wo Längswanddiagonalen anschließen (Abb. 109). Wird beachtet, daß im vorliegenden Fall die äußeren Kräfte C_{5I}^* und C_{5III}^* sowie die lotrechten Komponenten von T_5 unmittelbar in die Lager der Pfosten gehen, so ergibt sich:

$$V_{5I} = 0, \quad V_{5II} = + B_{5II}^* = - 22,2 \text{ kg,}$$

$$V_{5III} = 0, \quad V_{5IV} = + B_{5IV}^* = - 22,2 \text{ kg.}$$

Zugkräfte positiv.

III. Einfluß der Aussparung.

Im Verfolg des unter I. auf S. 99 angegebenen Rechnungsgangs werden in der Querwand „3“ des Ersatzflechtwerks als äußere Kräfte Zugkräfte $T_3 = 1$ in Richtung der Tiefendiagonale angebracht (Abb. 110).

Entsprechend II 3a) auf S. 101 werden diese in je ein Paar gegenüberliegender entgegengesetzt gleicher waagerechter bzw. lotrechter

Tabelle 24. Einfluß der äußeren Kräfte $C_{3I} = C_{3III}$ und $B_{3II} = B_{3IV}$ infolge von $T_3 = 1$ am Ersatzsystem bei gleich Null gesetzten Anteilkräften (s. Bemerkung zu Tabelle 21).

i	C_{1I}	$\Delta C'_{1I}$	ΔC_{1I}	$C_{1I} + \Delta C_{1I}$	$Q_{I-1,II}$	$a_{I-1,I}$	$Q_{I \cdot a}$	M_{II}	c_{1I}	$-A'_{1I} = +A_{1I}$	$\text{tg } \alpha_{I-1,II}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{1I}$	$\Delta B'_{1II} = \Delta B_{1IV}$
	C_{1III}	$\Delta C'_{1III}$	ΔC_{1III}	$C_{1III} + \Delta C_{1III}$	$Q_{1-1,III}$	$a_{1-1,I}$	$Q_{1III \cdot a}$	M_{1III}	c_{1III}	$-A'_{1III} = +A_{1III}$	$\text{tg } \alpha_{1-1,III}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{1III}$	$\Delta B'_{1IV} = \Delta B_{1IV}$
0									40				
1					70				60		+0,2143	-0,0893	
2					80				80		+0,1250	-0,0694	
3	+0,819	0	0	+0,819	90				100		+0,0556	-0,0556	
4	0	+0,1365	+0,1365	+0,2730	100	-0,819	-81,9	-81,9	100	+0,819	0	-0,0833	-0,0682
5					-1,092	60	-65,5	-147,4	80	+1,843	-0,0833	+0,0833	+0,1535

i	B_{1II}	$\Delta B'_{1II}$	ΔB_{1II}	$B_{1II} + \Delta B_{1II}$	$Q_{1-1,II}$	$a_{1-1,I}$	$Q_{II \cdot a}$	M_{1II}	b_{1II}	$-A'_{1II} = +A_{1II}$	$\text{tg } \alpha_{1-1,III}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{1II}$	$\Delta C'_{1III} = \Delta C'_{1I}$
	B_{1IV}	$\Delta B'_{1IV}$	ΔB_{1IV}	$B_{1IV} + \Delta B_{1IV}$	$Q_{1-1,IV}$	$a_{1-1,I}$	$Q_{1IV \cdot a}$	M_{1IV}	b_{1IV}	$-A'_{1IV} = +A_{1IV}$	$\text{tg } \alpha_{1-1,IV}$	$\Delta \text{tg } \alpha_{1IV}$	$\Delta C'_{1III} = \Delta C'_{1IV}$
0									10				
1					70				40		+0,1429	-0,0179	
2					80				60		+0,1250	-0,0139	
3	-0,573	0	0	-0,573	90				70		+0,1111	-0,1111	
4	0	-0,0682	-0,1364	-0,1364	100	+0,573	+57,3	+57,3	70	-0,819	0	-0,1667	+0,1365
5					+0,709	60	+42,5	+99,8	60	-1,663	-0,1667	+0,1667	-0,2772

Kräfte zerlegt (Abb. 110):

$$C'_{3I} = C'_{3III} = +1 \cdot \frac{c_3}{l_3} = +0,819,$$

$$B''_{3II} = B''_{3IV} = -1 \cdot \frac{b_3}{l_3} = -0,573.$$

Die Durchrechnung erfolgt analog dem ersten Teil der Aufgabe.

Außer den Tabellen für $C_0^* = 1$ und $B_0^* = 1$, die dieselben bleiben (S. 104, 105), ist jetzt eine Tabelle für die äußere Belastung infolge $T_3 = 1$ bei gleich Null gesetzten Anteilkräften durchzurechnen, wobei die Kräfte B_{3II} , B_{3IV} als negative und C_{3I} , C_{3III} als positive äußere Kräfte an der Querwand „3“ angreifen (Tabelle 24).

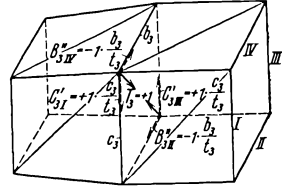


Abb. 110.

Die Bedingungen zur Ermittlung der wahren Werte der Anteilkräfte heißen hier (vgl. auch S. 102, 103):

$$\text{II 3 a, } \alpha) C_0^* \cdot b_0 + B_0^* \cdot c_0 = 0,$$

$$\text{II 3 a, } \beta) C_0^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } C_0^* = 1] + B_0^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } B_0^* = 1] \\ = - (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } T_3 = 1 \text{ nach Tabelle 24}].$$

Infolge von „ $T_3 = 1$ “ am Ersatzsystem (wobei die Endwanddiagonalen auf die Längswände die zum Zustand $T_3 = 1$ gehörigen Anteilkräfte ausüben) ergibt sich in der Diagonale $d_{3,4IV}$ des Feldes 3, 4 der oberen Längswand IV eine Stabkraft $D_{3,4IV}^{(1)}$. Da diese Diagonale in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, muß T_3 so groß werden, daß insgesamt:

$$D_{3,4IV} \text{ (inf. äußerer Belastung am Ersatzflechtwerk entspr. Unterabschn. II 4)} + T_3 \cdot D_{3,4IV}^{(1)} = 0$$

wird. Also

$$T_3 = - \frac{D_{3,4IV} \text{ (inf. äuß. Bel. am Ersatzflechtwerk)}}{D_{3,4IV}^{(1)}}.$$

Nunmehr ergeben sich die Stabkräfte des wirklichen Systems infolge der äußeren Belastung (Abb. 99) zu:

$$S = S \text{ (infolge der äußeren Lasten am Ersatzflechtwerk)} \\ + T_3 \cdot S^{(1)} \text{ (infolge von } T_3 = 1 \text{ am Ersatzflechtwerk)}.$$

Die zahlenmäßige Durchrechnung bietet nichts Neues und ist daher hier nicht durchgeführt.

Zweites Kapitel.

Formänderung statisch bestimmter Systeme.

Allgemeines.

1. Zweck der Formänderungsberechnung.

Die Ermittlung der unter Einwirkung der Belastung auftretenden Formänderungen ist in erster Linie notwendig zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme; denn wie bereits auf S. 35 erwähnt wurde, ist die Größe der „statisch Unbestimmten“ abhängig von den gegenseitigen Verschiebungen (Wegen bzw. Drehungen) der Schnittufer des an gewissen Stellen aufgeschnitten gedachten Systems.

Ferner gibt es Fälle, in denen die Gestalt des belasteten Systems wesentlich verschieden ist von der des unbelasteten, so daß der statischen Berechnung das bereits verformte System zugrunde gelegt werden muß (z. B. Knickbiegung). Hierzu gehören auch solche Fälle, wo bei gewissen Laststufen (wenigstens rechnerisch) sich beliebig große Formänderungen und dementsprechende Beanspruchungen ergeben, so daß das System unstabil wird (Knickung).

Neben diesen rein statischen Gründen bedingen im Flugzeugbau auch dynamische, insbesondere aerodynamische Gründe die Berechnung der Verformung: Die Formänderung eines Flugzeugsystems kann wesentliche Änderungen seiner aerodynamischen Eigenschaften bedingen, indem sich z. B. die Anstellwinkel der Flügelquerschnitte ändern, womit Änderungen der äußeren Belastung des Flugzeugs verbunden sind; oder es kann ein periodisch sich wiederholendes Abreißen der Luftströmung und damit sog. „Flattern“ der Flügel und Leitwerke eintreten, was meist zu Ermüdungsbrüchen führt^{1, 48}.

2. Bezeichnungen und Vorzeichenregeln.

Wege werden mit δ bezeichnet und wie Kräfte dargestellt (vgl. S. 30). Ihre Komponenten δx , δy , δz sind positiv, wenn ihre Vektorpfeile im Sinne der positiven Koordinatenachsen gerichtet sind. Bei solchen Aufgaben, wo es sich nur um Ermittlung der Durchbiegungen in Richtung der Y -Achse handelt, werden diese zur Vereinfachung δ (ohne y) genannt. Von der sonst üblichen Bezeichnung der Durchbiegungen mit y wird hier abgewichen, um Verwechslungen mit den Ordinaten y zu vermeiden.

In entsprechender Weise dient das Variationszeichen δ zur Bezeichnung von

Längenänderungen: δl , δs ,

Winkeländerungen (Drehungen): $\delta \alpha$, $\delta \beta$, $\delta \gamma$, $\delta d\vartheta$ usw.,

Drehungen von Balkenquerschnitten gegen die Balkensehne werden τ genannt.

Räumliche Drehungen werden vektoriell wie Momente dargestellt (vgl. S. 30) und im allgemeinen (vgl. Aufgabe 84 bis 90) mit Φ bzw. Ψ bezeichnet.

Die Buchstaben φ und ψ dienen gelegentlich bei ebenen Systemen zur Angabe von Drehungen in der Systemebene.

3. Grundlagen.

Hinsichtlich zweier nahe benachbarter Querschnitte „1“ und „2“ eines leicht gekrümmten Stabes (Abb. 111) bezeichnen dx und dy die Koordinaten des Schnittpunktes von Querschnitt „2“ mit der Stabachse, bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schnittpunkt von Querschnitt „1“ mit der Stabachse liegt und dessen X -Achse daselbst die Stabachse berührt; ferner bezeichne $d\vartheta$ den gegenseitigen Neigungswinkel der beiden Querschnitte und $d\gamma$ den gegenseitigen Schrängungswinkel, den die Hauptträgheitsachsen von Querschnitt „2“ gegen die von Querschnitt „1“ im Falle eines verwundenen Stabes bilden.

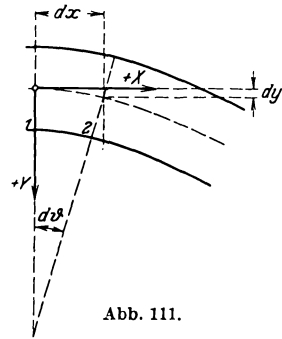


Abb. 111.

Die Größen dx , dy , $d\gamma$, $d\vartheta$, von denen die drei letzten im Sonderfall des in Abb. 112 näher behandelten geraden Stabes (sowie allgemein bei hinreichend kleinem dx) verschwinden, erleiden erfahrungsgemäß unter Einwirkung der über dx angenähert konstanten Größen S (Längskraft), Q (Querkraft), D (Drillmoment), B (Biegemoment) Änderungen entsprechend Abb. 112. Diese werden der oben eingeführten Bezeichnungsweise entsprechend als Längung δdx von dx bzw. als gegenseitige Schiebung δdy , gegenseitige Drillung $\delta d\gamma$, gegenseitige Drehung $\delta d\vartheta$ der Querschnitte 1 und 2 bezeichnet. Diese Formänderungsgrößen sind bei Beanspruchungen, die unterhalb einer gewissen Grenze bleiben, in erster Näherung proportional der Länge dx sowie proportional und gleichsinnig den Größen S , Q , D bzw. B ; dabei ist vorausgesetzt, daß B und Q in Richtung der Hauptträgheitsachsen (vgl. S. 37) wirken.

Also

$$\begin{aligned} \delta dx &= \frac{S \cdot dx}{E F} *; & \delta dy &= \frac{Q \cdot dx}{G F'}; \\ \delta d\gamma &= \frac{D \cdot dx}{G J_a}; & \delta d\vartheta &= \frac{B \cdot dx}{E J} **. \end{aligned}$$

Die Umkehrwerte EF , GF' , GJ_a und EJ der Proportionalitätsfaktoren

* Hookesches Gesetz.

** Navier-Bernoullisches Gesetz.

$\frac{1}{EF}$, $\frac{1}{GF'}$, $\frac{1}{GJ_a}$ und $\frac{1}{EJ}$ heißen Längs-, Schub-, Drill-, Biegesteifigkeit. F ist die Querschnittsfläche; die nähere Definition der Bezeichnungen F' (reduzierte Querschnittsfläche), J_a (Drillwiderstand), J (Trägheitsmoment), E (Elastizitätsmodul), G (Gleit- oder Schubmodul) ist Aufgabe der Festigkeitslehre und wird dementsprechend hier übergangen, zumal da in den Beispielen stets die Ausdrücke EF , GF' , GJ_a und EJ als gegebene Größen betrachtet werden (vgl. S. 37)^{26, 48}.

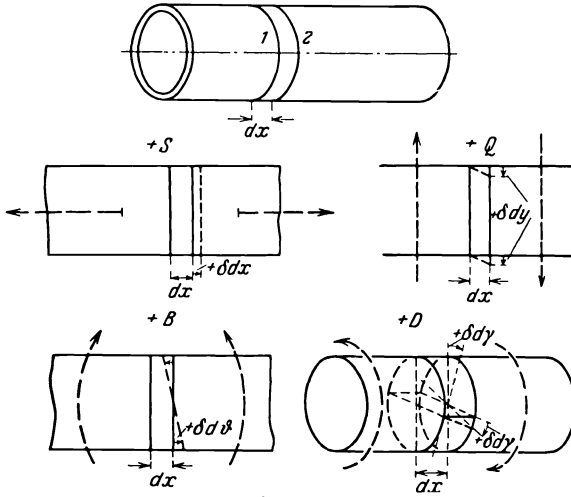


Abb. 112.

Die eingetragenen Pfeile sollen andeuten, durch welche äußeren Kräfte bzw. Momente positive innere Kräfte und Momente S, Q, B, D und positive Formänderungen entstehen (s. S. 38÷41).

Aus dem linearen Zusammenhang zwischen der gegenseitigen Verschiebung zweier Nachbarquerschnitte und den Größen S, Q, D bzw. B folgt, daß im allgemeinen die Verschiebungen infolge einzelner Teilbelastungszustände einander überlagert werden können und dann den Verschiebungszustand für die Gesamtbelastung liefern. Voraussetzung dafür ist aber, daß es sich nicht um Fälle handelt, in denen das verformte System wesentlich verschieden ist vom unverformten, so daß sich am verformten System andere Werte S, Q, D und B ergeben würden als mit den geometrischen Verhältnissen des unverformten Systems (vgl. § 15).

4. Berechnung der Formänderung.

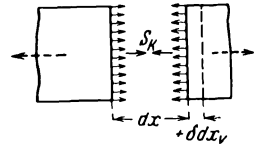
Irgendeine Verschiebungs- (Weg- oder Drehungs-)Komponente einer Stelle eines Tragwerks in einer beliebig festgelegten Richtung kann mittels des „Prinzips der virtuellen Verrückungen“, in der Statik meist „Arbeitsgleichung“ genannt, nach folgendem Gedankengang ermittelt werden:

Wirkt auf ein (hinreichend gestütztes) System irgendein beliebiger Belastungszustand „ K “, so bilden die äußeren sowie die von Punkt zu Punkt bzw. von Querschnitt zu Querschnitt wirkenden inneren Kräfte und Momente ein Gleichgewichtssystem. Wird nun jeder Stelle des Systems eine Verschiebung*, wie sie z. B. unter Einwirkung irgendeines beliebigen Belastungszustandes „ V “ tatsächlich zustande kommen würde, erteilt gedacht, so leisten dabei die einzelnen äußeren bzw. inneren Kräfte des Zustandes „ K “ äußere bzw. innere Arbeiten:

$$\delta A_a = \mathfrak{P}_K \cdot \delta v \quad \text{bzw.} \quad = \mathfrak{M}_K \cdot \Phi_V;$$

$$\delta A_i = -S_K \cdot \delta dx_V, \quad -Q_K \cdot \delta dy_V, \quad -D_K \cdot \delta d\gamma_V \quad \text{bzw.} \quad -B_K \cdot \delta d\vartheta_V.$$

δv bzw. Φ_V sind die Weg- bzw. Drehungskomponenten der Angriffspunkte der äußeren Kräfte und Momente des Zustandes „ K “ bei Formänderung gemäß dem Zustande „ V “, gemessen in Richtung der Kräfte und Momente des Zustandes „ K “. Die Arbeiten der inneren Kräfte sind negativ; denn z. B. bei einer Vergrößerung des Abstands dx zweier Querschnitte leistet eine zwischen diesen wirkende positive (Zug-) Kraft S gemäß Abb. 113 negative Arbeit.



$\delta A_i = -S_K \cdot \delta dx_V$

Abb. 113.

Da nun an jedem Punkte des mit Zustand „ K “ belasteten Systems Gleichgewicht herrscht, leisten seine äußeren und inneren Kräfte insgesamt keine Arbeit, wenn die einzelnen Systempunkte gegeneinander gemäß dem Zustande „ V “ um kleine Beträge verschoben gedacht werden**. Folglich wird:

$$\sum \delta A_a + \sum \delta A_i = 0;$$

also:

$$\begin{aligned} \sum \mathfrak{P}_K \cdot \delta v + \sum \mathfrak{M}_K \cdot \Phi_V &= \sum \int S_K \cdot \delta dx_V + \sum \int Q_K \cdot \delta dy_V \\ &+ \sum \int D_K \cdot \delta d\gamma_V + \sum \int B_K \cdot \delta d\vartheta_V \end{aligned}$$

oder mit

$$\delta dx_V = \frac{S_V \cdot dx}{EF}, \quad \delta dy_V = \frac{Q_V \cdot dx}{GF'}, \quad \delta d\gamma_V = \frac{D_V \cdot dx}{GJ_d}, \quad \delta d\vartheta_V = \frac{B_V \cdot dx}{EJ}:$$

$$\begin{aligned} \sum \mathfrak{P}_K \cdot \delta v + \sum \mathfrak{M}_K \cdot \Phi_V &= \sum \int S_K \cdot \frac{S_V \cdot dx}{EF} + \sum \int Q_K \cdot \frac{Q_V \cdot dx}{GF'} \\ &+ \sum \int D_K \cdot \frac{D_V \cdot dx}{GJ_d} + \sum \int B_K \cdot \frac{B_V \cdot dx}{EJ}. \end{aligned}$$

* In Frage kommen nur solche Verschiebungen, bei denen nirgends der Zusammenhang zweier miteinander verbundener Stellen zerstört wird; ferner dürfen als starr vorausgesetzte Glieder ihre Länge und Gestalt nicht ändern.

** Bei Annahme großer, sog. endlicher Verschiebungen würde das System eine Form erhalten, bei der kein Gleichgewicht zwischen den ursprünglichen inneren Kräften bzw. Momenten S_K, B_K usw. und der äußeren Belastung mehr möglich ist.

Die Summen \sum erstrecken sich dabei über sämtliche Glieder des Systems*.

Im allgemeinen ist bei Stabwerken die Längskraft S über je einen Einzelstab konstant; dann geht der Ausdruck $\sum \int S_K \cdot \delta dx_V = \sum \int S_K \cdot \frac{S_V \cdot dx}{EF}$ über in $\sum S_K \cdot \delta s_V$ bzw. bei konstantem EF in $\sum S_K \cdot \frac{S_V \cdot s}{EF}$. Wird nun an einem starr gelagerten System der Belastungszustand „ K “ z. B. so gewählt, daß nur an einer Stelle i in Richtung einer gesuchten Wegkomponente $\delta_{i,V}$ die Kraft „ 1 “ eine äußere Arbeit leistet, so ist damit die gesuchte Wegkomponente $\delta_{i,V}$ gegeben durch

$$1 \cdot \delta_{i,V} = \sum \int S_K \cdot \frac{S_V^* \cdot dx}{EF} + \sum \int \dots + \dots$$

(Jedes nachgiebig gelagerte System kann durch ein gleichwertiges starr gelagertes System ersetzt werden, indem zwischen dem Widerlager und dem System selbst Stäbe mit passend gewählter Steifigkeit eingeschaltet gedacht werden.) Durch geeignete Wahl des Zustandes „ K “ können in entsprechender Weise auch Drehungen oder irgendwelche Verschiebungsgruppen, z. B. die Differenz zweier Wege, gefunden werden.

Der hier mit „ V “ bezeichnete Zustand, für den eine Verschiebung gesucht wird, wird im folgenden als „gegebener Zustand 0“, der passend zu wählende Zustand „ K “ als „Hilfzustand I bzw. II usw.“ bezeichnet.

Wo es jedoch darauf ankommt, die Verschiebungen sämtlicher oder sehr vieler Stellen eines Systems zu finden, würde dieses Verfahren zu umständlich werden. In solchen Fällen wird die Arbeitsgleichung lediglich insofern herangezogen, als sie einfache Formeln liefert für die Längenänderungen der einzelnen Stäbe oder für die Drehungen der Stab-Endquerschnitte gegen die Stabsehne bzw. für die Berechnung der Winkeländerungen in einem Fachwerksdreieck. Dann kann durch Aneinanderreihen dieser einzelnen Verformungsgrößen aus rein geometrischen Betrachtungen leicht das gesamte Formänderungsbild des Systems gewonnen werden. Solche Verfahren sind bekannt unter den Namen: „Stabzugverfahren“ bzw. „Williotplan“ (vgl. Aufgabe 52 bis 54).

Sofern nur Verschiebungskomponenten der Systempunkte in einer Richtung gesucht werden, z. B. die Durchbiegungen des Systems in lotrechter Richtung, kann von einer Analogie zwischen der Biegelinie des betreffenden Systems und der Biegemomentenlinie eines „stellvertretenden Balkens“ Gebrauch gemacht werden derart, daß der stellvertretende Balken mit gewissen „elastischen Gewichten W “ belastet wird, die leicht so festgelegt werden können, daß seine damit bestimmte

* Die Summenzeichen können fortgelassen werden, wenn die Integralzeichen auf das ganze System statt auf seine Einzelglieder bezogen werden.

Die Durchführung der Integration ergibt:

$$\delta_{3,0} = \frac{P_{2,0}}{6 E J} [3 b \xi^2 - (\xi - a)^3] + \frac{P_{2,0}}{G I'} (\xi - a).$$

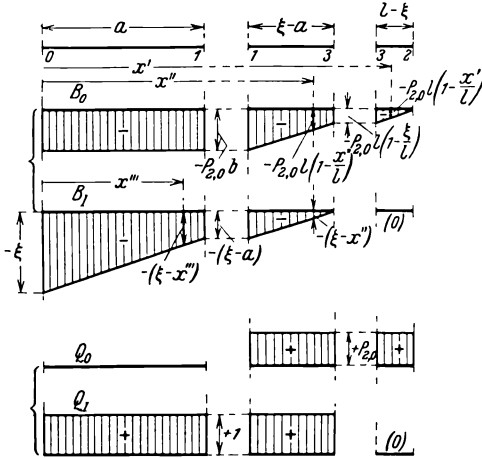


Abb. 115.

Zwecks Verringerung des zur Durchführung solcher Integrationen notwendigen Zeitaufwandes sind in Tabelle 94 des Anhangs die wichtigsten vorkommenden Kombinationen der Werte $\int (W_i) \cdot (W_k) \cdot dx$ zusammengestellt. Damit ergibt sich $\delta_{3,0}$, wenn die B_0 - und B_1 - bzw. die Q_0 - und Q_1 -Flächen der einzelnen Teilabschnitte $0 \div 1$, $1 \div 3$, $3 \div 2$ entsprechend dem Schema in Abb. 115 miteinander kombiniert werden.

Aufgabe 42.

Die Drehung $\delta\alpha_0$ einer Strecke l infolge gegebener Wegkomponenten $\delta x_{a,0}$, $\delta y_{a,0}$ und $\delta x_{b,0}$, $\delta y_{b,0}$ der Endpunkte a und b ist zu ermitteln.

Die Wegkomponenten δ können als Längenänderungen gedachter Stäbe s_1 bis s_4 (Abb. 116) aufgefaßt werden. Positiv sind die Wegkomponenten, wenn sie im Sinne von $+X$ und $+Y$ gerichtet sind, bzw. die Längenänderungen der gedachten Stäbe, wenn sie Zunahmen der Stablängen darstellen.

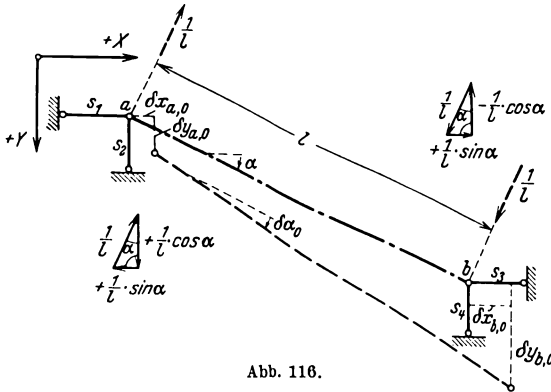


Abb. 116.

Mittels des in Abb. 116 dargestellten Hilfsbelastungszustandes „I“ (Kräftepaar $\frac{1}{l} \cdot l$) ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$+ \left(\frac{1}{l} \cdot l \right) \cdot \delta \alpha_0 = \sum S_I \cdot \delta s_0,$$

$$\delta \alpha_0 = \frac{1}{l} [\sin \alpha \cdot (+ \delta x_{a,0}) + \cos \alpha \cdot (- \delta y_{a,0})]$$

$$+ \frac{1}{l} [\sin \alpha \cdot (- \delta x_{b,0}) - \cos \alpha \cdot (- \delta y_{b,0})],$$

$$\delta \alpha_0 = \frac{(\delta y_{b,0} - \delta y_{a,0})(x_b - x_a) - (\delta x_{b,0} - \delta x_{a,0})(y_b - y_a)}{l^2}.$$

Bemerkung: Die gedachten Stäbe können auch so gelegt werden, daß positiven Wegkomponenten der Punkte a und b positive Längenänderungen (Längungen) dieser Stäbe entsprechen (vgl. Aufgabe 64).

Aufgabe 43.

Gesucht sei die Drehung $\delta \alpha_0$ der Sehne a, b des in Abb. 117 angedeuteten abgestrebten Fachwerkhols, wenn die Wegkomponenten $\delta x_{a,0}$, $\delta y_{a,0}$ des Punktes a (positiv im Sinne von $+X$ bzw. $+Y$), die Längenänderungen δl_0 der Sehne a, b und δst_0 der Strebe c, b (positiv als Längungen) gegeben sind.

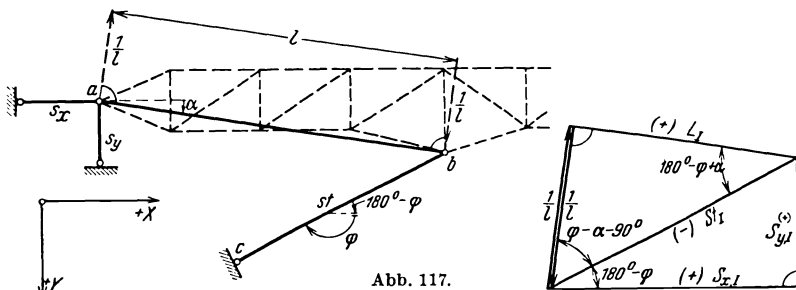


Abb. 117.

Die Wegkomponenten $\delta_{a,0}$ des Punktes a sowie die Längenänderung δl_0 der Sehne a, b können als Längenänderungen gedachter Stäbe s_x , s_y , l (Abb. 117) aufgefaßt werden. Mittels des in Abb. 117 dargestellten Hilfsbelastungszustandes I (Kräftepaar $\frac{1}{l} \cdot l$) ergibt sich nach der Arbeitsgleichung (vgl. Aufgabe 42):

$$+ \left(\frac{1}{l} \cdot l \right) \cdot \delta \alpha_0 = \sum S_I \cdot \delta s_0,$$

$$\delta \alpha_0 = \frac{\cos(180^\circ - \varphi)}{l \cos(\varphi - \alpha - 90^\circ)} \cdot \delta x_{a,0} + \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{l \cos(\varphi - \alpha - 90^\circ)} \cdot (- \delta y_{a,0})$$

$$+ \frac{1}{l} \operatorname{tg}(\varphi - \alpha - 90^\circ) \cdot \delta l_0 - \frac{1}{l \cos(\varphi - \alpha - 90^\circ)} \cdot \delta st_0.$$

Aufgabe 44 bis 47: Zweifach gestützte, auf Biegung und Schub beanspruchte Holme.

Aufgabe 44.

Welchen Betrag zeigt die Meßuhr auf der in Abb. 118 dargestellten Meßbrücke bei Belastung des Balkens mit $P_{1,0}$ und $P_{5,0}$ an ($EJ = \text{const}$, $GF' = \text{const}$)?

Der angezeigte Betrag ist:

$$\bar{\delta} = \delta_{3,0} - \frac{\delta_{2,0} + \delta_{4,0}}{2};$$

er ergibt sich mittels des eingetragenen Hilfsbelastungszustandes „I“ ($P_{3,I} = +1$, $P_{2,I} = P_{4,I} = -\frac{1}{2}$; Abb. 119) aus der Arbeitsgleichung:

$$\sum P_{i,I} \cdot \delta_{i,0} = \sum \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \sum \int Q_I \cdot \frac{Q_0 \cdot dx}{G F'}$$

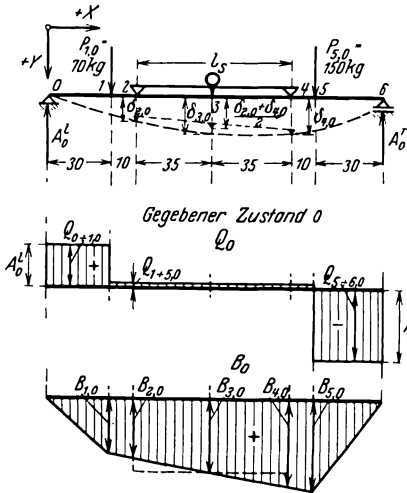


Abb. 118.

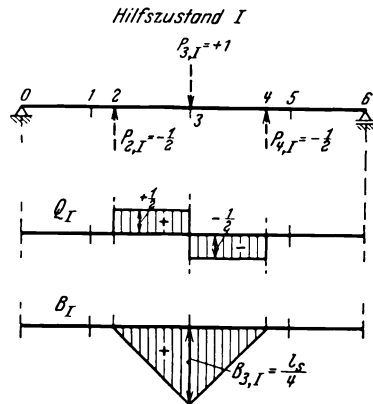


Abb. 119.

Die Entwicklung der linken Gleichungsseite ergibt:

$$-\frac{1}{2} \cdot \delta_{2,0} + 1 \cdot \delta_{3,0} - \frac{1}{2} \cdot \delta_{4,0} = \sum \int \dots + \sum \int \dots;$$

das ist der gesuchte Ausdruck für $\bar{\delta}$.

Der Querkraftanteil fällt fort, da innerhalb des Integrationsbereichs die Q_0 -Fläche symmetrisch und die Q_I -Fläche antisymmetrisch ist.

Die Auswertung der Integrale $\frac{1}{EJ} \int B_I B_0 dx$ erfolgt an Hand der Tabelle 94, Anhang; es ergibt sich:

$$\bar{\delta} = \frac{l_3 B_{3,I}}{2 \cdot 6 EJ} (2 B_{3,0} + B_{2,0} + 2 B_{3,0} + B_{4,0})$$

und mit $\frac{B_{2,0} + B_{4,0}}{2} = B_{3,0}$:

$$\bar{\delta} = \frac{l_3 B_{3,I} B_{3,0}}{2 EJ}$$

Das gleiche Ergebnis wäre unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der B_0 - und B_I -Flächen bezüglich der Mittelachse einfacher gefunden worden (Verwendung der gestrichelten B_0 -Fläche, Abb. 118).

Aufgabe 45.

Es ist der durch die Biegemomente bedingte Anteil der Durchbiegungen $\delta_{i,0}$ an zwei Stellen $i = 1$ bzw. 2 eines Holms mit ungleichmäßig verteilter Steifigkeit zu berechnen (Abb. 120). Die Durchführung erfolgt zwecks einfacherer Darstellung von Anfang an zahlenmäßig.

1. Hilfszustände I und II (Abb. 121).

Zur Ausnutzung der Symmetrie in Aufbau und Belastung wird bei Berechnung eines Wertes δ^r (auf der rechten Systemhälfte) von dem Wert $\delta^r + \delta^l$ ausgegangen (δ^l ist der zu δ^r spiegelbildliche Wert auf der linken Systemhälfte). Die Berechnung von $\delta^r + \delta^l$ erfolgt mittels der eingezeichneten, ebenfalls symmetrischen Hilfsbelastungszustände I und II nach der Arbeitsgleichung. Die Durchbiegung

$$\delta^r = \frac{1}{2} \cdot (\delta^r + \delta^l)$$

ergibt sich also, wenn die Integrationen in der Arbeitsgleichung nur über eine Systemhälfte erstreckt werden.

(Die unmittelbare Berechnung von δ^r ohne Ausnutzung der Symmetrie würde die Einführung unsymmetrischer Hilfszustände, d. h. einseitiger Einzellasten $P = 1$ erfordern; dann ändern sich die Momentenflächen B_I und B_{II} nur im

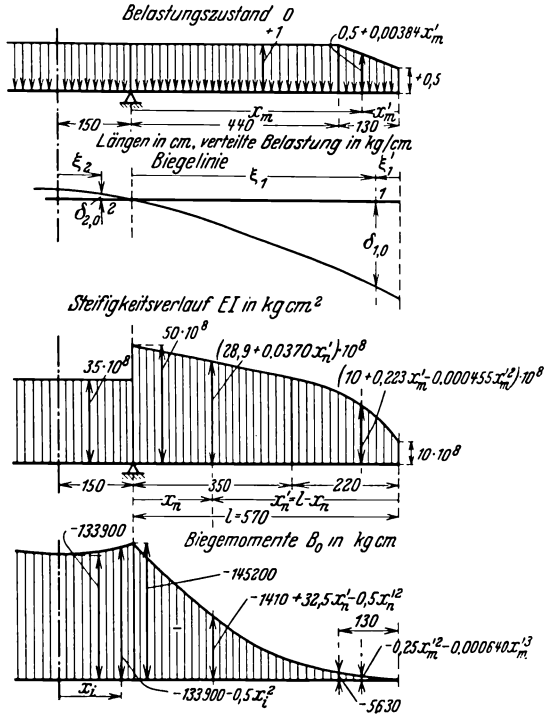


Abb. 120.

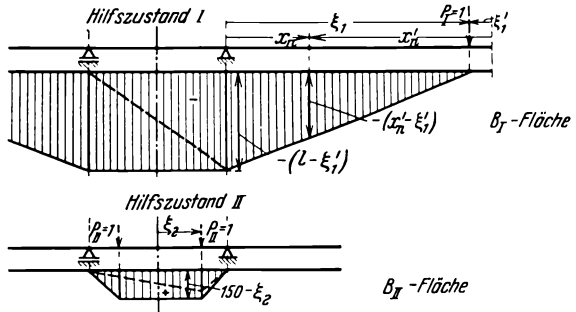


Abb. 121.

Mittelfeld; in Abb. 121 gestrichelt. Die Integration hat dann über das rechte Außenfeld und das ganze Mittelfeld zu erfolgen.)

2. Formeln für die Durchbiegungen $\delta_{i,0}$.

Änderungen der Gesetzmäßigkeit des Verlaufs der B_0 - bzw. EJ -Linie liegen vor an den Auflagerpunkten und an den Stellen $x' = 130$ cm bzw. $x' = 220$ cm; dementsprechend sind im folgenden die Integrationsbereiche abgegrenzt.

Die Durchbiegung $\delta_{1,0}$ für $0 < \xi'_1 < 130$ cm im Kragfeld ist:

$$1 \cdot \delta_{1,0} = \underbrace{\int_0^{150} B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ}}_{\text{Baldachin}} + \underbrace{\int_{\xi'_1}^{130} B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx'}{EJ} + \int_{130}^{220} B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx'}{EJ} + \int_{220}^{570} B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx'}{EJ}}_{\text{Kragfeld}},$$

$$\delta_{1,0} = \frac{-(l - \xi'_1)}{35 \cdot 10^8} \int_0^{150} (-133900 - 0,5 x^2) dx$$

$$+ \int_{\xi'_1}^{130} \frac{-(x' - \xi'_1)(-0,25 x'^2 - 0,000640 x'^3) dx'}{(10 + 0,223 x' - 0,000455 x'^2) \cdot 10^8}$$

$$+ \int_{130}^{220} \frac{-(x' - \xi'_1)(-1410 + 32,5 x' - 0,5 x'^2) dx'}{(10 + 0,223 x' - 0,000455 x'^2) \cdot 10^8}$$

$$+ \int_{220}^{570} \frac{-(x' - \xi'_1)(-1410 + 32,5 x' - 0,5 x'^2) dx'}{(28,9 + 0,037 x') \cdot 10^8}.$$

Die Durchbiegung $\delta_{2,0}$ für $0 < \xi_2 < 150$ cm im Baldachinfeld ist:

$$1 \cdot \delta_{2,0} = \int_0^{\xi_2} B_{II} \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \int_{\xi_2}^{150} B_{II} \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ},$$

$$\delta_{2,0} = \int_0^{\xi_2} \frac{(150 - \xi_2)(-133900 - 0,5 x^2) dx}{35 \cdot 10^8}$$

$$+ \int_{\xi_2}^{150} \frac{(150 - x)(-133900 - 0,5 x^2) dx}{35 \cdot 10^8}.$$

Im Baldachinfeld kann wegen konstanter Steifigkeit die Berechnung der Integrale auch wie in den vorhergehenden Aufgaben nach Tabelle 94, Anhang, erfolgen.

3. Allgemeines zur Durchführung der Integrationen.

a) Exakte Integration.

Zur formelmäßigen Integration der hier vorkommenden unecht gebrochenen rationalen Funktionen werden die Zähler zunächst so weit durch die Nennerfunktion dividiert, daß Summen von ganzen und echt gebrochenen rationalen Funktionen übrig bleiben. Die exakte Integration der ganzen rationalen Funktionen erfolgt nach der Formel:

$$\int_m^n (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots) \cdot dx = \alpha \cdot (n - m) + \beta \cdot \frac{n^2 - m^2}{2} + \gamma \cdot \frac{n^3 - m^3}{3} + \dots,$$

die der echt gebrochenen nach:

$$\int_m^n \frac{\alpha + \beta x}{a + 2bx + cx^2} dx = \left[\frac{\beta}{2c} \ln(a + 2bx + cx^2) \right]_m^n + \frac{\alpha c - \beta b}{c} \int_m^n \frac{dx}{a + 2bx + cx^2},$$

oder mit der Abkürzung $\Delta = ac - b^2$:

$$\int_m^n \frac{dx}{a + 2bx + cx^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b + cx}{\sqrt{\Delta}} \right]_m^n, \quad \text{wenn } \Delta > 0,$$

$$\text{bzw.} = \left[-\frac{1}{b + cx} \right]_m^n, \quad \text{wenn } \Delta = 0,$$

$$\text{bzw.} = \left[\frac{1}{2\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{\sqrt{-\Delta} - b - cx}{\sqrt{-\Delta} + b + cx} \right]_m^n, \quad \text{wenn } \Delta < 0.$$

Die Durchführung der Integration in dieser Weise ist aber nur in einfacheren Fällen zweckmäßig.

b) Numerische Integration (vgl. Tabelle 94, Anhang).

Im folgenden bedeute B_k die Biegemomentenfläche irgend eines Hilfsbelastungszustandes.

α) Die $\frac{B_0 B_k}{EJ}$ -Fläche wird z. B. innerhalb eines Integrationsbereichs von der Länge λ in n Teilabschnitte so zerlegt, daß geradlinige Begrenzung in den einzelnen Teilabschnitten angenommen werden kann. (Abb. 123, n sei eine gerade Zahl.)

Bedeutet η_i eine der Teilpunktsordinaten, so gilt für den Integrationsbereich λ :

$$\int_0^\lambda \frac{B_0 B_k}{EJ} \cdot dx = \frac{\lambda}{2n} \cdot [\eta_0 + \eta_n + 2 \sum \eta_i] \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n - 1).$$

β) Etwas genauer ergibt sich $\int_0^\lambda \frac{B_0 B_k}{EJ} \cdot dx$ nach der sog. Simpson-
schen Regel, wenn angenommen wird, die $\frac{B_0 B_k}{EJ}$ -Linie verlaufe über je
2 benachbarten Teilabschnitten parabelförmig derart, daß diese Parabeln
tangential ineinander übergehen. Dann ergibt sich:

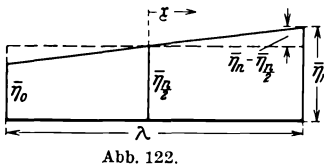
$$\int_0^\lambda \frac{B_0 B_k}{EJ} \cdot dx = \frac{\lambda}{3n} \cdot [\eta_0 + \eta_n + 4 \sum \eta_u + 2 \sum \eta_g]$$

($u = 1, 3, 5, \dots, n-1$; $g = 2, 4, 6, \dots, n-2$).

γ) Sind im Verlauf einer Untersuchung mehrere über denselben
Integrationsbereich λ sich erstreckende Ausdrücke von der Form:

$$\int_0^\lambda \frac{B_0 B_I}{EJ} \cdot dx, \quad \int_0^\lambda \frac{B_0 B_{II}}{EJ} \cdot dx, \dots, \quad \int_0^\lambda \frac{B_0 B_k}{EJ} \cdot dx \dots$$

zu ermitteln und ist dabei die $B_I, B_{II} \dots B_k$ -Linie jeweils geradlinig,
so erfolgt die numerische Integration zweckmäßig nach der Formel



$$\int_0^\lambda \frac{B_0 B_k}{EJ} \cdot dx = \bar{\eta}_{n/2} \cdot \mathfrak{S}_0 + \frac{2(\bar{\eta}_n - \bar{\eta}_{n/2})}{\lambda} \cdot \mathfrak{S}_0.$$

Abb. 122.

Hierin ist (Abb. 122):

$\bar{\eta}_{n/2}$ bzw. $\bar{\eta}_n$ die Mittel- bzw. Endordinate der (geradlinigen) B_k -Fläche,
 \mathfrak{S}_0 der Inhalt der $\frac{B_0}{EJ}$ -Fläche:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\lambda}{2n} \cdot [\eta_0 + \eta_n + 2 \sum \eta_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

\mathfrak{S}_0 das Statische Moment der $\frac{B_0}{EJ}$ -Fläche bezüglich der Mitte des
Integrationsbereiches λ :

$$\mathfrak{S}_0 = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} \frac{B_0 \cdot \xi}{EJ} \cdot d\xi = \frac{\lambda^2}{2n^2} \cdot \left[\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{3} \right) (\eta_n - \eta_0) + \sum (2i - n) \cdot \eta_i \right]$$

(ξ gemessen von der Mitte des Integrationsbereiches aus, positiv
nach rechts; $i = 1, 2, \dots, n-1$).

Für die $\frac{B_0}{EJ}$ -Linie ist hierbei gerader Verlauf zwischen zwei Teilpunkten
angenommen; vgl. α).

4. Zahlenmäßige Bestimmung der Durchbiegung $\delta_{1,0}$ an der Stelle $\xi_1 = 500 \text{ cm}$ ($\xi'_1 = 70 \text{ cm}$).

a) Nach 3. b α).

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \frac{150}{4} [+ 1,913 + 2,075 + 2 \cdot 1,953] \cdot 10^{-2} \\ &\quad + \frac{500}{16} [1,450 + 0 + 2(1,038 + 0,709 \\ &\quad + 0,450 + 0,258 + 0,126 + 0,049 \\ &\quad + 0,012)] \cdot 10^{-2} \\ &= 2,96 + 2,10 = 5,06 \text{ cm.} \end{aligned}$$

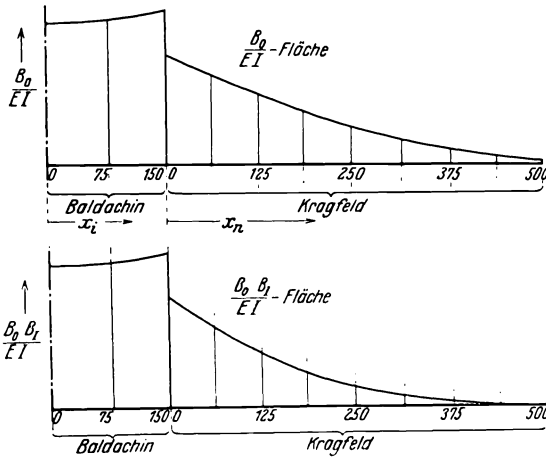


Abb. 123.

b) Nach 3. b β).

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \frac{150}{6} [1,913 + 2,075 + 4 \cdot 1,953] \cdot 10^{-2} \\ &\quad + \frac{500}{24} [1,450 + 0 + 4(1,038 + 0,450 \\ &\quad + 0,126 + 0,012) + 2(0,709 + 0,258 \\ &\quad + 0,049)] \cdot 10^{-2} \\ &= 2,95 + 2,08 = 5,03 \text{ cm.} \end{aligned}$$

c) Nach 3. b γ).

Anteil des Baldachinfeldes:

$$\begin{aligned} \delta_{0} &= \frac{150}{4} [- 0,383 - 0,415 - 2 \cdot 0,391] \cdot 10^{-4} \\ &= - 59,1 \cdot 10^{-4} [-]; \end{aligned}$$

$\delta_{0} = 0 [\text{cm}]$ wegen Symmetrie.

Tabelle 25. Ordinaten der $\frac{B_0}{EJ}$ - bzw. der $\frac{B_0 B_1}{EJ}$ -Flächen.

[Das halbe Baldachinfeld wird in zwei, das Kragfeld in acht Teilabschnitte zerlegt (Abb. 123).]

Stelle x	Baldachinfeld				Kragfeld							
	0	75	150	0	62,5	125	187,5	250	312,5	375	437,5	500
$\frac{B_0}{EJ} \cdot 10^4$	-0,383	-0,391	-0,415	-0,290	-0,237	-0,189	-0,144	-0,103	-0,067	-0,039	-0,019	-0,006
$\frac{B_0 B_1}{EJ} \cdot 10^2$	+1,913	+1,953	+2,075	+1,450	+1,038	+0,709	+0,450	+0,258	+0,126	+0,049	+0,012	0

Anteil des Kragfeldes:

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{500}{16} [-0,290 - 0,006 + 2(-0,237 - 0,189 - 0,144 - 0,103 - 0,067 - 0,039 - 0,019)] \cdot 10^{-4} = -59,2 \cdot 10^{-4} [-];$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0 &= \frac{500^2}{2 \cdot 64} \left[\left(4 - \frac{1}{3} \right) \cdot (-0,006 + 0,290) + (-6) \cdot (-0,237) \right. \\ &\quad + (-4) \cdot (-0,189) + (-2) \cdot (-0,144) + (0) \cdot (-0,103) \\ &\quad \left. + (+2) \cdot (-0,067) + (+4) \cdot (0,039) + (+6) \cdot (-0,019) \right] \cdot 10^{-4} \\ &= 6050 \cdot 10^{-4} [\text{cm}]. \end{aligned}$$

Nach Abb. 121 und 122 ist

$$\begin{aligned} \text{im Baldachinfeld: } \bar{\eta}_n &= -(l - \xi'_1) = -500 \text{ cm,} \\ \bar{\eta}_{\frac{n}{2}} &= -(l - \xi'_1) = -500 \text{ cm;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{im Kragfeld: } \bar{\eta}_n &= 0, \\ \bar{\eta}_{\frac{n}{2}} &= -\frac{1}{2} \cdot (l - \xi'_1) = -250 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= -500 \cdot (-59,1 \cdot 10^{-4}) + \frac{2 \cdot (-500 + 500)}{150} \cdot 0 \\ &\quad + (-250) \cdot (-59,2 \cdot 10^{-4}) + \frac{2 \cdot (0 + 250)}{500} \cdot 6050 \cdot 10^{-4} \\ &= 5,04 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Aufgabe 46.

Für den in Abb. 124 dargestellten mit Querlasten und Einzelmomenten belasteten Holm ist zu ermitteln:

1. die lotrechte Verschiebung (Durchbiegung) $\delta y_{5,0}$ und der Neigungswinkel $\tau_{5,0} = \frac{d\delta y_{5,0}}{dx}$ an der Stelle 5 infolge gegebener Belastung (Zustand 0).

2. die ganze Biege- und Neigungslinie.

Zu 1. Es ist

$$1 \cdot \delta y_{5,0} = \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \int Q_I \cdot \frac{Q_0 \cdot dx}{GF'}$$

(Abb. 124 und 125),

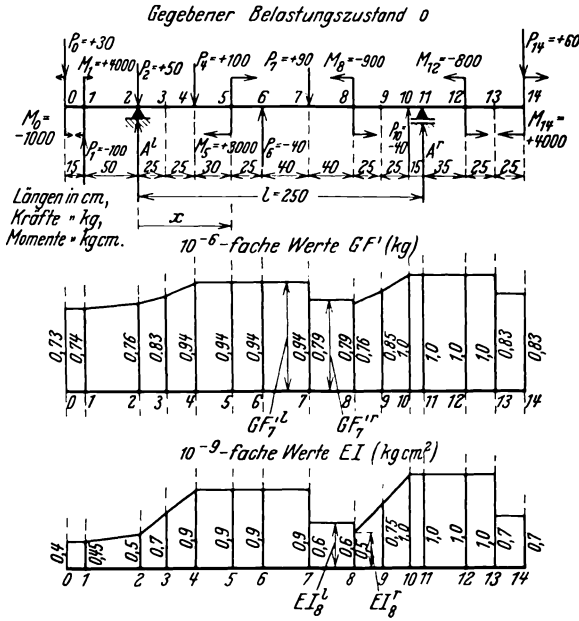
erstreckt über den Bereich, in dem sich die Biegemomenten- und Querkraftflächen der Zustände 0 und I überdecken.

Entsprechend ist:

$$1 \cdot \tau_{5,0} = \int B_{II} \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \int Q_{II} \cdot \frac{Q_0 \cdot dx}{GF'}$$

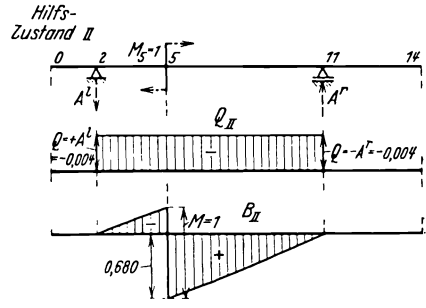
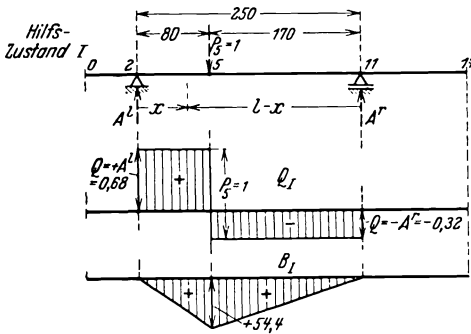
(Abb. 124 und 126).

Wird zur numerischen Integration angenommen, die B_0/EJ - bzw. die Q_0/GF' -Linie sei zwischen je zwei Teilpunkten $i-1, i$ gerade



Q_0 und B_0 Fläche s. Aufg. 20, Abb. 51

Abb. 124.



(nötigenfalls können weitere Teilpunkte eingeschaltet werden), so ist nach Abb. 127, 128 und Tabelle 94, Anhang:

$$\delta y_{5,0} \text{ bzw. } \tau_{5,0}$$

$$= \frac{1}{6} \sum \left[\frac{B_i^l}{EJ_i} \cdot (B_{i-1,k}^r + 2B_{i,k}^l) \cdot \lambda_{i-1,i} + \frac{B_i^r}{EJ_i} \cdot (2B_{i,k}^r + B_{i+1,k}^l) \cdot \lambda_{i,i+1} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \left[\frac{Q_{i-1,i(0)}}{GF_i^l} \cdot Q_{i-1,i(k)} \cdot \lambda_{i-1,i} + \frac{Q_{i,i+1(0)}}{GF_i^r} \cdot Q_{i,i+1(k)} \cdot \lambda_{i,i+1} \right].$$

Hierin bedeutet der Index k den Hilfszustand I bei Ermittlung von $\delta y_{5,0}$ bzw. den Hilfszustand II bei Ermittlung von $\tau_{5,0}$; B_i^l bzw. B_i^r ist das Biegemoment unmittelbar links bzw. rechts neben der Stelle i .

Tabelle 26. Ermittlung

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	
Stelle i	$EJ'_i \cdot 10^{-9}$ $EJ''_i \cdot 10^{-9}$ [kgcm ²]	$GF'_i \cdot 10^{-6}$ $GF''_i \cdot 10^{-6}$ [kg]	$\lambda_{i-1, i}$ [cm]	$B^i_{i,0}$ $B^i_{i,0}$ [kgcm]	$Q_{i-1, i(0)}$ [kg]	$B^i_{i,1}$ $B^i_{i,1}$ [cm]	$Q_{i-1, i(1)}$ [—]
0	0,4	0,73		0 -1000			
1	0,45	0,74	15	-1450 +2550	-30,0		
			50		+70,0		
2	0,5	0,76		+6050			
3	0,7	0,83	25		+26,4	0	+0,68
			25	+6710	+26,4	+17	+0,68
4	0,9	0,94		+7370			
5	0,9	0,94	30		-73,6	+34	+0,68
			25	+5162 +8162	-73,6	+54,4	-0,32
6	0,9	0,94		+6322			
7	0,9 0,6	0,94 0,79	40		-33,6	+46,4	-0,32
			40	+4978	-123,6	+33,6	-0,32
8	0,6 0,5	0,79 0,76	25	+34 -866	-123,6	+20,8	-0,32
			25	-3956	-123,6	+12,8	-0,32
9	0,75	0,85		-7046			
10	1	1,0	15		-83,6	+4,8	-0,32
			35	-8300	+60,0	0	
12	1	1,0	25	-6200 -7000	+60,0		
			25	-5500	+60,0		
13	1 0,7	1,0 0,83		-4000 0			
14	0,7	0,83					

Wird angenommen, die Linie der Ausdrücke $\frac{B_0 B_k}{EJ}$ bzw. $\frac{Q_0 Q_k}{GF'}$ sei zwischen je zwei Teilpunkten gerade, so ergibt sich einfacher (als Flächeninhalt):

$$\delta y_{5,0} \text{ bzw. } \tau_{5,0} = \frac{1}{2} \sum \left[\frac{B_{i,0}^l B_{i,k}^r}{EJ_i^l} \cdot \lambda_{i-1,i} + \frac{B_{i,0}^r B_{i,k}^l}{EJ_i^r} \cdot \lambda_{i,i+1} \right] + \frac{1}{2} \sum \left[\frac{Q_{i-1,i(0)} Q_{i-1,i(k)}}{GF_i^l} \cdot \lambda_{i-1,i} + \frac{Q_{i,i+1(0)} Q_{i,i+1(k)}}{GF_i^r} \cdot \lambda_{i,i+1} \right].$$

(k bedeutet wiederum Zustand I bzw. II.)

Zahlenmäßige Durchrechnung s. Tabelle 26.

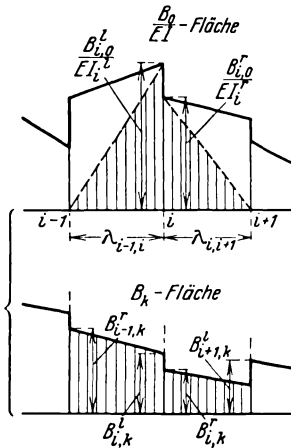


Abb. 127.

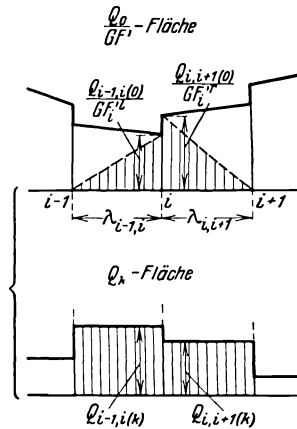


Abb. 128.

Zu 2. Aus Abb. 129 folgt für die Durchbiegung δy_{i+1} an einer Stelle $i+1$ und für die Sehnenneigung $\delta \alpha_{i,i+1}$ von $i, i+1$ der Biegelinie eines beliebigen Balkenstücks:

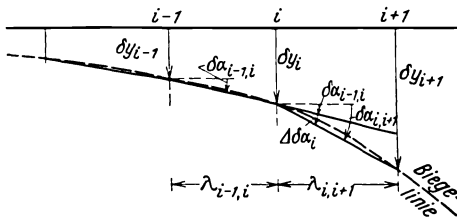


Abb. 129.

$$\delta y_{i+1} = \delta y_i + \delta \alpha_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1},$$

$$\delta \alpha_{i,i+1} = \delta \alpha_{i-1,i} + \Delta \delta \alpha_i$$

$$\text{oder mit } W_i = -\Delta \delta \alpha_i:$$

$$\delta \alpha_{i,i+1} = \delta \alpha_{i-1,i} - W_i.$$

(Der Index 0 zur Kennzeichnung der Zugehörigkeit zum

gegebenen Belastungszustand 0 ist hier fortgelassen):

Da ferner

$$\Delta \delta \alpha_i = \delta \alpha_{i,i+1} - \delta \alpha_{i-1,i} = \frac{\delta y_{i+1} - \delta y_i}{\lambda_{i,i+1}} - \frac{\delta y_i - \delta y_{i-1}}{\lambda_{i-1,i}},$$

so folgt:

$$W_i = - \left(\frac{\delta y_{i+1} - \delta y_i}{\lambda_{i,i+1}} - \frac{\delta y_i - \delta y_{i-1}}{\lambda_{i-1,i}} \right).$$

Die fett gedruckten Ausdrücke für δy und $\delta \alpha$ sind ebenso aufgebaut wie die Ausdrücke für das Biegemoment und die Querkraft in Aufgabe 20, nämlich wie:

$$B_{i+1} = B_i + Q_{i,i+1} \cdot \lambda_{i,i+1},$$

$$Q_{i,i+1} = Q_{i-1,i} - P_i.$$

Also können die Durchbiegungen δy bzw. die Sehneneigungen $\delta \alpha$ aufgefaßt werden als gedachte Biegemomente bzw. Querkräfte eines mit gedachten Kräften, den sog. „elastischen Gewichten W_i “ belasteten Balkens mit gleicher Feldeinteilung wie der gegebene Balken. Die gedachten Auflagerdrücke dieses Balkens stellen also die Neigungen des wirklichen Holms über den Stützpunkten dar; und zwar ist:

$$\tau^l = +A^l \quad (= Q^l),$$

$$\tau^r = -A^r \quad (= Q^r).$$

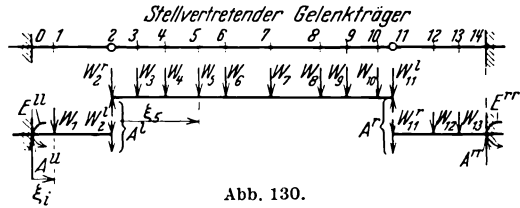


Abb. 130.

Im vorliegenden Beispiel muß der mit den W -Gewichten belastete Balken aber so beschaffen sein, daß an den Stellen 2 und 11 diese gedachten Biegemomente (nämlich die Durchbiegungen des Holms) zu Null werden. Diese Forderung erfüllt der „stellvertretende Gelenkträger“ (Abb. 130).

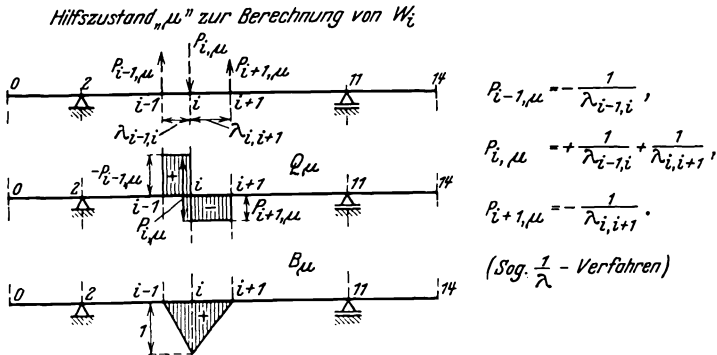


Abb. 131.

Das W -Gewicht W_i an der Stelle i ($= 1 \div 13$), also die Verschiebungsgruppe $-\left(\frac{\delta y_{i+1} - \delta y_i}{\lambda_{i,i+1}} - \frac{\delta y_i - \delta y_{i-1}}{\lambda_{i-1,i}}\right)$, ergibt sich ähnlich wie in Aufgabe 44 mittels des Hilfszustandes „ μ “ (Abb. 131) nach der Arbeitsgleichung zu:

$$W_i = \int B_0 \cdot \frac{B_\mu \cdot dx}{EJ} + \int Q_0 \cdot \frac{Q_\mu \cdot dx}{GF'}$$

Tabelle 27. Berechnung

④	①	②	③	④	⑤	⑥
Stelle <i>i</i>	$\frac{B_{i,0}^l}{E J_i^l} \cdot 10^6$	$\frac{2 B_{i,0}^l}{E J_i^l} \cdot 10^6$	$\frac{6 W_{i(B)}^l}{\lambda_{i-1,i}} \cdot 10^6$	$\lambda_{i-1,i}$	$6 W_{i(B)}^l \cdot 10^6$	$6 W_{i(B)} \cdot 10^6$
	$\frac{B_{i,0}^r}{E J_i^r} \cdot 10^6$ [cm ⁻¹]	$\frac{2 B_{i,0}^r}{E J_i^r} \cdot 10^6$ [cm ⁻¹]	$\frac{6 W_{i(B)}^r}{\lambda_{i,i+1}} \cdot 10^6$ [cm ⁻¹]		[cm]	
0	- 2,50					
1	- 3,22 + 5,66	- 6,44 + 11,32	- 8,94 + 23,42	15	- 134,1 + 1171,0	+ 1037
	2	+ 12,10	+ 24,20	+ 29,86	50	+ 1493,0
+ 33,78				25	+ 844	+ 844
3	+ 9,58	+ 19,16	+ 31,26 + 27,35	25	+ 781 + 684	+ 1465
			4	+ 16,38	+ 25,96 + 22,12	25
usw.						
11	- 8,30	- 16,60	- 23,65	15	- 354	- 354
			- 22,80	35	- 798	- 798
12	- 6,20 - 7,00	- 12,40 - 14,00	- 20,70 - 19,50	25	- 725 - 488	-
			13	- 5,50 - 7,85	- 11,00 - 15,70	- 18,00 - 21,42
14	- 5,72					

Darin bedeuten:

B_0, Q_0 die Biegemomente und Querkräfte im Holm infolge der gegebenen äußeren Belastung,

B_{μ}, Q_{μ} die Biegemomente und Querkräfte im Holm infolge eines Hilfszustandes „ μ “ nach Abb. 131.

Wird zwischen zwei Teilpunkten geradliniger Verlauf der Biegemomenten- und Querkraftlinien vorausgesetzt, so ergibt die Integration (Tabelle 94, Anhang):

$$\begin{aligned}
 W_i = & \frac{1}{6} \left[\left(\frac{B_{i-1,0}^r}{E J_{i-1}^r} + 2 \frac{B_{i,0}^l}{E J_i^l} \right) \lambda_{i-1,i} + \left(2 \frac{B_{i,0}^r}{E J_i^r} + \frac{B_{i+1,0}^l}{E J_{i+1}^l} \right) \lambda_{i,i+1} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{G F_{i-1}^r} + \frac{1}{G F_i^l} \right) Q_{i-1,i(0)} - \left(\frac{1}{G F_i^r} + \frac{1}{G F_{i+1}^l} \right) Q_{i,i+1(0)} \right].
 \end{aligned}$$

der W -Gewichte.

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
$W_{i(B)} \cdot 10^6$	$\frac{Q_{i-1, i(0)}}{G F_i' l} \cdot 10^6$	$2 W_{i(Q)}^l \cdot 10^6$	$2 W_{i(Q)} \cdot 10^6$	$W_{i(Q)} \cdot 10^6$	$W_i \cdot 10^6$
[—]	$\frac{Q_{i-1, i(0)}}{G F_i' l} \cdot 10^6$	$2 W_{i(Q)}^r \cdot 10^6$	[—]	[—]	[—]
+172,8	-41,1 -40,5	- 81,6 -186,9	-268,5	-134,3	+ 38,5
+248,8	+94,8 +92,1	+186,9	+186,9	+ 93,5	+342,3
+140,7	+34,8	- 66,6	- 66,6	- 33,3	+107,4
+244,2	+31,8	+ 66,6 - 59,9	+ 6,7	+ 3,4	+247,6
+218,8	+31,8 +28,1	+ 59,9 +156,6	+216,5	+108,3	+327,1
usw.					
- 59,0	-83,6	-167,2	-167,2	- 83,6	-142,6
-133,0	+60,0	-120,0	-120,0	- 60,0	-193,0
-202,2	+60,0	+120,0 -120,0	0	0	-202,2
-164,3	+72,3	+120,0 -144,6	- 24,6	- 12,3	-176,6

Zur Abkürzung wird geschrieben:

$$W_i = [W_i^l + W_i^r]_{(B)} + [W_i^l + W_i^r]_{(Q)}.$$

Die Berechnung der W -Gewichte ist in Tabelle 27 durchgeführt; die Ermittlung der Biege- und Neigungslinie erfolgt in Tabelle 28 bis 30, ähnlich wie in Aufgabe 12 und 20 die Biegemomente und Querkräfte ermittelt wurden.

Bemerkung: Liegen Stützenverschiebungen δy_2 und δy_{11} vor, so tritt in der Entfernung x vom linken Auflager (Abb. 124) zur berechneten Durchbiegung bzw. Sehnenneigung die Verschiebung $\delta y_x = \frac{\delta y_{11} - \delta y_2}{l} \cdot x$ bzw. die Sehnenneigung $\delta \alpha = \frac{\delta y_{11} - \delta y_2}{l}$ hinzu.

Liegt statt eines Trägers auf zwei Stützen z. B. ein in 0 eingespannter Träger vor, so ist als stellvertretender Balken der in Abb. 132 dargestellte, am anderen

Tabelle 28 bis 30. Schnenneigungen und Holmdurchbiegungen als Querkräfte und Biegemomente der am stellvertretenden Gelenkträger angreifenden W -Gewichte (vgl. Aufgabe 20).

Tabelle 28. Zwischenfeld 2 ÷ 11.

Stelle i	$\lambda_{i-1,i}$ [cm]	ξ_i [cm]	$W_i \cdot 10^6$ ohne A^i u. A^r [—]	$W_i \xi_i \cdot 10^6$ [cm]	$-(W_i)$ mit A^i) $\cdot 10^{6**}$ [—]	$\delta x_{i-1,i} \cdot 10^6$ [—]	$\Delta \delta y_{i-1} \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_i \cdot 10^4$ [cm]
2		0	+107,4	0	+847,8			0
	25					+847,8	+211,4	
3		25	+247,6	+ 6190	-247,6			+211,9
	25					+600,2	+150,1	
4		50	+327,1	+16350	-327,1			+362,0
usw.								
10		235	-187,5	-44060	+187,5			+ 22,9
	15					-152,6	- 22,9	
11		250	-142,6	-35650	+152,6			0
$\Sigma_{i=250}$			$\Sigma = +965,2$ $\cdot 10^{-6}$	$\Sigma = +2490$ $\cdot 10^{-6}$				
$A^r = \frac{\Sigma W_i \xi_i}{\Sigma \lambda_{i-1,i}} = \frac{2490}{250} \cdot 10^{-6} = +9,96 \cdot 10^{-6}$ $A^i = \Sigma W_i - A^r = (965,2 - 10,0) \cdot 10^{-6} = +955,2 \cdot 10^{-6}$					* Abb. 130; in 2 bzw. 11 wirkt $(W_2^r - A^i)$ bzw. $(W_{11}^i - A^r)$.			

Tabelle 29. Kragfeld 0 ÷ 2.

Stelle i	$\lambda_{i-1,i}$ [cm]	ξ_i [cm]	W_i mit A^i ohne A^u) $\cdot 10^6$ * [—]	$W_i \xi_i \cdot 10^4$ [cm]	$-(W_i)$ mit A^i und A^u) $\cdot 10^{6**}$ [—]	$\delta x_{i-1,i} \cdot 10^6$ [—]	$\Delta \delta y_{i-1} \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_i \cdot 10^4$ [cm]
0		0		0	+1335,9			-849,2
	15					+1335,9	+200,4	
1		15	+ 38,4	+ 5,8	- 38,4			-648,8
	50					+1297,5	+648,8	
2		65	+1297,5	+843,4	-1297,5			0
Σ			$\Sigma = +1335,9$ $\cdot 10^{-6}$	$\Sigma = +849,2$ $\cdot 10^{-4}$				
$A^u = \Sigma W_i = +1335,9 \cdot 10^{-6}$ $E^u = \Sigma W_i \xi_i = +849,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$					* Abb. 130; in 2 wirkt $(W_2^i + A^i)$. ** Abb. 130; in 0 wirkt $-A^u$.			

Tabelle 30. Kragfeld 11÷14.

Stelle i	$\lambda_{i-1, i}$ [cm]	$-(W_i \text{ mit } A'') \cdot 10^6 *$ [—]	$\delta \alpha_{i-1, i} \cdot 10^6$ [—]	$\Delta \delta y_{i-1} \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_i \cdot 10^4$ [cm]
11		+183,0			0
12	35	+202,2	+183,0	+ 64,1	+ 64,1
13	25	+176,6	+385,2	+ 96,3	+160,4
14	25		+561,8	+140,5	+300,9

* Abb. 130; in 11 wirkt $(W'_{11} + A'')$.

Ende 14 eingespannte Balken zu betrachten. Das dann an der Stelle 0 anzusetzende W -Gewicht W_0 folgt aus dem eingetragenen Hilfszustand ν . Die übrigen W -Gewichte ändern sich nicht.

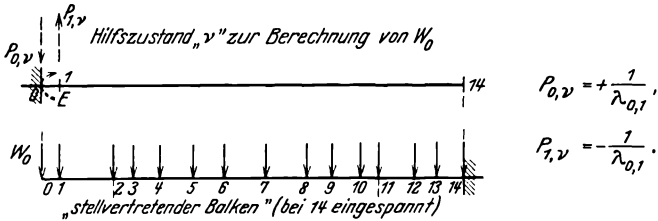


Abb. 132.

Liegt ein Gelenkträger z. B. nach Abb. 133 vor, so ist als stellvertretender Balken der in Abb. 133 dargestellte Träger aufzufassen. Zu beachten ist, daß sich bei Ermittlung von W_{14} die Biegemomenten- bzw. Querkraftfläche des Hilfszustands über die ganze Balkenstrecke 2÷16 erstreckt. Statt dessen können aber auch die Biege- und Neigungslinien von 2÷14 und 14÷16 für sich berechnet werden. Darauf wird dem Gelenkpunkt 14 die aus 0÷14 gefundene Durchbiegung δy_{14} als Stützenverschiebung erteilt.

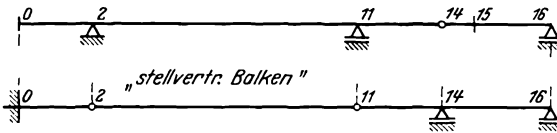


Abb. 133.

Aufgabe 47.

Bei einem 11,5 cm hohen Flügelholm wurde in der Mitte zwischen Rumpf- und Stielanschluß eine bleibende Durchbiegung $\delta_0 = +0,6$ cm, bezogen auf die 245 cm lange Verbindungslinie der Lagerpunkte, beobachtet. Es lag die Vermutung nahe, daß die Verformung durch gleichmäßig über die Holmlänge erfolgtes Schwinden infolge Austrocknung des Obergurts entstanden sei. Um wieviel müßte sich die Länge des Obergurts gegen die des Untergurts geändert haben ?

Wird in erster Näherung vorausgesetzt, daß die erfolgte Längenänderung der Längsfasern geradlinig von der Ober- nach der Unterkante des Holms abnehme, so ist nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \delta_0 = + \int_0^l B_I \cdot \delta d\vartheta_0 \quad (\text{Abb. 134}).$$

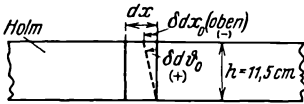


Abb. 134.

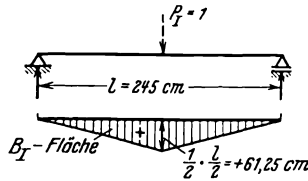


Abb. 135.

B_I sind die Biegemomente infolge des Hilfszustands I (Abb. 135); $\delta d\vartheta_0$ ist die gegenseitige Neigung zweier benachbarter Querschnitte infolge Schwindens des Obergurts; $\delta d\vartheta_0$ ist entsprechend S. 113 und Abb. 134 bei einer Verkürzung des Obergurts, also im Sinne positiver Biegemomente, als positiv anzusehen.

Mit $\delta d\vartheta_0 = \frac{-\delta dx_0(\text{oben})}{h}$ [„-“, weil positivem $\delta d\vartheta$ negatives δdx (oben) entspricht!] wird:

$$1 \cdot \delta_0 = - \int_0^l B_I \cdot \frac{\delta dx_0(\text{oben})}{h}, \quad \delta_0 = - \frac{\delta dx_0(\text{oben})}{dx} \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_0^l B_I \cdot dx.$$

Die Dehnung $\frac{\delta dx_0(\text{oben})}{dx}$ des Obergurts gegen den Untergurt beträgt also:

$$\frac{\delta dx_0(\text{oben})}{dx} = - \frac{h}{\int_0^l B_I \cdot dx} \cdot \delta_0 = - \frac{11,5}{\frac{1}{2} \cdot 245 \cdot 61,25} \cdot 0,6 = - 0,092 \text{ vH.}$$

Der Obergurt hat sich also um rd. $\frac{1}{1000}$ seiner Länge gegen den Untergurt verkürzt.

Aufgabe 48: Einseitig eingespannter, auf Drillung beanspruchter Holm.

Die Endverdrillung $\gamma_{9,0}$ des in Aufgabe 14 behandelten fest eingespannten Holms ist zu ermitteln (Steifigkeitsverteilung s. Abb. 136).

Mittels des Hilfszustandes I (positives verdrillendes Einzelmoment am rechten Holmende, Abb. 136), ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \gamma_{9,0} = \int_0^l 1 \cdot \frac{D_0 \cdot dx}{G J_d},$$

also bei Annahme geraden Verlaufs der $\frac{D_0}{G J_d}$ -Linie zwischen je zwei Teilpunkten (vgl. auch Aufgabe 46, Abb. 128):

$$\gamma_{9,0} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{D_{i-1, \epsilon(0)} \cdot l}{G J_d^i} \cdot \lambda_{i-1, i} + \frac{D_{i, \epsilon(0)} \cdot l}{G J_d^i} \cdot \lambda_{i, i+1} \right).$$

Auswertung s. Tabelle 31.

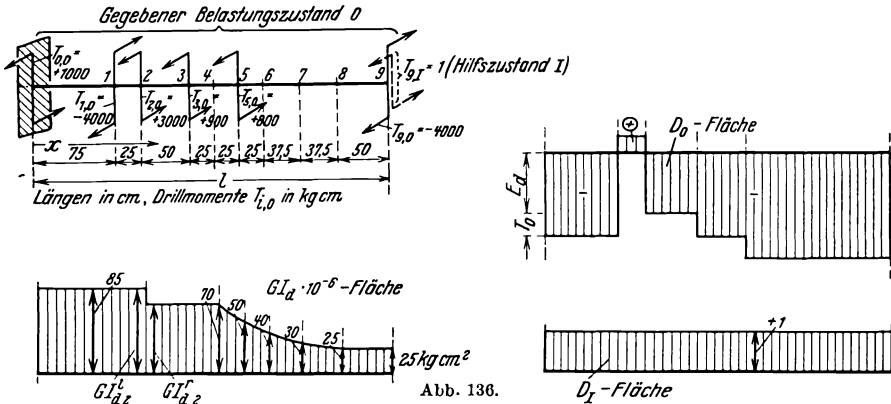


Abb. 136.

Tabelle 31. Auswertung.

Stelle i	$G J_d^i \cdot 10^{-6}$	$D_{i-1, \epsilon(0)}^*$	$\frac{D_{i-1, \epsilon(0)}}{G J_d^i} \cdot 10^6$	$\lambda_{i-1, i}$	$\frac{D_{i-1, \epsilon(0)}}{G J_d^i} \cdot \lambda_{i-1, i} \cdot 10^6$
	$G J_d^i \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]		[kgcm]		[cm ⁻¹]
0	85	- 3300	- 38,90	75	- 2920
1	85		- 38,90		- 2920
2	85	+ 700	+ 8,24	25	+ 210
	70		+ 8,24		+ 210
usw.					
8	25	- 4000	- 160,00	50	- 8000
9	25		- 160,00		- 8000

$$\Sigma = - 0,05406$$

$$\gamma_{9,0} = \frac{1}{2} \Sigma = - 0,02703.$$

§ 13. In ihrer Ebene beanspruchte Stabzüge (Rahmen).

Aufgabe 49: Holm mit exzentrischen Anschlüssen.

Bei dem in Abb. 137 dargestellten Holm ist die waagerechte Wegkomponente $\delta x_{n,0}$ des exzentrisch angeschlossenen Punktes n zu ermitteln.

* Vgl. S. 51, Tabelle 5.

Um die Symmetrie des Systems und der Belastung auszunutzen, wird von der Berechnung des Ausdrucks

$$(+1) \cdot \delta x_{n,0} + (-1) \cdot \delta x_{\bar{n},0}$$

ausgegangen, der sich mit Hilfe des in Abb. 138 dargestellten Hilfszustandes I ergibt. (\bar{n} ist der Symmetriepunkt zu n .)

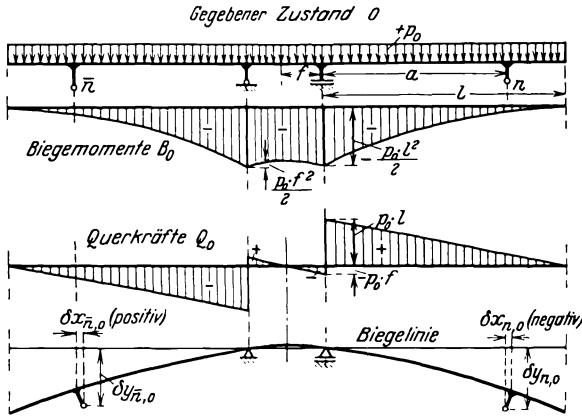


Abb. 137.

Nach der Arbeitsgleichung ist (Abb. 138):

$$(+1) \cdot \delta x_{n,0} + (-1) \cdot \delta x_{\bar{n},0} = \sum \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \sum \int Q_I \cdot \frac{Q_0 \cdot dx}{GF'} + \sum \int S_I \cdot \frac{S_0 \cdot dx}{EF}$$

Das letzte Glied wird hier zu Null wegen $S_0 = 0$.

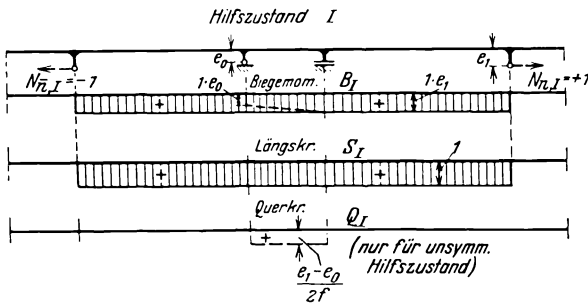


Abb. 138.

Die Integration über eine Systemhälfte liefert dann das gesuchte $\delta x_{n,0} = \frac{1}{2}(\delta x_{n,0} - \delta x_{\bar{n},0})$. (Wird auf Ausnutzung der Symmetrie verzichtet, also als Hilfszustand nur $N = 1$ in n angebracht, so gelten für den rechten Kragarm dieselben, im Mittelfeld dagegen die gestrichelt

eingetragenen B -, Q - und S -Flächen. Die Integration erstreckt sich dann über das rechte Kragfeld und das ganze Mittelfeld.)

Bemerkung: Zur Ermittlung von $\delta y_{n,0}$ wäre von der Berechnung des Ausdrucks $(+1) \cdot \delta y_{n,0} + (+1) \cdot \delta y_{\bar{n},0}$ auszugehen.

Aufgabe 50: Aufgeschnittener Spantring.

Bei dem in Abb. 139 dargestellten oben aufgeschnittenen Rumpfspant ist die gegenseitige Drehung $\tau_{b,0} - \tau_{a,0}$ der Schnittufer a und b infolge der eingetragenen Belastung $N_{a,0} = -1$, $N_{b,0} = +1$ (gleichbedeutend mit $S_{ab} = -1$) zu berechnen.

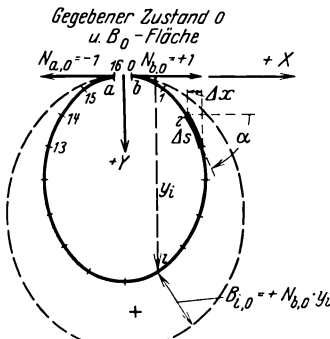


Abb. 139.

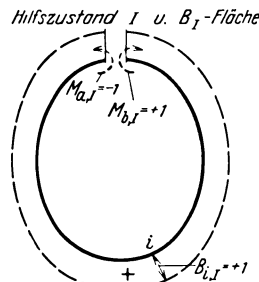


Abb. 140.

Mittels des in Abb. 140 dargestellten Hilfszustandes I (gleichbedeutend mit $B_{ab} = +1$) ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \tau_{b,0} - 1 \cdot \tau_{a,0} = \int_b^a B_I \cdot \frac{B_0 \cdot ds}{EJ}$$

(Bogenelement $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$ bzw. $\Delta s \sim \frac{\Delta x}{\cos \alpha}$, Abb. 139).

Die Quer- und Längskräfte des Zustands 0 sind ohne Einfluß auf $\tau_{b,0} - \tau_{a,0}$, da beim Hilfszustand I nur Biegemomente auftreten.

Zur Durchführung der Integration der Spant in eine Anzahl gleich großer, nahezu geradliniger Teilstrecken $i = 1, i$ von der Länge Δs aufgeteilt; dann ist entsprechend Abb. 139 und 140 und Aufgabe 45:

$$\tau_{b,0} - \tau_{a,0} = \frac{\Delta s}{2} \left(\frac{1 \cdot B_{0,0}}{EJ_0} + \frac{1 \cdot B_{16,0}}{EJ_{16}} + 2 \cdot \sum_1^{15} \frac{1 \cdot B_{i,0}}{EJ_i} \right).$$

Aufgabe 51: Abgestrehter Stabzug.

Bei einem abgestrehten Stabzug (Abb. 141) mit gelenkig angeschlossener Strebe (z. B. dem Untergurt eines abgestrehten Fachwerkholmes, siehe auch Abb. 72) seien bekannt:

Die Wegkomponenten $\delta x_{a,0}$, $\delta y_{a,0}$ und $\delta x_{b,0}$, $\delta y_{b,0}$ der Auflagerpunkte a und b ,

die Änderungen $\delta l_{i-1,i(0)}$ der Sehnenslängen $i-1, i$,

die Änderungen $\delta \Delta \alpha_{i,0}$ der Sehnenswinkeldifferenzen $\Delta \alpha_i = \alpha_{i,i+1} - \alpha_{i-1,i}$ mit Ausnahme der Gelenkwinkeländerung $\delta \Delta \alpha_{4,0}$ (vgl. hierzu Aufgabe 52 und 53).

Die Größe von $\delta \Delta \alpha_{4,0}$ ist zu berechnen.

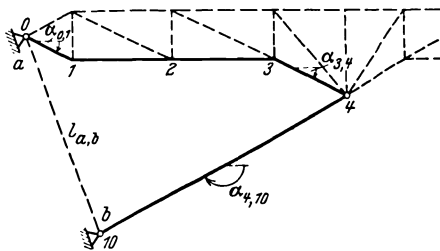


Abb. 141.

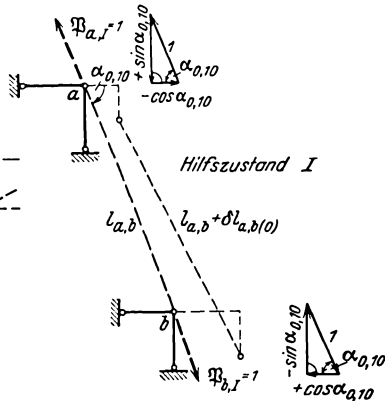


Abb. 142.

Aus den Wegkomponenten der Auflagerpunkte a und b ergibt sich nach der Arbeitsgleichung zunächst die Längenänderung der Auflagerverbindungslinie mittels des Hilfszustandes I (Abb. 142), indem ähnlich wie in Aufgabe 42 die Wegkomponenten von a und b als positive oder negative Längenänderungen gedachter Stäbe aufgefaßt werden:

$$1 \cdot \delta l_{a,b(0)} = \sum S_I^a \cdot \delta s_0,$$

$$\delta l_{a,b(0)} = -\cos \alpha_{0,10} \cdot (+\delta x_{a,0}) + \sin \alpha_{0,10} \cdot (-\delta y_{a,0})$$

$$+ \cos \alpha_{0,10} \cdot (+\delta x_{b,0}) - \sin \alpha_{0,10} \cdot (-\delta y_{b,0}).$$

Andererseits ergibt sich, wenn alle Winkeländerungen $\delta \Delta \alpha_{i,0}$ als bekannt angenommen werden, $\delta l_{a,b(0)}$ auch mittels des am Stabzug angebrachten Hilfszustandes II (Abb. 143).

Zu diesem Zweck werden die Strecken $i-1, i$ als in Längsrichtung elastische, aber gegen Biegung starre Glieder aufgefaßt, die in den Punkten i durch gegen Biegung elastische Zwischenstücke (sog. elastische Gelenke) miteinander verbunden sind. Ein solches System gestattet in den Knotenpunkten gegenseitige Drehungen $\delta \Delta \alpha_i$ der aufeinander folgenden Glieder infolge Biegung, sowie Längenänderungen $\delta l_{i-1,i}$ der Einzelglieder, jedoch keine Verbiegung dieser Glieder selbst; die Formänderungslinie dieses Systems ist also identisch mit dem Geradenzug, der die Knotenpunkte des wirklichen Stabzugs nach erfolgter Formänderung miteinander verbindet. Nach der Arbeitsgleichung ist dann:

$$1 \cdot \delta l_{a,b(0)} = \sum B_{i,II} \cdot (-\delta \Delta \alpha_{i,0}) + \sum S_{i-1,i(II)} \cdot \delta l_{i-1,i(0)}.$$

($-\delta\Delta\alpha_{i,0}$, weil positive Änderung der Winkeldifferenz einem negativen Biegemoment $B_{i,0}$ entspricht.) Folglich ist mit $B_{i,II}$ und $S_{i-1,i(II)}$ nach Abb. 143:

$$\delta l_{a,b(0)} = \sum r_i \cdot (-\delta\Delta\alpha_{i,0}) + \sum \frac{\lambda'_{i-1,i} \cdot \delta l_{i-1,i(0)}}{l_{i-1,i}} \quad (\text{sog. Sehnensformel}).$$

Setzt man in diesen Ausdruck für $\delta l_{a,b(0)}$ den Zahlenwert aus der ersten Formel für $\delta l_{a,b(0)}$ ein, und wird der in Wirklichkeit unbekannt Winkel $\delta\Delta\alpha_{4,0}$ aus der Winkelsumme herausgenommen, so ergibt sich:

$$\delta\Delta\alpha_{4,0} = \frac{1}{r_4} \left(-\delta l_{a,b(0)} - \sum r_i \cdot \delta\Delta\alpha_{i,0} + \sum \frac{\lambda'_{i-1,i} \cdot \delta l_{i-1,i(0)}}{l_{i-1,i}} \right).$$

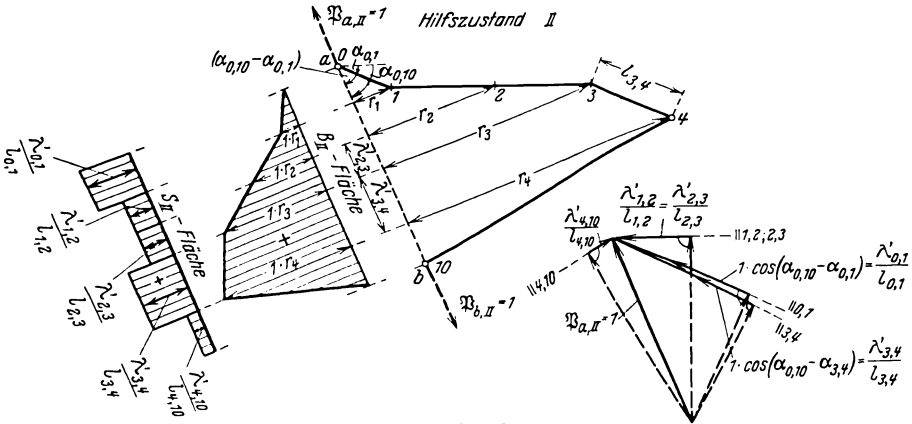


Abb. 143.

(Die erste Summe in dem Ausdruck für $\delta\Delta\alpha_{4,0}$ erstreckt sich über die Winkeländerungen $\delta\Delta\alpha_{i,0}$ mit Ausnahme von $\delta\Delta\alpha_{4,0}$; die zweite Summe umfaßt die Längenänderungen aller Stäbe des Stabzugs $0 \div 10$.)

Aufgabe 52: Geschlossener Rahmenspant mit drei Gelenken.

Für den in Aufgabe 26 behandelten Dreigelenkrahmen sind die Wegkomponenten δx und δy aller Eckpunkte zu ermitteln. Dabei ist die aus Abb. 144 ersichtliche Lagerung vorauszusetzen. Innerhalb der einzelnen Felder $0 \div 1, 1 \div 2$ usw. sei die Steifigkeit konstant. Belastung entsprechend Abb. 59.

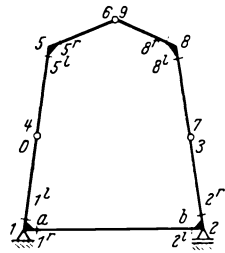


Abb. 144.

(Die Bezifferung der Knoten ist hier zur schematischen Anwendung des Stabzugverfahrens anders gewählt als in Aufgabe 26.)

