

Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges

Ein Lehrbuch für Praxis
und technische Forschung

VON

Dr.-Ing. Heinrich Gröber
Oberingenieur an der bayr. Landeskolleienstelle

Mit 78 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1921

ISBN 978-3-662-24115-8 ISBN 978-3-662-26227-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-26227-6

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1921 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921.

Vorwort.

Aus dem großen Gebiete der technischen Wärmelehre läßt sich als ein Teilgebiet die Lehre von der Wärmeübertragung abspalten. Mit diesem Worte „Wärmeübertragung“ soll die Gesamtheit jener Erscheinungen bezeichnet werden, welche in der Überführung einer Wärmemenge von einer Stelle des Raumes nach einer anderen Stelle bestehen. Diese Erscheinungen, welche durch die Worte — Wärmeleitung, Wärmeübergang und Wärmestrahlung — gekennzeichnet sind, spielen in der gesamten anorganischen und organischen Natur eine überaus wichtige Rolle. Von besonderer Bedeutung sind sie für die Technik, wie das die nachstehenden drei Gruppen von Beispielen zeigen.

Die erste Gruppe umfaßt die Feuerungsanlagen mit ihren Nebeneinrichtungen, so die Dampfkessel mit ihren Überhitzern und Vorwärmern, die Kondensatoren, die gesamten Feuerungsanlagen der Ziegelei-, Zement-, Kalk-, Glas- und Porzellan-Industrien, der chemischen Industrie und des Hüttenwesens, die Winderhitzer der Eisenhüttenwerke, sowie überhaupt alle Arten von Regeneratoren und Rekuperatoren und die Apparate der Kälteindustrie und der Heizungs- und Lüftungstechnik.

Die zweite Gruppe betrifft jene Aufgaben, die in der Beseitigung einer schädlichen Erwärmung bestehen, so bei der Ableitung der Reibungswärme aus Lagern, bei der Kühlung der Zylinder von Verbrennungsmotoren und Kompressoren und insbesondere bei der Kühlung elektrischer Maschinen.

Bei der dritten Gruppe handelt es sich um die Aufgabe, einen Raum oder einen Körper gegen Wärmeaufnahme oder Wärmeabgabe möglichst zu schützen, also um die Aufgabe der Isolierung.

Die Aufgaben der Gruppe 1 und 2 verlangen möglichste Vermehrung, die Aufgaben der Gruppe 3 möglichste Beschränkung der Wärmeübertragung.

Durch zahlreiche theoretische und experimentelle Arbeiten ist die physikalische Natur der verschiedenen Arten der Wärmeübertragung ziemlich geklärt. Dagegen ist unsere Fähigkeit, die Vorgänge messend und vor allem rechnend zu verfolgen, nur sehr gering und doch ist es klar, daß es in all den obengenannten Fällen der Technik nicht genügt, wenn sie die Mittel kennt, welche die Wärmeübertragung steigern oder mindern, sondern sie will durch Rechnung die Wirkung einer Maßnahme zahlenmäßig vorausbestimmen können. Diesem dringenden Bedürfnis der Technik steht aber, wie schon oben erwähnt, die Unzulänglichkeit unseres Wissens entgegen. Daß dieses Mißverhältnis zwischen Bedürfnis und Fähigkeit immer noch besteht, muß bei der Bedeutung der gestellten Aufgabe befremden. Mit der Erklärung, der man häufig begegnet, daß lediglich ein Übersehen dieses Gebietes seitens der technischen Forschung vorliege und daß das Versäumte nun schleunigst nachzuholen sei, ist die Lage nicht gekennzeichnet. Die Gründe müssen

tiefer liegen; sie können erst am Schlusse des Buches eingehender besprochen werden. Wir müssen uns vorerst mit der kurzen Erklärung begnügen, daß sich die technische Forschung immer wieder durch die einfache Erscheinungsform der Vorgänge verleiten ließ, mit zu nahe liegenden Vorstellungen und zu einfachen rechnerischen Hilfsmitteln an die Probleme heranzutreten. Man wollte mit einfachen Faustformeln auskommen und die darin vorkommenden Beiwerte lediglich durch Versuchsreihen bestimmen, aber dabei hatte man sich noch nicht überzeugt, ob diese Formeln auch annähernd der Ausdruck der Naturgesetze sind — oder kürzer — man suchte Zahlenwerte noch bevor die Gesetze bekannt waren.

Erst die letzten beiden Jahrzehnte brachten Arbeiten, welche erkennen lassen, daß wir am Beginn eines neuen Fortschritts stehen. Diese Arbeiten zeigen aber, daß für jeden, der sich mit den Aufgaben der Wärmeübertragung befaßt, sei er Ingenieur oder technischer Physiker, die Notwendigkeit besteht, außer mit den Erfahrungen der Praxis auch mit den einschlägigen wissenschaftlichen Grundlagen vertraut zu sein. Der Erwerb dieser Kenntnisse ist aber dadurch ungemein erschwert, daß die einschlägigen Arbeiten in den verschiedensten Lehrbüchern und Zeitschriften der Technik, der Experimentalphysik, der theoretischen Physik und der reinen Mathematik verstreut sind und daß die Art der Darstellung je nach dem Leserkreis, für den die Arbeiten bestimmt sind, eine sehr verschiedene ist.

Aus dem Gesagten ist zu erkennen, daß eine Zusammenfassung und einheitliche Darstellung des ganzen Gebietes im Interesse der Technik liegt. Das vorliegende Buch ist ein Versuch, diesem Bedürfnis gerecht zu werden. Bei seiner Abfassung stellte ich mir die Aufgabe, unsere gegenwärtige Kenntnis von den Gesetzen der Wärmeleitung in festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen zusammenzustellen, soweit sie für die technische Forschung oder unmittelbar für die Praxis von Nutzen ist¹⁾. In Anbetracht der Eigenart des Gebietes kam es mir aber darauf an, auch die Grenzen und Lücken unseres Wissens klar hervortreten zu lassen. Deshalb habe ich die behandelten Probleme nicht ausschließlich nach Maßgabe ihrer Lösbarkeit gewählt, sondern mit Auswahl und in tunlichster Kürze auch solche Probleme besprochen, deren Lösung zur Zeit noch nicht gelingt.

Es darf hier die Bemerkung eingeschaltet werden, daß die mathematisch-physikalischen Methoden, die in diesem Buche entwickelt werden, auch bei der Lösung anderer technischer Aufgaben sinngemäße Anwendung finden können, so bei der Entgasung von Brennstoffen, ferner bei dem Auflösen fester Körper in Flüssigkeiten, bei der Trocknung feuchter Körper und überhaupt bei allen Vorgängen mit Diffusion.

An mathematischen Kenntnissen habe ich nur die Grundzüge der höheren Mathematik vorausgesetzt. Was darüber hinausgeht, wie etwa den Begriff der Randwertaufgaben, die Fourierschen Reihen

¹⁾ Meine ursprüngliche Absicht, auch die Vorgänge der Verdampfung und Kondensation und die Vorgänge der Wärmestrahlung zu behandeln, mußte ich aufgeben, da ich nach der jahrelangen Unterbrechung, die die Bearbeitung des Buches durch den Krieg erfahren hatte, bald zu einem Abschluß kommen mußte.

oder die Besselschen Funktionen, habe ich im Buche selbst entwickelt, denn ich wollte es unbedingt vermeiden, den Leser auf rein mathematische Lehrbücher verweisen zu müssen, deren Studium ihm neuerdings Zeit gekostet hätte. Allerdings dürfen diese Entwicklungen nicht in dem Sinne verstanden werden, wie der Mathematiker seine Lehrsätze darlegt und beweist. Es kam mir vielmehr darauf an, an Hand der besprochenen physikalischen Vorgänge Zweck und Methode eines mathematischen Verfahrens zu zeigen, soweit dies für das Verständnis des Buches notwendig ist. Wenn dann der Leser auf diese Weise das Wesen der mathematischen Operation erfaßt hat, dann wird es ihm viel leichter sein, an Hand der einschlägigen mathematischen Literatur sich noch weiter zu orientieren, falls er aus persönlichen Gründen hierzu das Bedürfnis haben sollte.

Die Formeln, die am Ende der Ableitungen sich ergeben, enthalten häufig Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, natürliche Logarithmen und Reihen; sie würden also zu umständlichen und zeitraubenden Zahlenrechnungen führen. Ich habe diesem Nachteil dadurch zu begegnen gesucht, daß ich die Formeln für die häufigst vorkommenden Gebiete durchgerechnet und die Ergebnisse in Zahlentabellen oder Kurvendarstellungen zusammengestellt habe. Ich hoffe damit vor allem einem Bedürfnis der Praxis entgegengekommen zu sein.

Auf den ersten Seiten des Anhangs findet der Leser eine Zusammenstellung der im Buch gebrauchten Buchstabenbezeichnungen. Ich habe mich natürlich zuerst bemüht, mit den vom Ausschuß für Einheit und Formelgrößen vorgeschlagenen Bezeichnungen auszukommen, mußte aber bald das Unmögliche dieses Vorhabens einsehen. Ich kam vielmehr zu der Überzeugung, daß es grundsätzlich nicht möglich ist, die gesamte Naturwissenschaft und Technik auf eine größere Zahl von Bezeichnungen festzulegen. Es hätte genügt, für die Dimensionen des Raumes, die Zeit und die Temperatur einheitliche Bezeichnungen festzulegen und im übrigen jedem Zweig der Technik, wie etwa dem Wasserkraftmaschinenbau oder der Elektrotechnik die Ausarbeitung eines gesonderten Systemes zu überlassen. Dies wäre möglich gewesen und hätte sich dann auch wirklich eingeführt. Ich habe nun versucht, unter Anpassung an die heute meist gebräuchlichen Bezeichnungen ein solches System für das Gebiet der Wärmeübertragung aufzustellen.

Bevor ich dieses Vorwort schließe, möchte ich noch der Jahre gedenken, in denen ich im Laboratorium für technische Physik an der Technischen Hochschule in München tätig war. Da die Wärmeübertragung zu den bevorzugten Arbeitsgebieten dieses Laboratoriums gehört, fand ich hier nicht nur die Einführung in die wissenschaftliche Behandlungsweise der Probleme, sondern auch einen ersten Einblick in die einschlägigen Bedürfnisse der Praxis. Ich ergreife die Gelegenheit, um meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Knoblauch, von dem ich auch noch in späteren Jahren vielfache Anregung erhalten habe, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

München, im Oktober 1920.

H. Gröber.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	III
Einleitung	1
I. Die Wärmeleitung in festen Körpern.	
A. Die mathematischen Grundlagen	3
1. Das Temperaturfeld und das Feld des Wärmeflusses	3
2. Die Ableitung der Differentialgleichung	9
3. Die Grenzbedingungen	10
B. Über die Lösung von Randwertaufgaben	14
1. Die einführende Aufgabe	15
2. Über das Aufsuchen partikulärer Lösungen	25
3. Über das Anpassen an die Oberflächenbedingung	30
4. Über das Anpassen an die Anfangsbedingung	32
C. Die zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen. Die Temperaturunterschiede streben dem Ausgleich zu	44
Aufgabe 1. Die Platte	44
„ 2. Der Zylinder	51
„ 3. Die Kugel	54
„ 1, 2 und 3. Besprechung	57
„ 4. Der allseitig unendlich ausgedehnte Körper	60
„ 5. Der einseitig unendlich ausgedehnte Körper	66
D. Die zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen. Temperaturen periodisch veränderlich	70
Allgemeines	71
Aufgabe 6. Der einseitig unendlich ausgedehnte Körper	72
„ 7. Die Platte	78
E. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder ohne Wärmequellen	86
Allgemeines	86
Aufgabe 8. Platte	88
„ 9. Das Rohr	91
„ 10. Die Hohlkugel	95
„ 11. Eindringen der Wärme in den einseitig unendlich ausgedehnten Körper durch eine Kreisfläche	97
F. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder mit Wärmequellen	101
Aufgabe 12. Der Zylinder	102
G. Verschiedene Sonderfälle	103
1. Das Feld ist von mehreren verschiedenartigen Körpern erfüllt	103
2. Der Körper ist nicht isotrop	108
3. λ und c_p sind von Druck und Temperatur abhängig	112
4. Vorgänge mit Änderung des Aggregatzustandes oder der chemischen Natur	113
H. Prinzip der Ähnlichkeit	117
1. Bestimmungsstücke des ersten Feldes	117
2. Das zweite Temperaturfeld	118
3. Die Ähnlichkeit beider Felder	120
4. Das Prinzip der Ähnlichkeit und der Wärmefluß	123
5. Ähnlichkeit bei Randwertaufgaben dritter Art	124
6. Schlußbemerkung	125
II. Die Wärmeleitung in Flüssigkeiten und Gasen und der Wärmeübergang	
A. Das allgemeine Problem	126
1. Grundbegriffe	126
2. Aufstellung der Differentialgleichungen	130

	Seite
3. Die Randwertangaben	144
4. Das allgemeine Strömungsproblem	146
B. Die Hydrodynamik	147
1. Allgemeines	147
2. Das Prinzip der Ähnlichkeit	149
3. Die vereinfachten Strömungszustände	154
4. Das Prinzip der Ähnlichkeit als Grundlage für Versuche	157
C. Die Wärmeleitung in strömenden Körpern bei aufgezwungener Strömung	166
1. Allgemeines	166
2. Die Strömung im geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt	179
3. Strömung in gerader Leitung mit nicht kreisförmigem Querschnitt	212
4. Die Strömung in gekrümmter Leitung (Rohrkrümmer und Rohrspirale)	214
5. Die Strömung um einen Zylinder	216
6. Die Modellregel	217
7. Der Wärmedurchgang	219
D. Die Wärmeleitung in strömenden Körpern bei freier Strömung	231
1. Allgemeines	231
2. Die freie Abkühlung eines Körpers in einem Gas	236
Anhang	246
Schlußwort	266

Literatur-Angaben.

Fourier, M., Analytische Theorie der Wärme. Deutsche Ausgabe von Weinstein. — Berlin. Springer. 1884.

Enzyklopädie der math. Wissenschaften — Berlin u. Leipzig. Teubner.

Weber, H., Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. — 2 Bde. Braunschweig. Vieweg. 1910.

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis. — Berlin-Leipzig. Teubner. 1909.

Schafheitlin, P., Die Theorie der Besselschen Funktionen. Aus math. u. physik. Schriften für Ingen. u. Studier. — Bd. 4. Teubner. 1908.

Jahnke u. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Aus math. u. physik. Schriften f. Ingen. u. Studier. — Bd. 5. Teubner. 1909.

Kraus, F., Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. — Berlin. Springer. 1917.

Lamb, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. — Teubner. 1907.

Prandtl, L., Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung. — Sonderdr. a d. Handwörterb. d. Naturw. Bd. 4. Jena Fischer. 1913.

Nußelt, W., Die Wärmeleitfähigkeit von Wärmeisolistoffen. — Diss. München 1907 u. Mitt. über Forsch.-Arb. H. 63 u. 64.

Derselbe, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. — Habil.-Schrift Dresden 1909 u. Mitt. über Forsch.-Arb. H. 89.

Derselbe, Der Wärmeübergang im Rohr. — Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingen. 1917. S. 685.

Derselbe, Grundgesetz des Wärmeüberganges. — Gesundh.-Ingen. 1915 S. 42.

Derselbe, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. — Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingen. 1916. S. 541.

Knoblauch u. Hencky, Anleitung zu genauer, technischer Temperaturmessung. — München. Oldenbourg. 1919.

Landolt-Börnstein-Roth, Physikalisch-chemische Tabellen. — Berlin. Springer. 1912.

Ausführliche Literaturübersicht bei:

Soennecken, A., Der Wärmeübergang von Rohrwänden an strömendes Wasser. — Diss. München 1910.

Poensgen, R., Über Wärmeübertragung von strömendem, überhitztem Wasserdampf an Rohrwandungen und von Heizgasen an Wasserdampf. — Diss. München 1914.

Verzeichnis der Zahlentafeln.

	Seite
1. Wurzeln der Gleichung: $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{-\varepsilon}{h \cdot X}$	20
2. Wurzeln der Gleichung: $\operatorname{cotg} \delta = \frac{\delta}{h \cdot X}$	21
3. Wärmeverlust der Platte	51
4. Wurzeln der Gleichung: $\mu \cdot J_1(\mu) = \pm h R \cdot J_0(\mu)$	52
5. Wärmeverlust des Zylinders	54
6. Wurzeln der Gleichung $\nu \cdot \cos \nu = (1 - h \cdot R) \sin \nu$	55
7. Wärmeverlust der Kugel	56
8. Temperaturverlauf im einseitig unendlich ausgedehnten Körper	68
9. Werte von $\sqrt{1/\pi} \cdot \log \nu / \log e$	75
10. Werte von funkt $(h^2 \cdot a \cdot \tau_0)$	77
11. Werte von $\cos u \cdot \mathfrak{C}of u$ und $\sin u \cdot \mathfrak{S}in u$	80
12. Werte von funkt $\left(\frac{x}{X} \cdot M\right)$	83
13. Planparallele Platte mit periodischer Oberflächentemp.	84
13a. Kritische Geschwindigkeit (in Metern pro Sekunde)	164
14. Versuchswerte nach Nußelt	194
15. Abhängigkeit der Werte Br von T_m bei Luft	204
16. Berechnung von Heiz- und Kühlrohren	210
17. Wärmeübergang im Rohrbündel	211
18. Wärmeübergang in Leitung mit rechteckigem Querschnitt	213
19. Wärmeaustausch im Gleichstrom	225
20. Wärmeaustausch im Gegenstrom	228
21. Durchschnittliche Temperaturdifferenz	230
22. Verhältnis: Gleichstrom/Gegenstrom	231
23. ε und \varkappa abhängig von der Atomzahl	237
24. Kenngröße Gr abhängig von t_w und t_r	240
25. Werte der Potenz $d^{0,75}$	242
26. Hilfstabelle für die Berechnung des Wärmeverlustes von Rohrleitungen	242
Anhang.	
27. Exponentialfunktion	250
28. Gaußsches Fehlerintegral	250
29. Besselsche Funktionen	251
30. Potenz: x^n ; $n = -0,16$	251
31. „ „ „ $n = -0,05$	252
32. „ „ „ $n = +0,21$	252
33. „ „ „ $n = +0,79$	253
34. „ „ „ $n = +0,95$	253
35. „ „ „ $n = +1,05$	253
36. „ „ „ $n = +1,16$	254
37. „ „ „ $n = +1,21$	254
38. „ „ „ $n = +1,79$	255
39. Spez. Gewicht, spez. Wärme, Wärmeleitfähigkeit usw. von festen Körpern und Flüssigkeiten	255
40. Wärmeleitfähigkeit, spez. Wärme, spez. Gew. von Luft	262
41. Temperaturleitfähigkeit von Luft	263
42. Wärmeleitfähigkeit, spez. Wärme, spez. Gew. und Temperaturleitfähigkeit von Wasserdampf	264
43. Zähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen	265

Einleitung.

Nach der im Vorwort gegebenen Definition umfaßt der Begriff „Wärmeübertragung“ die Gesamtheit jener Erscheinungen, die in der Überführung einer Wärmemenge von einer Stelle des Raumes nach einer anderen Stelle bestehen. Diese Ortsveränderung der Wärme ist auf drei ihrem Wesen nach gänzlich verschiedenen Wegen möglich. Diese drei Arten des Wärmetransportes sollen nun in ihren Hauptzügen gekennzeichnet werden.

Die erste Art der Wärmeübertragung ist diejenige durch Leitung. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß ihr Auftreten an das Vorhandensein von Materie gebunden ist und daß ein Wärmeaustausch nur zwischen den unmittelbar benachbarten Teilchen des Körpers stattfindet. Man kann sich den Vorgang so vorstellen, daß die Wärme von Teilchen zu Teilchen weiterwandert.

Die zweite Art der Wärmeübertragung ist die Wärmeübertragung durch Konvektion oder Fortführung. Sie tritt auf, wenn materielle Teilchen eines Körpers ihre Stelle im Raum ändern, wobei sie ihren Wärmeinhalt mit sich fortführen. Dieser Vorgang findet in strömenden Flüssigkeiten und Gasen statt und ist, falls nicht in der ganzen strömenden Masse Temperaturgleichheit herrscht, stets von der Wärmeleitung von Teilchen zu Teilchen begleitet. Solange wir nur Stellen im Innern der Strömung betrachten, solange wir uns also um die Vorgänge an den festen Begrenzungswänden und an der Oberfläche nicht kümmern, können wir die beiden ersten Arten des Wärmetransportes in der Bezeichnung Wärmeleitung in strömenden Körpern zusammenfassen. Wenn wir dagegen die festen Begrenzungswände mit in die Betrachtung hereinziehen, so werden wir im allgemeinen einen Wärmeausstausch zwischen den Wänden und den strömenden Körpern beobachten, der dadurch zustande kommt, daß diejenigen Teilchen des Körpers, die in der Nähe der Wand sind, von dieser Wand Wärme aufnehmen und mit sich fortführen. Man nennt diesen Wärmeaustausch den Wärmeübergang durch Konvektion, auch kurz den Wärmeübergang.

Eine besondere Art des Wärmeüberganges ist dann gegeben, wenn an der Grenze zwischen Wand und Strömung eine Aggregatzustandsänderung des strömenden Körpers eintritt. Es ist dies der Fall beim Wärmeübergang von Heizflächen an verdampfende Flüssigkeiten, von sich kondensierenden Dämpfen an Kühlflächen und beim Auftauen und Gefrieren.

Bei allen Vorgängen des Wärmetransportes durch Konvektion haben wir eine wichtige Unterscheidung zu machen hinsichtlich der Ursachen der Strömung. Wenn in einer Flüssigkeits- oder Gasmasse örtliche Temperaturungleichheiten vorhanden sind, so sind dieselben von Ungleichheiten der Dichte begleitet und diese führen zu einer Strömung in der Masse. Sind nun diese Dichteungleichheiten die einzige Ursache der Strömung, so sprechen wir von einer freien Strömung (auch von einem Strömungsfeld aus inneren Ursachen). Vielfach sind aber noch andere von außen kommende Ursachen für das Auftreten und Fortbestehen der Strömung vorhanden. Ist im Grenzfall deren Wirkung so groß, daß die Ungleichheiten der Dichte keinen Einfluß gewinnen können, so sprechen wir von einer aufgezwungenen Strömung (von einem Strömungsfeld aus äußeren Ursachen).

Die dritte Art der Wärmeübertragung ist dañ gegeben, wenn die Wärme an einer Stelle des Raumes in eine andere Energieform übergeht, in dieser Gestalt den Raum durchmißt und an einer zweiten Stelle sich ganz oder teilweise in Wärme zurückverwandelt. In dieser großen Gruppe von Erscheinungen ist der wichtigste Fall der vorübergehende Übergang in strahlende Energie, kurz die Wärmestrahlung genannt.

Diese verschiedenen Arten des Wärmetransportes treten selten allein auf, sondern meist in irgendeiner Weise miteinander kombiniert. Sie können dann den Eindruck einer durchaus einheitlichen Erscheinung machen und unter Umständen kann es sogar zweckmäßig sein, sie in der Rechnung als solche zu behandeln. Zwei Fälle sind da herauszuheben.

Der erste Fall ist der Wärmeverlust, den ein heißer Körper erleidet, der an Luft grenzt und sich ohne künstliche Kühlung abkühlt. Er verliert seine Wärme durch Strahlung in die kältere Umgebung sowie durch Leitung und Konvektion seitens der umgebenden Luft. In diesem Falle faßt man die drei Arten des Wärmetransportes zusammen unter dem Namen Gesamtabkühlung bzw. bei einem kalten Körper in heißer Umgebung unter dem Namen Gesamterwärmung.

Eine zweite hiervon ganz verschiedene Art der Zusammenfassung ist dann möglich, wenn dieselbe Wärmemenge aus einem ersten strömenden Körper an die feste Begrenzungswand dieser Strömung übergeht, diese Wand durchsetzt und auf der Gegenseite in einen zweiten strömenden Körper übertritt. Dieser Vorgang in seiner Gesamtheit betrachtet heißt Wärmedurchgang.

I. Die Wärmeleitung in festen Körpern.

Die analytische Theorie der Wärmeleitung nimmt auf das molekulare Gefüge der Stoffe keine Rücksicht, sie betrachtet also die Materie nicht als eine Vielheit von einzelnen Massenpunkten, sondern als Kontinuum. Dies hat zur Folge, daß wir uns bei allen Ableitungen die betrachteten Räume und auch die Differentiale dieser Räume doch noch groß vorstellen müssen im Vergleich zur Größe der Moleküle und auch im Vergleich zum Abstand zweier Moleküle.

Wo nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, sollen die Körper als homogen und isotrop vorausgesetzt werden.

A. Die mathematischen Grundlagen.

1. Das Temperaturfeld und das Feld des Wärmeflusses.

a) **Das Temperaturfeld.** Die mathematische Physik spricht von dem „Feld einer Zustandsgröße in einem gegebenen Augenblick“ und sie versteht darunter die Gesamtheit der Werte, die diese Zustandsgröße (Dichte, Temperatur, Geschwindigkeit usw.) an allen Stellen eines Raumes in dem gegebenen Augenblick aufweist, und zwar betrachtet sie diese Werte im Hinblick auf ihre Größe und räumliche Verteilung.

Rechnerisch findet das Feld seine Darstellung durch eine Gleichung. Bezeichnet z. B.: T die absolute Temperatur, x, y, z die Raumkoordinaten im kartesischen System und τ die Zeit, so ist eine Gleichung von der Form

$$T = F(x, y, z, \tau)$$

der rechnerische Ausdruck eines Temperaturfeldes. In Zylinderkoordinaten würden wir erhalten:

$$T = F(r, \varphi, z, \tau)$$

und in Kugelkoordinaten

$$T = F(r, \varphi, \psi, \tau)$$

und endlich können wir uns noch der vektoriellen Darstellung bedienen mit der Schreibweise

$$T = F(r, \tau)$$

wobei dann der Ort nicht durch drei Raumkoordinaten, sondern durch den Radiusvektor r festgelegt ist.

Wenn man in einem solchen Feld von einem beliebigen Punkt aus nach den verschiedenen Richtungen des Raumes vorwärts schreitet, so

beobachtet man im allgemeinen eine Änderung dieser Zustandsgröße. Sind für alle Richtungen bei unendlich klein gehaltenen Schritten auch diese Änderungen unendlich klein, so heißt das Feld in diesem Punkt stetig. Ist auch nur in einer Richtung die Änderung von endlichem Betrag, dann heißt das Feld im untersuchten Punkt unstetig. Diese Bezeichnungen werden auf das ganze Feld übertragen, indem man ein Feld, das gar keine Stelle unstetigen Verlaufes enthält, als ein stetiges Feld bezeichnet.

Unter einem „Aufpunkt“ versteht die mathematische Physik in erster Linie jenen Punkt eines Feldes, für den der Aufgabe gemäß die Zustandsgröße zu bestimmen ist, in zweiter Linie überhaupt einen für die Betrachtung besonders hervorgehobenen Punkt.

Was sonst noch an Begriffen aus der Lehre der skalaren- und der Vektorfelder zu erläutern ist, soll an dem Beispiele des Temperaturfeldes entwickelt werden.

Nach dem oben Gesagten ist das Temperaturfeld im Innern eines Körpers die Gesamtheit der Temperaturen an allen Stellen im Körper. Da die Temperatur eine skalare Größe ist, d. h., da eine einzige Zahl mit ihrem Vorzeichen genügt, um ihren Wert festzulegen, so heißt auch das Temperaturfeld ein skalares Feld.

Ist das Temperaturfeld im Punkt A stetig, so werden sich von A aus immer solche Richtungen finden lassen, in denen sich die Temperatur

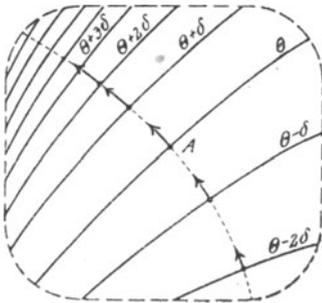


Fig. 1. Temperaturfeld mit Isothermen.

gar nicht ändert. Man gelangt so zu Nachbarpunkten, die die gleiche Temperatur wie Punkt A besitzen und die man zu Ausgangspunkten für neue Schritte wählen kann. Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens wird im Körper eine Fläche festgelegt, die nur Punkte gleicher Temperatur enthält, also eine Fläche konstanter Temperatur oder eine isothermische Fläche. In Fig. 1 ist ein Stück eines Temperaturfeldes mit eingezeichneten Isothermen θ , $\theta + \delta$, $\theta + 2\delta$ usw. dargestellt.

Hierbei ist — wie auch im folgenden — unter θ die Temperatur zu verstehen

— unter θ die Temperatur zu verstehen, bei noch gänzlich willkürlich gelassenem Nullpunkt der Zählung. Da an derselben Stelle nicht zwei Temperaturen zugleich herrschen können, so können sich auch zwei Flächen verschiedenen Temperaturwertes niemals schneiden. Ferner kann eine Fläche konstanter Temperatur innerhalb eines Körpers keine Begrenzung besitzen, sondern sie muß entweder an der Oberfläche endigen oder sie muß in sich geschlossen sein und ganz im Innern des Körpers verlaufen.

b) Der Temperaturgradient. Außer den bereits erwähnten Richtungen von A aus gibt es noch eine einzelne, ausgezeichnete Richtung, nämlich jene Richtung, bei der die Änderung der Temperatur am größten ist. Sie ist z. B. (vgl. Fig. 1) für den Punkt A gegeben durch die kürzeste Verbindung von A aus nach der nächstgelegenen, isothermischen Fläche,

also durch die Richtung des Lotes auf diese Fläche. Der Betrag dieser Änderung bei festgehaltener Größe des Schrittes ist umgekehrt proportional der Länge des Lotes. Es ist also durch die Beschaffenheit des Feldes in unmittelbarer Nähe des Punktes A ein Vektor bestimmt, dessen Richtung die obengenannte Richtung stärkster Änderung ist, und dessen absoluter Betrag gleich dem Wert der Temperaturänderung pro Längeneinheit dieses Weges ist. Das Vorzeichen des Vektors wollen wir so festlegen, daß wir ihn positiv nennen in der Richtung der zunehmenden Temperatur. Dieser Vektor heißt der Gradient des Temperaturfeldes im Punkt A oder kurz der Temperaturgradient, der Temperaturanstieg. Bezeichnet θ die Temperatur, so wird dieser Vektor durch das Symbol „grad θ “ dargestellt. Der negative Wert dieses Vektors also „— grad θ “ heißt das Temperaturgefälle.

Der absolute Betrag des Gradienten ist von der Dimension: Grad $\times m^{-1}$;

In vielen Schriften wird die Wahl über das Vorzeichen so getroffen, daß das Temperaturgefälle mit + grad θ bezeichnet wird. Sehr häufig wird auch statt des Symboles „grad“ das Symbol „ ∇ “ verwendet, z. B. in der technischen Mechanik von Föppl.

Ebenso wie für den Punkt A läßt sich für jeden Punkt des Feldes der Gradient bestimmen. Die Gesamtheit dieser Vektoren bildet ein neues Feld, das Feld des Temperaturgradienten. Die Schar der Flächen konstanter Temperatur bestimmt zugleich das Feld dieses Vektors, denn die Richtungen der Vektoren sind gegeben durch die Linienschar der orthogonalen Trajektorien dieser Flächen und die absoluten Beträge der Vektoren sind dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Flächen umgekehrt proportional mit einem Proportionalitätsfaktor, der von den gewählten Maßeinheiten abhängt.

c) **Der Wärmefluß.** Jeder Körper, in dem nicht völliges Temperaturgleichgewicht herrscht, ist von Wärmeströmungen erfüllt. Zur mathematischen Darstellung dieses Strömungsfeldes bedienen wir uns eines neuen Vektors Ω , der als Wärmefluß bezeichnet sein soll. Seine Bedeutung ergibt sich aus der folgenden Definition:

„Unter dem Wärmefluß an einer Stelle des Feldes versteht man einen Vektor, der durch seine Richtung die Richtung der Wärmeströmung und durch seinen absoluten Betrag die Stärke oder Intensität der Wärmeströmung angibt. Diese Intensität wird gemessen durch die Wärmemenge, die durch ein Flächenstück von der Größe, „Eins“, das man an der untersuchten Stelle senkrecht zur Strömungsrichtung anbringt, in der Zeiteinheit hindurchströmt.“

Der Vektor ist also von der Dimension

$$\left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Std.}} \right]$$

Für einen festen Körper, in dem die Wärmeübertragung ausschließlich durch Leitung erfolgt, kann der Wärmefluß an einer Stelle in einfacher Weise aus der Beschaffenheit des Temperaturfeldes in unmittelbarer Nähe dieser Stelle abgeleitet werden. Da für jede Stelle im Inneren eines homogenen und isotropen Körpers der physikalische Zustand symmetrisch zur Richtung des Temperaturgefälles ist, so kann die

Wärme nur in Richtung des Temperaturgefälles selbst strömen. Die beiden Vektoren Temperaturgradient und Wärmefluß müssen also in einer Geraden liegen. Und weil die Wärme erfahrungsgemäß immer in Richtung des Temperaturgefälles strömt, so haben die beiden Vektoren entgegengesetzte Richtung. Die nächstliegende Annahme über die Intensität der Wärmeströmung ist die, den Wärmefluß der ersten Potenz des Temperaturgefälles proportional zu setzen und in der Tat ist diese Annahme bereits von Biot und Fourier gemacht worden. Die Wahl der Exponenten „Eins“ ist nicht gerade willkürlich zu nennen, denn schon diese beiden Forscher haben versucht sie theoretisch zu begründen; aber ihre Berechtigung hat sich doch erst dadurch erwiesen, daß alle Folgerungen aus ihr mit der Erfahrung übereinstimmen.

Die beiden Annahmen über Richtung und Größe des Wärmeflusses ermöglichen uns die Aufstellung der einen Grundgleichung der Wärmeleitung. Diese lautet:

$$\Omega = \lambda \cdot (-\text{grad } \Theta) = -\lambda \cdot \text{grad } \Theta \dots \dots \dots (1)$$

und bringt den Zusammenhang zwischen dem Feld des Wärmeflusses und dem Temperaturfeld in mathematischer Form zum Ausdruck.

Da auf jeder Seite der Gleichung nur ein Vektor steht, so müssen die beiden Vektoren in einer Geraden liegen. Daß ihre Richtung entgegengesetzt ist, erhellt aus dem entgegengesetzten Vorzeichen. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine skalare Größe und seinem Werte nach von der Natur und dem physikalischen Zustand jenes Körpers abhängig, der das Feld erfüllt. Er heißt die Wärmeleitfähigkeit (innere Wärmeleitfähigkeit), der Substanz. Die W.L.F. ist wie alle Stoffwerte mit Druck und Temperatur veränderlich. Sowohl der Zahlenwert bei einer bestimmten Temperatur als auch die Änderungsgesetze mit Temperatur und Druck sind nur durch den Versuch zu bestimmen.

Durch Einsetzen der Dimensionen von Ω und $\text{grad } \Theta$ erhält man die Dimension der W. L. F. zu

$$\left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m. Std. Grad}} \right].$$

d) Der Wärmetransport durch eine beliebige Fläche. Nach der Definition des Wärmeflusses geht durch ein Flächenstück von der Größe „Eins“, das senkrecht zum Temperaturgradienten steht, die Wärmemenge Ω in der Zeiteinheit in Richtung des Gradienten hindurch.

Ein Flächenstück von der Größe df , dessen Normale mit dem Gradienten den Winkel α bildet, wird dann von einer Wärmemenge durchsetzt, deren absoluter Betrag gegeben ist durch

$$|q| = |\Omega| \cdot df \cdot \cos \alpha = -\lambda \cdot |\text{grad } \Theta| \cdot \cos \alpha \cdot df \dots \dots (2a)$$

Diesem absoluten Betrag kann man in zweierlei Weise eine Richtung zuordnen. Das Nächstliegende ist von der Wärmemenge zu sprechen, die durch df in Richtung des Gradienten hindurchtritt, also in einer Richtung, in der df nicht seine ganze Größe darbietet. Diese Auffassung kommt zum Ausdruck in der Gleichung

$$q = -\lambda \cdot \text{grad } \Theta \cdot \{\cos \alpha \cdot df\} \dots \dots \dots (2b)$$

Andererseits kann man auch von einem Wärmetransport normal zum

Flächenelement sprechen. In diesem Falle kommt zwar die ganze Fläche df , dafür aber nur die Normalkomponente des Wärmeflusses in Rechnung. Dem entspricht die Gleichung

$$q_n = -\lambda \cdot \{\text{grad } \theta \cdot \cos \alpha\} df = -\lambda \cdot \text{grad}_n \theta \cdot df \quad \dots (2c)$$

Ist nicht ein einzelnes Flächenstück, sondern eine Fläche von endlicher Ausdehnung gegeben und soll ferner die Rechnung über den Zeitraum von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau$ ausgedehnt werden, so ist die gesamte Wärmemenge

$$Q = -\lambda \int_0^\tau d\tau \cdot \int_{\text{Fläche}} \text{grad}_n \theta \cdot df \quad \dots (2d)$$

Durch diese Gleichung sind alle Fragen nach dem Wärmetransport in einem Körper auf die Frage nach der Beschaffenheit des Temperaturfeldes zurückgeführt. Die Bestimmung des Temperaturfeldes ist somit die Hauptaufgabe der analytischen Theorie der Wärmeleitung.

c) **Der Laplacesche Differentialparameter $\Delta^2 \theta$.** Die nachstehende Doppelgleichung

$$\int_{\circ} \text{grad}_n \theta \cdot df = \text{div} (\text{grad } \theta) \cdot dV = \Delta^2 \theta \cdot dV \quad \dots (3)$$

ist für den Kenner der Lehre von den Vektorfeldern ohne weiteres verständlich. Sie enthält in ihrem ersten Teil den Gaußschen Satz, in ihrem zweiten Teil eine Anwendung der Vektorformel Nr. II im Anhang. Für den Leser, welcher diese Lehre nicht kennt, sei der Differentialparameter $\Delta^2 \theta$ aus dem Oberflächenintegral heraus erklärt. Eine Ableitung oder ein Beweis soll dies nicht sein.

Wir fassen im Temperaturfeld einen Punkt A ins Auge, legen um ihn eine sehr kleine Kugel und zerteilen ihre Oberfläche in unendlich kleine Flächenstücke df . Ferner legen wir durch jedes Flächenstück die Normale und nennen die nach außen gerichtete Normale positiv, die nach dem Mittelpunkt gerichtete Normale negativ. Der Temperaturanstieg in Richtung der äußeren Normalen heißt dann $+\text{grad}_n \theta$.

Wenn nun bei einer solchen sehr kleinen Kugel die Temperatur in Richtung aller äußeren Normalen steigt, also in Richtung aller inneren Normalen sinkt, dann ist sicher die Temperatur im Mittelpunkt der Kugel niedriger als auf der Oberfläche, oder mit anderen Worten, die Temperatur ist im Punkte A niedriger als in seiner unmittelbaren nächsten Umgebung. Sind die Werte $\text{grad } \theta$ für alle einzelnen Flächen df positiv, so ist sicher auch das Integral, genommen über die geschlossene Fläche \circ , positiv und zwar um so mehr, je niedriger die Temperatur im Punkt A ist, verglichen mit der Umgebungstemperatur.

Im gegenteiligen Falle, daß die Temperatur in Richtung aller äußeren Normalen sinkt, ist der Wert des Integrales negativ und die Temperatur im Mittelpunkt der Kugel höher als auf der Oberfläche.

Im dritten Falle, daß für einige Flächenstücke die Temperatur in Richtung der äußeren Normalen steigt, für andere Flächenstücke fällt, kann der Wert des Integrales positiv oder negativ ausfallen.

Aber immer ist der Wert des Integrales ein Maß dafür, in welchem Sinne die Temperatur im Aufpunkt vom Durchschnittswert der Umgebungstemperatur abweicht. Das Integral gibt also eine wichtige Eigenschaft des Feldes im Aufpunkt an und man hat deshalb dafür das kurze Symbol $\Delta^2\theta$ eingeführt.

$\Delta^2\theta$ heißt der Laplacesche Differentialparameter oder auch der Differentialparameter 2. Ordnung. In der Literatur finden sich auch die Bezeichnungen ∇^2 und Δ . Seine Dimension ist

$$\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Meter}^2} \right].$$

Für den Fall des rechtwinklig, geradlinigen Koordinatensystems soll nun der Wert von $\Delta^2\theta$ berechnet werden, dagegen sei wegen des Wertes im Zylinder- und Kugelkoordinatensystem auf die Vektorformeln Nr. IX verwiesen.

Zuerst wollen wir ein Temperaturfeld annehmen, in dem die Temperatur nur in der Richtung der X-Achse veränderlich ist und zwar nach der Funktion $\theta = F(x)$.

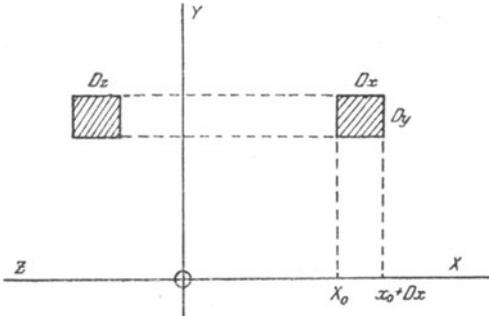


Fig. 2. Ableitung von $\Delta^2\theta$ für rechtwinklig-geradlinige Koordinaten.

Zur Bestimmung des Oberflächenintegrals geben wir jetzt dem Raumelement die Gestalt eines Würfels mit den Kantenlängen Dx , Dy und Dz . Diejenigen Würfelflächen, welche senkrecht auf der Y- und der Z-Achse stehen, liefern keinen Beitrag zum Oberflächenintegral, weil nach

Voraussetzung die Temperatur von y und z unabhängig ist. Es verbleiben also nur die beiden Würfelflächen $Dy \cdot Dz$. Bezeichnen wir mit

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x_0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x_0 + Dx}$$

den Temperaturanstieg an den Stellen x_0 und $x_0 + Dx$, in Richtung der wachsenden x gemessen, so nimmt das Integral die einfache Gestalt an

$$- \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x_0} \cdot Dy \cdot Dz + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x_0 + Dx} \cdot Dy \cdot Dz.$$

Das Minuszeichen tritt deshalb auf, weil der Temperaturanstieg immer in Richtung der äußeren Normalen zu zählen ist, für die Stelle x_0 also in Richtung abnehmender x .

Fassen wir den Differentialquotienten nach x als eine neue Funktion $\varphi(x)$ von x auf, so können wir den letztgeschriebenen Ausdruck auf die Form

$$\{\varphi(x_0 + Dx) - \varphi(x_0)\} \cdot Dy \cdot Dz$$

bringen und darin $\varphi(\mathbf{x}_0 + D\mathbf{x})$ nach einer Taylorsche Reihe entwickeln:

$$\varphi(\mathbf{x}_0 + D\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) + \frac{D\mathbf{x}}{1!} \varphi'(\mathbf{x}) + \frac{D\mathbf{x}^2}{2!} \varphi''(\mathbf{x}).$$

Da $D\mathbf{x}$ ein sehr kleiner Wert ist, können in dieser Reihe die Glieder von höherer als erster Potenz vernachlässigt werden. Daraus wird

$$\varphi(\mathbf{x}_0 + D\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) = \varphi'(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{x} = \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot D\mathbf{x}$$

und für das Oberflächenintegral ergibt sich

$$\oint \text{grad}_n \theta \cdot d\mathbf{f} = \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot D\mathbf{x} \cdot D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{z} = \Delta^2 \theta \cdot dV.$$

In diesem Falle ist also der 2. Differentialparameter mit dem 2. Differentialquotienten identisch.

Ist im allgemeineren Falle die Temperatur nach allen drei Richtungen veränderlich, so führt eine Wiederholung des Gedankenganges für die y- und die z-Richtung zur Gleichung

$$\oint \text{grad}_n \theta \cdot d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \cdot D\mathbf{x} \cdot D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{z} = \Delta^2 \theta \cdot dV.$$

f) Die allgemeine Aufgabe der analytischen Theorie der Wärme. Die allgemeine Aufgabe läßt sich in nachstehende Fassung bringen: „Es soll in einem homogenen und isotropen Körper die Temperaturverteilung für einen gegebenen Augenblick τ bestimmt werden, wenn bekannt ist:

1. Die Temperaturverteilung zu einem anderen, früheren oder späteren Augenblick (z. B. zur Zeit $\tau = 0$, also die Anfangstemperaturverteilung).
2. Die Einwirkung der Umgebung des Körpers auf seine Oberfläche. (Es kann z. B. angenommen sein, daß durch irgendwelche Maßnahmen von außen der Oberfläche des Körpers eine bestimmte Tempverteilung aufgezwungen wird und zwar kann diese sowohl zeitlich konstant als zeitlich veränderlich sein.)“

Die Bedingungen unter 1. und 2. heißen die Grenzbedingungen und es heißt 1. die zeitliche und 2. die räumliche Grenzbedingung.

2. Die Ableitung der Differentialgleichung.

a) Der Grundgedanke. Um die Darstellung möglichst einfach zu gestalten, setzen wir einige Vereinfachungen, zu denen wir doch später aus mathematischen Gründen gezwungen würden, schon jetzt fest. Erstens soll das Feld von einem einzigen, homogenen Körper erfüllt sein, zweitens soll dieser Körper als isotrop angenommen werden. Drittens sollen die W.L.F., das spezifische Gewicht und die spezifische Wärme — das sind diejenigen Stoffwerte, die in der Differentialgleichung als Koeffizienten auftreten werden — als unabhängig vom Druck und von der Temperatur angenommen werden. Viertens sollen keine

Aggregatzustandsänderungen im Felde auftreten. Über teilweise Aufhebung dieser Annahmen siehe später S. 103 Abschnitt G.

Der Grundgedanke bei Ableitung der Differentialgleichung ist, daß die Wärmemenge, die im Inneren eines abgeschlossenen Raumes dV aus anderen Energiearten entsteht, zum Teil im Inneren des Raumes selbst bleibt und zu einer Vermehrung des Wärmeinhaltes der eingeschlossenen Massen führt und zum anderen Teil durch die Oberfläche des Raumes nach außen tritt. Die im Raumelement dV erzeugte Wärme möge mit q_1 , die verbleibende Wärme mit q_2 und die austretende Wärme mit q_3 bezeichnet werden. Dann gilt die Gleichung

$$q_1 = q_2 + q_3.$$

b) Die Berechnung der einzelnen Wärmemengen. Die entstehende Wärmemenge. Hierbei ist für die Rechnung ganz gleichgültig, aus welchen anderen Energiearten die Wärme entsteht; man trägt dem einfach dadurch Rechnung, daß man innerhalb des Feldes das Vorhandensein von Wärmequellen annimmt. Die Ergiebigkeit dieser Quellen ist durch die Aussage gegeben, sie sollen innerhalb der Raumeinheit und innerhalb der Zeiteinheit die Wärmemenge W hervorbringen. Damit ergibt sich für die Wärmemenge die innerhalb des Raumes dV und in der Zeit $d\tau$ erzeugt wird, der Ausdruck

$$q_1 = W \cdot dV \cdot d\tau;$$

Diese Wärmequellen können im Feld sowohl stetig als unstetig verteilt sein; durch geeignete Definitionen lassen sich auch flächen-, linien- und punktförmige Wärmequellen einführen und endlich kann ihre Ergiebigkeit sowohl zeitlich konstant als zeitlich veränderlich sein. In jedem Falle muß aber das ganze System von Wärmequellen in seinem räumlichen und zeitlichen Verlauf gegeben sein.

Die aufgespeicherte Wärmemenge. Im Aufpunkt möge während der Zeiteinheit die Temperatursteigerung $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ zu beobachten sein. Bezeichnet γ die Dichte des Körpers und c die spezifische Wärme der Gewichtseinheit, so ist die Wärmemenge, die in der Zeit $d\tau$, im Raum dV gebunden wird, gleich

$$q_2 = c \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot dV \cdot d\tau;$$

Die austretende Wärmemenge. Sie berechnet sich mit Hilfe von Gleichung (2d) aus der Beschaffenheit des Temperaturfeldes. Wenn df ein Element der Oberfläche des Raumes dV ist, und wenn wieder wie oben die Flächennormale nach außen positiv gerechnet wird, dann ergibt sich für die Wärme, die den Raum dV in der Zeiteinheit verläßt, der Wert

$$- \lambda \int_{\odot} \text{grad}_n \theta \cdot df$$

und dies ist nach Gleichung (3) gleich $-\lambda \cdot \Delta^2 \theta \cdot dV$. Für den Zeitraum $d\tau$ wird daraus

$$q_3 = - \lambda \cdot \Delta^2 \theta \cdot dV \cdot d\tau.$$

c) Die Differentialgleichung. Die Bedingungsgleichung $q_1 = q_2 + q_3$ nimmt jetzt die Form an

$$W \cdot dV \cdot d\tau = c \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \cdot dV \cdot d\tau - \lambda \cdot \Delta^2 \Theta \cdot dV \cdot d\tau$$

oder

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \Delta^2 \Theta + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot W \dots \dots \dots (4a)$$

Diese Gleichung ist die zweite Grundgleichung der Wärmeleitung. Sie ist eine partielle Differentialgleichung mit der Zeit und den drei Koordinaten des Raumes als unabhängigen und der Temperatur als abhängigen Veränderlichen. Sie ist vom ersten Grad (linear), weil in ihr die abhängige Veränderliche Θ nur in der ersten Potenz auftritt; dagegen ist sie von der zweiten Ordnung, weil sie in $\Delta^2 \Theta$ die zweiten Ableitungen des Θ nach den Raumkoordinaten enthält. λ , γ und c sind der Voraussetzung gemäß konstante Koeffizienten, und W eine gegebene Funktion des Ortes und der Zeit.

Bei Einführung eines Koordinatensystems nimmt die Gleichung die nachstehenden Formen an: (vgl. Vektorformeln IX im Anhang) in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot f(x, y, z, \tau) \dots (4b)$$

in Zylinder-Koordinaten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot f(r, \varphi, z, \tau) \dots (4c)$$

in Kugel-Koordinaten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \psi^2} + \frac{\cos \psi}{r^2 \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot f(r, \varphi, \psi, \tau) \dots \dots \dots (4d)$$

wobei bei den Kugelkoordinaten φ die geographische Länge und ψ den Polabstand, also 90° minus geographische Breite bedeuten.

3. Die Grenzbedingungen.

Jene gesuchte Funktion, die das Temperaturfeld in seinem räumlichen und zeitlichen Verlauf wiedergeben soll, muß in erster Linie der Differentialgleichung genügen, um überhaupt mit dem Energieprinzip verträglich zu sein. Daß dies aber noch nicht hinreicht, um die Funktion eindeutig zu bestimmen, ergibt sich aus der Bedeutung der Differentialgleichung. Diese sagt aus, wie die zeitliche Temperaturänderung an einer Stelle des Feldes abhängt von der Beschaffenheit des Feldes in unmittelbarer Nähe dieser Stelle und von der Ergiebigkeit der dort befindlichen Wärmequellen. Sie gibt also nur den Zusammenhang zwischen den räumlichen und den zeitlichen Änderungen der Temperatur. Um die Temperaturverteilung selbst finden zu können, muß

also erstens für jede Stelle des Feldes der Ausgangspunkt bekannt sein, von dem aus die positiven und negativen zeitlichen Änderungen zu zählen sind, und zweitens muß für diejenigen Raumelemente, die an der Oberfläche des Feldes liegen, d. h. für diejenigen Stellen, an welchen die Beschaffenheit des Feldes unmittelbar von außen beeinflußt wird, die Art dieser Beeinflussung bekannt sein.

Der Mathematiker sieht in der gesuchten Gleichung

$$\theta = F(\xi, \eta, \zeta, \tau),$$

worin wir uns unter ξ, η, ζ ein beliebiges Koordinatensystem vorstellen müssen, eine Angabe über den Verlauf der Zustandsgröße θ innerhalb eines vierdimensionalen Gebietes und er verlangt zur eindeutigen Lösbarkeit der Aufgabe, das Vorhandensein verschiedener Bedingungen an der Berandung dieses Raumzeitgebietes. In Anlehnung an dieses Bild nennt man in der mathematischen Physik die Bedingungen, die außer der Differentialgleichung noch erfüllt sein müssen, die Randbedingungen und nennt die Aufgaben selbst Randwertaufgaben.

a) Die zeitlichen Grenzbedingungen bestehen in der Angabe einer skalaren Ortsfunktion $\theta = F(\xi, \eta, \zeta) = F(r)$, die die Temperaturverteilung zu einer gegebenen Zeit darstellt. Diese Temperaturverteilung kann ganz willkürlich sowohl stetig als unstetig angenommen werden. In den meisten Fällen besteht dann die Aufgabe darin, das Temperaturfeld in seinem späteren Verlauf zu berechnen. Die Aufgabe ist im Prinzip immer lösbar, wenn auch der gegenwärtige Stand der Mathematik nicht immer ausreicht um die Lösung auch wirklich zu finden.

Es ist aber auch die Frage berechtigt, aus welchen früheren Temperaturverteilungen eine gegebene Temperaturverteilung entstanden sein kann. Verfolgt man ein gegebenes Temperaturfeld in seinem zeitlichen Verlaufe nach rückwärts, so wird man immer zu einer unstetigen Temperaturverteilung gelangen und von da ab wird ein weiteres Verfolgen des Temperaturverlaufes sinnwidrig. Die Frage nach dem früheren Zustand eines Feldes wird in diesem Buche nicht besprochen werden, da sie im allgemeinen nur funktionentheoretisches Interesse bietet. Weitere Angaben finden sich in:

Enzykl. d. math. Wiss. II. A. 7c. S. 564/565.

„ „ „ „ V. 4. S. 177/178.

b) Die räumlichen Grenzbedingungen. Die mathematische Physik kennt in der Lehre von den Randwertaufgaben drei Arten von Randwertvorschriften, die alle drei auch in der Lehre von der Wärmeleitung ihre Bedeutung besitzen.

Die erste Art der Randbedingung besteht in der Angabe der Temperaturverteilung auf der Oberfläche des Temperaturfeldes als Funktion des Ortes und der Zeit und zwar muß sich die Angabe über alle Punkte der Oberfläche erstrecken. Die Funktion selbst ist durchaus willkürlich und kann sowohl in bezug auf den Ort als auf die Zeit stetig oder unstetig sein. Wir werden aber in diesem Buch nur Fälle betrachten, in denen die Oberflächentemperatur entweder konstant oder doch nur periodisch veränderlich ist.

Die zweite Art der Randbedingung besteht in der Angabe des

Wärmeflusses durch jedes Stück der Oberfläche und zwar wieder als Funktion des Ortes und der Zeit. Auch diese Angabe ist für die ganze Oberfläche notwendig, die Funktion selbst durchaus willkürlich.

Die dritte Art der Randbedingung endlich besteht in der Angabe der Umgebungstemperatur ϑ und in der Angabe eines Gesetzes für den Wärmeaustausch zwischen der Oberfläche des Körpers und seiner Umgebung. Dieser Wärmeaustausch oder Wärmeübergang wird im II. Hauptteil noch eingehend besprochen werden und es wird sich dabei zeigen, daß dieser Wärmeübergang äußerst verwickelten Gesetzen unterworfen ist. Aus mathematischen Gründen ist man aber gezwungen ein sehr einfaches Gesetz zugrunde zu legen. Als solches wird in der mathematischen Physik das Newtonsche Abkühlungsgesetz gewählt. Dies besteht in der Annahme, daß die Wärmemenge q , die ein Oberflächenelement dF von der Temperatur Θ_0 in der Zeit $d\tau$ an die Umgebung von der Temperatur ϑ abgibt, dem Temperaturunterschied $(\Theta_0 - \vartheta)$, der Größe von dF und von $d\tau$ direkt proportional ist, also durch die Gleichung

$$q = a \cdot (\Theta_0 - \vartheta) \cdot dF \cdot d\tau$$

gegeben ist. Der Proportionalitätsfaktor a heißt die Wärmeübergangszahl (= W.Ü.Z.) und ist ein reiner Erfahrungswert. (In der physikalischen Literatur findet man dafür auch die irreführende Bezeichnung „äußere Wärmeleitfähigkeit“). Setzt man in die letzte Gleichung die Dimension von q , Θ_0 , ϑ , dF und $d\tau$ ein, so erhält man

$$\text{Dimension } [a] = \frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Std.} \cdot \text{Grad}};$$

Diese Wärmemenge q , die das Oberflächenelement dF abgibt, muß ihm aus dem Inneren des Körpers durch Leitung zuströmen. Sie muß also aus der Normalkomponente des Temperaturgradienten — gemessen in unmittelbarer Nähe der Oberfläche = $(\text{grad}_n \Theta)_0$ — berechnet werden können. Gleichung (2) liefert dafür

$$q = -\lambda \cdot (\text{grad}_n \Theta)_0 \cdot dF \cdot d\tau.$$

Aus diesen beiden Werten für q ergibt sich

$$(\text{grad}_n \Theta)_0 = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (\Theta_0 - \vartheta) \dots \dots \dots (5)$$

Diese Gleichung stellt die dritte Art der Randbedingung dar. Sie kennzeichnet ein Problem dann eindeutig, wenn für alle Oberflächenteile ϑ und α als Funktionen des Ortes und der Zeit gegeben sind. Diese Funktionen sind vollständig willkürlich.

Eine zeichnerische Darstellung veranschaulicht am besten das Wesen dieser drei Arten von Oberflächenbedingungen. In den drei Teilen der nachstehenden Fig. 3 stellt jeweils dF ein Element der Körperoberfläche und n die nach außen positiv gezählte Normale dar; als Ordinaten sind die Temperaturen aufgetragen.

Bei der ersten Randwertangabe ist der Wert der Oberflächentemperatur Θ_0 gegeben, dagegen gehört die Neigung der Temperaturkurve an der Oberfläche und damit die austretende Wärmemenge zu den

gesuchten Größen. Bei der zweiten Randwertangabe ist es gerade umgekehrt. Bei der dritten Randwertangabe ist auf der äußeren Normalen ein Punkt gegeben, durch den alle Tangenten gehen müssen, die man

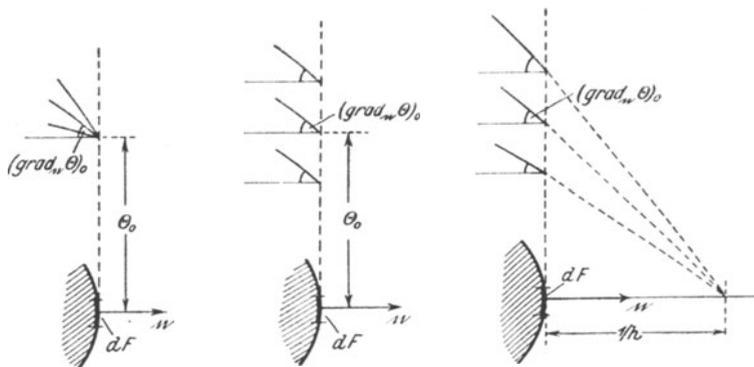


Fig. 3. Die drei Arten der Oberflächenbedingungen.

in der Oberfläche an die Temperaturkurven legen kann. Dieser Punkt liegt um die Strecke $\lambda : \alpha$ von der Oberfläche entfernt. Gesucht ist hier sowohl die Oberflächentemperatur als auch die austretende Wärmemenge.

Für das Verhältnis $\alpha : \lambda$ wollen wir den Buchstaben h und die Benennung „relative Wärmeübergangszahl“ einführen.

B. Über die Lösung von Randwertaufgaben.

Während der Abschnitt A der Aufstellung der Grundbegriffe und einer Besprechung des Wesens der Randwertaufgabe gewidmet war, sollen in diesem Abschnitt die analytischen Methoden die aus dem mathematischen Ansatz heraus zur Lösung dieser Aufgaben führen, erörtert werden.

Diese analytischen Methoden haben ihren ersten Ausgang von den Aufgaben der analytischen Theorie der Wärmeleitung durch Fourier genommen, sind dann auf andere Gebiete der mathematischen Physik übertragen worden und in der reinen Mathematik, losgelöst von jeder physikalischen Deutung weiter ausgebaut worden.

Wenn im folgenden diese Methoden wieder ganz vom Standpunkt der Theorie der Wärmeleitung aus abgeleitet werden, so geschieht dies nicht in Würdigung der historischen Verhältnisse, sondern im Interesse einer leichtfaßlichen Darstellung. Die einzelnen Rechenoperationen sollen hierbei nicht so sehr durch mathematisch streng richtige Erwägungen bewiesen, als vielmehr durch physikalische Deutung erklärt werden.

Die erste Einführung soll durch die Berechnung einer möglichst charakteristischen Aufgabe gegeben werden. Wenn dann Zweck und Wesen der einzelnen analytischen Methoden durch dieses Beispiel etwas

gekennzeichnet sind, sollen dieselben Methoden durch eine nochmalige, allgemeiner gehaltene Besprechung in ihrer umfassenden Bedeutung gezeigt werden.

1. Die einführende Aufgabe.

a) **Der Wortlaut.** Eine unendlich ausgedehnte planparallele Platte von der Dicke $2X$, die aus einem Stoff mit den Werten λ , γ und c besteht, besitzt zur Zeit $\tau = 0$ eine solche Temperaturverteilung, daß die Temperatur nur vom Abstand von den beiden Oberflächen abhängt, daß also die Flächen konstanter Temperatur durch Ebenen parallel zu den Oberflächen gebildet werden. Die Oberflächen selbst stehen einer Temperatur ϑ gegenüber und die relative Wärmeübergangszahl besitze beiderseits

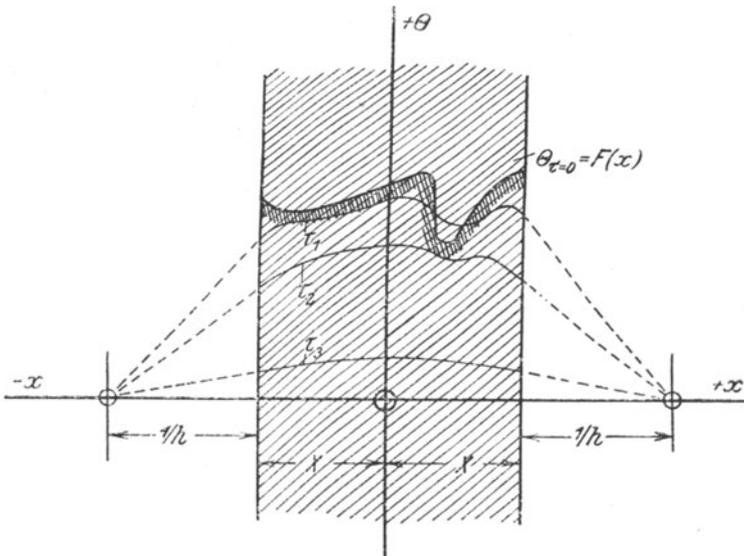


Fig. 4. Abkühlung einer Platte.

denselben Wert h . Wärmequellen sind keine vorhanden. — Es ist zu berechnen, wie sich diese Anfangstemperaturverteilung im Laufe der Zeit unter dem Einflusse der Wärmeleitung und der Wärmeabgabe durch die Oberflächen ändert.

b) **Der mathematische Ansatz.** Der erste Schritt zur Lösung ist die Wahl eines Koordinatensystems. Wir legen ein rechtwinkeliges Achsenkreuz so fest, daß die Y -, Z -Ebene in der Mitte zwischen den beiden Oberflächen liegt. Die X -Achse durchdringt dann die Platte an beliebiger Stelle senkrecht. Die Anfangsbedingung heißt jetzt in mathematischer Ausdrucksweise

$$\theta_{\tau=0} = F(x)$$

worin $F(x)$ eine im Bereich $-X < x < +X$ willkürlich gegebene, stetige oder unstetige Funktion von x ist.

Da die Platte in der Y- und Z-Richtung unendlich ausgedehnt ist, da also eine Berandung, die irgendeinen Einfluß ausüben könnte, nicht vorhanden ist, so muß auch für spätere Zeiten die Temperaturverteilung von y und z unabhängig bleiben. Aus diesem Grunde und weil keine Wärmequellen vorhanden sind, vereinfacht sich die Grundgleichung (4b) auf die Form

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Hierbei ist für den Quotienten $\lambda : (c \cdot \gamma)$ der Buchstabe a eingeführt. a heißt die Temperaturleitfähigkeit (= T.L.F.) und ist ebenso wie λ , c und γ ein reiner Stoffwert. Durch Einsetzen der Dimensionen ergibt sich

$$\text{Dimension [a]} = \frac{\text{m}^2}{\text{Std.}}$$

In der Literatur findet man häufig statt a die Schreibweise a^2 . Da hierdurch die Ausdrücke und Formeln nicht einfacher, sondern eher umständlicher werden, habe ich mich diesem Brauche nicht angeschlossen. Hierauf ist beim Vergleich mit anderen Schriften zu achten.

Die räumliche Grenzbedingung setzt sich für diese Aufgabe aus zwei Teilen zusammen.

Für $x = +X$ ist $\text{grad}_n \theta$ im Sinne der äußeren Normalen, also im Sinne der positiven X-Achse zu rechnen. Auch für $x = -X$ ist $\text{grad}_n \theta$ im Sinne der äußeren Normalen zu rechnen; dies gibt aber hier die Richtung der negativen X-Achse.

Damit ergeben sich aus Gleichung (5) wenn $\vartheta = 0$ gesetzt, die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\text{für } x = +X: \quad + \frac{\partial \theta}{\partial x} = -h \cdot \theta;$$

$$\text{für } x = -X: \quad - \frac{\partial \theta}{\partial x} = -h \cdot \theta.$$

Die Frage nach dem weiteren Verlauf des Temperaturfeldes heißt mathematisch ausgedrückt, es soll θ bestimmt werden als Funktion der Veränderlichen x und τ und der Parameter a, h und X.

Die nachstehenden 5 Gleichungen heißen der mathematische Ansatz des Problems

Gegeben:

$$\text{Differentialgleichung} \quad \dots \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \dots \quad \text{(a)}$$

$$\text{Zeitliche Grenzbedingung} \quad \theta_{\tau=0} = F(x) \quad \dots \quad \text{(b)}$$

$$\text{Räumliche Grenzbedingung} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=+X} = -h \cdot \theta_{x=+X} \quad \dots \quad \text{(c)}$$

$$\text{Räumliche Grenzbedingung} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=-X} = +h \cdot \theta_{x=-X} \quad \dots \quad \text{(d)}$$

Gesucht:

$$\text{Die Temperaturfunktion: } \theta = \Phi(x, \tau, a, h, X) \quad \dots \quad \text{(e)}$$

c) **Das Aufsuchen partikulärer Integrale.** Um die Temperaturfunktion zu finden, beginnen wir mit dem Aufsuchen von Funktionen, die vorerst nur die eine Bedingung zu erfüllen haben, daß sie der Differentialgleichung genügen.

In erster Linie versuchen wir es mit einer Funktion, die aus einem Produkt von zwei Teilfunktionen besteht, von denen die eine nur von τ , die andere nur von x abhängt, also mit einer Funktion, die sich schreiben läßt

$$\Phi(\tau, x) = \varphi(\tau) \cdot \psi(x) \dots \dots \dots (f)$$

Damit sind vorläufig eine große Anzahl von Funktionen von der Betrachtung ausgeschlossen; wenn aber dieser erste Ansatz zur Lösung führt, so brauchen wir uns über diese Einschränkung keine Bedenken zu machen, denn die 4 Gleichungen (a) bis (d) legen das Problem eindeutig fest; es kann also außer der gefundenen Lösung keine zweite Lösung mehr geben. Wenn allerdings dieser erste Ansatz nicht zum Ziele führen sollte, dann müßten wir auch die anderen Funktionen berücksichtigen.

Bezeichnet in üblicher Weise $\varphi'(\tau)$ und $\psi''(x)$ die erste bzw. zweite Ableitung, so gibt der obige Ansatz (f) der Differentialgleichung (a) die Form

$$\varphi'(\tau) \cdot \psi(x) = a \cdot \varphi(\tau) \cdot \psi''(x).$$

Wenn es gelingt Funktionen zu finden, welche so beschaffen sind, daß

$$\varphi'(\tau) = p \cdot \varphi(\tau) \quad \text{und} \quad \psi''(x) = q^2 \cdot \psi(x)$$

worin p und q willkürliche, konstante Größen sind, so ergibt sich für solche Funktionen aus der Differentialgleichung eine Bedingungs-gleichung für p und q , welche lautet

$$p = a \cdot q^2$$

Solche Funktionen gibt es in der Tat. Aus den Grundformeln der Differentialrechnung folgt, daß

$e^{p\tau}$ bei einmaliger Differentiat. übergeht in $p \cdot e^{p\tau}$
 $\sin(q_1x)$ bei zweimaliger Differentiat. übergeht in $(-q_1^2) \cdot \sin(q_1x)$
 $\cos(q_2x)$ bei zweimaliger Differentiat. übergeht in $(-q_2^2) \cdot \cos(q_2x)$.
 Zur Vermeidung der Indizes sei künftig m statt q_1 und n statt q_2 geschrieben.

Auf Grund dieser Darlegungen setzen wir als ersten Versuch

$$\Theta = e^{p\tau} \cdot \sin(mx)$$

und erhalten dann zwischen p und m die Beziehung

$$p = -m^2 \cdot a.$$

Wir können also nur eine der beiden Größen p oder m willkürlich wählen, die andere ist dann durch die letzte Gleichung festgelegt. Wir lassen m willkürlich und erhalten: $p = -m^2 \cdot a$.

Damit wird die Gleichung

$$\Theta = e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(mx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung und sie bleibt dies auch dann noch, wenn wir die rechte Seite mit einer willkürlichen Zahl C multiplizieren. Denn wenn wir die Funktion einmal nach τ und zweimal

nach x differenzieren, so bleibt der Faktor C ungeändert, er fällt also beim Einsetzen in die Differentialgleichung beiderseits fort.

$$\theta = C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(mx) \dots \dots \dots (g)$$

heißt ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (a).

Ganz in derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch die Gleichung

$$\theta = e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(nx)$$

die Differentialgleichung befriedigt, und daß

$$\theta = D \cdot e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(nx) \dots \dots \dots (h)$$

ebenfalls ein partikuläres Integral ist, wenn D eine beliebige Zahl ist.

In diesen beiden Lösungen (g) und (h) sind das Wertesystem „ m, n “ und das Wertesystem „ C, D “ durchaus willkürlich, d. h. die einzelnen Werte können die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen. Diese Willkür besteht aber nur solange, als man die Gleichungen (g) und (h) lediglich als Lösungen der Differentialgleichung betrachtet. Sie wird erstmalig beschränkt durch die Oberflächenbedingungen.

d) Das Anpassen der partikulären Lösungen an die räumlichen Grenzbedingungen. Aus dem Integral: $\theta = C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(mx)$ folgt durch

Differenzieren: $\frac{\partial \theta}{\partial x} = C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot (+m) \cos(mx)$. Mit diesen beiden

Werten erhalten die Randbedingungen (c) und (d) die Gestalten:

$$\text{für } x = +X: C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot (+m) \cdot \cos(mX) = -h \cdot C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(mX)$$

$$\text{oder } (+m) \cdot \cos(mX) = (-h) \cdot \sin(mX),$$

$$\text{für } x = -X: C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot (+m) \cdot \cos(-mX)$$

$$= +h \cdot C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(-mX)$$

$$\text{oder } (-m) \cdot \cos(mX) = +h \cdot \sin(mX) \dots \dots \dots (i_1)$$

Dies zeigt vor allem, daß die Werte C durch die räumliche Grenzbedingung immer noch willkürlich gelassen werden, denn sie haben sich aus der Gleichung herausgehoben. Sodann ergibt die Rechnung, daß die beiden Oberflächen der Platte dieselbe Bedingungsgleichung für m liefern. Wir multiplizieren sie beiderseits mit X und fassen mX als die Unbekannte auf:

$$(mX) \cdot \cos(mX) = - (hX) \cdot \sin(mX)$$

$$\text{oder } \operatorname{tg}(mX) = - \frac{mX}{hX} \dots \dots \dots (i_2)$$

Die Lösung dieser transzendenten Gleichung finden wir am besten auf graphischem Wege, indem wir die beiden Kurven

$$u_1 = \operatorname{tg}(mX) \text{ und } u_2 = - \frac{mX}{hX}$$

zeichnen. Da $u_1 = u_2$ sein muß, so bezeichnet jeder Schnittpunkt beider Linien eine Wurzel der Gleichung (i₂).

Fig. 5 stellt die beiden Funktionen dar. u_1 besteht aus den unendlich vielen Zweigen der Tangenskurve, u_2 ist eine Gerade, die durch den Ursprung geht und unter einem negativen Winkel gegen die X -Achse geneigt ist. Aus der Tatsache, daß die Gerade die Tangenskurve in un-

endlich vielen Punkten schneidet, erkennt man, daß die Gleichung für (mX) unendlich viele Wurzeln ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$) hat, Sie sind paarweise

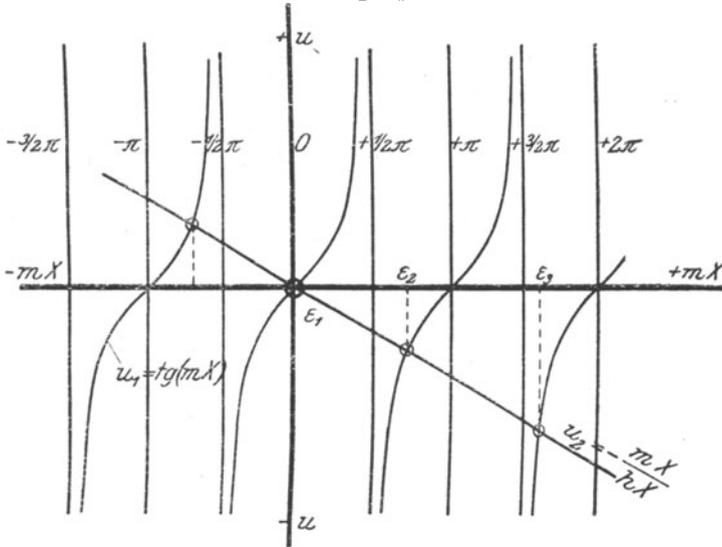


Fig. 5. Zeichnerische Lösung der Gleichung: $\text{tg}(m \cdot X) = -\frac{mX}{hX}$.

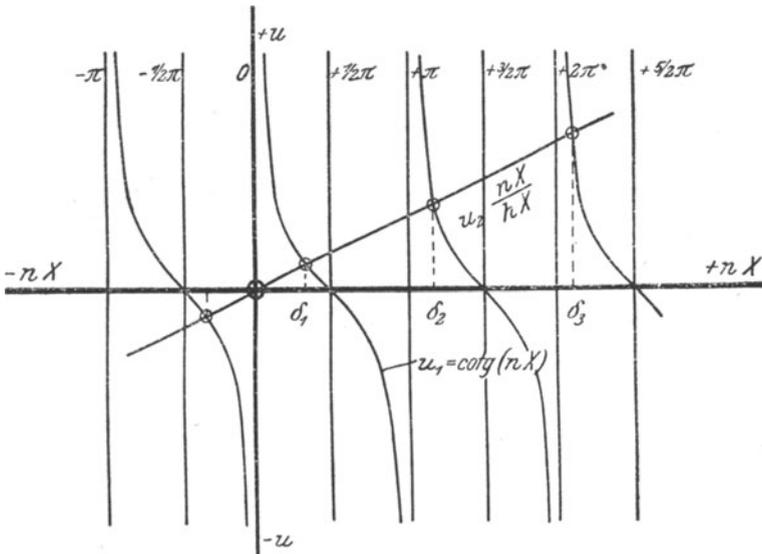


Fig. 6. Zeichnerische Lösung der Gleichung $\text{cotg}(nX) = +\frac{nX}{hX}$.

ihrem absoluten Werte nach gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet; für uns kommen nur die positiven Werte in Betracht.

Die Wurzeln liegen in den Intervallen

$$\frac{\pi}{2} \text{ bis } \pi; \quad \frac{3}{2}\pi \text{ bis } 2\pi; \quad \frac{5}{2}\pi \text{ bis } 3\pi; \text{ usw.},$$

während in den dazwischenliegenden Intervallen keine Wurzeln liegen. Die Lage innerhalb dieser Intervalle hängt von der Größe (hX) ab; nur der Wert $\epsilon = 0$ ist fest.

Die Zahlentafel Nr. 1 gibt die ersten 6 Wurzeln ϵ_n für die Werte $hX = 0$ bis $hX = \infty$ wieder; die Werte $m_1, m_2, \text{ usw.}$ sind daraus durch Division mit X zu finden.

Zahlentafel Nr. 1.

Wurzeln der Gleichung: $\text{tge} = -\frac{\epsilon}{h \cdot X}$.

h X	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
∞	0	3,14 = π	6,28 = 2π	9,42 = 3π	12,57 = 3π	15,71 = 4π
1000	0	3,14	6,27	9,41	12,56	15,69
100	0	3,11	6,22	9,33	12,45	15,56
50	0	3,08	6,16	9,24	12,33	15,41
20	0	2,99	5,99	9,00	12,04	15,07
10	0	2,86	5,76	8,70	11,71	14,74
4,0	0	2,57	5,35	8,30	11,34	14,41
1,0	0	2,03	4,91	7,98	11,09	14,21
0,5	0	1,84	4,80	7,91	11,05	14,18
0,1	0	1,63	4,73	7,86	11,01	14,15
0,01	0	1,58	4,71	7,85	11,00	14,15
0	0	1,57 $\pi/2$	4,71 $3/2\pi$	7,85 $5/2\pi$	11,00 $7/2\pi$	14,15 $9/2\pi$

In derselben Weise ist das zweite Integral

$$\theta = D \cdot e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(n x)$$

zu untersuchen. Seine erste Ableitung lautet:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = D \cdot e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot (-n) \cdot \sin(n x).$$

Auch für dieses Integral zeigt die Rechnung, daß erstens die D = Werte aus der Rechnung herausfallen und zweitens, daß die beiden Oberflächen wieder nur eine Bedingungsgleichung für „nX“ liefern. Sie heißt:

$$(n X) \cdot \sin(n X) = + (h X) \cdot \cos(n X)$$

oder
$$\text{cotg}(n X) = + \frac{(n X)}{(h X)} \dots \dots \dots (k)$$

Fig. 6 zeigt die beiden Kurven.

$$v_1 = \text{cotg}(n X) \text{ und } v_2 = + \frac{(n X)}{(h X)}$$

Auch diese transzendente Gleichung besitzt unendlich viele, getrennt liegende Wurzeln ($\delta_1, \delta_2 \dots, \delta_n \dots$) und zwar liegen sie gerade in jenen Intervallen, die von den $\varepsilon =$ Werten freigelassen wurden. Tabelle Nr. 2 enthält die δ -Wurzeln.

Zahlentafel Nr. 2.

Wurzeln der Gleichung: $\cotg \delta = \frac{\delta}{h \cdot X}$.

hX	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
∞	1,57 $= \frac{1}{2}\pi$	4,71 $= \frac{3}{2}\pi$	7,85 $= \frac{5}{2}\pi$	11,00 $= \frac{7}{2}\pi$	14,15 $= \frac{9}{2}\pi$
1000	1,57	4,71	7,84	10,98	14,13
100	1,56	4,66	7,77	10,88	14,00
50	1,54	4,62	7,70	10,78	13,87
20	1,50	4,49	7,49	10,51	13,55
10	1,43	4,30	7,22	10,20	13,22
4,0	1,26	3,93	6,81	9,78	12,87
1,0	0,86	3,42	6,43	9,52	12,65
0,5	0,65	3,29	6,36	9,47	12,61
0,1	0,31	3,17	6,30	9,43	12,57
0,01	0,10	3,14	6,28	9,42	12,57
0	0,00 $= 0$	3,14 $= \pi$	6,28 $= 2\pi$	9,42 $= 3\pi$	12,57 $= 4\pi$

Die Willkür, die in den partikulären Integralen enthalten war, ist jetzt dadurch beschränkt, daß die m-Werte und die n-Werte die Zahlenreihe nicht mehr stetig durchlaufen dürfen, sondern nur mehr bestimmte, getrennt liegende Werte

$$m_i = \frac{\varepsilon_i}{X} \text{ und } n_i = \frac{\delta_i}{X}$$

annehmen können. Die C- und D-Werte sind dagegen noch ganz willkürlich. Die folgenden Gleichungen stellen unendlich viele, verschiedene Temperaturverteilungen vor, die alle mit der Differentialgleichung verträglich sind und zugleich die räumlichen Grenzbedingungen erfüllen.

$$\begin{array}{l|l}
 \vartheta = C_1 \cdot e^{-m_1^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(m_1 \cdot x) & \vartheta = D_1 \cdot e^{-n_1^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(n_1 \cdot x) \\
 \vartheta = C_2 \cdot e^{-m_2^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(m_2 \cdot x) & \vartheta = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \vartheta = C_1 \cdot e^{-m_1^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(m_1 \cdot x) & \vartheta = D_1 \cdot e^{-n_1^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(n_1 \cdot x) \\
 \text{usw.} & \text{usw.}
 \end{array} \quad (1)$$

Die jetzt noch vorhandene Unbestimmtheit, die in der Willkür der C- und D-Werte liegt, wird durch die Anfangsbedingung beseitigt.

e) **Das Anpassen der Lösungen an die zeitliche Grenzbedingung.** Setzt man in den Gleichungen (l) für τ den Wert Null ein, so wird die Exponentialfunktion zu „Eins“ und man erhält für die zu den Gleichungen (l) gehörigen Anfangstemperaturverteilungen die Werte:

$$\begin{array}{l|l} \vartheta_{\tau=0} = C_1 \cdot \sin(m_1 x) & \vartheta_{\tau=0} = D_1 \cdot \cos(n_1 x) \\ \vartheta_{\tau=0} = C_2 \cdot \sin(m_2 x) & \vartheta_{\tau=0} = D_2 \cdot \cos(n_2 x) \\ \text{usw.} & \text{usw.} \end{array}$$

Um eine klarere Vorstellung von diesen Temperaturverteilungen zu geben, sollen sie für den Fall $hX = 2$; $X = \pi$; also $h = 2/\pi$ aufgezeichnet werden. Aus den Tabellen sind die Werte zu entnehmen:

$$\begin{array}{l} m_1 = 0,000; \quad m_2 = 0,735; \quad m_3 = 1,618; \quad m_4 = 2,575 \\ n_1 = 0,350; \quad n_2 = 1,160; \quad n_3 = 2,095; \quad n_4 = 3,065 \end{array}$$

In den Figg. 7 und 8 sind diese Anfangstemperaturverteilungen gezeichnet und zwar unter der Annahme, daß die Koeffizienten

$$C_1 = C_2 = \dots C_i = D_1 = \dots D_i = \dots = +1 \text{ sind.}$$

Man sieht ohne weiteres, daß keine dieser Verteilungen mit der durch Fig. 4 vorgegebenen Temperaturverteilung übereinstimmt. Aber es ist vielleicht möglich, durch Übereinanderlagern mehrerer solcher Temperaturverteilungen sich der vorgegebenen Temperaturverteilung in genügender Weise zu nähern und zwar wird man dieses Übereinanderlagern, dieses Summieren in der Weise vornehmen, daß man jene Temperaturverteilungen, welche günstig sind, stärker in Rechnung setzt, also mit einem großen Koeffizienten C oder D versieht, während man die ungünstigen Temperaturverteilungen in ihrem Einfluß schwächt, gegebenen Falles ganz ausschaltet, also C bzw. D sehr klein oder gleich Null wählt. Der Leser möge sich vorläufig denken, daß diese Bestimmung der Koeffizienten C und D auf dem Wege des Probierens erfolge. Ist dies geschehen, so gilt die Gleichung:

$$F(x) = C_1 \cdot \sin(m_1 x) + C_2 \cdot \sin(m_2 x) + \dots + D_1 \cdot \cos(n_1 x) + \dots$$

oder $F(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ C_i \cdot \sin(m_i x) + D_i \cdot \cos(n_i x) \right\} \dots \dots \dots (m)$

Für eine beliebig spätere Zeit gilt dann infolge der Gleichungen (l)

$$\Phi(x, \tau) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ C_i \cdot e^{-m_i^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(m_i x) + D_i \cdot e^{-n_i^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(n_i x) \right\}. \quad (n)$$

Diese Gleichung ist die gesuchte Lösung der Aufgabe.

Es wäre nun eigentlich noch der Beweis zu erbringen, daß, wenn die einzelnen Gleichungen (l) der Differentialgleichung und den räumlichen Grenzbedingungen genügen, daß dann auch ihre Summe noch denselben Bedingungen genügt — also der Nachweis, daß die allgemeine Lösung aus Teillösungen (aus den partikulären Lösungen) zusammengesetzt werden darf. Der Leser kann jedoch diesen Beweis unschwer selbst durchführen, indem er mit Gleichung (n) die einschlägigen Differentiationen vornimmt und diese Werte dann in die Gleichung (a) bzw. (c) und (d) einführt. Die Bedingung dafür, daß die allgemeine Lösung aus Teillösungen aufgebaut werden kann, ist die, daß sowohl

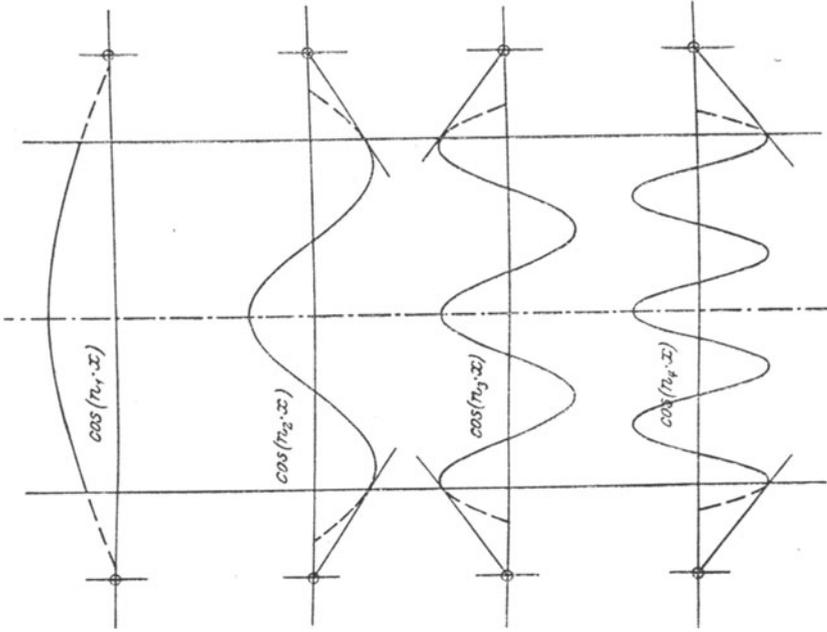


Fig. 8. Die ersten vier ausgezeichneten Lösungen $\cos(n x)$.

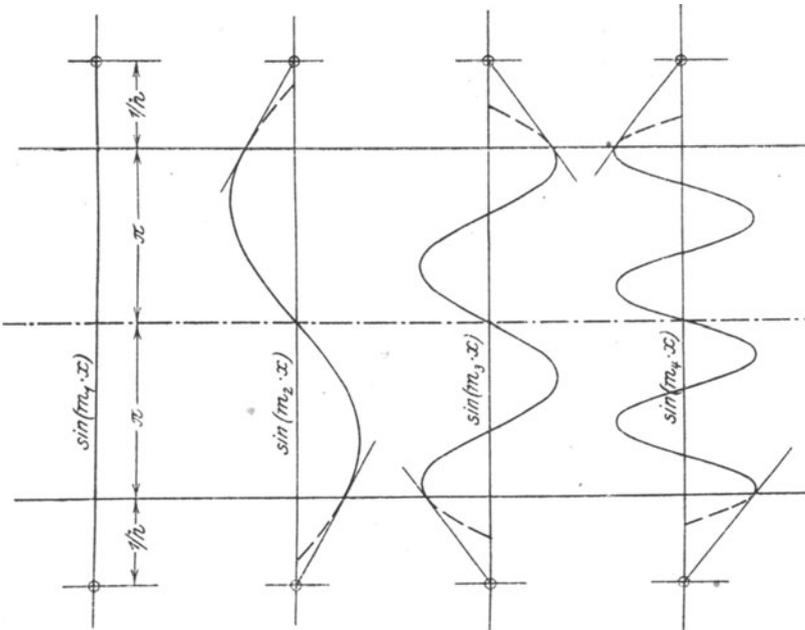


Fig. 7. Die ersten vier ausgezeichneten Lösungen $\sin(m x)$.

die Differentialgleichung als auch die Gleichung der Randbedingung lineare und homogene Gleichungen sind.

f) **Besprechung der Lösung.** Durch die Gleichung (n) ist die Temperatur als Funktion des Ortes und der Zeit eindeutig festgelegt, und zwar erscheint diese Funktion als Summe zweier unendlicher Reihen. Jedes Glied dieser Reihen ist ein Produkt aus einer konstanten Größe, einer Exponentialfunktion und einer trigonometrischen Funktion.