Die Berechnung der Wegkomponenten erfolgt nach dem sog. Stabzugverfahren (Müller-Breslau^{12, 13}). Da durch die Lagerung (Abb. 144) und durch die nach Aufgabe 26 bekannten Biegemomente der Formänderungszustand des unteren Rahmenteils $0, 1, 2, 3$ eindeutig be-

stimmt ist, kann die Ermittlung der Formänderung der Stabzüge 0, 1, 2, 3 und 4, 5, 6, 9, 8, 7 getrennt durchgeführt werden; und zwar für den unteren Teil vollkommen unabhängig vom oberen, für den oberen unter Berücksichtigung der für 0, 1, 2, 3 ermittelten Wegkomponenten von 0 und 3.

1. Unterer Rahmenteil 0, 1, 2, 3.

a) Allgemeines.

Der Stabzug 0 ÷ 3 wird in Einzelbalken $i - 1, i$ zerlegt gedacht. Die Endquerschnitte irgend eines Einzelbalkens $i - 1, i$ drehen sich bei der Formänderung infolge äußerer Belastung um gewisse Winkel

$$\tau_{i-1,0}^r \text{ und } \tau_{i,0}^l$$

gegen die Sehne $i - 1, i$ (Abb. 145).

Ist im Einzelbalken $i - 1, i$ die Biegemomentenfläche B_0 infolge gegebener Belastung geradlinig begrenzt, so ergibt sich nach Einführung zweier Hilfszustände $M_I = 1$ bzw. $M_{II} = 1$ (Abb. 145) nach der Arbeitsgleichung unter Vernachlässigung des Querkraftinflusses:

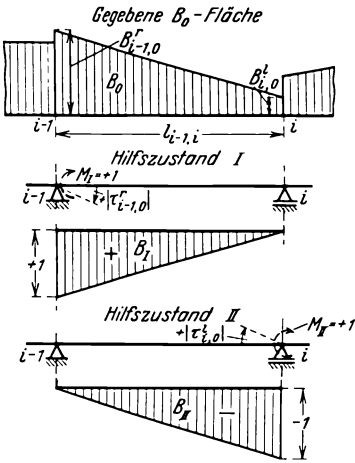


Abb. 145.

$$1 \cdot \tau_{i-1,0}^r = + \frac{l_{i-1,i}}{6} \cdot \frac{B_{i,0}^l + 2B_{i-1,0}^r}{E J_{i-1,i}}$$

$$1 \cdot \tau_{i,0}^l = - \frac{l_{i-1,i}}{6} \cdot \frac{B_{i-1,0}^r + 2B_{i,0}^l}{E J_{i-1,i}}$$

(Vgl. Tabelle 94, Anhang. Der Index „0“ für den wirklichen Formänderungszustand ist im folgenden weggelassen.)

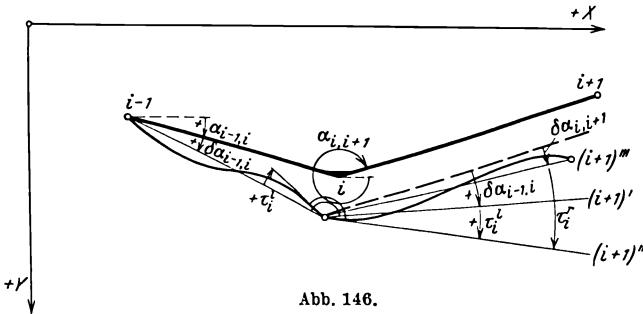


Abb. 146.

Für die Drehung $\delta \alpha_{i,i+1}$ der Sehne $i, i + 1$, die ursprünglich mit der X -Achse den Winkel $\alpha_{i,i+1}$ einschließt (gemessen von der $+X$ -Richtung aus im Sinne XY), gilt die Rekursionsformel (Abb. 146; steife Ecke bei $i!$):

$$\delta \alpha_{i,i+1} = \delta \alpha_{i-1,i} + \tau_i^l - \tau_i^r$$

Daraus folgt die Änderung $\delta\Delta\alpha_i$ der Winkeldifferenz

$$\Delta\alpha_i = (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i-1,i}) \text{ zu:}$$

$$\delta\Delta\alpha_i = \delta(\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i-1,i}) = \delta\alpha_{i,i+1} - \delta\alpha_{i-1,i} = \tau_i^I - \tau_i^I.$$

Ist im Einzelstab $i - 1, i$ die Längskraft S_0 infolge gegebener Belastung konstant, so ergibt sich die Stablängenänderung zu:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta l_{i-1,i}^{(0)} &= \int_0^l 1 \cdot \frac{S_0 \cdot dx}{EF} \\ &= l_{i-1,i} \cdot \frac{S_{i-1,i}^{(0)}}{EF_{i-1,i}}. \end{aligned}$$

Für die Verschiebungskomponenten δx_i und δy_i des Punktes i gilt dann die Rekursionsformel (Abb. 147):

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \delta x_{i-1} + \delta l_{i-1,i} \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{l_{i-1,i}} - \varrho \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1,i}}, \\ \delta y_i &= \delta y_{i-1} + \delta l_{i-1,i} \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1,i}} + \varrho \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{l_{i-1,i}} \end{aligned}$$

oder mit

$$\begin{aligned} \varrho &= \delta\alpha_{i-1,i} \cdot (l_{i-1,i} + \delta l_{i-1,i}) = \delta\alpha_{i-1,i} \cdot l_{i-1,i} \\ &\text{(denn das Produkt } \delta\alpha \cdot \delta l \text{ ist klein 2. Ordnung):} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \delta x_{i-1} + \frac{\delta l_{i-1,i}}{l_{i-1,i}} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \delta\alpha_{i-1,i} \cdot (y_i - y_{i-1}), \\ \delta y_i &= \delta y_{i-1} + \frac{\delta l_{i-1,i}}{l_{i-1,i}} \cdot (y_i - y_{i-1}) + \delta\alpha_{i-1,i} \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

b) Rechnungsgang I.

Die Durchrechnung erfolgt zunächst unter Annahme willkürlicher Anfangswerte:

$$\delta\alpha_{0,1}^I = 0, \quad \delta x_0^I = 0, \quad \delta y_0^I = 0;$$

d. h. es wird zunächst angenommen, der Anfangspunkt 0 verschiebe sich bei der Formänderung des Systems nicht und der Punkt 1 sei in Richtung 0, 1 geführt.

Die damit nach den Tabellen 32 und 33 sich ergebenden Werte $\delta\alpha_{i-1,i}$, δx_i , δy_i des Rechnungsganges I werden mit $\delta\alpha_{i-1,i}^I$, δx_i^I , δy_i^I bezeichnet.

Mit den so gefundenen Wegkomponenten δx_a^I , δy_a^I bzw. δx_b^I , δy_b^I der Auflagerpunkte a bzw. b ergibt sich eine Drehung $\delta\alpha_{a,b}^I$ der Strecke $l_{a,b}$ von der Größe:

$$\delta\alpha_{a,b}^I = \frac{(\delta y_b^I - \delta y_a^I)(x_b - x_a) - (\delta x_b^I - \delta x_a^I)(y_b - y_a)}{l_{a,b}^2}$$

(vgl. Aufgabe 42).

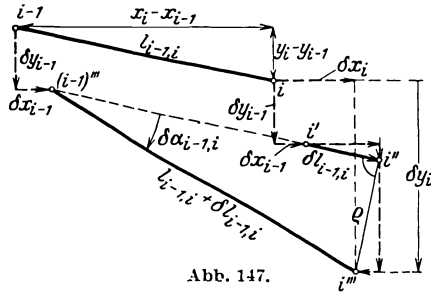


Abb. 147.

Tabelle 32. Berechnung von τ_i^l , τ_i^r und $\delta\alpha_{i-1,i}^l$.

Stelle i	EJ_i^l	B_i^l	$\frac{B_i^l}{EJ_i^l}$	$\frac{2B_i^l}{EJ_i^l}$	$6\frac{\tau_i^l}{l_{i-1,i}}$	$l_{i-1,i}$	$6\tau_i^l$	$\delta^l(\alpha_{i,i+1}-\alpha_{i-1,i})$	$\delta\alpha_{i-1,i}$
	EJ_i^r	B_i^r	$\frac{B_i^r}{EJ_i^r}$	$\frac{2B_i^r}{EJ_i^r}$	$6\frac{\tau_i^r}{l_{i-1,i}}$		$6\tau_i^r$		
	[kgcm ²]	[kgcm]	[cm ⁻¹]	[cm ⁻¹]	[cm ⁻¹]	[cm]	[—]	[—]	[—]
0									
1 (= a)									
2 (= b)									
3									

Tabelle 33. Berechnung von δx_i^l und δy_i^l .

Stelle i	$y_i - y_{i-1}$	$x_i - x_{i-1}$	$S_{i-1,i}$	$E F_{i-1,i}$	$\frac{S_{i-1,i}}{E F_{i-1,i}}$	$\delta\alpha_{i-1,i}^l$	$\frac{S_{i-1,i}}{E F_{i-1,i}}(y_i - y_{i-1}) + \delta\alpha_{i-1,i}^l(x_i - x_{i-1})$	δy_i^l	$\frac{S_{i-1,i}}{E F_{i-1,i}}(x_i - x_{i-1}) - \delta\alpha_{i-1,i}^l(y_i - y_{i-1})$	δx_i^l
	[cm]	[cm]	[kg]	[kg]	[—]	[—]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
0										
1 (= a)						0				
2 (= b)										
3										

c) Rechnungsgang II.

Sind nun in Wirklichkeit gewisse Wege der Auflagerpunkte a und b und damit eine bestimmte Drehung der Auflagerverbindungsline vorgeschrieben, z. B.:

$$\delta x_a = \delta \bar{x}_a, \quad \delta y_a = \delta \bar{y}_a,$$

$$\delta \alpha_{a,b} = \delta \alpha_{a,b},$$

so ergeben sich die wirklichen Wege der einzelnen Punkte i bzw. die wirklichen Drehungen der einzelnen Sehnen $i - 1, i$, indem zwecks Korrektur der zuerst willkürlich gewählten Anfangsbedingungen zu den Verschiebungen $\delta x^I, \delta y^I, \delta \alpha^I$ in einem zweiten Rechnungsgang passende Zusatzverschiebungen $\delta x_0^{II}, \delta y_0^{II}, \delta \alpha_{0,1}^{II}$ des Anfangspunktes 0 bzw. der ersten Stabsehne 0, 1 hinzugefügt werden. Der Einfluß der Zu-

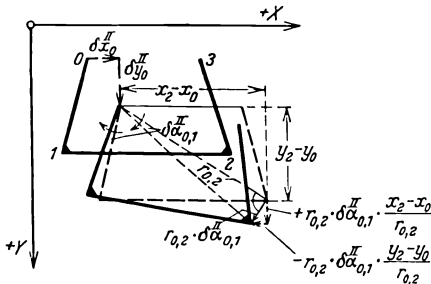


Abb. 148.

der ersten Stabsehne 0, 1 hinzugefügt werden. Der Einfluß der Zu-

satzverschiebungen z. B. auf den Punkt 2 ist aus Abb. 148 ersichtlich.

Dann sind (wieder unter Vernachlässigung kleiner Größen 2. Ordnung) die wirklichen Wegkomponenten eines Punktes i bzw. die wirkliche Drehung einer Sehne $i - 1, i$:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \delta x_i^I + \delta x_0^{II} - \delta \alpha_{0,1}^{II} (y_i - y_0), \\ \delta y_i &= \delta y_i^I + \delta y_0^{II} + \delta \alpha_{0,1}^{II} (x_i - x_0), \\ \delta \alpha_{i-1,i} &= \delta \alpha_{i-1,i}^I + \delta \alpha_{0,1}^{II}. \end{aligned}$$

Die Zusatzverschiebungen $\delta x_0^{II}, \delta y_0^{II}, \delta \alpha_{0,1}^{II}$ folgen aus den Bedingungen, daß

$$\begin{aligned} \delta x_a &= \delta x_a^I + \delta x_0^{II} - \delta \alpha_{0,1}^{II} \cdot (y_a - y_0) = \delta \bar{x}_a, \\ \delta y_a &= \delta y_a^I + \delta y_0^{II} + \delta \alpha_{0,1}^{II} \cdot (x_a - x_0) = \delta \bar{y}_a, \\ \delta \alpha_{a,b} &= \delta \alpha_{a,b}^I + \delta \alpha_{0,1}^{II} = \delta \bar{\alpha}_{a,b} \end{aligned}$$

sein soll.

In vorliegender Aufgabe sei z. B. $\delta \bar{x}_a = \delta \bar{y}_a = \delta \bar{\alpha}_{a,b} = 0$. Dann wird:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{0,1}^{II} &= -\delta \alpha_{a,b}^I, \\ \delta x_0^{II} &= -\delta x_a^I - \delta \alpha_{a,b}^I \cdot (y_a - y_0), \\ \delta y_0^{II} &= -\delta y_a^I + \delta \alpha_{a,b}^I \cdot (x_a - x_0). \end{aligned}$$

Damit erfolgt die Berechnung der gesuchten Wegkomponenten δx_i und δy_i nach Tabelle 34.

Tabelle 34. Berechnung der wirklichen Werte δx_i und δy_i [cm].

Stelle i	$y_i - y_0$	$-\delta \alpha_{0,1}^{II} \cdot (y_i - y_0)$	$\delta x_i^I + \delta x_0^{II}$	δx_i	$x_i - x_0$	$+\delta \alpha_{0,1}^{II} \cdot (x_i - x_0)$	$\delta y_i^I + \delta y_0^{II}$	δy_i
0								
1 (= a)								
2 (= b)								
3								

2. Oberer Rahmenteil 4, 5, 6, 9, 8, 7.

a) Rechnungsgang I.

Der obere Teil wird durch das Gelenk bei 6 bzw. 9 in die beiden Teilstabzüge 4, 5, 6 und 7, 8, 9 zerlegt (Abb. 149). Entsprechend dem Vorgehen beim unteren Teil werden zur Durchführung des Rechnungsgangs I die Drehungen $\delta \alpha_{4,5}^I$ und $\delta \alpha_{7,8}^I$ der Anfangssehnen 4, 5 bzw. 7, 8 der Teilstabzüge 4, 5, 6 bzw. 7, 8, 9 gleich Null gesetzt. Im Gegensatz zum unteren Rahmenteil können hier die Wegkomponenten der Anfangs-

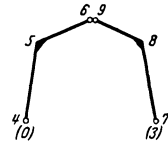


Abb. 149.

Auf diese Weise ergeben sich im allgemeinen voneinander verschiedene Wegkomponenten δx_6^I und δx_9^I bzw. δy_6^I und δy_9^I ; in Wirklichkeit muß aber $\delta x_6 = \delta x_9$ und $\delta y_6 = \delta y_9$ sein, weil die Punkte 6 und 9 identisch sind.

b) Rechnungsgang II.

Zur Beseitigung dieses Widerspruchs werden zwecks Korrektur der willkürlich zu Null gewählten Anfangsdrehungen $\delta \alpha_{4,5}^I$ und $\delta \alpha_{7,8}^I$ ähnlich wie vorher beim unteren Rahmenteil Zusatzdrehungen $\delta \alpha_{4,5}^{II}$ und $\delta \alpha_{7,8}^{II}$ hinzugefügt derart, daß:

$$\begin{aligned} \delta x_6 &= \delta x_6^I - \delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (y_6 - y_4) \\ &= \delta x_9^I - \delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (y_9 - y_7) = \delta x_9 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta y_6 &= \delta y_6^I + \delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (x_6 - x_4) \\ &= \delta y_9^I + \delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (x_9 - x_7) = \delta y_9 \end{aligned}$$

wird. (Zusatzwege δx_4^{II} , δy_4^{II} , δx_7^{II} und δy_7^{II} der Anfangspunkte 4 und 7 kommen hier nicht in Frage, weil die Wegkomponenten von Punkt 4 und 7 bereits im Rechnungsgang I mit ihrem wahren Wert eingesetzt werden konnten.)

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{4,5}^{II} &= \frac{(\delta x_6^I - \delta x_9^I)(x_6 - x_7) + (\delta y_6^I - \delta y_9^I)(y_6 - y_7)}{(y_6 - y_7)(x_6 - x_4) - (x_6 - x_7)(y_6 - y_4)}, \\ \delta \alpha_{7,8}^{II} &= \frac{(\delta x_6^I - \delta x_9^I)(x_6 - x_4) + (\delta y_6^I - \delta y_9^I)(y_6 - y_4)}{(y_6 - y_7)(x_6 - x_4) - (x_6 - x_7)(y_6 - y_4)}. \end{aligned}$$

Die endgültigen Wegkomponenten sind dann:

$$\delta x_i = \delta x_i^I - \delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (y_i - y_4),$$

$$\delta y_i = \delta y_i^I + \delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (x_i - x_4)$$

und

$$\delta x_i = \delta x_i^I - \delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (y_i - y_7),$$

$$\delta y_i = \delta y_i^I + \delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (x_i - x_7).$$

(Auswertung nach Tabelle 37.)

Tabelle 37. Berechnung der wirklichen Werte δx_i und δy_i [cm].

Teil	Stelle <i>i</i>	$y_i - y_4$	$-\delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (y_i - y_4)$	δx_i^I	δx_i	$x_i - x_4$	$+\delta \alpha_{4,5}^{II} \cdot (x_i - x_4)$	δy_i^I	δy_i
		bzw. $y_i - y_7$	bzw. $-\delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (y_i - y_7)$			bzw. $x_i - x_7$	bzw. $+\delta \alpha_{7,8}^{II} \cdot (x_i - x_7)$		
4 ÷ 6	4								
	5								
	6								
7 ÷ 9	7								
	8								
	9								

Bemerkung: Zur Bestimmung der Wegkomponenten kann der obere Teil auch als einheitlicher Stabzug 4, 5, 6, 7, 8 angesehen werden (Abb. 150). Dann muß aber $\delta \Delta \alpha_6 = \delta (\alpha_{6,7} - \alpha_{5,6})$ wegen des bei 6 eingeschalteten Gelenks gesondert berechnet werden.

$\delta \Delta \alpha_6$ ergibt sich z. B. entsprechend Aufgabe 51 oder mit Hilfe der Arbeitsgleichung, wenn als Hilfszustand der in Aufgabe 26 als Zustand I + II bezeichnete Belastungsfall gewählt wird. Die Durchführung des Rechnungsgangs I erfolgt dann für den ganzen Stabzug 4÷8 mit den Anfangsbedingungen:

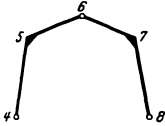


Abb. 150.

$$\left. \begin{aligned} \delta x_4^I &= \delta x_0, \\ \delta y_4^I &= \delta y_0, \end{aligned} \right\} \text{bekannt aus Teil 0÷3,}$$

$$\delta \alpha_{4,5}^I = 0, \quad \text{willkürlich.}$$

Die Berechnung der wirklichen Verschiebungswerte erfolgt darauf im Rechnungsgang II nach denselben Formeln wie für den unteren Teil. Die darin enthaltenen Zusatzwege

$$\delta x_4^{II} \quad \text{und} \quad \delta y_4^{II}$$

fallen wiederum fort, weil bereits mit den richtigen Anfangswegkomponenten gerechnet wurde; die Zusatzdrehung $\delta \alpha_{4,5}^{II}$ folgt aus der Bedingung, daß die Gesamtdrehung der Auflager-Verbindungsline 4÷8:

$$\delta \alpha_{4,8} = \delta \alpha_{4,8}^I + \delta \alpha_{4,5}^{II}$$

des oberen Teils gleich der Drehung $\delta \alpha_{0,3}$ der Sehne 0÷3 des unteren Rahmenteils sein muß; letztere folgt entspr. Aufgabe 42 aus den Wegkomponenten der Punkte 0 und 3. Also:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{4,5}^{II} &= -\delta \alpha_{4,8}^I + \delta \alpha_{4,8} = -\delta \alpha_{4,8}^I + \delta \alpha_{0,3} \\ &= -\frac{(\delta y_8^I - \delta y_4^I)(x_8 - x_4) - (\delta x_8^I - \delta x_4^I)(y_8 - y_4)}{l_{4,8}^2} \\ &\quad + \frac{(\delta y_3 - \delta y_0)(x_3 - x_0) - (\delta x_3 - \delta x_0)(y_3 - y_0)}{l_{0,3}^2}. \end{aligned}$$

§ 14. Ebene Fachwerke.

Aufgabe 53: Abgestrebter Fachwerkholm.

Bei dem in Aufgabe 30 behandelten Fachwerk sind für die dort eingetragene Belastung zu ermitteln:

1. Die Wegkomponenten von Punkt 2^u,
2. die Änderung sämtlicher Dreieckswinkel (zu späterer Verwendung),
3. die Biegelinie des Untergurts,
4. die Wegkomponenten aller Knotenpunkte.

1. Ermittlung der lotrechten und waagerechten Wegkomponenten $\delta y_{2,0}^u$ und $\delta x_{2,0}^u$ des Punktes 2^u.

Mittels der Hilfszustände I und II (Abb. 151) ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \delta y_{2,0}^u = \sum S_I \cdot \delta s_0 = \sum S_I \cdot \frac{S_0 s}{EF},$$

$$1 \cdot \delta x_{2,0}^u = \sum S_{II} \cdot \delta s_0 = \sum S_{II} \cdot \frac{S_0 s}{EF}.$$

Tabelle 38*. Berechnung von $\delta y_{2,0}^u$ und $\delta x_{2,0}^u$.

	Stab	S_0 [kg]	s [cm]	F^{**} [cm ²]	$\delta s_0 \cdot 10^3$ [cm]	S_I [—]	$S_I \cdot \delta s_0 \cdot 10^3$ [cm]	S_{II} [—]	$S_{II} \cdot \delta s_0 \cdot 10^3$ [cm]
Obergurt	$o_{0,1}$	- 543	44,7	2,90	- 4,16	-0,395	+ 1,64	+0,437	-1,82
	$o_{1,2}$	- 513	80	2,90	- 7,10	-1,684	+11,96	+0,278	-1,97
	$o_{2,3}$	- 700	80	3,64	- 7,68	-1,013	+ 7,79	+0,165	-1,27
Untergurt	$u_{0,1}$	- 648	44,7	3,27	- 4,40	+1,092	- 4,81	+0,563	-2,48
	$u_{1,2}$	- 580	80	3,27	- 7,10	+0,977	- 6,94	+0,504	-3,58
	$u_{2,3}$	- 553	80	2,90	- 7,65	+2,307	-17,65	-0,383	+2,93
	$u_{3,4}$	- 415	68,2	2,51	- 5,63	+1,868	-10,52	-0,306	+1,72
Strebe	st	+1210	227	5,31	+25,85	-0,708	-18,30	+0,118	+3,05
Diagonalen	$d_{1,2}$	+ 30,6	89,5	1,33	+ 1,04	+1,487	+ 1,55	+0,126	+0,13
	$d_{2,3}$	+ 209	89,5	1,33	+ 7,03	-0,749	- 5,26	+0,126	+0,89
	$d_{3,4}$	+ 467	94	1,91	+11,51	-1,588	-18,28	+0,262	+3,02
Pfosten	$v_{1,1}$	+ 228	40	1,33	+ 3,42	-0,489	- 1,68	-0,252	-0,86
	$v_{2,2}$	- 94	40	1,33	- 1,41	+0,335	- 0,47	-0,056	+0,08
	$v_{3,3}$	- 360	40	2,14	- 3,37	+1,221	- 4,11	-0,201	+0,68
						$\delta y_{2,0}^u = \Sigma$ = - 65,08 · 10 ⁻³		$\delta x_{2,0}^u = \Sigma$ = + 0,52 · 10 ⁻³	

Es bedeuten: s die Längen, EF die Längssteifigkeiten der Stäbe, S_0 bzw. S_I, S_{II} die Stabkräfte infolge gegebener Belastung (s. Aufgabe 30) bzw. infolge der Hilfszustände I und II .

Berechnung s. Tabelle 38.

2. Änderung der Dreieckswinkel β_i (Abb. 152).

Nach der Arbeitsgleichung ergibt sich die

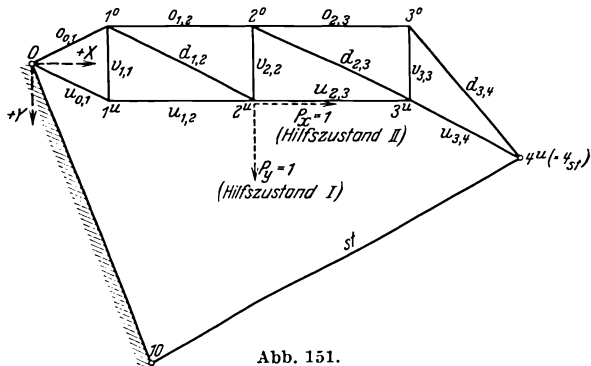


Abb. 151.

* Die Stabkräfte S_0 sind von S. 77 entnommen; die Ermittlung der Stabkräfte S_I bzw. S_{II} kann entsprechend Aufgabe 30 erfolgen und ist deshalb hier nicht durchgeführt. Bei Berechnung von δs_0 ist der Elastizitätsmodul E zu $2 \cdot 10^6$ kg/cm² angenommen worden.

** Die Querschnittsflächen F wurden nachträglich abgerundet, die Werte δs_0 dagegen nicht geändert.

150 Beispiele zur Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen.

Änderung der Dreieckswinkel β_i unter Benutzung von Hilfszuständen ν entspr. Abb. 153 zu:

$$1 \cdot \delta \beta_{i,0} = \sum S_\nu \cdot \delta s_0$$

(S_ν = Stabkräfte infolge des jeweiligen Hilfszustandes ν).

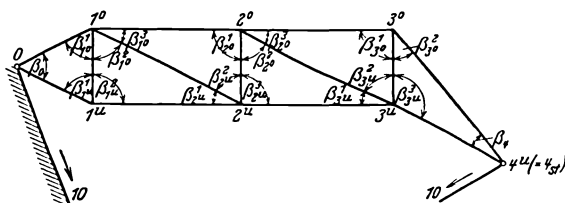


Abb. 152.

Die Einsetzung der Ausdrücke für S_ν ergibt mit den Bezeichnungen der Abb. 153:

$$\delta \beta_{i,0} = \left(\frac{\delta s_{i,0}}{s_i} - \frac{\delta s_{k,0}}{s_k} \right) \text{ctg } \beta_l + \left(\frac{\delta s_{i,0}}{s_i} - \frac{\delta s_{l,0}}{s_l} \right) \text{ctg } \beta_k,$$

$$\delta \beta_{i,0} = \frac{1}{E} [(\sigma_{i,0} - \sigma_{k,0}) \text{ctg } \beta_l + (\sigma_{i,0} - \sigma_{l,0}) \text{ctg } \beta_k],$$

wobei: $\delta s_{i,0}$, $\delta s_{k,0}$, $\delta s_{l,0}$ die Längenänderungen und $\sigma_{i,0}$, $\sigma_{k,0}$, $\sigma_{l,0}$ die Spannungen in den Stäben s_i , s_k , s_l infolge der gegebenen äußeren Belastung (Zustand 0) sind ($\sigma = S/F$).

Berechnung s. Tabelle 39.

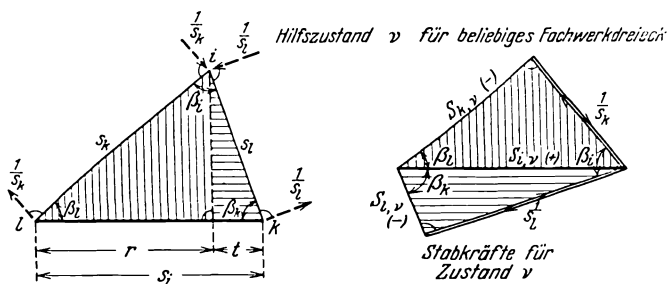


Abb. 153.

$$S_{k,\nu} = -\frac{\text{ctg } \beta_l s_i}{s_k}, \quad S_{l,\nu} = -\frac{\text{ctg } \beta_k}{s_l}.$$

Wegen Ähnlichkeit der gleichsinnig schraffierten Dreiecke:

$$\frac{r}{s_k} = \frac{|S_{k,\nu}|}{|S_{i,\nu}|}; \quad \frac{t}{s_l} = \frac{|S_{l,\nu}|}{|S_{i,\nu}|};$$

$$s_i = r + t = \frac{1}{|S_{i,\nu}|} (s_k \cdot |S_{k,\nu}| + s_l \cdot |S_{l,\nu}|);$$

$$S_{i,\nu} = +\frac{\text{ctg } \beta_l}{s_i} + \frac{\text{ctg } \beta_k}{s_i}.$$

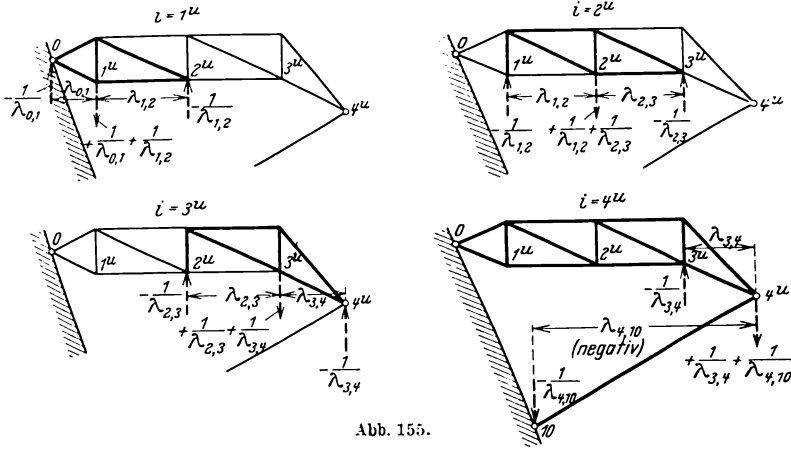


Abb. 155.

Tabelle 40. Berechnung der W -Gewichte.

Zu- stand μ für	Stab [—]	$S_\mu \cdot 10^4$ [cm ⁻¹]	$\delta s_0 \cdot 10^4$ [cm]	$S_\mu \cdot \delta s_0 \cdot 10^4$ [—]	$W_i \cdot 10^4$ [—]
$i = 1^u$	$o_{0,1}$	-280	- 41,6	+1,16	-1,27
	$u_{0,1}$	+280	- 44,0	-1,23	
	$v_{1,1}$	+250	+ 34,2	+0,86	
	$d_{1,2}$	-280	+ 10,4	-0,29	
	$u_{1,2}$	+250	- 71,0	-1,77	
$i = 4^u$	$o_{0,1}$	+ 38,0	- 41,6	-0,16	+4,62
	$o_{1,2}$	+117,3	- 71,0	-0,83	
	$o_{2,3}$	+200,5	- 76,8	-1,54	
	$u_{0,1}$	- 55,3	- 44,0	+0,24	
	$u_{1,2}$	- 49,3	- 71,0	+0,35	
	$u_{2,3}$	-132,4	- 76,5	+1,01	
	$u_{3,4}$	-245,4	- 56,3	+1,38	
	st	+ 17,7	+258,5	+0,46	
	$d_{1,2}$	- 93,0	+ 10,4	-0,10	
	$d_{2,3}$	- 93,0	+ 70,3	-0,65	
	$d_{3,4}$	+314,2	+115,1	+3,62	
	$v_{1,1}$	+ 24,7	+ 34,2	+0,08	
	$v_{2,2}$	+ 41,5	- 14,1	-0,06	
	$v_{3,3}$	-242,0	- 33,7	+0,82	

belasteten, in Abb. 154 dargestellten „stellvertretenden Balkens“ (vgl. Aufgabe 46).

Nach S. 131 ergibt sich das elastische Gewicht W_i an der Stelle i mittels eines Hilfszustandes μ (Abb. 155) nach der Arbeitsgleichung zu:

$$W_i = \sum S_\mu \cdot \delta s_0$$

$$= \sum S_\mu \cdot \frac{S_0 s}{EF}$$

(Vgl. Müller-Breslau^{12, 13}.)

Berechnung s. Tabelle 40.

Ähnlich wie W_1 mit Hilfszustand μ für $i = 1^u$ ergibt sich $W_2 = -2,43$ mit Zustand μ für $i = 2^u$ und $W_3 = -3,07$ mit Zustand μ für $i = 3^u$.

Die Berechnung der W -Gewichte kann auch entsprechend folgender Überlegung durchgeführt werden:

Der Untergurt wird ähnlich wie in Aufgabe 51 als Stabzug aus biegeungsstarr, durch „elastische Gelenke“ miteinander verknüpften Gliedern aufgefaßt. Bedeutet $\delta s_{i-1,i(0)}$ die tatsächliche Änderung der Sehnenlänge $i-1, i$ und $\delta \Delta \alpha_{i,0}$ die tatsächliche Änderung der Winkel-differenz $\Delta \alpha_i = (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i-1,i})$, so ergibt sich mittels des Hilfszustandes μ (Abb. 156) nach der Arbeitsgleichung:

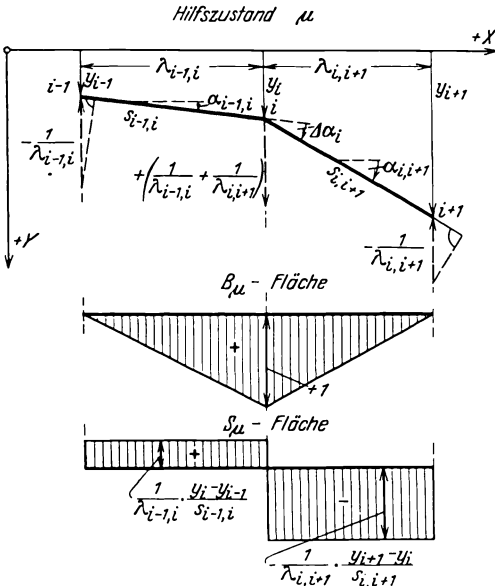


Abb. 156.

$$\begin{aligned}
 W_i &= B_{i,\mu} \cdot (-\delta \Delta \alpha_{i,0}) \\
 &+ S_{i-1,i(\mu)} \cdot \delta s_{i-1,i(0)} \\
 &+ S_{i,i+1(\mu)} \cdot \delta s_{i,i+1(0)}.
 \end{aligned}$$

($-\delta \Delta \alpha_{i,0}$, weil einer positiven Änderung der Winkel-differenz $\Delta \alpha$ eine negative gegenseitige Neigung $\delta d\theta$ der Stabendquerschnitte bei i von der Größe $-\delta \Delta \alpha_{i,0}$ entspricht, vgl. S. 114.)

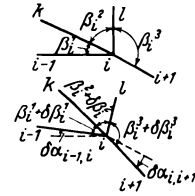


Abb. 157.

Also

$$\begin{aligned}
 W_i &= (+1) \cdot (-\delta \Delta \alpha_{i,0}) + \left(+ \frac{1}{\lambda_{i-1,i}} \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{s_{i-1,i}} \right) \cdot \delta s_{i-1,i(0)} \\
 &+ \left(- \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{s_{i,i+1}} \right) \cdot \delta s_{i,i+1(0)} *
 \end{aligned}$$

oder, da (mit $\sigma = S/F$)

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta s_{i-1,i(0)}}{s_{i-1,i}} &= \frac{\sigma_{i-1,i(0)}}{E} \quad \text{und} \quad \lambda_{i-1,i} = x_i - x_{i-1} \quad \text{usw.:} \\
 EW_i &= -E \cdot \delta \Delta \alpha_{i,0} + \underbrace{\sigma_{i-1,i(0)} \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{C_{i-1,i}} - \underbrace{\sigma_{i,i+1(0)} \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}_{C_{i,i+1}}.
 \end{aligned}$$

Nach Abb. 157 ist weiterhin für den Untergurt: $\delta \Delta \alpha_{i,0} = + \sum \delta \beta_{i,0}$, erstreckt über die am Knoten i liegenden Dreieckswinkel, die im Uhrzeigersinn bestrichen werden, wenn $i-1, i$ um i in die Richtung $i, i+1$ gedreht wird. Die Berechnung der Winkeländerung $\delta \Delta \alpha_{i,0}$ für $i = 1^u, 2^u, 3^u$ ist in Tabelle 41 durchgeführt.

* S. die Fußnote auf S. 151.

Tabelle 41.
Berechnung der Werte $\delta\Delta\alpha_{i,0}$.

Knoten i	$\delta\beta_{i,0} \cdot 10^4$	$\sum \delta\beta_{i,0} \cdot 10^4 = \delta\Delta\alpha_{i,0} \cdot 10^4$
1 ^u	-0,86	+0,77
	+1,63	
2 ^u	+0,37	+2,42
	-2,00	
3 ^u	+4,05	+3,51
	-0,57	
	-3,49	
	+7,57	

(Für den Obergurt würde gelten $\delta\Delta\alpha_{i,0} = -\sum \delta\beta_{i,0}$, da dann bei Drehung des Stabes $i-1$, i nach i , $i+1$ die Winkel β_i entgegen dem Uhrzeigersinn überstrichen würden.)

Schließlich ergibt sich noch die Winkeländerung $\delta\Delta\alpha_{4,0}$ am Gelenkknoten entsprechend Aufgabe 51 aus der „Sehnenformel“, S. 141, angewandt auf den Stabzug 0, 1^u, 2^u, 3^u, 4^u, 10 unter Berücksichtigung der Auflagerbedingung $\delta l_{0,10} = 0$ (Abb. 158) zu:

$$\delta\Delta\alpha_{4,0} = \frac{1}{r_4} \left(-\sum r_i \cdot \delta\Delta\alpha_{i,0} + \sum \frac{\sigma_{i-1,i(0)}}{E} \cdot \lambda'_{i-1,i} \right).$$

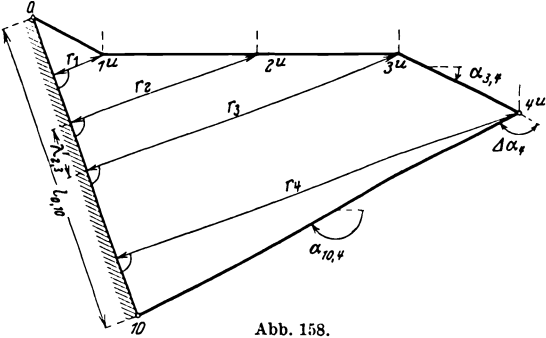


Abb. 158.

(Die erste Summe erstreckt sich über die Winkeländerungen $\delta\Delta\alpha_{i,0}$ mit Ausnahme von $\delta\Delta\alpha_{4,0}$; die zweite Summe umfaßt die Längenänderungen aller Stäbe des Stabzugs 0 ÷ 10.)

Tabelle 42. Berechnung von $\delta\Delta\alpha_{4,0}$.

Knoten i	r_i [cm]	$\delta\Delta\alpha_{i,0} \cdot 10^4$ [—]	$r_i \cdot \delta\Delta\alpha_{i,0} \cdot 10^4$ [cm]	$\lambda'_{i-1,i}$ [cm]	$\frac{\sigma_{i-1,i(0)}}{E} \cdot 10^4$ [—]	$\frac{\sigma_{i-1,i(0)}}{E} \cdot \lambda'_{i-1,i} \cdot 10^4$ [cm]
0	0					
1 ^u	30,4	+0,77	+ 23	32,8	-0,990	-32,5
2 ^u	105,3	+2,42	+255	28,1	-0,885	-24,8
3 ^u	180,2	+3,51	+634	28,1	-0,955	-26,8
4 ^u	225,0			51,4	-0,825	-42,4
10	0			30,6	+1,140	+34,8
			$\sum_1 = +912 \cdot 10^{-4}$			$\sum_2 = -91,7 \cdot 10^{-4}$

$$\delta\Delta\alpha_{4,0} = \frac{-912 - 91,7}{225} \cdot 10^{-4} = -4,46 \cdot 10^{-4}.$$

Die Berechnung von $\delta \Delta \alpha_{4,0}$ zeigt Tabelle 42, weiterhin erfolgt die der dazugehörigen W -Gewichte in Tabelle 43 (vgl. auch Tabelle 40).

Tabelle 43. Berechnung der elastischen Gewichte W_i .

Knoten i	$y_i - y_{i-1}$ [cm]	$x_i - x_{i-1}$ [cm]	$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ [—]	$\sigma_{i-1, \epsilon(0)}$ [kg/cm ²]	$C_{i-1, \epsilon}$ [kg/cm ²]	$\begin{matrix} +C_{i-1, \epsilon} \\ -C_{i, \epsilon+1} \end{matrix}$ [kg/cm ²]	$-E \cdot \delta \Delta \alpha_{i,0}$ [kg/cm ²]	$W_i \cdot 10^4$ [—]
0								
1 ^u	+ 20	+ 40	+0,5	-198	- 99,0			
2 ^u	0	+ 80	0	-177	0	-99,0	-154	-1,27
3 ^u	0	+ 80	0	-191	0	0	-484	-2,42
4 ^u	+ 32,3	+ 60	+0,538	-165	- 88,8	+88,8	-702	-3,07
10	+107,7	-200	-0,538	+228	-122,8	+34,0	+892	+4,63

Aus den elastischen Gewichten folgt, ähnlich wie in Aufgabe 46, die gesuchte Biegelinie des Untergurtes als Biegemomentenlinie des in Abb. 154 dargestellten stellvertretenden Balkens (Tabelle 44).

Tabelle 44. Berechnung der Biegelinie (vgl. Aufgabe 46).

Knoten i	$\frac{W_i}{A} \cdot 10^4$ [—]	ξ_i [cm]	$W_i \xi_i \cdot 10^4$ [cm]	$\frac{-W_i}{\text{mit } +A} \cdot 10^4$ [—]	$\tau_{i-1, \epsilon(0)} \cdot 10^4$ [—]	$\lambda_{i-1, \epsilon} = x_i - x_{i-1}$ [cm]	$\tau_{i-1, \epsilon} \lambda_{i-1, \epsilon} \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_{i,0} \cdot 10^4$ [cm]
0				-6,28				0
1 ^u	-1,27	40	- 51	+1,27	-6,28	+ 40	-251	-251
2 ^u	-2,42	120	- 290	+2,42	-5,01	+ 80	-401	-652*
3 ^u	-3,07	200	- 614	+3,07	-2,59	+ 80	-208	-860
4 ^u	+4,63	260	+1204	-4,63	+0,48	+ 60	+ 30	-830
10				+4,15	-4,15	-200	+830	0

$$\sum_1 = 2,13 \cdot 10^{-4}$$

$$\sum_2 = +249 \cdot 10^{-4}$$

$$A^r = \frac{\sum_2}{\lambda_{0,10}} = +4,15 \cdot 10^{-4},$$

$$A^l = \sum W_i - A^r = -6,28 \cdot 10^{-4}.$$

* Vgl. den Wert für $\delta y_{2,0}^u$ nach Tabelle 38, S. 149.

4. Berechnung der Wegkomponenten aller Knotenpunkte nach dem Stabzugverfahren.

Sämtliche Knotenpunkte liegen auf dem Teilstabzug 0, 1^u, 1^o, 2^u, 2^o, 3^u, 3^o, 4^u bzw. auf dem Teilstabzug 10, 4st, wobei letzterer nur aus einem Stab, nämlich der Strebe, besteht (Abb. 159).

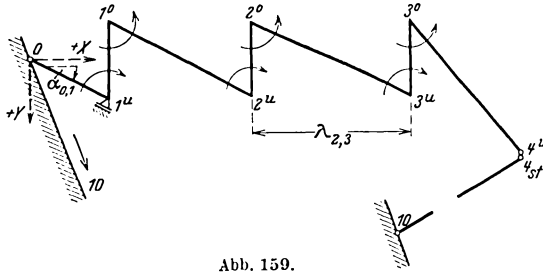


Abb. 159.

Die Berechnung erfolgt nach demselben Schema wie in Aufgabe 52. Die Wegkomponenten δx_0 und δy_0 des Anfangspunktes 0 sind Null. Die Drehung der Anfangssehne 0,1^u wird beim Rechnungsgang I gleich Null gesetzt.

Sämtliche Verschiebungswerte des Rechnungsgangs I erhalten wieder den oberen Index „I“. Der untere Index „0“ zur Kennzeichnung der Zugehörigkeit zum gegebenen Belastungszustand 0 ist fortgelassen.

Damit ergibt sich (vgl. Aufgabe 52):

$$\delta \alpha_{i,i+1}^I = \delta \alpha_{i-1,i}^I + \delta \Delta \alpha_i,$$

wobei allgemein $\delta \Delta \alpha_i = \pm \sum \delta \beta_i^*$ (vgl. Abb. 157),

$$\begin{aligned} \delta x_i^I &= \delta x_{i-1}^I + \frac{\delta s_{i-1,i}}{s_{i-1,i}} (x_i - x_{i-1}) - \delta \alpha_{i-1,i}^I \cdot (y_i - y_{i-1}) \\ &= \delta x_{i-1}^I + \frac{\sigma_{i-1,i}}{E} (x_i - x_{i-1}) - \delta \alpha_{i-1,i}^I \cdot (y_i - y_{i-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y_i^I &= \delta y_{i-1}^I + \frac{\delta s_{i-1,i}}{s_{i-1,i}} (y_i - y_{i-1}) + \delta \alpha_{i-1,i}^I \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \delta y_{i-1}^I + \frac{\sigma_{i-1,i}}{E} (y_i - y_{i-1}) + \delta \alpha_{i-1,i}^I \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Durchrechnung s. Tabelle 45.

* Die Summe erstreckt sich über alle Dreieckswinkel bei i , die bestrichen werden, wenn der Stab $i-1$, i um i nach i , $i+1$ gedreht wird. Das + Zeichen gilt, wenn dabei diese Winkel im Uhrzeigersinn bestrichen werden; andernfalls gilt das - Zeichen. Im vorliegenden Fall wird an jedem Knoten immer nur ein Dreieckswinkel bestrichen.

Tabelle 45. Berechnung von $\delta x'_{i-1}$, $\delta x'_i$ und $\delta y'_i$ (Rechnungsgang I).

Knoten i	(1) $\pm \sum \delta \beta_{i-1} \cdot 10^4$ [—]	(2) $\delta x'_{i-1} \cdot 10^4$ [—]	(3) $\sigma_{i-1,i} \cdot 10^4$ \dots E^* [—]	(4) $x_i - x_{i-1}$ [cm]	(5) $y_i - y_{i-1}$ [cm]	(6) = (3) · (4) [cm]	(7) = (2) · (5) [cm]	(8) = (6) - (7) [cm]	(9) $\delta x'_i \cdot 10^4$ [cm]	(10) = (3) · (5) [cm]	(11) = (2) · (4) [cm]	(12) = (10) + (11) [cm]	(13) $\delta y'_i \cdot 10^4$ [cm]
0	0								0				0
1 ^u	-0,86	0	-0,990	+40	+20	-39,6	0	-39,6	-39,6	-19,8	0	-19,8	0
1 ^o	+2,00	-0,86	+0,855	0	-40	0	+34,4	-34,4	-39,6	-34,2	0	-34,2	-19,8
2 ^u	-2,00	+1,14	+0,115	+80	+40	+9,2	+45,6	-36,4	-74,0	+4,6	+91,2	+95,8	-54,0
2 ^o	+3,48	-0,86	-0,350	0	-40	0	+34,4	-34,4	-110,4	+14,0	0	+14,0	+41,8
3 ^u	-3,49	+2,62	+0,785	+80	+40	+62,8	+104,8	-42,0	-144,8	+31,4	+209,6	+241,0	+55,8
3 ^o	+5,08	-0,87	-0,845	0	-40	0	+34,8	-34,8	-186,8	+33,8	0	+33,8	+296,8
4 ^u		+4,21	+1,220	+60	+72,3	+73,2	+304,5	-231,3	-221,6	+88,2	+252,6	+340,8	+330,6
4 ^o									-452,9				+671,4

* $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm².

Für den „Stabzug“ $10 \div 4_{St}$ (der hier nur aus einem Einzelstab mit festgehaltenem Anfangspunkt 10 besteht) ergibt sich entsprechend mit $\delta\alpha_{10,4}^I = 0$:

$$\begin{aligned}\delta x_{4St}^I &= \frac{\sigma_{10,4}}{E} (x_4 - x_{10}) \\ &= \frac{228}{2 \cdot 10^6} (260 - 60) = + 228 \cdot 10^{-4} \text{ cm ,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta y_{4St}^I &= \frac{\sigma_{10,4}}{E} (y_4 - y_{10}) \\ &= \frac{228}{2 \cdot 10^6} (52,3 - 160) = - 123 \cdot 10^{-4} \text{ cm .}\end{aligned}$$

Werden wieder passende Zusatzdrehungen $\delta\alpha_{0,1}^{II}$ und $\delta\alpha_{10,4}^{II}$ für den ersten Stab $0, 1^u$ des Stabzugs $0, 1^u, 1^o, \dots$ und für die Strebe $10, 4_{St}$ eingeführt (vgl. Aufgabe 52), so ergeben sich die wirklichen Verschiebungswerte im Rechnungsgang II zu:

$$\left. \begin{aligned}\delta x_i &= \delta x_i^I - \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot (y_i - y_0), \\ \delta y_i &= \delta y_i^I + \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot (x_i - x_0), \\ \delta\alpha_{i-1,i} &= \delta\alpha_{i-1,i}^I + \delta\alpha_{0,1}^{II},\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Teilstabzug} \\ 0, 1^u, 1^o, \dots 4^u \end{array}$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned}\delta x_{4St} &= \delta x_{4St}^I - \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (y_4 - y_{10}), \\ \delta y_{4St} &= \delta y_{4St}^I + \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (x_4 - x_{10}), \\ \delta\alpha_{10,4St} &= \delta\alpha_{10,4}^I + \delta\alpha_{10,4}^{II},\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Teilstabzug} \\ \text{Strebe } 10, 4_{St}. \end{array}$$

Die Ermittlung der Zusatzdrehungen $\delta\alpha_{0,1}^{II}$ und $\delta\alpha_{10,4}^{II}$ erfolgt wieder aus der Bedingung, daß an den beiden Teilstabzügen

$$\delta x_{4^u} = \delta x_{4St} \quad \text{bzw.} \quad \delta y_{4^u} = \delta y_{4St}$$

sein muß:

$$\begin{aligned}\delta x_{4^u} &= \delta x_{4^u}^I - \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot (y_4 - y_0) \\ &= \delta x_{4St}^I - \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (y_4 - y_{10}) = \delta x_{4St}, \\ \delta y_{4^u} &= \delta y_{4^u}^I + \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot (x_4 - x_0) \\ &= \delta y_{4St}^I + \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (x_4 - x_{10}) = \delta y_{4St}.\end{aligned}$$

Zahlenrechnung:

$$\begin{aligned}- 0,0453 - \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot 52,3 &= + 0,0228 - \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (52,3 - 160), \\ + 0,0671 + \delta\alpha_{0,1}^{II} \cdot 260 &= - 0,0123 + \delta\alpha_{10,4}^{II} \cdot (260 - 60).\end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned}\delta\alpha_{0,1}^{II} &= - 5,77 \cdot 10^{-4}, \\ \delta\alpha_{10,4}^{II} &= - 3,54 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Die Berechnung der gesuchten Verschiebungskomponenten erfolgt in Tabelle 46.

Tabelle 46. Berechnung der wirklichen Werte δx_i und δy_i für Teil 0÷4^u.
(Rechnungsgang II.)

Knoten <i>i</i>	$y_i - y_0$ [cm]	$-\delta \alpha''_{0,1} (y_i - y_0) \cdot 10^4$ [cm]	$\delta x_i^I \cdot 10^4$ [cm]	$\delta x_i \cdot 10^4$ [cm]	$x_i - x_0$ [cm]	$+\delta \alpha''_{0,1} (x_i - x_0) \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_i^I \cdot 10^4$ [cm]	$\delta y_i \cdot 10^4$ [cm]
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 ^u	+20	+115,4	- 39,6	+ 75,8	+ 40	- 230,8	- 19,8	-250,6
1 ^o	-20	-115,4	- 74,0	-189,4	+ 40	- 230,8	- 54,0	-284,8
2 ^u	+20	+115,4	-110,4	+ 5,0	+120	- 692,4	+ 41,8	-650,6*
2 ^o	-20	-115,4	-144,8	-260,2	+120	- 692,4	+ 55,8	-636,6
3 ^u	+20	+115,4	-186,8	- 71,4	+200	-1154	+296,8	-857,2
3 ^o	-20	-115,4	-221,6	-337,0	+200	-1154	+330,6	-823,4
4 ^u	+52,3	+301,5	-452,9	-151,4	+260	-1500	+671,4	-828,6

Aufgabe 54: Abgestrebter Fachwerkholm. (Zeichnerische Ermittlung seiner Knotenpunktewege.)

1. Allgemeines.

Zur zeichnerischen Ermittlung der Wege von Fachwerk-Knotenpunkten dient der sog. Williot'sche Verschiebungsplan. Das Verfahren wird zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert und danach auf Aufgabe 53 angewandt. (Näheres s. z. B. bei Müller-Breslau^{12,13}.)

a) Bei einem Fachwerk (z. B. einem Rippenende, Abb. 160) sei der eine Endpunkt 1 des Stabes *a* fest, der andere Endpunkt 2 in Richtung des Stabes *a* geführt. Das Fachwerk sei durch Knotenlasten beansprucht; die dadurch hervorgerufenen Stabkräfte *S* und Stablängenänderungen $\delta s = \frac{S s}{E F}$ seien berechnet.

Der Punkt 2 von Stab *a* (Abb. 160)

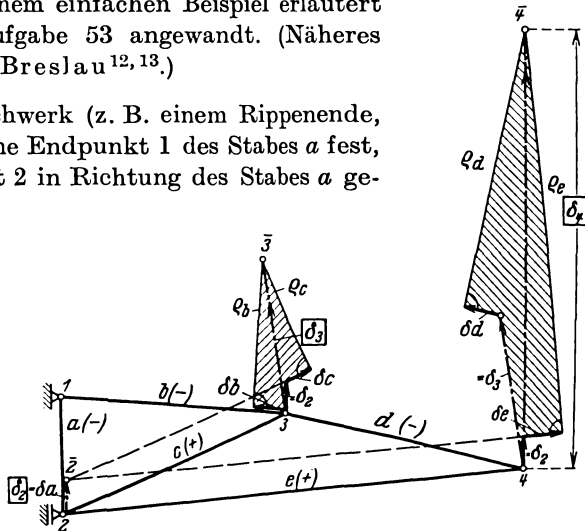


Abb. 160.

* Vgl. den Wert für $\delta y_{2,0}^u$ nach Tabelle 38, S. 149 und Tabelle 44, S. 155.

verschiebt sich dann um den Betrag der Stabverkürzung $\overline{\delta a}$ nach $\overline{2}$; der Weg δ_2 von Punkt 2 ist also $2 \div \overline{2}$.

Würden die Stäbe b und c nun ihre Richtung beibehalten, so verschöbe sich der mit 3 zusammenfallende Endpunkt von Stab b infolge einer Druckbeanspruchung um die Stabverkürzung δb nach 1 hin; der mit 3 zusammenfallende Endpunkt von c verschöbe sich zunächst mit dem Stabe c um δ_2 parallel zu $2 \div \overline{2}$ und weiterhin infolge einer Zugbeanspruchung um die Stablängung δc in Richtung c von $\overline{2}$ weg. Da die Endpunkte von b und c aber miteinander verbunden bleiben müssen, so müssen sich die Stäbe b und c um 1 bzw. $\overline{2}$ drehen; dabei verschieben sich die Endpunkte von b und c auf Kreisbögen um 1 und $\overline{2}$, also in üblicher Näherung auf Loten ϱ_b bzw. ϱ_c zu b bzw. c bis zum Schnittpunkt $\overline{3}$ von ϱ_b und ϱ_c . Der Gesamtweg δ_3 von Punkt 3 ist dann die Strecke $3 \div \overline{3}$.

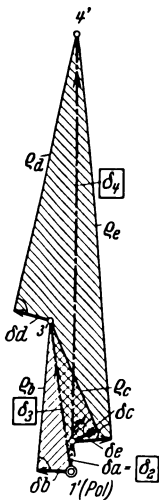


Abb. 161.

In gleicher Weise verschieben sich die mit 4 zusammenfallenden Endpunkte der Stäbe d und e zunächst mit den Stäben d und e um δ_3 bzw. δ_2 . Weiterhin verschieben sie sich um δd bzw. δe nach $\overline{3}$ hin bzw. von $\overline{2}$ weg, und schließlich auf Loten ϱ_d bzw. ϱ_e zu d bzw. e bis zum Schnittpunkt $\overline{4}$ von ϱ_d und ϱ_e . Der Gesamtweg δ_4 von 4 ist dann die Strecke $4 \div \overline{4}$.

Entsprechend diesem Vorgehen am Fachwerk selbst (Abb. 160) kann, getrennt vom Fachwerk, ein sog. Verschiebungsplan gezeichnet werden, der nur die Wege δ , Längenänderungen δs und Lote ϱ enthält (Abb. 161):

Von dem beliebig gewählten Punkt $1'$ aus, der dem Fachwerkpunkt 1 zugeordnet sei ($1' =$ „Pol“ des Verschiebungsplans), werden die Längenänderungen δa und δb der an 1 anschließenden Stäbe a und b in dem Sinne aufgetragen, wie sich die Punkte 2 bzw. 3 gegen 1 verschieben würden, wenn beide Stäbe ihre Richtung beibehielten.

Der Endpunkt $2'$ von δa entspricht dann dem Punkt $\overline{2}$ des Fachwerks, die Strecke $1' \div 2'$ ist der Weg δ_2 von 2. Von $2'$ aus werden die Längenänderungen δc und δe der in 2 anschließenden Stäbe c und e aufgetragen in dem Sinne, wie sich die Punkte 3 und 4 gegen 2 verschieben würden, wenn die Stäbe c und e ihre Richtung beibehielten. Der Schnittpunkt $3'$ der Endlote auf δb und δc entspricht dem Punkt $\overline{3}$ des Fachwerks: Die Strecke $1' \div 3'$ ist der Weg δ_3 von 3. Entsprechend wird der Weg δ_4 des Fachwerkpunkts 4 im Plan gefunden.

b) Das Fachwerk 1, 2, 3, 4 werde um den Punkt 1 um einen gewissen Winkel $\delta\varphi$ gedreht (Abb. 162). Dabei bewegt sich jeder Knoten i

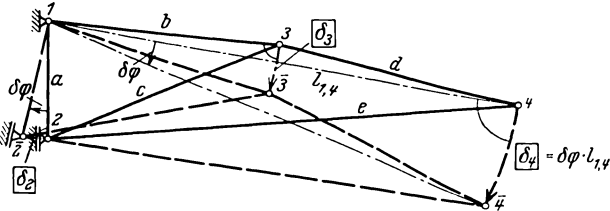


Abb. 162.

auf einem Kreisbogen mit dem Radius $l_{1,i}$ und dem Zentriwinkel $\delta\varphi$, also in erster Näherung auf einer Senkrechten zur Verbindungslinie $1 \div i$ um eine Strecke $\delta\varphi \cdot l_{1,i}$.

Dieser Bewegung der einzelnen Fachwerkpunkte entsprechend kann wiederum getrennt von der Fachwerkfigur ein Verschiebungsplan (Abb. 163) gezeichnet werden:

Von dem beliebig gewählten Pol $1''$ aus, der dem Fachwerkpunkt 1 zugeordnet sei, werden Strahlen senkrecht zu den Richtungen $1 \div i$ gezogen und darauf die Strecken $\delta\varphi \cdot l_{1,i} = 1'' \div i''$ abgetragen. Die auf diese Weise erhaltenen Strecken $1'' \div i''$ stellen die Wege der Knoten i dar. Dieser Konstruktion entsprechend bilden die Punkte i'' eine dem Fachwerknetz gleichsinnig ähnliche, aber im Sinne von $\delta\varphi$ um 90° gedrehte Figur F'' .

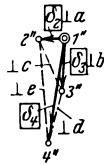


Abb. 163.

Die Punkte i'' können also auch in folgender Weise gefunden werden: Von $1''$ aus wird $\delta_2 = 1'' \div 2''$ seiner Größe und Richtung entsprechend aufgetragen. Über $1'' \div 2''$ wird eine dem Fachwerknetz gleichsinnig ähnliche Figur errichtet derart, daß darin $1'' \div 2''$ dem Fachwerkstab $a = 1 \div 2$ entspricht.

2. Zeichnerische Ermittlung der Knotenpunktswege des in Aufgabe 30 bzw. 53 behandelten Fachwerkholms.

Die Längenänderungen der einzelnen Fachwerkstäbe (entsprechend der in Aufgabe 30 angegebenen Belastung) werden der Tabelle 38, S. 149 entnommen. Das Holmfachwerk $0 \div 4''$ und die Strebe $10 \div 4_{St}$ werden zunächst als Teilsysteme I und II je für sich betrachtet.

a) Teil I.

Zwecks Zurückführung der Aufgabe auf die vorstehend behandelte Grundaufgabe wird zunächst ein beliebiger Stab, z. B. $u_{1,2}$, als Ausgangsstab gewählt, und angenommen, daß der Punkt $2''$ unverschieblich, der Punkt $1''$ in Richtung von $u_{1,2}$ längsverschieblich sei. Dann ergeben

sich die Wege der übrigen Knotenpunkte i ($0, 1^u, 1^o, \dots, 4^u$) des Teilsystems I mittels eines Williotplanes I (Abb. 164) mit dem Pol $2^{u'}$ als Verbindungslinien $2^{u'} \div i'$. (Eingetragen ist nur $2^{u'} \div 0'$.)

Die von $0'$ aus gemessenen Strecken $0' \div i'$ stellen unter den zunächst gemachten Annahmen die auf den festen Punkt 0 bezogenen Wege dar. Um nun die Wege zu erhalten, die den wirklichen Auflagerbedingungen entsprechen (nämlich: Punkt 0 fest, Verschiebung von Punkt 4^u gleich der von Punkt 4_{St}), muß das ganze Teilsystem I noch um den festen Auflagerpunkt 0 gedreht werden. Dieser Zusatzdrehung entsprechen im Williotplan noch näher zu bestimmende Wege $0' \div i''$, wobei die Punkte i'' nach 1, b) eine dem Fachwerknetz ähnliche und gegen das Fachwerknetz um 90° gedrehte Figur F'' bilden; die Zusatzdrehung wird im folgenden so bestimmt, daß die wirklichen Wege δ_i durch die Linien $i'' \div i'$ dargestellt werden (wie in Abb. 164 für Punkt 3^o eingezeichnet).

Bei dieser der Größe nach noch unbekanntem Zusatzdrehung bewegt sich der Endpunkt 4^u auf einer (unendlich kleinen) Geraden senkrecht zu $0 \div 4^u$, die im Verschiebungsplan als eine durch $0'$ gehende Senkrechte zu $0 \div 4^u$ abgebildet wird (strichpunktierte Linie v''). Der endgültigen Lage von 4^u entspricht im Verschiebungsplan ein noch näher festzulegender Punkt $4^{u''}$ auf v'' .

(Wäre die Strebe starr, so wäre $4^{u''}$ und damit die ganze Figur F'' jetzt schon endgültig bestimmt; denn der durch $4^{u''} \div 4^{u''}$ dargestellte Gesamtweg von 4^u müßte senkrecht zu $10 \div 4_{St}$ gerichtet sein; also läge $4^{u''}$ einerseits auf v'' , andererseits auf einer Senkrechten zu $10 \div 4_{St}$ durch 4^u (in Abb. 164 dünn gestrichelt angedeutet).

b) Teil II .

Entsprechend wie bei Teil I wird für die Strebe $10 \div 4_{St}$ (als einzigen Stab des Teilsystems II) zunächst angenommen, daß der Endpunkt 4_{St} nur in Richtung $10 \div 4_{St}$ längsverschieblich sei; der Punkt 10 ist fest.

Der Teilverschiebungsplan II besteht dann nur aus der von einem beliebig gewählten Pol $10'$ aus aufgetragenen Strebenlänge $\delta_{st} = 10' \div 4'_{St}$.

Um den wirklichen Weg des Punktes 4_{St} zu erhalten, muß die Strebe noch um den festen Punkt 10 gedreht werden. Bei dieser, der Größe nach noch unbekanntem Zusatzdrehung bewegt sich der Endpunkt 4_{St} auf einer (unendlich kleinen) Geraden senkrecht zu $10, 4_{St}$, die im Verschiebungsplan II als eine durch $10'$ gehende Senkrechte zu $10, 4_{St}$ abgebildet wird (strichpunktierte Linie w''). Der endgültigen Lage von 4_{St} entspricht im Verschiebungsplan ein noch näher festzulegender Punkt $4''_{St}$ auf w'' .

c) Vereinigung von Teil I und II.

Da der endgültige Weg $\delta_{4u} = 4u'' \div 4u'$ von Teil I derselbe sein muß, wie $\delta_{4St} = 4St'' \div 4St'$ von Teil II, so ergibt sich der noch festzulegende

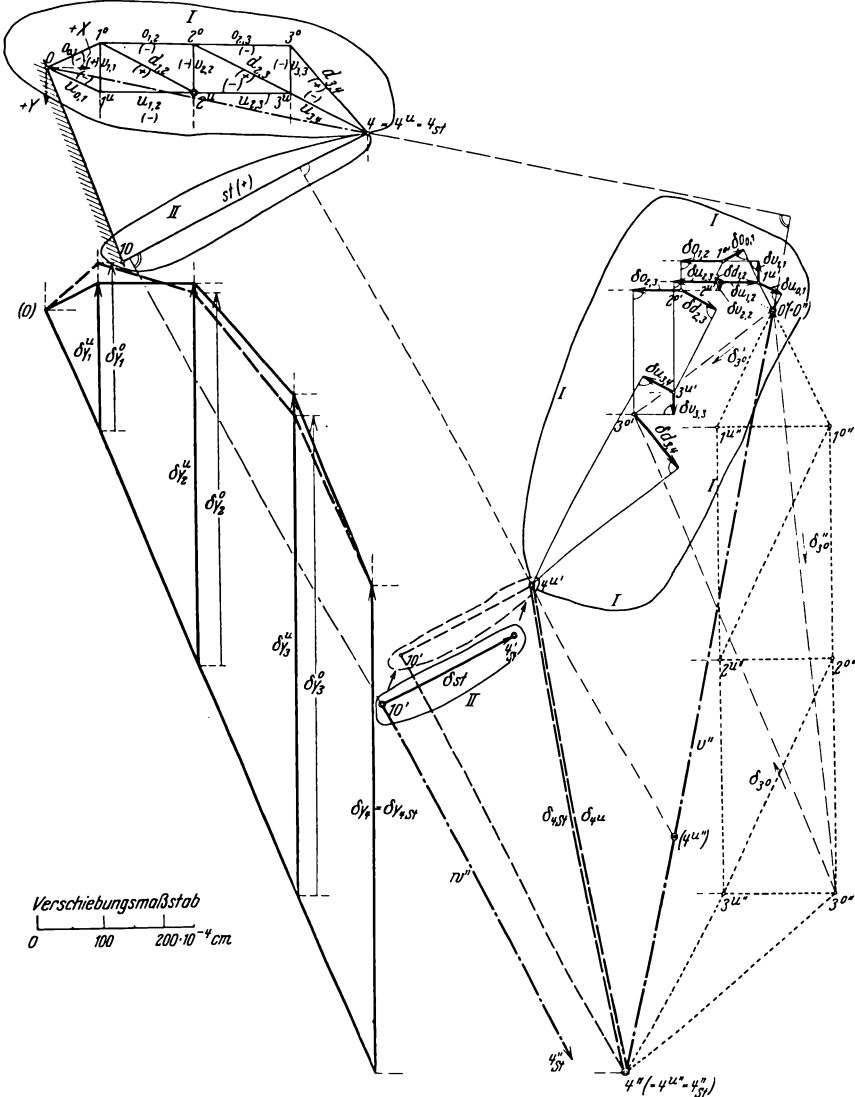


Abb. 164.

Punkt $4u''$ identisch $4St''$ durch Aneinanderlegen der Teilverschiebungspläne (Abb. 164).

Nachdem auf diese Weise $4''$ ($= 4''' = 4''_{St}$) festgelegt ist, ergeben sich die übrigen Punkte i'' nach 1, b), indem über $0' \div 4''$ eine dem Fachwerknetz gleichsinnig ähnliche, um 90° gedrehte Figur F''' gezeichnet wird.

Die lotrechten Komponenten δy_i der einzelnen Gesamtwege $\delta_i = i'' \div i'$ ergeben die in Abb. 164 eingetragenen Biegelinien der beiden Fachwerkgurte (vgl. hierzu auch Tabelle 46).

§15. Berücksichtigung des Einflusses der Formänderung auf die Beanspruchung zweifach gestützter quer- und längsbelasteter Holme (Knickbiegung).

Allgemeines.

a) Knickbiegemoment.

Bei Holmen, die gleichzeitig auf Biegung und Druck beansprucht werden, ist es häufig notwendig, der Berechnung die unter Einwirkung der Belastung geänderte Gestalt des Holms zugrunde zu legen (Berechnung auf sog. „Knickbiegung“*).

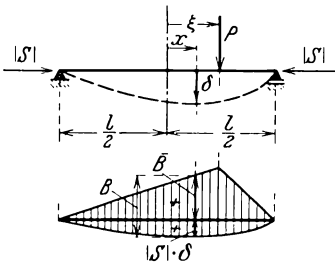


Abb. 165.

Wie aus Abb. 165 ersichtlich, entstehen infolge der Verbiegung eines solchen Holms zusätzliche Biegemomente $|S| \cdot \delta$. Bedeutet \bar{B} (zu lesen: B quer) das Biegemoment infolge Querbelastung allein, so ist das Gesamtbiegemoment (sog. Knickbiegemoment): $B = \bar{B} + |S| \cdot \delta$. Die Berechnung der Biegemomente setzt also die Kenntnis der Durchbiegungen voraus. Die

Durchbiegung δ an irgend einer Stelle kann aber nicht in der sonst üblichen Weise unmittelbar mittels eines Hilfszustandes I (§ 12 ÷ 14) mit der Arbeitsgleichung gefunden werden, weil dabei mit $B = \bar{B} + |S| \cdot \delta$ die gesuchte Durchbiegung δ auch unter das Integralzeichen treten würde.

b) Ermittlung der Durchbiegungen δ , Neigungen τ , Biegemomente B und Querkräfte Q .

Nach S. 113 ist die gegenseitige Drehung zweier um dx voneinander entfernter Querschnitte:

$$\delta d\vartheta = \frac{B \cdot dx}{EJ} = \frac{(\bar{B} + |S| \cdot \delta) \cdot dx}{EJ}.$$

($\delta d\vartheta$ ist positiv im Sinne von $+|B|$, vgl. Abb. 112.)

* Vgl. zum Folgenden die unter 12, 13, 27 bis 42 genannten Arbeiten.

Richtiger wäre die Benennung „Druckbiegung“, da es sich hier um stabile Zustände handelt. Im folgenden werden die Durchbiegungen meist mit δ (ohne beigefügtes y) bezeichnet.

Nach Abb. 166 ist der Unterschied der Tangentenneigungen an zwei um dx voneinander entfernten Querschnitten:

$$d\tau = d\left(\frac{d\delta}{dx}\right) = -\delta d\vartheta.$$

Also ist:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{\delta d\vartheta}{dx} = -\frac{\bar{B} + |S| \cdot \delta}{EJ}$$

bzw.

$$EJ \cdot \frac{d^2\delta}{dx^2} + |S| \cdot \delta + \bar{B} = 0.$$

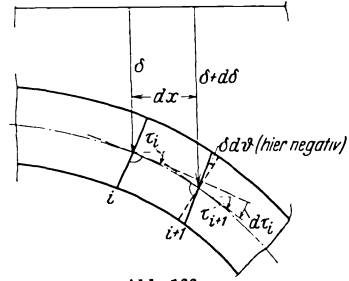


Abb. 166.

(Nach vorhergehendem bedeutet \bar{B} das Biegemoment an der Stelle x infolge der Querbelastung allein, also ohne den Einfluß der Formänderung.)

Besteht die Querbelastung z. B. aus verteilten Belastungen $p_n \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^n$, Einzelkräften P_ξ oder Einzelmomenten M_ξ an Stellen $x = \xi$ und ist die Biegesteifigkeit EJ über die Länge l konstant, so läßt sich die Lösung dieser Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$\delta = \sum \frac{p_n l^4}{EJ} \cdot f_\delta(p_n) + \sum \frac{P_\xi l^3}{EJ} \cdot f_\delta(P_\xi) + \sum \frac{M_\xi l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M_\xi).$$

Darin sind die Ausdrücke $f_\delta(p_n)$, $f_\delta(P_\xi)$, $f_\delta(M_\xi)$ dimensionslose Funktionen von x/l . Neben den Größen n und ξ/l enthalten sie die Stablängskraft S in Form eines Parameters $\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$, des sog. „Labilitätsmaßes“* des Balkens.

Die von x , ξ und S unabhängigen Koeffizienten $\frac{p_n l^4}{EJ}$, $\frac{P_\xi l^3}{EJ}$ und $\frac{M_\xi l^2}{EJ}$ werden im folgenden als „Festwerte“ bezeichnet.

Durch Differentiation von δ ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck für die Neigungen τ an beliebiger Stelle; so insbesondere an den Stützpunkten:

$$\text{links: } \tau^l = \sum \frac{p_n l^3}{EJ} \cdot \vartheta^l(p_n) + \sum \frac{P_\xi l^2}{EJ} \cdot \vartheta^l(P_\xi) + \sum \frac{M_\xi l}{EJ} \cdot \vartheta^l(M_\xi),$$

$$\text{rechts: } \tau^r = \sum \frac{p_n l^3}{EJ} \cdot \vartheta^r(p_n) + \sum \frac{P_\xi l^2}{EJ} \cdot \vartheta^r(P_\xi) + \sum \frac{M_\xi l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M_\xi).$$

Die Biegemomente $B = \bar{B} + |S| \cdot \delta$ lassen sich entsprechend δ darstellen in der Form:

$$B = \sum p_n l^2 \cdot f_B(p_n) + \sum P_\xi l \cdot f_B(P_\xi) + \sum M_\xi \cdot f_B(M_\xi).$$

* Benennung nach Bleich⁴²; dort mit φ bezeichnet. — In der im Schrifttum unter ⁴⁰ genannten Arbeit bezeichnet α den Ausdruck $\alpha = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$.

Darin setzen sich die Funktionen $f_B(p_n)$ usw. entsprechend den beiden Summanden von B , nämlich \bar{B} und $|S| \cdot \delta$, je aus zwei Teilfunktionen zusammen:

$$f_B = \bar{f}_B + \alpha^2 \cdot f_\delta.$$

Schließlich ergibt sich noch durch Differentiation dieses Ausdrucks ein ähnlich gebauter Ausdruck für die Querkraft Q .

Für die häufigsten Fälle:

1. verteilte Belastung in der Form $p = p_n \cdot \left(\frac{x}{l/2}\right)^n = p_n \cdot \left(\frac{2x}{l}\right)^n$ mit $n = 0, 1, 2$ und 3 ,

2. Einzelkraft P_ξ an beliebiger Stelle ξ ,

3. Einzelmoment M^l bzw. M^r bzw. M_ξ^1 am linken bzw. rechten Ende bzw. an beliebiger Stelle ξ ,

sind die Ausdrücke $f_\delta, \vartheta^l, \vartheta^r, \bar{f}_B^n$ in Tabelle 95 bis 97, Anhang, zusammengestellt. Für die Fälle p_n, M^l und M^r sind in Tabelle 98 bis 102, Anhang, die zugehörigen Zahlenwerte an den Achtpunkten des Holms

$$\frac{x}{l/2} = 0, \quad \pm \frac{1}{4}, \quad \pm \frac{1}{2}, \quad \pm \frac{3}{4}, \quad \pm 1$$

$$\left(\text{d. h. } \frac{x}{l} = 0, \quad \pm \frac{1}{8}, \quad \pm \frac{1}{4}, \quad \pm \frac{3}{8}, \quad \pm \frac{1}{2}\right)$$

angegeben, so daß sich für diese Hauptbelastungsfälle die umständliche Ausrechnung der Formeln für f_δ, ϑ und \bar{f}_B erübrigt.

Im Grenzfall $\alpha = 0$, d. h. $S = 0$, ergeben die Formeln für f_δ und ϑ zunächst unbestimmte Ausdrücke; ihre Grenzwerte sind als \bar{f}_δ und $\bar{\vartheta}$ in Tabelle 96 und 97, Anhang, besonders angegeben.

Bei kleinem α (bis rund 0,5) ist die Ermittlung von f_δ und ϑ nach den allgemeinen Formeln sehr fehlerempfindlich (kleine Differenzen großer Zahlen); da andererseits bei kleinem α der Einfluß der Knickbiegung unbedeutend ist, wird zweckmäßig in guter Näherung bis $\alpha =$ rund 0,5 mit den Grenzwertformeln für $\alpha = 0$ gerechnet, sofern nicht bereits genaue Zahlenwerte aus Tabelle 100 bis 102 entnommen werden können.

Ähnliche Formeln wie im vorhergehenden können auch aufgestellt werden für den Fall, daß auf den Balken eine Zugkraft S wirkt*; auf die Behandlung dieser Fälle wird hier jedoch verzichtet, da es im allgemeinen üblich ist, in solchen Fällen mit $\alpha = 0$, also mit gewöhnlicher Biegung zu rechnen, d. h. $B \sim \bar{B}$ zu setzen.

Da die Ausdrücke für δ Produkte von p bzw. P bzw. M mit Funktionen von S sind, die überdies S nicht linear enthalten, so ergibt sich bei Knickbiegung nur dann die Biegelinie eines zusammengesetzten Be-

* Vgl. z. B. Müller-Breslau¹³.

lastungszustands durch Überlagerung der Biegelinien der einzelnen Teilbelastungszustände, wenn bei allen Teilbelastungszuständen dieselbe Längskraft S , nämlich die des Gesamtbelastungszustands, angesetzt wird. Gleiches gilt für die Überlagerung der Neigungen, Biegemomente und Querkräfte.

c) Anwendung der Arbeitsgleichung.

Ist bei einem zusammengesetzten System, das auf Knickbiegung beanspruchte Einzelglieder enthält, irgend eine Formänderungsgröße $\delta_{i,0}$ infolge eines gegebenen Belastungszustands 0 zu bestimmen, so kann dies ähnlich wie sonst mittels eines Hilfszustands I nach der Arbeitsgleichung geschehen. Nur sind jetzt bei den betreffenden Gliedern statt der sonst in die Arbeitsgleichung eingehenden gewöhnlichen Biegemomente \bar{B}_0 des gegebenen Belastungszustands 0 die entsprechenden Knickbiegemomente $B_0 = \bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0$ einzusetzen; tritt auch bei dem Hilfszustand I Knickbiegung auf, so sind aber, wie aus dem folgenden einfachen Beispiel hervorgeht, die gleichzeitig in die Arbeitsgleichung eingehenden Biegemomente dieses Zustands ohne Berücksichtigung des Formänderungseinflusses zu nehmen; es ist also zu setzen:

$$1 \cdot \delta_{i,0} = \int \bar{B}_I \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx + \sum S_I \cdot \frac{S_0 s}{EF} + \dots$$

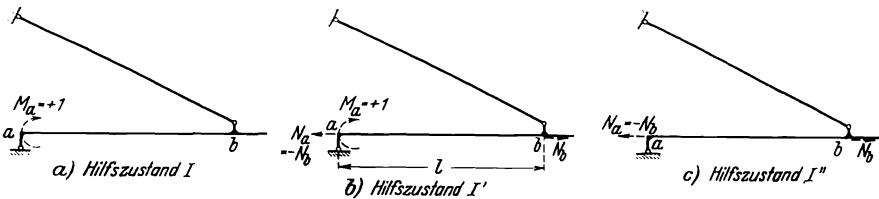


Abb. 167.

Soll nämlich z. B. bei dem in Abb. 167a dargestellten abgestrebten Holm die Drehung $\varphi_{a,0}$ des linken Endpunktes a infolge irgend eines gegebenen (hier nicht eingezeichneten) Belastungszustands 0 bestimmt werden, so kann statt des sonst üblichen Hilfszustands I (Abb. 167a), bei dem der Holm auf Knickbiegung beansprucht würde, zunächst der in Abb. 167b eingezeichnete Hilfszustand I' angesetzt werden, bei dem in a und b zusätzliche Längskräfte $N_a = -N_b$ wirken, die so gewählt seien, daß sie die von der Strebe ausgeübte Holmlängskraft aufheben; die Holmbiegemomente $B_{I'}$ sind also frei von irgendwelchen Formänderungseinflüssen $|S| \cdot \delta$. Mittels dieses Hilfszustands I' liefert die Arbeitsgleichung zunächst:

$$1 \cdot \varphi_{a,0} + N_b \cdot \delta l_0 = \int B_{I'} \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx + \sum S_{I'} \cdot \frac{S_0 s}{EF} + \dots$$

wobei in $\sum S_I \cdot \frac{S_0 s}{EF}$ hier nur die Strebe eingeht, da im Holm S_I gleich Null ist.

Weiterhin könnte die Holmlängenänderung $N_b \cdot \delta l_0$ mittels eines Hilfszustands I'' (Abb. 167c) gefunden werden, bei dem nur die Längskräfte $N_a = -N_b$ wirken:

$$N_b \cdot \delta l_0 = S_{I''} \cdot \frac{S_0 s}{EF},$$

dabei tritt nur im Holm eine Längskraft auf.

Wird der damit bekannte Wert $N_b \cdot \delta l_0$ von dem ersten Ausdruck abgezogen, so bleibt der gesuchte Ausdruck

$$\varphi_{a,0} = \int B_I \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx + \sum (S_I - S_{I''}) \cdot \frac{S_0 s}{EF} + \dots$$

übrig. Da aber die Biegemomente B_I identisch sind mit den Biegemomenten \bar{B}_I , die sich für den sonst üblichen Hilfszustand I (Abb. 167a) ergeben, wenn bei diesem der Einfluß der Formänderungen außer acht gelassen wird, und da $S_I - S_{I''} = S_I$ ist, so kann auch geschrieben werden:

$$\varphi_{a,0} = \int \bar{B}_I \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx + \sum S_I \cdot \frac{S_0 s}{EF} + \dots,$$

entsprechend der oben ausgesprochenen Behauptung.

Zur Auflösung solcher die Knickbiegelineien-Ordinaten enthaltenden Integrale dienen die beiden folgenden, aus Aufgabe 59 hervorgehenden Regeln:

α) Ist die \bar{B}_i -Fläche ein Trapez mit den Ordinaten $\bar{B}_i^l = B_i^l$ und $\bar{B}_i^r = B_i^r$ am linken bzw. rechten Stabauflagerpunkt, so ist

$$\delta_{i,k} = B_i^l \cdot \tau_k^l - B_i^r \cdot \tau_k^r,$$

wobei τ_k^l bzw. τ_k^r die Neigung des linken bzw. rechten Balken-Endquerschnitts (gegen die Balkensehne) ist, die sich beim Zustand k unter Berücksichtigung der Knickbiegung ergibt.

Da ein positives Biegemoment am linken bzw. rechten Stabende einem daselbst angreifenden positiven bzw. negativen biegenden Einzelmoment entspricht, kann auch geschrieben werden:

$$\delta_{i,k} = M_i^l \cdot \tau_k^l + M_i^r \cdot \tau_k^r.$$

β) Ist die \bar{B}_i -Fläche ein Dreieck mit der Spitzenordinate $\bar{B}_{\xi,i}$ an der Stelle ξ und den Ordinaten 0 an den Stabendenpunkten, so ist:

$$\delta_{i,k} = \bar{B}_{\xi,i} \cdot \frac{4}{l[1 - (2\xi/l)^2]} \cdot \delta_{\xi,k},$$

wobei $\delta_{\xi,k}$ die Durchbiegung der Stelle ξ (gegen die Balkensehne) ist, die sich beim Zustand k unter Berücksichtigung der Knickbiegung ergibt (ξ von Balkenmitte aus gemessen).

Aufgabe 55 und 56: Holme konstanter Steifigkeit mit konstanter Längskraft.

Aufgabe 55.

Bei dem in Abb. 168 dargestellten abgestrebten Holm sind für trapezförmig verteilte Belastung die Biegemomentenlinie B , die Biegelinie δ sowie die Holmneigungen τ^l und τ^r an den Stützpunkten a und b zu ermitteln.

Infolge der Schräglage der Strebe tritt bei der hier vorhandenen Querbelastung des Holmes gleichzeitig eine Holmlängskraft S (Druck) auf, so daß der Holm auf Knickbiegung beansprucht wird. Die Beanspruchungen des Holminnenfeldes sind dieselben wie die eines Balkens auf zwei Stützen a und b , auf den die laufende Querbelastung p , eine zentrische Längskraft S , ferner Exzentrizitäts- und Kragmomente $M_c = \pm S \cdot e$ und M_{kr} wirken (Abb. 169a).

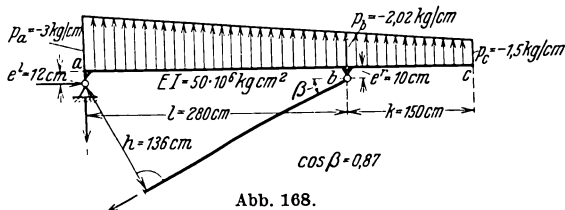


Abb. 168.

Die Querbelastung ist nach dem Gesetz:

$$p = p_0 + p_1 \cdot \frac{x}{l/2}$$

verteilt (x von der Mitte des Feldes $a \div b$ aus gemessen).

Aus

$$p \text{ (an der Stelle } a) = p_0 + p_1 \cdot (-1) = -3 \text{ kg/cm}$$

und

$$p \text{ („ „ „ } b) = p_0 + p_1 \cdot (+1) = -2,02 \text{ kg/cm}$$

folgt

$$p_0 = -2,51 \text{ kg/cm}, \quad p_1 = +0,49 \text{ kg/cm}.$$

Die Holmlängskraft ist:

$$S = -1183 \text{ kg},$$

also das Labilitätsmaß

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}} = 280 \sqrt{\frac{1183}{50 \cdot 10^6}} = 1,36.$$

Ferner wirken an den Enden a und b folgende biegende Momente:

Bei a : das Exzentrizitätsmoment

$$M_e^l = S \cdot e^l = -14200 \text{ kgcm},$$

bei b : das Kragmoment $M_{kr} = -18825 \text{ kgcm}$ und das Exzentrizitätsmoment

$$M_e^r = -S \cdot e^r = +11830 \text{ kgcm};$$

zusammen:

$$M^r = M_{kr} + M_e^r = -6995 \text{ kgcm}.$$

Tabelle 47. Ermittlung

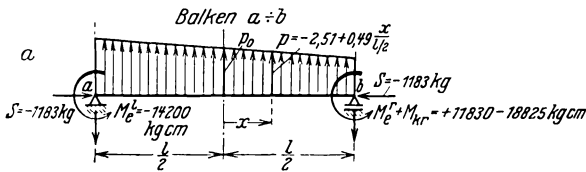
①	②	③	④	⑤	⑥
Teilzustand	„Festwerte“* für:			f_δ aus Tab.100, 101 [—]	δ ② · ⑤ [cm]
	δ [cm]	$B \cdot 10^{-3}$ [kgcm]	τ [—]		
$p_0 = -2,51 \text{ kg/cm. . .}$	-308	-197	-1,10	+0,0149	-4,59
$p_1 = +0,49 \text{ kg/cm. . .}$	+60	+38,4	+0,215	+0,00029	+0,02
$M^l = -14200 \text{ kgcm. . .}$	-22	-14,2	-0,079	+0,0672	-1,48
$M^r = -6995 \text{ kgcm. . .}$	-11	-7,0	-0,039	-0,0775	+0,86

Durchbiegung an der Stelle $\frac{x}{l} = +\frac{1}{8}$:

$$\delta = -5,19 \text{ cm.}$$

Obiges Rechenschema (Tabelle 47) zeigt entsprechend den im Abschnitt „Allgemeines“ angegebenen Formeln die Ermittlung von δ und B , z. B. für die Stelle

$$\frac{x}{l} = +\frac{1}{8},$$



sowie die Ermittlung der Endneigungen τ^l und τ^r .

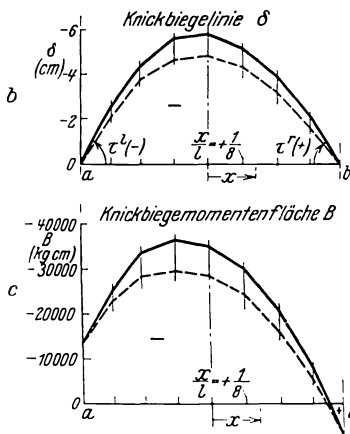


Abb. 169.

Die Zahlenwerte der in den Formeln für δ , B und τ vorkommenden Ausdrücke f_δ , f_B und ϑ sind dabei für das Labilitätsmaß der Gesamtlängskraft, nämlich $\alpha = 1,36$, aus den Tabellen 98 bis 102 interpoliert.

Die auf diese Weise vollständig ermittelte Biegelinie δ und Biegemomentenlinie B ist in Abb. 169 b bzw. c aufgezeichnet; in der gleichen Abbildung ist gestrichelt eingetragen, wie groß δ und B wären, wenn mit $\alpha = 0$ gerechnet, d. h. der Einfluß der Längskraft vernachlässigt würde; dabei ergäbe sich $\tau^l = -0,0665$ und $\tau^r = +0,0455$.

Aufgabe 56.

Die Holmfeld-Endneigungen τ^l und τ^r des in Aufgabe 55 behandelten Holms sind zu berechnen für:

* $\frac{p_0 l^4}{EJ}$, $p_0 l^2$, $\frac{p_0 l^3}{EJ}$ usw. nach S. 165.

von δ , B und τ .

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
\bar{f}_B aus Tab. 98, 99 [—]	$\alpha^2 \cdot f_\delta$ $\alpha^2 \cdot$ (6) [—]	f_B (7) + (8) [—]	$B \cdot 10^{-3}$ (3) · (9) [kgcm]	ϑ^l aus Tab. 102 [—]	τ^l (4) · (11) [—]	ϑ^r aus Tab. 102 [—]	τ^r (4) · (13) [—]
+0,117	+0,028	+0,145	-28,6	+0,0512	-0,0563	-0,0512	+0,0563
+0,0098	+0,0005	+0,0103	+ 0,396	-0,00293	-0,0006	-0,00293	-0,0006
+0,375	+0,124	+0,499	- 7,1	+0,384	-0,0303	-0,211	+0,0167
-0,625	-0,143	-0,768	+ 5,4	-0,211	+0,0082	+0,384	-0,0150

Biegemoment an der Stelle $\frac{x}{l} = + \frac{1}{8}$:
 $B = - 29904 \text{ kgcm.}$

Endneigungen:

$$\tau^l = - 0,0790, \quad \tau^r = + 0,0574.$$

1. die einzelnen Belastungsfälle 1, a ÷ d nach Abb. 170, je für sich allein;

2. gleichzeitige Wirkung der Belastungsfälle 1, a ÷ d nach Abb. 171.

Zu 1. Die einzelnen Belastungsfälle 1, a ÷ d, je für sich allein.

Die einzelnen Belastungsfälle 1, a ÷ d bedingen für den Balken a, b Einzelkräfte P_ξ , Einzelmomente M_ξ , Exzentrizitäts- und Kragmomente M_e^l , M_e^r , M_{kr} , Holmlängskräfte S sowie Labilitätsmaße

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}} = 280 \sqrt{\frac{|S|}{50 \cdot 10^6}}$$

(Tabelle 48).

Für die einzelnen Belastungsfälle sind die den einzelnen Teilzuständen entsprechenden „Festwerte“

$$\frac{P_\xi l^2}{EJ}, \frac{M_\xi l}{EJ}, \frac{M_e^l l}{EJ}, \frac{M_e^r l}{EJ} \text{ (S. 165) in Tabelle 49 zusammengestellt.}$$

Für jeden der Belastungsfälle 1a bis 1d werden dann mit seinem Labilitätsmaß α (Tabelle 48) wie in Aufgabe 55 die zu seinen Teil-

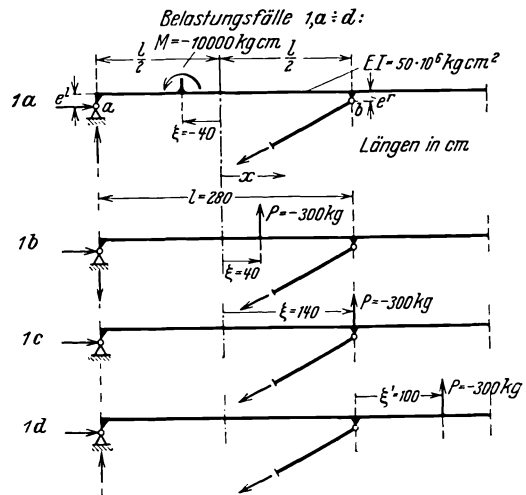


Abb. 170.

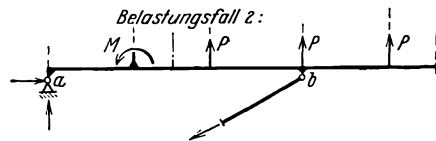


Abb. 171.

Tabelle 48. Teilbelastungszustände.

Belastungsfall	1 a	1 b	1 c	1 d
Werte				
P_{ξ} [kg] bei $\frac{\xi}{l/2} = +0,286$	—	— 300	—	—
M_{ξ} [kgcm] bei $\frac{\xi}{l/2} = -0,286$	-10000	—	—	—
S [kg]	— 64	— 345	— 537	— 729
$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$	0,32	0,74	0,92	1,07
$M^l = M'_e = S \cdot e^l$ [kgcm]	— 768	-4140	-6444	— 8748
$M^r = \left\{ \begin{array}{l} M'_e = -S \cdot e^r \\ M_{kr} \end{array} \right\}$ [kgcm]	+ 640	+3450	+5370	+ 7290 -30000

belastungszuständen gehörigen Werte ϑ^l und ϑ^r (S. 165) ermittelt, und zwar werden sie bei Belastungsfall:

1a) für seine Teilzustände M^l und M^r mit $\alpha = 0,32$ aus Tabelle 102, Anhang, interpoliert bzw. für den Teilzustand M_{ξ} nach Tabelle 97, Anhang, errechnet, und zwar dem kleinen Wert α entsprechend mit $\alpha = 0$ (S. 166);

1b) für P_{ξ} mit $\alpha = 0,74$ nach Tabelle 97, Anhang, errechnet bzw. für M^l und M^r aus Tabelle 102 interpoliert;

1c) bzw. 1d) für M^l und M^r mit $\alpha = 0,92$ bzw. mit $\alpha = 1,07$ aus Tabelle 102 interpoliert.

Dann ergeben sich wie in Aufgabe 55 für jeden einzelnen Belastungsfall 1a, 1b, 1c, 1d die Endneigungen τ^l und τ^r durch Überlagerung der einzelnen Werte τ , die mit den Formeln, S. 165, für seine jeweiligen Teilzustände (Tabelle 48) gefunden werden; sie sind in Tabelle 50, Spalte ① und ②, zusammengestellt.

Tabelle 49. Festwerte zur Ermittlung von τ^l und τ^r .

Belastungsfall	1 a	1 b	1 c	1 d
Teilzustand				
P_{ξ}	—	-0,470	—	—
M_{ξ}	-0,0560	—	—	—
M^l	-0,00430	-0,0232	-0,0361	-0,0490
M^r	+0,00358	+0,0193	+0,0301	-0,127

Zu 2. Gleichzeitige Wirkung der Belastungsfälle 1, a ÷ d.

Entsprechend dem auf S. 167 Gesagten dürfen bei gleichzeitiger Wirkung der Belastungsfälle 1, a ÷ d die im vorhergehenden berechneten Werte der einzelnen Belastungsfälle nicht einander überlagert werden. Vielmehr muß zunächst die Holmlängskraft des gesamten Belastungszustands 2 durch Addition der Holmlängkräfte für die Einzelfälle 1, a ÷ d ermittelt werden.

Es ergibt sich für Zustand 2: $S = -64 - 345 - 537 - 729 = -1675 \text{ kg}$ und damit das Labilitätsmaß $\alpha_{ges.} = l \sqrt{\frac{|S_{ges.}|}{EJ}} = 1,62$.

Für den Gesamtbelastungsfall 2 werden mit diesem Labilitätsmaß die Werte ϑ^l und ϑ^r aller zu 1a, 1b, 1c, 1d gehörigen Teilzustände und daraus die Werte τ^l und τ^r der einzelnen Belastungsfälle 1, a ÷ d erneut berechnet. Diese der Gesamtlängskraft $S_{ges.}$ entsprechenden Werte τ^l und τ^r ergeben dann durch Überlagerung die Endneigungen $\tau_{ges.}^l$ bzw. $\tau_{ges.}^r$ des Gesamtbelastungszustands 2.

Diese einzelnen Werte τ^l und τ^r für $\alpha_{ges.}$ sowie $\tau_{ges.}^l$ und $\tau_{ges.}^r$ sind in Tabelle 50, Spalte ③ und ④, zusammengestellt.

Tabelle 50. Zusammenstellung der Endneigungen.

Belastungsfall	①	②	③		④
	τ^l	τ^r	mit $\alpha_{ges.}$		
1a	-0,0043	+0,0077	(-0,0065)	(+0,0101)	
1b	-0,0372	+0,0416	(-0,0481)	(+0,0530)	
1c	-0,0182	+0,0171	(-0,0218)	(+0,0209)	
1d	+0,0068	-0,0367	(+0,0101)	(-0,0409)	
2			$\tau_{ges.}^l = -0,0663$	$\tau_{ges.}^r = +0,0431$	

Bemerkung: Ganz entsprechend ist zu verfahren, wenn für einen zusammengesetzten Belastungsfall die Durchbiegung δ , das Biegemoment B , die Querkraft Q oder die Neigung τ an irgend einer Stelle berechnet werden soll.

Aufgabe 57: Holm konstanter Steifigkeit mit abgestufter Längskraft.

Die Biege- und Biegemomentenlinie sowie die Neigungen τ^l und τ^r des in Abb. 172

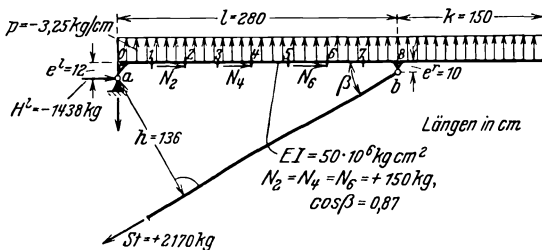


Abb. 172.

dargestellten abgestrebtten Holms von konstanter Steifigkeit sind für den eingezeichneten Belastungszustand (konstante Querbeklastung und abgestufte Längskraft) zu ermitteln.

Allgemeines.

Für die Strebekraft St und die waagerechte Lagerreaktion H^l ergibt sich zunächst ohne Berücksichtigung des Einflusses der Holmverformung

aus $\sum M = 0$ bezügl. des Punktes a :

$$St^{(0)} = - \frac{p(l+k)^2}{2h} - \frac{1}{h} \cdot e^l (N_2 + N_4 + N_6) = + 2170 \text{ kg},$$

aus $\sum H = 0$:

$$H^{l(0)} = + (N_2 + N_4 + N_6) - St^{(0)} \cos \beta = - 1438 \text{ kg}.$$

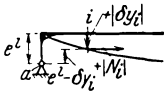


Abb. 173.

Infolge der Durchbiegung des Holms ändern sich die Hebelarme der Kräfte N_2, N_4, N_6 (Abb. 173); an Stelle von $N_i \cdot e^l$ tritt $N_i \cdot (e^l - \delta y_i)$. Dadurch ändert sich $St^{(0)}$ und $H^{l(0)}$ um:

$$\begin{aligned} \delta St &= + \frac{1}{h} (N_2 \cdot \delta y_2 + N_4 \cdot \delta y_4 + N_6 \cdot \delta y_6) \\ &= + 1,102 \delta y_2 + 1,102 \delta y_4 + 1,102 \delta y_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta H^l &= - \delta St \cdot \cos \beta = - \frac{\cos \beta}{h} (N_2 \cdot \delta y_2 + N_4 \cdot \delta y_4 + N_6 \cdot \delta y_6) \\ &= - 0,96 \delta y_2 - 0,96 \delta y_4 - 0,96 \delta y_6. \end{aligned}$$

Die Beanspruchungen des Holmzwischenfelds $0 \div 8$ sind dieselben wie die eines links fest, rechts längsverschieblich gelagerten Balkens,

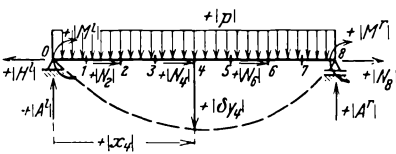


Abb. 174.

auf den nebst den zugehörigen Reaktionen die Querbelastung p , die äußeren Längskräfte N_2, N_4, N_6 und $N_8 = - (St^{(0)} + \delta St) \cos \beta$, ferner biegende Krag- und Exzentrizitätsmomente M_{kr}, M_e^r und M_e^l wirken (Abb. 174; alle Werte

sind dort zur Aufstellung von Formeln positiv eingetragen).

Es ist:

$$p = - 3,25 \text{ kg/cm},$$

$$N_2 = N_4 = N_6 = + 150 \text{ kg},$$

$$\begin{aligned} N_8 &= - (St^{(0)} + \delta St) \cos \beta \\ &= - 1888 - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6) [\text{kg}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_r &= \begin{cases} M_{kr} = \frac{pk^2}{2} = - 36 600 \text{ kgcm}, \\ M_e^r = - N_8 e^r = + (St^{(0)} + \delta St) \cos \beta \cdot e^r \\ \quad = 18880 + (9,6 \delta y_2 + 9,6 \delta y_4 + 9,6 \delta y_6) [\text{kgcm}], \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^l &= M_e^l = (H^{l(0)} + \delta H^l) e^l \\ &= - 17 250 - (11,5 \delta y_2 + 11,5 \delta y_4 + 11,5 \delta y_6) [\text{kgcm}]. \end{aligned}$$

1. Verfahren A: Berechnung mittels Zerlegung in Teilbalken.
(Vgl. hierzu Müller-Breslau³¹, Ratzersdorfer³⁶)

Zunächst werden die Durchbiegungen δy_2 , δy_4 und δy_6 der Stellen 2, 4, 6 ermittelt.

Zu diesem Zweck wird jedes Feld $i - 2, i$ ($i = 2, 4, 6$) als selbständiger Balken auf 2 gedachten Stützen von der Feldweite $\lambda_{i-2,i}$ be-

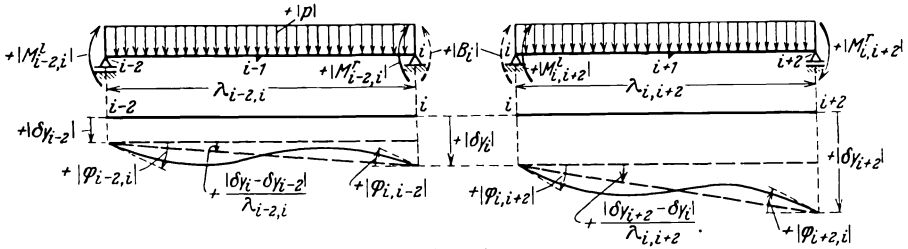


Abb. 175.

trachtet, der durch p und biegende Endmomente $M_{i-2,i}^l = B_{i-2}$ und $M_{i-2,i}^r = -B_i$ beansprucht wird und dessen Stützen sich um Wege δy_{i-2} und δy_i verschieben (Abb. 175; alle Werte positiv eingetragen; B_i ist das Biegemoment des Balkens $0 \div 8$ an der Stelle i). Es ist:

$$B_0 = +M^l = -17250 - (11,5\delta y_2 + 11,5\delta y_4 + 11,5\delta y_6) \text{ [kgem]},$$

$$B_8 = -M^r = +36600 - 18880 - (9,6\delta y_2 + 9,6\delta y_4 + 9,6\delta y_6) \text{ [kgem]},$$

und für $i = 2, 4, 6$, wenn die Strecken x_i (Abb. 176) vom linken Auflagerpunkt a aus gemessen werden:

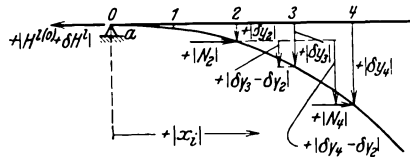


Abb. 176.

$$B_i = -M_{i-2,i}^r = +M_{i,i+2}^l$$

$$= \frac{p(l-x_i)x_i}{2} + M_c^l \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) - (M_{kr} + M_{cl}) \frac{x_i}{l}$$

$$- (H^{l(0)} + \delta H^l) \delta y_i + \sum_{j=2}^{i-2} N_j (\delta y_i - \delta y_j)$$

$$= \frac{-3,25(280-x_i)x_i}{2}$$

$$- \left(1 - \frac{x_i}{280}\right) [17250 + (11,5\delta y_2 + 11,5\delta y_4 + 11,5\delta y_6)]$$

$$+ \frac{x_i}{280} [36600 - 18880 - (9,6\delta y_2 + 9,6\delta y_4 + 9,6\delta y_6)]$$

$$- (-1438 + \delta H^l) \delta y_i + \sum_{j=2}^{i-2} N_j (\delta y_i - \delta y_j).$$

Die einzelnen Teilbalken erhalten die Längskräfte:

$$\begin{aligned} S_{0,2} &= H^{(0)} + \delta H^1 = S_{0,2}^{(0)} + \delta S_{0,2} = -1438 - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6) \text{ [kg]}, \\ S_{2,4} &= S_{0,2} - N_2 = S_{2,4}^{(0)} + \delta S_{2,4} = -1588 - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6) \text{ [kg]}, \\ S_{4,6} &= S_{2,4} - N_4 = S_{4,6}^{(0)} + \delta S_{4,6} = -1738 - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6) \text{ [kg]}, \\ S_{6,8} &= S_{4,6} - N_6 = S_{6,8}^{(0)} + \delta S_{6,8} = -1888 - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6) \text{ [kg]}. \end{aligned}$$

Damit die Endtangente der Teilbalken $i - 2$, i und $i, i + 2$ an der Stelle i stetig ineinander übergehen, müssen die Stetigkeitsbedingungen:

$$\varphi_{i,i-2} = \varphi_{i,i+2} \quad \text{für } i = 2, 4, 6$$

erfüllt sein; hierin bedeutet $\varphi_{i,i-2}$ bzw. $\varphi_{i,i+2}$ die Enddrehung des Teilbalkens $i - 2, i$ bzw. $i, i + 2$ an der Stelle i (Abb. 175).

Entsprechend S. 165 ergibt sich z. B. für den Teilbalken $i - 2, i$:

$$\begin{aligned} \varphi_{i-2,i} &= \frac{\delta y_i - \delta y_{i-2}}{\lambda_{i-2,i}} \\ &+ \frac{M_{i-2,i}^l \lambda_{i-2,i}}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^l) + \frac{M_{i-2,i}^r \lambda_{i-2,i}}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^r) + \frac{p \lambda_{i-2,i}^3}{EJ} \cdot \vartheta^l(p), \\ \varphi_{i,i-2} &= \frac{\delta y_i - \delta y_{i-2}}{\lambda_{i-2,i}} \\ &+ \frac{M_{i-2,i}^l \lambda_{i-2,i}}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^l) + \frac{M_{i-2,i}^r \lambda_{i-2,i}}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^r) + \frac{p \lambda_{i-2,i}^3}{EJ} \cdot \vartheta^r(p). \end{aligned}$$

($M_{i-2,i}^l$ und $M_{i-2,i}^r$ s. oben.)

Ähnlich ergibt sich $\varphi_{i,i+2}$ und $\varphi_{i+2,i}$ am Teilbalken $i, i + 2$ usw.

Die Werte ϑ in den Formeln für φ wären dabei strenggenommen in Abhängigkeit vom jeweiligen Teilbalken-Labilitätsmaß

$$\begin{aligned} \alpha_{i-2,i} &= \lambda_{i-2,i} \sqrt{\frac{|S_{i-2,i}|}{EJ}} = \lambda_{i-2,i} \sqrt{\frac{|S_{i-2,i}^{(0)} + \delta S_{i-2,i}|}{EJ}} \\ &= \lambda_{i-2,i} \sqrt{\frac{|S_{i-2,i}^{(0)} - (0,96 \delta y_2 + 0,96 \delta y_4 + 0,96 \delta y_6)|}{EJ}} \end{aligned}$$

aus Tabelle 102, Anhang, zu entnehmen.

Diese Ausdrücke φ , in die Stetigkeitsbedingungen eingesetzt, liefern 3 Gleichungen zur Bestimmung der Durchbiegungen $\delta y_2, \delta y_4$ und δy_6 ($\delta y_0 = \delta y_8 = 0$). Damit aber diese Gleichungen in $\delta y_2, \delta y_4, \delta y_6$ linear bleiben, müssen notwendigerweise die Glieder $\delta S_{i-2,i}$ in den Ausdrücken $\alpha_{i-2,i}$ sowie die Glieder $\delta H^l \cdot \delta y_i$ in den Ausdrücken B_i zunächst in I. Näherung vernachlässigt werden. Mit den vorliegenden Teilbalkenlängen

$$\lambda_{0,2} = \lambda_{2,4} = \lambda_{4,6} = \lambda_{6,8} = \frac{l}{4} = 70 \text{ cm}$$

und der Biegesteifigkeit $EJ = 50 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$ ergeben sich dann die in

Tabelle 51 zusammengestellten Werte α und ϑ und damit ein Gleichungssystem für $\delta y_2^I, \delta y_4^I, \delta y_6^I$, dessen Bei- und Lastwerte in Tabelle 52 angeschrieben sind.

Tabelle 51. Werte $S^{(0)}, \alpha, \vartheta$.

Teilfeld $i-2, i$	$S_{i-2, i}^{(0)}$ [kg]	$\alpha_{i-2, i}$ [—]	$\vartheta^l(M^l) = \vartheta^r(M^r)$ [—]	$\vartheta^l(M^r) = \vartheta^r(M^l)$ [—]	$\vartheta^l(p) = -\vartheta^r(p)$ [—]
0 ÷ 2	-1438	0,375	+0,336	-0,169	+0,0423
2 ÷ 4	-1588	0,394	+0,337	-0,170	+0,0423
4 ÷ 6	-1738	0,412	+0,337	-0,170	+0,0424
6 ÷ 8	-1888	0,430	+0,338	-0,170	+0,0425

Tabelle 52. Bei- und Lastwerte der Gleichungen für $\delta y_2^I, \delta y_4^I, \delta y_6^I$.

Beiwerte von:			Lastwerte
δy_2^I	δy_4^I	δy_6^I	
+27,28	-14,65	+ 0,0156	+43,96
-14,44	+27,13	-14,69	+42,96
+ 0,1917	-14,52	+26,95	+19,25

(Zu lesen ist z. B. die 1. Gleichung: +27,28 δy_2^I - 14,65 δy_4^I + 0,0156 δy_6^I + 43,96 = 0.)

Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned} \delta y_2^I &= -5,18 \text{ cm,} \\ \delta y_4^I &= -6,65 \text{ ,, } (\delta y_0 = \delta y_8 = 0). \\ \delta y_6^I &= -4,26 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Mit diesen Größen $\delta y_2^I, \delta y_4^I, \delta y_6^I$ können die Teilbalken-Labilitätsmaße

$$\alpha_{i-2, i} = \lambda_{i-2, i} \sqrt{\frac{|S_{i-2, i}^{(0)} + \delta S_{i-2, i}^I|}{E J}}$$

bzw. die Glieder $\delta H^l \cdot \delta y_i$ in B_i ,

$$\text{die vorher gleich } \lambda_{i-2, i} \sqrt{\frac{|S_{i-2, i}^{(0)}|}{E J}}$$

bzw. gleich Null gesetzt wurden, zwecks Durchführung eines II. Rechnungsgangs verbessert werden; es ergibt sich

$$\delta H^I = -\frac{\cos \beta}{h} (N_2 \cdot \delta y_2^I + N_4 \cdot \delta y_4^I + N_6 \cdot \delta y_6^I) = +15 \text{ kg}$$

und damit

$$\delta S_{0, 2}^I = \delta S_{2, 4}^I = \delta S_{4, 6}^I = \delta S_{6, 8}^I = \delta H^I = +15 \text{ kg.}$$

Der mit den hierzu gehörigen Labilitätsmaßen $\alpha = \lambda \sqrt{\frac{|S^{(0)} + \delta S^I|}{E J}}$ neu durchgeführte II. Rechnungsgang liefert neue Größen δy_i^I , die im vorliegenden Fall praktisch nicht von denen des I. Rechnungsgangs abweichen.

Die Einsetzung der errechneten Größen δy_i in die Ausdrücke für die Biegemomente B_i ergibt:

$$\begin{aligned} B_0 &= + M^l = -17070 \text{ kgcm,} \\ B_2 &= -39590 \text{ ,,} \\ B_4 &= -41120 \text{ ,,} \\ B_6 &= -20300 \text{ ,,} \\ B_8 &= - M^r = +17870 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Die Einsetzung der errechneten Werte δy_i und B_i in die Formeln für die Enddrehungen des ersten und letzten Teilbalkens liefert die Endneigungen des Gesamtbalkens a, b gegen seine Auflagersehne:

$$\tau^l = \varphi_{0,2} = -0,0923, \quad \tau^r = \varphi_{8,6} = +0,0581.$$

Wird auch für Punkte zwischen $i - 2$ und i die Durchbiegung oder das Knickbiegemoment gesucht, so wird der Teilbalken $i - 2, i$ als Einzelbalken für sich berechnet, auf den neben der Querbelastung p die Endmomente $M_{i-2,i}^l = B_{i-2}$ und $M_{i-2,i}^r = -B_i$ wirken, der ferner durch die zentrische Längskraft $S_{i-2,i} + \delta S_{i-2,i} \sim S_{i-2,i}^I$ belastet ist und die Stützenverschiebungen δy_{i-2} und δy_i erfährt.

Bemerkung. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn die geringfügigen Einflüsse von δS_i bzw. δH^i und damit auch die mit kleinen Lettern gedruckten Ausdrücke in $B_0, B_8, B_i, S_{0,2} \div S_{6,8}$ vernachlässigt werden; dann wird die Matrix des Gleichungssystems für δy_i unvollständig und symmetrisch zu ihrer nach rechts fallenden Diagonale.

Dann sind natürlich bereits die Durchbiegungen δy_i^I des ersten Rechnungsgangs als endgültig anzusehen.

2. Verfahren B: Berechnung durch wiederholte Verbesserung der Biegemomentenlinie des ganzen Balkens.

Die Berechnung erfolgt in mehreren Gängen (vgl. hierzu Vianello²⁷).

a) Rechnungsgang I: Der Einfluß der Formänderung bei Aufstellung der äußeren Belastung wird zunächst vernachlässigt. Dann

Tabelle 53.

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
	Rechnungsgang I				II		
Stelle i	$B_i^{(0)}$ [kgcm]	$W_i^{(0)} \cdot 10^3$ [—]	δy_i^I [cm]	B_i^I [kgcm]	$W_i^I \cdot 10^3$ [—]	δy_i^{II} [cm]	B_i^{II} [kgcm]
0	-17250	- 7,16	0	-17 110	- 7,50	0	-17080
1	-26810	-18,32	-2,34	-30 030	-20,43	-2,79	-30610
2	-32395	-22,18	-4,04	-37 990	-26,02	-4,85	-39 110
3	-34 000	-23,27	-4,97	-41 050	-28,14	-6,03	-42 560
4	-31 615	-21,65	-5,09	-38 900	-26,61	-6,20	-40 470
5	-25 250	-17,17	-4,44	-31 390	-21,40	-5,43	-32 760
6	-14 910	- 9,94	-3,18	-18 880	-12,67	-3,92	-19 840
7	- 590	+ 0,05	-1,58	- 1 610	- 0,87	-1,98	- 1 900
8	+17 720	+ 4,06	0	+17 840	+ 3,98	0	+17 860

wirken auf den Balken 0 ÷ 8 nur:

$$\begin{aligned} p &= -3,25 \text{ kg/cm}, \\ N_2 = N_4 = N_6 &= +150 \text{ kg}, \\ N_8^{(0)} &= -1888 \text{ kg}, \\ M^l{}^{(0)} = M_e^l{}^{(0)} &= -17250 \text{ kgem}, \\ M^r{}^{(0)} = M_e^r{}^{(0)} + M_{kr} &= -17720 \text{ kgem} \end{aligned}$$

nebst den zugehörigen Reaktionen H^l , A^l und A^r . Dem entsprechen an den Achtelpunkten die Ausgangsbiegemomente $B_i^{(0)}$ ($= \bar{B}_i$):

$$B_i^{(0)} = \frac{p(l-x_i)x_i}{2} + M_e^l{}^{(0)} \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) - (M_{kr} + M_e^r{}^{(0)}) \frac{x_i}{l}.$$

(Auswertung s. Tabelle 53, Spalte 2.)

Daraus ergeben sich die elastischen Gewichte (vgl. Aufgabe 46):

$$\begin{aligned} W_0^{(0)} &= \frac{l^8}{6} \left[2 \frac{B_0^{(0)}}{EJ_0} + \frac{B_1^{(0)}}{EJ_1} \right], \\ W_i^{(0)} &= \frac{l^8}{6} \left[\frac{B_{i-1}^{(0)}}{EJ_{i-1}} + 4 \frac{B_i^{(0)}}{EJ_i} + \frac{B_{i+1}^{(0)}}{EJ_{i+1}} \right] \text{ für } i = 1, 2, \dots, 7, \\ W_8^{(0)} &= \frac{l^8}{6} \left[\frac{B_7^{(0)}}{EJ_7} + 2 \frac{B_8^{(0)}}{EJ_8} \right] \quad (\text{Tabelle 53, Spalte 3}). \end{aligned}$$

Die Biegemomentenfläche des mit diesen W -Gewichten allein belastet gedachten Balkens 0 ÷ 8 ist die Biegelinie δy_i^I in erster Näherung

Berechnung von δy_i und B_i .

⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯
III		w				m	
$W_i^{II} \cdot 10^3$ [—]	δy_i^{III} [cm]	δy_i^w [cm]	B_i^w [kgem]	$W_i^w \cdot 10^3$ [—]	δy_i^{IV} [cm]	δy_i^m [cm]	B_i^m [kgem]
- 7,56	0	0	-17040	- 7,63	0	0	-17070
-20,83	-2,89	-3,32	-31310	-21,34	-2,99	-2,94	-30810
-26,80	-5,05	-5,81	-40450	-27,60	-5,23	-5,14	-39510
-29,17	-6,27	-7,21	-44210	-30,20	-6,50	-6,39	-43060
-27,66	-6,45	-7,42	-42220	-28,82	-6,70	-6,58	-41050
-22,34	-5,68	-6,53	-34300	-23,42	-5,90	-5,79	-33280
-13,31	-4,11	-4,74	-20890	-14,03	-4,27	-4,19	-20200
- 1,12	-2,06	-2,37	- 2160	- 1,36	-2,15	-2,11	- 2010
+ 3,95	0	0	+17890	+ 3,93	0	0	+17870

(Tabelle 53, Spalte 4). Dieser entsprechen die Änderungen:

$$\delta St^I = + \frac{1}{h} (N_2 \cdot \delta y_2^I + N_4 \cdot \delta y_4^I + N_6 \cdot \delta y_6^I) = - 13,6 \text{ kg},$$

$$\delta H^{II} = - \delta St^I \cos \beta = + 11,8 \text{ kg}.$$

Damit wird:

$$M^{II} = M_e^I = (H^{I(0)} + \delta H^{II}) \cdot e^l,$$

$$M^{rI} = M_{kr} + (St^{(0)} + \delta St^I) \cos \beta \cdot e^r.$$

Daraus folgen die Biegemomente erster Näherung:

$$B_0^I = + M^{II} = - 17250 + \delta H^{II} \cdot e^l = - 17110 \text{ kgcm},$$

$$B_8^I = - M^{rI} = + 36600 - 18880 - \delta St^I \cos \beta \cdot e^r = + 17840 \text{ kgcm}$$

und für $i = 1 \div 7$:

$$B_i^I = \frac{p(l-x_i)x_i}{2} + M_e^{II} \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) - (M_{kr} + M_e^{rI}) \frac{x_i}{l}$$

$$- (H^{I(0)} + \delta H^{II}) \delta y_i^I + \sum_{j=1}^{i-1} N_j (\delta y_j^I - \delta y_j^I) \quad (\text{Tabelle 53, Spalte 5})$$

$$(N_1 = N_3 = N_5 = N_7 = 0; \quad N_2 = N_4 = N_6 = 150 \text{ kg}).$$

b) Rechnungsgang II. Aus den elastischen Gewichten

$$W_i^I = \frac{l/8}{6} \left[\frac{B_{i-1}^I}{EJ_{i-1}} + 4 \frac{B_i^I}{EJ_i} + \frac{B_{i+1}^I}{EJ_{i+1}} \right] \text{ usw.},$$

die der B^I -Fläche entsprechen, ergibt sich die Biegelinie δy_i^{II} zweiter Näherung (Tabelle 53, Spalte 7). Ihr entsprechen analog dem ersten Rechnungsgang Änderungen δSt^{II} und δH^{III} der Kräfte St und H^I , sowie die Biegemomente B_i^{II} zweiter Näherung (Tabelle 53, Spalte 8).

Entsprechend können weitere Rechnungsgänge durchgeführt werden (Tabelle 53, Spalte 9 und 10). Um zu viele der langwierigen Rechnungsgänge zu vermeiden, wird nach Ermittlung der δy_i^{III} -Linie eine willkürliche Linie δy_i^w mit um 15 vH größeren Ordinaten angenommen; ihr entsprechen Biegemomente B_i^w und elastische Gewichte W_i^w . Damit ergibt sich eine δy_i^V -Linie mit gegen δy_i^w kleineren Ordinaten. Also liegen die genauen Werte δy_i zwischen δy_i^{III} und δy_i^V . Als δy_i -Linie kann daher bereits mit hinreichender Genauigkeit die Mittelwertslinie δy_i^m aus δy_i^{III} und δy_i^V angesehen werden (Spalte 15). Ihr entspricht die in Spalte 16 angegebene B_i^m -Linie.

Die Endneigungen τ^l und τ^r sind dann nach Aufgabe 46 gleich den Auflagerdrücken des mit den dazugehörigen W -Gewichten allein belastet gedachten Balkens $0 \div 8$, und zwar ist:

$$\tau^l = + A_w^l = - 0,0907,$$

$$\tau^r = - A_w^r = + 0,0559.$$

Bemerkung. Die Rechnung wird vereinfacht, wenn bei allen Rechnungsgängen die geringfügigen Einflüsse von δH^I und δSt vernachlässigt werden.

Aufgabe 58: Holm veränderlicher Steifigkeit mit konstanter Längskraft.

Für den in Abb. 177 dargestellten auf Knickbiegung beanspruchten Holm mit über die Spannweite veränderlicher Biegesteifigkeit sind zu ermitteln:

- a) die Biegelinie δy ,
- b) die Biegemomentenlinie B ,
- c) die Endneigungen τ^l und τ^r der Biegelinie.

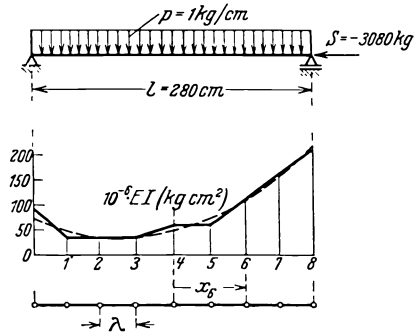


Abb. 177.

Verfahren A.

1. Rechnungsgang I.

a) Knickbiegelinie.

Der Holm wird zunächst (Rechnungsgang I) durch eine Kette aus z. B. 8 starr angenommenen Gliedern von der Länge $\lambda = l/8$ ersetzt gedacht, die durch elastische Zwischenstücke (sog. elastische Gelenke, vgl. Hencky⁴³) miteinander verknüpft sind (Abb. 177). Die Steifigkeit dieser Zwischenstücke sei so bestimmt, daß die gegenseitige Drehung zweier Kettenglieder $i - 1, i$ und $i, i + 1$ (Abb. 178)

$$\Delta \delta \alpha_i = -\delta \Delta \vartheta_i = -\frac{B_i \lambda}{EJ_i^m}$$

wird, wobei

$$EJ_i^m = \frac{1}{2} \left(\frac{EJ_{i-1} + EJ_i}{2} + \frac{EJ_i + EJ_{i+1}}{2} \right).$$

Es wird also die auf S. 113 angegebene Formel für die gegenseitige Drehung zweier um dx voneinander entfernter Querschnitte (im Sinne von B):

$$\delta d \vartheta = \frac{B \cdot dx}{EJ},$$

näherungsweise auf endliche Längen λ übertragen, und dementsprechend EJ durch das arithmetische Mittel der mittleren Steifigkeiten der beiden Kettenglieder $i - 1, i$ und $i, i + 1$ ersetzt. Dabei wird beachtet, daß positivem $\Delta \delta \alpha_i$ negatives B entspricht (Abb. 178 und 112).

Da

$$\Delta \delta \alpha_i = \frac{\delta y_{i+1} - \delta y_i}{\lambda} - \frac{\delta y_i - \delta y_{i-1}}{\lambda}$$

(Abb. 128) ist, so folgt mit $B_i = \bar{B}_i + |S| \cdot \delta y_i$ ($\bar{B}_i =$ Biegemoment ohne Einfluß der Formänderung):

$$\delta y_{i-1} - 2 \delta y_i + \delta y_{i+1} = -\frac{\lambda^2}{EJ_i^m} (\bar{B}_i + |S| \cdot \delta y_i)$$

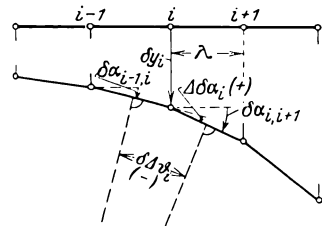


Abb. 178.

oder

$$-\delta y_{i-1} + \left(2 - \frac{|S| \cdot l^2}{64 EJ_i'''}\right) \cdot \delta y_i - \delta y_{i+1} - \bar{B}_i \cdot \frac{l^2}{64 EJ_i'''} = 0.$$

Diese Gleichungen, für alle Punkte i angeschrieben, ergeben unter Beachtung, daß $\delta y_0 = \delta y_8 = 0$ sein muß, ein symmetrisches dreigliedriges Gleichungssystem mit den aus Tabelle 54 ersichtlichen Bei- und Lastwerten (symmetrische Differenzgleichung 2. Ordnung).

Tabelle 54. Bei- und Lastwerte der Gleichungen für δy_i .

Beiwerte von							Lastwerte
δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	δy_5	δy_6	δy_7	
$2 - S \cdot K_1$	-1						$-\bar{B}_1 \cdot K_1$
-1	$2 - S \cdot K_2$	-1					$-\bar{B}_2 \cdot K_2$
	-1	$2 - S \cdot K_3$	-1				$-\bar{B}_3 \cdot K_3$
		-1	$2 - S \cdot K_4$	-1			$-\bar{B}_4 \cdot K_4$
			-1	$2 - S \cdot K_5$	-1		$-\bar{B}_5 \cdot K_5$
				-1	$2 - S \cdot K_6$	-1	$-\bar{B}_6 \cdot K_6$
					-1	$2 - S \cdot K_7$	$-\bar{B}_7 \cdot K_7$

[Zu lesen ist z. B. die zweite Gleichung:

$$(-1) \cdot \delta y_1 + (2 - |S| \cdot K_2) \cdot \delta y_2 + (-1) \cdot \delta y_3 + (-\bar{B}_2 \cdot K_2) = 0.]$$

Darin ist:

$$K_i = \frac{l^2}{64 EJ_i'''} = \frac{l^2}{16 (EJ_{i-1} + 2 EJ_i + EJ_{i+1})}.$$

Die Auflösung eines derartigen, zur Matrixdiagonale symmetrischen Gleichungssystems erfolgt nach dem im Anhang gegebenen Schema.

b) Knickbiegemomentenlinie.

Aus den gefundenen Werten δy_i folgen die Knickbiegemomente

$$B_i = \bar{B}_i + |S| \cdot \delta y_i.$$

c) Endneigungen.

Die Endneigungen τ^l und τ^r ergeben sich in roher Näherung gleich den Endsehnenneigungen der Knickbiegeline:

$$\tau^l \sim \delta \alpha_{0,1} = \frac{\delta y_1 - \delta y_0}{\lambda}; \quad \tau^r \sim \delta \alpha_{7,8} = \frac{\delta y_8 - \delta y_7}{\lambda}.$$

2. Rechnungsgang II.

Genauer ergeben sich die Endneigungen als Auflagerdrücke A_w^l und A_w^r des mit den elastischen Gewichten

$$W_0 = \frac{\lambda}{6} \left(2 \frac{B_0}{EJ_0} + \frac{B_1}{EJ_1} \right) *$$

$$W_i = \frac{\lambda}{6} \left(\frac{B_{i-1}}{EJ_{i-1}} + 4 \frac{B_i}{EJ_i} + \frac{B_{i+1}}{EJ_{i+1}} \right) \text{ für } i = 1, 2 \dots 7,$$

$$W_8 = \frac{\lambda}{6} \left(\frac{B_7}{EJ_7} + 2 \frac{B_8}{EJ_8} \right)$$

allein belastet gedachten Balkens entsprechend Aufgabe 46; und zwar ist:

$$\tau^l = A_w^l \quad \text{und} \quad \tau^r = -A_w^r.$$

Entsprechend ist die Biegemomentenfläche des mit diesen elastischen Gewichten allein belastet gedachten Balkens eine verbesserte Biegelinie δy^v ; ihr entsprechen die verbesserten Biegemomente:

$$B_i^v = \bar{B}_i + |S| \cdot \delta y_i^v.$$

3. Zahlenmäßige Durchrechnung (Tabelle 55 und 56).

Tabelle 55. Bei- und Lastwerte der Gleichungen für δy_i .

Beiwerte von							Lastwerte
δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	δy_5	δy_6	δy_7	
+1,923	-1						-0,1078
-1	+1,892	-1					-0,2570
	-1	+1,908	-1				-0,2725
		-1	+1,930	-1			-0,2235
			-1	+1,948	-1		-0,1553
				-1	+1,966	-1	-0,0817
					-1	+1,977	-0,0329

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= + 1,24 \text{ cm} & \delta y_5 &= + 2,40 \text{ cm} \\ \delta y_2 &= + 2,27 \text{ ,,} & \delta y_6 &= + 1,71 \text{ ,,} \\ \delta y_3 &= + 2,80 \text{ ,,} & \delta y_7 &= + 0,88 \text{ ,,} \\ \delta y_4 &= + 2,81 \text{ ,,} & & \end{aligned}$$

* Werte B des Rechnungsgangs I unter 1. b).

Tabelle 56. Berechnung von B_i , δy_i^p und B_i^p .

Stelle i	\bar{B}_i [kgcm]	$ S \cdot \delta y_i$ [kgcm]	B_i [kgcm]	$W_i \cdot 10^3$ [—]	δy_i^p [cm]	$ S \cdot \delta y_i^p$ [kgcm]	B_i^p [kgcm]
0	0	0	0	+ 1,35	0	0	0
1	+4290	+3820	+ 8110	+ 7,80	+1,32	+4070	+ 8360
2	+7350	+6990	+14340	+13,85	+2,36	+7270	+14620
3	+9190	+8620	+17810	+16,02	+2,92	+8990	+18180
4	+9800	+8660	+18460	+11,78	+2,94	+9060	+18860
5	+9190	+7390	+16580	+ 8,91	+2,53	+7790	+16980
6	+7350	+5270	+12620	+ 4,55	+1,80	+5550	+12900
7	+4290	+2700	+ 6990	+ 1,68	+0,93	+2860	+ 7150
8	0	0	0	+ 0,25	0	0	0

Endneigungen:

$$\tau^l = + A_w^l = + 0,0391 ,$$

$$\tau^r = - A_w^r = - 0,0271 .$$

Verfahren B.

1. Rechnungsgang I.

Für weniger genaue Berechnungen empfiehlt es sich, die Knickbiegemomente B_i , die den W -Gewichten zur Durchführung des Rechnungsgangs II zugrunde liegen, nicht auf Grund des oben behandelten Gelenkkettenverfahrens zu berechnen, sondern sie einfach entsprechend S. 165 als Knickbiegemomente eines Balkens mit einer gewissen konstanten (mittleren) Steifigkeit EJ_{const} anzusetzen:

$$B^I = p l^2 \cdot f_B(p) = p l^2 \cdot (\bar{f}_B(p) + \alpha^2 \cdot f_\delta(p))$$

(vgl. S. 166 und Tabelle 95, 96), wobei das Labilitätsmaß:

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{E J_{\text{const}}}}$$

ist.

Für einen Stab, dessen Steifigkeit nach einem Gesetz von der Form

$$e i_x = e i_0 \left[1 + a_1 \cdot \frac{x}{l/2} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{l/2} \right)^2 \right]$$

(x von Balkenmitte aus gemessen) verteilt ist, liefert Abb. 179 in Abhängigkeit von a_1 und a_2 einen Wert $\frac{E J_{\text{const}}}{e i_0}$; daraus folgt durch Multiplikation mit $e i_0$ ein zweckmäßig einzusetzender Wert $E J_{\text{const}}$.

Liegt eine beliebige Steifigkeitsverteilung $E J_x$ vor, so kann diese zwecks Benutzung der Abb. 179 angenähert durch eine Gesetzmäßigkeit

keit von der Form $ei_x = ei_0 \left[1 + a_1 \cdot \frac{x}{l/2} + a_2 \cdot \left(\frac{x}{l/2}\right)^2 \right]$ dargestellt werden; und zwar ist zu setzen (Begründung s. unten):

$$ei_0 = \frac{3 \cdot (3\mathfrak{F}_0 - 5\mathfrak{F}_2)}{4l}, \quad a_1 = \frac{4\mathfrak{F}_1}{3\mathfrak{F}_0 - 5\mathfrak{F}_2}, \quad a_2 = \frac{5 \cdot (3\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_0)}{3\mathfrak{F}_0 - 5\mathfrak{F}_2}.$$

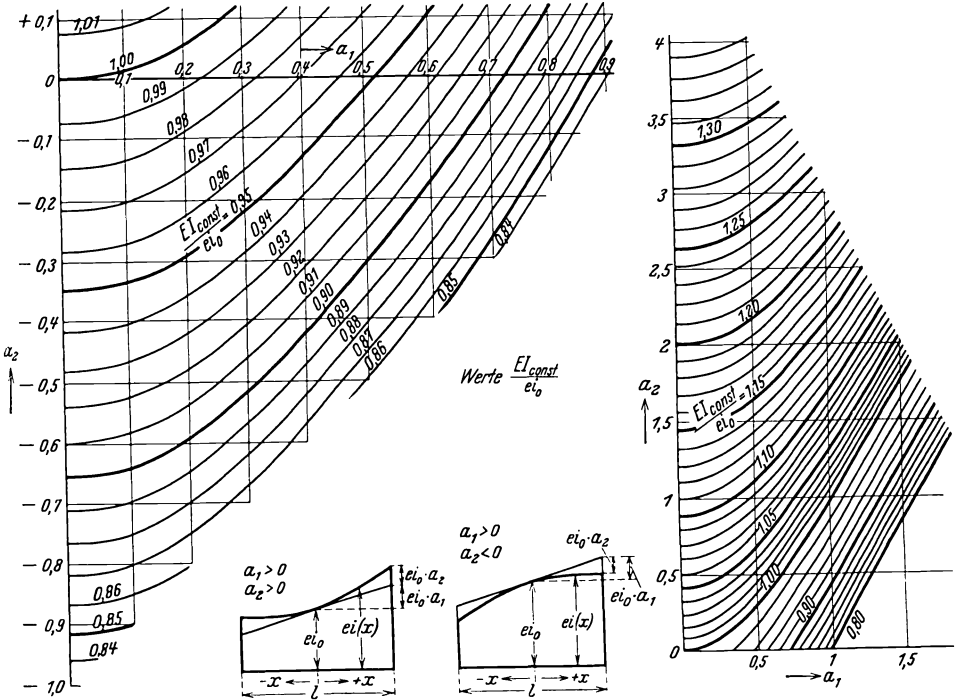


Abb. 179.

Die darin vorkommenden Größen

$$\mathfrak{F}_0 = \int_{-l/2}^{+l/2} EJ_x \cdot dx, \quad \mathfrak{F}_1 = \int_{-l/2}^{+l/2} EJ_x \cdot \left(\frac{x}{l/2}\right) \cdot dx, \quad \mathfrak{F}_2 = \int_{-l/2}^{+l/2} EJ_x \cdot \left(\frac{x}{l/2}\right)^2 \cdot dx$$

ergeben sich aus den Werten EJ_i an den Achtelpunkten des Holmfeldes unter Annahme geradliniger EJ -Linie zwischen je zwei Achtelpunkten zu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0 &= \frac{l}{16} [EJ_0 + EJ_8 + 2 \sum_1^7 EJ_i], \\ \mathfrak{F}_1 &= \frac{l}{96} [5,5 (EJ_8 - EJ_0) + 9 (EJ_7 - EJ_1) + 6 (EJ_6 - EJ_2) \\ &\quad + 3 (EJ_5 - EJ_3)], \\ \mathfrak{F}_2 &= \frac{l}{76,8} [4,05 (EJ_8 + EJ_0) + 5,5 (EJ_7 + EJ_1) + 2,5 (EJ_6 + EJ_2) \\ &\quad + 0,7 (EJ_5 + EJ_3) + 0,1 EJ_4]. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke ergeben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate aus der Bedingung, daß sich die Näherungslinie ei_x möglichst gut der gegebenen EJ_x -Linie anschmiegen soll.

Abb. 179 liefert näherungsweise die Steifigkeit EJ , die ein Vergleichsstab mit konstanter Steifigkeit haben muß, damit seine Eulersche Knicklast dieselbe ist wie die Eulersche Knicklast eines gegebenen Stabes mit veränderlicher Steifigkeit ei_x ; sie ist berechnet unter der Annahme, daß der Stab mit veränderlicher Steifigkeit ei_x beim Knicken die Gestalt einer Kurve von der Gleichung:

$$\delta y = c_1 \cos \frac{\pi x}{l/2} + c_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l/2} + c_3 \cos 3 \frac{\pi x}{l/2}$$

annimmt. Näheres darüber s. bei Teichmann⁴⁰.

2. Rechnungsgang II.

Der Rechnungsgang II erfolgt mit den so gefundenen Werten B_i^I analog dem Rechnungsgang II des Verfahrens A.

3. Zahlenmäßige Durchrechnung (Tabelle 57).

Die Steifigkeitslinie EJ_x wird ersetzt durch die Linie

$$ei_x = 48,4 \cdot 10^6 \left[1 + 1,5 \frac{x}{l/2} + 2 \left(\frac{x}{l/2} \right)^2 \right] \text{ [kgcm}^2 \text{]}$$

(in Abb. 177 gestrichelt eingetragen; x von Holmfeld-Mitte aus gemessen!). Mit $a_1 = 1,5$ und $a_2 = 2$ ist nach Abb. 179:

Tabelle 57. Berechnung von δy_i^0 und B_i^I .

Stelle i	\bar{f}_B^* [—]	f_δ^{**} [—]	B_i [kgcm]	$EJ_i \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]	$W_i \cdot 10^3$ [—]	δy_i^0 [cm]	B_i^I [kgcm]
0	0	0	0	90	1,34	0	0
1	0,0547	0,0099	8040	35	7,75	1,36	8480
2	0,0938	0,0182	14290	35	13,90	2,45	14890
3	0,1172	0,0237	18200	35	16,39	3,05	18580
4	0,1250	0,0256	19500	60	12,38	3,08	19290
5	0,1172	0,0237	18200	60	9,76	2,67	17410
6	0,0938	0,0182	14290	110	5,11	1,92	13260
7	0,0547	0,0099	8040	160	1,94	0,99	7340
8	0	0	0	210	0,30	0	0

Endneigungen: $\tau^l = + A_w^l = + 0,0402$, $\tau^r = - A_w^r = - 0,0287$.

* Entnommen aus Tabelle 99. ** Entnommen aus Tabelle 101 für $\alpha = 2,2$.

$$\frac{E J_{\text{const}}}{e i_0} = 1,04,$$

also wegen $e i_0 = 48,4 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$:

$$E J_{\text{const}} \sim 50 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$$

und

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{E J_{\text{const}}}} = 280 \sqrt{\frac{3080}{50 \cdot 10^6}} = 2,2.$$

Bemerkung. Auf die Behandlung anderer Verfahren wird unter Hinweis auf die im Schrifttum erwähnten Arbeiten^{32, 40} hier verzichtet. Die Aufgabe kann natürlich auch entsprechend den Verfahren *A* bzw. *B* der Aufgabe 57 gelöst werden.

Die dort durch die einzelnen Kräfte N_2, N_4, N_6 bedingten Größen δSt und δH^i fallen hier fort, da die Längskraft S als feste Größe gegeben ist.

Wäre die Steifigkeit bei dem in Aufgabe 57 behandelten Holm nicht über seine Länge konstant, so könnten die Teilbalken-Steifigkeiten entsprechend Abb. 179 berechnet werden.

Aufgabe 59: Aufgeschnittener Holmrippenrost.

Für den in Abb. 180 dargestellten längs der Zwischenrippen aufgeschnittenen Holmrippenrost ist zu berechnen:

1. Die gegenseitige Drehung $\gamma_a^h - \gamma_a^v$ der vermöge eines drillungsfreien Gelenks gegeneinander drehbaren Querschnitte a^h und a^v der Lagerrippe $1^h, 1^v$,

2. die gegenseitige Verschiebungskomponente $\delta_b^h - \delta_b^v$ der Rippen-Querschnittstellen b^h und b^v .

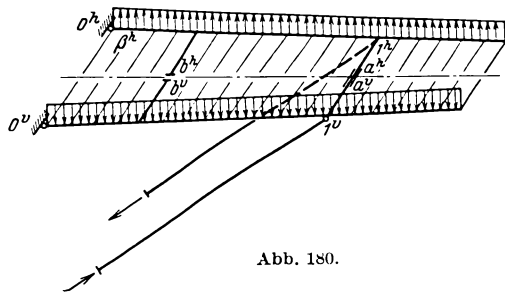


Abb. 180.

Der Holmrippenrost sei durch einen beliebigen Belastungszustand 0 belastet. Dabei werde der Hinterholm durch eine Druckkraft S auf Knickbiegung beansprucht (Abb. 180).

Zu 1: Mittels des in Abb. 181 dargestellten Hilfszustandes *I* ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \gamma_a^h - 1 \cdot \gamma_a^v = \sum \int B_I \cdot \delta d \vartheta + \sum \int D_I \cdot \delta d \gamma + \dots$$

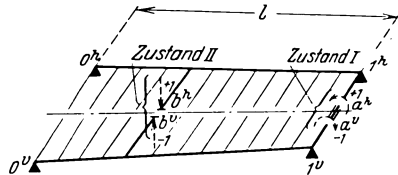


Abb. 181.

(Die Rippe verdrillende Einzelmomente gelten als positiv, wenn sie von vorn gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn drehen; das Rippen-drillmoment D wird bei Zustand *I* positiv! vgl. S. 40.)

Bei den nicht auf Knickbiegung beanspruchten Gliedern ist

$$\int B_I \cdot \delta d\vartheta = \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} \text{ usw.};$$

bei dem auf Knickbiegung beanspruchten Hinterholm würde sich dagegen unter Beachtung des Einflusses der Formänderung ergeben (vgl. S. 167):

Biegemomentenflächen des Hinterholms

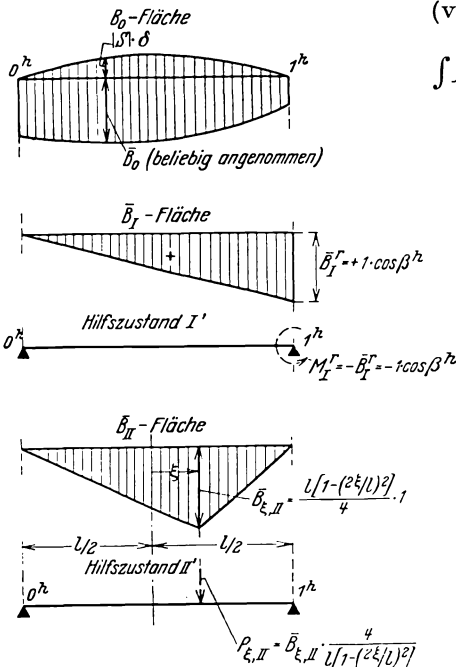


Abb. 182.

$$\int B_I \cdot \delta d\vartheta = \int \bar{B}_I \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx.$$

Das Hinterholm - Integral $\int B_I \cdot \delta d\vartheta$ würde sich also durch Kombination der wirklichen, zunächst noch nicht ermittelten Knick-Biegemomentenfläche B_0 mit der Biegemomentenfläche \bar{B}_I des Hilfszustandes I ergeben (Abb. 182). Es kann gedeutet werden als der M_I^r - bzw. $(-\bar{B}_I^r)$ -fache Betrag der Neigung des rechten Hinterholmfeld-Endes unter der wirklichen Belastung; denn zur Ermittlung dieser Größe wäre mit der wirklichen B_0 -Fläche (Knickbiegemomente!) die Biegemomentenfläche eines Hilfszustandes I' zu kombinieren, die mit der \bar{B}_I -Fläche des Hinterholms identisch ist (Abb. 182).

Das Teilintegral $\int B_I \cdot \delta d\vartheta$ für den Hinterholm ergibt sich also zu:

$$\begin{aligned} \int B_I \cdot \delta d\vartheta &= -\bar{B}_I^r \cdot \tau_{0\div 1}^r \\ &= -1 \cdot \cos \beta^h \left[\sum \frac{p l^3}{EJ} \cdot \vartheta^r(p) + \sum \frac{M l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M) + \dots \right], \end{aligned}$$

entsprechend S. 168.

(Wäre die gegenseitige Drehung $\gamma^h - \gamma^v$ statt an der Lagerrippe 1^h , 1^v an einer Lagerrippe 0^h , 0^v gesucht, so hätte die \bar{B}_I -Fläche die in Abb. 183 angegebene Gestalt. Dann wäre das Hinterholm-Integral:

$$\int B_I \cdot \delta d\vartheta = +\bar{B}_I^l \cdot \tau_{0\div 1}^l.)$$

Zu 2: Mittels des in Abb. 181 dargestellten Hilfszustandes II ergibt sich nach der Arbeitsgleichung:

$$1 \cdot \delta_b^h - 1 \cdot \delta_b^r = \sum \int B_{II} \cdot \delta d\vartheta + \sum \int D_{II} \cdot \delta d\gamma + \dots$$

Hier kann das über den Hinterholm erstreckte Teilintegral

$$\int B_{II} \cdot \delta d\vartheta = \int \bar{B}_{II} \cdot \frac{\bar{B}_0 + |S_0| \cdot \delta_0}{EJ} \cdot dx$$

gedeutet werden als der $P_{\xi, II}$ bzw.

$\frac{4}{l[1 - (2\xi/l)^2]} \cdot \bar{B}_{\xi, II}$ -fache Betrag der

Hinterholmdurchbiegung an der Stelle ξ unter der wirklichen Belastung; denn zur Ermittlung dieser Größe wäre mit der wirklichen B_0 -Fläche (Knickbiegemomente!) die Biegemomentenfläche eines Hilfszustandes II' zu kombinieren, die mit der \bar{B}_{II} -Fläche des Hinterholms identisch ist (Abb. 182). Also ist entsprechend S. 168 zu setzen:

$$\begin{aligned} \int B_{II} \cdot \delta d\vartheta &= \bar{B}_{II} \cdot \frac{4}{l[1 - (2\xi/l)^2]} \cdot \delta_{\text{bei } \xi} \\ &= \bar{B}_{II} \cdot \frac{4}{l[1 - (2\xi/l)^2]} \cdot \left[\sum \frac{p l^3}{EJ} \cdot f_\delta(p) + \sum \frac{M l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M) + \dots \right]. \end{aligned}$$

(Funktionswerte f_δ an der Stelle ξ !)

Im vorliegenden Beispiel wird $\int B_{II} \cdot \delta d\vartheta = 1 \cdot [\dots]$.

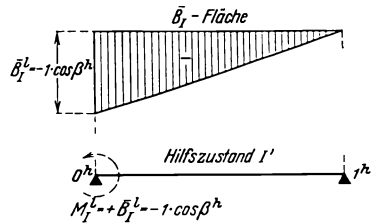


Abb. 183.

Drittes Kapitel.

Statisch unbestimmte Systeme.

Allgemeines.

1. Statisch unbestimmte Größen.

Auf S. 35 wurde bereits erläutert, daß bei einem Stabwerk (im Sonderfall bei einem Fachwerk) nur dann die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der an jedem Einzelstab wirkenden Momente und Kräfte ausreichen, wenn bei gegebener Knotenzahl eine bestimmte Anzahl innerer und äußerer Fesseln (im Sonderfall: Fachwerk- und Auflagerstäbe) vorhanden ist (einfach stabiles System). Besitzt ein Stabwerk n Fesseln mehr, als zur einfachen Stabilität notwendig sind ($n + 1$ -fache Stabilität), so ist es n -fach statisch unbestimmt.

Es geht in ein statisch bestimmtes (einfach stabiles) System über, wenn eine Reihe von Stäben „ganz“ oder „teilweise“ durchgeschnitten wird; dabei wird entweder in jedem dieser Stäbe die ursprünglich

festen Verbindung zweier benachbarter Querschnitte vollständig gelöst, so daß sich die so entstehenden „Schnittufer“ in jedem Sinne gegeneinander verschieben können („ganz durchgeschnitten“), oder es wird statt der ursprünglich festen Verbindung eine solche eingeführt, die je nach Bedarf keine Längs- bzw. Querkraft, bzw. kein Biege- bzw. Drillmoment mehr übertragen kann („teilweise durchgeschnitten“); letzterem entsprechend wird auch von der „Einschaltung einer Längs- bzw. Querverschieblichkeit bzw. eines Gelenks gegen Biegung oder Drillung“ gesprochen.

Wird das auf diese Weise entstehende „statisch bestimmte Hauptsystem“ durch beliebige Belastung oder durch irgend einen anderen Einfluß verformt, so führen die beiden Schnittufer einer jeden Schnitt-

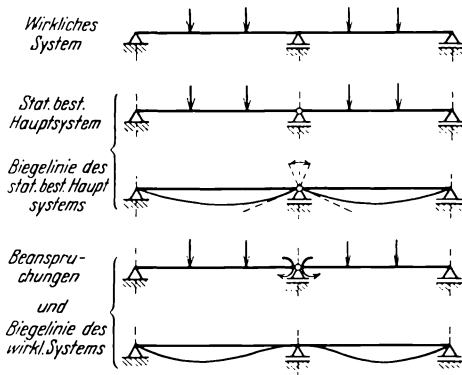


Abb. 184.

stelle gegenseitige Verschiebungen — „Wege“ bzw. „Drehungen“ — aus (Abb. 184). Derartige Verschiebungen der Schnittufer sind am wirklichen, statisch unbestimmten System nicht möglich, da dort keine „Schnitte“ vorhanden sind (vgl. auch Abb. 25).

Ebenso wie am wirklichen System werden die gegenseitigen Verschiebungen der Schnittufer am aufgeschnittenen System (Hauptsystem) zu Null, wenn an letzterem neben

der ursprünglich gegebenen äußeren Belastung wieder diejenigen (inneren) Kräfte und Momente in voller Größe als weitere (äußere) Lasten angebracht werden, die bei der Umgestaltung des wirklichen Systems zum statisch bestimmten Hauptsystem beseitigt wurden; denn dann ist der Beanspruchungs- und somit auch der Formänderungszustand des Hauptsystems in nichts von dem des wirklichen Systems verschieden (Abb. 184).

Diese bei der Umgestaltung des wirklichen Systems zum Hauptsystem beseitigten Längs- bzw. Querkräfte, Biege- bzw. Drillmomente werden als die n „statisch unbestimmten Größen“ oder kurz als die „Unbestimmten“ des betreffenden Systems bezeichnet:

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n.$$

2. Elastizitätsgleichungen.

Im folgenden bezeichnet $\delta_{i,k}$ immer die gegenseitige Verschiebung der Ufer eines Schnitts i , die sich im Sinne der dort beseitigten statisch

Unbestimmten X_i ergibt, wenn am Hauptsystem irgend ein Belastungszustand „ k “ angreift. Im einzelnen bedeutet:

$\delta_{i,0}$ die oben bezeichnete Verschiebung infolge der gegebenen äußeren Belastung am Hauptsystem („Zustand 0“);

$\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3} \dots$ die oben bezeichnete Verschiebung infolge alleiniger Belastung des Hauptsystems mit $X_1, X_2, X_3 \dots$ usw., wenn diese je für sich allein, und zwar mit dem Betrage „1“ angebracht werden („Zustände $X_1 = 1, X_2 = 1$ “ oder kürzer „Zustände 1, 2 . . .“).

Wie bereits gesagt, muß bei gleichzeitiger Wirkung der äußeren Belastung und aller statisch Unbestimmten in voller Größe die gegenseitige Verschiebung der Schnittufer des Hauptsystems bei i zu Null werden; diese „Zusammenhangsbedingung“ wird ausgesprochen durch die sog. „Elastizitätsgleichung“ für die Schnittstelle i :

$$X_1 \cdot \delta_{i,1} + X_2 \cdot \delta_{i,2} + \dots + X_i \cdot \delta_{i,i} + \dots + X_n \cdot \delta_{i,n} + \delta_{i,0} = 0;$$

denn z. B. $X_1 \cdot \delta_{i,1}$ ist die gegenseitige Schnittuferverschiebung bei i am Hauptsystem, wenn an diesem die statisch Unbestimmte X_1 in wirklicher Größe statt mit dem Betrag „1“ angreift. Da für die Angriffstelle jeder statisch Unbestimmten X_i eine solche Zusammenhangsbedingung gilt, können ebenso viele „Elastizitätsgleichungen“ aufgestellt werden, wie Unbestimmte vorhanden sind.

Die Größen $\delta_{i,0}$ werden „Lastwerte“, die Größen $\delta_{i,1}$ bis $\delta_{i,n}$ „Beiwerte“ der Elastizitätsgleichungen genannt.

3. Überlagerungssatz.

Die gesuchten Beanspruchungen des wirklichen, mit den gegebenen äußeren Kräften und Momenten belasteten Systems, also seine Längs- und Querkräfte, Biege- und Drillmomente, sind nun dieselben wie die des statisch bestimmten Hauptsystems, wenn an diesem neben der äußeren Belastung die aus den Elastizitätsgleichungen berechneten statisch Unbestimmten X_1, X_2, X_3 usw. in voller Größe angreifen.

Bedeutet entsprechend dem Aufbau der Elastizitätsgleichungen z. B. S_0 eine im Hauptsystem entstehende Stabkraft, wenn dieses durch die äußere Belastung allein beansprucht wird, bzw. S_1, S_2 usw. die im Hauptsystem entstehende Kraft desselben Stabes, wenn am Hauptsystem die Größen X_1, X_2 usw. mit dem Betrag „1“ nacheinander allein wirksam sind, so gilt:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 + \dots,$$

$$Q = Q_0 + X_1 \cdot Q_1 + X_2 \cdot Q_2 + \dots,$$

$$B = B_0 + X_1 \cdot B_1 + X_2 \cdot B_2 + \dots,$$

$$D = D_0 + X_1 \cdot D_1 + X_2 \cdot D_2 + \dots.$$

Entsprechend gilt für irgend eine Formänderungsgröße des statisch unbestimmten Systems:

$$\delta = \delta_0 + X_1 \cdot \delta_1 + X_2 \cdot \delta_2 + \dots$$

(Satz von der Überlagerung der Einzelwirkungen; zur Gültigkeit dieses Satzes wie auch der Elastizitätsgleichungen in der unter 2. angegebenen Form ist Voraussetzung, daß zwischen Formänderungen und Kräften bzw. Momenten ein linearer Zusammenhang besteht, vgl. S. 36.)

4. Last- und Beiwerte der Elastizitätsgleichungen.

Im statisch bestimmten Hauptsystem ergibt sich die gegenseitige Verschiebung $\delta_{i,k}$ der Schnittufer bei i nach der Arbeitsgleichung mit dem Zustand $X_i = 1$ als „Hilfszustand“ und dem Zustand k (Zustand $X_k = 1$ bzw. Zustand 0) als gegebenem „Belastungszustand“ zu:

$$1 \cdot \delta_{i,k} = \sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} + \sum \int Q_i \cdot \frac{Q_k \cdot dx}{GF'} + \sum \int D_i \cdot \frac{D_k \cdot dx}{GJ_d} \\ + \sum \int S_i \cdot \frac{S_k \cdot dx}{EF}.$$

(Vgl. S. 116; als Zustand k kann auch irgend ein Formänderungszustand des Hauptsystems, z. B. infolge von Stützenverschiebungen, Temperaturänderungen usw. gegeben sein.)

Der Wert $\delta_{i,k}$ kann somit auch aufgefaßt werden als Arbeit der gleich „1“ gesetzten statisch Unbestimmten X_i bei Formänderung des Hauptsystems gemäß Zustand k ; daher kann die vorher angeschriebene Elastizitätsgleichung als Ausdruck dafür aufgefaßt werden, daß die Arbeit der (gleich „1“ gesetzten) Unbestimmten X_i gleich Null wird, wenn das statisch bestimmte Hauptsystem Formänderungen infolge gleichzeitiger Wirkung der äußeren Belastung und sämtlicher statisch Unbestimmten erfährt. Da ferner $\delta_{i,k} = \sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} + \dots$ ist und sich entsprechend $\delta_{k,i} = \sum \int B_k \cdot \frac{B_i \cdot dx}{EJ} + \dots$ ergibt, so ist wegen der Gleichheit der rechten Seiten allgemein $\delta_{i,k} = \delta_{k,i}$ (Maxwellscher Satz von der gegenseitigen Gleichheit der Verschiebungen).

Bei der Berechnung der $\delta_{i,k}$ -Werte mittels der Arbeitsgleichung sind solche Stäbe, die Knickbiegung erhalten, entsprechend S. 167 und Aufgabe 59 zu behandeln; bei der Ermittlung des über ein solches Glied erstreckten Teilintegrals $\int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$ wird

$$a) \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} = B_i^l \cdot \tau_k^l - B_i^r \cdot \tau_k^r \quad \text{oder} \quad = M_i^l \cdot \tau_k^l + M_i^r \cdot \tau_k^r,$$

wenn die \bar{B}_i -Linie mit den Endordinaten $\bar{B}_i^l = B_i^l$ und $\bar{B}_i^r = B_i^r$ geradlinig über den ganzen Stab verläuft, und

$$b) \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} = \frac{4 \bar{B}_{\xi,i}}{l [1 - (2 \xi/l)^2]} \cdot \delta y_{\xi,k} \quad \text{oder} \quad = P_{\xi,i} \cdot \delta y_{\xi,k},$$

wenn die \bar{B}_i -Linie ein Dreieck mit der Spitzenordinate $\bar{B}_{\xi,i}$ an beliebiger Stelle ξ (von Stabmitte aus gemessen) und den Ordinaten 0 an den Stützpunkten des Stabes ist.

Wesentlich ist dabei folgendes: Da die Formänderungen des statisch bestimmten Hauptsystems infolge Belastung mit äußerer Last bzw. mit X_1 allein, X_2 allein usw. einander überlagert die wirklichen Formänderungen des statisch unbestimmten Systems ergeben sollen (Elastizitätsgleichungen!), so müßten alle diejenigen Einzelwerte $\delta_{i,k}$, die Knickbiegung enthalten, bzw. alle zu ihrer Ermittlung notwendigen Größen $\tau_k^l, \tau_k^r, \delta y_{\xi,k}$ so berechnet werden, als ob bereits im einzelnen Belastungszustand „ k “ die wirklichen Stablängskräfte des statisch unbestimmten Systems wirksam wären (vgl. Aufgabe 56).

Da nun in Wirklichkeit $S = S_0 + S_1 \cdot X_1 + S_2 \cdot X_2 + \dots$ ist, so würden auf diese Weise die Unbestimmten $X_1, X_2 \dots$ in die Labilitätsmaße $\alpha = l \cdot \sqrt{\frac{S_0 + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots}{EJ}}$ eingehen. Da dann aber die Größen $X_1, X_2 \dots$ nicht mehr als lineare Größen in den Elastizitätsgleichungen aufträten, werden zunächst in den auf Knickbiegung beanspruchten Gliedern in erster Näherung zur Aufstellung der Labilitätsmaße α die Längskräfte S gleich den entsprechenden Werten S_0 gesetzt (und zwar bei der Ermittlung aller Werte $\delta_{i,k}$ für $k = 0, 1, 2$ usw.!).

Ein entsprechendes Näherungsverfahren wird angewandt, wenn bei der Ermittlung von Stablängenänderungen der Einfluß von Sehnenverkürzungen infolge Biegung berücksichtigt werden soll; für die Sehnen-Längenänderung eines Stabes gilt:

$$\delta l \sim - \frac{8}{3l} (\delta y^m)^2 + \frac{32}{5l^3} (\delta y^m)^4,$$

worin δy^m die wirkliche Durchbiegung des betr. Stabes in seiner Mitte, bezogen auf die Verbindungslinie seiner Auflagerpunkte, bedeutet. Da nun am statisch unbestimmten System

$$\delta y^m = \delta y_0^m + X_1 \cdot \delta y_1^m + X_2 \cdot \delta y_2^m + \dots$$

ist (Überlagerungssatz), so würden dadurch die Größen X_1, X_2 usw. wiederum nicht linear in den Elastizitätsgleichungen auftreten; daher wird zur Berechnung der Sehnenverkürzungen für δy^m in erster Näherung die Größe δy_0^m eingeführt, d. h. es wird im I. Rechnungsgang angenommen, daß die wirkliche Durchbiegung des betr. Stabes gleich der Durchbiegung sei, die sich am Hauptsystem bei äußerer Belastung allein ergibt.

Die so in I. Näherung ermittelten Größen X_1^I, X_2^I, X_3^I usw. können zur schrittweisen Verbesserung der Werte $d y^m$ zwecks Berechnung verbesserter Größen $X_1^{II}, X_2^{II}, X_3^{II}$ usw. benutzt werden. Entsprechendes gilt auch im Fall der vorher behandelten Knickbiegungseinflüsse.

5. Gruppen statisch unbestimmter Größen.

Werden vorübergehend die statisch Unbestimmten mit $U_1, U_2 \dots$ bezeichnet, so heißen die Elastizitätsgleichungen für ein n -fach statisch unbestimmtes System:

$$\begin{aligned} U_1 \cdot \delta_{1,1} + U_2 \cdot \delta_{1,2} + \dots + \delta_{1,0} &= 0, \\ U_1 \cdot \delta_{2,1} + U_2 \cdot \delta_{2,2} + \dots + \delta_{2,0} &= 0 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Am statisch bestimmten Hauptsystem werden nun außer dem Zustand „0“ (äußere Belastung allein) nacheinander n Belastungszustände $1, 2 \dots n$ eingeführt, die darin bestehen, daß jeweils sämtliche statisch Unbestimmten mit beliebig gewählten Werten μ_i, ν_i usw. angreifen; z. B.

$$\begin{aligned} \text{bei Zustand „1“: } U_1 &= \mu_1, \quad U_2 = \mu_2, \quad \dots \quad U_n = \mu_n; \\ \text{„ „ „2“: } U_1 &= \nu_1, \quad U_2 = \nu_2, \quad \dots \quad U_n = \nu_n; \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Dann kann der wirkliche Kräfte- und Formänderungszustand des statisch unbestimmten Systems dadurch nachgebildet werden, daß der Zustand „0“ gleichzeitig mit sämtlichen Zuständen „1“, „2“ ..., „ n “ überlagert wird, wenn letztere zuvor mit ganz bestimmten, vorläufig unbekanntem Multiplikatoren $X_1, X_2 \dots X_n$ multipliziert werden.

Wie sich durch geeignete Umformung der ursprünglichen Elastizitätsgleichungen zeigen läßt, folgen diese Multiplikatoren $X_1, X_2 \dots$ ebenfalls aus einem System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta'_{1,1} + X_2 \cdot \delta'_{1,2} + \dots + \delta'_{1,0} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta'_{2,1} + X_2 \cdot \delta'_{2,2} + \dots + \delta'_{2,0} &= 0 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Hierin ergeben sich die Werte $\delta'_{i,k}$ analog den Werten $\delta_{i,k}$ durch Kombination der zu den Gruppenzuständen „1“, „2“ usw. gehörigen B -, Q -, S - bzw. D -Flächen untereinander bzw. mit denen des Zustands „0“; auch hier gilt $\delta'_{i,k} = \delta'_{k,i}$. Nach Berechnung der Größen X_i ergeben sich die ursprünglich eingeführten statisch Unbestimmten U_i zu:

$$\begin{aligned} U_1 &= X_1 \cdot \mu_1 + X_2 \cdot \nu_1 + \dots, \\ U_2 &= X_1 \cdot \mu_2 + X_2 \cdot \nu_2 + \dots \\ \text{usw.;} \end{aligned}$$

wäre; dann entsteht ein statisch unbestimmtes Hauptsystem. In den Elastizitätsgleichungen für die beseitigten Unbekannten sind dann die Bei- und Lastwerte $\delta_{i,k}$ gegenseitige Verschiebungen der Schnittufer derjenigen Schnitte, die zur Herstellung dieses statisch unbestimmten Hauptsystems nötig waren (vgl. Aufgabe 75).

Schließlich ist es bei einer Reihe von Aufgaben noch zweckmäßig, als statisch Unbestimmte an Stelle von Fesselkräften und -momenten die Drehungen der Knotenpunkte oder deren Komponenten einzuführen (sog. Deformationsmethode; vgl. Aufgabe 83 und 84).

Auf Grund der Ergebnisse der statisch unbestimmten Rechnung ist meist eine neue Bemessung einzelner oder aller Glieder des Systems notwendig, da die ursprünglich geschätzten Abmessungen den wirklichen Beanspruchungen nicht entsprechen (zu große oder zu kleine Querschnitte). Die neue Bemessung macht dann eine neue Durchführung der statisch unbestimmten Rechnung erforderlich, die ihrerseits u. U. eine abermalige Umbemessung bedingt usw.

Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, bei statisch unbestimmten Rechnungen Feinheiten des Ansatzes, wie z. B. Lagernachgiebigkeiten, Knickbiegungseinflüsse, Nebenspannungen usw., bzw. Feinheiten der Bemessung, wie z. B. Abstufungen der Querschnitte innerhalb eines Einzelstabes usw., erst in die letzten Rechnungsgänge einer Aufgabe aufzunehmen.

Der beschränkte Raum dieses Buches gestattet jedoch nicht, diese wechselseitige Verbesserung von Rechnung und Bemessung in den Beispielen zu zeigen.

§ 16. Grundaufgaben über Ansatz und Durchführung statisch unbestimmter Rechnungen.

Aufgabe 60: Ausgekreuzte Tragwand unter Vorspannung.

Die Stabkräfte der in Abb. 185 dargestellten Doppeldecker-Tragwand sind zu berechnen. Die Auskreuzungen bestehen aus Profildraht; die Diagonale 2 sei bei nicht vorhandener äußerer Belastung mit 1000 kg vorgespannt.

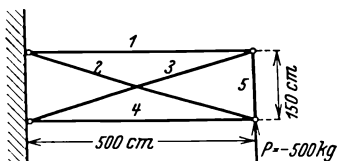


Abb. 185.

Infolge der äußeren, nach oben gerichteten (negativen) Belastung erhält die Diagonale 2 zusätzlich zur Vorspannkraft eine Druckkraft. Solange P unter einer gewissen Grenze \bar{P} bleibt, ist diese Druckkraft dem absoluten Betrag nach kleiner als die Vorspannkraft, so daß in der Diagonale 2 insgesamt eine resultierende Zugkraft

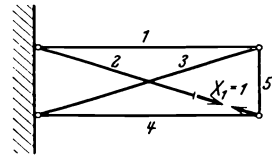
verbleibt. Wenn die äußere Last die Grenze \bar{P} erreicht, wird der Absolutbetrag der Druckkraft in 2 gleich dem der Vorspannkraft, d. h. die resultierende Diagonalkraft in 2 wird Null. Wird die Grenze \bar{P} überschritten, so würde in 2 eine resultierende Druckkraft entstehen; diese kann aber nicht aufgenommen werden, so daß von da ab die Diagonale 2 ausfällt.

a) $P < \bar{P}$. Beide Diagonalen sind wirksam.

Das System ist einfach statisch unbestimmt; als statisch Unbestimmte X_1 wird die Stabkraft eingeführt, die in der Diagonale 2 auftreten würde, wenn beide Diagonalen zug- und druckfest wären und keine Vorspannung vorläge. Als statisch bestimmtes Hauptsystem dient also das System mit durchschnittener Diagonale 2. Die Zusammenhangsbedingung für die Schnittstelle in Stab 2 wird durch die Elastizitätsgleichung

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0} = 0$$

ausgedrückt (Abb. 186); sie sagt aus, daß die Summe der gegenseitigen Verschiebungen der Schnittufer der durchschnittenen Diagonale 2, die unter dem Einfluß der äußeren Belastung P bzw. der Spannkraft X_1 je für sich entstehen, dem wirklichen unzerschnittenen Zustand der Diagonale entsprechend Null sein muß.



Hierin bedeutet:

$\delta_{1,0} = \sum S_1 \frac{S_0 s}{EF}$ die gegenseitige Verschiebung der Schnittufer des Stabes 2 im Sinne von X_1 infolge Belastung des Hauptsystems mit P allein,

$\delta_{1,1} = \sum S_1 \frac{S_1 s}{EF}$ die entsprechende Verschiebung infolge Belastung des Hauptsystems mit $X_1 = 1$ allein;

beide Summen erstrecken sich über alle Stäbe einschließlich der durchschnittenen Diagonale 2; es sind

S_1 die Stabkräfte im Hauptsystem infolge $X_1 = 1$ allein,
 S_0 „ „ „ „ „ „ P „ .

Die Stabkräfte im wirklichen, statisch unbestimmten System einschließlich des Einflusses der Vorspannung sind

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + S_V;$$

S_V sind die Stabkräfte im Hauptsystem infolge der Vorspannkraft der Diagonale 2 allein.

Zahlenrechnung.

Äußere Belastung: $P = - 500 \text{ kg}$ } siehe Tabelle 58.
 Vorspannkraft in Stab 2: $S_r = + 1000 \text{ kg}$ }

Die Vorspannkraft in irgend einem anderen Stab ist $S_r = 1000 \cdot S_1 [\text{kg}]$, da die Vorspannung des Stabes 2 dieselbe Wirkung auf die anderen Stäbe hat wie eine Kraft $X_1 = 1000 \text{ kg}$, angreifend am statisch bestimmten Hauptsystem.

Tabelle 58. Berechnung der Stabkräfte für $P = - 500 \text{ kg}$.

Stab	Werkstoff	$E \cdot 10^{-6}$ [kg/cm ²]	F [cm ²]	s [cm]	$\frac{s}{EF} \cdot 10^4$ [cm/kg]	S_0 [kg]	S_1 [—]	$S_1 \cdot S_0 \cdot \varrho^*$ [cm]	$10^4 \cdot S_1^2 \cdot \varrho^*$ [cm/kg]	$X_1 \cdot S_1$ [kg]	S_r [kg]	S [kg]
1	Holz	0,13	30	500	1,28	-1667	-0,959	+0,2044	+1,177	+701	- 959	-1925
2	Stahl	2,2	1,5	522	1,58	0	+1	0	+1,580	-731	+1000	+ 269
3	Stahl	2,2	1,5	522	1,58	+1738	+1	+0,2743	+1,580	-731	+1000	+2007
4	Holz	0,13	15	500	2,56	0	-0,959	0	+2,354	+701	- 959	- 258
5	Holz	0,13	10	150	1,15	- 500	-0,287	+0,0165	+0,095	+210	- 287	- 577
								+0,4952	+6,786			
* $\varrho = \frac{s}{EF}$		$X_1 = - \frac{\sum S_0 \cdot S_1 \cdot \varrho}{\sum S_1^2 \cdot \varrho} = - \frac{0,4952}{6,786} \cdot 10^4 = - 731 \text{ kg}.$										

b) Bestimmung der Lastgrenze \bar{P} , von der ab die Diagonale 2 ausfällt.

Wirkt $P = \bar{P}$, so ist für Stab 2 die „Grenzbedingung“:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + S_r = 0.$$

Nach Tabelle 58 ist für diesen Stab

$$S_0 = 0, \quad S_1 = + 1, \quad S_r = 1000 \text{ kg}.$$

Bei $P < \bar{P}$ ist

$$X_1 = P \cdot \frac{-731}{-500}.$$

Diese Werte, in vorhergehende Grenzbedingung eingesetzt, ergeben den

Tabelle 59. Stabkräfte für z. B. $P = - 1000 \text{ kg}$.

Stab	$S = S_0$ [kg]
1	-3333
2	0
3	+3476
4	0
5	-1000

Grenzwert

$$\bar{P} = - \frac{1000 \cdot 500}{731} = - 684 \text{ kg}.$$

c) $P > \bar{P}$. Die Diagonale 2 ist unwirksam.

Das System ist statisch bestimmt; es gelten die für das jeweilige P sich ergebenden Stabkräfte S_0 des Hauptsystems (Tabelle 59).

Aufgabe 61: Ebener geschlossener Sechseckrahmen

(Rumpfwandaussparung; vgl. Aufgabe 76).

1. In dem durch eine Kraftgruppe $D = 1 \text{ kg}$ belasteten Rahmenwerk $A, B, J, C, D, E, F, H, G$ (Abb. 187) sind die Biegemomente zu berechnen.

2. Das System ist durch ein Gelenkfachwerk (Abb. 188) zu ersetzen, dessen Diagonale DH so bemessen ist, daß ihre Längenänderung gleich der Änderung $\delta(DH)$ der Strecke DH des Rahmenwerks ist.

Aufgaben dieser Art treten bei der Behandlung von Rumpfen, Flügeln, Motorvorbauten usw. auf, bei denen einzelne Wandfelder für Führerauschnitte, Fenster- und Türöffnungen usw. ausgespart sind.

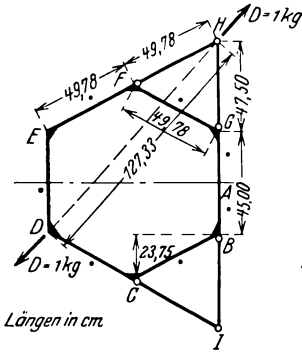


Abb. 187.

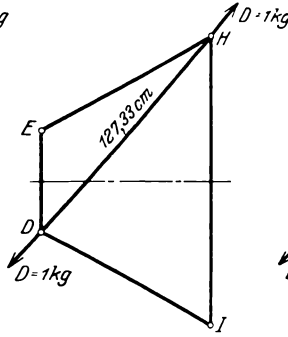


Abb. 188.

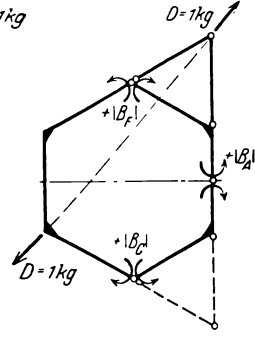


Abb. 189.

Zu 1. Das Rahmenwerk ist dreifach statisch unbestimmt; als statisch Unbestimmte werden die Biegemomente B_A , B_C und B_F (Abb. 189) eingeführt; zur Herstellung des statisch bestimmten Hauptsystems wird also in den Sechseckrahmen an den Stellen A , C , F je ein Gelenk gegen Biegung eingeschaltet. Zwecks Ausnutzung der Symmetrie des Rahmens werden als Unbekannte $X_1 \div X_3$ der Elastizitätsgleichungen in folgender Weise Gruppen dieser statisch Unbestimmten gewählt (s. S. 194):

$$\text{„}X_1 = 1\text{“: } B_C = +1, \quad B_F = -1;$$

$$\text{„}X_2 = 1\text{“: } B_A = +1;$$

$$\text{„}X_3 = 1\text{“: } B_A = +1, \quad B_C = +1, \quad B_F = +1.$$

Die Elastizitätsgleichungen heißen allgemein:

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + X_3 \cdot \delta_{1,3} + \delta_{1,0} = 0,$$

$$X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + X_3 \cdot \delta_{2,3} + \delta_{2,0} = 0,$$

$$X_1 \cdot \delta_{3,1} + X_2 \cdot \delta_{3,2} + X_3 \cdot \delta_{3,3} + \delta_{3,0} = 0.$$

Die Biegemomentenflächen infolge des Zustands 0 (d. h. äußerer Belastung $D = 1 \text{ kg}$) und der Zustände $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ sind in Abb. 190 dargestellt. Symmetrische Belastung des symmetrischen Systems ergibt symmetrische, antisymmetrische Belastung ergibt antisymmetrische Biegemomentenflächen. Zu ihrer Ermittlung müssen

zunächst die Auflagerkräfte der Teilrahmen A, B, C und A, G, F am Teilrahmen C, D, E, F ermittelt werden. Bei Zustand 0 muß z. B. die

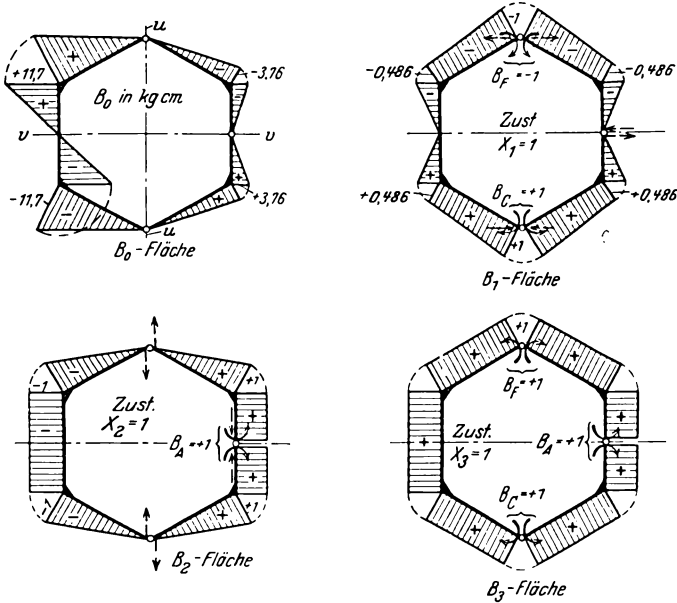


Abb. 190.

Auflagerkraft A_C des unbelasteten Teilrahmens A, B, C in Richtung A, C fallen (Abb. 191). Die Momentengleichung bzgl. des Punktes F' lautet dann:

$$A_G \cdot r = 1 \cdot r' \quad \text{usw.} \quad (\text{vgl. Aufg. 25/26}).$$

Die Werte $\delta_{i,k}$ der Elastizitätsgleichungen sind:

$$\delta_{i,k} = \sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} + \sum \int S_i \cdot \frac{S_k \cdot dx}{EF} + \sum \int Q_i \cdot \frac{Q_k \cdot dx}{GF'}$$

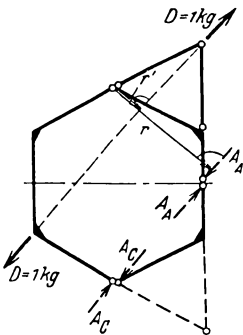


Abb. 191.

(B_i und B_k bzw. S_i und S_k bzw. Q_i und Q_k sind die Biegemomente bzw. die Längs- bzw. die Querkräfte der Zustände i und k . Zustand 0 bedeutet: äußere Belastung allein, Zustand 1 bedeutet: X_1 allein am Hauptsystem usw.)

Dazu ist folgendes zu bemerken: Wenn die einander entsprechenden Rahmenglieder zu den Achsen $u \div u$ und $v \div v$ symmetrisch bemessen sind, so werden die Beiwerte $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$, $\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$, $\delta_{2,3} = \delta_{3,2}$,

der Lastwert $\delta_{3,0}$, sowie der Biegemomentenanteil von $\delta_{2,0}$ im vorliegenden Fall zu Null; denn von den B -Flächen bzw. den hier nicht gezeichneten S - und Q -Flächen, die zur Berechnung der genannten Werte miteinander zu kombinieren sind, ist jeweils die eine Fläche zu einer der Achsen $u \div u$ oder $v \div v$ symmetrisch, die andere Fläche dagegen zur gleichen Achse antisymmetrisch. Infolgedessen wird die Summe der Teilintegrale über die eine Rahmenhälfte entgegengesetzt gleich derjenigen über die andere Rahmenhälfte.

Bei Rahmenwerken können im allgemeinen die Formänderungsanteile $\sum \int S_i \cdot \frac{S_k \cdot dx}{EF}$ sowie $\sum \int Q_i \cdot \frac{Q_k \cdot dx}{GF'}$ gegenüber den großen Anteilen $\sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$ vernachlässigt werden.

Da der Lastwert $\delta_{2,0}$ nur aus Längs- und Querkraftanteilen besteht, wird er sehr klein; da ferner in der zweiten Elastizitätsgleichung $\delta_{2,1}$ und $\delta_{2,3}$ fortfallen, wird auch X_2 klein und liefert nur einen unwesentlichen Beitrag zur Gesamtbeanspruchung des Systems, so daß X_2 praktisch vernachlässigt werden kann, und $\delta_{2,0}$ damit überflüssig wird.