Die sin- und cos-Funktionen schwanken in ihrem Wert zwischen den Grenzen $+1$ und -1 ; die Exponentialfunktion nimmt von 1 gegen 0 zu stetig ab, wenn der Wert des Exponenten abnimmt, sie ist also immer kleiner als 1 , wenn der Exponent kleiner als 0 ist. Vgl. Zahlentafel Nr. 27 im Anhang. Die Zahlenwerte C und D sind so beschaffen, daß schon die Gleichung (m), welche noch keine Exponentialfunktion enthält, konvergent ist, weil ja $\Theta_{\tau=0} = F(x)$ überall endlich ist. Durch das Hinzutreten der Exponentialfunktion wird die Konvergenz der Reihe wesentlich verstärkt, wie die folgende Überlegung erkennen läßt. Die Werte m_i und n_i wachsen, wie Tabelle 1 und 2 zeigen, mit steigendem „i“ annähernd in arithmetischer Progression. Die Exponenten $-m_i^2 \cdot a \cdot \tau$ und $-n_i^2 \cdot a \cdot \tau$ wachsen deshalb, bei festgehaltenem a und τ , in annähernd geometrischer Progression. Damit nähert sich aber die Exponentialfunktion mit wachsender Ordnung „i“ des Gliedes sehr rasch der Null, das heißt das Glied, dessen Faktor sie ist, verschwindet. Es ist deshalb für die Exponentialfunktion in diesem Zusammenhang der Name „Konvergenzfaktor der Reihe“ üblich.

Mit wachsendem Wert τ nimmt die Wirkung des Konvergenzfaktors zu, so daß sich für große Werte τ jede der beiden Reihen auf ihr erstes Glied reduziert.

Wir können nunmehr die Bedeutung der Gleichung (n) wie folgt erklären:

„Jede willkürlich gegebene Anfangstemperaturverteilung kann betrachtet werden als die Übereinanderlagerung mehrerer teils einfacher, teils komplizierter periodischer Temperaturverteilungen. Alle diese Temperaturverteilungen streben dem Ausgleich zu, und zwar klingen die komplizierten Temperaturverteilungen rascher ab, so daß zum Schlusse die einfachen Verteilungen allein das Problem beherrschen.“

Durch die Lösung dieser Aufgabe ist ein Weg gezeigt worden, der bei sehr vielen Aufgaben der Wärmeleitung zum Ziele führt. Aber die Darstellung war ganz auf diese eine Aufgabe zugeschnitten und sie war lückenhaft, indem wichtige mathematische Erörterungen durch Zuhilfenahme plausibler Vorstellungen umgangen wurden.

Soweit es dem Zwecke des Buches entspricht, sollen nun diese Mängel durch eine Darstellung der analytischen Methoden auf allgemeinerer Grundlage ausgeglichen werden, und zwar unter Zugrundelegung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \Theta$$

also bei fehlenden Wärmequellen.

2. Über das Aufsuchen partikulärer Lösungen.

Wenn es auch nicht möglich ist, allgemein gültige Anweisungen für das Aufsuchen von partikulären Lösungen zu geben, so gibt es doch einige Regeln, deren Verwendung in den meisten Fällen zu partikulären Lösungen führt. Sehr oft gibt auch der Verlauf eines physikalischen Vorganges selbst, so wie man ihn aus der Erfahrung kennt, einen Hinweis auf jene Funktionen, die man zuerst in Erwägung ziehen soll.

a) Mathematische Erwägungen. Die allgemeinste Form einer linearen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen θ und den zwei unabhängigen Veränderlichen u und v lautet:

$$l \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + m \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \cdot \partial v} + n \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + o \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u} + p \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v} + q \cdot \theta + r = 0 \quad (6)$$

worin l, m, \dots, r Funktionen nur von u und v , nicht aber von θ sind.

In dem Sonderfall, daß $r = 0$, daß also die Gleichung homogen ist und daß die Koeffizienten $l, m \dots q$ konstante Größen sind, in diesem Falle also führt der Ansatz

$$\theta = C \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} = C \cdot e^{\alpha u + \beta \cdot v} \dots \dots \dots (7)$$

immer auf ein partikuläres Integral.

Um dies zu zeigen, bilden wir die Ableitungen:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial u} = C \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = C \cdot \beta \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \cdot \partial v} = C \cdot \alpha \cdot \beta \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = C \cdot \alpha^2 \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = C \cdot \beta^2 \cdot e^{\alpha \cdot u} \cdot e^{\beta \cdot v} \end{array} \right.$$

Setzen wir diese Ableitungen in die Differentialgleichung (6) ein, so hebt sich $C \cdot e^{\alpha u} \cdot e^{\beta v}$ aus der Gleichung weg und es bleibt

$$l \cdot \alpha^2 + m \cdot \alpha \cdot \beta + n \cdot \beta^2 + o \alpha + p \cdot \beta + q = 0 \dots \dots (8)$$

Diese Gleichung wollen wir die Koeffizienten-Gleichung nennen. Wir sehen jetzt, daß der Ansatz (7) immer dann ein Integral der Differentialgleichung (6) ist, wenn α und β so gewählt sind, daß die Bedingung (8) erfüllt ist. Es darf also nicht nur C , sondern auch einer der beiden Werte α oder β willkürlich gewählt werden, der andere ist dann aus (8) zu bestimmen. Diese Gleichung (8) ist quadratisch; sie liefert also je nach Beschaffenheit ihrer Diskriminante entweder

- zwei verschiedene, reelle Werte oder
- zwei gleiche, reelle Werte oder
- zwei verschiedene, komplex-konjugierte Werte.

Damit wird aber auch das Integral selbst komplex. Dieser Fall der komplexen Lösung ist dadurch wichtig, daß sich aus ihm zwei reelle Lösungen gewinnen lassen, indem man die Lösung in einen reellen und einen rein imaginären Teil spaltet.

Hierzu als Beispiel nochmals die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Deutet man in der Gleichung (6) u als die x -Koordinate und v als die Zeit, so wird

$$l = -a; p = l; m = n = o = q = r = 0$$

und die Gleichung (8) nimmt die Gestalt an

$$-a^2 \cdot a + \beta = 0 \text{ oder } \beta = a^2 \cdot a.$$

Der Ansatz: $\theta = C \cdot e^{\alpha^2 a \cdot t} \cdot e^{\alpha x}$ ist also ein Integral der Differentialgleichung.

Da die Temperaturleitfähigkeit a immer ein positiver Wert ist, so würde bei ebenfalls positivem „ α^2 “ die Temperatur mit wachsendem t über alle Grenzen hinaus wachsen. Aus diesem Grunde sind bei Wärmeleitproblemen nur solche Werte von α zu gebrauchen, die ein negatives α^2 ergeben, d. h. α ist rein imaginär anzunehmen.

Wir setzen $\alpha = \pm i \cdot q$, worin q eine willkürliche reelle Größe ist. Das Integral heißt jetzt

$$\theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot e^{\pm i \cdot q \cdot x}.$$

Mit Hilfe der bekannten Analysisformel

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \cdot \sin x$$

lassen sich hieraus die beiden komplexen Lösungen bilden:

$$\theta_1 + i \cdot \theta_2 = C_1 \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot (\cos(qx) + i \cdot \sin(qx))$$

$$\theta_1 + i \cdot \theta_2 = C_2 \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot (\cos(qx) - i \cdot \sin(qx)).$$

Indem man die beiden Gleichungen addiert und dann den reellen Teil links gleich dem reellen Teil rechts, ebenso den rein imaginären Teil links gleich dem rein imaginären Teil rechts setzt, erhält man die beiden Lösungen

$$\theta_1 = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot \cos(qx)$$

$$i \cdot \theta_2 = i \cdot \frac{C_1 - C_2}{2} \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot \sin(qx)$$

In der zweiten Gleichung läßt sich die imaginäre Einheit „ i “ auf beiden Seiten streichen. Setzt man noch

$$\frac{C_1 + C_2}{2} = D \text{ und } \frac{C_1 - C_2}{2} = C,$$

so ergeben sich wieder die beiden Lösungen (g) und (h) der einführenden Aufgabe.

Wir kennen nun bereits 4 Lösungen unserer Differentialgleichung, nämlich

$$1. \text{ und } 2. \text{ Lösung: } \theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot e^{\pm i \cdot q \cdot x}$$

$$3. \text{ und } 4. \text{ Lösung: } \theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot t} \cdot \frac{\sin}{\cos}(qx)$$

in denen C und q willkürliche Wertesysteme sind. Alle 4 Lösungen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie aus einem Produkt zweier Teilfunktionen mit nur je einer Veränderlichen bestehen.

Es sind aber auch Funktionen bekannt, bei denen diese Teilung nicht möglich ist. Z. B.

$$\text{die 5. Lösung: } \theta = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(q-x)^2}{4a\tau}}$$

Daß dies tatsächlich ein Integral der Differentialgleichung ist, erkennt man, wenn man die nachstehenden partiellen Ableitungen bildet und in die Differentialgleichung einsetzt.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(q-x)^2}{4a\tau}} \cdot \left\{ \frac{(q-x)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right\}$$

und

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(q-x)^2}{4a\tau}} \cdot \left\{ \frac{(q-x)^2}{4a^2\tau^2} - \frac{1}{2a\tau} \right\}$$

Eine 6. Lösung ist $\theta = C \cdot \int_{\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}}^{\infty} e^{-q^2} \cdot dq$;

b) Physikalische Erwägungen. In Anlehnung an frühere Erfahrungen wollen wir gleich mit einem Ansatz beginnen, der aus einem Produkt zweier Teilfunktionen besteht, von denen die eine nur die Zeit τ , die andere nur die drei Koordinaten ξ, η, ζ des Raumes als Argument enthält. Also

$$\theta = C \cdot \varphi(\tau) \cdot \psi(\xi, \eta, \zeta) \text{ setzen.}$$

Die physikalischen Erwägungen beziehen sich nun auf die Wahl der Funktion $\varphi(\tau)$. Ist aus der Art der gestellten Aufgabe zu ersehen, daß die Temperatur an allen Stellen im Feld einen mit der Zeit periodischen Verlauf erwarten läßt, so wird man für $\varphi(\tau)$ eine in τ periodische Funktion versuchen. Vergleiche darüber später im Abschnitt D.

Ist dagegen das Problem so beschaffen, daß alle vorhandenen Temperaturunterschiede ihrem Ausgleich zustreben, so empfiehlt es sich, für τ eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten zu setzen:

$$\theta = C \cdot e^{-p\tau} \cdot \psi(\xi, \eta, \zeta) \dots \dots \dots (9a)$$

Da nicht nur C , sondern auch p eine vorerst noch durchaus willkürliche Größe ist, so können wir — in Erinnerung an frühere Ergebnisse — schon hier für p eine andere willkürliche Größe (q) einführen, nach der Gleichung $p = q^2 \cdot a$. Dadurch gewinnen wir später eine einfachere Schreibweise. Der Ansatz (9a) nimmt damit die Form an:

$$\theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi(\xi, \eta, \zeta) \dots \dots \dots (9b)$$

Setzt man die hieraus abgeleiteten Werte

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = (-q^2) \cdot a \cdot C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi \quad \text{und}$$

$$\Delta^2 \theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \Delta^2 \psi$$

in die Differentialgleichung ein, so vereinfacht sich diese zu

$$\Delta^2 \psi + q^2 \cdot \psi = 0 \dots \dots \dots (10)$$

Durch den Ansatz (9) ist der Vorteil erzielt worden, daß die Zahl der unabhängigen Veränderlichen um eine, nämlich um τ , geringer geworden ist; in dem Falle z. B., daß das Temperaturfeld nur von einer Koordinate abhängt, ist statt einer partiellen nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen.

Die Gleichung (10) — die häufig als die Pockelsche Differentialgleichung bezeichnet wird — ist nach

$$\begin{aligned} \text{der Laplaceschen Differentialgleichung } \Delta^2\psi &= 0 \text{ und} \\ \text{der Poissonschen } \text{,,} \quad \Delta^2\psi &= \pm 4\pi \cdot \rho \end{aligned}$$

die wichtigste partielle Differentialgleichung der mathematischen Physik. Es ist deshalb über die Eigenschaften der Gleichung und über ihre Lösungen eine ausgedehnte Literatur vorhanden. Näheres siehe: Enzykl. d. math. Wiss. II. A. 7c, Seite 540 u. ff.

c) Drei wichtige Sonderfälle der Gleichung $\Delta^2\psi + q^2 \cdot \psi = 0$.

In Form (10) ist die Pockelssche Differentialgleichung noch auf kein Koordinatensystem beschränkt. Mit Hilfe der Vektorformeln Nr. IX läßt sich die Pockelssche Differentialgleichung für die drei wichtigsten Koordinatensysteme umformen. Für uns kommen vor allem jene einfachsten Fälle in Betracht, in denen der Temperaturverlauf nur von einer Koordinate abhängt.

Rechtwinkelig, geradlinig Koordinaten.

ψ sei von y und z unabhängig. Dies führt aus Vektorformel IXa zur Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + q^2 \cdot \psi = 0 \dots\dots\dots (11a)$$

Die beiden Gleichungen

$$\psi = C \cdot \cos(qx) \text{ und } \psi = C \cdot \sin(qx)$$

sind zwei Lösungen dieser Differentialgleichung, wie man sich leicht durch Nachrechnen überzeugen kann. Es sind dies die bekannten oszillierenden Funktionen, deren Amplitude konstant ist, also rein periodische Funktionen. Sie sind in Fig. 9a für den besonderen Fall $C = 1$ und $q = 1$ gezeichnet.

Zylinder-Koordinaten. Es sei angenommen, daß ψ nur von r allein abhängt. Dann vereinfacht sich die Vektorformel Nr. IXb und wir erhalten

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi}{dr} + q^2 \cdot \psi = 0 \dots\dots\dots (11b)$$

Diese Gleichung besitzt ebenfalls zwei Lösungen, welche beide oszillierende Funktionen mit dem Argument (qr) sind. Die Amplitude nimmt jedoch mit wachsendem Argument ab, wie aus der zeichnerischen Darstellung in Fig. 9b zu ersehen ist.

Die beiden Funktionen heißen die Besselschen oder Zylinderfunktionen nullter Ordnung, und zwar werden sie unterschieden als die Besselschen Funktionen

nullter Ordnung von der ersten Art mit dem Symbol J_0
 „ „ „ „ zweiten „ „ „ „ Y_0 .

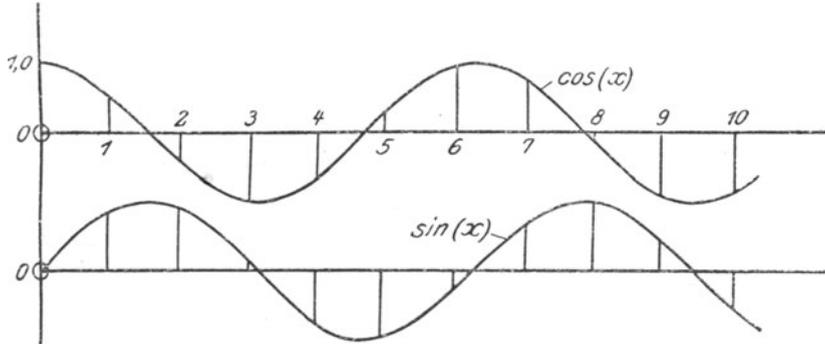


Fig. 9a.

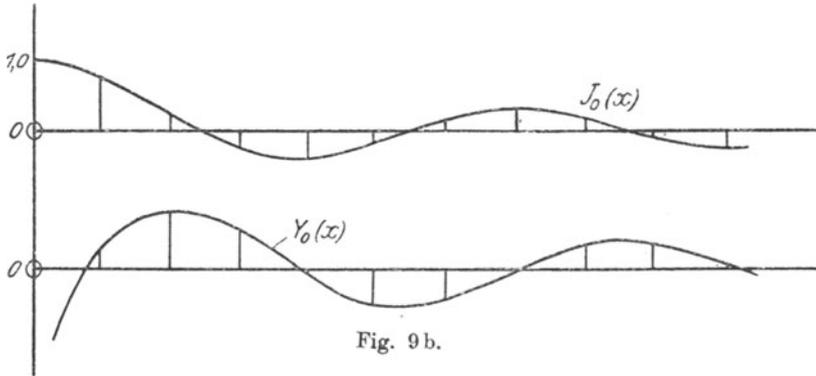


Fig. 9b.

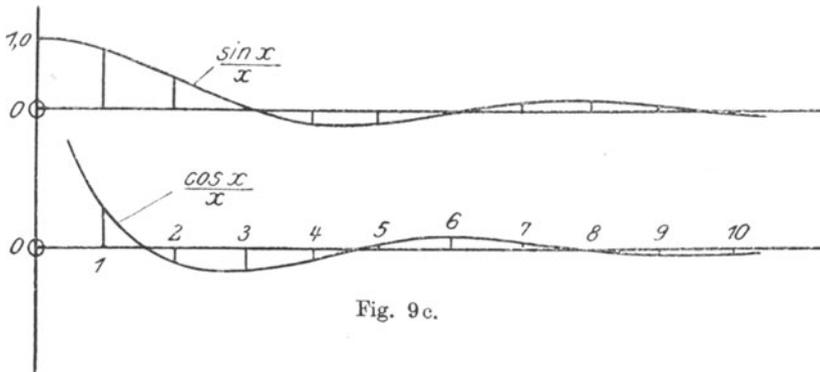


Fig. 9c.

Fig. 9 a, b und c. Lösungen der Pockelsschen Differentialgleichungen.

Da es nicht möglich ist, die Funktionen durch kurze analytische Ausdrücke wiederzugeben, hat man ihre Werte in Tafeln zusammengestellt, ähnlich den Tafeln der trigonometrischen Funktionen. Vgl. Jahnke und Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Teubner, Leipzig 1909. Gekürzt im Anhang. Zahlentafel Nr. 29.

Die Differentialgleichung (11 b) heißt die Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung und ihre Lösungen werden geschrieben:

$$\psi = C \cdot J_0(qr) \text{ und } \psi = C \cdot Y_0(qr).$$

Kugel-Koordinaten. Wenn ψ wieder nur von r abhängt, ergibt sich aus Vektorformel Nr. IX c:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\psi}{dr} + q^2 \cdot \psi = 0 \dots \dots \dots (11c).$$

Die beiden Gleichungen

$$\psi = C \cdot \frac{\sin(qr)}{(qr)} \text{ und } \psi = C \cdot \frac{\cos(qr)}{(qr)}$$

sind Lösungen dieser Gleichung, wovon man sich durch Ausrechnen der Differentialquotienten und Einsetzen in Gleichung (11c) überzeugen kann. Es sind wiederum oszillierende Funktionen, deren Amplituden mit wachsendem Argument (qr) sehr rasch, und zwar noch rascher als die Besselschen Funktionen abnehmen. Dies zeigt Fig. 9c.

Zusammenfassung. Diese drei Sonderfälle sollen wegen ihrer Wichtigkeit den nachfolgenden Abschnitten über das Anpassen partikulärer Integrale an die Grenzbedingungen zugrunde gelegt werden. Damit die drei Fälle gemeinsam besprochen werden können, soll die maßgebende Koordinate mit ξ bezeichnet werden; sie ist dann je nach dem Falle als x , r oder r zu deuten. Die Flächen konstanter Temperatur sind durch Gleichungen $\xi = \text{const}$ und die Oberfläche des Körpers durch die Gleichung $\xi = \xi_0$ gekennzeichnet.

Ein partikuläres Integral der Wärmeleitungsgleichung hat dann die Form

$$\theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi(q\xi) \dots \dots \dots (12).$$

3. Über das Anpassen an die Oberflächenbedingung.

Wir wollen sofort den allgemeinsten Fall, nämlich den der dritten Randwertangabe, besprechen.

Unter Verwendung des partikulären Integrals (12) nimmt die Oberflächenbedingung (5) die Form an:

$$C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \left[\frac{d}{d\xi} \psi(q \cdot \xi) \right]_0 = -h \cdot C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \left[\psi(q \cdot \xi) \right]_0$$

oder $q \cdot \psi'(q \cdot \xi_0) = -h \cdot \psi(q \cdot \xi_0)$

In dieser Gleichung ist q eine vorerst noch willkürliche Größe, welche aber jetzt durch Anpassen an die Oberflächenbedingung bestimmt

werden soll. Wir multiplizieren beide Seiten mit ξ_0 und fassen dann $(q \cdot \xi_0)$ als Unbekannte auf.

$$-\frac{(q \cdot \xi_0)}{(h \cdot \xi_0)} = \frac{\psi(q \cdot \xi_0)}{\psi'(q \cdot \xi_0)} \dots \dots \dots (13)$$

Den Quotienten auf der rechten Seite von Gleichung (13) können wir als eine einzige Funktion von $(q \cdot \xi_0)$ auffassen, deren Eigenschaften wir nun untersuchen wollen.

Die Funktion $\psi(q \cdot \xi_0)$ ist nach den obigen Erörterungen eine um die $(q \cdot \xi_0)$ -Achse oszillierende Funktion. Es gibt also unendlich viele, getrennt liegende Werte $(q \cdot \xi_0)$, für welche die Funktion den Wert Null annimmt. Vergleiche Fig. 10.

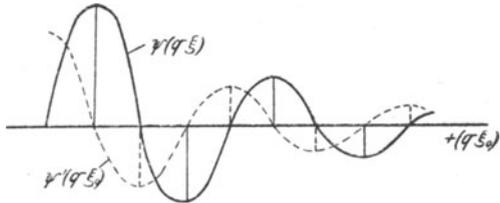


Fig. 10. Zur Gleichung (13).

Zwischen je zwei solchen Nullstellen liegt ein Maximum oder Minimum der Funktion. Die abgeleitete Funktion $\psi'(q \cdot \xi_0)$ hat also gerade dort ihre Nullstellen,

wodie ursprüngliche Funktion ihre größten Ausschläge hat und umgekehrt.

Die rechte Seite von Gleichung (13) stellt also eine Funktion dar, die dort ihre Nullstellen hat, wo die ursprüngliche Funktion zu Null wird und die an den Nullstellen der abgeleiteten Funktion gleich $\pm \infty$ unendlich wird. Sie besteht also stets aus unendlich vielen Zweigen ähnlich der Tangens- und Kotangensfunktion.

Die linke Seite der Gleichung (13) stellt eine Gerade dar, die durch den Ursprung geht, und gegen die Abszissenachse unter dem Winkel $(-1) : (h \cdot \xi_0)$ geneigt ist. Sie schneidet jeden der unendlich vielen Zweige der obigen Kurve einmal.

Es gilt deshalb der Satz:

Die Gleichung (13) besitzt unendlich viele, getrennt liegende Wurzeln.

$$(q_1 \cdot \xi_0), (q_2 \cdot \xi_0) \dots \dots (q_l \cdot \xi_0) \dots \dots$$

d. h. es gibt unendlich viele Temperaturverteilungen, die mit der Differentialgleichung der Wärmeleitung und mit der räumlichen Grenzbedingung verträglich sind.

Ferner gilt der Zusatz:

Für $h = \infty$, also für Vorgänge, bei denen die Oberfläche des Körpers ständig auf der Temperatur Null gehalten wird, gehen diese Wurzeln in die Nullstellen der Funktion $\psi(q \cdot \xi_0)$ über. Und für $h = 0$, also für Vorgänge ohne Wärmeabgabe (ideale Isolierung) sind die Wurzeln gleich den Nullstellen der abgeleiteten Funktion $\psi'(q \cdot \xi_0)$.

Aus dem Wertesystem $(q_1 \cdot \xi_0)$ ist dann durch Division mit ξ_0 das Wertesystem q_1 zu berechnen.

Alle Funktionen, welche sowohl der Differentialgleichung als auch der Oberflächenbedingung genügen, werden „ausgezeichnete Lösungen“

genannt. Sie enthalten als laufende Koordinaten die Zeit und die drei Raumkoordinaten und ferner noch den Parameter q ; derselbe ist nicht mehr willkürlich, sondern an bestimmte, getrennt liegende Werte q_i gebunden, die man „ausgezeichnete Werte“ heißt.

4. Über das Anpassen an die Anfangsbedingung.

Es besteht nun die Aufgabe, die allgemeine Lösung aus solchen ausgezeichneten Lösungen aufzubauen, und zwar so, daß die allgemeine Lösung für $\tau = 0$ in die willkürlich vorgegebene Anfangstemperaturverteilung übergeht. Es handelt sich also hierbei um die Entwicklung willkürlich gegebener Funktionen nach oszillierenden Funktionen.

Wir beschränken uns hierbei auf die Darstellung willkürlicher Funktionen durch die Sinus- und Cosinus-Funktionen und durch die Besselschen Funktionen nullter Ordnung, erster und zweiter Art.

a) Fouriersche Reihen mit vorgegebenen Parametern m und n . Diese Ausführungen stellen die Ergänzung zur Berechnung der einführenden Aufgabe dar. Vergleiche Seite 22 und 23.

Es besteht die Aufgabe, eine im Bereiche $-X < x < +X$ willkürlich gegebene Funktion $F(x)$ in eine Reihe zu entwickeln von der Gestalt der Gleichung (m) Seite 22.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \{ C_i \cdot \sin(m_i x) + D_i \cdot \cos(n_i x) \}, \dots \quad (14)$$

wobei die Werte m_i und n_i aus den unendlich vielen Lösungen der Gleichungen (i) und (k)

$$-\frac{m \cdot X}{h \cdot X} = \operatorname{tg}(m \cdot X) \quad \text{und} \quad +\frac{n \cdot X}{h \cdot X} = \operatorname{cotg}(n \cdot X)$$

bekannt sind.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn die Koeffizienten C_i und D_i so bestimmt sind, daß die Gleichung für jeden Wert von x , der zwischen $+X$ und $-X$ liegt, erfüllt ist.

Hilfsformeln: Um die Erörterung später nicht unterbrechen zu müssen, sollen einige Hilfsformeln im voraus abgeleitet werden.

Das Integral $\int_{-X}^{+X} \sin(m_i \cdot x) \cdot \sin(m_k \cdot x) \cdot dx$ geht bei Anwendung der trigonometrischen Formel $\sin a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta))$ über in das Integral $\frac{1}{2} \cdot \int_{-X}^{+X} \{ \cos(m_i - m_k) x - \cos(m_i + m_k) x \} dx$ und dies ist gleich $\frac{\sin(m_i - m_k) X}{m_i - m_k} - \frac{\sin(m_i + m_k) X}{m_i + m_k}$

$$\int_{-X}^{+X} F(x) \cdot \sin(m_1 x) \cdot dx =$$

$$\dots + C_i \cdot \int_{-X}^{+X} \sin^2(m_1 x) \cdot dx + C_k \cdot \int_{-X}^{+X} \sin(m_k x) \cdot \sin(m_1 x) \cdot dx + \dots$$

$$+ \dots + D_i \cdot \int_{-X}^{+X} \cos(n_i x) \cdot \sin(m_1 x) \cdot dx + D_k \cdot \int_{-X}^{+X} \cos(n_k x) \cdot \sin(m_1 x) \cdot dx +$$

Den drei Hilfsformeln gemäß verschwinden auf der rechten Seite sämtliche Integrale mit Ausnahme desjenigen mit $\sin^2(m_1 x)$ und es bestimmt sich dann der Wert C_i zu

$$C_i = \frac{\int_{-X}^{+X} F(x) \cdot \sin(m_1 x) \cdot dx}{\int_{-X}^{+X} \sin^2(m_1 x) \cdot dx} \dots \dots \dots (15a)$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten D_i multipliziert man sinngemäß Gleichung (14) beiderseits mit $\cos(n_i x) \cdot dx$ und erhält durch dasselbe Rechenverfahren

$$D_i = \frac{\int_{-X}^{+X} F(x) \cdot \cos(n_i x) \cdot dx}{\int_{-X}^{+X} \cos^2(n_i x) \cdot dx} \dots \dots \dots (15b)$$

Sind auf diese Weise sämtliche Koeffizienten C und D bestimmt, so stellt in der Tat die unendliche Reihe rechts in Gleichung (14) den Wert der Funktion $F(x)$ innerhalb des Intervalles $-X < x < +X$ dar. Es wäre nun streng genommen notwendig, eine unendliche Anzahl von Koeffizienten zu bestimmen. Da aber für alle gewöhnlich vorkommenden Funktionen $F(x)$ die Reihen ziemlich rasch konvergieren, und zwar aus Gründen, deren Erörterung hier zu weit führen würde, so kann man sich fast immer mit einer geringen Anzahl von Gliedern begnügen.

b) Die Fourierschen Reihen in ihrer gewöhnlichen Gestalt. In verschiedenen Gebieten der Physik und der Technik gibt es Aufgaben, die die Entwicklung einer willkürlich vorgegebenen Funktion in eine Reihe mit Sinus- und Cosinus-Funktionen erfordern, die aber keine einschränkende Bedingung nach Art der dritten Randbedingung aufstellen. Die sich dabei ergebende Reihe ist es, die im allgemeinen mit dem Namen „Fouriersche Reihe“ bezeichnet wird.

Da die Parameter m und n hier durch keine Randbedingung beschränkt sind, wählt man sie gleich der Reihe der positiven, ganzen Zahlen. Um die Schreibweise zu vereinfachen, denkt man sich ferner den Maßstab auf der X-Achse so gewählt, daß $X = \pi$ wird. Die Aufgabe heißt dann:

„Es ist eine im Bereich $-\pi < x < +\pi$ willkürlich gegebene Funktion $F(x)$ in eine Reihe zu entwickeln von der Form:

$$F(x) = \sum_{0, 1, 2, \dots}^{\infty} \left\{ a_i \cdot \sin(ix) + b_i \cdot \cos(ix) \right\}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$a_0 \cdot \sin 0 + a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \sin 2x + \dots \\ + b_0 \cdot \cos 0 + b_1 \cdot \cos x + b_2 \cdot \cos 2x + \dots$$

Solange die Koeffizienten a_i und b_i willkürlich sind, heißt die Reihe eine trigonometrische Reihe, erst durch die Bestimmung der Koeffizienten wird sie zur Fourierschen Reihe.

Wir benötigen wieder 3 Hilfsformeln, die sich von den oben abgeleiteten nur dadurch unterscheiden, daß die m_i und n_i nicht mehr Wurzeln der transzendenten Gleichung, sondern die positiven ganzen Zahlen sind und daß als Integrationsgrenzen statt $-X$ und $+X$ nunmehr $-\pi$ und $+\pi$ gelten.

Hilfsformeln.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(ix) \cdot \cos(kx) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \cos(i-k)x - \cos(i+k)x \right\} dx \\ = \frac{\sin(i-k) \cdot \pi}{i-k} + \frac{\sin(i+k) \pi}{i+k}$$

Hierin sind i und k ganze Zahlen, also auch $(i-k)$ und $(i+k)$. Da der Sinus eines ganzen Vielfachen von π immer Null ist, so ist der Wert des Integrals immer Null, wenn i von k verschieden ist. Ist $i = k$, so behält der zweite Bruch rechts den Wert Null. Der erste Bruch wird $0:0$, also unbestimmt. Es ist aber

$$\lim_{i \rightarrow k} \frac{\sin(i-k) \pi}{(i-k)} = \pi;$$

Der Wert des Integrals wird also gleich π . In dem Sonderfall, daß i und k beide gleich Null sind, nimmt auch der zweite Bruch den Wert π an und das Integral wird gleich 2π . Wir erhalten so die

$$1. \text{ Hilfsformel: } \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(ix) \cdot \cos(kx) \cdot dx = 0 \quad \text{für } i \neq k \\ = \pi \quad \text{,, } i = k > 0 \\ = 2\pi \quad \text{,, } i = k = 0$$

Eine entsprechende Rechnung liefert die anderen beiden Hilfsformeln:

$$2. \text{ Hilfsformel: } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(ix) \cdot \sin(kx) \cdot dx = 0 \quad \text{für } i \neq k \\ = \pi \quad \text{,, } i = k > 0 \\ = 0 \quad \text{,, } i = k = 0;$$

$$3. \text{ Hilfsformel: } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(ix) \cdot \cos(kx) \cdot dx = 0 \quad \text{,, } i \neq k \\ = 0 \quad \text{,, } i = k > 0 \\ = 0 \quad \text{,, } i = k = 0.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten.

Zur Bestimmung eines Koeffizienten z. B. b_k multipliziere man beide Seiten der trigonometrischen Reihe mit $\cos(kx) \cdot dx$ und integriere von $-\pi$ bis $+\pi$. Man erhält so

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cdot \cos(kx) \cdot dx = \\ & \dots + a_1 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(ix) \cdot \cos(kx) \cdot dx + a_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(kx) \cdot \cos(kx) \cdot dx + \dots \\ & \dots + b_1 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(ix) \cdot \cos(kx) \cdot dx + b_k \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(kx) \cdot dx + \dots \\ & = \dots + 0 + b_k \cdot \pi + 0 + \dots \end{aligned}$$

Daraus

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cdot \cos(kx) \cdot dx$$

Ebenso wird

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cdot \sin(kx) \cdot dx.$$

Diese beiden Formeln gelten für alle Werte von k . Eine Ausnahme macht nur der Wert $k=0$ wegen des dritten Falles in Hilfsformel 1 und 2. Um zu vermeiden, daß man für a_0 und b_0 eigene Formeln angeben muß, setzt man in üblicher Weise statt der trigonometrischen Reihe eine Reihe von der Form:

$$F(x) = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \sin 2x + \dots + \frac{1}{2} D_0 + D_1 \cdot \cos x + D_2 \cdot \cos 2x + \dots \quad (16)$$

Sämtliche Koeffizienten C_i und D_i — auch D_0 — sind jetzt aus den Formeln (17) zu bestimmen.

$$C_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cdot \sin(ix) \cdot dx \quad \dots \quad (17a)$$

$$D_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cdot \cos(ix) \cdot dx \quad \dots \quad (17b)$$

Eine Reihe von der Form (16), deren Koeffizienten nach Gleichung (17) bestimmt sind, heißt eine Fouriersche Reihe.

Die Dirichletschen Bedingungen.

Bei dieser Ableitung sind zwei Voraussetzungen stillschweigend als erfüllt angenommen worden. Erstens, daß die beiden Integrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \frac{\sin(ix)}{\cos(ix)} \cdot dx$$

wirklich einen endlichen, eindeutigen Wert besitzen und

zweitens, daß das Integral der unendlichen Reihe gleich der Summe der Integrale der einzelnen Glieder ist, also daß die Reihe gliedweise integriert werden durfte.

Damit diese Voraussetzungen tatsächlich zutreffen, muß die Funktion $F(x)$ bestimmten, allerdings sehr freien Bedingungen genügen. Diese Bedingungen, die sogenannten Dirichletschen Bedingungen lauten:

„Die Funktion $F(x)$ muß im Intervall $-\pi < x < +\pi$ überall eindeutig, endlich und integrierbar sein und sie darf in diesem Bereich nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima und nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen aufweisen.“

Hierbei ist noch zu bemerken, daß die Funktion also sehr wohl einige Unstetigkeitsstellen besitzen darf. Bezeichnet in Fig. 11 der Wert $x = a$ eine solche Unstetigkeitsstelle, ferner $F(a - 0)$ den Funktionswert dicht vor der Unstetigkeitsstelle, $F(a + 0)$ den Funktionswert unmittelbar nachher, so liefert die Fouriersche Reihe beim Grenzübergang von unten bzw. oben die richtigen Werte $F(a - 0)$ und $F(a + 0)$. Für $x = a$ selbst ergibt sich das arithmetische Mittel aus $F(a - 0)$ und $F(a + 0)$.

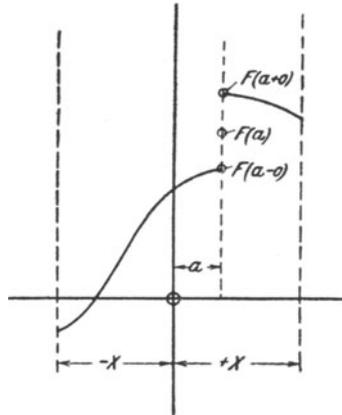


Fig. 11. Werte der Fourierschen Reihe an Unstetigkeitsstellen.

Die Funktion $F(x)$ kann auf verschiedene Weise gegeben sein:

1. Durch ein analytisches Gesetz, also durch eine Berechnungsvorschrift, z. B. durch die Gleichung $F(x) = 3 + 2x + x^2$.
2. Durch eine zeichnerische Darstellung. Z. B. durch eine fortlaufende Kurve, die von einem Meßgerät aufgezeichnet wurde.
3. Durch zahlenmäßige Angabe einer Anzahl getrennt liegender Funktionswerte, also z. B. durch eine Zahlentabelle, welche Instrumentablesungen enthält.

Bezüglich der Darstellung von Funktionen, die nach Absatz 2 und 3 gegeben sind, sei auf den Abschnitt über Fouriersche Reihen in dem Taschenbuch „Die Hütte“ verwiesen. Wir wollen uns im folgenden die Funktion immer durch ein Gesetz gegeben denken.

Die Fortsetzung über den gegebenen Bereich hinaus.

Läßt man in der Fourierschen Reihe x über den Bereich $-\pi < x < +\pi$ hinaus wachsen, so zeigt sich folgendes:

Sinus und Cosinus ändern ihren Wert nicht, wenn man das Argument um ein ganzzahliges Vielfache von 2π vermehrt. Da in der

Reihe (16) i und k ganze Zahlen sind, so ändern die einzelnen Glieder der Reihe und damit die Reihe selbst ihren Wert nicht, wenn man von (kx) zu $k \cdot (x + 2\pi)$ zu $k \cdot (x + 4\pi)$ usw. übergeht. Die Reihe stellt also eine periodische Funktion mit der Periode 2π dar. Das vorgegebene analytische Gesetz wird dagegen für die Funktion $F(x)$ im allgemeinen einen nicht periodischen Verlauf zeigen. Z. B. $F(x) = 3 + 2x + x^2$. Die Übereinstimmung zwischen der angegebenen Funktion und der Fourierschen Reihe erstreckt sich also nur auf das Gebiet $-\pi < x < +\pi$. Außerhalb weichen die Darstellungen im allgemeinen voneinander ab, wie dies Fig. 12 zeigt.

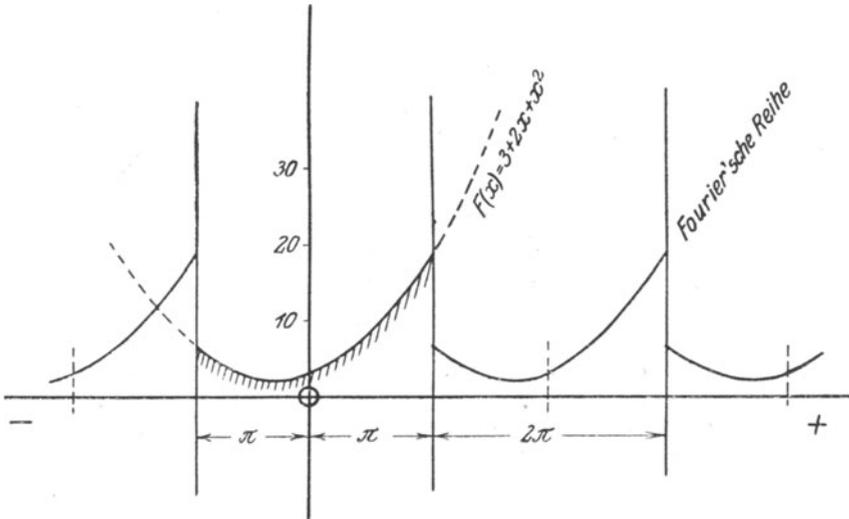


Fig. 12. Fortsetzung der Fourierschen Darstellung über das Gebiet $-\pi < x < +\pi$ hinaus.

Die reinen Sinus- und reinen Cosinusreihen.

Die Gleichung (16) läßt sich zerlegen, und zwar so, daß $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ist, wobei zu setzen ist:

$$f_1(x) = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \sin 2x + \dots \dots \text{ und}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot D_0 + D_1 \cdot \cos x + D_2 \cdot \cos 2x + \dots \dots$$

Diese beiden Reihen werden als reine Sinus- und reine Cosinusreihen bezeichnet.

1. Die reinen Sinusreihen.

Der Sinus ist eine ungerade Funktion, das heißt es ist

$$+ \sin(-x) = - \sin(+x),$$

die Funktion geht also beim Übergang von einem positiven zum gleichgroßen negativen Argument in den gleichgroßen, aber entgegengesetzten Funktionswert über. Es wird deshalb auch die reine Sinusreihe stets eine ungerade Funktion sein, also $F(-x) = -F(+x)$;

vgl. Fig. 13. Und umgekehrt kann eine ungerade Funktion immer nur durch eine reine Sinusreihe wiedergegeben werden.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Kurve nicht notwendig durch den Koordinatenursprung zu gehen braucht, obwohl die reine Sinusreihe immer für $x = 0$ den Wert Null liefert. Daß hier kein Widerspruch vorliegt, erkennt man aus den obigen Ausführungen über den Wert der Funktion an Unstetigkeitsstellen. Allerdings wird dann die Reihe für x nahe an Null sehr schwach konvergent.

2. Die reine Cosinusreihe.

Der Cosinus ist eine gerade Funktion, das heißt es ist

$$+ \cos(-x) = + \cos(+x),$$

die Funktion behält also beim Übergang vom positiven zum gleichgroßen, negativen Argument ihren Wert bei. Es ist deshalb die Cosinus-

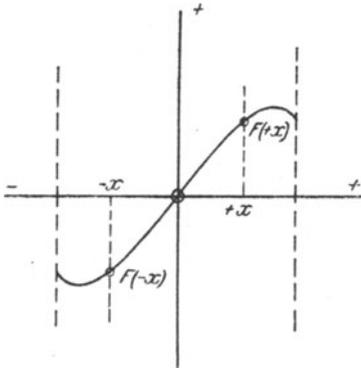


Fig. 13. Eine ungerade Funktion.

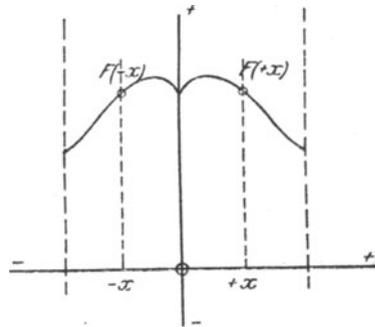


Fig. 14. Eine gerade Funktion.

reihe stets eine gerade Funktion, also $F(-x) = F(+x)$ (vgl. Fig. 14) und umgekehrt läßt sich eine gerade Funktion immer nur durch eine reine Cosinusreihe darstellen.

Die Form der Gleichung (16) zeigt also, daß sich jede willkürlich gegebene Funktion als Übereinanderlagerung einer geraden und einer ungeraden Funktion auffassen läßt.

Der Bereich erstreckt sich von $x = -X$ bis $x = +X$.

Wenn man nicht, wie dies auf Seite 34 angenommen ist, den Maßstab auf der x -Achse beliebig wählen kann, so hat man in Gleichung (16) statt x die Größe $x \cdot \frac{\pi}{X}$ einzuführen. Man erhält so

$$F(x) = C_1 \cdot \sin \frac{x \cdot \pi}{X} + C_2 \cdot \sin 2 \frac{x \cdot \pi}{X} + \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots + \frac{1}{2} D_0 + D_1 \cdot \cos \frac{x \cdot \pi}{X} + D_2 \cdot \cos 2 \frac{x \cdot \pi}{X} + \dots \dots \dots \quad (18)$$

$$\text{und } C_k = \frac{1}{X} \cdot \int_{-X}^{+X} F(x) \sin\left(k \frac{\pi \cdot x}{X}\right) dx \dots \dots \dots (19a)$$

$$D_k = \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} F(x) \cdot \cos\left(k \frac{\pi \cdot x}{X}\right) dx \dots \dots \dots (19b)$$

Die so dargestellte Funktion ist periodisch mit der Periode $2X$.

e) Die Fourierschen Integrale. Nachdem nun die Möglichkeit erwiesen ist, eine im Bereich $-X < x < X$ willkürlich gegebene Funktion nach trigonometrischen Funktionen zu entwickeln, ist die Frage berechtigt, ob nicht die Methode sich so erweitern läßt, daß sie auch für den Bereich $-\infty < x < +\infty$ gilt. Dies ist tatsächlich der Fall; um dies zu zeigen, gehen wir von der Gleichung (18) aus:

$$F(x) = \frac{1}{2} D_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ C_k \cdot \sin\left(k \frac{x\pi}{X}\right) + D_k \cdot \cos\left(k \frac{x\pi}{X}\right) \right\}$$

In diese Gleichung setzen wir die Werte C_k und D_k aus den Gleichungen (19) ein, in denen wir jetzt zur Vermeidung von Verwechslungen ξ statt x schreiben. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot d\xi + \\ &\sum_{k=1, 2, \dots}^{k=\infty} \left\{ \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot \sin\left(k \frac{\xi\pi}{X}\right) \cdot \sin\left(k \frac{x\pi}{X}\right) d\xi \right. \\ &\left. + \frac{1}{X} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot \cos\left(k \frac{\xi\pi}{X}\right) \cdot \cos\left(k \frac{x\pi}{X}\right) \cdot d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{X} \cdot \sum_{k=1, 2, \dots}^{k=\infty} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{X} (\xi - x)\right) \cdot d\xi. \end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Umformung mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\sin a \cdot \sin \beta + \cos a \cdot \cos \beta = \cos(a - \beta)$$

durchgeführt. Da der Cosinus eine gerade Funktion ist, können wir die beiden Summanden in einen zusammenfassen, indem wir nicht von $k = +1$ bis $k = +\infty$, sondern von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ summieren; also den ersten Summanden als $k = 0$ -Glied mit hereinziehen.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2X} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-X}^{+X} F(\xi) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{X} (\xi - x)\right) \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\pi}{X} \cdot \int_{-X}^{-X} F(\xi) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{X} (\xi - x)\right) \cdot d\xi. \end{aligned}$$

Lassen wir nun X über alle Grenzen hinaus wachsen, so wird $\pi : X$ eine sehr kleine Größe, die wir dq nennen wollen; $k \cdot \frac{\pi}{X}$ nennen wir dann q . Die unendliche Summe geht gleichzeitig in ein Integral über und wir erhalten

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{q=-\infty}^{q=+\infty} dq \cdot \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} F(\xi) \cdot \cos(q \cdot (\xi - x)) \cdot d\xi. \dots (20)$$

Die Formel (20) zeigt die Darstellung einer gegebenen Funktion durch Fouriersche Integrale. Durch mathematische Erwägungen, die hier zu weit führen würden, läßt sich beweisen, daß die Gleichung (20) für alle Werte $-\infty < x < +\infty$ richtig ist, wenn die vorgegebene Funktion $F(x)$ überall stetig und eindeutig ist, nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt und sich für $\xi = +\infty$ und $\xi = -\infty$ so der Null nähert, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot d\xi \text{ endlich bleibt.}$$

Die Fourierschen Integrale für gerade und ungerade Funktionen.

Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\cos(a - \beta) = \cos a \cdot \cos \beta + \sin a \cdot \sin \beta$$

läßt sich die Gleichung (20) auf die Form

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \{ \cos(q\xi) \cdot \cos(qx) + \sin(q\xi) \cdot \sin(qx) \} \cdot d\xi$$

bringen und dies läßt sich in $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$ spalten, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \cos(q\xi) \cdot \cos(qx) \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(qx) \cdot dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \cos(q\xi) \cdot d\xi \dots (21a) \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(qx) \cdot dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \sin(q\xi) \cdot d\xi \dots (21b)$$

Wegen der oben erwähnten Eigenschaften der Sinus- und der Cosinusfunktion ist $f_1(x)$ eine gerade und $f_2(x)$ eine ungerade Funktion. Man kann also, wie das in Fig. 15 veranschaulicht ist, jede Funktion als Übereinanderlagerung einer geraden und einer ungeraden Funktion auffassen.

Die Fourierschen Integrale sind hier aus den Fourierschen Reihen heraus abgeleitet worden. Es sei aber bemerkt, daß es ebenso möglich ist, die Fourierschen Integrale vollkommen selbständig abzuleiten.

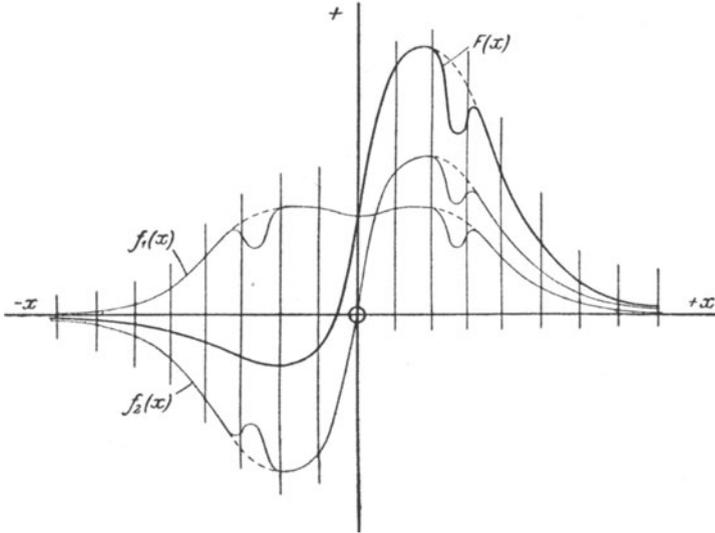


Fig. 15. Darstellung einer Funktion als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion.

d) Reihen mit Besselschen Funktionen. Als Lösung der Gleichung (11 b), der Besselschen Differentialgleichung nullter Ordnung hatten wir die Besselschen Funktionen J_0 und Y_0 kennen gelernt, von denen die erste eine gerade, die zweite eine ungerade Funktion ist. Wir wollen nun die Entwicklung einer im Bereich $0 < r < 1$ willkürlich gegebenen Funktion nach Besselschen Funktionen besprechen, und zwar wollen wir nur die Funktion $J_0(nr)$ berücksichtigen, weil wir bei den späteren Aufgaben nur mit geraden Funktionen uns beschäftigen werden. Die Funktion $Y_0(nr)$ lassen wir als eine ungerade Funktion außer Betracht.

Aus der Oberflächenbedingung 3. Art folgt, daß

$$\left[\frac{d}{dr} (J_0(nr)) \right]_{r=R} = -h \cdot \left[J_0(nr) \right]_{r=R}$$

sein muß. Eine Formel über das Differenzieren Besselscher Funktionen besagt, daß $J_0'(x) = -J_1(x)$ ist, worin $J_1(x)$ die Besselsche Funktion erster Ordnung, erster Art ist. Mit dieser Formel wird die obige Gleichung gleich

$$n \cdot J_1(nR) = +h \cdot J_0(nR).$$

Dies ist nach Seite 31 eine transzendente Gleichung mit den unendlich vielen Wurzeln $\dots n_i, n_k, \dots$

Die Reihenentwicklung hat die Form

$$F(r) = D_0 + \sum_{i=1, 2, \dots}^{i=+\infty} D_i \cdot J_0(n_i r) \dots \dots \dots (22)$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten D_k multipliziere man beide Seiten mit $r \cdot J_0(n_k r) \cdot dr$ und integriere von $r = 0$ bis $r = +1$;

$$\int_0^{+1} r \cdot F(r) \cdot J_0(n_k r) \cdot dr = \dots + D_1 \cdot \int_0^{+1} r \cdot J_0(n_1 r) \cdot J_0(n_k r) \cdot dr$$

$$+ D_k \cdot \int_0^{+1} r \cdot J_0^2(n_k r) \cdot dr + \dots$$

Aus drei Hilfsformeln, die den oben erwähnten Hilfsformeln analog sind, ergibt sich, daß alle Glieder rechts verschwinden, mit Ausnahme desjenigen mit $J_0^2(-)$. Aus der Lehre über das Integrieren Besselscher Funktionen folgt, daß

$$\int_0^{+1} r \cdot J_0^2(n_k r) \cdot dr = \frac{1}{2} J_1^2(n_k r)$$

ist. Man erhält jetzt den Wert D_k zu

$$D_k = \frac{\int_0^{+1} r \cdot F(r) \cdot J_0(n_k r) \cdot dr}{J_1^2(n_k r)} \dots \dots \dots (23a)$$

Diese Formel gilt für alle Werte von $k = 1$ an; für $k = 0$ gilt

$$D_0 = 2 \int_0^{+1} r \cdot F(r) \cdot dr \dots \dots \dots (23b)$$

Wegen weiterer Einzelheiten über die Darstellung willkürlich gegebener Funktionen durch Reihen und Integrale mit Besselschen Funktionen sei auf die einschlägige mathematische Literatur verwiesen. Z. B. „Die Theorie der Besselschen Funktionen“ von Paul Schafheitlin. Teubners Sammlung: Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Nachdem in den vorstehenden beiden Abschnitten die nötigen physikalischen und mathematischen Grundbegriffe und analytischen Methoden erörtert worden sind, können in den nachfolgenden Abschnitten die einzelnen Aufgaben aus dem Gebiet der Differentialgleichung (4a)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot W$$

besprochen werden.

Wir werden uns hierbei ausnahmslos auf solche vereinfachte Fälle beschränken, in denen entweder die Ergiebigkeit der Wärmequellen oder die zeitliche Änderung der Temperatur oder auch beide zugleich gleich Null sind. Es liegt der Gedanke nahe, mit diesem letzten, einfachsten Fall zu beginnen und dann zu den beiden anderen Fällen überzugehen. Bei genauerer Überlegung habe ich es jedoch als zweckmäßig befunden, mit der Besprechung der zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen, also mit dem Gebiet der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta$$

zu beginnen.

C. Die zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen.

Die Temperaturunterschiede streben dem Ausgleich zu.

$$\text{Die Differentialgleichung } \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta.$$

Wir werden uns auch da nochmals eine Beschränkung auferlegen, indem wir in den nachstehenden 5 Aufgaben nur solche Fälle besprechen, bei denen das Temperaturfeld nur von einer Koordinate abhängt. In Aufgabe Nr. 1, 2 und 3 ist die Temperatur nur in einem endlichen Bereich dieser Koordinate zu bestimmen. In Aufgabe 4 und 5 erstreckt sich die Temperaturfunktion ins Unendliche.

Aufgabe 1. Die Platte.

„Eine unendlich große planparallele Platte von der Dicke $2X$ gebe durch ihre beiden Oberflächen ihre Wärme an die Umgebung ab. Die Wärmeübergangszahl habe beiderseits den gleichen Wert a und die Umgebungstemperatur ϑ sei auf beiden Seiten gleich Null. Zur Zeit $\tau = 0$ besitze die Platte überall die einheitliche Temperatur $\theta = \theta_c$. Ferner seien die Stoffwerte λ , c und γ , also auch a bekannt. — Es sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Betrag des Wärmeverlustes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen.“

a) **Der mathematische Ansatz.** Die Aufgabe unterscheidet sich von der einführenden Aufgabe nur dadurch, daß die Anfangstemperatur nicht mit x sich ändert, sondern konstant ist. Wir erhalten deshalb den mathematischen Ansatz

$$\text{Differentialgleichung: } \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\text{Räumliche Grenzbedingung: für } x = +X: \frac{\partial \theta}{\partial x} = -h \cdot \theta,$$

$$\text{„ „ „ „ } x = -X: \frac{\partial \theta}{\partial x} = +h \cdot \theta.$$

$$\text{Zeitliche Grenzbedingung: für } \tau = 0: \theta = \theta_c.$$

b) **Berechnung des Temperaturfeldes.** Als partikuläre Integrale der Differentialgleichung kennen wir bereits:

$$\theta = C \cdot e^{-m^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(mx) \text{ und } \theta = D \cdot e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(nx)$$

Nun ist die Temperaturverteilung von Anfang an systematisch zur Y-Z-Ebene gewesen und sie wird es auch während der ganzen Dauer des Temperatúrausgleiches bleiben, weil Umgebungstemperatur und W.Ü.Z. auf beiden Seiten gleich sind. Die Temperaturfunktion kann deshalb nur eine gerade Funktion sein und wir können das erste partikuläre Integral schon jetzt ausschalten. Um das verbleibende Integral der Oberflächenbedingung anzupassen, müssen die Werte n der Gleichung

$$(nX) \cdot \sin(nX) = (hX) \cdot \cos(nX)$$

entsprechend gewählt werden. Die Wurzeln $\delta_k = (n_k X)$ dieser Gleichung sind bekannt und in Tafel 2 zusammengestellt.

Aus den so entstehenden, unendlich vielen Teillösungen baut sich die allgemeine Lösung auf, zu:

$$\theta = \sum_{k=1}^{k=\infty} D_k \cdot e^{-n_k^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(n_k X).$$

Die Werte D_k sind darin so zu bestimmen, daß sie der Anfangsbedingung

$$\theta_c = \sum_1^{\infty} D_k \cdot \cos(n_k X) \text{ genügen.}$$

Sie ergeben sich also aus der Gleichung (15b)

$$D_k = \frac{\int_{-X}^{+X} \theta_c \cdot \cos(n_k X) \cdot dx}{\int_{-X}^{+X} \cos^2(n_k X) \cdot dx} = \theta_c \frac{2 \cdot \sin(n_k X)}{\sin(n_k X) \cdot \cos(n_k X) + (n_k X)}$$

Mit der abgekürzten Schreibweise δ_k für $(n_k X)$ erhalten wir die Temperaturfunktion in der Gleichung:

$$\theta = \theta_c \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin \delta_k}{\delta_k + \sin \delta_k \cdot \cos \delta_k} \cdot e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{X^2}} \cdot \cos\left(\delta_k \cdot \frac{X}{X}\right) \dots (24a)$$

Die Werte δ_k in dieser Gleichung sind die Wurzeln der mehrfach erwähnten, transzendenten Gleichung, deren einziger Parameter (hX) ist; sie sind also selbst Funktionen dieses Parameters. Damit können wir Gleichung (24a) in der Form schreiben:

$$\theta = \theta_c \cdot \Phi\left(hX, \frac{a\tau}{X^2}, \frac{X}{X}\right) \dots \dots \dots (24b)$$

Wenn auch das Problem, physikalisch betrachtet von sehr vielen einzelnen Größen abhängt, so lassen sich diese doch so in Gruppen zusammenfassen, daß zum Schlusse eine Funktion mit nur 3 Veränderlichen bleibt.

Wir erwähnen noch den Sonderfall, daß h als unendlich groß gelten kann, daß also die beiden Oberflächen auf der Temperatur Null gehalten werden. Dann gehen (nach S. 31) die δ -Werte in die Nullstellen der cos-Funktion über, also in die Werte

$$\frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi, \dots \dots \dots \left(k - \frac{1}{2}\right) \pi.$$

Der Sinus dieser Werte ist immer gleich ± 1 ; und die Gleichung 24 nimmt die Form an:

$$\theta = \theta_c \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a \cdot \tau}{X^2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{X}{X}\right) - \frac{1}{3} \cdot e^{-\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \frac{a \cdot \tau}{X^2}} \cdot \cos\left(\frac{3}{2} \pi \cdot \frac{X}{X}\right) + \frac{1}{5} e \dots \dots \dots \pm \dots \dots \right\} = \theta_c \cdot \Phi\left(\frac{a \cdot \tau}{X^2}, \frac{X}{X}\right).$$

c) **Zeichnerische Darstellung des Temperaturfeldes.** Wir wollen hierzu einen speziellen Fall zugrunde legen und zwar eine Betonmauer von 80 cm Stärke. Die Übertemperatur θ_c der Mauer über die Umgebungstemperatur zur Zeit $\tau = 0$ wollen wir gleich 1° nehmen. Hat sie einen anderen Wert, so brauchen wir den Maßstab auf der Temperaturachse nur entsprechend zu dehnen oder zu verkürzen.

Die W. Ü. Z.: a sei gleich 10,8 angenommen.

1. Vorbereitende Rechnung.

Aus Tabellen ist zu entnehmen: $\lambda = 0,6 \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m. Std. Grad}} \right]$

$$\gamma = 2000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$c = 0,27 \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{kg Grad}} \right]$$

daraus berechnet sich $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} = 0,0011 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Std.}} \right]$.

Ferner wird $h = \frac{10,8}{0,6} = 18,0 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$

und $hX = 18,0 \cdot 0,40 = 7,2$.

2. Die Werte δ_k aus der Oberflächenbedingung.

Die Wurzeln $\delta_k = (n_k \cdot X)$ der transzendenten Gleichung sind in Zahlentafel Nr. 2 als Zwischenwerte für $(hX) = 7,2$ zu entnehmen. Die ersten 5 Wurzeln sind hier zusammengestellt:

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
im Bogenmaß: δ_k	1,38	4,18	7,08	10,03	13,08
im Gradmaß: δ_k	79°6'	239°30'	45°27'	214°54'	29°13'
Für später notwendig:					
sin $\delta_k =$	0,9820	- 0,8616	0,7127	- 0,5722	0,4882
cos $\delta_k =$	0,1891	- 0,5075	0,7015	- 0,8202	0,8744

3. Die ausgezeichneten Lösungen $f_k(x) = \cos(n_k x) = \cos\left(\delta_k \cdot \frac{x}{X}\right)$.

Um diese Lösungen zeichnen zu können, wollen wir die Lage der ersten, zweiten usw. Nullstelle und ebenso die Lage der Maxima und Minima feststellen. Ist x_0 die Lage der ersten Nullstelle, so liegen bei $3x_0, 5x_0, 7x_0$ usw. die weiteren Nullstellen; bei $2x_0, 6x_0, 10x_0$ die Minima und bei $0, 4x_0, 8x_0$ die Maxima.

Die erste Nullstelle findet sich aus der Bedingung

$$\cos\left(\delta_k \cdot \frac{x_0}{X}\right) = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$$

oder
$$x_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{X}{\delta_k} = \frac{1,57 \cdot 0,40}{\delta_k} = \frac{0,628}{\delta_k}$$

Die Rechnung ergibt die Werte der nachstehenden Tabelle für x_0 , $2x_0, \dots$ [in Metern].

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
1. Nullstelle x_0	0,455	0,151	0,089	0,063	0,048
Minimum $2x_0$		0,301	0,178	0,126	0,096
2. Nullstelle $3x_0$		0,452	0,266	0,188	0,144
Maximum $4x_0$			0,355	0,250	0,192
3. Nullstelle $5x_0$			0,444	0,313	0,240
Minimum $6x_0$				0,376	0,288
4. Nullstelle $7x_0$				0,438	0,336
Maximum $8x_0$					0,384
5. Nullstelle $9x_0$					0,432

4. Die Bestimmung der Koeffizienten D_k .

Die Gleichung
$$D_k = \frac{2 \cdot \sin(n_k X)}{(n_k X) + \sin(n_k X) \cdot \cos(n_k X)}$$

liefert mit Hilfe der Werte aus der vorletzten Tabelle

$$D_1 = + 1,250; D_2 = - 0,373; D_3 = + 0,188;$$

$$D_4 = - 0,109; D_5 = + 0,072.$$

5. Berechnung von $e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{a\tau}{X^2}}$.

Hier wollen wir zwei Fälle herausgreifen, erstens zur Zeit $\tau = 0$ und zweitens zur Zeit $\tau = 5$ [std.]

Zu 1.: Der Wert $\tau = 0$ macht den Exponenten zu Null und damit die Exponentialfunktion zu Eins. Die unter 4. errechneten Werte D_k stellen also die maximalen Ausschläge der Funktionen $\cos\left(\delta_k \cdot \frac{x}{X}\right) = f_k(x)$, also der ausgezeichneten Lösungen dar.

Zu 2.: Der Wert $\tau = 5$ gibt $\frac{a\tau}{X^2} = \frac{0,0011 \cdot 5}{0,40^2} = 0,0344$; damit erhält man

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
$\delta_k^2 \cdot \frac{a\tau}{X^2}$	0,0655	0,601	1,725	3,465	5,885
Exponentialfunktion	0,94	0,55	0,18	0,03	0,00
$D_k \cdot e^{\dots}$	+ 1,175	- 0,203	+ 0,033	- 0,003	0

6. Zeichnerische Darstellung des Temperaturfeldes.

1.: Anfangstemperaturverteilung; für $\tau = 0$ liefert uns die Berechnung:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_c \cdot \{ 1,250 \cdot \cos(3,45x) - 0,373 \cdot \cos(10,4x) + 0,188 \cdot \cos(17,7x) \\ &\quad - 0,109 \cdot \cos(25,1 \cdot x) + 0,072 \cdot \cos(32,7)x - + \dots \} \\ &= \theta_c \cdot \{ I - II + III - IV + V - + \dots \}.\end{aligned}$$

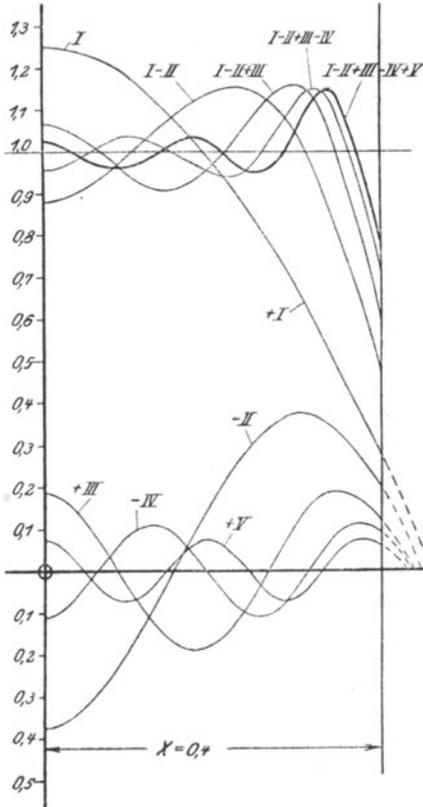


Fig. 16. Darstellung der Anfangstemperaturverteilung $\theta_{\tau=0} = 1$ durch eine Fouriersche Reihe.

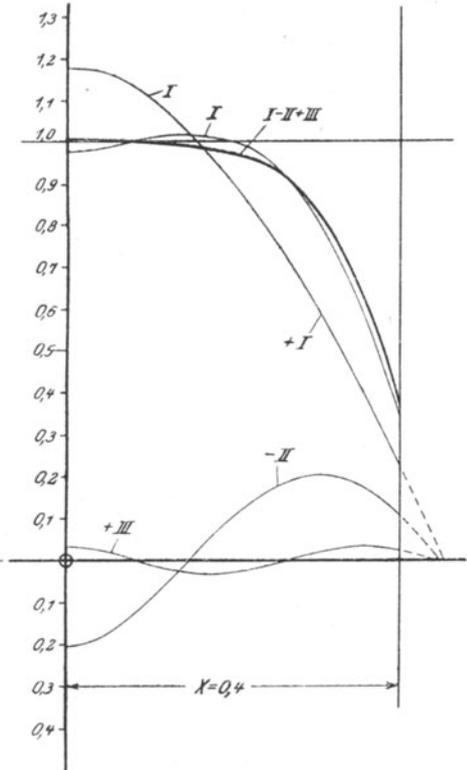


Fig. 17. Darstellung einer späteren Temperaturverteilung durch eine Fouriersche Reihe.

In dieser letzten Form sind unter I, II, ... die einzelnen Teillösungen zu verstehen. Dieselben sind in Fig. 16 sowohl einzeln als in ihrer algebraischen Summe dargestellt.

Man ersieht daraus, daß die 1. Teillösung sehr verschieden ist von der Anfangstemperaturverteilung $\theta_c = \text{const} = 1$, daß man sich aber dieser Verteilung um so mehr nähert, je mehr Teillösungen man übereinander lagert. Man sieht aber zugleich, daß 5 Teillösungen noch nicht genügen, um die Anfangsverteilung richtig zeichnerisch darzustellen. Bei späteren

Temperaturverteilungen liegen die Verhältnisse wesentlich günstiger. Wir gehen deshalb über zu

2.: Temperaturverteilung für $\tau = 5$.

Die Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_c \cdot \{1,175 \cdot \cos(3,45x) - 0,203 \cdot \cos(10,4x) + 0,033 \cdot \cos(17,7x) \\ &\quad - 0,003 \cdot \cos(25,1x) \pm 0\} \\ &= \theta_c \{I' - II' + III' - IV'\}.\end{aligned}$$

Schon die Rechnung läßt erkennen, daß 3—4 Glieder der Reihe genügen, um die Temperatur genau zu bestimmen. In Fig. 17 sind wieder die einzelnen Teillösungen sowie ihre Summe gezeichnet. Man ersieht aus dieser Zeichnung, daß sich nach 5 Stunden erst die äußersten Schichten der Mauer beträchtlich abgekühlt haben, während die inneren Schichten noch fast völlig ihre Anfangstemperatur besitzen.

d) Berechnung des Wärmeverlustes Q.

Die drei Arten der Berechnung.

1. Art der Berechnung: Dem Oberflächenstück $dy \cdot dz$ strömt aus dem Inneren des Körpers in der Zeit $d\tau$ die Wärmemenge

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm x} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

zu. Um die gesamte, abgegebene Wärme Q zu berechnen, muß man obigen Ausdruck über die beiden Oberflächen und den Zeitraum $0 < \tau < \tau_0$ integrieren.

2. Art der Berechnung: Das Oberflächenstück $dy \cdot dz$ gibt in der Zeit $d\tau$ an die Umgebung die Wärmemenge

$$a \cdot \theta_{(x=\pm x)} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

ab. Dieser Ausdruck ist ebenfalls über beide Oberflächen und den ganzen Zeitraum zu integrieren.

3. Art der Berechnung: Das Raumelement $dx \cdot dy \cdot dz$ der Platte hat innerhalb des Zeitraumes von 0 bis τ sich um den Betrag $\theta_c - \theta_\tau$ abgekühlt. Es hat hierbei die Wärmemenge

$$c \cdot \gamma \cdot (\theta_c - \theta_\tau) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

verloren. Dieser Ausdruck ist für den Zeitpunkt τ auszuwerten und dann über den ganzen Raum zu integrieren.

Ableitung der Gleichung.

Wir wählen die dritte Art der Berechnung. Aus der Gleichung (24a) des Temperaturfeldes folgt sofort, daß

$$\theta_c - \theta_\tau = \sum_1^\infty D_k \cdot \left(1 - e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{\tau}{X^2}} \right) \cdot \cos\left(\delta_k \cdot \frac{x}{X}\right)$$

ist. Damit ergibt sich für den Wärmeverlust Q eines Plattenstückes von der Größe $Y \cdot Z$ die Gleichung

$$Q = c \cdot \gamma \cdot Y \cdot Z \cdot \int_{-X}^{+X} \sum_1^{\infty} D_k \cdot \left(1 - e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{X^2}}\right) \cos \cdot \left(\delta_k \cdot \frac{x}{X}\right) \cdot dx.$$

Die Reihe darf gliedweise integriert werden, d. h. es darf die Stellung von Integral- und Summenzeichen vertauscht werden. Es ergibt sich:

$$Q = c \gamma \cdot Y \cdot Z \sum_1^{\infty} D_k \cdot \left(1 - e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{X^2}}\right) \cdot \int_{-X}^{+X} \cos \left(\delta_k \cdot \frac{x}{X}\right) \cdot dx$$

Die Ausführung der Integration und das Einsetzen des Wertes von D_k liefert das Endergebnis:

$$Q = c \cdot \gamma \cdot 2 X \cdot Y \cdot Z \cdot \theta_c \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin^2 \delta_k}{\delta_k^2 + \delta_k \cdot \sin \delta_k \cdot \cos \delta_k} \left(1 - e^{-\delta_k^2 \cdot \frac{a \cdot \tau}{X^2}}\right). \quad (25a).$$

Der erste Teil dieses Ausdruckes — nämlich $c \cdot \gamma \cdot 2 X \cdot Y \cdot Z \cdot \theta_c$ — stellt den ursprünglichen Wärmehalt des Körpers, gemessen über Umgebungstemperatur, dar; wir wollen ihn mit $(W.J.)_0$ bezeichnen. Der Rest des Ausdruckes — die unendliche Summe — ist ein reiner Zahlenwert und stets kleiner als Eins. Er gibt an, welcher Bruchteil des ursprünglichen Wärmehaltes die Platte bereits verlassen hat und ist lediglich eine Funktion der Größe δ_k bzw. (hX) einerseits und $\frac{a \tau}{X^2}$ andererseits. Wir können deshalb der Gleichung (25a) die Form

$$Q = (W. J.)_0 \cdot \Psi_3 \left(h X, \frac{a \tau}{X^2}\right) \dots \dots \dots (25b)$$

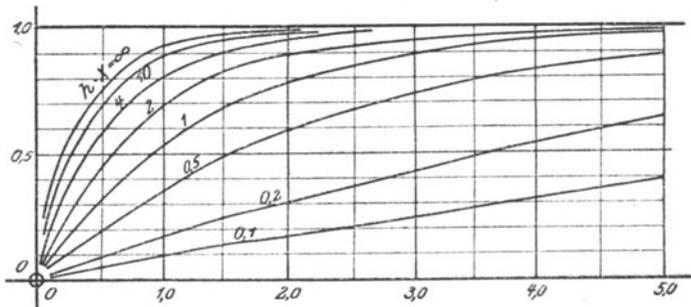


Fig. 18. Zu Gleichung (25b). Abszissen: $a \cdot \tau / X^2$
 Parameter: $h \cdot X$
 Ordinaten: Funktion Ψ in Gleich. (25b).

Die zahlenmäßige Berechnung dieser Funktion ist eine sehr umständliche und zeitraubende Arbeit. Ich habe deshalb die Funktion für mehrere Werte ihrer Veränderlichen berechnet und in untenstehender Zahlentafel zusammengestellt. Dem Zeichen Ψ ist der Zeiger 3 beigegeben um auf die zugehörige Zahlentafel hinzuweisen.

Zahrentafel Nr. 3.
Wärmeverlust der Platte.

$h \cdot X =$	∞	50	10	4	2	1	0,5	0,2	0,1
$\frac{a \tau}{X^2} = 0,02$	0,13	0,12	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00
0,05	0,25	0,23	0,18	0,12	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01
0,1	0,36	0,34	0,27	0,20	0,12	0,08	0,05	0,03	0,02
0,5	0,76	0,75	0,69	0,58	0,46	0,32	0,20	0,09	0,05
1,0	0,93	0,92	0,89	0,81	0,69	0,53	0,35	0,17	0,10
2,0	0,99	0,99	0,98	0,96	0,89	0,78	0,59	0,31	0,17
5,0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,98	0,88	0,63	0,39
10,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,84	0,62
20,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,93	0,81
50,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,92

Aufgabe 2. Der Zylinder.

„Ein unendlich langer Kreiszyylinder vom Radius R gebe durch seine Oberfläche seine Wärme an die Umgebung ab. Die W. Ü. Z. besitze den Wert a und die Umgebungstemperatur ϑ sei gleich Null. Zur Zeit $\tau = 0$ besitze der Zylinder überall die einheitliche Temperatur $\Theta = \Theta_c$. Ferner seien die Stoffwerte λ , c und γ , also auch a bekannt. — Es sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Betrag des Wärmeverlustes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen.“

a) **Der mathematische Ansatz.** Als geeignetes Koordinatensystem ergibt sich von selbst das Zylinderkoordinatensystem. Der Vorgang spielt sich unabhängig von φ und z ab, ist also nur von der einen Koordinate r abhängig. Es ergibt sich der mathematische Ansatz:

$$\text{Differentialgleichung: } \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)$$

$$\text{Oberflächenbedingung: } \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \right)_{r=R} = -h \cdot \Theta_{r=R}$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \Theta = \Theta_c \text{ für } 0 < r < R. \\ \tau = 0$$

b) **Berechnung des Temperaturfeldes.** Da es sich um einen Vorgang handelt, bei dem Temperaturunterschiede ihrem Ausgleich zustreben setzen wir (vgl. S. 27)

$$\Theta = D \cdot e^{-q^2 a \tau} \cdot \psi(r)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich für $\psi(r)$ die Gleichung

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi(r)}{dr} + q^2 \cdot \psi(r) = 0.$$

Es ist dies die schon früher erwähnte Besselsche Differentialgleichung (11b), deren Lösungen bekannt sind als die beiden Besselschen Funk-

tionen von der nullten Ordnung. Die Funktion $J_0(nx)$ ist eine gerade, die Funktion $Y_0(mx)$ eine ungerade Funktion. Aus denselben Gründen wie bei der vorhergehenden Aufgabe ist auch hier die ungerade Funktion unbrauchbar und es verbleibt so als einziges partikuläres Integral

$$\theta = D \cdot e^{-n^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot J_0(nr)$$

Die Oberflächenbedingung liefert für n die Gleichung

$$\left[\frac{d}{dr} J_0(nr) \right]_{r=R} = -h \cdot \left[J_0(nr) \right]_{r=R}$$

und dies gibt nach S. 42 die transzendente Gleichung

$$(nR) \cdot J_1(nR) = + (hR) \cdot J_0(nR),$$

welche unendlich viele Wurzeln $\mu_k = (n_k \cdot R)$ besitzt. Zahlentafel Nr. 4 gibt die ersten 4 Wurzeln dieser Gleichung für verschiedene Werte des Parameters wieder.

Zahlentafel Nr. 4.

Wurzeln der Gleichung: $\mu \cdot J_1(\mu) = + h \cdot R \cdot J_0(\mu)$;

$(h \cdot R)$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
∞	2,405	5,520	8,654	11,792	14,931
50	2,35	5,41	8,48	11,56	—
20	2,29	5,26	8,25	11,27	—
10	2,17	5,03	7,96	10,94	—
4	1,906	4,60	7,52	10,54	—
1,0	1,253	4,08	7,16	10,27	—
0,5	0,940	3,96	7,09	10,22	—
0,1	0,443	3,86	7,03	10,19	—
0,05	0,315	3,85	7,02	10,18	—
0,00	0,000	3,832	7,016	10,174	13,324

Aus unendlich vielen Teillösungen läßt sich die allgemeine Lösung zusammensetzen

$$\theta = \sum_1^{\infty} D_k \cdot e^{-n_k^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot J_0(n_k r).$$

Hierin sind die Koeffizienten D_k mit Hilfe von Formel (23a) zu bestimmen:

$$D_k = \frac{\theta_c \int_0^R r \cdot J_0(n_k r) \cdot dr}{J_1^2(n_k R)}$$

$$= \theta_c \cdot 2 \cdot \frac{1}{(n_k R)} \cdot \frac{J_1(n_k R)}{J_0^2(n_k R) + J_1^2(n_k R)}$$

Mit Einführung der Bezeichnung μ_k für $(n_k R)$ ergibt sich die Gleichung des Temperaturverlaufes zu:

$$\theta = \theta_c \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{J_1(\mu_k)}{J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)} \cdot e^{-\mu_k^2 \cdot \frac{a \tau}{R^2}} \cdot J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) \dots \dots (26a)$$

$$= \theta_c \cdot \Phi\left(hR, \frac{a \tau}{R^2}, \frac{r}{R}\right) \dots \dots \dots (26b)$$

Die Funktion des Temperaturfeldes entspricht also vollkommen in Form und Bauart der Gleichung (24a und b) bei der Platte.

Im Sonderfall, daß hR unendlich groß ist, wird $J_0(\mu_k)$ stets gleich Null und es entsteht statt (26) die Gleichung:

$$\theta = \theta_c \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{\mu_k} \cdot \frac{1}{J_1(\mu_k)} \cdot e^{-\mu_k^2 \cdot \frac{a \tau}{R^2}} \cdot J_0\left(\mu_k \cdot \frac{r}{R}\right) = \theta_c \cdot \Phi\left(\frac{a \tau}{R^2}, \frac{r}{R}\right).$$

c) **Berechnung des Wärmeverlustes Q.** Der Wärmeverlust, den ein Raumteil dv des Zylinders erleidet, wenn er von θ_c auf θ_τ abgekühlt wurde, ist gleich

$$c \cdot \gamma \cdot (\theta_c - \theta_\tau) \cdot dv$$

Hierin ist $dv = r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dz$

$$\text{und } \theta_c - \theta_\tau = \sum D_k (1 - e^{-n_k^2 a \tau}) \cdot J_0(n_k r).$$

Durch Integration über ein Stück des Zylinders von der Länge Z ergibt sich:

$$Q = c \cdot \gamma \int_{r=0}^{r=R} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0}^z \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot (1 - e^{-n_k^2 a \tau}) r \cdot J_0(n_k r) \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot c \cdot \gamma \cdot Z \cdot \sum_1^{\infty} D_k \cdot (1 - e^{-n_k^2 a \tau}) \int_{r=0}^{r=R} J_0(n_k r) \cdot r \cdot dr$$

$$= 2 \dots \dots \dots \cdot \frac{R^2}{\mu_k} \cdot J_1(\mu_k)$$

$$= R^2 \pi \cdot Z \cdot c \cdot \gamma \cdot \theta_c \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} 4 \frac{1}{\mu_k^2} \cdot \frac{J_1^2(\mu_k)}{J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(1 - e^{-\mu_k^2 \cdot \frac{a \tau}{R^2}}\right) \dots \dots (27a)$$

$$= (W.J.)_0 \cdot \Psi_5\left(h \cdot R, \frac{a \cdot \tau}{R^2}\right) \dots \dots \dots (27b)$$

Hierin ist wieder $(W.J.)_0$ der ursprüngliche Wärmehalt und Ψ die in nachstehender Tabelle wiedergegebene Funktion.

Zahlentafel Nr. 5.
Wärmeverlust des Zylinders.

h R =	∞	50	20	10	4	1,0	0,5	0,1
$\frac{a \tau}{R^2} = 0,01$	0,22	0,18	0,15	0,11	0,05	0,02	0,01	0,00
0,05	0,45	0,42	0,38	0,32	0,21	0,08	0,05	0,01
0,1	0,61	0,58	0,54	0,48	0,37	0,15	0,09	0,02
0,25	0,84	0,81	0,79	0,75	0,62	0,23	0,20	0,05
0,5	0,96	0,95	0,94	0,92	0,85	0,55	0,36	0,09
1,0	1,00	1,00	1,00	0,99	0,98	0,79	0,59	0,18
2,5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,89	0,39
5,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,62
10,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,86
25,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99

Aufgabe 3. Die Kugel.

„Eine Kugel vom Radius R gebe durch ihre Oberfläche ihre Wärme an die Umgebung ab. Die W.Ü.Z. habe den Wert a und die Umgebungstemperatur ϑ sei gleich Null. Zur Zeit $\tau = 0$ besitze die Kugel überall die einheitliche Temperatur θ_c , ferner seien die Stoffwerte λ , c und γ , also auch a bekannt. — Es sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Betrag des Wärmeverlustes in ihrer Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen.“

a) Der mathematische Ansatz. Da die Temperatur nur von r allein abhängt, ergibt das Kugelkoordinatensystem den Ansatz:

$$\text{Differentialgleichung: } \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \right).$$

$$\text{Oberflächenbedingung: } \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=R} = -h \cdot \theta_{r=R}.$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \theta_{\tau=0} = \theta_c \text{ für } 0 < r < R;$$

b) Die Berechnung des Temperaturfeldes. Der Versuch

$$\theta = D \cdot e^{-q^2 a \tau} \cdot \psi(r)$$

zu setzen, führt auf die schon bekannte Gleichung (11c) für $\psi(r)$. Die Lösungen dieser Gleichung sind bekannt zu

$$\theta = C \cdot \frac{\cos(mr)}{(mr)} \text{ und } D \cdot \frac{\sin(nr)}{(nr)}.$$

Von diesen Lösungen ist die erste eine ungerade Funktion und deshalb für das vorliegende Problem nicht brauchbar. Es bleibt deshalb nur

$$\theta = D \cdot e^{-n^2 a \tau} \cdot \frac{\sin(nr)}{(nr)}.$$

Die Werte n bestimmen sich aus der Oberflächenbedingung

$$\left[\frac{d}{dr} \frac{\sin(nr)}{(nr)} \right]_{r=R} = -h \cdot \left[\frac{\sin(nr)}{(nr)} \right]_{r=R}$$

$$(nR) \cdot \cos(nR) = (1 - hR) \cdot \sin(nR)$$

$$(1 - hR) = (nR) \cdot \cotg(nR)$$

Die ersten vier Wurzeln ν_k dieser transzendenten Gleichung sind in der nachstehenden Zahlentafel zusammengestellt.

Zahlentafel Nr. 6.

Wurzeln der Gleichung: $\nu \cdot \cos \nu = (1 - h \cdot R) \cdot \sin \nu$.

h R	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4
∞	3,14	6,28	9,42	12,57
50	3,08	6,12	9,24	12,31
20	2,98	5,98	8,98	12,00
10	2,84	5,72	8,66	11,65
4	2,45	5,23	8,20	11,25
1,0	1,57	4,71	7,85	10,99
0,5	1,17	4,60	7,79	10,95
0,1	0,54	4,52	7,74	10,91
0,05	0,39	4,51	7,72	10,91
0,00	0,00	4,49	7,72	10,90

In der allgemeinen Lösung sind nun noch die Koeffizienten D_k zu bestimmen; dies geschieht mit Hilfe der Anfangsbedingung

$$\theta_{t=0} = \theta_c = \sum_{k=1}^{k=\infty} D_k \cdot \frac{\sin(n_k r)}{(n_k r)}$$

Mit Hilfe der etwas abgeänderten Gleichung (15a) ergibt sich

$$D_k = \frac{\int_0^R \theta_c \cdot (nr) \sin(nr) \cdot dr}{\int_0^R \sin^2(nr) \cdot dr} = \theta_c \cdot 2 \frac{\sin(n_k R) - (n_k R) \cdot \cos(n_k R)}{(n_k R) - \sin(n_k R) \cdot \cos(n_k R)}$$

Mit Einführung der Bezeichnung ν_k für $(n_k R)$ entsteht die Gleichung des Temperaturfeldes:

$$\theta = \theta_c \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin \nu_k - \nu_k \cdot \cos \nu_k}{\nu_k - \sin \nu_k \cdot \cos \nu_k} \cdot e^{-\nu_k^2 \cdot \frac{a \tau}{R^2}} \cdot \frac{\sin\left(\nu_k \cdot \frac{r}{R}\right)}{\nu_k \cdot \frac{r}{R}} \quad (28a)$$

$$\theta = \theta_c \cdot \Phi\left(hR, \frac{a \tau}{R^2}, \frac{r}{R}\right) \dots \dots \dots (28b)$$

Besprechung der Aufgaben 1, 2 und 3.

Der gemeinsame Charakter der drei Aufgaben kommt schon bei ihrer Aufstellung im Wortlaut, sodann bei ihrer Lösung in den angewandten Methoden und zuletzt im Endergebnis klar zum Ausdruck. Das Temperaturfeld hängt nur von einer Koordinate ξ ab und es kommt nur eine Körperabmessung in Betracht. Wir wollen diese mit L bezeichnen und je nach Fall als H , R oder R deuten.

Dann ist die Gleichung des Temperaturfeldes in allen drei Fällen von der Form

$$\theta = \theta_c \cdot \Phi \left(hL, \frac{a\tau}{L^2}, \frac{\xi}{L} \right),$$

wobei Φ bei allen drei Aufgaben eine Funktion von ganz gleichem Charakter ist. Die zahlenmäßigen Abweichungen werden wir unten bei den Zahlenbeispielen besprechen.

Die Gleichung des Temperaturverlustes lautet

$$Q = (W. J.)_0 \cdot \Psi \left(hL, \frac{a\tau}{L^2} \right).$$

Für die Funktion Ψ gilt das Gleiche, was oben bei der Funktion Φ gesagt wurde.

Die Funktion Φ läßt sich, als eine Funktion mit 3 Veränderlichen natürlich nicht in einer einzigen Tabelle oder Zeichnung darstellen, wie wir das bei der Funktion Ψ taten.

Wir bezeichnen als Temperatur der Mitte bei der Platte die Temperatur in der Mittelebene, beim Zylinder in Achse und bei der Kugel im Mittelpunkt. Setzen wir in der Gleichung des Temperaturfeldes $\xi = 0$, so erhalten wir eine Funktion mit zwei Veränderlichen

$$h \cdot L \text{ und } \frac{a \cdot \tau}{L^2}$$

welche den Verlauf der Temperatur der Mitte darstellt und sich in einer Tabelle oder durch eine Kurvenschar darstellen ließe. Gleiches gilt, wenn man $\xi = L$ setzt, für die Oberflächentemperatur.

Der Einfluß der relativen Wärmeübergangszahl $h = \alpha : \lambda$.

Dieser Einfluß erhellt am besten aus nachstehender Zeichnung Nr. 19. Bei Besprechung der dritten Randbedingung (s. S. 14) hatten wir die Bedeutung der Größe $1 : h$ in der zeichnerischen Darstellung des Temperaturfeldes kennen gelernt.

Ist in einem ersten Fall h sehr klein, also $1 : h$ sehr groß, so liegt der Punkt, durch den alle Tangenten an die Temperaturkurve gehen müssen, sehr weit außen und die Temperaturkurven werden sehr flach. Dies besagt, daß der Unterschied zwischen Oberflächentemperatur und Temperatur der Mitte nie sehr groß werden wird, oder mit anderen Worten, daß sich der Körper in seiner ganzen Dicke ziemlich gleichmäßig abkühlen wird.

Wenn dagegen in einem zweiten Falle h sehr groß, also $1 : h$ sehr klein ist, so liegt der Schnittpunkt der Tangenten sehr nahe der Oberfläche und die Temperaturkurven werden sehr steil werden. Dies bringt zum Ausdruck, daß sich der Körper in seinen äußeren Schichten sehr rasch abkühlt, während die tiefer gelegenen Schichten, vor allem die Mitte nur sehr langsam nachfolgt.

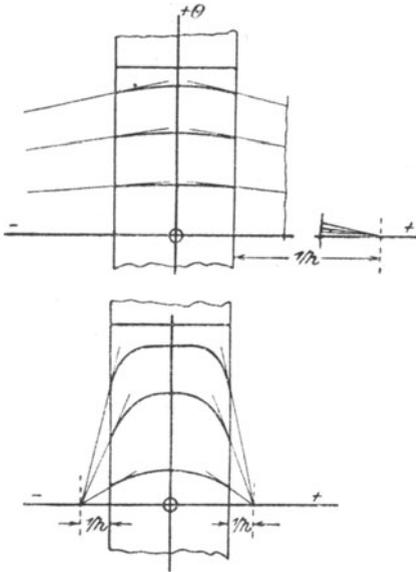


Fig. 19. Abkühlung einer Platte bei kleinen und bei großen Werten $h = \alpha/\lambda$.

1. Zahlenbeispiel.

Drei Körper aus Sandstein, eine Platte, eine Säule und eine Kugel von der Dicke bzw. vom Durchmesser 20 cm sollen zur Zeit $\tau = 0$ eine einheitliche Temperatur haben und dann in eine niedrigere Umgebungstemperatur gebracht werden. Welchen Bruchteil ihres Wärmeüberschusses haben sie nach Verlauf von einer Stunde verloren, wenn die W. Ü. Z. = 6,0 angenommen wird.

Aus den physikalischen Tabellen entnehmen wir für Sandstein

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 0,6 \frac{\text{W. E.}}{\text{m} \cdot \text{Std} \cdot \text{Grad}} \\ c &= 0,22 \frac{\text{W. E.}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} \\ \gamma &= 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Daraus} \\ a &= \frac{0,6}{0,22 \cdot 2300} \\ &= 0,00118 \frac{\text{m}^2}{\text{std.}} \end{aligned}$$

Mit diesen Stoffwerten und mit $L = 0,1$ und $\tau = 1$ wird

$$hL = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot L = \frac{6,0}{0,6} \cdot 0,1 = 1,0,$$

$$\frac{a\tau}{L^2} = \frac{0,00118 \cdot 1}{0,01} = 0,118.$$

Damit wird Ψ , der Bruchteil der abgegebenen Wärmemenge für die Platte aus Tabelle 3 : $\Psi = 0,09$;

„ „ Säule „ „ 5 : $\Psi = 0,17$;

„ „ Kugel „ „ 7 : $\Psi = 0,27$;

Nach Ablauf von 10 Stunden haben wir mit

$$\frac{a \tau}{L^2} = 1,118$$

- für die Platte: $\Psi = 0,59$
- „ „ Säule: $\Psi = 0,85$
- „ „ Kugel: $\Psi = 0,96$.

Diese Beträge mögen vielleicht manchem Leser etwas gering erscheinen. Allein ich erinnere an einen Vorgang, den man im Winter an den Säulen von Gebäuden beobachten kann und der zeigt, wie langsam solche Wärmeleitvorgänge verlaufen. Wenn etwa eine Woche lang starke Kälte geherrscht hat und es tritt plötzlich Tauwetter ein, so beschlagen sich die Säulen der Gebäude mit einer Eisschicht, die man noch 1—2 Tage nach Eintritt des Tauwetters vorfinden kann. Es ist dies ein Beweis dafür, daß nach dieser langen Zeit sogar die Oberfläche noch unter null Grad kalt ist. Die inneren Schichten werden dann sicher noch kälter sein.

Eine genaue messende Verfolgung solcher Vorgänge wäre sehr wohl geeignet, um daraus durch ein rückwärts Verfolgen des Rechnungsganges die W.Ü.Z. zu bestimmen.

2. Zahlenbeispiel.

Vier Kugeln von 10 cm Durchmesser bestehend aus chemisch reinem Kupfer, Eisen, Sandstein und Kork sollen zur Zeit $\tau = 0$ eine einheitliche Temperatur besitzen. Sie werden dann in Flüssigkeit von niedriger (oder höherer) Temperatur gebracht und dort kräftig bewegt; $\alpha = 1000$. Welchen Bruchteil ihres Wärmeüberschusses haben sie nach Ablauf von 3 Minuten an die Umgebung abgegeben.

	Kupfer	Eisen	Sandstein	Kork
Aus phys. Tabellen $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \\ c = \\ \gamma = \end{array} \right.$	320 0,094 8 900	45 0,115 7 700	0,6 0,22 2 300	0,08 rd. 0,3 240
Durch Rechnung $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \\ h = \frac{\alpha}{\lambda} \end{array} \right.$	0,38 3,13	0,058 22,2	0,0012 1670	0,0011 12500
Mit diesen Werten und mit $R = 0,05$ m u. $\tau = \frac{1}{20}$ Std. ergibt sich:				
$h R =$	0,157	1,11	83	625
$\frac{a \tau}{R^2} =$	7,6	1,2	0,025	0,022
Aus Tabelle Nr. 7: $\Psi =$	0,94	0,95	0,45	0,47
Außerdem ist $(W. J.)_0 =$	0,446	0,474	0,270	0,039

3. Zahlenbeispiel.

Wir wollen wieder mit denselben vier Kugeln des vorhergehenden Zahlenbeispiels denselben Abkühlungsvorgang durchführen, aber jetzt die Frage stellen: Innerhalb welchen Zeitraumes haben die Kugeln den halben Betrag ihres Wärmeinhaltes abgegeben.

Diese Frage nach der Halbwertszeit läuft darauf hinaus, daß wir jenen Wert von $a\tau : R^2$ suchen, für den $\Psi = 1/2$ ist und aus diesem Wert dann τ berechnen.

	Kupfer	Eisen	Sandstein	Kork
Nach 2. Zahlenbeispiel: $h \cdot R =$	0,157	1,11	83	625
Aus Tabelle Nr. 7 ist $\Psi = 1/2$ bei einem Wert $\frac{a\tau}{R^2} =$	1,4	0,25	0,032	0,030
Nach 2. Zahlenbeispiel: $\frac{a}{0,0025} =$	152	23,2	0,48	0,44
Durch Division: . . . $\tau =$	0,0092	0,0108	0,067	0,068
$=$	33 Sek.	39 Sek.	4,0 Min.	4,1 Min.

Beachtenswert ist hier der Vergleich zwischen der Kupferkugel und der Eisenkugel. Kupfer und Eisen stimmen in Dichte und spezifischer Wärme fast überein. Dagegen hat Kupfer einen etwa 7 mal so hohen Wert der W.L.F. λ als Eisen. Trotzdem kühlen sich beide etwa gleich rasch ab. Die Erklärung dafür ist folgende: Der hohe Wert λ erhöht zwar den Wert $a\tau : R^2$ und führt damit zu größeren Werten Ψ ; aber der hohe Wert λ vermindert die relative äußere W.Ü.Z. $h = a : \lambda$ und damit wieder den Wert Ψ , wie das aus Zahlentafel Nr. 7 abzulesen ist.

Aufgabe 4. Der allseitig unendlich ausgedehnte Körper.

„In einem allseitig unendlich ausgedehnten Körper ist ein Koordinatensystem x, y, z festgelegt. Zur Zeit $\tau = 0$ möge im Körper eine

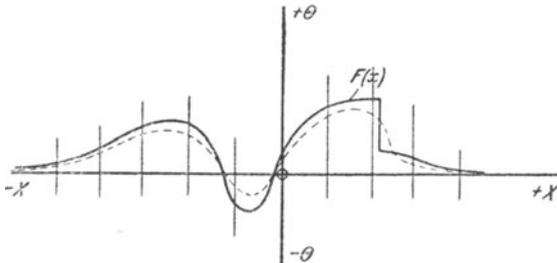


Fig. 20. Allseitig unendlich ausgedehnter Körper. — Temperaturverteilung nur von einer Koordinate abhängig.

solche Temperaturverteilung herrschen, daß die Temperatur nur mit x sich ändert und zwar nach dem Gesetz $\theta_{\tau=0} = F(x)$. Die Flächen

gleicher Temperatur sind also lauter Ebenen parallel zur y-z-Ebene. Die Stoffwerte λ , c und γ gelten als bekannt. — Es ist zu untersuchen, wie sich diese Anfangstemperaturverteilung mit der Zeit ändert.“

a) **Der mathematische Ansatz.** Da sich der Körper allseitig ins Unendliche erstreckt, so fällt die Oberflächenbedingung weg und es verbleibt

$$\text{Differentialgleichung: } \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$$

$$\text{Anfangsbedingung: } \Theta_{\tau=0} = F(x).$$

b) **Lösung mit Verwendung der Fourierschen Integrale.** Wir gehen aus von den partikulären Integralen:

$$\Theta = C \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \sin(qx) \text{ und } \Theta = D \cdot e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \cos(qx).$$

Da die Oberflächenbedingung fehlt, können die Werte q die Zahlen stetig durchlaufen und zwei aufeinanderfolgende Werte von q unterscheiden sich nur um das Differential dq . Ferner können wir statt der willkürlichen Koeffizienten C und D die Werte aus zwei willkürlichen Funktionen f_1 und f_2 von q setzen, also

$$C = f_1(q) \text{ und } D = f_2(q)$$

So können wir aus Teillösungen die allgemeine Lösung aufbauen; die unendliche Summe wird hierbei wegen der Stetigkeit der q -Werte zum Integral

$$\Theta = \int_0^{+\infty} e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \{ f_1(q) \cdot \sin(qx) + f_2(q) \cdot \cos(qx) \} dq.$$

Zur Bestimmung der noch willkürlichen Funktionen f_1 und f_2 dient die Anfangsbedingung. Aus der letzten Gleichung erhalten wir für $\tau = 0$ die Bedingung:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \{ f_1(q) \cdot \sin(qx) + f_2(q) \cdot \cos(qx) \} dq.$$

Die Formel Nr. 20 über Fouriersche Integrale können wir auf die Form bringen:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{q=0}^{q=\infty} dq \cdot \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} F(\xi) \{ \cos(q\xi) \cdot \cos(qx) + \sin(q\xi) \cdot \sin(qx) \} d\xi.$$

Damit beide Gleichungen für $F(x)$ übereinstimmen, muß sein:

$$f_1(q) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \sin(q\xi) \cdot d\xi$$

$$f_2(q) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \cos(q\xi) \cdot d\xi.$$

Die Gleichung des Temperaturfeldes heißt damit:

$$\theta = \int_0^{\infty} e^{-q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot dq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot \cos(q \cdot (\xi - x)) \cdot d\xi \quad \dots \quad (30)$$

Wird für irgendeine Funktion F diese zweimalige Integration durchgeführt, so kommen im Endergebnis die Größen q und ξ nicht mehr vor. Dies ist vielmehr nur noch eine Funktion von a , τ und x .

Hier ist noch zu bemerken, daß die Gleichung (30) nur dann anwendbar ist, wenn die Funktion den Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Integrale entspricht, also insbesondere, wenn sie mit unendlich wachsendem x sich so rasch der Null nähert, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cdot dx \text{ endlich bleibt.}$$

Dadurch verliert die Gleichung (30) erheblich an praktischer Bedeutung. Es gibt aber noch eine zweite vielseitigere Methode.

e) Lösung mit Verwendung des Gaußschen Fehlergesetzes. Wenn die vorgegebene Funktion $F(x)$ diese Bedingung nicht erfüllt, wenn sie also im Unendlichen endlich bleibt, oder sich doch nicht so rasch der Null nähert, daß das Integral endlich bleibt, so führt der angegebene Weg nicht zum Ziel. Wir erinnern uns dann daran, daß unsere Differentialgleichung auch noch andere partikuläre Integrale besitzt (vgl. S. 27), z. B.

$$\theta = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a\tau}}$$

Bevor wir dies Integral näher besprechen können, müssen wir eine rein mathematische Betrachtung aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung einschalten.

Das Gaußsche Fehlergesetz.

Wir wollen einen Vorgang betrachten, der den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterworfen ist und wählen dazu den Schuß aus einer Schußwaffe. Wenn wir ein Trefferbild von sehr vielen Schüssen betrachten, so sehen wir, daß die Schüsse nahe der Mitte dichter liegen als am Rande. Tragen wir die zu einer bestimmten Abweichung Δ gehörige Dichte y in einem Koordinatensystem auf, so erhalten wir die in Fig. 21 stark ausgezogene Kurve. Diese Kurve folgt dem Gesetz

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot g \cdot e^{-g^2 \cdot \Delta^2};$$

hierin sind C_1 und g zwei Größen, deren Bedeutung sogleich erklärt wird; sie sind beide bei der stark gezeichneten Kurve gleich 1 gewählt. Gibt man dem Parameter g einen größeren Wert, rechnet damit die Gleichung neu durch, und trägt das Ergebnis graphisch auf, so verläuft die Kurve steiler und schmaler, das heißt die Schüsse gruppieren sich näher um

die Mitte oder mit anderen Worten, der Schütze und das Gewehr haben genauer geschossen. Daher heißt g der Genauigkeitsfaktor.

Die Wahrscheinlichkeit w , daß das Stück $d\Delta$ der Δ -Achse getroffen wird, ist — wenn wir von einer Streuung in der Breite absehen — gleich

$$w = y \cdot d\Delta = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot g \cdot e^{-g^2 \Delta^2} \cdot d\Delta.$$

Und die Wahrscheinlichkeit W , daß die ganze Δ -Achse getroffen wird, ergibt sich durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$. Diese Wahr-

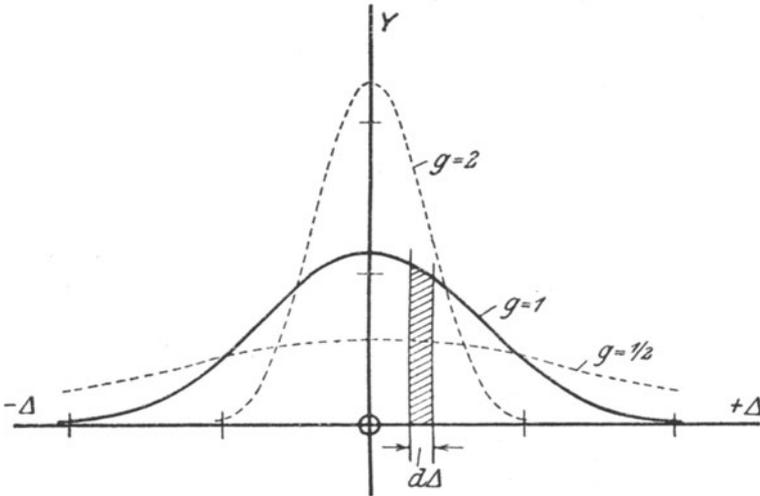


Fig. 21. Fehlergesetz.

scheinlichkeit ist aber gleich der Anzahl der Schüsse, denn die Wahrscheinlichkeit, daß der einzelne Schuß die unendlich lange Δ -Achse trifft, ist ja gleich $100\%_0 = 1$. Es ist

$$W = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-g^2 \Delta^2} \cdot dg \Delta$$

Nun ist nach den Lehren der Integralrechnung (z. B. Hütte, Mathematik, IV. F. f. Nr. 10)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cdot dz = \sqrt{\pi}.$$

Damit wird $W = C_1$; d. h. C_1 bedeutet die Anzahl der Schüsse. In der Zeichnung bedeutet w den schmalen Streifen über $d\Delta$ und W sowie C_1 die ganze Fläche unter der Kurve. Diese Fläche ist aber unabhängig vom Wert g und immer gleich C_1 .

Wir heben aus dieser Besprechung des Fehlergesetzes folgendes hervor:

Die Gleichung

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot g \cdot e^{-g^2 \Delta^2}$$

stellt die in Fig. 21 gezeichnete Kurvenschar dar. Mit wachsendem Wert des Parameters g wird die Kurve steiler, mit abnehmendem Wert wird sie flacher.

Die Größe C_1 stellt die Fläche dar, die zwischen der Abszissenachse und den einzelnen Kurven liegt. Diese Fläche ist bei allen Kurven gleich, also unabhängig vom Parameter g . Wenn der Scheitel nicht auf der y -Achse liegt, sondern bei $\Delta = \Delta_0$, wenn also eine Koordinatenverschiebung eingetreten ist, nach der Gleichung $\Delta' = \Delta - \Delta_0$, so heißt das Gaußsche Fehlergesetz

$$y = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot g \cdot e^{-g^2 \cdot (\Delta - \Delta_0)^2}.$$

Das partikuläre Integral der Wärmeleitungsgleichung.

Wir betrachten nun unser partikuläres Integral

$$\Theta = C \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}}.$$

Dabei fällt die Ähnlichkeit mit dem Gaußschen Fehlergesetz sofort auf, und wir brauchen nur statt der willkürlichen Konstanten C eine neue Konstante C_1 einzuführen nach der Gleichung

$$C = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a}}$$

und die Ähnlichkeit wird zur Übereinstimmung. Es tritt

$$\begin{array}{l} \xi \text{ an Stelle von } \Delta \\ x \text{ ,, ,, ,, } \Delta_0 \text{ und} \\ 1 \\ \sqrt{4a\tau} \text{ ,, ,, ,, } g. \end{array}$$

Wenn wir in unserem allseitig unendlich ausgedehnten Körper zu einer Zeit, die wir τ_1 nennen wollen, eine solche Temperaturverteilung vorfinden, daß sie der Gleichung

$$\Theta = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau_1}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau_1}}$$

entspricht (in Fig. 22 die ausgezogene Kurve), so können wir aus ihr eine beliebig spätere Temperaturverteilung ableiten, indem wir den Wert τ_2 einsetzen (in der Figur die strichpunktierte Linie). Umgekehrt können wir nun fragen, aus welcher früheren Temperaturverteilung muß die vorgegebene Temperaturverteilung entstanden sein. Wir wissen, daß die Kurve für abnehmendes τ — also für zunehmendes $1 : \sqrt{4a\tau}$ — immer steiler wird, bis sie schließlich sich in einen unendlich schmalen Streifen von der Breite dx zusammenzieht (in der Figur die gestrichelte Linie). Die Ordinate wird dann an dieser Stelle unendlich groß, weil die Fläche unter der Kurve endlich bleiben muß.

Wir wollen noch die Wärmemenge berechnen, die in einem unendlich langen Prisma, das wir uns parallel zur x -Achse aus dem Körper herausgeschnitten denken, enthalten ist. Der Querschnitt des Prismas sei $dy \cdot dz$.

Aus der Gleichung

$$dQ = c \cdot \gamma \cdot \Theta \cdot dy \cdot dz \cdot dx$$

ergibt sich durch Integration

$$Q = c \cdot \gamma \cdot dy \cdot dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot dx = c \cdot \gamma \cdot dy \cdot dz \cdot C_1.$$

Die Größe C_1 stellt also, in einem Maßstab, der von dem Werte $c \cdot \gamma$ abhängt, den Wärmehalt des Prismas dar. Da in Richtung der y - und

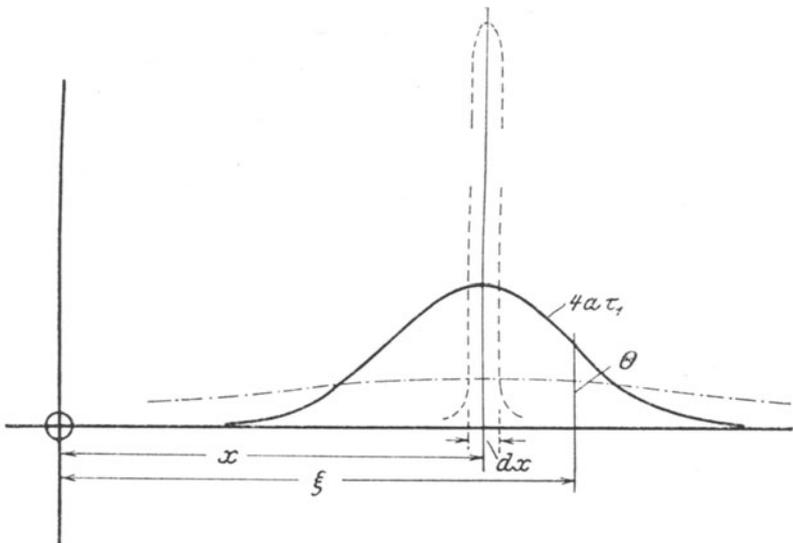


Fig. 22. Methode der Quellpunkte.

z -Achse kein Temperaturgefälle vorhanden ist, so muß diese Wärmemenge von τ unabhängig sein, also muß C_1 auch vom physikalischen Standpunkt aus konstant sein.

Die Lösung der Aufgabe.

Wir erinnern uns jetzt daran, daß der erste Weg (unter b) dann nicht zum Ziele führt, wenn sich die Anfangsverteilung nicht durch ein Fouriersches Integral darstellen läßt. Wir können uns aber diese Anfangsverteilung durch Aneinanderreihung von Einzelverteilungen gebildet denken, von denen jede dem Gesetze

$$\Theta = \lim_{\tau=0} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}}$$

gehört (vgl. Fig. 23). Da die Temperatur in jeder so gebildeten unendlich dünnen Schicht $d\xi$ endlich ist, also ihr Wärmehalt unendlich klein sein muß, ist auch die Konstante C_1 nur unendlich klein, nämlich

$$C_1 = \frac{dQ}{c \cdot \gamma \cdot dy \cdot dz} = \theta_{\tau=0} \cdot d\xi = F(\xi) \cdot d\xi.$$

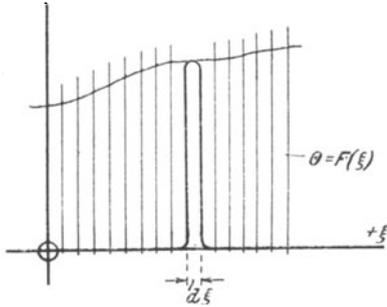


Fig. 23. Methode der Quellpunkte.

Für den Grenzfall $\tau = 0$ lagern sich diese Einzeltemperaturverteilungen aneinander, während sie sich für spätere Zeiten auch übereinander lagern. Wir erhalten so für das Temperaturfeld zur Zeit τ die Gleichung:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot d\xi \quad \dots \quad (31)$$

Diese Lösung ist allgemeiner als Gleichung (30), weil in ihr $F(x)$ eine ganz willkürlich gegebene Funktion sein darf.

Das vorstehend geschilderte Verfahren wird in der mathematischen Physik meist als die Methode der Quellpunkte bezeichnet.

Aufgabe 5. Der einseitig unendlich ausgedehnte Körper.

Wir denken uns von dem allseitig unendlich ausgedehnten Körper, der der letzten Aufgabe zugrunde gelegt war, jene Hälfte, die auf der negativen x -Seite liegt, weggenommen. Es verbleibt dann ein Körper,

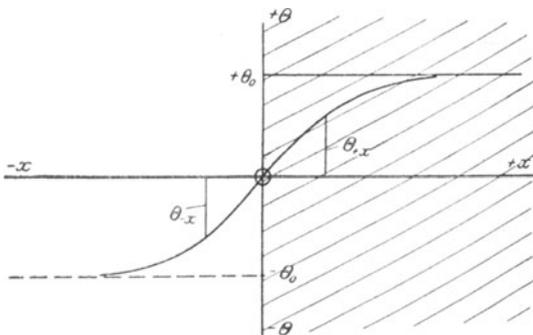


Fig. 24. Einseitig unendlich ausgedehnter Körper. — Temperaturverteilung nur von einer Koordinate abhängig.

dessen Oberfläche die $Y-Z$ -Ebene ist und der sich auf der einen Seite dieser Ebene ins Unendliche erstreckt. Wir wollen diesen Körper den einseitig unendlich ausgedehnten Körper nennen. Die Aufgabe 5 lautet dann: „Ein einseitig unendlich ausgedehnter Körper besitze zur Zeit $\tau = 0$ überall die einheitliche Temperatur θ_c . Für alle Zeiten $\tau > 0$ werde seine Oberfläche konstant auf

der Temperatur null gehalten. — Es ist für beliebige Zeiten die Temperaturverteilung und der Wärmeverlust zu berechnen.“

a) **Berechnung des Temperaturfeldes.** Wir verwenden den Kunstgriff, daß wir uns die Funktion $F(x)$ für negative x ergänzen, und zwar als eine ungerade Funktion, so daß $F(-x) = -F(x)$ (vgl. Fig. 24).

Dann bleibt die Temperaturverteilung aus Symmetriegründen auch für spätere Zeiten eine ungerade Funktion und der Funktionswert bleibt für $x = 0$ immer gleich Null. Damit bleibt die Oberflächenbedingung stets erfüllt.

Wir wollen nun die Gleichung (31) für unsere ergänzte Temperaturverteilung anschreiben und dabei das Integral durch die Grenze $\xi = 0$ in zwei Teile spalten:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\pm 0} F(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot d\xi + \int_{\pm 0}^{+\infty} F(\xi) \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot d\xi \right\}.$$

Beachten wir nun, daß $F(\xi)$ für positive Werte von ξ immer gleich $+\theta_c$ und für negative Werte von ξ immer gleich $-\theta_c$ ist, so erhalten wir

$$\theta = \theta_c \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \left\{ \int_{\pm 0}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot d\xi - \int_{-\infty}^{\pm 0} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a\tau}} \cdot d\xi \right\}$$

Hier führen wir eine neue Integrationsvariable ein, indem wir setzen:

$$\frac{\xi - x}{\sqrt{4a\tau}} = \eta; \quad \xi = \eta \cdot \sqrt{4a\tau} + x; \quad d\xi = \sqrt{4 \cdot a \cdot \tau} \cdot d\eta.$$

Es sind dann auch die Integrationsgrenzen zu ändern:

$$\begin{aligned} &\text{statt } \xi = +\infty \text{ ergibt sich } \eta = +\infty \\ &\quad \text{,, } \xi = -\infty \quad \text{,, } \quad \text{,, } \eta = -\infty \\ \text{und} \quad &\text{,, } \xi = \pm 0 \quad \text{,, } \quad \text{,, } \eta = \frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}. \end{aligned}$$

Damit wird die Gleichung für θ :

$$\theta = \theta_c \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \int_{\eta = \frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}}^{\eta = +\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta - \int_{\eta = -\infty}^{\eta = \frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\eta^2} \cdot d\eta \right\}.$$

Da $e^{-\eta^2}$ eine zu $\eta = 0$ symmetrische Funktion, also eine gerade Funktion ist, so ist nach Fig. 25 folgende zweimalige Umformung gestattet:

$$\theta = \theta_c \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\eta = \frac{-x}{\sqrt{4a\tau}}}^{\frac{+x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\eta^2} \cdot d\eta = \theta_c \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\eta = 0}^{\eta = \frac{+x}{\sqrt{4a\tau}}} e^{-\eta^2} \cdot d\eta \quad \dots \quad (32a)$$

Das letztgeschriebene Integral stellt die in Fig. 25 schraffierte Fläche dar und ist lediglich eine Funktion seiner oberen Grenze.

Der Ausdruck

$$F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} \cdot d\eta = G(z)$$

ist eine in der angewandten Mathematik sehr häufig vorkommende Größe und wird das Gaußsche Fehlerintegral $G(z)$ genannt.

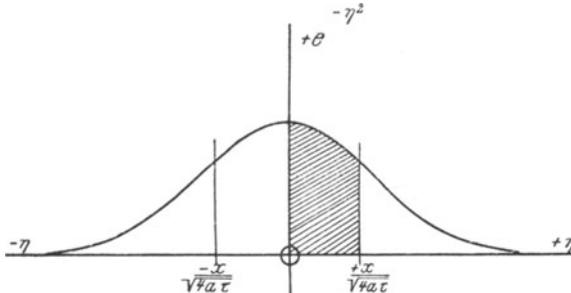


Fig. 25. Zur Umformung in Gleichung (32a).

Wir bekommen für das Temperaturfeld die Gleichung

$$\theta = \theta_C \cdot G\left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}}\right) \dots \dots \dots (32b)$$

Die Werte des Gaußschen Fehlerintegrals sind in der Tabelle Nr. 28 im Anhang zusammengestellt. In Anlehnung an die Gleichungen des Temperaturfeldes bei Platte, Zylinder und Kugel können wir auch schreiben:

$$\theta = \theta_C \cdot \Phi_8\left(\frac{a\tau}{x^2}\right) \dots \dots \dots (32c)$$

Die Werte dieser Funktion sind in Zahlentafel Nr. 8 zusammengestellt.

Zahlentafel Nr. 8.

Temperaturverlauf im einseitig unendlich ausgedehnten Körper.

$\frac{a\tau}{x^2}$	Φ	$\frac{a\tau}{x^2}$	Φ
0,0	1,00	2,0	0,38
0,1	0,97	3,0	0,32
0,2	0,89	4,0	0,28
0,3	0,80	5,0	0,25
0,4	0,74	6,0	0,23
0,5	0,68	7,0	0,21
0,6	0,63	8,0	0,19
0,7	0,60	9,0	0,18
0,8	0,58	10,0	0,17
0,9	0,55	20,0	0,12
1,0	0,53	100,0	0,06
(1,14)	(0,50)	∞	0,00

Wir wollen jetzt die Frage stellen, mit welcher Schnelligkeit sich eine gegebene Temperatur nach dem Inneren des Körpers fortpflanzt. Wir bilden die inverse Funktion zu Gleichung (32c), schreiben also

$$\frac{a\tau}{x^2} = \text{Funkt.} \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)$$

Daraus gewinnen wir die Zeit τ , die eine bestimmte Temperatur braucht, um bis zur Tiefe x vorzudringen, zu

$$\tau = \frac{x^2}{a} \cdot \text{Funkt.} \left(\frac{\theta}{\theta_c} \right)$$

Ist im besonderen Fall θ die Hälfte von θ_c , so ist nach Tabelle Nr. 8 der Wert der Funktion gleich 1,14.

Hierzu ein kurzes Zahlenbeispiel:

Wann ist in einem einseitig unendlich ausgedehnten Körper bei Kupfer, Eisen, Sandstein und Kork die Temperatur $\frac{1}{2} \theta_c$ bis zur Tiefe von 1 cm, 1 dm und 1 m vorgedrungen?

Da in der Gleichung x im Quadrat vorkommt, so braucht man die Zeiten, die man für 1 cm ausgerechnet hat, nur mit 100 und 10 000 zu multiplizieren, um die Werte für 1 dm und 1 m zu erhalten.

	Kupfer	Eisen	Sandstein	Kork
$a =$	0,38	0,058	0,0012	0,0011
Für 1cm ist $\tau = \frac{0,000114}{a} =$	$\frac{1,14}{3800} =$	$\frac{1,14}{580} =$	$\frac{1,14}{12} =$	$\frac{1,14}{11} =$
Für 1 cm $\tau =$	1,08 Sek.	7,1 Sek.	5,7 Min.	6,2 Min.
Für 1 dm $\tau =$	1 Min., 48 Sek	12 Min.	9½ Std.	10⅓ Std.
Für 1 m $\tau =$	3 Std.	20 Std.	40 Tage	43 Tage

b) Die Berechnung des Wärmeverlustes. Von den auf S. 49 gekennzeichneten Wegen benützen wir diesmal den ersten Weg.

$$dQ = -\lambda \cdot dy \cdot dz \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot d\tau.$$

Da die Temperaturverteilung von y und z unabhängig ist, ergibt sich für eine Fläche $Y \cdot Z$ der Betrag

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda \cdot Y \cdot Z \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} G \left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} \right) \right)_{x=0} \cdot \theta_c$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \left(\frac{x}{\sqrt{4a\tau}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}$$

Für $x = 0$ wird die Exponentialfunktion zu Eins und es ergibt sich

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda \cdot Y \cdot Z \cdot \theta_c \cdot \frac{1}{\sqrt{4a\tau}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\frac{\lambda \cdot c \cdot \gamma}{\pi \cdot \tau}} \cdot \theta_c \cdot Y \cdot Z \dots (33)$$

Man ersieht daraus, daß der Wärmeverlust durch die Oberfläche sich wie $1 : \sqrt{\tau}$ ändert, daß er also im ersten Augenblick unendlich groß ist.

Die Wärmemenge, die in dem endlichen Zeitraum von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau_0$ austritt, ergibt sich durch Integration.

$$\text{Mit } \int_0^{\tau_0} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot d\tau = 2 \sqrt{\tau_0} \text{ wird}$$

$$Q = - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma} \cdot \sqrt{\tau_0} \cdot \Theta_C \cdot Y \cdot Z \dots \quad (34a)$$

Die ausgetretene Wärme wächst also wie $\sqrt{\tau_0}$. Die Größe $\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$ ist ein reiner Stoffwert, den wir mit b bezeichnen wollen. Man könnte diesen Wert die Wärmeeinström-Fähigkeit oder wie sich bei Aufgabe 6 und 7 zeigen wird, auch die Wärmespeicherfähigkeit nennen. Da sich jedoch die volle Bedeutung dieser Zahl zur Zeit noch nicht überblicken läßt, möchte ich von der Einführung eines Namens noch absehen und nur von dem „b-Werte“ sprechen.

$$Q = - 1,13 \cdot \sqrt{\tau_0} \cdot b \cdot \Theta_C \cdot Y \cdot Z \dots \dots \dots (34b).$$

Zusatz.

Die Aufgabe Nr. 5 können wir vom Standpunkt der Randbedingungen aus als eine Randwertaufgabe erster Art oder als eine solche von der dritten Art mit dem Wert $h = \infty$ auffassen. Für eine endliche relative $W. \ddot{U}. Z.$ „ h “ läßt sich Aufgabe ebenfalls durchführen. — Wir wollen hier aber nur das Ergebnis aus der mathematischen Literatur übernehmen [z. B. aus Riemann-Weber, Die partiellen Diff.-Gleich. der math. Phys. 4. Aufl. Vieweg 1901. II. Band. S. 99. Gleich. (15).

$$\Theta = \Theta_C \cdot G \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a\tau}} \right) + \Theta_C \cdot e^{\frac{a\tau}{x^2} (hx)^2 + (hx)} \cdot \left\{ 1 - G \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a\tau}} + \sqrt{\frac{a\tau}{x^2} (hx)^2} \right) \right\}$$

oder

$$\Theta = \Theta_C \cdot \Phi \left(\frac{a\tau}{x^2}, hx \right).$$

Über eine Verallgemeinerung anderer Art siehe später S. 106.

D. Die zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen.

Temperatur periodisch veränderlich.

Die Differentialgleichung $\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \Theta$.

Unter dieser Überschrift wollen wir eine Reihe von Vorgängen zusammenfassen, denen folgendes gemeinsam sein soll. Erstens, es soll die Temperatur der Oberfläche oder die Temperatur der Umgebung rein

periodischen, zeitlichen Schwankungen unterworfen sein. Als Gesetz dieser Schwankungen sei im allgemeinen das Gesetz der harmonischen Schwingung vorausgesetzt. Zweitens soll stets angenommen sein, daß der Vorgang schon so lange dauert, daß die ursprüngliche Temperaturverteilung ihren Einfluß verloren hat, daß also das Temperaturfeld nur mehr unter dieser Einwirkung von außen steht.

• In erster Linie wird hierbei immer nach der Gestalt des Temperaturfeldes gefragt sein, in zweiter Linie nach dem Wärmefluß durch die Oberfläche.

Allgemeines.

Die gesuchte Temperaturfunktion muß vor allem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta \text{ genügen.}$$

Einer Anfangsbedingung unterliegt sie nicht, da nach Annahme die Anfangstemperaturverteilung schon ausgeglichen sein soll.

Dagegen ist sie an eine Oberflächenbedingung gebunden. Diese lautet

entweder
$$\theta_0 = \theta_C \cdot \cos \left(2 \frac{\pi}{\tau_0} \cdot \tau \right)$$

oder
$$\theta_0 = \theta_C \cdot \sin \left(2 \frac{\pi}{\tau_0} \tau \right).$$

Hierin bedeutet θ_C den maximalen Ausschlag der Schwankung und τ_0 die Dauer einer ganzen Periode. Beide Bedingungen sind durchaus gleichwertig, denn wir brauchen nur den Nullpunkt der Zeitachse um $\pi/2$ zu verschieben, also eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ eintreten zu lassen, um die beiden Funktionen in einander überzuführen. Wir werden deshalb im weiteren nur die cos-Funktion berücksichtigen.

Zwecks Aufsuchen partikulärer Integrale setzen wir

$$\theta = \varphi(\tau) \cdot \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Die physikalischen Erwägungen, die wir auf S. 27 anstellten, hatten uns bei Vorgängen, die einem stetigen Temperatúrausgleich zustreben, zur Annahme $\varphi(\tau) = e^{-p\tau}$ geführt.

Bei der gegebenen Annahme einer periodischen Oberflächentemperatur ist sicher zu erwarten, daß auch in den tieferliegenden Schichten sich die Temperatur mit der Zeit periodisch ändert. Die Exponentialfunktion ist deshalb in obiger Form nicht brauchbar. Erinnern wir uns aber, daß nach den Lehren für das Rechnen mit komplexen Größen die Gleichung gilt

$$e^{\pm i p \tau} = \cos(p \tau) \pm i \cdot \sin(p \tau),$$

so erscheint es immerhin gerechtfertigt, mit dieser Funktion den Versuch zu machen.

Wir setzen wieder in Anlehnung an Früheres $p = q^2 a$ und erhalten

$$\theta = e^{\pm i \cdot q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

und dies führt mit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \pm i \cdot q^2 \cdot a \cdot e^{\pm i \cdot q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi$$

und mit

$$\Delta^2 \Theta = e^{\pm i \cdot q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \Delta^2 \psi$$

zur Bedingungsgleichung für ψ , welche lautet

$$\Delta^2 \psi \mp (i \cdot q^2) \cdot \psi = 0.$$

Dies ist die schon bekannte Pockelsche Differentialgleichung (10.), nur mit der Besonderheit eines negativen und rein imaginären Parameters.

Aus der Lehre von den komplexen Größenübernehmen wir die Formel

$$\sqrt{-i} = \pm (1 - i) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}};$$

mit ihrer Verwendung können wir die Pockelssche Differentialgleichung schreiben

$$\Delta^2 \psi \pm \left[\pm (1 - i) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot q \right]^2 \cdot \psi = 0, \dots \dots \dots (35)$$

so daß jetzt an Stelle der reellen Größe q der früheren Betrachtungen die komplexe Größe

$$\pm (1 - i) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot q \text{ tritt.}$$

Nach diesen einleitenden Ausführungen, die für eine ganze Gruppe von Aufgaben gelten, kann jetzt zur Besprechung einzelner Aufgaben übergegangen werden; hierbei sollen nur solche Fälle erörtert werden, bei denen die Temperatur nur von einer Koordinate abhängt.

Aufgabe 6. Der einseitig unendlich ausgedehnte Körper.

„Bei einem einseitig, unendlich ausgedehnten Körper werde durch irgendwelche Einwirkung von außen die Oberflächentemperatur zu periodischen Schwankungen um den Wert Null gezwungen. Das Gesetz dieser Schwankungen sei das der harmonischen Schwingung. — Es sind die Gestalt des Temperaturfeldes und die Größe des Wärmeflusses durch die Oberfläche in ihrer Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen.“

a) Die Gestalt des Temperaturfeldes. Der Ansatz: $\Theta = e^{-i \cdot q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot \psi(x)$ ist ein partikuläres Integral der Wärmeleitungsgleichung, falls $\psi(x)$ eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left[\pm (1 - i) \sqrt{\frac{1}{2}} q \right]^2 \cdot \psi(x) = 0 \text{ ist.}$$

Die Gleichung $\psi(x) = C \cdot e^{\pm (1 - i) \sqrt{\frac{1}{2}} q x}$ ist eine solche Lösung. Mit ihrer Verwendung ergibt sich für Θ der Ausdruck

$$\Theta = C \cdot e^{-i \cdot q^2 \cdot a \cdot \tau} \cdot e^{\pm (1 - i) \sqrt{\frac{1}{2}} q x} = C \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{1}{2}} q x} \cdot e^{-i \cdot (q^2 a \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} q x)}.$$

Dieser Ausdruck geht mit Hilfe der Formel $e^{-i \cdot \varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$, über in:

$$\theta = C \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot q \cdot x} \cdot \left\{ \cos \left(q^2 \cdot a \cdot \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right) - i \cdot \sin \left(q^2 \cdot a \cdot \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right) \right\}$$

Diese komplexe Lösung läßt sich in einen reellen und einen rein imaginären Teil spalten, so daß $\theta = \theta_1 + i \theta_2$ ist.

Dabei wollen wir noch folgendes beachten: Nach den Eigenschaften der Exponentialfunktion würde das $+$ -Zeichen im Exponenten besagen, daß die Temperaturschwankungen mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche immer mehr zunehmen müßten, eine Annahme, die mit der Erfahrung sichtlich in Widerspruch steht. Wir müssen deshalb aus physikalischen Gründen die beiden oberen Zeichen ausschalten. Es bleiben dann die beiden Lösungen:

$$\theta_1 = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot q \cdot x} \cdot \cos \left(q^2 a \tau - \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right) \text{ und}$$

$$\theta_2 = C_2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot q \cdot x} \cdot \sin \left(q^2 a \tau - \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right).$$

Zur Bestimmung der beiden willkürlichen Konstanten C und q benutzen wir die Oberflächenbedingung, indem wir in beiden Gleichungen $x = 0$ setzen. Wir erhalten

$$\theta_0 = C \cdot \frac{\cos}{\sin} (q^2 \cdot a \cdot \tau)$$

und vergleichen dies mit den Oberflächenbedingungen von S. 71. Daraus ist zu folgern:

1. daß $C = \theta_C$ und $q^2 = \frac{1}{a} \cdot 2 \frac{\pi}{\tau_0}$ zu setzen sind und

2. daß die beiden Lösungen insoferne gleichwertig sind, als sie den beiden schon als gleichwertig erkannten Anfangsbedingungen genügen. Wir berücksichtigen deshalb ferner nur mehr die eine Lösung, z. B. die cos-Funktion.

Die Gleichung des Temperaturfeldes heißt dann:

$$\theta = \theta_C \cdot e^{-x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot \tau_0}}} \cdot \cos \left(x \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot \tau_0}} - \frac{2\pi}{\tau_0} \cdot \tau \right) \dots (36)$$

Bei Besprechung dieses Ergebnisses können wir zweierlei Standpunkt einnehmen. Einmal können wir einen bestimmten Zeitpunkt festhalten und die Gestalt des Temperaturfeldes in diesem Augenblick untersuchen, also ein Momentbild der Temperaturkurve aufnehmen. Das andere Mal können wir eine unendlich dünne Schicht in der Tiefe x ins Auge fassen und die zeitlichen Veränderungen, welche die Temperatur in dieser Schicht erleidet, verfolgen.

Wir beginnen mit der ersten Betrachtungsweise und zwar zuerst mit der einfachen Funktion

$$f_1(x) = \Theta_C \cdot \cos \left(x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot \tau_0}} \right).$$

Diese Gleichung stellt eine cosinus-Linie oder eine Wellenlinie dar. Der größte Ausschlag (die maximale Amplitude) ist gleich Θ_C . Die Länge einer ganzen Welle ergibt sich aus

$$x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot \tau_0}} = 2\pi.$$

Zu: Wellenlänge = $2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau_0}$.

Die Wellenberge stehen bei $x_1 = 0$; $x_2 = 2 \sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau_0}$; $x_3 = 4 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau_0}$ usw.

Die Funktion $f_2(x) = \Theta_C \cdot \cos \left(x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot \tau_0}} - 2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} \right)$ stellt eine gleiche Wellenlinie dar, nur ist die ganze Linie um den Betrag $(2 \cdot \pi \cdot \tau) : \tau_0$ in Richtung der positiven x-Achse verschoben. Bei stetig wachsendem τ wandert also die ganze Wellenlinie in dieser Richtung, sie bildet einen Wellenstrahl. Da nach der Wellenlehre

Fortpflanzungsgeschw. = Wellenlänge : Schwingungsdauer
ist, so ist die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt der Welle, z. B. ein Maximum wandert gleich

$$\text{Geschwindigkeit} = 2 \sqrt{\frac{\pi \cdot a}{\tau_0}}.$$

In Gleichung (36) tritt nun im Vergleich zur letztuntersuchten Gleichung noch die Exponentialfunktion hinzu. Sie verändert weder die Phasenverschiebung, noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit oder die Wellenlänge. Aber sie bewirkt ein sehr rasches Abnehmen des größten Ausschlages mit fortschreitendem x .

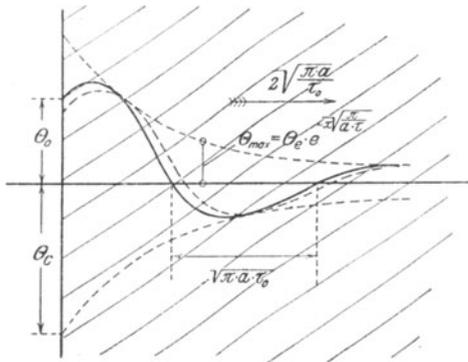


Fig. 26. Temperaturverlauf bei periodisch veränderlicher Oberflächentemperatur.

Fig. 26 zeigt zwei aufeinanderfolgende Momentanbilder der Temperaturkurve.

Wählen wir nun die zweite Betrachtungsweise, indem wir den Temperaturverlauf in der Tiefe x beobachten! Wir müssen dann x als den festgehaltenen Parameter und τ als die Veränderliche auffassen. Es zeigt sich dann, daß Θ_x sich mit τ ebenfalls nach dem Cosinusetz ändert. Die Dauer einer Schwingung ist gleich τ_0 , also unabhängig von der Tiefe x . Dagegen tritt mit wachsendem x ein Zurückbleiben in der Phase

— ein Nachhinken — ein, das durch den Ausdruck

$$\tau_x = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi \cdot a}} \text{ gegeben ist.}$$

Auch der größte Ausschlag ändert sich mit x , denn es ist

$$(\theta_x)_{\max} = \theta_C \cdot e^{-x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}}}$$

Man kann nun die Frage stellen, in welcher Tiefe x haben die Temperaturschwankungen auf den ν -ten Teil ihres Oberflächenwertes abgenommen.

Um dies zu finden, ist die Gleichung

$$\frac{1}{\nu} = e^{-x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}}} \text{ nach } x \text{ aufzulösen.}$$

$$x = \sqrt{\frac{a \cdot \tau_0}{\pi}} \cdot \frac{\log \nu}{\log e} = \sqrt{a \cdot \tau_0} \cdot \text{funkt}(\nu).$$

Man sieht daraus, daß sich die Temperaturschwankungen in um so größerer Tiefe noch bemerkbar machen, je größer die Temperaturleitfähigkeit a ist und je langsamer die Schwankungen verlaufen.

Die Werte von $\text{funkt}(\nu)$ sind hier zusammengestellt.

Zahlentafel Nr. 9.

$1/\nu$	$1/10$	$1/20$	$1/50$	$1/100$	$1/1000$
funkt. (ν)	1,299	1,690	2,208	2,599	3,898

b) Der Wärmefluß durch die Oberfläche. Wir berechnen den Wärmefluß wieder nach der ersten Art, also aus dem Temperaturgefälle an der Oberfläche.

$$dQ = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot dF \cdot d\tau,$$

worin dF ein Element der Oberfläche ist. Durch Differenzieren der Gleichung (36) nach x ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\theta_C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \cdot e^{-x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}}} \left\{ \sin \left(x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} - 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(x \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} - 2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right\} \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0} &= -\theta_C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \cdot \left\{ \cos 2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} - \sin 2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} \right\} \\ &= +\theta_C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$

$$dQ = -\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta_C \cdot F \cdot d\tau$$

$$= +\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0}} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \theta_C \cdot F \cdot d\tau.$$

Würden wir den Ausdruck über die Zeitdauer einer ganzen Periode integrieren, so würden wir den Wert Null erhalten. Wir müssen uns deshalb die Frage vorlegen, wie groß ist die Wärmemenge, die die Oberfläche während einer halben Periode durchsetzt? oder mit anderen Worten: wie groß ist die Wärmemenge, die der Körper in der Zeit $\tau_0/2$ aufzuspeichern vermag?

Den Wert $\pi/4$ können wir weglassen, denn er bedeutet nur eine zeitliche Phasenverschiebung. Die Integration liefert dann

$$Q_{\tau_0/2} = \mp \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma} \cdot \sqrt{\frac{2\tau_0}{\pi}} \cdot \theta_C \cdot F \dots \dots \dots (37a)$$

$$= \mp 0,80 \cdot \sqrt{\tau_0} \cdot b \cdot \theta_C \cdot F \dots \dots \dots (37b.)$$

Die aufgespeicherte Wärmemenge ist also dem Werte b und der Wurzel aus der Zeitdauer τ_0 proportional. Die nachstehende kleine Tabelle zeigt einige Werte der Wurzel $\sqrt{\tau_0} \cdot b$ für $\tau_0 = 1$ Minute, 1 Stunde und 1 Tag.

		Kupfer	Eisen	Sandstein	Kork
	$\lambda =$	320	45	0,6	0,08
	$c =$	0,094	0,115	0,22	rd. 0,3
	$\gamma =$	8900	7700	2300	240
	$\lambda \cdot c \cdot \gamma$	268 000	40 000	304	5,8
	$\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$	517	200	17,4	2,4
1 Min.	$\sqrt{\tau_0} = 0,129$	66,7	25,8	2,24	0,31
1 Std.	$\sqrt{\tau_0} = 1,000$	517	200	17,4	2,4
1 Tag	$\sqrt{\tau_0} = 4,90$	2530	980	85,1	11,8

e) Verallgemeinerung der Aufgabe. Es soll nunmehr angenommen werden, daß nicht für die Oberflächentemperatur θ_0 , sondern für die Umgebungstemperatur ϑ das Änderungsgesetz vorgeschrieben sei. Es soll gelten:

$$\vartheta = \vartheta_C \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Ferner sei die relative W.Ü.Z. $h = a : \lambda$ bekannt. Wir wollen für diesen Fall die Gleichung des Temperaturfeldes nicht selbst ableiten,

sondern aus der Enzykl. der math. Wissenschaften V. 4. S. 186, übernehmen. Darnach ist

$$\Theta = \vartheta_C \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\pi}{h^2 \cdot a \tau_0} + \frac{2\pi}{h^2 \cdot a \tau_0}}}} \cdot e^{-x \sqrt{2 \frac{\pi}{a \tau_0}}} \cdot \cos \left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} - x \sqrt{\frac{\pi}{a \tau_0}} - \arctg \frac{\sqrt{\frac{\pi}{h^2 \cdot a \tau_0}}}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{h^2 \cdot a \tau_0}}} \right) \quad (38).$$

Diese Gleichung können wir als eine Erweiterung der Gleichung (36) auffassen. Wir erkennen dies am besten, wenn wir aus ihr die Oberflächentemperatur Θ_0 berechnen, indem wir $x = 0$ setzen.

$$\Theta_0 = \vartheta_C \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\pi}{h^2 a \tau_0} + \frac{2\pi}{h^2 a \tau_0}}}} \cdot \cos \left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} - \arctg \frac{\dots}{\dots} \right)$$

Die Oberflächentemperatur befolgt also ebenfalls das Gesetz einer harmonischen Schwingung, nur tritt gegenüber der erzeugenden Schwingung der Raumtemperatur ein Zurückbleiben in der Phase ein, entsprechend dem Ausdruck mit \arctg .

Ferner unterscheiden sich die beiden Schwingungen durch die Größe des maximalen Ausschlages. Es tritt eine Verminderung ein, entsprechend dem Wert des Ausdruckes

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2\pi}{h^2 a \tau_0} + \frac{2\pi}{h^2 a \tau}}}} = \text{funkt} (h^2 a \tau_0) = \text{funkt} \left(\frac{\alpha^2 \cdot \tau_0}{b^2} \right).$$

Zahlentafel Nr. 10.
Werte von $\text{funkt} (h^2 a \tau_0)$.

$h^2 a \tau$	funkt	$h^2 a \tau$	funkt
∞	1,00	5	0,54
1000	0,96	2	0,41
500	0,94	1	0,32
100	0,87	0,5	0,24
50	0,82	0,1	0,12
10	0,64	0,0	0,00

Für die innerhalb einer halben Periode aufgespeicherte Wärmemenge ergibt sich jetzt ohne weitere Rechnung

$$Q = \mp 0,80 \cdot \text{funkt} (h^2 \cdot a \cdot \tau_0) \cdot \sqrt{\tau_0} \cdot b \cdot \vartheta_C \cdot F \quad \dots \quad (39)$$

Die vorstehend abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten finden hauptsächlich Anwendung, wenn man untersucht, wie sich die täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen im Erdboden nach der Tiefe fortpflanzen (vgl. E. Riecke, Lehrbuch der Physik. Leipzig 1912. 5. Aufl. II. Bd. S. 729). Für uns ist die Aufgabe vor allem wichtig als Vorbereitung zur nächsten Aufgabe.

Aufgabe 7. Die Platte.

„Bei einer planparallelen Platte von der Dicke $2X$ werde durch irgendwelche Einwirkung von außen den beiden Oberflächen eine periodisch veränderliche Temperatur aufgezwungen. Das Gesetz dieser Veränderlichkeit sei für beide Seiten dasselbe, nämlich:

$$\Theta_0 = \Theta_C \cdot \cos 2\pi \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Es sind die Gestalt des Temperaturfeldes und die Größe des Wärmeflusses durch die Oberfläche zu bestimmen.“

a) **Das Temperaturfeld.** Entsprechend den Ausführungen von S. 71 beginnen wir mit dem Ansatz

$$\Theta = e^{+iq^*a\tau} \cdot \psi(x),$$

wobei wieder $\psi(x)$ der Bedingung zu genügen hat

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[(1-i) \sqrt{\frac{1}{2}} q \right]^2 \cdot \psi = 0.$$

Zwei Lösungen dieser Gleichung sind:

$$\psi(x) = \cos \left\{ (1-i) \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right\} \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sin \left\{ (1-i) \sqrt{\frac{1}{2}} q x \right\}.$$

Da nach der ganzen Stellung der Aufgabe das Temperaturfeld symmetrisch zur Ebene $x = 0$ sein muß, so kann $\psi(x)$ nur eine gerade Funktion sein und die zweite Lösung kommt für uns nicht in Betracht.

Bevor wir diese Lösung weiter verwerten können, müssen wir einige Sätze über Hyperbelfunktionen besprechen.

Hyperbelsinus und -Cosinus.

Wenn $z = u + i \cdot v$ eine komplexe Größe ist, so ist (nach Jahnke und Emde S. 11, Zeile 9 v. o.)

$$\cos(u - i \cdot v) = \mathfrak{C}os\ v \cdot \cos u + i \mathfrak{S}in\ v \cdot \sin u.$$

Für $u = v$ wird daraus

$$\cos((1-i)u) = \mathfrak{C}os\ u \cdot \cos u + i \cdot \mathfrak{S}in\ u \cdot \sin u.$$

Wir bezeichnen $\mathfrak{C}os\ u \cdot \cos u$ mit $f_c(u)$

und $\mathfrak{S}in\ u \cdot \sin u$ mit $f_s(u)$

und wollen nun diese beiden Funktionen besprechen.

1. Die Funktion $f_c(u)$.

Der Hyperbelcosinus ist eine gerade Funktion, die für das Argument

Null den Wert „1“ besitzt und sich mit wachsendem positivem und negativem Argument dem Wert $+\infty$ nähert. Die \cos -Funktion ist die bekannte, gerade Funktion mit den Nullstellen $\pm \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{3}{2}\pi$ usw. Das Produkt beider Funktionen wird eine oszillierende Funktion sein, die in ihren Nullstellen mit der \cos -Funktion übereinstimmt, deren Ausschläge aber mit wachsendem Argument ständig wachsen. Als Produkt zweier gerader Funktionen ist $f_c(u)$ auch eine gerade Funktion (siehe Fig. 27).

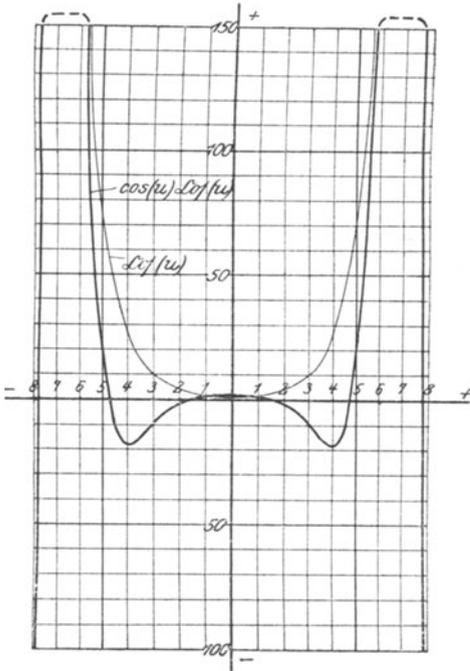


Fig. 27. Funktion $f_c(u) = \cos u \cdot \text{Cosh } u$.

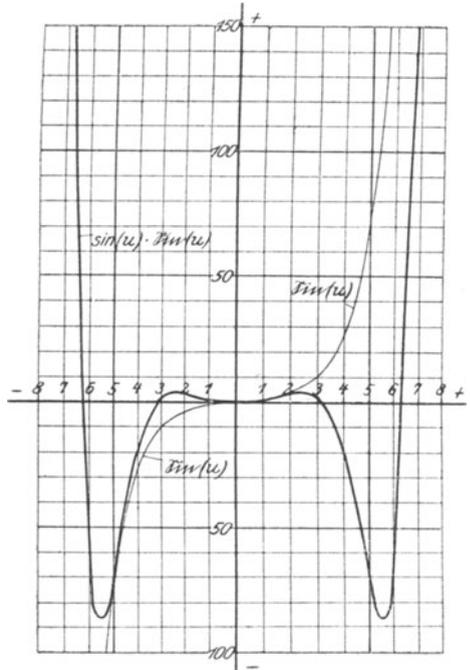


Fig. 28. Funktion $f_s(u) = \sin u \cdot \text{Sinh } u$.

2. Die Funktion $f_s(u)$.

Der Hyperbelsinus ist eine ungerade Funktion, die für das Argument Null den Wert „0“ besitzt und sich mit wachsendem, positivem Argument dem Wert $+\infty$, mit wachsendem, negativem Argument dem Wert $-\infty$ nähert. Die \sin -Funktion ist die bekannte, ungerade Funktion mit den Nullstellen $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Das Produkt aus beiden muß eine oszillierende Funktion sein, mit den Nullstellen der \sin -Funktion, deren Ausschläge aber mit wachsendem Argument ständig wachsen. Als Produkt zweier ungerader Funktionen ist $f_s(u)$ wieder eine gerade Funktion (s. Fig. 28).

Die Werte beider Funktionen sind in Zahlentafel Nr. 11 bis zum Argument 8,0 zusammengestellt.

Zahlentafel Nr. 11.

Werte von $\cos(u) \cdot \cos(u)$ und $\sin(u) \cdot \sin(u)$.

u	$f_s(u)$	$f_c(u)$	u	$f_s(u)$	$f_c(u)$	u	$f_s(u)$	$f_c(u)$
0,00	+0,000	+1,00	2,75	+2,97	-7,26	5,50	-86,2	+87,2
0,25	+0,063	+1,00	3,00	+1,41	-9,97	5,75	-79,4	+135
0,50	+0,250	+0,99	3,25	-1,42	-12,8	6,00	-55,6	+194
0,75	+0,56	+0,95	3,50	-5,82	-15,5	6,25	-7,90	+259
1,00	+0,99	+0,83	3,75	-12,2	-17,4	6,50	+72,0	+325
1,25	+1,52	+0,60	4,00	-20,6	-17,9	6,75	+194	+380
1,50	+2,12	+0,166	4,25	-31,5	-15,6	7,00	+362	+412
1,75	+2,75	-0,53	4,50	-44,0	-9,49	7,25	+580	+399
2,00	+3,30	-1,57	4,75	-57,7	+2,27	7,50	+850	+309
2,25	+3,65	-3,01	5,00	-71,1	+21,3	7,75	+1154	+115
2,50	+3,62	-4,91	5,25	-81,7	+49,1	8,00	+1474	-220

Aufstellung der allgemeinen Lösung.

Für den Ausdruck $\psi(x) = \cos\{(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}}qx\}$ können wir jetzt schreiben

$$\psi(x) = f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) + if_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right).$$

Ferner ist nach einer schon öfters gebrauchten Formel

$$e^{+iq^2a\tau} = \cos(q^2a\tau) + i \cdot \sin(q^2a\tau).$$

Das Produkt $e^{+iq^2a\tau} \cdot \psi(x)$ ist also auch eine komplexe Größe. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \Theta_1 + i \cdot \Theta_2 &= \cos(q^2a\tau) \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) - \sin(q^2a\tau) \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) \\ &\quad + i \cdot \left\{ \cos(q^2a\tau) \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) + \sin(q^2a\tau) \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) \right\} \end{aligned}$$

oder durch Trennung des reellen vom imaginären Teil und multiplizieren mit je einer willkürlichen Konstanten:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= C \cdot \cos(q^2a\tau) \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) - C \cdot \sin(q^2a\tau) \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) \\ \Theta_2 &= D \cdot \cos(q^2a\tau) \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) + D \cdot \sin(q^2a\tau) \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right). \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Lösungen bilden wir durch Addieren die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos(q^2a\tau) \cdot \left\{ C \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) + D \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) \right\} \\ &\quad - \sin(q^2a\tau) \cdot \left\{ C \cdot f_s\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) - D \cdot f_c\left(\sqrt{\frac{1}{2}}qx\right) \right\}. \end{aligned}$$

Anpassen an die Oberflächenbedingung.

Diese allgemeine Lösung enthält drei noch willkürliche Konstanten, nämlich q , C und D . Zu ihrer Bestimmung dient die Oberflächen-

bedingung. Wir setzen $x = \pm X$; da f_c und f_s gerade Funktionen sind, spielt das — Zeichen keine Rolle.

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_c \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} \right) = \\ &\left\{ C \cdot f_c \left(\sqrt{\frac{1}{2}} q X \right) + D \cdot f_s \left(\sqrt{\frac{1}{2}} q X \right) \right\} \cos (q^2 a \tau) \\ &- \left\{ C \cdot f_s \left(\sqrt{\frac{1}{2}} q X \right) - D \cdot f_c \left(\sqrt{\frac{1}{2}} q X \right) \right\} \sin (q^2 a \tau). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für jeden Wert von τ erfüllt, wenn

1. $2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} = q^2 a \tau$;
2. der Faktor von $\cos (q^2 a \tau)$ gleich θ_c ist,
3. der faktor von $\sin (q^2 a \tau)$ gleich Null ist.

Aus der ersten Bedingung folgt, daß $q = \pm \sqrt{\frac{2\pi}{a \tau_0}}$ ist. Damit wird

auch $q \sqrt{\frac{1}{2}} X = \pm \sqrt{\frac{\pi \cdot X^2}{a \tau_0}} = \pm M$ und zugleich

$$q \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot x = \pm \frac{x}{X} M.$$

Die Bezeichnung M wird nur der kürzeren Schreibweise wegen vorübergehend eingeführt. Die Bedingungen 2 und 3 lauten jetzt:

$$\begin{aligned} C \cdot f_c (M) + D \cdot f_s (M) &= \theta_c, \\ C \cdot f_s (M) - D \cdot f_c (M) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus: $C = \frac{\theta_c \cdot f_c (M)}{f_c^2 (M) + f_s^2 (M)}$ und $D = \frac{\theta_c \cdot f_s (M)}{f_c^2 (M) + f_s^2 (M)}$.

Die Gleichung des Temperaturfeldes.

Nachdem jetzt die Willkür der drei Konstanten aufgehoben ist, ist auch die Gleichung des Temperaturfeldes festgelegt. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\theta_c}{f_c^2 (M) + f_s^2 (M)} \cdot \left[\left\{ f_c (M) \cdot f_c \left(\frac{x}{X} M \right) + f_s (M) \cdot f_s \left(\frac{x}{X} M \right) \right\} \cos \left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right. \\ &\left. - \left\{ f_c (M) \cdot f_s \left(\frac{x}{X} M \right) - f_s (M) \cdot f_c \left(\frac{x}{X} M \right) \right\} \sin \left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \dots \dots \dots (40a) \end{aligned}$$

Um diese Gleichung nochmals umformen zu können, leiten wir eine kleine Hilfsformel ab.

Wir gehen aus von der trigonometrischen Formel: $C \cdot \cos \beta \cdot \cos a - C \cdot \sin \beta \cdot \sin a = C \cdot \cos (a + \beta)$, und setzen in ihr $C \cdot \cos \beta = A$ und $C \cdot \sin \beta = B$. Dann wird $C^2 = A^2 + B^2$ und $\text{tg } \beta = \frac{B}{A}$; setzen wir dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir die Hilfsformel:

$$A \cdot \cos a - B \cdot \sin a = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos \left(a + \text{arctg } \frac{B}{A} \right).$$

Diese Hilfsformel wenden wir nun auf Gleichung (40a) an, indem wir den Faktor von \cos an Stelle von A , den Faktor von \sin an Stelle von B setzen. Die Rechnung ergibt dann

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left\{ f_c^2(M) + f_s^2(M) \right\} \cdot \left\{ f_c^2\left(\frac{x}{X} M\right) + f_s^2\left(\frac{x}{X} \cdot M\right) \right\}}$$

und mit diesem Ausdruck wird Gleichung (40a) zu:

$$\theta = \theta_c \cdot \sqrt{\frac{f_c^2\left(\frac{x}{X} M\right) + f_s^2\left(\frac{x}{X} M\right)}{f_c^2(M) + f_s^2(M)}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} + \operatorname{arctg} \frac{f_c(M) \cdot f_s\left(\frac{x}{X} M\right) - f_s(M) \cdot f_c\left(\frac{x}{X} M\right)}{f_c(M) \cdot f_c\left(\frac{x}{X} M\right) + f_s(M) \cdot f_s\left(\frac{x}{X} M\right)}\right) \quad (40b)$$

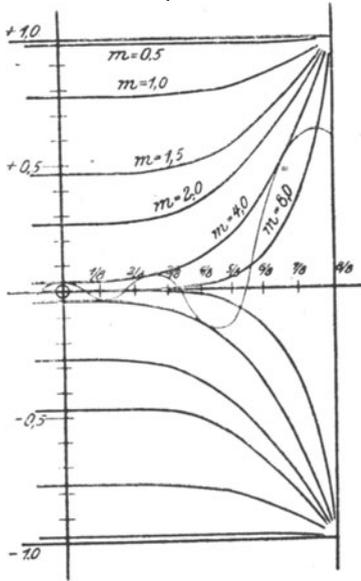


Fig. 29. Zu Gleichung (41): Werte von funkt $(x/X, M)$.

Die Gleichungen (40a und b) kann man in gekürzter Form schreiben:

$$\theta = \theta_c \cdot \Phi\left(M, \frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{X}\right) \dots \quad (40c)$$

wobei $M = \pm \sqrt{\frac{\pi \cdot X^2}{a \tau_0}}$, also eine Funk-

tion von $\frac{a \tau_0}{X^2}$ ist. Das Verhältnis $\theta : \theta_c$

ist also eine Funktion von nur 3 Veränderlichen, nämlich $\frac{a \tau_0}{X^2}, \frac{\tau}{\tau_0}, \frac{x}{X}$.

Zur Besprechung des Ergebnisses eignet sich am besten Gleichung (40b). Sie läßt erkennen, daß die Temperaturkurve ein Wellenstrahl ist, der von $x = \pm X$ gegen $x = 0$ fortschreitet. Die Größe der Ausschläge nimmt mit wachsender Tiefe ab nach der Gleichung

$$\begin{aligned} (\theta_x)_{\max} &= \theta_c \cdot \sqrt{\frac{f_c^2\left(\frac{x}{X} M\right) + f_s^2\left(\frac{x}{X} M\right)}{f_c^2(M) + f_s^2(M)}} \dots \dots \dots (41) \\ &= \theta_c \cdot \text{funkt}_{12}\left(\frac{x}{X}, M\right). \end{aligned}$$

Die Werte dieser Funktion sind aus Fig. 29 und Tabelle Nr. 12 zu ersehen. Für ein gegebenes Problem müssen die Temperaturkurven jeder

Phase des Vorganges (also die Wellenlinien) innerhalb der beiden zugehörigen M-Linien verlaufen.

Zahlentafel Nr. 12.

$$\text{Werte von } \sqrt{\frac{f_c^2\left(\frac{x}{X} \cdot M\right) + f_s^2\left(\frac{x}{X} \cdot M\right)}{f_c^2(M) + f_s^2(M)}} = \text{funkt}\left(\frac{x}{X}, M\right).$$

x/X =	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
M = 0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,5	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	1,00
1,0	0,77	0,77	0,77	0,78	0,79	0,81	0,85	0,91	1,00
1,5	0,47	0,47	0,47	0,48	0,52	0,58	0,68	0,83	1,00
2,0	0,27	0,27	0,28	0,30	0,36	0,45	0,58	0,77	1,00
4,0	0,04	0,04	0,05	0,08	0,13	0,22	0,37	0,64	1,00
8,0	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,05	0,14	0,36	1,00
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	—

Aus der Gleichung (40b) folgt ferner, daß die Wellenlänge nicht konstant ist, sondern mit abnehmendem x abnimmt.

b) Der Wärmefluß durch die Oberfläche. Die Berechnung stützen wir wieder auf die Gleichung

$$d Q = - \lambda \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=X} \cdot d F \cdot d \tau.$$

Den Differentialquotienten bilden wir aus Gleichung (40a), indem wir berücksichtigen, daß

$$\frac{d}{d x} f\left(\frac{x}{X} M\right) = \frac{M}{X} \cdot f'\left(\frac{x}{X} M\right).$$

Es wird $\frac{\partial \theta}{\partial x} =$

$$\frac{\theta_C}{f_c^2(M) + f_s^2(M)} \cdot \frac{M}{X} \cdot \left[\left\{ f_c(M) \cdot f_c'\left(\frac{x}{X} M\right) + f_s(M) \cdot f_s'\left(\frac{x}{X} M\right) \right\} \cos\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0}\right) - \left\{ f_c(M) \cdot f_s'\left(\frac{x}{X} M\right) - f_s(M) \cdot f_c'\left(\frac{x}{X} M\right) \right\} \sin\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0}\right) \right].$$

Dies läßt sich wieder mit der letzten Hilfsformel umformen. Gleichzeitig soll X für x gesetzt werden.

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{x=\pm x} = \frac{\theta_C}{f_c^2(M) + f_s^2(M)} \cdot \frac{M}{X} \cdot \sqrt{\{f_c^2(M) + f_s^2(M)\} \cdot \{f_c'^2(M) + f_s'^2(M)\}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} + \arctg \frac{f_c(M) \cdot f_s'(M) - f_s(M) \cdot f_c'(M)}{f_c(M) \cdot f_c'(M) + f_s(M) \cdot f_s'(M)}\right).$$

Dies in die Gleichung für d Q eingesetzt, gibt:

$$d Q = - \lambda \cdot \theta_C \cdot \sqrt{\frac{f_c'^2(M) + f_s'^2(M)}{f_c^2(M) + f_s^2(M)}} \cdot \frac{M}{X} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\tau}{\tau_0} + \arctg \frac{\div}{\div}\right) \cdot d F \cdot d \tau.$$

Die Stärke des Wärmeflusses durch die Oberfläche ist also ebenfalls eine periodische Funktion mit der Periode τ_0 . Gegenüber der Funktion der Oberflächentemperatur tritt eine Phasenverschiebung ein, die durch das Glied mit \arctg zum Ausdruck kommt.

Die Wärmemenge, welche in der Zeit einer halben Periode durch die beiden Oberflächen (= 2 F) hindurchtritt, ergibt sich durch Integration.

$$Q_{\tau_0/2} = \mp \lambda \cdot \Theta_C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0}} \cdot \frac{M}{X} \cdot \frac{\tau_0}{\pi} \cdot 2 F.$$

Dies läßt sich noch umformen, denn es ist:

$$\frac{\lambda}{X} \cdot \frac{\tau_0}{\pi} = \frac{\lambda}{X} \cdot \frac{\tau_0}{\pi} \cdot \frac{a \cdot X}{a \cdot X} = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{a \cdot \tau_0}{\pi \cdot X^2} \cdot X = c \cdot \gamma \cdot \frac{1}{M^2} \cdot X.$$

Damit entsteht:

$$Q_{\tau_0/2} = \mp c \cdot \gamma \cdot 4 X F \cdot \Theta_C \cdot \frac{1}{2 M} \cdot \sqrt{\frac{f_c'^2(M) + f_s'^2(M)}{f_c^2(M) + f_s^2(M)}} \dots (42a)$$

Dieses Ergebnis läßt sich in einfacher Weise deuten: Der Ausdruck $c \cdot \gamma \cdot 2 X F \cdot 2 \Theta_C$ stellt die Wärmemenge dar, die die Platte aufnehmen würde, wenn sie sich in ihrer ganzen Dicke von $-\Theta_C$ auf $+\Theta_C$ erwärmen würde. Wir nennen diese Wärmemenge $(W. J.)_0$.

Der Ausdruck $\frac{1}{2 M} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0}}$ ist eine Funktion mit der einzigen Veränderlichen $M = \sqrt{\frac{\pi X^2}{a \tau_0}}$, und gibt an, welcher Bruchteil dieser Energie wirklich aufgespeichert wird.

Wir könnten also schreiben:

$$Q_{\tau_0/2} = (W. J.)_0 \cdot \text{funkt} \left(\sqrt{\frac{\pi \cdot X^2}{a \tau_0}} \right).$$

Um aber in Übereinstimmung zu kommen mit unseren früheren Formeln Nr. 25b, 27b und 29b, betrachten wir $(a \tau_0) : X^2$ als Veränderliche und erhalten:

$$Q_{\tau_0/2} = (W. J.)_0 \cdot \Psi_{13} \left(\frac{a \tau_0}{X^2} \right) \dots \dots \dots (42b)$$

Zahlentafel Nr. 13.

Platte mit periodischen Oberflächentemperaturen.

$\frac{a \tau_0}{X^2}$	ψ								
0,00	0,00	0,4	0,25	1,1	0,44	1,8	0,60	5,0	0,90
0,05	0,09	0,5	0,28	1,2	0,47	1,9	0,62	6,0	0,92
0,10	0,12	0,6	0,31	1,3	0,49	2,0	0,64	7,0	0,94
0,15	0,15	0,7	0,34	1,4	0,52	2,5	0,72	8,0	0,95
0,20	0,18	0,8	0,37	1,5	0,54	3,0	0,78	9,0	0,96
0,25	0,20	0,9	0,39	1,6	0,56	3,5	0,82	10,0	0,97
0,30	0,22	1,0	0,42	1,7	0,59	4,0	0,86	∞	1,00

Die Werte dieser Funktion Ψ_{13} sind in Zahlentafel Nr. 13 und in Fig. 30 zusammengestellt.

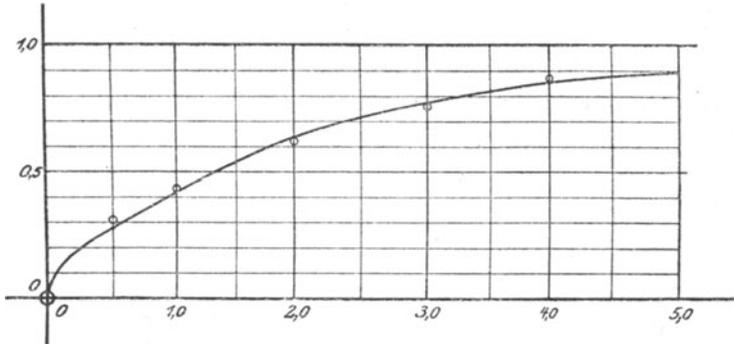


Fig. 30. Platte mit periodischer Oberflächentemperatur:
Abszissen: $a \cdot \tau_0 / X^2$.
Ordinaten: Ψ_{13} aus Gleichung (42)b.

Die Funktion wurde berechnet unter Anwendung nachstehender Formeln:

$$f_c'(u) = \frac{d}{du} (\cos u \cdot \mathfrak{C}of u) = \cos u \cdot \mathfrak{S}in u - \sin u \cdot \mathfrak{C}of u$$

$$f_s'(u) = \frac{d}{du} (\sin u \cdot \mathfrak{S}in u) = \sin u \cdot \mathfrak{C}of u + \cos u \cdot \mathfrak{S}in u.$$

$$\text{Also } f_c''(u) + f_s''(u) = 2 \cdot (\cos^2 u \cdot \mathfrak{S}in^2 u + \sin^2 u \cdot \mathfrak{C}of^2 u).$$

Damit wird dann:

$$\frac{f_c''(u) + f_s''(u)}{f_c'(u) + f_s'(u)} = 2 \frac{\cos^2 u \cdot \mathfrak{S}in^2 u + \sin^2 u \cdot \mathfrak{C}of^2 u}{\cos^2 u \cdot \mathfrak{C}of^2 u + \sin^2 u \cdot \mathfrak{S}in^2 u} = 2 \frac{\cotg^2 u \cdot \mathfrak{X}g^2 u + 1}{\cotg^2 u + \mathfrak{X}g^2 u}.$$

Ferner ist oft für Zahlenrechnung die nachstehende Formel von Vorteil:

$$\cos^2 u \cdot \mathfrak{C}of^2 u + \sin^2 u \cdot \mathfrak{S}in^2 u = \frac{1}{2} ((\cos(2u) + \mathfrak{C}of(2u)))$$

Sie ist abzuleiten mit Hilfe der Formeln

$2 \mathfrak{C}of^2 u = \mathfrak{C}of(2u) + 1$ und $2 \mathfrak{S}in^2 u = \mathfrak{C}of(2u) - 1$ bei Jahnke und Emde, Seite 9, Ziffer 7, Potenzen.

Gleichung (42b) besagt nun, daß die Wärmemenge, die eine Platte während einer halben Periode aufzuspeichern vermag, erstens dem Wert $(W. J.)_0$ proportional ist. Sie ist also bei gleicher Oberfläche der Platte einerseits der Dicke $2X$ und andererseits der spezifischen Wärme pro Raumeinheit, also dem Produkt $c \cdot \gamma$ proportional. Von diesem Wert $(W. J.)_0$ kommt aber zweitens nur ein Bruchteil in Rechnung — ein Bruchteil, der um so größer ist, je größer der Wert $(a \tau_0) : X^2$ ist.

Für die Zwecke der Praxis läßt sich diese Gesetzmäßigkeit noch wesentlich vereinfachen. Da die Stoffwerte vor allem bei hohen Temperaturen nur sehr ungenau bekannt sind, so ist auch bei der Rechnung ein geringerer Grad von Genauigkeit gestattet. Solange wir uns auf solche Werte des Argumentes $(a \tau_0 : X^2)$ beschränken, welche größer als 0,5 und kleiner als 4 sind, können wir für die Funktion Ψ_{13} näherungsweise

die Potenzfunktion

$$\psi_{13} \left(\frac{a \cdot \tau_0}{X^2} \right) = 0,44 \cdot \left(\frac{a \cdot \tau_0}{X^2} \right)^{+0,5}$$

setzen (vgl. die durch Ringe angedeuteten Werte in Fig. 30).

Für die während einer halben Periode aufgespeicherte Wärme ergibt sich damit der Wert

$$\begin{aligned} Q_{c,2} &= \mp 4 \cdot X \cdot F \cdot \theta_c \cdot c \cdot \gamma \cdot 0,44 \cdot \left(\frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_0}{X^2} \right)^{0,5} \\ &= \mp \text{Vol} \cdot 0,9 \theta_c \cdot \sqrt{\tau_0} \cdot b \cdot \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

Es sei aber nochmals daran erinnert, daß diese Näherungsgleichung nur für das Gebiet

$$0,5 < \frac{a \tau_0}{X^2} < 4$$

gilt.

Schlußbemerkung:

Die Gesetzmäßigkeiten, die in dieser und der vorhergehenden Aufgabe abgeleitet wurden, bilden die Grundlage für eine wissenschaftlich einwandfreie Betrachtung und Berechnung der Wärmespeicher, die aus festen Körpern bestehen; — also der steinernen Winderhitzer von Hochofenanlagen, sowie überhaupt aller Arten von Regeneratoren. In zweiter Linie gelten diese selben Gedankengänge auch bei der Beurteilung des Einflusses starker Mauern auf die Beheizung von Gebäuden, also bei der Frage der unterbrochenen oder durchgehenden Beheizung. In dritter Linie sind sie der Ausgangspunkt für die Beurteilung der Wandwirkung in Zylindern von Dampfmaschinen, Verbrennungsmotoren und Kompressoren.

Es war bisher stets angenommen worden, daß die erzeugende Temperaturschwankung (Oberflächen- oder Raumtemperatur) nach dem Gesetz der harmonischen Schwingung verlaufe. Ist ein anderes Gesetz gegeben, so läßt sich dieser allgemeine Fall immer durch Anwendung der Fourierschen Reihenentwicklung auf den Fall der harmonischen Schwingung zurückführen. Meist werden 2–3 Glieder der Reihe genügen.

E. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder ohne Wärmequellen.

Die Differentialgleichung $\Delta^2 \theta = 0$.

Allgemeines.

Die Überschrift über diesem Abschnitt will keineswegs besagen, daß bei den nachstehenden Problemen gar keine Wärmequellen wirksam sein sollen. Im Gegenteil: wenn wir von dem durchaus belanglosen Falle der vollständigen örtlichen Temperaturgleichheit absehen

wollen, so verlangt schon das Vorhandensein von Temperaturunterschieden auch das Vorhandensein von Wärmequellen. Sie müssen aber — so will die Überschrift sagen — außerhalb des Feldes liegen und dürfen sich nur durch ihre Einwirkung auf die Oberfläche bemerkbar machen. Wir werden davon bei der Erörterung der Randwertangaben zu sprechen haben.

Die Differentialgleichung.

Wenn wir die Grundgleichung der Wärmeleitung, also Gleichung (4a) auf zeitlich konstante Temperaturfelder ohne Wärmequellen anwenden, so müssen wir darin $(\partial \theta / \partial \tau)$ und W gleich null setzen. Damit fällt auch „a“ aus der Gleichung fort und es verbleibt als Bedingung für θ die einfache Gleichung

$$\Delta^2 \theta = 0 \dots \dots \dots (43)$$

Diese Gleichung spielt in der Physik eine überaus wichtige Rolle, indem sie die Grundgleichung der Potentialtheorie ist. Sie ist unter dem Namen „Laplacesche Differentialgleichung“ bekannt. Ihr entspricht vor allem die räumliche Verteilung des Gravitationspotentials in einem Felde, wenn die das Potential erzeugenden Massen außerhalb des Feldes liegen, ferner die Potentialverteilung im elektrostatischen Feld, wenn keine Ladungen im Feld selbst sind und endlich die Verteilung des Geschwindigkeitspotentials jeder stationären, wirbelfreien Strömung in einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit.

Es sei deshalb der Leser auf die Lehrbücher über Potentialtheorie verwiesen, wenn er sich eingehender, als es hier geschehen kann, mit dem vorliegenden Problem befassen will.

Die Grenzbedingungen.

Vor allem fällt die zeitliche Grenzbedingung fort, denn die konstanten Temperaturfelder sind als jener Endzustand aufzufassen, dem ein Temperaturfeld mit wachsender Zeit zustrebt, wenn die Oberflächenbedingungen konstant sind. Dieser End- oder Beharrungszustand ist von der ursprünglichen Temperaturverteilung unabhängig und allein durch die Oberflächenbedingungen bestimmt.

Bei den Oberflächenbedingungen oder räumlichen Grenzbedingungen unterscheiden wir auch hier wieder dieselben drei Arten, die wir auf Seite 12 usw. abgeleitet haben, jedoch bestehen jetzt einige Vorschriften darüber, welche Angaben notwendig, aber auch hinreichend sind, um ein Problem eindeutig zu kennzeichnen. Bei den einzelnen Aufgaben, die wir besprechen werden, wird es meist sich von selbst ergeben, inwieweit die Angaben willkürlich gewählt werden dürfen. Eine allgemeine Erörterung dieser Einschränkungen würde hier zu weit führen. Es sei deshalb auf die einschlägige Literatur verwiesen: Enzykl. der math. Wiss. II. A. 7b, Seite 486/487. Eindeutigkeitssatz und Existenzsatz

Einteilung des Gebietes.

In den Aufgaben Nr. 8, 9 und 10 sollen solche Fälle besprochen werden, bei denen das Temperaturfeld nur von einer Koordinate ab-

hängt. Die Grundgleichung der Wärmeleitung, die in der Form (43) immer noch eine partielle war, wird jetzt zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Wir erhalten die nachstehenden 3 Formen.

$$\text{Geradlinige Koordinaten: } \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \dots \dots \dots (44a)$$

$$\text{Zylinder-Koordinaten: } \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} = 0 \dots \dots (44b)$$

$$\text{Kugel-Koordinaten: } \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} = 0 \dots \dots (44c)$$

In Aufgabe Nr. 11 wird dann noch ein Beispiel gerechnet werden, bei dem das Temperaturfeld von zwei Koordinaten abhängt. Hier ist dann die Differentialgleichung wieder eine partielle.

Aufgabe 8. Platte.

„Für eine planparallele Platte von der Dicke Δ sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Wärmefluß durch die Platte zu bestimmen, und zwar unter Berücksichtigung der verschiedenen Arten der Oberflächenbedingung.“

a) Einleitung. Aus der Differentialgleichung $\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0$ ergibt sich durch einmalige Integration $\frac{d\theta}{dx} = C_1$, worin C_1 die erste Integrationskonstante ist. Das Temperaturgefälle im Inneren der Wand ist also konstant. Die nochmalige Differentiation liefert:

$$\theta = C_1 \cdot x + C_2 \dots \dots \dots (45a)$$

Die Temperaturkurve ist demnach eine gerade Linie mit dem Abschnitt C_2 auf der Ordinatenachse und der Neigung C_1 .

b) Die erste Art der Randbedingung auf beiden Seiten. Für $x=0$ soll die Temperatur den Wert θ_1 , für $x=\Delta$ den Wert θ_2 besitzen. — Durch Einsetzen dieser Werte erhalten wir:

$$C_2 = \theta_1 \text{ und } C_1 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta}.$$

Die Gleichung des Temperaturfeldes lautet damit.

$$\theta = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{x}{\Delta} \dots \dots \dots (45b)$$

Die Wärmemenge Q , die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche $Y \cdot Z$ hindurchtritt, ist:

$$Q = -\lambda \cdot \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta} \cdot Y \cdot Z \cdot \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{Std.}} \right] \dots \dots \dots (45c)$$

c) Bei $x=0$ die zweite Art der Randbedingung. Durch die Oberfläche $x=0$ trete in der Zeiteinheit und pro Flächeneinheit die Wärmemenge q in die Platte ein. Ferner sei für $x=0$ die Temperatur gleich

θ_1 gegeben. Die Konstante C_2 ist wieder gleich θ_1 . Aus den beiden Gleichungen

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\theta}{dx} \text{ und } C_1 = \frac{d\theta}{dx}$$

ergibt sich $C_1 = -\frac{q}{\lambda}$ und damit die Gleichung des Temperaturfeldes zu

$$\theta = \theta_1 - \frac{q}{\lambda} \cdot x \dots \dots \dots (45d)$$

d) Beiderseits die dritte Art der Randbedingung. Die Umgebungstemperatur sei auf der einen Seite gleich ϑ_1 , auf der anderen Seite gleich ϑ_2 und die zugehörigen W. Ü. Z. seien gleich α_1 und α_2 .