Es bleibt also nur noch die erste Elastizitätsgleichung übrig; wird in allen Rahmenstäben konstante und gleiche Biegesteifigkeit EJ angenommen (und der Einfluß der Knickbiegung nicht berücksichtigt), so heißt diese Gleichung:

$$X_1 \cdot 121,4 - 383,9 = 0.$$

Somit:

$$X_1 = + 3,16 \text{ kgcm} \quad (X_2 = X_3 = 0).$$

Damit werden die wirklichen Biegemomente des statisch unbestimmten Systems:

$$B = B_0 + 3,16 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 \text{ [kgcm]}$$

(Abb. 192).

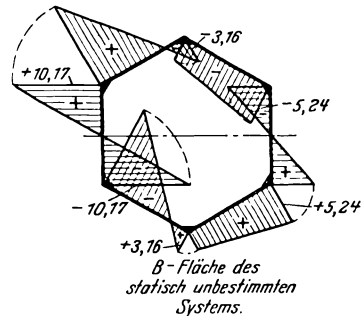


Abb. 192.

Zu 2. Die Änderung $\delta(DH)$ der Strecke DH am statisch unbestimmten System ist ebenso groß wie am statisch bestimmten Hauptsystem, wenn an letzterem die Belastungszustände 0, 1, 2 und 3 gleichzeitig angreifen:

$$\delta(DH) = \delta(DH)_0 + X_1 \cdot \delta(DH)_1 + X_2 \cdot \delta(DH)_2 + X_3 \cdot \delta(DH)_3.$$

Die Werte $\delta(DH)_i$ am statisch bestimmten Hauptsystem ($i = 0, 1, 2, 3$) ergeben sich nach der Arbeitsgleichung mittels eines Hilfszustandes I , der aus zwei gleich großen entgegengesetzt gerichteten Kräften vom Betrag 1 besteht, die in D und H im Sinne der gesuchten

Längenänderung $\delta(DH)$ angreifen (der Hilfszustand I ist also in diesem Beispiel identisch mit dem Zustand 0):

$$\begin{aligned}\delta(DH) &= \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + X_1 \cdot \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ} + X_2 \cdot \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_2 \cdot dx}{EJ} \\ &\quad + X_3 \cdot \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_3 \cdot dx}{EJ} \\ &= \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + X_1 \cdot \delta_{1,I} + X_2 \cdot \delta_{2,I} + X_3 \cdot \delta_{3,I}\end{aligned}$$

(da $\delta_{I,1} = \delta_{1,I}$ usw. nach Maxwell, S. 192; $X_2 = X_3 = 0$).

Bei Annahme von $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ und einem für alle Stäbe gleichen und konstanten Trägheitsmoment $J = 1,0 \text{ cm}^4$ wird der Zahlenwert

$$EJ \cdot \delta(DH) = +7278 + 3,16(-383,9);$$

$$\delta(DH) = 0,00303 \text{ cm.}$$

Der Querschnitt F des Stabes DH , der das Rahmenwerk ersetzen soll, folgt dann aus

$$\delta(DH) = \frac{S_{DH} \cdot l_{DH}}{EF} = 0,00303 \text{ cm}$$

zu:

$$F = 0,021 \text{ cm}^2.$$

Bereits eine Diagonale von außerordentlich geringem Querschnitt gibt also einem Gelenkviereck $JDEH$ (Abb. 188) die Steifigkeit des biegesteifen Rahmenwerks (Abb. 187).

Bemerkung. Da das wirkliche Biegemoment $B = B_0 + X_1 \cdot B_1 + X_2 \cdot B_2 + X_3 \cdot B_3$ ist, kann statt

$$\begin{aligned}\delta(DH) &= \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + X_1 \cdot \Sigma \int B_I \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ} + \dots \\ &= \Sigma \int B_I \cdot (B_0 + X_1 \cdot B_1 + X_2 \cdot B_2 + X_3 \cdot B_3) \cdot \frac{dx}{EJ}\end{aligned}$$

auch geschrieben werden:

$$\delta(DH) = \Sigma \int B_I \cdot \frac{B^u \cdot dx}{EJ};$$

dabei soll durch den Index u ausgesprochen werden, daß die Biegemomente B^u des wirklichen statisch unbestimmten Systems zu nehmen sind. D. h. die Formänderung $\delta(DH)$ am statisch unbestimmten System, für die nach Einführung eines Hilfszustands I am statisch unbestimmten System die schematische Anwendung der Arbeitsgleichung liefern würde:

$$\delta(DH) = \Sigma \int B_I^u \cdot \frac{B^u \cdot dx}{EJ},$$

kann gefunden werden durch Kombination der B_I -Fläche am statisch bestimmten Hauptsystem mit der B^u -Fläche am statisch unbestimmten System; in ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch geschrieben werden kann

$$\delta(DH) = \Sigma \int B_I^u \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ}$$

(B_I^u am statisch unbestimmten System; B_0 am statisch bestimmten System). Sog. Reduktionssatz, siehe z. B. Müller-Breslau¹³, Kammer⁴⁴.

Aufgabe 62: Räumlich belasteter offener Dreieckrahmen
(Fahrgestellrahmen).

Die Beanspruchungen des in Abb. 193 dargestellten, durch ein Bremsmoment M belasteten Fahrgestellrahmens sind zu ermitteln. Der Rahmen sei in den Punkten 1 und 3 durch einachsige Gelenke, deren Achse parallel $1 \div 3$ gerichtet ist, am Rumpf angeschlossen. Einer der Punkte 1 und 3 sei außerdem in Richtung $1 \div 3$ längsverschieblich. Der Stab c sei mit einem vollständigen Gelenk an den Rahmen angeschlossen. Die Stäbe a und b seien so ausgeführt, daß ihre Hauptträgheitsachsen senkrecht bzw. parallel zur Rahmenebene gerichtet sind*. Die in den Stäben auftretenden Längskräfte seien hinreichend klein, so daß eine Berücksichtigung des Einflusses der Knickbiegung nicht erforderlich wird; desgl. werden die Formänderungsanteile der Längs- und Querkräfte vernachlässigt.

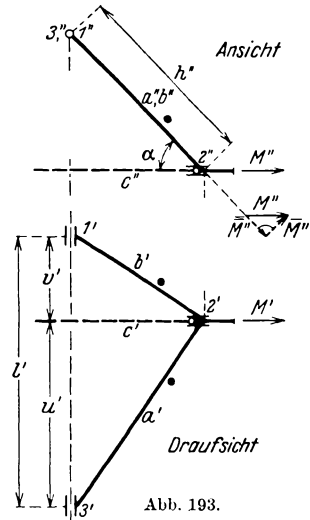


Abb. 193.

Das Moment M wird in zwei Komponenten, \bar{M} und $\bar{\bar{M}}$, zerlegt, deren Vektorpfeile parallel und senkrecht zur Rahmenebene gerichtet sind: $\bar{M} = M \sin \alpha$ und $\bar{\bar{M}} = M \cos \alpha$ (Abb. 193 und 194).

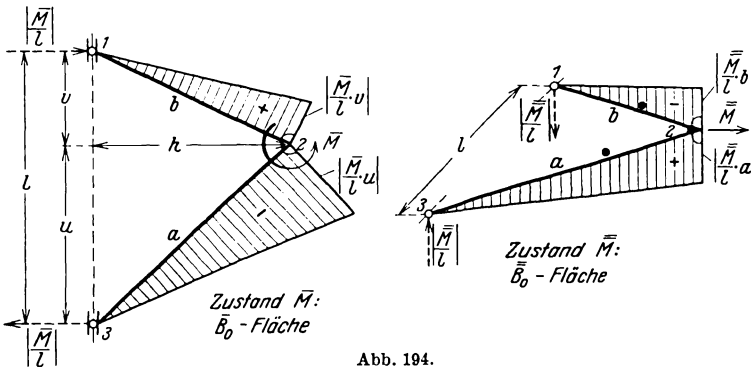


Abb. 194.

Das System ist insgesamt 4-fach statisch unbestimmt; als statisch Unbestimmte $X_1 \div X_4$ werden die senkrecht bzw. parallel zur Rahmenebene gerichteten Komponenten der in 1 und 3 zwischen dem Rahmen

* Nur dann erfolgen die elastischen Verschiebungen bei einem in der Rahmenebene wirkenden Belastungszustand ebenfalls in dieser Ebene.

und dem Rumpf wirkenden Gesamtmomente eingeführt (Abb. 195); ihre Vektoren stehen senkrecht zu den Gelenkachsen, also senkrecht

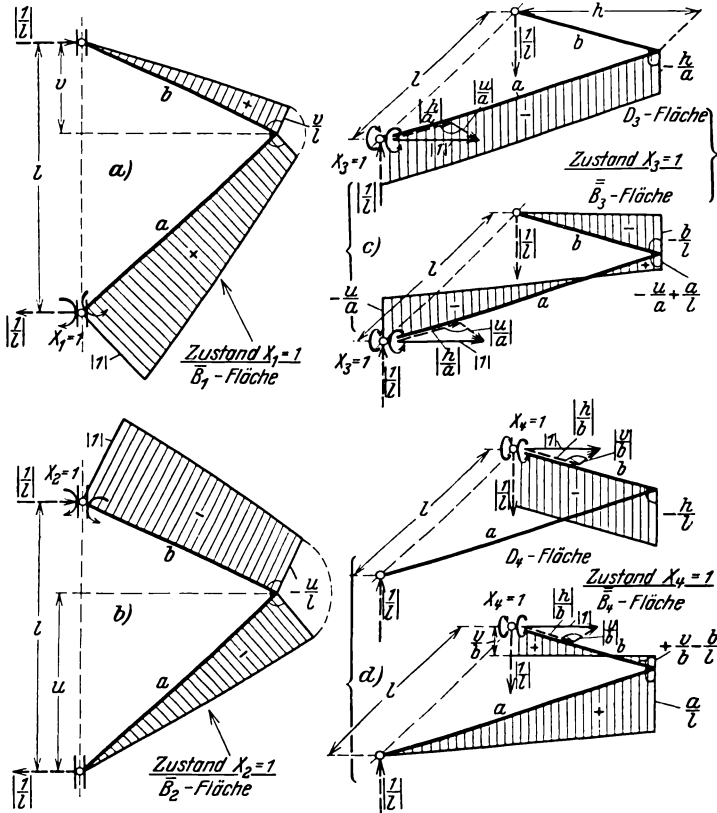


Abb. 195.

zu 1÷3. Das statisch bestimmte Hauptsystem entsteht demgemäß durch Einführung von vollständigen Gelenken in 1 und 3.

Tabelle 60. Bei- und Lastwerte.

Beiwerte von				Lastwerte bei	
X_1	X_2	X_3	X_4	Zustand \bar{M}	Zustand \bar{M}
$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	0	0	$\delta_{1,0}$	0
$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$	0	0	$\delta_{2,0}$	0
0	0	$\delta_{3,3}$	$\delta_{3,4}$	0	$\delta_{3,0}$
0	0	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,4}$	0	$\delta_{4,0}$

Die Biegemomente B (\bar{B} in der Rahmenebene, \bar{B} senkrecht zur Rahmenebene) und Drillmomente D des statisch bestimmten Hauptsystems infolge der einzelnen Teilzustände (0, 1, 2, 3, 4) sind in Abb. 194 und 195 dargestellt; vgl. hierzu § 9.

Da die Zustände 1 und 2 nur Biegemomente \bar{B} , die Zustände 3 und 4 nur Biegemomente $\bar{\bar{B}}$ und Drillmomente D hervorrufen, so wird ein Teil der $\delta_{i,k}$ -Werte der Elastizitätsgleichungen gleich Null, wie Tabelle 60 zeigt.

Die vier Elastizitätsgleichungen zerfallen also in zwei voneinander unabhängige Systeme mit nur je zwei Unbekannten.

Bedeutet \bar{EJ}_a bzw. \bar{EJ}_b die Biegesteifigkeit der Stäbe a und b bezüglich der zur Rahmenebene senkrechten Stabhauptachsen, so ergibt die Auswertung der Integrale $\delta_{i,k} = \sum \int \bar{B}_i \cdot \frac{\bar{B}_k \cdot dx}{\bar{EJ}}$ folgende Ausdrücke für die Bei- und Lastwerte der ersten beiden Elastizitätsgleichungen (vgl. Anhang, Tabelle 94):

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \frac{b}{3\bar{EJ}_b} \left(\frac{v}{l}\right)^2 + \frac{a}{3\bar{EJ}_a} \left[1 + \left(\frac{v}{l}\right)^2 + \frac{v}{l}\right], \\ \delta_{2,2} &= \frac{a}{3\bar{EJ}_a} \left(\frac{u}{l}\right)^2 + \frac{b}{3\bar{EJ}_b} \left[1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2 + \frac{u}{l}\right], \\ \delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= -\frac{b}{6\bar{EJ}_b} \left(\frac{v}{l} + \frac{2u}{l} \cdot \frac{v}{l}\right) - \frac{a}{6\bar{EJ}_a} \left(\frac{u}{l} + \frac{2v}{l} \cdot \frac{u}{l}\right), \\ \delta_{1,0} &= \bar{M} \left[\frac{b}{3\bar{EJ}_b} \left(\frac{v}{l}\right)^2 - \frac{a}{6\bar{EJ}_a} \left(\frac{u}{l} + \frac{2v}{l} \cdot \frac{u}{l}\right) \right], \\ \delta_{2,0} &= \bar{M} \left[\frac{a}{3\bar{EJ}_a} \left(\frac{u}{l}\right)^2 - \frac{b}{6\bar{EJ}_b} \left(\frac{v}{l} + \frac{2u}{l} \cdot \frac{v}{l}\right) \right]. \end{aligned}$$

Bedeutet ferner $\bar{\bar{EJ}}_a$ bzw. $\bar{\bar{EJ}}_b$ die Biegesteifigkeit der Stäbe a bzw. b bezüglich der zur Rahmenebene parallelen Stabhauptachsen, ferner GJ_{da} bzw. GJ_{db} die zugehörigen Drillsteifigkeiten, so ergibt die Auswertung der Integrale $\delta_{i,k} = \sum \int \bar{\bar{B}}_i \cdot \frac{\bar{\bar{B}}_k \cdot dx}{\bar{\bar{EJ}}} + \sum \int D_i \cdot \frac{D_k \cdot dx}{GJ_a}$ folgende Ausdrücke für die Bei- und Lastwerte der beiden letzten Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta_{3,3} &= \frac{b}{3\bar{\bar{EJ}}_b} \left(\frac{b}{l}\right)^2 + \frac{a}{3\bar{\bar{EJ}}_a} \left[\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{u}{a} - \frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{u}{a}\right) \left(\frac{u}{a} - \frac{a}{l}\right) \right] \\ &\quad + \frac{a}{GJ_{da}} \left(\frac{h}{a}\right)^2, \\ \delta_{4,4} &= \frac{a}{3\bar{\bar{EJ}}_a} \left(\frac{a}{l}\right)^2 + \frac{b}{3\bar{\bar{EJ}}_b} \left[\left(\frac{v}{b}\right)^2 + \left(\frac{v}{b} - \frac{b}{l}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right) \left(\frac{v}{b} - \frac{b}{l}\right) \right] \\ &\quad + \frac{b}{GJ_{db}} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \end{aligned}$$

$$\delta_{3,4} = \delta_{4,3} = -\frac{a}{6\overline{EJ}_a} \left[\frac{a}{l} \cdot \frac{u}{a} + \frac{2a}{l} \left(\frac{u}{a} - \frac{a}{l} \right) \right] - \frac{b}{6\overline{EJ}_b} \left[\frac{b}{l} \cdot \frac{v}{b} + \frac{2b}{l} \left(\frac{v}{b} - \frac{b}{l} \right) \right],$$

$$\delta_{3,0} = \overline{M} \left\{ \frac{b}{3\overline{EJ}_b} \left(\frac{b}{l} \right)^2 - \frac{a}{6\overline{EJ}_a} \left[\frac{a}{l} \cdot \frac{u}{a} + \frac{2a}{l} \left(\frac{u}{a} - \frac{a}{l} \right) \right] \right\},$$

$$\delta_{4,0} = \overline{M} \left\{ \frac{a}{3\overline{EJ}_a} \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{b}{6\overline{EJ}_b} \left[\frac{b}{l} \cdot \frac{v}{b} + \frac{2b}{l} \left(\frac{v}{b} - \frac{b}{l} \right) \right] \right\}.$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke in das Schema der Elastizitätsgleichungen werden aus diesen die Unbekannten berechnet; dann ergeben sich die endgültigen Momentenflächen durch Summation der zu den Teilzuständen gehörenden Momentenflächen:

$$\overline{B} = \overline{B}_0 + X_1 \cdot \overline{B}_1 + X_2 \cdot \overline{B}_2,$$

$$\overline{B} = \overline{B}_0 + X_3 \cdot \overline{B}_3 + X_4 \cdot \overline{B}_4,$$

$$D = X_3 \cdot D_3 + X_4 \cdot D_4.$$

Aufgabe 63: Beiderseitig eingespannte Strebe mit Stützenverschiebungen.

1. Die Beanspruchungen der in Abb. 196 dargestellten, in 1 und 2 biegefest eingespannten und in 2 längsverschieblich gelagerten Strebe

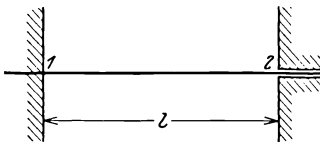


Abb. 196.

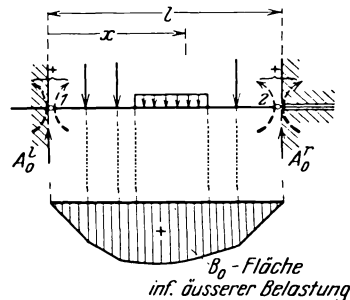


Abb. 197.

sind für folgenden Fall zu berechnen:

Auf die Strebe wirken beliebige Querlasten (Abb. 197); dabei werden gleichzeitig die Einspannwände senkrecht zur Stabachse um gegebene Strecken δy_{10}^l bzw. δy_{10}^r verschoben und um gegebene Winkel $\delta \alpha_{10}^l$ bzw. $\delta \alpha_{10}^r$ gedreht (Abb. 198).

Bezüglich der Lagerung bzw. Einspannung ist folgendes zu berücksichtigen:

a) Die Auflager sind senkrecht zur Trägerachse elastisch nachgiebig derart, daß sie infolge einer Auflagerkraft $A^l = 1$ bzw. $A^r = 1$ um Strecken η^l bzw. η^r im Sinne dieser Kräfte nachgeben*.

* Positive Auflagerkraft wirkt als Reaktion auf den Stab von unten nach oben, als Aktion auf das Lager dagegen von oben nach unten (S. 39).

b) Die Einspannungen sind elastisch nachgiebig derart, daß sie infolge eines Einspannmoments $E^l = 1$ bzw. $E^r = 1$ um Winkel ε^l bzw. ε^r im Sinne dieses Momentes nachgeben*.

2. Es ist festzustellen, wie sich ein Spiel in den Einspannungen der Strebe von der Größe $\pm |\beta^l|$ bzw. $\pm |\beta^r|$ auswirkt.

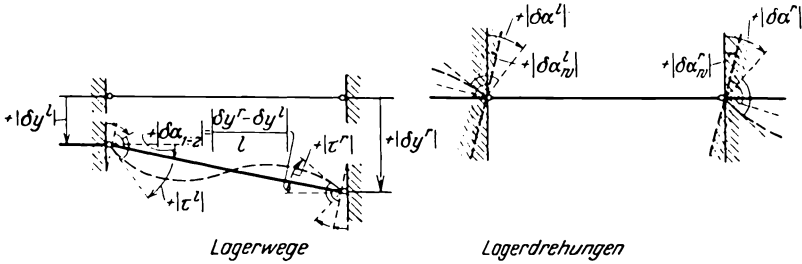


Abb. 198.

Zu 1. Das System ist zweifach statisch unbestimmt; als statisch Unbestimmte X_1 und X_2 werden die Biegemomente an den Stabenden 1 und 2 eingeführt. Als statisch bestimmtes Hauptsystem dient also das in Abb. 199 dargestellte System. Die Elastizitätsgleichungen heißen allgemein:

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + \delta_{1,0} = 0,$$

$$X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + \delta_{2,0} = 0.$$

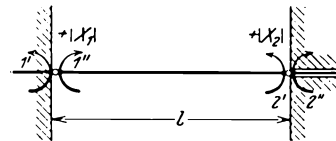


Abb. 199.

Die Werte $\delta_{1,0}$, $\delta_{1,1}$, $\delta_{1,2}$ bzw. $\delta_{2,0}$, $\delta_{2,1}$, $\delta_{2,2}$ bedeuten dabei die gegenseitigen Drehungen der Querschnitte 1' und 1'' bzw. 2' und 2'' am Hauptsystem im Sinne von $+ |X_1|$ bzw. $+ |X_2|$ infolge der Zustände 0, 1, 2:

Zustand 0:

Äußere Belastung einschließlich der gegebenen Wandverschiebungen $\delta y_w^l, \delta y_w^r$ und Einspannungsdrehungen $\delta \alpha_w^l, \delta \alpha_w^r$;

Zustand 1 bzw. 2:

Biegemomente $X_1 = 1$ bzw. $X_2 = 1$ allein.

Infolge irgend eines Zustands k ($k = 0, 1, 2$) am Hauptsystem können auftreten (Abb. 198):

τ_k^l bzw. τ_k^r : eine Neigung des linken bzw. rechten Stabendes gegen die Stabsehne 1-2,

$\delta \alpha_k^l$ bzw. $\delta \alpha_k^r$: eine Drehung der linken bzw. rechten Einspannung,

δy_k^l bzw. δy_k^r : eine lotrechte Wegkomponente des linken bzw. rechten Auflagers.

* Positives Einspannmoment wirkt als Reaktion auf den Balken entgegen dem Uhrzeigersinn, als Aktion auf die Wand dagegen im Uhrzeigersinn (S. 39).

Allgemein gilt für die Bei- und Lastwerte der 1. Elastizitätsgleichung:

$$\delta_{1,k} = \left(\tau_k^l + \frac{\delta y_k^r - \delta y_k^l}{l} \right) - \delta \alpha_k^l,$$

bzw. der 2. Elastizitätsgleichung:

$$\delta_{2,k} = \delta \alpha_k^r - \left(\tau_k^r + \frac{\delta y_k^r - \delta y_k^l}{l} \right).$$

Die Ermittlung der Anteile τ_k , δy_k , $\delta \alpha_k$ geschieht nach Tabelle 61.

Tabelle 61 (vgl. auch Abb. 200). Ermittlung der Verschiebungswerte.

Anteile $\tau_k, \delta y_k, \delta \alpha_k$	Zustand „k“:		
	„0“*	„1“	„2“
τ_k^l	$\int_0^l B_1 \cdot \frac{B_0 \cdot dx^{**}}{EJ}$	$\int_0^l B_1 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ}$	$\int_0^l B_1 \cdot \frac{B_2 \cdot dx}{EJ}$
τ_k^{r***}	$-\int_0^l B_2 \cdot \frac{B_0 \cdot dx^{**}}{EJ}$	$-\int_0^l B_2 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ}$	$-\int_0^l B_2 \cdot \frac{B_2 \cdot dx}{EJ}$
δy_k^l	$\delta y_w^l + A_0^l \cdot \eta^l \dagger$	$-\frac{1}{l} \cdot \eta^l$	$+\frac{1}{l} \cdot \eta^l$
δy_k^r	$\delta y_w^r + A_0^r \cdot \eta^r \dagger$	$+\frac{1}{l} \cdot \eta^r$	$-\frac{1}{l} \cdot \eta^r$
$\delta \alpha_k^l$	$\delta \alpha_w^l$	$-1 \cdot \epsilon^l$	0
$\delta \alpha_k^r$	$\delta \alpha_w^r$	0	$+1 \cdot \epsilon^r$

* Gegebene äußere Belastung und gegebene Verschiebungen der Auflagerwände.

** B_0 kann positiv oder negativ werden, je nach dem Richtungssinn der äußeren Belastung; in Abb. 197 ist positive Belastung und damit positives B_0 angenommen.

*** Um die Drehung τ_k^r des rechten Stabendquerschnitts gegen die Stabsehne zu erhalten, muß daselbst als Hilfszustand ein positives Einzelmoment M^r angebracht werden; die dazugehörige Biegemomentenfläche ist gleich der negativen B_2 -Fläche, also ist $\tau_k^r = \int -B_2 \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$. (Der im folgenden mit $\delta_{2,k}$ bezeichnete Ausdruck $\int + B_2 \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$ bedeutet dagegen die Drehung des rechten Endquerschnitts gegen die Stabsehne im Sinne von $+ |X_2|$, also die Größe $-\tau_k^r$.)

† A_0^l und A_0^r sind als Aktionskräfte des Balkens auf die Widerlager anzusehen.

Wird zur Abkürzung für den Formänderungsanteil der Biegemomente eingeführt

$$\int B_t \frac{B_k dx}{EJ} = \bar{\delta}_{i,k},$$

so heißen damit die Elastizitätsgleichungen:

$$\begin{aligned} X_1 \left(\bar{\delta}_{1,1} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^l \right) + X_2 \left(\bar{\delta}_{1,2} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) \\ + \left(\bar{\delta}_{1,0} + \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} - \delta \alpha_0^l \right) = 0, \\ X_1 \left(\bar{\delta}_{2,1} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) + X_2 \left(\bar{\delta}_{2,2} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^r \right) \\ + \left(\bar{\delta}_{2,0} - \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} + \delta \alpha_0^r \right) = 0. \end{aligned}$$

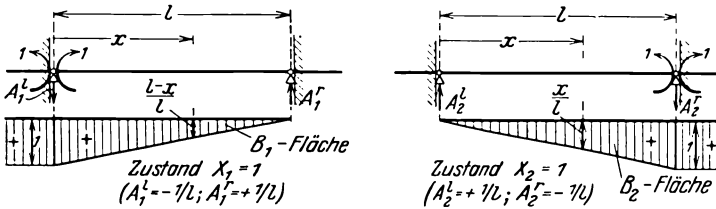


Abb. 200.

Zu 2. Wenn in den Einspannungen bei 1 und 2 ein Spiel vom Winkelbetrag $\pm |\beta^l|$ und $\pm |\beta^r|$ vorliegt, so kommen folgende Fälle in Frage:

a) Die gegenseitige Drehung zwischen Balkenende und Einspannungswand bei Zustand 0 im statisch bestimmten Hauptsystem ist absolut kleiner als $|\beta^l|$ bzw. $|\beta^r|$:

$$\begin{aligned} |\delta_{1,0}| &= \left| \bar{\delta}_{1,0} + \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} - \delta \alpha_0^l \right| < |\beta^l|, \\ |\delta_{2,0}| &= \left| \bar{\delta}_{2,0} - \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} + \delta \alpha_0^r \right| < |\beta^r|. \end{aligned}$$

Dann ist das System statisch bestimmt, weil die Einspannungen noch nicht zur Wirkung kommen:

$$X_1 = X_2 = 0.$$

Sind nicht beide Bedingungen erfüllt, so bestehen noch folgende Möglichkeiten (Fälle b, c, d):

b) Nach einer Drehung von der Größe $|\beta^r|$ kommt das rechte Strebende in der Einspannung zum Anliegen; am linken Ende bleibt dagegen noch Spiel; dann tritt rechts ein statisch unbestimmtes Biegemoment X_2 auf; die zweite Elastizitätsgleichung heißt mit $X_1 = 0$:

$$X_2 \left(\bar{\delta}_{2,2} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^r \right) + \left(\bar{\delta}_{2,0} - \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} + \delta \alpha_0^r \right) = \frac{\delta_{2,0}}{|\delta_{2,0}|} \cdot |\beta^r|.$$

Die rechte Seite wird dabei von Null verschieden; denn es bleibt eine gegenseitige Drehung zwischen rechtem Endquerschnitt und der Wand von der Größe des Absolutbetrages von β^r . Das Vorzeichen, mit dem dieser Betrag einzuführen ist, richtet sich nach dem Vorzeichensinn von $\delta_{2,0}$; dieser ist bestimmt durch $(\delta_{2,0}) : (|\delta_{2,0}|)$.

Der endgültige Nachweis dafür, ob der Fall b vorliegt, ist gegeben, wenn unter Berücksichtigung von X_2 im 1-fach statisch unbestimmten System die gegenseitige Drehung $\delta_{1,0}$ zwischen linkem Stabende und Einspannwand absolut kleiner als $|\beta^l|$ bleibt, wenn also entsprechend der ersten Elastizitätsgleichung mit $X_1 = 0$:

$$\left| X_2 \left(\bar{\delta}_{1,2} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) + \left(\bar{\delta}_{1,0} + \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} - \delta \alpha_0^l \right) \right| < |\beta^l|$$

ist.

c) Entgegen dem unter b behandelten Fall kommt das linke Stabende nach einer Drehung von der Größe $|\beta^l|$ in der Einspannung zum Anliegen; am rechten Ende bleibt dagegen noch Spiel; dann tritt links ein statisch unbestimmtes Biegemoment X_1 auf. Entsprechend vorhergehendem gilt dann die erste Elastizitätsgleichung mit $X_2 = 0$:

$$X_1 \left(\bar{\delta}_{1,1} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^l \right) + \left(\bar{\delta}_{1,0} + \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} - \delta \alpha_0^l \right) = \frac{\delta_{1,0}}{|\delta_{1,0}|} \cdot |\beta^l|.$$

Zur Nachprüfung, ob der Fall c wirklich vorliegt, liefert entsprechend vorhergehendem die 2. Elastizitätsgleichung mit $X_2 = 0$ das Kriterium:

$$\left| X_1 \left(\bar{\delta}_{2,1} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) + \left(\bar{\delta}_{2,0} - \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} + \delta \alpha_0^l \right) \right| < |\beta^r|.$$

d) Die Strebe kommt in beiden Einspannungen zum Anliegen, so daß zwei statisch unbestimmte Biegemomente X_1 und X_2 auftreten. Dann heißen die beiden Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung von X_1 und X_2 :

$$\begin{aligned} X_1 \left(\bar{\delta}_{1,1} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^l \right) + X_2 \left(\bar{\delta}_{1,2} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) \\ + \left(\bar{\delta}_{1,0} + \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} - \delta \alpha_0^l \right) &= \frac{\delta_{1,0}}{|\delta_{1,0}|} \cdot |\beta^l|, \\ X_1 \left(\bar{\delta}_{2,1} - \frac{\eta^r}{l^2} - \frac{\eta^l}{l^2} \right) + X_2 \left(\bar{\delta}_{2,2} + \frac{\eta^r}{l^2} + \frac{\eta^l}{l^2} + \varepsilon^r \right) \\ + \left(\bar{\delta}_{2,0} - \frac{\delta y_0^r - \delta y_0^l}{l} + \delta \alpha_0^r \right) &= \frac{\delta_{2,0}}{|\delta_{2,0}|} \cdot |\beta^r|. \end{aligned}$$

Wenn dieser Fall vorliegt, so muß das Biegemoment X_1 entgegengesetzt der Drehung wirken, die der linke Stabendquerschnitt gegen die linke Auflagerwand ausführt; entsprechendes gilt für X_2 hinsichtlich der Drehung der rechten Auflagerwand gegen das rechte Stabende; d. h. die Unbekannten X_1 bzw. X_2 müssen anderes Vorzeichen

haben als die Verschiebungswerte auf der rechten Seite der Elastizitätsgleichungen; das Kriterium dafür, ob der Fall d vorliegt, heißt also:

$$X_1 \cdot \left(\frac{\delta_{1,0}}{|\delta_{1,0}|} \cdot |\beta^l| \right) < 0,$$

$$X_2 \cdot \left(\frac{\delta_{2,0}}{|\delta_{2,0}|} \cdot |\beta^r| \right) < 0.$$

(X_1 bzw. X_2 sind dabei diejenigen Werte der Unbekannten, die aus den beiden letztgenannten Elastizitätsgleichungen folgen.)

Aufgabe 64: Achtstäbiger Motoreinbau (vgl. Aufg. 36).

Die Stabkräfte des in Aufgabe 36 behandelten Motoreinbaus sind zu berechnen für den Fall, daß entsprechend Abb. 201 zwei weitere Stäbe

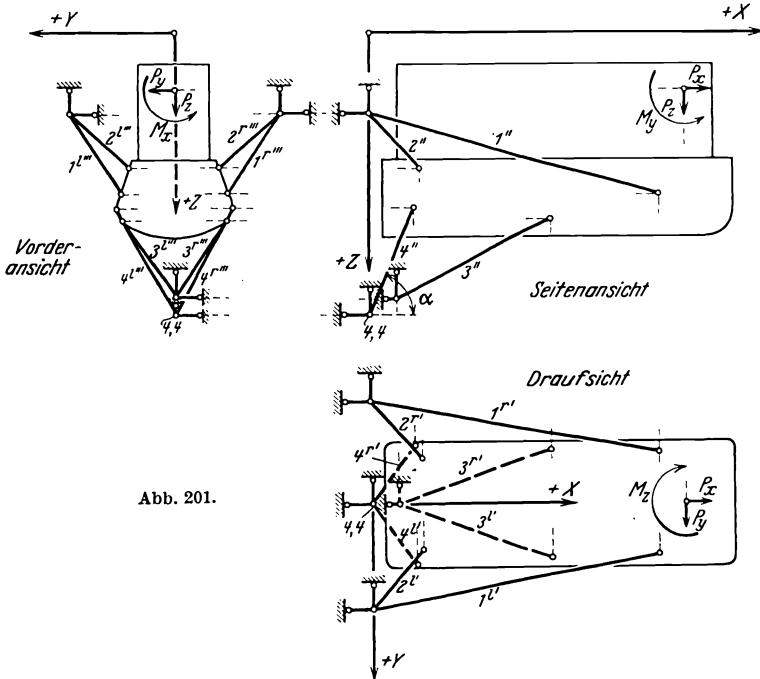


Abb. 201.

eingezogen werden. Zu untersuchen ist der Einfluß äußerer Kräfte (Massenkräfte des Motors) und äußerer Momente (z. B. des Motordrehmoments usw.) sowie der Einfluß von Verschiebungen der Rumpfanschlußpunkte, die durch die Rumpffverformung bedingt sind.

Durch die neuen Stäbe 4^r und 4^l wird das System zweifach statisch unbestimmt. Zur Herstellung des statisch bestimmten Hauptsystems

wird die Verbindung des Anschlußpunktes 4, 4 mit der Anschlußwand gelöst gedacht.

Als statisch Unbestimmte werden nach Abb. 202 die beiden Komponenten X_1 und X_2 der in die Ebene $4^l \div 4^r$ fallenden Auflagerkraft in 4, 4 eingeführt; dadurch ergibt sich eine Ausnutzungsmöglichkeit der Systemsymmetrie.

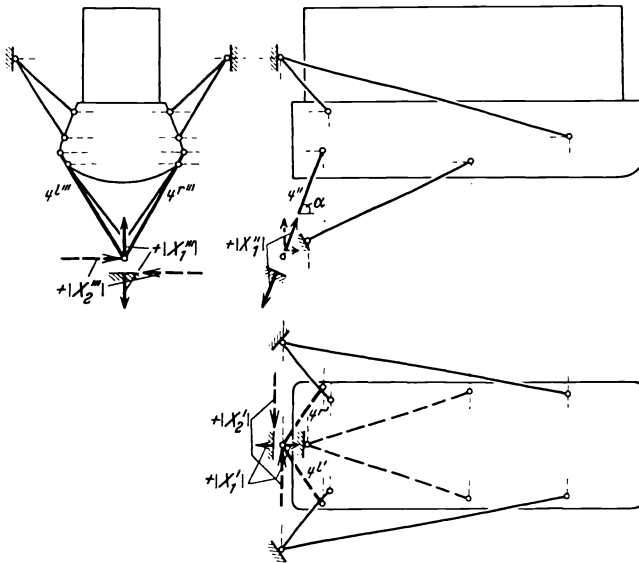


Abb. 202.

Die Stabkräfte S_0 des statisch bestimmten Hauptsystems infolge der gegebenen äußeren Belastung sind bereits durch Aufgabe 36 festgelegt.

Infolge der Zustände $X_1=1$ und $X_2=1$ ergeben sich am statisch bestimmten Hauptsystem die Stabkräfte der beiden neuen Stäbe durch Zerlegung von X_1 und X_2 nach den Richtungen dieser Stäbe; die übrigen Stabkräfte S_1 und S_2 des statisch bestimmten Hauptsystems infolge $X_1=1$ und $X_2=1$ ergeben sich wieder nach Aufgabe 36, indem dort als äußere Belastung des Motors eingeführt wird:

$$\begin{array}{l} \text{Zustand } X_1 = 1: \\ \text{Zustand } X_2 = 1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P_x = + 1 \cdot \cos \alpha, \\ P_y = 0, \\ P_z = - 1 \cdot \sin \alpha; \\ \\ P_x = 0, \\ P_y = - 1, \\ P_z = 0; \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{angreifend im} \\ \text{Schnittpunkt} \\ \text{von } 4^r \text{ und } 4^l. \end{array}$$

Je zwei symmetrisch zur XZ -Ebene liegende Stäbe erhalten infolge $X_1 = 1$ einander gleiche, infolge $X_2 = 1$ dagegen entgegengesetzt gleiche Kräfte.

Es bezeichne z. B. $A(x)_{j,k}$, $A(y)_{j,k}$, $A(z)_{j,k}$ die in Richtung der $+X$ -, $+Y$ -, $+Z$ -Achse positiv gemessene Komponente der bei einem der Belastungszustände „ k “ ($k = 0, 1, 2$) in einem Anschlußpunkt j vom Motoreinbau auf den Rumpf ausgeübten Aktionskraft $A_{j,k}$. Diese Komponenten können aufgefaßt werden als Kräfte in gedachten Auflagerstäben, die entsprechend Abb. 201 so angeordnet seien, daß sie bei positivem $A(x)_{j,k}$, $A(y)_{j,k}$, $A(z)_{j,k}$ Zugkräfte erhalten. Dann stellen die als gegeben angenommenen Wegkomponenten $\delta x_{j,0}$, $\delta y_{j,0}$, $\delta z_{j,0}$ der Anschlußpunkte j (positiv im Sinne der $+X$ -, $+Y$ -, $+Z$ -Achse) Längenänderungen dieser Auflagerstäbe dar; und zwar entsprechen positiven $\delta x_{j,0}$, $\delta y_{j,0}$, $\delta z_{j,0}$ Verlängerungen dieser Stäbe, wie sie infolge von Zugbeanspruchungen entstehen würden.

Die Elastizitätsgleichungen für X_1 und X_2 heißen:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + \delta_{1,0} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + \delta_{2,0} &= 0. \end{aligned}$$

Nach der Arbeitsgleichung ergeben sich dann die Beiwerte:

$$\delta_{i,k} = \sum S_i \cdot \delta s_k = \sum_{(1)} S_i \cdot \frac{S_k \cdot s}{EF}$$

und die Lastwerte:

$$\delta_{i,0} = \sum S_i \cdot \delta s_0 = \sum_{(1)} S_i \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} + \sum_{(2)} S_i \cdot \delta s_0.$$

Die Summen $\sum_{(1)}$ erstrecken sich über alle Einbaustäbe; die Summe $\sum_{(2)}$ erstreckt sich nur über die gedachten Auflagerstäbe.

Im einzelnen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \sum S_1^2 \cdot \frac{s}{EF}, & \delta_{1,2} &= \delta_{2,1} = \sum S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot s}{EF}, \\ \delta_{2,2} &= \sum S_2^2 \cdot \frac{s}{EF}. \end{aligned}$$

Da bei den Zuständen 1 und 2 die eine Hälfte der Stabkräfte gleich bzw. entgegengesetzt gleich der anderen ist, so wird die eine Hälfte der Produkte $S_1 \cdot S_2$ positiv, die andere Hälfte negativ; somit fallen die Ausdrücke $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ fort, und die Elastizitätsgleichungen enthalten je nur eine der beiden Unbekannten. (Ausnutzung der Symmetrie.)

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0} &= \sum S_1 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} + \sum A(x)_{j,1} \cdot \delta x_{j,0} + \sum A(y)_{j,1} \cdot \delta y_{j,0} + \sum A(z)_{j,1} \cdot \delta z_{j,0}, \\ \delta_{2,0} &= \sum S_2 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} + \sum A(x)_{j,2} \cdot \delta x_{j,0} + \sum A(y)_{j,2} \cdot \delta y_{j,0} + \sum A(z)_{j,2} \cdot \delta z_{j,0}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Strenggenommen hängen die Größen $\delta x_{i,0}$, $\delta y_{i,0}$, $\delta z_{i,0}$ einerseits von der Belastung des Rumpfes durch die Motoreinbaustäbe, andererseits von der übrigen äußeren Belastung des Rumpfes ab. In I. Näherung kann aber die Berechnung von X_1 und X_2 durchgeführt werden, indem diejenigen Werte $\delta x_{i,0}$, $\delta y_{i,0}$, $\delta z_{i,0}$, die sich ohne den Einfluß von X_1 und X_2 am Rumpf ergeben, als richtige Verschiebungen der Rumpfanschlußpunkte angesehen werden. Zur Durchführung eines zweiten Rechnungsganges können die Wege $\delta x_{i,0}$, $\delta y_{i,0}$, $\delta z_{i,0}$ der Rumpfanschlußpunkte unter Beachtung des Einflusses von X_1 und X_2 und der dadurch geänderten übrigen Auflagerkräfte des Motoreinbaus neu berechnet bzw. verbessert werden. Mit den verbesserten Werten $\delta x_{i,0}$, $\delta y_{i,0}$, $\delta z_{i,0}$ können die Werte X_1 und X_2 ihrerseits in II. Näherung berechnet werden. Durch mehrere Wiederholungen dieses Verfahrens wird die Genauigkeit gesteigert.

Die Berechnung kann natürlich auch in der Weise geschehen, daß der ganze Rumpf mitsamt dem Motoreinbau bei durchschnittlichem Anschluß des Stäbepaares 4', 4'' als Hauptsystem betrachtet wird. Dann ergeben sich sofort die genauen Werte X_1 und X_2 .

Praktisch wird im allgemeinen jedoch der oben beschriebene erste Rechnungsgang genügen. Meist wird überdies der Einfluß der Anschlußpunkt-Verschiebungen $\delta x_{i,0}$, $\delta y_{i,0}$, $\delta z_{i,0}$ vernachlässigt.

Aufgabe 65: Rahmenvorspannungen infolge von Rüstfehlern.

Bei dem in Abb. 203 dargestellten ausgesteiften Viereckrahmen seien die Stäbe 1 und 2 ungenau angeschweißt derart, daß sie in A zunächst um einen Betrag $\delta_{A,0}$ klaffen. Es sollen die Biegespannungen berechnet werden, die in den Stäben dadurch entstehen, daß die klaffenden Stabenden zwecks Vornahme der Schweißung durch Kräfte senkrecht zur Winkelhalbierenden zusammengebogen werden.

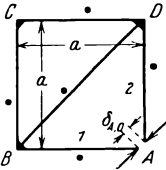


Abb. 203.

Als statisch Unbestimmte des fertig geschweißten Systems werden eingeführt: Die innere Kraft X_1 bei A , die das Zusammenhalten der klaffenden Stabenden bewirkt, ferner die Biegemomente an den Ecken des allgemein dreifach statisch unbestimmten Dreieckrahmens BCD .

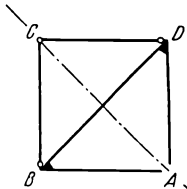


Abb. 204.

Als statisch bestimmtes Hauptsystem wird also das in Abb. 204 dargestellte System gewählt.

Da das System und die Belastung zur Achse CA symmetrisch ist, muß das Biegemoment in B gleich dem in D sein. Damit bleiben im Dreieckrahmen nur noch zwei statisch unbestimmte Größen übrig. Zur Wahrung der Symmetrie, auch in den Hilfsbelastungszuständen, wird als Unbekannte X_2 das Eckbiegemoment in C , als Unbekannte X_3 die aus Abb. 205 ersichtliche Belastungsgruppe aus gleichen Eckmomenten in B und D eingeführt. Die zu den Zuständen $X_1 = 1$ bis $X_3 = 1$ gehörigen Biegemomentenflächen sind in Abb. 205 dargestellt.

Die Elastizitätsgleichungen heißen:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + X_3 \cdot \delta_{1,3} &= \delta_{A,0}, \\ X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + X_3 \cdot \delta_{2,3} &= 0, \\ X_1 \cdot \delta_{3,1} + X_2 \cdot \delta_{3,2} + X_3 \cdot \delta_{3,3} &= 0. \end{aligned}$$

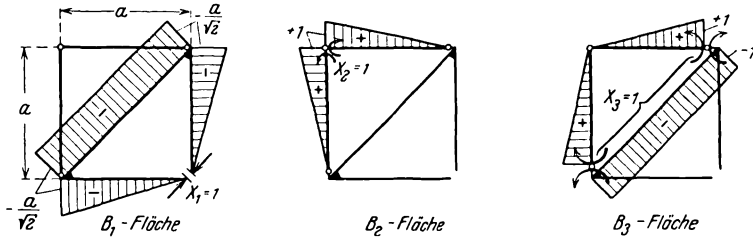


Abb. 205.

Die rechte Seite der ersten Elastizitätsgleichung ist hier nicht Null; denn diese Gleichung spricht aus, daß die beiden Schnittufer bei A unter dem Einfluß der Größen X gegenüber ihrer ursprünglichen Lage eine gegenseitige Verschiebung von der Größe $\delta_{A,0}$ im Sinne von $+ |X_1|$ erhalten sollen.

Bei gleicher Bemessung aller Stäbe wird unter Vernachlässigung der Stablängenänderungen:

$$\begin{aligned} EJ \cdot \delta_{1,1} &= \frac{a^3}{\sqrt{2}} + \frac{a^3}{3}, & EJ \cdot \delta_{1,2} &= EJ \cdot \delta_{2,1} = 0, \\ EJ \cdot \delta_{2,2} &= \frac{2a}{3}, & EJ \cdot \delta_{1,3} &= EJ \cdot \delta_{3,1} = a^2, \\ EJ \cdot \delta_{3,3} &= a \sqrt{2} + \frac{2a}{3}, & EJ \cdot \delta_{2,3} &= EJ \cdot \delta_{3,2} = \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Damit können die Werte $X_1 \div X_3$ berechnet werden; die Biegemomente im vollständigen, in A zusammengeschweißten System folgen durch Überlagerung der zu den Teilzuständen gehörenden Momentenflächen zu:

$$B = X_1 \cdot B_1 + X_2 \cdot B_2 + X_3 \cdot B_3.$$

Aufgabe 66: Rahmenvorspannungen infolge Schweißung.

Die Diagonale des in Abb. 206 dargestellten ausgesteiften Viereckrahmens werde erst nach Herstellung des äußeren Rahmens eingeschweißt. Es sind die Vorspannungen zu berechnen, die in den Stäben dadurch entstehen, daß sich die erkaltende Strebe zusammenzieht. Bei allen Stäben sei $F = 1,343 \text{ cm}^2$, $W = 0,933 \text{ cm}^3$, $J = 1,4 \text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

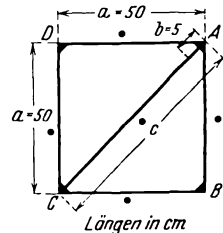


Abb. 206.

Es werde zunächst der untere Strebenanschlußpunkt hergestellt; beim Erkalten desselben treten noch keine Vorspannungen auf. Darauf werde der obere Anschluß geschweißt. Solange sich das obere Strebenende im Glühzustand befindet, wirken ebenfalls keine Vorspannungen, da dann die noch weiche Strebe eine Längenänderung spannungslos mitmachen kann. Etwa von einer Abkühlung auf 700°C ab wird im folgenden die Strebe zwecks überschläglicher Abschätzung der Schweißspannungen als zugfest angesehen; bei weiterer Abkühlung und Zusammenziehung übt sie also eine Kraft auf den Rahmen aus.

Um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten, wird zur Abschätzung der entstehenden Spannungen angenommen, das obere Ende der Strebe sei längs einer Strecke von $b = 5\text{ cm}$ auf 700°C gleichmäßig erhitzt; alle übrigen Stellen seien kalt.

Das System ist allgemein 6-fach statisch unbestimmt; denn der äußere Rahmen ist für sich 3-fach statisch unbestimmt, 3 weitere statisch Unbestimmte (z. B. Längskraft, Querkraft, Biegemoment oder Längskraft und zwei Biegemomente) können in der Strebe auftreten.

Da aber das System symmetrisch zur Strebenachse ist und an ihm keine zu dieser unsymmetrischen äußeren Kräfte und Momente angreifen, können auf die Strebe keine Querkräfte bzw. Biegemomente wirken. Da somit zwei unsymmetrisch zu einer Rahmensymmetrieachse wirkende statisch Unbestimmte in Wegfall kommen, kann die Strebe als beiderseits gelenkig angeschlossen angesehen werden.

Damit bleiben zunächst noch 4 statisch Unbestimmte übrig. Als solche können z. B. eingeführt werden: Die Strebenlängskraft, die Rahmenbiegemomente bei B und D und die zu DB parallele Komponente der in D von CD auf DA bzw. von AD auf CD ausgeübten Gesamtkraft. Als statisch bestimmtes Hauptsystem wird dementsprechend das in Abb. 207 dargestellte System gewählt.

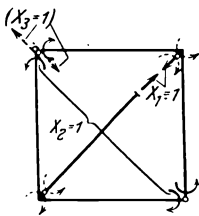


Abb. 207.

Da aber das System symmetrisch zur Strebenachse ist und an ihm keine zu dieser unsymmetrischen äußeren Kräfte und Momente angreifen, muß das Rahmen-eckmoment bei D gleich dem bei B sein. Damit fällt eine weitere statische Unbestimmtheit fort.

Da weiterhin das System auch symmetrisch zur Linie DB ist und an ihm keine zu dieser unsymmetrischen äußeren Kräfte und Momente angreifen, müssen auch die in Abb. 207 mit X_3 bezeichneten Komponenten der Gesamtkraft in D fortfallen, da sie einen zu DB unsymmetrischen Beanspruchungszustand bedingen würden.

Damit bleiben insgesamt nur zwei statisch Unbestimmte übrig. Unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften des Systems wird als

Unbekannte X_1 die Strebenlängskraft (s. oben), als Unbekannte X_2 die aus Abb. 208 ersichtliche Biegemomentengruppe in B und D eingeführt.

Die Biegemomenten- und Längskraftflächen der Zustände 1 und 2 (d. h. $X_1 = 1$ und $X_2 = 1$) sind in Abb. 208 dargestellt. Als Zustand 0 wird derjenige Formänderungszustand bezeichnet, der am statisch bestimmten Hauptsystem infolge der Abkühlung des erhitzten Strebenendes von $t_0 = 700^\circ \text{C}$ auf $t_1 = \text{rund } 0^\circ \text{C}$, also bei einer Temperaturänderung $\Delta t = t_1 - t_0 = -700^\circ \text{C}$, eintreten würde.

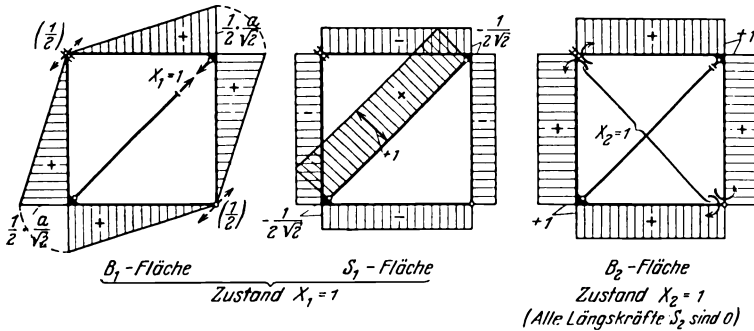


Abb. 208.

Die Elastizitätsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + \delta_{1,0} &= 0, \\
 X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + \delta_{2,0} &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Bei- und Lastwerte lauten:

$$\delta_{i,k} = \sum S_i \cdot \delta s_k + \sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}.$$

Bei Berechnung der Beiwerte kann der Einfluß der Stablängenänderungen gegenüber den großen Formänderungsanteilen der Biegemomente vernachlässigt werden; bei den Lastwerten ist dies nicht zulässig, weil bei Zustand 0 nur Stablängenänderungen, dagegen keine Verbiegungen auftreten.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \delta_{1,1} &= \frac{a^3}{6EJ} + \frac{a(1+2\sqrt{2})}{2EF}, \\
 \delta_{2,2} &= 4 \cdot \frac{a}{EJ}, \\
 \delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{EJ}, \\
 \delta_{1,0} &= 1 \cdot \delta c = 1 \cdot b \cdot \kappa,
 \end{aligned}$$

(wobei für eine Abkühlung um 700°C :

$$\nu \sim -0,0105^*),$$

$$\delta_{2,0} = 0.$$

Die Einführung der oben angegebenen Zahlenwerte in die Elastizitätsgleichungen liefert:

$$X_1 = + 27,5 \text{ kg},$$

$$X_2 = - 242,6 \text{ kgcm}.$$

Bei A und C werden damit die größten Spannungen des wirklichen Systems infolge des Schweißvorgangs:

$$\sigma = \pm \frac{B}{W} + \frac{S}{F} = \pm \frac{X_1 \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} + X_2 \cdot 1}{W} - \frac{X_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{F};$$

$$\sigma_{\text{innen}} = + 254 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{außen}} = - 268 \quad ,, \quad .$$

Bemerkungen. Der in dieser Aufgabe angenommene Stababschnitt von $b = 5 \text{ cm}$ Länge, der sich von 700°C auf rd. 0°C abkühlen soll, ist nur als Beispiel gewählt; in Wirklichkeit werden auch noch Teile des äußeren Rahmens erhitzt. Wie Versuche gezeigt haben, ist der Einfluß der Schweißung starken Schwankungen unterworfen, die ihre Ursache in Rüstfehlern (vgl. Aufg. 65) haben, wie sie durch Nichtfluchten der Stabachsen entstehen. Die Schweißspannungen lassen sich durch zweckmäßige Reihenfolge im Zusammenbau wesentlich verringern.

Aufgabe 67 bis 68: Temperaturspannungen in Tragwänden.

Unter Temperaturspannungen werden solche Beanspruchungen verstanden, die infolge von Temperaturänderungen eines Systems gegenüber seiner Montagetemperatur auftreten können. Aus den Aufbaukriterien (S. 34) folgt, daß solche Spannungen nur in statisch unbestimmten Systemen möglich sind, und zwar bei gleicher Temperaturänderung sämtlicher Teile (einschließlich der Auflagerwände usw.) nur dann, wenn das System aus verschiedenen Werkstoffen mit verschiedenen Wärmedehnungszahlen besteht, bei ungleicher Temperaturänderung einzelner Teile dagegen auch bei Tragwerken aus überall gleichem Werkstoff.

In Anbetracht der vielseitigen Verwendung von Flugzeugen kommen Temperaturen zwischen -40°C und $+40^{\circ}\text{C}$ wenigstens in Frage.

Aufgabe 67.

Es sind die Spannungen zu berechnen, die in der vorgespannten Tragwand (Aufgabe 60) auftreten, wenn sie sich von $t_0 = +15^{\circ}\text{C}$ auf $t_1 = -25^{\circ}\text{C}$ abkühlt. Werkstoffe s. Tabelle 62.

* Vgl. z. B. Hütte I 26. Aufl. S. 484.

Wie in Aufgabe 60 wird die Längskraft in Stab 2 als statisch Unbestimmte eingeführt; Zustand 1 bezeichnet wieder den Zustand $X_1 = 1$ am Hauptsystem (Abb. 186); Zustand 0 bezeichnet hier den Formänderungszustand, der sich einstellt, wenn sich das statisch bestimmte Hauptsystem um $\Delta t = t_1 - t_0$ abkühlt. Die Elastizitätsgleichung heißt dann:

$$X_1^t \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0}^t = 0.$$

Darin ist:

$$\delta_{1,1} = \sum S_1 \cdot \delta s_1 = \sum S_1 \cdot \frac{S_1 s}{EF},$$

$$\delta_{1,0}^t = \sum S_1 \cdot \delta s_0^t = \sum S_1 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta t \cdot s).$$

Nach Ermittlung von X_1^t ergeben sich die Stabkräfte infolge der Abkühlung zu:

$$S^t = X_1^t \cdot S_1.$$

Die zahlenmäßige Durchrechnung ist aus Tabelle 62 ersichtlich; dabei ist gesetzt:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = -40^\circ \text{ C},$$

Wärmedehnungszahl α_t für Stahl: $12 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{ C}$,

α_t für Holz: $3 \cdot 10^{-6} / ^\circ \text{ C}$.

Tabelle 62. Berechnung der Stabkräfte.

Stab	Werkstoff	$E \cdot 10^{-6}$ [kg/cm ²]	$\alpha_t \cdot 10^6$ [/ ⁰ C]	s [cm]	F [cm ²]	S_1^* [—]	$10^3 \frac{S_1^2 s}{EF}$ [cm/kg]	$10^3 S_1 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta t \cdot s)$ [cm]	S^t [kg]
1	Holz	0,13	3	500	30	-0,959	+0,1177	+ 57,5	-539
2	Stahl	2,2	12	522	1,5	+1	+0,1580	-250,5	+561
3		2,2	12	522	1,5	+1	+0,1580	-250,5	+561
4		0,13	3	500	15	-0,959	+0,2354	+ 57,5	-539
5	Holz	0,13	3	150	10	-0,287	+0,0095	+ 5,2	-161

* Nach Aufgabe 60.

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot \delta_{1,1} &= 10^3 \cdot \delta_{1,0}^t \\ &+ 0,6786 = -380,8 \\ X_1^t &= -\frac{-380,8}{0,6786} \\ &= +561 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die Stabkräfte S^t überlagern sich den in Aufgabe 60, Tabelle 58 berechneten Stabkräften infolge äußerer Last und ursprünglicher Vorspannung.

Aufgabe 68.

Die Abfangstrebe des in Abb. 209 dargestellten Holms sei bei $t_0 = +15^\circ \text{ C}$ vorspannungslos eingebaut. Zu ermitteln ist das Biegemoment des Holms an der Einspannstelle infolge einer gleichzeitigen Abkühlung der Strebe und der Holmunterseite auf $t_1 = -25^\circ \text{ C}$.

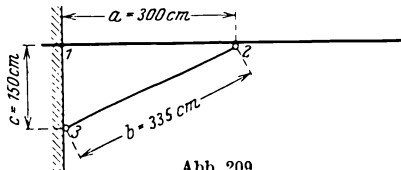


Abb. 209.

Als statisch unbestimmte Größe X_1 wird das Biegemoment am Punkt 1 eingeführt; das statisch bestimmte Hauptsystem entsteht also durch Einschaltung eines Gelenkes in den Holm bei 1.

Am statisch bestimmten Hauptsystem entsteht infolge der ungleichmäßigen Temperaturänderung außer der Längenänderung $\delta b^t = b \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$

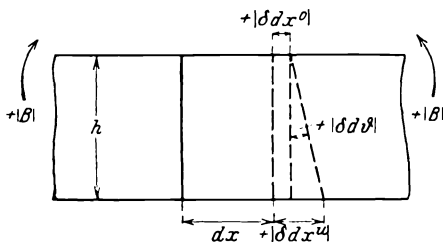


Abb. 210.

der Strebe eine gegenseitige Drehung je zweier benachbarter, um dx voneinander entfernter Holmquerschnitte um

$$\begin{aligned} \delta d \vartheta &= \frac{\delta dx^u - \delta dx^o}{h} \\ &= \frac{\alpha_t \cdot dx \cdot (\Delta t^u - \Delta t^o)}{h} \end{aligned}$$

(Abb. 210), wenn geradlinige Temperaturänderung über die

Holmhöhe vorausgesetzt wird (Δt^u bzw. Δt^o auf Holmunter- bzw. -oberseite; hier ist $\Delta t^u = \Delta t$ und $\Delta t^o = 0$; $\delta d \vartheta$ ist positiv, wenn es im Sinne

eines positiven Biegemoments gerichtet ist).

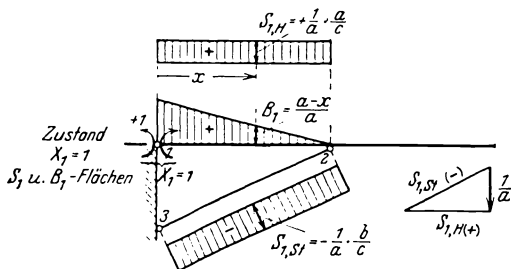


Abb. 211.

Die Elastizitätsgleichung heißt:

heißt:

$$X_1^t \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0}^t = 0.$$

Dabei bedeutet wieder Zustand 1 den Zustand $X_1 = 1$ und Zustand 0 den Formänderungszustand des

Hauptsystems infolge der Temperaturänderung.

Allgemein ist

$$\delta_{i,k} = \sum S_i \cdot \delta s_k + \sum \int B_i \cdot \delta d \vartheta_k.$$

Also nach Abb. 211:

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \sum S_1 \cdot \frac{S_1 \cdot s}{E F} + \int B_1 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{E J} \\ &= S_{1H}^2 \cdot \frac{a}{E_H F_H} + S_{1St}^2 \cdot \frac{b}{E_{St} F_{St}} + \int B_1^2 \cdot \frac{dx}{E_H J_H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1,0}^t &= \sum S_1 \cdot (\alpha_t \cdot \Delta t \cdot s) + \int B_1 \cdot \frac{\alpha_{t,H} \cdot \Delta t \cdot dx}{h} \\ &= S_{1H} \cdot \alpha_{t,H} \cdot a \cdot \frac{\Delta t^*}{2} + S_{1St} \cdot \alpha_{t,St} \cdot \Delta t \cdot b + \left(\frac{\alpha_{t,H} \cdot \Delta t}{h} \right) \cdot \int B_1 \cdot dx. \end{aligned}$$

* Wenn, wie angenommen, ein zentrischer Strebenanschluß vorliegt, geht hier nur die Längenänderung der Holmmittellinie ein, die gleich der halben Längenänderung der Holmunterseite ist.

Tabelle 63. Ausgangswerte der Zahlenrechnung.

	Dimension	Holm	Strebe
		Holz	Stahlrohr
Elastizitätsmodul	[kg/cm ²]	0,13 · 10 ⁶	2 · 10 ⁶
Wärmedehnungszahl	[/° C]	3 · 10 ⁻⁶	12 · 10 ⁻⁶
Fläche	[cm ²]	25	8
Trägheitsmoment	[cm ⁴]	1000	—
Länge	[cm]	300	335
Höhe	[cm]	15	—
Temperaturänderung	[° C]	Δt ^u = - 40	Δt = - 40

Mit den Zahlenwerten der Tabelle 63 und den aus Abb. 211 ersichtlichen Längskräften und Biegemomenten infolge des Zustands X₁= 1 ergibt sich:

$$\delta_{1,1} = + 0,773 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\delta_{1,0}^t = - 117 \cdot 10^{-6},$$

$$X_1^t = - \frac{- 117 \cdot 10^{-6}}{0,773 \cdot 10^{-6}} = + 151 \text{ kgcm}^*.$$

Aufgabe 69: Baldachinholmfeld unter dem Einfluß von Längs- und Querbelastung sowie Temperaturänderung.

Die Stabkräfte und Biegemomente der in Abb. 212 dargestellten Baldachinanordnung sind für den eingezeichneten Belastungszustand zu berechnen. Dabei ist der Einfluß einer Abkühlung des bei t₀ = + 15° C vorspannungslos zusammengebauten Systems auf t₁ = - 25° C in Rechnung zu setzen

(Δt = t₁ - t₀ = - 40° C).

Der Einfluß der exzentrischen Holmanschlüsse, der Holmlängskraft (Knickbiegung) und der Sehnenverkürzung des Holms infolge seiner Durchbiegung soll berücksichtigt werden.

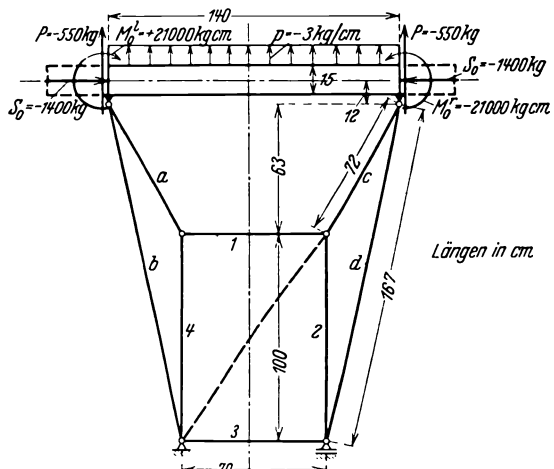


Abb. 212.

* Wenn die Holmunterseite keine Temperaturänderung gegen die Oberseite erfahren würde, sondern die Strebe allein sich um 40° C abkühlte, so würde

$$X_1^t = - \frac{1203 \cdot 10^{-6}}{0,773 \cdot 10^{-6}} = - 1555 \text{ kgcm}.$$

Es wird angenommen, daß die in der Bildebene wirkenden Belastungen in den unteren Rumpfspantpunkten von Diagonalen der Rumpfsseitenwände aufgenommen werden.

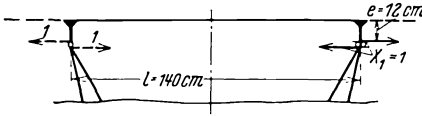


Abb. 213.

Das System ist einfach statisch unbestimmt. Als statisch Unbestimmte X_1 wird die waagerechte Komponente der Auflagerkraft am rechten Holmanschlußpunkt, als

statisch bestimmtes Hauptsystem also das in Abb. 213 dargestellte System eingeführt.

Die Berechnung erfolgt in mehreren Gängen.

Rechnungsgang I.

Entsprechend S. 193 wird zur Berechnung des Holmlabilitätsmaßes $\alpha = l \sqrt{|S|/EJ}$ angenommen, die Gesamt-Holmlängskraft des statisch unbestimmten Systems sei gleich der des statisch bestimmten Hauptsystems infolge äußerer Belastung allein; sie sei also unabhängig von X_1 . Entsprechend wird zur Berechnung der Holmsehnen-Längenänderung

$$\delta l' \sim -\frac{8}{3l} (\delta y^m)^2 + \frac{32}{5l^3} (\delta y^m)^4 \quad (\text{S. 193})$$

angenommen, die Holmdurchbiegung

$$\delta y^m = \frac{pl^4}{EJ} \cdot f_\delta(p) + \frac{M'l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M^l) + \frac{M'l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M^r)$$

in Holmfeld-Mitte am statisch unbestimmten System sei gleich der des Hauptsystems infolge äußerer Belastung allein, also ebenfalls unabhängig von X_1 .

Die Elastizitätsgleichung zur Ermittlung von X_1 in I. Näherung heißt:

$$X_1^I \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0} = 0.$$

Darin bedeutet Zustand 0 den Zustand: Äußere Belastung einschließlich Temperatureinfluß, Zustand 1 den Zustand: $X_1 = 1$, beide wirksam am statisch bestimmten Hauptsystem. Allgemein ist:

$$\delta_{1,0} = \sum_{(1)} S_1 \cdot \left(\frac{S_0 \cdot s}{EF} + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot s \right) + \sum_{(2)} \int B_1 \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \sum_{(3)} S_1 \cdot \delta l',$$

$$\delta_{1,1} = \sum_{(1)} S_1 \cdot \frac{S_1 \cdot s}{EF} + \sum_{(2)} \int B_1 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ}.$$

Die Summen $\sum_{(1)}$ zur Berücksichtigung der Stablängenänderungen infolge der Längskräfte bzw. des Temperatureinflusses erstrecken sich über alle Stäbe, den Holm einbegriffen.

Die Summen $\sum_{(2)}$ zur Berücksichtigung der Verbiegung erstrecken sich hier nur über den Holm. Da darin in den Faktoren $\frac{B_0 \cdot dx}{EJ}$ und $\frac{B_1 \cdot dx}{EJ}$ die Knickbiegung berücksichtigt werden soll, ist nach S. 168 zu setzen:

$$\int B_1 \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} = B_1^l \cdot \tau_0^l - B_1^r \cdot \tau_0^r \quad \text{oder} \quad = M_1^l \cdot \tau_0^l + M_1^r \cdot \tau_0^r,$$

$$\int B_1 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ} = B_1^l \cdot \tau_1^l - B_1^r \cdot \tau_1^r \quad ,, \quad = M_1^l \cdot \tau_1^l + M_1^r \cdot \tau_1^r.$$

Die darin einzusetzenden Holmendneigungen τ_0^l, τ_0^r infolge des Zustands 0 und τ_1^l, τ_1^r infolge des Zustands 1 ergeben sich nach Seite 165 zu:

$$\tau^l = \frac{p l^3}{EJ} \cdot \vartheta^l(p) + \frac{M^l l}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^l) + \frac{M^r l}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^r),$$

$$\tau^r = \frac{p l^3}{EJ} \cdot \vartheta^r(p) + \frac{M^l l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^l) + \frac{M^r l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^r);$$

das Glied mit p gilt nur für Zustand 0; bei τ_0^l, τ_0^r und τ_1^l, τ_1^r ist jedesmal mit $\alpha = l \sqrt{|S_0|/EJ}$ zu rechnen (s. oben).

Die Summe $\sum_{(3)}$ zur Berücksichtigung des Einflusses der Sehnenverkürzung erstreckt sich hier ebenfalls nur über den Holm; sie geht entsprechend den oben gemachten Annahmen nur in das Glied $\delta_{1,0}$ ein.

Tabelle 64. Ausgangswerte der Zahlenrechnung.

Stab	s [cm]	$10^{-6} \cdot EF$ [kg]	S_0 [kg]	S_1 [-]
Holm	140	1,5	-1400	+1
a	72	1,2	-396	-3,34
b	167	2,0	+914	+2,98
c	72	1,2	-396	-3,34
d	167	2,0	+914	+2,98
1	70	1,3	-193	-1,63
2	100	1,3	-344	-2,92
3	70	1,3	+193	+0,63
4	100	1,3	-344	-2,92

$$\alpha_i \begin{cases} \text{für den Holm (Holz)} & = 3 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}, \\ \text{,, die übrigen Stäbe (Stahl)} & = 12 \cdot 10^{-6} \text{ ,,} \end{cases}$$

ferner für den Holm $EJ = 50 \cdot 10^6 \text{ kgcm}^2$,
 $p = -3 \text{ kg/cm}$,
 $M_0^l = +21000 \text{ kgcm}$, $M_1^l = +12 \text{ cm}$,
 $M_0^r = -21000 \text{ ,,}$, $M_1^r = -12 \text{ cm}$.

Mit den in Tabelle 64 zusammengestellten Ausgangswerten ergeben sich folgende Ausdrücke \sum :

$$\text{für } \delta_{1,0}: \sum_{(1)} = +0,657 + 0,052 \text{ cm},$$

$$\sum_{(2)} = +0,565 \text{ cm (entspr. } \alpha = l \sqrt{|S_0|/EJ} = 0,74),$$

$$\sum_{(3)} = -0,012 \text{ ,, (,, } \delta_y^m = 0,78 \text{ cm);}$$

$$\text{für } \delta_{1,1}: \sum_{(1)} = + 4,386 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kg,}$$

$$\sum_{(2)} = + 0,422 \cdot 10^{-3} \quad , \quad (\text{wieder entspr. } \alpha = 0,74).$$

Damit wird in I. Näherung:

$$X_1^I = - \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = - \frac{0,657 + 0,052 + 0,565 - 0,012}{4,386 \cdot 10^{-3} + 0,422 \cdot 10^{-3}} = - 263 \text{ kg.}$$

Rechnungsgang II.

Die Elastizitätsgleichung zur Ermittlung von X_1 in II. Näherung lautet

$$X_1^{II} \cdot \delta_{1,1}^I + \delta_{1,0}^I = 0.$$

Die Berechnung der verbesserten Werte $\delta_{i,k}^I$ erfolgt wie vorher, nur mit dem Unterschied, daß jetzt gesetzt wird:

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S_0 + X_1^I \cdot S_1|}{EJ}} = 0,81 \quad (\text{statt vorher } 0,74).$$

Ferner wird δy^m mit der Holmquerbelastung des statisch unbestimmten Systems,

$$p = - 3,00 \text{ kg/cm,} \quad M^l = M_0^l + X_1^I \cdot M_1^l = + 17860 \text{ kgcm,}$$

$$M^r = M_0^r + X_1^I \cdot M_1^r = - 17860 \quad ,$$

berechnet. So ergibt sich:

$$\delta y^m = 0,61 \text{ cm} \quad (\text{statt vorher } 0,78 \text{ cm}).$$

Dann wird in II. Näherung:

$$X_1^{II} = - \frac{+ 0,657 + 0,052 + 0,569 - 0,007}{4,386 \cdot 10^{-3} + 0,426 \cdot 10^{-3}} = - 264 \text{ kg.}$$

Da dieser Wert praktisch derselbe ist wie beim ersten Rechnungsgang, erübrigen sich weitere Rechnungsgänge.

Die endgültigen Stabkräfte $S = S_0 + X_1^{II} \cdot S_1$ sind dann:

$$\begin{array}{ll} \text{in Stab a und c:} & + 489 \text{ kg,} \\ \text{,, ,, b ,, d:} & + 129 \text{ ,,} \\ \text{,, ,, 1:} & + 237 \text{ ,,} \\ \text{,, ,, 2 ,, 4:} & + 426 \text{ ,,} \\ \text{,, ,, 3:} & + 27 \text{ ,, .} \end{array}$$

Der Holm erhält im statisch unbestimmten System die Längskraft $S = S_0 + X_1^{II} \cdot S_1 = - 1664 \text{ kg}$ (Druck) und die Teilquerbelastungen:

$$\text{verteilte Last} \quad p = - 3 \text{ kg/cm,}$$

$$\text{Einzelmoment links} \quad M^l = M_0^l + X_1^{II} \cdot M_1^l = + 17830 \text{ kgcm,}$$

$$\text{,, rechts} \quad M^r = M_0^r + X_1^{II} \cdot M_1^r = - 17830 \quad , \quad .$$

Aufgabe 70 bis 71: Zwei Beispiele für die zweckmäßige Wahl der statisch unbestimmten Größen.

Aufgabe 70.

Die Beanspruchungen der in Abb. 214 dargestellten Tragwand sind zu ermitteln.

Das System ist wegen der Symmetrie der Belastung und des Aufbaus nur zweifach statisch unbestimmt. Bei Vernachlässigung des Einflusses der Stablängenänderungen gehen in die $\delta_{i,k}$ -Werte nur Biegemomente des Oberholms ein; dieser sei z. B. mit $p^0 = -1 \text{ kg/cm}$ belastet.

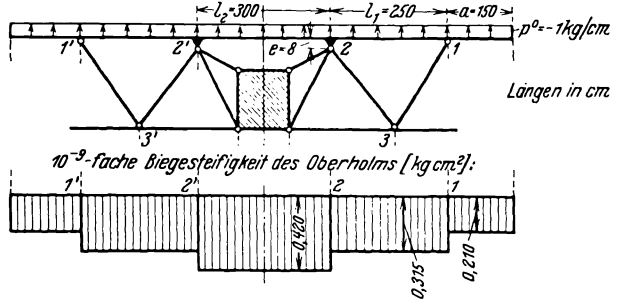


Abb. 214.

Folgende Wahl der Unbekannten liegt nahe (Abb. 215):

X_1 = Strebekräfte in 1, 3 und 1', 3';

X_2 = waagerechte Komponente der in 2 vom Holm auf die Baldachinstreben ausgeübten Kraft.

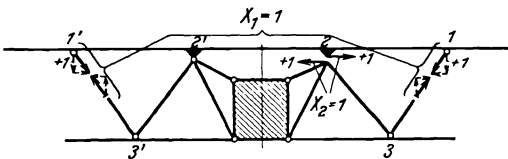


Abb. 215.

Zustand 1

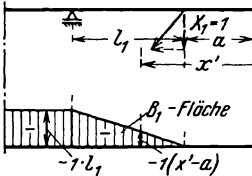


Abb. 217.

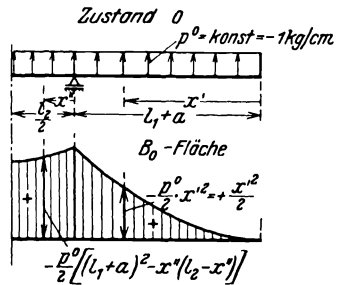


Abb. 216.

Zustand 2

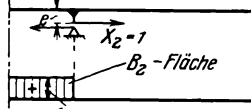


Abb. 218.

Die Abb. 216 bis 218 zeigen die Biegemomentenflächen der Zustände 0, 1, 2.

Nach Ermittlung der Unbekannten X_1 und X_2 entsprechend den vorhergehenden Aufgaben ergeben sich z. B. die Biegemomente im

statisch unbestimmten System zu

$$B = B_0 + X_1 \cdot B_1 + X_2 \cdot B_2;$$

und zwar zahlenmäßig als kleine Differenzen großer Zahlen, wie Abb. 219 zeigt. Da geringe Ungenauigkeiten von X_1 das Gesamtergebnis wesent-

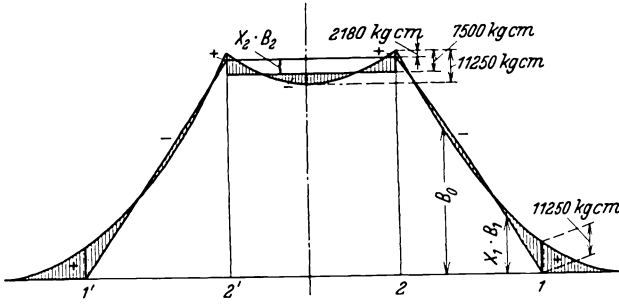


Abb. 219.

lich fälschen und außerdem eine Vorbemessung des Systems auf Grund der Biegemomente des gewählten statisch bestimmten Hauptsystems unmöglich ist, ist die hier vorgenommene Wahl des Hauptsystems schlecht (S. 195).

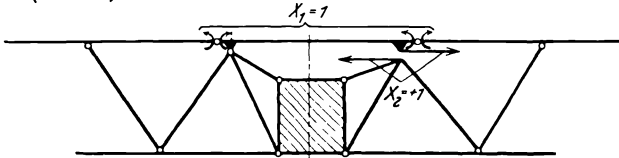


Abb. 220.

Besser ist es, die statisch Unbestimmten und das Hauptsystem entsprechend Abb. 220 einzuführen, also als X_1 die Gruppe der Holm-

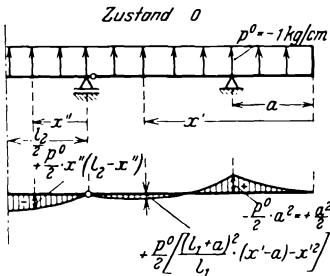


Abb. 221.

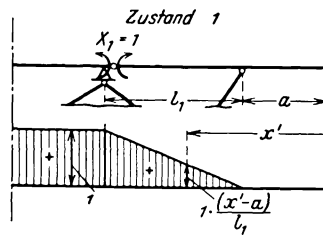


Abb. 222.

biegemomente neben den Baldachinanschlußpunkten zu wählen. Die Abb. 221, 222 und 218 zeigen die Biegemomentenflächen der Zustände 0 bis 2 an diesem statisch bestimmten Hauptsystem.

Nach Ermittlung der Unbekannten X_1 und X_2 ergibt sich entspr. Abb. 223 die Biegemomentenfläche B des statisch unbestimmten Systems.

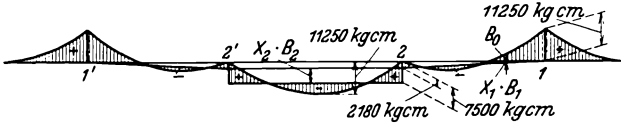


Abb. 223.

Aufgabe 71.

Es sind die Längskräfte und Biegemomente des in Abb. 224 dargestellten ausgesteiften Rahmens zu berechnen.

Das System ist 6-fach statisch unbestimmt. Als statisch Unbestimmte werden nach Abb. 225 die Biegemomente an den einzelnen Stäben gewählt; als statisch bestimmtes Hauptsystem dient also das in Abb. 225 dargestellte Gelenkfachwerk.

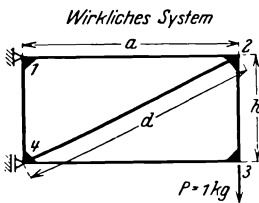


Abb. 224.

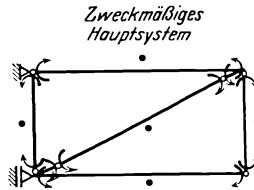


Abb. 225.

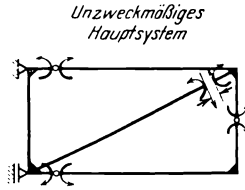


Abb. 226.

Es wäre verfehlt, ein Hauptsystem nach Abb. 226 in der naheliegenden Weise einzuführen, daß die Stäbe durchschnitten und der verbleibende Rahmen durch Einführung von drei Gelenken statisch bestimmt gemacht wird; denn dadurch würde gegenüber dem wirklichen Fachwerksystem ein sehr weiches Hauptsystem (3-Gelenkrahmen) entstehen; die wirklichen Beanspruchungen würden sich dann wieder ähnlich wie in voriger Aufgabe als kleine Differenzen großer Zahlen mit großen Fehlermöglichkeiten ergeben.

Zur Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Systems (unter Voraussetzung gleicher Bemessung gegenüberliegender Stäbe!) werden die aus Abb. 227 ersichtlichen Gruppen $X_1 \div X_6$ der statisch unbestimmten Biegemomente als Unbekannte in die Elastizitätsgleichungen eingeführt.

Abb. 227 bzw. Tabelle 65 zeigen die Biegemomentenflächen bzw. die Längskräfte der einzelnen Stäbe des gewählten statisch bestimmten Hauptsystems infolge der Zustände $X_i = 1$ ($i = 1 \div 6$) und infolge äußerer Belastung. In Abb. 227 sind an den Knotenpunkten diejenigen

(Aktions-)Kräfte eingetragen, welche die mit $X_1 \div X_6$ belasteten Stäbe auf das Fachwerk ausüben. Die Querkraftflächen sind nicht gezeichnet.

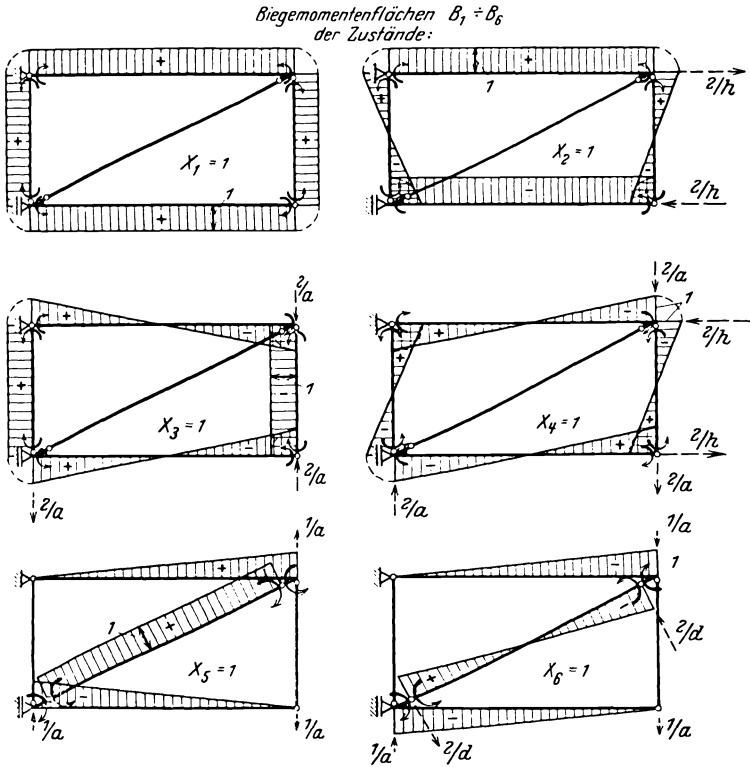


Abb. 227. (Infolge äußerer Belastung allein treten im statisch bestimmten Hauptsystem keine Biegemomente und Querkräfte, sondern nur Längskräfte auf; vgl. Tabelle 65.)

Tabelle 65. Stabkräfte infolge $P=1 \text{ kg}$ und $X_i=1$ ($i=1 \div 6$).

Stab	S_0 [kg]	S_1 [cm ⁻¹]	S_2 [cm ⁻¹]	S_3 [cm ⁻¹]	S_4 [cm ⁻¹]	S_5 [cm ⁻¹]	S_6 [cm ⁻¹]
1 ÷ 2	$+\frac{a}{h}$	—	$+\frac{2}{h}$	—	$+\frac{2}{h}$	—	—
2 ÷ 3	+ 1	—	—	$-\frac{2}{a}$	$+\frac{2}{a}$	$+\frac{1}{a}$	$+\frac{1}{a}$
3 ÷ 4	—	—	$-\frac{2}{h}$	—	$+\frac{2}{h}$	—	—
4 ÷ 1	+ 1	—	—	$+\frac{2}{a}$	$-\frac{2}{a}$	$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$
2 ÷ 4	$-\frac{d}{h}$	—	—	—	$-\frac{4d}{a \cdot h}$	—	$-\frac{2h}{a \cdot d}$

Die endgültigen Längskräfte und Biegemomente folgen nach Berechnung der Unbekannten dann wie früher aus:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + \dots + X_6 \cdot S_6,$$

$$B = B_0 + X_1 \cdot B_1 + \dots + X_6 \cdot B_6. \quad (B_0 = 0!)$$

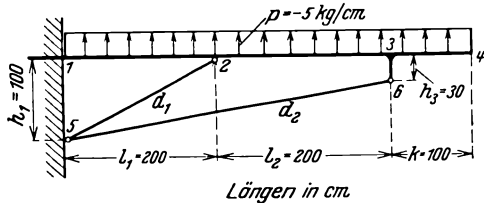
Im vorliegenden Fall können die Anteile $\sum S_i \cdot \frac{S_k \cdot s}{EF}$ und $\sum \int Q_i \cdot \frac{Q_k \cdot dx}{GF'}$ in den Beiwerten der Unbekannten gegenüber den Anteilen $\sum \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$ vernachlässigt werden. Dagegen muß $\sum S_i \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF}$ bei den Lastwerten $\delta_{i,0}$ beachtet werden, da keine Ausdrücke $\int B_i \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ}$ vorhanden sind, gegen die die Ausdrücke $\sum S_i \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF}$ vernachlässigt werden könnten ($Q_0 = 0$). Die Beiwerte $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}, \delta_{1,3} = \delta_{3,1}, \delta_{1,4} = \delta_{4,1}, \delta_{1,5} = \delta_{5,1}, \delta_{2,3} = \delta_{3,2}, \delta_{2,4} = \delta_{4,2}, \delta_{2,6} = \delta_{6,2}, \delta_{3,4} = \delta_{4,3}, \delta_{3,6} = \delta_{6,3}, \delta_{4,5} = \delta_{5,4}, \delta_{5,6} = \delta_{6,5}$ fallen fort, da sie durch Kombination symmetrischer und antisymmetrischer Beanspruchungszustände des statisch bestimmten Hauptsystems entstehen (vgl. Aufgabe 61).

§ 17. Durchlaufende Holme auf mehreren Stützen.

Aufgabe 72: Einseitig eingespannter zweifach abgestrebter Holm.

Bei dem in Abb. 228 dargestellten zweifach abgestrebt und am linken Ende eingespannten Holm sind die Biegemomente und Stabkräfte zu ermitteln; dabei ist der Einfluß der Knickbiegung und der Sehnenverkürzung der Holmfelder zu berücksichtigen.

Das System ist zweifach statisch unbestimmt. Als statisch Unbestimmte werden die „Stützenmomente“ X_1 und X_2 an den Stellen 1 und 2 eingeführt. Als statisch bestimmtes Hauptsystem dient das in Abb. 229 dargestellte System, das also aus 2 Balken auf je 2 Stützen besteht (s. Aufgabe 28*).



Längen in cm
Abb. 228.

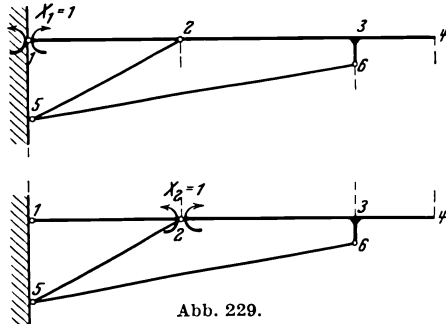


Abb. 229.

* Die Knotenpunkte sind in Abb. 228 und 229 anders beziffert als in Aufgabe 28, um zu vermeiden, daß die Angriffsstellen von X_1 bzw. X_2 die Bezifferung 0 bzw. 1 erhalten.

systems entstehenden Elastizitätsgleichungen werden als „Clapeyronsche Gleichungen“ bezeichnet. Die Rechnung erfolgt zur Berücksichtigung der Knickbiegung, ähnlich wie bei Aufgabe 69, in mehreren Gängen (vgl. z. B. 13, 28, 31, 36, 40).

Rechnungsgang I.

Entsprechend S. 192 wird zur Berechnung der Labilitätsmaße $\alpha = l \sqrt{|S|/EJ}$ der Holmfelder angenommen, die Gesamtlängskräfte der Holmfelder des statisch unbestimmten Systems seien gleich denen, die sich am statisch bestimmten Hauptsystem infolge äußerer Belastung allein, also unabhängig von X_1 und X_2 , ergeben. Entsprechend wird zur Berechnung der Holmsehnen-Längenänderungen

$$\delta l' \sim -\frac{8}{3l}(\delta y^m)^2 + \frac{32}{5l^3}(\delta y^m)^4$$

angenommen, daß am statisch unbestimmten System die Holmdurchbiegungen

$$\delta y^m = \frac{p l^4}{EJ} \cdot f_\delta(p) + \frac{M l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M^l) + \frac{M^r l^2}{EJ} \cdot f_\delta(M^r)$$

in den Feldmitten gleich denen des Hauptsystems infolge äußerer Belastung allein, also ebenfalls unabhängig von X_1 und X_2 , seien.

Die Elastizitätsgleichungen zur Ermittlung von X_1 und X_2 in I. Näherung lauten dann:

$$\begin{aligned} X_1^I \cdot \delta_{1,1} + X_2^I \cdot \delta_{1,2} + \delta_{1,0} &= 0 \\ X_1^I \cdot \delta_{2,1} + X_2^I \cdot \delta_{2,2} + \delta_{2,0} &= 0. \end{aligned}$$

Darin bedeutet Zustand 0 bzw. 1 bzw. 2 den Zustand „äußere Belastung“ bzw. „ $X_1 = 1$ “ bzw. „ $X_2 = 1$ “, jeweils allein am Hauptsystem.