Bezeichnen wir mit θ_1 und θ_2 wieder die beiden Oberflächentemperaturen, so gilt nach der Definition der 3. Randwertangabe:

$$\text{Für } x = 0: -\lambda \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = \alpha_1 \cdot (\vartheta_1 - \theta_1) \dots \dots \dots \text{ I}$$

$$\text{Für } x = \Delta: +\lambda \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=\Delta} = \alpha_2 \cdot (\vartheta_2 - \theta_2) \dots \dots \dots \text{ II}$$

Ferner ist wegen des geradlinigen Temperaturverlaufes

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=\Delta} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta} \dots \dots \dots \text{ III}$$

Die Gleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$\vartheta_1 - \theta_1 = -\frac{\lambda}{\alpha_1} \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \dots \text{ I}$$

$$\vartheta_2 - \theta_2 = +\frac{\lambda}{\alpha_2} \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \dots \text{ II}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \dots \text{ III}$$

$$\theta_1 = \vartheta_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1} \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \dots \text{ I}$$

$$\theta_1 = \vartheta_2 - \left(\frac{\lambda}{\alpha_2} + \Delta\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \dots \dots \text{ (II + III)}$$

$$\text{Durch Subtr. 0} = (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \left(\frac{\lambda}{\alpha_1} + \Delta + \frac{\lambda}{\alpha_2}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{Daraus ist: } C_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \text{ weil } C_1 = \frac{d\theta}{dx} \text{ ist}$$

$$\text{und es ist aus I: } C_2 = \vartheta_1 + \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \text{ weil } C_2 = \theta_1 \text{ ist.}$$

Als Endergebnis erhalten wir die Gleichung des Temperaturfeldes:

$$\theta = \vartheta_1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\frac{1}{a_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{a_2}} \right) \cdot \dots \dots \dots (45e)$$

und der Wärmefluß durch die Platte wird:

$$Q = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\frac{1}{a_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{a_2}} \cdot Y \cdot Z = k \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot Y \cdot Z \dots \dots (45f)$$

worin k die sogenannte Wärmedurchgangszahl (W.D.Z.) bezeichnet.

$$\text{Es ist Dimension } [k] = \frac{\text{W.E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{std. Std.}}$$

e) Bei $x = 0$ die zweite Art und bei $x = \Delta$ die dritte Art der Randbedingung. Durch die Flächeneinheit der Oberfläche $x = 0$ trete in der Zeiteinheit die Wärmemenge q ein und durch die Oberfläche $x = \Delta$ gebe die Platte ihre Wärme an die Umgebung von der Temperatur ϑ_2 ab. Die W.Ü.Z. sei a_2 .

Während die Konstante C_1 ohne weiteres gegeben ist durch

$$C_1 = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{q}{\lambda}$$

erfordert die Bestimmung von C_2 eine kleine Rechnung. Wir wissen, daß C_2 gleich θ_1 ist, müssen also von ϑ_2 ausgehend zuerst θ_2 und von diesem aus θ_1 bestimmen.

Die Bedingung für die Oberfläche $x = \Delta$ ist

$$q = (\theta_2 - \vartheta_2) \cdot a_2 \text{ oder } \theta_2 = \vartheta_2 + \frac{q}{a_2}.$$

Daraus $\theta_1 = C_2 = \theta_2 - \frac{d\theta}{dx} \cdot \Delta = \vartheta_2 + \frac{q}{a_2} + \frac{q}{\lambda} \cdot \Delta = \vartheta_2 + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{\Delta}{\lambda} \right) q$.

Endlich die Gleichung des Temperaturfeldes:

$$\theta = \vartheta_2 + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{\Delta}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot q \dots \dots \dots (45g)$$

f) **Zeichnerisches Verfahren.** Siehe Fig. 31. Die über das Temperaturfeld verlangten Angaben lassen sich in sehr einfacher Weise auf zeichnerischem Wege gewinnen, wenn man sich Fig. 3 vergegenwärtigt und wenn man aus der Gleichung (45a) die Tatsache entnimmt, daß der Temperaturverlauf im Innern der Platte geradlinig ist.

Bei der ersten Randwertangabe sind die Temperaturen θ_1 und θ_2 und damit auch die Punkte C und D unmittelbar gegeben.

Bei den Angaben der 2. Art ist der Punkt C und auch die Neigung der Geraden CD durch ihre Tangente zu $-(q : \lambda)$ gegeben. Durch

die Gerade, die man von C aus unter diesem Winkel zieht, wird der Punkt D gefunden.

Bei der 3. Art ist der Punkt A durch die Werte ϑ_1 und $(\lambda : \alpha_1)$ und der Punkt B durch ϑ_2 und $\lambda : \alpha_2$ gegeben. Die Verbindungslinie beider Punkte liefert die Punkte C und D und damit auch Θ_1 und Θ_2 .

Bei der Vereinigung zweier Arten von Randwertangaben, wie im Falle unseres 4. Beispiels, ist Punkt A durch ϑ_1 und $(\lambda : \alpha_1)$ gegeben,

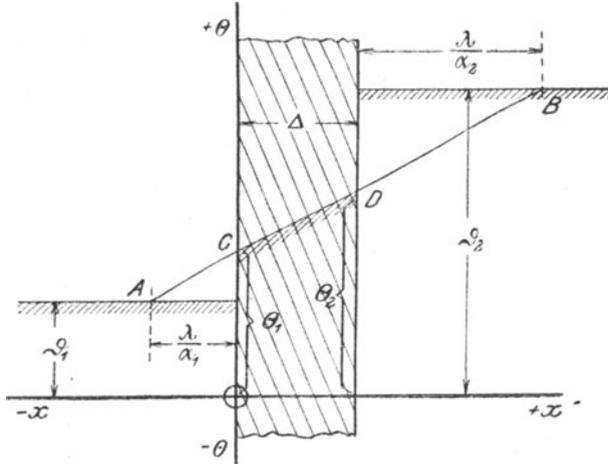


Fig. 31. Wärmefluß durch eine planparallele Platte: Temperaturfeld im Beharrungszustand.

ferner die Neigung der Geraden durch den Wert $-(q : \lambda)$. Bei dem Beispiel, das in Fig. 31 gezeichnet ist, wäre q negativ einzuführen, weil die Wärme bei $x = 0$ die Platte verläßt, also im Sinne der negativen x -Achse strömt.

Aufgabe 9. Das Rohr.

„Für ein zylindrisches Rohr vom inneren Radius R_i und vom äußeren Radius R_a sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Wärmefluß durch die Wandung zu bestimmen, und zwar unter Berücksichtigung der verschiedenen Arten der Oberflächenbedingungen.“

Der Zeiger „i“ bezeichne stets Innenseite.

„ „ „a“ „ „ Außenseite.

a) Einleitung. Die Differentialgleichung $\frac{d^2 \Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d \Theta}{dr} = 0$ lösen

wir, indem wir vorübergehend $d \Theta / dr = U$ setzen:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = 0 \text{ oder } \frac{dU}{U} = -\frac{dr}{r}$$

Durch Integration: $\ln U = -\ln r + \ln C_1$ oder $U \cdot r = C_1$.

Für U wieder seinen Wert eingesetzt gibt:

$$C_1 = r \cdot \frac{d\theta}{dr} \text{ oder } d\theta = C_1 \cdot \frac{dr}{r} \text{ und dies gibt durch nochmalige Inte-}$$

gration:

$$\theta = C_1 \cdot \ln r + C_2 \dots \dots \dots (46a)$$

Die Temperaturkurve ist also hier eine logarithmische Linie.

b) Die erste Art der Randbedingung für Innen- und Außenseite.
d. h. es sind die Temperaturen θ_i und θ_a gegeben. Damit gibt Gleichung (46a):

$$\text{für } r = R_i: \quad \theta_i = C_1 \cdot \ln R_i + C_2$$

$$\text{für } r = R_a: \quad \theta_a = C_1 \cdot \ln R_a + C_2$$

Daraus
$$C_1 = \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_i - \ln R_a};$$

und
$$C_2 = \frac{\theta_i \cdot \ln R_a - \theta_a \cdot \ln R_i}{\ln R_a - \ln R_i}$$

und dies läßt sich in zweierlei Art umformen:

Entweder:
$$C_2 = \theta_a + \frac{(\theta_i - \theta_a)}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot \ln R_a$$

oder
$$C_2 = \theta_i + \frac{(\theta_i - \theta_a)}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot \ln R_i.$$

Demgemäß lassen sich auch zwei Formen für die Gleichung des Temperaturfeldes aufstellen:

$$\begin{aligned} \theta &= C_2 + C_1 \cdot \ln r = \theta_a + \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot \ln R_a - \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot \ln r \\ &= \theta_a + \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot (\ln R_a - \ln r) \dots \dots \dots \left. \right\} \dots (46b) \\ &= \theta_i - \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot (\ln r - \ln R_i) \dots \dots \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

Um die Wärmemenge zu berechnen, welche durch die Wandung eines Rohrstückes von der Länge Z hindurchtritt, legen wir innerhalb der Wandung eine Zylinderfläche vom Radius r fest. Also $R_i < r < R_a$.

Durch diese Fläche geht dann in der Zeiteinheit die Wärmemenge:

$$Q_Z = -\lambda \cdot 2 r \pi Z \cdot \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r \text{ hindurch.}$$

Aus (46 b) ist $\frac{d\theta}{dr} = -\frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \cdot \frac{1}{r}$ und damit wird

$$Q_Z = + \lambda \cdot 2\pi \cdot Z \cdot \frac{\theta_i - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_i} \dots \dots \dots (46c)$$

Für die Zwecke der nächsten Aufgabe leiten wir noch die nachstehende Gleichung ab.

Weil $C_1 = r \cdot \frac{d\theta}{dr}$ ist, ist $Q_Z = -\lambda \cdot 2\pi Z \cdot C_1$ oder $C_1 = -\frac{Q_Z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot Z}$

c) Die zweite Art der Randbedingung an der Innenseite und erste Art an der Außenseite. Gegeben ist die Wärmemenge Q_Z , die innerhalb der Rohrlänge Z in der Zeiteinheit erzeugt wird, und die Temperatur θ_a .

In der Gleichung $\theta = C_1 \cdot \ln r + C_2$ ist nach den letzten Ausführungen des Absatzes b) der Wert C_1 bestimmt; es heißt also

$$\theta = -\frac{Q_Z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot Z} \cdot \ln r + C_2.$$

Diese Gleichung für $r = R_a$ angewandt, liefert

$$C_2 = \theta_a + \frac{Q_Z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot Z} \cdot \ln R_a.$$

Nunmehr sind die Konstanten C_1 und C_2 bekannt und die Gleichung des Temperaturfeldes lautet:

$$\theta = \theta_a + \frac{Q_Z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot Z} \cdot (\ln R_a - \ln r) \dots \dots \dots (46d)$$

d) Beiderseits die dritte Art der Randbedingung. Die Temperatur des Innenraumes sei ϑ_i , die Temperatur des Außenraumes ϑ_a , die W. Ü. Z. seien α_i und α_a .

Zur Bestimmung der beiden Konstanten C_1 und C_2 gehen wir aus von den beiden Oberflächenbedingungen:

für $r = R_i$: $-\lambda \cdot \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_i = \alpha_i (\vartheta_i - \theta_i) \dots \dots \dots$ I

für $r = R_a$: $-\lambda \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_a = \alpha_a \cdot (\theta_a - \vartheta_a) \dots \dots \dots$ II

Ferner übernehmen wir aus Abschnitt a die Beziehungen:

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_i = \frac{C_1}{R_i} \text{ und } \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_a = \frac{C_1}{R_a} \dots \dots \dots$$
 III

Aus den Gleichungen: $\theta_i = C_1 \cdot \ln R_i + C_2 \dots \dots \dots$ IV

und: $\theta_a = C_1 \cdot \ln R_a + C_2 \dots \dots \dots$ V

bilden wir durch Subtraktion: $\theta_i - \theta_a = C_1 \cdot (\ln R_i - \ln R_a)$.

Aus diesen 5 Gleichungen bestimmen wir nun die beiden Konstanten C_1 und C_2 :

$$\text{Aus I und III: } \vartheta_i - \theta_i = -\frac{\lambda}{a_i} \cdot \frac{C_1}{R_i}$$

$$\text{„ II „ III: } \theta_a - \vartheta_a = -\frac{\lambda}{a_a} \cdot \frac{C_1}{R_a}$$

$$\text{Durch Addition: } (\vartheta_i - \vartheta_a) - (\theta_i - \theta_a) = -C_1 \cdot \left(\frac{\lambda}{a_i R_i} + \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a} \right)$$

$$\text{Darunter (IV-V.) } (\theta_i - \theta_a) = C_1 \cdot (\ln R_i - \ln R_a).$$

$$\text{Durch Addition: } C_1 = \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{(\ln R_i - \ln R_a) - \left(-\frac{\lambda}{a_i R_i} + \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a} \right)}$$

$$= \frac{-(\vartheta_i - \vartheta_a)}{\ln \frac{R_a}{R_i} + \frac{\lambda}{a_i R_i} + \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a}}$$

Zur Bestimmung von C_2 errechnen wir aus

$$\text{I und III den Wert } \theta_i = \vartheta_i + C_1 \cdot \frac{\lambda}{a_i R_i}$$

$$\text{II „ III „ „ „ } \theta_a = \vartheta_a - C_1 \cdot \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a}$$

$$\text{Damit gibt Gleichung IV } C_2 = \vartheta_i + C_1 \cdot \left(\frac{\lambda}{a_i R_i} - \ln R_i \right)$$

$$\text{„ V } C_2 = \vartheta_a - C_1 \cdot \left(\frac{\lambda}{a_a \cdot R_a} + \ln R_a \right).$$

Wir erhalten als Endergebnis die Gleichung des Temperaturfeldes in zwei Formen

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \vartheta_i - \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\lambda}{a_i R_i} + \ln \frac{R_a}{R_i} + \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a}} \cdot \left(\frac{\lambda}{a_i R_i} - \ln R_i + \ln r \right) \dots \\ &= \vartheta_a + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\lambda}{a_i R_i} + \ln \frac{R_a}{R_i} + \frac{\lambda}{a_a \cdot R_a}} \cdot \left(\frac{\lambda}{a_a \cdot R_a} + \ln R_a - \ln r \right) \dots \end{aligned} \right\} (46e).$$

Die Wärmemenge, die aus dem Zylinder von der Länge Z austritt, berechnet sich zu:

$$Q_z = -\lambda \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot Z \cdot \left(\frac{d\theta}{dr} \right) = -\lambda \cdot 2\pi Z \cdot C_1$$

$$= \frac{(\vartheta_i - \vartheta_a) \cdot 2\pi Z}{\frac{1}{a_i R_i} + \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} + \frac{1}{a_a \cdot R_a}} \dots \dots \dots (46f).$$

$$= k_2 \cdot (\vartheta_i - \vartheta_a) \cdot 2\pi Z.$$

Hierin müssen wir uns unter k_z eine W.Ü.Z. vorstellen, die nicht auf die Flächeneinheit, sondern sogleich auf die Längeneinheit des Rohres bezogen wird. Wir erhalten darum

$$\text{Dimension } [k_z] = \frac{\text{W. E.}}{\text{m. std. Grd.}}$$

e) **Auf der Innenseite zweite Art und auf der Außenseite dritter Art der Randwertangabe.** Gegeben ist die Wärmemenge Q_z , die innerhalb der Rohrlänge Z in der Zeiteinheit gebildet wird und ferner die Temperatur ϑ_a des Außenraumes und die W. Ü. Z. α_a .

Es ist nach den Ausführungen am Schlusse des Absatzes b):

$$C_1 = -\frac{Q_z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi Z}$$

Ferner ist nach Absatz d):

$$C_2 = \vartheta_a - C_1 \cdot \left(\frac{\lambda}{\alpha_a \cdot R_a} + \ln R_a \right)$$

Mit diesen beiden Konstanten wird die Gleichung der Temperaturkurve

$$\vartheta = \vartheta_a + \left(\frac{\lambda}{\alpha_a \cdot R_a} + \ln R_a - \ln r \right) \cdot \frac{Q_z}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi Z} \quad \dots \quad (46g)$$

Über eine Verallgemeinerung der Aufgabe für ein Rohr mit mehreren Wandschichten siehe später Seite 105.

Aufgabe 10. Die Hohlkugel.

„Für eine Hohlkugel vom inneren Radius R_i und vom äußeren Radius R_a sind die Gestalt des Temperaturfeldes und der Wärmefluß durch die Wandung zu bestimmen, und zwar unter Berücksichtigung der verschiedenen Arten der Oberflächenbedingungen.“

a) **Einleitung.** Zur Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} = 0$$

setzen wir wieder vorübergehend $\frac{d\vartheta}{dr} = U$. Also:

$$\frac{dU}{dr} + 2\frac{U}{r} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dU}{U} = -2\frac{dr}{r};$$

dies gibt durch Integration:

$$\ln U = 2 \cdot \ln r + \ln C_1 \quad \text{oder} \quad U \cdot r^2 = C_1.$$

Für U wieder seinen Wert eingesetzt, gibt:

$$\frac{d\vartheta}{dr} \cdot r^2 = C_1; \quad \text{oder} \quad d\vartheta = C_1 \cdot \frac{dr}{r^2}.$$

Durch Integration gelangen wir zur Gleichung des Temperaturverlaufes:

$$\theta = \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot C_1 + C_2 \dots \dots \dots (47a)$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen **Hyperbel**.

Die Ableitung der einzelnen Gleichungen erfolgt ganz in derselben Weise wie beim Zylinder. Es werden deshalb bei der Kugel die Gleichungen nicht abgeleitet werden, sondern nur das Endergebnis angegeben werden.

b) Die erste Randbedingung für Innen- und Außenseite. Gegeben: θ_i und θ_a .

Gleichung des Temperaturfeldes:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_i - \frac{\theta_i - \theta_a}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{r}\right) \dots \dots \dots \\ \theta &= \theta_a + \frac{\theta_i - \theta_a}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a}\right) \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (47b)$$

$$\text{Wärmemenge } Q = 4\pi\lambda \cdot \frac{\theta_i - \theta_a}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \dots \dots \dots (47c)$$

c) Für die Innenseite die zweite Art und für die Außenseite die erste Art der Randwertangaben. Gegeben: Q und θ_a .

Temperaturfeld: $\theta = \theta_a + \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a}\right) \dots \dots \dots (47d)$

d) Beiderseits die dritte Art der Randbedingung. Gegeben: ϑ_i , ϑ_a und α_i , α_a .

Temperaturfeld:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \vartheta_i - \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\lambda}{R_i^2 \alpha_i} + \frac{R_a - R_i}{R_a \cdot R_i} + \frac{\lambda}{R_a^2 \alpha_a}} \cdot \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{R_i^2 \alpha_i}\right) \dots \dots \\ \theta &= \vartheta_a + \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\lambda}{R_i^2 \alpha_i} + \frac{R_a - R_i}{R_a \cdot R_i} + \frac{\lambda}{R_a^2 \alpha_a}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} + \frac{\lambda}{R_a^2 \alpha_a}\right) \dots \dots \end{aligned} \right\} (47e)$$

$$\text{Wärmemenge } Q = 4\pi\lambda \cdot \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{\lambda}{R_i^2 \alpha_i} + \frac{R_a - R_i}{R_a \cdot R_i} + \frac{\lambda}{R_a^2 \alpha_a}} \dots \dots \dots (47f)$$

e) Für die Innenseite die zweite Art, für die Außenseite die dritte Art der Randwertangabe. Gegeben: Q und ϑ_a , α_a .

Temperaturfeld: $\theta = \vartheta_a + \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_a} + \frac{\lambda}{R_a^2 \alpha_a}\right) \dots \dots \dots (47g)$

Bemerkung.

Der Temperaturbeharrungszustand in der Hohlkugel ist besonders geeignet zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Bau- und Isolierstoffen. Vgl. W. Nußelt, Die Wärmeleitfähigkeit von Wärmeisoliertstoffen. Dissertation München, Technische Hochschule 1907. Im Auszug: Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1908, S. 906. In dieser Arbeit ist auch der Fall behandelt, daß die äußere Umhüllung statt durch eine Kugel durch einen Würfel gebildet ist.

Aufgabe 11. Eindringen der Wärme in den einseitig unendlich ausgedehnten Körper durch eine Kreisfläche.

„Ein einseitig, unendlich ausgedehnter Körper (vgl. Aufg. Nr. 5) besitze ursprünglich überall die Temperatur null. Seine Oberfläche sei mit Ausnahme einer Kreisfläche vom Radius R vollständig isoliert. Nun werde von einem gegebenen Augenblick an die ganze Kreisfläche auf der Temperatur θ_C gehalten. Dann wird von der Kreisfläche aus dauernd Wärme in das Feld einströmen. — Es ist zu untersuchen, welchem Beharrungszustand die Temperaturverteilung mit der Zeit zustrebt und wie groß die Wärmemenge ist, die im Beharrungszustand während der Zeiteinheit durch die Kreisfläche in den Körper eindringt.“

a) Der mathematische Ansatz.

In Fig. 32 ist ein Zylinder-Koordinatensystem r, φ, z so im Körper festgelegt, daß die positive Z -Achse vom Mittelpunkt der Kreisfläche aus nach dem Innern des Körpers geht. Dann ergibt sich aus der ganzen Art der Aufgabe, daß das Temperaturfeld von der Koordinate φ unabhängig ist, daß also die Flächen konstanter Temperatur Rotationsflächen sind, deren Erzeugende nur von r und z abhängen. Es ist auch ohne weiteres einzusehen, daß diese Erzeugenden ungefähr den in Fig. 32 durch die Kurven $\theta = \text{const}$ gekennzeichneten Verlauf haben.

Die Wärmeleitungsgleichung (4c) nimmt die Form an

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0.$$

Die Oberflächenbedingungen lauten:

1. Für alle Punkte innerhalb der Kreisfläche muß die Temperaturfunktion den Wert θ_C annehmen.

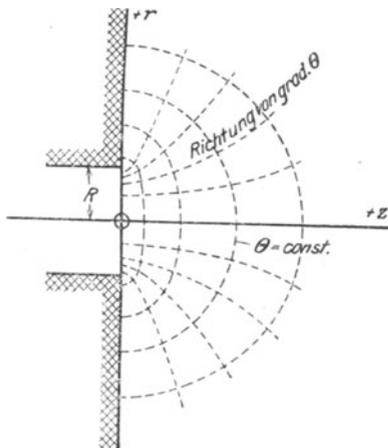


Fig. 32. Einseitig unendlich ausgedehnter Körper: Eindringen der Wärme durch eine Kreisfläche.

2. Außerhalb der Kreisfläche muß wegen der vollkommenen Isolierung der Oberfläche der Wärmefluß durch die Oberfläche gleich null sein; es muß also für alle diese Punkte das in Richtung der z-Achse gemessene Temperaturgefälle gleich null sein.
3. Für alle Punkte des Feldes, die von der Kreisfläche unendlich weit entfernt sind, muß die Temperatur zu null werden.

In mathematischer Ausdrucksweise lautet dies: Die Lösung $\theta = \Phi(r, z)$ der Aufgabe muß außer der Differentialgleichung noch den Bedingungen genügen:

1. für $z = 0$ und $r < R$ muß $\theta = \text{const} = \theta_C$ sein,
2. „ $z = 0$ „ $r > R$ „ $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ „
- 3a. „ beliebiges r und $z = \infty$ muß $\theta = 0$ „
- 3b. „ „ z „ $r = \infty$ „ $\theta = 0$ „

b) Das Aufsuchen von partikulären Integralen und die allgemeine Lösung. Auf Grund früherer Erfahrungen versuchen wir es wieder zuerst mit einem Produkt zweier Funktionen:

$$\theta = Z(z) \cdot R(r)$$

wobei R nur Funktion von r und Z nur Funktion von z sein soll. Da die Temperatur mit wachsendem z sehr rasch abnimmt, setzen wir für $Z(z)$ die Exponentialfunktion e^{-mz} , in der wir mit „ m “ eine willkürliche Größe bezeichnen. Dann nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$e^{-mz} \cdot \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + e^{-mz} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + m^2 \cdot e^{-mz} \cdot R(r) = 0,$$

$$\text{oder } \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} + m^2 \cdot R(r) = 0.$$

Diese Gleichung ist die uns schon bekannte Besselsche Differentialgleichung nullter Ordnung (Gleich. 11b) mit den Lösungen

$$R(r) = C \cdot J_0(m \cdot r) \text{ und } R(r) = D \cdot Y_0(m \cdot r)$$

Von diesen beiden Lösungen ist nur die erste brauchbar, denn die zweite Lösung nimmt für $r = 0$ den Wert unendlich an, steht also im Widerspruch mit der 1. Oberflächenbedingung. Die allgemeine Lösung heißt jetzt in vorläufiger Form

$$\theta = \sum_{k=0}^{k=\infty} C_k \cdot e^{-m_k z} \cdot J_0(m_k r).$$

Da aber keine Randwertbedingung von der 3. Art vorgeschrieben ist, also auch für m keine der transzendenten Gleichungen besteht, können die Werte m die Zahlenreihe stetig durchlaufen und zwei aufeinanderfolgende Werte von m unterscheiden sich nur um dm . Ferner können wir statt des willkürlichen Wertesystemes C eine willkürliche Funktion

$f(m)$ von m einführen. Die unendliche Summe geht in ein Integral über und wir erhalten als allgemeine Lösung:

$$\theta = \int_0^{\infty} f(m) \cdot e^{-mz} \cdot J_0(mr) \cdot dm \dots \dots \dots (48)$$

e) Bestimmung der willkürlichen Funktion $f(m)$ mit Hilfe der Oberflächenbedingung. Die 1. Bedingung verlangt, daß das Integral

$$\theta_{z=0} = \int_0^{\infty} f(m) \cdot J_0(mr) \cdot dm$$

für $r < R$ den konstanten Wert θ_C haben muß. Dagegen schreibt sie für den Bereich $r > R$ nichts vor. Andererseits darf aber die Funktion diesen konstanten Wert nicht beibehalten, weil sich nach der Bedingung 3a mit wachsendem z die Funktion der Null nähern muß.

Das obige Integral, das wir als eine Funktion des Parameters r aufzufassen haben, muß also einen sogenannten diskontinuierlichen Verlauf haben.

Die 2. Oberflächenbedingung liefert ein ganz ähnliches Ergebnis. Sie verlangt, daß das Integral

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} = - \int_0^{\infty} m \cdot f(m) \cdot J_0(mr) \cdot dm$$

für $r > R$ gleich null ist. Im Bereich $r < R$ ist sie ganz willkürlich, nur darf sie hier nicht gleich null bleiben, sonst würde durch die Kreisfläche keine Wärme in den Körper eintreten.

Nun kennt die Mathematik tatsächlich bestimmte Integrale, welche die Eigenschaft besitzen, daß sich ihr Funktionscharakter mit einem bestimmten Wert des Parameters plötzlich ändert, sogenannte diskontinuierliche Faktoren.

Am meisten bekannt ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(mR)}{m} \cdot \cos(mr) \cdot dm \quad \begin{array}{l} \text{für } r < R \text{ den Wert } \pi/2 \\ \text{für } r = R \text{ den Wert } \pi/4 \\ \text{für } r > R \text{ den Wert } 0 \end{array}$$

annimmt. [Vgl. Fig. 33a].

Ganz ähnliche bestimmte Integrale lassen sich auch mit Besselschen Funktionen bilden. (Vgl. Riemann-Weber, Partielle Diff.-Gleich. I. Bd., Seite 195/196).

Das Integral (vgl. Fig. 33b):

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(mR)}{m} \cdot J_0(mr) \cdot dm \text{ hat für } r \leq R \text{ den Wert } \pi/2$$

und für $r > R$ den Wert $\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)$

und das Integral [vgl. Fig. 33c]:

$$\int_0^\infty \sin(mR) \cdot J_0(mr) \cdot dm \text{ hat für } r < R \text{ den Wert } \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

und für $r > R$ den Wert 0.

Fig. 33c zeigt sofort, daß das letzte Integral der Bedingung 2 ohne weiteres genügt und Fig. 33b zeigt, daß das vorletzte Integral der Be-

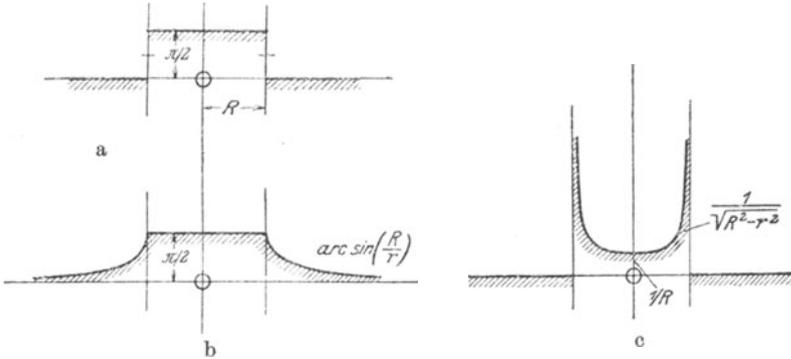


Fig. 33. Diskontinuierliche Faktoren.

dingung 1 genügt, wenn man noch einen konstanten Faktor anfügt, der die konstante Ordinate zu θ_C macht.

Setzen wir deshalb in der allgemeinen Lösung (48)

$$f(m) = \frac{2}{\pi} \cdot \theta_C \cdot \frac{\sin(mR)}{m}$$

so ist die Gleichung

$$\theta = \frac{2}{\pi} \theta_C \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(mR)}{m} \cdot J_0(mr) \cdot e^{-mz} \cdot dm \dots (49)$$

die gesuchte Gleichung des Temperaturfeldes.

d) Der Wärmefluß durch die Kreisfläche. Wir wollen vorerst den Wärmefluß durch eine Ringfläche mit dem Radius r und der Breite dr betrachten.

Das Temperaturgefälle senkrecht zur Oberfläche ist aus Gleichung (49):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{z=0} &= -\frac{2}{\pi} \theta_C \int_0^\infty \sin(mR) \cdot J_0(mr) \cdot dm \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \theta_C \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \text{ für alle } r < R. \end{aligned}$$

Damit
$$Q_{r, dr} = + \lambda \cdot 4 \theta_C \cdot \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr.$$

Dieser Ausdruck ist zugleich ein Maß für die Ergiebigkeit der Wärmequellen, die wir uns auf den einzelnen Ringflächen angeordnet denken müssen, damit die Temperatur θ_C auch wirklich erhalten bleibt. Aus Fig. 33c ist abzulesen, daß diese Ergiebigkeit von einem Kleinstwert in der Mitte der Scheibe an bis zur Ergiebigkeit unendlich am Rande zunimmt. Trotzdem ist der Wärmetransport durch die ganze Kreisfläche endlich, weil

$$\int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \left[-\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^R = R.$$

Es ergibt sich

$$Q_{\text{Kreis}} = + 4 \lambda \cdot R \cdot \theta_C \dots \dots \dots (50)$$

also nicht der Fläche des Kreises, sondern nur der ersten Potenz des Radius proportional.

Bemerkung.

Diese Aufgabe läßt sich in verschiedener Weise verallgemeinern. Man kann vor allem das Temperaturfeld untersuchen, bevor der Beharrungszustand eingetreten ist, also das zeitlich veränderliche Feld; ferner kann man für die Kreisfläche nicht die erste Randwertangabe, sondern die zweite oder dritte Randwertangabe vorschreiben. Man gelangt so zu einer Gruppe von Aufgaben, welche die Grundlage zu bilden hat für eine wissenschaftlich einwandfreie Beurteilung einer Reihe technischer Probleme. Für die Zwecke dieses Lehrbuches ist diese Aufgabe vor allem deshalb wichtig, weil sie die Anwendung der diskontinuierlichen Faktoren zeigt.

F. Die zeitlich konstanten Temperaturfelder mit Wärmequellen.

Die Differentialgleichung $\Delta^2 \theta + 1/\lambda \cdot W = 0$.

Vom Standpunkt der Potentialtheorie aus entsprechen die Temperaturfelder mit Wärmequellen, der Potentialverteilung, wenn sich die Massen oder Ladungen innerhalb des Feldes selbst befinden. Diese Potentialverteilung muß der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta^2 \psi = \pm 4\pi \rho$$

[vgl. Seite 28] genügen.

Wie in der Potentialtheorie die Massen, so können hier die Wärmequellen sowohl stetig verteilt, als auch flächenhaft, linien- oder punktförmig angeordnet gedacht werden.

Vom technischen Standpunkt aus sind die wichtigsten Wärmequellen dieser Art der sogenannte Energieverlust beim Fortleiten elektrischer Energie und beim Magnetisieren und Ummagnetisieren von Eisen. Die obige Differentialgleichung und ihre Lösungen bilden die Grundlage für eine wärmetechnisch einwandfreie Berechnung von elektrischen Leitungen, Transformatoren und Maschinen.

Aufgabe 12. Der Zylinder.

„In einem Zylinder vom Durchmesser $2R$ werde durch Umwandlung anderer Energiearten in der Zeiteinheit und Raumeinheit die Wärmemenge W erzeugt. — Wie groß ist die Temperatur an der Oberfläche und in der Achse des Zylinders, wenn die Raumtemperatur gleich ϑ und die W. Ü. Z. gleich a ist?“

Der mathematische Ansatz ist sofort gegeben:

Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\theta}{dr} + \frac{W}{\lambda} = 0.$$

Oberflächenbedingung:

$$-\lambda \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_R = a \cdot (\theta_R - \vartheta).$$

Zur Lösung der Differentialgleichung setzen wir $(d\theta/dr) = U$ und multiplizieren beide Seiten mit $r \cdot dr$:

$$r \cdot dU + U \cdot dr + \frac{W}{\lambda} \cdot r \cdot dr = 0$$

oder

$$d(Ur) = -\frac{W}{\lambda} \cdot r \cdot dr.$$

Durch Integration folgt daraus:

$$r \cdot \frac{d\theta}{dr} = -\frac{W}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\text{oder } \frac{d\theta}{dr} = -\frac{W}{\lambda} \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}.$$

Die nochmalige Integration liefert:

$$\theta = -\frac{W}{4\lambda} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 benützen wir die vorletzte Gleichung, also den Ausdruck für das Temperaturgefälle. Für $r = 0$ also für die Achse muß dieses Temperaturgefälle jedenfalls gleich Null sein. Dies ist aber nur möglich, wenn $C_1 = 0$ ist. Die Konstante C_2 ergibt sich aus der Oberflächenbedingung:

$$-\lambda \cdot \left(-\frac{W \cdot R}{2\lambda} \right) = a \cdot \left(-\frac{W R^2}{4\lambda} + C_2 - \vartheta \right)$$

$$\text{oder } C_2 = \vartheta + \frac{W R^2}{4\lambda} \cdot \left(1 + \frac{2\lambda}{a R} \right).$$

Mit diesen beiden Konstanten ergibt sich dann die Gleichung des Temperaturfeldes zu

$$\theta = \vartheta + \frac{W R^2}{4\lambda} \left(1 + \frac{2\lambda}{a R} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \dots \dots \dots (51a)$$

Aus dieser Gleichung folgt dann:

$$\text{Temp. i. d. Achse: } \theta_m = \vartheta + \frac{W R^2}{4 \lambda} \cdot \left(1 + \frac{2 \lambda}{\alpha R}\right) \dots \dots \dots (51b)$$

$$\text{Temp. a. d. Oberfl.: } \theta_0 = \vartheta + \frac{W R^2}{4 \lambda} \cdot \frac{2 \lambda}{\alpha R} = \vartheta + \frac{W R}{2 \alpha} \dots \dots \dots (51c)$$

$$\text{Unterschied: } \theta_m - \theta_0 = \frac{W R^2}{4 \lambda} \dots \dots \dots (51d)$$

Hier ist vor allem zu beachten, daß der Unterschied $\theta_m - \theta_0$ mit dem Quadrat des Radius wächst.

G. Verschiedene Sonderfälle.

Wir haben auf Seite 9 vor Ableitung der Differentialgleich. (4) verschiedene vereinfachende Annahmen getroffen, ohne uns über die Bedeutung oder auch über die Zulässigkeit dieser Annahmen irgendwie Rechenschaft abzulegen. Dies soll nun, soweit es dem Zwecke dieses Lehrbuches entspricht, nachgeholt werden, und zwar sollen diese einschränkenden Annahmen einzeln aufgehoben werden.

1. Das Feld ist von mehreren, verschiedenartigen Körpern erfüllt.

a) Allgemeines. Unsere einschränkende Annahme besagte in mathematischer Ausdrucksweise, daß die Stoffwerte λ , c und γ innerhalb des ganzen Feldes stetig sein sollen. Ist dagegen nach unserer jetzigen Voraussetzung das Feld von mehreren, verschiedenartigen Körpern erfüllt, so sind diese Stoffwerte nur innerhalb gewisser Teilgebiete des Feldes stetig, an der Grenzfläche zweier solcher Teilgebiete aber unstetig.

Innerhalb eines jeden solchen Teilgebietes muß die Temperaturfunktion der Differentialgleichung (4) genügen. Für jene Oberflächenbezirke der Teilgebiete, die zugleich die Begrenzung des ganzen Feldes bilden, müssen die Oberflächenbedingungen nach den Ausführungen der früheren Abschnitte gegeben sein. Dagegen haben wir jetzt noch zu untersuchen, welchen Bedingungen der Temperaturverlauf an den Trennungsf lächen der Teilgebiete unterworfen ist, das heißt, wie sich die Temperaturfunktion an den Unstetigkeitsstellen der λ -, c - und γ -Werte verhält.

In Fig. 34 soll ein kleiner Raumteil aus der Gegend einer Trennungsf läche dargestellt sein. Die beiden sich berührenden Körper und ihre

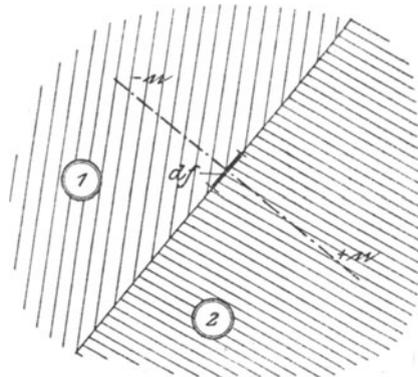


Fig. 34. Temperaturfeld an der Berührungsstelle zweier verschiedenartiger Körper.

physikalischen Größen seien durch die Zeiger „1“ und „2“ unterschieden. df ist ein Element der Trennungsfläche. Die Normale zu df werde positiv gerechnet in Richtung 1 gegen 2.

Wir stellen nun folgende Überlegung an:

Die Wärmemenge, die den Körper 1 durch das Flächenstück df in der Zeit $d\tau$ verläßt, ist:

$$dQ_1 = -\lambda_1 \left(\frac{d\theta}{dn} \right)_1 \cdot df \cdot d\tau, \text{ worin } \left(\frac{d\theta}{dn} \right)_1$$

den Temperaturanstieg in Richtung der positiven Normalen bezeichnet und zwar gemessen im Körper 1 dicht an der Trennungsfläche.

Die Wärmemenge, die durch df in der Zeit $d\tau$ in den Körper 2 eintritt, ist:

$$dQ_2 = -\lambda_2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dn} \right)_2 \cdot df \cdot d\tau.$$

Da das Flächenstück df als ein unkörperliches Gebilde weder Wärme zurückbehalten, noch hinzufügen kann, muß $dQ_1 = dQ_2$ sein. Also auch

$$\lambda_1 \cdot \left(\frac{d\theta}{dn} \right)_1 = \lambda_2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dn} \right)_2 \dots \dots \dots (52).$$

Aus der Tatsache, daß die Größe λ an der untersuchten Stelle unstetig ist, folgt, daß auch das Temperaturgefälle an dieser Stelle unstetig sein muß, und zwar gilt das nicht nur für den Beharrungszustand, sondern

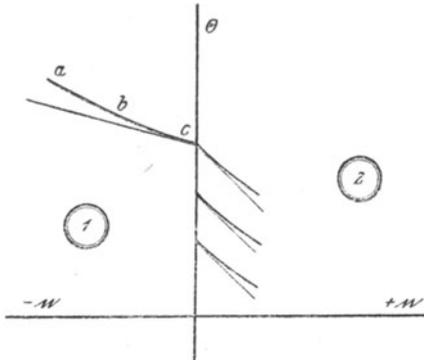


Fig. 35. Temperaturfeld an der Berührungsstelle zweier verschiedenartiger Körper.

auch für den veränderlichen Zustand. Durch Gleichung (52) sind die beiden Grenztemperaturgefälle einander zugeordnet. Ist zum Beispiel, wie in Fig. 35 gezeichnet, der Temperaturverlauf a, b, c im Körper 1 gegeben, so ist damit zugleich für die Temperaturkurve im Körper 2 die Neigung der Anfangstangente gegeben — aber vorerst nur die Neigung noch nicht die Lage der Tangente. Wir kommen damit zu der Frage, ob an der Grenze zweier Körper nicht nur der Temperaturgradient, sondern auch die Temperatur selbst unstetig ist, also zu der Frage nach dem Temperatursprung.

Diese Frage läßt sich heute auf Grund zuverlässiger Messungen dahin beantworten, daß bei vollkommener Berührung der beiden Körper kein Temperatursprung eintritt. Als eine solche vollkommene Berührung kann z. B. gelten, wenn zwei Metalle verlötet sind, wenn sich zwei Körper längs vollkommen ebener, polierter Flächen berühren oder wenn der eine

Körper ein plastischer Körper ist, der fest gegen die Oberfläche des anderen Körpers gepreßt ist.

Berühren sich dagegen die Körper längs rauher Oberflächen, so tritt scheinbar ein Temperatursprung ein, der aber nur durch ein sehr starkes Temperaturgefälle in der dünnen Luftschicht vorgetäuscht wird. Es ist vom mathematischen Standpunkte aus sehr wohl möglich, diesem scheinbaren Temperatursprung durch Einführung eines Überleitungskoeffizienten Rechnung zu tragen. Allein es ist schon sehr schwierig, den Rauheitsgrad der beiden Oberflächen zahlenmäßig festzulegen; noch viel schwieriger ist es, dann diesem Rauheitsgrad wieder zahlenmäßig einen Wärmeüberleitungskoeffizienten zuzuordnen. Aus diesem Grunde will ich auf die Besprechung der unvollkommenen Berührung verzichten und, ohne es besonders zu betonen, stets vollkommene Berührung annehmen. Dann wird stets $(\Theta_1)_0 = (\Theta_2)_0$ und die beiden Zweige der Temperaturkurve in Fig. 35 schließen sich aneinander an.

Hier ist noch eine Bemerkung einzuschalten: Nach den Lehren der kinetischen Gastheorie tritt bei sehr verdünnten Gasen zwischen Gefäßwandung und Gas ein Temperatursprung auf. Dieser Widerspruch ist dadurch zu erklären, daß die kinetische Gastheorie die Materie nicht mehr als Kontinuum auffaßt, wie das die analytische Theorie der Wärmeleitung (siehe Seite 1) tut, und daß deshalb die betrachteten Räume nicht mehr groß sind im Vergleich zur Größe oder zum Abstand der Moleküle.

Damit sind die allgemeinen Erörterungen über den Verlauf der Temperaturfunktion an den Trennungsf lächen erledigt und wir können nun zur Lösung von Aufgaben übergehen.

b) Verallgemeinerung der Aufgabe Nr. 9 über das Rohr. „Für ein Rohr, dessen Wandung aus zwei konzentrischen Schichten besteht, ist der Wärmefluß durch die Wandung zu bestimmen, wenn für die Innen- und Außenseite die dritte Art der Randwertangabe vorliegt.“

Wenn man die Bezeichnungen der nebenstehenden Fig. 36 benützt, so ist gegeben: R_i , R_m und R_a , ferner λ_i , λ_a , α_i , α_a und ϑ_i , ϑ_a .

Dieselbe Wärmemenge Q , die in der Zeiteinheit vom Innenraum an die Innenwand übergeht, muß auch die Innenschicht durchsetzen, dann die Außenschicht durchsetzen und endlich von der Außenwand in den Außenraum übertreten. Wenn wir für den Wärmetransport durch die beiden Schichten die Gleichung Nr. 46c aus der Aufgabe Nr. 9, erste Randwertangabe, zu Hilfe nehmen, so erhalten wir für Q nachstehende 4 Gleichungen:

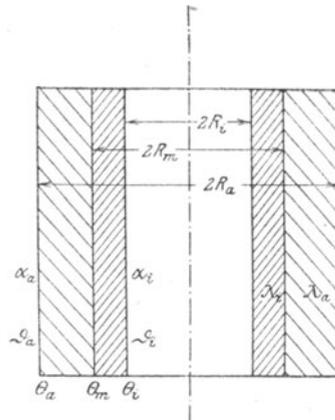


Fig. 36. Rohrwand, aus verschiedenen Schichten bestehend.

Wenn wir für den Wärmetransport durch die beiden Schichten die Gleichung Nr. 46c aus der Aufgabe Nr. 9, erste Randwertangabe, zu Hilfe nehmen, so erhalten wir für Q nachstehende 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 Q &= 2 R_i \pi \cdot Z \cdot \alpha_i (\vartheta_i - \theta_i) \\
 &= 2 \pi Z \cdot \lambda_i \cdot \frac{\theta_i - \theta_m}{\ln R_m - \ln R_i} \\
 &= 2 \pi \cdot Z \lambda_a \cdot \frac{\theta_m - \theta_a}{\ln R_a - \ln R_m} \\
 &= 2 R_a \pi \cdot Z \alpha_a (\theta_a - \vartheta_a)
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \frac{Q}{2 \pi Z} \cdot \frac{1}{\alpha_i R_i} &= \vartheta_i - \theta_i \\
 \frac{Q}{2 \pi Z} \cdot \frac{\ln R_m - \ln R_i}{\lambda_i} &= \theta_i - \theta_m \\
 \frac{Q}{2 \pi Z} \cdot \frac{\ln R_a - \ln R_m}{\lambda_a} &= \theta_m - \theta_a \\
 \frac{Q}{2 \pi Z} \cdot \frac{1}{\alpha_a \cdot R_a} &= \theta_a - \vartheta_a
 \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Gleichungen ergibt sich durch Addition und Umstellung

$$Q = 2 \pi Z \cdot \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha_i R_i} + \frac{\ln R_m - \ln R_i}{\lambda_i} + \frac{\ln R_a - \ln R_m}{\lambda_a} + \frac{1}{\alpha_a R_a}} \quad \cdot \cdot \quad (53)$$

Die Aufgabe läßt sich nun abermals erweitern, indem man nicht zwei, sondern beliebig viele Schichten annimmt. Man braucht dann nur in Gleichung (53) noch weitere Glieder von der Form

$$\frac{\ln R_p - \ln R_q}{\lambda_{p, q}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda_{p, q}} \ln \frac{R_p}{R_q}$$

einzufügen. Für manche Rechnungen kann die zweite Schreibweise dieser Glieder zweckmäßiger sein.

c) Verallgemeinerung der Aufgabe Nr. 5 über den einseitig, unendlich ausgedehnten Körper. Zur Lösung der Aufgabe Nr. 5 hatten wir uns eines Kunstgriffes (Seite 67) bedient, den wir dahin auffassen können, daß zwei unendlich ausgedehnte Körper von den Temperaturen $+\theta_C$ und $-\theta_C$ mitsammen in Berührung gebracht werden und dann ihre Temperaturen ausgleichen. Während aber damals die beiden Körper aus gleichem Stoff waren, sollen sie jetzt aus verschiedenen Stoffen bestehen. Wir kommen so zu folgendem Wortlaut für die Aufgabe:

„Ein einseitig, unendlich ausgedehnter Körper „1“ aus einem Stoffe mit den Werten λ_1 , c_1 und γ_1 werde mit einem zweiten, unendlich ausgedehnten Körper „2“ mit den Stoffwerten λ_2 , c_2 und γ_2 in Berührung gebracht. Vor der Berührung war die Temperatur im ersten Körper einheitlich gleich θ_1 , im zweiten Körper gleich θ_2 . — Welches ist der weitere Temperaturverlauf?“

Zur Zeit $\tau = 0$ ist der Temperaturverlauf im Felde an der Stelle $x = 0$ unstetig. Aber schon nach der unendlich kurzen Zeit $d\tau$ ist diese Unstetigkeitsstelle verschwunden und durch ein sehr steiles Temperaturgefälle in der Nähe von $x = 0$ ersetzt. Die am Anfang verschiedenen Werte $\theta_{x=+0}$ und $\theta_{x=-0}$ haben sich zu dem Wert θ_m ausgeglichen.

Die Funktion $\theta = \Phi(x, \tau)$ hat folgendem mathematischen Ansatz zu genügen:

Im Bereich $x > 0$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_1 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{I}$$

Im Bereich $x < 0$ der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{II}$$

An der Trennungsfläche für $x = 0, \tau > 0$:

$$\theta_{x=+0} = \theta_{x=-0} = \theta_m \dots \dots \dots \text{III}$$

An der Trennungsfläche für $x = 0, \tau = 0$:

$$\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{+0} = \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{-0} \dots \dots \dots \text{IV}$$

Im Anfang für $\tau = 0; x > 0$:

$$\theta = \theta_1 \dots \dots \dots \text{V}$$

Im Anfang für $\tau = 0; x < 0$:

$$\theta = \theta_2 \dots \dots \dots \text{VI}$$

Um die Rechnung abzukürzen, wollen wir eine Tatsache als bekannt annehmen, die wir sonst erst nach langer Rechnung erhalten würden. Wenn diese Annahme uns zu einer Temperaturfunktion führt, die allen Gleichungen I–VI genügt, so ist damit auch die Richtigkeit der Annahme selbst erwiesen, weil es nur eine Lösung gibt, die allen 6 Gleichungen entspricht.

Diese Annahme betrifft die Temperatur θ_m der Berührungsebene. Solange wir nichts anderes wissen, werden wir etwa vermuten, daß unmittelbar nach Auflösung der Unstetigkeitsstelle ein Anfangswert von θ_m auftritt, der sich dann mit der Zeit asymptotisch einem bleibenden Wert nähert. Allein dies ist nicht der Fall: sofort nach Auflösung der Unstetigkeitsstelle stellt sich ein fester Wert θ_m ein, der

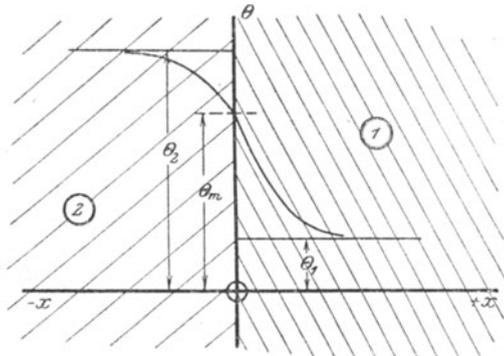


Fig. 37. Temperaturlösung zwischen verschiedenartigen Körpern.

während der ganzen Dauer des Vorganges unverändert bleibt. Dies ist die Tatsache, die wir vorerst unbewiesen hinnehmen wollen. Der Vorteil, den wir damit erreichen, ist der, daß sich unsere Aufgabe in zwei Aufgaben Nr. 5 spalten läßt, wofür wir in Gleichung (32 b) die Lösung bereits gefunden haben.

$$(Gl. 32 b): \theta = \theta_c \cdot G\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a\tau}}\right).$$

Diese Gleichung, zusammen mit Fig. 37, ergibt:

$$\text{für positives } x: \quad \theta = \theta_m - (\theta_m - \theta_1) \cdot G\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a_1\tau}}\right) \dots \dots \dots \text{VII}$$

$$\text{für negatives } x: \quad \theta = \theta_m + (\theta_2 - \theta_m) \cdot G\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{a_2\tau}}\right) \dots \dots \dots \text{VIII}$$

Für $x = 0$ ergeben beide Gleichungen vorschriftsgemäß den Wert θ_m , weil das Gaußsche Fehlerintegral für $x = 0$ den Wert null hat. Wir müssen nun noch den Wert θ_m bestimmen. Hierzu benützen wir Gleichung IV.

Beachten wir, daß

$$\frac{d}{dx} G\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{a\tau}}\right) = + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a\tau}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}$$

und daß $\frac{\lambda}{\sqrt{a}} = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma} = b$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{+0} &= + \lambda_1 \cdot (\theta_1 - \theta_m) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(G\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{4a_1\tau}}\right)\right) \\ &= + \lambda_1 \cdot (\theta_1 - \theta_m) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1\pi\tau}} = + \frac{b_1}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot (\theta_1 - \theta_m) \end{aligned}$$

$$\text{ebenso} \quad \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{-0} = - \frac{b_2}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot (\theta_2 - \theta_m).$$

Mit diesen Ausdrücken wird Gleichung IV.

$$b_1 \cdot (\theta_1 - \theta_m) = - b_2 (\theta_2 - \theta_m)$$

$$\text{oder} \quad (\theta_2 - \theta_m) : (\theta_m - \theta_1) = b_1 : b_2.$$

Erklären wir diese Gleichung an Hand unserer Fig. 37, so besagt sie: Der Punkt θ_m teilt die Strecke $\theta_2 - \theta_1$ im umgekehrten Verhältnis der zugehörigen b -Werte. Die Grenztemperaturunterschiede $(\theta_2 - \theta_m)$ und $(\theta_m - \theta_1)$ hängen also vom Verhältnis der b -Werte die Grenztemperaturgefälle aber vom Verhältnis der $W. L. F.$ ab.

2. Der Körper ist nicht isotrop.

a) Allgemeines. Ein isotroper Stoff ist ein solcher, bei dem alle physikalischen Eigenschaften von der Richtung unabhängig sind; weitaus die meisten Stoffe sind isotrop. Das gebräuchlichste Beispiel eines anisotropen Körpers sind die Kristalle. Die analytische Theorie der

Wärmeleitung in Kristallen ist ein wichtiger Zweig der theoretischen Physik geworden — doch liegt die Hauptbedeutung dieser Theorie auf rein mathematischem Gebiet. Wir wollen deshalb auf diese Theorie nicht weiter eingehen und begnügen uns damit, einige Begriffe aus dieser Lehre zu übernehmen.

In einem isotropen Körper ist die Wärmeleitfähigkeit an einer Stelle unabhängig von der Richtung und deshalb durch eine einzige Zahlenangabe vollkommen bestimmt — sie ist ein reiner Skalar. Anders bei einem Kristall; hier gibt es, durch das innere Gefüge hervorgerufen, ausgezeichnete Richtungen und die Wärmeleitfähigkeit wird für diese ausgezeichneten Richtungen im allgemeinen verschiedene Werte haben; aber auch jeder willkürlich dazwischen liegenden Richtung entspricht ein anderer Wert der W. L. F. Es ist deshalb die W. L. F. in einem anisotropen Körper eine physikalische Größe, die erst gegeben ist durch Angabe des zu jeder Richtung gehörigen Wertes. Eine Größe dieser Art heißt ein Tensor. Ein Tensor ist keine richtungslose Größe wie der Skalar und keine einfach gerichtete Größe wie der Vektor. Ein Beispiel für einen Tensor, das jedem Ingenieur bekannt ist, ist der Spannungszustand in einem deformierten, elastischen Körper (Spannungsellipsoid).

b) Verschiedene anisotrope Körper. Der wichtigste Fall eines anisotropen Körpers ist das Holz. Infolge der Faserung und der Ausbildung von Jahresringen (Zylinderflächen) gibt es in jedem Punkte eines Stammes drei ausgezeichnete Richtungen, nämlich (vgl. Fig. 38). I axial, II radial und III tangential. Meist unterscheidet man jedoch nur „in Richtung der Faser“ = I und „senkrecht zur Richtung der Faser“ = II und III. Ob es wirklich berechtigt ist, die Richtungen II und III als gleich anzusehen, bezweifle ich. Die Werte der W. L. F. in diesen Richtungen sind natürlich nur durch den Versuch zu bestimmen.

Nächst den Hölzern kommen als anisotrope Körper solche Körper in Betracht, die aus einzelnen Teilen in regelmäßiger Weise zusammengeschichtet sind. Dabei müssen die Abmessungen der einzelnen Teile klein gegen die Abmessungen des ganzen Körpers sein. Solche zusammengesetzte Körper sind: verschiedene Konstruktionen im Hochbau und in der Wärme- und Kälte-Isolier-technik, ferner die Wicklungen der Elektromagnete usw. und die Plattenpakete und Drahtbündel der Magnetkerne u. a. m.

c) Die W. L. F. von geschichteten Körpern. „Ein Körper bestehe aus lauter gleichen Schichten von der Dicke Δ . Jede Schicht bestehe ihrerseits wieder aus n planparallelen Platten von den Dicken $\delta_1, \dots, \delta_n$

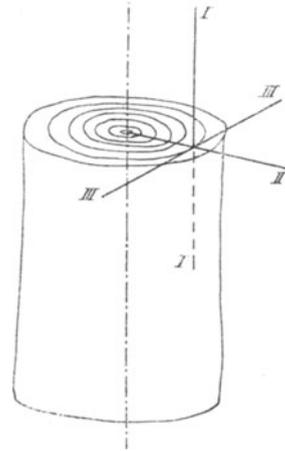


Fig. 38. Die drei ausgezeichneten Richtungen im Holz: I = axial, II radial, III tangential.

und den W. L. F. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. — Welches ist die W. L. F. des ganzen Körpers senkrecht zur Lage der Schichten und parallel zur Lage der Schichten?“

1. Senkrecht zur Lage der Schichten λ_s .

Wir geben dem Körper eine solche Temperaturverteilung, daß die Plattenebenen zu Flächen konstanter Temperatur werden. Im Beharrungszustand wird dann durch jede Platte die gleiche Wärmemenge Q pro Flächen- und Zeiteinheit hindurchgehen. Diese Wärmemenge ist gegeben zu

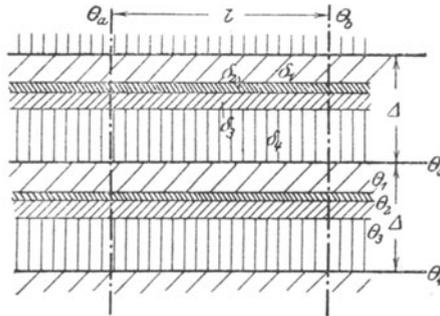


Fig. 39. Die geschichteten Körper.

$$Q_s = -\lambda_1 \cdot \frac{\theta_0 - \theta_1}{\delta_1} = -\lambda_2 \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{\delta_2} = \dots = -\lambda_n \cdot \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{\delta_n}$$

Oder

$$\begin{aligned} \theta_0 - \theta_1 &= -Q_s \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} \\ \theta_1 - \theta_2 &= -Q_s \cdot \frac{\delta_2}{\lambda_2} \\ \dots & \\ \theta_{n-1} - \theta_n &= -Q_s \cdot \frac{\delta_n}{\lambda_n} \end{aligned}$$

Durch Addition $\theta_0 - \theta_n = -Q_s \cdot \left\{ \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right\} \dots \dots \text{I}$

Denken wir uns jetzt die Schicht durch eine einheitliche Platte von der Dicke Δ ersetzt und von einer solchen W. L. F. λ_s , daß sie bei derselben Temperaturdifferenz $\theta_0 - \theta_n$ von derselben Wärmemenge Q durchflossen wird, so gilt für diese Ersatzplatte

$$Q_s = -\lambda_s \cdot \frac{\theta_0 - \theta_n}{\Delta} \text{ oder } \theta_0 - \theta_n = -Q_s \cdot \frac{\Delta}{\lambda_s} \dots \dots \text{II}$$

Durch Vergleich von I und II folgt:

$$\lambda_s = \frac{\Delta}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} \dots \dots \dots (54a)$$

2. Parallel zur Lage der Schichten. λ_p .

Wir geben jetzt dem Körper eine solche Temperaturverteilung, daß die Flächen konstanter Temperatur durch parallele Ebenen gebildet sind, die die Platten senkrecht durchsetzen. In Fig. 39 sind durch die gestrichelten Geraden zwei solche Ebenen mit den Werten θ_a und θ_b angedeutet. Ihr Abstand sei „1“. In der Richtung senkrecht zur Bildebene sei die Abmessung des Plattenpaketes gleich „1“. Dann strömen längs der einzelnen Platten folgende Wärmemengen:

längs der 1. Platte: $q_1 = -\lambda_1 \cdot \frac{\theta_a - \theta_b}{1} \cdot \delta_1 \cdot 1;$

„ „ 2. „ $q_2 = -\lambda_2 \cdot \frac{\theta_a - \theta_b}{1} \cdot \delta_2 \cdot 1;$

 „ „ n „ $q_n = -\lambda_n \cdot \frac{\theta_a - \theta_b}{1} \cdot \delta_n \cdot 1;$

längs der ganz. Schicht: $Q_p = -\frac{\theta_a - \theta_b}{1} \cdot (\lambda_1 \cdot \delta_1 + \lambda_2 \cdot \delta_2 + \dots + \lambda_n \delta_n)$ III

Ersetzen wir wieder die Schicht durch eine einheitliche Platte von solcher W. L. F. λ_p , daß bei gleichem Temperaturgefälle $(\theta_a - \theta_b) : 1$ die gleiche Wärmemenge Q_p hindurchgeht, so gilt für diese Platte

$$Q_p = -\lambda_p \cdot \frac{\theta_a - \theta_b}{1} \cdot \Delta \cdot 1 \dots \dots \dots \text{IV}$$

Durch Vergleich von III und IV:

$$\lambda_p = \frac{\lambda_1 \cdot \delta_1 + \lambda_2 \cdot \delta_2 + \dots + \lambda_n \cdot \delta_n}{\Delta} \dots \dots (54b)$$

3. Das Verhältnis $\lambda_p : \lambda_s$.

Die Gleichungen (54a und b) ergeben

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_s} = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \right) \cdot (\delta_1 \cdot \lambda_1 + \delta_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \delta_n \cdot \lambda) \dots (54c)$$

Ist die Leitfähigkeit einer einzelnen Platte sehr groß, so wird das entsprechende Glied in der ersten Klammer gleich null, also fortfallen, in der zweiten Klammer wird das entsprechende Glied sehr groß und damit auch das Verhältnis $\lambda_p : \lambda_s$.

Ist umgekehrt die W. L. F. einer Platte sehr klein, so wird das betreffende Glied der zweiten Klammer fortfallen und das der ersten Klammer sehr groß. Damit wird auch das Verhältnis $\lambda_p : \lambda_s$ sehr groß.

Wie auch die Leitfähigkeiten verteilt sein mögen, das Verhältnis ist immer größer als „Eins“. Es erreicht seinen Kleinstwert „Eins“ erst, wenn alle λ gleich sind, also wenn die Schicht homogen und isotrop ist. Über eine experimentelle Bestimmung von λ_p und λ_s , vgl. L. Ott. Untersuchungen zur Frage der Erwärmung elektrischer Ma-

schinen. — Mittel. üb. Forsch.-Arb. vom Verein d. Ing., Heft 35, 36. Berlin 1906.

e) **Bemerkung.** Nach diesen Beispielen anisotroper Körper ist es sehr wohl möglich, daß bei technischen Aufgaben die W. L. F. als Tensor aufgefaßt werden muß. Es sei deshalb hier auf die einschlägige, mathematische Literatur verwiesen, z. B.:

Enzykl. d. math. Wiss. V. 4. Seite 181.

Winkelmann, Handbuch der Physik, Band-Wärme.

In vielen Fällen wird es aber möglich sein, die W. L. F. als Skalar zu betrachten, nämlich überall dort, wo das Temperaturfeld nur von einer Koordinate abhängt und diese Koordinatenrichtung mit einer Hauptachse des Tensors zusammenfällt. (Vgl. das oben besprochene Plattenpaket.)

3. W. L. F., spezifische Wärme und spezifisches Gewicht sind vom Druck und von der Temperatur abhängig.

a) **Die Abhängigkeit vom Druck.** Bei festen Körpern sind diese Werte nur in sehr geringem Maße vom Druck abhängig. Nun treten aber in jedem festen Körper, dessen Inneres Temperaturunterschiede aufweist, Spannungen auf, die unter dem Namen „Temperaturspannungen“ bekannt sind. Diese Spannungen — ebenso wie die ihnen verwandten Gußspannungen — sind von sehr hohem Betrage und es ist deshalb das Bedenken keineswegs von der Hand zu weisen, daß unter so hohen Drücken auch die an sich schwache Abhängigkeit der Stoffwerte vom Druck von Einfluß werde. Etwas Sichereres ist jedoch hierüber nicht bekannt, denn einerseits fehlen die experimentellen Angaben für diese Abhängigkeitsgesetze und andererseits wird die Berechnung ungemein schwierig, sobald man diese Abhängigkeit berücksichtigen will.

b) **Die Abhängigkeit von der Temperatur.** Es gibt Legierungen, deren Ausdehnungskoeffizient gleich Null, deren spezifisches Gewicht also von der Temperatur unabhängig ist. Ebenso mag es auch Stoffe geben, deren W. L. F. oder deren spezifische Wärme von der Temperatur unabhängig ist. Aber es werden dies so seltene Ausnahmen sein, daß sie für uns nicht in Betracht kommen. Wir haben vielmehr λ , c und γ als Funktionen der Temperatur anzusehen.

Die Differentialgleichung (4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta + \frac{1}{c \cdot \gamma} \cdot W$$

ist deshalb wichtiger zu schreiben:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = f_1(\theta) \cdot \Delta^2 \theta + f_2(\theta) \cdot W.$$

Die Methoden, die wir bisher zur Lösung der Aufgaben angewandt hatten, bestanden in dem Zusammensetzen der allgemeinen Lösung aus Teillösungen. Dies darf aber nur geschehen, solange die Differentialgleichung linear ist. Unsere obige Gleichung ist jedoch wegen des

Gliedes $f_1(\theta) \cdot \Delta^2 \theta$ nicht mehr linear und das Verfahren mit den Teil-lösungen versagt. Man ist deshalb aus rechnerischen Gründen ge-zwungen, die Stoffwerte λ , c und γ doch als unabhängig von der Tempe-ratur anzunehmen, obwohl man die Unrichtigkeit dieser Annahme erkannt hat. Es sei hier ausdrücklich betont, daß die bestehende Ver-änderlichkeit dieser Werte mit der Temperatur oft eine sehr starke ist und daß deshalb die mit konstanten Stoffwerten errechnete Tem-peraturverteilung von der tatsächlich sich einstellenden erheblich ab-weichen kann (vgl. Nußelt, Dissert. Seite 22).

4. Vorgänge mit Änderung des Aggregatzustandes oder der chemischen Natur.

a) **Allgemeines.** Die reinen Schmelz- und Erstarrungsvorgänge müssen wir hier ausschalten, da bei ihnen immer Konvektionsströme auftreten; dagegen ist das Vordringen des Frostes in feuchtem Erd-boden ein Vorgang, der sich rechnerisch verfolgen läßt und der als Bei-spiel für eine Gruppe von Erscheinungen gelten soll, die insbesondere in der chemischen Industrie häufig vorkommen.

Für unsere Zwecke läßt sich das Wesentliche dieser Vorgänge in folgenden vier Sätzen aussprechen:

1. Es findet eine Änderung des Aggregatzustandes oder der che-mischen Natur des Körpers, der das Feld erfüllt, statt.
2. Hierbei treten latente Wärmemengen auf.
3. An der Umwandlungsstelle ändern die Stoffwerte λ , c und γ sprungweise ihren Wert.
4. Es treten keine Konvektionsströme auf.

b) **Das Vordringen des Frostes in feuchtem Erdboden.** „Ein feuchter Erdboden besitzt im Anfang überall die Temperatur θ_{II} . Von einem gegebenen Augenblick an wird die Oberfläche konstant auf der Tem-peratur θ_I gehalten. Das Gefrieren des Erdbodens erfolgt bei der Tem-peratur θ_0 und zum Gefrieren der Gewichtseinheit feuchten Erdreiches muß die Wärmemenge Q_0 entzogen werden. — Welches ist die Gleichung des Temperaturfeldes und wie rasch dringt die Frostgrenze vor?“

Der mathematische Ansatz.

In Fig. 40 ist die Tiefe unter der Bodenoberfläche als die eine Ko-ordinate x und die Temperatur als die andere Koordinate θ angenommen. Mit ξ ist ein veränderlicher Wert auf der x -Achse bezeichnet, der die augenblickliche Lage der Frostgrenze angibt. Die physikalischen Größen werden mit dem Zeiger „1“ bezeichnet, wo sie für den gefrorenen Boden und mit „2“, wo sie für den ungefrorenen Boden gelten.

1. Differentialgleichungen:

$$\text{Im gefrorenen Teil, d. i. für } x < \xi: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_1 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{ Ia}$$

$$\text{Im ungefrorenen Teil, d. i. für } x > \xi: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a_2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{ Ib}$$

2. Anfangsbedingung:

Für $\tau = 0$ muß $\theta_2 = \text{const} = \theta_{II}$ sein II

3. Randbedingungen:

An der Oberfläche: für $x = 0$ und $\tau \geq 0$ muß $\theta_1 = \theta_I$ III

In sehr großen Tiefen: für $x = \infty$ und $\tau \geq 0$ muß $\theta_2 = \theta_{II}$. . . IV

An der Frostgrenze: für $x = \xi$ und $\tau > 0$ muß $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0 = \text{const}$ V

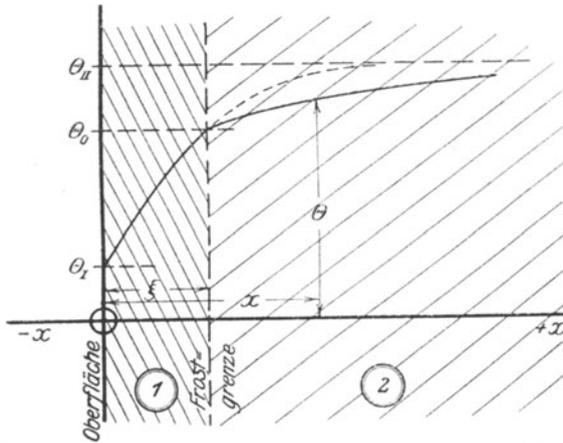


Fig. 40. Vordringen des Frostes in feuchter Erde.

4. Der Gefriervorgang:

Wenn wir beobachten, daß die Frostgrenze in der Zeit $d\tau$ um die Strecke $d\xi$ vorgerückt ist, so ist eine Erdmasse von dem Volumen $F \cdot d\xi$ erstarrt, wenn mit F das beobachtete Stück der Frostgrenze bezeichnet ist. Bei diesem Vorgange ist die Wärmemenge $Q_0 \cdot \gamma_2 \cdot F \cdot d\xi$ freigegeben. Diese Wärmemenge muß nun — zusammen mit der aus dem noch ungefrorenen Boden kommenden Wärmemenge — durch den gefrorenen Boden abgeleitet werden. Es gilt also die Gleichung:

$$-\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{\xi=0} \cdot d\tau \cdot F = -Q_0 \cdot \gamma_2 \cdot F \cdot d\xi - \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{\xi+0} \cdot F \cdot d\tau$$

oder
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{Q_0 \cdot \gamma_2} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{\xi=0} - \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{\xi+0} \right) \dots \dots \text{VI}$$

Durch diese 6 Bedingungen ist die Temperaturfunktion eindeutig bestimmt.

Die Lösung der Aufgabe.

In Aufgabe Nr. 5 haben wir das Gaußsche Fehlerintegral als eine Lösung unserer Differentialgleichung kennen gelernt. Sind C_1 D_1 und

C_2 D_2 vier willkürliche Konstanten, so ist

$$\theta_1 = C_1 + D_1 \cdot G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 \tau}}\right)$$

eine partikuläre Lösung von Ia und

$$\theta_2 = C_2 + D_2 \cdot G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 \tau}}\right)$$

eine partikuläre Lösung von Ib.

Da nun $G(0) = 0$ und $G(\infty) = 1$ ist, so liefern die Bedingungsgleichungen III und IV die Beziehungen

für $x = 0$: $\theta_1 = C_1 + 0 = \theta_I$ und

für $x = \infty$: $\theta_2 = C_2 + D_2 = \theta_{II}$.

Damit also Bedingung III und IV erfüllt sind, muß

$$C_1 = \theta_I \text{ und } C_2 = \theta_{II} - D_2$$

gesetzt werden.

Unsere obigen partikulären Lösungen heißen jetzt

$$\theta_1 = \theta_I + D_1 \cdot G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 \tau}}\right) \dots \dots \dots \text{VIIa}$$

$$\theta_2 = \theta_{II} - D_2 \cdot \left(1 - G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 \tau}}\right)\right) \dots \dots \dots \text{VIIIb}$$

Die Bedingung II ist ebenfalls erfüllt, denn die Gleichung VIII ergibt für $\tau = 0$ den Wert $\theta_2 = \theta_{II}$.

Als nächste Bedingung, die zu erfüllen ist, betrachten wir Bedingung V, den Temperaturwert in der Frostgrenze. Für $x = \xi$ liefern die Gleichungen VII und VIII:

$$\theta_I + D_1 \cdot G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_1 \tau}}\right) = \theta_{II} - D_2 \cdot \left(1 - G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_2 \tau}}\right)\right) = \theta_0$$

Da D_1 und D_2 konstante Größen sind, kann diese Doppelgleichung nur dann für jeden Wert von τ erfüllt sein, wenn auch die Gaußschen Fehlerintegrale konstante Größen sind. Dies ist aber nur dann möglich, wenn sich ξ so mit τ ändert, daß die Argumente der Funktion G konstant sind, daß also ξ mit $\sqrt{\tau}$ proportional ist. Ist q ein Proportionalitätsfaktor, so gilt die Gleichung

$$\xi = q \cdot \sqrt{\tau} \dots \dots \dots \text{IXa}$$

Durch Differenzieren ergibt sich daraus die Geschwindigkeit $d\xi/d\tau$ mit der die Frostgrenze vorrückt. Es ist

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{q}{2 \cdot \sqrt{\tau}} \dots \dots \dots \text{IXb}$$

Die Geschwindigkeit des Vorrückens ist also zu Beginn sehr groß (im ersten Augenblick unendlich groß) nimmt dann aber rasch ab.

Aus der Doppelgleichung ergibt sich ferner

$$D_1 = \frac{\theta_0 - \theta_I}{G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_1\tau}}\right)} \text{ und } D_2 = \frac{\theta_{II} - \theta_0}{1 - G\left(\frac{\xi}{2\sqrt{a_2\tau}}\right)}$$

Mit Hilfe dieser beiden Werte und unter Verwendung von Gleichung IX^a nehmen die partikulären Lösungen VIIa und VIIIa die Form an:

$$\theta_1 = \theta_I + (\theta_0 - \theta_I) \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}\right)}{G\left(\frac{q}{2\sqrt{a_1}}\right)} \dots \dots \dots \text{VIIb}$$

$$\theta_2 = \theta_{II} - (\theta_{II} - \theta_0) \frac{G\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}\right)}{1 - G\left(\frac{q}{2\sqrt{a_2}}\right)} \dots \dots \dots \text{VIIIb}$$

Zur Bestimmung der letzten Unbekannten q dient Bedingung VI:

$$\text{Es ist } \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\theta_0 - \theta_I}{G\left(\frac{q}{2\sqrt{a_1}}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1\tau\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_1\tau}}$$

$$\text{und } \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right)_{x=\xi-0} = \frac{\theta_0 - \theta_I}{G\left(\frac{q}{2\sqrt{a_1}}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1\tau\pi}} \cdot e^{-\frac{q^2}{4a_1}}$$

$$\text{Ebenso ist: } \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right)_{x=\xi+0} = \frac{-(\theta_{II} - \theta_0)}{1 - G\left(\frac{q}{\sqrt{4a_2}}\right)} \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_2}}}{\sqrt{a_2\tau\pi}}$$

Mit diesen Differentialquotienten wird Gleichung VI:

$$Q_0 \cdot \gamma_2 \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1 \cdot \tau \cdot \pi}} \cdot (\theta_0 - \theta_I) \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_1}}}{G\left(\frac{q}{\sqrt{4a_1}}\right)} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2 \cdot \tau \cdot \pi}} \cdot (\theta_{II} - \theta_0) \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_2}}}{1 - G\left(\frac{q}{\sqrt{4a_2}}\right)}$$

Unter Verwendung von Gleichung IX^b und unter Einführung von $b = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$ ergibt sich:

$$Q_0 \cdot \gamma_2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot q = b_1 \cdot (\theta_0 - \theta_I) \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_1}}}{G\left(\frac{q}{\sqrt{4a_1}}\right)} + b_2 \cdot (\theta_{II} - \theta_0) \cdot \frac{e^{-\frac{q^2}{4a_2}}}{1 - G\left(\frac{q}{\sqrt{4a_2}}\right)} \dots X$$

Dies ist eine transzendente Gleichung mit der einen Unbekannten q . Sie wird am besten auf graphischem Wege gelöst, indem man sie in der Form

$$\text{const} \cdot q = \text{Funkt} (q) \text{ schreibt}$$

Die linke Seite stellt eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems dar. Die rechte Seite gibt eine transzendente Kurve. Gerade und Kurve schneiden sich immer, aber immer nur in einem Punkte, so daß also die Gleichung X stets eine Wurzel, die wir q_0 heißen wollen, besitzt. Mit diesem Wert q_0 gibt dann Gleichung IXa den augenblicklichen Stand der Frostgrenze und die Gleichungen VIIb und VIIIb geben die Gestalt des Temperaturfeldes.

H. Das Prinzip der Ähnlichkeit.

Das Prinzip der Ähnlichkeit gestattet uns aus dem mathematischen Ansatz einer Aufgabe, also aus der Differentialgleichung und den räumlichen und zeitlichen Randbedingungen, eine Reihe von Folgerungen abzuleiten, ohne daß wir die Gleichung zu lösen brauchen. Deshalb ist es in allen jenen Fällen von Bedeutung, in denen eine Lösung aus mathematischen Gründen nicht möglich ist.

Der Gedankengang bei Aufstellung des Ähnlichkeitsprinzipes beruht darauf, daß man alle überhaupt möglichen Temperaturfelder in Gruppen von unter sich verwandten — sogenannten „ähnlichen Feldern“ — zusammenfaßt, dann das Gemeinsame einer jeden Gruppe, also ihr Kennzeichen hervorhebt und endlich die physikalischen und mathematischen Eigenschaften eines Feldes als Funktionen dieses Kennzeichens darstellt. Die Gesichtspunkte, nach denen die Felder in Gruppen zusammengefaßt werden, also das Wesen der Ähnlichkeit, können erst später erörtert werden.

Wir wollen nun das Prinzip der Ähnlichkeit an dem Beispiel der zeitlich veränderlichen Temperaturfelder ohne Wärmequellen ableiten.

1. Die Bestimmungsstücke des ersten Feldes.

Durch das Fehlen von Wärmequellen ist festgelegt, daß das Temperaturfeld der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta_2 \theta \dots \dots \dots I$$

zu genügen hat. Diese Differentialgleichung ist die erste Angabe über das Feld. Die zweite Angabe betrifft die Begrenzung des Temperaturfeldes, also die Gestalt des Körpers, in dem sich der Vorgang abspielt. Sie ist gegeben z. B. durch die Angabe: $n =$ seitiges, gerades Prisma mit der Höhe l_0 und den Seitenlängen $l_1, l_2 \dots l_n$. Oder durch eine Funktion

$$f(\xi, \eta, \zeta; l_0, l_1 \dots l_n) = 0$$

mit den Raumkoordinaten ξ, η, ζ als laufenden Koordinaten und den Körperabmessungen $l_0 \dots l_n$ als Parametern.

Statt die Parameter „l“ alle einzeln anzugeben, ist es zweckmäßiger, eine Abmessung z. B. l_0 als die Bezugsgröße zu wählen und die anderen Abmessungen durch ihr Verhältnis zu dieser Bezugsgröße festzulegen. Dann nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an:

$$f_1 \left(\xi, \eta, \zeta; l_0, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right) = 0 \dots \dots \dots \text{II.}$$

Durch die Gestalt der Funktion f_1 kommt zum Ausdruck, welcher Art die Oberfläche des Körpers ist, ob Kugel oder Ellipsoid usw. Das Wertesystem $l_1/l_0, l_2/l_0 \dots l_n/l_0$ kennzeichnet von diesen Flächen eine Schar unter sich geometrisch ähnlicher Flächen und der Wert l_0 greift aus dieser Schar eine bestimmte, einzelne Fläche heraus.

Die dritte Angabe ist die zeitliche Grenzbedingung, bestehend in einer Angabe über das Temperaturfeld zur Zeit $\tau = 0$. Also in einer Gleichung

$$\Theta_{\tau=0} = f_2 \left(\xi, \eta, \zeta; l_0, \frac{l_1}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right) \dots \dots \dots \text{III.}$$

Die vierte und letzte Angabe über das Problem besteht in der Angabe der räumlichen Grenzbedingung, die wir vorerst der Einfachheit wegen nur von der ersten Art und zeitlich konstant annehmen wollen. Diese vierte Angabe lautet dann:

Für alle Wertezusammenstellungen ξ, η, ζ , die der Bedingung $f_1 = 0$ genügen, also für alle Punkte der Oberfläche muß sein:

$$\Theta_{\tau > 0} = f_3 \left(\xi, \eta, \zeta; l_0, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right) \dots \dots \dots \text{IV.}$$

Unter der Lösung des Problems verstehen wir dann eine Gleichung, welche die Gestalt des Temperaturfeldes wiedergibt, und welche allgemein die Form hat:

$$\Phi \left(\xi, \eta, \zeta, \Theta; \tau, a, l_0, \frac{l_1}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right) = 0 \dots \dots \dots \text{V.}$$

2. Das zweite Temperaturfeld.

Zur Ableitung des Prinzipes der Ähnlichkeit ziehen wir noch ein zweites Feld zum Vergleich heran. Dieses Feld soll ebenfalls ohne Wärmequellen, im übrigen aber hinsichtlich seiner Form und seiner Grenzbedingungen vollkommen beliebig sein. Für dieses Feld gelten dann ebensolche fünf Gleichungen, wie für das erste Feld, wobei wir die Funktionen und Größen des zweiten Feldes durch das Zeichen ' unterscheiden wollen. Es seien nur zwei dieser Gleichungen als Beispiel angeschrieben.

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial \tau'} = a' \cdot \Delta^2 \Theta' \dots \dots \dots \text{I}'.$$

$$\Theta'_{\tau'=0} = f_2' \left(\xi', \eta', \zeta'; l_0', \frac{l_1'}{l_0'} \dots \frac{l_n'}{l_0'} \right) \dots \dots \dots \text{III}'.$$

Wir beginnen nun damit die Willkür dieses zweiten Feldes allmählich einzuschränken, indem wir das zweite Feld dem ersten immer ähnlicher machen.

1. Die beiden Felder sollen von geometrisch ähnlichen Flächen begrenzt sein. Damit die beiden Felder überhaupt von der gleichen Art sind, müssen die Funktionen f_1 und f_1' die gleichen sein. Damit sie aber auch ähnlich sind, müssen die Parameter und die Koordinaten alle im selben Verhältnis gedehnt sein. Nennen wir dieses Dehnungsverhältnis ν_1 , so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \nu_1 \cdot \xi; & l_0' &= \nu_1 \cdot l_0; \\ \eta' &= \nu_1 \cdot \eta; & \text{und} & \text{---} \text{---} \text{---} \\ \zeta' &= \nu_1 \cdot \zeta; & l_n' &= \nu_1 \cdot l_n; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{VIa.}$$

Deshalb gilt auch $\frac{l_1'}{l_0'} = \frac{l_1}{l_0}$; ... usw. bis ... $\frac{l_n'}{l_0'} = \frac{l_n}{l_0}$.

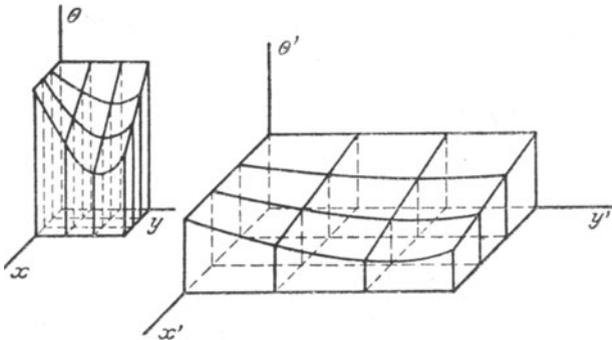


Fig. 41. Zwei ähnliche Temperaturfelder: $\nu_1 = 3$; $\nu_\theta = \frac{1}{2}$.

2. Es gelte als nächste Einschränkung die Annahme, daß beide Felder am Anfange einander „ähnlich“ waren. Dies will sagen, daß zur Zeit $\tau = 0$ zwischen den Temperaturen an ähnlich gelegenen Stellen, die Beziehung bestanden hat

$$\Theta'_{\tau=0} = \nu_\theta \cdot \Theta_{\tau=0} \dots \dots \dots \text{VIb}$$

wobei ν_θ ebenfalls ein im ganzen Feld konstanter Wert ist.

Wir können uns also den Anfangszustand des zweiten Feldes dadurch aus dem des ersten Feldes abgeleitet denken, daß wir zuerst jene Koordinatenachsen, auf denen wir die Längen aufgetragen haben, im Verhältnis ν_1 und dann die Temperaturachse im Verhältnis ν_θ dehnen.

In Anlehnung an die Begriffe „ähnlich“ und „affin“ in der Geometrie wäre es richtiger, die beiden Temperaturfelder „affin“ zu nennen, denn das Wort „ähnlich“ würde verlangen, daß der Zahlenwert ν_θ gleich dem Zahlenwert ν_1 sei. Dies soll aber nicht verlangt werden. Es hat sich jedoch im Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit dieser allgemeinere Begriff „ähnlich“ bereits eingebürgert und wir übernehmen ihn im selben Sinne.

Die Werte „grad Θ “ werden dadurch überall im Verhältnis $\nu_\theta : \nu_1$ und die Werte $\Delta^2 \Theta$ in Verhältnis $\nu_\theta : \nu_1^2$ verändert. Die obenstehende Fig. 41 veranschaulicht das Gesagte für Temperaturfelder, welche nur

von zwei Koordinaten abhängen. Bei Feldern mit 3 Dimensionen geht natürlich diese leichte Anschaulichkeit verloren.

Wenn der Anfangszustand beider Felder in dem so umschriebenen Sinne ähnlich ist, dann ist $f_2' = f_2$. Es nimmt dann die Gleichung III' die Form an:

$$v_\Theta \cdot \Theta_{t'=0} = f_2 \left(v_1 \cdot \xi, v_1 \cdot \eta, v_1 \cdot \zeta; v_1 \cdot l_0, \frac{l_1}{l_0}, \dots, \frac{l_n}{l_0} \right) \dots \dots \dots \text{III}'$$

3. Wir nehmen an, daß die Oberflächentemperaturverteilungen bei beiden Feldern ebenfalls ähnlich seien, daß also für die Oberflächentemperaturen die Beziehung gelte:

$$\Theta'_{t'>0} = v_\Theta \cdot \Theta_{t>0},$$

wobei v_Θ den gleichen Zahlenwert, wie in Gleichung VIb habe.

Dann muß für alle Punkte ξ', η', ζ' der Oberfläche nachstehende Gleichung erfüllt sein

$$v_\Theta \cdot \Theta'_{t'>0} = f_3 \left(v_1 \cdot \xi, v_1 \cdot \eta, v_1 \cdot \zeta, v_1 \cdot l_0, \frac{l_1}{l_0}, \dots, \frac{l_n}{l_0} \right).$$

4. Wir nehmen nun noch den Maßstab der Zeiten verschieden an nach der Gleichung

$$\tau' = v_t \cdot \tau \dots \dots \dots \text{VIc}$$

und vergleichen also die Felder immer nur in solchen Augenblicken, die im Verhältnis v_t von Zeitanfang abliegen. Zwei solche Zeitpunkte nennen wir entsprechende Augenblicke. Entsprechende Zeiträume stehen dann ebenfalls im Verhältnis v_t . Wir dehnen damit auch die Zeitachse unseres mehrdimensionalen Systemes.