Allgemein gilt für die Lastwerte:

$$\delta_{i,0} = \sum_{(1)} S_i \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} + \sum_{(2)} \int B_i \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} + \sum_{(3)} S_i \cdot \delta l'$$

und für die Beiwerte der Unbekannten:

$$\delta_{i,k} = \sum_{(1)} S_i \cdot \frac{S_k \cdot s}{EF} + \sum_{(2)} \int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}.$$

Die Summen $\sum_{(1)}$ zur Berücksichtigung des Einflusses der Stablängenänderungen erstrecken sich über alle Stäbe einschließlich der Holme; die Summen $\sum_{(2)}$ zur Berücksichtigung der Holmverbiegung und die Summen $\sum_{(3)}$ zur Berücksichtigung des Einflusses der Holmfeld-Sehnenverkürzungen erstrecken sich nur über die Holmfelder. Da in den Faktoren $\frac{B_0 \cdot dx}{EJ}$, $\frac{B_1 \cdot dx}{EJ}$, $\frac{B_2 \cdot dx}{EJ}$ die Knickbiegung berücksichtigt werden soll, so ist für Bei- und Lastwerte zu setzen:

$$\int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} = B_i^l \cdot \tau_k^l - B_i^r \cdot \tau_k^r \quad \text{oder} \quad M_i^l \cdot \tau_k^l + M_i^r \cdot \tau_k^r.$$

Die darin eingehenden Holmendneigungen τ_k^l, τ_k^r ergeben sich nach S. 165 zu:

$$\tau_k^l = \frac{p l^3}{EJ} \cdot \vartheta^l(p) + \frac{M_k^l l}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^l) + \frac{M_k^r l}{EJ} \cdot \vartheta^l(M^r),$$

$$\tau_k^r = \frac{p l^3}{EJ} \cdot \vartheta^r(p) + \frac{M_k^l l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^l) + \frac{M_k^r l}{EJ} \cdot \vartheta^r(M^r);$$

das Glied mit p gilt nur für Zustand 0; bei allen Zuständen $k = 0, 1, 2$ ist mit $\alpha = l \sqrt{\frac{|S_0|}{EJ}}$ zu rechnen.

Tabelle 66. Stabkräfte, Stablängen und Stabsteifigkeiten.

Stab	S_0^* [kg]	S_1 [cm ⁻¹]	S_2 [cm ⁻¹]	s [cm]	$EF \cdot 10^{-6}$ [kg]	$EJ \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]
1 ÷ 2	-6250	+0,01	0	200	4,50	80
2 ÷ 3	-3460	0	+0,0154	200	4,50	80
2 ÷ 5	+3125	-0,0112	+0,0172	223,6	3,00	—
5 ÷ 6	+3510	0	-0,0156	406	1,70	—

Nach Tabelle 66 werden die Summen $\sum_{(1)}$:

$$\sum_{(1)} S_1 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} = -5,39 \cdot 10^{-3} [-],$$

$$\sum_{(1)} S_2 \cdot \frac{S_0 \cdot s}{EF} = -11,45 \cdot 10^{-3} [-],$$

$$\sum_{(1)} S_1 \cdot \frac{S_1 \cdot s}{EF} = +0,0138 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\sum_{(1)} S_2 \cdot \frac{S_2 \cdot s}{EF} = +0,0908 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\sum_{(1)} S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot s}{EF} = -0,0144 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}.$$

Zur Ermittlung der Summen $\sum_{(2)}$ und $\sum_{(3)}$ dienen die Tabellen 67 bis 69.

Tabelle 67. Querbelastung der Holmfelder als Einzelbalken.

Feld	Zust. „0“	Zust. „ $X_1=1$ “	Zust. „ $X_2=1$ “
1 ÷ 2	$p = -5 \text{ kg/cm}$	$M_{1 \div 2,1}^l = +1$	$M_{1 \div 2,2}^r = -1$
2 ÷ 3	$p = -5 \text{ kg/cm}$ $M_{2 \div 3,0}^r = p \cdot \frac{l^2}{2} - S_{2 \div 3,0} \cdot h_3$ $= +78800 \text{ kgcm}$		$M_{2 \div 3,2}^l = +1$ $M_{2 \div 3,2}^r = -S_{2 \div 3,2} \cdot h_3$ $= -0,462$

* Siehe Aufgabe 28.

Tabelle 68. Werte τ^i und τ^r .

Feld	Wert	Zust. „0“	Zust. „ $X_1=1$ “	Zust. „ $X_2=1$ “
1÷2	$\frac{EJ}{l_1} \cdot \tau^i$	$p l_1^2 \cdot \vartheta^i(p)$	$M_1^i \cdot \vartheta^i(M^i)$	$M_2^r \cdot \vartheta^i(M^r)$
	$\frac{EJ}{l_1} \cdot \tau^r$	$p l_1^2 \cdot \vartheta^r(p)$	$M_1^i \cdot \vartheta^r(M^i)$	$M_2^r \cdot \vartheta^r(M^r)$
2÷3	$\frac{EJ}{l_2} \cdot \tau^i$	$p l_2^2 \cdot \vartheta^i(p) + M_0^r \cdot \vartheta^i(M^r)$	—	$M_2^i \cdot \vartheta^i(M^i) + M_2^r \cdot \vartheta^i(M^r)$
	$\frac{EJ}{l_2} \cdot \tau^r$	$p l_2^2 \cdot \vartheta^r(p) + M_0^r \cdot \vartheta^r(M^r)$	—	$M_2^i \cdot \vartheta^r(M^i) + M_2^r \cdot \vartheta^r(M^r)$

Tabelle 69. Werte α und ϑ^i bzw. ϑ^r der Holmfelder und Werte f_δ für die Holmfeldmitten (nach Anhang, Tabelle 100÷102).

Feld	$\alpha = \sqrt{ S_0 /EJ}$	$\frac{\vartheta^i(M^i)}{= \vartheta^r(M^r)}$	$\frac{\vartheta^i(M^r)}{= \vartheta^r(M^i)}$	$\frac{\vartheta^i(p)}{= -\vartheta^r(p)}$	$f_\delta(M^i)$	$f_\delta(M^r)$	$f_\delta(p)$
1÷2	1,77	+0,434	-0,258	+0,0609	+0,0924	-0,0924	+0,0191
2÷3	1,32	+0,379	-0,207	+0,0503	+0,0763	-0,0763	+0,0158

Damit wird:

$$\sum_{(2)} \int B_1 \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} = - 30,5 \cdot 10^{-3} [-], \quad \sum_{(2)} \int B_1 \cdot \frac{B_1 \cdot dx}{EJ} = 1,09 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\sum_{(2)} \int B_2 \cdot \frac{B_0 \cdot dx}{EJ} = - 142,8 \cdot 10^{-3} [-], \quad \sum_{(2)} \int B_2 \cdot \frac{B_2 \cdot dx}{EJ} = 2,71 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\sum_{(2)} \int B_1 \cdot \frac{B_2 \cdot dx}{EJ} = 0,645 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}.$$

Ferner ergibt sich

$$\text{in Feld } 1\div 2: \delta y_0^m = - 100,0 \cdot 0,0191 = - 1,91 \text{ cm},$$

$$\text{in Feld } 2\div 3: \delta y_0^m = - 100,0 \cdot 0,0158 + 39,4 (-0,0763) = - 4,58 \text{ cm};$$

also

$$\text{in Feld } 1\div 2: \delta l' = - 48,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm};$$

$$\text{in Feld } 2\div 3: \delta l' = - 280 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

$$\sum_{(3)} S_1 \cdot \delta l' = - 0,486 \cdot 10^{-3} [-],$$

$$\sum_{(3)} S_2 \cdot \delta l' = - 4,30 \cdot 10^{-3} [-].$$

Tabelle 70. Bei- und Lastwerte der Elastizitätsgleichungen.

10 ⁶ -fache Beiwerte von		10 ⁶ -fache Lastwerte
X_1^I	X_2^I	
1,104	0,631	- 36400
0,631	2,801	- 158600

Mit den aus Tabelle 70 ersichtlichen Bei- und Lastwerten der Elastizitätsgleichungen ergeben sich schließlich die gesuchten Größen:

$$X_1^I = + 820 \text{ kgcm},$$

$$X_2^I = + 56300 \text{ kgcm}.$$

Rechnungsgang II.

Die Elastizitätsgleichungen für X_1 und X_2 in II. Näherung lauten:

$$X_1^{II} \cdot \delta_{1,1}^I + X_2^{II} \cdot \delta_{1,2}^I + \delta_{1,0}^I = 0,$$

$$X_1^{II} \cdot \delta_{2,1}^I + X_2^{II} \cdot \delta_{2,2}^I + \delta_{2,0}^I = 0.$$

Die Berechnung der Werte $\delta_{i,k}^I$ erfolgt wie vorher, nur mit dem Unterschied, daß jetzt gesetzt wird:

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S_0 + X_1^I \cdot S_1 + X_2^I \cdot S_2|}{EJ}}, \quad \text{d. h.}$$

in Feld 1÷2: $\alpha = 1,77,$

in Feld 2÷3: $\alpha = 1,14.$

Ferner werden zur Berechnung der Holmfeld-Sehnenverkürzungen die Durchbiegungen δy^m unter Beachtung der durch X_1^I und X_2^I verbesserten Holmquerbelastungen neu berechnet:

In Feld 1÷2:

$$p = -5 \text{ kg/cm}; \quad M_{1\div 2}^I = X_1^I \cdot M_{1\div 2,1}^I; \quad M_{1\div 2}^r = X_2^I \cdot M_{1\div 2,2}^r;$$

in Feld 2÷3:

$$p = -5 \text{ kg/cm}; \quad M_{2\div 3}^I = X_2^I \cdot M_{2\div 3,2}^I; \quad M_{2\div 3}^r = M_{2\div 3,0}^r + X_2^I \cdot M_{2\div 3,2}^r.$$

Dann wird

in Feld 1÷2: $\delta y^m = +0,73 \text{ cm},$

in Feld 2÷3: $\delta y^m = -1,38 \text{ cm}.$

Es ergibt sich in II. Näherung:

$$X_1^{II} = + 2200 \text{ kgcm},$$

$$X_2^{II} = + 53400 \text{ kgcm}.$$

Diese Werte werden als endgültig angesehen; denn X_2^{II} ist von X_2^I nur wenig verschieden und die verhältnismäßig große Änderung von X_1 besagt nichts, da X_1 (absolut) klein ist.

Dann folgen die endgültigen Stabkräfte des zweifach statisch unbestimmten Systems aus $S = S_0 + X_1^{II} \cdot S_1 + X_2^{II} \cdot S_2$ zu:

$$S_{1\div 2} = -6230 \text{ kg}, \quad S_{2\div 5} = +4020 \text{ kg},$$

$$S_{2\div 3} = -2640 \text{ kg}, \quad S_{5\div 6} = +2680 \text{ kg}.$$

Die Querbelastungen der beiden Holmfelder (laufende Last p und biegende Endmomente $M = M_0 + X_1^{II} \cdot M_1 + X_2^{II} \cdot M_2$) sind

in Feld 1÷2:

$$p = -5 \text{ kg/cm}; \quad M_{1\div 2}^I = + 2200 \text{ kgcm}; \quad M_{1\div 2}^r = -53400 \text{ kgcm};$$

in Feld 2÷3:

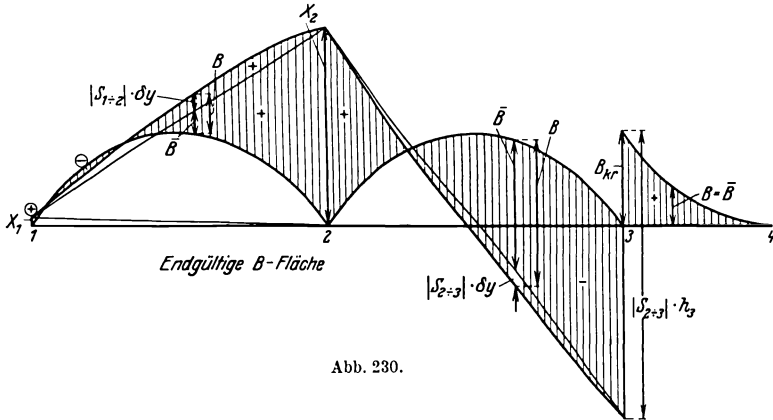
$$p = -5 \text{ kg/cm}; \quad M_{2\div 3}^I = + 53400 \text{ kgcm}; \quad M_{2\div 3}^r = + 54200 \text{ kgcm}.$$

Die endgültigen Labilitätsmaße α werden dann

in Feld 1÷2: $\alpha = 1,77,$

in Feld 2÷3: $\alpha = 1,15.$

Damit ergibt sich die in Abb. 230 dargestellte Knickbiegemomentenfläche für den Holm (vgl. hierzu Aufgabe 55).



Bemerkung 1: Die in diesem Beispiel getroffene Wahl des exzentrischen Anschlusses der Strebe 5÷6 ist für den Holm konstruktiv ungünstig. Günstigere Biegemomentenverteilung (kleinere Spitzenwerte) lassen sich durch geeignetere Wahl von exzentrischen Anschlüssen in den Punkten 2 und 3 erreichen.

Bemerkung 2: Nehmen die Holmlängskräfte solche Werte an, daß die (von α und somit von S abhängige) Nennerdeterminante der Elastizitätsgleichungen verschwindet, so ergeben sich unendlich große Stützenmomente und Formänderungen („Knickung“ vgl. Kapitel IV).

Liegt der Sonderfall vor, daß in einem Holmfeld das Labilitätsmaß α den Wert π („Eulerlast“) annimmt, so werden die Bei- und Lastwerte der obengenannten Elastizitätsgleichungen z. T. unendlich groß; es ergeben sich aber trotzdem im allgemeinen endliche Beanspruchungen und Formänderungen des ganzen Systems (vgl. hierzu Teichmann⁴⁰; s. auch die Anm. auf S. 165).

Aufgabe 73: In sechs Punkten elastisch gestützter Höhenruderholm.

Bei dem in Abb. 231 dargestellten Höhenleitwerk sind die Beanspruchungen des Ruder- und des Flossenholms zu ermitteln.

Das System ist allgemein vierfach statisch unbestimmt; als statisch Unbestimmte werden die Stützenmomente an den Stellen 1, 2, 3, 4 des Ruderholms eingeführt; das statisch bestimmte Hauptsystem entsteht demnach durch Einschalten von Gelenken an diesen Stellen 1, 2, 3, 4, es ist also eine Folge von 5 Einzelbalken auf je 2 Stützen (Abb. 232).

Zur Ausnutzung der Symmetrie werden in die Elastizitätsgleichungen als Unbekannte die aus Abb. 233 ersichtlichen Gruppen $X_1 \div X_4$ der Holmstützenmomente eingeführt. Bei symmetrischer Belastung wird

$X_3 = X_4 = 0$, bei antisymmetrischer Belastung wird $X_1 = X_2 = 0$, so daß je nach dem Belastungsfall nur zwei Unbekannte zu berechnen bleiben.

Infolge der einzelnen Belastungszustände 0÷4 ergeben sich in den Holmen Biegemomente und für die Berechnung der Unbestimmten vernachlässigbare Querkräfte; im Flossenholm treten infolge seiner Abstrebung außerdem noch Längskräfte auf. Ferner werden die Holme bei Zustand 0 auf Drillung beansprucht.

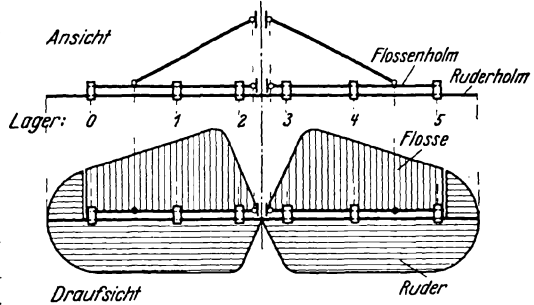


Abb. 231. Die Holme sind in der Ansicht so dargestellt, als ob sie untereinander lägen, da sonst der Flossenholm vom Ruderholm verdeckt würde.

Infolge der Grundrißform des Leitwerks und der darüber ungleichmäßig verteilten Flächenbelastung werden die Q - und B -Flächen unregelmäßig; insbesondere gilt dies für den Flossenholm, auf den neben der Flossenbelastung durch Luftkräfte noch die Auflagerkräfte des Ruderholms als Aktionskräfte wirken. Daher empfiehlt es sich, zumindest die Lastwerte $\delta_{i,0}$ der Elastizitätsgleichungen ähnlich wie in Aufgabe 45 durch numerische Integration der $\frac{B_i \cdot B_0}{EJ} \cdot dx$ -Flächen zu ermitteln.

(Sofern die im Flossenholm auftretende Knickbiegung berücksichtigt werden soll, ist entsprechend Aufgabe 69 und 72 in mehreren Gängen zu rechnen. Die Teilintegrale $\int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ}$ der Flossenholmfelder werden dann wie in Aufgabe 69 und 72 nach der Formel

$$\int B_i \cdot \frac{B_k \cdot dx}{EJ} = M_i^! \cdot \tau_k^! + M_i^r \cdot \tau_k^r$$

berechnet.)

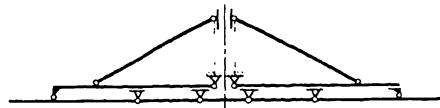


Abb. 232.

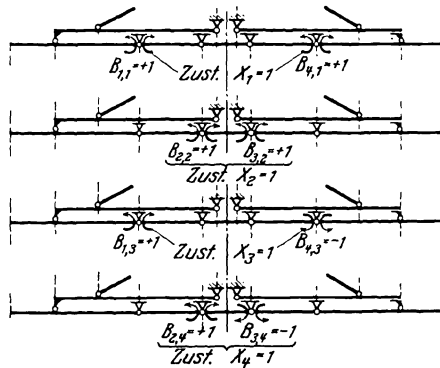


Abb. 233.

§ 18. Zweiholmige Flügel mit Verbundrippen.

Aufgabe 74: Freitragender Flügel mit einer bzw. zwei überzähligen Verbundrippen.

Bei dem in Abb. 234 dargestellten freitragenden Flügel sind die Biege- und Drillmomentenflächen der Holme unter Berücksichtigung des Einflusses der Rippenverbundwirkung zu berechnen.

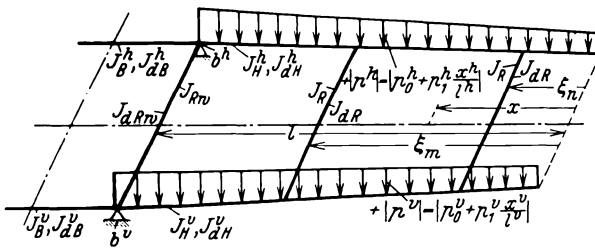


Abb. 234.

Unter Verbundrippen werden im Gegensatz zu gewöhnlichen Formrippen solche Verbindungsglieder zwischen den Flügelholmen verstanden, die wesentliche Kräfte und Momente von einem Holm zum anderen zu übertragen vermögen.

Im vorliegenden Beispiel sind nur zwei solcher Verbundrippen eingeführt, um das Wesen ihrer Wirkungsweise zu erläutern. Bei Vorhandensein mehrerer Verbundrippen geschieht die Berechnung sinngemäß mit mehr Unbekannten; die Last- und Beiwerte der Elastizitätsgleichungen werden mittels der im Beispiel angegebenen allgemein gültigen geschlossenen Formeln gefunden (vgl. auch die im Schrifttum unter 45 ÷ 55 sowie 40 genannten Arbeiten).

In dieser Aufgabe werden die Abszissen x und ξ im Kragfeld vom Flügelende aus, also von rechts nach links positiv gemessen.

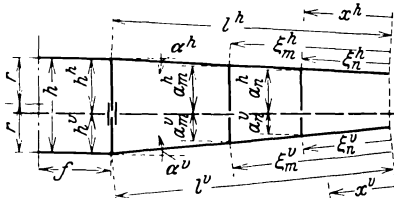


Abb. 235.

Der Sinn positiver bzw. negativer Biege- und Drillmomente ist aus Abb. 236 ersichtlich.

Unter Voraussetzung von zur Flugzeuglängsachse symmetrischer Belastung und Systemausbildung ist der Flügelrost für lotrechte Belastung 6-fach statisch unbestimmt, wenn angenommen wird,

daß die Wurzelrippen keine Drillung aufnehmen können. Als statisch Unbestimmte X_{1m} , X_{2m} , X_{3m} bzw. X_{1n} , X_{2n} , X_{3n} werden die Querkraften, Biegemomente und Drillmomente an je einer beliebigen Schnittstelle der beiden Rippen bei ξ_m und ξ_n eingeführt. Als statisch bestimm-

tes Hauptssystem dient also das aus Abb. 235 ersichtliche System, bei dem die beiden überzähligen Rippen aufgeschnitten sind. (Die biege- steifen Wurzelrippen sind zur Stabilität des Hauptsystems notwendig.)

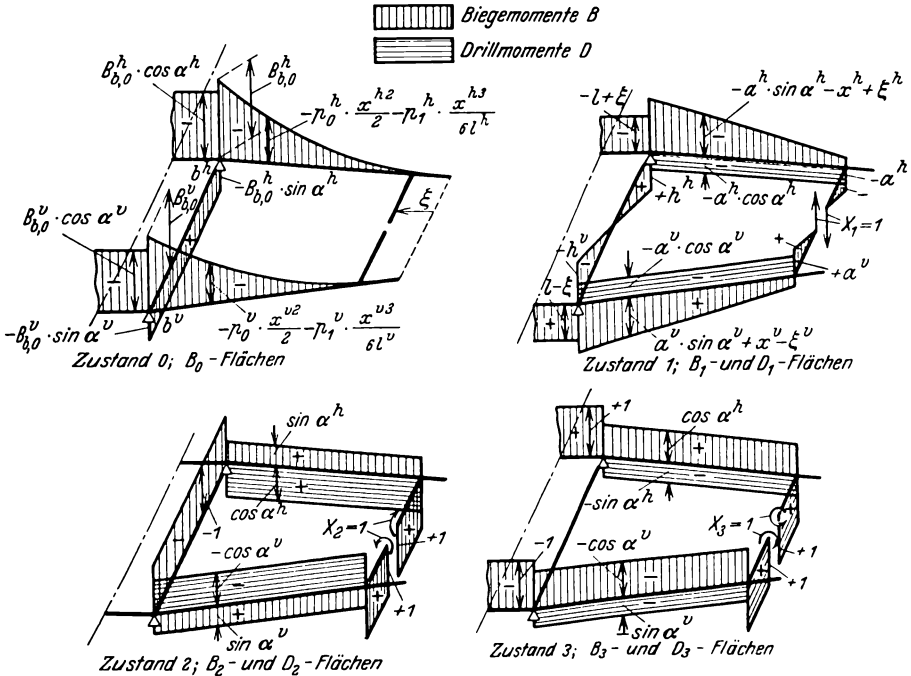


Abb. 236.

Für den Fall zweier überzähliger Rippen sind die Bei- und Lastwerte der sechs Elastizitätsgleichungen in Tabelle 71 zusammengestellt.

Tabelle 71. Bei- und Lastwerte der Elastizitätsgleichungen.

Beiwerte von			Lastwerte			
X_{1m}	X_{2m}	X_{3m}	X_{1n}	X_{2n}	X_{3n}	
$\delta_{1m, 1m}$	$\delta_{1m, 2m}$	$\delta_{1m, 3m}$	$\delta_{1m, 1n}$	$\delta_{1m, 2n}$	$\delta_{1m, 3n}$	$\delta_{1m, 0}$
$\delta_{2m, 1m}$	$\delta_{2m, 2m}$	$\delta_{2m, 3m}$	$\delta_{2m, 1n}$	$\delta_{2m, 2n}$	$\delta_{2m, 3n}$	$\delta_{2m, 0}$
$\delta_{3m, 1m}$	$\delta_{3m, 2m}$	$\delta_{3m, 3m}$	$\delta_{3m, 1n}$	$\delta_{3m, 2n}$	$\delta_{3m, 3n}$	$\delta_{3m, 0}$
$\delta_{1n, 1m}$	$\delta_{1n, 2m}$	$\delta_{1n, 3m}$	$\delta_{1n, 1n}$	$\delta_{1n, 2n}$	$\delta_{1n, 3n}$	$\delta_{1n, 0}$
$\delta_{2n, 1m}$	$\delta_{2n, 2m}$	$\delta_{2n, 3m}$	$\delta_{2n, 1n}$	$\delta_{2n, 2n}$	$\delta_{2n, 3n}$	$\delta_{2n, 0}$
$\delta_{3n, 1m}$	$\delta_{3n, 2m}$	$\delta_{3n, 3m}$	$\delta_{3n, 1n}$	$\delta_{3n, 2n}$	$\delta_{3n, 3n}$	$\delta_{3n, 0}$

Im Sonderfall nur einer Rippe bei ξ_m bzw. ξ_n gilt nur das stärker bzw. nur das schwächer umrahmte Teilschema.

Die Biege- und Drillmomentenflächen infolge äußerer Belastung bzw. $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ sind aus Abb. 236, die für eine an beliebiger Stelle ξ gelegene überzählige Rippe gilt, ersichtlich. Querkrafteinflüsse werden vernachlässigt.

Bedeutet z. B. B_{kn} bzw. D_{kn} das Biege- bzw. Drillmoment an irgend einer Stelle infolge $X_{kn} = 1$, so ist z. B.

$$\delta_{i m, k n} = \sum \int B_{i m} \cdot \frac{B_{k n} \cdot dx}{EJ} + \sum \int D_{i m} \cdot \frac{D_{k n} \cdot dx}{GJ_d}.$$

Im folgenden wird abkürzend gesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{EJ_H^h} &= dx'^h; & \frac{dx}{EJ_H^v} &= dx'^v; & \frac{dx}{EJ_B^h} &= dx''^h; & \frac{dx}{EJ_B^v} &= dx''^v; & \frac{dx}{EJ_R} &= dx'_R; \\ \frac{dx}{EJ_{Rw}} &= dx'_{Rw}; & \frac{dx}{GJ_{dH}^h} &= dx''^h; & \frac{dx}{GJ_{dH}^v} &= dx''^v; & \frac{dx}{GJ_{dR}} &= dx''_R. \end{aligned}$$

Hierin bedeuten EJ_H^h , EJ_H^v , EJ_B^h , \dots , GJ_{dH}^h , GJ_{dH}^v , \dots die Biege- bzw. Drillsteifigkeiten der Hinter- bzw. Vorder- bzw. Baldachinholme bzw. der Rippen R und R_w (vgl. Abb. 234).

Dann ergeben sich die im folgenden zusammengestellten allgemeinen Ausdrücke für die Last- und Beiwerte der Elastizitätsgleichungen.

Lastwerte:

(Die verteilte Querbelastung der Holme im Baldachinfeld wird vernachlässigt; im Kragfeld wirken:

$$p^h = p_0^h + p_1^h \cdot \frac{x^h}{l^h}, \quad p^v = p_0^v + p_1^v \cdot \frac{x^v}{l^v};$$

vgl. Abb. 234.)

$$\begin{aligned} \delta_{1 m, 0} &= \int_{\xi_m^h}^{l^h} \left[(a_m^h \cdot \sin \alpha^h - \xi_m^h) \left(\frac{p_0^h}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^h}{6l^h} \cdot x^3 \right) + \frac{p_0^h}{2} \cdot x^3 + \frac{p_1^h}{6l^h} \cdot x^4 \right] dx'^h \\ &- \int_{\xi_m^v}^{l^v} \left[(a_m^v \cdot \sin \alpha^v - \xi_m^v) \left(\frac{p_0^v}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^v}{6l^v} \cdot x^3 \right) + \frac{p_0^v}{2} \cdot x^3 + \frac{p_1^v}{6l^v} \cdot x^4 \right] dx'^v \\ &+ \int_{-r}^{+r} \left\{ \frac{1}{12r} [l^{h2} \sin \alpha^h \cdot (3p_0^h + p_1^h) - l^{v2} \sin \alpha^v \cdot (3p_0^v + p_1^v)] \left(\frac{h^h - h^v}{2} \cdot x + x^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} [l^{h2} \sin \alpha^h \cdot (3p_0^h + p_1^h) + l^{v2} \sin \alpha^v \cdot (3p_0^v + p_1^v)] \left(\frac{h^h - h^v}{2} + x \right) \right\} dx'_{Rw} \\ &+ \frac{l^{h2}}{6} (l - \xi_m) (3p_0^h + p_1^h) \cos \alpha^h \cdot \int_0^l dx'_B^h \\ &- \frac{l^{v2}}{6} (l - \xi_m) (3p_0^v + p_1^v) \cos \alpha^v \cdot \int_0^l dx'_B^v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2m,0} = & -\sin \alpha^h \cdot \int_{\xi_m^h}^{l^h} \left(\frac{p_0^h}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^h}{6l^h} \cdot x^3 \right) \cdot dx'^h \\ & - \sin \alpha^v \cdot \int_{\xi_m^v}^{l^v} \left(\frac{p_0^v}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^v}{6l^v} \cdot x^3 \right) \cdot dx'^v \\ & - \frac{1}{12} \int_{-r}^{+r} \left\{ [l^{h^2} \sin \alpha^h \cdot (3p_0^h + p_1^h) + l^{v^2} \sin \alpha^v \cdot (3p_0^v + p_1^v)] \right. \\ & \quad \left. + [l^{h^2} \sin \alpha^h \cdot (3p_0^h + p_1^h) - l^{v^2} \sin \alpha^v \cdot (3p_0^v + p_1^v)] \frac{x}{r} \right\} dx'_{Rw}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{3m,0} = & -\cos \alpha^h \cdot \int_{\xi_m^h}^{l^h} \left(\frac{p_0^h}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^h}{6l^h} \cdot x^3 \right) \cdot dx'^h \\ & + \cos \alpha^v \cdot \int_{\xi_m^v}^{l^v} \left(\frac{p_0^v}{2} \cdot x^2 + \frac{p_1^v}{6l^v} \cdot x^3 \right) \cdot dx'^v \\ & - \cos \alpha^h \cdot \frac{l^{h^2}}{6} (3p_0^h + p_1^h) \cdot \int_0^l dx'_B{}^h \\ & + \cos \alpha^v \cdot \frac{l^{v^2}}{6} (3p_0^v + p_1^v) \cdot \int_0^l dx'_B{}^v. \end{aligned}$$

Entsprechend: $\delta_{1n,0}, \delta_{2n,0}, \delta_{3n,0}$ mit ξ_n statt ξ_m und a_n statt a_m .

Beiwerte:

$$\begin{aligned} \delta_{1m,1m} = & \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h)^2 + 2(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) \cdot x + x^2] dx'^h \\ & + \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v)^2 + 2(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) \cdot x + x^2] dx'^v \\ & + a_m^{h^2} \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_m^{v^2} \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ & + \int_{-r}^{+r} \left[\frac{1}{4} (h^h - h^v)^2 + (h^h - h^v) \cdot x + x^2 \right] dx'_{Rw} \\ & + (l - \xi_m)^2 \left(\int_0^l dx'_B{}^h + \int_0^l dx'_B{}^v \right) + \int_{-a_m^v}^{+a_m^h} x^2 dx'_R. \end{aligned}$$

$$\delta_{2m,2m} = \sin^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx'^h + \sin^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx'^v \\ + \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v + \int_{-a_m^h}^{+a_m^h} dx'_R + \int_{-r}^{+r} dx'_R w.$$

$$\delta_{3m,3m} = \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx'^h + \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx'^v + \sin^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + \sin^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ + \int_{-a_m^h}^{+a_m^h} dx'_R + \int_0^l dx'_B + \int_0^l dx'_B v.$$

$$\delta_{1m,2m} = \delta_{2m,1m} = -\sin \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) + x] dx'^h \\ + \sin \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) + x] dx'^v \\ - a_m^h \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_m^v \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ - \int_{-a_m^h}^{+a_m^h} x \cdot dx'_R - \int_{-r}^{+r} \left(\frac{h^h - h^v}{2} + x \right) dx'_R w.$$

$$\delta_{1m,3m} = \delta_{3m,1m} = -\cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) + x] dx'^h \\ - \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) + x] dx'^v \\ + a_m^h \sin \alpha^h \cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_m^v \sin \alpha^v \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ - (l - \xi_m) \left(\int_0^l dx'_B + \int_0^l dx'_B v \right).$$

$$\delta_{2m,3m} = \delta_{3m,2m} = +\sin \alpha^h \cos \alpha^h \left(\int_{\xi_m^h}^{l^h} dx'^h - \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h \right) \\ - \sin \alpha^v \cos \alpha^v \left(\int_{\xi_m^v}^{l^v} dx'^v - \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \right).$$

Entsprechend: $\delta_{1n,1n}, \delta_{2n,2n}, \delta_{3n,3n}, \delta_{1n,2n} = \delta_{2n,1n}, \delta_{1n,3n} = \delta_{3n,1n},$
 $\delta_{2n,3n} = \delta_{3n,2n}$ mit ξ_n statt ξ_m und a_n statt a_m .

Unter Voraussetzung, daß $\xi_m > \xi_n$ ist, wird:

$$\begin{aligned} \delta_{1n, 1m} = \delta_{1m, 1n} = & \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} \{ (a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) (a_n^h \sin \alpha^h - \xi_n^h) \\ & + [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) + (a_n^h \sin \alpha^h - \xi_n^h)] \cdot x + x^2 \} dx'^h \\ & + \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} \{ (a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) (a_n^v \sin \alpha^v - \xi_n^v) \\ & + [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) + (a_n^v \sin \alpha^v - \xi_n^v)] \cdot x + x^2 \} dx'^v \\ & + a_m^h a_n^h \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx''^h + a_m^v a_n^v \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx''^v \\ & + \int_{-r}^{+r} \left[\frac{1}{4} (h^h - h^v)^2 + (h^h - h^v) \cdot x + x^2 \right] dx'_{Rw} \\ & + (l - \xi_m) (l - \xi_n) \left(\int_0^l dx'_B{}^h + \int_0^l dx'_B{}^v \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2n, 2m} = \delta_{2m, 2n} = & \sin^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx'^h + \sin^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx'^v + \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx''^h \\ & + \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx''^v + \int_{-r}^{+r} dx'_{Rw}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{3n, 3m} = \delta_{3m, 3n} = & \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx'^h + \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx'^v + \sin^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx''^h \\ & + \sin^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx''^v + \int_0^l dx'_B{}^h + \int_0^l dx'_B{}^v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1n, 2m} = \delta_{2m, 1n} = & - \sin \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} [(a_n^h \sin \alpha^h - \xi_n^h) + x] dx'^h \\ & + \sin \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} [(a_n^v \sin \alpha^v - \xi_n^v) + x] dx'^v \\ & - a_n^h \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{\xi_n^h} dx''^h + a_n^v \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{\xi_n^v} dx''^v \\ & - \int_{-r}^{+r} \left[\frac{1}{2} (h^h - h^v) + x \right] dx'_{Rw}. \end{aligned}$$

242 Beispiele zur Ermittlung der Beanspruchungen und Verformungen.

$$\begin{aligned} \delta_{1n,3m} = \delta_{3m,1n} = & - \cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_n^h \sin \alpha^h - \xi_n^h) + x] dx'^h \\ & - \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_n^v \sin \alpha^v - \xi_n^v) + x] dx'^v \\ & + a_n^h \sin \alpha^h \cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_n^v \sin \alpha^v \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ & - (l - \xi_n) \left(\int_0^l dx'_B{}^h + \int_0^l dx'_B{}^v \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2n,1m} = \delta_{1m,2n} = & - \sin \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) + x] dx'^h \\ & + \sin \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) + x] dx'^v \\ & - a_m^h \cos^2 \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_m^v \cos^2 \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ & - \int_{-r}^{+r} \left[\frac{1}{2} (h^h - h^v) + x \right] dx'_{Rw}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2n,3m} = \delta_{3m,2n} = & + \sin \alpha^h \cos \alpha^h \left(\int_{\xi_m^h}^{l^h} dx'^h - \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h \right) \\ & - \sin \alpha^v \cos \alpha^v \left(\int_{\xi_m^v}^{l^v} dx'^v - \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{3n,1m} = \delta_{1m,3n} = & - \cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} [(a_m^h \sin \alpha^h - \xi_m^h) + x] dx'^h \\ & - \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} [(a_m^v \sin \alpha^v - \xi_m^v) + x] dx'^v \\ & + a_m^h \sin \alpha^h \cos \alpha^h \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h + a_m^v \sin \alpha^v \cos \alpha^v \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \\ & - (l - \xi_m) \left(\int_0^l dx'_B{}^h + \int_0^l dx'_B{}^v \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{3n,2m} = \delta_{2m,3n} = & + \sin \alpha^h \cos \alpha^h \left(\int_{\xi_m^h}^{l^h} dx'^h - \int_{\xi_m^h}^{l^h} dx''^h \right) \\ & - \sin \alpha^v \cos \alpha^v \left(\int_{\xi_m^v}^{l^v} dx'^v - \int_{\xi_m^v}^{l^v} dx''^v \right). \end{aligned}$$

Bei geradlinig veränderlicher Steifigkeit der einzelnen Glieder treten in den Ausdrücken $\delta_{i,k}$ Integrale von der Form

$$\int \frac{x^n}{u + vx} dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$

auf. Ihre Lösungen lauten:

$$\int_a^b \frac{dx}{u + vx} = \left[\frac{1}{v} \ln(u + vx) \right]_a^b,$$

$$\int_a^b \frac{x dx}{u + vx} = \left[\frac{x}{v} - \frac{u}{v^2} \ln(u + vx) \right]_a^b,$$

$$\int_a^b \frac{x^2 dx}{u + vx} = \left[\frac{x^2}{2v} - \frac{ux}{v^2} + \frac{u^2}{v^3} \ln(u + vx) \right]_a^b,$$

$$\int_a^b \frac{x^3 dx}{u + vx} = \left[\frac{x^3}{3v} - \frac{ux^2}{2v^2} + \frac{u^2x}{v^3} - \frac{u^3}{v^4} \ln(u + vx) \right]_a^b,$$

$$\int_a^b \frac{x^4 dx}{u + vx} = \left[\frac{x^4}{4v} - \frac{ux^3}{3v^2} + \frac{u^2x^2}{2v^3} - \frac{u^3x}{v^4} + \frac{u^4}{v^5} \ln(u + vx) \right]_a^b.$$

Zahlenbeispiel.

Behandelt wird folgender Fall:

Eine Rippe am Ende, eine in Mitte Kragfeld.

p_0^h und p_0^v konstant über die Holmlängen l ($p_1 = 0$; vgl. S. 238).
Holme parallel.

$$\begin{aligned} l &= 500 \text{ cm}, & \xi_n &= 0, \\ h &= 70 \text{ ,,}, & \xi_m &= 250 \text{ cm}, \\ f &= 75 \text{ ,,} \end{aligned}$$

$$\alpha_n^h = \alpha_n^v = \alpha_m^h = \alpha_m^v = h^h = h^v = \frac{h}{2} = r = 35 \text{ cm.}$$

$$E = 120\,000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$G = 12\,000 \text{ ,,}$$

$$J_H^h = 2000 \text{ cm}^4, \quad J_{dH}^h = 250 \text{ cm}^4,$$

$$J_H^v = 5000 \text{ ,,}, \quad J_{dH}^v = 415 \text{ ,,}$$

$$J_B^h = 3200 \text{ ,,}, \quad J_{dB}^h = 0,$$

$$J_B^v = 9000 \text{ ,,}, \quad J_{dB}^v = 0,$$

$$J_R = \infty, \quad J_{dR} = 0,$$

$$J_{Rw} = \infty, \quad J_{dRw} = 0.$$

Tabelle 72. Bei- und Lastwerte der Elastizitätsgleichungen.

Beiwerte von				Lastwerte
X_{1n}	X_{2n}	X_{1m}	X_{2m}	
+637	-2,33	+272,3	-1,17	$-17390 p_0^v + 44780 p_0^h$
- 2,33	+0,267	- 1,17	+0,133	0
+272,3	-1,17	+210,3	-1,17	$-6790 p_0^v + 17650 p_0^h$
- 1,17	+0,133	- 1,17	+0,133	0

Da beide Rippen unendlich drillweich sind, können Drillmomente X_3 nicht auftreten; die dritte und sechste Elastizitätsgleichung fällt also fort (vgl. Tabelle 71 und 72). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 X_{1n} &= + 31,06 p_0^v - 79,22 p_0^h [\text{kg}], \\
 X_{2n} &= + 269,1 p_0^v - 685,8 p_0^h [\text{kgcm}], \\
 X_{1m} &= - 6,74 p_0^v + 15,53 p_0^h [\text{kg}], \\
 X_{2m} &= - 55,0 p_0^v + 125,4 p_0^h [\text{kgcm}].
 \end{aligned}$$

Die unter der Annahme einer C-Fall-Belastung des Flügels ($p^h = -1$, $p^v = +1 \text{ kg/cm}$) sich aus den Formeln für die Unbekannten X ergebenden Biege- und Drillmomente des Hinterholms sind in Abb. 237 dargestellt.

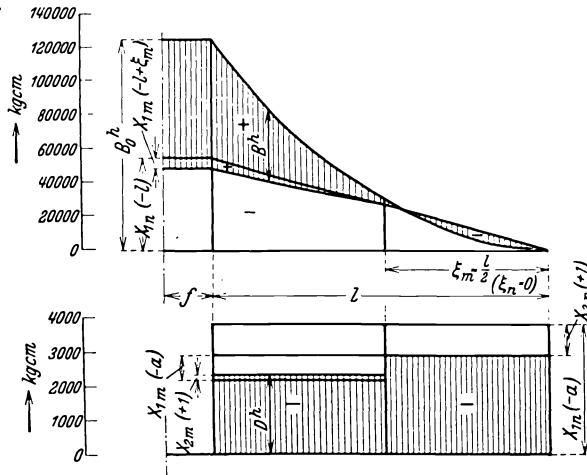


Abb. 237.

Wird als Maß für den Einfluß der Rippenverbundwirkung die Abminderung des Biegemoments an der Holmwurzel in vH seines Betrages eingeführt, so ergibt sich:

$$\frac{B_0^h - B^h}{B_0^h} \cdot 100 = 39,7 \text{ vH.}$$

Aufgabe 75: Abgestrebter Flügel mit drei Verbundrippen.

Die Biege- und Drillmomente des in Abb. 238 dargestellten abgestrebt, am Rumpf bzw. Baldachin wie an den Außenstreben mit vollkommenen Gelenken angeschlossenen zweiholmigen Flügels mit drei Verbundrippen sind für die eingetragene Holmbelastung p^h und p^v zu berechnen. Die zwischen den „Lagerrippen“ $0^h, 0^v$ und $1^h, 1^v$ bzw. zwischen $1^h, 1^v$ und der Endrippe $2^h, 2^v$ gelegenen Zwischenrippen müssen aus Raummangel hier unberücksichtigt bleiben; vgl. die im Schrifttum unter ^{40, 45} bis ⁵⁵ genannten Arbeiten.

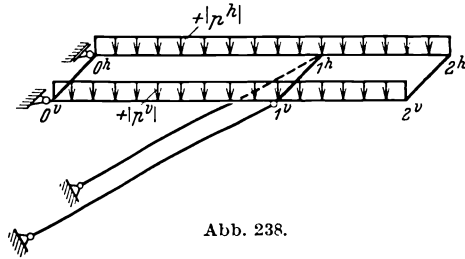


Abb. 238.

1. Allgemeines.

Zur Übung in der Anwendung statisch unbestimmter Haupt-systeme (vgl. S. 195) wird hier ein anderes Lösungsverfahren als in Aufgabe 74 gezeigt.

Durch einen Schnitt rechts neben der „Lagerrippe“ $1^h, 1^v$ zerfällt das System in zwei „Teilrahmen“ 0, 1 und 1, 2 (Abb. 239 und 240). Der ge-

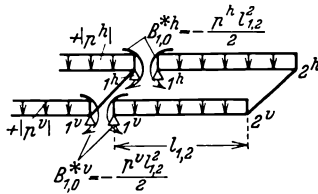


Abb. 239.

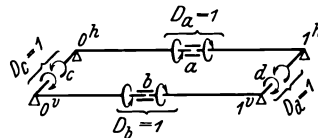


Abb. 240.

schlossene Teilrahmen 0, 1 ist für sich 4-fach statisch unbestimmt; denn es kann z. B. nach Abb. 240 in jedes seiner vier Glieder ein Gelenk gegen Drillung eingeschaltet werden, ohne daß der Teilrahmen unstabil wird.

Der offene Teilrahmen 1, 2 ist für beliebige Belastung instabil, da er nur in zwei hintereinander liegenden Punkten gelagert ist. Die Summe der daran in seinen Anschlußpunkten 1^h und 1^v angreifenden, die Holme biegenden Momente muß daher in jedem Belastungsfall entgegengesetzt gleich dem von der äußeren Belastung bezüglich $1^h, 1^v$ ausgeübten resultierenden Moment sein. Andererseits kann dieser Teilrahmen aber ohne weiteres eine Gruppe von zwei in 1^h und 1^v angreifenden, entgegengesetzt gleichen, die Holme biegenden Momenten aufnehmen (Abb. 241); ebenso kann er je ein in 1^h oder in 1^v angreifendes, den betreffenden Holm drillendes Einzelmoment aufnehmen (Abb. 241). Infolge-

dessen kommen durch die biege- und drillsteife Verknüpfung der beiden (senkrecht zu ihrer Ebene belasteten) Teilrahmen 0, 1 und 1, 2 drei

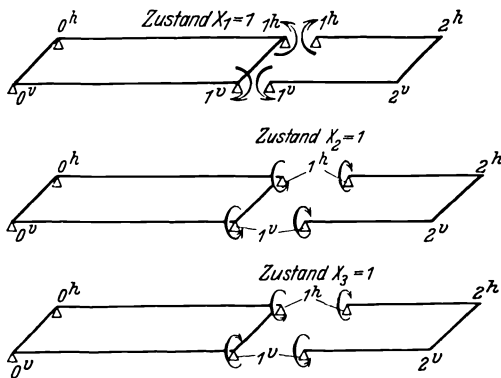


Abb. 241.

weitere „Verknüpfungs- unbekannte“ zustande.

Das Flügelsystem ist also insgesamt 7-fach statisch unbestimmt. Infolge der Nachgiebigkeit der einzelnen Stäbe des Gesamttragwerks treten Verschiebungen der Stützpunkte $0^h, 0^v, 1^h, 1^v$ auf. Zur Vereinfachung der Rechnung werden diese ebenso wie auch die Holm-Längskräfte S zunächst zweck-

mäßig aus denjenigen Auflagerdrücken berechnet, die die Holme allein ohne Berücksichtigung der Rippenverbundwirkung auf das Gesamttragwerk ausüben würden. Nach erfolgter Durchrechnung des Flügels können sie unter Beachtung des Einflusses der Rippenverbundwirkung zwecks Durchführung eines zweiten Rechnungsgangs neu berechnet werden.

2. Teilrahmen und Gesamtflügel.

a) Teilrahmen 1, 2.

Wird der auskragende Teilrahmen 1, 2 zunächst für sich betrachtet, so müssen bei solchen Belastungszuständen, deren Gesamtmoment bezüglich $1^h, 1^v$ nicht verschwindet, in 1^h oder in 1^v oder in 1^h und 1^v zusätzliche Biegemomente $B_{1,0}^{*h}$ und $B_{1,0}^{*v}$ (als gedachte Reaktionen) angesetzt werden, die dem resultierenden Moment der äußeren Belastung Gleichgewicht halten; sie wirken weiterhin im umgekehrten Sinn als zusätzliche äußere Belastung (d. h. als gedachte Aktionen) auf den vorhergehenden Teilrahmen 0, 1 (Abb. 239).

Mitsamt diesen Momenten besteht an dem zunächst unstabil gelagerten „Teilrahmen 1, 2“ Gleichgewicht.

b) Teilrahmen 0, 1.

Durch Einfügen von Gelenken gegen Drillung in die Glieder des geschlossenen Teilrahmens 0, 1 entsteht ein statisch bestimmtes Hauptsystem, das im folgenden als „Gelenkrahmen 0, 1“ bezeichnet wird. An Stelle dieser Gelenke wirken am geschlossenen Teilrahmen 0, 1, der zunächst für sich allein berechnet wird (s. 3, b), vier statisch unbestimmte Drillmomente D_a bis D_d (Abb. 240).

Entsprechend Tabelle 74 werden 4 Gruppen dieser Drillmomente als Zustände $X_1 = 1$ bis $X_4 = 1$ eingeführt.

c) Vollständiger Flügel.

Entsprechend dem unter 1. Gesagten werden zwecks Verknüpfung der beiden Teilrahmen 0, 1 und 1, 2 zum vollständigen Flügel in 1^h und 1^v eingeführt:

X_1 : Eine Gruppe in 1^h und 1^v wirkender entgegengesetzt gleicher Biegemomente entsprechend Abb. 241.

X_2 bzw. X_3 : Gruppen in 1^h und 1^v angreifender gleicher bzw. entgegengesetzt gleicher Drillmomente entsprechend Abb. 241.

Der geschlossene Teilrahmen 0, 1 dient hinsichtlich der Berechnung der Verknüpfungsunbekannten X_1 bis X_3 (gemeinsam mit dem nach Einführung der zusätzlichen Momente $B_{1,0}^{*h}$ und $B_{1,0}^{*v}$ für sich stabilen Teilrahmen 1, 2) als statisch unbestimmtes Hauptsystem (vgl. S. 195) mit den „inneren“ Rahmenunbekannten $X_1 \div X_4$ (vgl. 2, b).

3. Gang der Rechnung*.

a) Teilrahmen 1, 2.

Zunächst werden der Reihe nach die Biege- und Drillmomentenflächen B_j^I und D_j^I des Teilrahmens 1, 2 für die in Tabelle 73, Spalte 1 angegebenen Belastungszustände $0', \dots, j', \dots, 3'$ ermittelt. Die dabei angreifenden Kräfte und Momente sind in Spalte 2 bis 4 zusammengestellt (vgl. hierzu Aufgabe 33 bis 35).

Tabelle 73. Teilrahmen 1, 2.

j'	Zustand	Biegendes Moment in:		Drillendes Moment in:		Verteilte Holmlasten	
		1^h	1^v	1^h	1^v	p^h	p^v
		$0'$	äuß. Last†	$-\frac{p^h l_{1,2}^2}{2}$	$-\frac{p^v l_{1,2}^2}{2}$	—	—
$1'$	$X_1 = 1$	+1	-1	—	—	—	—
$2'$	$X_2 = 1$	—	—	-1	-1	—	—
$3'$	$X_3 = 1$	—	—	-1	+1	—	—

† Einschließlich der Zusatzmomente $B_{1,0}^{*h}$ und $B_{1,0}^{*v}$ (Abb. 239).

* Im folgenden geben die Indizes ' bzw. '' die Zugehörigkeit zum auskragenden Teilrahmen 1, 2 bzw. zum 4fach gestützten Teilrahmen 0, 1 an. Ferner wird durch die Indizes 0 bzw. I die Zugehörigkeit einer Größe zum statisch bestimmten bzw. zum statisch unbestimmten Hauptsystem bezeichnet.

b) Teilrahmen 0, 1.

Zwecks Berechnung der inneren Unbekannten \mathfrak{X}_1 bis \mathfrak{X}_4 des für sich vierfach statisch unbestimmten geschlossenen Teilrahmens 0, 1 (Abb. 240) werden zunächst die Biege- und Drillmomente $B_j^{0''}$ und $D_j^{0''}$ seines statisch bestimmten Hauptsystems berechnet, und zwar der Reihe nach für die in Tabelle 74, Spalte 1 angegebenen Belastungszustände $0'', \dots, j'', \dots, 7''$. Die dabei angreifenden Kräfte und Momente sind in Spalte 2 bis 4 zusammengestellt (vgl. hierzu Aufgabe 33 bis 35).

Tabelle 74. Gelenkrahmen 0, 1 (stat. best. Hauptsystem des Teilrahmens 0, 1).

①		②				③				④	
Zustand		Biegendes Moment				Drillmoment*** im Gelenk gegen Drillung bei				vert. Holm- last	
j''		am H.H. rechts	am V.H. rechts	an der Lagerrippe**		,,a“	,,b“	,,c“	,,d“	p^h	p^r
				hint.	vorn						
$0''$	äußere Last*	$+\frac{p^h l_{1,2}^2}{2}$	$+\frac{p^r l_{1,2}^2}{2}$	—	—	—	—	—	—	p^h	p^r
$1''$	$X_1 = 1$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$2''$	$X_2 = 1$	—	—	+1	+1	—	—	—	—	—	—
$3''$	$X_3 = 1$	—	—	+1	-1	—	—	—	—	—	—
$4''$	$\mathfrak{X}_1 = 1$	—	—	—	—	+1	+1	—	—	—	—
$5''$	$\mathfrak{X}_2 = 1$	—	—	—	—	+1	-1	—	—	—	—
$6''$	$\mathfrak{X}_3 = 1$	—	—	—	—	—	—	+1	+1	—	—
$7''$	$\mathfrak{X}_4 = 1$	—	—	—	—	—	—	+1	-1	—	—

* Einschließlich der Zusatzmomente $B_{1,0}^{*h}$ und $B_{1,0}^{*r}$.

** Ein an der Lagerrippe angreifendes biegendes Einzelmoment gilt als positiv, wenn es bei Betrachtung der Lagerrippe von links her auf diese im Uhrzeigersinn wirkend erscheint.

*** Positiv im Sinne von Abb. 240.

Darauf werden für jeden der äußeren Zustände $j'' = 0'', 1'', 2'', 3''$ die 4 inneren Unbekannten $\mathfrak{X}_{1,j}$ bis $\mathfrak{X}_{4,j}$ des für sich allein betrachteten Teilrahmens 0, 1 berechnet. Die Bei- und Lastwerte der diesbezüglichen Elastizitätsgleichungen sind in Tabelle 75 schematisch zusammengestellt.

Ein solcher Wert $\delta_{i,k}^{0''}$ ergibt sich in bekannter Weise nach der Arbeitsgleichung durch Kombination je zweier Biege- bzw. je zweier Drillmomentenflächen zu

$$\delta_{i,k}^{0''} = \int \frac{B_i^{0''} B_k^{0''}}{EJ} dx + \int \frac{D_i^{0''} D_k^{0''}}{GJ_d} dx.$$

Tabelle 75. Elastizitätsgleichungen des Teilrahmens 0, 1.

Beiwerte von				Lastwerte für Zustand			
$X_{1,j}$	$X_{2,j}$	$X_{3,j}$	$X_{4,j}$	0''	1''	2''	3''
$\delta_{1,4}^*$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{1,6}$	$\delta_{1,7}$	$\delta_{4,0}$	$\delta_{4,1}$	$\delta_{4,2}$	$\delta_{4,3}$
$\delta_{5,4}$	$\delta_{5,5}$	$\delta_{5,6}$	$\delta_{5,7}$	$\delta_{5,0}$	$\delta_{5,1}$	$\delta_{5,2}$	$\delta_{5,3}$
$\delta_{6,4}$	$\delta_{6,5}$	$\delta_{6,6}$	$\delta_{6,7}$	$\delta_{6,0}$	$\delta_{6,1}$	$\delta_{6,2}$	$\delta_{6,3}$
$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,5}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{7,7}$	$\delta_{7,0}$	$\delta_{7,1}$	$\delta_{7,2}$	$\delta_{7,3}$

* Der Doppelindex 0'', welcher besagen würde, daß diese Werte am statisch bestimmten Hauptsystem, nämlich dem Gelenksystem (0) des Teilrahmens 0, 1 (1'') zu berechnen sind, ist zur Vereinfachung fortgelassen.

Es ist aber zu beachten, daß das vordere und das hintere Holmfeld infolge äußerer Belastung Knickbiegung erhalten kann. Für das über ein solches Holmfeld erstreckte Teilintegral ist dann zu setzen (vgl. S. 192):

$$\int \frac{B_i^{0''} B_k^{0''} dx}{EJ} = \bar{B}_i^{0''l} \cdot \tau_k^{0''l} - \bar{B}_i^{0''r} \cdot \tau_k^{0''r}.$$

Die darin vorkommenden Endbiegemomente $\bar{B}_i^{0''l}$ und $\bar{B}_i^{0''r}$ des betreffenden Holmfeldes gehören zu dem einen der zu kombinierenden Zustände, dessen $\bar{B}_i^{0''}$ -Fläche ohne Rücksicht auf einen dabei etwa vorkommenden Druckkräfteinfluß $|S| \cdot \delta$ längs der Holmfeldspannweite (stets) geradlinig verläuft. Die Endneigungen $\tau_k^{0''l}$ und $\tau_k^{0''r}$ gehören zu dem anderen Zustand, dessen $B_k^{0''}$ -Fläche beliebig begrenzt sein kann; ihrer Ermittlung ist bei allen Zuständen k zunächst der Wert $\alpha = l \sqrt{|S_0|/EJ}$ zugrunde zu legen, wobei S_0 die Holm-Druckkraft bedeutet, die bei äußerer Belastung (Zustand 0'') wirksam ist.

c) Verknüpfung der Teilrahmen 0, 1 und 1, 2 zum vollständigen Flügel.

Die „Verknüpfungsunbekannten“ X_1 bis X_3 zwischen den beiden Teilrahmen folgen aus drei Elastizitätsgleichungen, deren Bei- und Lastwerte in Tabelle 76 schematisch zusammengestellt sind.

Tabelle 76. Elastizitätsgleichungen für die Verknüpfung der Teilrahmen 0, 1 und 1, 2.

Der Index I besagt, daß diese Werte am statisch unbestimmten Hauptsystem (dem statisch unbestimmten Teilrahmen 0, 1, gemeinsam mit dem statisch bestimmten Teilrahmen 1, 2; vgl. Abschnitt 2, c) zu berechnen sind. Die Werte $\delta_{i,k}^I$ setzen sich aus je zwei Anteilen zusammen:

Beiwerte von			Lastwerte
X_1	X_2	X_3	
$\delta_{1,1}^I$	$\delta_{1,2}^I$	$\delta_{1,3}^I$	$\delta_{1,0}^I$
$\delta_{2,1}^I$	$\delta_{2,2}^I$	$\delta_{2,3}^I$	$\delta_{2,0}^I$
$\delta_{3,1}^I$	$\delta_{3,2}^I$	$\delta_{3,3}^I$	$\delta_{3,0}^I$

$$\delta_{i,k}^I = \delta'_{i,k} + \delta''_{i,k}.$$

Die Teilwerte $\delta'_{i,k}$ entstammen dem für sich statisch bestimmten Teilrahmen 1, 2; sie ergeben sich in bekannter Weise nach der Arbeits-

gleichung durch Kombination der zu den Zuständen 1' bis 3' gehörigen B'_j - bzw. D'_j -Flächen dieses Teilrahmens untereinander und mit den zum Zustand 0' gehörigen Flächen.

Zur Berechnung der Werte $\delta_{i,k}^{I''}$ des geschlossenen Teilrahmens 0, 1 werden zunächst die noch nicht berechneten Werte $\delta_{i,k}^{0''}$ seines statisch bestimmten Hauptsystems (nämlich des Gelenkrahmens 0, 1) durch Kombination der B'_j - bzw. D'_j -Flächen der Zustände 1'' bis 3'' untereinander bzw. mit denen des Zustands 0'' ermittelt (vgl. Abschnitt 3, b). Dann ist irgend einer der Werte $\delta_{i,k}^{I''}$ des statisch unbestimmten Teilrahmens 0, 1:

$$\delta_{i,k}^{I''} = \delta_{i,k}^{0''} + \mathfrak{X}_{1,k} \cdot \delta_{i,4}^{0''} + \mathfrak{X}_{2,k} \cdot \delta_{i,5}^{0''} + \mathfrak{X}_{3,k} \cdot \delta_{i,6}^{0''} + \mathfrak{X}_{4,k} \cdot \delta_{i,7}^{0''},$$

wobei $\mathfrak{X}_{1,k}$ bis $\mathfrak{X}_{4,k}$ die inneren Unbekannten des Teilrahmens 0, 1 infolge des jeweiligen Zustands k'' sind. (Es ist auch hier $\delta_{i,k}^I = \delta_{k,i}^I$.)

d) Endgültige Beanspruchungen des Flügels.

Nach Ermittlung der „Verknüpfungsunbekannten“ zwischen den beiden Teilrahmen ergeben sich ohne weiteres die Gesamtbiege- und Drillmomente des Teilrahmens 1, 2 zu:

$$\begin{aligned} B'_{ges.} &= B'_0 + X_1 \cdot B'_1 + X_2 \cdot B'_2 + X_3 \cdot B'_3; \\ D'_{ges.} &= D'_0 + X_1 \cdot D'_1 + X_2 \cdot D'_2 + X_3 \cdot D'_3. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Gesamtbiege- und Drillmomente des Teilrahmens 0, 1 müssen zunächst noch die Werte $\mathfrak{X}_{1_{ges.}}$ bis $\mathfrak{X}_{4_{ges.}}$ seiner inneren Unbekannten berechnet werden, die sich ergeben, wenn der geschlossene Teilrahmen nicht für sich, sondern als Teil des Gesamtflügels betrachtet wird; diese sind:

$$\mathfrak{X}_{1_{ges.}} = \mathfrak{X}_{1,0} + X_1 \cdot \mathfrak{X}_{1,1} + X_2 \cdot \mathfrak{X}_{1,2} + X_3 \cdot \mathfrak{X}_{1,3}$$

usw.

$$\mathfrak{X}_{4_{ges.}} = \mathfrak{X}_{4,0} + X_1 \cdot \mathfrak{X}_{4,1} + X_2 \cdot \mathfrak{X}_{4,2} + X_3 \cdot \mathfrak{X}_{4,3},$$

wobei z. B. $\mathfrak{X}_{1,2}$ die innere Unbekannte \mathfrak{X}_1 des für sich allein betrachteten Teilrahmens 0, 1 infolge des Zustands 2'' (Tabelle 74) ist. Seine Gesamtbiege- und Drillmomente sind dann:

$$\begin{aligned} B''_{ges.} &= B_0^{0''} + X_1 \cdot B_1^{0''} + X_2 \cdot B_2^{0''} + X_3 \cdot B_3^{0''} \\ &\quad + \mathfrak{X}_{1_{ges.}} \cdot B_4^{0''} + \mathfrak{X}_{2_{ges.}} \cdot B_5^{0''} + \mathfrak{X}_{3_{ges.}} \cdot B_6^{0''} + \mathfrak{X}_{4_{ges.}} \cdot B_7^{0''}, \\ D''_{ges.} &= D_0^{0''} + X_1 \cdot D_1^{0''} + \dots + \mathfrak{X}_{1_{ges.}} \cdot D_4^{0''} + \dots \end{aligned}$$

§ 19. Rumpffachwerke.

In diesem Paragraphen werden räumliche Fachwerke behandelt, wie sie insbesondere bei Flugzeugrümpfen vorkommen. Die Wände solcher Systeme sind häufig durch vorgespannte Drähte ausgekreuzt;

um die Aufgaben möglichst einfach zu gestalten, wird aber im folgenden in jedem Fachwerkfeld nur je eine dieser Diagonalen als vorhanden angesehen, wie es der Fall ist, wenn jeweils die andere Diagonale infolge Überschreitung ihrer Vorspannung durch eine entsprechend hohe Druckkraft ausscheidet (vgl. hierzu die Aufgaben 31, 60, 81). Zur einwandfreien Berücksichtigung des Einflusses der vorgespannten Drahtauskreuzungen wird auf Ebner⁵⁶ und Wieghardt⁵⁷ verwiesen.

Aufgabe 76 bis 77: Eingespannte Flechtwerke.

Aufgabe 76.

Die Stabkräfte des in Abb. 242 dargestellten, in den vier Eckpunkten des Spantes „3“ mittels fester Gelenke gelagerten („eingespannten“) Rumpfvorder- teils sind für den eingetragenen Belastungszustand unter Voraussetzung unverschieblicher Auflagerpunkte zu be- rechnen.

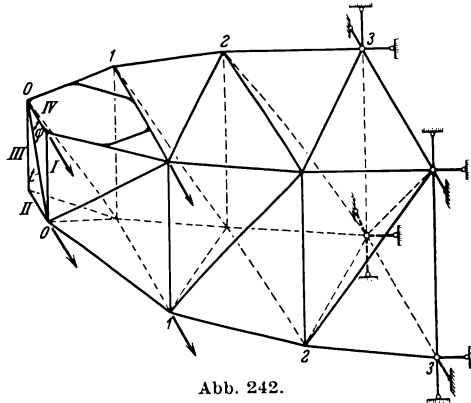


Abb. 242.

1. Allgemeines.

Um das Stabwerk zunächst auf ein Flechtwerk zurückzuführen, wird in dem Rahmenfeld 0 ÷ 1 der oberen Längswand IV entsprechend Aufgabe 61 eine Ersatzdiagonale angenommen, so daß der Rahmen näherungsweise als ein Fachwerkfeld angesehen werden kann. Das System stellt dann ein in 4 Punkten mit $4 \times 3 = 12$ Fesseln gelagertes, also insgesamt 6fach statisch unbestimmtes Raumfachwerk dar.

Werden unnachgiebige Lager vorausgesetzt, so können die der Endquerswand „3“ angehörig 5 Stäbe entfernt bzw. als Bestandteile der (starr)en Auflagerebene angesehen werden, ohne daß sich etwas am Formänderungs- oder Beanspruchungszustand des Systems ändert; das System ist dann also nur noch 1fach statisch unbestimmt.

Als statisch Unbestimmte X_1 wird hier die Kraft T in der Diagonale t der Querswand „0“ eingeführt. Das statisch bestimmte Hauptsystem entsteht also, indem ein Anschluß dieser Diagonale gelöst gedacht wird (Abb. 243). Diese Einführung des Hauptsystems entspricht der Tatsache, daß bei

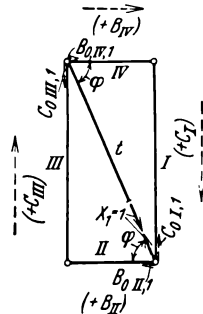


Abb. 243.

dem hier vorausgesetzten Belastungsfall die Tiefendiagonale nur eine untergeordnete Rolle spielt, da die in Abb. 242 eingezeichneten Kräfte sich in erster Linie auf die obere und die untere Längswand auswirken.

Die Elastizitätsgleichung für X_1 heißt:

$$X_1 \delta_{1,1} + \delta_{1,0} = 0;$$

darin ist:

$$\delta_{1,0} = \sum S_1 S_0 s / EF, \quad \delta_{1,1} = \sum S_1^2 s / EF.$$

2. Zustand „0“ (äußere Belastung).

Die Stabkräfte S_0 infolge äußerer Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem ergeben sich nach Berechnung der „Zusatzkräfte“ ΔB und ΔC (vgl. Aufgabe 40, Tabelle 13) aus den Projektionen der Längswände, indem diese ähnlich wie in Aufgabe 40 als selbständige Fachwerke angesehen werden. („Anteilkräfte“ wie in Aufgabe 40 treten dabei nicht auf, weil ja der Anschluß der Tiefendiagonale in der Querwand „0“ gelöst zu denken ist. Es ist zu beachten, daß hier im Gegensatz zu Aufgabe 40 die Belastung der Hinterwand nicht antisymmetrisch zur Belastung der Vorderwand ist.) *

3. Zustand „ $X_1 = 1$ “.

Die Stabkräfte S_1 der Längswandstäbe infolge von $X_1 = 1$ am statisch bestimmten Hauptsystem ergeben sich ähnlich wie die Kräfte S_0 , wenn als Belastung eingeführt wird:

$$\begin{aligned} B_{0II,1} &= B_{0IV,1} = + \cos \varphi, \\ C_{0I,1} &= C_{0III,1} = - \sin \varphi \quad (\text{Abb. 243}). \end{aligned}$$

Die Tiefendiagonale der Endquerwand „0“ erhält dabei die Stabkraft $T_{0,1} = + 1$.

Nach Berechnung der Stabkräfte S_0 , S_1 und der statisch Unbestimmten X_1 folgen die endgültigen Stabkräfte aus:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1.$$

Aufgabe 77.

Das in Aufgabe 40 behandelte Flechtwerk sei in den vier Eckpunkten der rechten Endquerwand „5“ mittels fester Gelenke gelagert („eingespannt“) und in der Ebene der linken Endquerwand „0“ mit einem das Flechtwerk verdrillenden Kräftepaar $M_d = B_0 \cdot c_0$ belastet (Abb. 244*). Die Stabkräfte sind unter Voraussetzung unverschieblicher Auflagerpunkte zu berechnen.

* B bedeutet hier wie in Aufgabe 40 ausnahmsweise eine Kraft parallel der Pfostenrichtung in der Längswand II bzw. IV . Entsprechend bedeutet C eine Kraft parallel der Pfostenrichtung in der Längswand I bzw. III .

1. Allgemeines.

Das System ist entsprechend vorhergehender Aufgabe 76 einfach statisch unbestimmt, da wegen der vorausgesetzten Unnachgiebigkeit der Auflagerpunkte die 5 Stäbe der Endquerwand „5“ fortgelassen bzw. als Bestandteile der starren Auflagerebene angesehen werden können.

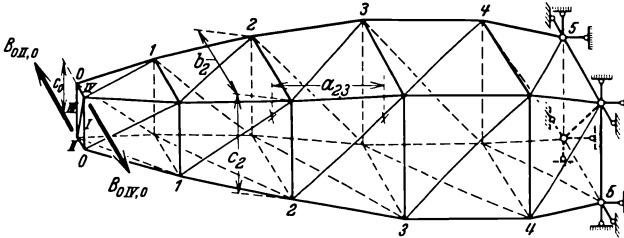


Abb. 244.

Die Durchführung der Rechnung kann wie in Aufgabe 76 erfolgen, indem wieder zur Herstellung eines statisch bestimmten Hauptsystems die Diagonale der linken Endquerwand durchgeschnitten gedacht wird.

Um jedoch bereits am Hauptsystem Stabkräfte zu erhalten, die denen des statisch unbestimmten Systems möglichst nahekommen, empfiehlt sich bei der hier vorliegenden (antisymmetrischen) Belastung die Einführung eines Hauptsystems, bei dem die Tiefendiagonale erhalten bleibt; denn gerade dieser Stab bewirkt die Verteilung des angreifenden Momentes auf die vier Längswände. Ein dementsprechendes Hauptsystem kann hergestellt werden, indem von den 4 Auflagerfesseln in Richtung der Flechtwerk-Längsachse eine durchgeschnitten und als statisch Unbestimmte die darin wirkende Auflagerfessel-Komponente angesehen wird (vgl. Ebner²⁰). Um zu vermeiden, daß dabei eine der vier genannten einander gleichwertigen Auflagerfesseln bevorzugt wird, empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

Als Hauptsystem wird dasjenige System benutzt, das entsteht, wenn alle vier senkrecht zur Querwandebene gerichteten Lagerfesseln entfernt werden; dieses System ist für allgemeine Belastung dreifach unstabil, für die hier vorliegende Belastung durch ein verdrillendes Moment jedoch stabil. (Andernfalls müßte zur äußeren Belastung noch eine Gruppe senkrecht zu den Querwänden gerichteter Auflagerkräfte hinzugenommen werden, die der gegebenen äußeren Belastung das Gleichgewicht hält; siehe z. B. Aufgabe 81.)

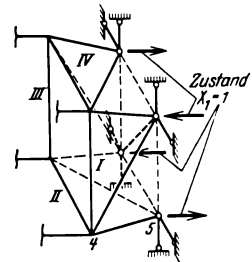


Abb. 245.

Als Zustand $X_1 = 1$ wird die aus Abb. 245 ersichtliche (zweifach antisymmetrische) Längskraftgruppe (sog. „Wölbkraftgruppe“) ein-

geführt, die an dem gewählten Hauptsystem für sich im Gleichgewicht steht.

Die Elastizitätsgleichung für diese Gruppen-Unbekannte X_1 heißt:

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0} = 0,$$

wobei :

$$\delta_{1,0} = \sum S_1 S_0 s / EF, \quad \delta_{1,1} = \sum S_1^2 s / EF$$

ist.

2. Zustand „0“ (äußere Belastung).

Die Stabkräfte S_0 infolge äußerer Belastung am Hauptsystem (mit Ausnahme der Kräfte in den Stäben der Endquerwand „5“, die bereits Bestandteile der als starr vorausgesetzten Auflagerwand sind) ergeben sich genau wie in Aufgabe 40, indem das Hauptsystem als freies Flechtwerk angesehen wird.

3. Zustand $X_1 = 1$.

Die Stabkräfte S_1 infolge $X_1 = 1$ am Hauptsystem ergeben sich ebenfalls nach Aufgabe 40; nur ist jetzt entsprechend Abb. 245 und Aufgabe 40, S. 102 in den Formeln zur Ermittlung der zu diesem Zustand gehörenden „Anteilkräfte“ $B_{0,1}^*$ und $C_{0,1}^*$ zu setzen:

$$C_{0,1}^* \cdot b_0 + B_{0,1}^* \cdot c_0 = 0,$$

$$C_{0,1}^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } C_0^* = 1] + B_{0,1}^* \cdot (A'_{5I} + A''_{5IV}) [\text{inf. } B_0^* = 1] = 1.$$

Die endgültigen Stabkräfte S folgen wiederum aus:

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1.$$

Bemerkung : Die hier gezeigte Berechnungsweise kann natürlich auch auf die vorhergehende Aufgabe Anwendung finden. Die Ermittlung der Stabkräfte am Hauptsystem ist dann jedoch wegen der erst erforderlichen Berechnung der „Anteilkräfte“ umständlicher.

Aufgabe 78: Flechtwerk mit ausgesteiften Querwänden (Zellwerk).

Die Stabkräfte des in Abb. 246 dargestellten „eingespannten“ Rumpffachwerks mit ausgesteiften Querwänden sind für beliebige Belastung des Systems zu ermitteln.

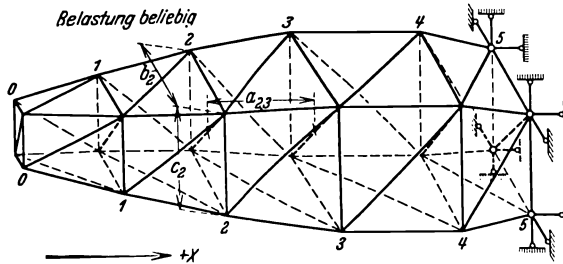


Abb. 246.

(Vgl. hierzu die im Schrifttum unter ²⁰ bis ²⁵ genannten Arbeiten; die Behandlung der Aufgabe erfolgt hier in Anlehnung an Ebner²⁰.)

1. Allgemeines.

Hinsichtlich der Lagerung gilt allgemein das in den Aufgaben 76 und 77 Gesagte; sie ist also unter Annahme starrer Endwandstäbe einfach statisch unbestimmt. Da weiterhin jede Tiefendiagonale in den Querwänden „1“ bis „4“ eine weitere statisch Unbestimmte bedingt, ist das System insgesamt 5fach statisch unbestimmt.

Die 8 Längswandstäbe einer jeden Zelle $i-1, i$ sind an der Querwand „ i “ in vier durch die folgende Zelle $i, i+1$ räumlich festgelegten Punkten angeschlossen, also daselbst durch insgesamt $4 \cdot 3 = 12$ Fesseln gelagert; an ihrer Beanspruchung wird nichts geändert, wenn diese 12 Fesseln nach Abb. 247 durch 12 (starre) Stäbe ersetzt gedacht werden, von denen 5 eine neue, zwischengeschobene Querwand (zur gegenseitigen Festlegung der Punkte $i_{II/II} \div i_{IV/I}$) bilden. Dadurch entsteht ein System, das aus 5 Flechtwerkzellen besteht, von denen jede durch 7 (starre) Stäbe (also einfach

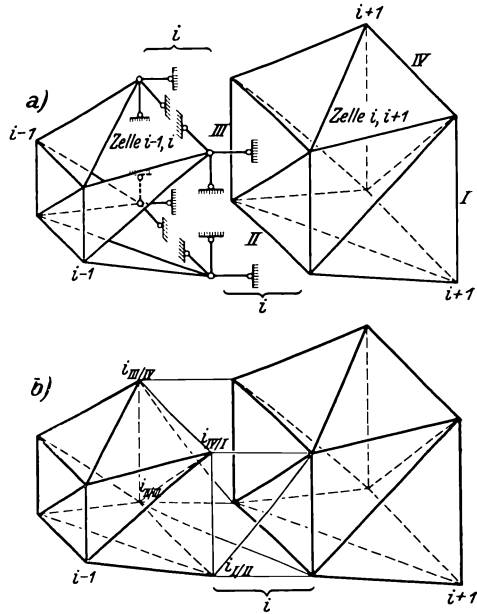


Abb. 247.

statisch unbestimmt) an die folgende angeschlossen ist. (Die zwischengeschobenen Querwände sind den ursprünglich gegebenen unendlich benachbart zu denken.)

Als Hauptsystem wird dasjenige instabile System eingeführt, welches entsteht, indem zwischen je zwei Zellen alle 4 waagerechten Verbindungsstäbe entfernt gedacht werden; da bereits durch Entfernen je eines dieser Längsverbindungsstäbe zwischen je zwei Zellen das System statisch bestimmt gemacht würde, ist das auf diese Weise entstehende Hauptsystem („Zellensystem“) insgesamt 5·3fach unbestabil.

Dementsprechend müssen bei allen Belastungszuständen, sofern diese nicht bereits an diesem instabilen Hauptsystem für sich im Gleichgewicht stehen, zusätzliche Kräftegruppen in Richtung der 4 waagerechten Längsverbindungsstäbe angenommen werden, die so zu bestimmen sind, daß bei dem jeweiligen Belastungszustand am instabilen Hauptsystem Gleichgewicht herrscht.

2. Zustand „0“ (äußere Belastung) am Hauptsystem.

a) Zur Herstellung des Gleichgewichts am unstabilen Zellsystem sind keine zusätzlichen Kräftegruppen erforderlich, wenn die Belastung des Raumfachwerks aus verdrehenden Momenten oder aus zweifach antisymmetrischen Längskraftgruppen W („Wölbkraftgruppen“) besteht (Abb. 248). Es empfiehlt sich daher, die verdrehenden Momente und die zweifach antisymmetrischen Längskraftgruppen aus der Gesamtbelastung herauszunehmen und ihren Einfluß auf die Beanspruchung des Systems für sich zu untersuchen. Für diese Belastungsfälle ergeben sich die Stabkräfte in den Längswandgurten und -diagonalen des unstabilen Zellsystems mittels folgender Gleichungen:

Aus $\sum P_x = 0$ (Summe aller horizontalen Kräfte an jedem Knoten gleich Null) für die Zelle $i - 1, i$ (Abb. 248 und 249) folgen die in Tabelle 77 angeschriebenen Gleichungen*.

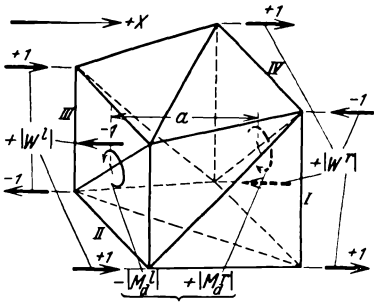


Abb. 248.

Tabelle 77. Gleichungen für die Längswandstabkräfte.

Belastung	$M_a^i = +1$	$W^i = +1$	$W^r = +1$	Belastung	$M_a^i = +1$	$W^i = +1$	$W^r = +1$
	$M_a^i = -1$ **	***	†		$M_a^i = -1$ **	***	†
1. $\frac{L_{I/III} + D_I}{l_{I/III} + d_I}$	= 0	= - $\frac{1}{a}$	= 0	5. $\frac{L_{I/II} + D_{II}}{l_{I/II} + d_{II}}$	= 0	= 0	= + $\frac{1}{a}$
2. $\frac{L_{II/III} + D_{II}}{l_{II/III} + d_{II}}$	= 0	= + $\frac{1}{a}$	= 0	6. $\frac{L_{II/III} + D_{III}}{l_{II/III} + d_{III}}$	= 0	= 0	= - $\frac{1}{a}$
3. $\frac{L_{III/IV} + D_{III}}{l_{III/IV} + d_{III}}$	= 0	= - $\frac{1}{a}$	= 0	7. $\frac{L_{III/IV} + D_{IV}}{l_{III/IV} + d_{IV}}$	= 0	= 0	= + $\frac{1}{a}$
4. $\frac{L_{IV/I} + D_{IV}}{l_{IV/I} + d_{IV}}$	= 0	= + $\frac{1}{a}$	= 0	(8. $\frac{L_{IV/I} + D_I}{l_{IV/I} + d_I}$	= 0	= 0	= - $\frac{1}{a}$)

* Entsprechende Gleichungen gelten für die Zellen $i, i + 1$ usw.; die Indexangabe $i - 1, i$ bzw. $i, i + 1$ usw. erfolgt nur dann, wenn mehrere Zellen gleichzeitig betrachtet werden. Bei Behandlung einer Einzelzelle wird nur zwischen den Wänden I bis IV unterschieden.

** Positives verdrehtes Moment „1“ (Vektor von links nach rechts weisend) am rechten Zellenende und zugleich entgegengesetztes gleiches verdrehtes Moment als Reaktion am linken Zellenende angreifend.

*** bzw. † Positive Wölbkraftgruppe aus je vier Einzelkräften vom Absolutbetrage „1“ am linken bzw. rechten Zellenende allein angreifend (Abb. 248).

Da in diesem System mit 8 Gleichungen und 8 Unbekannten nur 7 Gleichungen voneinander linear unabhängig sind — [die letzte ergibt sich z. B. aus (1) + (2) + (3) + (4) - (5) - (6) - (7)] — muß zur Berechnung der 8 Längswand-Stabkräfte L und D noch ein Schnitt durch alle Längswandstäbe gelegt werden; die Bedingung $\sum M = 0$ bezüglich eines beliebigen Punktes, hier des Mittelpunktes der linken Querwand „ $i - 1$ “

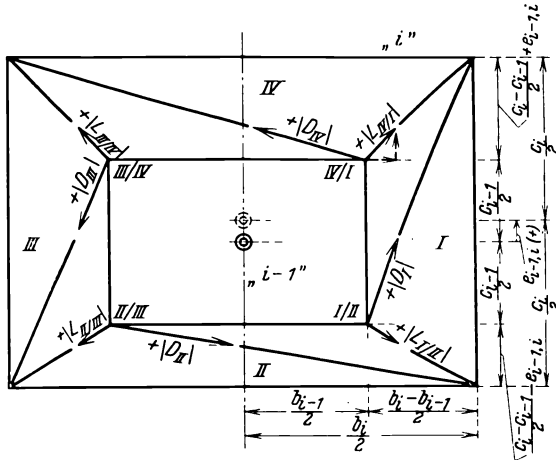


Abb. 249.

liefert dann eine 8. Gleichung*, die von den übrigen linear unabhängig ist. Im vorliegenden Fall (Abb. 249) lautet diese:

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \frac{L_{III}}{l_{III}} \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} - e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} + \frac{L_{III/IV}}{l_{III/IV}} \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} + e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} \\
 & + \left(\frac{L_{II/III}}{l_{II/III}} + \frac{L_{IV/I}}{l_{IV/I}} \right) \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{2} \right) \frac{c_{i-1}}{2} - \frac{D_I}{d_I} \left(\frac{c_i + c_{i-1}}{2} + e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} \\
 & - \frac{D_{III}}{d_{III}} \left(\frac{c_i + c_{i-1}}{2} - e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} - \left(\frac{D_{II}}{d_{II}} + \frac{D_{IV}}{d_{IV}} \right) \left(\frac{b_i + b_{i-1}}{2} \right) \frac{c_{i-1}}{2} \\
 & - \left[\left(\frac{L_{II/III}}{l_{II/III}} + \frac{L_{III/IV}}{l_{III/IV}} + \frac{D_I}{d_I} + \frac{D_{III}}{d_{III}} \right) \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{2} \right) \frac{c_{i-1}}{2} \right. \\
 & + \left(\frac{L_{II/III}}{l_{II/III}} + \frac{D_{II}}{d_{II}} \right) \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} - e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} \\
 & \left. + \left(\frac{L_{IV/I}}{l_{IV/I}} + \frac{D_{IV}}{d_{IV}} \right) \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} + e_{i-1,i} \right) \frac{b_{i-1}}{2} \right] = 1^{**} \text{ bzw. } = 0^{***} \text{ bzw. } = 0^\dagger.
 \end{aligned}$$

Darin ist $e_{i-1,i}$ dann als positive Größe einzusetzen, wenn der Mittelpunkt von Querwand i höher liegt als der von Querwand $i - 1$.

Das in eckigen Klammern stehende Glied fällt bei Belastung der Zelle mit W^r bzw. mit $M_d^r = -M_d^l$ wegen der Gleichungen 1 ÷ 4 fort.

*, **, *** bzw. † siehe Fußnoten S. 256.

In genau gleicher Weise ergeben sich 8 Gleichungen für die Längswand-Stabkräfte der Zelle $i, i + 1$ usw.

Aus diesen Gleichungen folgen mit $K = b_{i-1} \cdot c_i + b_i \cdot c_{i-1}$ die Längswand-Stabkräfte der Zelle $i - 1, i$ nach Tabelle 78.

Tabelle 78. Auf die Stablängen bezogene Längswandstabkräfte.

Belastung:	$M'_d = +1; M''_d = -1$		$W^i = +1$		$W^r = +1$	
	Kraft:		L	D	L	D
Wand	$\frac{L}{l}$	$\frac{D}{d}$	$\frac{L}{l}$	$\frac{D}{d}$	$\frac{L}{l}$	$\frac{D}{d}$
I		$-\frac{1}{K}$		$-\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$		$-\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$
II	$+\frac{1}{K}$	$-\frac{1}{K}$	$-\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$
III	$+\frac{1}{K}$	$-\frac{1}{K}$	$+\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$
IV	$+\frac{1}{K}$	$-\frac{1}{K}$	$-\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$	$+\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$
(I)	$+\frac{1}{K}$	$-\frac{1}{K}$	$+\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_{i-1} c_i}{aK}$	$-\frac{b_i c_{i-1}}{aK}$

Zur Berechnung der für Zustand „0“ bisher noch nicht ermittelten Stabkräfte in den Pfosten v_i und der Tiefendiagonale t_i in der Quer-

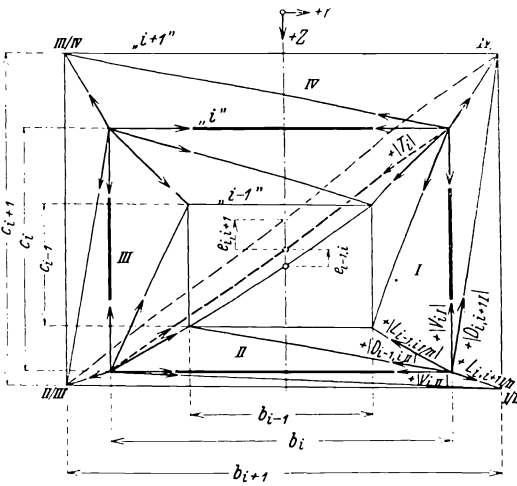


Abb. 250.

wand „i“ ist zu beachten, daß durch die gedachte Zerlegung des Gesamtsystems in Einzelzellen eine Aufspaltung der wirklich vorhandenen Pfosten in zwei Teilpfosten bzw. in zwei Teilpfosten und eine neue Längswanddiagonale, ferner eine Aufspaltung der wirklich vorhandenen Tiefendiagonale in zwei Teildiagonale vorgenommen wurde. Die aus den Kräften dieser Teilpfosten bzw. Diagonalen resultierenden Gesamt-

pfosten- bzw. Diagonalkräfte V_{iI} bis V_{iIV} bzw. T_i des unstabilen Hauptsystems (durchschnittene Längsverbindungsstäbe!) ergeben sich unmittelbar aus den Längswandkräften L und D nach Abb. 250, indem

die Eckpunkte der Querwand „ i “ mitsamt den daran anschließenden Ästen der Längswandstäbe der beiden benachbarten Zellen $i - 1$, i und i , $i + 1$ abgeschnitten gedacht werden. Die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen $\sum P_z = 0$, $\sum P_y = 0$ z. B. auf den Knoten I/II der Querwand i liefert dann (vgl. auch Abb. 249):

$$\begin{aligned} \sum P_z &= 0: \\ -V_{iI} - \frac{D_{i,i+1I}}{d_{i,i+1I}} \left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2} + e_{i,i+1} \right) + \frac{L_{i,i+1III}}{l_{i,i+1III}} \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{2} - e_{i,i+1} \right) \\ &\quad - \frac{D_{i-1,iII}}{d_{i-1,iII}} \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} - e_{i-1,i} \right) - \frac{L_{i-1,iIII}}{l_{i-1,iIII}} \left(\frac{c_i - c_{i-1}}{2} - e_{i-1,i} \right) = 0, \\ \sum P_y &= 0: \\ -V_{iII} + \frac{D_{i,i+1I}}{d_{i,i+1I}} \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} \right) + \frac{L_{i,i+1III}}{l_{i,i+1III}} \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} \right) \\ &\quad - \frac{D_{i-1,iII}}{d_{i-1,iII}} \left(\frac{b_i + b_{i-1}}{2} \right) - \frac{L_{i-1,iIII}}{l_{i-1,iIII}} \left(\frac{b_i - b_{i-1}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich am Knoten III/IV zwei Gleichungen für V_{iIII} und V_{iIV} .