5. Da der Körper, der das Feld erfüllt, als homogen und isotrop angenommen sei, und da ferner die Stoffwerte innerhalb eines jeden Feldes als unabhängig von der Temperatur gelten sollen, so sind a und a' für jedes Feld konstante Größen. Es gilt also für alle Zeiten und für alle Stellen in Feld die Gleichung

$$a' = v_a \cdot a \dots \dots \dots \text{VIId.}$$

3. Die Ähnlichkeit beider Felder.

Wir haben in den vorstehenden Absätzen verschiedene Beziehungen zwischen den beiden Feldern aufgestellt, die wir kurz als die Ähnlichkeit der Randbedingungen bezeichnen können. Sie besagen vorerst nur, daß die Temperaturfelder an der Berandung des Raum-Zeit-Gebietes einander ähnlich sind, aber noch nicht, daß dies auch im Inneren der Fall sein muß. Die Lösung für die zweite Aufgabe können wir deshalb vorerst nur in der Form

$$\Phi' \left(v_1 \cdot \xi, v_1 \cdot \eta, v_1 \cdot \zeta, v_\Theta \cdot \Theta, v_t \cdot \tau, v_a \cdot a, v_1 \cdot l_0, \frac{l_1}{l_0}, \dots, \frac{l_n}{l_0} \right) = 0$$

schreiben; wir dürfen noch nicht annehmen, daß $\Phi' = \Phi$ sei.

Nun wollen wir uns die Frage vorlegen: Unter welchen Bedingungen bleiben die Felder — zu entsprechenden Zeiten betrachtet — auch

im weiteren Verlaufe des Wärmeleitvorganges ähnlich im Sinne der Gleichung

$$\Theta' = \nu_{\Theta} \cdot \Theta?$$

Oder mit anderen Worten: Unter welchen Bedingungen sind die beiden Felder auch im Inneren des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes ähnlich?

Und dies läuft auf die mathematischen Fragen hinaus: Wie sind die Werte ν_1 , ν_{Θ} , ν_{τ} und ν_a zu wählen, damit $\Phi' = \Phi$ wird? Können die Werte ν willkürlich angenommen werden oder müssen zwischen ihnen irgendwelche Beziehungen bestehen?

Zur Beantwortung dieser Fragen gelangen wir durch nachstehende Überlegung:

Ist die Funktion Φ' gleich der Funktion Φ , so besagt dies, daß der mathematische Ansatz im gestrichenen System identisch ist mit dem Ansatz im ungestrichenen System, daß also vor allem die Differentialgleichungen identisch sind, denn nur gleiche Ansätze liefern gleiche Lösungen. Wir schreiben die Differentialgleichung I' in der Form

$$\frac{\nu_{\Theta}}{\nu_{\tau}} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nu_a \cdot \frac{\nu_{\Theta}}{\nu_1^2} \cdot a \cdot \Delta^2 \Theta$$

und setzen darunter die Gleichung I

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \Theta.$$

Diese Gleichungen sind dann identisch, wenn sie sich nur durch einen beiderseits gleichen Faktor unterscheiden, wenn also

$$\frac{\nu_{\Theta}}{\nu_{\tau}} = \frac{\nu_a \cdot \nu_{\Theta}}{\nu_1^2} \text{ oder } \frac{\nu_a \cdot \nu_{\tau}}{\nu_1^2} = 1 \text{ ist } \dots \dots \dots \text{VII}$$

Die Ähnlichkeit der Grenzbedingungen an sich ist also noch nicht hinreichend um die vollständige Ähnlichkeit zu gewährleisten, sondern es muß zwischen den ν -Werten die Beziehung VII bestehen. In welcher Weise dies möglich ist, soll an drei Beispielen gezeigt werden:

1. Bei gegebenen Stoffen in beiden Feldern und gegebenem Verhältnis entsprechender Längen — also bei gegebenen ν_a und ν_1 sind die Felder zu vergleichen zu Zeitpunkten, die im Verhältnis

$$\tau' : \tau = \nu_{\tau} = \nu_1^2 / \nu_a = (l_0'^2 \cdot a) : (l_0^2 \cdot a')$$

vom Zeitanfang abliegen.

2. Bei gegebenen Stoffen und gegebenen Zeitpunkten — also gegebenen ν_{τ} und ν_a — sind die entsprechenden Längen zu wählen wie

$$l_0' : l_0 = \nu_1 = \sqrt{\nu_a \cdot \nu_{\tau}} = \sqrt{a' \cdot \tau'} : \sqrt{a \cdot \tau}.$$

3. Bei gegebenen Zeitpunkten und gegebenem Verhältnis der Längen — also gegebenem ν_1 und ν_{τ} — sind Stoffe zu wählen, deren Temperaturleitfähigkeiten sich verhalten wie

$$a' : a = \nu_a = \nu_1^2 : \nu_{\tau} = (l'^2 \cdot \tau) : (l^2 \cdot \tau').$$

Diese Überlegungen zeigen, daß sich zu einem gegebenen ersten Feld, also zu einem gegebenen Wertesystem a, τ, l_0 nicht nur ein zweites, vollständig ähnliches System a', τ', l'_0 finden läßt, sondern beliebig viele. Wir können also die Gleichung VII erweitern:

$$\frac{a \tau}{l_0^2} = \frac{a' \tau'}{l_0'^2} = \frac{a'' \tau''}{l_0''^2} = \dots = F_0 \dots \text{ VIII}$$

wobei wir uns unter F_0 einen festen Zahlenwert vorstellen müssen. Bei bestehender Ähnlichkeit der Grenzbedingungen ist dieser Zahlenwert das gemeinsame Kennzeichen für alle unter sich vollständig ähnlichen Felder, das Charakteristikum oder die „Kenngröße“ dieser Gruppe vollständig ähnlicher Felder.

Wir werden in diesem Buche noch mehrere solche Kenngrößen festlegen und wollen deshalb zu ihrer Bezeichnung ein Verfahren wählen, das sie von anderen Größen sofort unterscheidet. Wir wählen dazu immer die ersten zwei Buchstaben aus dem Namen eines Forschers, der sich auf diesem Gebiet hervorgetan hat ($F_0 = \text{Fourier}$).

Wir können jetzt die Gesichtspunkte, nach denen die Felder in Gruppen zusammengefaßt wurden, also das Wesen ihrer Ähnlichkeit (vgl. S. 117) genauer bestimmen.

Die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Temperaturfelder ordnen wir so in Gruppen, daß wir vorerst alle jene Felder zusammen nehmen, die durch Flächen gleicher Art, durch affine Flächen, begrenzt sind und für deren Anfangs- und Oberflächentemperaturverteilung die Gleichung $\Theta' = \nu_\Theta \cdot \Theta$ gilt.

Solche Felder nennen wir Felder gleicher Art. Aus einer solchen Klasse von Feldern gleicher Art greifen wir nun wieder jene Felder heraus, die durch geometrisch ähnliche Flächen begrenzt sind, das sind jene Felder also, deren Koordinatenachsen im einheitlichen Verhältnis ν_1 gedehnt sind. — Wir nennen dies eine Gruppe von ähnlich berandeten Feldern.

Endlich heben wir aus einer solchen Gruppe wieder die Untergruppe aller jener Felder hervor, die die gleiche Kenngröße $F_0 = \frac{a \tau}{l_0^2}$ besitzen.

Für die Felder einer Klasse gilt dann

$$\Phi \left(\Theta, \xi, \eta, \zeta; \frac{a \tau}{l_0^2}, \frac{l_1}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right) = 0 \dots \dots \dots \text{ IX a}$$

und für die Felder einer Untergruppe:

$$\Phi \left(\Theta, \xi, \eta, \zeta, \frac{a \cdot \tau}{l_0^2} \right) = 0 \dots \dots \dots \text{ IX b.}$$

Das Temperaturfeld hängt also nicht von den Parametern a, τ und l_0 im einzelnen ab, sondern nur von ihrer Zusammenstellung $(a \tau) : l_0^2$. Dadurch ist also die Zahl der Argumente der Temperaturfunktion um zwei vermindert worden, und darin liegt die große Bedeutung des Prinzips der Ähnlichkeit, die wir allerdings erst im zweiten Hauptteil des Buches voll kennen lernen werden.

Anmerkung. Wir hatten für die Temperaturen an entsprechenden Stellen die Beziehung $\Theta' = \nu_\Theta \cdot \Theta$ vorgeschrieben. Nun hat sich aber aus der Gleichung VII (erste Form) das ν_Θ auf beiden Seiten herausgehoben. Dies besagt der Zahlenwert ν_Θ darf ganz willkürlich gewählt werden, er muß nur im ganzen Feld, einschließlich der Berandung konstant sein. Wir dürfen aber noch weiter gehen, indem wir statt VI b die Gleichung

$$\Theta' = \nu_\Theta \cdot \Theta + \Theta_c \dots \dots \dots \text{VIe}$$

setzen, in der wir mit Θ_c eine räumlich und zeitlich konstante Größe bezeichnen. Solange nämlich in dem mathematischen Ansatz nur Temperaturunterschiede und Differentiale der Temperatur vorkommen, hebt sich die konstante Zusatzgröße Θ_c aus der Rechnung stets heraus.

4. Das Prinzip der Ähnlichkeit und der Wärmefluß.

Wir wollen uns die Frage stellen: Von welchen stofflichen Eigenschaften des wärmeleitenden Körpers hängt es ab, wieviel Wärme bei gegebener Oberflächentemperaturverteilung in gegebener Zeit ein gegebenes Stück der Körperoberfläche durchdringt.

Zu diesem Zweck vergleichen wir zwei Körper aus verschiedenen Stoffen, die geometrisch ähnlich sind und ähnliche Grenzbedingungen besitzen, also zwei Felder der gleichen Gruppe. Diese beiden Felder sollen sich nun so ändern, daß sie in gleichen Zeiten immer ähnlich bleiben. Dadurch legen wir $\nu_\tau = 1$ fest. Damit nun die Bedingung zur vollständigen Ähnlichkeit, nämlich

$$\frac{\nu_a \cdot \nu_\tau}{\nu_1^2} = 1$$

erfüllt ist, muß $\nu_a = \nu_1^2$ oder $\nu_1 = \sqrt{\nu_a}$ sein. Wir müssen also das Größenverhältnis beider Körper so wählen, daß $l'_0 : l_0 = \sqrt{a'} : \sqrt{a}$ wird.

Die Wärmemenge, die durch ein gleichgroßes Stück df der Oberflächen die Körper verläßt, ist

$$dQ' = -\lambda' \cdot \frac{\partial \Theta'}{\partial n'} \cdot df \cdot d\tau \text{ und } dQ = -\lambda \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial n} \cdot df \cdot d\tau.$$

Da unsere beiden Felder vollständig ähnlich sind, so gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial n'} : \frac{\partial \Theta}{\partial n} = \frac{\nu_\Theta}{\nu_1}$$

Mit diesem Wert ergibt sich

$$\frac{dQ'}{dQ} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{\nu_\Theta}{\nu_1} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \frac{\nu_\Theta}{\sqrt{\nu_a}} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{c' \cdot \gamma' \cdot \lambda}{\lambda' \cdot c \cdot \gamma}} \cdot \nu_\Theta = \sqrt{\frac{\lambda' \cdot c' \cdot \gamma'}{\lambda \cdot c \cdot \gamma}} \cdot \nu_\Theta = \frac{b'}{b} \cdot \nu_\Theta.$$

b ist die gesuchte stoffliche Eigenschaft. Wir sehen nun auch, weshalb bei den Randwertaufgaben erster Art in der Berechnung der Wärmemengen die Werte $\sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$ aufgetreten sind.

5. Die Ähnlichkeit bei Randwertaufgaben dritter Art.

Bei Randwertaufgaben dritter Art haben wir den mathematischen Ansatz:

1. Die Differentialgleichung $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \Delta^2 \theta$
2. Die Anfangsbedingung $\theta_{\tau=0} = f_2 \left(\xi, \eta, \zeta, l_0, \frac{l_1}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right)$
3. Die Oberflächenbedingung
 - 3a) $(\text{grad}_n \theta)_0 = -h (\theta_0 - \vartheta)$
 - 3b) $\vartheta = f_3 \left(\xi, \eta, \zeta, l_0, \frac{l_1}{l_0} \dots \frac{l_n}{l_0} \right)$.

Wir vergleichen nun zwei Felder mit ähnlichen Randbedingungen, welche durch die Beziehungen VI miteinander verbunden sind. Diese lauten:

$$\begin{aligned} l'_1 &= v_1 \cdot l_1 \text{ für die } i\text{te Abmessung als Beispiel.} \\ \theta' &= v_\theta \cdot \theta + \theta_c \\ \tau' &= v_\tau \cdot \tau \\ a' &= v_a \cdot a \\ h' &= v_h \cdot h. \end{aligned}$$

Damit nun diese beiden Felder vollständig ähnlich sind, müssen sie demselben mathematischen Ansatz genügen.

Aus der Differentialgleichung folgt wieder wie früher, daß

$$\frac{v_a \cdot v_\tau}{v_l^2} = 1 \text{ also } \frac{a \cdot \tau}{l_0^2} = \frac{a' \cdot \tau'}{l'^2} = \dots = \frac{a''' \tau'''}{l_0'''^2} = \dots \dots F_0$$

sein muß. Dazu liefert aber nun die Oberflächenbedingung noch eine zweite Vorschrift. Für das gestrichene System gilt:

$$\frac{v_\theta}{v_l} \cdot (\text{grad}_n \theta) = v_h \cdot v_\theta \cdot h \cdot (\theta_0 - \vartheta).$$

Denn es ist $\theta'_0 - \vartheta' = (v_\theta \cdot \theta + \theta_c) - (v_\theta \cdot \vartheta + \theta_c) = v_\theta \cdot (\theta - \vartheta)$.

Damit nun diese Oberflächenbedingung identisch ist mit derjenigen (3a) des ungestrichenen Systems, muß

$$\frac{v_\theta}{v_l} = v_\theta \cdot v_h \text{ oder } v_h \cdot v_l = 1 \text{ sein.}$$

Und dies gibt als zweite Kenngröße [Bi = Biot]

$$h \cdot l_0 = h' \cdot l'_0 = h'' \cdot l_0'' = \dots \dots = \text{Bi} \dots \dots \text{(X)}$$

In dem Prinzip der Ähnlichkeit haben wir nun den tieferen Grund erkannt, weshalb es uns stets möglich war, bei Randwertaufgaben dritter Art (vgl. z. B. Aufgabe Nr. 1, 2 und 3) das Ergebnis in die allgemeine Form zu bringen

$$\theta = \theta_c \cdot \Phi \left(\frac{\xi}{L}, \frac{a\tau}{L^2}, hL \right) = \theta_c \cdot \Phi \left(\frac{\xi}{L}, F_0, \text{Bi} \right).$$

6. Schlußbemerkung.

Das Prinzip der Ähnlichkeit bei Wärmeleitvorgängen ist ebenso wie das Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit nur ein Sonderfall eines viel allgemeineren Prinzips. Dieses erscheint in zweierlei Gestalt, meist als die Lehre von den Dimensionen oder seltener als das allgemeine Prinzip der Ähnlichkeit. Seine theoretische Bedeutung für die reine Wissenschaft ist enorm. Eine praktische Anwendung hat es bisher fast nur in der Hydrodynamik als Grundlage für Modellversuche gefunden (Schleppversuche in Schiffsbaulaboratorien und Versuche der Göttinger Modellversuchsanstalt für Ärodynamik). Über seine Anwendung auf Wärmeleitvorgänge in strömenden Körpern siehe Nußelt, Habilitationsschrift S. 6 u. 12, und Gröber, Beziehungen zwischen Theorie und Erfahrung in der Lehre vom Wärmeübergang. Gesundheitsingenieur 1912, S. 929.

Weiteres über das Prinzip der Ähnlichkeit wird im II. Hauptteil des Buches zur Sprache kommen.

Literatur: Enzyklop. d. math. Wiss. IV. 6. S. 478/479 und F. Klein, Zeitschr. f. Math. u. Physik 1902 (47).

II. Die Wärmeleitung in Flüssigkeiten und Gasen und der Wärmeübergang.

Es ist eine bekannte Erfahrungstatsache, daß der Wärmeaustausch zwischen einer bewegten Flüssigkeit und ihren festen Begrenzungswänden durch eine Verstärkung der Bewegung erheblich gesteigert werden kann. Diese Vermehrung des Wärmeaustausches ist aber nur durch einen erhöhten Aufwand an mechanischer Energie zu erkaufen. Es liegt nun der Gedanke nahe — und in der Tat sind auch schon diesbezügliche Vorschläge gemacht worden — diesen Zusammenhang zwischen aufgewendeter, mechanischer Energie und erzieltm Wärmeaustausch durch den Versuch zu ergründen und in zahlenmäßiger Weise festzulegen, um ihn dann bei Berechnung des Wärmeaustausches wieder benützen zu können. Allein die beiden Vorgänge sind doch viel zu verwickelt und hängen von zu vielen Größen ab, als daß es möglich wäre, sie lediglich auf Grund von Messungen in Beziehung zu bringen. Es wird vielmehr nötig sein, die beiden Vorgänge so gründlich als möglich ihrem Wesen nach zu erforschen. Den Ausgangspunkt dafür bilden die Ergebnisse der Hydrodynamik.

Die wichtigsten Lehren der Hydrodynamik sollen als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso die Grundzüge der mathematischen Elastizitätstheorie. Wenn trotzdem einiges aus der Hydrodynamik nochmals abgeleitet wird, so geschieht dies erstens zum Zwecke der Wiederholung und Zusammenfassung und zweitens zur Ableitung von Rechenvorschriften der Vektoranalysis sowie überhaupt zur Gewöhnung an die vektorielle Darstellungsweise.

A. Das allgemeine Problem.

1. Die Grundbegriffe.

a) **Die Eigenschaften der strömenden Flüssigkeit.** Die Physik unterscheidet zwischen tropfbaren Flüssigkeiten oder Flüssigkeiten im engeren Sinne und elastischen Flüssigkeiten oder Gasen. Leider besitzt unsere deutsche Sprache kein Wort, welches diese beiden Begriffe klar zusammenfassen würde. Wir müssen deshalb bei dem Worte Flüssigkeiten immer an seine Bedeutung im weiteren Sinne denken, also die Gase mit einbeziehen.

Bevor wir in eine Erörterung der Strömungsvorgänge selbst eintreten können, müssen wir uns eine Vorstellung von den wesentlichen Eigenschaften der Flüssigkeiten machen.

Vor allem wollen wir uns die Flüssigkeiten — also auch die Gase — als Kontinua denken. Nur dort, wo von den Ergebnissen der kinetischen Gastheorie die Rede sein sollte, müssen wir diese Vorstellung vorübergehend aufgeben.

Die zweite Betrachtung gilt der Veränderlichkeit der Massendichte. Das einfachste Bild einer Flüssigkeit ist in dieser Hinsicht das Bild einer raumbeständigen Flüssigkeit, d. h. eines Körpers, dessen Gestalt zwar beliebig geändert, dessen Volumen aber weder durch Druck- noch durch Temperaturänderungen beeinflusst werden kann.

In erster Annäherung entsprechen alle tropfbaren Flüssigkeiten dieser Bedingung.

Die dritte Aussage betrifft die Verschiebbarkeit der einzelnen Teile der Flüssigkeit gegeneinander. In Hinblick darauf ist die einfachste Vorstellung die einer reibungsfreien oder idealen Flüssigkeit. Denken wir uns im Innern einer Flüssigkeit eine kleine Fläche, so können bei Reibungsfreiheit die Flüssigkeitsteilchen, die zu beiden Seiten der Fläche angrenzen, auf einander keine Tangentialspannungen, sondern nur Normalspannungen übertragen und diese Normalspannungen müssen in ihrer Größe unabhängig sein von der Orientierung des Flächenelementes im Raum, also von der Richtung der Normalen. Der Spannungszustand in einer idealen Flüssigkeit ist also ein Skalar. Außerdem liegt es im Wesen der idealen Flüssigkeit, daß diese Normalspannungen nur Druck und keine Zugspannungen sein können. Der Spannungszustand ist also ein skalarer Druck, der sog. Pascalsche Druck; er sei mit p bezeichnet.

Der Gegensatz zur idealen oder reibungsfreien Flüssigkeit ist die reale oder zähe Flüssigkeit. Bei dieser können längs einer solchen gedachten Fläche auch Schub- oder Tangentialspannungen übertragen werden und ferner ist die zähe Flüssigkeit imstande, bis zu einem geringen Betrage auch Zugspannungen aufzunehmen. Der Spannungszustand in einer bewegten, zähen Flüssigkeit entspricht also durchaus dem drei achsigen Spannungszustand in einem deformierten, elastischen Körper; er ist wie dieser ein Tensor.

Wir bezeichnen mit σ Normalspannungen und mit τ Tangentialspannungen und zwar sei als Beispiel (s. Fig. 42) σ_x ein Normaldruck auf ein Flächenelement, das senkrecht zur x -Richtung steht. Während in der mathematischen Elastizitätstheorie die Zugspannungen positiv gerechnet werden, werden hier die Druckspannungen positiv gerechnet. τ_{xy} ist eine Tangentialspannung, die auf ein Flächenelement wirkt, das senkrecht zur x -Richtung steht. Die Kraft selbst wirkt in Richtung der positiven y -Achse. Der erste Zeiger bezeichnet also immer das Flächenelement, auf welches die Kraft wirkt, der zweite Zeiger gibt dann die Richtung der Kraft an.

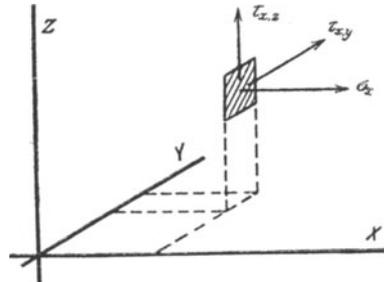


Fig. 42. Bezeichnungweise der Spannungen.

Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ drei aufeinander senkrechte, im übrigen aber beliebige Richtungen, so lehrt die Hydrodynamik (z. B. Lamb, S. 660), daß für eine festgehaltene Stelle im Raum die Summe der drei Normaldrücke $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ konstant ist, wie auch das System im Raum orientiert sei. Also

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta = \dots = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

Wir können nun einen skalaren Druck p entsprechend dem Pascalschen Druck bei den idealen Flüssigkeiten definieren, indem wir p gleich dem arithmetischen Mittel aus drei zueinander senkrechten Druckspannungen setzen. Wir gelangen so zu der Definitionsgleichung für p :

$$+ p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta}{3} \dots \dots \dots (55)$$

Sowohl für p als auch für die σ gilt

$$\text{Dimension } (p) = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right].$$

b) Das Strömungsfeld. Zur Darstellung des Strömungszustandes einer Flüssigkeit benützen wir den Begriff des physikalischen Feldes und zwar gibt es hier zwei grundsätzlich verschiedene Arten, dieses Feld zu betrachten.

Ist N irgend eine skalare oder \mathfrak{N} irgend eine vektorielle Eigenschaft des Feldes (z. B. Temperatur, Dichte, Druck, Geschwindigkeit), so werden wir im allgemeinen diese Eigenschaft als eine Funktion des Ortes und der Zeit auffassen müssen. Die Zeit wollen wir durch ihren Wert τ , den Ort durch den von einem festen Punkt aus gezogenen Radiusvektor \mathbf{r} oder durch drei Koordinaten ξ, η, ζ bezeichnen. Wir gelangen so zu der sog. Eulerschen Darstellungsweise, deren rechnerischer Ausdruck die Gleichungen sind

$$N = \text{Funkt } (\mathbf{r}, \tau) = \text{Funkt } (\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

$$\mathfrak{N} = \text{Funkt } (\mathbf{r}, \tau) = \text{Funkt } (\xi, \eta, \zeta, \tau).$$

Zu einer zweiten Art der Darstellung gelangen wir, indem wir die Eigenschaft N bzw. \mathfrak{N} nicht den Stellen des Raumes, sondern den einzelnen Massenteilchen zuordnen, wobei wir das einzelne Massenteilchen durch seine Lage zur Zeit $\tau = 0$ kennzeichnen, also durch einen Vektor \mathbf{r}_0 . Wir gelangen so zu der Lagrangeschen Darstellungsweise mit den Gleichungen:

$$N = \text{Funkt } (\mathbf{r}_0, \tau) = \text{Funkt } (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \tau)$$

$$\mathfrak{N} = \text{--- --- ---} = \text{--- --- --- ---}$$

In beiden Arten der Darstellung erscheint die untersuchte Feld-eigenschaft als eine Funktion der Zeit. Diese zeitliche Veränderlichkeit haben wir nun noch genau zu untersuchen und zwar wollen wir zuerst nur an eine skalare Feldeigenschaft denken.

1. Art der Änderung. Wenn wir unser Augenmerk fortgesetzt auf denselben Punkt des Raumes richten, so werden wir an dieser Stelle immer wieder neue Teilchen der Flüssigkeit antreffen und für jedes dieser Teilchen wird N einen anderen Wert haben. Es ergibt sich so

eine Veränderlichkeit des N mit der Zeit — eine Veränderlichkeit, die sich immer auf dieselbe Stelle des Raumes bezieht. Man nennt sie die „lokale Änderung“ und bezeichnet sie mit dem Symbol $\frac{\partial N}{\partial \tau}$.

2. Art der Änderung. Diesmal wollen wir unsere Betrachtung zwar auf einen Augenblick beschränken, dafür aber auf das Feld in seiner ganzen Ausdehnung erstrecken. Mit anderen Worten: wir wollen ein Momentbild des Feldes von N aufnehmen. Dieses Momentbild können wir wie ein unveränderliches oder stationäres Feld betrachten. Schreiten wir von unserem Aufpunkt aus in Richtung des Gradienten von N um die Strecke ds fort, so ist die Änderung von N auf diesem Wege gleich $(\text{grad } N) \cdot ds$. Wenn der Schritt nicht in Richtung des Gradienten erfolgt, sondern in einer anderen Richtung $d\mathfrak{s}$, die mit dem Gradienten den Winkel α bildet, so ist die Änderung von N auf diesem Wege gleich

$$|\text{grad } N| \cdot |d\mathfrak{s}| \cdot \cos \alpha = (\text{grad } N, d\mathfrak{s}).$$

Dieses skalare Produkt heißt die stationäre Änderung von N , weil dabei angenommen ist, daß das Feld während der Ausführung des Schrittes stationär bleibt.

3. Art der Änderung. Diese Art ergibt sich, dann, wenn wir unser Augenmerk fortgesetzt auf dasselbe Teilchen richten. Es ist die Änderung, die der Wert N im Laufe der Zeit für dasselbe Massenteilchen erfährt und heißt die substantielle oder totale Änderung von N . Sie sei mit $\frac{DN}{d\tau}$ bezeichnet.

Die Änderung, die N für dasselbe Teilchen in der Zeit $d\tau$ erfährt, setzt sich zusammen aus der Änderung, die eintreten würde, auch wenn das Teilchen an derselben Stelle bliebe und aus der Änderung, die eintritt, weil das Teilchen in dieser Zeit um $d\mathfrak{s}$ fortgeschritten ist. Die Gleichung

$$\frac{DN}{d\tau} d\tau = \frac{\partial N}{\partial \tau} \cdot d\tau + (d\mathfrak{s}, \text{grad } N)$$

ist dann für das betrachtete Teilchen richtig, wenn man für den Schritt $d\mathfrak{s}$ den Wert $w \cdot d\tau$ einsetzt. Man erhält so

$$\frac{DN}{d\tau} = \frac{\partial N}{\partial \tau} + (w, \text{grad } N) \dots \dots \dots (56a)$$

Die Größe $(w, \text{grad } N)$ nennt man das konvektive Glied der Änderung. Diese Gleichung läßt sich noch für jedes beliebige Koordinatensystem umformen. In kartesischen Koordinaten z. B. heißt sie

$$\frac{DN}{d\tau} = \frac{\partial N}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial N}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial N}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial N}{\partial z} \dots \dots (56b)$$

Auch wenn die untersuchte Feldgröße ein Vektor ist, läßt sich die totale Änderung aus der lokalen und der konvektiven Änderung zusammensetzen; wir müssen nur beachten, daß bei einem Vektor die Änderung im allgemeinen in einer Änderung seines absoluten Betrages

und in einer Änderung seiner Richtung besteht. Für einen Vektor \mathfrak{N} gilt

$$\frac{D\mathfrak{N}}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \tau} + (\mathfrak{w}, \text{grad}) \mathfrak{N} \dots \dots \dots (56c)$$

In kartesischen Koordinaten zerfällt diese Vektorgleichung in die drei Komponentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{DN_x}{d\tau} &= \frac{\partial N_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial N_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial N_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial N_x}{\partial z} \\ \frac{DN_y}{d\tau} &= \frac{\partial N_y}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial N_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial N_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial N_y}{\partial z} \\ \dots &= \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (56d)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch dann, wenn die Größe \mathfrak{N} die Geschwindigkeit \mathfrak{w} selbst ist. Für die Beschleunigung gilt also

$$\frac{D\mathfrak{w}}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \tau} + (\mathfrak{w}, \text{grad}) \mathfrak{w} \dots \dots \dots (57)$$

2. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir denken uns im Innern des Feldes durch eine geschlossene Fläche F ein kleines Raumteilchen dV abgegrenzt und gelangen zu drei voneinander unabhängigen Differentialgleichungen, indem wir auf dieses Raumteilchen drei physikalische Grundgesetze anwenden. Es führt

- das Prinzip der Erhaltung der Materie zur Kontinuitätsgleichung,
- die mechanische Grundgleichung „ Bewegungsgleichung,
- das Prinzip der Erhaltung der Energie „ Gleichung der Energien.

a) Die Kontinuitätsgleichung. Ist dV das Volumen des erwähnten Raumteiles und ρ die Massendichte an der untersuchten Stelle, so ist $\rho \cdot dV$ der Masseninhalt des Raumes. Wir denken uns das Raumteilchen an seiner Stelle festgehalten, dann kommt für die Änderung seines Masseninhaltes nur die

$$\text{lokale Änderung } \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot dV$$

in Betracht. Dieser Zuwachs an Masse muß gleich der algebraischen Summe der einströmenden Massen sein. Wir führen die Rechnung zuerst für raumbeständige Flüssigkeiten durch.

1. Die Kontinuitätsgleichung für raumbeständige Flüssigkeiten.

Für solche Flüssigkeiten ist ρ weder mit der Temperatur noch mit dem Druck veränderlich, also $(\partial \rho / \partial \tau) = 0$ und damit auch die Gesamteinströmung gleich Null.

Bezeichnen wir mit df ein Element der Oberfläche F von dV , ferner mit \mathfrak{n} seine nach außen gerichtete Normale und mit \mathfrak{w} die Geschwindigkeit an der Stelle df , so ist $\rho \cdot df \cdot w_n$ die in der Zeiteinheit durch df austretende Flüssigkeit. Dieser Betrag ist für alle df auszurechnen und

zu summieren. ρ kann hierbei als eine konstante Größe vor die Klammer gesetzt werden. So wird die Ausströmung gleich

$$\rho \cdot \sum_F w_n \cdot df.$$

Der Wert der Summe hängt außer von der Größe von F und damit vom Volumen des Raumteiles nur ab von der Art der Geschwindigkeitsverteilung an der untersuchten Stelle. Es kommt darauf an, ob aus dem Innern des Raumes Flüssigkeit hervorquillt, ob die Strömung nach außen divergiert. Aus diesem Grunde hat man für die Summe den Namen Quelle oder Divergenz des Vektors eingeführt. Es ist dafür das Symbol $\text{div } w$ gebräuchlich. Wir gelangen so zu der Definitionsgleichung

$$\sum_F w_n \cdot df = \text{div } w \cdot dV, \dots \dots \dots (58)$$

welche den Gaußschen Satz ausspricht (vgl. S. 7).

In dieser bisherigen Ableitung ist die Divergenz erst ein Vorstellungsbefehl. Damit sie auch für die Rechnung brauchbar wird, muß sie sich in Koordinatenform kleiden lassen. Dies soll nun für kartesische Koordinaten geschehen.

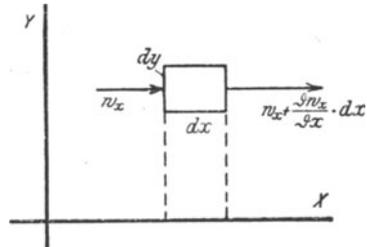


Fig. 43. Zu: Ableitung der Divergenz „ $\text{div } w$ “ in rechtwinkelig, geradlinigen Koordinaten.

Zu diesem Zwecke geben wir dem Raumteilchen vorübergehend die Gestalt eines rechteckigen Körpers mit den Kanten dx , dy und dz . Auch die Geschwindigkeit zerlegen wir in ihre Komponenten w_x , w_y , w_z . Wenn wir beachten, daß wir stets die äußere Normale positiv zu rechnen haben, so können wir aus Fig. 43 ablesen, daß in Richtung der x -Achse

die Flüssigkeitsmasse $w_x \cdot dy \cdot dz$ einströmt, und

„ „ „ $\left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz$ ausströmt.

Das Ergebnis ist eine Ausströmung

in der x -Richtung im Betrage von $\dots \dots \dots \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$

Für die y - und z -Richtung ergibt sich durch zyklische Vertauschung von x , y und z $\dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_y}{\partial y} dy \cdot dz \cdot dx \\ \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy \end{array} \right.$

Die Summe für alle drei Richtungen: $\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$

Dies ist nach Gleichung (58) gleich $\text{div } w \cdot dV$.

Für kartesische Koordinaten gilt also

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \dots \dots \dots (59)$$

Die Vektorformeln Nr. VIIIb und VIIIc geben den Ausdruck für die Divergenz auch in Zylinder- und Kugelkoordinaten. Sie sind durch denselben Gedankengang abgeleitet, nur ist dem Volumen eine andere Gestalt gegeben.

Mit Hilfe des Divergenzbegriffs läßt sich die gesamte Ausströmung an Masse aus dem Volumenelement dV gleich $\rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} \cdot dV$ setzen. Da sie für raumbeständige Flüssigkeiten gleich Null sein muß, so ist

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \dots \dots \dots (60).$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für raumbeständige Flüssigkeiten.

2. Die Kontinuitätsgleichung für nicht raumbeständige Flüssigkeiten.

Wir hatten bei der raumbeständigen Flüssigkeit gefunden, daß durch das Flächenelement df der Oberfläche in der Zeiteinheit die Masse $\rho \cdot w_n \cdot df$ austritt. Derselbe Wert gilt auch hier und er ist ebenso wie dort über alle Flächenelemente zu summieren. Jetzt muß aber wegen der räumlichen Veränderlichkeit der Massendichte das ρ unter dem Summenzeichen bleiben und es ergibt sich die

$$\text{Ausströmung} = \sum_F \rho w_n \cdot df$$

und dies ist mit Hilfe des Gaußschen Satzes (Gleichung 58) gleich $\operatorname{div} (\rho \cdot \mathbf{w}) \cdot dV$.

Nun ist nach dem Prinzip der Erhaltung der Materie der Zuwachs an Masse im Inneren des Raumteiles gleich der gesamten Einströmung bzw. gleich der negativen Ausströmung durch die Oberfläche. Dies führt zur Kontinuitätsgleichung in der ersten Form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div} (\rho \cdot \mathbf{w}) = 0 \dots \dots \dots (61a)$$

Diese Gleichung wollen wir noch auf eine andere Form bringen und bei dieser Gelegenheit eine Formel aus der Vektoranalysis ableiten, die wir noch öfter brauchen werden.

Nach Gleichung (59) ist: $\operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) = \rho \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial \rho}{\partial x}$
 $+ \rho \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y}$
 $+ \rho \frac{\partial w_z}{\partial z} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$

Durch Addition:

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) = \rho \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \left(w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right).$$

Und hieraus folgt durch Anwendung von Gleichung (59) und Gleichung (56a, b) die Vektorformel III (im Anhang)

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} + (\mathbf{w}, \operatorname{grad} \rho).$$

Die Anwendung dieser Vektorformel auf Gleichung (61a) führt zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (\mathbf{w}, \operatorname{grad} \rho) + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$$

und aus diesem Ausdruck ergibt sich die zweite Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D \rho}{d \tau} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \\ \text{oder} \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{D \rho}{d \tau} + \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \end{aligned} \right\} . . . (61 b)$$

b) Die Bewegungsgleichung. Wir beginnen mit dem Aufsuchen der Kräfte, welche auf das in dV enthaltene Massenteilchen einwirken. Erstens kommt hier eine Massenkraft in Betracht, nämlich die Schwere \mathfrak{G} . Ist g die Erdbeschleunigung nach Größe und Richtung, so ist

$$\mathfrak{G} = g \cdot \rho \cdot dV.$$

Zweitens kommen Oberflächenkräfte in Rechnung; es sind dies die Kräfte p , welche die umgebenden Flüssigkeitsteilchen auf die Oberfläche von dV ausüben. Da die Flüssigkeit als zäh vorausgesetzt wird, so werden diese Kräfte im allgemeinen nicht senkrecht auf die Oberfläche wirken. Nach den Lehren der Mechanik lassen sich diese Kräfte immer auf eine Einzelkraft \mathfrak{R} und auf ein Kräftepaar \mathfrak{K} zurückführen. Der Vektor \mathfrak{K} ist der nach Größe und Richtung zu bestimmende Momentenvektor des Kräftepaares.

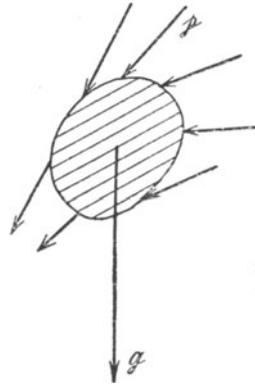


Fig. 44. Schwerkraft und Oberflächenkräfte an einem unendlich kleinen Teilchen einer zähen Flüssigkeit.

Als Wirkung der Oberflächenkräfte ist also eine Verschiebung und eine Drehung des Teilchens zu erwarten.

Aus der Dynamik übernehmen wir zwei Gleichungen:

Die dynamische Grundgleichung:

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe aller Kräfte}$$

$$\rho \cdot dV \times \frac{D \mathbf{w}}{d \tau} = \mathfrak{G} + \mathfrak{R}.$$

Die Momentengleichung für einen beliebigen Momentenpunkt:

$$\text{Änderung des Dralles} = \text{Moment des Kräftepaares}$$

$$\frac{D \mathfrak{K}}{d \tau} = \mathfrak{K}.$$

Die Drehung.

Denken wir uns vorübergehend das Raumelement als Kugel, so ist für jede Richtung, die \mathfrak{R} auch annehmen mag, die Drehachse eine freie Achse und wir erhalten, wenn wir unter θ das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf einen Durchmesser und unter u die Winkelgeschwindigkeit verstehen

$$\rho \cdot \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} = K.$$

Nun ist das Trägheitsmoment der Kugel der 5. Potenz des Durchmessers proportional und in der mechanischen Grundgleichung ist die dort vorkommende Masse $\rho \cdot dV$ nur der 3. Potenz des Durchmessers proportional. Wenn wir also das Volumen dV so wählen, daß die Masse eine unendlich kleine Größe erster Ordnung ist, so ist das Trägheitsmoment unendlich klein höherer Ordnung. Da die Winkelbeschleunigung nicht unendlich groß werden kann, darf sich $|\mathfrak{R}|$ von Null nur um eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung unterscheiden, d. h. die Tangentialkomponenten der Kräfte p erzeugen kein resultierendes Drehmoment.

Die Verschiebung.

Es handelt sich im folgenden um die Bestimmung der resultierenden Einzelkraft \mathfrak{R} . Diese Rechnung soll unter Beschränkung auf das kartesische Koordinatensystem durchgeführt werden, einerseits um das Rechnen mit Tensoren zu vermeiden und andererseits um verschiedene Ergebnisse der mathematischen Elastizitätstheorie in ihrer gebräuchlichen Form übernehmen zu können (vgl. Föppl, Band: Festigkeitslehre).

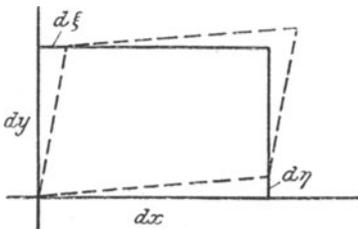


Fig. 45. Formänderung infolge der Schubspannungen.

Bei einem Körper, der das Hookesche Gesetz befolgt, sind die nachstehenden drei Größen zu beachten:

- E der Elastizitätsmodul,
- m die Poissonsche Konstante,
- G der Schubelastizitätsmodul.

Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung .

$$\frac{E \cdot m}{m + 1} = 2 G, \dots \dots (a_1)$$

so daß also schon zwei dieser Stoffwerte das elastische Verhalten des Stoffes be-

stimmen, weil sich aus ihnen immer mittels Gleichung a_1 die dritte berechnen läßt.

Für die Dehnung der Längeneinheit oder die spezifische Dehnung ϵ_x in der Richtung x gilt:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{1}{E} \left(\sigma_x \cdot \frac{m + 1}{m} - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \dots (b_1)$$

Schreibt man die entsprechenden Gleichungen für ϵ_y und ϵ_z an und addiert dann, so erhält man die Gleichung

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \frac{m - 2}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \dots \dots (c_1)$$

Endlich ist noch die spezifische Änderung des vor der Formänderung rechten Winkels zwischen dx und dy gegeben durch

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\tau_{yx}}{G}.$$

Aus dieser Gleichung, sowie aus den entsprechenden Gleichungen für die anderen Winkeländerungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d_1)$$

Alle diese Folgerungen aus dem Hookeschen Gesetz gelten — ebenso wie das Hookesche Gesetz selbst — nur für feste Körper und auch hier nicht für alle. Aber das Bild, unter dem die mathematische Physik die realen Flüssigkeiten betrachtet, läßt sich so sehr mit dem Bild eines dem Hookeschen Gesetze gehorchenden Körpers in Übereinstimmung bringen, daß für jede der vier Gleichungen a_1 bis d_1 eine entsprechende für Flüssigkeiten gilt.

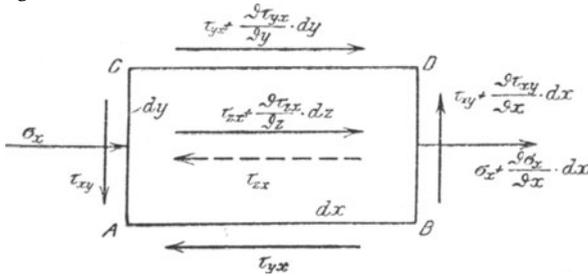


Fig. 46. Zug- und Schubspannungen an einem Parallelepip.

In Fig. 46 ist ein Volumelement dx, dy, dz der Flüssigkeit mit den Normal- und Tangentialspannungen, die an seinen Oberflächenteilen wirken, gezeichnet. Die Figur unterscheidet sich von der entsprechenden Figur der Elastizitätstheorie nur dadurch, daß die Normalspannungen mit umgekehrtem Vorzeichen eingetragen sind.

Die Ecke A rückt mit der Geschwindigkeit w_x nach rechts; die Ecke B in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit

$$w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot dx.$$

Die Größe

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} dx$$

ist also ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der die Kante dx ihre Länge ändert. Also

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \tau}.$$

Man nimmt nun an, daß bei Flüssigkeiten, die Normalspannungen mit den Dehnungs-Geschwindigkeiten in derselben Weise zusammenhängen wie bei den festen Körpern die Normalspannungen mit den Dehnungen selbst.

Ist Λ eine den E analoge, elastische Konstante der Flüssigkeit, so erhalten wir (bei Vorzeichenwechsel für die σ) aus b_1 die Gleichung:

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial \tau} = \frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} - \sigma_x \frac{m+1}{m} \right) \dots \dots (b_2)$$

Aus Gleichung (c₁) folgt mit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div } w$$

daß für die Divergenz der Ausdruck gilt:

$$\text{div } w = \frac{-1}{\Lambda} \cdot \frac{m-2}{m} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{-3}{\Lambda} \frac{m-2}{m} \cdot p \dots (c_2)$$

Ist die Flüssigkeit raumbeständig, so ist $\text{div } w = 0$ und die Poissonsche Konstante muß den Wert 2 annehmen.

Die zweite Annahme über die Eigenschaften der Flüssigkeiten betrifft die Schubspannungen, hier innere Reibungen genannt.

Die Ecke A (in Fig. 46) bewegt sich mit der Geschwindigkeit w_x nach rechts und die Ecke C mit der Geschwindigkeit ($w_x + \partial w_x / \partial y \cdot dy$) in derselben Richtung. Die Größe $\partial w_x / \partial y$ ist also ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich die Kante AC um A dreht. Ebenso ist $\partial w_y / \partial x$ die Drehgeschwindigkeit der Kante AB um A. Und der Ausdruck

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}$$

ist die Geschwindigkeit, mit welcher der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und dy sich ändert. Während bei den festen Körpern die Schubspannungen den Winkeländerungen proportional sind, werden bei den Flüssigkeiten die Schubspannungen den Änderungsgeschwindigkeiten proportional gesetzt. Ist μ eine dem G analoge elastische Konstante, so ist

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (d_2)$$

An Stelle von Gleichung (a₁) gilt

$$\frac{\Lambda \cdot m}{m + 1} = 2 \mu \dots \dots \dots (a_1)$$

Diese in den Gleichungen a₂ bis d₂ ausgesprochenen Aussagen über die inneren Kräfte einer realen Flüssigkeit ermöglichen es uns jetzt die Verschiebung des Teilchens zu berechnen.

Wenn wir nach dem D'Alembertschen Prinzip die Trägheitskraft mit in Rechnung setzen und die übrigen Kräfte aus Fig. (46) ablesen, so gelangen wir für das Gleichgewicht in der x-Richtung zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \rho \cdot g_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \cdot dz \cdot dx \\ + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy - \rho \cdot \frac{Dw_x}{d\tau} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0. \end{aligned}$$

Durch Vereinfachung und Umstellung entsteht daraus:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \cdot \frac{Dw_x}{d\tau} &= \varrho \cdot g_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \varrho \cdot \frac{Dw_y}{d\tau} &= \varrho \cdot g_y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ \varrho \cdot \frac{Dw_z}{d\tau} &= \varrho \cdot g_z - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots (62a)$$

Die beiden letzten Gleichungen sind aus der ersten durch zyklische Vertauschung der Zeiger entstanden.

Die Werte der σ und τ sind nur noch mit Hilfe der Gleichungen a_2 bis d_2 zu bestimmen.

Zur Bestimmung von $\partial \sigma / \partial x$ gehen wir von Gleichung (b_2) aus.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} &= A \cdot \left(\frac{3p}{m} - \sigma_x \frac{m+1}{m} \right) \\ \sigma_x &= \frac{3p}{m+1} - A \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} \end{aligned}$$

Wenn wir vom ersten Ausdruck rechts ein p abspalten, ergibt sich:

$$\sigma_x = p + \frac{2-m}{m+1} p - \frac{A m}{m+1} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x}$$

Nun ist nach Gleichung (c_2)

$$\frac{2-m}{m+1} \cdot p = \frac{A}{3} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \text{div } w$$

ferner ist $\frac{A \cdot m}{m+1} = 2\mu$ nach Gleichung (a_2).

Es ergibt sich nun

$$\sigma_x = p + \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div } w - 2\mu \frac{\partial w_x}{\partial x} \dots \dots \dots (63)$$

Durch Differentiation wird daraus

$$-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \text{div } w + 2\mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$$

Zur Bestimmung von $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$ differenzieren wir Gleichung (d_2) nach y bzw. z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \cdot \partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Durch Summieren erhalten wir für die Oberflächenkräfte in x -Richtung (Gleichung 62a, 1. Gleichung)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \\ &\quad + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \cdot \partial y} \\ &\quad + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \cdot \partial z} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w + \mu \cdot \Delta^2 w_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w. \end{aligned}$$

Dies können wir nochmals vereinfachen; ferner schreiben wir gleich die entsprechenden Gleichungen für die y - und z -Richtung darunter und erhalten damit für die letzten Glieder der Gleichungen (62a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{dV} \cdot R_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta^2 w_x + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w \\ \frac{1}{dV} \cdot R_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta^2 w_y + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w \\ \frac{1}{dV} \cdot R_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta^2 w_z + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w \\ \hline \frac{1}{dV} \cdot \mathfrak{R} &= -\operatorname{grad} p + \mu \cdot \Delta^2 w + \frac{1}{3}\mu \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} w \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen.

Die dynamische Grundgleichung (S. 133 und Gleichung 62a) für zähe, nicht raumbeständige Flüssigkeiten ergibt sich nun in der Form

$$\left. \begin{aligned} \varrho \cdot \frac{Dw_x}{d\tau} &= \varrho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \Delta^2 w_x + \frac{1}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w \\ \varrho \cdot \frac{Dw_y}{d\tau} &= \varrho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \Delta^2 w_y + \frac{1}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w \\ \varrho \cdot \frac{Dw_z}{d\tau} &= \varrho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \Delta^2 w_z + \frac{1}{3}\mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w \\ \hline \varrho \cdot \frac{Dw}{d\tau} &= \varrho \cdot g - \operatorname{grad} p + \mu \cdot \Delta^2 w + \frac{1}{3}\mu \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} w \end{aligned} \right\} \quad (62b)$$

Die Dimensionen in dieser Gleichung wollen wir nun noch kurz besprechen:

ϱ stellt die Masse der Raumeinheit dar, ist also im kg-m-std-System von der Dimension $\text{kg} + 1 \cdot \text{std} + 2 \cdot \text{m}^{-4}$.

μ der Reibungskoeffizient ist von der Dimension $\text{kg} + 1 \cdot \text{std} + 1 \cdot \text{m}^{-2}$.

Damit ergibt sich, daß die einzelnen Glieder der Gleichung (62b) von der Dimension sind: $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, sie stellen also Kräfte auf die Raumeinheit dar und die Gleichung ist als analytischer Ausdruck für ein Kräftepolygon aufzufassen. Im einzelnen bedeuten:

- $\rho \cdot \frac{Dm}{d\tau}$ die von der Beschleunigung erzeugte Trägheitskraft,
- $\rho \cdot g$ die Erdanziehung,
- grad p das Druckgefälle,
- $\mu \left(\Delta m + \frac{1}{3} \text{grad div } m \right)$ die Wirkung der inneren Reibung.

Die Gleichung der mechanischen Energie.

Über die Umwandlung mechanischer Energien verschiedener Art untereinander und in nicht mechanische Energien gibt eine Gleichung Aufschluß, die wir aus Gleichung (62a) ableiten wollen. Wir multiplizieren die Gleichungen (62a) der Reihe nach mit $w_x \cdot dV$, $w_y \cdot dV$ und $w_z \cdot dV$ addieren

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot w_x \cdot \frac{Dw_x}{d\tau} \cdot dV &= \rho \cdot g_x \cdot w_x \cdot dV + w_x \cdot \left(-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \cdot dV \\ \text{---} &= \text{---} \\ \text{---} &= \text{---} \end{aligned} \right\} (64a)$$

Integrieren wir über den Raum V, so liefert die linke Seite:

$$\int_V \rho \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{Dw_x^2}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{Dw_y^2}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{Dw_z^2}{d\tau} \right) \cdot dV = \int_V \frac{\rho}{2} \frac{Dm^2}{d\tau} \cdot dV.$$

Die ersten Glieder der rechten Seite ergeben:

$$\int_V \rho (w_x g_x + w_y g_y + w_z g_z) \cdot dV = \int_V \rho \cdot (w, g) \cdot dV.$$

Die zweiten Glieder der rechten Seite erfordern eine längere Rechnung. Nach dem Beispiel

$$w_x \cdot \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial w_x \cdot \tau_{yx}}{\partial x} - \tau_{yx} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x}$$

gerechnet, ergeben sich zwei Gruppen von Werten:

Die erste Gruppe:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial w_x \cdot \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x \cdot \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial w_x \cdot \tau_{zx}}{\partial z} \\ & -\frac{\partial w_y \cdot \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial w_y \cdot \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial w_y \cdot \tau_{xy}}{\partial x} \\ & -\frac{\partial w_z \cdot \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial w_z \cdot \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial w_z \cdot \tau_{yz}}{\partial y} \end{aligned}$$

stellen wir um, in die Reihenfolge

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (-\sigma_x \cdot w_x + \tau_{xy} \cdot w_y + \tau_{xz} \cdot w_z) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (-\sigma_y \cdot w_y + \tau_{yz} \cdot w_z + \tau_{yx} \cdot w_x) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (-\sigma_z \cdot w_z + \tau_{zx} \cdot w_x + \tau_{zy} \cdot w_y). \end{aligned}$$

Da der erste Zeiger immer diejenige Fläche des kleinen, rechteckigen Körpers bezeichnet, auf welche die betreffende Spannung wirkt, so stehen in den Klammern immer nur Spannungen beisammen, welche auf die gleiche Fläche wirken.

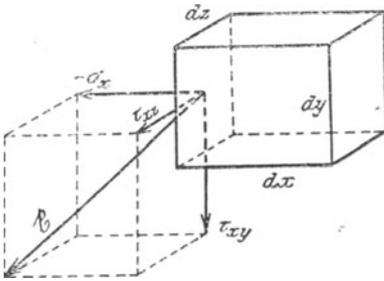


Fig. 47. Zusammensetzen der Schub- und Zugspannungen am selben Flächenelement.

Bezeichnen wir die auf $dy \cdot dz$ wirkende Kraft mit ξ ,
 $dz \cdot dx$ „ „ „ η ,
 $dx \cdot dy$ „ „ „ β ,
 so haben wir

unter $-\sigma_x$ die x-Komponente von ξ ,
 „ $+\tau_{xy}$ „ y- „ „ ξ ,
 „ $+\tau_{xz}$ „ z- „ „ ξ ,

zu verstehen und die erste Gruppe von Gliedern liefert nach der Integration:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\xi, w) + \frac{\partial}{\partial y} (\eta, w) + \frac{\partial}{\partial z} (\beta, w) \right\} dx \cdot dy \cdot dz \\ & = \int_V \{ (\xi, w) \cdot dy \cdot dz + (\eta, w) \cdot dz \cdot dx + (\beta, w) \cdot dx \cdot dy \}. \end{aligned}$$

Da das skalare Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit die Arbeit der Kraft in der Zeiteinheit darstellt, so ist die erste Gruppe von Gliedern ein Ausdruck für die Arbeit der Oberflächenkräfte. Hätte das Volumenelement nicht die rechteckige Gestalt, so hätte uns die Vektorenrechnung den Ausdruck

$$\int_F (\mathfrak{p}, \mathfrak{w}) \cdot d\mathfrak{f} \text{ geliefert.}$$

Die zweite Gruppe von Gliedern

$$\begin{aligned} & -\sigma_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + \tau_{yx} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} + \tau_{zx} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ & -\sigma_y \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} + \tau_{zy} \cdot \frac{\partial w_y}{\partial z} + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial w_y}{\partial x} \\ & -\sigma_z \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} + \tau_{xz} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial x} + \tau_{yz} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial y} \end{aligned}$$

gibt durch Umstellen:

$$\begin{aligned}
 - \left(\sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \\
 + \tau_{yz} \cdot \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \cdot \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (d₂) für τ und der Gleichung (63) für σ lassen sich die Spannungen durch die Größen μ und p und die Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes ausdrücken. Die Ausführung dieser Rechnung gibt für die zweite Gruppe von Gliedern den Wert:

$$\int_V p \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} \cdot dV - \mu \int_V \text{Diss. Funkt.}(\mathbf{w}) \cdot dV.$$

Hierbei ist Diss. Funkt. (\mathbf{w}) zur Abkürzung gesetzt für:

$$\begin{aligned}
 2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)^2 \\
 + \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{w})^2.
 \end{aligned}$$

Es ist dies die von Lord Rayleigh eingeführte Dissipationsfunktion. Sie ist ein Differentialoperator gerade so wie z. B. die Divergenz oder der Gradient, wenn auch von viel verwickelterer Bauart.

Nunmehr sind die einzelnen Glieder von Gleichung (64a) bekannt. In etwas abgeänderter Reihenfolge ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \int_V \rho \cdot (\mathfrak{g}, \mathbf{w}) \cdot dV + \int_F (\mathfrak{p}, \mathbf{w}) \cdot d\mathfrak{f} = \int_V \frac{\rho}{2} \cdot \frac{D\mathbf{w}^2}{dt} \cdot dV - \int_V p \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} \cdot dV \\
 + \mu \int_V \text{Diss.-Funkt.} \mathbf{w} \cdot dV \quad \dots \quad (64b)
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Glieder sind von der Dimension $\text{mkg} \cdot \text{std}^{-1}$. Die Gleichung besagt, daß die Arbeit der Schwerkraft und die Arbeit der Kräfte, die auf die Oberfläche des Raumes wirken, erstens zur Erhöhung der kinetischen Energie der Massen $\rho \cdot dV$ verwendet wird, zweitens als Kompressionsarbeit in der Materie aufgespeichert wird und drittens infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit in andere Energiearten (Wärme) verwandelt wird.

c) Die allgemeine Energiegleichung. Die Gleichung 64 stellt bereits eine Beziehung zwischen Energien dar, jedoch nur vom Standpunkt der mechanischen Energien aus betrachtet und außerdem bildet diese Gleichung lediglich eine Umformung der Bewegungsgleichung. Im folgenden soll nun eine neue, unabhängige Gleichung aufgestellt werden, die sich zudem auf die Gesamtenergie bezieht.

Wir denken uns an einer Stelle im Feld einen Raum von der Größe V festgehalten. Dann muß die Änderung der in V enthaltenen Energie gleich sein der Arbeit, welche die äußeren Kräfte auf die in V enthaltene Masse ausüben, plus der von außen durch die Oberfläche eintretenden

Energie und zwar haben wir bei letzterer zu unterscheiden: die Energie, die als Wärme auf dem Wege der Wärmeleitung in das Innere gelangt und die Energie, die mit der Materie als deren Energieinhalt in den Raum hereingeführt wird. Es gilt also:

$$\text{Änderung } En = A + En_I + En_{II}.$$

Ist ε der gesamte Energieinhalt der Masseneinheit, so ist $\varrho \cdot \varepsilon \cdot dV$ der Energieinhalt eines Raumelementes und

$$\frac{\partial \varrho \varepsilon}{\partial \tau} dV = \varrho \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot dV + \varepsilon \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} dV$$

dessen lokale Änderung.

Die Arbeit A ist aus Gleichung (64b) bekannt.

Zur Berechnung der Energie En_I benützen wir wie bei festen Körpern denselben Vektor Ω , den Wärmefluß. Es ist

$$\Omega = -\lambda \cdot \text{grad } \Theta.$$

Für die aus dem Raum V austretende Wärme ergibt sich

$$En_I = \int_F -\lambda \cdot \text{grad } \Theta \cdot df = -\lambda \cdot \int_V \Delta^2 \Theta \cdot dV.$$

bei Anwendung des Gaußschen Satzes und der Vektorformel Nr. II (vgl. Gleichung Nr. 3).

Zur Berechnung der Energie En_{II} führen wir einen dem Wärmefluß entsprechenden Vektor \mathfrak{E} ein, den wir etwa den konvektiven Energiefluß nennen könnten. Durch eine Fläche von der Größe „Eins“ strömt in der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge $\varrho \cdot w$ mit dem Energieinhalt $(\varrho \cdot \varepsilon \cdot w)$ hindurch. Wir setzen

$$\mathfrak{E} = \varrho \cdot \varepsilon \cdot w$$

und erhalten deshalb bei Anwendung des Gaußschen Satzes für die aus dem Volumen V austretende Energie den Betrag

$$-En_{II} = \int_F \varrho \cdot \varepsilon \cdot w_n \cdot df = \int_V \text{div} (\varrho \cdot \varepsilon \cdot w) \cdot dV.$$

Durch Anwendung der Vektorformel Nr. III entsteht daraus

$$+En_{II} = -\int_V \varepsilon \cdot \text{div} (\varrho \cdot w) \cdot dV - \int_V (\varrho \cdot w, \text{grad } \varepsilon) \cdot dV$$

und mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (61a)

$$En_{II} = \int_V \varepsilon \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} \cdot dV - \int_V \varrho \cdot (w, \text{grad } \varepsilon) \cdot dV.$$

Nachdem nun die einzelnen Glieder bekannt sind, ergibt sich, wenn man zugleich den Raum V unendlich klein werden läßt:

$$\varrho \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = A + \lambda \cdot \Delta^2 \Theta + \varepsilon \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} - \varrho \cdot (w, \text{grad } \varepsilon)$$

und hieraus durch Fortstreichen des beiderseits gleichen Gliedes und Anwendung von Gleichung (56a):

$$\varrho \cdot \frac{D\varepsilon}{d\tau} = A + \lambda \cdot \Delta^2 \Theta \dots \dots \dots (65a)$$

Die totale Änderung des Energieinhaltes ist also gleich der Arbeit der äußeren Kräfte plus der durch Leitung eintretenden Wärme.

Die Gesamtenergie ε setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie $\varrho \cdot \frac{1}{2} w^2$ und aus der inneren Energie u .

Aus der Thermodynamik wissen wir, daß der Wärmehalt i gleich $u + p v$ ist. Damit wird

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} w^2 + u = \frac{1}{2} w^2 + i - p v \\ \text{und } \varrho \cdot \frac{D\varepsilon}{d\tau} &= \varrho/2 \cdot \frac{Dw^2}{d\tau} + \varrho \frac{Di}{d\tau} - \varrho \cdot v \cdot \frac{Dp}{d\tau} - \varrho \cdot p \cdot \frac{Dv}{d\tau} \\ &= \varrho/2 \cdot \frac{Dw^2}{d\tau} + \varrho \frac{Di}{d\tau} - \frac{Dp}{d\tau} - p \cdot \text{div } w. \end{aligned}$$

Wenn wir diesen Wert in Gleichung (65a) einsetzen und gleichzeitig für A den Wert aus Gleichung (64b) übernehmen, so erhalten wir die Gleichung der Gesamtenergie in der 2. Form:

$$\varrho \cdot \frac{Di}{d\tau} - \frac{Dp}{d\tau} = \lambda \cdot \Delta^2 \Theta + \mu \cdot \text{Diss. Funkt } w \quad \dots \quad (65b)$$

Aus der Thermodynamik entnehmen wir ferner, daß $i = c_p' \cdot \Theta + \text{const}$ ist — wobei sich c_p' auf die Masseneinheit bezieht — und erhalten damit eine dritte Form:

$$\varrho \cdot c_p' \cdot \frac{D\Theta}{d\tau} - \frac{Dp}{d\tau} = \lambda \cdot \Delta^2 \Theta + \mu \cdot \text{Diss. Funkt } w \quad \dots \quad (65c)$$

d) Die Differentialgleichungen für den Beharrungszustand. Da wir uns im ganzen folgenden Buch nur mit Vorgängen im Beharrungszustand befassen werden, soll im nachstehenden das System der Differentialgleichungen für den Beharrungszustand zusammengestellt werden.

In den Gleichungen (56), z. B. (56a):

$$\frac{DN}{d\tau} = \frac{\partial N}{\partial \tau} + (w, \text{grad } N)$$

hatten wir die Beziehungen zwischen den substantiellen, den lokalen und den stationären Änderungen einer Feldgröße aufgestellt. Beim Beharrungszustand sind nun die lokalen Änderungen gleich Null und die stationären Änderungen bleiben allein über.

Wir erhalten also beim Beharrungszustand für eine nicht raumbeständige Flüssigkeit:

Die Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div } (\varrho \cdot w) = 0 \quad \dots \quad (66)$$

Die Bewegungsgleichung:

$$\varrho \cdot (w, \text{grad } w) = \varrho \cdot g - \text{grad } p + \mu (\Delta^2 w + \frac{1}{3} \text{grad div } w). \quad \dots \quad (67)$$

Die Energiegleichung:

$$\varrho \cdot c_p' \cdot (w, \text{grad } \Theta) - (w, \text{grad } p) = \lambda \cdot \Delta^2 \Theta + \mu \cdot \text{Diss. Funkt } (w) \quad \dots \quad (68)$$

Hierzu kommt noch die Zustandsgleichung:

$$\text{Funkt}(p, \varrho, T) = \text{Funkt}(p, \varrho, \Theta + \text{const}) = 0 \dots (69)$$

Dieses Gleichungssystem enthält

als unabhängige Veränderliche: Die drei Koordinaten des Raumes in vorerst noch willkürlichem Koordinatensystem;

als abhängige Veränderliche: ϱ die Massendichte,
 p den Druck,
 Θ die Temperatur,
 w die Geschwindigkeit;

als konstante Koeffizienten: g die Erdbeschleunigung,
 $\left. \begin{array}{l} \mu \\ c_p \\ \lambda \end{array} \right\} \text{Stoffwerte.}$

Die Lösung dieses Gleichungssystemes besteht in vier Gleichungen zwischen je einer abhängigen Veränderlichen und den drei Koordinaten des Raumes. Diese Gleichungen sind der analytische Ausdruck für die gesuchten vier Felder, nämlich

das Feld der Dichte,
das Feld des Druckes,
das Temperaturfeld,
das Geschwindigkeitsfeld.

Durch diese vier Gleichungen (66) bis (69) ist jedoch das Problem noch nicht eindeutig bestimmt, denn es fehlt noch die Angabe der Randbedingungen.

3. Die Randwertangaben.

a) Die untersuchten Räume. 1. Fall. Die Flüssigkeit möge durch eine Öffnung in einen Hohlraum, der von festen Wänden begrenzt ist, eintreten, den Hohlraum vollständig ausfüllen und dann durch eine zweite Öffnung wieder austreten. Die Begrenzung des Feldes besteht in diesem Falle erstens aus den festen Wänden, zweitens aus der Eintrittsöffnung und drittens aus der Austrittsöffnung.

2. Fall. Ein Körper beliebiger Gestalt möge allseitig von Strömung umspült werden; die Abmessungen des Strömungsfeldes mögen ferner so groß sein im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers, daß das Feld als unendlich ausgedehnt gelten kann. Die Begrenzung des Feldes besteht dann aus der unendlichen Ferne, bis zu der sich das Feld erstreckt, und aus der im Innern liegenden Begrenzung durch die Körperoberfläche.

3. Fall. Es können freie Flüssigkeitsoberflächen auftreten, d. h. Flächen, an denen die Flüssigkeit an Luft grenzt. Es tritt dies bei den Fällen 1 und 2 dann ein, wenn sich die Flüssigkeit von der festen Be-

grenzung ablöst. Das bezeichnendste Beispiel sind die freien Flüssigkeitsstrahlen.

Um das darzustellende Gebiet zu beschränken setzen wir stets voraus, daß keine freien Flüssigkeitsoberflächen auftreten sollen. Es sind dann im wesentlichen nur mehr zwei Arten von Randbedingungen zu berücksichtigen, nämlich erstens an festen Begrenzungswänden und zweitens an den Ein- und Austrittsstellen, wozu wir in erweitertem Sinne auch die unendliche Ferne im Fall 2 zählen können.

Die festen Begrenzungswände werden verschieden benannt. Betrachten wir ein Problem vom hydrodynamischen Standpunkte aus, so heißen sie die Leitflächen der Strömung. Legen wir dagegen mehr Bedeutung auf den Vorgang der Wärmeleitung oder des Wärmeüberganges, so nennen wir sie die wärmeabgebenden oder wärmeaufnehmenden Flächen. Auch Heiz- oder Kühlflächen werden sie genannt.

b) Die Randbedingungen an den festen Begrenzungswänden.

Der Randwert der Geschwindigkeit.

Es ist ohne weiteres klar, daß die Geschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Wand keine Komponente senkrecht zur Wand haben kann, daß sie also höchstens parallel zur Wand gerichtet sein kann. Die Versuche weisen aber darauf hin, daß mit größter Wahrscheinlichkeit überhaupt kein Gleiten an der Wand stattfindet, daß also die Geschwindigkeit w_0 der Flüssigkeit an der Wand gleich Null ist. Ist die feste Wand selbst in Bewegung, so ist unter w_0 die Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit zur Wand zu verstehen. (Genauerer über die Grenzschicht vgl. später S. 156.)

Der Randwert der Temperatur.

Während das Geschwindigkeitsfeld naturgemäß in der festen Wand seine Begrenzung findet, ist dies beim Temperaturfeld nie der Fall, denn dieses erstreckt sich stets durch die Oberfläche des festen Körpers hindurch in dessen Inneres und bei einer Wand auch noch auf den Raum jenseits der Wand. Aus mathematischen Gründen ist man jedoch gezwungen, das Temperaturfeld zu begrenzen, indem man es nur innerhalb der Flüssigkeit untersucht und für die Heiz- und Kühlflächen eine bestimmte Temperaturverteilung vorschreibt. Man kümmert sich hierbei nicht darum, durch welche Maßnahmen innerhalb des Körpers oder jenseits der Wand diese Temperaturverteilung erzielt und aufrecht erhalten werden kann.

Es handelt sich jetzt um die Frage: Wenn die Temperatur θ_w der festen Begrenzungswand vorgeschrieben, also bekannt ist, wie groß ist dann der Grenzwert, dem die Flüssigkeitstemperatur mit Annäherung an die Wand zustrebt? Zur Beantwortung dieser Frage erinnern wir uns an die Erörterungen über den Temperatursprung an der Berührungsoberfläche zweier verschiedenartiger Körper (S. 104). Die Berührung zwischen einer Flüssigkeit und ihrer Leitfläche kann als eine vollkommene im Sinne der dortigen Ausführungen gelten. Aus diesem Grunde und weil

auch ein. Haften an der Wand stattfindet, können wir mit Sicherheit annehmen, daß zwischen Flüssigkeiten und Heiz- oder Kühlflächen kein Temperatursprung stattfindet, daß also der Grenzwert der Flüssigkeitstemperatur gleich Θ_w ist.

Randwerte für Druck oder Dichte sind an den festen Begrenzungswänden nicht vorzuschreiben.

e) Die Randbedingungen an der Ein- und Austrittsstelle. Als solche können in Betracht kommen: Der Druck an der Eintrittsstelle und der Gegendruck an der Austrittsstelle, die mittlere Geschwindigkeit im Eintritts- oder Austrittsquerschnitt (meist gegeben durch das Flüssigkeitsvolumen pro Zeiteinheit und die Größe des Eintritts- bzw. Austrittsquerschnittes), die mittlere Temperatur im Eintritts- oder im Austrittsquerschnitt.

Es wäre sehr schwierig vom rein mathematischen Standpunkt aus zu bestimmen, welche von all diesen Randbedingungen gegeben sein müssen, damit sie im Verein mit den Differentialgleichungen (66), (67) und (68) und der Zustandsgleichung (69) ein Problem eindeutig festlegen.

Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir später bei den einzelnen Aufgaben die Frage vom physikalischen Standpunkt aus betrachten und uns fragen: wie müssen die äußeren Bedingungen beschaffen sein, damit ein gedachter Vorgang möglich, aber auch nur in einer Weise möglich ist?

4. Das allgemeine Strömungsproblem.

Der Begriff der äußeren und inneren Ursachen. Im Interesse einer kurzen Ausdrucksweise sollen die beiden in der Überschrift genannten Begriffe eingeführt werden.

Solange wir den Vorgang in seiner Gesamtheit als Vorgang der Bewegung und des Temperatenausgleichs ins Auge fassen, haben wir die Verschiedenheiten in den Randwerten als die einzigen Ursachen für Strömung und Temperaturunterschiede zu betrachten. — Wenn wir dagegen den Bewegungsvorgang für sich allein ins Auge fassen, also das Geschwindigkeitsfeld allein herausgreifen, so erscheinen uns die Randwerte des Druckes und der Geschwindigkeit als die äußeren Ursachen für die Bewegung, äußere Ursachen deswegen genannt, weil sie von außerhalb des Feldes herrühren. Sinngemäß müssen wir dann die verschiedene Wirksamkeit der Schwere auf Massenteile verschiedener Dichte (z. B. infolge von Temperaturunterschieden) als innere Ursachen bezeichnen.

Ganz ebenso liegen die Verhältnisse, wenn wir das Temperaturfeld für sich allein betrachten. Die Verschiedenheit in den Randwerten der Temperatur sind als die äußeren Ursachen, die Kompressions- und die Reibungswärme als die inneren Ursachen für das Auftreten und das Fortbestehen der Temperaturunterschiede im Feld anzusehen. Von mathematischer Seite betrachtet, erscheinen die äußeren Ursachen immer als Randwertangaben, die inneren Ursachen als die entsprechenden Glieder der Differentialgleichung z. B. $\rho \cdot g$ in Gleichung (67) oder $\mu \cdot \text{Diss.-Funkt. } w$ in Gleichung (68).

Das allgemeine Strömungsproblem und seine vereinfachten Sonderfälle.

Jeder zeitlich unveränderliche Strömungsvorgang — sei er aus dem Gebiet der technischen Hydraulik, der theoretischen Hydrodynamik, aus der Strömungslehre der technischen Thermodynamik oder der Lehre vom Wärmeübergang — verläuft so, daß er mit den drei Differentialgleichungen, der Zustandsgleichung und den Randbedingungen in Übereinstimmung ist. Wenn es umgekehrt nicht nötig ist, bei der Lösung solcher Aufgaben immer von dem ganzen, sehr verwickelten Ansatz auszugehen, so rührt dies daher, daß bei den Aufgaben aus den oben genannten Sondergebieten immer ein Teil der inneren und äußeren Ursachen vernachlässigbar klein ist.

Je nach dem Wegfall von inneren oder äußeren Ursachen gelangen wir zu nachstehendem Schema für die Einteilung des allgemeinen Problems in vereinfachte Sonderfälle.

Bewegung:	äußere Ursachen:	} Reine Hydrodynamik.
Temperaturunterschiede:	Temperaturgleichheit:	
Bewegung:	Ruhe:	} Wärmeleitung in festen Körpern ohne Wärmequellen
Temperaturunterschiede:	äußere Ursachen:	
Bewegung:	äußere Ursachen:	} einfache Strömungsvorgänge der techn. Thermodynamik.
Temperaturunterschiede:	innere Ursachen:	
Bewegung:	innere Ursachen:	} Wärmeübergang bei freier Strömung.
Temperaturunterschiede:	äußere Ursachen:	
Bewegung:	äußere Ursachen:	} Wärmeübergang bei aufgezwungener Strömung.
Temperaturunterschiede:	äußere Ursachen:	

B. Die Hydrodynamik.

1. Allgemeines.

a) **Wirbelfreie und wirbelbehaftete Felder.** Die mathematische Physik benützt zur Einteilung der Vektorfelder den Begriff des Linienintegrals.

Wir ziehen innerhalb des Feldes eine geschlossene Kurve s und fassen einen Punkt A dieser Kurve sowie die Größe des Vektors \mathfrak{N} an dieser Stelle ins Auge. Ferner greifen wir von A aus in irgend einem Umlaufsinn das Wegstück $d\mathfrak{s}$ auf der Kurve s heraus.

Wir bilden dann das skalare Produkt aus \mathfrak{N} und $d\mathfrak{s}$, nämlich $|\mathfrak{N}| \cdot |d\mathfrak{s}| \cdot \cos \alpha = (\mathfrak{N}, d\mathfrak{s})$.

Wenn wir von A ausgehend die ganze Kurve s umlaufen, für jedes Wegstück $d\mathfrak{s}$ das skalare Produkt bilden und alle diese skalaren Produkte addieren, so erhalten wir das Linienintegral des Vektors \mathfrak{N} längs der geschlossenen Kurve.

Sein Wert ist

$$\oint (\mathfrak{N}, d\mathfrak{s}).$$

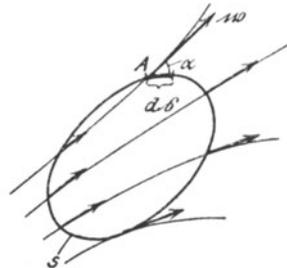


Fig. 48. Kennzeichen der wirbelfreien und der wirbelbehafteten Felder: Linienintegral des Vektors.

Bei wirbelfreien Feldern muß der Wert dieses Linienintegrals für jede Kurve, die man im Feld ziehen kann, gleich Null sein. Ist dies der Fall, dann läßt sich das Feld des Vektors \mathfrak{R} aus dem Feld einer skalaren Größe ψ ableiten, indem man setzt

$$\mathfrak{R} = \text{grad } \psi,$$

wobei ψ der Gleichung

$$\Delta^2 \psi = 0,$$

also den Bedingungen des gewöhnlichen Potentials genügen muß. Man nennt deshalb die wirbelfreien Strömungen auch Potentialströmungen.

Kann im gegenteiligen Fall an irgend einer Stelle des Feldes eine geschlossene Kurve gefunden werden, für welche das Linienintegral nicht verschwindet, so heißt das Feld ein Wirbelfeld und der Wert:

$$\frac{1}{s} \int_{\text{O}} \mathfrak{R}, d\mathfrak{s}$$

des Linienintegrals ist ein Maß für die Stärke des Wirbels. Das Wirbelfeld läßt sich aus keinem skalaren Feld ableiten.

Die Hydrodynamik lehrt nun, daß in den realen, also zähen Flüssigkeiten, sobald sie mit festen Wänden in Berührung sind, keine Potentialströmungen möglich sind. Wie Fig. 49 zeigt, ist es immer möglich, eine geschlossene Kurve zu finden, für welche das Linienintegral nicht verschwindet. In dieser Figur ist ein Teil einer Strömung längs einer festen Wand gezeichnet. Wählt man im Integrationsweg die Strecken AD und BC senkrecht zu den Strömungslinien, so ist das Linienintegral für diese Strecken gleich Null. Wenn Wirbelfreiheit bestehen soll, muß

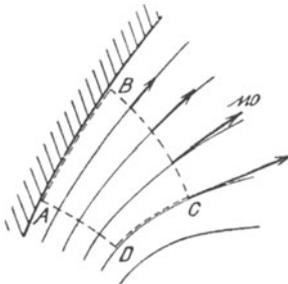


Fig. 49. Wirbel in einer zähen Flüssigkeit in der Nähe der Wand.

$$\int_A^B \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C^D \mathbf{w} \cdot d\mathbf{s} \text{ sein.}$$

Es würde also für die Geschwindigkeit längs der Wand ein Wert größer als Null verlangt werden. Da dies bei zähen Flüssigkeiten wegen des Haftens an der Wand nicht möglich ist, können bei zähen Flüssigkeiten, die an feste Wände grenzen, keine wirbelfreien Strömungen auftreten.

Bei idealen oder reibungsfreien Flüssigkeiten — die allerdings in Wirklichkeit nicht vorkommen — wäre wirbelfreie Strömung möglich.

b) Geordnete und ungeordnete Strömung. In einer klaren Flüssigkeit kann man den Strömungszustand durch fein verteilte, schwebende Teilchen eines festen Körpers sichtbar machen.

Bei genügend langsamer Strömung in gerader Leitung werden die Bahnen der einzelnen Teilchen ungefähr parallele Linien sein und selbst bei Krümmungen in der Leitung werden die Bahnen ein geordnetes System von Kurven bilden.

Bei sehr großen Geschwindigkeiten dagegen werden auch in gerader Leitung die schwebenden Teilchen ganz unregelmäßig durcheinander-

schwirren und wenn es möglich wäre, die Wege der einzelnen Teilchen zu verfolgen, so würde man erkennen, daß sie sich auf ganz unregelmäßigen, sich vielfach durchschlingenden, oft rückläufigen Bahnen bewegen und daß überdies diese Bahnen sich fortgesetzt ändern. Im allgemeinen Sprachgebrauch nennt man dies eine wirbelnde Bewegung.

Den erstgeschilderten Strömungszustand nennt man die geordnete Strömung, die Stromlinienbewegung oder Laminarbewegung, der zweitgeschilderte Strömungszustand heißt die ungeordnete Strömung oder die Turbulenz.

c) Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik. Das Kennzeichen der hydrodynamischen Probleme ist das Fehlen von Temperaturunterschieden im Feld. Damit wirklich keine Temperaturunterschiede im Feld auftreten, müssen sowohl die äußeren als auch die inneren Ursachen dafür fehlen. Es müssen also die Leitflächen längs ihrer ganzen Ausdehnung eine einheitliche Temperatur haben und dieselbe Temperatur muß auch die Flüssigkeit an der Eintrittsstelle besitzen. Ferner müssen in den Differentialgleichungen die Glieder, welche die inneren Ursachen verkörpern, vernachlässigbar klein sein. Dadurch fällt aus dem mathematischen Ansatz die Gleichung (68) weg.

Ferner nimmt man in der Hydrodynamik immer ρ als konstant im ganzen Feld an. Damit wird in der Bewegungsgleichung (67) erstens $\text{div } w = 0$, und zweitens entfällt das Glied mit $\rho \cdot g$, denn in einer Flüssigkeit, die überall gleiche Dichte hat und außerdem keine freie Oberfläche besitzt, kann die Schwerkraft keine Wirkung ausüben.

Wir erhalten also in den beiden Gleichungen:

$$\text{div } w = 0 \quad \dots \dots \dots (70)$$

$$\rho \cdot (w, \text{grad}) w = - \text{grad } p + \mu \cdot \Delta^2 w \quad \dots \dots \dots (71)$$

den mathematischen Ausdruck für die Bewegungsgesetze.

Der mathematische Ansatz für eine Aufgabe aus der Hydrodynamik besteht in den beiden Differentialgleichungen, einer Angabe über Form und Größe der Leitflächen und über die notwendigen Randbedingungen. — Als Lösung einer solchen Aufgabe gelten zwei Gleichungen, welche p und w als Funktionen des Ortes wiedergeben.

Die heutige Mathematik besitzt jedoch kein Verfahren, um diese Gleichungen wirklich zu finden, also die Aufgabe zu lösen. Der Grund liegt darin, daß Gleichung (71) wegen des Gliedes $(w, \text{grad}) w$ eine in w quadratische Gleichung ist, so daß also die allgemeine Lösung nicht mehr aus Teillösungen zusammengesetzt werden darf.

Die vollständige Ausnützung des mathematischen Ansatzes ist also nicht möglich. Aber wir besitzen im Prinzip der Ähnlichkeit ein Hilfsmittel, welches uns gestattet, aus diesem Ansatz auch ohne Lösung, eine Reihe wichtiger Erkenntnisse abzulesen.

2. Das Prinzip der Ähnlichkeit.

a) Strömungsvorgänge mit ähnlichen Randbedingungen. Wir vergleichen zwei (oder mehrere) Strömungen, die gewissen einschränkenden Bedingungen hinsichtlich ihrer Randwerte unterworfen sind und die wir

kurz als das ungestrichene und das gestrichene System unterscheiden wollen. Diese einschränkende Bedingungen sind:

1. Beide Strömungen sind von der gleichen Art — also z. B. beides sind Strömungen durch gerade zylindrische Rohre (Fig. 50), oder beides sind Strömungen durch Rohrkrümmen von einem viertel Bogen (Fig. 51). Dann gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} l_0' &= (v_1)_0 \cdot l_0 \\ l_1' &= (v_1)_1 \cdot l_1 \\ \dots &= \dots \\ l_i' &= (v_1)_i \cdot l_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (72)$$

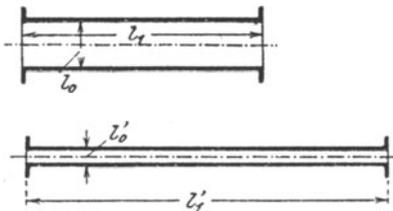


Fig. 50. Affine Räume (Strömungen gleicher Art).

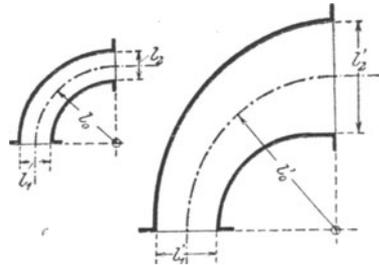


Fig. 51. Affine Räume (Strömungen gleicher Art).

2. Diese erste Bedingung soll nun noch weiter eingeschränkt werden, indem die durchflossenen Räume nicht nur affin, sondern geometrisch ähnlich sein sollen. Die v_1 müssen also alle unter sich gleich sein und es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \dots &= \dots \\ l_i' &= v_1 \cdot l_i \\ \dots &= \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (73a)$$

3. Die Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt soll bei beiden Strömungen so gegeben sein, daß für ähnlich gelegene Stellen dieser Querschnitte die Beziehung gilt

$$w' = v_w \cdot w \dots \dots \dots (73b)$$

Diese Gleichung verlangt, daß die Geschwindigkeiten an den sich entsprechenden Stellen gleiche Richtung besitzen und daß ihre absoluten Beträge in einem konstanten Verhältnis stehen. Da wir in beiden Systemen zähe Flüssigkeiten annehmen, so wird an den festen Begrenzungswänden sowohl w als auch w' gleich Null.

4. Die Randwerte des Druckes werden wir in erster Linie so wählen, daß für ähnlich gelegene Stellen der Berandung die Beziehung gilt, $p' = v_p \cdot p$. Der Umstand, daß in den Differentialgleichungen nicht der Wert des Druckes selbst vorkommt, sondern nur der Druckgradient, besagt, daß der Strömungszustand nur vom Druckgefälle und nicht vom Absolutwert des Druckes abhängt. (Bei Gasen macht sich der Druck allerdings durch einen veränderten Wert der Dichte ρ bemerkbar.) Wir können deshalb, wenn wir mit p_c' eine im ganzen Feld konstante

Drucksteigerung bezeichnen, die Randbedingung für den Druck erweitern zu:

$$p' + p_c' = v_p \cdot p \dots \dots \dots (73c)$$

5. Die Stoffwerte ρ und μ sollen im ganzen Feld konstant sein. Es gelten deshalb die Gleichungen

$$\rho' = v_\rho \cdot \rho \dots \dots \dots (73d)$$

$$\mu' = v_\mu \cdot \mu \dots \dots \dots (73e)$$

und zwar gelten diese Gleichungen im Gegensatz zu den Gleichungen (73a bis 73c) nicht nur an der Berandung, sondern auch im ganzen Inneren des Feldes.

Zwei oder mehrere Systeme, welche die Bedingungen 72 und 73b—e erfüllen, bilden eine Klasse von Strömungen gleicher Art. Aus dieser Klasse greifen wir alle jene Felder heraus, die von geometrisch ähnlichen Flächen begrenzt sind, für welche also statt der Gleichung (72) die engere Bedingung (73a) gilt. Diese Felder bilden dann eine Gruppe von ähnlich berandeten Strömungen.

Trotz dieser Ähnlichkeit der Randwerte, werden die Felder in ihrem Innern und an der Austrittsstelle noch ganz verschiedenen Geschwindigkeits- und Druckverlauf aufweisen; wenigstens haben wir vorerst noch kein Recht anzunehmen, daß sie auch im Innern ähnlich seien.

Die Frage, unter welchen Bedingungen die Gleichungen (73b u. c) auch im ganzen Inneren gelten, werden wir im nächsten Absatz beantworten. Wir werden dort zu entscheiden haben, ob die Verhältnisse v_1, v_w, v_p, v_ρ und v_μ und der konstante Druck p_c beliebig gewählt werden dürfen oder ob zwischen ihnen irgendwelche Beziehungen bestehen müssen.

b) Strömungsvorgänge mit vollständiger Ähnlichkeit. Sind die Felder von w und p in ihrer ganzen Ausdehnung ähnlich, so sind sie durch dieselben Funktionen F_w und F_p zwischen den Raumkoordinaten und den Parametern μ und ρ darstellbar. Dies setzt aber umgekehrt voraus, daß die Differentialgleichungen, deren Lösung sie sind, identisch sind.

Für das „ungestrichene“ System gelten die Differentialgleichungen (70) und (71) in der auf S. 149 geschriebenen Form. Für das „gestrichene“ System gelten dieselben beiden Gleichungen, jedoch mit den gestrichenen Größen. Setzt man deren Werte mit Hilfe der 5 Gleichungen (73a—e) ein, so ergeben sich für das gestrichene System die Gleichungen:

$$\frac{v_w}{v_1} \cdot \text{div } w = 0 \dots \dots \dots (70^*)$$

$$\frac{v_\rho \cdot v_w^2}{v_1} \cdot \rho \cdot (w, \text{grad}) w = \frac{v_p}{v_1} \cdot (-\text{grad } p) + \frac{v_\mu \cdot v_w}{v_1^2} \cdot \mu \cdot \Delta w \dots (71^*)$$

Sollen die beiden Gleichungssysteme identisch sein, so dürfen sich die entsprechenden Gleichungen nur durch beiderseits gleiche Faktoren unterscheiden.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\frac{v_w}{v_1} = 0$$

Diese Gleichung liefert also keine Bedingung für ν_w und ν_1 .

In der Bewegungsgleichung lautet der beiderseits gleiche Faktor:

$$\frac{\nu_\rho \cdot \nu_w^2}{\nu_1} = \frac{\nu_p}{\nu_1} = \frac{\nu_\mu \cdot \nu_w}{\nu_1^2} \dots \dots \dots (74)$$

Aus dieser Doppelgleichung können wir die nachstehenden 3 Beziehungen ablesen:

$$\frac{\nu_p}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_\rho \cdot \nu_w^2} = 1 \dots \dots \dots (75a)$$

$$\frac{\nu_\rho \cdot \nu_w \cdot \nu_1}{\nu_\mu} = 1 \dots \dots \dots (76a)$$

$$\frac{\nu_p}{\nu_1} \cdot \frac{\nu_1^2}{\nu_\mu \cdot \nu_w} = 1 \dots \dots \dots (77a)$$

Wir können diesen Beziehungen noch eine andere Form geben, indem wir auf die Bedeutung der Werte ν aus den Gleichungen (73) zurückgreifen. Zugleich verallgemeinern wir auf mehr als zwei Systeme:

$$\text{grad } p \cdot \frac{l_0}{\rho \cdot w^2} = \text{grad } p' \cdot \frac{l_0'}{\rho' \cdot w'^2} = \text{grad } p'' \cdot \frac{l_0''}{\rho'' \cdot w''^2} = \dots = \text{Eu} \dots (75b)$$

$$\frac{\rho \cdot w \cdot l_0}{\mu} = \frac{\rho' \cdot w' \cdot l_0'}{\mu'} = \frac{\rho'' \cdot w'' \cdot l_0''}{\mu''} = \dots = \text{Re} \dots (76b)$$

$$\text{grad } p \cdot \frac{l_0^2}{\mu \cdot w} = \text{grad } p' \cdot \frac{l_0'^2}{\mu' \cdot w'} = \text{grad } p'' \cdot \frac{l_0''^2}{\mu'' \cdot w''} = \dots = \text{La} \dots (77b)$$

Hierbei sind Eu (= Euler), La (= Lagrange) und Re (= Reynolds) unbenannte Zahlenwerte.

c) Die drei Kenngrößen Eu, La und Re. Die drei Gleichungen (75 b bis 77 b) sind immer erfüllt, wenn zwei oder mehrere Systeme einander vollständig ähnlich sind, oder mit anderen Worten: Für alle unter sich vollständig ähnlichen Systeme sind die Größen Eu, La und Re drei konstante Größen. Umgekehrt ist es nicht nötig, alle drei Gleichungen zu prüfen, wenn man untersuchen will, ob Felder, die ähnlich berandet sind, auch im Innern ähnlich sind. Dies erhellt aus nachstehenden Überlegungen.

Vor allem hätten wir aus der Doppelgleichung nur zwei Beziehungen ableiten dürfen. Da die drei Beziehungen (75) bis (77) alle drei gleichwertig sind, ist es der Willkür überlassen, welche von ihnen wir jetzt ausscheiden. Wir entscheiden uns für das Weglassen von Gleichung (77).

Es verbleibt uns noch die Beantwortung der Frage, ob nicht schon eine der beiden Bedingungen (75) oder (76) zum Nachweis der vollständigen Ähnlichkeit genügt:

Innerhalb einer Gruppe von ähnlich berandeten Systemen können wir Untergruppen von Systemen vollständiger Ähnlichkeit bilden. Jede solche Untergruppe ist dann charakterisiert oder gekennzeichnet durch ihr zusammengehöriges Wertepaar Eu und Re. Wenn nun beim Übergang von einer Untergruppe zu einer anderen sich die beiden Kenn-

größen Eu und Re immer so ändern, daß sie einander eindeutig zugeordnet bleiben, dann ist durch die eine Kenngröße auch immer die andere mitbestimmt. Es genügt dann zum Nachweis der vollständigen Ähnlichkeit zweier ähnlich berandeter Systeme die Gleichheit einer Größe in beiden Systemen.

Die experimentelle Forschung hat nun Strömungsvorgänge untersucht, hat die Größen: $\text{grad } p$, ϱ , w , l_0 und μ gemessen und aus ihnen die Werte

$$\text{grad } p \cdot \frac{l_0}{\varrho \cdot w^2} = Eu \text{ und } \frac{\varrho \cdot w \cdot l_0}{\mu} = Re$$

berechnet. Dabei hat sich gezeigt, daß tatsächlich eine eindeutige Zuordnung zwischen Eu und Re besteht, die man z. B. in einem Schaubild durch einen Kurvenzug oder in einer Rechnung durch eine Interpolationsformel darstellen kann (vgl. später S. 157).

Es besteht also eine Funktion zwischen den beiden Kenngrößen die wir die Kennfunktion nennen wollen und die wir in den beiden Formen

$$Eu = F_{Eu}(Re) \text{ und } Re = F_{Re}(Eu) \dots \dots \dots (78a)$$

schreiben können. Da die Größe Re nur eine der beiden abhängigen Veränderlichen (p und w) enthält, so ist es für Rechnung und Versuch zweckmäßiger nicht Eu sondern Re als Kenngröße zu wählen. Re ist die sog. Reynoldssche Zahl, so genannt nach Osborne Reynolds, der das Ähnlichkeitsprinzip aufgestellt und auch selbst experimentell verwertet hat.

Die Göttinger Modellversuchsanstalt macht bei ihren Versuchen von dem Prinzip der Ähnlichkeit weitgehendsten Gebrauch. Da es sich bei den Versuchen für die Flugtechnik immer nur um Luft von normaler Temperatur und Atmosphärendruck handelt, haben μ und ϱ immer denselben Wert. Man nimmt deshalb in der Flugtechnik nur das Produkt $w \cdot l_0$ als Charakteristikum und hat dafür die Bezeichnung „Kennwert“ eingeführt. Dieser Bezeichnung habe ich das Wort „Kenngröße“ nachgebildet. Der Kennwert ist demnach nur ein spezialisierter Fall der Kenngröße.

Das Prinzip der Ähnlichkeit lehrt also, daß für alle ähnlich berandeten Probleme die Gestalt des Geschwindigkeitsfeldes und die Gestalt des Druckfeldes Funktionen der Größe Re sind.

Handelt es sich nicht um ähnlich berandete Probleme, sondern um Probleme der gleichen Art, so treten in den Kennfunktionen noch die Größen l_1/l_0 , l_2/l_0 — l_i/l_0 als weitere Argumente zu Re hinzu.

d) Druckverlust und Widerstand. Das technische Interesse richtet sich meist nicht auf die Gestalt des Geschwindigkeits- und des Druckfeldes, sondern auf den Druckverlust, der in einer Leitung stattfindet, oder auf den Widerstand, den ein Körper bei der Bewegung in einer Flüssigkeit erfährt.

Der Druckverlust.

Wenn wir in die Gleichung (78a, erste Form) den Wert für Eu einsetzen, so erhalten wir sofort

$$\text{grad } p = \frac{\varrho \cdot w^2}{l_0} \cdot F_{Eu}(Re) \dots \dots \dots (78b)$$

Für den Druckunterschied an ähnlich gelegenen Stellen A und B gilt

$$\frac{p_A - p_B}{l_0} = \frac{\rho \cdot w^2}{l_0} \cdot F_{Eu}(Re) \dots \dots \dots (78c)$$

Der Strömungswiderstand W.

Der Ausdruck grad p in Gleichung (71) ist von der

$$\text{Dimension: } \frac{1}{\text{Länge}} \cdot \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^3};$$

stellt also zugleich eine Kraft pro Raumeinheit dar. Wir können deshalb in der Doppelgleichung (74) statt

$$\frac{v_p}{v_1} \text{ die Größe } \frac{v_w}{v_1^3}$$

eingeführen und gelangen dann durch eine Wiederholung der ganzen Betrachtung zu der Gleichung

$$\frac{W}{l_0^3} = \frac{\rho w^2}{l_0} \cdot F_{He}(Re) \dots \dots \dots (78d)$$

oder zur Gleichung

$$\frac{W}{l_0^3} \cdot \frac{l_0}{\rho \cdot w^2} = He = F_{He}(Re);$$

darin ist He (= Helmholtz) eine neue Kenngröße.

Bemerkung: Hätten wir oben, als wir von den drei Beziehungen (75) bis (77) die eine willkürlich ausschalteten, nicht (77), sondern (75) ausgeschaltet, so wären wir zu den nachstehenden Gleichungen gelangt:

$$La = F_{La}(Re) \dots \dots \dots (79a)$$

$$\text{grad } p = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot F_{La}(Re) \dots \dots \dots (79b)$$

$$\frac{p_A - p_B}{l_0} = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot F_{La}(Re) \dots \dots \dots (79c)$$

$$\frac{W}{l_0^3} = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot F_{Ki}(Re) \dots \dots \dots (79d)$$

In (79d) ist $\frac{W}{l_0^3} \cdot \frac{l_0^2}{\mu \cdot w} = Ki$ (= Kirchhoff) wieder eine neue Kenngröße.

Wenn auch die Gestalt der Funktionen F nur durch den Versuch völlig zu bestimmen sind, so ist es doch möglich, noch einige Eigenschaften der Funktionen auf rein theoretischem Wege zu ergründen und damit dem Versuch vorzuarbeiten. Es bezieht sich dies auf das Verhalten der Funktionen für äußerst kleine und äußerst große Werte von Re.

3. Die vereinfachten Strömungszustände.

a) Der Fall geringer Trägheitswirkung. Die Hauptschwierigkeit für das Lösen des Differentialgleichungssystemes (70) und (71) besteht in dem quadratischen Charakter des Ausdruckes $(w, \text{grad } w)$. Gerade wegen dieses quadratischen Charakters aber nimmt der Einfluß des

Gliedes $\rho \cdot (w, \text{grad}) w$ mit abnehmender Geschwindigkeit sehr rasch ab und wir können uns eine so langsame Strömung denken, daß der Einfluß des Trägheitsgliedes ganz verschwindet und die Strömung nur mehr unter dem Einfluß der Zähigkeit steht. Für sehr kleine Werte von w und damit von $(w \cdot l_0 \cdot \rho / \mu = \text{Re})$ vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem auf

$$\text{div } w = 0 \dots \dots \dots (70)$$

$$\text{grad } p = \mu \cdot \Delta^2 w \dots \dots \dots (71a)$$

Dies sind die Gleichungen der sog. langsamen Bewegung. Prandtl hat dafür den noch bezeichnenderen Ausdruck „schleichende Bewegung“ eingeführt (vgl. Enzykl. d. math. Wiss. IV. 15. S. 73)

Für diese Gleichungen ist es möglich gewesen, in besonders einfachen Fällen die vollständige mathematische Lösung zu finden. Wir wollen jedoch diese Lösungen nicht besprechen, sondern uns den Aussagen des Ähnlichkeitsprinzipes über diesen Strömungszustand zuwenden.

Die Doppelgleichung (74) reduziert sich auf die einfache Gleichung

$$\frac{v_p}{v_1} = \frac{v_\mu \cdot v_w}{v_1^2}$$

oder
$$\frac{\text{grad } p \cdot l_0^2}{\mu \cdot w} = \text{Const}_1 \dots \dots \dots (a)$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit

$$\frac{\mu}{\rho \cdot w \cdot l_0} = \frac{1}{\text{Re}}$$

und erhalten:

$$\frac{\text{grad } p \cdot l_0}{\rho \cdot w^2} = \text{Eu} = \text{Const}_1 \frac{1}{\text{Re}} \dots \dots \dots (80a)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß für keine Werte der Kenngröße Re die Kennfunktion eine gleichseitige Hyperbel ($\text{Eu} \cdot \text{Re} = \text{Const}_1$) ist. Für die schleichende Bewegung gilt deshalb

$$\text{grad } p = \frac{\rho \cdot w^2}{l_0} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \text{Const}_1 \dots \dots \dots (80b)$$

und
$$\frac{W}{l_0^3} = \frac{\rho w^2}{l_0} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \text{Const}_2 \dots \dots \dots (80c)$$

Ganz entsprechende Gleichungen lassen sich auch mit der Kenngröße La aufstellen. In der obigen Gleichung (a) ist die linke Seite nichts anderes als die Kenngröße La . Es gilt also:

$$\text{La} = \text{Const}_1 \dots \dots \dots (81a)$$

$$\text{grad } p = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot \text{Const}_1 \dots \dots \dots (81b)$$

$$\frac{W}{l_0^3} = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot \text{Const}_2 \dots \dots \dots (81c)$$

b) Der Fall geringer Zähigkeit. Für sehr große Geschwindigkeiten wird — wiederum wegen des quadratischen Charakters von $\rho \cdot (w, \text{grad}) w$ — der Einfluß der Trägheit sehr rasch wachsen und es wird darum

die Zähigkeit immer mehr zurücktreten im Vergleich zur Trägheit. Für sehr große Werte von w und damit auch von Re können wir das Differentialgleichungssystem (70) und (71) vereinfachen auf

$$\text{div } w = 0 \quad \dots \dots \dots (70)$$

$$\text{grad } p = - \varrho \cdot (w, \text{grad}) w \quad \dots \dots \dots (71 \text{ b})$$

Dies sind die Gleichungen der idealen oder reibungsfreien Flüssigkeit. Die Lösungen, die wir aus ihnen gewinnen könnten, würden Strömungen ergeben, die mit der Bedingung des Haftens an der Wand, also mit der Randbedingung nicht in Einklang zu bringen sind. Man gelangt jedoch zu einer guten Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man diejenige Potentialströmung aufsucht, welche bei einer reibungsfreien Flüssigkeit auftreten würde, und dann nach dem Vorschlage von Prandtl annimmt, daß sich längs der Leitflächen eine dünne Flüssigkeitsschicht befindet, innerhalb deren die Geschwindigkeit vom Wert der Potentialströmung auf den Wert Null sinkt.

Die Annahme dieser Prandtlschen Grenzschicht ist keineswegs eine rein willkürliche Annahme. Die Beobachtung von Strömungen hat vielmehr ergeben, daß dieser rasche Geschwindigkeitsabfall in unmittelbarer Nähe von Körperoberflächen tatsächlich auftritt. Wir können in dieser Lehre von den Grenzschichten eine neue, aber durch genauere Kenntnis verfeinerte Auffassung der alten Lehre von der „adhärierenden Schicht“ erblicken.

Genauer über diese Grenzschicht vergleiche den Aufsatz über Flüssigkeitsbewegung von Prandtl im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. 4. Hier sei nur noch hervorgehoben, daß die Dicke dieser Grenzschicht eine Funktion der Kenngröße Re ist.

Für eine Strömung, welche der vereinfachten Bewegungsgleichung (71 b) genügt, geht die Doppelgleichung (74) in die einfache Gleichung

$$\frac{\nu_p}{\nu_1} = \frac{\nu_\varrho \cdot \nu_w^2}{\nu_1} \text{ über. Aus dieser folgt: } \frac{\text{grad } p \cdot l_0}{\varrho \cdot w^2} = Eu = \text{Const}_3 \dots (b)$$

Die Kenngröße Eu ist also konstant $\dots \dots \dots (82a)$

Ferner ist

$$\text{grad } p = \frac{\varrho \cdot w^2}{l_0} \cdot \text{Const}_3 \dots \dots \dots (82b)$$

$$\text{und } \frac{W}{l_0^3} = \frac{\varrho \cdot w^2}{l_0} \cdot \text{Const}_4 \dots \dots \dots (82c)$$

Durch Multiplikation der Gleichung (b) mit Re ergibt sich

$$La = \text{Const}_3 \cdot Re \dots \dots \dots (83a)$$

ferner gilt: $\text{grad } p = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot \text{Const}_3 \cdot Re \dots \dots \dots (83b)$

und: $\frac{W}{l_0^3} = \frac{\mu \cdot w}{l_0^2} \cdot \text{Const}_4 \cdot Re \dots \dots \dots (83c)$

c) Der allgemeine Fall der gleichzeitigen Wirkung von Zähigkeit und Trägheit. Auf Grund der vorstehenden Erwägungen über die ver-

einfachten Strömungszustände können wir uns, auch ohne Versuch, ein ungefähres Bild von dem Verlauf der Funktion $Eu = F(Re)$ machen.

Für sehr kleine Werte von Re ist die Kennfunktion durch die gleichseitige Hyperbel ($Eu \cdot Re = \text{const}_1$) darstellbar (vgl. Fig. 52). Für sehr

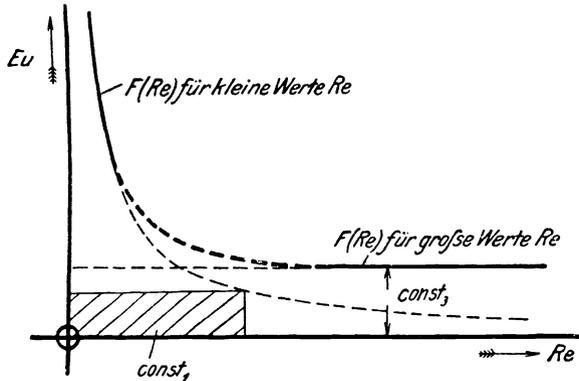


Fig. 52. Verlauf der Funktion $Eu = F(Re)$.

große Werte von Re fällt die Kurve mehr und mehr mit der Geraden $Eu = \text{const}_3$ zusammen.

Der Übergang vom einen zum anderen Grenzfall wird ungefähr so sein, wie er in Fig. 52 durch die gestrichelte Linie dargestellt ist. Der genauere Verlauf ist nur durch den Versuch zu ermitteln.

Ganz entsprechend liegen die Verhältnisse bei der anderen Kennfunktion $La = F(Re)$. Vgl. Fig. 53.

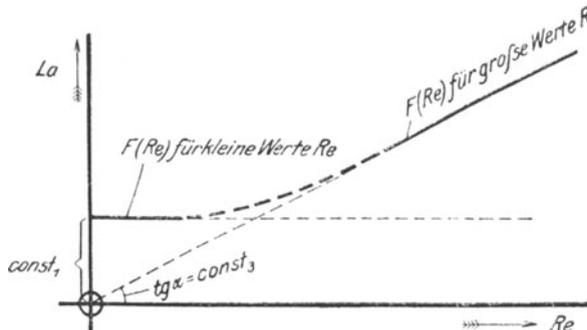


Fig. 53. Verlauf der Funktion $La = F(Re)$.

4. Das Prinzip der Ähnlichkeit als Grundlage für Versuche.

a) Allgemeines. Der Wert des Ähnlichkeitsprinzipes liegt hauptsächlich darin, daß es die leitenden Gesichtspunkte liefert für ein rationelles Anlegen, Durchführen und Auswerten von Versuchen. Untersuchungen, welche mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen durch-

geführt werden können, zeichnen sich durch eine Vielseitigkeit der Ergebnisse bei verhältnismäßig geringer Zahl von Versuchsreihen aus. Freilich ist der Nutzen, den die Praxis aus dem Prinzip der Ähnlichkeit ziehen kann, zur Zeit noch gering, weil sich die technische Forschung bei der Durchführung ihrer Versuche dieses Hilfsmittels leider in viel zu geringem Maße bedient hat. Nur die Hydrodynamik macht hier eine Ausnahme. Die Erfolge, die sie bei ihren Versuchen erzielt hat, sollte ein Anlaß sein, das Prinzip auch bei Versuchen auf anderen Gebieten heranzuziehen. Es soll deshalb nachstehend der Grundgedanke der hydrodynamischen Versuche erörtert werden.

Ohne das Prinzip der Ähnlichkeit läßt sich aus den Differentialgleichungen (70) und (71) nur das eine herauslesen, daß die Gestalt des Geschwindigkeits- und des Druckfeldes von der Größe der linearen Abmessungen, von den Randwerten der Geschwindigkeit und des Druckes und von der physikalischen Natur der strömenden Flüssigkeit — gekennzeichnet durch die Stoffwerte ρ und μ — abhängt. Aber wir erkennen nicht wie diese Abhängigkeit beschaffen ist und um dies zu finden, sind wir auf den Versuch angewiesen.

Beschränken wir uns vorerst auf Felder in geometrisch ähnlichen Räumen, so handelt es sich hierbei um die Bestimmung einer Funktion mit vier Argumenten $—l_0, w, \rho$ und μ —, und dies ist eine äußerst unübersichtliche und umständliche Aufgabe. Das Prinzip der Ähnlichkeit hilft nun, indem es zeigt, daß die Strömungsvorgänge nicht von den vier Größen im einzelnen abhängen, sondern nur von ihrer Zusammenstellung

$$\frac{w \cdot l_0 \cdot \rho}{\mu} = Re,$$

die die Reynoldsschen Zahl heißt.

Am besten erkennt man die Vereinfachung, wenn man versucht, die Versuchsergebnisse zeichnerisch darzustellen. Während man ohne das Prinzip der Ähnlichkeit eine Funktion mit vier Argumenten darstellen müßte, was auf einem Blatt gar nicht möglich wäre, genügt bei Verwendung dieses Prinzipes das Zeichnen einer einzigen Kurve, nämlich der Kennfunktion.

Die Art und Weise, wie das Prinzip bei experimentellen Untersuchungen sich verwenden läßt, wollen wir an einem möglichst einfachen Strömungsvorgang zeigen.

Wir denken uns eine gleichmäßig dahinströmende Luftmasse, deren Strömungsgeschwindigkeit w_0 sei. In diese Strömung bringen wir einen Körper, der Einfachheit halber eine Kugel vom Durchmesser d . Dann wird die Strömung auf die Kugel eine Kraft W ausüben und wir wollen uns die Aufgabe stellen, das Gesetz dieser Kraft durch den Versuch zu finden.

Aus der Gleichung (78d) ersehen wir, daß es sich hierbei um die Bestimmung der Kennfunktion $F_{Re}(Re)$ handelt.

Wir werden uns zunächst mit Hilfe einer geeigneten Versuchseinrichtung eine solche Strömung herstellen und in ihrer Mitte eine Kugel befestigen. Dann messen wir die Größen w_0 , d und W und entnehmen

die Werte ρ und μ aus der physikalischen Literatur. Aus diesen Werten berechnen wir die beiden Kenngrößen

$$\frac{w_0 \cdot d \cdot \rho}{\mu} = \text{Re}_1 \text{ und } \frac{W}{d^3} \cdot \frac{d}{\rho \cdot w^2} = \text{He}_1.$$

Der Versuch ordnet also die beiden Zahlenwerte einander zu im Sinne der Gleichung

$$\text{He}_1 = F_{\text{He}} \cdot (\text{Re}_1) \text{ oder } \frac{W}{d^3} \cdot \frac{d}{\rho \cdot w^2} = F_{\text{He}} \left(\frac{w \cdot d \cdot \rho}{\mu} \right).$$

Dieser eine Versuch gibt uns aber den Widerstand nicht nur für den einen untersuchten Fall, sondern auch für alle mit diesem ähnlichen Fälle.

Wir nehmen z. B. für eine zweite Strömung an: $\rho' = \rho$, $\mu' = \mu$, aber $w' = \frac{1}{2} w$ und $d' = 2d$, dann ist $\text{Re}' = \text{Re}$, also auch $\text{He}' = \text{He}$ und es wird:

$$\frac{W'}{8d^3} \cdot \frac{2d}{w'^2} = \frac{W}{d^3} \cdot \frac{d}{\rho \cdot w^2} \text{ oder } W' = W.$$

Dieser eine Versuch gibt uns also Aufschluß über die ganze Untergruppe der vollständig ähnlichen Strömungen.

Um zu anderen Werten Re_2 , Re_3 usw. zu gelangen, brauchen wir nur in unserer Versuchseinrichtung die Strömungsgeschwindigkeit stufenweise zu steigern. Durch Messung dieser Geschwindigkeit und Berechnung der Kenngrößen gelangen wir so zu neuen zusammengehörigen Wertepaaren He_2 und Re_2 , ..., He_i und Re_i , ... usw. und wir bestimmen damit punktweise die ganze Kennfunktion.

Da nun bei jedem Werte R_i zugleich die ganze Untergruppe der zugehörigen ähnlichen Probleme mit untersucht ist, so ist durch diese eine Versuchsreihe das Widerstandsgesetz für die ganze Gruppe der ähnlich berandeten Probleme untersucht, also für alle Strömungsgeschwindigkeiten, alle Kugeldurchmesser und alle Arten von Flüssigkeiten (und zwar tropfbare Flüssigkeiten und Gase).

Es gibt eine Kontrolle für diese Schlußfolgerungen; sie besteht in einer Wiederholung der Versuche mit Kugeln von anderem Durchmesser oder mit anderen Flüssigkeiten. Fallen dann die Werte, die man aus diesen Versuchsreihen für die Kennfunktion gewinnt, vollständig mit den Werten aus der ersten Versuchsreihe zusammen, so ist damit der Beweis erbracht, daß wirklich nicht die Größen w_0 , d , ρ und μ im einzelnen, sondern nur ihre Zusammenstellung $\frac{w_0 \cdot d \cdot \rho}{\mu}$ maßgebend ist. Soweit

bisher solche Versuche mit verschiedenen Körpern angestellt worden sind, haben sie die Richtigkeit der Ähnlichkeitsbetrachtungen erwiesen. Über die Versuche, die in der Göttinger Versuchsanstalt mit Kugeln gemacht wurden, siehe Zeitschr. f. Motorluftschiffahrt u. Flugtechnik, München, Jahrg. 1914, S. 140.

Wir können hier eine kurze Bemerkung einschalten über die Veränderlichkeit der vier Bestimmungsgrößen w_0 , d , ρ und μ . Die Größen

w_0 und d können die Zahlenreihe stetig durchlaufen; bei den Stoffwerten μ und ρ müssen wir unterscheiden zwischen tropfbaren Flüssigkeiten und Gasen. Bei den tropfbaren Flüssigkeiten sind die Stoffwerte an getrenntliegende Zahlenwerte gebunden. Bei Gasen gilt diese Einschränkung nur für die Zähigkeit, die Dichte kann dagegen die Zahlenreihe stetig durchlaufen, wie nachstehende Überlegung zeigt. Nach Gleichung (73c): $p' + p'_c = \nu_p \cdot p$ kann man dem Druckfeld einen räumlich konstanten Druck p'_c überlagern, ohne damit die Ähnlichkeit zu stören.

Da dieser Überdruck p'_c die Zahlenreihe stetig durchlaufen kann, so kann damit bei Gasen der Dichte ρ jeder beliebige Wert gegeben werden. Die Zähigkeit μ wird dabei nicht beeinflusst, weil bei Gasen nach den Lehren der kinetischen Gastheorie und nach Versuchen die Zähigkeit innerhalb weiter Grenzen vom Druck unabhängig ist.

Bei Versuchen mit Körpern, welche mehr als eine Abmessung besitzen, müssen wir uns entweder nur auf geometrisch ähnliche Körper beschränken, oder wir müssen die Kennfunktionen erweitern auf die Form

$$F\left(\frac{w \cdot l_0 \cdot \rho}{\mu}, \frac{l_1}{l_0}, \dots, \frac{l_i}{l_0}, \dots\right).$$

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen über die Maßeinheiten bei Zahlenrechnungen.

In der Hydrodynamik ist es üblich mit der Sekunde als Zeiteinheit zu rechnen und nicht wie in der Thermodynamik mit der Stunde. Wir führen deshalb die Strömungsgeschwindigkeit in der Sekunde ein und bezeichnen sie mit ω . Es gilt dann

$$\omega = \frac{1}{3600} \cdot w.$$

Den Druck messen wir in kg/m^2 ebenso wie in der Thermodynamik. Wir gewinnen damit zugleich den Vorteil, daß derselbe Zahlenwert auch den Druck in m/m Wassersäule angibt.

Die Massendichte ρ ist von der Dimension

$$\frac{\text{Masseneinheit}}{\text{Raumeinheit}} \text{ also } \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}^4}$$

und die Zähigkeit μ von der Dimension $\frac{\text{kg} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2}$.

Die Längen l gelten natürlich immer in Metern.

Die Dimension des Kennwertes $Re = \omega \cdot d \cdot \rho \cdot \mu^{-1}$ ist dann

$$\frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \text{m} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}^4} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{sec}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{sec}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^4 \cdot \text{sec}^2}$$

Es ist also Re eine dimensionslose Größe, wie überhaupt sämtliche Kenngrößen dimensionslos sind.

b) Die Strömung senkrecht gegen einen Zylinder. In der Göttinger Modellversuchsanstalt sind von Dr. ing. O. Föppl Versuche durch-

geführt worden, um den Widerstand zu bestimmen, den ein gespannter Draht erfährt, wenn er quer, — also senkrecht zu seiner Achse — durch die Luft bewegt wird.

Aus der Veröffentlichung dieser Versuche in der Zeitschr. f. Motorluftschiffahrt und Flugtechnik 1910, S. 261 und 1912, S. 66 ist das nachstehende Schaubild entnommen.

Entsprechend dem Gebrauch der Aerodynamik ist als Abszisse nicht die Kenngröße Re , sondern der Kennwert $\omega_0 \cdot d$ (vgl. S. 153) und als Ordinate die Größe

$$\frac{W}{l \cdot d} \cdot \frac{1}{\rho \cdot \omega^2} = He \cdot \frac{d}{l}$$

aufgetragen.

Durch eine einfache Dehnung der Maßstäbe auf den Achsen läßt sich daraus die Beziehung $He = F_{He} (Re)$ ableiten. Der Vergleich mit Fig. 52

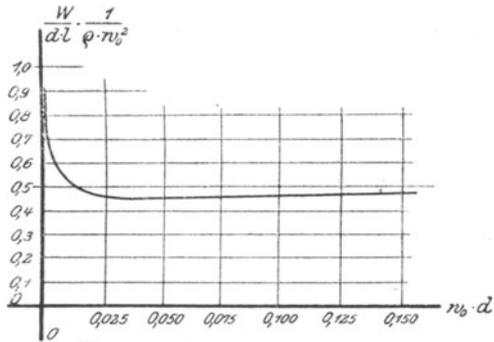


Fig. 54. Verlauf der Funktion

$$\frac{W}{d \cdot l} \cdot \frac{1}{\rho \cdot \omega_0^2} = F(\omega_0 \cdot d).$$

zeigt eine fast völlige Übereinstimmung zwischen beiden Figuren, ein Beweis für die Richtigkeit des Prinzipes der Ähnlichkeit und für die Richtigkeit unserer rein theoretisch gewonnenen Voraussagen über die Strömungen mit geringer Trägheitswirkung und mit geringer Zähigkeit.

e) Die Strömung im geraden Rohr. Wir denken uns ein gerades Rohr von kreisförmigem Querschnitt, welches in die Wandung eines großen Gefäßes eingesetzt ist.

Die Flüssigkeit im Gefäß wird in genügender Entfernung von der Rohroffnung in Ruhe sein. Innerhalb des Rohres wird sich in größerem Abstand vom Rohranfang ein Strömungszustand einstellen, der von einem Querschnitt zum nächsten sich nicht mehr ändert. Im großen Gefäß in der Nähe des Rohranfanges und in den ersten Teilstrecken des Rohres selbst findet der Übergang von der Ruhe zur gleichbleibenden Strömung statt. Es lassen sich also bei der Strömung im Rohr zwei Gebiete unterscheiden, erstens der Rohranfang, das ist die Rohrstrecke, auf der sich noch die Störung durch die Einstromstelle bemerkbar macht und die freie Rohrstrecke, bei der sich der Strömungszustand nicht mehr ändert.

Die Aussagen des Ähnlichkeitsprinzipes.

Für den Druckverlust im Rohr folgt aus dem Ähnlichkeitsprinzip:

$$\text{grad } p \cdot \frac{d}{\rho \cdot \omega_m^2} = F\left(\frac{\omega_m \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{\delta}{d}\right) \dots \dots \dots (84a)$$

Hierin bezeichnet ω_m die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt, L die Länge des Rohres oder den Abstand der Meßstelle von Rohranfang

und δ die mittlere Höhe der kleinen Erhebungen, welche die Rauigkeit der Rohrwand bilden.

Diese Gleichung besagt also, daß das Druckgefälle erstens von der Kenngröße Re , zweitens von der Rohrlänge und drittens von der Rauigkeit der Rohrwand abhängt. Hierbei ist zu beachten, daß nicht die direkt gemessene Rohrlänge L , sondern die reduzierte oder auf den Durchmesser d bezogene Rohrlänge $L : d$ maßgebend ist. Wir können dafür auch den Ausdruck „Durchmesserlänge“ einführen, in Anlehnung an den Sprachgebrauch der inneren Ballistik, welche die Länge der Geschützrohre in Kaliberlängen mißt. Ganz ebenso ist nicht die absolute Rauigkeit δ sondern die relative Rauigkeit $\delta : d$ maßgebend. Wenn es auch nicht möglich sein wird, die relative Rauigkeit zahlenmäßig auszudrücken, so soll uns doch der Ausdruck $\delta : d$ stets daran erinnern, daß die Rauigkeit der Rohrwand zu berücksichtigen ist.

Die Gestalt der Funktion F in Gleichung (84a) ist trotz der gewaltigen, technischen Bedeutung der Strömung in Rohren immer noch nicht bekannt. Insbesondere fehlen die experimentellen Angaben für die Abhängigkeit von der Rohrlänge. Wir müssen uns deshalb mit der Besprechung der Strömung im zweiten Teil der Rohrstrecke begnügen, also mit der Funktion

$$F\left(Re, \frac{\delta}{d}\right).$$

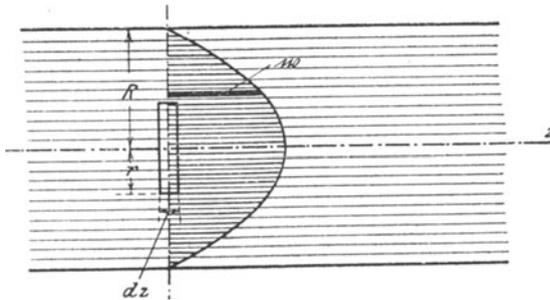


Fig. 55. Parabolische Geschwindigkeitsverteilung im Rohr bei geordneter Strömung.

Das Gesetz von Poiseuille.

Bei der Strömung im geraden Rohr können wir in erster Linie annehmen, daß sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen auf geraden Linien parallel zur Achse bewegen.

Wir betrachten einen niederen Flüssigkeitszylinder (vgl. Fig. 55) von der Höhe dz und von Radius r und bestimmen

1. die Wirkung der Zähigkeit auf seine Mantelfläche: $\mu \cdot \frac{d\omega}{dr} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dz.$
2. den Druckunterschied auf seine beiden Grundflächen:
 $-\text{grad } p \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dz.$

Da die Strömungsgeschwindigkeit konstant in bezug auf z ist, da also keine Beschleunigung eintritt, müssen beide Kräfte gleich sein. Dies gibt

$$d\omega = \frac{-1}{2\mu} \cdot \text{grad } p \cdot r \cdot dr \text{ oder integriert } \omega = \text{Const} - \frac{1}{4\mu} \cdot \text{grad } p \cdot r^2.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient uns die Randbedingung für ω , nämlich: für $r = R$ ist $\omega = 0$. Wir erhalten dann

$$\omega = \frac{\text{grad } p}{4 \cdot \mu} (R^2 - r^2).$$

Es ergibt sich also eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt.

Die Flüssigkeitsmenge W , welche in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfließt, ergibt sich durch Integration. Es ist

$$W = \int_0^R \omega \cdot 2r\pi \cdot dr = \frac{2\pi}{4\mu} \cdot \text{grad } p \cdot \int_0^R r (R^2 - r^2) \cdot dr = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \text{grad } p \cdot R^4.$$

Führen wir eine mittlere Geschwindigkeit ω_m ein, so errechnet sich damit für W der zweite Ausdruck

$$W = R^2\pi \cdot \omega_m.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke, Einführung von $d = 2R$ und Umstellen entsteht die Gleichung

$$\text{grad } p \cdot \frac{d^2}{\mu \cdot \omega_m} = \text{La} = 32.$$

Wir multiplizieren noch beiderseits mit

$$\frac{\mu}{\omega_m \cdot d \cdot \rho} \text{ bzw. } \frac{1}{\text{Re}}$$

und erhalten: $\text{grad } p \cdot \frac{d}{\rho \cdot \omega_m^2} = \text{Eu} = 32 \cdot \frac{1}{\text{Re}} \dots \dots \dots (84b)$

Der Vergleich mit Gleichung (80a) zeigt völlige Übereinstimmung. Er zeigt ferner, daß für geordnete Strömung im Rohr der Wert $\text{Const}_1 = 32$ ist.

Der Grund, weshalb uns hier die Berechnung des Strömungsfeldes möglich war, ist der, daß bei der Strömung im geraden Rohr die Geschwindigkeit in der z -Richtung, der Vektor $\text{grad } w$ in der r -Richtung liegt. In der Gleichung (71) ist also das Glied $(w, \text{grad } w)$ ein skalares Produkt von zwei aufeinander senkrechten Vektoren und dies ist für alle Werte der Vektoren gleich Null. Bei Strömungen in nicht gekrümmten Leitungen bleibt deshalb die Trägheit auch bei hohen Geschwindigkeiten ohne Wirkung. Wir werden sehen, inwieweit die Versuche mit dieser theoretischen Voraussage übereinstimmen.

Die Ergebnisse der Versuche.

Läßt man eine Flüssigkeit mit geringer Geschwindigkeit durch ein Rohr strömen und mißt man gleichzeitig den Druckverlust, so zeigt sich, daß dieser Druckverlust dem durch Gleichung (84b) gegebenen

Gesetz gehorcht. Wenn man nun die Geschwindigkeit steigert, so befolgt der Druckverlust immer dasselbe Gesetz und zwar noch bei ziemlich hohen Geschwindigkeiten. Ganz plötzlich tritt jedoch eine Änderung ein und der Druckverlust befolgt ein anderes Gesetz, welches sich sehr gut durch die Gleichung

$$Eu = \text{const} \cdot \left(\frac{\omega_m \cdot d \cdot \varrho}{\mu} \right)^{-n} \dots \dots \dots (84c)$$

darstellen läßt. Die Geschwindigkeit, bei der dieser plötzliche Wechsel eintritt, heißt die kritische Geschwindigkeit, und der Strömungszustand in diesem Augenblick der kritische Zustand. Versuche mit verschiedenen Rohrdurchmessern und verschiedenen Flüssigkeiten haben ergeben, daß der kritische Zustand immer dann eintritt, wenn die Reynold'sche Zahl den Wert

$$Re_{\text{krit}} = 2000 \text{ bis etwa } 3000 \text{ erreicht.}$$

Zahlentafel Nr. 13a.

Kritische Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde.

	t	$\mu \cdot 10^6$	ϱ	krit. Geschwind. bei d =				
				1 cm	5 cm	10 cm	20 cm	30 cm
Luft 1 at	0°	1,69	0,128	2,64	0,53	0,26	0,13	0,09
	20°	1,79	0,119	3,00	0,60	0,30	0,15	0,10
	40°	1,89	0,111	3,40	0,68	0,34	0,17	0,11
	100°	2,15	0,094	4,57	0,91	0,46	0,23	0,15
Luft 5 at	0°	1,69	0,639	0,528	0,105	0,053	0,026	0,017
	20°	1,79	0,595	0,602	0,120	0,060	0,030	0,020
	40°	1,89	0,557	0,680	0,136	0,068	0,034	0,023
	100°	2,15	0,468	0,918	0,184	0,092	0,046	0,031
Luft 10 at	0°	1,69	1,278	0,264	0,052	0,026	0,013	0,009
	20°	1,79	1,190	0,300	0,060	0,030	0,015	0,010
	40°	1,89	1,114	0,340	0,068	0,034	0,017	0,011
	100°	2,15	0,935	0,457	0,091	0,046	0,023	0,015
Wasser	0°	183	102,0	0,359	0,072	0,036	0,018	0,012
	20°	102	101,8	0,200	0,040	0,020	0,010	0,007
	40°	67	101,2	0,132	0,026	0,015	0,007	0,005
	100°	29	97,7	0,060	0,012	0,006	0,003	0,002
Olivenöl	18°	9400	93,8	20,0	4,0	2,0	1,0	0,7
Glycerin	18°	100000	128,5	156	31	15,6	7,8	5,2

Reynolds selbst hat diese Beobachtungen bereits gemacht. Bei einer zweiten Versuchsreihe leitete er in einen Wasserstrom, der in einer Glasröhre floß, dünne, gefärbte Flüssigkeitsfäden ein. Solange ω_m , also auch Re sehr klein war, blieben die Fäden als feine gerade Linien erhalten; sobald aber ω_m so stark gesteigert wurde, daß $Re = Re_{\text{krit}}$ wurde, trat plötzlich und zwar gleichzeitig mit der Änderung im Druckgefälle ein

Zerstören oder ein Sichaflösen der Flüssigkeitsfäden ein. Die Flüssigkeitsteilchen strömten nicht mehr auf parallelen Bahnen, sondern sie legten gänzlich ungeordnete Wege zurück: es war statt der Stromlinienbewegung die Turbulenz eingetreten (vgl. S. 149). Der ganze Charakter des kritischen Strömungszustandes deutet darauf hin, daß es sich hierbei um ein Labilwerden der Stromlinienbewegung handelt.

Über die Zahlenwerte der Größen $const$ und n in Gleichung (84c) herrscht heute noch keine volle Klarheit.

Im Handwörterbuch der Naturwissenschaften gibt Prandtl an für rauhe Rohre

$$\text{grad } p \cdot \frac{d}{\rho \cdot \omega_m^2} = 0,266 \left(\frac{\omega_m \cdot d \cdot \rho}{\mu} \right)^{-0,25} \dots (84d)$$

während ich aus den Versuchen von Nußelt (Habilitationsschrift, S. 27, Zahlentafel 7) berechnen konnte

$$\text{grad } p \cdot \frac{d}{\rho \cdot \omega_m^2} = 0,107 \left(\frac{\omega_m \cdot d \cdot \rho}{\mu} \right)^{-0,21} \dots (84e)$$

Die beiden Gleichungen (84d und e) brauchen keineswegs im Widerspruch zu stehen, da in den Werten $const$ und n vor allen die Rauigkeit und vielleicht auch der Einfluß der Rohrlänge zum Ausdruck kommt. Jedenfalls ist sicher, daß der Wert des Exponenten „ n “ sich mit zunehmender Rauigkeit der Null nähert, so daß also wahrscheinlich Prandtl mit einem glatteren Rohr rechnet, als Nußelt bei seinen Versuchen verwendet hat (es war dies ein nahtlos gezogenes Messingrohr von 22,01 m/m innerem Durchmesser).

Zahlenbeispiel.

Für ein nahtlos gezogenes Messingrohr von 2,2 cm Durchmesser und strömende Luft von 0° und 760 m/m Barometerstand soll das Druckgefälle bestimmt werden, wenn die Strömungsgeschwindigkeit $\omega = 30$ m/sec beträgt.

Für Zahlenrechnungen ist es bequemer nicht mit der Massendichte ρ , sondern mit dem spezifischen Gewicht γ zu rechnen. Die Gleichung (84e) lautet dann

$$\text{grad } p \cdot \frac{d}{\gamma \cdot \omega_m^2} = 1,76 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\omega_m \cdot d \cdot \gamma}{\mu} \right)^{-0,21} \dots (84f)$$

In dieser Gleichung ist allerdings der Klammerausdruck keine dimensionslose Größe mehr.

$$\text{Mit } d = 0,022 \text{ [m]}, \gamma = 1,293 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \mu = 1,69 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{std}}{\text{m}^2} \right]$$

$$p = 10\,333 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right] \text{ und } \omega_m = 30 \left[\frac{\text{kg}}{\text{sec}} \right]$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= 1,76 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1,293 \cdot 900}{0,022} \cdot \left(\frac{30 \cdot 0,022 \cdot 1,293}{1,69} \cdot 10^6 \right)^{-0,21} \\ &= 58,4 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right] \text{ pro 1 Meter Rohrlänge} \\ &= 58,4 \text{ [m/m Wassersäule] pro 1 Meter Rohrlänge.} \end{aligned}$$

C. Die Wärmeleitung in strömenden Körpern bei aufgezwingener Strömung.

1. Allgemeines.

a) **Abgrenzung des Gebietes.** Wie schon in der Übersicht auf S. 147 angedeutet, soll das Gebiet dieses Abschnittes dadurch gekennzeichnet sein, daß für die Entstehung und Unterhaltung sowohl der Bewegung als auch der Temperaturunterschiede nur äußere Ursachen in Betracht kommen sollen.

Wir nehmen also an, daß zwischen der Temperatur der Flüssigkeit an der Eintrittsstelle, auch Anfangstemperatur Θ_a genannt, und der Wandtemperatur Θ_w ein Unterschied bestehen soll. Dagegen wollen wir annehmen, daß die inneren Ursachen für Temperaturunterschiede, also Kompressionswärme und Reibungswärme vernachlässigbar klein sein sollen.

Die Energiegleichung (68) im Ansatz des allgemeinen Problems vereinfacht sich dann auf die Form

$$\varrho \cdot c_p' \cdot (w, \text{grad } \Theta) = \lambda \cdot \Delta^2 \Theta$$

mit $\varrho \cdot c_p' = \gamma \cdot c_p$ geht dies über in

$$(w, \text{grad } \Theta) = a \cdot \Delta^2 \Theta \dots \dots \dots (85)$$

und diese Gleichung ist die Gleichung der Wärmeleitung in strömenden Körpern.

Die örtlichen Temperaturverschiedenheiten werden — nach Maßgabe ihrer Größe und der Eigenschaften der Zustandsgleichung — zu örtlichen Verschiedenheiten der Dichte führen und diese letzteren werden dann als innere Bewegungsursachen zusammen mit den äußeren Bewegungsursachen den Strömungszustand bestimmen. Wie oben erwähnt, sollen in diesem Abschnitt nur Strömungszustände besprochen werden, bei denen nur äußere Bewegungsursachen auftreten. Wir müssen uns also auf Fälle beschränken, in denen ϱ konstant ist. Dadurch entfällt erstens die Zustandsgleichung aus dem mathematischen Ansatz und zweitens genügen die Kontinuitäts- und die Bewegungsgleichung mit ihren Randbedingungen von p und w zur eindeutigen Festlegung des Druck- und des Geschwindigkeitsfeldes.

Der Hauptvorteil, den die Ausschaltung der inneren Ursachen gebracht hat, besteht darin, daß das ganze Problem in zwei Teilprobleme zerfällt, die wir kurz unterscheiden wollen als den hydrodynamischen Teil, das ist die Bestimmung des Druck- und des Geschwindigkeitsfeldes und den thermischen Teil, das ist die Bestimmung des Temperaturfeldes. Für den hydrodynamischen Teil gelten in unveränderter Weise die Ergebnisse des vorigen Abschnittes B.

b) **Der mathematische Ansatz.** Für den hydrodynamischen Teil gilt

1. Die Kontinuitätsbedingung: $\text{div } w = 0$.
2. Die Bewegungsgleichung: $\varrho (w, \text{grad } w) = -\text{grad } p + \mu \cdot \Delta^2 w$.
3. Die Randwertangaben für p und w .

Für den thermischen Teil gilt

1. Gleichung der Wärmeleitung: $(w, \text{grad } \theta) = a \cdot \Delta^2 \theta$.
2. Die Randwertangaben für θ .

Als Lösung des Problems gelten die drei Gleichungen

$$p = f_p(\xi, \eta, \zeta); \quad w = f_w(\xi, \eta, \zeta); \quad \theta = f_\theta(\xi, \eta, \zeta).$$

Auch dieses Problem ist im allgemeinen einer analytischen Behandlung nicht zugänglich. Wir benützen deshalb wieder das Prinzip der Ähnlichkeit, um aus dem mathematischen Ansatz das heraus zu holen, was die Theorie zu bieten vermag.

e) Das Prinzip der Ähnlichkeit. Zu den Kennzeichen einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme gehören auch hier in erster Linie dieselben Kennzeichen, wie in der reinen Hydrodynamik. Es sind dies die geometrische Ähnlichkeit der durchflossenen Räume und die Gültigkeit der Gleichungen 73 für die Berandung. Also

$$\begin{aligned} l'_i &= \nu_1 \cdot l_i \dots \dots \dots (73a) \\ w' &= \nu_w \cdot w \dots \dots \dots (73b) \\ p' + p'_c &= \nu_p \cdot p \dots \dots \dots (73c) \\ \varrho' &= \nu_\varrho \cdot \varrho \dots \dots \dots (73d) \\ \mu' &= \nu_\mu \cdot \mu \dots \dots \dots (73e) \end{aligned}$$

Dazu treten nun noch zwei weitere Angaben: Wenn die Stoffwerte λ , c_p und ϱ im ganzen Feld als konstant angenommen werden, so ist von selbst innerhalb des ganzen Feldes die Bedingung erfüllt

$$a' = \nu_a \cdot a \dots \dots \dots (86a)$$

Ferner kommt noch die Bedingung für die Ähnlichkeit der Randwerte von θ hinzu. Da in der Gleichung (85) nicht der Absolutwert der Temperatur, sondern nur seine Ableitungen $\text{grad } \theta$ und $\Delta^2 \theta$ vorkommen, so können wir ebenso wie in Gleichung (73c) setzen

$$\theta' + \theta'_c = \nu_\theta \cdot \theta \dots \dots \dots (86b)$$

Solange die Werte ν willkürlich gewählt sind, gewährleisten die Bedingungen (73) und (86) nur die Ähnlichkeit der Felder an ihrer Begrenzung. Damit die Felder auch in ihrem ganzen Inneren ähnlich sind, müssen die Werte ν den untenstehenden Gleichungen (87a—c) gemäß gewählt werden.

$$\frac{\nu_w}{\nu_1} = \frac{0}{0} \dots \dots \dots (87a)$$

$$\frac{\nu_\varrho \cdot \nu_w}{\nu_1^2} = \frac{\nu_p}{\nu_1} = \frac{\nu_\mu \cdot \nu_w}{\nu_1^2} \dots \dots \dots (87b)$$

$$\frac{\nu_w \cdot \nu_\theta}{\nu_1} = \nu_a \cdot \frac{\nu_\theta}{\nu_1^2} \dots \dots \dots (87c)$$

Da wir erkannt haben, daß unter den gewählten, einschränkenden Bedingungen das Geschwindigkeitsfeld vom Temperaturfeld unabhängig ist, so schließen wir hier — wie in der reinen Hydrodynamik — daß

für alle Strömungen mit ähnlichen hydrodynamischen Randbedingungen die Gleichheit der Werte

$$\frac{w \cdot l_0 \cdot \varrho}{\mu} = Re$$

allein genügt als Kennzeichen für vollständige Ähnlichkeit des Geschwindigkeits- und des Druckfeldes.

Sollen außerdem auch die Temperaturfelder ähnlich sein, so muß noch die Bedingung (87c) erfüllt sein. Wir vereinfachen sie zu

$$\frac{\nu_a}{\nu_w \cdot \nu_1} = 1,$$

und erkennen, daß in Gleichung (86b) nicht nur der Wert θ_c , sondern auch der Wert ν_θ willkürlich gewählt werden kann.

Mit Berücksichtigung der Bedeutung von ν folgern wir aus der letzten Gleichung:

$$\frac{a}{w \cdot l_0} = \frac{a'}{w' \cdot l_0'} = \frac{a''}{w'' \cdot l_0''} = \dots Pe (= \text{Péclet}).$$

Innerhalb einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme ist also das Druck- und das Geschwindigkeitsfeld nur vom Werte Re und das Temperaturfeld nur von den beiden Werten Re und Pe abhängig.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen wollen wir neben der Kenngröße Pe noch eine andere Kenngröße $St (= \text{Stanton})$ ableiten:

Wenn uns irgendeine Größe u in ihrer Abhängigkeit von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y bekannt ist, so können wir daraus jederzeit ein anderes Abhängigkeitsverhältnis ableiten, indem wir u statt als Funktion von x und y als Funktion von x und $(x \cdot y)$ darstellen.

Auf Grund dieser Überlegung wollen wir später das Temperaturfeld bei manchen Aufgaben nicht in seiner Abhängigkeit von Re und Pe darstellen, sondern von Re und $Re \cdot Pe$. Hierbei ist

$$Re \cdot Pe = \frac{w \cdot l_0 \cdot \varrho}{\mu} \cdot \frac{a}{w \cdot l_0} = \frac{\varrho \cdot a}{\mu} = \frac{\lambda}{c_p \cdot \mu \cdot g} = St \dots (88)$$

Durch diese Umformung haben wir statt Pe eine neue Kenngröße eingeführt, deren Vorzug es ist, daß sie nur aus Stoffwerten besteht, also selbst ein reiner Stoffwert ist.

Die Temperaturgradienten in ähnlichen Feldern.

Wir vergleichen zwei (oder mehrere) Felder mit ähnlichen Randbedingungen und mit den Werten

$$\begin{aligned} l_0' \text{ und } l_0 & \text{ für die Bezugslängen} \\ \theta_a' \text{ und } \theta_a & \text{ für die Anfangstemperaturen} \\ \theta_w' \text{ und } \theta_w & \text{ für die Wandtemperaturen.} \end{aligned}$$

Für diese Randwerte gilt nach (86b)

$$\begin{aligned} \theta_a' + \theta_c' &= \nu_\theta \cdot \theta_a \\ \theta_w' + \theta_c' &= \nu_\theta \cdot \theta_w \\ \theta_a' - \theta_w' &= \nu_\theta \cdot (\theta_a - \theta_w). \end{aligned}$$

Wir dividieren diese Gleichung durch die Gleichung $l_0' = \nu_1 \cdot l_0$ und erhalten

$$\frac{\theta_a' - \theta_w'}{l_0'} = \frac{\nu_\theta}{\nu_1} \cdot \frac{\theta_a - \theta_w}{l_0}$$

Sind nun die beiden Felder nicht nur an der Berandung, sondern auch in ihrem Innern ähnlich, ist also $Re' = Re$ und $Pe' = Pe$, so gilt derselbe Zahlenwert ν_θ nicht nur für die Randwerte, sondern auch für zwei beliebige, ähnlichgelegene Punktpaare des ganzen Inneren. Denken wir uns als solche Punktpaare die Endpunkte zweier ähnlich gelegener, kleiner Strecken $d\mathfrak{s}$ und $d\mathfrak{s}'$, so gilt für den Temperaturanstieg längs dieser Strecken die Gleichung

$$\frac{d\theta'}{d\mathfrak{s}'} = \frac{\nu_\theta}{\nu_1} \cdot \frac{d\theta}{d\mathfrak{s}} \text{ oder } \text{grad } \theta' = \frac{\nu_\theta}{\nu_1} \cdot \text{grad } \theta.$$

Wenn wir die letzte Gleichung durch die vorletzte Gleichung dividieren, so erhalten wir:

$$\text{grad } \theta \frac{l_0}{\theta_a - \theta_w} = \text{grad } \theta' \frac{l_0}{\theta'_a - \theta'_w} = \dots = Ma.$$

Die Kenngröße Ma (= Mach) ist also konstant für alle vollständig ähnlichen Probleme, sie ist also eine Funktion von Re und Pe .

$$\text{grad } \theta \cdot \frac{l_0}{\theta_a - \theta_w} = F_{Ma}(Re, Pe) \dots \dots \dots (89)$$

d) Der Wärmeübergang. Ebenso wie in der Hydrodynamik das Interesse der Technik nicht auf die Gestalt der Felder gerichtet ist, sondern auf den Druckverlust und die Kräfte, so kommt es auch bei diesem Gebiet der Technik nicht auf die Gestalt der Temperaturfelder an, sondern auf den Energietransport in Feld und vor allem auf den Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und Wand.

Die Bestimmung der Temperaturfelder stellt also nur eine Vorstufe auf dem Wege zur Lösung dar. Schon bei Ableitung der Gleichung der Gesamtenergie hatten wir (S. 142 u. 143) die beiden Vektoren \mathfrak{Q} und \mathfrak{E} eingeführt. Wir können also für den Energiefluß an einer Stelle des Feldes setzen:

$$\mathfrak{Q} + \mathfrak{E} = -\lambda \cdot \text{grad } \theta + \rho \cdot \varepsilon \cdot w.$$

Hierin ist $\lambda \cdot \text{grad } \theta$ jene Wärmemenge, die durch Leitung fortgeschafft wird, und $\rho \cdot \varepsilon \cdot w$ ist jene Energie, die als Energieinhalt mit der Materie durch die Strömung fortgetragen wird.

Ist nach dem Energietransport durch ein Flächenstück df gefragt, so kommen nur die Normalkomponenten der beiden Vektoren \mathfrak{Q} und \mathfrak{E} in Frage.

Für den Energieinhalt der Raumeinheit müßten wir nach S. 143 streng genommen

$$\varepsilon = \frac{1}{2} w^2 + i - p v$$

setzen. Da aber den einschränkenden Annahmen dieses Abschnittes zufolge alle anderen Energieänderungen gegenüber den Wärmemengen zu vernachlässigen sein sollen, so können wir schreiben: $\varepsilon = i = \gamma \cdot c_p \cdot \theta + \text{const.}$

Da es sich immer nur um Energieunterschiede handelt, kann das konstante Zusatzglied auch wegbleiben.

Wir erhalten also für den Energietransport durch ein Flächenstück df den Wert

$$- \lambda \cdot \text{grad}_n \theta \cdot df + \gamma \cdot c_p \cdot \theta \cdot w_n \cdot df \dots \dots \dots (90)$$

Wenn wir uns die Aufgabe stellen aus der Gestalt des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes den Wärmeaustausch zwischen einer strömenden Flüssigkeit und ihren festen Begrenzungswänden zu bestimmen, so stehen uns zur Lösung dieser Frage zwei Wege offen.

1. Weg. Wir können durch Integration des Ausdruckes (90) den Energietransport durch den Eintrittsquerschnitt und dann ebenso für den Austrittsquerschnitt berechnen. Der Unterschied zwischen beiden ist der Energieaustausch der Flüssigkeit mit der Wandung.

Hierbei ist zu beachten, daß wir wohl immer diejenige Wärmemenge, welche durch Leitung den Eintritts- oder Austrittsquerschnitt passiert, vernachlässigen können.

Wenn F_a der Eintritts- oder Anfangs- und F_e der Austritts- oder Endquerschnitt ist, so erhalten wir für die Wärmemenge Q , die in der Zeiteinheit an die Wandung übergeht, den Wert

$$Q = \gamma \cdot c_p \cdot \int_{F_a} \theta \cdot w_n \cdot df - \gamma \cdot c_p \cdot \int_{F_e} \theta \cdot w_n \cdot df \dots \dots \dots (90a)$$

Die Anfangstemperatur θ_a wird meistens über den ganzen Anfangsquerschnitt konstant sein. Wir können dann θ_a vor das Integralzeichen setzen und erhalten für das erste Integral den Wert

$$\theta_a \cdot \int_{F_a} w_n \cdot df = \theta_a \cdot (w_n)_a \cdot F_a = \theta_a \cdot V$$

Für die Endtemperatur θ_e definieren wir einen Mittelwert nach der Definitionsgleichung (vgl. später S. 176).

$$\theta_e \cdot \int_{F_e} w_n \cdot df = \int_{F_e} w_n \cdot \theta \cdot df.$$

Für die ausgetauschte Wärme Q ergibt sich dann

$$Q = c_p \cdot \gamma \cdot (\theta_a - \theta_e) \cdot V \dots \dots \dots (90b)$$

Innerhalb einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme ist erstens

$$V = \text{koeff}_1 \cdot w \cdot l_0^2$$

und es ist ferner nach Definition von a :

$$c \cdot \gamma = \frac{\lambda}{a},$$

also
$$c \cdot \gamma \cdot V = \lambda \cdot \text{koeff}_1 \cdot l_0 \left(\frac{w \cdot l_0}{a} \right) = \lambda \cdot l_0 \frac{\text{koeff}_1}{\text{Pe}},$$

zweitens
$$\frac{\theta_a - \theta_e}{l_0} = \text{koeff}_2 \cdot \text{grad } \theta$$

und nach Gleichung (89) ist

$$\text{grad } \theta = \frac{\theta_a - \theta_w}{l_0} \cdot F_{\text{Ma}} (\text{Re}, \text{Pe}).$$

Mit diesen beiden Beziehungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda \cdot l_0 \cdot (\theta_a - \theta_w) \cdot \text{koeff}_1 \cdot \text{koeff}_2 \frac{1}{\text{Pe}} \cdot F_{\text{Ma}} (\text{Re}, \text{Pe}) \\ &= + \lambda \cdot (\theta_a - \theta_w) \cdot l_0 \cdot \Psi (\text{Re}, \text{Pe}) \dots \dots \dots (90c) \end{aligned}$$

2. Weg. Den Ausdruck (90) können wir auch auf ein Element der Begrenzungsfläche anwenden. Mit Annäherung an die Wand wird die Normalkomponente der Geschwindigkeit immer kleiner und an der Wand selbst wird überdies auch die Geschwindigkeit selbst zu Null. Der ganze Ausdruck (90) reduziert sich also auf den ersten Summanden, und es ergibt sich

$$dQ = -\lambda \cdot \text{grad}_n \theta \cdot df$$

und dies geht mit Verwendung von Gleichung (89) über in

$$dQ = -\lambda \cdot \frac{\theta_a - \theta_w}{l_0} \cdot F_{Ma}(\text{Re}, \text{Pe}) \cdot df.$$

Wollen wir die Wärmemenge berechnen, welche an die ganze Oberfläche F übergeht, so haben wir über F zu integrieren

$$Q = -\lambda \cdot \frac{\theta_a - \theta_w}{l_0} \cdot \text{Funkt}(\text{Re}, \text{Pe}) \cdot F.$$

Diese Gleichung läßt sich noch etwas umformen, weil für geometrisch ähnliche Flächen $F : l_0 = \text{koeff} \cdot l_0$ ist. Sie wird dann identisch mit der bereits oben abgeleiteten Gleichung (90c)

$$Q = +\lambda \cdot (\theta_a - \theta_w) \cdot l_0 \cdot \Psi \left(\frac{w \cdot l_0 \cdot \rho}{\mu}, \frac{a}{w \cdot l_0} \right) \dots (90c)$$

d. h. die übergehende Wärmemenge ist proportional der Wärmeleitfähigkeit λ , dem Unterschied zwischen Anfangstemperatur der Flüssigkeit und Wandtemperatur und der ersten Potenz der linearen Abmessungen. Der Proportionalitätsfaktor ist eine Funktion der Kenngrößen Re und Pe .

Dehnen wir unsere Betrachtung auf die ganze Klasse der Probleme gleicher Art aus, so erweitert sich der Proportionalitätsfaktor zu

$$\Psi(\text{Re}, \text{Pe}, l_1/l_0 \dots l_i/l_0 \dots).$$

Die Gestalt dieser Funktion Ψ kann nur durch den Versuch bestimmt werden. Leider hat die experimentelle Forschung diesen Weg zur direkten Bestimmung des Wärmeübergangs bisher noch nicht beschritten, sondern stets nur den Weg über die W. Ü. Z. eingeschlagen.

e) **Die Wärmeübergangszahl, geschichtlicher Rückblick.** Der Weg, auf dem wir bisher zu den Gesetzen für den Wärmeübergang zu gelangen trachteten, entspricht der mathematisch-physikalischen Forschungsweise.

Wir müssen nun auch den zweiten Weg besprechen, die technisch empirische Forschung. Zu diesem Zwecke müssen wir etwas weiter ausholen und in kurzen Worten auf die Entwicklung dieser Forschungsweise eingehen.

Die Bestrebungen, bei der Bemessung von Heizflächen die Schätzung durch die Berechnung zu ersetzen, begannen damit, daß man sich die in die Augen fallendsten Einflüsse klar machte. Die Erfahrung hatte gezeigt, daß die ausgetauschte Wärmemenge um so größer wird, erstens je größer die wärmeaufnehmende oder wärmeabgebende Fläche F ist und zweitens je größer der Unterschied zwischen der Temperatur der

Flüssigkeit t_F und der Temperatur der Wand t_W ist. Ferner war es selbstverständlich, daß sie im Beharrungszustand der Zeit τ proportional ist.

Es ergibt sich damit der Ansatz:

$$Q = \text{Funkt}((t_W - t_F), F) \cdot \tau \quad \dots \quad (91a)$$

worin von der Funktion vorerst nur bekannt ist, daß sie mit jedem der beiden Argumente wächst.

Diese Funktion hat man stets dadurch in willkürlicher Weise spezialisiert, daß man sie als ein Produkt von zwei Teilfunktionen mit je einem Argument auffaßte und daß man jeder Teilfunktion die Gestalt einer Potenzfunktion mit positivem Exponenten gab. Man nahm also an, daß die in der Zeiteinheit übergehende Wärmemenge einer noch unbekanntenen Potenz der Fläche und einer anderen ebenfalls noch unbekanntenen Potenz der Temperaturdifferenz proportional ist. Dies gibt die Gleichung

$$Q = \alpha \cdot (t_F - t_W)^{n_1} \cdot F^{n_2} \cdot \tau \quad \dots \quad (91b)$$

Den Proportionalitätsfaktor α nannte man die äußere Wärmeleitfähigkeit der Wand und seinen reziproken Wert ($1 : \alpha$) den Übergangswiderstand. Heute ist für α allgemein die Bezeichnung Wärmeübergangszahl gebräuchlich. Für den Exponenten n_2 findet man nur selten andere Werte als „eins“. Dagegen sind für n_1 besonders in älteren Arbeiten verschiedene zwischen eins und zwei gelegene Werte angegeben. In neuerer Zeit wird aber auch für n_1 immer häufiger der Zahlenwert eins angenommen, so daß wir schreiben müssen:

$$Q = \alpha \cdot (t_F - t_W) \cdot F \cdot \tau \quad \dots \quad (91c)$$

Dieser ungemein einfache Ansatz würde in der Tat auch zu einfachen Rechnungen führen, wenn es möglich wäre, für die Wahl des Wertes α einfache und zuverlässige Regeln aufzustellen, oder wenn man diese Werte in Tabellen zusammenstellen könnte, etwa so wie die Dichte, die spezifische Wärme usw.

Daß dies aber nicht möglich ist, zeigte sich um so klarer, je mehr man sich mit dem Problem befaßte. Jede neuere Experimentaluntersuchung zeigte den Vorgang von einer neuen Seite und vermehrte die Zahl derjenigen Größen, welche den Wärmeübergang beeinflussen.

Langsam wurde man so zu der Erkenntnis geführt, daß der Ansatz (91c) nur scheinbar einfach ist, daß er die Schwierigkeiten des Wärmeübergangsproblems nicht löst, sondern nur in die Wahl des Wertes α zusammendrängt.

Die äußere Wärmeleitfähigkeit war ursprünglich als ein reiner Stoffwert gedacht, als ein Wert, der nur von der physikalischen Natur der Flüssigkeit und der Substanz der Wandung abhängt. Als ein Beweis für diese Auffassung mögen die Angaben aus der älteren Literatur dienen, welche Wärmeübergangszahlen nennen und zu ihrer Bezeichnung nur angeben: von Wasser an Eisen, von Wasser an Messing, von Messing an Wasser, von Mauerwerk an Luft usw. Insbesondere interessierte die Frage, ob der Übergangswiderstand größer ist, wenn die Wärme vom festen Körper an die Flüssigkeit übertritt oder umgekehrt. — Obwohl diese Ansicht, nach welcher α ein reiner Stoffwert sein sollte, schon sehr früh als unrichtig erkannt wurde, so hat sie sich doch

in manchen Schriften recht lange erhalten und zwar weniger in der technischen Literatur als in den Lehrbüchern der Physik.

Die nächstliegende Verbesserung, die man an dem Ansatz (91c) vornahm, bestand in der Berücksichtigung der Strömungsgeschwindigkeit. Es war ja bekannt, daß bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit zu einer Vermehrung der übergelassenen Wärmemenge führt. In üblicher Weise versuchte man auch diese Abhängigkeit durch eine Potenzfunktion auszudrücken. Man setzte:

$$\alpha = \alpha_0 + C \cdot \omega^m \dots \dots \dots (92a)$$

worin C stets positiv und m zwischen 0 und 1 gewählt war. Sehr häufig findet sich der Ansatz:

$$\alpha = \alpha_0 + C \cdot \sqrt{\omega} \dots \dots \dots (92b)$$

Der Wert α_0 bedeutete jene W.Ü.Z., welche für sogenannte ruhende Luft einzusetzen ist, also bei Vorgängen, bei denen die Luft nicht durch äußere Ursachen, sondern nur durch innere Ursachen, nämlich durch den Auftrieb infolge verschiedener Erwärmung in Bewegung gehalten wird.

Sehr bald versuchte man auch die Beschaffenheit der Heiz- und Kühlflächen in der Formel zum Ausdruck zu bringen, denn man hatte erkannt, daß der Grad der Rauigkeit der Wand und ihre Verunreinigung durch Ruß, Kesselstein oder andere Ablagerungen aus der Strömung von großem Einfluß auf den Wärmeübergang sind.

Ferner mußte man vermuten, daß nicht nur die Temperaturdifferenz ($t_F - t_W$), die ja schon in den Gleichungen (91) zum Ausdruck kommt, den Wärmeübergang bestimme, sondern, daß auch die absolute Höhe der Temperatur, bei welcher der Wärmeübergang erfolgt, zu berücksichtigen seien, also etwa t_F oder t_W oder auch beide Werte. Diese Frage wurde sehr oft in unklarer Weise vermengt mit der Frage nach der Größe des Exponenten n_1 in der Potenz $(t_F - t_W)^{n_1}$.

Ein anderer Umstand, der ebenfalls zur Verwirrung Anlaß gibt, ist der Begriff „Flüssigkeitstemperatur“, und wir müssen uns deshalb mit den verschiedenen Anschauungen über die Temperaturverteilung in der Flüssigkeit bekannt machen.

Die ältere Auffassung ging dahin, daß man innerhalb eines Querschnittes nur mit zwei Temperaturen zu rechnen habe, mit der Wandtemperatur t_W und mit der im ganzen Querschnitt gleichen Flüssigkeitstemperatur t_F . Die Differenz ($t_F - t_W$) bedeutete dann den Temperatursprung, welcher zusammen mit dem Übergangswiderstand die Intensität des Wärmeüberganges bestimmen sollte. Dies ähnelt durchaus jener älteren hydraulischen Auffassung über das Geschwindigkeitsfeld, wonach im ganzen Querschnitt eine konstante Geschwindigkeit und an der Wand ein Gleiten, also ein Geschwindigkeitssprung angenommen wird. Die Annahme wurde später ergänzt durch die Lehre von der adhärenierenden Schicht. Eine dünne Flüssigkeitshaut spaltet sich — so besagt diese Lehre — von der übrigen Flüssigkeitsmasse ab und haftet fest an der Wand. Der Geschwindigkeitssprung wird also durch diese Annahme von der Wand weg nach dem Inneren der Flüssigkeit verlegt.

Wir dürfen in dieser Auffassung einen, wenn auch noch fehlerhaften Vorläufer, der Prandtl'schen Lehre von den Grenzschichten erblicken. Übrigens hat die Lehre von der anhaftenden Schicht in der Hydraulik nur geringe Bedeutung gewonnen. Um so mehr hat sie die Lehre vom Wärmeübergang beherrscht. Sie führte zu der Vorstellung, daß in der ganzen bewegten Flüssigkeit die einheitliche Temperatur t_F herrscht, und daß dann diese Temperatur innerhalb der dünnen anhaftenden Schicht von t_F bis t_W steigt oder sinkt. Da die Flüssigkeit innerhalb der Schicht als vollkommen bewegungslos galt, so glaubte man nach den Gesetzen für die Wärmeleitung in festen Körpern den Wärmedurchgang durch diese Fläche berechnen zu können. Mit der Bezeichnung Δ für die Dicke der Schicht, erhielt man

$$Q = - \lambda \frac{t_F - t_W}{\Delta} \cdot F \cdot \tau$$

Da sich aber kein Anhalt finden ließ, welchen Zahlenwert man für Δ einsetzen müsse, so war auch durch diese Deutung des Vorganges die Schwierigkeit nicht behoben, sondern nur in die Wahl der Größe Δ statt der Wahl der Größe α verlegt.

Interessant ist, in welcher Weise die experimentelle Forschung von diesen anhaftenden Schichten Notiz nahm. Man empfand das Auftreten dieser Schichten bei der Strömung im Versuchsapparat als ein störendes Moment, als eine Erscheinung, die den naturgemäßen Wärmeaustausch behindert und man suchte deshalb in den Versuchseinrichtungen diese anhaftende Schicht durch rotierende Bürsten und andere Vorrichtungen immer wieder zu entfernen. Gerade dadurch aber, daß man diesen Schichten eine solche Bedeutung beimaß, verbot es sich von selbst, die Ergebnisse dieser Versuche auf Fälle der Praxis zu übertragen, bei denen sich ja diese Schichten ungehindert ausbilden können.

Auf die Dauer vermochte sich die Lehre von der anhaftenden Schicht nicht zu halten, vor allem auch nicht die Vorstellung einer in der ganzen bewegten Masse gleichen Querschnittstemperatur. Sie wurde durch die Versuche mehrfach widerlegt.

Wenn aber einmal feststeht, daß die Temperatur im Querschnitt nicht gleichen Wert besitzt, so entsteht die Frage, was man dann unter der Temperatur der Flüssigkeit verstehen soll. Wir wollen uns bei diesen Erörterungen an das Beispiel der Strömung im geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt halten, weil für diesen Fall direkte Messungen vorliegen und weil sich die Darstellung an diesem Beispiel am einfachsten gestaltet.

Gelegentlich einer Untersuchung über den Wärmeübergang von strömender Luft an Rohrwandungen, habe ich die Temperaturverteilung im Querschnitt des Rohres bestimmt, indem ich mit einem verschiebbaren Thermoelement die Temperatur an verschiedenen Stellen des Durchmessers gemessen habe. Diese Messungen habe ich bei verschiedenen Strömungszuständen und an mehreren Stellen längs des Rohres wiederholt und dabei stets dasselbe Ergebnis erzielt, nämlich eine ungefähr parabolische Temperaturverteilung längs des Durchmessers.

Fig. 56a stellt ein solches Messungsergebnis dar. Außerdem habe ich mit einem verschiebbaren Pitotrohr die Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt bestimmt. Die zu Fig. 56a gehörige Geschwindigkeitsverteilung stellt Fig. 56b dar.

Von einer Flüssigkeitstemperatur kurzweg kann also überhaupt nicht gesprochen werden, sondern nur von einer mittleren Flüssigkeitstemperatur; aber auch über diese Mittelwertbildung sind noch zweierlei Auffassungen möglich.

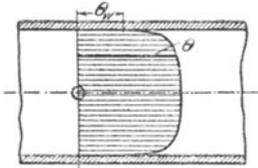


Fig. 56a. Temperaturverteilung im Rohr.

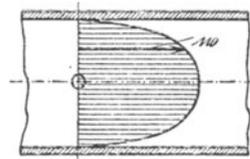


Fig. 56b. Geschwindigkeitsverteilung im Rohr.

1. Die mittlere Temperatur im Querschnitt. Wir denken uns den ganzen Querschnitt σ des Rohres in kleine Elemente $d\sigma$ zerlegt, messen die zu jedem $d\sigma$ gehörige Temperatur θ (bei beliebig gewähltem Nullpunkt) und definieren die mittlere Temperatur θ_Q im Querschnitt durch die Gleichung

$$\theta_Q = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \theta \cdot d\sigma \quad \dots \dots \dots (93a)$$

Dieser Mittelwert bezieht sich nur auf die Querschnittsfläche und berücksichtigt in keiner Weise das Vorhandensein einer Strömung. Er kann gefunden werden durch Abtasten des Querschnittes mit einem Thermoelement und nachherige Berechnung mit Gleichung (93a) oder durch direkte Messung mit Hilfe eines Widerstandsthermometers, welches quitterartig über den ganzen Querschnitt ausgespannt ist.

2. Die mittlere Temperatur der Flüssigkeit. Wir denken uns wieder den Querschnitt in seine Elemente $d\sigma$ zerlegt, messen die zu jedem $d\sigma$ gehörige Temperatur sowie die Normalkomponente ω_n der Geschwindigkeit ω und bilden den Ausdruck $\theta \cdot \omega_n \cdot d\sigma$. Wir multiplizieren also die Temperatur nicht mit dem Flächenelement $d\sigma$, sondern mit dem Volumelement, welches dieses $d\sigma$ durchströmt. Wir definieren dann die mittlere Temperatur θ_F der Flüssigkeit durch die Gleichung

$$\theta_F = \frac{\int_{\sigma} \theta \cdot \omega_n \cdot d\sigma}{\int_{\sigma} \omega_n \cdot d\sigma} = \frac{1}{\text{Vol}} \int_{\sigma} \theta \cdot \omega_n \cdot d\sigma \quad \dots \dots \dots (93b)$$

Dieser Mittelwert ist als die mittlere Temperatur der Flüssigkeitsmasse zu bezeichnen. Er läßt sich bestimmen entweder durch Messung der Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung und Berechnung nach Gleichung (93b) oder durch Einbau einer Mischvorrichtung (z. B. einer kleinen Kammer) unmittelbar nach dem Querschnitt und Messen der einheitlich gemachten Flüssigkeitstemperatur.

Für den in Fig. 56a u. b gezeichneten Fall ergibt sich

$$\theta_Q - \theta_W = 0,825 (\theta_{\text{Achse}} - \theta_W)$$

$$\theta_F - \theta_W = 0,434 (\theta_{\text{Achse}} - \theta_W)$$

Der Unterschied zwischen beiden Mittelwerten ist also ganz beträchtlich. Was hier für das kreisrunde Rohr abgeleitet wurde, gilt in sinngemäßer Weise auch für alle anderen Strömungsarten.

Der auf S. 170 gewonnene Mittelwert der Temperatur deckt sich mit dem eben abgeleiteten Wert θ_F . Später werden wir sehen, daß für alle Wärmeübergangsberechnungen nur der Mittelwert θ_F in Betracht kommt. Leider ist bei den Versuchen zur Bestimmung der W.Ü.Z. bisher auf diese Unterscheidung in der Mittelwertbildung sehr wenig geachtet worden und darin liegt ein weiterer Grund für die Unzuverlässigkeit des bis heute vorliegenden Versuchsmaterialies.

Wir haben bisher als Umstände, welche den Wert der W.Ü.Z. beeinflussen, kennen gelernt:

1. Die physikalische Natur des strömenden Körpers;
2. die Strömungsgeschwindigkeit;
3. die Beschaffenheit der Heiz- und Kühlflächen besonders hinsichtlich Rauigkeit und Reinheit;
4. die absolute Temperaturhöhe, bei der sich der Vorgang abspielt;
5. die mittlere Flüssigkeitstemperatur.

Dazu kommt nun noch als 6. überaus wichtiger Umstand die Art der Strömung überhaupt. Es handelt sich hierbei darum, ob die Strömung längs einer ebenen Wand erfolgt oder senkrecht gegen eine solche, ob die Flüssigkeit in einem Rohr oder außen um ein Rohr (\parallel oder \perp zur Achse) fließt, ob das Rohr eng oder weit, gerade oder gekrümmt ist, usw. Es ist zu erwarten, daß für diese verschiedenen Aufgaben nicht nur der Absolutwert der W.Ü.Z. verschieden ist, sondern daß vor allem verschiedene Gesetze gelten für den Einfluß der übrigen Faktoren.

In dem Bestreben die Lehre vom Wärmeübergang möglichst einfach zu halten, hat man es lange Zeit vermieden, diese Erkenntnis, die sich unbedingt aufdrängen mußte, zu berücksichtigen. Insbesondere konnte man sich nicht dazu entschließen, für die verschiedenen Strömungsarten mit verschiedenen Gesetzmäßigkeiten zu rechnen.

Fast alle experimentellen Arbeiten gehen von der Annahme aus, daß sich die Funktion

$$\alpha = \text{Funkt} (a, \rho, \mu, w, t_F, l_0) \dots \dots (94a)$$

zerlegen läßt in ein Produkt von Einzelfunktionen nach der Art:

$$\alpha = f_1(a) \cdot f_2(\rho) \cdot f_3(\mu) \dots \dots \dots (94b)$$

Viele Forscher gingen noch weiter in der Willkür ihrer Annahmen, indem sie für diese Teilfunktionen von vornherein das Potenzgesetz annahmen. Wenn nun auch für die Strömung im geraden Rohr sich auf Grund der Versuchsergebnisse diese Annahme als zweckmäßig erwiesen hat, so ist es doch verfehlt, sich bei allen Strömungsarten ohne weiteres auf das Produkt von Teilfunktionen festzulegen.

Des weiteren hat es sich gezeigt, daß nicht alle Stellen der Heiz- und Kühlflächen von gleicher Wirksamkeit sind, mit anderen Worten, daß die W.Ü.Z. längs einer und derselben Heizfläche im allgemeinen veränderlich ist. Wir müssen deshalb statt Gleichung (91c) genauer schreiben:

$$dQ = \alpha \cdot (t_F - t_W) \cdot dF \cdot \tau \dots \dots \dots (91d)$$

Da die W.Ü.Z. α eine Funktion von mindestens 7 Veränderlichen ist, so ist ihre Bestimmung eine äußerst mühevollle Sache. Wir wollen deshalb versuchen, ob sich nicht wieder mit Hilfe des Ähnlichkeitsprinzipes die Zahl der Veränderlichen vermindern läßt.

f) Die Wärmeübergangszahl und das Prinzip der Ähnlichkeit. Für die Wärmemenge dQ , die in der Zeiteinheit an das Flächenstück df übergeht, gilt nach der Definition für α die Gleichung:

$$dQ = \alpha \cdot (\theta_F - \theta_W) \cdot df.$$

Zufolge den Ausführungen von S. 171 gilt aber auch

$$dQ = - \lambda \cdot \text{grad}_n \theta \cdot df.$$

Daraus folgt:

$$\alpha = - \lambda \cdot \text{grad}_n \theta \cdot \frac{1}{\theta_F - \theta_W}.$$

In diese Gleichung setzen wir den Wert von $\text{grad}\theta$ aus Gleichung (89) ein und erhalten

$$\alpha = - \frac{\lambda}{l_0} \cdot F_{Ma} (Re, Pe) \dots \dots \dots (95a)$$

Zum Schlusse noch können wir von der Gruppe ähnlich berandeter Probleme zu Klasse von Problemen gleicher Art übergehen:

$$\alpha = - \frac{\lambda}{l_0} \cdot \psi \left(Re, Pe, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}, \dots \right) \dots \dots \dots (95b)$$

Die Gleichung (95a) stellt gegenüber Gleichung (94a) eine wesentliche Verminderung der unabhängigen Veränderlichen dar, indem die einzelnen Veränderlichen zu den beiden Kenngrößen

$$\frac{w \cdot l_0 \cdot \rho}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{w \cdot l_0}$$

zusammengefaßt erscheinen.

Die Temperatur t_F kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Stoffwerte α , μ und ρ mit der Temperatur veränderlich sind.

Bemerkung: Wenn wir die Wärmemenge Q berechnen wollen, die nicht an ein Flächenelement dF , sondern an die ganze Fläche F übertritt, so müssen wir die Gleichung 91d integrieren. Wir erhalten

$$Q = \int_F \alpha \cdot (\theta_F - \theta_W) \cdot dF;$$

hierin sind sowohl α als auch $(\theta_F - \theta_W)$ längs der Fläche F veränderlich, sie müssen also unter dem Integralzeichen verbleiben und deshalb ist die Berechnung des Wärmeüberganges mit Hilfe der W.Ü.Z. immer eine umständliche Arbeit. Es ist darum die Frage berechtigt, ob nicht

ein anderes Rechenverfahren ohne Benützung der W.Ü.Z. möglich ist. Bei der Wärmeleitung in festen Körpern haben wir gesehen, daß für Randwertaufgaben dritter Art die Kenntnis der W.Ü.Z. notwendig ist. Ebenso werden wir später sehen, daß bei Aufgaben über den Wärmedurchgang die W.Ü.Z. Zahlen für beide Seiten der Wandung bekannt sein müssen. Dagegen ist es bei Aufgaben über den Wärmeübergang allein sehr wohl möglich, ohne den Begriff der W.Ü.Z. auszukommen, wie wir durch Ableitung der beiden Gleichungen (90c) bewiesen haben, und zwar stellt im Vergleich zu diesem Weg die Verwendung der W.Ü.Z. einen Umweg dar.

Es ergibt sich daraus die Forderung, daß die experimentelle Forschung sich nicht mit der Ermittlung der W.Ü.Z. begnügen darf, sondern daß sie auch gleichzeitig die Funktion Ψ in Gleichung (90c) ermitteln muß.

g) Über die Zahlenwerte λ , c_p , γ und μ . Diese Stoffwerte sind aus den Zahlentabellen der physikalischen Literatur zu entnehmen. Da aber diese Stoffwerte alle mit der Temperatur sich ändern, so entsteht die Frage, bei welcher Temperatur sie aus den Tabellen entnommen werden müssen.

Der nächstliegende Gedanke ist der, die mittlere Temperatur T_F der Flüssigkeit als maßgebend zu betrachten. Allein wir würden damit die große Bedeutung außer acht lassen, welche der Temperatur T_W der Rohrwand zukommt. Wir wollen deshalb beide Temperaturen berücksichtigen und für die Größen λ , c_p , γ und μ Mittelwerte einführen, welche durch nachstehende vier Gleichungen definiert sind.

$$\lambda_m = \frac{1}{T_F - T_W} \cdot \int_{T_W}^{T_F} \lambda \, dT$$

$$c_{p,m} = \frac{1}{T_F - T_W} \cdot \int_{T_W}^{T_F} c_p \cdot dT$$

$$\gamma_m = \frac{1}{T_F - T_W} \cdot \int_{T_W}^{T_F} \gamma \cdot dT$$

$$\mu_m = \frac{1}{T_F - T_W} \cdot \int_{T_W}^{T_F} \mu \cdot dT.$$

Es müssen also die Gesetzmäßigkeiten bekannt sein, nach welchen die Stoffwerte von der Temperatur abhängen. Bei allen Arbeiten, welche größere Genauigkeiten erfordern, also vor allem bei Forschungsarbeiten muß nach diesen Gleichungen gerechnet werden. Für die meisten technischen Aufgaben dagegen genügt es, wenn wir eine mittlere Temperatur T_m durch die Gleichung

$$T_m = \frac{T_F + T_W}{2}$$

definieren und die Stoffwerte bei dieser mittleren Temperatur T_m aus ihren Tabellen entnehmen.

Das Wesen sowohl des genaueren als auch des einfacheren Verfahrens besteht darin, daß wir die Temperaturen T_W und T_F als gleichwertig annehmen und das hat zur Folge, daß die Rechnung gleiche Werte für den Wärmeübergang liefert, wenn die Wärme von der Flüssigkeit an die Wand oder wenn sie von der Wand an die Flüssigkeit übergeht. Inwieweit dies richtig ist, läßt sich aus dem bis heute vorliegenden Versuchsmaterial noch nicht beurteilen.

Wir haben uns in diesen Erörterungen über die Wahl der Stoffwerte an den Vorschlag gehalten, welchen Nußelt in seiner Arbeit „Der Wärmeübergang im Rohr“ (Z. d. V. d. I. 1917 S. 685) macht. In früheren Arbeiten hat Nußelt die Temperatur T_W und T_F getrennt in die Rechnung eingeführt. Nach der älteren Nußeltschen Annahme müßten wir z. B. die Gleichung (95a) in der Form

$$\alpha \cdot \frac{l_0}{\lambda_W} = F_{Ma} \left(\frac{w \cdot l_0 \cdot \varrho_F}{\mu_F}, \frac{w \cdot l_0}{a_F} \right)$$

schreiben, worin mit λ_W die W.L.F. bei der Temperatur der Wand und mit ϱ_F , μ_F und a_F diese Stoffwerte bei der Temperatur T_F bezeichnet sind. Die neue Nußeltsche Annahme dagegen gibt der Gleichung (95a) die Form:

$$\alpha \cdot \frac{l_0}{\lambda_m} = F_{Ma} \left(\frac{w \cdot l_0 \cdot \varrho_m}{\mu'_m}, \frac{w \cdot l_0}{a_m} \right).$$

Für den Wärmeübergang im Rohr haben die Versuche die neuere Annahme besser bestätigt als die ältere.

2. Die Strömung im geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt.

Wir beginnen mit diesem Strömungsvorgang, weil hierfür die hydrodynamischen Verhältnisse am besten bekannt sind, und weil auch über dem Wärmeübergang im Rohr die besten theoretischen und experimentellen Arbeiten vorliegen. Unter diesen Arbeiten stehen drei Arbeiten von Professor Nußelt weit voran. Sie sind nicht nur deshalb wichtig, weil fast unsere ganze einwandfreie Kenntnis vom Wärmeübergang in Rohren auf diese Arbeiten zurückzuführen ist, sondern mehr noch deshalb, weil sie den Weg zeigen, auf dem sich die Methoden der mathematischen Physik bei Aufgaben des Wärmeüberganges verwenden lassen.

a) Der Wortlaut der Aufgabe. In die Wandung eines großen Behälters ist ein gerades Rohr von kreisförmigem Querschnitt eingesetzt. Der Durchmesser des Rohres sei d , seine Länge L und seine Rauigkeit δ . Durch dieses Rohr soll in der Zeiteinheit eine Flüssigkeitsmenge vom Gewichte G strömen. Die Anfangstemperatur T_a soll im ganzen Eintrittsquerschnitt konstant sein, ebenso sei die Wandtemperatur T_w längs des ganzen Rohres konstant. Die Stoffwerte der Flüssigkeit (tropfbare Flüssigkeit oder Gas) nämlich λ , c_p , γ und μ sollen bekannt sein.