Die Kraft in der Querwanddiagonale T_i folgt z. B. aus der Gleichung $\sum P_y = 0$, angewandt auf den Knotenpunkt IV/I :

$$\begin{aligned} -\frac{T_i}{t_i} b_i - V_{iIV} - \left(\frac{D_{i-1,iI}}{d_{i-1,iI}} + \frac{L_{i-1,iIV/I}}{l_{i-1,iIV/I}} \right) \frac{b_i - b_{i-1}}{2} \\ - \frac{D_{i,i+1IV}}{d_{i,i+1IV}} \cdot \frac{b_i + b_{i+1}}{2} + \frac{L_{i,i+1IV/I}}{l_{i,i+1IV/I}} \cdot \frac{b_{i+1} - b_i}{2} = 0. \end{aligned}$$

Sind die Diagonalen der einzelnen Wände anders angeordnet als in Abb. 248 oder sind die Wände als Fachwerke ausgebildet, wie z. B. die Flügel der Doppeldeckerzelle in Abb. 263, so können die angegebenen Formeln ebenfalls Verwendung finden, indem die in Abb. 248 eingezeichneten Diagonalen zunächst als „Ersatzdiagonalen“ angesehen werden. Zur Berechnung der Stabkräfte in den wirklich vorliegenden Wänden werden dann nachträglich die von den Ersatzdiagonalen auf ihre Anschlußpunkte ausgeübten Kräfte in umgekehrtem Sinne als äußere Kräfte an den wirklichen Wandfachwerken angebracht; dieser Belastungszustand liefert unmittelbar die Kräfte derjenigen Stäbe, die in der „Ersatzzelle“ noch nicht vorhanden waren. Hinsichtlich der übrigen Stäbe liefert er Kräfte, die denjenigen zu überlagern sind, die vorher an der „Ersatzzelle“ gefunden wurden („Ersatzstabverfahren“, vgl. auch Aufgabe 31 und S. 272, 273).

b) Bei allen anderen Belastungsfällen, die nicht für sich am unstablen Zellenhauptsystem im Gleichgewicht stehen, werden in Richtung der vier herausgenommenen Längsverbindungsstäbe zusätzliche Längskräfte A_{iII}^* bis $A_{iIV/I}^*$ angesetzt, die zusammen mit der äußeren Belastung am unstablen Zellsystem Gleichgewicht bewirken (vgl. § 20 und 21). Und zwar wird über diese zusätzlichen Kräfte in dem Sinne verfügt, daß sie gleich denjenigen Längskräften $A' + A''$ sein

sollen, die (ähnlich wie in Aufgabe 40, Abb. 102) dann in den einzelnen Knotenpunkten auftreten würden, wenn statt des unstabilen Zellensystems ein statisch bestimmtes Fachwerk ohne Tiefendiagonalen t_0 bis t_4 vorläge („Ersatzfachwerk“*). Dann ist der gesamte Beanspruchungszustand des (unstabilen) Zellensystems derselbe wie der, der sich infolge des jeweiligen Belastungsfalls an diesem statisch bestimmten Fachwerk (ohne Tiefendiagonalen t_0 bis t_4) ergibt; somit können die Stabkräfte S_0 infolge des Zustandes „0“ in allen Belastungsfällen, die nicht für sich am unstabilen Hauptssystem im Gleichgewicht stehen, ohne weiteres ähnlich wie in Aufgabe 76 am Ersatzfachwerk berechnet werden.

Häufig ist es auch bei solchen Belastungsfällen, die bereits am unstabilen Zellensystem im Gleichgewicht stehen, zweckmäßig, gewisse zusätzliche Längskräfte A zwischen den einzelnen Zellen eingeführt zu denken, obwohl dies nach Vorhergehendem nicht notwendig wäre; liegt nämlich z. B. ein Belastungszustand vor wie er in Aufgabe 77 behandelt wurde, so kommen die Stabkräfte des Hauptsystems denen des wirklichen Systems dann am nächsten, wenn solche Längskräfte zusätzlich angesetzt werden, wie sie auftreten würden, wenn ein statisch bestimmtes Flechtwerk vorläge; die Stabkräfte S_0 können dann ohne weiteres aus dem in Aufgabe 40 behandelten System (als „Ersatzflechtwerk“) berechnet werden.

3. Zustände „ $X_i = 1$ “ am Hauptssystem.

Als Unbekannte X_i werden zweifach antisymmetrische Längskraftgruppen entsprechend Abb. 251 zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zellen $i - 1, i$ und $i, i + 1$ bzw. zwischen der letzten Zelle und der Auflager-ebene eingeführt.

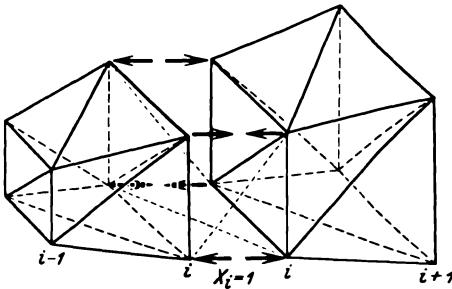


Abb. 251.

Die Stabkräfte S_i infolge der Zustände $X_i = 1$ in den einzelnen Zellen ergeben sich genau so wie unter 2a) die Kräfte S_0 infolge zweifach antisymmetrischer Wölbkraftgruppen W ; denn bei Zustand $X_i = 1$ wirkt auf die

Zelle $i, i + 1$ von links her eine Gruppe W^l in positivem Sinn und auf die Zelle $i - 1, i$ von rechts her eine solche Gruppe W^r in negativem Sinn. Da diese zweifach antisymmetrischen Längskraft-

* Die nach Ebner²⁰ gewählte Bezeichnung „Ersatzfachwerk“ hat nichts mit dem früher genannten „Ersatzstabverfahren“ zu tun.

gruppen jeweils an denjenigen Zellen für sich im Gleichgewicht stehen, an denen sie angreifen, entstehen bei irgendeinem Zustand $X_i = 1$ nur Stabkräfte in den beiden benachbarten Zellen $i - 1, i$ und $i, i + 1$ bzw. beim Zustand $X_5 = 1$ nur Stabkräfte in der Zelle 4, 5 und in den hier als starr vorausgesetzten Stäben der Auflagerwand.

Infolgedessen sind in den Elastizitätsgleichungen diejenigen Beiwerte $\delta_{i,k} = \sum S_i S_k s / EF$, für die $k < i - 2$ bzw. $k > i + 2$ ist, gleich Null; das System der Elastizitätsgleichungen hat also bei der vorgenommenen Wahl des Hauptsystems und der Unbekannten die in Tabelle 79 angedeutete 5gliedrige Gestalt (Differenzgleichung 4. Ordnung). Werden alle Querwandstäbe als starr angenommen, so fallen auch noch die in nebenstehendem Schema eingeklammerten Beiwerte $\delta_{i,k}$ mit $k < i - 1$

Tabelle 79. Schema der Elastizitätsgleichungen*.

Beiwerte von					Lastwerte
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
\equiv	$=$	$(-)$			$-$
$=$	\equiv	$=$	$(-)$		$-$
$(-)$	$=$	\equiv	$=$	$(-)$	$-$
	$(-)$	$=$	\equiv	$=$	$-$
		$(-)$	$=$	\equiv	$-$

bzw. $k > i + 1$ fort. (Dreigliedrige Gestalt; Differenzgleichung 2. Ordnung.) Zur zweckmäßigen Lösung solcher Gleichungen vgl. Anhang.

4. Wirkliche Stabkräfte S.

Nach Berechnung der Größen X_i ergeben sich nach dem Überlagerungssatz für die wirklichen Kräfte in den Längsgurten und Längswanddiagonalen einer Zelle, z. B. $i - 1, i$, Ausdrücke mit höchstens zwei der nunmehr bekannten statisch Unbestimmten:

$$S = S_0 + X_{i-1} \cdot S_{i-1} + X_i \cdot S_i,$$

weil zwischen den Querwänden „ $i - 1$ “ und „ i “ nur Stabkräfte infolge der äußeren Belastung bzw. X_{i-1} und X_i entstehen.

Ferner ergeben sich in den Pfosten und der Tiefendiagonale der Querwand „ i “ die wirklichen Stabkräfte zu:

$$S = S_0 + X_{i-1} \cdot S_{i-1} + X_i \cdot S_i + X_{i+1} \cdot S_{i+1},$$

weil in der Querwand „ i “ nur Stabkräfte infolge äußerer Belastung bzw. X_{i-1}, X_i und X_{i+1} entstehen.

§ 20. Freitragende Doppeldecker mit Verbundstreben.

In den folgenden Beispielen wird vor allem die Einführung und Ermittlung der statisch unbestimmten Größen behandelt. Um daher die Ermittlung der Stabkräfte, Biegemomente usw. möglichst einfach zu gestalten, sind durchweg waagerechte und zur Aufrißebene senkrecht verlaufende Flügelebenen angenommen.

* Durch die Wahl ein- und mehrfacher Striche sollen die größeren von den kleineren Beiwerten unterschieden werden.

Aufgabe 79: Doppeldecker mit drei Verbundstreben.

Für das in Abb. 252 dargestellte Tragwerk eines freitragenden Doppeldeckers mit *N*-förmiger Verbundscheibe sind die Biegemomente und Stabkräfte für *A*- und *C*-Fall-Belastung zu ermitteln.

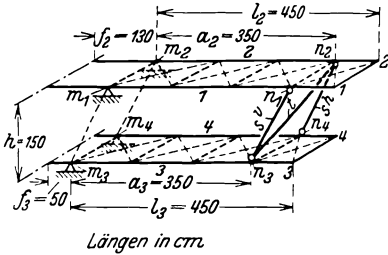


Abb. 252.

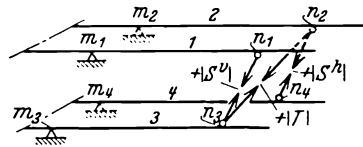


Abb. 253.

1. Allgemeines.

Wird angenommen, die Flügelrippen seien vollkommen gelenkig an den Holmen angeschlossen (Vernachlässigung der Rippenverbundwirkung), und wird zur Flugzeuglängsachse symmetrische Belastung und Systemausbildung vorausgesetzt, so ist das System 3-fach statisch unbestimmt. Es liegt nahe, als statisch unbestimmte Größen X_1 bis X_3 z. B. die lotrechten Komponenten der Kräfte in den Stäben der Verbundscheibe einzuführen; das statisch bestimmte Hauptsystem würde dann aus 2 freitragenden Flügeln bestehen (Abb. 253).

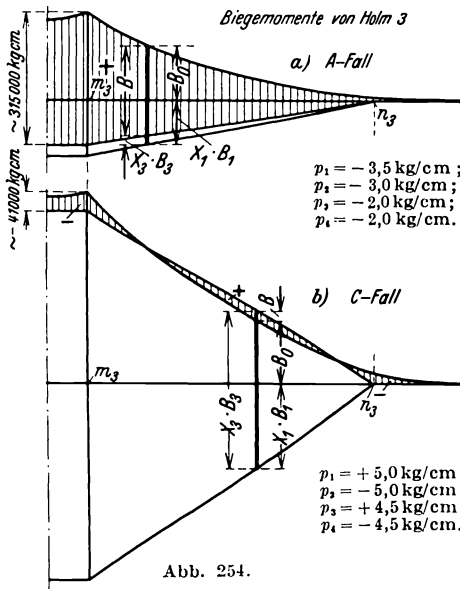


Abb. 254.

Abb. 254a und b zeigen die wirklichen Biegemomentenflächen $B = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3$, wie sie sich dann im *A*- und *C*-Fall

ähnlich den früheren Aufgaben z. B. für Holm 3 bei gleichmäßig verteilter Belastung, gleich großer Steifigkeit in allen 4 Holmen und den Längen nach Abb. 252 ergeben würden (vgl. Thala^{58*}). Im *C*-Fall sind die Biegemomente, wie aus Abb. 254 ersichtlich, kleine Differenzen großer Zahlenwerte, so daß kleine Rechenungenauigkeiten bereits

* S. auch Rühl⁵⁹.

wesentliche Fälschungen des Ergebnisses verursachen können; insbesondere würde keine vernünftige Vorbemessung auf Grund der Beanspruchungen des statisch bestimmten Hauptsystems im *C*-Fall möglich sein (meist ist allerdings der *A*-Fall für die Bemessung maßgebend); die gewählte Einführung der Unbestimmten widerspricht also für Belastungen entsprechend dem *C*-Fall den in den Aufgaben 70/71 betonten Grundsätzen. Dieses kann vermieden werden, wenn die Einführung des statisch bestimmten Hauptsystems bzw. der statisch unbestimmten Größen in folgender Weise vorgenommen wird:

In die Holme werden an den Rumpf- bzw. Baldachinanschlüssen m_1, m_2, m_3, m_4 Gelenke eingeschaltet (Abb. 255); da hierdurch das Tragwerk einfach instabil wird, werden in diesen Gelenken zusätzlich zur jeweils wirksamen äußeren Belastung vier gleich große Biegemomente $B_{m1,0}^*, B_{m2,0}^*, B_{m3,0}^*, B_{m4,0}^*$ angesetzt, deren Größe so festzulegen ist, daß ihre Summe der äußeren Belastung Gleichgewicht hält.

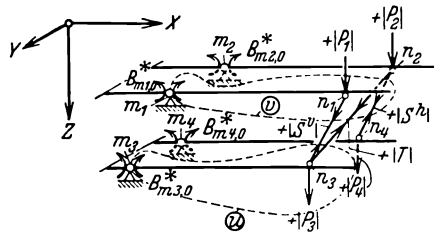


Abb. 255.

Als statisch Unbestimmte könnten drei der in Wirklichkeit an den Stellen m_1, m_2, m_3, m_4 auftretenden Biegemomente angesehen werden; um aber solche Belastungszustände $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ zu schaffen, für die das allgemein instabile Hauptsystem stabil ist, werden als Unbekannte X_1 bis X_3 drei Gruppen der Biegemomente in m_1, m_2, m_3, m_4 gewählt, von denen jede für sich am Hauptsystem im Gleichgewicht steht.

2. Zustand „0“ (äußere Belastung) am unstabilen Hauptsystem.

Jede Tragwand wird für sich betrachtet; die dazu notwendigen Auflagerfesseln in Tiefenrichtung (d. h. parallel n_1, n_2 usw.) werden durch die Flügelfachwerke geliefert. An jeder Tragwand muß für sich Gleichgewicht bestehen zwischen den daran angreifenden Momenten B^* , den Knotenlasten P (das sind gedachte Einzellasten in n_1, n_2, n_3, n_4 , die bezüglich der Rumpf- bzw. Baldachinanschlußpunkte dieselben Momente erzeugen wie die verteilten Holmlasten), sowie der Kraft T in der mittleren Verbundstrebe (Tiefenstrebe). Bei beliebig angenommenen Werten B^* ergäbe sich für die Tiefenstrebenkraft T aus den Gleichgewichtsbedingungen der Vorderwand ein anderer Wert als aus den Gleichgewichtsbedingungen der Hinterwand.

Die zusätzlich zur gegebenen Belastung anzusetzenden Momente $B_{m1,0}^* = B_{m2,0}^* = B_{m3,0}^* = B_{m4,0}^* = B^*$ sind daher eindeutig festgelegt durch die Forderung: $T^{(v)} = T^{(h)}$.

Aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_3 (Aufriß, Schnitt „ u'' “) ergibt sich an der Vorderwand für die lotrechte Komponente von T :

$$T_z^{(v)} = \frac{B_{m3,0}^*}{a_3} + P_3 - S_z^v.$$

Darin folgt S_z^v aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_1 (Schnitt „ v'' “) zu:

$$S_z^v = - \frac{B_{m1,0}^*}{a_1} - P_1.$$

Entsprechend ergibt sich an der Hinterwand aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_2 :

$$T_z^{(h)} = - \frac{B_{m2,0}^*}{a_2} - P_2 - S_z^h;$$

darin folgt S_z^h aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_4 zu:

$$S_z^h = \frac{B_{m4,0}^*}{a_4} + P_4.$$

Die Bedingung $T_z^{(v)} = T_z^{(h)}$ heißt dann:

$$\begin{aligned} & \frac{B_{m3,0}^*}{a_3} + \frac{B_{m1,0}^*}{a_1} + P_3 + P_1 \\ &= - \frac{B_{m2,0}^*}{a_2} - \frac{B_{m4,0}^*}{a_4} - P_2 - P_4. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $B_{m1,0}^* = B_{m2,0}^* = B_{m3,0}^* = B_{m4,0}^* = B^*$:

$$B^* = - \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + 1/a_4}.$$

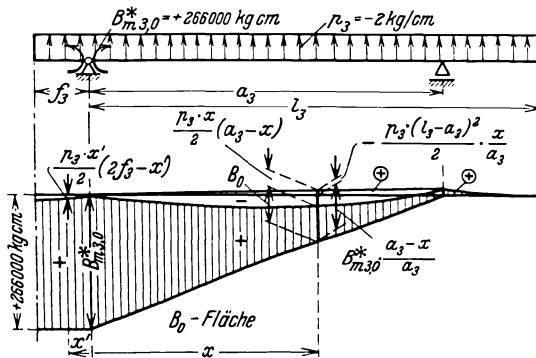


Abb. 256. Belastung und Biegemomente des Holms 3 im A-Fall am unstabilen Hauptssystem bei gleichzeitiger Wirkung der Biegemomentengruppe $B_{m3,0}^*$.

Abb. 256 zeigt z. B. die Biegemomentenfläche B_0 des Holms 3 infolge gleichmäßig verteilter äußerer Belastung im A-Fall einschließlich der zugehörigen Gruppe B^* an dem hier behandelten Hauptssystem.

3. Zustände $X_1 = 1$ bis $X_3 = 1$ am instabilen Hauptsystem.

Als Zustände $X_1 = 1$ bis $X_3 = 1$ werden entsprechend folgender Zusammenstellung in je zwei der bei m_1, m_2, m_3, m_4 angenommenen Gelenke Biegemomente eingeführt, von denen das jeweils an erster Stelle stehende zu „1“ gewählt ist; das jeweils an zweiter Stelle stehende Biegemoment ist so festgelegt, daß jeder dieser Zustände $X_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) am instabilen System für sich im Gleichgewicht steht, daß also jeweils wieder die Forderung $T^{(v)} = T^{(h)}$ erfüllt ist:

Zustand $X_1 = 1: B_{m\ 1,1} = 1;$

$$B_{m\ 3,1} = -\frac{a_3}{a_1};$$

Zustand $X_2 = 1: B_{m\ 2,2} = 1;$

$$B_{m\ 4,2} = -\frac{a_4}{a_2};$$

Zustand $X_3 = 1: B_{m\ 2,3} = 1;$

$$B_{m\ 3,3} = -\frac{a_3}{a_2}.$$

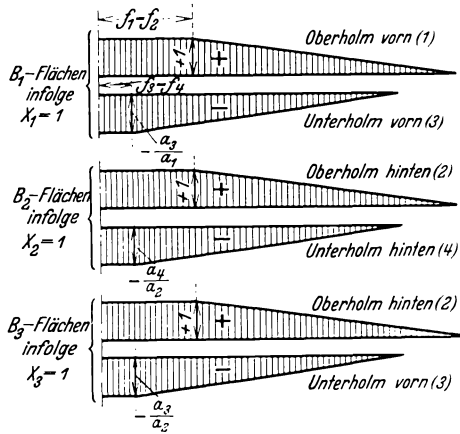


Abb. 257.

Abb. 257 zeigt die zugehörigen Holm-Biegemomentenflächen B_1 bis B_3 . Die Kombination der Biegemomentenflächen B_1, B_2, B_3 untereinander und mit B_0 liefert in bekannter Weise (Anhang, Tabelle 94) die Bei- und Lastwerte der drei Elastizitätsgleichungen für X_1 bis X_3 .

Abb. 258 zeigt maßstäblich die nach Berechnung der Unbekannten X_1 bis X_3 endgültig sich ergebenden Biegemomentenflächen $B = B_0 + X_1 B_1 + X_2 B_2 + X_3 B_3$ für Holm 3 im A- und C-Fall.

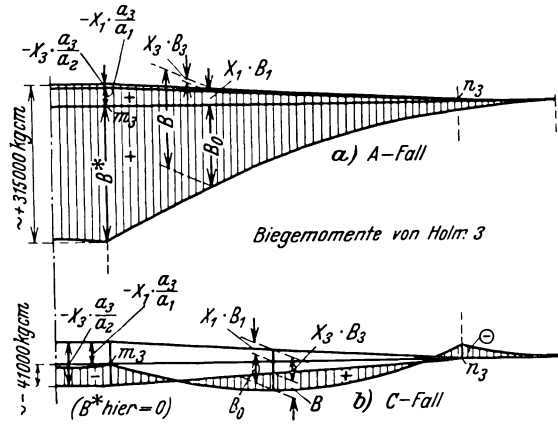


Abb. 258.

Entsprechend ergeben sich die Stabkräfte

$$S = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3$$

bzw. die Querkräfte

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1 + X_2 Q_2 + X_3 Q_3.$$

Aufgabe 80: Doppeldecker mit fünf Verbundstreben.

Für das in Abb. 259 dargestellte freitragende Doppeldecker-Tragwerk mit 5 Verbundstreben sind die Biegemomente und die Stabkräfte zu ermitteln. Die Stabkreuzungspunkte in der hinteren und vorderen Tragwand werden gelenkig angenommen.

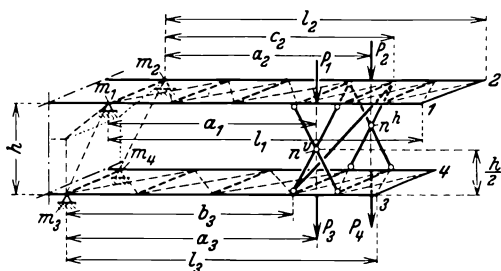


Abb. 259.

der Stabkräfte, also als statisch bestimmtes Hauptsystem zwei freitragende Einzelflügel einzuführen (Abb. 260). Ähnlich wie in vorhergehender Aufgabe ist aber im Sinne der Aufgaben 70 und 71 folgende Einführung der statisch Unbestimmten bzw. des Hauptsystems besser. Gemäß Abb. 261 werden an den Baldachin- bzw. Rumpfanschlußpunkten m_1, m_2, m_3, m_4 Gelenke in die Holme eingefügt; ferner werden in den Kreuzungspunkten n^v und n^h der Tragwandstreben durch Einschalten von Längsverschieblichkeiten die waagerechten Fesseln beseitigt, so daß in n^v und n^h nur noch lotrechte Kräfte vom Ober- zum Unterflügel übertragen werden können. Das so entstehende Hauptsystem ist einfach unstabil. Deshalb wird zusätzlich zur äußeren Belastung des Systems eine Gruppe von zwei waagerechten, willkürlich einander gleichgesetzten Kräften H^{*v} und H^{*h} in den Punkten n^v und n^h angesetzt, deren Größe so festzulegen ist, daß bei gleichzeitiger Wirkung der äußeren Belastung und dieser zusätzlichen Kräfte am Hauptsystem Gleichgewicht besteht.

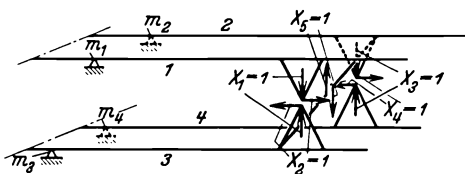


Abb. 260.

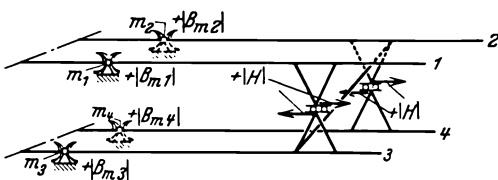


Abb. 261.

Als statisch Unbestimmte könnten die in Wirklichkeit an den Stellen m_1, m_2, m_3, m_4 auftretenden Biegemomente sowie eine der Kräfte H^v und H^h eingeführt werden; um aber solche Belastungszustände $X_1 = 1$ bis $X_5 = 1$ zu schaffen, für die das allgemein unstabile

1. Allgemeines.

Es liegt hier, ähnlich wie in vorhergehender Aufgabe, nahe, als statisch Unbestimmte fünf Komponenten zu ermitteln. Die Stabkreuzungspunkte in der hinteren und vorderen Tragwand werden gelenkig angenommen.

Hauptsystem stabil ist, werden als Unbekannte X_1 bis X_5 fünf Gruppen der Biegemomente $B_{m_1}, B_{m_2}, B_{m_3}, B_{m_4}$ und der Längsverbindungskräfte H^v, H^h gewählt, von denen jede für sich am Hauptsystem im Gleichgewicht steht.

2. Zustand „0“ (äußere Belastung) am unstabilen Hauptsystem.

Jede Tragwand wird für sich betrachtet; die dazu notwendigen Auflagerfesseln in Tiefenrichtung werden durch die Flügelfachwerke geliefert. Dann muß an jeder Tragwand Gleichgewicht bestehen zwischen den daran angreifenden waagerechten Stabkraftkomponenten H^* , den Knotenlasten P (das sind gedachte Einzellasten senkrecht über oder unter n^v und n^h , die bezüglich der Rumpf- bzw. Baldachinanschlußpunkte dieselben Momente erzeugen wie die verteilten Holmlasten), sowie der Kraft T in der diagonalen Verbundstrebe (Tiefenstrebe). Bei beliebig gewähltem H^* ergäbe sich aus den Gleichgewichtsbedingungen der Vorderwand für die Diagonalkraft T ein anderer Wert als aus den Gleichgewichtsbedingungen der Hinterwand.

Die zusätzlich zur gegebenen Belastung anzusetzenden Kräfte $H^{*v} = H^{*h} = H^*$ sind daher eindeutig festgelegt durch die Forderung:

$$T^{(v)} = T^{(h)}.$$

Aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_3 ergibt sich an der Vorderwand (Abb. 262):

$$T_z^{(v)} = P_3 \cdot \frac{a_3}{b_3} - \frac{1}{b_3} \left(V^v \cdot a_3 + H^{*v} \cdot \frac{h}{2} \right);$$

darin folgt V^v aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_1 :

$$V^v = H^{*v} \cdot \frac{h}{2a_1} - P_1.$$

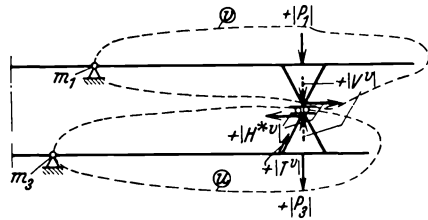


Abb. 262.

Entsprechend ergibt sich an der Hinterwand aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_2 :

$$T_z^{(h)} = -P_2 \cdot \frac{a_2}{c_2} - \frac{1}{c_2} \left(V^h \cdot a_2 - H^{*h} \cdot \frac{h}{2} \right);$$

darin folgt V^h aus $\sum M = 0$ bezüglich des Punktes m_4 :

$$V^h = -H^{*h} \cdot \frac{h}{2a_4} + P_4.$$

Die Bedingung $T^{(v)} = T^{(h)}$ ergibt dann wegen $H^{*v} = H^{*h} = H^*$:

$$H^* = 2 \cdot \frac{\frac{a_3}{b_3} (P_1 + P_3) + \frac{a_2}{c_2} (P_2 + P_4)}{h \left(\frac{a_1 + a_3}{a_1 b_3} + \frac{a_2 + a_4}{a_4 c_2} \right)}.$$

Wird der geringe Unterschied zwischen $a_3 : b_3$ und $a_2 : c_2$ vernachlässigt, so fällt H^* bei Belastung des Tragwerks durch ein verdrellendes Moment — also im Falle $(P_1 + P_3) = -(P_2 + P_4)$ — fort. D. h. an diesem Hauptssystem wird ein das Tragwerk verdrellendes Moment im wesentlichen nur von einem Paar waagerechter, die Flügelfachwerke belastender Kräfte aufgenommen. Das entspricht der Aufnahme eines solchen Momentes am wirklichen statisch unbestimmten System; denn da die Flügelfachwerke wesentlich steifer sind als die aus Dreigelenkrahmen bestehenden Tragwände, tragen auch beim statisch unbestimmten System in erster Linie die Flügelfachwerke zur Aufnahme eines solchen Momentes bei.

3. Zustände $X_1 = 1$ bis $X_5 = 1$ am unstabilen Hauptssystem.

Als Zustände $X_1 = 1$ bis $X_5 = 1$ werden fünf Belastungsgruppen entsprechend der folgenden Zusammenstellung eingeführt, wobei die jeweils an erster Stelle stehenden Größen B bzw. H^v zu „1“ gewählt werden; die an zweiter Stelle stehenden Ausdrücke für H sind so bestimmt, daß jeder dieser Zustände $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) am unstabilen System für sich im Gleichgewicht steht, daß also jeweils wieder die Forderung $T^{(v)} = T^{(h)}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \text{Zustand } X_1 = 1: & B_{m1,1} = 1; & H_1^v &= \frac{2}{h} \cdot \frac{a_3}{a_1 + a_3}; \\ \text{,, } X_2 = 1: & B_{m2,2} = 1; & H_2^h &= \frac{2}{h} \cdot \frac{a_4}{a_2 + a_4}; \\ \text{,, } X_3 = 1: & B_{m3,3} = 1; & H_3^v &= \frac{2}{h} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_3}; \\ \text{,, } X_4 = 1: & B_{m4,4} = 1; & H_4^h &= \frac{2}{h} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_4}; \\ \text{,, } X_5 = 1: & H_5^v = 1; & H_5^h &= -\frac{(a_1 + a_3) \cdot a_4 \cdot c_2}{(a_2 + a_4) \cdot a_1 \cdot b_3}. \end{aligned}$$

Die Kombination der dadurch bedingten Biegemomentenflächen B_1 bis B_5 untereinander und mit B_0 liefert in bekannter Weise (Anhang, Tabelle 94) die Bei- und Lastwerte $\delta_{i,k}$ der fünf Elastizitätsgleichungen für X_1 bis X_5 .

Nach Berechnung der Größen X_1 bis X_5 ergeben sich z. B. die endgültigen Biegemomentenflächen des statisch unbestimmten Systems zu:

$$B = B_0 + X_1 B_1 + X_2 B_2 + X_3 B_3 + X_4 B_4 + X_5 B_5.$$

Entsprechend gilt:

$$S = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 + X_4 S_4 + X_5 S_5;$$

$$Q = Q_0 + X_1 Q_1 + X_2 Q_2 + X_3 Q_3 + X_4 Q_4 + X_5 Q_5.$$

Um diesen Umständen Rechnung zu tragen, wird zur Herstellung eines geeigneten Hauptsystems die Lagerung der Zelle in den vier festen Punkten $m_1 \div m_4$ durch die gleichwertige, in Abb. 264 dargestellte Lagerung ersetzt gedacht. (Vgl. dazu Aufgabe 76 bis 78. Die gedachten Stäbe \bar{s} und \bar{t} werden starr angenommen.) Ähnlich wie in Aufgabe 78 wird dann als Hauptsystem das 3fach instabile System gewählt, welches entsteht, wenn die vier in X-Richtung verlaufenden Auflagerstäbe durchgeschnitten werden. [Das Koordinatensystem (Rechtssystem) wird so gelegt, daß die Z-Achse parallel dem Stab $m_3 \div m_4$ ist und die Verlängerung der Auflagerstäbe $f_{m3,y}$ bzw. $f_{m4,y}$ schneidet und daß ferner der Auflagerstab $f_{m3,z}$ von der Y-Achse getroffen wird; in Abb. 264 geht die Y-Achse überdies noch durch den Punkt m_3 , so daß seine Z-Koordinate $z_{m3} = 0$ ist.]

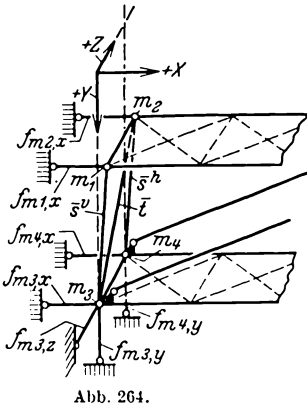


Abb. 264.

Damit an diesem 3fach instabilen Hauptsystem bei beliebiger Belastung Gleichgewicht besteht, müssen an Stelle der durchgeschnittenen Auflagerstäbe im allgemeinen jeweils 3 Kräfte oder 3 Kräftegruppen zusätzlich zur gegebenen Belastung hinzugenommen werden.

Als Zustand $X_1 = 1$ wird an Stelle der durchgeschnittenen Auflagerstäbe eine solche Gruppe von waagerechten Kräften eingeführt, die für sich am Hauptsystem im Gleichgewicht steht.

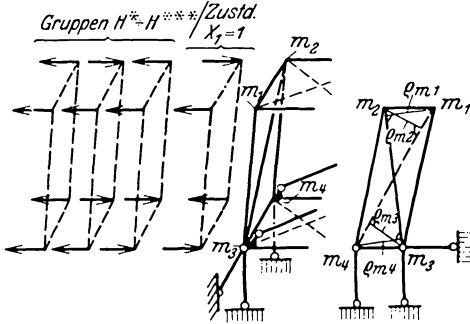


Abb. 265.

2. Zustand „0“ (äußere Belastung) am instabilen Hauptsystem.

Zur Herstellung des Gleichgewichts am 3fach instabilen Hauptsystem werden zusätzlich zur gegebenen äußeren Belastung, die durch 8 Knotenlasten $P_{m1} \div P_{m4}$, $P_{n1} \div P_{n4}$ (vgl. Aufgabe 28)

gegeben sei, an den Lagerpunkten $m_1 \div m_4$ drei Gruppen waagerechter Kräfte (als waagerechte Auflagerreaktionen) angesetzt (Abb. 265).

Zusatzgruppe

H^* : Vier gleiche Kräfte.

H^{**} : Zwei gleiche Kräfte an der Vorderwand und zwei diesen entgegengesetzt gleiche Kräfte an der Hinterwand.

H^{***} : Zwei gleiche Kräfte am Oberflügel und zwei diesen entgegengesetzt gleiche Kräfte am Unterflügel.

Es folgt (vgl. Abb. 264 und 265):

H^* aus der Bedingung, daß die Summe der X -Komponenten aller am Tragwerk angreifenden Kräfte verschwinden muß:

$$H^* = \frac{1}{4} \sum P_x;$$

H^{**} aus der Bedingung, daß die Summe der Momente um die Y -Achse, erstreckt über das ganze Tragwerk, verschwinden muß:

$$H^{**} = \frac{\sum (P_x \cdot z - P_z \cdot x)}{z_{m1} - z_{m2} + z_{m3} - z_{m4}}.$$

H^{***} aus der Bedingung, daß die Summe der Momente um die Z -Achse, erstreckt über das ganze Tragwerk, verschwinden muß:

$$H^{***} = \frac{\sum (P_x \cdot y - P_y \cdot x)}{y_{m1} + y_{m2} - y_{m3} - y_{m4}}.$$

Die Lagerreaktionen in den waagerechten Auflagerstäben $f_{m1,x}$ ÷ $f_{m4,x}$ sind dann:

$$\begin{aligned} F_{m1,x} &= H^* + H^{**} + H^{***}, & F_{m3,x} &= H^* + H^{**} - H^{***}, \\ F_{m2,x} &= H^* - H^{**} + H^{***}, & F_{m4,x} &= H^* - H^{**} - H^{***}. \end{aligned}$$

(Sie gelten als positiv, wenn sie entgegen der $+X$ -Richtung auf die Zelle wirken; vgl. S. 39.)

Die übrigen Lagerreaktionen $F_{m3,y}$, $F_{m3,z}$, $F_{m4,y}$ in den Fesseln $f_{m3,y}$, $f_{m3,z}$ und $f_{m4,y}$ können in bekannter Weise aus der Seitenansicht (Abb. 265) berechnet werden; z. B. folgt aus der Bedingung, daß die Summe der Momente aller Kräfte bezüglich einer durch m_4 gehenden Parallelen zur X -Achse verschwinden muß:

$$F_{m3,y} = \frac{1}{z_{m4} - z_{m3}} \cdot \sum [P_z \cdot (y - y_{m4}) - P_y \cdot (z - z_{m4})].$$

(Die Reaktionen $F_{m3,y}$, $F_{m3,z}$, $F_{m4,y}$ gelten als positiv, wenn sie entgegen der $+Y$ - bzw. $+Z$ -Richtung auf die Zelle wirken.)

Um die Ermittlung der Stabkräfte S , die bei gleichzeitiger Wirkung der gegebenen äußeren Belastung und der Zusatzgruppen H^* , H^{**} , H^{***} (zusammen mit den übrigen Lagerreaktionen) am Hauptssystem auftreten, möglichst einfach zu gestalten, werden folgende Voraussetzungen gemacht: Die Exzentrizitäten e der Holmanschlüsse in der vorderen Tragwand seien gleich denen in der hinteren Tragwand; die Tragwände seien eben; die Baldachin- und Rumpfanschlußpunkte seien in einer Ebene angeordnet, die ebenso wie die Ebenen der N -Scheibe und der Flügelfachwerke senkrecht zur Aufrißebene XY gelegen ist.

Von den Verspannungsseilen seien die nach rechts steigenden Haupttragseile wirksam (*A*-Fall-Belastung).

Zur Berechnung der Kräfte in den Stäben *s*, *d*, *t* (vgl. Abb. 266) sowie in den (gedachten) Hilfsstäben \bar{s} , \bar{t} werden zunächst die Vorder-

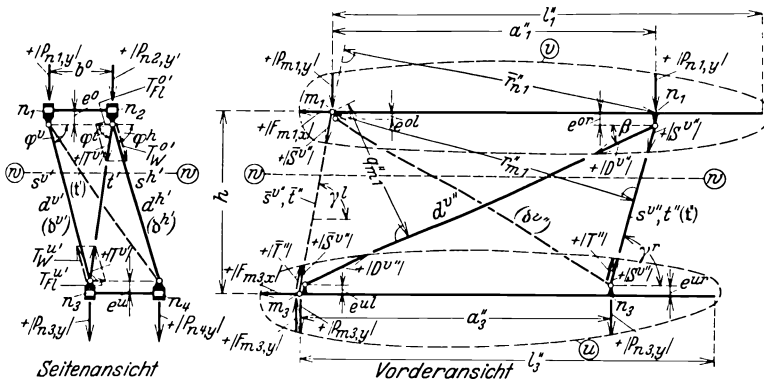


Abb. 266.

ansichten der Tragwände für sich betrachtet; die Gleichungen für die genannten Stabkräfte werden so aufgestellt, daß sie keine der Stabkräfte enthalten, die in den Flügelfachwerken auftreten.

Bedeutet z. B.

- r''_{m1} den Hebelarm von S'' oder T'' bzgl. des Punktes m_1 ,
- \bar{r}''_{n1} „ „ „ „ \bar{S}'' „ „ „ „ \bar{T}'' „ „ „ „ n_1 ,
- q''_{m1} „ „ „ „ L'' „ „ „ „ m_1

usw. in der Vorderansicht, Abb. 266, so gelten an der Vorderwand folgende Gleichgewichtsbedingungen a) ÷ d) *:

* Die folgenden Formeln für die Stabkraftberechnung sind zur Vereinfachung so aufgestellt, als ob die Stäbe *s*, *t*, *d* in der Seitenansicht zentrisch angeschlossen wären. Bei genauerer Rechnung müßte z. B. im Punkt n_1 außer $P_{n1,y}$ noch eine lotrechte Zusatzkraft $\Delta P_{n1,y}$ als Auflagerreaktionskraft der Verbundseibenrippe hinzutreten. $\Delta P_{n1,y}$ folgt aus den Exzentrizitätsmomenten der Verbundseibenrippe (vgl. Abb. 266 Seitenansicht):

$$\Delta P_{n1,y} = \frac{e^o}{b^o} [(S^{h'} + D^{h'}) \operatorname{csc} \varphi^h + (S^{v'} + D^{v'}) \cos \varphi^v - T' \cos \varphi^t].$$

Entsprechend wäre in n_2 eine zusätzliche Kraft $\Delta P_{n2,y} = -\Delta P_{n1,y}$ hinzuzufügen; ähnliches gilt für n_3 und n_4 .

Für die Aufstellung fertiger Stabkraftformeln empfiehlt es sich im allgemeinen, statt der in diesem Einzelbeispiel gezeigten Berechnungsweise ähnlich wie in Aufgabe 78 zunächst sieben Knotenpunktgleichungen und eine Momentengleichung aufzustellen; als erstere werden zweckmäßig die Bedingungen gewählt, daß an jedem Knoten die Summe der Stabkraftkomponenten senkrecht zur anschließen-

- a) $\sum M''_{n1} = 0$ (Schnitt v):
 $+ S^{v''} r''_{m1} + D^{v''} q''_{m1} + P_{n1,v} a''_1 = 0,$
- b) $\sum M''_{m3} = 0$ (Schnitt u):
 $- S^{v''} r''_{m3} + D^{v''} q''_{m3} - T'' r''_{m3} + P_{n3,v} a''_3 = 0,$
- c) $\sum M''_{n1} = 0$ (Schnitt v):
 $- \bar{S}^{v''} \bar{r}''_{n1} + S^{v''} r''_{n1} + D^{v''} q''_{n1} - P_{m1,v} a''_1 = 0,$
- d) $\sum M''_{n3} = 0$ (Schnitt u):
 $+ \bar{T}'' \bar{r}''_{n3} + \bar{S}^{v''} \bar{r}''_{n3} + S^{v''} r''_{n3} + D^{v''} q''_{n3}$
 $+ T'' r''_{n3} + (F_{m3,v} - P_{m3,v}) a''_3 = 0.$

Aus den Gleichungen a) und b) folgen $S^{v''}$ und $D^{v''}$ als Funktionen von T'' und damit $S^v = S^{v''} \frac{s^v}{s^{v''}}$ und $D^v = D^{v''} \frac{d^v}{d^{v''}}$ als Funktionen von $T = T'' \frac{t}{t''}$; mit den Ausdrücken für $S^{v''}$ und $D^{v''}$ nach a) und b) folgen weiterhin aus den Gleichungen c) und d) \bar{T}'' und $\bar{S}^{v''}$ bzw. \bar{T} und \bar{S}^v als Funktionen von T'' bzw. von T .

Entsprechend den Gleichungen a) ÷ d) können an der Hinterwand vier weitere Gleichungen e) ÷ h) aufgestellt werden, aus denen S^h , D^h , \bar{S}^h und nochmals \bar{T} , ebenfalls als Funktionen von T folgen. (Dabei ist zu beachten, daß die Stäbe t und \bar{t} an der Hinterwand am Oberholm angeschlossen sind.)

Ähnlich wie in Aufgabe 78 (S. 257) ist aber die achte Gleichung h) nicht linear unabhängig von den übrigen Gleichungen, so daß zur Berechnung der achten Unbekannten T noch eine weitere Gleichung aufgestellt werden muß. Zu diesem Zwecke wird noch ein Schnitt w gelegt, der den Oberflügel vom Unterflügel trennt. Die Bedingung, daß in der (nicht gezeichneten) Draufsicht z. B. die Summe der Momente aller am Unterflügel angreifenden Kräfte bezüglich des Punktes m_3 verschwinden muß, liefert dann eine Gleichung zur Bestimmung der Stabkraft T aus ihrer Grundrißprojektion $T''' = T \cdot \frac{t'''}{t}$. (In diese Gleichung gehen

den Querwand verschwinden muß (vgl. dazu Ebner²⁰). Dabei wird zunächst an Stelle der Ausfachung jedes Einzelflügels zwischen der Anschlußwand und dem N -Stiel je eine „Ersatzdiagonale“ angenommen. Bezüglich der Holmkräfte ist zu beachten, daß wegen der exzentrischen Stabanschlüsse in den Holmen außer den Längskräften noch Querkräfte von der Größe M_e/a auftreten. (M_e ist jeweils das von den Diagonal- bzw. Stielkräften usw. ausgeübte Exzentrizitätsmoment, a die Holmfeldlänge.)

Zur Korrektur der Flügelfachwerkkräfte werden zum Schluß die Kräfte, die von den gedachten Ersatzdiagonalen auf deren Anschlußpunkte ausgeübt werden, in umgekehrtem Sinne an den wirklichen Flügelfachwerken angebracht; die sich damit ergebenden Stabkräfte der Einzelscheiben werden den ursprünglich gefundenen überlagert („Ersatzstabverfahren“; vgl. auch Aufgabe 31 und S. 259).

außer den Grundrißprojektionen von S^v , S^h , T , D^h , \bar{S}^h noch die am Unterflügel angreifenden Kräfte in der X - und Z -Richtung, darunter auch die Fesselkraft $F_{m_4, x}$ ein; vgl. auch Aufgabe 36.)

Zur Berechnung der Holmlängskräfte und der Stabkräfte in den Gliedern der Flügel-Innenverspannung wird die Kraft T bei Punkt n_2 in Komponenten parallel dem Oberflügel und der Hinterwand bzw. bei Punkt n_3 in Komponenten parallel dem Unterflügel und der Vorderwand zerlegt (T_{Fl} , T_W , vgl. Abb. 266, Seitenansicht). Desgleichen werden die äußeren Knotenlasten P_y in Komponenten parallel den Flügelebenen bzw. den Tragwänden ($P_{y, Fl}$ und $P_{y, W}$) zerlegt, so daß nunmehr die Einzelflügel und die Tragwände als selbständige, in den Punkten m gelagerte Scheiben angesehen werden können.

Die Holme erhalten dann gemäß ihrer Zugehörigkeit zu den Tragwänden, die mit T_W , $P_{y, W}$ (und gegebenenfalls mit äußeren Lasten P_x) belastet sind, über ihre Länge konstante Längskräfte; außerdem erhalten sie abgestufte Längskräfte entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu den Flügelfachwerken, die mit T_{Fl} , $P_{y, Fl}$ und den äußeren Kräften P_z belastet sind; letztere kommen dadurch zustande, daß der Stirndruck in eine Reihe von Einzellasten P_z aufgeteilt wird, die an den einzelnen Knoten der Flügelfachwerke angreifen.

Dazu treten für die Holme als Einzelträger $m_1 \div n_1$ bis $m_4 \div n_4$ die verteilten Querlasten p_1 , p_2 , p_3 , p_4 sowie Krag- und Exzentrizitätsmomente. Für letztere gilt z. B. bei gleichmäßig verteilter Belastung p : am Holm 1, bei n_1 :

$$M_{kr}^r + M_e^r = + \frac{p_1(l_1 - a_1)^2}{2} + (D^v'' \cos \beta + S^v'' \cos \gamma^r) \cdot e^{\sigma r} \quad (\text{Abb. 266}),$$

am Holm 3, bei m_3 :

$$M_e^l = + (D^v'' \cos \beta) \cdot e^{u l},$$

bei n_3 :

$$M_{kr}^r + M_e^r = + \frac{p_3(l_3 - a_3)^2}{2} + (S^v'' + T'') \cos \gamma^r \cdot e^{u r}$$

usw.

Entsprechend folgen aus der Seitenansicht, Abb. 266, die von S^v , S^h , D^v , D^h und T auf die Verbundscheiben-Rippen $n_1 \div n_2$ und $n_3 \div n_4$ ausgeübten Exzentrizitätsmomente.

3. Zustand $X_1 = 1$ am instabilen Hauptsystem.

Als Zustand $X_1 = 1$ wird an Stelle der durchschnittlichen Auflagerstäbe eine Gruppe von 4 Fesselkräften $F_{m_1, x} \div F_{m_4, x}$ eingeführt (Abb. 265), die für sich am instabilen Hauptsystem im Gleichgewicht steht. Eine dieser Kräfte wird beliebig gewählt; die übrigen werden so bestimmt, daß ihre Summe sowie die Summen ihrer Momente bezüglich der Achsen $m_1 \div m_4$ und $m_2 \div m_3$ (Abb. 265) verschwinden:

$$\text{Zustand } X_1 = 1: \quad \begin{cases} F_{m1,x} = + Q_{m4} (Q_{m3} + Q_{m2}), \\ F_{m2,x} = - Q_{m3} (Q_{m1} + Q_{m4}), \\ F_{m3,x} = - Q_{m2} (Q_{m1} + Q_{m4}), \\ F_{m4,x} = + Q_{m1} (Q_{m3} + Q_{m2}). \end{cases}$$

(Eine der Kräfte könnte natürlich auch wie sonst zu „1“ gewählt werden, dann würden aber die Ausdrücke für die übrigen Kräfte weniger übersichtlich; diese Gruppe ist eine Verallgemeinerung der in Aufgabe 77 und 78 eingeführten Wölbkraftgruppe W .)

Für die Stabkräfte S_1 infolge von $X_1 = 1$ und die auch hier auftretenden Exzentrizitätsmomente der Holme bzw. der Verbundscheibenrippen gilt Ähnliches wie bei Zustand 0.

4. Andere Wahl des Hauptsystems.

Ein das Tragwerk verdrillendes Moment wird bei dem oben eingeführten Hauptsystem von den Flügelfachwerken und den Tragwänden aufgenommen. Wenn nun die Flügelfachwerke, z. B. infolge einer Beplankung, wesentlich steifer sind als die Tragwände, was besonders bei exzentrischen Holmanschlüssen der Fall sein kann, wird aber am statisch unbestimmten System ein solches Moment ähnlich wie bei dem in Aufgabe 80 behandelten System zum größten Teil von den Flügelfachwerken allein aufgenommen.

Bei derartiger Ausbildung des Tragwerks wird geringere Abweichung zwischen den Beanspruchungen des Hauptsystems und denen des statisch unbestimmten Systems erreicht, wenn als Hauptsystem dasjenige einfach unstarre System gewählt wird, das aus dem gegebenen Tragwerk entsteht, wenn die (am vollständigen System wirksamen) Diagonalen der Vorder- und Hinterwand (nach den eingangs gemachten Voraussetzungen also hier die Haupttragseile) durchgeschnitten gedacht werden.

Damit an diesem System bei beliebiger Belastung Gleichgewicht möglich ist, werden an den Schnittstellen der Tragwanddiagonalen zwei Diagonalkräfte D^{*v} und D^{*h} zusätzlich zur jeweils wirksamen äußeren Belastung angebracht. Ihre senkrechten Komponenten werden willkürlich einander gleichgesetzt: D_y^* ; diese Stabkraftkomponenten D_y^* seien positiv, wenn sie am rechten Schnittpunkt nach unten wirken (Abb. 267); im Falle, daß am wirklichen statisch unbestimmten System die nach rechts steigenden Diagonalen maßgebend sind, ergeben sich bei positivem D_y^* also darin Zugkräfte (ist dagegen am wirklichen System in einer oder in beiden Wänden die Gegendiagonale maßgebend und ergibt sich positives D_y^* , so erhält sie am Hauptsystem eine Druckkraft).

Der anzusetzende Wert D_y^* folgt aus der Bedingung, daß sich für die Kraft T in der Tiefenstrebe derselbe Wert ergeben muß, wenn diese aus Gleichgewichtsbedingungen der Vorderwand [Gleichung a) und b) auf S. 273] oder aus den entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen der Hinterwand berechnet wird. Aus dieser Bedingung $T^{(v)} = T^{(h)}$ (vgl. Aufgabe 79 und 80) folgt unter den auf S. 271 angegebenen vereinfachenden Voraussetzungen (Abb. 267; nach rechts steigende Diagonale wirksam):

$$D_y^* = - \frac{(P_{n1,y} + P_{n2,y}) \frac{a_1''}{r_{m1}''} + (P_{n3,y} + P_{n4,y}) \frac{a_2''}{r_{m3}''}}{2 \frac{d''}{d_y} \left(\frac{q_{m1}''}{r_{m1}''} + \frac{q_{m3}''}{r_{m3}''} \right)}$$

(sofern sie nicht überhaupt als biegestarr angesehen werden). Die Berechnung der statisch Unbestimmten X_1 erfolgt dann ähnlich wie in den Aufgaben 69 und 72 in mehreren Rechnungsgängen:

Rechnungsgang I.

Entsprechend S. 192 wird zur Knickbiegungsberechnung der Holme (zwecks Ermittlung ihrer Endneigungen τ^l und τ^r und der Durchbiegungen δy^m in den Holmfeld-Mittelpunkten) zunächst angenommen, die Holmlängskräfte des statisch unbestimmten Systems seien gleich denen des Hauptsystems bei Wirkung des Zustands 0 allein. Desgleichen wird ferner zur Berechnung der Holmsehnenverkürzungen $\delta a \sim -\frac{8}{3a}(\delta y^m)^2 + \frac{32}{5a^3}(\delta y^m)^4$ angenommen, die Holmdurchbiegungen δy^m des statisch unbestimmten Systems seien gleich denen des Hauptsystems bei äußerer Belastung.

Die Elastizitätsgleichung heißt:

$$X_1^I \cdot \delta_{1,1} + \delta_{1,0} = 0.$$

Allgemein ist:

$$\delta_{1,0} = \sum_{(1)} S_1 \frac{S_0 s}{EF} + \sum_{(2)} \int B_1 \frac{B_0 dx}{EJ} + \sum_{(3)} S_1 \cdot \delta a,$$

$$\delta_{1,1} = \sum_{(1)} S_1 \frac{S_1 s}{EF} + \sum_{(2)} \int B_1 \frac{B_1 dx}{EJ}.$$

Die Summen $\sum_{(1)}$ zur Berücksichtigung der Stablängenänderungen infolge der Längskräfte erstrecken sich über alle Stäbe.

Die Summen $\sum_{(2)}$ zur Berücksichtigung der Biegung bzw. Knickbiegung erstrecken sich nur über die vier Holme und über die Rippen der Verbundscheibe (sofern diese nicht zur Vereinfachung als biegestarr angesehen werden). Bei denjenigen Holmen, die Knickbiegung erhalten (s. oben), ist entsprechend S. 192 zu setzen:

$$\int B_1 \frac{B_0 dx}{EJ} = B_1^l \cdot \tau_0^l - B_1^r \cdot \tau_0^r \quad \text{bzw.} \quad M_1^l \cdot \tau_0^l + M_1^r \cdot \tau_0^r,$$

$$\int B_1 \frac{B_1 dx}{EJ} = B_1^l \cdot \tau_1^l - B_1^r \cdot \tau_1^r \quad \text{bzw.} \quad M_1^l \cdot \tau_1^l + M_1^r \cdot \tau_1^r.$$

Die Größen M_1^l und M_1^r sind die bei Zustand 1 am linken und rechten Holmanschlußpunkt angreifenden Exzentrizitätsmomente $M_{e,1}^l$ und $M_{e,1}^r$ (S. 275).

Die Holmendneigungen τ^l und τ^r an den Holmanschlußpunkten infolge der Zustände 0 und 1 können mit den Holmquerbelastungen p_0 , $M_{e,0}^l$, $M_{kr,0}^r$, $M_{e,0}^r$ des Zustands 0 bzw. mit $M_{e,1}^l$, $M_{e,1}^r$ des Zustands 1 entsprechend Aufgabe 55 bis 58 berechnet werden. Es ist aber zu beachten, daß bei der Knickbiegungsrechnung die Längskräfte für beide

Zustände 0 und 1 gleich denen des Zustands 0, also gleich den Größen S_0 zu setzen sind ($\alpha = a \sqrt{|S_0|/EJ}$; nur in die Querbelastung $M'_{e,1}$ und $M''_{e,1}$ geht S_1 ein!).

Die Summe $\sum_{(3)}$ zur Berücksichtigung der Sehnenverkürzung erstreckt sich nur über die Holme. Dabei wird zur Vereinfachung jeder Holm nur als je ein Einzelstab angesehen; dann bedeutet S_1 hinsichtlich jedes Holmes den Mittelwert der über seine Länge abgestuften Längskraft, die beim Zustand $X_1 = 1$ im Holm auftritt. (Der Einfluß der Sehnenverkürzung der Verbundscheiben-Rippen ist im allgemeinen vernachlässigbar klein.)

Rechnungsgang II.

Die Elastizitätsgleichung heißt:

$$X_1^I \cdot \delta_{1,1}^I + \delta_{1,0}^I = 0.$$

Die Berechnung der Werte $\delta_{i,k}^I$ erfolgt wie vorher; nur mit dem Unterschied, daß jetzt zur Durchführung der Knickbiegungsrechnungen für beide Zustände 0 und 1 in $\alpha = a \sqrt{S/EJ}$ die verbesserten Längskräfte

$$S = S_0 + X_1^I \cdot S_1$$

einzuführen sind. Entsprechend werden in $\sum_{(3)} S_1 \cdot \delta a$ zur Berechnung von δa die verbesserten Durchbiegungen

$$\delta y^m = \delta y_0^m + X_1^I \cdot \delta y_1^m$$

eingesetzt.

In entsprechender Weise können weitere Rechnungsgänge durchgeführt werden.

II. Vorgespannte Diagonalen.

Die Ausführungen unter I. gelten unter der Voraussetzung, daß von den Tragwanddiagonalen nur je eine, und zwar die nach rechts steigende Hauptdiagonale wirksam ist, daß also bei dem gegebenen Belastungszustand in den nach rechts fallenden Gegendiagonalen die ursprünglich vorhandene Vorspannung bereits überschritten ist (Aufgabe 60):

Die Ausführungen gelten natürlich auch noch für den Fall, daß statt einer N-förmigen Verbundscheibe aus drei drucksteifen Stäben eine durch Seile oder Drähte ausgekreuzte Verbundscheibe vorliegt, worin die Vorspannung der nach vorn steigenden Diagonale überschritten ist.

Ist die ursprüngliche Vorspannung in allen Diagonalen jedoch so groß, daß bei dem zu untersuchenden Belastungszustand auch noch die Gegendiagonalen δ^v und δ^h der Tragwände sowie bei verspannter Verbundscheibe auch noch die andere Tiefendiagonale t wirksam bleiben, so treten drei weitere statisch Unbestimmte X_2 , X_3 und X_4 auf. Als Hauptsystem dient das gleiche einfach un stabile System wie unter I.; nur

muß jetzt auch noch je ein Anschluß der vorher nicht beachteten Tragwandgegendiaagonalen δ^v und δ^h sowie ein Anschluß der überzähligen zweiten Verbundscheibendiagonale t gelöst gedacht werden.

Bei den Zuständen 0 und $X_1 = 1$ ändert sich gegenüber I . nichts.

Als Zustände $X_2 = 1$ bis $X_4 = 1$ werden in den Gegendiaagonalen δ^v bzw. δ^h bzw. t der Tragwände und der Verbundscheibe Kräfte $\mathfrak{D}^v = 1$ bzw. $\mathfrak{D}^h = 1$ bzw. $\mathfrak{T} = 1$ eingeführt (Abb. 266 und 267). Bei der Wahl des Hauptsystems nach Abschnitt I, 1 bis 3 stehen diese Zustände am unstabilen Hauptsystem für sich im Gleichgewicht und erzeugen nur Stabkräfte in der vorderen bzw. in der hinteren Tragwand bzw. in der Verbundscheibe allein*.

Falls das Hauptsystem nach Abschnitt I, 4 gewählt wird, muß bei den Zuständen $X_2 = 1$ gleichzeitig mit der Kraft $\mathfrak{D}^v = 1$ an der Schnittstelle des vorderen Gegenseils auch an der Schnittstelle des Haupttragseils eine Kraft angebracht werden, und zwar:

$$D^v = \frac{d^v}{d''} \cdot \frac{\delta''}{\delta^v} \cdot \frac{r''_{m1} q''_{m3} + r''_{m3} q''_{m1}}{r'_{m1} q'_{m3} + r'_{m3} q'_{m1}},$$

da sonst kein Gleichgewicht am unstabilen Hauptsystem möglich ist. Der Ausdruck für D^v folgt aus der Forderung, daß beim Zustand $X_3 = 1$ an der vorderen Tragwand für sich Gleichgewicht bestehen soll [analog den Gleichungen a) und b) auf S. 273; $T = 0$]. Entsprechendes gilt für den Zustand $X_3 = 1$ an der Hinterwand.

Der oben angegebene Zustand $X_4 = 1$ steht ohne weiteres auch am Hauptsystem nach Abschnitt I, 4 im Gleichgewicht.

Die Unbekannten X_1 bis X_4 folgen aus vier Elastizitätsgleichungen; ergibt die Durchrechnung für eines der Verspannungsglieder eine Druckkraft, deren Betrag größer ist als der der ursprünglichen Vorspannungskraft, so fällt im allgemeinen dieses Glied aus; die Rechnung ist dann für ein 3- (bzw. 2- oder 1-)fach statisch unbestimmtes Restsystem zu wiederholen.

In dem maßgebenden Restsystem müssen sich bei Wirkung der äußeren Belastung in allen Verspannungsgliedern Zugkräfte bzw. solche Druckkräfte ergeben, deren Absolutbetrag kleiner ist als der der ursprünglich darin vorhandenen Vorspannungskräfte. Ob ein solches Restsystem das richtige ist, kann einwandfrei durch folgendes Kriterium nachgewiesen werden:

In jedem weiteren System, welches durch Wiedereinfügen irgend eines der ausgefallenen Seile entsteht, muß bei Wirkung der äußeren Belastung eines der Verspannungsglieder eine so große Druckkraft erhalten, daß es ausfällt (vgl. hierzu Ebner⁵⁶).

Ganz allgemein kann zur exakten Feststellung des richtigen Restsystems auch folgender Weg eingeschlagen werden (vgl. Aufgabe 60):

Bei einem hinreichend niedrigen Lastvielfachen n ist das System 4fach statisch unbestimmt. Steigt das Lastvielfache nun bis zu einer gewissen Stufe n_n , so erreicht in einem Seil die sich dabei ergebende Druckkraft den Betrag der Vor-

* Vgl. die Anmerkung zu S. 272.

spannung, so daß bei $n > n_a$ zunächst dieses Seil ausfällt und das System nur noch 3fach statisch unbestimmt bleibt. Dieses zuerst ausfallende Seil werde mit d_a bzw. die damit ausscheidende statisch Unbestimmte mit X_a bezeichnet. Außer der Unbekannten X_1 , die auf alle Fälle wirksam bleibt, liegen dann noch zwei weitere der statisch Unbestimmten, X_b und X_c , vor.

Steigt das Lastvielfache über n_a hinaus, so scheidet von einer gewissen Stufe n_b ab ein zweites Seil d_b und damit die statisch Unbestimmte X_b aus, so daß von jetzt ab ein nur 2fach statisch unbestimmtes System mit X_1 und X_c vorliegt.

Entsprechend scheidet bei einem Lastvielfachen n_c auch noch d_c und somit X_c aus, so daß dann ein 1fach statisch unbestimmtes System vorliegt, wie es in Teil I in dieser Aufgabe behandelt wurde. — Es ist aber auch der Fall denkbar, daß vorher bei einer Laststufe n' ($n_b < n' < n_c$) an dem 2fach statisch unbestimmten System mit X_1 und X_c die Entfernung der Anschlußpunkte des zuerst ausgefallenen Seiles d_a wieder so groß wird, daß von der Laststufe n' ab das vorher schlaffe Seil d_a wieder gespannt wird und somit nach Überschreiten von n' wieder ein 3fach statisch unbestimmtes System mit X_1 , X_a , X_c vorliegt; daher muß also vor dem Übergang zur Laststufe n_c die Abstandsänderung der Anschlußpunkte von d_a am 2fach statisch unbestimmten System (mit X_1 und X_c) daraufhin

nachgerechnet werden, ob sie nicht den Betrag $\delta d_a = \frac{S_a^y \cdot d_a}{E F_a}$ überschreitet; dabei bedeutet S_a^y die ursprünglich vorhandene Vorspannkraft, $E F_a$ die Längssteifigkeit, d_a die Länge des zuerst ausgefallenen Seiles (vgl. dazu Aufgabe 61; es bleibt sich praktisch gleich, ob als d_a die Länge des betreffenden Seiles in schlaffem oder vorgespanntem Zustand gewählt wird).

In der Praxis wird heute zumeist noch die statisch unbestimmte Rechnung unter der Annahme durchgeführt, daß in jedem verspannten Feld nur ein Seil wirksam ist, wie es im ersten Teil dieser Aufgabe geschah. Dann muß aber nachträglich für jede einzelne verspannte Wand eine zusätzliche Untersuchung entsprechend Aufgabe 60 erfolgen.

Aufgabe 82: Doppeldecker mit durchgehenden Oberflügelholmen.

Die Biegemomente und Stabkräfte des in Abb. 268 dargestellten verspannten Doppeldeckertragwerks mit durchgehenden Oberflügelholmen

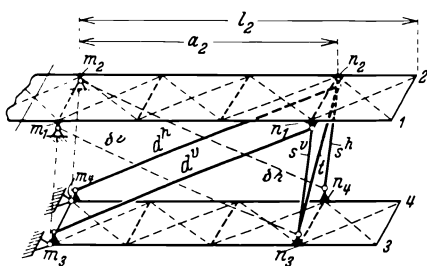


Abb. 268.

sind für einen Belastungszustand, bei dem die Haupttragseile maßgebend sind, unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 81, I zu ermitteln.

Es wird angenommen, daß die Baldachin- und Rumpfstäbe starr und die Oberholme auf dem Baldachin statisch bestimmt gelagert sind.

Das System ist ein räumliches Fachwerk mit biegefesten Knoten bei m_1 und m_2 . Unter Berücksichtigung der Symmetrie zur Flugzeug-Längsachse ergeben sich zwei statisch Unbestimmte mehr als in Beispiel 81, I, nämlich die Holmbiegemomente bei m_1 und m_2 ; das System ist also dreifach statisch unbestimmt.

Als Hauptsystem wird dasselbe instabile System gewählt wie in Abschnitt I, 1 bis 3 oder I, 4 des vorhergehenden Beispiels; für die Zustände 0 und $X_1 = 1$ gilt dementsprechend dasselbe wie dort.

Als Zustände $X_2 = 1$ und $X_3 = 1$ werden die in Tabelle 80 angeschriebenen Belastungsgruppen gewählt, von denen jede für sich am Hauptsystem im Gleichgewicht steht.

Die an erster Stelle genannten Größen sind willkürlich gewählt; die übrigen Größen folgen aus der Bedingung, daß jede der Gruppen für sich am instabilen Hauptsystem im Gleichgewicht stehen muß. Sie sind so gewählt, daß bei den Zuständen $X_2 = 1$ und $X_3 = 1$ jeweils nur der Oberflügel und eine Tragwand beansprucht werden. Die angegebenen Ausdrücke für die Kräfte $F_{m,x}$ beim erstgenannten Hauptsystem folgen an Hand von Abb. 269 (Seitenansicht), indem das am Flügelholm in m_1 bzw. m_2 angesetzte Moment „1“ in zwei Komponenten parallel der Oberflügel- und der betreffenden Tragwandebene zerlegt wird. Die Ausdrücke für D^v und D^h beim zweitgenannten Hauptsystem folgen entsprechend S. 273 aus den Gleichgewichtsbedingungen der vorderen bzw. hinteren Tragwand in der Vorderansicht (N -Scheibendiagonalkraft $T = 0$).

Tabelle 80. Zustände $X_2 = 1$ und $X_3 = 1$ (Bezeichnungen s. Abb. 269).

Bei Wahl eines dreifach instabilen Hauptsystems nach Aufgabe 81, Abschnitt I, 1-3	$X_2 = 1$	$X_3 = 1$	Bei Wahl eines einfach instabilen Hauptsystems nach Aufgabe 81, Abschnitt I, 4.	$X_2 = 1$	$X_3 = 1$
	$B_{m_1} = +1$	$B_{m_2} = +1$		$B_{m_1} = +1$	$B_{m_2} = +1$
	$F_{m_1,x} = -\frac{ctg \varphi^v}{b^v} + \frac{1}{h}$	$F_{m_1,x} = -\frac{ctg \varphi^h}{b^v}$		$D^v = -\frac{r''_{m_3}}{q''_{m_1} r''_{m_3} + q''_{m_3} r''_{m_1}} \cdot \frac{d^v}{d'}$	$D^h = -\frac{r''_{m_4}}{q''_{m_2} r''_{m_4} + q''_{m_4} r''_{m_2}} \cdot \frac{d^h}{d'}$
	$F_{m_2,x} = +\frac{ctg \varphi^v}{b^v}$	$F_{m_2,x} = +\frac{ctg \varphi^h}{b^v} + \frac{1}{h}$			
	$F_{m_3,x} = -\frac{1}{h}$	$F_{m_4,x} = -\frac{1}{h}$			

Die Berechnung der Unbekannten erfolgt wieder in mehreren Rechnungsgängen.

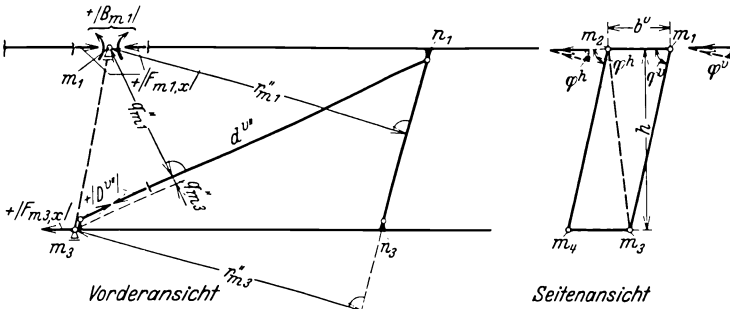


Abb. 269.

Rechnungsgang I.

Die Elastizitätsgleichungen heißen:

$$\begin{aligned}
 X_1^I \cdot \delta_{1,1} + X_2^I \cdot \delta_{1,2} + X_3^I \cdot \delta_{1,3} + \delta_{1,0} &= 0, \\
 X_1^I \cdot \delta_{2,1} + X_2^I \cdot \delta_{2,2} + X_3^I \cdot \delta_{2,3} + \delta_{2,0} &= 0, \\
 X_1^I \cdot \delta_{3,1} + X_2^I \cdot \delta_{3,2} + X_3^I \cdot \delta_{3,3} + \delta_{3,0} &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Bei- und Lastwerte $\delta_{i,k}$ erfolgt in derselben Weise wie in der vorhergehenden Aufgabe, nur mit dem Unterschied, daß in die Summen Σ hier auch die Formänderungsanteile des Baldachins eingehen.

Zur Ausnutzung der Symmetrie des Gesamtsystems zur Flugzeuglängsachse sind die Zustände $X_1 = 1$ bis $X_3 = 1$ gleichzeitig links und rechts von der Flugzeugmitte angebracht zu denken; die Formänderungsanteile des Baldachinfeldes sind nur mit der Hälfte ihres Betrages in die Summenausdrücke einzuführen, wenn von den Formänderungsanteilen des übrigen Tragwerks nur die der rechten oder linken Einzelzelle eingesetzt werden (vgl. Aufgabe 45, Ausnutzung der Symmetrie).

Rechnungsgang II.

An Stelle der im ersten Rechnungsgang zur Berücksichtigung der Knickbiegung bei allen Zuständen angesetzten Holmlängskräfte S_0 treten die verbesserten Werte

$$S^I = S_0 + X_1^I \cdot S_1 + X_2^I \cdot S_2 + X_3^I \cdot S_3.$$

An Stelle der im ersten Rechnungsgang zur Berücksichtigung der Sehnenverkürzung angesetzten Größen δy_0^m tritt

$$\delta y^{mI} = \delta y_0^m + X_1^I \cdot \delta y_1^m + X_2^I \cdot \delta y_2^m + X_3^I \cdot \delta y_3^m.$$

Damit werden die neuen Werte $\delta_{i,k}^I$ ermittelt; die Elastizitätsgleichungen liefern damit die verbesserten Werte X_i^{II} usw.

Andere Berechnungsweise.

Da im allgemeinen bei Fachwerken (S. 27) biegungssteife Knoten wenig Einfluß auf die Stabkräfte und Knotenpunktverschiebungen haben und daher meist überhaupt vernachlässigt werden („Vernachlässigung der Nebenspannungen“), so liegt auch folgender Weg zur Durchführung der Berechnung nahe:

Das System wird zunächst unter Annahme gelenkiger Knoten bei m_1 und m_2 als einfach statisch unbestimmtes Gelenkfachwerk (nach Aufgabe 81, I) berechnet. Die Stabkräfte und Biegemomente infolge äußerer Belastung dieses einfach statisch unbestimmten Gelenkfachwerks sind:

$$S' = S_0 + X'_1 \cdot S_1 \quad \text{und} \quad B' = B_0 + X'_1 \cdot B_1;$$

(entsprechend gilt für die an den Holmen angreifenden Exzentrizitätsmomente:

$$M'_e = M_{e,0} + X'_1 \cdot M_{e,1}.$$

Für dieses System werden die lotrechten Wegkomponenten der Knoten n_1 und n_2 ermittelt:

$$\delta y_{n_1} = \delta y_{n_1,0} + X'_1 \cdot \delta y_{n_1,1},$$

$$\delta y_{n_2} = \delta y_{n_2,0} + X'_1 \cdot \delta y_{n_2,1}.$$

(Näheres über die Berechnung der Werte δy s. unter „Bemerkung“).

Diese Größen S' , B' , M' und $\delta y'$ werden für die weitere Berechnung als gegeben betrachtet.

Jeder der Oberflügelholme wird dann für sich als durchlaufender Balken auf 4 Stützen berechnet (Abb. 270); dabei liegen die Stütz-

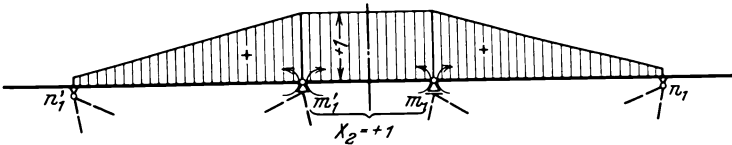


Abb. 270.

punkte m_1 und m'_1 bzw. m_2 und m'_2 in lotrechter Richtung fest, die Stützpunkte n_1 und n'_1 bzw. n_2 und n'_2 verschieben sich dagegen in lotrechter Richtung um die soeben errechneten Wegkomponenten $\delta y_{n_1}'$ bzw. $\delta y_{n_2}'$; die Holme sind mit p_1 bzw. p_2 , ferner mit Exzentrizitäts- und Kragmomenten M' querbelastet und werden gegebenenfalls durch Längskräfte S' auf Knickbiegung beansprucht.

Jeder dieser Holme ist wegen seiner Symmetrie zur Flugzeuglängsachse nur einfach statisch unbestimmt.

Die Elastizitätsgleichung zur Ermittlung des Biegemoments X_2 im Vorderholm an der Stütze m_1 lautet dann:

$$X_2 \cdot \delta_{2,2} + \delta_2 = 0.$$

Dabei ist:

$$\delta_{2,2} = \int_{(1)} \frac{B_2 B_2 dx}{EJ} + \int_{(2)} \frac{B_2 B_2 dx}{EJ},$$

$$\delta_2^* = \int_{(1)} \frac{B_2 B' dx}{EJ} + \int_{(2)} \frac{B_2 B' dx}{EJ} + \frac{\delta y_{n_1}^*}{a_1}.$$

Die Integrale $\int_{(1)}$ bzw. $\int_{(2)}$ erstrecken sich über das halbe Baldachin-
feld $m'_1 \div m_1$ bzw. über das ganze Feld $m_1 \div n_1$. Die Momentenfläche B_2
infolge von $X_2 = 1$ ist in Abb. 270 gezeichnet. Liegt wesentliche Knick-
biegung vor, so erfolgt die Berechnung der Integrale wieder entsprechend
S. 192 bzw. Aufgabe 69 und 72.

Das Glied $\frac{\delta y_{n_1}^*}{a_1}$ stellt die gegenseitige Drehung der Schnittufer an
der Gelenkstelle bei m_1 infolge der lotrechten Verschiebung $\delta y_{n_1}^*$ des
Lagers n_1 dar.

Entsprechendes wie für den Vorderholm gilt für den Hinterholm
zur Ermittlung von X_3 .

Nach Berechnung der so in erster Näherung gefundenen Werte X_2
und X_3 können die Ausgangswerte X'_1 , $\delta y_{n_1}^*$ und $\delta y_{n_2}^*$ verbessert werden,
indem die gefundenen Holmbiegemomente X_2 und X_3 zur äußeren Be-
lastung hinzugenommen werden.

Soll die Rechnung aber genauer werden, als es sich mit dem ersten
Rechnungsgang erreichen läßt, so ist es im allgemeinen praktischer, das
System nach der eingangs gezeigten Methode von vornherein als drei-
fach statisch unbestimmt zu betrachten.

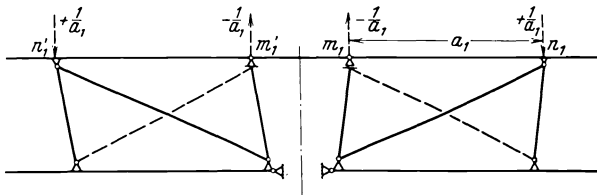


Abb. 271.

Bemerkung. Die Berechnung der Anteile $\frac{\delta y_{n,0}}{a}$ und $\frac{\delta y_{n,1}}{a}$ in $\frac{\delta y_n^*}{a}$ kann
nach der Arbeitsgleichung mittels zweier Hilfszustände II bzw. III für den
Vorder- bzw. Hinterholm entsprechend Abb. 271 erfolgen. Es ist:

$$\frac{\delta y_{n1,0}}{a_1} = \Sigma S_{II} \frac{S_0 s}{EF} + \Sigma \int B_{II} \frac{B_0 dx}{EJ}$$

und

$$\frac{\delta y_{n1,1}}{a_1} = \Sigma S_{II} \frac{S_1 s}{EF} + \Sigma \int B_{II} \frac{B_1 dx}{EJ}.$$

S_{II} sind die Stabkräfte, die sich am unstabilen Hauptsystem ergeben, wenn daran der Hilfszustand II mitsamt passend gewählten Zusatzkräften zur Herstellung eines stabilen Zustands angreift; da beim Hilfszustand II die Knotenlasten des Zustands $X_2 = 1$ (s. S. 281) wirken, sind die Stabkräfte S_{II} dieselben wie bei letzterem Zustand, Tabelle 80. Dann ergibt sich der gesuchte Wert

$$\begin{aligned} \frac{\delta y_{n_1}}{a_1} &= \sum S_{II} \frac{(S_0 + X_1 S_1) s}{E F} + \sum \int B_{II} \frac{(B_0 + X_1 B_1) dx}{E J} \\ &= \sum S_{II} \frac{S^* s}{E F} + \sum \int B_{II} \frac{B^* dx}{E J} *. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für Hilfszustand III am oberen Hinterholm.

§ 22. Nebenspannungen.

Die einzelnen Stäbe eines Fachwerks sind im allgemeinen nicht gelenkig in den Knotenpunkten miteinander verbunden; daher treten bei der Formänderung des Fachwerks biegende bzw. drillende Momente, die sog. „Nebenspannungsmomente“, an den einzelnen Stabenden auf; diese beeinflussen im allgemeinen die Stabkräfte und die Verschiebungswege der Knotenpunkte nur wenig; sie können aber wesentliche zusätzliche Spannungen an den Stabenden, die sog. „Nebenspannungen“, bedingen, deren Kenntnis vor allem für die Beurteilung der örtlichen Festigkeit von Bedeutung sein kann**.

In den Aufgaben 83 und 84, desgl. auch in allen Aufgaben des vierten Kapitels werden die Endneigungen eines durch ein Endmoment $M = 1$ querbelasteten, auf Knickbiegung beanspruchten Balkens als Einheitsdrehungen e bzw. \hat{e} bezeichnet, und zwar bedeutet:

$e_{i,j}$ bzw. $e_{j,i}$ die „Einheitsdrehung“ des Endes i bzw. j eines in i und j gelenkig gelagerten Stabes i, j infolge eines an demselben Ende i bzw. j angreifenden biegenden Einzelmoments $M = 1$ im Sinne dieses Moments,

$\hat{e}_{i,j}$ bzw. $\hat{e}_{j,i}$ die „Einheitsdrehung“ des Endes i bzw. j eines in i und j gelenkig gelagerten Stabes i, j infolge eines am entgegengesetzten Ende j bzw. i angreifenden biegenden Einzelmoments $M = 1$ im Sinne dieses Moments.

Nach Maxwell ist: $\hat{e}_{i,j} = \hat{e}_{j,i}$.

Diese Einheitsdrehungen treten in diesen Aufgaben meist in der Form $\frac{1}{e_{i,j}}$, $\frac{e_{i,j}}{d_{i,j}}$ und $\frac{\hat{e}_{i,j}}{d_{i,j}}$ auf (dabei ist: $d_{i,j} = e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j} \cdot \hat{e}_{j,i}$). Für den wichtigsten Fall, daß die Längskraft S und die Biegesteifigkeit EJ

* Reduktionssatz, vgl. Aufgabe 61.

** Zahlreiche Ermüdungsbrüche sind z. B. auf die Wirkung der Nebenspannungen zurückzuführen.

über die Stablänge l konstant ist, wird zweckmäßig gesetzt:

$$\frac{1}{e_{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{l'_{i,j}}; \quad \frac{e_{i,j}}{d_{i,j}} = \frac{v_{i,j}}{l'_{i,j}}; \quad \frac{\dot{e}_{i,j}}{d_{i,j}} = \frac{w_{i,j}}{l'_{i,j}},$$

wobei $l'_{i,j} = (l/EJ)_{i,j}$ ist.

(Formel- und Zahlentabellen für diese Ausdrücke u, v, w in Abhängigkeit von $\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$ befinden sich im Anhang, Tabelle 103.)

Bei Stäben, die durch Zugkräfte längsbeansprucht werden, wird zweckmäßig so gerechnet, als ob keine Längsbelastung vorläge ($\alpha = 0$; vgl. S. 166).

[In den Aufgaben des vierten Kapitels sind außerdem noch Einheitsdrehungen \bar{e} eingeführt, die sich auf Verdrillung beziehen (vgl. S. 299).]

Aufgabe 83: Nebenspannungen in einem abgestrebt Fachwerkhalm.

Bei dem in den Aufgaben 30, 53 und 54 behandelten, durch eine an ihren beiden Enden gelenkig angeschlossene Strebe abgestützten Fachwerkhalm mit starren Knoten sind für den in Abb. 72 stark ausgezogenen Teil die Nebenspannungsmomente zu berechnen. (Der schwächer ausgezogene Teil des Holmes sei in den Punkten 3^o und 4^u gelenkig angeschlossen.)

1. Allgemeines.

Das System ist insgesamt 18fach statisch unbestimmt; denn nach S. 32 bedingt jeder Knoten mit n steif daran angeschlossenen Stäben $n - 1$ statisch Unbestimmte.

Um die Rechnung möglichst übersichtlich zu gestalten, werden zunächst die bei der Formänderung des Systems auftretenden Drehungen φ_i der 8 Knotenpunkte 0, 1^u, 1^o... i ... 4^u als Unbekannte eingeführt und berechnet (vgl. S. 196 und 299). Zur Vereinfachung wird näherungsweise angenommen, daß die Stabkräfte S und Wegkomponenten δx und δy der Knotenpunkte des wirklich vorliegenden Systems dieselben seien wie diejenigen, welche in den Aufgaben 30, 53 und 54 für das entsprechende Gelenkfachwerk ohne Berücksichtigung von Nebenspannungen ermittelt wurden.

2. Berechnung der Nebenspannungen in einem Rechnungsgang (nach Mohr*).

Nach Abb. 272 ist die bei der Formänderung des Systems stattfindende Drehung des Knotens i :

$$\varphi_i = \psi_{i,j} + \tau_{i,j};$$

* Vgl. auch Gehler⁶⁰ und Bleich⁴²; s. ferner Müller-Breslau¹³.

dabei bedeutet:

$\psi_{i,j}$ den Winkel, um den sich die Stabsehne i, j infolge der Knotenpunktverschiebungen $\delta x_i, \delta y_i, \delta x_j, \delta y_j$ dreht:

$$\psi_{i,j} = \frac{(\delta y_i - \delta y_j)(x_i - x_j) - (\delta x_i - \delta x_j)(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

(vgl. Aufgabe 42; diese Sehnendrehwinkel ψ sind auf Grund der in Aufgabe 53 oder 54 ermittelten Knotenpunktswerte bekannt),

$\tau_{i,j}$ den Winkel, um den sich der Endquerschnitt i des Stabes i, j bei der Biegung des Stabes i, j gegen die Stabsehne i, j dreht. Es ist:

$$\tau_{i,j} = M_{i,j} \cdot e_{i,j} + M_{j,i} \cdot \hat{e}_{i,j}.$$

Dabei bedeutet:

$M_{i,j}$ bzw. $M_{j,i}$ das am Stabende i bzw. j auf den Stab i, j wirkende biegende Moment,

$e_{i,j}$ bzw. $\hat{e}_{i,j}$ die Einheitsdrehungen entsprechend S. 285.

Ebenso ergibt sich die Drehung des Endquerschnitts j gegen die Sehne i, j zu:

$$\tau_{j,i} = M_{i,j} \hat{e}_{j,i} + M_{j,i} \cdot e_{j,i}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich das am Fachwerk mit starren Knoten auf das Stabende i wirkende biegende Einzelmoment (das gesuchte „Nebenspannungsmoment“ in i) zu:

$$M_{i,j} = \tau_{i,j} \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} - \tau_{j,i} \frac{\hat{e}_{i,j}}{d_{i,j}},$$

wobei

$$d_{i,j} = e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j}^2.$$

ist.

Wegen

$$\tau_{i,j} = \varphi_i - \psi_{i,j}$$

und

$$\tau_{j,i} = \varphi_j - \psi_{i,j}$$

(Abb. 272) lautet der genannte Ausdruck für $M_{i,j}$ als Funktion von φ_i, φ_j und $\psi_{i,j}$:

$$M_{i,j} = (\varphi_i - \psi_{i,j}) \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} - (\varphi_j - \psi_{i,j}) \frac{\hat{e}_{i,j}}{d_{i,j}}.$$

Da am Knoten i nur dann Gleichgewicht herrscht, wenn die Summe aller auf die dort angeschlossenen Stäbe wirkenden biegenden Momente verschwindet, muß an ihm:

$$\sum M_{i,j} = 0$$

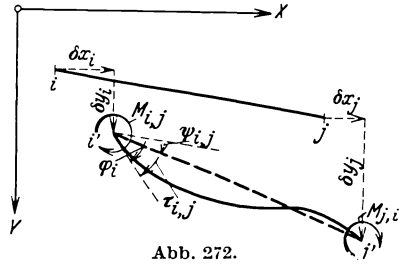


Abb. 272.

sein; die Einsetzung des vorhergehenden Ausdrucks für $M_{i,j}$ liefert eine Gleichung mit den Unbekannten φ_i und φ_j *:

$$\varphi_i \cdot \sum \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} - \sum \varphi_i \cdot \frac{\hat{e}_{i,i}}{d_{i,i}} - \sum \psi_{i,j} \left(\frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} - \frac{\hat{e}_{i,i}}{d_{i,i}} \right) = 0,$$

wobei sich die Summenzeichen über alle am Knoten i angeschlossenen Stäbe i, j erstrecken und die Größen $\psi_{i,j}$ nach Aufgabe 53 und 54 bekannt sind.

[Wird in den einzelnen Stäben der Einfluß der Knick-Biegung vernachlässigt und wird vorausgesetzt, daß die Steifigkeiten der einzelnen Stäbe über ihre Längen konstant sind, so heißt diese Gleichung (vgl. Anhang, Tabelle 103):

$$\varphi_i \cdot 2 \sum \left(\frac{EJ}{l} \right)_{i,j} + \sum \varphi_j \cdot \left(\frac{EJ}{l} \right)_{i,j} - 3 \sum \psi_{i,j} \cdot \left(\frac{EJ}{l} \right)_{i,j} = 0.]$$

Den 8 Knoten des gegebenen Fachwerks entsprechend ergibt sich auf diese Weise ein System von 8 Gleichungen zur Berechnung der 8 Unbekannten $\varphi_0 \dots \varphi_i \dots \varphi_4^u$, das in Tabelle 81 für den vorliegenden Fall schematisch angedeutet ist (Differenzgleichung 4. Ordnung. Zweckmäßige Lösung siehe Anhang).

Die gesuchten „Nebenspannungsmomente“ ergeben sich dann durch Einsetzen der gefundenen Werte φ_i in den bereits angegebenen Ausdruck:

$$M_{i,j} = (\varphi_i - \psi_{i,j}) \cdot \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} - (\varphi_j - \psi_{i,j}) \cdot \frac{\hat{e}_{i,i}}{d_{i,i}}$$

(vgl. Anhang, Tabelle 103).

Tabelle 81. Schema der Gleichungen für die Knotendrehungen φ_i^{**} .

Gleichgewichts- bedingung am Knoten i	Beiwerte von								Last- werte
	φ_0	φ_1^u	φ_1^o	φ_2^u	φ_2^o	φ_3^u	φ_3^o	φ_4	
0	=	—	—						—
1 ^u	—	=	—	—					—
1 ^o	—	—	=	—	—				—
2 ^u		—	—	=	—	—			—
2 ^o			—	—	=	—	—		—
3 ^u				—	—	=	—	—	—
3 ^o					—	—	=	—	—
4						—	—	=	—

* Strenggenommen müßten die Vorzeichen aller Glieder umgekehrt werden; denn die von den Stäben her auf den Knoten i wirkenden Momente sind entgegengesetzt gleich denjenigen Momenten, die vom Knoten her auf die einzelnen Stäbe wirken.

** Durch die Wahl ein- und zweifacher Striche sollen die größeren von den kleineren Beiwerten unterschieden werden.

3. Vereinfachte Berechnung der Nebenspannungen mittels mehrerer Rechnungsgänge.

a) Rechnungsgang I.

Die einzelnen Knotenpunkte i mitsamt den daran biegefest angeschlossenen Stäben werden einzeln für sich betrachtet. Dabei wird die Annahme gemacht, das andere Ende j eines jeden in i angeschlossenen Stabes i, j sei an der Stabsehne, die sich bei der Formänderung des Fachwerks um den Winkel $\psi_{i,j}$ (siehe oben) dreht, eingespannt (Abb. 273). Dann ist (allgemein wie vorher, aber mit anderen Momenten $M_{j,i}$)

$$\tau_{i,j} = M_{i,j} \cdot e_{i,j} + M_{j,i} \cdot \hat{e}_{i,j}$$

und

$$\tau_{j,i} = M_{i,j} \cdot \hat{e}_{j,i} + M_{j,i} \cdot e_{j,i} = 0.$$

Daraus folgt:

$$M_{i,j} = \tau_{i,j} \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}$$

$$(d_{i,j} = e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j}^2)$$

bzw. wegen

$$\tau_{i,j} = \varphi_i - \psi_{i,j} \quad (\text{Abb. 273}):$$

$$M_{i,j} = (\varphi_i - \psi_{i,j}) \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}.$$

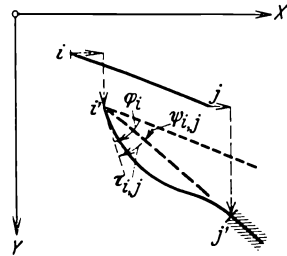


Abb. 273.

Die Einsetzung dieses Ausdrucks in die Gleichgewichtsbedingung für Knoten i :

$$\sum M_{i,j} = 0$$

ergibt für die Drehung des Knotens i im I. Rechnungsgang:

$$\varphi_i^I = \frac{\sum \psi_{i,j} \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}}{\sum \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}}$$

die Summenzeichen erstrecken sich über alle am Knoten i angeschlossenen Stäbe i, j .

Die umständliche Ermittlung der Knotenpunktswerte zwecks Berechnung von $\psi_{i,j}$ (vgl. Aufg. 53, 54) kann hier in folgender Weise umgangen werden: Es bezeichne i, h den „ersten“ der in i angeschlossenen

Stäbe, d. h. denjenigen, von dem aus alle anderen Stäbe entsprechend Abb. 274 erreicht werden können, indem die bei i gelegenen Fachwerk-Innenwinkel β (sog. „Dreieckswinkel“ vgl. Aufgabe 53, S. 150) im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Wird nun auf der linken und rechten Seite des Ausdrucks für die Knotendrehung φ_i die Sehnendrehung $\psi_{i,h}$

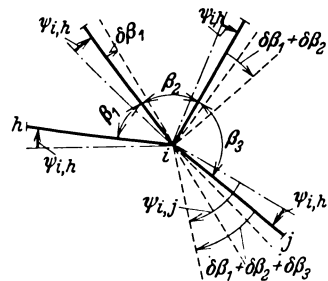


Abb. 274.

dieses „ersten“ Stabes i, h abgezogen und wird $\bar{\varphi}_i$ statt $\varphi_i - \psi_{i,h}$ geschrieben ($\bar{\varphi}_i =$ „bezogene Knotendrehung“), so tritt an Stelle des vorhergehenden Ausdrucks für φ_i^I :

$$\bar{\varphi}_i^I = -\psi_{i,h} + \frac{\sum \psi_{i,j} \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}}{\sum \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}} = \frac{\sum (\psi_{i,j} - \psi_{i,h}) \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}}{\sum \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}}.$$

Die nunmehr an Stelle der jeweiligen Sehendrehungen $\psi_{i,j}$ stehenden „bezogenen Sehendrehungen“ $\psi_{i,j} - \psi_{i,h}$ ergeben sich, wie Abb. 274 zeigt, unmittelbar aus den in Aufgabe 53, S. 151 berechneten Änderungen $\delta\beta$ der am Knoten i gelegenen Fachwerkdreieckswinkel β zu:

$$\psi_{i,j} - \psi_{i,h} = \sum' \delta\beta_v.$$

Die Summe \sum' erstreckt sich dabei jeweils über alle die Dreieckswinkel, die der „Anfangsstab“ i, h (siehe oben) bestreicht, wenn er um i im Uhrzeigersinn nacheinander in die Richtung der betreffenden Stäbe i, j gedreht wird.

Aus der „bezogenen“ Knotendrehung $\bar{\varphi}_i$ ergeben sich die Nebenspannungsmomente $M_{i,j}$, indem in der vorhergehenden Formel für $M_{i,j}$ die Drehung φ_i durch $\bar{\varphi}_i + \psi_{i,h}$ ersetzt wird, zu:

$$M_{i,j}^I = [\bar{\varphi}_i^I - (\psi_{i,j} - \psi_{i,h})] \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} = (\bar{\varphi}_i^I - \sum' \delta\beta_v) \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}$$

(vgl. Anhang, Tabelle 103).

b) Rechnungsgang II.

Wieder werden die einzelnen Knoten i mitsamt den daran anschließenden Stäben für sich betrachtet; nur wird jetzt jeder in i angeschlossene Stab i, j als am anderen Ende j gelenkig gelagert angesehen; dafür wird jetzt angenommen, an diesem Ende j wirke auf ihn dasjenige Nebenspannungsmoment $M_{j,i}^I$, das sich beim ersten Rechnungsgang am Knoten j für den mit Stab i, j identischen Stab j, i ergab. Also ist jetzt für die Drehung des Stabendquerschnitts i gegen die Stabsehne i, j zu setzen:

$$\tau_{i,j} = M_{i,j}^{II} \cdot e_{i,j} + M_{j,i}^I \cdot \hat{e}_{i,j},$$

somit:

$$M_{i,j}^{II} = (\tau_{i,j} - M_{j,i}^I \cdot \hat{e}_{i,j}) \cdot \frac{1}{e_{i,j}}$$

oder wegen

$$\tau_{i,j} = \varphi_i - \psi_{i,j} \quad (\text{Abb. 273}):$$

$$M_{i,j}^{II} = [\varphi_i^{II} - \psi_{i,j} - M_{j,i}^I \cdot \hat{e}_{i,j}] \cdot \frac{1}{e_{i,j}}.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung des Knotens i , $\sum M_{i,j} = 0$, folgt dann ähnlich wie beim Rechnungsgang I:

$$\varphi_i^{II} = \frac{\sum (\psi_{i,j} + M'_{j,i} \cdot \ell_{i,j}) \cdot \frac{1}{e_{i,j}}}{\sum \frac{1}{e_{i,j}}},$$

oder bei Ersatz von φ_i durch $\bar{\varphi}_i + \psi_{i,h}$ (s. oben):

$$\bar{\varphi}_i^{II} = \frac{\sum [(\psi_{i,j} - \psi_{i,h}) + M'_{j,i} \cdot \ell_{i,j}] \frac{1}{e_{i,j}}}{\sum \frac{1}{e_{i,j}}},$$

wobei wiederum

$$\psi_{i,j} - \psi_{i,h} = \sum' \delta\beta_v \quad (\text{Abb. 274}).$$

Nach Berechnung von $\bar{\varphi}_i^{II}$ ergibt sich dann analog dem Rechnungsgang I:

$$M'_{i,j} = [\bar{\varphi}_i^{II} - (\psi_{i,j} - \psi_{i,h})] \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} = (\bar{\varphi}_i^{II} - \sum' \delta\beta_v) \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}}.$$

Entsprechend diesem Rechnungsgang II können weitere Rechnungsgänge III, IV usw. durchgeführt werden.

Bemerkungen: Im allgemeinen genügt bei Ermittlung der Nebenspannungen die Durchführung von 1 bis 2 Rechnungsgängen; denn die wirklich auftretenden Nebenspannungen weichen doch mehr oder weniger stark von den rechnerisch sich ergebenden Werten ab, da Ungenauigkeiten bei der Herstellung des Systems, wie z. B. Vorkrümmungen der Rohre, nicht genau zentrische Stabanschlüsse usw. unvermeidlich sind.

Aufgabe 84: Nebenspannungen in einem dreistäbigen Baldachinbock.

Es sind die Nebenspannungen zu berechnen, die in den Stäben des in Abb. 275 dargestellten Baldachinbocks auftreten. Die Stäbe a, b, c dieses Bocks seien im gemeinsamen Knoten 0 steif miteinander verbunden, an den anderen Enden $j = 1, 2, 3$ aber mit vollkommenen, d. h. biege- und drillfreien Gelenken am Flugzeugumpf angeschlossen.

Im Knoten 0 wirke eine beliebige Einzellast; die dadurch hervorgerufenen Stabkräfte seien bekannt (vgl. Aufgabe 37); die Anschlußpunkte $j = 1, 2, 3$ der Stäbe seien unverschieblich.

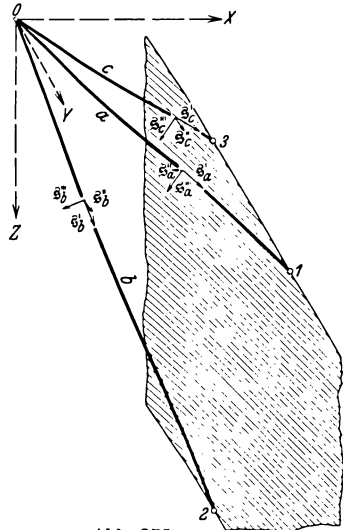


Abb. 275.

Ebenen \bar{s}, \bar{s}'' parallel der Achse Y .
Vektoren \bar{s}''' parallel der Ebene XZ .

1. Allgemeines.

Ähnlich wie in der vorhergehenden Aufgabe wird angenommen, die Stabkräfte sowie die Wegkomponenten des Knotenpunkts 0 seien bei diesem System ebenso groß wie sie sich unter Voraussetzung von in 0 gelenkig miteinander verbundenen Stäben ergeben würden.

Das System ist dreifach statisch unbestimmt; denn es können an den 3 Auflagerpunkten $j = 1, 2, 3$ je 3, also insgesamt 9 Auflagerkraftkomponenten gegenüber insgesamt 6 räumlichen Gleichgewichtsbedingungen auftreten.

Als Unbekannte werden die drei auf ein allgemeines Koordinatensystem X, Y, Z bezogenen Komponenten $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$ der räumlichen Drehung Φ_0 des gemeinsamen Knotens 0 eingeführt. (Φ_0 ist dabei als Vektor senkrecht zur Drehungsebene von 0 aufzufassen; Korkzieherregel vgl. S. 30.)

2. Drehung Φ_0 des gemeinsamen Knotens 0.

Der Vektor der Knotendrehung Φ_0 kann bezüglich jedes der drei Stäbe 0, j ($j = 1, 2, 3$) in Komponenten $\varphi'_{0,j}, \varphi''_{0,j}, \varphi'''_{0,j}$ parallel der Stab-Längsachse bzw. den beiden Hauptträgheitsachsen des Stab-Querschnitts zerlegt werden.

Diese Richtungen werden hinsichtlich eines jeden Stabes durch je drei Vektoren $\xi'_{0,j}, \xi''_{0,j}, \xi'''_{0,j}$ von der Länge 1 (Einheitsvektoren) festgelegt (ξ' weist zum höher bezifferten Stabende; ξ', ξ'', ξ''' bilden ein Rechtssystem), z. B. hinsichtlich des Stabes „a“ mit den Endpunkten 0 und 1 durch

$$\begin{aligned} \xi'_{0,1} & \text{ mit den } X, Y, Z\text{-Komponenten } x'_{0,1}, y'_{0,1}, z'_{0,1}, \\ \xi''_{0,1} & \text{ ,, ,, ,, } x''_{0,1}, y''_{0,1}, z''_{0,1}, \\ \xi'''_{0,1} & \text{ ,, ,, ,, } x'''_{0,1}, y'''_{0,1}, z'''_{0,1}. \end{aligned}$$

Sind $x_1, x_0, y_1, y_0, z_1, z_0$ die Koordinaten der Stabendpunkte und bedeutet $l_{0,1}$ die Stablänge, so ist in jedem Fall

$$\frac{x'_{0,1}}{1} = \frac{x_1 - x_0}{l_{0,1}}, \quad \frac{y'_{0,1}}{1} = \frac{y_1 - y_0}{l_{0,1}}, \quad \frac{z'_{0,1}}{1} = \frac{z_1 - z_0}{l_{0,1}};$$

die Größe der durch die Indizes '' bzw. ''' gekennzeichneten Komponenten hängt dagegen von der jeweiligen Ausrichtung des Stabquerschnitts zum X, Y, Z -System ab; in Abb. 275 ist eine besondere Ausrichtung gewählt; vgl. Unterabschnitt 6a, S. 295.

Zwischen den Drehungskomponenten $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$ und den Komponenten $\varphi'_{0,j}, \varphi''_{0,j}, \varphi'''_{0,j}$ bezüglich eines Stabes 0, j besteht die bekannte Beziehung („Koordinatentransformation“; vgl. z. B. Hütte I,

26. Aufl., S. 135)*:

$$\begin{aligned}\varphi'_{0,j} &= \varphi_{0x} \cdot x'_{0,j} + \varphi_{0y} \cdot y'_{0,j} + \varphi_{0z} \cdot z'_{0,j}, \\ \varphi''_{0,j} &= \varphi_{0x} \cdot x''_{0,j} + \varphi_{0y} \cdot y''_{0,j} + \varphi_{0z} \cdot z''_{0,j}, \\ \varphi'''_{0,j} &= \varphi_{0x} \cdot x'''_{0,j} + \varphi_{0y} \cdot y'''_{0,j} + \varphi_{0z} \cdot z'''_{0,j}.\end{aligned}$$

3. Drehungen $\Psi_{0,j}$ der Stabsehnen $0, j$.

Bei der Formänderung des in den Punkten $j = 1, 2, 3$ fest gelagerten Baldachinbocks infolge seiner Belastung bewegt sich der gemeinsame Knoten 0 längs eines bestimmten Weges w_0 , dessen Komponenten $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ in bekannter Weise mittels dreier Hilfszustände I, II, III nach der Arbeitsgleichung (vgl. Kap. II) gefunden werden. (Zustand I : $P_x = 1$, Zustand II : $P_y = 1$, Zustand III : $P_z = 1$, angreifend in Punkt 0 , ähnlich wie die drei Einzelbelastungszustande in Aufgabe 37.) Dabei dreht sich die Sehne jedes der Stäbe $0, j$ um einen gewissen Winkel $\Psi_{0,j}$, der ebenfalls durch einen senkrecht zur Drehungsebene gerichteten Vektor mit den Komponenten $\psi_{0,jx}, \psi_{0,jy}, \psi_{0,jz}$ dargestellt wird. Zwischen diesen Sehnendrehungskomponenten und den Wegkomponenten des Knotens 0 besteht die Beziehung**:

$$\begin{aligned}\psi_{0,jx} &= \frac{z_j - z_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta y_0 - \frac{y_j - y_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta z_0, \\ \psi_{0,jy} &= \frac{x_j - x_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta z_0 - \frac{z_j - z_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta x_0, \\ \psi_{0,jz} &= \frac{y_j - y_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta x_0 - \frac{x_j - x_0}{l_{0,j}^2} \cdot \delta y_0.\end{aligned}$$

Auch die Sehnendrehung $\Psi_{0,j}$ kann durch Koordinatentransformation in Komponenten $\psi'_{0,j}, \psi''_{0,j}, \psi'''_{0,j}$ in Richtung der drei Einheitsvektoren $\hat{s}'_{0,j}, \hat{s}''_{0,j}, \hat{s}'''_{0,j}$ der zugehörigen Stäbe $0, j$ zerlegt werden:

$$\begin{aligned}\psi'_{0,j} &= \psi_{0,jx} \cdot x'_{0,j} + \psi_{0,jy} \cdot y'_{0,j} + \psi_{0,jz} \cdot z'_{0,j}, \\ \psi''_{0,j} &= \psi_{0,jx} \cdot x''_{0,j} + \psi_{0,jy} \cdot y''_{0,j} + \psi_{0,jz} \cdot z''_{0,j}, \\ \psi'''_{0,j} &= \psi_{0,jx} \cdot x'''_{0,j} + \psi_{0,jy} \cdot y'''_{0,j} + \psi_{0,jz} \cdot z'''_{0,j}.\end{aligned}$$

4. Nebenspannungsmomente.

Bei der Formänderung des Systems wirken im steifen Knoten 0 auf die Einzelstäbe $0, j$ biegende Momente $M''_{0,j}$ bzw. $M'''_{0,j}$ bezuglich

* Skalare Produkte $\Phi_0 \cdot \hat{s}'_{0,j}, \Phi_0 \cdot \hat{s}''_{0,j}, \Phi_0 \cdot \hat{s}'''_{0,j}$. Sonderfälle hiervon sind in Aufgabe 85–88 näher behandelt.

** Diese Beziehung folgt aus dem vektoriellen Produkt

$$w = -l_{0,j} \cdot [\Psi_{0,j} \cdot \hat{s}'_{0,j}]$$

und dem skalaren Produkt

$$\Psi_{0,j} \cdot \hat{s}'_{0,j} = 0.$$

der Hauptträgheitsachsen; verdrollende Momente treten hier infolge der vollkommenen Gelenke in 1, 2 und 3 nicht auf. Es ergeben sich also folgende Drehungen der Stabendquerschnitte bei 0 gegen die Stabsehnen $0, j$:

$$\begin{aligned} \tau''_{0,j} &= M''_{0,j} \cdot e''_{0,j} \text{ (Drehvektor im Sinne von } \xi''_{0,j}\text{),} \\ \tau'''_{0,j} &= M'''_{0,j} \cdot e'''_{0,j} \text{ („ „ „ „ } \xi'''_{0,j}\text{).} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $e''_{0,j}$ bzw. $e'''_{0,j}$ die „Einheitsdrehung“, die sich am Ende 0 des Stabes $0, j$ infolge eines daselbst angreifenden biegenden Einzelmomentes $M_{0,j} = 1$ im Sinne dieses Momentes ergibt (vgl. S. 285); daraus folgen die am Stab $0, j$ in 0 auftretenden biegenden Momente zu:

$$\begin{aligned} M''_{0,j} &= \frac{\tau''_{0,j}}{e''_{0,j}} \text{ (Momentenvektor im Sinne von } \xi''_{0,j}\text{),} \\ M'''_{0,j} &= \frac{\tau'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \text{ (Momentenvektor im Sinne von } \xi'''_{0,j}\text{).} \end{aligned}$$

Da sich die Knotendrehungen φ'' , φ''' aus ψ'' , ψ''' und τ'' , τ''' zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \varphi''_{0,j} &= \psi''_{0,j} + \tau''_{0,j}, \\ \varphi'''_{0,j} &= \psi'''_{0,j} + \tau'''_{0,j}, \end{aligned}$$

wird

$$M''_{0,j} = \frac{\varphi''_{0,j} - \psi''_{0,j}}{e''_{0,j}}$$

und

$$M'''_{0,j} = \frac{\varphi'''_{0,j} - \psi'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}.$$

5. Gleichgewichtsbedingungen.

Um nun die drei Bedingungen für das Gleichgewicht der Momente am Knoten 0:

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0$$

aufstellen zu können, werden die X, Y, Z -Komponenten der gefundenen Ausdrücke für $M''_{0,j}$ und $M'''_{0,j}$ angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} M''_{0,jx} &= \frac{\varphi''_{0,j} - \psi''_{0,j}}{e''_{0,j}} \cdot \frac{x''_{0,j}}{1}, \\ M''_{0,jy} &= \frac{\varphi''_{0,j} - \psi''_{0,j}}{e''_{0,j}} \cdot \frac{y''_{0,j}}{1}, \\ M''_{0,jz} &= \frac{\varphi''_{0,j} - \psi''_{0,j}}{e''_{0,j}} \cdot \frac{z''_{0,j}}{1}, \end{aligned} \right\} \text{ entspr. } \left\{ \begin{aligned} M'''_{0,jx} &= \frac{\varphi'''_{0,j} - \psi'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \cdot x'''_{0,j}, \\ M'''_{0,jy} &= \frac{\varphi'''_{0,j} - \psi'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \cdot y'''_{0,j}, \\ M'''_{0,jz} &= \frac{\varphi'''_{0,j} - \psi'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \cdot z'''_{0,j}. \end{aligned} \right.$$

(Die X -Komponente $M''_{0,jx}$ des parallel $\xi''_{0,j}$ gerichteten Momentenvektors $M''_{0,j}$ verhält sich zu $M''_{0,j}$ selbst wie die X -Komponente $x''_{0,j}$ des Einheitsvektors $\xi''_{0,j}$ zu seinem Betrag 1 usw.)

Dann folgen durch Einsetzen der in Unterabschnitt 2 bzw. 3 aufgestellten Ausdrücke für $\varphi'_{0,j}, \varphi''_{0,j}, \varphi'''_{0,j}$ bzw. $\psi'_{0,j}, \psi''_{0,j}, \psi'''_{0,j}$ drei Gleichungen für die als Unbekannte eingeführten Komponenten $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$ der Drehung des Knotens 0 von der Form*:

$$\varphi_{0x} \cdot \Sigma(\dots) + \varphi_{0y} \cdot \Sigma(\dots) + \varphi_{0z} \cdot \Sigma(\dots) + \{-\Sigma[\dots]\} = 0;$$

die zugehörigen Bei- und Lastwerte sind in der Tabelle 82 zusammengestellt.

Tabelle 82. Bei- und Lastwerte der Gleichungen für die Unbekannte Φ_0 .

Beiwerte der Unbekannten		
φ_{0x}	φ_{0y}	φ_{0z}
$\Sigma \left(\frac{x''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{x'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$
$\Sigma \left(\frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{y''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{y'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$
$\Sigma \left(\frac{x'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{y'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$	$\Sigma \left(\frac{z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right)$
Lastwerte		
$-\Sigma \left[\psi_{0,yz} \left(\frac{x''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,yx} \left(\frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,zy} \left(\frac{x'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) \right]$		
$-\Sigma \left[\psi_{0,yz} \left(\frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,yx} \left(\frac{y''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,zy} \left(\frac{y'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) \right]$		
$-\Sigma \left[\psi_{0,yz} \left(\frac{x'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,yx} \left(\frac{y'_{0,j} z'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) + \psi_{0,zy} \left(\frac{z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \right) \right]$		

Die Summenzeichen erstrecken sich über alle 3 Stäbe

$$0, j = 0, 1; 0, 2; 0, 3.$$

6. Zusammenfassung des Rechnungsgangs.

Die Durchführung der Berechnung gliedert sich also in folgender Weise:

a) Ermittlung der X, Y, Z -Komponenten der Einheitsvektoren $\xi'_{0,j}, \xi''_{0,j}, \xi'''_{0,j}$ (in Richtung der Stablangs- und Trägheitshauptachsen). In Abb. 275 sind die Stabquerschnitte so orientiert gedacht, daß bei jedem Stab die Ebene $\xi'_{0,j}, \xi''_{0,j}$ parallel der Y -Achse, also senk-

* Vgl. die Anmerkung auf S. 288.

recht zur XZ -Ebene gerichtet ist (bzw. die Richtung $\hat{s}'''_{0,j}$ parallel der XZ -Ebene verläuft); diese Annahme entspricht der aerodynamisch zweckmäßigen Anordnung von Tropfenprofilen. Dann gilt

für $\hat{s}'_{0,j}$:

$$x'_{0,j} = + \frac{x_j - x_0}{l_{0,j}}, \quad y'_{0,j} = + \frac{y_j - y_0}{l_{0,j}}, \quad z'_{0,j} = + \frac{z_j - z_0}{l_{0,j}},$$

für $\hat{s}''_{0,j}$:

$$x''_{0,j} = \frac{-}{(+)} \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{\sqrt{1 - y'^2_{0,j}}}, \quad y''_{0,j} = \frac{+}{(-)} \sqrt{1 - y'^2_{0,j}}, \quad z''_{0,j} = \frac{-}{(+)} \frac{y'_{0,j} z'_{0,j}}{\sqrt{1 - y'^2_{0,j}}},$$

für $\hat{s}'''_{0,j}$:

$$x'''_{0,j} = \frac{-}{(+)} \frac{z'_{0,j}}{\sqrt{1 - y'^2_{0,j}}}, \quad y'''_{0,j} = 0, \quad z'''_{0,j} = \frac{+}{(-)} \frac{x'_{0,j}}{\sqrt{1 - y'^2_{0,j}}}.$$

(Bei $\hat{s}''_{0,j}$ und zugleich bei $\hat{s}'''_{0,j}$ gelten entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen.)

Bei einem Stab, dessen Querschnitt so beschaffen ist, daß alle Schwerachsen, wie z. B. bei Kreisrohren, gleichwertig sind, also als Trägheitshauptachsen aufgefaßt werden können, kann wegen

$$e''_{0,j} = e'''_{0,j} = e_{0,j}$$

von den Beziehungen

$$x'^2_{0,j} + x''^2_{0,j} + x'''^2_{0,j} = 1 \text{ usw.}$$

bzw.

$$x'_{0,j} y'_{0,j} + x''_{0,j} y''_{0,j} + x'''_{0,j} y'''_{0,j} = 0 \text{ usw.}^*$$

Gebrauch gemacht werden; dann kann z. B. der Ausdruck

$$\frac{x'^2_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x''^2_{0,j}}{e'''_{0,j}} \quad \text{durch} \quad \frac{1 - x'^2_{0,j}}{e_{0,j}}$$

bzw.

$$\frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x''_{0,j} y''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \quad \text{durch} \quad - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e_{0,j}}$$

ersetzt werden usw.

b) Ermittlung der Stabkräfte infolge äußerer Belastung und der Hilfszustände I, II, III ähnlich wie bei Aufgabe 37.

c) Berechnung der Wegkomponenten $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ des Knotens O nach der Arbeitsgleichung mittels der Hilfszustände I, II, III (S. 293).

d) Berechnung der X, Y, Z -Komponenten $\psi_{0,jx}, \psi_{0,jy}, \psi_{0,jz}$ der Stabsehnen-Drehwinkel nach Unterabschnitt 3, S. 293.

e) Aufstellung und Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen (Elastizitätsgleichungen) für die Unbekannten $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$ nach Tabelle 82, S. 295.

* Vgl. z. B. Hütte I 26. Aufl. S. 135.

f) Ermittlung der Knotendrehungskomponenten $\varphi'_{0,j}$, $\varphi''_{0,j}$, $\varphi'''_{0,j}$ aus den unter e) gefundenen Werten φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} durch Koordinatentransformation nach Unterabschnitt 2, S. 293.

Ermittlung der Sehnendrehungskomponenten $\psi'_{0,j}$, $\psi''_{0,j}$, $\psi'''_{0,j}$ aus den unter d) gefundenen Werten $\psi_{0,ix}$, $\psi_{0,iy}$, $\psi_{0,iz}$ durch Koordinatentransformation nach Unterabschnitt 3, S. 293.

g) Berechnung der Nebenspannungsmomente $M''_{0,j}$ und $M'''_{0,j}$ für die einzelnen Stäbe $0, j$ nach Unterabschnitt 4, S. 294. (Ergibt sich positives Vorzeichen, so bedeutet dies, daß der Vektorpfeil von $M''_{0,j}$ bzw. von $M'''_{0,j}$ im Sinne von $\xi''_{0,j}$ bzw. von $\xi'''_{0,j}$ weist; Korkzieherregel, S. 30.)

Bemerkung: Sind im steifen Knoten 0 mehr als drei Stäbe angeschlossen, so werden zunächst unter Annahme eines gelenkigen Knotens 0 in bekannter Weise die Stabkräfte des statisch unbestimmten Systems berechnet. Daraufhin erfolgt die Berechnung der Nebenspannungsmomente genau wie bei drei Stäben aus den 3 zunächst unbekanntenen Knotendrehungskomponenten φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} .

Viertes Kapitel.

Stabilitätsaufgaben.

Allgemeines.

Aufgaben der in diesem Kapitel behandelten Art treten beim Stabilitätsnachweis von Knickstäben in ebenen und räumlichen Fachwerken mit biegesteifen Knoten auf. Häufig wird in solchen Fällen die Knickberechnung unter der ungünstigen Annahme beiderseits vollkommen gelenkig angeschlossener Einzelstäbe durchgeführt. Richtiger wird jedoch eine Zerlegung des Fachwerks in Einzelgruppen von mehreren Stäben vorgenommen; hierbei werden die Stäbe einer Gruppe der wirklichen Ausbildung entsprechend unter sich als steif miteinander verbunden, die Einzelgruppen dagegen untereinander als gelenkig angeschlossen gedacht. Die folgenden Aufgaben zeigen den Stabilitätsnachweis für solche Teilstabgruppen (vgl. dazu die im Schrifttum unter Nr. ^{42, 61} bis ⁶⁶ genannten Arbeiten)*.

Wird angenommen, daß eine Gruppe von mehreren biege- und drillsteif miteinander verbundenen Stäben „knickt“, daß also auch bei Voraussetzung in Längsrichtung starrer, nur durch Längskräfte beanspruchter Stäbe die Knoten irgendwelche Drehungen bzw. Wege beschreiben, so üben dabei an den zusammenstoßenden Stäben die Stäbe biegende und drillende Momente und entsprechende Kräfte aufeinander aus.

* Es ist grundsätzlich falsch, in vielfach üblicher Weise mit konstanten, von der Form und Belastung des Systems unabhängigen sog. „Einspannfaktoren“ zu rechnen.

Die räumliche Drehung eines Fachwerkknotens i wird im folgenden mit Φ_i bezeichnet. Ihre Vektorkomponenten* hinsichtlich eines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y, Z werden $\varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$ genannt. Sie wird weiterhin hinsichtlich eines jeden in i endigenden Stabes i, j in die drei Vektorkomponenten $\varphi'_{i,j}, \varphi''_{i,j}, \varphi'''_{i,j}$ parallel der Stablängsachse bzw. den beiden Hauptträgheitsachsen seines Querschnitts zerlegt; diese Richtungen werden hinsichtlich eines jeden Stabes i, j durch je drei Einheitsvektoren $\hat{s}'_{i,j}, \hat{s}''_{i,j}, \hat{s}'''_{i,j}$ festgelegt:

$\hat{s}'_{i,j}$ mit den X, Y, Z -Komponenten:

$$x'_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}}, \quad y'_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}}, \quad z'_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}},$$

$\hat{s}''_{i,j}$ mit den X, Y, Z -Komponenten:

$$x''_{i,j}, \quad y''_{i,j}, \quad z''_{i,j},$$

$\hat{s}'''_{i,j}$ mit den X, Y, Z -Komponenten:

$$x'''_{i,j}, \quad y'''_{i,j}, \quad z'''_{i,j}$$

(vgl. Kap. III, Aufgabe 84, S. 292, 296).

Der Richtungssinn der Einheitsvektoren wird stets so gewählt, daß $\hat{s}'_{i,j}$ vom niedriger zum höher bezifferten Ende weist, gleichgültig ob der betreffende Stab i, j von i aus nach j oder von j aus nach i hin betrachtet wird; die Einheitsvektoren $\hat{s}', \hat{s}'', \hat{s}'''$ eines Stabes bilden stets ein Rechtssystem.

Ferner bedeutet im folgenden $\mathfrak{M}_{i,j}$ bzw. $\mathfrak{P}_{i,j}$ das am Endquerschnitt i eines Stabes i, j beim Ausknicken auftretende Moment bzw. die Kraft, die dabei von den Nachbarstäben (zusätzlich zur bereits wirksamen Stabkraft) auf den betreffenden Stab ausgeübt wird. Der Momentenvektor* $\mathfrak{M}_{i,j}$ wird wieder in drei Komponenten $M'_{i,j}$ (identisch mit dem verdrillenden Moment $T_{i,j}$), $M''_{i,j}$, $M'''_{i,j}$ in Richtung $\hat{s}'_{i,j}, \hat{s}''_{i,j}, \hat{s}'''_{i,j}$ zerlegt; entsprechendes gilt für $\mathfrak{P}_{i,j}$.

Zwischen den Momenten M'' bzw. M''' und den zugehörigen Endneigungen τ'' bzw. τ''' der Stabendquerschnitte gegen die Stabsehnen bestehen nach S. 285 je nachdem, ob der Stab einseitig oder beiderseitig ein solches Moment erhält, folgende Beziehungen:

a) Moment bei i allein:

$$\tau_{i,j} = M_{i,j} \cdot e_{i,j};$$

daraus

$$M_{i,j} = \frac{\tau_{i,j}}{e_{i,j}}.$$

Moment bei j allein:

$$\tau_{j,i} = M_{j,i} \cdot e_{j,i};$$

daraus

$$M_{j,i} = \frac{\tau_{j,i}}{e_{j,i}}.$$

* Korkzieherregel, S. 30.

b) Momente bei i und j gleichzeitig:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{i,j} &= M_{i,j} \cdot e_{i,j} + M_{j,i} \cdot \hat{e}_{i,j} \\ \tau_{j,i} &= M_{i,j} \cdot \hat{e}_{j,i} + M_{j,i} \cdot e_{j,i} \end{aligned} \right\} \hat{e}_{i,j} = \hat{e}_{j,i};$$

daraus

$$M_{i,j} = \frac{e_{j,i}}{d_{i,j}} \cdot \tau_{i,j} - \frac{\hat{e}_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot \tau_{j,i},$$

$$M_{j,i} = \frac{e_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot \tau_{j,i} - \frac{\hat{e}_{j,i}}{d_{i,j}} \cdot \tau_{i,j};$$

hierin ist

$$d_{i,j} = e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j}^2.$$

Die „Einheitsdrehungen“ e und \hat{e} sind Funktionen der Stablängskräfte S ; ist in einem Stab die Längskraft eine Zugkraft, so wird für diesen Stab zweckmäßig mit den Werten e für $\alpha \left(= l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}} \right) = 0$ gerechnet. Vgl. hierzu Anhang, Tabelle 103 (s. auch S. 166).

Zur Kennzeichnung der Hauptachsenrichtung, nach welcher der Drehungs- bzw. der Momentenvektor dabei weist, werden jeweils die Größen τ , M und e mit den Indizes „“ oder „“ versehen.

Weiter gilt zwischen dem Endmoment $M'_{i,j} = -M'_{j,i}$ (verdrillendes Moment $T_{i,j} = -T_{j,i}$) und der zugehörigen Drillung $\tau'_{i,j} = -\tau'_{j,i}$ des einen Stabendquerschnitts gegen den anderen die Beziehung:

$$M'_{i,j} (= T_{i,j}) = \frac{\tau'_{i,j}}{\bar{e}_{i,j}} \quad \text{bzw.} \quad M'_{j,i} (= T_{j,i}) = \frac{\tau'_{j,i}}{\bar{e}_{j,i}}.$$

Dabei bedeutet $\bar{e}_{i,j}$ bzw. $\bar{e}_{j,i}$ die „Einheitsdrehung“ des freien Endes i bzw. j eines in j bzw. i eingespannten Balkens i , j infolge eines an seinem freien Ende angreifenden, ihn verdrillenden Einzelmoments $T = 1$ im Sinne dieses Moments; es ist $\bar{e}_{i,j} = \bar{e}_{j,i}$.

Die Einführung der vorhergehenden Ausdrücke für die Stab-Endmomente in die Gleichgewichtsbedingungen der einzelnen Knoten i :

$$\sum M_{i,jx} = 0 \text{ usw.}$$

(das Summenzeichen erstreckt sich über alle am Knoten i angreifende Stäbe i , j ; vgl. Aufgabe 84, S. 294) ergibt ein System von linearen Gleichungen für die als Unbekannte anzusehenden Drehungs- bzw. Wegkomponenten der einzelnen Knoten („Deformationsmethode“; allgemeines über diese Methode siehe z. B. bei Ostefeld 67). Die Lastwerte dieses Systems von linearen Gleichungen sind hier gleich Null, weil (vor Eintritt des Knickzustandes) nur längsbelastete, aber in Längsrichtung starre Stäbe vorausgesetzt wurden (s. S. 297).

Dieses System homogener Gleichungen gestattet also nur dann von Null verschiedene Lösungen für die Drehungs- bzw. Wegkomponenten der Knoten, wenn die Stablängskräfte solche Werte annehmen, daß die aus den Beiwerten $Z_{i,k} = Z_{k,i}$ der Unbekannten gebildete

symmetrische Determinante („Nennerdeterminante“) zu Null wird. Also heißt die „Knick- oder Stabilitätsbedingung“:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & \cdots & Z_{1,n} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & \cdots & Z_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n,1} & Z_{n,2} & \cdots & Z_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Nachprüfung, ob eine Stabgruppe bei einem gegebenen Längskraft-Belastungszustand ihren Knickzustand erreicht oder ihn bereits überschritten hat, wird für den gegebenen Belastungszustand und für verschiedene Vielfache $V \leq 1$ dieses Zustands diese Nennerdeterminante ausgerechnet. Durch Interpolation wird dann dasjenige Vielfache V_K aufgesucht, bei dem die Determinante nach Null geht, also der Knickzustand erreicht wird. Es ist zu beachten, daß das kleinste Vielfache $V \leq 1$ des Belastungszustandes maßgebend ist, bei dem Δ den Wert 0 annimmt.

Im folgenden wird angenommen, daß in den einzelnen Stäben beim Knickzustand die Elastizitätsgrenze noch nicht überschritten ist*.

§ 23. Stabilität ebener Stabgruppen.

Es wird vorausgesetzt, daß die Hauptträgheitsachsen der einzelnen Stäbe senkrecht und parallel zur Systemebene gerichtet sind oder daß Querschnitte mit nur gleichwertigen Schwerachsen (z. B. Kreisrohre) vorliegen.

Aufgabe 85 bis 87: Knicken ebener Stabgruppen mit räumlich festgelegten Knoten.

Aufgabe 85.

Die in Abb. 276 gezeichnete Stabgruppe (Oberwand eines Rumpffachwerks) mit biege- und drillsteifem Knoten 0 sei in diesem sowie in den Stabendpunkten $j = 1$ bis 4 vollkommen gelenkig gelagert; die Punkte 0÷4 seien durch eine genügende Anzahl von Fesseln räumlich festgelegt. Es ist zu berechnen, bei welchem Vielfachen V_K der eingetra-

* Liegen beim Knickzustand, wie häufig der Fall, in einzelnen Stäben bereits Spannungen σ jenseits der Proportionalitätsgrenze vor, so gelten für diese Stäbe abgeminderte Werte der Steifigkeit EJ . Nach einem Vorschlag von Engesser kann dann unter Annahme, daß für einen gelenkig gelagerten Einzelstab z. B. die Tetmajerformel $\sigma_k = a - b\lambda$ zutrefte, der Elastizitätsmodul E durch den abgeminderten Modul $E' = \frac{\sigma(\sigma - a)^2}{b^2 \pi^2}$ ersetzt werden. $E'J$ ist dann die der jeweils herrschenden Spannung σ entsprechende Steifigkeit, λ ist der Schlankheitsgrad (vgl. Bleich⁴², Ratzersdorfer⁶², ferner Kaul⁶⁶).

genen Belastung, die in den Stäben Längskräfte vom Betrage S_1 bis S_4 bedingt, der Knickzustand eintritt.

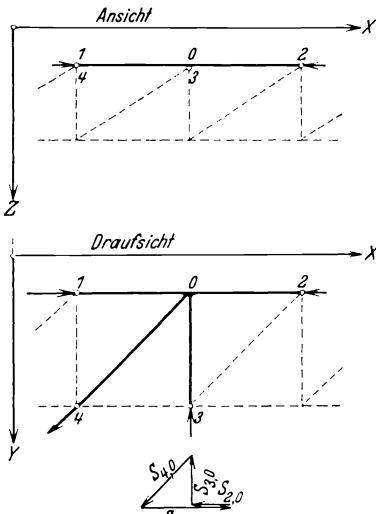


Abb. 276.

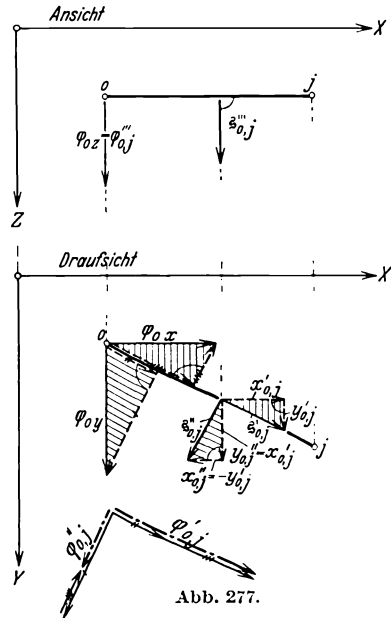


Abb. 277.

Der Knoten 0 drehe sich um einen Winkel Φ_0 mit den Vektorkomponenten φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} . Die Zerlegung von Φ_0 hinsichtlich eines Stabes 0, j in die Komponenten $\varphi'_{0,j}$, $\varphi''_{0,j}$, $\varphi'''_{0,j}$ parallel der Stablängsachse $\xi'_{0,j}$ und den Hauptträgheitsachsen $\xi''_{0,j}$ und $\xi'''_{0,j}$ ergibt nach Abb. 277

$$\begin{aligned}\varphi'_{0,j} &= +\varphi_{0x} \cdot x'_{0,j} + \varphi_{0y} \cdot y'_{0,j}, \\ \varphi''_{0,j} &= -\varphi_{0x} \cdot y'_{0,j} + \varphi_{0y} \cdot x'_{0,j}, \\ \varphi'''_{0,j} &= +\varphi_{0z} \cdot 1^*.\end{aligned}$$

Da die Punkte 0 und j festliegen, die Stabsehnen also keine Drehungen ausführen können, sind im vorliegenden Fall die Drehungskomponenten $\varphi''_{0,j}$ und $\varphi'''_{0,j}$ gleich den entsprechenden Neigungen $\tau''_{0,j}$ und $\tau'''_{0,j}$ der mit 0 zusammenfallenden Stab-Endquerschnitte gegen die Stabsehnen 0, j. Der Drehungskomponente $\varphi'_{0,j}$ setzt der nach Voraussetzung im Endpunkt j vollkommen gelenkig angeschlossene Stab 0, j keinen Widerstand entgegen ($T_{0,j} = 0$). Den Drehungskomponenten $\tau''_{0,j}$ und $\tau'''_{0,j}$ dagegen entsprechen im gemeinsamen Knoten 0 biegende Momente

$$\begin{aligned}M''_{0,j} &= \frac{\tau''_{0,j}}{e''_{0,j}} = \frac{\varphi''_{0,j}}{e''_{0,j}}, \\ M'''_{0,j} &= \frac{\tau'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} = \frac{\varphi'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}.\end{aligned}$$

* Vgl. die Koordinatentransformation, Aufgabe 84, S. 293.

Mit $M_{0,ix} = -M''_{0,j} \cdot z'_{0,j}$, $M_{0,iy} = +M''_{0,j} \cdot x'_{0,j}$, $M_{0,iz} = M'''_{0,j} \cdot 1$ (Abb. 278) heißen die Gleichgewichtsbedingungen des Knotens 0*:

$$\sum M_{0,ix} = 0: \varphi_{0x} \sum + \frac{y'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \varphi_{0y} \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \varphi_{0z} \cdot 0 = 0,$$

$$\sum M_{0,iy} = 0: \varphi_{0x} \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} + \varphi_{0y} \sum + \frac{x'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \varphi_{0z} \cdot 0 = 0,$$

$$\sum M_{0,iz} = 0: \varphi_{0x} \cdot 0 + \varphi_{0y} \cdot 0 + \varphi_{0z} \sum \frac{1}{e'''_{0,j}} = 0^{**}.$$

Eine endliche Drehung des Knotens 0 ist nur dann möglich, wenn die Nennerdeterminante dieses Systems homogener Gleichungen gleich Null ist.

Also heißt die Knickbedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum + \frac{y'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} & \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} & 0 \\ \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} & \sum + \frac{x'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} & 0 \\ 0 & 0 & \sum \frac{1}{e'''_{0,j}} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies tritt ein, wenn entweder:

$$\sum \frac{1}{e'''_{0,j}} = 0$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} \sum + \frac{y'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} & \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} \\ \sum - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e''_{0,j}} & \sum + \frac{x'_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} \end{vmatrix} = 0$$

ist; dann sind von Null verschiedene Werte φ_{0x} und φ_{0y} möglich, d. h. die Stabgruppe knickt aus ihrer Ebene heraus.

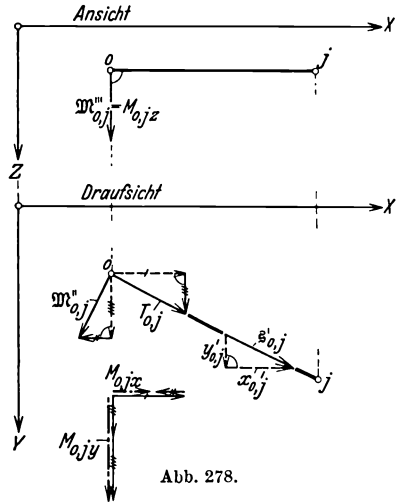


Abb. 278.

* Strenggenommen müßten in den Gleichgewichtsbedingungen die Vorzeichen aller Glieder umgekehrt werden; denn die von den Stäben her auf den Knoten 0 wirkenden Momente sind entgegengesetzt gleich den vorher genannten Momenten, die vom Knoten her auf die einzelnen Stäbe wirken.

** Die Summen erstrecken sich über alle im Knoten 0 steif miteinander verbundenen Stäbe.

Zahlenbeispiel. Die Stäbe 0, 3 und 0, 4 seien gelenkig in 0 angeschlossen; es liege also nur die in Abb. 279 dar-

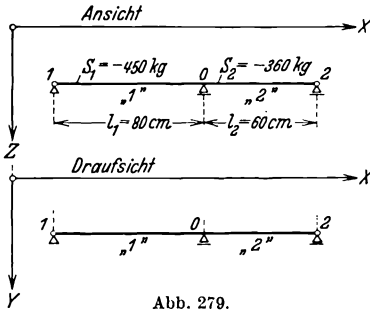


Abb. 279.

gestellte Stabgruppe vor, die aus zwei in gleicher Richtung aufeinanderfolgenden Stäben besteht. Dann heißt also die Knickbedingung (da $y'_{0,j} = 0$, $x'_{0,j} = \pm 1$ ist und daher an Stelle der zuletzt genannten Teildeterminante der Ausdruck $\Delta = \sum \frac{1}{e''_{0,j}}$ tritt):

$$\frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}} = 0.$$

Die Stäbe seien als Kreisrohre ausgebildet, so daß

$$(EJ)''_{0,j} = (EJ)'''_{0,j} = (EJ)_{0,j}.$$

In Tabelle 83 sind die zur Auswertung der Nennerdeterminante erforderlichen Zahlenwerte zusammengestellt; und zwar zunächst für den gegebenen Belastungszustand und dann für den mit einem Wert $V = 1,2$ vervielfachten Belastungszustand.

Abb. 280 zeigt Δ über V aufgetragen (die Rechnung wurde noch für andere Werte V durchgeführt); Δ wird zu Null, d. h. die Stabgruppe knickt, bei dem 1,12fachen der gegebenen Belastung.

Tabelle 83. Ermittlung von Δ für $V = 1$ und $V = 1,2$.

	$V = 1$			$V = 1,2$				
	S [kg]	$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$ [-]	u^* [-]	$\frac{1}{e} = \frac{u}{l}$ [kgcm]	S [kg]	$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$ [-]	u^* [-]	$\frac{1}{e} = \frac{u}{l}$ [kgcm]
Stab 0 ÷ 1	-450	3,10	0,127	476	-540	3,39	-0,931	-3490
Stab 0 ÷ 2	-360	2,76	0,967	2740	-432	3,02	0,354	+1000
$\Delta = \frac{1}{e_{0,1}} + \frac{1}{e_{0,2}} = 3216$							$\Delta = -2490$	

* Vgl. S. 286 und Anhang, Tabelle 103.

Bemerkung: Ist $S_{0,1} = S_{0,2}$ und $(EJ)_{0,1} = (EJ)_{0,2}$ wie z. B. bei einem abgestützten durchlaufenden Stab und bedeutet $l_{0,1}$ die Länge des kürzeren Teilstabes bzw. $l = l_{0,1} + l_{0,2}$ die Gesamtlänge, so kann für die Knicklast der Stabgruppe gesetzt werden:

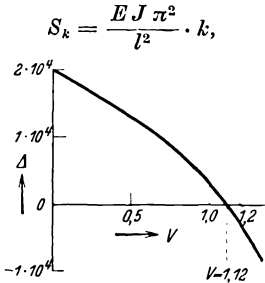


Abb. 280.

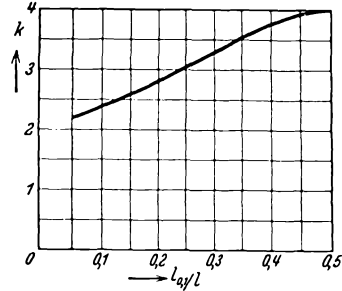


Abb. 281.

wobei k aus Abb. 281 zu entnehmen ist; angenähert kann diese Kurve durch die Gerade $k \sim 2 + 4l_{0,1}/l$ ersetzt werden. Im Grenzfall $l_{0,1} = 0$, wenn also zwei Stützpunkte einander unendlich naherücken, geht die Knicklast des abgestützten Stabes in die Eulerlast des einseitig eingespannten Stabes über (dabei wird $k = 2,0457$; starre Stützen vorausgesetzt!).

Aufgabe 86.

Für die in Abb. 282 dargestellte N -förmige Verbundscheibe ist dasjenige Vielfache des eingetragenen Belastungszustands zu ermitteln,

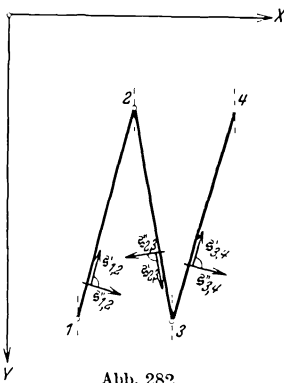


Abb. 282.

bei dem Knicken eintritt; der N -Verband bestehe aus biege- und drillsteif miteinander verbundenen Stäben und sei in den Punkten 1-4 gelagert; diese Punkte seien durch eine genügende Anzahl von Fesseln räumlich festgelegt. Die Lagerung erfolge

- in Fall 1: durch vollkommene Gelenke,
- „ „ 2: durch Kreuzgelenke, die Momente um ihre in Y -Richtung verlaufende Achse aufnehmen können.

Fall 1.

Bei irgendwelchen Drehungen Φ_1 bis Φ_4 der Knoten 1-4 werden wegen der vorausgesetzten vollkommenen Gelenkanschlüsse in den Anschlußpunkten vom Widerlager aus keine Momente auf die Stabgruppe ausgeübt.

Die Knoten 2 und 3 mögen sich um Winkel Φ_2 ($\varphi_{2x}, \varphi_{2y}, \varphi_{2z}$) und Φ_3 ($\varphi_{3x}, \varphi_{3y}, \varphi_{3z}$) drehen. Die Zerlegung von z. B. Φ_2 in Komponenten $\varphi'_{2,1}, \varphi''_{2,1}, \varphi'''_{2,1}$ hinsichtlich des Stabes 1, 2 bzw. in Komponenten

$\varphi'_{2,3}$, $\varphi''_{2,3}$ und $\varphi'''_{2,3}$ hinsichtlich des Stabes 2, 3 ergibt nach Abb. 277 die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi'_{2,1} &= + \varphi_{2x} \cdot x'_{1,2} + \varphi_{2y} \cdot y'_{1,2}, & \varphi'_{2,3} &= + \varphi_{2x} \cdot x'_{2,3} + \varphi_{2y} \cdot y'_{2,3}, \\ \varphi''_{2,1} &= - \varphi_{2x} \cdot y'_{1,2} + \varphi_{2y} \cdot x'_{1,2}, & \varphi''_{2,3} &= - \varphi_{2x} \cdot y'_{2,3} + \varphi_{2y} \cdot x'_{2,3}, \\ \varphi'''_{2,1} &= + \varphi_{2z} \cdot 1; & \varphi'''_{2,3} &= + \varphi_{2z} \cdot 1. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt die Zerlegung von Φ_3 :

$$\begin{aligned} \varphi'_{3,2} &= + \varphi_{3x} \cdot x'_{2,3} + \varphi_{3y} \cdot y'_{2,3}, & \varphi'_{3,4} &= + \varphi_{3x} \cdot x'_{3,4} + \varphi_{3y} \cdot y'_{3,4}, \\ \varphi''_{3,2} &= - \varphi_{3x} \cdot y'_{2,3} + \varphi_{3y} \cdot x'_{2,3}, & \varphi''_{3,4} &= - \varphi_{3x} \cdot y'_{3,4} + \varphi_{3y} \cdot x'_{3,4}, \\ \varphi'''_{3,2} &= + \varphi_{3z} \cdot 1; & \varphi'''_{3,4} &= + \varphi_{3z} \cdot 1. \end{aligned}$$

Der Drehungskomponente $\varphi'_{2,1}$ setzt der in „1“ vollkommen gelenkig angeschlossene Stab 1, 2 keinen Widerstand entgegen ($T_{2,1} = 0$); entsprechendes gilt für $\varphi'_{3,4}$ hinsichtlich des Stabes 3, 4 ($T_{3,4} = 0$).

Den übrigen Drehungskomponenten dagegen entsprechen in den Punkten 2 und 3 biegende bzw. drillende Momente. Da wegen der festliegenden Stab-Endpunkte keine Drehungen der Stabsehnen auftreten können, sind die Drehungskomponenten φ'' bzw. φ''' gleich den entsprechenden Neigungen τ'' und τ''' der Stabenden gegen die Stabsehnen; ferner ist:

$$\varphi'_{2,3} = \tau'_{2,3} + \varphi'_{3,2}$$

und

$$\varphi'_{3,2} = \tau'_{3,2} + \varphi'_{2,3}$$

und somit

$$\tau'_{2,3} = \varphi'_{2,3} - \varphi'_{3,2} = -\tau'_{3,2}.$$

Demnach treten entsprechend S. 298 beim Knicken des Verbandes folgende Momente in 2 und 3 auf:

An Stab 1, 2:

$$M''_{2,1} = \frac{\tau''_{2,1}}{e''_{2,1}} = \frac{\varphi''_{2,1}}{e''_{2,1}},$$

$$M'''_{2,1} = \frac{\tau'''_{2,1}}{e'''_{2,1}} = \frac{\varphi'''_{2,1}}{e'''_{2,1}},$$

an Stab 2, 3:

$$T_{2,3} (= -T_{3,2}) = \frac{\tau'_{2,3}}{e_{2,3}} = \frac{1}{e_{2,3}} \cdot (\varphi'_{2,3} - \varphi'_{3,2}),$$

$$M''_{2,3} = \frac{e'_{3,2}}{d''_{2,3}} \varphi''_{2,3} - \frac{e'_{2,3}}{d''_{2,3}} \varphi''_{3,2},$$

$$M'''_{2,3} = \frac{e'''_{3,2}}{d'''_{2,3}} \varphi'''_{2,3} - \frac{e'''_{2,3}}{d'''_{2,3}} \varphi'''_{3,2};$$

$$M''_{3,2} = \frac{e'_{2,3}}{d''_{2,3}} \varphi''_{3,2} - \frac{e'_{3,2}}{d''_{2,3}} \varphi''_{2,3},$$

$$M'''_{3,2} = \frac{e'''_{2,3}}{d'''_{2,3}} \varphi'''_{3,2} - \frac{e'''_{3,2}}{d'''_{2,3}} \varphi'''_{2,3};$$

an Stab 3, 4:

$$M''_{3,4} = \frac{\tau'_{3,4}}{e''_{3,4}} = \frac{\varphi'_{3,4}}{e'_{3,4}},$$

$$M'''_{3,4} = \frac{\tau''_{3,4}}{e'''_{3,4}} = \frac{\varphi''_{3,4}}{e''_{3,4}}.$$

Mit

$$M_{2,1x} = -M''_{2,1} \cdot y'_{1,2}, \quad M_{2,1y} = M''_{2,1} \cdot x'_{1,2},$$

$$M_{2,1z} = M'''_{2,1},$$

$$M_{2,3x} = -M''_{2,3} \cdot y'_{2,3} + T_{2,3} \cdot x'_{2,3}, \quad M_{2,3y} = M''_{2,3} \cdot x'_{2,3} + T_{2,3} \cdot y'_{2,3},$$

$$M_{2,3z} = M'''_{2,3},$$

$$M_{3,2x} = -M''_{3,2} \cdot y'_{2,3} + T_{3,2} \cdot x'_{2,3}, \quad M_{3,2y} = M''_{3,2} \cdot x'_{2,3} + T_{3,2} \cdot y'_{2,3},$$

$$M_{3,2z} = M'''_{3,2},$$

$$M_{3,4x} = -M''_{3,4} \cdot y'_{3,4}, \quad M_{3,4y} = M''_{3,4} \cdot x'_{3,4},$$

$$M_{3,4z} = M'''_{3,4}$$

(vgl. Abb. 278) und den eingangs genannten Transformationsgleichungen für φ' , φ'' und φ''' liefern die Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten 2 und 3 das aus folgendem Schema ersichtliche System homogener Gleichungen (vgl. die Anmerkung auf S. 302):

Tabelle 84. Schema der Gleichgewichtsbedingungen.

Gleichgewichts- bedingung	Beiwerte von					
	φ_{2x}	φ_{2y}	φ_{3x}	φ_{3y}	φ_{2z}	φ_{3z}
$\sum M_{2,ix} = 0$	$Z_{2x,2x}$	$Z_{2x,2y}$	$Z_{2x,3x}$	$Z_{2x,3y}$	0	0
$\sum M_{2,iy} = 0$	$Z_{2y,2x}$	$Z_{2y,2y}$	$Z_{2y,3x}$	$Z_{2y,3y}$	0	0
$\sum M_{3,ix} = 0$	$Z_{3x,2x}$	$Z_{3x,2y}$	$Z_{3x,3x}$	$Z_{3x,3y}$	0	0
$\sum M_{3,iy} = 0$	$Z_{3y,2x}$	$Z_{3y,2y}$	$Z_{3y,3x}$	$Z_{3y,3y}$	0	0
$\sum M_{2,iz} = 0$	0	0	0	0	$Z_{2z,2z}$	$Z_{2z,3z}$
$\sum M_{3,iz} = 0$	0	0	0	0	$Z_{3z,2z}$	$Z_{3z,3z}$

Darin ist:

$$Z_{2x,2x} = \frac{y'_{1,2}{}^2}{e''_{2,1}} + \frac{y'_{2,3}{}^2 e'_{3,2}}{d''_{2,3}} + \frac{x'_{2,3}{}^2}{e_{2,3}},$$

$$Z_{2y,2y} = \frac{x'_{1,2}{}^2}{e''_{2,1}} + \frac{x'_{2,3}{}^2 e'_{3,2}}{d''_{2,3}} + \frac{y'_{2,3}{}^2}{e_{2,3}},$$

$$Z_{3x,3x} = \frac{y'_{3,4}{}^2}{e'_{3,4}} + \frac{y'_{2,3}{}^2 e'_{2,3}}{d''_{2,3}} + \frac{x'_{2,3}{}^2}{e_{2,3}},$$

$$Z_{3y,3y} = \frac{x'_{3,4}{}^2}{e'_{3,4}} + \frac{x'_{2,3}{}^2 e'_{2,3}}{d''_{2,3}} + \frac{y'_{2,3}{}^2}{e_{2,3}};$$

$$Z_{2x,2y} = Z_{2y,2x} = -\frac{x'_{1,2} y'_{1,2}}{e''_{2,1}} - \frac{x'_{2,3} y'_{2,3} e''_{3,2}}{d''_{2,3}} + \frac{x'_{2,3} y'_{2,3}}{e_{2,3}},$$

$$Z_{2x,3x} = Z_{3x,2x} = -\frac{y'^2_{2,3} e''_{2,3}}{d''_{2,3}} - \frac{x'^2_{2,3}}{e_{2,3}},$$

$$Z_{2x,3y} = Z_{3y,2x} = Z_{2y,3x} = Z_{3x,2y} = \frac{x'_{2,3} y'_{2,3} e''_{2,3}}{d''_{2,3}} - \frac{x'_{2,3} y'_{2,3}}{e_{2,3}},$$

$$Z_{2y,3y} = Z_{3y,2y} = -\frac{x'^2_{2,3} e''_{2,3}}{d''_{2,3}} - \frac{y'^2_{2,3}}{e_{2,3}},$$

$$Z_{3x,3y} = Z_{3y,3x} = -\frac{x'_{3,4} y'_{3,4}}{e''_{3,4}} - \frac{x'_{2,3} y'_{2,3} e''_{2,3}}{d''_{2,3}} + \frac{x'_{2,3} y'_{2,3}}{e_{2,3}};$$

$$Z_{2z,2z} = \frac{1}{e''_{2,1}} + \frac{e''_{3,2}}{d''_{2,3}},$$

$$Z_{3z,3z} = \frac{1}{e''_{3,4}} + \frac{e''_{2,3}}{d''_{2,3}},$$

$$Z_{2z,3z} = Z_{3z,2z} = -\frac{e''_{2,3}}{d''_{2,3}}.$$

Endliche Drehungen der Knoten 2 und 3 sind nur dann möglich, wenn die Nennerdeterminante dieses Systems homogener Gleichungen Null wird. Dies tritt ein, wenn entweder die erste oder die zweite in dem Schema durch Umrahmung hervorgehobene Teildeterminante für sich verschwindet (Ausknicken aus der Ebene heraus bzw. Knicken in der Ebene).

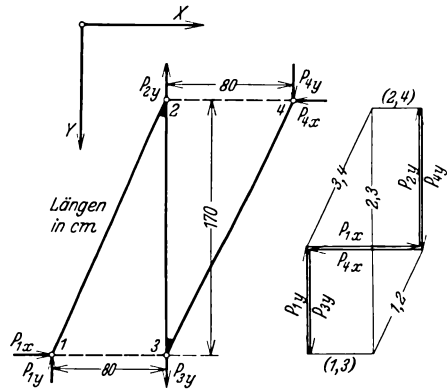


Abb. 283.
 $P_{1y} = -1760$ kg; $P_{1x} = +1934$ kg;
 $P_{2y} = -2350$ kg; $P_{4x} = -1934$ kg.
 $P_{3y} = +1760$ kg;
 $P_{4y} = +2350$ kg;
 $S_{1,2} = -1945$ kg;
 $S_{2,3} = +4110$ kg;
 $S_{3,4} = -2597$ kg.

Zahlenbeispiel (vgl. Abb. 283).

Tabelle 85. Von den Stabkräften unabhängige Werte.

Stab	l [cm]	x' [-]	y' [-]	$EJ^* \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]	$GJ_d \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]	$\frac{EJ}{l} \cdot 10^{-5}$ [kgcm]	$\frac{1}{e} \cdot 10^{-5**}$ [kgcm]
1,2	187,9	+0,426	-0,905	8,644	—	0,460	—
2,3	170,0	0	+1,000	8,644	6,915	0,508	0,407
3,4	187,9	+0,426	-0,905	8,644	—	0,460	—

* $EJ'' = EJ''' = EJ$ (Rundrohre).
 ** $\frac{1}{e} = \frac{GJ_d}{l}$.

Tabelle 86. Von den Stabkräften abhängige Werte.

Stab	S [kg]	α [-]	u^* [-]	$\frac{1}{e} \cdot 10^{-5} **$ [kgcm]	v^* [-]	$\frac{e}{d} \cdot 10^{-5} **$ [kgcm]	w^* [-]	$\frac{\hat{e}}{d} \cdot 10^{-5} **$ [kgcm]
bei $V = 0,95$								
1,2	-1848	2,75	+0,987	+0,454	—	—	—	—
2,3	+3905	0***	—	—	+4	+2,032	-2	-1,016
3,4	-2467	3,18	-0,1250	-0,0575	—	—	—	—
bei $V = 1,05$								
1,2	-2042	2,89	+0,682	+0,314	—	—	—	—
2,3	+4316	0***	—	—	+4	+2,032	-2	-1,016
3,4	-2727	3,34	-0,716	-0,330	—	—	—	—

* Vgl. S. 286 und Anhang, Tabelle 103.

** $\frac{1}{e} = \frac{EJ}{l} \cdot u$; $\frac{e}{d} = \frac{EJ}{l} \cdot v$; $\frac{\hat{e}}{d} = \frac{EJ}{l} \cdot w$.

*** Zugstab, vgl. S. 299.

Die aus Tabelle 85 und 86 ersichtlichen Zahlenwerte ergeben nach S. 306 die Nennerdeterminanten (Rechenschiebergenauigkeit)

bei $V = 0,95$:

1. für Ausknicken aus der Systemebene heraus

$$\Delta_1^* = (10^5)^4 \cdot \begin{vmatrix} +2,404 & +0,175 & +1,016 & 0 \\ +0,175 & +0,489 & 0 & -0,407 \\ +1,016 & 0 & +1,985 & -0,0222 \\ 0 & -0,407 & -0,0222 & +0,397 \end{vmatrix} = +0,075 \cdot 10^{20},$$

2. für Knicken in der Systemebene

$$\Delta_2 = (10^5)^2 \cdot \begin{vmatrix} +2,486 & +1,016 \\ +1,016 & +1,974 \end{vmatrix} = +3,87 \cdot 10^{10};$$

bei $V = 1,05$:

1. für Ausknicken aus der Systemebene heraus

$$\Delta_1^* = (10^5)^4 \cdot \begin{vmatrix} +2,289 & +0,121 & +1,016 & 0 \\ +0,121 & +0,466 & 0 & -0,407 \\ +1,016 & 0 & +1,762 & -0,127 \\ 0 & -0,407 & -0,127 & +0,347 \end{vmatrix} = -0,13 \cdot 10^{20},$$

2. für Knicken in der Systemebene

$$\Delta_2 = (10^5)^2 \cdot \begin{vmatrix} +2,346 & +1,016 \\ +1,016 & +1,702 \end{vmatrix} = +2,96 \cdot 10^{10}.$$

* Ausrechnung vgl. Anhang.

Die Determinante Δ_1 wird zu Null, d. h. die Stabgruppe knickt aus der Systemebene heraus, bei dem 0,93fachen der gegebenen Belastung (Δ_2 würde erst bei dem 1,32fachen der gegebenen Belastung zu Null werden; maßgebend ist also das Ausknicken aus der Ebene heraus).

Wird mit gelenkig verbundenen Stäben gerechnet, so ergibt sich der Knickzustand dann, wenn im höchstbeanspruchten Druckstab 3, 4 die Eulerlast $S_E = -\frac{EJ \cdot \pi^2}{l^2} = -2420 \text{ kg}$ erreicht wird, also bei $V = 0,93$. Durch die steife Verbindung der Stäbe untereinander wird also das Knicklastvielfache des Gesamtsystems um etwa 6% erhöht.

Fall 2.

Wegen der nur zweiachsigen Gelenkanschlüsse sind die in Richtung der Y -Achse entfallenden Vektorkomponenten $\varphi_{1y}, \varphi_{2y}, \varphi_{3y}, \varphi_{4y}$ der Knotendrehungen gleich Null.

Die Zerlegung von Φ_1 in Komponenten $\varphi'_{1,2}, \varphi''_{1,2}$ und $\varphi'''_{1,2}$ hinsichtlich des Stabes 1, 2 ergibt daher unter Beachtung von Abb. 277 die Transformationsgleichungen

$$\varphi'_{1,2} = + \varphi_{1x} \cdot x'_{1,2}, \quad \varphi''_{1,2} = - \varphi_{1x} \cdot y'_{1,2}, \quad \varphi'''_{1,2} = + \varphi_{1z} \cdot 1.$$

Die Zerlegung von Φ_2 in Komponenten $\varphi'_{2,1}, \varphi''_{2,1}$ und $\varphi'''_{2,1}$ hinsichtlich des Stabes 1, 2 bzw. in Komponenten $\varphi'_{2,3}, \varphi''_{2,3}$ und $\varphi'''_{2,3}$ hinsichtlich des Stabes 2, 3 ergibt entsprechend

$$\begin{aligned} \varphi'_{2,1} &= + \varphi_{2x} \cdot x'_{1,2}, & \varphi'_{2,3} &= + \varphi_{2x} \cdot x'_{2,3}, \\ \varphi''_{2,1} &= - \varphi_{2x} \cdot y'_{1,2}, & \text{bzw. } \varphi''_{2,3} &= - \varphi_{2x} \cdot y'_{2,3}, \\ \varphi'''_{2,1} &= + \varphi_{2z} \cdot 1 & \varphi'''_{2,3} &= + \varphi_{2z} \cdot 1. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für Φ_3 und Φ_4 .

Beim Knicken treten an den Enden des Stabes 1, 2 folgende Momente* auf:

$$\left. \begin{aligned} T_{1,2} (= -T_{2,1}) &= \frac{1}{\bar{e}_{1,2}} (\varphi'_{1,2} - \varphi'_{2,1}), \\ M''_{1,2} &= \frac{e''_{2,1}}{d''_{1,2}} \varphi''_{1,2} - \frac{\bar{e}'_{1,2}}{d''_{1,2}} \varphi''_{2,1}, \\ M''_{2,1} &= \frac{e''_{1,2}}{d''_{1,2}} \varphi''_{2,1} - \frac{\bar{e}'_{2,1}}{d''_{1,2}} \varphi''_{1,2}, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ähnlich wie bei Stab} \\ \text{2, 3 (Fall 1.),} \end{array}$$

aber

$$M'''_{2,1} = \frac{\varphi'''_{2,1}}{e'''_{2,1}},$$

* Wäre der Stab 1, 2 parallel der Y -Richtung, so könnte wegen des Gelenkanschlusses kein Moment $M''_{1,2}$ auftreten; dann wäre $M'''_{2,1} = \frac{\varphi'''_{2,1}}{e'''_{2,1}}$.

da am Ende 1 wegen des Kreuzgelenks, dessen eine Achse parallel $\bar{s}_{1,2}''''$ gerichtet ist, kein Moment $M_{1,2}''''$ auftreten kann.

Entsprechendes gilt für Stab 3, 4; für Stab 2, 3 dagegen gilt ohne Ausnahme dasselbe wie im Fall 1.

Mit

$$\begin{aligned}
 M_{1,2x} &= -M''_{1,2} \cdot y'_{1,2} + T_{1,2} \cdot x'_{1,2} & (= 0), \\
 M_{2,1x} &= -M''_{2,1} \cdot y'_{1,2} + T_{2,1} \cdot x'_{1,2}, & M_{2,1z} &= M''_{2,1}, \\
 M_{2,3x} &= -M''_{2,3} \cdot y'_{2,3} + T_{2,3} \cdot x'_{2,3}, & M_{2,3z} &= M''_{2,3} \text{ (nach Abb. 278)}
 \end{aligned}$$

und den entsprechenden Beziehungen für die Knoten 3 und 4 liefern die Gleichgewichtsbedingungen das aus folgendem Schema ersichtliche System homogener Gleichungen für die Unbekannten φ_x und φ_z (die Werte φ_y sind gleich Null; vgl. die Anmerkung auf S. 302):

Tabelle 87. Schema der Gleichgewichtsbedingungen.

Gleichgewichts- bedingung	Beiwerte von					
	φ_{1x}	φ_{2x}	φ_{3x}	φ_{4x}	φ_{2z}	φ_{3z}
$(\Sigma) M_{1,2x} = 0$	$Z_{1x,1x}$	$Z_{1x,2x}$	0	0	0	0
$\Sigma M_{2,1x} = 0$	$Z_{2x,1x}$	$Z_{2x,2x}$	$Z_{2x,3x}$	0	0	0
$\Sigma M_{3,1x} = 0$	0	$Z_{3x,2x}$	$Z_{3x,3x}$	$Z_{3x,4x}$	0	0
$(\Sigma) M_{4,3x} = 0$	0	0	$Z_{4x,3x}$	$Z_{4x,4x}$	0	0
$\Sigma M_{2,1z} = 0$	0	0	0	0	$Z_{2z,2z}$	$Z_{2z,3z}$
$\Sigma M_{3,1z} = 0$	0	0	0	0	$Z_{3z,2z}$	$Z_{3z,3z}$

Darin ist:

$$\begin{aligned}
 Z_{1x,1x} &= \frac{y_{1,2}^2 e_{2,1}''}{d_{1,2}''} + \frac{x_{1,2}^2}{e_{1,2}}, \\
 Z_{2x,2x} &= \frac{y_{1,2}^2 e_{1,2}''}{d_{1,2}''} + \frac{y_{2,3}^2 e_{3,2}''}{d_{2,3}''} + \frac{x_{1,2}^2}{e_{1,2}} + \frac{x_{2,3}^2}{e_{2,3}}, \\
 Z_{3x,3x} &= \frac{y_{3,4}^2 e_{4,3}''}{d_{3,4}''} + \frac{y_{2,3}^2 e_{2,3}''}{d_{2,3}''} + \frac{x_{3,4}^2}{e_{3,4}} + \frac{x_{2,3}^2}{e_{2,3}}, \\
 Z_{4x,4x} &= \frac{y_{3,4}^2 e_{3,4}''}{d_{3,4}''} + \frac{x_{3,4}^2}{e_{3,4}}, \\
 Z_{1x,2x} = Z_{2x,1x} &= -\frac{y_{1,2}^2 e_{1,2}''}{d_{1,2}''} - \frac{x_{1,2}^2}{e_{1,2}}, & Z_{2z,2z} &= \frac{1}{e_{2,1}'''} + \frac{e_{3,2}'''}{d_{2,3}'''}, \\
 Z_{2x,3x} = Z_{3x,2x} &= -\frac{y_{2,3}^2 e_{2,3}''}{d_{2,3}''} - \frac{x_{2,3}^2}{e_{2,3}}, & Z_{3z,3z} &= \frac{1}{e_{3,4}'''} + \frac{e_{2,3}'''}{d_{2,3}'''}, \\
 Z_{3x,4x} = Z_{4x,3x} &= -\frac{y_{3,4}^2 e_{3,4}''}{d_{3,4}''} - \frac{x_{3,4}^2}{e_{3,4}}, & Z_{2z,3z} = Z_{3z,2z} &= -\frac{e_{2,3}'''}{d_{2,3}'''}
 \end{aligned}$$

Tabelle 88. Schema der Gleichgewichtsbedingungen.

Gruppe I.

Gleichgewichts- bedingung	Beiwerte von			
	φ_{1y}	φ_{2y}	φ_{3y}	φ_{4y}
$\Sigma M_{1,y} = 0$	$\frac{1}{\bar{e}_{1,4}} + \frac{e''_{2,1}}{d''_{1,2}}$	$-\frac{\hat{e}''_{1,2}}{d''_{1,2}}$	0	$-\frac{1}{\bar{e}_{1,4}}$
$\Sigma M_{2,y} = 0$	$-\frac{\hat{e}''_{2,1}}{d''_{1,2}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{2,3}} + \frac{e''_{1,2}}{d''_{1,2}}$	$-\frac{1}{\bar{e}_{2,3}}$	0
$\Sigma M_{3,y} = 0$	0	$-\frac{1}{\bar{e}_{3,2}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{3,2}} + \frac{e'_{4,3}}{d'_{3,4}}$	$-\frac{\hat{e}''_{3,4}}{d''_{3,4}}$
$\Sigma M_{4,y} = 0$	$-\frac{1}{\bar{e}_{4,1}}$	0	$-\frac{\hat{e}''_{4,3}}{d''_{3,4}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{4,1}} + \frac{e'_{3,4}}{d'_{3,4}}$

Gruppe II.

Gleichgewichts- bedingung	Beiwerte von			
	φ_{1z}	φ_{2z}	φ_{3z}	φ_{4z}
$\Sigma M_{1,z} = 0$	$\frac{1}{\bar{e}_{1,2}} + \frac{e''_{4,1}}{d''_{4,1}}$	$-\frac{1}{\bar{e}_{1,2}}$	0	$-\frac{\hat{e}''_{1,4}}{d''_{4,1}}$
$\Sigma M_{2,z} = 0$	$-\frac{1}{\bar{e}_{2,1}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{2,1}} + \frac{e'_{3,2}}{d'_{2,3}}$	$-\frac{\hat{e}''_{2,3}}{d''_{2,3}}$	0
$\Sigma M_{3,z} = 0$	0	$-\frac{\hat{e}''_{3,2}}{d''_{2,3}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{3,4}} + \frac{e'_{2,3}}{d'_{2,3}}$	$-\frac{1}{\bar{e}_{3,4}}$
$\Sigma M_{4,z} = 0$	$-\frac{\hat{e}''_{4,1}}{d''_{4,1}}$	0	$-\frac{1}{\bar{e}_{4,3}}$	$\frac{1}{\bar{e}_{4,3}} + \frac{e'_{1,4}}{d'_{4,1}}$

Gruppe III.

Gleichgewichts- bedingung	Beiwerte von			
	φ_{1z}	φ_{2z}	φ_{3z}	φ_{4z}
$\Sigma M_{1,z} = 0$	$\frac{e'''_{2,1}}{d'''_{1,2}} + \frac{e'''_{4,1}}{d'''_{4,1}}$	$-\frac{\hat{e}'''_{1,2}}{d'''_{1,2}}$	0	$-\frac{\hat{e}'''_{1,4}}{d'''_{4,1}}$
$\Sigma M_{2,z} = 0$	$-\frac{\hat{e}'''_{2,1}}{d'''_{1,2}}$	$\frac{e'''_{1,2}}{d'''_{1,2}} + \frac{e'_{3,2}}{d'_{2,3}}$	$-\frac{\hat{e}'''_{2,3}}{d'''_{2,3}}$	0
$\Sigma M_{3,z} = 0$	0	$-\frac{\hat{e}'''_{3,2}}{d'''_{2,3}}$	$\frac{e'_{2,3}}{d'_{2,3}} + \frac{e'_{4,3}}{d'_{3,4}}$	$-\frac{\hat{e}'''_{3,4}}{d'''_{3,4}}$
$\Sigma M_{4,z} = 0$	$-\frac{\hat{e}'''_{4,1}}{d'''_{4,1}}$	0	$-\frac{\hat{e}'''_{4,3}}{d'''_{3,4}}$	$\frac{e'_{3,4}}{d'_{3,4}} + \frac{e'_{1,4}}{d'_{4,1}}$

Endliche Drehungen der Knoten 1÷4 sind nur dann möglich, wenn die Nennerdeterminante eines dieser Systeme I oder II bzw. III zu Null wird (Ausknicken aus der Ebene heraus bzw. Knicken innerhalb der Ebene).

Bemerkung: Im allgemeinen Fall eines nicht rechteckigen ebenen Rahmens liefern die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Knoten i zwei Gleichungen, von denen jede die 6 Unbekannten $\varphi_{i-1,z}, \varphi_{i-1,y}, \varphi_{i,z}, \varphi_{i,y}, \varphi_{i+1,z}, \varphi_{i+1,y}$ enthält, und eine Gleichung mit den Unbekannten $\varphi_{i-1,z}, \varphi_{i,z}, \varphi_{i+1,z}$ und damit eine entsprechend umständlichere Gesamtmatrix.

Die Auswertung der Kriterien für das Ausknicken des Spantes aus der Spantebene heraus erübrigt sich, wenn die Rahmenstäbe gleichzeitig hinsichtlich Knickung in den Ebenen der Rumpfsseitenwände als Glieder von Stabgruppen entsprechend Aufgabe 85, Abb. 276 aufgefaßt werden.

Ist der Rahmen durch eine in 1 und 3 fest angeschlossene Strebe versteift, so treten in die einzelnen Summenausdrücke z. T. weitere Glieder ein; z. B. in $\Sigma M_{1,jz}$ bzw. in $\Sigma M_{3,jz}$ (Knicken in der Spantebene) die Ausdrücke:

$$\frac{e''_{3,1}}{d''_{1,3}} \varphi_{1z} - \frac{e''_{1,3}}{d''_{1,3}} \varphi_{3z} \quad \text{bzw.} \quad \frac{e''_{1,3}}{d''_{1,3}} \varphi_{3z} - \frac{e''_{1,3}}{d''_{1,3}} \varphi_{1z}$$

(die Ausdrücke $\Sigma M_{2,jz}$ und $\Sigma M_{4,jz}$ dagegen ändern sich nicht) usw.

Aufgabe 88. Knicken einer ebenen Stabgruppe mit einem räumlich nicht festgelegten Knoten.

Für den in Abb. 286 dargestellten, in den Punkten 1, 2, 3, 4 mit vollkommenen Gelenken gelagerten K -Verband ist dasjenige Viel-

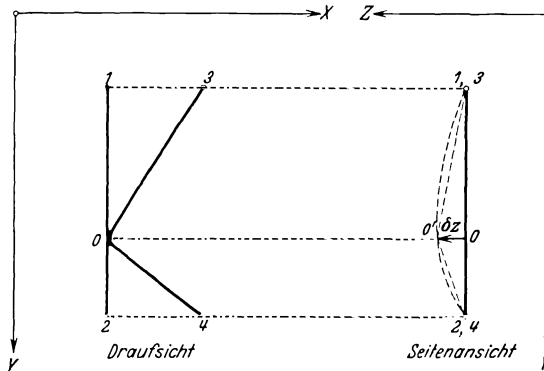


Abb. 286.

fache des eingetragenen Belastungszustands zu ermitteln, bei dem Knicken eintritt. Die Punkte 1, 2, 3, 4 seien durch eine genügende Anzahl von Fesseln räumlich festgelegt.

Der Knoten 0 sei gegen Ausknicken aus der Ebene des K -Verbands heraus nicht gestützt, er kann also beim Knicken des Verbands außer

einer Drehung Φ_0 ($\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \varphi_{0z}$) einen Weg δz beschreiben; dieser Weg ist senkrecht zur Verbandsebene gerichtet, da der Punkt 0 innerhalb der Ebene durch die K -Verbandstäbe festgelegt ist. Dabei dreht sich die Sehne eines Stabes $0, j$ um einen Winkel $\frac{\delta z}{l_{0,j}}$, dessen Vektor parallel $\hat{s}''_{0,j}$ gerichtet ist.

Für die Komponenten $\varphi'_{0,j}, \varphi''_{0,j}, \varphi'''_{0,j}$ der Drehung Φ_0 bezüglich eines Stabes $0, j$ gilt dasselbe wie in Aufgabe 85, nur ist zu beachten, daß jetzt infolge der Verschiebung des Knotens 0 um den Weg δz

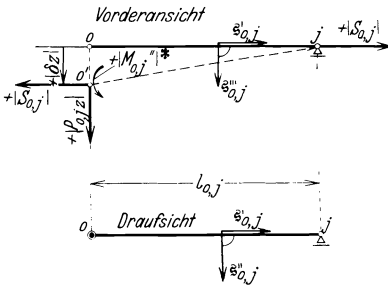


Abb. 287.

* $M'_{0,j}$ ist positiv, wenn sein Vektorpfeil im Sinne von $\hat{s}'_{0,j}$ weist; es dreht daher bei der hier vorgenommenen Wahl des Koordinatensystems in der Vorderansicht entgegen dem Uhrzeigersinn (vgl. S. 30)!

$$\varphi''_{0,j} = \tau''_{0,j} + \frac{\delta z}{l_{0,j}}$$

ist. Also treten im Knoten 0 beim Ausknicken folgende Momente auf (verdrillendes Moment $M'_{0,j} = T_{0,j}$ gleich Null):

$$M''_{0,j} = \frac{\tau''_{0,j}}{e''_{0,j}} = \frac{\varphi''_{0,j} - \delta z/l_{0,j}}{e''_{0,j}}$$

$$M'''_{0,j} = \frac{\tau'_{0,j}}{e'''_{0,j}} = \frac{\varphi'_{0,j}}{e'''_{0,j}}$$

Beim Ausknicken tritt ferner in 0 an jedem Stab $0, j$ eine senkrecht zur Verbandsebene gerichtete Kraft $\mathfrak{P}''_{0,j} = P_{0,jz}$ auf; ihre Größe folgt nach Abb. 287 aus der Bedingung, daß die Summe aller am

Tabelle 89. Schema der Gleichgewichtsbedingungen.

Gleichgewichtsbedingung	Beiwerte von			
	φ_{0x}	φ_{0y}	δz	φ_{0z}
$\sum M_{0,ix} = 0$	$\sum \frac{y'_{0,i}}{e''_{0,i}}$	$\sum -\frac{x'_{0,i} y'_{0,i}}{e''_{0,i}}$	$\sum \frac{y'_{0,i}}{l_{0,i} e'_{0,i}}$	0
$\sum M_{0,iy} = 0$	$\sum -\frac{x'_{0,i} y'_{0,i}}{e'_{0,i}}$	$\sum \frac{x'^2_{0,i}}{e'_{0,i}}$	$\sum -\frac{x'_{0,i}}{l_{0,i} e'_{0,i}}$	0
$\sum P_{0,iz} = 0$	$\sum \frac{y'_{0,i}}{l_{0,i} e'_{0,i}}$	$\sum -\frac{x'_{0,i}}{l_{0,i} e'_{0,i}}$	$\sum \frac{S_{0,i} l_{0,i} + 1/e'_{0,i}}{l^3_{0,i}}$	0
$\sum M_{0,iz} = 0$	0	0	0	$\sum \frac{1}{e'''_{0,i}}$

Stab $0, j$ auftretenden Momente bezüglich des Punktes j gleich Null sein muß, zu:

$$P_{0,jz} = \frac{S_{0,j} \cdot \delta z}{l_{0,j}} - \frac{M''_{0,j} \dagger}{l_{0,j}}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Knotens O liefern damit das aus Tabelle 89 ersichtliche System homogener Gleichungen (vgl. die Anmerkung auf S. 302).

Knicken tritt also dann ein, wenn entweder der Ausdruck $\sum \frac{1}{e''_{0,j}}$ oder die durch Umrahmung hervorgehobene Teildeterminante zu Null wird (Knicken in der Verbandsebene bzw. Ausknicken aus der Verbandsebene heraus).

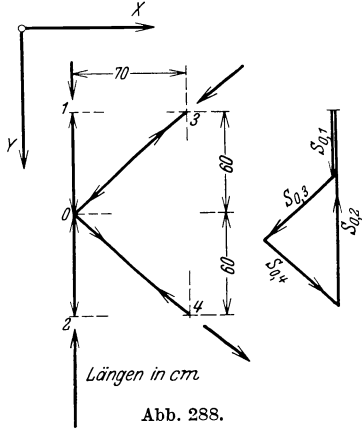


Abb. 288.
 $S_{0,1} = -320 \text{ kg}; S_{0,2} = -960 \text{ kg}; S_{0,3} = -492 \text{ kg}; S_{0,4} = +492 \text{ kg}.$

Zahlenbeispiel (vgl. Abb. 288).

Tabelle 90. Von den Stabkräften unabhängige Werte.

Stab	l [cm]	x' [-]	y' [-]	$EJ \cdot 10^{-6}$ [kgcm ²]	$\frac{EJ}{l} \cdot 10^{-4}$ [kgcm]
0,1	60	0	-1	0,958	1,597
0,2	60	0	+1	0,958	1,597
0,3	92,2	+0,759	-0,651	0,540	0,586
0,4	92,2	+0,759	+0,651	0,540	0,586

* $EJ'' = EJ''' = EJ$ (Rundrohre).

Tabelle 91. Von den Stabkräften abhängige Werte.

Stab	bei $V = 1$				bei $V = 1,25$			
	S [kg]	α [-]	u^* [-]	$\frac{1}{e} \cdot 10^{-4} **$ [kgcm]	S [kg]	α [-]	u^* [-]	$\frac{1}{e} \cdot 10^{-4} **$ [kgcm]
0,1	-320	1,10	+2,75	+4,39	-400	1,22	+2,69	+4,30
0,2	-960	1,90	+2,19	+3,50	-1200	2,12	+1,956	+3,12
0,3	-492	2,78	+0,925	+0,542	-615	3,11	+0,0973	+0,057
0,4	+492	0***	+3,00	+1,758	+615	0***	+3,00	+1,758

* Vgl. S. 286 und Anhang, Tabelle 103. ** $\frac{1}{e} = \frac{EJ}{l} \cdot u.$

*** Zugstab, vgl. S. 299.

Die aus Tabelle 90 und 91 ersichtlichen Zahlenwerte ergeben nach S. 314 die Nennerdeterminanten (Rechenschiebergenauigkeit)

† Bei Druckkräften ist der Zahlenwert von S negativ!

bei $V = 1$:

1. für Ausknicken aus der Systemebene heraus

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} + 8,865 \cdot 10^4 & - 0,602 \cdot 10^4 & - 62,4 \\ - 0,602 \cdot 10^4 & + 1,325 \cdot 10^4 & - 189,5 \\ - 62,4 & - 189,5 & - 3,30 \end{vmatrix} = + 3,8 \cdot 10^8,$$

2. für Knicken in der Systemebene

$$\Delta_2 = + 10,19 \cdot 10^4 ;$$

bei $V = 1,25$:

1. für Ausknicken aus der Systemebene heraus

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} + 8,19 \cdot 10^4 & - 0,84 \cdot 10^4 & - 77 \\ - 0,84 \cdot 10^4 & + 1,04 \cdot 10^4 & - 150 \\ - 77 & - 150 & - 3,91 \end{vmatrix} = - 51 \cdot 10^8,$$

2. für Knicken in der Systemebene

$$\Delta_2 = + 9,235 \cdot 10^4 .$$

Abb. 289 zeigt die Werte der Determinanten Δ_1 und Δ_2 über V aufgetragen (die Rechnung wurde noch für andere Werte V durchgeführt).

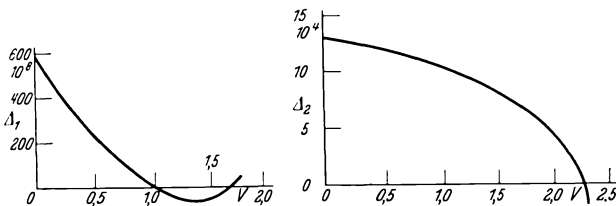


Abb. 289.

Das kleinste Vielfache V , bei dem eine der Determinanten zu Null wird, ist maßgebend. Die Determinante Δ_1 wird zu Null, d. h. die Stabgruppe knickt aus der Systemebene heraus, bei dem 1,01fachen der gegebenen Belastung (Δ_2 würde erst bei dem 2,26fachen der gegebenen Belastung zu Null werden); maßgebend ist also das Ausknicken aus der Ebene heraus.

Bei Annahme eines gelenkigen Knotenpunktes „0“ wäre es falsch, als Knicklängen die Längen der Einzelstäbe 0, 1; 0, 2; 0, 3 usw. in die Euler-Formel einzusetzen; denn der Knoten „0“ ist nicht räumlich festgelegt.

Aufgabe 89: Knicken einer elastisch quergestützten Flügelstrebe.

Für die in Abb. 290 dargestellte, im Punkt 0 durch den Halbrahmen 0, 3, 4, 5 elastisch quergestützte Vorderstrebe eines halbfrei-tragenden Hochdeckers ist festzustellen, bei welchem Vielfachen der eingetragenen Belastung Knicken eintritt. Die Vorderstrebe sei in den Punkten 1 und 2, der Halbrahmen in den Punkten 0, 3, 4 und 5 vollkommen gelenkig angeschlossen; die Punkte 1, 2, 3 und 4 seien durch eine genügende Anzahl von Fesseln räumlich festgelegt (hinsichtlich des Punktes 2 stellt die Strebe selbst eine Fessel dar).

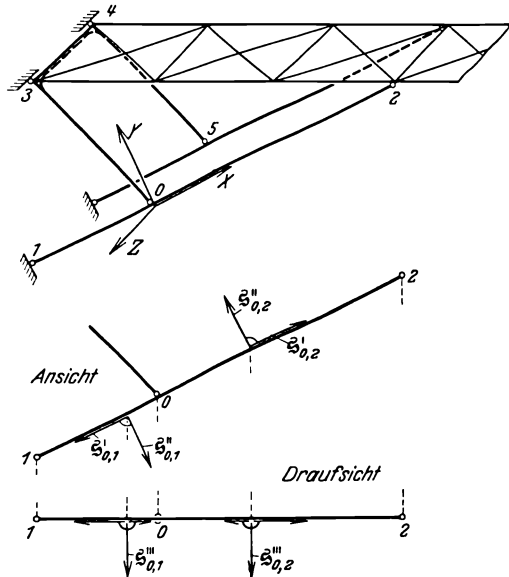


Abb. 290.

Strenggenommen ist die Knickbedingung abhängig von der Biegesteifigkeit sämtlicher Rahmenstäbe und beider Streben; zur Vereinfachung der Rechnung kann jedoch zwischen den Rahmenstäben 3, 4 und 4, 5 ein vollkommenes Gelenk angenommen werden, so daß in die Knickbedingung nur die Biegesteifigkeiten der Rahmenstäbe 0, 3 und 3, 4 sowie der Strebe 1, 2 eingehen.

Da der Punkt 0 in der XY -Ebene durch die Stäbe 0, 3 und 0, 1 festgelegt ist, kann er beim Ausknicken der Strebe, ähnlich wie in Aufgabe 88, nur einen Weg δz in Richtung Z ausführen; dabei wird in 0 von der Strebe auf den Rahmen in Richtung der Z -Achse eine der Verschiebung δz proportionale Kraft $P_{0,3z} = K \cdot \delta z$ ausgeübt. Hierin ist K diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um den Punkt 0 des Teilrahmens 0, 3, 4 um die Strecke $\delta z = 1$ cm auszulenken.