Es sind nachstehende 3 Fragen zu beantworten:

1. Wie ändert sich die mittlere Flüssigkeitstemperatur längs des Rohres?

2. Wie groß ist die Wärmemenge, die auf der Rohrstrecke $z = 0$ bis $z = L$ ausgetauscht wird?
3. Wie groß ist die W.Ü.Z. in den verschiedenen Entfernungen vom Rohranfang?

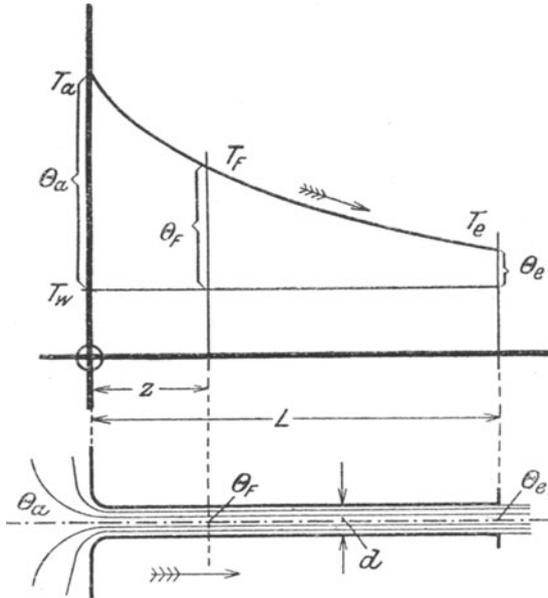


Fig. 57. Abkühlung der Flüssigkeit längs des Rohres.

Über die Strömungsgeschwindigkeit.

Für das Flüssigkeitsgewicht G gilt die Gleichung

$$G = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w_m \cdot \gamma.$$

Da sich längs des Rohres Temperatur und Druck ändern, so wird sich vor allem bei Gasen das spezifische Gewicht γ längs des Rohres ändern. Nachdem aber G und d für alle Querschnitte konstant sind, so müssen zufolge der obigen Gleichung sich w_m und γ immer so ändern, daß ihr Produkt ($w_m \cdot \gamma$) längs des ganzen Rohres konstant bleibt.

Wahl des Temperaturnullpunktes.

Die Bezeichnung Θ besagt, daß wir den Temperaturnullpunkt beliebig gewählt haben. Es vereinfacht die Schreibweise, wenn wir alle Temperaturen von der Wandtemperatur aus zählen. Dann müssen wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_w &= 0 \\ \Theta_a &= T_a - T_w \\ \Theta_f &= T_f - T_w \\ \Theta_e &= T_e - T_w \end{aligned} \right\} \text{ und } \frac{T_f - T_w}{T_a - T_w} = \frac{\Theta_f}{\Theta_a}$$

b) Die Aussagen des Ähnlichkeitsprinzipes. Wenn wir den Durchmesser d des Rohres als Bezugseinheit l_0 wählen, so haben wir als Argumente unserer Kennfunktionen

$$\text{die Größen } \left(\frac{w_m \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \frac{a}{w_m \cdot d}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right).$$

Hierbei haben wir nur das erste Rohrstück von der Länge z betrachtet. Für die ganze Rohrlänge brauchen wir lediglich das dritte Argument in L/d abzuändern.

Der Begriff „Klasse von Problemen der gleichen Art“ umfaßt hier alle Strömungen in geraden Rohren mit kreisförmigem Querschnitt, also die Strömungen aller Arten von Gasen und tropfbaren Flüssigkeiten und bei allen Geschwindigkeiten, aber auch in allen möglichen Rohren unabhängig vom Durchmesser, der Länge und der Rauigkeit.

Eine „Gruppe ähnlich berandeter Probleme“ greift alle jene Strömungen heraus, die in geometrisch ähnlichen Rohren verlaufen, also in Rohren mit gleicher Durchmesserlänge L/d und mit gleicher, relativer Rauigkeit δ/d .

1. Der Temperaturverlauf längs des Rohres.

Innerhalb einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme ist

$$\frac{\theta_a - \theta_F}{d} = \text{koeff} \cdot \text{grad } \theta; \text{ und nach Gleichung (89) ist:}$$

$$\text{grad } \theta = \frac{\theta_a}{d} \cdot F_{Ma}(\text{Re}, \text{Pe}).$$

Daraus folgt $\theta_a - \theta_F = \text{koeff} \cdot \theta_a \cdot F_{Ma}(\text{Re}, \text{Pe})$

oder $\theta_F = \theta_a \cdot (1 - \text{koeff} \cdot F_{Ma}(\text{Re}, \text{Pe}))$.

Durch Einführung einer neuen Funktion Φ für $1 - \text{koeff} \cdot F_{Ma}$ und gleichzeitige Erweiterung auf die ganze Klasse von Problemen gleicher Art, ergibt sich

$$\theta_F = \theta_a \cdot \Phi \left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots \dots (96a)$$

2. Der Wärmeaustausch ergibt sich sofort aus Gleichung (90c) zu:

$$Q = - \lambda \cdot \theta_a \cdot d \cdot \Psi \left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{L}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots \dots (96b)$$

3. Die W.Ü.Z. folgt aus Gleichung (95b) zu:

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \cdot \psi \left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{L}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots \dots (96c)$$

e) Die analytische Lösung der Aufgabe. Prof. Nußelt hat in einem Aufsatz in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (1910, S. 1154) den Wärmeübergang im geraden, zylindrischen Rohr unter einigen vereinfachenden Annahmen besprochen. Wir folgen bei der nachstehenden Erörterung im allgemeinen der Nußeltschen Arbeit. Es sollen die folgenden drei vereinfachenden Annahmen gelten:

1. Wollen wir uns auf die geordnete Strömung (also $\text{Re} < \text{Re}_{\text{krit.}}$) beschränken,

2. nehmen wir an, daß die Wandung des Rohres absolut glatt ist ($\delta = 0$),

3. soll das Rohr mit der Wandungstemperatur $\theta_w = 0$ nicht direkt in die Gefäßwandung eingesetzt, sondern noch eine Beruhigungstrecke mit der Wandungstemperatur θ_a vorgeschaltet sein. Dadurch gewinnen wir den Vorteil, daß wir die Störungen der Strömung durch den Rohranfang nicht zu berücksichtigen brauchen und bei Beschränkung auf geordnete Strömung die parabolische Geschwindigkeitsverteilung zugrunde legen können (S. 161).

Aufstellung des mathematischen Ansatzes.

Die Grundgleichung der Wärmeleitung bei aufgezwingener Strömung (Gleichung 85) lautet

$$(w, \text{grad } \theta) = a \cdot \Delta^2 \theta$$

und geht bei Verwendung von Zylinderkoordinaten über in:

$$w_r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} + w_\varphi \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + w_z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right).$$

Hierin setzen wir nach den Lehren der Hydrodynamik (parabolische Geschwindigkeitsverteilung S. 162)

$$w_r = 0; \quad w_\varphi = 0; \quad w_z = 2 \cdot w_m \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right).$$

Aus Symmetriegründen dürfen wir ferner $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = 0$ setzen und endlich nehmen wir —, vorerst nur unter Berufung auf Nußelt — an, daß $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ vernachlässigbar klein sei gegen $\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}$. Dadurch vereinfacht sich die Differentialgleichung und wir gelangen zu dem mathematischen Ansatz:

Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{2 w_m}{a} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z};$$

1. Oberflächen- oder Wandbedingung
für $z > 0$ und $r = R$; muß $\theta = 0$ sein.
2. Oberflächen- oder Eintrittsbedingung
für $z = 0$ und $r < R$ muß $\theta = \theta_a$ sein.

Gesucht: Eine Funktion $\theta = \Phi(r, z)$, welche diesen Bedingungen genügt.

Aufsuchen partikulärer Integrale.

Wir versuchen wieder die Annahme

$$\theta = \varphi(z) \cdot \psi(r);$$

Nachdem die Temperatur der Flüssigkeit mit zunehmender Rohrlänge sich ständig dem Werte $\theta_w = 0$ nähert, setzen wir für $\varphi(z)$ eine

Exponentialfunktion mit negativem Exponenten und zwar sogleich in der Form

$$\Theta = D \cdot e^{-q^2 \cdot \frac{a}{2w_m} \cdot z} \cdot \psi(r).$$

Hierin sind q und D willkürliche Konstanten.

Wenn wir die entsprechenden Ableitungen von Θ bilden und diese in die partielle Differentialgleichung einsetzen, so vereinfacht sich diese zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \psi(r)}{dr} + q^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot \psi(r) = 0,$$

oder
$$\frac{d^2 \psi(qr)}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \cdot \frac{d \psi(qr)}{d(qr)} + \left(1 - \left(\frac{qr}{qR}\right)^2\right) \cdot \psi(qr) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist eine Funktion $\psi(qr, qR)$, für welche sich ein geschlossener Ausdruck nicht angeben läßt. Nußelt gibt dafür eine unendliche Reihe; ihre zeichnerische Darstellung wäre eine Kurvenschar. Betrachten wir die Funktion einmal als bekannt, so lautet ein Teilintegral der Differentialgleichung:

$$\Theta = D \cdot e^{-(qR)^2 \cdot \frac{a}{2 \cdot w_m R^2} \cdot z} \cdot \psi(qr, qR)$$

Statt der willkürlichen Konstanten q bestimmen wir die Größe (qR) ; hierzu dient die Wandbedingung, welche bei allen Werten $z > 0$ und $r = R$ den Wert $\Theta = 0$ vorschreibt. Also

$$\psi(qR, qR) = \psi_1(qR) = 0;$$

$\psi_1(qR)$ ist eine oszillierende Funktion. Von den unendlich vielen Nullstellen derselben hat Nußelt die ersten drei Nullstellen berechnet.

$$(qR)_0 = \nu_0 = 2,705;$$

$$(qR)_1 = \nu_1 = 6,66;$$

$$(qR)_2 = \nu_2 = 10,3;$$

$$\dots = \dots = \dots$$

$$(qR)_n = \nu_n.$$

Es gibt also unendlich viele Teillösungen von der Form

$$D_n \cdot e^{-\nu_n^2 \cdot \frac{a \cdot z}{2 \cdot w_m \cdot R^2}} \cdot \psi\left(\nu_n \frac{r}{R}, \nu_n\right)$$

Wir können neue Funktionen R_n einführen, nach der Gleichung

$$R_n\left(\frac{r}{R}\right) = \psi\left(\nu_n \cdot \frac{r}{R}, \nu_n\right).$$

Die von Nußelt mit den ersten drei Werten ν_n berechneten Funktionen R_0, R_1, R_2 sind in Fig. (58) dargestellt.

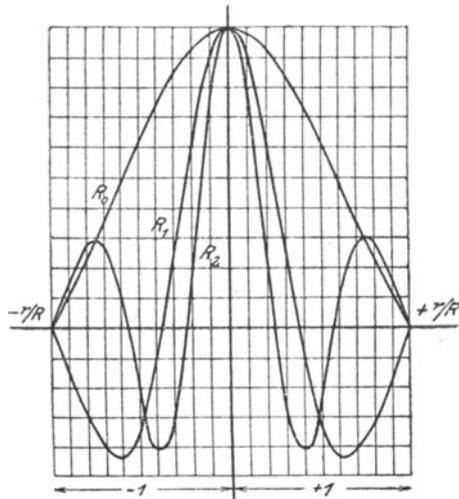


Fig. 58. Die Funktionen $R_0(r/R), R_1(r/R), R_2(r/R)$

klingen mit zunehmendem z sehr rasch ab, bis zuletzt nur mehr das erste Glied der Reihe überbleibt. Wir haben also hier zwei Stufen des Vorganges zu unterscheiden; die erste Stufe, welche sich vom Rohranfang bis zu einem Wert z_s — den wir Schwellenwert nennen wollen — erstreckt, steht noch unter dem Einfluß der Anfangstemperaturverteilung. Bei der zweiten Stufe, welche vom Schwellenwert z_s an bis zum Rohrende reicht, ist der Einfluß der Anfangstemperaturverteilung bereits verschwunden. Wir wollen keine neuen Bezeichnungen einführen, sondern nur von der ersten und zweiten Stufe sprechen.

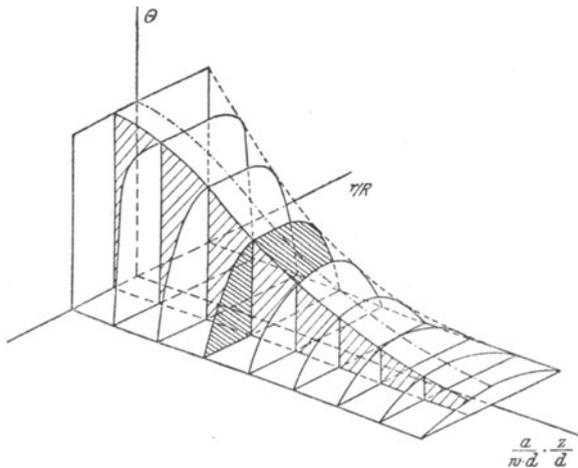


Fig. 59. Temperaturfeld im Rohr, nach analytischer Berechnung.

Die mittlere Flüssigkeitstemperatur θ_F .

Aus der Definitionsgleichung (93b) für θ_F einerseits und der Gleichung

$$w = 2 \cdot w_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

andererseits ergibt sich

$$\theta_F = \frac{\int_0^R \theta \cdot 2 \cdot w_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot 2r \cdot \pi \cdot dr}{\int_0^R 2 \cdot w_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot 2r \pi \cdot dr.}$$

Man dividiere Zähler und Nenner des Bruches durch $2 \cdot w_m \cdot 2 \cdot R^2 \cdot \pi$ und setze $r/R = y$:

$$\theta_F = \frac{\int_0^1 \theta \cdot (1 - y^2) \cdot y \cdot dy}{\int_0^1 (1 - y^2) \cdot y \cdot dy.}$$

Der Wert des Integrales im Nenner ist $1/4$; das Integral im Zähler läßt sich auswerten, indem man für θ seinen Wert aus Gleichung (97a) einsetzt und die Reihe gliedweise integriert. Man gelangt so zu einer neuen Reihe, deren erstes Glied z. B. lautet:

$$1,477 \cdot \theta_a \cdot e^{-3,558 \cdot \frac{a}{w_m R} \cdot \frac{z}{R} \cdot 4} \cdot \int_0^1 R_0(y) \cdot (1 - y^2) \cdot y \cdot dy.$$

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe der Angaben über die Funktion R_0 bei Nußelt berechnen. Sein Wert wurde zu 0,1389 gefunden. Der Koeffizient des ersten Gliedes der Reihe wird damit gleich 0,821. In derselben Weise wurden auch die anderen Glieder der Reihe berechnet und es ergab sich:

$$\begin{aligned} \theta_F &= 0,821 \cdot \theta_a \cdot e^{-14,634 \cdot \frac{a z}{w_m \cdot d^2}} + 0,0987 \cdot \theta_a \cdot e^{-88,7 \cdot \frac{a z}{w_m \cdot d^2}} \\ &+ 0,0135 \cdot \theta_a \cdot e^{-212,18 \cdot \frac{a z}{w_m \cdot d^2}} + \dots \dots \dots (98a) \end{aligned}$$

$$= \theta_a \cdot \Phi_1 \left(\frac{a}{w_m \cdot d} \cdot \frac{z}{d} \right) \dots \dots \dots (98b)$$

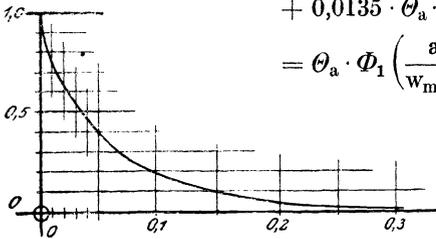


Fig. 60a. Temperatursenkung längs des Rohres, nach analytischer Berechnung.
Abszissen: $(Pe \cdot z/d)$
Ordinaten: $\theta_F : \theta_a = \Phi_1 (Pe \cdot z/d)$.

Es läßt sich also das Verhältnis $\theta_F : \theta_a$ durch eine Funktion mit nur dem einen Argument $Pe \cdot z/d$ darstellen.

Das Verhältnis ist für den Wert Null des Argumentes gleich „eins“, und nähert sich mit wachsendem Argument asymptotisch der Null.

Die übergegangene Wärmemenge Q ist nach Gleichung (90b) gleich

$$\begin{aligned} Q &= c_p \cdot \gamma \cdot \left(\theta_a - \theta_a \cdot \Phi_1 \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right) \right) \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w_m \\ &= c_p \cdot \gamma \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w_m \cdot \theta_a \cdot \left(1 - \Phi_1 \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right) \right) \dots \dots (99) \end{aligned}$$

Wenn wir für z den Wert L einsetzen, geben diese Gleichungen den Wärmeaustausch für die ganze Rohrlänge.

Das Temperaturgefälle gegen die Wand.

Durch Differentiation folgt aus Gleichung (97a)

$$\left(\frac{d \theta}{d r} \right)_{r=R} = - \frac{\theta_a}{d} \cdot \left\{ 2,996 \cdot e^{-14,634 \cdot \frac{a}{w_m \cdot d} \cdot \frac{z}{d}} + 2,228 \cdot e^{-88,7 \cdot \frac{a}{w_m \cdot d} \cdot \frac{z}{d}} + 1,006 \cdot e^{-212,18 \cdot \frac{a}{w_m \cdot d} \cdot \frac{z}{d}} + \dots \right\} \dots (100a)$$

$$= - \frac{\theta_a}{d} \cdot \chi \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right) \dots \dots \dots (100b)$$

Den Verlauf der Funktion χ zeigt Fig. 60b. Für den Wert Null des Argumentes beginnt die Funktion mit dem Wert ∞ , nimmt dann stetig ab und nähert sich ebenso wie die Funktion Φ_1 asymptotisch dem Werte Null.

Die Wärmeübergangszahl a .

Für die Wärmemenge dQ , die innerhalb der Rohrstrecke dz an die Wandung übergeht, lassen sich die beiden Gleichungen

$$dQ = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)_R \cdot d \cdot \pi \cdot dz$$

und $dQ = a \cdot \Theta_F \cdot d \cdot \pi \cdot dz$ aufstellen. Aus ihnen folgt:

$$a = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)_R \cdot \frac{1}{\Theta_F} = + \frac{\lambda}{d} \frac{\chi \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right)}{\Phi_1 \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right)} = + \frac{\lambda}{d} \cdot \psi \left(Pe \cdot \frac{z}{d} \right). \quad (101)$$

Den Verlauf der Funktion ψ zeigt Fig. 60c. Für das Argument Null ist der Funktionswert unendlich groß. Er nimmt dann sehr rasch ab und bleibt von einem bestimmten Argumentwert an praktisch konstant. Es ist dies jener Schwellenwert, welcher die erste Stufe von der zweiten Stufe trennt. Für Werte des Argumentes, welche über diesem Schwellenwert liegen, reduzieren sich die beiden Reihen (98) und (100) auf ihre ersten Glieder und der Quotient der beiden Funktionen hat dann für alle Argumente den Wert $2,996 : 0,821 = 3,65$. Die Lage des Schwellenwertes hängt natürlich von der gewählten Genauigkeit ab. Rechnet man mit einer Genauigkeit von $1/10$, so wird

$$\left(\frac{a}{w_m \cdot d} \cdot \frac{z}{d}\right)_s = 0,05 \dots \dots \dots (102)$$

Die vorstehende Rechnung weicht in ihrer zweiten Hälfte zum Teil von der Nußeltschen Arbeit ab.

Es hat nämlich Nußelt seine ganze Berechnung für die mittlere Temperatur Θ_Q des Querschnittes (vgl. S. 175) und nicht wie wir es stets halten

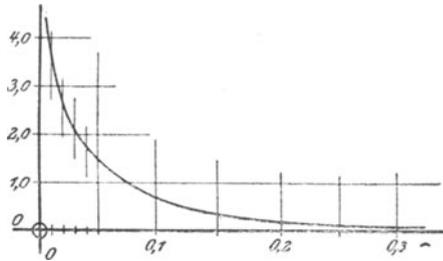


Fig. 60b. Temperaturgefälle gegen die Rohrwand, nach analytischer Berechnung.

Abszissen: $(Pe \cdot z/d)$

Ordinaten: $-\frac{d}{\Theta_a} \cdot \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right) = \chi (Pe \cdot z/d)$.

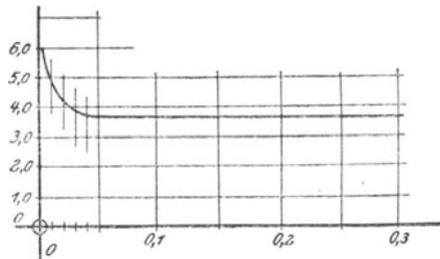


Fig. 60c. Wärmeübergangszahl, nach analytischer Berechnung.

Abszissen: $(Pe \cdot z/d)$;

Ordinaten: $a \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi (Pe \cdot z/d)$.

wollen, für die mittlere Temperatur Θ_F der Flüssigkeit durchgeführt. Für die zweite Stufe des Vorganges ist Θ_F 1,41mal so groß als Θ_Q ; für die erste Stufe ist das Verhältnis veränderlich zwischen 1,00 und 1,41. Ebenso hat Nußelt die W.Ü.Z. durch die Gleichung

$$dQ = \alpha \cdot (t_Q - t_W) \cdot dF \cdot \tau$$

definiert, während wir die Gleichung (91d)

$$dQ = \alpha \cdot (t_F - t_W) \cdot dF \cdot \tau$$

gelten lassen. Infolgedessen sind die Werte, welche Nußelt für α berechnet, 1,00 bis 1,41mal größer als die in Fig. 60c dargestellten Werte.

Beurteilung des Rechnungsganges.

Bevor wir zu einer Besprechung der gefundenen Ergebnisse vom physikalischen Standpunkte aus übergehen, wollen wir uns über den Wert der Ergebnisse in bezug auf Genauigkeit und Zuverlässigkeit klar werden.

Vor allem sei nochmals hervorgehoben, daß der ganze Rechnungsgang nur für geordnete Strömung gilt.

Bei Gelegenheit der Aufstellung der Differentialgleichung (S. 182) haben wir verschiedene, vereinfachende Annahmen gemacht, von denen die eine Annahme

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

nicht weiter begründet wurde.

Eine genauere Rechnung würde uns zeigen, daß diese Bedingung für die zweite Stufe des Vorganges genügend erfüllt ist. Für Werte des Argumentes ($Pe \cdot z/d$), welche dagegen wesentlich unterhalb des Schwellenwertes liegen, trifft unsere Annahme nicht mehr zu, vor allem nicht für die Stellen $z = 0$ und $r = R$. Hier ist nicht nur $\partial \Theta / \partial z$, sondern auch $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}$ unendlich groß. An dieser Stelle findet also eine sehr starke axiale Wärmeabströmung durch Leitung statt und dies macht das genauer Bestehen der Eintrittsbedingung bei vorgeschalteter Beruhigungsstrecke unmöglich. Andererseits lassen sich aber keine anderen Eintrittsbedingungen aufstellen, welche die tatsächlichen Verhältnisse besser wiedergeben, ohne dabei die rechnerischen Schwierigkeiten allzusehr zu erhöhen. Wir dürfen also nicht erwarten, daß die Zahlenwerte, welche in den Ergebnissen unserer mathematischen Berechnungen enthalten sind, vollkommen richtig sind. Dagegen werden die Gesetzmäßigkeiten, die wir aus unseren gewonnenen Gleichungen herauslesen können, ihrem Sinne nach richtig sein.

Es ist hier die Stelle einer Bemerkung über den Wert einer solch rein analytischen Behandlung von Aufgaben über den Wärmeübergang einzufügen. Im Wesen dieser Vorgänge liegt es begründet, daß sie einer mathematischen Behandlung erst nach Einführung ganz erheblich vereinfachender Annahmen zugänglich werden. Damit werden natürlich die Ergebnisse rein zahlenmäßig genommen, stets ungenau. In der Gewinnung dieser Zahlenergebnisse liegt aber auch gar nicht der Hauptwert solcher Berechnungen, sondern in der Klärung unserer Anschauung vom Wesen der Vorgänge.

Schon die Fassung des Wortlautes der Aufgabe, insbesondere die Aufstellung der Randbedingungen zwingen uns zum Nachdenken über die den Vorgang beeinflussenden Umstände, erleichtern uns aber auch gleichzeitig das Auffinden dieser Umstände. Die Gestalt des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes, welche bei der Berechnung der Wärmemengen nur als Zwischenergebnisse aufzufassen sind, gewähren einen Einblick in die Art des Wärmetransportes im Feld. Die Schlußergebnisse endlich, welche sich auf die Wärmemengen beziehen, sind zwar nicht zahlenmäßig, aber doch ihren wesentlichen Grundzügen nach richtig. Der experimentellen Forschung verbleibt dann nur noch die Aufgabe, die Ergebnisse der Theorie nachzuprüfen und zu verbessern.

d) **Die Aussagen der Theorie für die geordnete Strömung.** Das Prinzip der Ähnlichkeit hatte uns gelehrt, daß der Temperaturabfall $\Theta_F : \Theta_a$ längs des Rohres und auch die W. Ü. Z. von den Größen

$$\left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \text{ abhängt.}$$

Weitere Aufschlüsse können wir aus der analytischen Lösung gewinnen. Diese zeigt, daß bei vollständig glatten Rohren und bei geordneter Strömung die Größe Re als Argument verschwindet. Der Grund ist folgender: Das Temperaturfeld ist zwar in seiner Gestalt von der Gestalt des Geschwindigkeitsfeldes abhängig. Da dieses aber — solange nur $\text{Re} < \text{Re}_{\text{krit}}$ ist, — vom speziellen Wert Re unabhängig ist, so ist auch das Temperaturfeld bei $\text{Re} < \text{Re}_{\text{krit}}$ vom Werte Re unabhängig.

Über den Einfluß des letzten Argumentes, der relativen Rauigkeit $\delta : d$, vermag uns die Theorie keinen Aufschluß zu geben; wir müssen uns auch bei der weiteren Besprechung auf glatte Rohre beschränken.

Es verbleiben dann nur mehr die beiden Veränderlichen Pe und z/d und hier zeigt sich nochmals eine Vereinfachung, indem sich diese beiden zu dem einen Argument

$$\text{Pe} \cdot \frac{z}{d} = \frac{a \cdot z}{w_m \cdot d^2} \text{ vereinigen lassen.}$$

Davon ist in den Figg. 60 bereits Gebrauch gemacht. Für eine Besprechung der Ergebnisse vom physikalischen Standpunkte aus ist jedoch diese Vereinigung nicht zweckmäßig. Wir wollen hier lieber die Funktionen als solche mit zwei Argumenten bestehen lassen; ihre zeichnerischen Darstellungen haben also durch Kurvenscharen und nicht durch einzelne Kurven zu erfolgen, und zwar können diese Kurvenscharen aus den entsprechenden Einzelkurven der Figg. 60 durch einfache Dehnung des Abszissenmaßstabes abgeleitet werden.

Die Änderung der Flüssigkeitstemperatur des Rohres.

In Fig. 61a sind die Durchmesserlängen z/d als Abszissen und die Werte $\Theta_F : \Theta_a$ als Ordinaten aufgetragen. Die Kurven sind Kurven konstanter Kenngröße Pe . Fig. 61a ist ein Bild der Gleichung

$$\Theta_F : \Theta_a = \dot{\Phi}_{\delta=0} \left(\frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d} \right).$$

Die einzelnen Kurven zeigen, wie sich die Flüssigkeit bei den verschiedenen Strömungszuständen längs des Rohres abkühlt. Hierbei sind die einzelnen Strömungszustände durch ihre Kenngröße ($w_m \cdot d$) : a gekennzeichnet. Die Art der Temperatursenkung mit wachsender Rohrlänge ist bei allen Werten der Kenngrößen dieselbe; der absolute Betrag der Senkung ist dagegen von der Kenngröße abhängig. Die Temperatur fällt um so rascher, je kleiner $1:Pe$ ist, also je kleiner w_m , je kleiner d und je größer a ist.

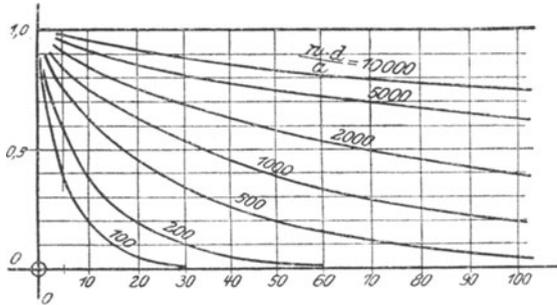


Fig. 61a. Temperatursenkung längs des Rohres nach analytischer Berechnung.

Abszissen: z/d ;

Parameter: $\frac{w_m \cdot d}{a}$;

Ordinaten: $\theta_r : \theta_a$.

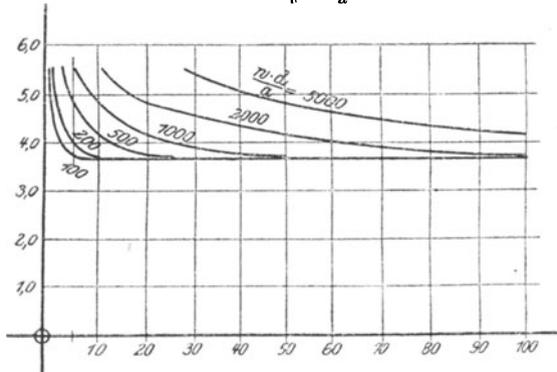


Fig. 61b. Wärmeübergangszahl nach analytischer Berechnung.

Abszissen: z/d ;

Parameter: $\frac{w_m \cdot d}{a}$;

Ordinaten: $a \cdot \frac{d}{\lambda}$.

Die Wärmeübergangszahl.

Die Fig. 61b stellt die Gleichung

$$a \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi_{\delta=0} \left(\frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d} \right)$$

graphisch dar. Sie zeigt, daß bei jedem Wert der Kenngröße ($w_m \cdot d/a$) die W.Ü.Z. mit wachsendem z abnimmt und sich stetig dem festen Wert $3,649 \cdot \frac{\lambda}{d}$ nähert.

e) **Die Aussagen der Theorie für turbulente Strömung.** Da es nicht möglich ist, das turbulente Strömungsfeld durch einen einfachen, analytischen Ausdruck darzustellen, so ist es auch nicht möglich, der Differentialgleichung eine so einfache Gestalt zu geben, daß ihre Integration möglich wäre.

Wir müssen deshalb beim turbulenten Strömungszustand auf eine analytische Behandlung der Aufgabe verzichten und sind in der Hauptsache auf den Versuch angewiesen. Jedoch befähigt uns die Theorie noch in mancher Hinsicht dem Versuch vorzuarbeiten.

Die Wärmeleitung in einer turbulenten Flüssigkeit.

Wenn wir bei einer turbulenten Flüssigkeit ein Flüssigkeitsteilchen auf seiner Bahn verfolgen, so können wir seine Bewegung in eine stetig fortschreitende und in eine oszillierende zerlegen. Das Feld der fortschreitenden Bewegung kann nach verschiedenen Messungen durch eine Kurve dargestellt werden, welche der Parabel ähnlich ist (Fig. 56b), nur daß sie einen breiteren Scheitel besitzt. Man darf annehmen, daß der Charakter dieser Kurve, sowie einmal Turbulenz eingetreten ist, sich nicht mehr wesentlich ändert, also vom speziellen Wert Re ziemlich unabhängig ist. Das Temperaturfeld, das unter dem Einfluß dieses unveränderlichen Strömungsfeldes allein entstünde, würde dem in Fig. 59 dargestellten ähnlich sein und würde also vom Werte Re ziemlich unabhängig sein, solange nur $Re > Re_{krit.}$ ist.

Nun kommt noch die Wirkung der oszillierenden Bewegung dazu. Da die Schwingungen der Teilchen in allen Richtungen erfolgen, so erfolgen sie auch in Richtung des Radius, also in Richtung eines starken Temperaturgefälles. Sie bewirken damit einen Wärmetransport durch Konvektion, welcher in seiner Wirkung einer Vermehrung der W.L.F. gleichkommt. Es kann als wahrscheinlich gelten, daß der Mittelwert der Schwingungsdauer eines Teilchens und der Mittelwert der Ausschläge eines Teilchens von dem Zahlenwert der Kenngröße Re abhängt. Daraus wäre dann zu schließen, daß auch die scheinbare Vermehrung der W.L.F. von Re abhängt.

Man hat versucht, der Turbulenz durch Einführung eines erhöhten Wertes von λ — der sog. Turbulenzwärmeleitfähigkeit — Rechnung zu tragen. Es ist dies ein Ausweg, welcher dem der Einführung einer Turbulenzreibungsziffer in der Hydrodynamik nachgebildet ist. Obwohl ich den Gedanken einer scheinbaren Vermehrung der W.L.F. für geeignet halte, die Vorstellung zu unterstützen, so erwarte ich mir doch von einer Übernahme dieses Begriffes in die Zahlenrechnung keinen Vorteil, da für die Wahl des Turbulenzwertes jeder Anhalt fehlt.

Nachdem nun unserer Hilfsvorstellung gemäß die Turbulenz in ihrer Wirkung nur einer Vermehrung der W.L.F. gleichkommt, so dürfen wir annehmen, daß auch bei der turbulenten Strömung das Temperaturfeld in seinen wesentlichen Zügen der Darstellung in Fig. 59 entspricht

und daß für die Werte $(\theta_F : \theta_a)$ und $(\alpha \cdot d/\lambda)$ ähnliche Gesetzmäßigkeiten gelten, wie sie durch die Figg. 61a und 61b gegeben sind, vor allem daß die Wärmeübergangszahl längs des Rohres abnimmt.

Die Wirkung der Prandtlschen Grenzschicht.

Während bei der geordneten Strömung im ganzen Feld ein einheitlicher Strömungszustand herrscht, bestehen bei der turbulenten Strömung zwei Gebiete verschiedener Strömungsart infolge des Auftretens der Laminarbewegung in der Grenzschicht an der Wand.

Die Wirkung dieser Grenzschicht auf den Wärmeübergang zeigt unter Zuhilfenahme des Begriffes der Turbulenzleitfähigkeit die folgende Überlegung: In der Grenzschicht herrscht eine geringere W.L.F. als im übrigen Feld. Infolgedessen wird (bei gleicher Temperaturdifferenz $(t_F - t_W)$) der Wärmeübergang mit abnehmender Dicke der Grenzschicht zunehmen. Da nun wahrscheinlich die Dicke der Grenzschicht in geringem Maße mit zunehmendem Werte Re abnimmt, so ist zu erwarten, daß der Wärmeübergang mit wachsendem Re ebenfalls etwas zunimmt.

Die Rauigkeit der Rohrwand.

Maßgebend ist, wie schon früher erwähnt, die auf den Durchmesser bezogene Rauigkeit δ/d .

Die Rauigkeit der Wand beeinflusst in geringem Grade den Eintritt der Turbulenz, indem eine große Rauigkeit den kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl etwas herabdrückt. Vor allem aber beeinflusst sie die Gestalt des Geschwindigkeitsfeldes, was durch einen vermehrten Strömungswiderstand nachweisbar ist. Über diese Beeinflussung des Geschwindigkeitsfeldes ist Genaueres nicht bekannt und deshalb kann die Wirkung der Rauigkeit auf den Wärmeübergang nur durch den Versuch ermittelt werden.

f) Kurze Zusammenfassung der theoretischen Ergebnisse. Die Theorie ist also nicht instande das Problem des Wärmeüberganges im Rohr vollständig zu lösen, sondern sie muß die endgültige Lösung des Problemes der experimentellen Forschung zuweisen.

Die Leistungen der Theorie bestehen vor allem in der Aufstellung der beiden Gleichungen (96a) und (96c)

$$\theta_F : \theta_a = \Phi \left(\frac{w_m \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right)$$

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi \left(\frac{w_m \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right)$$

Durch diese beiden Gleichungen ist vor allem das eine erreicht, daß der experimentellen Forschung eine klare und physikalisch einwandfrei formulierte Aufgabe gestellt ist. Zweitens ist durch diese Gleichungen die Zahl der unabhängigen Veränderlichen in den gesuchten Funktionen von 7 auf 4 herabgemindert.

Darüber hinaus sagt die Theorie voraus, daß die Kenngröße $(w_m \cdot d \cdot \rho/\mu)$ von geringem Einfluß ist, so daß sie in erster Annäherung aus den Gleichungen fortgelassen werden kann.

Über den ungefähren Charakter der Funktionen

$$\Phi_{\delta} = \text{const} \left(\frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d} \right) \text{ und } \psi_{\delta} = \text{const} \left(\frac{w_m \cdot d}{a}, \frac{z}{d} \right)$$

gibt die Theorie weitgehendste Aufschlüsse. Nur über den Einfluß der Rauigkeit δ/d vermag die Theorie nichts auszusagen.

g) Die Ergebnisse der experimentellen Arbeiten.

Die Versuche von Nußelt (Habilitationsschrift).

Der Versuchsapparat bestand in der Hauptsache aus einem nahtlos gezogenen Messingrohr von 22,01 m/m innerem Durchmesser, welches auf der Außenseite durch kondensierenden Dampf auf gleichmäßiger, hoher Temperatur gehalten wurde. Durch das Innere dieses Rohres strömte das untersuchte Gas.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde aus dem Gasvolumen berechnet und die Oberflächentemperatur mittels Thermoelemente direkt gemessen. Die Temperaturen im Inneren des Gasstromes bestimmte Nußelt mit Hilfe eines Widerstandsthermometers, welches über den ganzen Rohrquerschnitt gitterartig ausgespannt war und welches längs des ganzen Rohres verschoben werden konnte. Nußelt bestimmte also damit den Mittelwert t_q im Querschnitt und nicht die mittlere Temperatur t_F des Gases.

Die Zahlentafeln Nr. 3, 4 und 5 der Veröffentlichung geben eine Zusammenstellung der Versuchsablesungen und der errechneten W.Ü.Z.

Nußelt führte sämtliche Versuche mit demselben Rohr durch, er verzichtete also auf eine Bestimmung des Einflusses von Rohrdurchmesser und Rauigkeit der Wand. Auch der Einfluß der Rohrlänge läßt sich aus den Nußeltschen Versuchen nicht feststellen, da meist mit derselben Meßstrecke gearbeitet wurde. Die Nußeltschen α -Werte können als Mittelwerte längs einer Rohrstrecke von etwa 25 Durchmesserlängen gelten, die in der Nähe des Rohranfanges liegt.

Dagegen untersuchte Nußelt die Abhängigkeit der W.Ü.Z. von der Strömungsgeschwindigkeit w_m und von der physikalischen Natur des strömenden Körpers, also von seinen Stoffwerten ρ , λ , c_p und μ und zwar veränderte er diese Werte durch Verwendung verschiedener Gase (Preßluft, Leuchtgas und Kohlensäure) und bei Preßluft noch überdies durch Veränderung des Druckes (rd. 1,15, 2, 4, 7, 10, 13 und 16 at.). Flüssigkeiten hat Nußelt nicht untersucht.

Nußelt beschränkt sich also darauf, die Gestalt der Funktion in der vereinfachten Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \text{Funkt} \left(\frac{\delta}{d}, \frac{z}{d} \right) \left(\frac{w_m \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \frac{w_m \cdot d}{a} \right) \dots \dots (103a)$$

zu finden. Da nach unseren obigen theoretischen Ausführungen die Kenngröße Re von geringem Einfluß ist, so können wir die Gleichung zunächst einmal weiter vereinfachen, indem wir setzen:

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \text{Funkt} \left(\frac{\delta}{d}, \frac{z}{d} \right) \left(\frac{w_m \cdot d}{a} \right) \dots \dots \dots (104a)$$

Um nun diese Funktion zu finden, kann man etwa wie folgt vorgehen: Man berechnet für einen beliebig herausgegriffenen Versuch die Werte ($w_m \cdot d/a$) einerseits und ($\alpha \cdot d/\lambda$) andererseits, und trägt in einem Schaubild z. B. den ersten Wert als Abszisse, den zweiten Wert als Ordinate auf. Aus Gründen, die wir später kennen lernen werden, wählt man zweckmäßigerweise gleich ein logarithmisches Koordinatensystem. Man erhält so im Schaubild einen Punkt, welcher den herausgewählten Versuch darstellt, z. B. Versuch Nr. 37 in Fig. 62.

Zahlentafel Nr. 14.
Versuchswerte nach Nußelt.

Nr.	p	$\frac{w_m \cdot d}{a}$	$\alpha \frac{d}{\lambda}$	Nr.	p	$\frac{w_m \cdot d}{a}$	$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}$	Nr.	p	$\frac{w_m \cdot d}{a}$	$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}$
1		397	6,28	25		1 447	13,15	46		3 942	23,42
2		812	6,72	26		2 876	15,83	47		8 110	34,58
3		1 153	6,61	27		6 660	29,24	48		19 030	64,8
4		1 890	8,36	28		12 880	49,82	49		38 050	116,8
5		3 625	16,43	29		23 660	82,40	50		53 750	152,0
6		5 388	23,95	30		33 920	112,6	51		54 350	153,6
7		7 430	31,68	31		46 300	141,0	52		55 900	158,0
8		10 460	41,95	32		47 100	133,4	53		57 100	164,0
9		13 270	50,30	33		57 800	168,2	54		80 320	212,0
10		16 300	58,85	34		65 700	186,0	55		87 800	222,0
11		17 650	64,00	35		1 856	18,55	56		96 500	268,0
12		21 920	77,65	36		3 406	19,50	57		99 850	254,5
13		24 900	82,75	37		6 175	27,88	58		5 430	29,38
14		560	8,72	38		12 020	48,08	59		10 410	43,20
15		1 471	9,99	39		23 000	80,3	60		28 330	96,1
16		3 363	18,33	40a		35 400	111,8	61		55 400	168,9
17		6 545	29,80	40b		35 750	104,6	62		77 100	218,3
18		13 060	52,60	41		51 200	146,9	63		96 700	233,4
19		13 050	49,5	42		53 280	159,6	64		5 010	32,52
20		20 470	72,7	43		53 800	148,3	65		10 950	46,15
21		26 500	87,8	44		78 500	215,0	66		9 900	42,40
22		31 700	106,8	45		91 600	243,0	67		28 500	95,3
23		40 850	124,1					68		58 450	168,7
24		44 580	132,7					69		77 800	215,6

In derselben Weise stellt man erst einmal alle jene Versuche dar, welche mit Luft vom selben Druck ausgeführt wurden, also alle jene Versuche, für welche annähernd gleiche Stoffwerte gelten. Die Versuche unterscheiden sich aber durch verschiedene Strömungsgeschwindigkeit w_m und verschiedene W.Ü.Z. und ergeben damit verschiedene Werte

$$\frac{w_m \cdot d}{a} \quad \text{und} \quad \alpha \frac{d}{\lambda}.$$

Die so entstehenden Punkte kann man durch eine Kurve verbinden und diese Kurve ist das Abbild der gesuchten Funktion in Gleichung (104a). In Fig. 62 ist dies die stark ausgezogene Linie.

Wir können nun noch eine Probe auf die Richtigkeit des Prinzipes der Ähnlichkeit machen. Nach diesem Prinzip gehört zu einem willkürlich gewählten Argumentwert ($w_m \cdot d/a$) ein ganz bestimmter Funktionswert ($\alpha \cdot d/\lambda$), und dieser Wert ist unabhängig davon, wie sich das Argument im einzelnen zusammensetzt.

Wenn wir also aus den Nußeltschen Versuchen eine Versuchsreihe mit anderem Druck der Preßluft, also mit anderen Werten a herausgreifen, so muß die Kurve, welche diese Versuchsreihe liefert, sich völlig

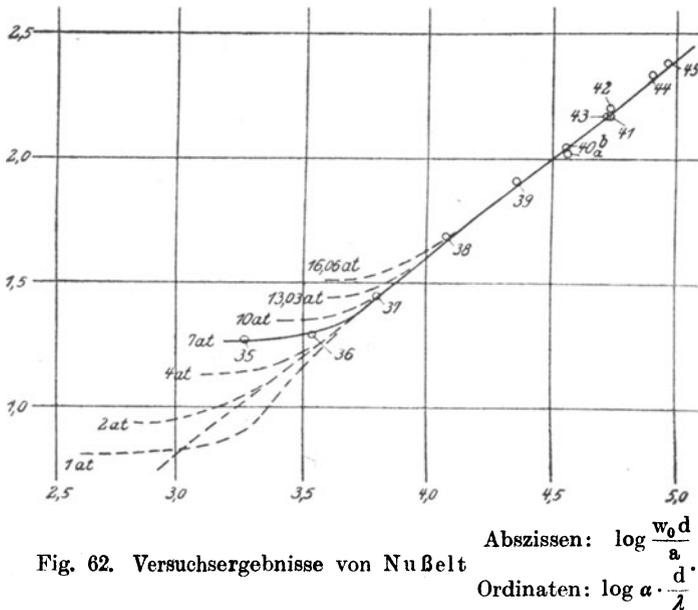


Fig. 62. Versuchsergebnisse von Nußelt

mit der Kurve der ersten Versuchsreihe decken. Nußelt hat im ganzen 7 Versuchsreihen mit Drucken von 1–16 at durchgeführt. Die Fig. 62 stellt in den gestrichelten Linien diese Kurven dar. Man erkennt daraus, daß sich diese Kurven nur für Argumentwerte, welche größer als 10000 sind, völlig decken; für kleinere Werte des Argumentes weichen die Kurven sehr stark voneinander ab. Der nächstliegende Gedanke, daß es sich bei diesen niederen Argumentwerten um geordnete Strömung handelt, kann nicht richtig sein, denn auch bei der geordneten Strömung müßten sowohl nach dem Ähnlichkeitsprinzip als nach der analytischen Lösung die Kurven sich decken.

Eine genügende Erklärung für diese Erscheinung vermag ich nicht zu geben. Jedenfalls ist das eine sicher, daß die Gleichung (104a) für diese geringen Strömungsgeschwindigkeiten nicht mehr richtig ist, entweder weil die Kenngröße Re nicht mehr ohne Einfluß ist, oder weil

sich infolge der geringen Geschwindigkeit der Auftrieb der wärmeren Luftteilchen bemerkbar macht, so daß die Aufgabe nicht mehr in das Gebiet dieses Abschnittes C gehört, weil neben den äußeren auch noch innere Bewegungsursachen auftreten. Eine völlige Klärung dürften wohl nur weitere Versuche bringen.

Wir müssen uns deshalb auf das Gebiet $(w_m \cdot d/a) > 10\,000$ beschränken. Hier zeigt sich, daß sich die Kurven für Preßluft bei verschiedenen Drucken und auch für Leuchtgas und Kohlensäure vollständig decken, daß also für dieses Gebiet die Gleichung (104a) richtig ist.

Ferner zeigt sich, daß die Kurve im logarithmischen Koordinatensystem eine Gerade wird, daß sich also die Funktion durch eine Potenzfunktion darstellen läßt. Es ergibt sich die Gleichung:

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = 0,0291 \cdot \left(\frac{w_m \cdot d}{a} \right)^{0,786} \dots \dots \dots (104a)$$

oder wenn wir $\omega_m = \frac{1}{3600} w_m$ einführen, erhalten wir

$$\alpha = \frac{d}{\lambda} = 18,1 \cdot \left(\frac{\omega_m \cdot d}{a} \right)^{0,786} \dots \dots \dots (104c)$$

Nußelt selbst gibt in seiner Habilitationsschrift den Wert 15,90 statt 18,1 an, weil er damals noch mit dem Wert λ_{wand} auf der linken Seite der Gleichung gerechnet hat.

Die Gleichung (104c) kann noch ergänzt werden. Durch ein genaueres Auswertungsverfahren fand Nußelt, daß die Kenngröße Re nicht ganz ohne Einfluß ist. Aus den Gleichungen (32), (51) und (44c) der Nußelt-schen Arbeit läßt sich die genauere Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \text{koeff} \cdot \left(\frac{w_m \cdot d \cdot \rho}{\mu} \right)^{-0,064} \cdot \left(\frac{w_m \cdot d}{a} \right)^{0,850} \dots \dots (103b)$$

ableiten.

Wegen der geringen Veränderlichkeit der ersten Potenzfunktion ist diese genauere Formel von geringer praktischer Bedeutung.

Andere Versuche mit Gasen und Dämpfen.

Außer den Nußeltschen Versuchen seien noch die nachstehenden Versuche angeführt. Sie sind nach der Zeit ihrer Veröffentlichung geordnet:

Josse, „Versuche über Oberflächenkondensatoren, insbesondere für Dampfturbinen“. Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1909, S. 328.

Jordan, „On the rate of heat transmission between fluids and metal surfaces“. Proc. Instit. of Mech. Eng. 1909, II, S. 1317.

Rietschel, „Untersuchungen über Wärmeabgabe, Druckhöhenverlust und Oberflächentemperatur bei Heizkörpern unter Anwendung großer Luftgeschwindigkeiten“. Mitteilung der Prüfungsanstalt für Heizungs- und Lüftungseinrichtungen. Heft 3. Techn. Hochschule Berlin 1910.

Gröber, „Der Wärmeübergang strömender Luft an Rohrwandungen“. Mitteil. über Forschungsarbeiten. (Ver. d. Ing.). Heft 130.

Zusammenstellung einiger Versuchsaangaben.

Name	d(cm)	l/d	p	ω	Messung der Gas- temperatur	t_w	t_{Gas}	Gasart	Rohr	Wärme- Übergang
Nußelt	2,201	27	1,15 at bis 16,06 at	0,37 bis 30	Widerstandsthermo- meter über den Quer- schnitt ausgespannt	100°	16,5° bis 68°	Luft, Kohlensäure, Leuchtgas	nahtlos gezogenes Messingrohr	von Wand an Gas
Josse	2,3	58	1,03 at 0,512 at 0,106 at	1,5 bis 19	wahrscheinlich durch Quecksilberthermo- meter	100°	17° bis 36°	Luft	Kupferrohr	von Wand an Gas
Jordan " II " III	5,00 3,14 1,29	20 32 78	etwas größer als 1 at		am Eintritt ins Rohr durch ein festes Thermo- element und am Aus- tritt aus dem Rohr durch ein Quecksilber- thermometer	27° C bis 45°	117° bis 271°	Luft	Kupferrohr	von Gas an Wand
Rietschel	3,35	29,2 und 19,4	etwas kleiner als 1 at	1,0 bis 30	Quecksilberthermo- meter	100° bis 150°	20° bis 60°	Luft	patent- geschweißtes Schmiede- eisenrohr	von Wand an Gas
Gröber	6,2	24	1 at	5 bis 15	Thermoelement längs des Durchmessers ver- schiebbar	60° bis 200°	90° bis 325°	Luft	nahtlos gezogenes Stahlrohr	von Gas an Wand
Poensgen	9,57 3,94	30 bis 70	1 at bis 9 at	1,9 bis 15	Thermoelement längs des Durchmessers ver- schiebbar	100° bis 260°	140° bis 305°	überhitzter Wasserdampf	nahtloses Mannesmann- rohr	von Dampf an Wand

Poensgen, „Über die Wärmeübertragung von strömendem, überhitztem Wasserdampf an Rohrwandungen und von Heizgasen an Wasserdampf“. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1916. S. 27.

Aus allen diesen Versuchen können wir — ebenso wie wir es bei den Nußeltschen Versuchen getan haben — die zusammengehörigen Werte-

paare $\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}$ und $\frac{w_m \cdot d}{a}$

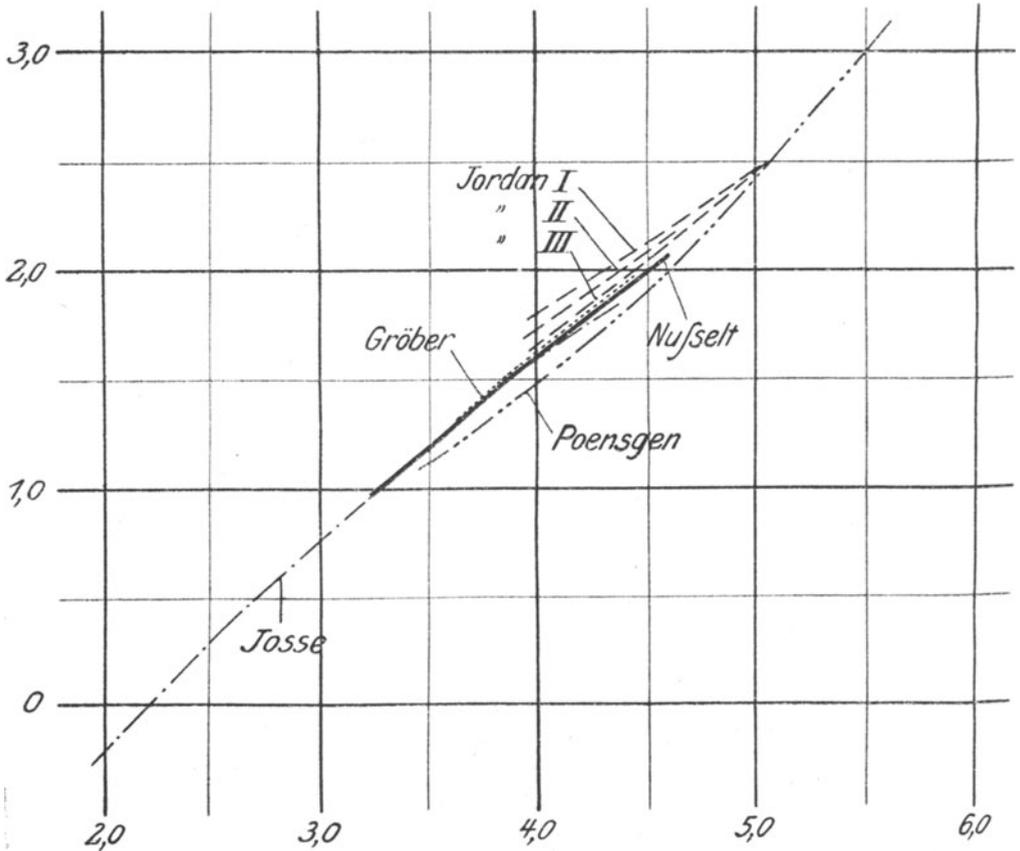


Fig. 63. Wärmeübergangszahl nach verschiedenen Versuchen.

Abszissen: $\log \frac{w_m \cdot d}{a}$;

Ordinaten: $\log \left(\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} \right)$.

berechnen und in einem logarithmischen Koordinatensystem auftragen und erhalten, damit Kurven, welche die Funktion in Gleichung (104a) darstellen.

Da bei Flüssigkeiten die Wärmeleitfähigkeit λ und ihre Abhängigkeit von der Temperatur nur sehr ungenügend bekannt sind, so läßt sich aus den Versuchen mit Flüssigkeiten die Größe $(w_m \cdot d/a)$ nicht mit genügender Genauigkeit berechnen. Aus diesem Grunde müssen wir uns bei dieser ganzen Betrachtung auf die Versuche mit Gasen und Dämpfen beschränken. Betreffs des Wärmeüberganges bei Wasser verweise ich auf die Versuche von A. Soenneken, „Der Wärmeübergang von Rohrwänden an strömendes Wasser“. Dissert. Techn. Hochschule München 1910. Während der Drucklegung des Buches erschien die Arbeit von Prof. M. Jakob der Phys. techn. Reichsanstalt, über die W. L. F. von Wasser. Sie konnte jedoch nicht mehr berücksichtigt werden.

Die Fig. 63 ist eine Zusammenstellung dieser Funktionen für alle angegebenen Versuche. Auf den ersten Blick scheint die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Versuchen eine sehr gute zu sein. Allein es liegt hier ein logarithmisches Koordinatensystem vor und bei dem gewählten Maßstab bedeutet ein Ordinatenunterschied von 5 mm eine Abweichung zwischen den Versuchswerten von 30%, so daß zwischen den einzelnen Versuchen doch ganz erhebliche Unterschiede bestehen. Dies kann uns aber nicht überraschen, wenn wir bedenken, daß es sich hierbei um Versuche mit ganz verschiedenen Versuchsanordnungen und unter ganz verschiedenen Versuchsbedingungen handelt. Bei Bewertung dieser Versuchsunterschiede sind folgende 10 Punkte zu beachten:

1. Die Wärmeübergangszahlen, welche sich aus den einzelnen Versuchsanordnungen ergeben, sind entweder Mittelwerte über verschiedene Rohrlängen oder sie beziehen sich auf Querschnitte in verschiedenen Abständen vom Rohranfang. Mit anderen Worten, die Gleichung (104a) und damit auch unsere Darstellung in Fig. 63 berücksichtigt das Argument z/d nicht. Überdies sind die hydrodynamischen und die thermischen Eintrittsbedingungen bei den einzelnen Versuchen ganz verschieden, indem ein Teil der Versuche mit einer vorgeschalteten Beruhigungsstrecke, ein anderer Teil ohne eine solche durchgeführt wurde.

2. Das Schaubild 63 berücksichtigt die Kenngröße Re nicht. Wir wissen zwar aus den früheren, theoretischen Erörterungen, daß für manche Strömungsbereiche die Reynoldssche Zahl tatsächlich auf die Gestalt des Temperaturfeldes ohne merklichen Einfluß ist; allein wir können in keiner Weise angeben, welches die Kennzeichen und die Grenzen dieser Bereiche sind. Es besteht somit die Möglichkeit, daß wir den Einfluß der Kenngröße Re auch dort vernachlässigt haben, wo dies nicht zulässig gewesen wäre.

3. Der Einfluß der relativen Rauigkeit δ/d ist in der Zusammenstellung 63 nicht berücksichtigt.

4. Die meisten Versuche beziehen sich auf turbulenten Strömungszustand. Wir können jedoch nachträglich nicht mehr feststellen, ob sich nicht Versuche oder Versuchsreihen darunter befinden, welche mit geordneter Strömung durchgeführt wurden.

5. Bei geringer Strömungsgeschwindigkeit besteht die Möglichkeit, daß sich der Auftrieb der wärmeren und damit leichteren Gasschichten gegenüber der Hauptströmung bemerkbar macht.

6. Die Stoffwerte λ , c_p , γ und μ sind von der Temperatur abhängig, sie werden also innerhalb des Feldes je nach Abstand von der Rohr-

wandung und vom Rohranfang verschieden groß sein. Die Wahl der mittleren Temperatur T_m (vgl. S. 178) und damit die Bestimmung der Mittelwerte λ_m usw. war ziemlich willkürlich und damit ist sicherlich auch die Möglichkeit einer Fehlerquelle gegeben.

7. Nach der Art, wie diese Mittelwerte λ_m usw. berechnet sind, wäre es gleichgültig, ob die Wärme von der Wand an das Gas oder vom Gas an die Wand übergeht. Ob dies tatsächlich richtig ist, vermag nur der Versuch zu entscheiden. Die bisher vorliegenden Versuche geben jedoch darüber noch keinen Aufschluß.

8. Bei den meisten Versuchen ist bei der Temperaturmessung im Gasstrom die mittlere Temperatur T_Q im Querschnitt gemessen worden. Die Berechnung der W.Ü.Z. wurde aber dann mit Hilfe der Gleichungen von S. 205 durchgeführt und dabei nicht beachtet, daß T_Q nicht gleich T_F ist. Dadurch können Fehler bis zu einem Höchstmaß von 30% vorkommen.

9. Unsere Kenntnis der Zahlenwerte λ (und damit auch der Zahlenwerte a) bei den einzelnen Gasen und Dämpfen und ihrer Veränderlichkeit mit der Temperatur ist eine so unsichere, daß wir hier mit nicht unbedeutenden Fehlerquellen rechnen müssen.

10. Dieser letzte Punkt betrifft die eigentlichen Versuchsfehler. Jeder Ingenieur oder Physiker, der schon Versuche auf ähnlichem Gebiet gemacht hat, weiß, wie schwer es hier ist, nicht nur Meßfehler, sondern auch Falschmessungen zu vermeiden. Vor allem kommen Fehler vor bei der Bestimmung der Wärmeverluste und bei den Temperaturmessungen (vgl. Knoblauch und Hencky, Anleitung zu genauer techn. Temperaturmessung, München, Oldenbourg, 1919).

Wenn man die Bedeutung dieser 10 Punkte berücksichtigt, wird man es nicht mehr befremdend finden, daß das Schaubild 63 keine bessere Übereinstimmung zwischen den Versuchen aufweist. Es ist nicht möglich, durch nachträgliche Berücksichtigung obiger 10 Punkte das Schaubild noch zu berichtigen, teils weil wir heute noch nicht in der Lage sind, diese Einflüsse zahlenmäßig in Rechnung zu setzen, teils weil die veröffentlichten Versuchsberichte nicht genügenden Aufschluß über die Versuchsbedingungen geben.

So können wir denn heute das Problem des Wärmeüberganges im geraden Rohr trotz der vielen vorliegenden Versuche noch immer nicht als gelöst betrachten.

Notwendigkeit weiterer Versuche.

Aus diesem Grunde ist eine zusammenfassende Experimentaluntersuchung auf breitester Grundlage und unter Berücksichtigung aller bisher erwähnten, theoretischen Erwägungen durchaus nötig.

Die Versuchsanordnung müßte so beschaffen sein, daß im selben Apparat ein möglichst ausgedehntes Gebiet untersucht werden könnte. Es ist von der Versuchseinrichtung zu verlangen:

1. Einwandfreie Verwirklichung der beiden wichtigsten hydrodynamischen und thermischen Eintrittsbedingungen, nämlich des direkten Abflusses aus einem großen Gefäß ohne Beruhigungsstrecke und der Strö-

mung mit vorgeschalteter Beruhigungsstrecke. Der erste Fall ist der technisch weitaus wichtigere.

2. Veränderlichkeit der bezogenen Rohrlänge l/d bei festgehaltenem Durchmesser.

3. Veränderlichkeit des Durchmessers d bei festgehaltenem l/d .

4. Messung der mittleren Flüssigkeitstemperatur t_F und nicht t_Q .

5. Veränderlichkeit der Flüssigkeits- und Wandtemperatur, möglichst auch unter Ausdehnung auf das Gebiet unter Null Grad durch Verwendung von Kälteanlagen.

6. Veränderlichkeit des Druckes von hohem Druck bis zu starkem Vakuum.

7. Verwendbarkeit verschiedener Gase, überhitzter Dämpfe und tropfbarer Flüssigkeiten.

8. Übergang der Wärme von der Wand an die Flüssigkeit und umgekehrt.

9. Verwendbarkeit von Rohren verschiedener Oberflächenbeschaffenheit.

10. Veränderliche Lage des Rohres, nämlich wagrecht und senkrecht; im letzteren Falle sowohl Strömung von oben nach unten als auch umgekehrt.

11. Verwendbarkeit von Rohren verschiedenen Querschnittes (vgl. später S. 214).

12. Die Möglichkeit bei jedem Versuch auch den Druckverlust zu messen. Diese Forderung ist vor allem aus praktischen Gründen sehr wichtig (s. S. 208). Sie ist aber auch notwendig, um die Verhältnisse des kritischen Zustandes studieren zu können. Es besteht nämlich die Vermutung, daß beim Vorhandensein von großen Temperaturdifferenzen im Rohrquerschnitt der Übergang von der geordneten Strömung zur turbulenten Strömung allmählich stattfindet und nicht wie bei dem Rohrproblem der reinen Hydrodynamik plötzlich (S. 164).

Diese Versuche werden natürlich in erster Linie auf die Bestimmung der W.Ü.Z. gerichtet sein. Dazu tritt aber als eine gleich wichtige Aufgabe die direkte Bestimmung des Verhältnisses „Endtemperaturdifferenz zu Anfangstemperaturdifferenz“, also die Bestimmung der Funktion Φ in der Gleichung (96a)

$$(t_F - t_W) : (t_a - t_W) = \Phi \left(\text{Re}, \text{Pe}, \frac{z}{d}, \frac{\delta}{d} \right).$$

Damit diese Versuche voll ausgenützt werden können, damit aus ihnen auch wirklich alles herausgeholt werden kann, was sie zu bieten vermögen, ist eine genaue Kenntnis der Stoffwerte λ , c_p , γ und μ und ihrer Abhängigkeit von Druck und Temperatur unbedingte Voraussetzung. Hier weist aber unser Wissen noch ganz beträchtliche Unsicherheiten und Lücken auf, hauptsächlich hinsichtlich der Wärmeleitfähigkeit von Dämpfen und Flüssigkeiten. Es müßte deshalb den geforderten Wärmeübergangsversuchen eine eigene experimentelle und theoretische Arbeit über diese Stoffwerte vorangehen.

Bezüglich der Darstellung der Versuchsergebnisse durch eine Gleichung möchte ich auf zwei Punkte hinweisen: Wenn man den Zusammenhang zwischen einer Größe und ihren zwei Ursachen untersucht, so ist es üblich, daß man zuerst die zweite Ursache unverändert läßt und den Zusammenhang zwischen Wirkung und erster Ursache bestimmt. Dann wird die erste Ursache unverändert gelassen und der Einfluß der zweiten Ursache ebenso untersucht. Man nimmt dabei stillschweigend an, daß die beiden Zusammenhänge voneinander gegenseitig unabhängig sind oder mathematisch ausgedrückt, daß sich die gesuchte Funktion nach dem Muster

$$z = F(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

in Teilfunktionen zerlegen läßt.

Damit schaltet man aber von vornherein und ohne jede Berechtigung eine ganze Reihe von Funktionen aus der Betrachtung aus.

Wo es aber auf Grund genauer Prüfung möglich und berechtigt ist, diese Zerlegung vorzunehmen, da ist sie allerdings im Interesse einer bequemen Verwendung der Formel zu empfehlen.

Aus dem gleichen Grunde ist auch die Verwendung der Potenzfunktion für die einzelnen Teilfunktionen überall dort zu empfehlen, wo es sich mit der verlangten Genauigkeit vereinbaren läßt. Aber auch hier muß eine genaue Prüfung vorausgehen. Z. B. in Fig. 63 bestätigen die Versuche von Nußelt, Gröber und Jordan das Potenzgesetz, während ihm die Versuche von Josse und Poensgen widersprechen. Vom theoretischen Standpunkte aus ist das Potenzgesetz in keiner Weise zu begründen, allein die Genauigkeit der bisher vorliegenden Versuchsergebnisse gestattet es, das Potenzgesetz anzuwenden.

Eine vorläufige Gleichung für α .

Von allen Gleichungen, die für die W.Ü.Z. aufgestellt wurden, ist die Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \text{Const} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{w_m \cdot d}{a}\right)^{n_2} \dots \dots \dots (105a)$$

am besten mit der Theorie und den Ergebnissen der Versuche in Einklang zu bringen

Zur Bestimmung des Exponenten n_2 liefert die Figur 63 die Beziehungen:

$$\log \left(\frac{w_m \cdot d}{a}\right)_1 = 5,000 \text{ und } \log \left(\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}\right)_1 = 2,41,$$

$$\log \left(\frac{w_m \cdot d}{a}\right)_2 = 2,500 \text{ und } \log \left(\alpha \cdot \frac{d}{\lambda}\right)_2 = 0,43.$$

$$\text{Daraus } n_2 = \frac{2,41 - 0,43}{5,00 - 2,50} = \frac{1,98}{2,50} = 0,79;$$

$$\text{und } \log \left(\text{Const} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{n_1}\right) = 0,46 - 2$$

$$\text{Const} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{n_1} = 0,0288.$$

Um n_1 zu bestimmen, bringen wir Gleichung (105a) auf die Form

$$\alpha = \text{Const} \cdot L^{n_1} \cdot d^{-(1+n_1-n_2)} \cdot \lambda \cdot w_m^{n_2} \cdot a^{-n_2} \dots (105b)$$

Unter den Versuchen von Rietschel befinden sich auch solche, welchen den Einfluß des Durchmessers bei unveränderter Länge feststellen. Es ergab sich dabei der Exponent für d gleich $-0,16$; mit $n_2 = 0,79$ ergibt sich also

$$1 + n_1 - 0,79 = 0,16$$

oder $n_1 = -0,05$;

Zahlentafel Nr. 31 im Anhang und Fig. 64 geben den Verlauf der Potenzfunktion $x^{-0,05}$ wieder (vgl. auch Fig. 61b).

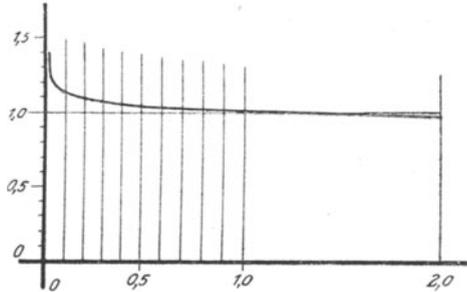


Fig. 64. Potenzfunktion: Abszissen: x
Ordinaten: $x^{-0,05}$.

Nehmen wir nun an, daß bei den Versuchen, die in Fig. 63 dargestellt sind, durchschnittlich L/d gleich 50 war, so ist mit

$$\left(\frac{L}{d}\right)^{-0,05} = 0,822 \text{ der Wert: Const} = 0,0351.$$

Bis zur endgültigen Klärung der Gesetzmäßigkeit durch weitere Versuche kann also als behelfsmäßige Formel die Gleichung gelten:

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = 0,035 \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{-0,05} \cdot \left(\frac{w_m \cdot d}{a}\right)^{0,79}$$

oder mit Einführung von $\omega = \frac{1}{3600} w_m$

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = 22,5 \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{-0,05} \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{a}\right)^{0,79} \dots (105c)$$

Zur Besprechung dieser Formel und zugleich auch um die Zahlenrechnung zu erleichtern, geben wir (105c) noch die Gestalt:

$$\alpha = 22,5 L^{-0,05} \cdot d^{-0,16} \cdot \omega^{0,79} \cdot \frac{\lambda}{a^{0,79}} \dots (105d)$$

$$= 22,5 \cdot B_L \cdot B_d \cdot B_\omega \cdot B_{p,T} \dots (105e)$$

wobei wir mit B die Koeffizienten bezeichnen, welche den Einfluß der einzelnen Größen L , d , ω , p und T wiedergeben. Hierbei ist $B_{p,T}$ von der physikalischen Natur der strömenden Flüssigkeit abhängig. Die Tabellen Nr. 30 bis 38 im Anhang enthalten die Werte dieser Potenzfunktionen innerhalb des technisch wichtigsten Bereiches.

Der erste Koeffizient zeigt, daß die Abhängigkeit des α von der Rohrlänge sehr gering ist. Wenn die Länge des Rohres von 10 cm auf 10 m wächst, nimmt B_L nur von 1,122 auf 0,89 ab.

Auch der Einfluß des Durchmessers ist nicht sehr groß. Einer Zunahme des Durchmessers von 5 m/m bis auf 1000 m/m entspricht nur eine Abnahme des B_d von 2,33 auf 1,000.

Dagegen ist der Einfluß der Strömungsgeschwindigkeit beträchtlich. Wenn ω von 4 m/sec auf 8 m/sec steigt, so wächst B_ω von 2,99 auf 5,16.

Die Größe $B_{p,T}$ ist wie schon oben erwähnt von der physikalischen Natur des strömenden Mediums abhängig. Wir müssen uns deshalb zur weiteren Besprechung einen bestimmten Körper als Beispiel wählen. Tropfbare Flüssigkeiten scheiden zu diesem Zwecke aus, weil für sie die Werte λ nur sehr ungenügend bekannt sind. Wir wollen deshalb als Beispiel ein ideales Gas wählen. Bei diesem ist die W.L.F. und die spezifische Wärme vom Druck unabhängig.

Für das spezifische Gewicht gilt: $\gamma_p = \gamma_1 \cdot p$, wenn mit γ_p das spezifische Gewicht bei p [at] und mit γ_1 das spezifische Gewicht bei 1 [at] bezeichnet wird. Dann wird

$$B_{p,T} = \left(\frac{\lambda \cdot \gamma_1^n \cdot c_p^n}{\lambda^n} \right)_T \cdot p^n = \left(\frac{\lambda}{a^n} \right)_T \cdot p^n = B_T \cdot B_p.$$

Für $B_p = p^{0,79}$ gilt ohne weiteres dieselbe Abhängigkeit wie für B_ω .

Die Größe B_T endlich ist bei den einzelnen Gasen natürlich verschieden; bei demselben Gase aber nur mehr eine Funktion der mittleren Temperatur T_m der Flüssigkeit.

Für Luft z. B. gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\varrho_1)_T &= (\varrho_1)_0 \cdot \frac{273}{T} \\ \lambda_m &= 0,00167 \frac{(1 + 0,000194 T) \cdot \sqrt{T}}{1 + \frac{117}{T}} \\ c_p &= 0,2315 \cdot (1 + 0,00134 T). \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen ergibt sich für Luft die in der nachstehenden Zahlentafel Nr. 15 festgelegte Abhängigkeit des B_T von T_m .

Zahlentafel Nr. 15.
Abhängigkeit des B_T von T_m bei Luft.

T_m	B_T	T_m	B_T	T_m	B_T	T_m	B_T
100	0,307	350	0,150	600	0,108	850	0,089
150	0,242	400	0,137	650	0,104	900	0,087
200	0,204	450	0,128	700	0,099	950	0,084
250	0,181	500	0,120	750	0,095	1000	0,082
300	0,162	550	0,113	800	0,092	—	—

Es nimmt also bei Luft die W.Ü.Z. mit steigender Temperatur T_m ab.

Zahlenbeispiel für Luft.

Es sei gegeben: $d = 0,04$ [m], $L = 3,0$ [m]; $\omega = 25$ m/sec.

$p = 6$ [at]; $t_F = + 20^\circ$ C; $t_W = + 200^\circ$ C.

Wie groß ist die W.Ü.Z.?

Es ist $T_F = 293^\circ$; $T_W = 473^\circ$; damit $T_m = 383^\circ$.

$$\text{Also } a = 22,5 \cdot B_L \cdot B_d \cdot B_\omega \cdot B_p \cdot B_T \\ = 22,5 \cdot 0,95 \cdot 1,67 \cdot 12,71 \cdot 4,11 \cdot 0,144$$

$$= 268 \left[\frac{\text{W.E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{stdl} \cdot \text{Grad}} \right].$$

h) Die Berechnung der Endtemperatur T_e . Nachdem nunmehr die Gesetze für die W. Ü. Z. bekannt sind, ist es möglich, den Verlauf der Flüssigkeitstemperatur längs des Rohres und damit auch die Endtemperatur zu berechnen. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein Rohrstück von der Länge dz und stellen für dieses Raumelement die Wärmebilanz auf.

Mit der Strömung wird die Wärmemenge

$$dQ = -c_p \cdot \gamma \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \cdot w \cdot dT_F$$

in den Raum hereingeschafft. Die gleiche Wärmemenge

$dQ = a \cdot d \cdot \pi \cdot dz \cdot (T_F - T_W)$ geht bei Beharrungszustand in der Zeiteinheit an die Rohrwand über. Durch Gleichsetzen folgt daraus:

$$\frac{dT_F}{T_F - T_W} = -a \cdot \frac{4 \cdot dz}{w \cdot d \cdot \gamma \cdot c_p}$$

Wenn wir diese Gleichung über die Rohrlänge integrieren, so müssen wir berücksichtigen, daß a eine Funktion von z ist. Wir erhalten also

$$\ln \frac{T_e - T_W}{T_a - T_W} = - \frac{4}{w \cdot d \cdot \gamma \cdot c_p} \cdot \int_{z=0}^{z=L} a \cdot dz$$

und wenn wir für a seinen Wert aus Gleichung (105 c) einsetzen:

$$\ln \frac{\Theta_e}{\Theta_a} = \frac{-4}{3600 \cdot \omega \cdot d \cdot c_p \cdot \gamma} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot 22,5 \left(\frac{\omega \cdot d}{a} \right)^{0,79} \cdot \frac{1}{d^{-0,05}} \int_0^L z^{-0,05} \cdot dz \\ = -0,0263 \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{a} \right)^{-0,21} \cdot \left(\frac{L}{d} \right)^{0,95}$$

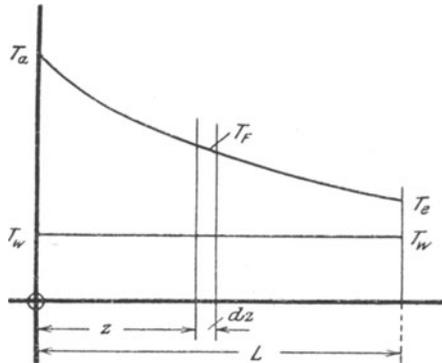


Fig. 65. Zu: Berechnung der Endtemperatur T_e .

Durch Delogarithmieren:

$$\frac{\theta_e}{\theta_a} = e^{-0,0263 \cdot \left(\frac{\omega \cdot d}{a}\right)^{-0,21} \cdot \left(\frac{L}{d}\right)^{+0,95}} \dots \dots \dots (106 a)$$

$$= \Phi\left(\frac{\omega \cdot d}{a}, \frac{L}{d}\right) \dots \dots \dots (106 b)$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als eine vereinfachte Form der Gleichung (96a), die wir direkt aus dem Prinzip der Ähnlichkeit gefolgert hatten.

Um die Gleichung (106a) zu besprechen, geben wir ihr die Form

$$\theta_e : \theta_a = e^{-0,0263 \cdot L^{+0,95} \cdot d^{-1,16} \cdot \omega^{-0,21} \cdot a^{+0,21}} \dots \dots (106 c)$$

Die Zahlentafel über die Exponentialfunktion „ e^{-x} “ (Nr. 27 im Anhang) zeigt, daß der Wert der Exponentialfunktion mit zunehmendem Argument x abnimmt und zwar bei $x = 3$ bereits den geringen Wert 0,05 erreicht hat.

Aus Gleichung (106c) ersehen wir, daß Rohrlänge und Rohrdurchmesser auf den Wert des Exponenten und damit auf das Verhältnis $\theta_e : \theta_a$ von großem Einfluß sind, daß dagegen Strömungsgeschwindigkeit und Temperaturleitfähigkeit von geringem Einfluß sind. (Weiteres über den Einfluß der Größen L , d , w und a auf die Endtemperatur siehe Zahlenbeispiel.)

Zahlenbeispiel:

Durch ein Rohr von der lichten Weite 4 [cm] und der Länge 2 [m] ströme Luft von 1 [at] mit einer Geschwindigkeit von 10 Metern in der Sekunde. Die Anfangstemperatur der Luft sei 20° C. Die Temperatur der Wand gleich 100° C. — Wie groß ist die Austrittstemperatur?

Um die Temperaturleitfähigkeit aus den Tabellen entnehmen zu können, müssen wir die mittlere Temperatur t_m vorerst einmal schätzen, in unserem Beispiel $t_m = 70^\circ \text{C}$ und erhalten dann $a = 0,102$.

Ferner ist: $d = 0,04$ [m], $L = 2,0$ [m], $\omega = 10$ [m/sec.]

$$\theta_a = 20 - 100 = -80.$$

Dann wird der Exponent in Gleichung (106c) gleich

$$\begin{aligned} & -0,0263 \cdot 2,00^{0,95} \cdot \frac{1}{0,04^{1,16}} \cdot \frac{1}{10^{0,21}} \cdot 0,102^{0,21} \\ & = -0,0263 \cdot 1,93 \cdot \frac{1}{0,0239} \cdot \frac{1}{1,62} \cdot 0,62 \\ & = -0,82. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der einzelnen Potenzen können die Zahlentabellen für die Potenzen x^n im Anhang benützt werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \theta_e &= (-80) \cdot e^{-0,82} = -80 \cdot 0,44 = -35,2 \\ \text{oder } t_e &= 100 - 35,2 = 64,8^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch nachprüfen, ob wir eingangs die mittlere Temperatur t_m richtig geschätzt haben.

Zu diesem Zwecke können wir angenähert den Durchschnittswert der Temperatur T_F gleich dem arithmetischen Mittel aus T_a und T_e

setzen. Und t_m setzen wir nach Seite 178 gleich dem arithmetischen Mittel aus t_F und t_W . Wir erhalten also näherungsweise

$$t_m = \frac{1}{2} \left(t_W + \frac{t_a + t_e}{2} \right) \dots \dots \dots (107)$$

Für unser Zahlenbeispiel gibt dies: $t_m = 71,4^0$ C. Wenn wir eingangs t_m ganz erheblich falsch geschätzt hätten, so müßten wir nun die ganze Rechnung mit dem errechneten t_m wiederholen. Meist wird sich jedoch dies erübrigen, denn wegen des geringwertigen Exponenten „+ 0,21“ ist eine Änderung der Temperaturleitfähigkeit „a“ nur von geringem Einfluß.

In den nachstehenden Rechnungen soll gezeigt werden, welchen Einfluß eine Veränderung der Größen L, d, ω und a auf das Verhältnis $\theta_e : \theta_a$ ausübt.

- a) bei L = 1 [m] wird $\theta_e : \theta_a = 0,66$;
 = 2 „ = 0,44;
 = 4 „ = 0,21;
- b) bei d = 0,02 [m] wird $\theta_e : \theta_a = 0,16$;
 = 0,04 „ = 0,44;
 = 0,08 „ = 0,70;
- c) bei $\omega = 5,0$ [m/sec] wird $\theta_e : \theta_a = 0,39$;
 = 10,0 „ = 0,44;
 = 20,0 „ = 0,50;
- d) bei a = 0,051 [m²std] wird $\theta_e : \theta_a = 0,50$;
 = 0,102 „ = 0,44;
 = 0,204 „ = 0,39.

i) Die Berechnung von Heiz- und Kühlrohren¹⁾. Durch ein Rohr von gegebener Wandtemperatur soll in der Zeiteinheit ein gegebenes Flüssigkeitsvolumen von einer bestimmten Anfangstemperatur auf eine verlangte Endtemperatur abgekühlt (bzw. erwärmt) werden. Es sind Rohrdurchmesser, Rohrlänge und Strömungsgeschwindigkeit so zu ermitteln, daß erstens die verlangte Temperaturänderung wirklich erreicht wird und daß zweitens bei möglichst klein gehaltenem Rohr der Druckverlust eine vorgeschriebene Höhe nicht überschreitet.

Nachdem die Temperaturen t_e , t_a und t_W vorgeschrieben sind, ist auch das Verhältnis $\theta_e : \theta_a$ vorgeschrieben und daraus läßt sich mit Hilfe der Tabelle über die Exponentialfunktion bestimmen, welchen Wert der Exponent „Ex“ in Gleichung (106c) haben muß. Wir erhalten also die Bedingungsleichung

$$- 0,0263 \cdot L^{0,95} \cdot d^{-1,16} \cdot \omega^{-0,21} \cdot a^{+0,21} = \text{Ex}$$

$$\text{oder } L^{0,95} \cdot d^{-1,16} \cdot \omega^{-0,21} = 38 \frac{\text{Ex}}{a^{0,21}} = Z_Q \dots \dots \dots (108)$$

worin Z_Q einen Wert bedeutet, der in vorbereitender Rechnung aus Ex und a sich bestimmen läßt.

¹⁾ Die Redaktion des Gesundheitsingenieurs gestattete mir den Abdruck dieser Berechnung, welche ich zuerst im Heft 26 des Jahrg. 1920 veröffentlicht habe.

Eine zweite Beziehung zwischen L , d und ω ist durch die Bedingung gegeben, daß der Druckverlust eine vorgeschriebene Höchstgrenze nicht überschreiten darf. Bezeichnet p_a den Druck im Anfangs-, p_e den Druck im Endquerschnitt, so ist nach Gleichung (84f)

$$\frac{p_e - p_a}{L} = 1,76 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\gamma \cdot \omega^2}{d} \cdot \left(\frac{\omega \cdot d \cdot \gamma}{\mu} \right)^{-0,21}$$

oder $p_e - p_a = 1,76 \cdot 10^{-2} \cdot L^{1,00} \cdot d^{-1,21} \cdot \omega^{1,79} \cdot \gamma^{0,79} \cdot \mu^{+0,21}$

oder $L^{1,00} \cdot d^{-1,21} \cdot \omega^{1,79} = 57 \cdot \frac{p_e - p_a}{\gamma^{0,79} \cdot \mu^{0,21}} = Z_R; \dots (109)$

Z_R ist wieder ein Wert, der in gesonderter Rechnung zu bestimmen ist.

Der Koeffizient $1,72 \cdot 10^{-2}$ und der Exponent $-0,21$ beziehen sich auf ein Rohr mit sehr glatter Oberfläche (nahtlos gezogenes Messingrohr). Für rauhe Rohre sind die entsprechenden Zahlenwerte noch nicht bekannt. — In einer früheren Veröffentlichung in *Gesundheitsingenieur 1920 Heft 26* habe ich mit dem Koeffizienten $1,76 \cdot 10^{-6}$ gerechnet, weil ich dort den Druck in kg/cm^2 angegeben habe. In der vorstehenden Rechnung ist jedoch der Druck in kg/m^2 oder in mm Wassersäule einzusetzen.

Eine dritte Beziehung endlich ist dadurch gegeben, daß durch das Rohr ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen V in der Zeiteinheit strömen muß. Es ist also

$$\frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \omega = V \text{ oder } d^2 \cdot \omega = \frac{4}{\pi} \cdot V = Z_V \dots (110)$$

worin Z_V ein dritter in vorbereitender Rechnung zu bestimmender Wert ist.

Stellen wir nun die Gleichungen (108, 109, 110) zusammen, so erkennen wir, daß hier ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten vorliegt, daß also die drei Größen L , d und ω eindeutig bestimmt sind. Oder mit anderen Worten, die drei Bedingungen: einvorgeschriebenes Verhältnis $\theta_e : \theta_a$, ein vorgeschriebener Druckverlust $p_e - p_a$ und ein vorgeschriebenes, sekundliches Flüssigkeitsvolumen V bestimmen die Abmessungen des Rohres und die Strömungsgeschwindigkeit eindeutig.

$$\begin{aligned} L^{0,95} \cdot d^{-1,16} \cdot \omega^{-0,21} &= Z_Q \\ L^{1,00} \cdot d^{-1,21} \cdot \omega^{1,79} &= Z_R \\ d^{2,00} \cdot \omega^{1,00} &= Z_V \end{aligned}$$

Aus den drei Gleichungen läßt sich L und ω eliminieren und man

erhält $d^{4,01} = Z_Q^{1,05} \cdot \frac{Z_V^{2,01}}{Z_R^{1,00}}$

oder mit genügender Annäherung

$$d^4 = Z_Q^{1,05} \cdot \frac{Z_V^{2,00}}{Z_R^{1,00}} \dots (111 a)$$

ferner

$$\omega = \frac{Z_V^{1,00}}{d^{2,00}} \dots (111 b)$$

und

$$L = Z_R \cdot \frac{d^{1,21}}{\omega^{1,79}} \dots (111 c)$$

Zahlenbeispiel:

Dieser ganze Rechnungsgang soll an Hand eines Zahlenbeispielles nochmals besprochen werden. Zur Berechnung der vorkommenden Kennfunktionen dienen die Zahlentafeln im Anhang.

Vorgeschrieben sei:

das sekundliche Luftvolumen	$V = 0,012 \text{ m}^3/\text{sec}$
der Druck der Luft	$p = 1 \text{ at}$
der Druckverlust	$p_e - p_a = 1/50 \text{ at}$
die Wandtemperatur	$t_w = 100^\circ \text{ C}$
die Anfangstemperatur	$t_a = 20^\circ \text{ C}$
der Abwärmeverlust	$\theta_e : \theta_a = 0,10.$

Gesucht ist die Abmessung des Rohres und die Strömungsgeschwindigkeit.