Zur Ermittlung von K wird nach der Arbeitsgleichung (Kap. II, S. 114) in bekannter Weise die Auslenkung $\delta' z$ des Rahmenpunktes 0 infolge einer Kraft $P'_{0,3z} = 1$ kg ermittelt; dann ist

$$\frac{K}{1} = \frac{P'_{0,3z}}{\delta' z}; \quad K = \frac{1}{\delta' z}.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 88 tritt außer dem Weg δz beim Ausknicken der Strebe (mit Ausnahme des Falles $l_{0,1} = l_{0,2}$ bei längs 1, 2 konstanter

Steifigkeit) eine Drehung Φ_0 (φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z}) des Strebenquerschnitts bei 0 auf; daher gelten für den Fall des Knickens der elastisch quer- gestützten Strebe für den Knoten 0 entsprechende Gleichgewichts- bedingungen wie bei dem in Aufgabe 88 behandelten K -Verband. Nur ist zu beachten, daß im vorliegenden Beispiel vom Rahmenstab 0, 3, der an die Stelle der Stäbe 0, 3 und 0, 4 des K -Verbands tritt, wegen seines gelenkigen Anschlusses in 0 keine biegenden Momente auf die Strebe 1, 2 ausgeübt werden können; der Rahmenstab 0, 3 setzt aber dem Ausknicken der Strebe 1, 2 aus der XY -Ebene heraus eine Wider- standskraft

$$-P_{0,3z} = -K \cdot \delta z$$

entgegen.

Unter Beachtung, daß hier

$$x'_{0,1} = -1, \quad y'_{0,1} = 0, \quad x'_{0,2} = +1 \quad \text{und} \quad y'_{0,2} = 0$$

ist (Abb. 290), nehmen die Gleichgewichtsbedingungen der Aufgabe 88 die Form an:

$$\sum M_{0,ix} = 0: \quad \div;$$

$$\sum M_{0,iy} = 0: \quad \varphi_{0y} \left(\frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}} \right) + \delta z \left(\frac{1}{l_{0,1} \cdot e''_{0,1}} - \frac{1}{l_{0,2} \cdot e''_{0,2}} \right) = 0;$$

$$\sum P_{0,jz} = 0*:$$

$$\varphi_{0y} \left(\frac{1}{l_{0,1} \cdot e''_{0,1}} - \frac{1}{l_{0,2} \cdot e''_{0,2}} \right) + \delta z \left(\frac{S_{0,1} \cdot l_{0,1} + \frac{1}{e''_{0,1}}}{l_{0,1}^2} + \frac{S_{0,2} \cdot l_{0,2} + \frac{1}{e''_{0,2}}}{l_{0,2}^2} + K \right) = 0;$$

$$\sum M_{0,iz} = 0: \quad \varphi_{0z} \left(\frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}} \right) = 0.$$

Eine endliche Drehung Φ sowie ein endlicher Weg δz des Punktes 0 ist nur dann möglich, wenn entweder

$$\frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}} = 0 \quad \text{ist (Knicken in der } XY\text{-Ebene bei festliegendem Stützpunkt 0),}$$

oder wenn

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{e''_{0,1}} + \frac{1}{e''_{0,2}}, & \frac{1}{l_{0,1} \cdot e''_{0,1}} - \frac{1}{l_{0,2} \cdot e''_{0,2}} \\ \frac{1}{l_{0,1} \cdot e''_{0,1}} - \frac{1}{l_{0,2} \cdot e''_{0,2}}, & \frac{S_{0,1}}{l_{0,1}} + \frac{S_{0,2}}{l_{0,2}} + \frac{1}{l_{0,1}^2 \cdot e''_{0,1}} + \frac{1}{l_{0,2}^2 \cdot e''_{0,2}} + K \end{array} \right| = 0$$

ist (Knicken in der XZ -Ebene mit gleichzeitigem Ausweichen des Punktes 0).

* Das positive Vorzeichen von K in dieser Gleichung kommt dadurch zustande, daß entsprechend der Anmerkung auf S. 302 die in Tabelle 89 angeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen mit -1 multipliziert sind.

Tabelle 93. Von den Stabkräften abhängige Werte.

Teilstab	bei z. B. $S = -7500$ kg				bei z. B. $S = -7400$ kg			
	S [kg]	α'' [-]	u''^* [-]	$\frac{1}{e''} \cdot 10^{-6} **$ [kgcm]	S [kg]	α'' [-]	u''^* [-]	$\frac{1}{e''} \cdot 10^{-6} **$ [kgcm]
0,1	-7500	1,08	+2,76	+2,59	-7400	1,08	+2,76	+2,59
0,2	-7500	2,21	+1,85	+0,85	-7400	2,20	+1,86	+0,86

* Vgl. S. 286 und Anhang, Tabelle 103. ** $\frac{1}{e''} = \frac{E J''}{l} \cdot u''$.

Die aus Tabelle 92 und 93 ersichtlichen Zahlenwerte ergeben nach S. 318 die Nennerdeterminanten (Rechenschiebergenauigkeit)

für $S = -7500$ kg:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} + 3,44 \cdot 10^6 & + 14,78 \cdot 10^3 \\ + 14,78 \cdot 10^3 & + 63,2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 10^6,$$

für $S = -7400$ kg:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} + 3,45 \cdot 10^6 & + 14,76 \cdot 10^3 \\ + 14,76 \cdot 10^3 & + 64,7 \end{vmatrix} = +5 \cdot 10^6.$$

Δ_1 wird zu Null, d. h. die Strebe 1,0,2 knickt mit seitlichem Ausweichen des Stützpunktes 0 aus der Ebene XY heraus, bei $S_K = -7480$ kg. (Die Eulerlast der nicht quergestützten Strebe 1,0,2 für seitliches Knicken beträgt:

$$S_E = -\frac{E J'' \pi^2}{l^2} = -6800 \text{ kg.})$$

2. Knicken in der Ebene XY bei festliegendem Stützpunkt 0.

Die Knicklast kann unmittelbar nach S. 304 angeschrieben werden:

$$S_K = -\frac{E J''' \pi^2}{l^2} \cdot k.$$

Darin ist nach Abb. 281 mit $\frac{l_1}{l} = 0,329$: $k = 3,45$,

also: $S_K = -6800$ kg.

Der Knickfall (2) ist also maßgebend, da er die kleinere Knicklast liefert. Praktisch bedeutet dies, daß $J_{\max} = J''$ zwecks Herstellung gleicher Knicksicherheit in beiden Knickrichtungen so weit herabgesetzt werden kann, daß das Ausknicken aus der Ebene XY ebenfalls bei $S_K = -6800$ kg eintritt.

Wie eine nochmalige Durchführung der ganzen Rechnung zeigt, ist dies bei der eingangs errechneten Rahmen-Widerstandskraft $K = 10$ kg/cm der Fall, wenn $E J_{\max} = E J''$ zu $124 \cdot 10^6$ kgcm² statt zu $138 \cdot 10^6$ kgcm² gewählt wird.

§ 24. Stabilität räumlicher Stabgruppen.

Aufgabe 90: Knicken eines Baldachinbocks.

Es ist die Bedingung für das Knicken des in Aufgabe 84 behandelten, in den Punkten 1, 2, 3 mit vollkommenen Gelenken an räumlich festgelegte Punkte angeschlossenen Baldachinbocks aufzustellen.

Die Gleichungen zur Ermittlung der als Unbekannte anzusehenden Drehungskomponenten φ_{0x} , φ_{0y} , φ_{0z} der Drehung Φ des gemeinsamen Knotens 0 sind bereits in Aufgabe 84 aufgestellt; die Beiwerte der Unbekannten liefern die Knickbedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{x''_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j}{}^2}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{x''_{0,j} y''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{x''_{0,j} z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \\ \sum \frac{x''_{0,j} y''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{y''_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \frac{y'''_{0,j}{}^2}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{y''_{0,j} z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'''_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} \\ \sum \frac{x''_{0,j} z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{y''_{0,j} z''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{y'''_{0,j} z'''_{0,j}}{e'''_{0,j}}, & \sum \frac{z''_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \frac{z'''_{0,j}{}^2}{e'''_{0,j}} \end{vmatrix} = 0.$$

Bei Stäben, deren Trägheitsmomente für alle Schwerachsen ihres Querschnitts gleich sind, z. B. bei Kreisrohren, ergibt sich wegen:

$$e''_{0,j} = e'''_{0,j} = e_{0,j} \quad \text{und} \quad \xi'_{0,j} \perp \xi''_{0,j} \perp \xi'''_{0,j} :$$

z. B.

$$\frac{x''_{0,j}{}^2}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j}{}^2}{e'''_{0,j}} = \frac{1 - x'_{0,j}{}^2}{e_{0,j}},$$

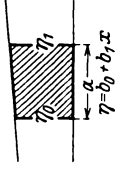
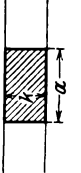
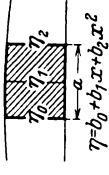
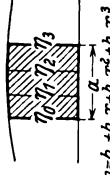
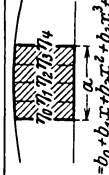
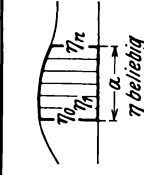
$$\frac{x''_{0,j} y''_{0,j}}{e''_{0,j}} + \frac{x'''_{0,j} y'''_{0,j}}{e'''_{0,j}} = - \frac{x'_{0,j} y'_{0,j}}{e_{0,j}}$$

usw. (vgl. Hütte I 26. Aufl. S. 135).

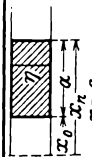
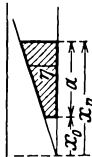
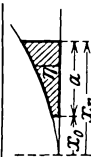

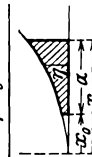
Bemerkung. Bei den in diesem Kapitel behandelten Stabilitätsaufgaben wurde vorausgesetzt, die Längen der einzelnen Stäbe seien unveränderlich. Diese Voraussetzung kann nicht beibehalten werden, wenn ein Fachwerk als Ganzes (z. B. ein Holmfachwerk) auf Knickung untersucht werden soll. Näheres zur exakten Behandlung dieser Frage s. bei v. Mises u. Ratzersdorfer⁶³.

Anhang I.
Formeln zur Berechnung von Formänderungen $\delta_{i,k}$. (Vgl. hierzu S. 115÷142.)

Tabelle 94. Ausdrücke $\int W_i W_k dx^*$.

W_i -Fläche	W_k -Fläche	
 <p style="text-align: center;">$\eta = b_0 + b_1 x$</p>		$\frac{a}{6} \cdot [k^2 (2 \eta_0 + \eta_1) + k' (2 \eta_1 + \eta_0)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$</p>	$\frac{a k}{6} (\eta_0 + 4 \eta_1 + \eta_2)$	$\frac{a}{6} \cdot [k^2 (\eta_0 + 2 \eta_1) + k' (\eta_2 + 2 \eta_1)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$</p>	$\frac{a k}{8} (\eta_0 + 3 \eta_1 + 3 \eta_2 + \eta_3)$	$\frac{a}{120} \cdot [k^2 (13 \eta_0 + 36 \eta_1 + 9 \eta_2 + 2 \eta_3) + k' (13 \eta_3 + 36 \eta_2 + 9 \eta_1 + 2 \eta_0)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$</p>	$\frac{a k}{90} (7 \eta_0 + 32 \eta_1 + 12 \eta_2 + 32 \eta_3 + 7 \eta_4)$	$\frac{a}{90} \cdot [k^2 (7 \eta_0 + 24 \eta_1 + 6 \eta_2 + 8 \eta_3) + k' (7 \eta_4 + 24 \eta_3 + 6 \eta_2 + 8 \eta_1)]$
 <p style="text-align: center;">η beliebig</p>	$\frac{a k}{3 n} (\eta_0 + 4 \cdot \sum \eta_u + 2 \cdot \sum \eta_\sigma + \eta_n)$	$\frac{a}{3 n} \cdot [k^2 \left(\eta_0 + 4 \cdot \sum \left(1 - \frac{u}{n} \right) \eta_u + 2 \cdot \sum \left(1 - \frac{g}{n} \right) \eta_\sigma \right) + k' \left(\eta_n + 4 \cdot \sum \frac{u}{n} \eta_u + 2 \cdot \sum \frac{g}{n} \eta_\sigma \right)]^{**}$

$u = 1, 3 \dots (n - 1)$ ungerade Zahlen; $g = 2, 4 \dots (n - 2)$ gerade Zahlen.

<p>Bei $n = 4$ Teilstrecken:</p> $\frac{a}{12} \cdot [k^i(\eta_0 + 3\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) + k^r(\eta_4 + 3\eta_5 + \eta_2 + \eta_1)]$	$\frac{a k}{12} (\eta_{10} + 4\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + \eta_4)$
<p>bei $n = 8$ Teilstrecken:</p> $\frac{a}{24} \cdot [k^i(\eta_0 + 3,5\eta_1 + 1,5\eta_2 + 2,5\eta_3 + \eta_4 + 1,5\eta_5 + 0,5\eta_6 + 0,5\eta_7) + k^r(\eta_8 + 3,5\eta_7 + 1,5\eta_6 + 2,5\eta_5 + \eta_4 + 1,5\eta_3 + 0,5\eta_2 + 0,5\eta_1)]$	$\frac{a k}{24} (\eta_{10} + 4\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + 2\eta_4 + 4\eta_5 + 2\eta_6 + 4\eta_7 + \eta_8)$
 <p style="text-align: center;">$\eta = c_0$</p>	$\frac{a c_0}{2} \cdot [k^i + k^r]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = c_1 x$</p>	$\frac{a c_1}{6} \cdot [k^i(x_n + 2x_0) + k^r(x_0 + 2x_n)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = c_2 x^2$</p>	$\frac{a c_2}{12} \cdot [k^i(x_n^2 + 2x_n x_0 + 3x_0^2) + k^r(x_0^2 + 2x_n x_0 + 3x_n^2)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = c_3 x^3$</p>	$\frac{a c_3}{20} \cdot [k^i(x_n^3 + 2x_n^2 x_0 + 3x_n x_0^2 + 4x_0^3) + k^r(x_0^3 + 2x_n x_0^2 + 3x_n^2 x_0 + 4x_n^3)]$
 <p style="text-align: center;">$\eta = c_4 x^4$</p>	$\frac{a c_4}{30} \cdot [k^i(x_n^4 + 2x_n^3 x_0 + 3x_n^2 x_0^2 + 4x_n x_0^3 + 5x_0^4) + k^r(x_0^4 + 2x_n x_0^3 + 3x_n^2 x_0^2 + 4x_n^3 x_0 + 5x_n^4)]$

21*

* Betr. weiterer Formeln vgl. Müller-Breslau¹³.
 ** Sog. Simpsonsche Regel. Die Anzahl n (n geradzahlig!) der Teilabschnitte ist je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrad zu wählen.
 *** Werden hier die Abszissen x von rechts her gemessen, so ist in den Formeln k^r an Stelle von k^i und k^i an Stelle von k^r in Rechnung zu setzen.

Anhang II.

Formeln und Zahlenwerte zur Berechnung von Balken, die auf Biegung oder auf Knickbiegung beansprucht werden*.

(Vgl. hierzu S. 164 ÷ 166 und Abb. 165; x und ξ von Balkenmitte aus gemessen.)

Tabelle 95. Ausdrücke \bar{f}_B zur Ermittlung der Biegemomente \bar{B} bei nicht vorhandener Längskraft ($S = 0$):

$$\bar{B} = l^2 \sum p_n \cdot \bar{f}_B(p_n) + l \sum P_\xi \cdot \bar{f}_B(P_\xi) + \sum M_\xi \cdot \bar{f}_B(M_\xi).$$

Querbelastung	\bar{f}_B	Querbelastung	\bar{f}_B
p_0	$\frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$	P_ξ^{**}	$\frac{1}{4} \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right) \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right)$
$p_1 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^1$	$\frac{x}{12l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$	M_ξ^{**}	$\mp \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right)$
$p_2 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^2$	$\frac{1}{48} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^4 \right]$	Sonderfälle:	
$p_3 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^3$	$\frac{x}{40l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^4 \right]$	$\begin{matrix} M^l \\ (\xi = -l/2) \end{matrix}$	$+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right)$
		$\begin{matrix} M^r \\ (\xi = +l/2) \end{matrix}$	$- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right)$

* Ausführlichere Formeltafeln siehe bei Teichmann⁴⁰. Dort bedeutet s die halbe Balkenspannweite und α den Wert $s \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$, während hier α den Wert $l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$ bezeichnet. — Ausführlichere Zahlentafeln enthält der noch nicht veröffentlichte DVL-Bericht Cf 203/3. Vgl. auch die Tafeln der Werte „ ρ “ bei Müller-Breslau¹³, der Werte „ s, t “ usw. bei Zimmermann⁶¹ und der Werte „ $c(\varphi), s(\varphi), t(\varphi)$ “ bei Bleich⁴².

** Die oberen Vorzeichen gelten für $x \leq \xi$, die unteren Vorzeichen gelten für $x \geq \xi$.

Tabelle 96. Ausdrücke f_δ zur Ermittlung der Knickbiegeline

$$\delta = \frac{l^4}{EJ} \sum p_n \cdot f_\delta(p_n) + \frac{l^3}{EJ} \sum P_\xi \cdot f_\delta(P_\xi) + \frac{l^2}{EJ} \sum M_\xi \cdot f_\delta(M_\xi).$$

Querbelastung	f_δ bei vorhandener Längs-(Druck-)kraft ($S < 0$) *	\bar{f}_δ bei nicht vorhandener Längskraft ($S = 0$)
p_0	$\frac{1}{\alpha^4} \left[\frac{\cos \alpha x/l}{\cos \alpha/2} - 1 \right] - \frac{1}{8\alpha^2} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$	$\frac{5}{384} - \frac{1}{64} \left(\frac{2x}{l} \right)^2 + \frac{1}{384} \left(\frac{2x}{l} \right)^4$
$p_1 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^1$	$\frac{1}{\alpha^4} \left[\frac{\sin \alpha x/l}{\sin \alpha/2} - \frac{2x}{l} \right] - \frac{x}{12\alpha^2 l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$	$\frac{7}{5760} \left(\frac{2x}{l} \right) - \frac{1}{576} \left(\frac{2x}{l} \right)^3 + \frac{1}{1920} \left(\frac{2x}{l} \right)^5$
$p_2 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^2$	$\frac{1}{\alpha^4} \left[\frac{\cos \alpha x/l}{\cos \alpha/2} - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] - \frac{1}{48\alpha^2} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^4 \right] - \frac{8}{\alpha^6} \left(\frac{\cos \alpha x/l}{\cos \alpha/2} - 1 \right)$	$\frac{7}{2880} - \frac{1}{384} \left(\frac{2x}{l} \right)^2 + \frac{1}{5760} \left(\frac{2x}{l} \right)^6$
$p_3 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^3$	$\frac{1}{\alpha^4} \left[\frac{\sin \alpha x/l}{\sin \alpha/2} - \left(\frac{2x}{l} \right)^3 \right] - \frac{x}{40\alpha^2 l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^4 \right] - \frac{24}{\alpha^6} \left(\frac{\sin \alpha x/l}{\sin \alpha/2} - \frac{2x}{l} \right)$	$\frac{1}{2240} \left(\frac{2x}{l} \right) - \frac{1}{1920} \left(\frac{2x}{l} \right)^3 + \frac{1}{13440} \left(\frac{2x}{l} \right)^7$
P_ξ **	$\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sin (1 \mp 2\xi/l) \alpha/2 \cdot \sin (1 \pm 2x/l) \alpha/2}{\alpha \sin \alpha} - \frac{1}{4} \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right) \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right) \right]$	$\frac{1}{96} \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right) \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right) \left[4 - \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right)^2 - \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right)^2 \right]$
M_ξ **	$\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\mp \cos (1 \mp 2\xi/l) \alpha/2 \cdot \sin (1 \pm 2x/l) \alpha/2}{\sin \alpha} \pm \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right) \right]$	$\mp \frac{1}{48} \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right) \left[4 - 3 \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right)^2 - \left(1 \pm \frac{2x}{l} \right)^2 \right]$

Sonderfälle:

$$M^1_{(\xi=-l/2)} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sin (1 - 2x/l) \alpha/2}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right] + \frac{1}{48} \left(3 - \frac{2x}{l} \right) \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$$

$$M^r_{(\xi=+l/2)} = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sin (1 + 2x/l) \alpha/2}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right) \right] - \frac{1}{48} \left(3 + \frac{2x}{l} \right) \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right]$$

* Es ist $\alpha = l \cdot \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$.

** Die oberen Vorzeichen gelten für $x \leq \xi$, die unteren Vorzeichen gelten für $x \geq \xi$.

Tabelle 97. Ausdrücke θ zur Ermittlung der Endneigungen:

$$\tau^l = \frac{l^3}{EJ} \sum p_n \cdot \theta^l(p_n) + \frac{l^2}{EJ} \sum P_\xi \cdot \theta^l(P_\xi) + \frac{l}{EJ} \sum M_\xi \cdot \theta^l(M_\xi),$$

$$\tau^r = \frac{l^3}{EJ} \sum p_n \cdot \theta^r(p_n) + \frac{l^2}{EJ} \sum P_\xi \cdot \theta^r(P_\xi) + \frac{l}{EJ} \sum M_\xi \cdot \theta^r(M_\xi).$$

Querbelastung	θ bei vorhandener Längs-(Druck)kraft ($S < 0$)*	$\bar{\theta}$ bei nicht vorhandener Längskraft ($S = 0$)*
p_0	$\pm \frac{1}{\alpha^3} \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$	$\pm \frac{1}{24}$
$p_1 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^1$	$+ \frac{2}{\alpha^4} \left(\frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + \frac{1}{6\alpha^2}$	$-\frac{1}{360}$
$p_2 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^2$	$\mp \frac{8}{\alpha^5} \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \pm \frac{1}{\alpha^3} \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6} \right)$	$\pm \frac{1}{120}$
$p_3 \cdot \left(\frac{2x}{l} \right)^3$	$-\frac{48}{\alpha^6} \left(\frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + \frac{2}{\alpha^4} \left(\frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\alpha}{2} - 3 \right) + \frac{1}{10\alpha^2}$	$-\frac{1}{840}$
P_ξ	$\pm \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\sin(1 \mp 2\xi/l) \alpha/2}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right) \right]$	$\pm \frac{1}{48} \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right) \left[4 - \left(1 \mp \frac{2\xi}{l} \right)^2 \right]$
M_ξ	$-\frac{\cos(1 \mp 2\xi/l) \alpha/2}{\alpha \sin \alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$	$+\frac{1}{8} \left[1 \mp \frac{2\xi}{l} \right] - \frac{1}{6}$
Sonderfälle:		
$\theta^l(M^r) = \theta^r(M^r)$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha}{\text{tg} \alpha} \right]$	$+\frac{1}{3}$
$\theta^l(M^r) = \theta^r(M^l)$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right]$	$-\frac{1}{6}$

* Die oberen Vorzeichen gelten für θ^l , die unteren Vorzeichen gelten für θ^r .

Es ist $\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$.

Tabelle 98 und 99 s. auf S. 328 und 329.

Tabelle 100. Zahlenwerte der Funktionen $f_\delta(M)$ in Tabelle 96. (Die angegebenen Zahlenwerte sind mit dem jeweils über der betreffenden Spalte eingetragenen Multiplikator q zu vervielfachen*.)

$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$	$f_\delta(M^r)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$						
	- 0,375	- 0,250	- 0,125	0	+ 0,125	+ 0,250	+ 0,375
	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$
0	- 2,051	- 3,906	- 5,371	- 6,250	- 6,348	- 5,469	- 3,418
0,2	- 2,060	- 3,924	- 5,395	- 6,276	- 6,372	- 5,488	- 3,429
0,4	- 2,089	- 3,978	- 5,467	- 6,356	- 6,448	- 5,547	- 3,462
0,6	- 2,140	- 4,072	- 5,591	- 6,493	- 6,578	- 5,649	- 3,518
0,8	- 2,214	- 4,210	- 5,775	- 6,696	- 6,769	- 5,799	- 3,601
1,0	- 2,316	- 4,401	- 6,028	- 6,975	- 7,033	- 6,006	- 3,714
1,2	- 2,454	- 4,658	- 6,367	- 7,348	- 7,385	- 6,281	- 3,866
1,4	- 2,637	- 4,998	- 6,817	- 7,843	- 7,851	- 6,644	- 4,066
1,6	- 2,881	- 5,453	- 7,417	- 8,502	- 8,470	- 7,126	- 4,331
1,8	- 3,213	- 6,069	- 8,231	- 9,394	- 9,305	- 7,775	- 4,687
2,0	- 3,677	- 6,931	- 9,366	- 10,64	- 10,47	- 8,675	- 5,178
2,1	- 3,982	- 7,497	- 10,11	- 11,45	- 11,23	- 9,262	- 5,499
2,2	- 4,357	- 8,192	- 11,02	- 12,44	- 12,15	- 9,979	- 5,890
2,3	- 4,825	- 9,060	- 12,16	- 13,69	- 13,31	- 10,87	- 6,376
2,4	- 5,425	- 10,17	- 13,62	- 15,28	- 14,79	- 12,01	- 6,996
2,5	- 6,219	- 11,64	- 15,55	- 17,37	- 16,73	- 13,51	- 7,810
2,6	- 7,314	- 13,67	- 18,20	- 20,25	- 19,41	- 15,56	- 8,926
2,7	- 8,913	- 16,63	- 22,08	- 24,46	- 23,30	- 18,55	- 10,55
2,8	- 11,46	- 21,34	- 28,25	- 31,14	- 29,49	- 23,30	- 13,12
2,9	- 16,14	- 29,98	- 39,55	- 43,39	- 40,82	- 31,98	- 17,83
3,0	- 27,45	- 50,89	- 66,87	- 72,98	- 68,18	- 52,93	- 29,17
3,1	- 93,26	- 172,5	- 225,8	- 245,0	- 227,1	- 174,6	- 95,01
π	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3,2	+ 66,37	+ 122,5	+ 159,6	+ 172,1	+ 158,2	+ 120,3	+ 64,59
3,3	+ 24,49	+ 45,06	+ 58,45	+ 62,62	+ 57,06	+ 42,88	+ 22,67
3,4	+ 15,04	+ 27,59	+ 35,63	+ 37,89	+ 34,19	+ 25,37	+ 13,18
3,5	+ 10,88	+ 19,90	+ 25,56	+ 26,98	+ 24,09	+ 17,62	+ 8,982
3,6	+ 8,549	+ 15,59	+ 19,91	+ 20,84	+ 18,39	+ 13,24	+ 6,605
3,7	+ 7,064	+ 12,84	+ 16,29	+ 16,90	+ 14,73	+ 10,42	+ 5,071
3,8	+ 6,042	+ 10,94	+ 13,80	+ 14,17	+ 12,18	+ 8,448	+ 3,995
3,9	+ 5,300	+ 9,556	+ 11,97	+ 12,17	+ 10,30	+ 6,985	+ 3,195
4,0	+ 4,741	+ 8,512	+ 10,58	+ 10,63	+ 8,849	+ 5,853	+ 2,572
4,5	+ 3,311	+ 5,793	+ 6,869	+ 6,400	+ 4,719	+ 2,535	+ 0,7115
5,0	+ 2,941	+ 4,959	+ 5,480	+ 4,496	+ 2,569	+ 0,6158	- 0,4362
5,5	+ 3,387	+ 5,422	+ 5,370	+ 3,441	+ 0,6998	- 1,421	- 1,769
6,0	+ 7,124	+ 10,61	+ 8,777	+ 2,792	- 3,946	- 7,635	- 6,108
2π	∞	∞	∞	+ 2,533	∞	∞	∞
$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$
	+ 0,375	+ 0,250	+ 0,125	0	- 0,125	- 0,250	- 0,375
	$- f_\delta(M^l)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$						

* Wenn in der letzten Stelle der Zahlen eine 5 durch Aufrunden zustande kommt, ist dies durch Hochstellen der 5 gekennzeichnet. — Vgl. auch die Anmerkungen * auf S. 324 und 328.

Tabelle 98. Zahlenwerte der Funktionen $f_B(M)$ in Tabelle 95.

Quer- bela- stung	$\bar{f}_B(M)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$								
	-0,500	-0,375	-0,250	-0,125	0	+0,125	+0,250	+0,375	+0,500
M'	+1,000	+0,875	+0,750	+0,625	+0,500	+0,375	+0,250	+0,125	0
M''	0	-0,125	-0,250	-0,375	-0,500	-0,625	-0,750	-0,875	-1,000

Tabelle 100

Tabelle 101. Zahlenwerte der
(Die Zahlenwerte der Tabelle sind mit dem jeweils über der betreffenden

$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$	$f_\delta(p_0)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$				$f_\delta(p_1)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$			
	0	$\pm 0,125$	$\pm 0,250$	$\pm 0,375$	0	$\pm 0,125$	$\pm 0,250$	$\pm 0,375$
	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-2}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-4}$	$q = 10^{-4}$
0	+ 1,302	+ 1,205	+ 0,9277	+ 0,5056	0	$\pm 2,772$	$\pm 4,069$	$\pm 3,026$
0,4	+ 1,324	+ 1,225	+ 0,9430	+ 0,5138	0	$\pm 2,784$	$\pm 4,086$	$\pm 3,038$
0,8	+ 1,393	+ 1,289	+ 0,9918	+ 0,5403	0	$\pm 2,819$	$\pm 4,136$	$\pm 3,074$
1,2	+ 1,525	+ 1,412	+ 1,086	+ 0,5911	0	$\pm 2,880$	$\pm 4,224$	$\pm 3,137$
1,6	+ 1,760	+ 1,628	+ 1,252	+ 0,6809	0	$\pm 2,970$	$\pm 4,352$	$\pm 3,229$
2,0	+ 2,193	+ 2,028	+ 1,558	+ 0,8467	0	$\pm 3,094$	$\pm 4,529$	$\pm 3,355$
2,2	+ 2,560	+ 2,367	+ 1,817	+ 0,9872	0	$\pm 3,172$	$\pm 4,640$	$\pm 3,434$
2,4	+ 3,134	+ 2,898	+ 2,223	+ 1,207	0	$\pm 3,261$	$\pm 4,767$	$\pm 3,525$
2,6	+ 4,143	+ 3,831	+ 2,937	+ 1,593	0	$\pm 3,363$	$\pm 4,913$	$\pm 3,629$
2,8	+ 6,351	+ 5,870	+ 4,498	+ 2,438	0	$\pm 3,481$	$\pm 5,081$	$\pm 3,749$
3,0	+ 14,83	+ 13,70	+ 10,49	+ 5,683	0	$\pm 3,617$	$\pm 5,275$	$\pm 3,887$
π	∞	∞	∞	∞	0	$\pm 3,727$	$\pm 5,430$	$\pm 3,998$
3,2	- 34,83	- 32,18	- 24,62	- 13,32	0	$\pm 3,775$	$\pm 5,499$	$\pm 4,047$
3,4	- 7,638	- 7,053	- 5,392	- 2,914	0	$\pm 3,958$	$\pm 5,760$	$\pm 4,233$
3,6	- 4,180	- 3,859	- 2,948	- 1,591	0	$\pm 4,173$	$\pm 6,065$	$\pm 4,400$
3,8	- 2,829	- 2,610	- 1,992	- 1,074	0	$\pm 4,425$	$\pm 6,424$	$\pm 4,705$
4,0	- 2,111	- 1,947	- 1,484	- 0,7988	0	$\pm 4,726$	$\pm 6,852$	$\pm 5,010$

* Vgl. die Anmerkungen * auf S. 324 und 327. Bei $\alpha = \pi$, also bei $S = \frac{EJ \pi^2}{l^2}$ (der Eulerlast des nicht eingespannten Stabes), gehen die Werte f und ϑ für nicht rein antisymmetrische Querbelastung nach ∞ . Die angegebenen Funk-

Tabelle 99. Zahlenwerte der Funktionen $\bar{f}_B(p_n)$ in Tabelle 95.

Quer- belastung	$\bar{f}_B(p_n)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$			
	0	$\pm 0,125$	$\pm 0,250$	$\pm 0,375$
p_0	+ 0,1250	+ 0,1172	+ 0,09375	+ 0,05469
$p_1 \cdot \left(\frac{2x}{l}\right)$	0	$\pm 0,009766$	$\pm 0,01563$	$\pm 0,01367$
$p_2 \cdot \left(\frac{2x}{l}\right)^2$	+ 0,02083	+ 0,02075	+ 0,01953	+ 0,01424
$p_3 \cdot \left(\frac{2x}{l}\right)^3$	0	$\pm 0,003113$	$\pm 0,005859$	$\pm 0,006409$

s. auf S. 327.

Funktionen $f_\delta(p_n)$ in Tabelle 96.

Spalte eingetragenen Multiplikator q zu vervielfachen.)*

$f_\delta(p_2)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$				$f_\delta(p_3)$ an der Stelle $\frac{x}{l} =$			
0	$\pm 0,125$	$\pm 0,250$	$\pm 0,375$	0	$\pm 0,125$	$\pm 0,250$	$\pm 0,375$
$q=10^{-3}$	$q=10^{-3}$	$q=10^{-3}$	$q=10^{-3}$		$q=10^{-4}$	$q=10^{-4}$	$q=10^{-4}$
+ 2,431	+ 2,268	+ 1,782	+ 0,9966	0	$\pm 1,03^5$	$\pm 1,587$	$\pm 1,250$
+ 2,471	+ 2,305	+ 1,811	+ 1,012	0	$\pm 1,039$	$\pm 1,593$	$\pm 1,25^5$
+ 2,602	+ 2,426	+ 1,904	+ 1,063	0	$\pm 1,053$	$\pm 1,613$	$\pm 1,269$
+ 2,853	+ 2,658	+ 2,082	+ 1,159	0	$\pm 1,077$	$\pm 1,647$	$\pm 1,294$
+ 3,296	+ 3,068	+ 2,396	+ 1,330	0	$\pm 1,112$	$\pm 1,698$	$\pm 1,331$
+ 4,116	+ 3,826	+ 2,977	+ 1,64 ⁵	0	$\pm 1,160$	$\pm 1,767$	$\pm 1,381$
+ 4,811	+ 4,468	+ 3,469	+ 1,911	0	$\pm 1,190$	$\pm 1,810$	$\pm 1,412$
+ 5,898	+ 5,473	+ 4,239	+ 2,328	0	$\pm 1,224$	$\pm 1,860$	$\pm 1,448$
+ 7,809	+ 7,239	+ 5,591	+ 3,060	0	$\pm 1,264$	$\pm 1,918$	$\pm 1,489$
+ 11,99	+ 11,10	+ 8,549	+ 4,661	0	$\pm 1,310$	$\pm 1,983$	$\pm 1,537$
+ 28,05	+ 25,94	+ 19,91	+ 10,81	0	$\pm 1,363$	$\pm 2,059$	$\pm 1,591$
∞	∞	∞	∞	0	$\pm 1,405$	$\pm 2,120$	$\pm 1,635$
- 66,03	- 60,98	- 46,62	- 25,19	0	$\pm 1,424$	$\pm 2,147$	$\pm 1,65^5$
- 14,51	- 13,38	- 10,19	- 5,476	0	$\pm 1,495$	$\pm 2,25^0$	$\pm 1,728$
- 7,961	- 7,329	- 5,554	- 2,969	0	$\pm 1,579$	$\pm 2,369$	$\pm 1,814$
- 5,402	- 4,963	- 3,743	- 1,988	0	$\pm 1,677$	$\pm 2,510$	$\pm 1,91^5$
- 4,042	- 3,707	- 2,780	- 1,466	0	$\pm 1,79^5$	$\pm 2,678$	$\pm 2,03^5$

tionswerte für $\alpha > \pi$ haben also nur Sinn für die Berechnung eingespannter Stäbe bzw. durchlaufender Balken auf mehreren Stützen (vgl. Aufgabe 72).

Tabelle 102. Zahlenwerte der Funktionen ϑ in Tabelle 97.

(Die angegebenen Zahlenwerte sind mit dem jeweils über der betreffenden Spalte eingetragenen Multiplikator ϱ zu vervielfachen. Bei $\vartheta(p_0)$ und $\vartheta(p_2)$ gelten die oberen Vorzeichen für ϑ' bzw. die unteren für ϑ'' , bei $\vartheta(p_1)$ und $\vartheta(p_3)$ ist $\vartheta' = \vartheta'' = \vartheta$.) *

$\alpha = l \sqrt{\frac{ S }{EJ}}$	$\vartheta'(M^1)$ = $\vartheta''(M^r)$	$\vartheta'(M^r)$ = $\vartheta''(M^1)$	$\vartheta(p_0)$	$\vartheta(p_1)$	$\vartheta(p_2)$	$\vartheta(p_3)$
	$\varrho = 10^{-1}$	$\varrho = 10^{-1}$	$\varrho = 10^{-2}$	$\varrho = 10^{-3}$	$\varrho = 10^{-3}$	$\varrho = 10^{-3}$
0	+ 3,333	- 1,667	± 4,167	- 2,778	± 8,333	- 1,190
0,2	+ 3,342	- 1,674	± 4,183	- 2,780	± 8,365	- 1,192
0,4	+ 3,369	- 1,698	± 4,234	- 2,788	± 8,462	- 1,195
0,6	+ 3,416	- 1,739	± 4,322	- 2,802	± 8,630	- 1,200
0,8	+ 3,485	- 1,800	± 4,452	- 2,821	± 8,876	- 1,208
1,0	+ 3,579	- 1,884	± 4,630	- 2,846	± 9,216	- 1,218
1,2	+ 3,705	- 1,997	± 4,869	- 2,877	± 9,670	- 1,230
1,4	+ 3,870	- 2,146	± 5,185	- 2,914	± 10,27	- 1,245
1,6	+ 4,089	- 2,346	± 5,606	- 2,959	± 11,07	- 1,263
1,8	+ 4,383	- 2,618	± 6,176	- 3,011	± 12,15	- 1,284
2,0	+ 4,788	- 2,999	± 6,968	- 3,072	± 13,66	- 1,308
2,1	+ 5,053	- 3,249	± 7,486	- 3,106	± 14,64	- 1,321
2,2	+ 5,375	- 3,556	± 8,121	- 3,142	± 15,85	- 1,336
2,3	+ 5,775	- 3,940	± 8,913	- 3,181	± 17,35	- 1,351
2,4	+ 6,285	- 4,432	± 9,926	- 3,223	± 19,27	- 1,368
2,5	+ 6,955	- 5,084	± 11,26	- 3,268	± 21,80	- 1,386
2,6	+ 7,873	- 5,982	± 13,10	- 3,316	± 25,28	- 1,405
2,7	+ 9,206	- 7,294	± 15,78	- 3,368	± 30,36	- 1,426
2,8	+ 11,32	- 9,386	± 20,03	- 3,423	± 38,43	- 1,448
2,9	+ 15,18	- 13,22	± 27,83	- 3,482	± 53,20	- 1,471
3,0	+ 24,50	- 22,51	± 46,67	- 3,546	± 88,89	- 1,497
3,1	+ 78,55	- 76,54	± 156,2	- 3,615	± 296,3	- 1,524
π	∞	∞	∞	- 3,645	∞	- 1,536
3,2	- 52,47	+ 54,51	∓ 109,4	- 3,689	∓ 206,7	- 1,553
3,3	- 18,05	+ 20,13	∓ 39,65	- 3,769	∓ 74,62	- 1,585
3,4	- 10,26	+ 12,37	∓ 23,91	- 3,854	∓ 44,79	- 1,619
3,5	- 6,811	+ 8,961	∓ 16,96	- 3,947	∓ 31,62	- 1,656
3,6	- 4,858	+ 7,049	∓ 13,04	- 4,048	∓ 24,21	- 1,696
3,7	- 3,596	+ 5,831	∓ 10,54	- 4,157	∓ 19,45	- 1,739
3,8	- 2,709	+ 4,993	∓ 8,797	- 4,276	∓ 16,15	- 1,786
3,9	- 2,049	+ 4,386	∓ 7,518	- 4,405	∓ 13,72	- 1,837
4,0	- 1,534	+ 3,928	∓ 6,539	- 4,547	∓ 11,86	- 1,893
4,5	+ 0,01467	+ 2,767	∓ 3,828	- 5,507	∓ 6,699	- 2,272
5,0	+ 0,9916	+ 2,486	∓ 2,598	- 7,243	∓ 4,330	- 2,956
5,5	+ 2,157	+ 2,908	∓ 1,901	- 11,23	∓ 2,964	- 4,525
6,0	+ 6,005	+ 6,243	∓ 1,455	- 29,39	∓ 2,056	- 11,65
2π	∞	∞	∓ 1,267	∞	∓ 1,655	∞

* Vgl. die Anmerkungen * auf S. 324, 327 u. 328.

Tabelle 103. Formeln und Zahlenwerte der Hilfsausdrücke u, v, w zur Durchführung von Nebenspannungs- und Stabilitätsaufgaben (vgl. § 22÷24)*.

$$\frac{1}{e_{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{l_{i,j}}; \frac{e_{i,j}}{e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j} \cdot \hat{e}_{j,i}} = \frac{v_{i,j}}{l_{i,j}}; \frac{\hat{e}_{i,j}}{e_{i,j} \cdot e_{j,i} - \hat{e}_{i,j} \cdot \hat{e}_{j,i}} = \frac{w_{i,j}}{l_{i,j}}; \left[l_{i,j} = \left(\frac{l}{EJ} \right)_{i,j} \right]$$

$$u = \frac{\alpha^2}{1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}}; \quad v = \frac{\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2}; \quad w = \frac{\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)}{\left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2};$$

$$\alpha = l \sqrt{\frac{|S|}{EJ}}$$

α	u	v	w
0	3,000	4,000	— 2,000
0,2	2,992	3,995	— 2,001
0,4	2,968	3,979	— 2,005
0,6	2,927	3,952	— 2,012
0,8	2,870	3,914	— 2,022
1,0	2,794	3,865	— 2,034
1,2	2,699	3,804	— 2,050
1,4	2,584	3,732	— 2,070
1,6	2,446	3,647	— 2,093
1,8	2,282	3,548	— 2,120
2,0	2,088	3,436	— 2,152
2,1	1,979	3,374	— 2,170
2,2	1,861	3,309	— 2,189
2,3	1,732	3,240	— 2,210
2,4	1,591	3,166	— 2,233
2,5	1,438	3,088	— 2,257
2,6	1,270	3,005	— 2,283
2,7	1,086	2,918	— 2,312
2,8	0,8833	2,825	— 2,342
2,9	0,6586	2,728	— 2,376
3,0	0,4082	2,624	— 2,411
3,1	0,1273	2,515	— 2,450
π	0	2,467	— 2,467
3,2	— 0,1906	2,399	— 2,492
3,3	— 0,5540	2,276	— 2,538
3,4	— 0,9744	2,146	— 2,588
3,5	— 1,468	2,008	— 2,642
3,6	— 2,059	1,862	— 2,702
3,7	— 2,781	1,706	— 2,767
3,8	— 3,691	1,540	— 2,838
3,9	— 4,881	1,363	— 2,917
4,0	— 6,518	1,173	— 3,004
4,5		— 0,01915	— 3,614
5,0		— 1,909	— 4,785
5,5		— 5,673	— 7,647
6,0		— 20,64	— 21,45
2π		— ∞	— ∞

* Vgl. die Anmerkungen * auf S. 324 und 327.

1. Tabelle 104.

Ausrechnung 3²-gliedriger symmetrischer Determinanten und Auflösung symmetrischer Systeme von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten mittels Determinanten nach der sog. Cramerschen Regel.

(1)	(2)	(3) = (2) ²	(4) = (1) · (3)	(5)	(6) = (5) - (3)	(7)	(8) = (1) · (2)	(9) = (7) - (8)
$\delta_{1,1}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,3}^2$		$\delta_{2,2}\delta_{1,3}$	(6a)	$\delta_{1,2}\delta_{1,3}$		(9a)
$\delta_{2,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,3}^2$		$\delta_{1,1}\delta_{3,3}$	(6b)	$\delta_{1,2}\delta_{3,3}$		(9b)
$\delta_{3,3}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,2}^2$		$\delta_{1,1}\delta_{2,2}$	(6c)	$\delta_{1,3}\delta_{2,3}$		(9c)
$\Pi_a = \delta_{1,1}\delta_{2,2}\delta_{3,3}$	$\Pi_b = \delta_{2,3}\delta_{1,3}\delta_{1,2}$		$\Sigma_a =$					

$$\Delta = \Pi_a + 2\Pi_b - \Sigma_a$$

$\delta_{1,0}$	$\delta_{1,0} \cdot (6a)$	$\delta_{1,0} \cdot (9c)$	$\delta_{1,0} \cdot (9b)$
$\delta_{2,0}$	$\delta_{2,0} \cdot (9c)$	$\delta_{2,0} \cdot (6b)$	$\delta_{2,0} \cdot (9a)$
$\delta_{3,0}$	$\delta_{3,0} \cdot (7b)$	$\delta_{3,0} \cdot (9a)$	$\delta_{3,0} \cdot (6c)$
	$\Sigma_1 =$	$\Sigma_2 =$	$\Sigma_3 =$
	$X_1 = -\frac{\Sigma_1}{\Delta}$	$X_2 = -\frac{\Sigma_2}{\Delta}$	$X_3 = -\frac{\Sigma_3}{\Delta}$

2. Tabelle 105.

Ausrechnung 4²-gliedriger symmetrischer Determinanten und Auflösung symmetrischer Systeme von 4 linearen Gleichungen mit 4 Unbekannten mittels Determinanten nach der sog. Cramerschen Regel.

①	②	③ = ② ²	④	⑤ = ③ · ④	⑥	⑦	⑧ = ⑥ · ⑦	⑨	⑩ = ⑨ ²	⑪
	$\delta_{3,4}$		$\delta_{1,1} \delta_{2,2}$	(5a)						
$\delta_{1,1}$	$\delta_{2,4}$		$\delta_{1,1} \delta_{3,3}$	(5b)	$\delta_{3,4} \delta_{1,1} \delta_{2,4} \delta_{2,3}$		(8a)	$\delta_{3,4} \delta_{1,2}$	(10a)	(11a) = $\delta_{3,4} \delta_{1,2} \cdot \delta_{2,4} \delta_{1,3}$
$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,3}$		$\delta_{1,1} \delta_{4,4}$	(5c)	$\delta_{3,4} \delta_{2,2} \delta_{1,4} \delta_{1,3}$		(8b)	$\delta_{2,4} \delta_{1,3}$	(10b)	(11b) = $\delta_{3,4} \delta_{1,2} \cdot \delta_{2,3} \delta_{1,4}$
$\delta_{3,3}$	$\delta_{1,4}$		$\delta_{2,2} \delta_{3,3}$	(5d)	$\delta_{1,2} \delta_{3,3} \delta_{2,4} \delta_{1,4}$		(8c)	$\delta_{2,3} \delta_{1,4}$	(10c)	(11c) = $\delta_{2,4} \delta_{1,3} \cdot \delta_{2,3} \delta_{1,4}$
$\delta_{4,4}$	$\delta_{1,3}$		$\delta_{2,2} \delta_{4,4}$	(5e)	$\delta_{1,2} \delta_{4,4} \delta_{2,3} \delta_{1,3}$		(8d)			
	$\delta_{1,2}$		$\delta_{3,3} \delta_{4,4}$	(5f)					$\Sigma_c =$	$\Sigma_d =$
Π^*				$\Sigma_a =$			$\Sigma_b =$			

* $\Pi = \delta_{1,1} \delta_{2,2} \delta_{3,3} \delta_{4,4}$.

$A = \Pi - \Sigma_a + 2 \Sigma_b + \Sigma_c - 2 \Sigma_d$.

Π	Π	Π	Π	(5f)	(5e)	(5d)	(5c)	(5b)	(5a)	$\delta_{1,0} \delta_{1,0} \Sigma'_{1,1} \delta_{1,0} \Sigma'_{1,2} \delta_{1,0} \Sigma'_{1,3} \delta_{1,0} \Sigma'_{1,4}$	
(5a)	(5a)	(5b)	(5c)	(8c)	(8b)	(8b)	(8a)	(8a)	(8a)	$\delta_{2,0} \delta_{2,0} \Sigma'_{1,2} \delta_{2,0} \Sigma'_{2,2} \delta_{2,0} \Sigma'_{2,3} \delta_{2,0} \Sigma'_{2,4}$	
(5b)	(5d)	(5d)	(5e)	(8d)	(8d)	(8c)	(8d)	(8c)	(8b)	$\delta_{3,0} \delta_{3,0} \Sigma'_{1,3} \delta_{3,0} \Sigma'_{2,3} \delta_{3,0} \Sigma'_{3,3} \delta_{3,0} \Sigma'_{3,4}$	
(5c)	(5e)	(5f)	(5f)	(10a)	(10b)	(10c)	(10c)	(10b)	(10a)	$\delta_{4,0} \delta_{4,0} \Sigma'_{1,4} \delta_{4,0} \Sigma'_{2,4} \delta_{4,0} \Sigma'_{3,4} \delta_{4,0} \Sigma'_{4,4}$	
$2 \cdot (8a)$	$2 \cdot (8b)$	$2 \cdot (8c)$	$2 \cdot (8d)$	(11a)	(11a)	(11b)	(11b)	(11a)	(11b)	$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \Sigma_4 =$	
$\Sigma'_{1,1}$	$\Sigma'_{2,2}$	$\Sigma'_{3,3}$	$\Sigma'_{4,4}$	(11b)	(11c)	(11c)	(11c)	(11c)	(11b)	$X_1 = -\frac{\Sigma_1}{d} \quad X_2 = -\frac{\Sigma_2}{d} \quad X_3 = -\frac{\Sigma_3}{d} \quad X_4 = -\frac{\Sigma_4}{d}$	
$\Sigma'_{1,1}$	$\Sigma'_{2,2}$	$\Sigma'_{3,3}$	$\Sigma'_{4,4}$	usw., wobei allgemein: $\Sigma'_{i,k} = \Sigma_{i,k} \delta_{i,k}$.							

3. Tabelle 106.

Auflösung symmetrischer Systeme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten nach dem sog. abgekürzten Gaußschen Algorithmus (vgl. Pirlet⁶⁸).

(Gezeigt für den Fall von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten.)

Zuerst werden in 0, I, II, III die Felder bis zu der punktierten lotrechten Linie ausgefüllt.

Aus III folgt dann X_n (hier X_4); damit ergibt sich im vorliegenden Beispiel X_3 aus den rechts neben der punktierten Linie befindlichen Feldern von II und weiterhin X_2 und X_1 aus I und 0.

0.					μ_i^0	X_i	X_1	
(1 ⁰)	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,0}$		$\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}$	
(2 ⁰)	...	$\delta_{2,2}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,0}$	$\mu_2^0 = \frac{\delta_{1,2}}{\delta_{1,1}}$	X_2	$X_2 \cdot \mu_2^0$
(1 ⁰)	$\mu_2^0 \cdot \delta_{1,2}$	$\mu_2^0 \cdot \delta_{1,3}$	$\mu_2^0 \cdot \delta_{1,4}$	$\mu_2^0 \cdot \delta_{1,0}$				
(3 ⁰)	$\delta_{3,3}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,0}$	$\delta_{3,0}$	$\mu_3^0 = \frac{\delta_{1,3}}{\delta_{1,1}}$	X_3	$X_3 \cdot \mu_3^0$
(1 ⁰)	$\mu_3^0 \cdot \delta_{1,3}$	$\mu_3^0 \cdot \delta_{1,4}$	$\mu_3^0 \cdot \delta_{1,0}$					
(4 ⁰)	$\delta_{4,4}$	$\delta_{4,0}$	$\delta_{4,0}$	$\delta_{4,0}$	$\mu_4^0 = \frac{\delta_{1,4}}{\delta_{1,1}}$	X_4	$X_4 \cdot \mu_4^0$
(1 ⁰)	$\mu_4^0 \cdot \delta_{1,4}$	$\mu_4^0 \cdot \delta_{1,0}$						

$X_1 = -\Sigma = \dots$

I.					μ_i^I	X_i	X_2
(2 ^I) = (2 ⁰) - (1 ⁰) · μ_2^0	$\delta_{2,2}^I$	$\delta_{2,3}^I$	$\delta_{2,4}^I$	$\delta_{2,0}^I$			$\frac{\delta_{2,0}^I}{\delta_{2,2}^I}$
(3 ^I) = (3 ⁰) - (1 ⁰) · μ_3^0	$\delta_{3,3}^I$	$\delta_{3,4}^I$	$\delta_{3,0}^I$	$\mu_3^I = \frac{\delta_{2,3}^I}{\delta_{2,2}^I}$	X_3	$X_3 \cdot \mu_3^I$
(2 ^I) · μ_3^I	$\mu_3^I \cdot \delta_{2,3}^I$	$\mu_3^I \cdot \delta_{2,4}^I$	$\mu_3^I \cdot \delta_{2,0}^I$				
(4 ^I) = (4 ⁰) - (1 ⁰) · μ_4^0	$\delta_{4,4}^I$	$\delta_{4,0}^I$	$\delta_{4,0}^I$	$\mu_4^I = \frac{\delta_{2,4}^I}{\delta_{2,2}^I}$	X_4	$X_4 \cdot \mu_4^I$
(2 ^I) · μ_4^I	$\mu_4^I \cdot \delta_{2,4}^I$	$\mu_4^I \cdot \delta_{2,0}^I$					

$X_2 = -\Sigma = \dots$

II.

$$\left. \begin{aligned}
 (\overline{3}^{II}) &= (\overline{3}^I) - (\overline{2}^I) \cdot \mu_3^I \\
 (\overline{4}^{II}) &= (\overline{4}^I) - (\overline{2}^I) \cdot \mu_4^I \cdot \dots \dots \\
 &(\overline{3}^{II}) \cdot \mu_4^I \cdot \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \Sigma = \dots ;$$

			μ_3^{II}	X_3	X_3
$\delta_{3,3}^{II}$	$\delta_{3,4}^{II}$	$\delta_{3,0}^{II}$			$\frac{\delta_{3,0}^{II}}{\delta_{3,3}^{II}}$
	$\delta_{4,4}^{II}$	$\delta_{4,0}^{II}$	$\mu_4^{II} = \frac{\delta_{3,4}^{II}}{\delta_{3,3}^{II}}$	X_4	$X_4 \cdot \mu_4^{II}$
	$\mu_4^{II} \cdot \delta_{3,4}^{II}$	$\mu_4^{II} \cdot \delta_{3,0}^{II}$			

$X_3 = -\Sigma = \dots$

III.

$$(\overline{4}^{III}) = (\overline{4}^{II}) - (\overline{3}^{II}) \cdot \mu_4^{II}$$

			μ_4^{III}	X_4	X_4
$\delta_{4,4}^{III}$	$\delta_{4,0}^{III}$	$\frac{\delta_{4,0}^{III}}{\delta_{4,4}^{III}}$			$-\frac{\delta_{4,0}^{III}}{\delta_{4,4}^{III}} \dots$

Bemerkung: Ist eine große Anzahl von Belastungsfällen zu untersuchen, so wird das System zweckmäßig zuerst für n (hier 4) „Einheitszustände $i^{“}$ aufgelöst; bei diesen werden Lastwerte $\delta_{m,0}^e$ nach nebenstehendem Schema an Stelle der in Wirklichkeit gegebenen Lastwerte $\delta_{m,0}$ angesetzt.

	Einheitszustand $i =$			
	1	2	3	4
$\delta_{1,0}^e$	1	0	0	0
$\delta_{2,0}^e$	0	1	0	0
$\delta_{3,0}^e$	0	0	1	0
$\delta_{4,0}^e$	0	0	0	1

Werden die für einen solchen Einheitszustand „ i “ sich ergebenden Unbekannten $X_1 \div X_4$ mit $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \beta_{3,i}, \beta_{4,i}$ bezeichnet, so ist bei irgendeinem der gegebenen Zustände z. B.:

$$X_1 = \beta_{1,1} \cdot \delta_{1,0} + \beta_{1,2} \cdot \delta_{2,0} + \beta_{1,3} \cdot \delta_{3,0} + \beta_{1,4} \cdot \delta_{4,0}.$$

(Es ist $\beta_{j,i} = \beta_{i,j}$.)

4. Auflösung eines symmetrischen Systems von n dreigliedrigen linearen Gleichungen mit n Unbekannten (S. 332) nach dem Verfahren der sog. adjungierten Differenzengleichung (vgl. Funk⁶⁹).

Rechnungsgang I. Es wird gesetzt: $\delta_{1,0}$ bis $\delta_{n,0} = 0$ und $X_1 = X_1^I = 1$; dann folgt aus Gl. 1 ein Wert X_2^I , aus Gl. 2 ein Wert X_3^I usw., schließlich aus Gl. $n - 1$ ein Wert X_n^I .

Rechnungsgang II. Der wirkliche Wert der Unbekannten X_n ist:

$$X_n = - \frac{\Sigma \delta_{i,0} \cdot X_i^I}{\delta_{n-1,n} \cdot X_{n-1}^I + \delta_{n,n} \cdot X_n^I}.$$

Weiterhin folgt (mit den wirklichen Werten $\delta_{1,0}$ bis $\delta_{n,0}$) X_{n-1} aus Gl. n , X_{n-2} aus Gl. $n - 1$ usw., schließlich X_1 aus Gl. 2.

5. Auflösung eines symmetrischen Systems von n fünfgliedrigen linearen Gleichungen mit n Unbekannten (S. 332) nach dem Verfahren der sog. adjungierten Differenzengleichung (vgl. Funk⁶⁹).

Rechnungsgang I. Es wird gesetzt:

$$\delta_{1,0} \text{ bis } \delta_{n,0} = 0, X_1 = X_1^I = 0 \quad \text{und} \quad X_2 = X_2^I = 1;$$

dann folgt aus Gl. 1 ein Wert X_3^I , aus Gl. 2 ein Wert X_4^I usw., schließlich aus Gl. $n - 2$ ein Wert X_n^I .

Rechnungsgang II. Es wird gesetzt:

$$\delta_{1,0} \text{ bis } \delta_{n,0} = 0, X_1 = X_1^{II} = 1 \quad \text{und} \quad X_2 = X_2^{II} = 0;$$

dann folgt aus Gl. 1 ein Wert X_3^{II} , aus Gl. 2 ein Wert X_4^{II} usw., schließlich aus Gl. $n - 2$ ein Wert X_n^{II} .

Rechnungsgang III. Die wirklichen Werte der Unbekannten X_{n-1} und X_n folgen aus:

$$X_{n-1} \left(\sum_{i=n-3}^n \delta_{i,n-1} \cdot X_i^I \right) + X_n \left(\sum_{i=n-2}^n \delta_{i,n} \cdot X_i^I \right) + \sum_{i=1}^n \delta_{i,0} \cdot X_i^I = 0,$$

$$X_{n-1} \left(\sum_{i=n-3}^n \delta_{i,n-1} \cdot X_i^{II} \right) + X_n \left(\sum_{i=n-2}^n \delta_{i,n} \cdot X_i^{II} \right) + \sum_{i=1}^n \delta_{i,0} \cdot X_i^{II} = 0.$$

Weiterhin folgt (mit den wirklichen Werten $\delta_{1,0}$ bis $\delta_{n,0}$) X_{n-2} aus Gl. n , X_{n-3} aus Gl. $n - 1$ usw., schließlich X_1 aus Gl. 3.

Schrifttum.

In vorliegender Aufgabensammlung ist auf folgende Veröffentlichungen bzw. Lehrbücher Bezug genommen:

1. Küßner, H. G., u. K. Thalau: Die Entwicklung der Festigkeitsvorschriften für Flugzeuge von den Anfängen der Flugtechnik bis zur Gegenwart. 278. DVL-Ber. Luftf.-Forschg. Bd. 10 (1932) Heft 1 S. 1. — Auszug: Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 23 (1932) Heft 11 S. 313 u. DVL-Jb. 1932 III S. 37.
2. Reißner, H.: Beanspruchung und Sicherheit von Flugzeugen. Jb. Wiss. Ges. Luftf. Bd. 1 (1912/13) S. 85.
3. Inspektion des Flugzeugwesens: Bau- und Liefervorschriften für Heeresflugzeuge (B. L. V.) 1918.
4. Deutscher Luftfahrzeugausschuß (DLA): Vorläufige Belastungsannahmen für die Festigkeitsberechnung von Flugzeugen. Herausgegeben von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V. (DVL), Berlin-Adlershof, Dezember 1930. — Seit 1932: Vorschriften für die Festigkeit von Flugzeugen.
5. Thum, A., u. W. Buchmann: Dauerfestigkeit und Konstruktion. Berlin: VDI-Verlag 1932.
6. Hoff, W.: Die Festigkeit deutscher Flugzeuge. 36. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 13 (1922) Beiheft 8 S. 139.
7. Prandtl, L., u. A. Betz: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. 1. ÷ 4. Lieferung 1925 ÷ 1932. München und Berlin: Oldenbourg.
8. Wagner, H.: Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) Heft 1 S. 17.
9. Küßner, H. G.: Beanspruchung von Flugzeugflügeln durch Böen. 225. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 22 (1931) Heft 19 S. 579; Heft 20 S. 605 u. DVL-Jb. 1931 S. 83.
10. Uding, R.: Beanspruchungen der Flugzeuge durch senkrechte Böen. Noch nicht veröffentlichter DVL-Ber.
11. Heimann, H., u. G. Madelung: Die Beanspruchung der Flügelrippen. Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 1 (1917) Heft 3 S. 81.
12. Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. Leipzig: Kröner 1924⁵.
13. — Die graphische Statik der Baukonstruktionen Bd. I, II 1, II 2. Leipzig: Kröner; letzte Aufl. 1927, 1922, 1925.
14. Fritsche, J.: Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Bauing. Bd. 11 (1930) Heft 49 S. 851; Heft 50 S. 873; Heft 51 S. 888. — Weitergeführt in Bauing. Bd. 12 (1931) Heft 47 S. 827. — Vgl. auch Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931) Heft 3 S. 176.
15. Hohenemser, K.: Elastisch bildsame Verformung statisch unbestimmter Tragwerke. Ing.-Arch. Bd. 2 (1931) Heft 4 S. 472.
16. Melan, E.: Die Bestimmung des Sicherheitsgrades einfach statisch unbestimmter Fachwerke. Z. angew. Math. Mech. Bd. 12 (1932) Heft 3 S. 129.
17. Bleich, H.: Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Bauing. Bd. 13 (1932) Heft 19 S. 261.

18. Wagner, H.: Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 20 (1929) Heft 8 S. 200; Heft 9 S. 227; Heft 10 S. 256; Heft 11 S. 279; Heft 12 S. 306. — Vgl. auch Jb. Wiss. Ges. Luftf. 1928 S. 113.
19. Rode, H. H.: Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen. Eisenbau Bd. 7 (1916) Heft 9 S. 211.
20. Ebner, H.: Zur Berechnung räumlicher Fachwerke im Flugzeugbau. 138. DVL-Ber. Luftf.-Forschg. Bd. 5 (1929) Heft 2 S. 29 u. DVL-Jb. 1929 S. 371. Auszug und Ergänzung: Stahlbau Bd. 5 (1932) Heft 1 S. 1. — Vgl. auch Jb. Wiss. Ges. Luftf. 1929 S. 213.
21. — Berechnung regelmäßiger, vielfach statisch unbestimmter Raumbauwerke mit Hilfe von Differenzgleichungen. 235. DVL-Ber. u. DVL-Jb. 1931 S. 246.
22. Wagner, H.: Über räumliche Flugzeugfachwerke. Die Längsstabkraftmethode. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 19 (1928) Heft 15 S. 337.
23. Seydel, E.: Ermittlung der Stabkräfte im Flugzeug-Fachwerkkrumpf. 139. DVL-Ber. Luftf.-Forschg. Bd. 5 (1929) Heft 2 S. 73 u. DVL-Jb. 1929 S. 415.
24. — Beitrag zur Berechnung viergurtiger Flechtwerke. 226. DVL-Ber. u. DVL-Jb. 1931 S. 289.
25. Rühl, K. H.: Untersuchungen über die Berechnung der Stabkräfte infolge Torsionsbelastung in vielfach statisch unbestimmten vierseitigen Raumbauwerken. Dissertation, Braunschweig 1929.
26. Hertel, H.: Die Verdrehsteifigkeit und Verdrehfestigkeit von Flugzeugbauteilen. 218. DVL-Ber. Luftf.-Forschg. Bd. 9 (1931) Heft 1 S. 1 u. DVL-Jb. 1931 S. 165.
27. Vianello, L.: Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe. Z. VDI Bd. 42 (1898) Heft 52 S. 1436.
28. Reißner, H., u. E. Schwerin: Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. Jb. Wiss. Ges. Luftf. Bd. 4 (1916), Sonderheft S. 1.
29. Kayser, H.: Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegezugfestigkeit. Z. VDI Bd. 61 (1917) Heft 5 S. 92; Heft 6 S. 124 u. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 207 S. 17. Berlin: VDI-Verlag 1918.
30. Pröll, A.: Beiträge zur Berechnung von Tragflächenholmen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 8 (1917) Heft 17 S. 133; Bd. 9 (1918) Heft 21 S. 141; Bd. 11 (1920) Heft 13 S. 190.
31. Müller-Breslau, H.: Zur Berechnung von Tragflächenholmen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 9 (1918) Heft 17 S. 105; Bd. 10 (1919) Heft 19 S. 197; Bd. 11 (1920) Heft 7 S. 102; Heft 19 S. 283. — S. auch Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 2 (1917/18) Heft 3 S. 485; ferner Zbl. Bauverw. Bd. 39 (1919) Heft 54 S. 309.
32. Gümbel, L.: Beitrag zur Berechnung von Tragflächenholmen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 9 (1918) Heft 7 S. 49.
33. Trefftz, E.: Zur Frage der Holmfestigkeit. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 9 (1918) Heft 15 S. 101.
34. Reißner, H.: Die Biegelinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft- und Querbelastung in der Nähe der Knicklast. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 9 (1918) Heft 19 S. 125.
35. Lewe, V.: Zur Berechnung der Holme von Einstielern. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 10 (1919) Heft 9 S. 109.
36. Ratzersdorfer, J.: Durchgehende Balken mit beliebig vielen Öffnungen bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte. Eisenbau Bd. 10 (1919) Heft 5 S. 93.
37. — Berechnung der Tragflächenholme. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 11 (1920) Heft 7 S. 102; Heft 19 S. 281.

38. Arnstein, K.: Beanspruchung axial gedrückter, durch Einzellasten gebogener Stäbe. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 10 (1919) Heft 11 S. 131.
39. Hoff, W.: Betrachtung zur rechnerischen Nachprüfung von anfänglich gekrümmten, durch Drucklängskräfte belasteten Stäben auf Biegefestigkeit. 34. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 13 (1922) Heft 7 S. 92.
40. Teichmann, A.: Zur Berechnung auf Knickbiegung beanspruchter Flugzeugholme. 263. DVL-Ber. Luftf.-Forschg. Bd. 9 (1931) Heft 3 S. 85. — Auszug und Ergänzung: Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 23 (1932) Heft 17 S. 511 u. DVL-Jb. 1932 III S. 53.
41. Schleusner, A.: Die Biegelinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft- und Querbewegung in der Nähe der Knicklast. Erscheint in der Z. Flugtechn. Motorluftsch.
42. Bleich, Fr.: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin: Julius Springer 1924.
43. Hencky, H.: Über die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen mittels der elastischen Gelenkkette. Eisenbau Bd. 11 (1920) Heft 24 S. 437.
44. Kammer, E.: Statisch unbestimmte Hauptsysteme. Berlin: Julius Springer 1914.
45. Ballenstedt, L.: Einfluß der Spante auf die Festigkeit der Holme. Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 3 (1918) Heft 4 S. 100.
46. Thala u, K.: Zur Berechnung freitragender Flugzeugflügel in zwei- und dreiholmiger Steifrahmenform (Vierendeel-Rostträger). Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 15 (1924) Heft 10 S. 103. — Vgl. auch Ber. u. Abh. d. Wiss. Ges. Luftf. 1924 S. 53, ergänzt durch 49. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 16 (1925) Heft 3 S. 86.
47. — Über die Verbundwirkung von Rippen im freitragenden zweiholmigen und verspannungslosen Flugzeugflügel. 52. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 16 (1925) Heft 20 S. 415. — Weitergeführt im 56. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 17 (1926) Heft 6 S. 121 u. DVL-Jb. 1926, S. 26.
48. Reißner, H.: Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 17 (1926) Heft 7 S. 137; Heft 9 S. 179; Heft 18 S. 384.
49. Biezeno, C. B., J. J. Koch u. C. Koning: Über die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926) Heft 2 S. 97.
50. Graatz, F.: Die Berechnung einseitig eingespannter, zweistieliger Rahmenrostträger unter Berücksichtigung einer beliebigen Rippenanzahl sowie veränderlicher Trägheitsmomente. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 17 (1926) Heft 19 S. 411.
51. Gabrielli, G.: Über die Torsionssteifigkeit eines freitragenden Flügels mit konstantem Holm- und Rippenquerschnitt. Luftf.-Forschg. Bd. 2 (1928) Heft 3 S. 79.
52. Fákla, St. v.: Biege- und Torsionssteifigkeit des freitragenden Flügels. Luftf.-Forschg. Bd. 4 (1929) Heft 1 S. 30.
53. Friedrichs, K., u. Th. v. Kármán: Zur Berechnung freitragender Flügel. Z. angew. Math. Mech. Bd. 9 (1929) Heft 4 S. 261.
54. Prager, W.: Die Berechnung zweiholmiger freitragender Flügel. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. Berlin: Julius Springer 1929.
55. Sänger, E.: Zur genauen Berechnung vielholmig-parallelstegiger, ganz- und halbfreitragender, mittelbar und unmittelbar belasteter Flügelgerippe. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 22 (1931) Heft 20 S. 597. — Weitergeführt in Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 23 (1932) Heft 9 S. 245.
56. Ebner, H.: Über Fachwerke mit gekreuzten Diagonalen. 301. DVL-Ber. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932) Heft 4 S. 412 u. DVL-Jb. 1932 III S. 63.

57. Wieghardt, K.: Über die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben. Dissertation, Göttingen 1903. — Auszug: Zbl. Bauverw. Bd. 24 (1904) Heft 62 S. 390.
58. Thalau, K.: Zur Berechnung von Flugzeugtragwerken mit Verbundstielen in V-Form und N-Form. 64. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 17 (1926) Heft 21 S. 455 u. DVL-Jb. 1927 S. 35. — Weitergeführt im 71. DVL-Ber. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 18 (1927) Heft 5 S. 105 u. DVL-Jb. 1927 S. 86.
59. Rühl, K. H.: Beitrag zur Berechnung von Verbundstielen. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 18 (1927) Heft 5 S. 111.
60. Gehler, W.: Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin: Ernst & Sohn 1910.
61. Zimmermann, H.: Knickfestigkeit der Stabverbindungen. Berlin: Ernst & Sohn 1925.
62. Ratzersdorfer, J.: Zur Knickfestigkeit der Tragflächenholme. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 9 (1918) Heft 19 S. 131.
63. Mises, R. v., u. J. Ratzersdorfer: Die Knicksicherheit von Fach- und Rahmenwerken. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925) Heft 3 S. 218; Bd. 6 (1926) Heft 3 S. 181.
64. Bleich, Fr. u. H.: Die Stabilität räumlicher Stabverbindungen. Z. öst. Ing.-u. Arch.-Ver. 1928 Heft 37 S. 345.
65. Teichmann, A.: Das räumliche Knicken einiger Stabverbindungen des Flugzeugbaus. Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 22 (1931) Heft 17 S. 525. — Vgl. auch DVL-Jb. 1932 I S. 31 (Cf 64/6, 2).
66. Kaul, H. W.: Die „Spannziffer“ außerelastisch beanspruchter Zugstäbe unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses der Glühzone bei Schweißverbindungen aus gezogenen Stahlrohren. Noch nicht veröffentlichter DVL-Ber.
67. Ostenfeld, A.: Die Deformationsmethode. Berlin: Julius Springer 1926.
68. Pirlet, J.: Die statisch unbestimmten Systeme. Berlin: Julius Springer 1923.
69. Funk, P.: Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin: Julius Springer 1920.

Eine Reihe weiterer Arbeiten ist in der Veröffentlichung „Thalau: Aufgaben der Luftfahrzeug-Statik“ [Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 22 (1931) Heft 8 S. 229 u. DVL-Jb. 1931 S. 67] zusammengestellt.

Ferner seien genannt:

Lehrbücher der Flugzeugstatik: van Gries (Berlin 1921), Schwengler (Berlin 1926), Pippard u. Pritchard (London 1919), Klemin (New York 1929) und Niles u. Newell (New York u. London 1921).

Zum Studium der allgemeinen Statik seien auch empfohlen: Die Lehrbücher von Schlink (Leipzig, Berlin 1907), Grüning (Berlin 1925), Unold (Berlin 1925), Pasternak (Zürich, Berlin 1927), Kaufmann (Berlin 1930), Kirchhoff (Berlin 1931) sowie die Referate von Henneberg, Grüning bzw. Wieghardt in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften (Bd. IV, 1 u. IV, 4. Leipzig 1903 u. 1914), Domke im Handbuch für Eisenbetonbau (Bd. 10. Berlin 1920), Reißner bzw. Hertwig im Handbuch der phys. u. techn. Mechanik (Bd. I bzw. IV, 1. Leipzig 1929 bzw. 1931).

Arbeiten über Plattenknickung: Bergmann u. Reißner: Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 20 u. 21 (1929 u. 1930). Seydel: Luftf.-Forsch. Bd. 8 (1930) und DVL-Jb. 1930, 1931. Schnadel: Werft Reed. Hafen Bd. 11 (1930) und Jb. schiffbautechn. Ges. 1929 sowie die Arbeit über vielholmige Flügel von Steding: Ing.-Arch. Bd. 1 (1930).

Ein ausführlicheres Schrifttumverzeichnis, insbesondere auch der fremdsprachigen Arbeiten soll gelegentlich an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Sachverzeichnis.

- Abfangen 8, 9, 14.
Abzählkriterium 34.
A-Fall 8, 14.
Aktion 39, 95.
Anstellwinkel α 6.
Anstrengung 4.
Anteilkraft B_0^*, C_0^* 100.
Arbeitsdiagramm 18.
Arbeitsgleichung 114, 167.
Aufbaukriterium 34.
Auflagerkraft $A, H, R, (F)$ 38, 39, 42, 95, 271.
Auflagerverschiebung 118, 119, 133, 206, 211, 246.
Auftrieb 6, 16.
Auskreuzung 77, 99, 196, 251, 269, 278.
Aussparung 109, 198, 251.
- Baldachin 221.
Baldachinbock 92, 291, 321.
Balken (s. auch Holm) 27, 41, 117, 164, 229.
Beanspruchung 4.
Belastungsannahmen 1, 7.
Beiwert, aerodynamischer c 6.
—, $\delta_{i,k}$ der Elastizitätsgleichungen 191, 192.
Beschleunigung 3, 7, 21.
B-Fall 9.
Biegelinie 126, 151, 165, 324.
Biegemoment B 37, 40, 41, 164, 324.
Biegesteifigkeit EJ 114.
Blechträger 81.
Bock, Baldachin- 92, 291, 321.
Böenbeanspruchung 10, 23.
Bruchlastvielfaches 2.
- C-Fall 8.
Clapeyronsche Gleichung 230.
Cremona-Plan 71, 73.
Culmannsche Gerade 74.
- Deformationsmethode 196, 286, 299.
Dehnung 136.
- Determinante 300, 332.
D-Fall 9.
Differentialgleichung der Biegelinie 165.
Differenzgleichung 332.
Doppeldeckertragwerk 95, 261, 269.
Drehung (Neigung) $\varphi, \psi, \tau, \delta\alpha, \delta\beta$ usw. 30, 112, 190.
—, gegenseitige $\delta d \delta$ 113.
Dreieckswinkeländerung $\delta\beta$ 150.
Dreieckverband 34.
Dreigelenkrahn 65, 141.
Drillmoment D 37, 40, 41, 50.
Drillsteifigkeit GJ_d 114.
Drillung, gegenseitige $\delta d \gamma$ 113.
Druckbiegung 164.
Druckpunkt 12.
Durchbiegung $\delta y, \delta$ 112, 117.
- E-Fall 9.
Eingespannter Stab 43, 55, 206, 219, 229.
Einheitsdrehung e, \hat{e}, \bar{e} 285, 299.
Einheitsstabkraft 93, 95.
Einspannmoment E, E_d 39.
Einspannung 28.
Einspannwirkung 297.
Elastisches Gewicht W 131, 151, 179, 183.
Elastizitätsgleichung 190, 332.
Elastizitätsmodul E 114.
Endstaudruck 8.
Ersatzstabverfahren 80, 99, 259, 273.
Ersatzsystem 260.
Eulerlast 186, 234, 304, 328.
Exzentrische Kraft 36, 47, 272.
- Fachwerk 27, 227, 285, 297.
—, ebenes 69, 148.
—, räumliches 92, 250.
Fahrgestell 93, 203.
Federungsdiagramm 18.
Fessel 28, 31, 42, 51, 85, 88, 211, 253, 255, 270.
Festigkeitslehre 29.

- Festwerte bei Knickbiegung 165.
F-Fall 11.
 Flechtwerk 34, 99, 251.
 Flügelfachwerk 77.
 Flügelgerippe 236, 245.
 Flügelmoment 6.
 Flugfälle $A \div H$ 4.
 Formänderung 35, 112.

 Gelenk 27, 32, 61, 190.
 —, elastisches 140, 153, 181.
 Gelenkkette 181.
 Gelenkträger 61, 135.
 Gelenkwinkeländerung 140, 148, 154.
 Gerberträger 61, 135.
G-Fall 10.
 Gleichgewichtsbedingung 7, 31, 42, 90,
 95, 289, 294, 299.
 Gleichungssystem 332.
 Gleitflug 9.
 Gleitmodul G 114.
 Gleitzahl $tg \epsilon$ 7.
 Gliederung 26.
 —, veränderliche 28, 77, 209, 279.
 Gruppe statisch unbestimmter Größen
 194.

 Hauptsystem, statisch bestimmtes 190,
 195, 225.
 —, statisch unbestimmtes 196.
 —, unstabiles 195.
 Hebelarm 30.
H-Fall 10.
 Hilfszustand zur Ermittlung von Form-
 änderungen 115.
 Hochreißen 10.
 Höhenleitwerk 25, 234.
 Holm (Balken) 27, 41, 117, 164, 229.
 —, abgestrebt 55, 70, 74, 119, 139, 148,
 169, 219, 229, 286.
 — auf mehreren Stützen 225, 229.
 —, beiderseitig eingespannt 206.
 —, einseitig eingespannt (freitragend)
 43, 55, 69, 117, 219, 229.
 — mit beiderseitiger Endstützung 51,
 119, 164.
 — mit überkragenden Enden 55.
 —, quer- und längsbelastet 164.
 —, vollwandig mit dünnem Stegblech
 81.
 Holmrippenrost 187, 236, 245.
 Hookesches Gesetz 36, 113.
 Integration 118, 123, 243, 322.

 Kinematische Bestimmtheit 35.
 Knickbiegemoment B 164, 324.
 Knickbiegung 164, 192, 221, 229, 249,
 276, 285, 324.
 Knickung 112, 186, 234, 297, 321, 328.
 Knotendrehung Φ , φ 286, 292, 295,
 299.
 Knotengleichung 31.
 Knotenlast 70.
 Knotenzahl 31.
 Komponente 31, 39, 292 \div 294, 301.
 Koordinatensystem 41.
 Korkzieherregel 30.
 Kraft 29.
 —, äußere P , $N(p, n)$ 36, 38.
 —, innere Q , S 37, 40.
 Kräftepaar 29.
 Kräfteplan, Kräftepolygon 38, 55, 71,
 73, 80, 97.
 Kragbalken 43, 55.
 Kragmoment 55.
 Kreiselmoment 14.
K-Verband 72, 313.

 Labilitätsmaß α 165.
 Lagernachgiebigkeit 118, 119, 133, 206,
 211, 246.
 Lagerung 28, 31, 42, 51, 63, 85, 88, 211,
 253, 255, 270.
 Landung 17.
 Längenänderung δl , δs usw. 112.
 Längskraft S 33, 37, 40, 41, 69.
 Längssteifigkeit EF 114.
 Längsverbindingskraft A 101.
 Längung $\delta d x$ 113.
 Last s. Kraft.
 Lastvielfaches n 2, 7.
 Lastwerte δ_i , δ_o der Elastizitätsgleichun-
 gen 191, 192.
 Leistung 16.
 Leitwerk 22, 234.
 Luftkraft 3, 6.
 Luftkraftmoment 6, 11, 13.
 Luftschraubenschub 7, 14.

 Massenkraft 3, 7, 17, 19.
 Massenträgheitsmoment 21.
 Maxwellscher Satz 192, 285.
 Mittlere Flügeltiefe 5.
 Moment 29.
 —, äußeres M , $T(m, t)$ 36, 38.
 —, inneres B , D 37, 40.

- Motordrehmoment 14.
 Motoreinbau 14, 88, 211.
- Navier-Bernoullisches Gesetz 113.
 Nebenspannung 285.
 Nebenspannungsmoment M 285.
 Normalkraft 6, 11.
 N -Verband 95, 261, 269, 304.
- Pfeilsinn von Moment und Drehung 30.
 Proportionalitätsgrenze 36, 113, 300.
- Querkraft Q** 37, 40, 41, 167.
- Rahmen** 27, 61.
 —, geschlossen 65, 141, 198, 214, 227, 245, 311.
 — mit Gelenken 27, 65, 141.
 —, offen 62, 85, 137, 203, 245, 319.
 Rahmenwerk 27.
 Raumfachwerk 92, 250, 269.
 Räumlich gestütztes System 88, 211.
 Reaktion A , H , E , E_a (F) 38, 39, 42, 95, 271.
 Rechnungsgewicht G_R 6.
 Reduktionssatz 202, 285.
 Resultierende R 38, 45, 54, 55, 58.
 Rippenverbundwirkung 236.
 Rittersches Schnittverfahren 70, 71, 72.
 Rostrahmen 245.
 Rückenflug 9.
 Rumpffachwerk 98, 250.
 Rüstfehler 214.
- Scheibe 27.
 Schiebung, gegenseitige $\delta d y$ 113.
 Schlußlinie 53, 57.
 Schnitt 35, 37, 69, 88, 92, 189.
 Schubkraft Q 37, 40, 41, 167.
 Schubmodul G 114.
 Schubsteifigkeit GJ_a 114.
 Schweißspannung 215.
 Schwerkraft 3, 7.
 Schwund 135.
 Sehnenformel 141.
 Sehnenlängenänderung 193, 221, 229, 277.
 Seileck 45, 53, 57.
 Seitenleitwerk 22.
 Sichere Belastung 2, 36.
 Sicherheit 2.
 Sicherheitsfaktor 4.
 Simpsonsche Regel 124, 323.
- Spant (s. auch Rahmen) 139, 311.
 Spiel in Einspannung 209.
 Stab (s. auch Balken) 26.
 —, krumm 63, 87, 139.
 —, quergestützt 304, 317.
 Stabgleichung 31.
 Stabgruppe 297.
 Stabilität 297.
 Stabilitätskriterium 31, 34, 300.
 Stabkraft 40, 69.
 —, bezogene 107.
 Stabvertauschung 34.
 Stabwerk 27.
 Stabzahl 34.
 Stabzug 27, 41, 61, 85, 137, 154, 304, 311.
 Stabzugverfahren 141, 156.
 Statik 29, 36.
 Statisch bestimmtes System 35, 41.
 — unbestimmte Größe X 189, 225.
 — unbestimmtes System 35, 189.
 Statisches Moment 124.
 Staudruck q 7.
 Steifigkeit 114.
 Stellvertretender Balken 131, 152.
 Stetigkeitsbedingung 176.
 Stirndruck (Tangentialkraft) 6, 11, 78.
 Stoß 3, 17.
 Sturzflug 8.
 Stützenmoment 229, 234.
 Stützenverschiebung 118, 119, 133, 206, 211, 246.
 Stützung 28, 31, 42, 51, 63, 85, 88, 211, 253, 255, 270.
 Symmetrie, Ausnutzung der 120, 121, 138, 195, 199, 212, 217, 225.
- Tangentialkraft 6, 11.
 Temperaturspannung 218.
 Tetraederverband 34.
 Torsionsmoment D 37, 40, 41, 50.
 Trägheitshauptachse 37, 40, 292, 298.
 Trägheitskraft 3, 7, 17, 19.
 Trägheitsmoment J 16, 21, 37, 114.
 Tragwand (s. auch Holm, abgestrebt) 55, 70, 196, 218, 225, 274, 281.
 Triebwerksbelastung 14.
 Triebwerkseinbau 14, 88, 211.
- Überlagerungssatz 191.
 Unbekannte X der Elastizitätsgleichungen 190, 194, 332.

- Vektordarstellung 30.
 Verbundrippe 236, 245.
 Verbundscheibe 95, 261, 269, 304.
 Verdrehung γ 136.
 Verschiebung δx , δy , δz 29, 112.
 —, gegenseitige 113, 190.
 Verschiebungsgruppe 120, 131, 138, 139.
 Verschiebungsplan 159.
 Verspannung 77, 99, 196, 251, 269, 278.
 Verteilung der Luftkraft 12.
 Virtuelle Verrückung 114.
 Vollwandiger Holm 81.
 Vorspannung 18, 196, 214, 215, 278.
 Vorzeichenregeln für aerodynamische
 Beiwerte 6.
 — für Formänderungen 112.
- Vorzeichenregeln für Kraft und Moment
 38, 50, 62, 69, 85, 101.
- Weg 30, 112, 190.
 W -Gewicht 131, 151, 179, 183.
 Widerstand 6, 8.
 Williot-Plan 159.
 Winkeländerung $\delta\alpha$, $\delta\beta$ usw. 112, 150.
 Wölbkraftgruppe W 253, 256, 275.
- Zellwerk 254.
 Zentrifugalkraft 16.
 Zerlegung von Kraft und Moment 31,
 39, 65, 97, 292 ÷ 294, 301.
 Zusammenhangsbedingung 191.
 Zusatzkraft ΔB , ΔC 100.
-

* **Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie.** Von H. Glauert, M. A., Fellow of Trinity College Cambridge. Übersetzt von Dipl.-Ing. H. Holl, Danzig. Mit 115 Textabbildungen. VI, 202 Seiten. 1929. RM 12.75; gebunden RM 13.75

* **Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandten Gebieten** (Aachen 1929). Herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf, Th. v. Kármán. Mit 137 Abbildungen im Text. IV, 221 Seiten. 1930. RM 18.50; gebunden RM 20.—

* **Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik** (Innsbruck 1922). Herausgegeben von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita. Mit 98 Abbildungen im Text. IV, 251 Seiten. 1924. Unveränderter Neudruck 1930. RM 18.—

* **Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik** (Flüssigkeit mit kleiner Reibung; Tragflügeltheorie, I. und II. Mitteilung; Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust). Von L. Prandtl und A. Betz. Neudruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mit einer Literaturübersicht als Anhang. IV, 100 Seiten. 1927. RM 4.—

Hydro- und Aeromechanik nach Vorlesungen von L. Prandtl. Von Dr. phil. O. Tietjens, Mitarbeiter am Forschungs-Institut der Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Pittsburgh Pa., U. S. A. Mit einem Geleitwort von Professor Dr. L. Prandtl, Direktor des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung in Göttingen.

* **Erster Band: Gleichgewicht und reibungslose Bewegung.** Mit 178 Textabbildungen. VIII, 238 Seiten. 1929. Gebunden RM 15.—

Zweiter Band: Bewegung reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen. Mit 237 Textabbildungen und 28 Tafeln. VIII, 299 Seiten. 1931. Gebunden RM 23.—

Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs. Veröffentlichung der Vorträge und Erörterungen der Konferenz über hydro-mechanische Probleme des Schiffsantriebs am 18. und 19. Mai 1932 in Hamburg. Herausgegeben unter Mitarbeit der Konferenz-Teilnehmer von Dr.-Ing. G. Kempf und Dr.-Ing. E. Foerster. Mit 290 Diagrammen. XVI, 447 Seiten. 1932. Gebunden RM 19.—

Das Buch behandelt in fünf Gruppen: Reibungswiderstand, Wellenwiderstand und Schiffsform, Flügelantrieb, Kavitation, Ungleichförmigkeitseinflüsse bei Schiffsschrauben.

Hochfrequenztechnik in der Luftfahrt. Im Auftrage der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt unter Mitarbeit von Fachleuten herausgegeben von Professor Dr. H. Faßbender, Berlin. Mit 475 Textabbildungen und 48 Tabellen. XII, 577 Seiten. 1932. Gebunden RM 68.—

* *Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Werke wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.*

- * **Fluglehre.** Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. Von Professor Dr. **Richard von Mises**, Berlin. Dritte, stark erweiterte Auflage. Mit 192 Textabbildungen. VI, 321 Seiten. 1926.
z. Zt. vergriffen.
-
- * **Theorie des Segelfluges.** Von Dr.-Ing. **W. Klemperer**. (Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen, H. 5.) Mit 17 Abbildungen im Text. 78 Seiten. 1926.
RM 6.90
-
- * **Flugzeugbaukunde.** Eine Einführung in die Flugtechnik. Von Dr.-Ing. **H. G. Bader**. Mit 94 Bildern im Text. IV, 121 Seiten. 1924.
RM 4.80
-
- * **Der Bau der Starrluftschiffe.** Ein Leitfaden für Konstrukteure und Statiker. Von Oberingenieur **Johannes Schwengler**. Mit 33 Textabbildungen. 99 Seiten. 1925.
RM 4.80
-
- * **Einführung in die Flugtechnik.** Von Dipl.-Ing. **Julius Spiegel**. (Technische Fachbücher, Band 10.) Mit 49 Abbildungen im Text und 81 Aufgaben nebst Lösungen. 139 Seiten. 1928.
RM 2.25
-
- * **Einführung in die Mechanik** mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Von Professor Dr. **Theodor Pöschl**, Prag. Mit 102 Textabbildungen. VII, 132 Seiten. 1917.
RM 3.75
-
- * **Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern** und ihre praktischen Anwendungen. Von Privatdozent Dr. Ing **Th Wyss**, Danzig. Mit 432 Abbildungen im Text und auf 35 Tafeln. IX, 368 Seiten. 1926.
Gebunden RM 25.50
-
- * **Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern.** Theorie und Versuch über Spannungsverteilung als Scheibenproblem mit besonderer Berücksichtigung der lokalen Störung. Von **Akira Miura**, Professor an der kaiserlichen Universität Kioto. Mit 142 Abbildungen im Text und auf 6 Tafeln. V, 109 Seiten. 1928.
RM 11.—; gebunden RM 12.50
-
- * **Die Knickfestigkeit.** Von Privatdozent Dr.-Ing. **Rudolf Mayer**, Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. VIII, 502 Seiten. 1921.
RM 20.—

* Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Werke wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.