I.) Vorbereitende Rechnung:

$$\theta_a = -80^\circ \text{ C}; \theta_e = 0,10 \cdot (-80) = -8^\circ; t_a = 92^\circ \text{ C}$$

$$t_m = \frac{1}{2} \left(100 + \frac{20 + 92}{2} \right) = 78^\circ \text{ C}.$$

Aus den physikalischen Tabellen im Anhang ist dann zu entnehmen

$$a = 0,106; \gamma = 0,975;$$

ferner ist

$$\mu = 2,06 \cdot 10^{-6}.$$

Zu $\theta_e : \theta_a = 0,10$ gehört zufolge Tabelle Nr. 27 ein Exponent $Ex = -2,30.$

$$\text{Aus Gleichung (108): } Z_Q = 38 \cdot \frac{2,3}{0,106^{0,21}} = 143.$$

$$\text{,, ,, (109): } Z_R = 57 \cdot \frac{200}{0,975^{0,79}} \cdot \frac{10^6 \cdot 0,21}{2,06^{0,21}} = 18,2 \cdot 10^4.$$

$$\text{,, ,, (110): } Z_V = \frac{4}{3} \cdot 0,012 = 1,53 \cdot 10^{-2}.$$

II.) Hauptrechnung:

$$\text{Aus Gleichung (111 a): } d^4 = 143^{1,05} \cdot \frac{1,53^2 \cdot 10^{-4}}{18,2 \cdot 10^4} = 23,6 \cdot 10^{-8}$$

$$d^2 = 4,85 \cdot 10^{-4}$$

$$d = 2,20 \cdot 10^{-2} = 0,022 \text{ m}.$$

$$\text{Aus Gleichung (111 b): } \omega = \frac{1,53 \cdot 10^{-2}}{4,85 \cdot 10^{-4}} = 31,5 \text{ m/sec}.$$

$$\text{,, ,, (111 c): } L = 1,82 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,022^{1,21}}{31,5^{1,79}} = 3,70 \text{ m}.$$

Diese drei berechneten Werte für d , L und ω sind die einzig möglichen und richtigen Werte, solange die drei vorgegebenen Bedingungen aufrecht erhalten werden. Es kann nun der Fall eintreten, daß einer der drei Werte aus konstruktiven Gründen nicht brauchbar ist. So kann z. B. das errechnete Rohr zu lang sein. Dann gibt es drei Wege der

Abhilfe: entweder man nimmt einen größeren Abwärmeverlust $\Theta_c : \Theta_a$ in Kauf — oder man läßt einen größeren Druckverlust $p_c - p_a$ zu — oder man begnügt sich mit der Erwärmung eines geringeren Flüssigkeitsvolumens V .

Die Zahlentafeln Nr. 16a, 16b und 16c zeigen die Wirkung dieser drei Maßnahmen, jedesmal ausgehend von dem obigen Zahlenbeispiel als Normalfall.

Zahlentafel Nr. 16a.

Druckverlust und sekundliches Volumen unverändert.
Abwärmeverlust: 10%, 20%, 30%

$\Theta_c : \Theta_a$	d	L	ω
10%	0,0220	3,70	31,5
20%	0,0200	2,31	38,5
30%	0,0186	1,65	44,2

Zahlentafel Nr. 16b.

Abwärmeverlust und sekundliches Volumen unverändert.
Druckverlust: $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{10}$ at.

$p_a - p_c$	d	L	ω
$\frac{1}{50}$ at	0,0220	3,70	31,5
$\frac{1}{30}$ at	0,0194	3,36	40,7
$\frac{1}{10}$ at	0,0147	2,99	70,5

Zahlentafel Nr. 16c.

Abwärmeverlust und Druckverlust unverändert.
Sekundliches Volumen: 12, 9 und 6 Liter/Sekunde.

V	d	L	ω
0,012	0,0220	3,70	31,5
0,009	0,0191	3,18	31,5
0,006	0,0156	2,48	31,5

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, daß alle drei Maßnahmen auch wirklich eine Verkürzung des Rohres bewirken, daß aber ganz beträchtliche Milderungen in den vorgeschriebenen Bedingungen notwendig sind, um eine merkliche Verkürzung des Rohres zu erzielen. Hat deshalb die Rechnung eine Rohrlänge ergeben, welche um vieles größer ist, als aus konstruktiven Gründen zulässig ist, so muß man die Flüssigkeit auf mehrere Rohre verteilen, d. h. man muß zum Röhrenbündel oder Röhrenkessel übergehen.

Das Röhrenbündel.

Die Gesetze für Wärmeübergang und Druckverlust gelten für das Rohr eines Bündels ebenso wie für das einzelne Rohr. Wir können deshalb die Gleichungen (108) und (109) unverändert übernehmen. Dagegen hat das einzelne Rohr bei einem Bündel von z Rohren nur den z. Teil des ganzen Volumens aufzunehmen. In Gleichung (110) ist also statt Z_V zu setzen $Z_V : z$.

Es liegt jetzt ein Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten (d, L, ω und z) vor, die Aufgabe ist also nicht mehr eindeutig bestimmt und wir können eine der 4 Unbekannten beliebig annehmen. Vom rechnerischen Standpunkte aus ist es vollständig gleichgültig, welche Größe wir wählen, allein in der Praxis kommen wohl nur zwei Fälle in Frage, entweder man kann die Anzahl der Rohre frei wählen, was meist bei geringer Rohrzahl der Fall sein wird, oder man kann die Länge der Rohre annehmen, wenn für die Baulänge des Rohrbündels eine Vorschrift besteht.

1. Bei beliebig gewählter Rohrzahl · z.

Da z bekannt ist, ist nur d, L und ω zu berechnen und dies erfolgt in der oben angegebenen Weise, nur ist statt Z_V in Gleichung (110) der Wert $Z_V : z$ zu setzen.

Auch dieser Fall sei durch ein Zahlenbeispiel erläutert (vgl. Zahlentafel Nr. 17).

Zahlentafel Nr. 17.
Wärmeübergang im Rohrbündel.

Rohrzahl	d	L	ω
1	0,0958	26,5	31,5
7	362	7,18	31,5
19	220	3,70	31,5
37	158	2,50	31,5
61	123	1,87	31,5

Hierbei sind alle Versuchsbedingungen aus dem obigen Zahlenbeispiel übernommen, nur ist für V der viel größere Wert 0,228 [m³/sec], also für Z_V der Wert 0,290 genommen.

Man beachte, daß die Strömungsgeschwindigkeit von der Rohrzahl unabhängig ist.

2. Bei beliebig gewählter Rohrlänge.

Wir schreiben das Gleichungssystem (108, 109, 110) an und bringen alle unbekanntes Größen auf die linke Seite, alle bekannten Größen auf die rechte Seite:

$$d^{-1,16} \cdot \omega^{-0,21} = Z_Q \cdot L^{-0,95} \dots \dots \dots (108!)$$

$$d^{-1,21} \cdot \omega + 1,79 = Z_R \cdot L^{-1,00} \dots \dots \dots (109!)$$

$$d^{2,00} \cdot \omega + 1,00 \cdot z + 1,00 = Z_V \dots \dots \dots (110!)$$

Wir potenzieren die Gleichung (108!) mit - 1,04, worauf sie lautet:

$$d + 1,21 \cdot \omega + 0,22 = Z_Q^{-1,04} \cdot L + 0,99$$

und multiplizieren diese neue Gleichung mit der Gleichung (109!). Das Endergebnis ist:

$$\omega^{2,01} = Z_R \cdot Z_Q^{-1,04} \cdot L^{-0,01}$$

oder mit genügender Annäherung

$$\omega^2 = Z_R \cdot \frac{1}{Z_Q^{1,05}} \dots \dots \dots (112)$$

eine Gleichung, aus der sich ω^2 leicht mit Hilfe der Zahlentafel Nr. 35 auswerten läßt. Es zeigt sich auch, daß ω von Z_V und damit also von V unabhängig ist und daß aus diesem Grunde ω in Zahlentafel Nr. 16c und Nr. 17 immer denselben Wert haben mußte.

Aus Gleichung (109!) folgt dann

$$d^{+1,21} = \frac{L \cdot \omega^{1,79}}{Z_R} \dots \dots \dots (113)$$

woraus mit Hilfe von Zahlentafel Nr. 37 und Nr. 38 selbst bekannt ist. Und dann liefert noch Gleichung (110!) für die Anzahl der Rohre:

$$Z = \frac{Z_V}{d^2 \cdot \omega} \dots \dots \dots (114)$$

Die Durchrechnung eines Zahlenbeispielles dürfte sich hier erübrigen.

3. Die Strömung in gerader Leitung mit nicht kreisförmigem Querschnitt.

Der Wärmeübergang im geraden, kreisförmigen Rohr ist die einzige, wirklich eingehend untersuchte Aufgabe über den Wärmeübergang. Da bei diesen Versuchen meist zwei konzentrische Rohre verwendet wurden, so ergaben sich damit von selbst auch einige Erfahrungen über den Wärmeübergang in Ringspalten; weil jedoch diese Ringspalten meist von Wasser durchflossen waren, und uns für Wasser der Wert der *W. L. F.* nur ganz ungenügend bekannt ist, so erlauben uns diese Versuche nicht, unsere Theorie hieran zu prüfen.

Dagegen können wir die Versuche von Jordan (s. Seite 196) heranziehen. Jordan hat außer seinen drei Versuchsreihen mit freiem, kreisförmigem Querschnitt auch zwei Versuchsreihen mit ringförmigem Querschnitt angestellt, indem er in dem inneren, luftdurchströmten Rohr einen zylindrischen Kern so lagerte, daß nur ein ringförmiger Durchflußquerschnitt frei blieb. — Jordan findet nun, daß er die *W. Ü. Z.* für diese Ringspalte gleichsetzen kann, der *W. Ü. Z.* in einem Rohr mit freiem Querschnitt, wenn er den Durchmesser dieses Vergleichsrohres gleich dem vierfachen Quotienten aus Ringquerschnitt, geteilt durch den wärmeabgebenden Umfang setzt. Bezeichnet *D* den äußeren, *d* den inneren Durchmesser des Ringes, so ist der Vergleichsdurchmesser gleich

$$4 \cdot \frac{D^2 - d^2}{D\pi} = \frac{\pi}{D} \frac{D^2 - d^2}{D}$$

Jordan gibt zwar nicht an, wie er zu dieser Größe für den Vergleichsdurchmesser kommt, aber er findet seine Annahme durch den Versuch vollauf bestätigt.

Später hat dann Nußelt (Zeitschr. d. Vereines deutsch. Ing. 1913, S. 199) durch theoretische Betrachtungen unter Verwendung der Prandtl'schen Lehre von den Grenzschichten (s. Seite 156) gefunden, daß diese Beziehung eine viel allgemeinere Gültigkeit hat, indem sie nicht nur für den Ringquerschnitt, sondern für alle Formen des Querschnittes gilt (vgl. auch den Begriff des hydraulischen Radius in den Lehrbüchern der Hydraulik).

Die W. Ü. Z. für einen beliebig geformten Querschnitt ist gleich der W. Ü. Z. in einem Vergleichsrohr, wenn wir dessen Durchmesser annehmen zu

$$d_v = \frac{4 \cdot F}{S} \dots \dots \dots (115a)$$

Hierbei ist F die Fläche des durchflossenen Querschnittes und S derjenige Teil des Umfanges, durch den die Wärme ein- oder austritt. Dies gibt:

1. Für den Ringquerschnitt mit den Durchmessern D und d

bei Wärmeaustausch nach außen und innen: $d_v = \frac{D^2 - d^2}{D + d} = D - d$ (115b)

„ „ „ „ „ allein $d_v = \frac{D^2 - d^2}{D} \dots \dots (115c)$

„ „ „ „ „ innen allein $d_v = \frac{D^2 - d^2}{d} \dots \dots (115d)$

2. Für den rechteckigen Querschnitt mit den Seitenlängen a und b

bei W.-Austausch durch alle 4 Seiten: $d_v = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a + b)} = \frac{2ab}{a + b}$ (115e)

„ „ „ nur durch die 2 Seiten a: $d_v = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2a} = 2b \dots \dots (115f)$

„ „ „ „ „ eine Seite a: $d_v = \frac{4ab}{a} = 4b \dots \dots (115g)$

Die übrigen Seiten des Rechteckes gelten hierbei als vollkommen wärmeundurchlässig (in Fig. 66 durch Schraffur angedeutet).

Die Werte von d_v in Gleichung (115e) für die verschiedenen Seitenverhältnisse a : b gibt die nachstehende Tabelle:

Zahlentafel Nr. 18.

Wärmeübergang in Leitung mit rechteckigem Querschnitt.

a : b =	1:1	1,1:1	1,5:1	2:1	3:1	10:1	100:1
$d_v =$	b	1,05b	1,20b	1,33b	1,50b	1,82b	2,00b

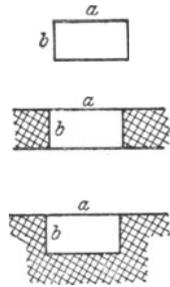


Fig. 66 a, b, c.
Zu: Wärmeübergang in Leitungen mit rechteckigem Querschnitt.

Die vorläufige Gleichung für a (Gleichung 105) gilt mit unveränderten Beiwerten Const , n_1 und n_2 auch für beliebige Querschnittsformen, wenn man für d die Bezugsgröße d_v einführt.

Diese Behauptung stützt sich vorerst nur auf die theoretischen Betrachtungen von Nußelt und bei Ringspalten auf den einmaligen, experimentellen Nachweis durch die beiden Versuchsreihen von Jordan. Eine eingehende, experimentelle Prüfung dieser Behauptung ist deshalb unbedingt notwendig, und zwar wäre diese Prüfung im unmittelbaren Zusammenhang mit den auf Seite 201 geforderten Versuchen durchzuführen.

Es ist oben vorausgesetzt worden, daß ein Teil des Umfanges vollkommen wärmeisolierend verkleidet sei und es wurde deshalb angenommen, daß dieser Teil dann für die Wärmeaufnahme bzw. -Abgabe nicht in Frage käme. Dies ist nur bei tropfbaren Flüssigkeiten streng richtig. Wegen der Wirkung der Wärmestrahlung können bei Gasen diese Teile des Umfanges sehr wohl am Wärmeaustausch teilnehmen, vor allem bei hohen Temperaturen. Sie erhalten von den eigentlichen Heizflächen Wärme zugestrahlt, erwärmen sich dadurch selbst über die Gastemperatur und wirken auf diese Weise ebenfalls als Heizflächen.

4. Die Strömung in gekrümmter Leitung.

(Rohrkrümmer und Rohrspirale).

Wir können den Wärmeübergang im gewöhnlichen Rohr mit kreisförmigem Querschnitt und im Rohr mit beliebigem Querschnitt als zwei durchaus gleichartige Probleme auffassen, solange nur die Achse des Rohres gerade ist und der Querschnitt seine Größe und Form auf der ganzen Rohrlänge beibehält.

Wenn wir dagegen zu Rohren übergehen, deren Achse gekrümmt ist, so kommen wir zu einem Strömungsfeld, welches wesentlich verschieden ist von dem Strömungsfeld im geraden Rohr.

Wir bezeichnen mit d den Innendurchmesser des Rohres, mit D den Windungsdurchmesser einer Rohrspirale und wir drücken die Länge entweder durch die bezogene Länge $\bar{L} : d$ des Rohres oder durch die Anzahl N der Windungen aus.

Es gilt dann $L = N \cdot D \cdot \pi$.

Die Ganghöhe der Spirale können wir in den meisten Fällen vernachlässigen.

Für $N = 1/4$ und $N = 1/2$ erhalten wir aus der Rohrspirale den gewöhnlichen Rohrkrümmer.

Wir nehmen des weiteren an, daß das Zuleitungsrohr zur Spirale oder zum Krümmer aus einem sehr langen, geraden Rohr von gleichem Durchmesser wie das Spiralrohr bestehe und sich tangential an die Spirale anschließe. Das Zuführungsrohr soll ferner gleiche Temperatur mit dem zuströmenden Gas haben, so daß der Wärmeübergang erst mit der Krümmung beginnt. Sinngemäße Annahmen sollen auch für das Ableitungsrohr gelten.

Die Kenngrößen für geometrische Ähnlichkeit sind

$$\frac{D}{d}, \frac{L}{d} \text{ und } \frac{\delta}{d};$$

Aus den Lehren der reinen Hydrodynamik ist uns der Strömungszustand im Zuleitungsrohr bekannt: An der Wand wird sich die Prandtl'sche Grenzschicht ausbilden, in der die Geschwindigkeit von Null bis zu einem endlichen Betrage ansteigt, weiter nach innen zu wird die Geschwindigkeit immer mehr wachsen und in der Rohrmitte ihren Höchstwert erreichen. Tritt nun die Flüssigkeit mit dieser Geschwindigkeitsverteilung in die Krümmung ein, so besitzen die mittleren Schichten (der Kern) infolge der größten Geschwindigkeit auch die größte Trägheit; sie werden also am stärksten geradeaus streben und gegen die Wand prallen. Dies gilt aber nicht nur für den Rohranfang, sondern für den ganzen Verlauf der Spirale. Das Strömungsfeld in der Spirale wird also nicht nur in einer fortschreitenden Bewegung bestehen, sondern diese wird überlagert sein von einer zweiten, einer kreisenden Bewegung nach neben stehender Fig. 67 [vgl. auch: Isaachsen, Innere Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten und Gasen. — Sekundärströmungen. — Zeitschr. d. Vereines deutscher Ing. 1911, Seite 216].

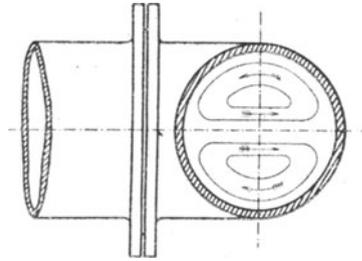


Fig. 67. Sekundärströmung in einem Rohrkrümmer.

Durch diese kreisende Bewegung werden immer wieder die inneren noch nicht abgekühlten bzw. noch nicht erwärmten Flüssigkeitsmassen nach außen getrieben. Wir werden deshalb beim gekrümmten Rohr einen wesentlich stärkeren Wärmeübergang zu erwarten haben als beim geraden Rohr, und zwar um so größer, je kleiner D im Vergleich zu d ist.

Nach den Ausführungen des Abschnittes C. I. c. kommen die Kenngrößen

$$\left(Re, Pe, \frac{L}{d}, \frac{D}{d}, \frac{\delta}{d} \right)$$

oder zufolge Gleichung (88)

die Kenngrößen $\left(Pe, St, \frac{L}{d}, \frac{D}{d}, \frac{\delta}{d} \right)$ in Betracht.

Wir erhalten also, wenn die Rohrwandtemperatur t_w überall konstant ist, aus dem Prinzip der Ähnlichkeit die beiden Gleichungen:

$$\frac{t_c - t_w}{t_a - t_w} = \Phi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{\rho \cdot a}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{D}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots (116a)$$

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{\rho \cdot a}{\mu}, \frac{L}{d}, \frac{D}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots (116b)$$

Über den Charakter der Funktionen Φ und ψ läßt sich nur wenig voraussagen. Wir wissen lediglich, daß die Wärmeübergangszahl mit

- wachsendem $\frac{w \cdot d}{a}$ zunimmt.
- „ L/d abnimmt
- „ D/d abnimmt.

Ferner können wir voraussagen, daß die Funktionen (116) in die entsprechenden Funktionen für das gerade Rohr übergehen, wenn sich das Argument D/d dem Werte unendlich nähert.

Die genauere Bestimmung der Funktionen ist nur durch Versuche möglich, die aber bisher noch nicht vorgenommen wurden. Das Problem ist also noch ungelöst.

5. Die Strömung um einen Zylinder.

Die bisher besprochenen Probleme sind dadurch ausgezeichnet, daß die Strömung von den Leitflächen, welche zugleich die Heiz- (oder Kühl-)flächen sind, ganz umschlossen ist. Im Gegensatz dazu soll nunmehr die Strömung den wärmeabgebenden (oder -aufnehmenden) Körper umspülen.

a) Die Strömung senkrecht gegen einen Zylinder. Der allseitig unendlich ausgedehnte Raum sei von einer tropfbareren oder elastischen Flüssigkeit erfüllt, die mit paralleler und überall gleicher Geschwindigkeit w ströme. In diese Strömung werde dann ein sehr langer Zylinder vom Durchmesser d so hereingelegt, daß seine Achse senkrecht zur Richtung von w steht. Die Temperatur der Flüssigkeit in genügender Entfernung vom Zylinder sei t_a , die Temperatur der Zylinderoberfläche gleich t_w .

Setzen wir vorerst einmal die beiden Temperaturen einander gleich, so haben wir ein Problem der reinen Hydrodynamik vor uns. Nach den Lehren derselben [vgl. am besten: Handwörterbuch der Naturwissenschaft. Band 4 „Flüssigkeitsbewegung“ von Prof. L. Prandtl] bilden sich bei einigermaßen höherer Strömungsgeschwindigkeit an der Vorder- und an der Rückseite des Zylinders zwei gänzlich verschiedene Strömungszustände aus. An der Vorderseite stellt sich eine geordnete (und zwar mit Ausnahme der Grenzschicht drehungsfreie) Strömung ein. Dagegen entstehen an der Rückseite zwei große Wirbel, die jedoch sehr instabil sind und meist in kleinere Wirbel zerfallen, also zur Turbulenz führen. Auch in dem allgemeineren Fall, daß t_a von t_w verschieden sind, wird sich an Vorder- und Rückseite ein verschiedener Strömungszustand einstellen und damit sind dann auch wesentlich verschiedene Verhältnisse für den Wärmeübergang gegeben.

Die genauere Untersuchung dieser Verhältnisse ist vorerst von überwiegend theoretischem Interesse. Für die Technik sind zwei Fragen von Interesse:

1. Wie groß ist die W.Ü.Z. α im Mittel über den Umfang des Zylinders genommen?
2. Wie groß ist die Wärmemenge Q , welche ein Abschnitt des Zylinders von der Länge L in der Zeiteinheit abgibt?

Hierbei sei der Zylinder als so lange angenommen, daß die besonderen Verhältnisse an den Enden nicht ins Gewicht fallen. Aus dem Prinzip der Ähnlichkeit folgt:

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \cdot \psi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{a \cdot \rho}{\mu}, \frac{\delta}{d} \right) \dots \dots \dots (117a)$$

Die Gestalt dieser Funktion ist zur Zeit noch nicht bekannt; sie läßt sich nur durch Versuche bestimmen.

Aus der Gleichung: $Q = \alpha \cdot F \cdot (t_a - t_w)$ folgt dann mit Verwendung von Gleichung (117 a):

$$Q = \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot (t_a - t_w) \cdot \psi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{a \cdot \rho}{\mu}, \frac{\delta}{d} \right) \dots (117b)$$

b) Die Strömung durch ein Rohrbündel. (Strömung an der Außenseite der Rohre.) Die Rohre, deren äußerer Durchmesser d ist, seien nach den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes angeordnet. Der Abstand zweier Rohrachsen sei s , die Oberflächentemperatur der Rohre gleich t_w und die Anfangstemperatur der Flüssigkeit gleich t_a .

Für jedes Rohr der ersten Rohrreihe gelten die im vorigen Abschnitte erörterten Gesichtspunkte, denn an die erste Rohrreihe strömt die Flüssigkeit mit (nahezu) geordneter Strömung heran. Dagegen verläßt die Flüssigkeit die erste Rohrreihe in gänzlich turbulenterem Zustand. An die zweite sowie an alle späteren Rohrreihen strömt also die Flüssigkeit bereits mit Turbulenz heran. Die Strömungsbilder an der Vorderseite — aber auch an der Rückseite — werden hier anders sein als bei der ersten Rohrreihe.

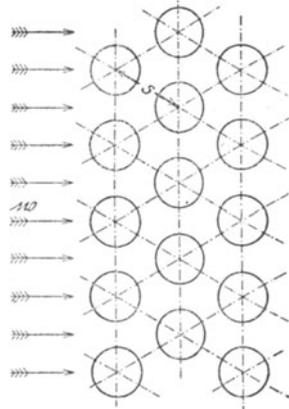


Fig. 68. Strömung durch ein Rohrbündel.

Wir können deshalb annehmen, daß die Wärmeübergangsverhältnisse bei der zweiten bis letzten Rohrreihe unter sich gleich sind, daß sie aber verschieden sind von denen der ersten Rohrreihe.

Für die späteren Rohrreihen ergibt sich aus dem Ähnlichkeitsgesetz:

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{a \cdot \rho}{\mu}, \frac{s}{d}, \frac{\delta}{d} \right) \dots (118)$$

Die Gestalt dieser Funktion könnte ebenfalls nur durch Versuche bestimmt werden.

6. Die Modellregel.

Aus der Fülle der überhaupt möglichen Strömungsvorgänge haben wir vier Fälle zur Besprechung herausgegriffen. Es sind dies

- die Strömung im geraden Rohr,
- „ „ in der Rohrspirale,
- „ „ senkrecht gegen einen Zylinder,
- „ „ durch ein Rohrbündel.

Diese Fälle zeichnen sich einerseits durch Einfachheit, andererseits durch technische Wichtigkeit aus und wir können sie deshalb als Fundamentalaufgaben des Wärmeüberganges bezeichnen. Wir mußten uns hierbei darauf beschränken, mit Hilfe des Prinzipes der Ähnlichkeit die symbolischen Gleichungen für die Kennfunktionen

aufzustellen und mußten dann die Bestimmung der Kennfunktionen selbst der experimentellen Forschung überweisen. Das Ähnlichkeitsprinzip erscheint so nur als ein Hilfsmittel für die technische Forschung und die Praxis hat nur indirekten Vorteil aus ihm.

Es gibt aber eine Anwendung des Ähnlichkeitsprinzipes, welche der Praxis direkt zugute kommt, nämlich in der Modellregel. Wir wollen diese an dem Beispiel eines Röhrenkessels von der neben gezeichneten Form (Fig. 69) besprechen.

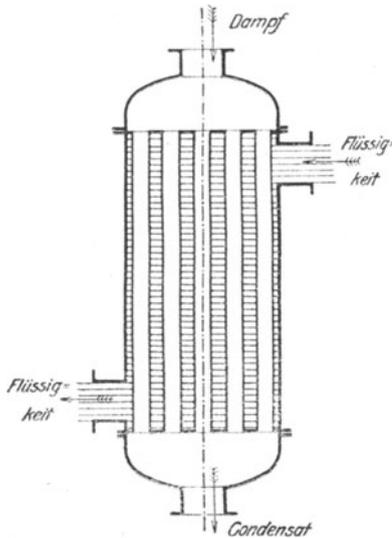


Fig. 69. Röhrenkessel.

Durch das Innere der Rohre ströme kondensierender Dampf, so daß die Oberfläche der Rohre ziemlich genau auf der Temperatur $t_w = 100^\circ \text{C}$ gehalten werde. Eine Flüssigkeit ströme mit der Temperatur t_a in den Apparat ein und verlasse ihn mit der Temperatur t_e . Wir wollen nun annehmen, daß von dem Apparat eine Ausführung in einer bestimmten Größe gegeben sei und daß nun die Aufgabe vorliege, einen neuen Apparat in größerer (oder kleinerer) Ausführung zu entwerfen. Es ergibt sich nun die Frage; wie kann man Erfahrungen,

die am ersten Apparat gemacht wurden, bei der Berechnung des größeren Apparates verwerten? Dazu dient die Modellregel.

Wir bezeichnen mit

- d den äußeren Durchmesser der Rohre,
- D den Durchmesser des Kessels,
- s den Abstand zweier Rohre,
- H die Höhe des Flüssigkeitsraumes (= Länge der Heizrohre).

Dann liefert das Prinzip der Ähnlichkeit die symbolische Gleichung:

$$\frac{t_e - t_w}{t_a - t_w} = \Phi \left(\frac{w \cdot d}{a}, \frac{a \cdot \rho}{\mu}, \frac{D}{d}, \frac{H}{d}, \frac{s}{d}, \frac{\delta}{d} \right)$$

Die Bestimmung dieser Funktion Φ ist natürlich wegen der vielen Argumente eine sehr umständliche Arbeit.

Wenn wir jedoch die Einschränkung treffen, daß der zweite Apparat in allen seinen Teilen dem ersten Apparat geometrisch ähnlich sein soll und wenn wir ferner uns auf die Verwendung der gleichen Flüssigkeit bei annähernd denselben Temperaturen beschränken, dann reduziert sich die Kennfunktion auf die einfachere Form

$$\frac{t_e - t_w}{t_a - t_w} = \Phi_{\text{red}}(w \cdot d) \dots \dots \dots (119)$$

wobei wir unter w die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle, zum Beispiel im Eintrittsquerschnitt (Eintrittsstutzen) verstehen.

Wird nun verlangt, daß der neue Apparat bei gleicher Wandtemperatur t_w und gleicher Anfangstemperatur t_a auch gleiche Endtemperatur t_e liefern solle, so muß

$$(w \cdot d)_{\text{Entwurf}} = (w \cdot d)_{\text{Modell}}$$

sein oder in unserer früheren Schreibweise

$$v_w \cdot v_1 = 1 \dots \dots \dots (120a)$$

Eine zweite Bedingung für v_w und v_1 liefert die Vorschrift, daß der neue Apparat n mal mehr (oder weniger) Flüssigkeit erwärmen soll als das „Modell“, d. h.

$$v_1 \cdot v_w = n \dots \dots \dots (120b)$$

sein muß.

Aus den beiden Gleichungen (120) folgt dann:

$$v_1 = n \text{ und } v_w = \frac{1}{n}.$$

Damit sind also sofort Größe und Strömungsgeschwindigkeit für den neuen Apparat gegeben.

Wenn es auch nicht in allen Fällen zweckmäßig sein wird, die geplante Ausführung in allen Teilen vollkommen geometrisch ähnlich mit der vorhandenen Ausführung durchzukonstruieren, so sind doch auch für diesen Fall wichtige Anhaltspunkte durch die Modellregel gegeben.

7. Der Wärmedurchgang.

Bei den bisher besprochenen Aufgaben handelte es sich stets um den Wärmeaustausch zwischen einer Körperoberfläche und einer strömenden, tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit, also um den Wärmeübergang. Im folgenden sollen nun solche Fälle besprochen werden, bei welchen der Wärmeaustausch zwischen zwei Flüssigkeiten, die durch eine feste Wand getrennt sind, stattfindet.

Je nach der Form der trennenden Wand unterscheidet man Wärmedurchgang durch ebene Wände und Wärmedurchgang durch Rohrwandungen.

a) Die Wärmedurchgangszahl [= W. D. Z.] für ebene Wände.

- Gegeben sei: Die Dicke Δ der Wand,
- Die W. L. F. λ der Wand,
- Die Temperaturen t_1 und t_2 beider Flüssigkeiten.
- und die W. Ü Z. α_1 und α_2 auf beiden Seiten der Wand.

Gesucht sei: Die in der Zeiteinheit durch die Fläche F der Wand hindurchgehende Wärmemenge Q .

Zur Lösung gehen wir von dem Gedanken aus, daß im Beharrungszustand die Wärmemenge, die von der ersten, wärmeren Flüssigkeit an die Wand übergeht, gleich ist der Wärmemenge, die die Wand durchsetzt und gleich ist der Wärmemenge, die auf der anderen Seite von

der Wand an die zweite, kältere Flüssigkeit übertritt. Es ergeben sich damit für Q die drei Gleichungen:

$$\text{I. } Q = \alpha_1 \cdot F \cdot (t_1 - t_{W,1}) \text{ oder } t_{W,1} - t_1 = \frac{-Q}{\alpha_1 \cdot F}$$

$$\text{II. } Q = \lambda \cdot F \cdot \frac{t_{W,1} - t_{W,2}}{\Delta}$$

$$\text{III. } Q = \alpha_2 \cdot F \cdot (t_{W,2} - t_2) \text{ oder } t_{W,2} - t_2 = \frac{Q}{\alpha_2 \cdot F}$$

Entnimmt man aus I. und III. die Werte für $t_{W,1}$ und $t_{W,2}$ und setzt sie in II. ein, so ergibt sich:

$$\frac{Q \cdot \Delta}{\lambda \cdot F} = t_1 - \frac{Q}{\alpha_1 \cdot F} - t_2 - \frac{Q}{\alpha_2 \cdot F} \text{ oder}$$

$$\frac{Q}{F} \cdot \left(\frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_1 - t_2 \text{ oder}$$

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot F \cdot (t_1 - t_2) = k \cdot F \cdot (t_1 - t_2) \dots (121)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\Delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Grad} \cdot \text{Stde.}} \right] \dots (122a)$$

k heißt die Wärmedurchgangszahl und ihr reziproker Wert $1/k$ der Wärmedurchgangswiderstand.

Setzt sich die Wand aus mehreren Schichten mit den Dicken Δ_{I} , Δ_{II} , usw. und den W. L. F. λ_{I} , λ_{II} , usw. zusammen, so erweitert sich der Ausdruck für k zu der Form

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\Delta_{\text{I}}}{\lambda_{\text{I}}} + \frac{\Delta_{\text{II}}}{\lambda_{\text{II}}} + \dots + \frac{1}{\alpha_2}} \dots (122b)$$

Im anderen Grenzfall, daß die Wand aus nur einer Schicht von sehr geringer Dicke und von sehr guter W. L. F. besteht — z. B. bei dünnen Kupferrohren — verschwindet der Wert Δ/λ gegen $1/\alpha_1$ und $1/\alpha_2$ und es wird dann $t_{W,1} = t_{W,2} = t_W$;

Für k ergibt sich dann die Gleichung

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \dots (122c)$$

und für die einheitliche Wandtemperatur folgt dann aus Gleichung I und III die Beziehung

$$\alpha_1 \cdot (t_1 - t_W) = \alpha_2 \cdot (t_W - t_2) \dots (123)$$

oder

$$t_W = \frac{\alpha_1 \cdot t_1 + \alpha_2 \cdot t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

d. h. die Temperatur der Wand stellt sich so ein, daß die beiderseitigen Temperaturunterschiede sich umgekehrt wie die zugehörigen W. Ü. Z. verhalten.

b) Die Wärmedurchgangszahl für Rohre.

Gegeben sei: der innere Durchmesser d_i des Rohres,
 der äußere Durchmesser d_a „ „ „
 die innere W. Ü. Z. α_i ,
 die äußere W. Ü. Z. α_a ,
 die Temperatur t_i der inneren Flüssigkeit,
 die Temperatur t_a der äußeren Flüssigkeit,
 die W. L. F. der Wand λ .

Gesucht sei die Wärmemenge dQ , welche innerhalb der Zeiteinheit und innerhalb der Länge dz des Rohres von innen nach außen durch die Rohrwandung strömt.

Zur Lösung gehen wir von dem gleichen Gedanken aus wie bei der ebenen Wand. Wir erhalten dann die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I. } dQ &= d_i \cdot \pi \cdot dz \cdot \alpha_i \cdot (t_i - t_{W,i}) \text{ oder } t_i - t_{W,i} = \frac{+ dQ}{d_i \cdot \pi \cdot dz \cdot \alpha_i} \\ \text{II. } dQ &= 2 \cdot \pi \cdot dz \cdot \lambda \cdot \frac{t_{W,i} - t_{W,a}}{\ln d_a - \ln d_i} \\ \text{III. } dQ &= d_a \cdot \pi \cdot dz \cdot \alpha_a \cdot (t_{W,a} - t_a) \text{ oder } t_{W,a} - t_a = \frac{+ dQ}{d_a \cdot \pi \cdot dz \cdot \alpha_a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \frac{dQ}{2 \cdot \pi \cdot dz} \cdot \frac{\ln d_a - \ln d_i}{\lambda} &= (t_i - t_a) - \frac{dQ}{\pi \cdot dz} \cdot \left(\frac{1}{d_i \cdot \alpha_i} + \frac{1}{d_a \cdot \alpha_a} \right) \\ \text{oder } dQ &= \pi \cdot dz \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i \cdot d_i} + \frac{\ln d_a - \ln d_i}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha_a \cdot d_a}} \cdot (t_i - t_a) \\ &= \pi \cdot dz \cdot k_{\text{Rohr}} \cdot (t_i - t_a) \dots \dots \dots (124) \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$k_{\text{Rohr}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i \cdot d_i} + \frac{\ln d_a - \ln d_i}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha_a \cdot d_a}} \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m} \cdot \text{Grad} \cdot \text{Std.}} \right]$$

Während wir also bei der ebenen Wand eine W. D. Z. für die Flächeneinheit erhielten, bekommen wir beim Rohr eine W. D. Z. für die Längeneinheit des Rohres.

Bei den Ableitungen der W. D.-Zahlen hatten wir auf jeder Seite der Wand mit nur einer einheitlichen Flüssigkeitstemperatur gerechnet. Dies wird aber, solange es sich um endliche Flüssigkeitsmassen handelt, keineswegs der Fall sein; vielmehr werden sich die Flüssigkeitstemperaturen auf beiden Seiten im Sinne der Strömungsrichtungen dauernd

ändern. Je nach der gegenseitigen Strömungsrichtung beider Flüssigkeiten zueinander unterscheiden wir deshalb

den Wärmedurchgang im Gleichstrom,
 „ „ „ im Gegenstrom und
 „ „ „ im Kreuzstrom.

Die beiden ersten Arten werden auch unter dem Namen Parallelstrom zusammengefaßt.

Wir werden uns in den Nachstehenden nur mit dem Gleichstrom und dem Gegenstrom befassen und verweisen bezüglich des Kreuzstromes auf die Arbeit von Nußelt: „Der Wärmeübergang im Kreuzstrom“. Zeitschr. d. Vereines deutscher Ing. 1911, Seite 2021.

c) Der Wärmedurchgang im Gleichstrom.

1. Die Frage nach den Endtemperaturen der Flüssigkeiten. „Eine wärmere Flüssigkeit „Eins“ und eine kältere Flüssigkeit „Zwei“ sollen einen Wärmeaustauschapparat im Gleichstrom durchströmen. Gegeben sind die Abmessungen des Apparates, die Wärmedurchgangszahl k (konstant längs der ganzen Strömung angenommen). Die Wasserwerte W_1 und W_2 der in der Zeiteinheit den Apparat durchströmenden Flüssigkeiten und die Anfangstemperaturen $t_{1,a}$ und $t_{2,a}$ beider Flüssigkeiten. — Gesucht sind die Endtemperaturen $t_{1,e}$ und $t_{2,e}$.“

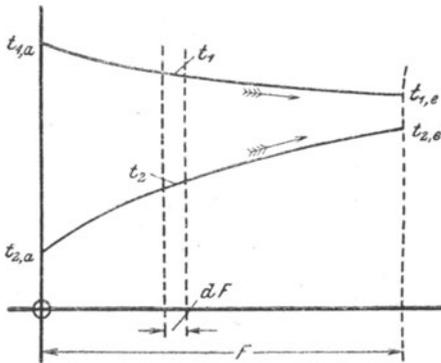


Fig. 70. Gleichstrom (Buchstabenbezeichnung).

Die Wasserwerte W_1 und W_2 der in der Zeiteinheit den Apparat durchströmenden Flüssigkeiten und die Anfangstemperaturen $t_{1,a}$ und $t_{2,a}$ beider Flüssigkeiten. — Gesucht sind die Endtemperaturen $t_{1,e}$ und $t_{2,e}$.“

Unter der Voraussetzung, daß der Apparat nach außen keine Wärme verliert, ist die

Wärmemenge, welche die wärmere Flüssigkeit abgibt, gleich der Wärmemenge, welche die kältere aufnimmt; es ist also

$$Q = W_1 \cdot (t_{1,a} - t_{1,e}) = - W_2 \cdot (t_{2,a} - t_{2,e}) \quad \dots (126)$$

Eine zweite Beziehung zwischen den Temperaturen erhalten wir, indem wir denselben Gedanken auf die Wärmemenge dQ anwenden, welche innerhalb des Flächenstückes dF ausgetauscht wird (vgl. Fig. 70). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} dQ &= W_1 \cdot (-d t_1) \text{ und} \\ dQ &= W_2 \cdot (+d t_2) \end{aligned}$$

$$\text{Daraus: } d(t_1 - t_2) = -dQ \cdot \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \quad \dots (a)$$

Für dQ ergibt sich aus dem Begriff der W . D. Z. die dritte Gleichung:

$$dQ = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dF \quad \dots (b)$$

Aus den Gleichungen (a) und (b) folgt

$$\frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = - \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot d \cdot F$$

Integriert über die ganze Fläche F ergibt dies:

$$\ln \frac{t_{1,e} - t_{2,e}}{t_{1,a} - t_{2,a}} = - \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F \quad \dots \dots (127a)$$

oder

$$\frac{t_{1,e} - t_{2,e}}{t_{1,a} - t_{2,a}} = e^{- \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F} \quad \dots \dots (127b)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Temperaturdifferenz zwischen beiden Flüssigkeiten längs der Trennungswand nach dem Gesetze der Exponentialfunktion abnimmt, sich also mit wachsendem F dem Werte Null nähert.

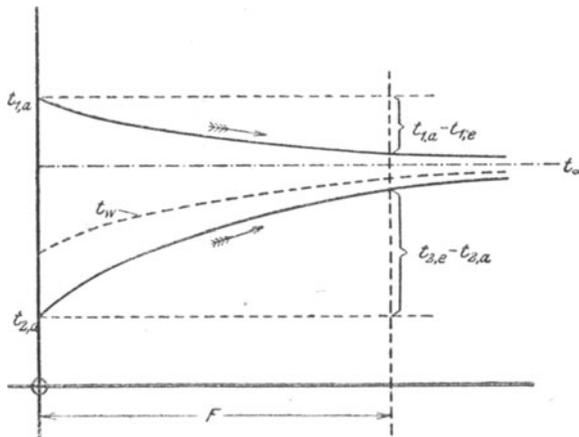


Fig. 71. Gleichstrom (Verlauf der Temperaturen).

Die Gleichung (127 b) liefert nur die Endtemperaturdifferenz. Um die Endtemperaturen $t_{1,e}$, und $t_{2,e}$, selbst zu finden, formen wir (127 b) um, indem wir beide Gleichungsseiten von „Eins“ subtrahieren. Wir erhalten

$$(t_{1,a} - t_{1,e}) - (t_{2,a} - t_{2,e}) = (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot \left(1 - e^{- \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F} \right) \quad (128)$$

Aus den beiden Gleichungen (126) und (128) folgt:

$$t_{1,a} - t_{1,e} = \frac{+ W_2}{W_1 + W_2} \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot \left(1 - e^{- \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F} \right) \quad (129a)$$

$$t_{2,a} - t_{2,e} = \frac{- W_1}{W_1 + W_2} \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot \left(1 - e^{- \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F} \right) \quad (129b)$$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen stellen die Temperaturänderungen dar, welche die beiden Flüssigkeiten auf ihrem Wege erleiden und geben damit zugleich die Endtemperaturen selbst an.

Mit unendlich wachsendem F wird

und

$$\left. \begin{aligned} t_{1,e} &= t_{2,e} = t_\infty \dots \dots \dots \\ t_{1,a} - t_\infty &= \frac{+W_2}{W_1 + W_2} \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) \dots \dots \dots \\ t_{2,a} - t_\infty &= \frac{-W_1}{W_1 + W_2} \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Aus den Gleichungen (129) und (130) können wir über die beiden Kurven, welche den Verlauf der Flüssigkeitstemperaturen in Fig. 71 darstellen, folgendes aussagen: Beide Kurven haben eine gemeinsame, horizontale Asymptote, welche so liegt, daß sie die Eintrittstemperaturdifferenz im umgekehrten Verhältnis der Wasserwerte teilt. Die Kurven selbst stellen Exponentialfunktionen nach der Gleichung $y = a \cdot (1 - e^{-bx})$ dar.

Nach Gleichung (123) würde bei unendlich dünner Wandstärke die Kurve der Wandtemperatur t_w so zwischen beiden Temperaturkurven verlaufen, daß der Abstand beider Kurven im umgekehrten Verhältnis der W. Ü. Z. α_1 und α_2 geteilt würde.

Die gesamte ausgetauschte Wärmemenge Q ergibt sich aus den beiden Gleichungen (126) und (129a oder b) zu:

$$Q = \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2} \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) \cdot k \cdot F} \right) \dots \dots (131 a)$$

$$= (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot W_1 \cdot \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \cdot \frac{k \cdot F}{W_1}}}{1 + \frac{W_1}{W_2}}$$

$$= (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot W_1 \cdot \text{Funkt}_{19} \left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1} \right) \dots \dots \dots (131 b)$$

In dieser Gleichung stellt $(t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot W_1$ jene Wärmemenge dar, welche einer völligen Abkühlung der wärmeren Flüssigkeit bis auf die Anfangstemperatur der kälteren Flüssigkeit entsprechen würde. Der zweite Ausdruck, $\text{Funkt}_{19} \left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1} \right)$ gibt an, welcher Bruchteil von dieser Wärme wirklich ausgetauscht wird. Zahlentafel Nr. 19 stellt den Wert dieser Funktion in Abhängigkeit von ihren beiden Argumenten dar.

Zahlenbeispiel.

„In einem Gleichstrom-Wärmeaustauscher sollen stündlich 250 Liter einer heißen Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht 1,1 [kg dm³] und der spezifischen Wärme 0,727 [W. E. · kg⁻¹ · Grad⁻¹] gekühlt werden; ihre Anfangstemperatur sei 120° C. Zur Kühlung stehen stündlich 1000 Liter Wasser von 10° C zur Verfügung. Die Kühlfläche sei 5 [m²] und die W. D. Z. gleich 20 [W. E. · m⁻² · Grad⁻¹ · Std. · -¹]. — Wie groß ist die gesamte ausgetauschte Wärmemenge? Wie groß sind die Endtemperaturen beider Flüssigkeiten?“

Wir bestimmen in vorbereitender Rechnung:

$$W_1 = 250 \cdot 0,727 \cdot 1,1 = 200$$

$$W_2 = 1000 \cdot 1,000 \cdot 1,0 = 1000$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{k \cdot F}{W_1} = \frac{20 \cdot 5}{200} = \frac{1}{2};$$

Zahlentafel Nr. 19.

Wärmeaustausch im Gleichstrom.

Zeiger „1“ bedeutet die wärmere Flüssigkeit.

$\frac{k \cdot F}{W_1} =$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
$\frac{W_1}{W_2} = 0$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,63	0,86	0,96	1,00
$\frac{1}{30}$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,63	0,86	0,95	0,99
$\frac{1}{20}$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,62	0,84	0,91	0,95
$\frac{1}{10}$	0,033	0,10	0,28	0,38	0,61	0,81	0,89	0,91
$\frac{1}{5}$	0,033	0,10	0,27	0,38	0,58	0,76	0,81	0,83
$\frac{1}{2}$	0,033	0,10	0,26	0,35	0,52	0,63	0,66	0,67
1	0,033	0,09	0,25	0,32	0,43	0,49	0,50	0,50
2	0,033	0,09	0,21	0,26	0,32	0,33	0,33	0,33
5	0,032	0,08	0,14	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
10	0,028	0,06	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
20	0,024	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
50	0,016	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
100	0,009	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
∞	0,000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aus Zahlentafel Nr. 19 lesen wir ab:

$$\text{Funkt}_{19} \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right) = 0,38.$$

Ferner ist $W_1 \cdot (t_{1,a} - t_{2,a}) = 200 \cdot (120 - 10) = 22\,000 \frac{[\text{W. E.}]}{\text{std.}}$

Die Gleichung (131 b) liefert dann als Wert für die ausgetauschte Wärme:

$$Q = 22\,000 \cdot 0,38 = 8\,250 [\text{W. E./std.}].$$

Die Endtemperaturen der Flüssigkeiten ergeben sich mit diesem Werte Q aus Gleichung (126):

$$t_{1,a} - t_{1,e} = \frac{8\,250}{200} = 41,3^{\circ}; \text{ oder } t_{1,e} = 78,7^{\circ} \text{ C,}$$

$$t_{2,a} - t_{2,e} = \frac{8\,250}{1\,000} = 8,3^{\circ}; \text{ oder } t_{2,e} = 18,3^{\circ} \text{ C.}$$

2. Die Frage nach der erforderlichen Heiz- oder Kühlfläche.

„Eine wärmere Flüssigkeit vom stündlichen Wasserwert $W_1 (= 20)$ soll in einem Gleichstrom-Wärmeaustauscher von einer gegebenen Anfangstemperatur $t_{1,a} (= 120^\circ \text{C})$ auf eine verlangte Endtemperatur $t_{1,e} (= 58^\circ \text{C})$ abgekühlt werden. Zur Verfügung steht eine kältere Flüssigkeit vom stündlichen Wasserwert $W_2 (= 400)$ und der Anfangstemperatur $t_{2,a} (= 20^\circ \text{C})$. — Wie groß berechnet sich die erforderliche Kühlfläche, wenn die W. D. Z. zu $k (= 10,0)$ geschätzt ist?“

Die Aufgabe läßt sich mit den bereits abgeleiteten Gleichungen lösen, so daß wir den Gang der Aufgabe sofort an dem Zahlenbeispiel besprechen können.

Wir gehen aus von der Gleichung (126), aus welcher sich die übergehende Wärme Q zu

$$Q = 20 \cdot (120 - 58) = 20 \cdot 62$$

berechnet. Setzt man diesen Wert in Gleichung (131 b) ein, so ergibt sich

$$\text{Funkt}_{19} \left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1} \right) = \frac{20 \cdot 62}{20 \cdot (120 - 20)} = 0,62.$$

Wir brauchen also nur in Zahlentafel Nr. 19 in der Horizontalreihe $W_1/W_2 = 1/20$ den Funktionswert 0,62 zu suchen, um damit den Wert des zweiten Arguments zu finden. Wir lesen ab:

$$\frac{k F}{W_1} = 1,0 \text{ und berechnen daraus}$$

$$F = 1,0 \cdot \frac{20}{10} = 2 \text{ [m}^2\text{]}.$$

Mit dieser Kühlfläche ist dann der Wärmeaustauscher zu entwerfen.

In Wirklichkeit ist die Rechnung nicht so kurz, wie hier angedeutet ist, denn man muß nun erst nachsehen, wie die geschätzte W. D. Z.

mit diesem Entwurf (Form und Größe der Heizfläche, Strömungsgeschwindigkeit usw.) verträglich ist. Ohne ein öfteres Probieren und Neurechnen wird es hierbei nicht abgehen.

d) Der Wärmedurchgang im Gegenstrom. „Eine wärmere Flüssigkeit „Eins“ und eine kältere Flüssigkeit, „Zwei“ sollen einen Wärmeaustauschapparat im Gegenstrom durchströmen. Gegeben sind die Abmessungen des Apparates, die Wärmedurchgangszahl k (konstant längs der ganzen Strömung angenommen), die Wasserwerte W_1 und W_2 der in der Zeiteinheit den Apparat durchströmenden Flüssigkeiten und die An-

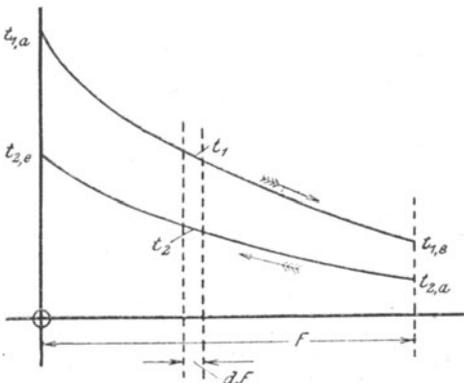


Fig. 72. Gegenstrom (Buchstabenbezeichnung).

fangstemperaturen $t_{1,a}$ und $t_{2,a}$ beider Flüssigkeiten. — Gesucht sind die Endtemperaturen $t_{1,e}$ und $t_{2,e}$.

In der Fig. 72 und in der nachfolgenden Rechnung ist die Annahme getroffen, daß die Größe der Fläche F von derjenigen Seite aus gezählt wird, an welcher die wärmere Flüssigkeit „Eins“ einströmt.

Derselbe Gedankengang, der uns beim Gleichstrom zur Gleichung (126) geführt hat, führt uns hier beim Gegenstrom zur Gleichung (132), welche mit Gleichung (126) gleichlautend ist.

$$Q = W_1 \cdot (t_{1,a} - t_{1,e}) = - W_2 \cdot (t_{2,a} - t_{2,e}) \dots (132)$$

Dagegen ergibt sich wegen der entgegengesetzten Strömungsrichtung eine Vorzeichenänderung im Vergleich zum Gleichstrom, wenn wir den Wärmedurchgang innerhalb des Flächenelementes dF berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} dQ &= W_1 \cdot (-d t_1) \\ dQ &= W_2 \cdot (-d t_2) \end{aligned}$$

Daraus $d(t_1 - t_2) = -dQ \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right) \dots (a)$

Dazu kommt $dQ = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dF \dots (b)$

Dividieren wir Gleichung (a) durch Gleichung (b) und integrieren sie von $F = 0$ bis $F = F$, so erhalten wir die beiden Gleichungen (133), welche den Gleichungen (127) entsprechen.

$$\ln \frac{t_{1,e} - t_{2,a}}{t_{1,a} - t_{2,e}} = - \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F \dots (133a)$$

$$\frac{t_{1,e} - t_{2,a}}{t_{1,a} - t_{2,e}} = e^{- \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right) k \cdot F} \dots (133b)$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, daß die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Flüssigkeiten sich nach dem Gesetze der Exponentialfunktion ändert, und zwar nähern sich die beiden Temperaturkurven mit wachsendem F , wenn $W_2 > W_1$ ist und sie laufen auseinander, wenn $W_2 < W_1$ ist.

Zur Bestimmung der Endtemperaturen der Flüssigkeiten benützen wir die beiden Gleichungen (132) und (133b). Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die beiden Unbekannten:

$$t_{1,e} = \frac{(W_2 - W_1) \cdot t_{1,a} \cdot E + W_2 \cdot t_{2,a} \cdot (1 - E)}{W_2 - W_1 \cdot E} \dots (134a)$$

$$\text{und } t_{2,e} = \frac{(W_2 - W_1) \cdot t_{2,a} + W_1 \cdot t_{1,a} \cdot (1 - E)}{W_2 - W_1 \cdot E} \dots (134b)$$

In diesen Gleichungen sowie in den nachstehenden Gleichungen ist E zur Abkürzung gesetzt für die Exponentialfunktion

$$e^{- \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right) \cdot k \cdot F} = e^{- \left(1 - \frac{W_1}{W_2} \right) \cdot \frac{k \cdot F}{W_1}}$$

Die gesamte durch die Trennungswand ausgetauschte Wärme Q

ergibt sich aus Gleichung (132) und aus einer der beiden Gleichungen (134) zu:

$$Q = W_1 \cdot W_2 \frac{(t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot (1 - E)}{W_2 - W_1 \cdot E} \dots \dots \dots (135a)$$

$$= (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot W_1 \cdot \frac{1 - E}{1 - \frac{W_1}{W_2} \cdot E}$$

$$= (t_{1,a} - t_{2,a}) \cdot W_1 \cdot \text{Funkt}_{20} \left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1} \right) \dots \dots (135b)$$

Zahlentafel Nr. 20.

Wärmeaustausch im Gegenstrom.

Zeiger „1“ bedeutet die wärmere Flüssigkeit.

$\frac{k \cdot F}{W_1} =$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
$\frac{W_1}{W_2} = 0$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,63	0,86	0,95	1,00
$\frac{1}{100}$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,63	0,86	0,95	1,00
$\frac{1}{20}$	0,033	0,10	0,28	0,39	0,62	0,86	0,94	1,00
$\frac{1}{10}$	0,033	0,10	0,28	0,38	0,61	0,85	0,94	1,00
$\frac{1}{5}$	0,033	0,10	0,28	0,38	0,60	0,83	0,93	1,00
$\frac{1}{2}$	0,033	0,10	0,26	0,36	0,57	0,78	0,89	1,00
1	0,033	0,10	0,25	0,34	0,51	0,68	0,77	1,00
2	0,033	0,09	0,23	0,29	0,39	0,46	0,49	0,50
5	0,032	0,08	0,16	0,18	0,20	0,20	0,20	0,20
10	0,028	0,06	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
20	0,024	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
50	0,016	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
100	0,010	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
∞	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (131 b) beim Gleichstrom. Die Werte der Funktion sind in Zahlentafel Nr. 20 zusammengestellt.

Infolge der Ähnlichkeit der Gleichungen (131 b) und (135 b) dürfte sich die Durchrechnungen von Zahlenbeispielen für den Gegenstrom erübrigen.

e) Vergleich zwischen Gleichstrom und Gegenstrom. Bezeichnen wir mit ϑ_0 die Temperaturdifferenz an der Eintrittsstelle der wärmeren Flüssigkeit und mit ϑ_F diejenige an der Austrittsstelle der wärmeren Flüssigkeit, so folgt unter Zuhilfenahme der drei Figuren 73 aus den beiden Gleichungen (127 b) und (133 b) die Gleichung

$$\frac{\vartheta_F}{\vartheta_0} = e^{-\left(\frac{1}{W_1} \pm \frac{1}{W_2}\right) k F} \dots \dots \dots (136)$$

in welcher das positive Vorzeichen für den Gleichstrom, das negative für den Gegenstrom gilt.

Nach den Eigenschaften der Exponentialfunktion e^x (vgl. Zahlentafel Nr. 27 im Anhang) ist ϑ_F kleiner als ϑ_0 , wenn der Exponent x negativ ist, und ϑ_F ist größer als ϑ_0 , wenn der Exponent x positiv. Nun gilt für den Gleichstrom

$$x = - \left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right) k F;$$

es ist hier stets x negativ, wie sich auch die Werte W_1 und W_2 zueinander verhalten mögen. Die Temperaturdifferenz zwischen beiden Flüssigkeiten nimmt also stets ab, wenn wir in Richtung der wärmeren Flüssigkeit fortschreiten (vgl. Fig. 73a).

Anders ist es beim Gegenstrom, wofür der Exponent

$$x = - \left(\frac{1}{W_1} - \frac{1}{W_2} \right) \cdot k F \text{ gilt.}$$

Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Erstens, wenn $W_2 > W_1$ ist. Dann ist x negativ und ϑ_F ist kleiner als ϑ_0 (vgl. Fig. 73b).

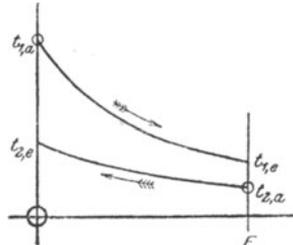


Fig. 73a. Gleichstrom ($W_1 < W_2$).

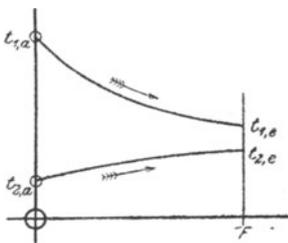


Fig. 73b. Gegenstrom ($W_1 < W_2$).

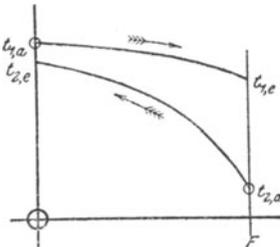


Fig. 73c. Gegenstrom ($W_1 > W_2$).

Zweitens, wenn $W_1 > W_2$ ist. Dann ist x positiv und ϑ_F ist größer als ϑ_0 (vgl. Fig. 73c).

Bei vielen Rechnungen ist es von Vorteil, wenn man die durchschnittliche Temperaturdifferenz längs der ganzen Trennungswand kennt. Diese durchschnittliche Temperaturdifferenz ϑ_D berechnet sich nach der Definitionsgleichung

$$\vartheta_D \cdot F = \int_0^F \vartheta \cdot dF.$$

Es ist

$$\vartheta_D = \vartheta_0 \frac{1 - \frac{\vartheta_F}{\vartheta_0}}{\ln \frac{\vartheta_F}{\vartheta_0}} = \vartheta_0 \cdot \text{funkt}_{21} \left(\frac{\vartheta_F}{\vartheta_0} \right).$$

Über die Zahlenwerte dieser Funktion vgl. die nachstehende Zahlentafel Nr. 21, welche zum Teil unter Benützung der Zahlentafel Nr. 1 aus dem Buche von Hausbrand aufgestellt ist.

Zahlentafel Nr. 21.
Durchschnittliche Temperaturdifferenz.

$\frac{\vartheta_F}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_D}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_F}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_D}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_F}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_D}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_F}{\vartheta_O}$	$\frac{\vartheta_D}{\vartheta_O}$
0,05	0,32	0,18	0,48	1,00	1,00	5,0	2,49
0,06	0,34	0,19	0,49	1,1	1,05	6,0	2,79
0,07	0,35	0,20	0,50	1,2	1,10	7,0	3,09
0,08	0,37	0,25	0,54	1,3	1,14	8,0	3,36
0,09	0,38	0,30	0,58	1,4	1,19	9,0	3,64
0,10	0,39	0,35	0,62	1,5	1,23	10,0	3,91
0,11	0,41	0,40	0,66	1,6	1,28	11,0	4,17
0,12	0,42	0,45	0,69	1,7	1,32	12,0	4,43
0,13	0,43	0,50	0,72	1,8	1,36	13,0	4,68
0,14	0,44	0,60	0,79	1,9	1,40	14,0	4,93
0,15	0,45	0,70	0,84	2,0	1,44	15,0	5,17
0,16	0,46	0,80	0,89	3,0	1,82	16,0	5,41
0,17	0,47	0,90	0,95	4,0	2,16	20,0	6,34

Bei den meisten technischen Aufgaben ist für eine der beiden Flüssigkeiten eine bestimmte Temperaturverminderung oder Temperatursteigerung vorgeschrieben. Damit ist dann nach Gleichung (126) bzw. (132) auch die gesamte zu übertragende Wärmemenge gegeben. Bevor man dann dazu übergehen kann, die erforderliche Heiz- oder Kühlfläche zu berechnen, muß man sich entscheiden, ob man Gleich- oder Gegenstrom verwenden will. Die Gleichungen (131) und (135) geben den Zusammenhang zwischen der auszutauschenden Wärmemenge und der Größe der Heizfläche. Wir dividieren Gleichung (131) durch Gleichung (135) und erhalten:

$$\frac{Q \text{ Gleichstrom}}{Q \text{ Gegenstrom}} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{k \cdot F}{W_1}}}{1 - e^{-\left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{k \cdot F}{W_1}}} \cdot \frac{1 - \frac{W_1}{W_2} e^{-\left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \cdot \frac{k \cdot F}{W_1}}}{1 + \frac{W_1}{W_2}}$$

$$= \frac{\text{Funkt}_{19}\left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1}\right)}{\text{Funkt}_{20}\left(\frac{W_1}{W_2}, \frac{k \cdot F}{W_1}\right)} \dots \dots \dots (137)$$

Der Wert dieses Verhältnisses ist in der nachstehenden Zahlentafel Nr. 22 zusammengestellt. Es zeigt sich, daß bei gleichen Verhältnissen der Gleichstrom niemals mehr Wärmeaustausch ergibt als der Gegenstrom, daß dagegen bei annähernd gleichen Wasserwerten beider Flüssigkeiten und größeren Werten ($k \cdot F/W_1$) durch den Gleichstrom nur ein geringerer Wärmeaustausch erzielt läßt als im Gegenstrom — im Grenzfall nur die Hälfte.

Zahlentafel Nr. 22.

Verhältnis: $\frac{Q \text{ Gleichstrom}}{Q \text{ Gegenstrom}}$

$\frac{k F}{W_1} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
$\frac{W_1}{W_2} = 0$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
$\frac{1}{10}$	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,97	0,95
$\frac{1}{3}$	1,00	1,00	1,00	0,97	0,92	0,87	0,83
1	1,60	1,00	0,94	0,84	0,72	0,65	0,50
5	1,00	0,88	0,89	0,85	0,85	0,85	0,85
20	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Wenn die Wasserwerte der Flüssigkeiten aber wesentlich verschieden sind oder wenn von den Flüssigkeiten nur ganz geringe Temperaturänderungen verlangt sind, so sind die beiden Strömungsarten einander gleichwertig. Man wird sich deshalb stets für den Gegenstrom entscheiden, wenn nicht Gründe anderer Art, z. B. konstruktive Gründe, zum Gleichstrom zwingen.

D. Die Wärmeleitung in strömenden Körpern bei freier Strömung.

1. Allgemeines.

a) Das Wesen der zu besprechenden Vorgänge. Aus der Übersicht auf Seite 147 entnehmen wir, daß die Aufgaben dieses Abschnittes dadurch gekennzeichnet sein sollen, daß die Temperaturunterschiede im Feld lediglich durch äußere Ursachen, die Bewegungen dagegen lediglich durch innere Ursachen unterhalten werden. Wir erkennen am besten das Wesen der zu besprechenden Vorgänge an dem nachstehenden Beispiel:

„Ein sehr großer Raum sei mit einer ruhenden Flüssigkeit (in den meisten Fällen mit einem Gas) von der Temperatur t_R (= Raumtemperatur) und dem Druck p_R gefüllt. Die Wandung des Raumes habe ebenfalls die Temperatur t_R . Nun werde in das Innere dieses Raumes ein Körper von gegebener Gestalt und Größe hineingebracht. Durch irgendwelche Wärmequellen im Inneren des Körpers soll dafür gesorgt sein, daß jeder Punkt seiner Oberfläche konstant auf der Temperatur t_W gehalten wird.“

Wir nehmen $t_W > t_R$ an. Dann wird sich folgender Vorgang abspielen:

Die Flüssigkeitsschicht, welche der Körperoberfläche direkt anliegt, wird von dieser durch Leitung erwärmt und gibt einen Teil dieser Wärme wieder durch Leitung an die nächstliegenden Schichten weiter usf. Durch diesen Vorgang werden die der Körperoberfläche benachbarten

Schichten alle erwärmt; sie werden dadurch spezifisch leichter, erfahren einen Auftrieb und strömen nach oben. Damit führen sie Wärme mit sich fort und machen zugleich den Platz frei für nachströmende, kältere Luft. Auf diese Weise wird das Temperaturgefälle in der Nähe der Oberfläche verstärkt und dies ist wieder die Ursache für ein vermehrtes Abströmen der Wärme aus dem Körper. Im Laufe der Zeit wird sich ein Beharrungszustand einstellen, sowohl hinsichtlich des Bewegungszustandes der Flüssigkeit als auch hinsichtlich der Temperaturverteilung in der Flüssigkeit.

Jene Gebiete, welche von der Körperoberfläche genügend weit abliegen, erleiden keine wesentliche Temperaturerhöhung, damit auch keinen Auftrieb und keine Bewegung. Von der Rückströmung (der Abwärtsströmung) kann man absehen, wenn der Raum groß genug im Vergleich zum heißen Körper gewählt wurde. An der Körperoberfläche selbst wird — entsprechend den Lehren der Hydrodynamik — die Flüssigkeit haften, also w gleich Null sein.

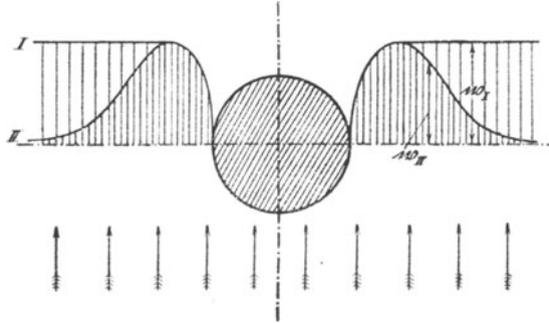


Fig. 74. Geschwindigkeitsverteilung in der Nähe einer freihängenden heißen Kugel.
I. bei aufgezwingener Strömung,
II. bei freier Strömung.

Das obenstehende Bild gibt einen Vergleich zwischen der Geschwindigkeitsverteilung bei aufgezwingener Strömung I (von unten angeblasener Kugel oder Zylinder) und der Geschwindigkeitsverteilung bei freier Strömung II.

b) **Aufstellung der Differentialgleichung.** Da wir uns wieder auf das Gebiet des Beharrungszustandes beschränken wollen, so bildet das Differentialgleichungssystem, welches wir auf Seite 143 aufgestellt haben, den Ausgangspunkt für unsere Betrachtung. Wir können uns darauf beschränken nachzusehen, welche Vereinfachungen an diesen Gleichungen für unser Spezialgebiet zulässig sind.

Die Kontinuitätsgleichung müssen wir unverändert übernehmen.

In der Bewegungsgleichung führen wir zweckmäßigerweise als Massenkraft nicht die Schwere, sondern den Auftrieb ein. Es berechnet sich:

Gewicht der Raumeinheit Flüssigkeit bei t^0	=	$\varrho \cdot g$.
" " " " "	=	$\varrho_R \cdot g$.
Auftrieb " " "	=	$(\varrho - \varrho_R) \cdot g$.

Ist β der Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit, so ist

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{1}{1 + \beta \cdot t} \quad \text{und} \quad \varrho_R = \varrho_0 \cdot \frac{1}{1 + \beta \cdot t_R};$$

$$\begin{aligned} \text{daraus: } \varrho - \varrho_R &= \varrho_0 \left(\frac{1}{1 + \beta t} - \frac{1}{1 + \beta t_R} \right) = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} \cdot \frac{\beta \cdot (t_R - t)}{1 + \beta t_R} \\ &= -\varrho \cdot \frac{1}{1 + \beta t_R} \cdot \beta \cdot (t - t_R). \end{aligned}$$

In den meisten Fällen kann man den Bruch näherungsweise gleich „Eins“ setzen und erhält damit für den Auftrieb der Raumeinheit Flüssigkeit den Ausdruck

$$-\varrho \cdot \beta \cdot (t - t_R) \cdot g;$$

In der Energiegleichung können wir jene Glieder streichen, welche der Ausdruck innerer Ursachen für Temperaturunterschiede sind.

Auf diese Weise gelangen wir zu dem mathematischen Ansatz:

$$\operatorname{div}(\varrho \cdot w) = 0 \quad \dots \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \varrho \cdot (w, \operatorname{grad}) w &= -\beta \cdot (t - t_R) \cdot \varrho \cdot g - \operatorname{grad} p + \mu (\Delta^2 w \\ &\quad + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} w) \quad \dots \quad (139) \end{aligned}$$

$$\varrho \cdot c_p \cdot g (w, \operatorname{grad} t) = \lambda \cdot \Delta^2 t \quad \dots \quad (140)$$

Dazu kommen nun noch die Randbedingungen:

Der Druck muß in größerer Entfernung vom Körper den Wert p_R annehmen, die Temperatur der Flüssigkeit muß an der Körperoberfläche den Wert t_w und in großer Entfernung den Wert t_R annehmen und die Geschwindigkeit muß sowohl an der Körperoberfläche als auch in großer Entfernung gleich Null werden.

Der hauptsächlichste Unterschied gegenüber den Aufgaben bei aufgezwungener Strömung (vergl. Abschnitt C. I. a) besteht darin, daß sich jetzt der hydrodynamische Teil der Aufgabe nicht mehr selbstständig behandeln und vorwegnehmen läßt, weil jetzt das Strömungsfeld vom Temperaturfeld nicht mehr unabhängig ist.

Als Lösung der Aufgabe sind drei Gleichungen zu suchen, welche w , p und t als Funktionen des Ortes darstellen.

Eine Integration der Gleichungen ist aber aus mathematischen Gründen auch in den einfachsten Fällen nicht möglich. Wir sind deshalb hier ausschließlich auf die Aussagen des Ähnlichkeitsprinzips angewiesen.

c) Das Prinzip der Ähnlichkeit. Vergleichen wir zwei Vorgänge bei geometrisch ähnlichen Körpern und ähnlichen Randbedingungen, so gilt an den Berandungen des Feldes:

$$\left. \begin{aligned} l' &= \nu_1 \cdot l \\ p_R' &= \nu_p \cdot p_R + p_0 \\ t_w' - t_R' &= \nu_t \cdot (t_w - t_R) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (141a)$$

ferner gilt für die Stoffwerte:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \nu_\lambda \cdot \lambda; & \beta' &= \nu_\beta \cdot \beta \\ c_p' &= \nu_c \cdot c_p; & \mu' &= \nu_\mu \cdot \mu \\ \varrho' &= \nu_\varrho \cdot \varrho; & g' &= \nu_g \cdot g \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (141b)$$

Soll nun die geometrische Ähnlichkeit nicht nur an der Berandung, sondern auch im ganzen Innern gelten, so müssen die Werte ν im ganzen Feld konstante Größen sein und es muß die weitere Gleichung

$$w' = \nu_w \cdot w \dots \dots \dots (141c)$$

erfüllt sein.

Es fragt sich nun, ob diese vollständige Ähnlichkeit überhaupt möglich ist und wie gegebenenfalls die Werte ν gewählt werden müssen.

Für das zweite System gelten die Gleichungen (138) bis (140) ebenfalls, jedoch mit den gestrichenen Größen. Setzen wir für diese gestrichenen Größen ihre Werte aus den Gleichungen (141) ein, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem:

$$\nu_\rho \cdot \frac{\nu_w}{\nu_1} \cdot \text{div} (\rho \cdot w) = 0 \dots \dots \dots (138')$$

$$\begin{aligned} \nu_\rho \cdot \frac{\nu_w^2}{\nu_1} \cdot \rho \cdot (w, \text{grad}) w &= \nu_\beta \cdot \nu_t \cdot \nu_\rho \cdot \nu_g \cdot (-\beta \cdot (t - t_R) \cdot \rho \cdot g) \\ &\quad - \frac{\nu_p}{\nu_1} \cdot \text{grad } p + \frac{\nu_\mu \cdot \nu_w}{\nu_1^2} \cdot \mu \cdot (\dots) \dots (139') \end{aligned}$$

$$\nu_\rho \cdot \nu_c \cdot \nu_g \cdot \frac{\nu_w \cdot \nu_t}{\nu_1} \cdot \rho \cdot c_p \cdot g \cdot (w, \text{grad } t) = \frac{\nu_\lambda \cdot \nu_t}{\nu_1^2} \cdot \lambda \cdot \Delta^2 t \dots \dots (140')$$

Diese Gleichungen müssen mit den Gleichungen (138) bis (140) identisch sein, sie dürfen sich also nur je um einen beiderseits gleichen, konstanten Faktor unterscheiden. Dies liefert:

$$\begin{aligned} \nu_\rho \cdot \frac{\nu_w}{\nu_1} &= \frac{0}{0} = \text{unbestimmt}; \\ \text{I} \quad \quad \quad \text{II} \quad \quad \quad \text{III} \quad \quad \text{IV} \\ \frac{\nu_\rho \cdot \nu_w^2}{\nu_1} &= \nu_\beta \cdot \nu_t \cdot \nu_\rho \cdot \nu_g = \frac{\nu_p}{\nu_1} = \frac{\nu_\mu \cdot \nu_w}{\nu_1^2}; \\ \quad \quad \quad \text{V} \quad \quad \quad \text{VI} \\ \nu_\rho \cdot \nu_c \cdot \nu_g \cdot \frac{\nu_w \cdot \nu_t}{\nu_1} &= \frac{\nu_\lambda \cdot \nu_t}{\nu_1^2}. \end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen liefert die erste wegen des unbestimmten Ausdruckes 0 : 0 keine Beziehung für die Werte ν . Im ganzen verbleiben dann noch 4 Gleichungen als Beziehungen zwischen den 10 Werten ν .

Diese 4 Gleichungen ließen sich nun in verschiedener Weise kombinieren und dementsprechend käme man später auch zu verschiedenen Zusammenstellungen der Größen l_0, ρ usw. in den Kenngrößen. Da nun keine von diesen Zusammenstellungen grundsätzliche Vorzüge hat, so wollen wir dieselbe Kombination wie Nußelt wählen, um mit dessen Arbeit in Übereinstimmung zu bleiben.

Wir erhalten aus I und IV:

$$\nu_\rho \cdot \nu_w \cdot \nu_1 = \nu_\mu \dots \dots \dots (142a)$$

aus I und III:

$$\nu_\rho \cdot \nu_w = \nu_p \dots \dots \dots (142b)$$

aus II und IV unter Verwendung von (142a):

$$\nu_p \cdot \nu_t \cdot \nu_g \cdot \nu_e^2 \cdot \nu_l^3 = \nu_\mu^2 \dots \dots \dots (142c)$$

aus V und VI unter Verwendung von (142a):

$$\nu_\mu \cdot \nu_c \cdot \nu_g = \nu_\lambda \dots \dots \dots (142d)$$

Nun ist ν_w unter den Randbedingungen nicht enthalten und kann also jeden beliebigen Wert haben; das gleiche gilt für ν_p , weil durch geeignete Wahl von p_0 jeder Wert von ν_p mit den Ähnlichkeitsbedingungen (141) der Randwerte verträglich gemacht werden kann. Infolgedessen fallen diese Gleichungen, welche ν_w und ν_p enthalten, weg und es verbleiben nur die Gleichungen (142c) und (142d).

Wir führen in diese beiden Gleichungen für die „ ν “ ihre Werte aus den Gleichungen (141) ein, verallgemeinern die Überlegung zugleich auf mehr als zwei Systeme und führen das spezifische Gewicht ρ statt der Massendichte ρ ein:

$$\frac{l_0^3 \cdot \gamma^2 \cdot (t_w - t_R) \cdot \beta}{\mu^2 \cdot g} = \frac{l_0'^3 \cdot \gamma'^2 \cdot (t_w' - t_R') \cdot \beta'}{\mu'^2 \cdot g'} = \dots = Gr \dots (143a)$$

$$\text{und } \frac{\lambda}{c_p \cdot \mu \cdot g} = \frac{\lambda'}{c_p' \cdot \mu' \cdot g'} = \dots = St \dots (143b)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich, daß innerhalb einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme auch im Innern der Felder Ähnlichkeit herrscht, wenn die Kenngrößen Gr (= Grashof) und St (= Stanton) gleichen Wert haben oder mit anderen Worten, daß Temperaturfeld, Geschwindigkeitsfeld und Druckfeld innerhalb einer Gruppe ähnlich berandeter Probleme nur mehr Funktionen der Kenngrößen Gr und St sind.

Für die gesamte vom Körper in der Zeiteinheit abgegebene Wärme gilt die Gleichung

$$Q = \lambda \cdot (t_w - t_R) \cdot l_0 \cdot \Psi (Gr, St) \dots \dots \dots (144a)$$

und für die W. Ü. Z. die Gleichung

$$a = \frac{-\lambda}{l_0} \cdot \psi (Gr, St) \dots \dots \dots (145a)$$

Beide Gleichungen sind in derselben Weise aufgestellt wie die Gleichungen (90c) und (95a).

Wenn der wärmeabgebende Körper in den verschiedenen Richtungen verschiedene Abmessungen aufweist, so erweitern sich die Funktionen auf die Argumente:

$$\left(Gr, St, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0} \dots \dots \frac{\ln}{l_0} \right).$$

Andererseits ist auch eine Verminderung der Argumente möglich. Wir erinnern uns an den Abschnitt B. III. in der reinen Hydrodynamik, welcher betitelt ist „Die vereinfachten Strömungszustände“.

Wir hatten dort zuerst aus der Gesamtheit aller Strömungszustände jene Strömungszustände herausgegriffen, welche mit so geringer Geschwindigkeit verlaufen, daß in den Differentialgleichungen der Ausdrück $\rho \cdot (w, \text{grad}) w$ gestrichen werden konnte. Wir waren damit

zu den Strömungen mit geringer Trägheitswirkung oder zur sogenannten „schleichenden Bewegung“ gelangt. Dieser selbe Gedanke läßt sich auch hier bei der freien Strömung rechnerisch durchführen und er führt uns zu den Kennfunktionen:

$$Q = \lambda \cdot (t_W - t_R) \cdot l_0 \cdot \Psi \left(\frac{Gr}{St} \right) \dots \dots \dots (144b)$$

$$\text{und } a = \frac{-\lambda}{l_0} \cdot \psi \left(\frac{Gr}{St} \right) \dots \dots \dots (145b)$$

In diesen Gleichungen ist

$$\frac{Gr}{St} = \frac{l_0^3 \cdot \gamma^2 \cdot (t_W - t_R) \cdot \beta \cdot c_p}{\mu \cdot \lambda}; \dots \dots \dots (146)$$

Den entgegengesetzten Grenzfall bildet die Strömung mit geringer Zähigkeit, bei dem also in der Bewegungsgleichung das Glied $\mu \cdot (\Delta^2 w + \dots$ gestrichen werden kann. Für diesen zweiten Grenzfall gelten die Kennfunktionen:

$$Q = \lambda \cdot (t_W - t_R) \cdot l_0 \cdot \Psi \left(\frac{Gr}{St^2} \right) \dots \dots \dots (144c)$$

$$\text{und } a = \frac{-\lambda}{l_0} \cdot \psi \left(\frac{Gr}{St^2} \right) \dots \dots \dots (145c)$$

mit dem Werte:

$$\frac{Gr}{St^2} = \frac{l_0^3 \cdot \gamma^2 \cdot (t_W - t_R) \cdot \beta \cdot g \cdot c_p^2}{\lambda^2} \dots \dots \dots (147)$$

Durch welche besondere Verhältnisse das Eintreten des einen anderen Grenzzustandes bedingt ist, läßt sich heute noch nicht einwandfrei feststellen (vgl. über diese beiden Grenzfälle die Ausführung in der Nußeltschen Originalarbeit).

Die Gestalt der Funktionen Ψ und ψ in den 6 Gleichungen (144) und (145) ist noch nicht bekannt und kann nur durch den Versuch ermittelt werden.

Die Theorie vermag uns jedoch noch einige weitere Aufschlüsse zu liefern, wenn wir uns auf die freie Strömung in Gasen beschränken.

2. Die freie Abkühlung eines Körpers in einem Gas.

a) Allgemeines. Wir nehmen wieder im Interesse einer einfachen Ausdrucksweise an, daß der Körper heißer ist als das ihn umgebende Gas. Ist das Gegenteil der Fall, so müßten wir von einer freien Erwärmung sprechen, einem Vorgang, der sich von dem erstbesprochenen nur dadurch unterscheidet, daß die Strömung von der Körperoberfläche aus nach abwärts gerichtet ist.

Ist die umgebende Flüssigkeit ein Gas, so lassen sich für die Stoffwerte noch einige Gesetzmäßigkeiten aufstellen.

Nach den Lehren der kinetischen Gastheorie gilt für Gase die Gleichung

$$\lambda = \varepsilon \cdot \mu \cdot c_v \cdot g$$

worin ε ein reiner Zahlenwert ist, der nur von der Atomzahl des Gases abhängt. Durch Versuche ist die Gleichung bestätigt und sind die Werte ε bekannt (vgl. Zeile 1 der untenstehenden Zahlentafel Nr. 23).

Ferner gilt die aus der Thermodynamik bekannte Gleichung

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa,$$

in welcher κ ebenfalls ein nur von der Atomzahl abhängiger Zahlenwert ist (vgl. Zeile 2 der Zahlentafel).

Infolgedessen muß auch der Wert

$$\frac{\varepsilon}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu \cdot c_p \cdot g} = St$$

nur von der Atomzahl abhängen (vgl. Zeile 3).

Zahlentafel Nr. 23.

ε und κ abhängig von der Atomzahl.

	Atomzahl	1	2	3	4	5	6
1.	$\varepsilon =$	2,50	1,74	1,51	1,23	1,28	1,24
2.	$\kappa =$	1,66	1,46	1,27	1,28	1,28	1,25
3.	$\varepsilon/\kappa =$	1,50	1,24	1,19	0,96	1,00	0,99

Solange wir uns also bei unseren Betrachtungen auf Gase gleicher Atomzahl beschränken (und die Erdbeschleunigung als konstant betrachten), können wir annehmen, daß der Abkühlungsvorgang von der Kenngröße St unabhängig ist.

Berücksichtigen wir, daß bei Gasen der Ausdehnungskoeffizient β gleich $1 : T$ ist, so erhalten wir für die verbleibende Kenngröße Gr den Wert:

$$\frac{l_0^3 \cdot \gamma^2 \cdot (T_W - T_R)}{\mu^2 \cdot g \cdot T};$$

Die Größe β ist aber ebenso wie μ und γ von der Temperatur abhängig, und wir dürften deshalb unsere ganze Betrachtung nur für geringe Temperaturunterschiede $T_W - T_R$ gelten lassen.

Nußelt beweist jedoch in seiner Arbeit, daß auch bei größeren Temperaturunterschieden sich die Kennfunktionen auf die eine Veränderliche Gr beschränken, wenn man für die Temperatur, die $W. L. F.$, die Dichte und die Zähigkeit, die Mittelwerte einführt, welche sich aus den untenstehenden Definitionsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_m} &= \frac{1}{T_W - T_R} \cdot \int_{T_R}^{T_W} \frac{dT}{T} = \frac{\ln \frac{T_W}{T_R}}{T_W - T_R} \\
 T_m &= \frac{T_W - T_R}{\ln T_W - \ln T_R} \dots \dots \dots \\
 \lambda_m &= \frac{1}{T_W - T_R} \cdot \int_{T_R}^{T_W} \lambda \cdot dT \dots \dots \dots \\
 \mu_m &= \frac{1}{T_W - T_R} \cdot \int_{T_R}^{T_W} \mu \cdot dT \dots \dots \dots \\
 \gamma_m &= \frac{1}{T_W - T_R} \cdot \int_{T_R}^{T_W} \gamma \cdot dT = \frac{\gamma_0 \cdot 273}{T_W - T_R} \cdot \int_{T_R}^{T_W} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma_0 \cdot 273}{T_m} \dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (148)$$

Damit erhalten wir für den Wärmeverlust des Körpers (ohne Strahlung) in der Zeiteinheit die Gleichung:

$$Q = \lambda_m \cdot (T_W - T_R) \cdot l_0 \cdot \psi \left(\frac{l_0^3 \cdot \gamma_m^2 \cdot (T_W - T_R)}{g \cdot \mu_m^2 \cdot T_m} \right) \dots \dots (149)$$

und für die W. Ü. Z. die Gleichung

$$\alpha = \frac{-\lambda_m}{l_0} \cdot \psi \left(\frac{l_0^3 \cdot \gamma_m^2 \cdot (T_W - T_R)}{g \cdot \mu_m^2 \cdot T_m} \right) \dots \dots \dots (150)$$

Die Gestalt dieser Funktionen kann wieder nur durch den Versuch bestimmt werden, und zwar werden diese Funktionen sich verschieden ergeben, je nach Gestalt und Lage des sich abkühlenden Körpers.

Die wichtigste und auch am meisten untersuchte Aufgabe ist die Abkühlung des wagrecht gelagerten Zylinders in atmosphärischer Luft. Technisch wichtige Beispiele sind das dampferfüllte Rohr und der stromdurchflossene elektrische Leitungsdraht.

b) Die freie Abkühlung eines wagrecht gelagerten Zylinders in Luft. Von den vier experimentellen Arbeiten, welche über dieses Problem vorliegen, sind drei mit dünnen Drähten, die vierte mit Rohren von 2—9 cm durchgeführt worden. Diese Arbeiten sind:

1. Kennelly, Wright und Bylevelt. — The convection of heat from small copper wires. Trans. Amer. Inst. Elect. Engin. 28. Januar 1909, S. 363.
2. Langmuir. — Convection and conduction of heat in gases. Physical review. 1912. 34. S. 401.
3. Bylevelt. — Die künstliche Konvektion am elektrischen Hitzdrahte. Diss. Dresden 1915.
4. F. Wamsler. — Die Wärmeabgabe geheizter Körper an Luft. Mitteil. üb. Forsch.-Arb. Heft 98/99. 1911.

Über die Versuchsbedingungen dieser vier Arbeiten gibt die nachstehende Zusammenstellung Aufschluß.

Versuche von	Stoff	Durchm. im m/m	Raumtemp.	Oberflächentemp.	Druck m/m Hg
Kennely, Wright und Bylevelt	Kupfer	0,1143	rd. 18° C	36° C bis 198° C	150 bis 1500
		0,2616			
		0,6907			
Langmuir	Platin	0,0404	rd. 27° C	107° C bis 1600° C	750
		0,0691			
		0,1264			
		0,2508 0,510			
Bylevelt	Nickel und Tantal	0,043	17 bis 21° C	48,6° C bis 168,3° C	750
		1,00			
Wamsler	Schmied-eisen	20,5	16 bis 29° C	56 bis 238° C	715
		33			
		48			
		76			
		89			

Berechnet man für jeden Versuch dieser vier Arbeiten die Werte

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} \text{ und } \frac{d^3 \cdot \gamma^2 \cdot (T_W - T_R)}{g \cdot \mu^2 \cdot T_m}$$

und trägt sie dann in einem logarithmischen Koordinatensystem auf, so erhält man die nachstehende Fig. 75.

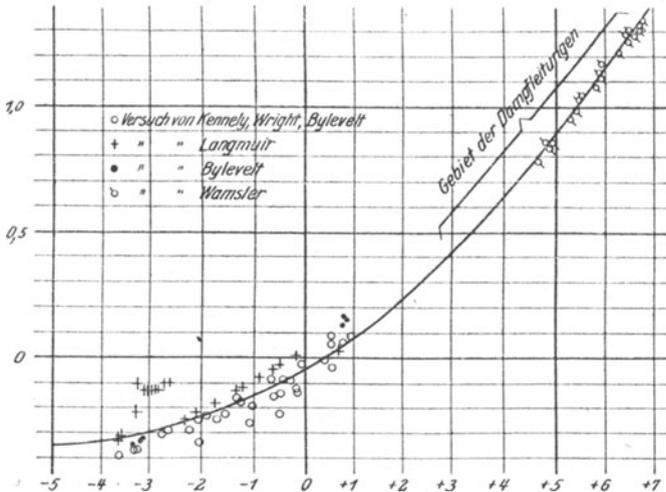


Fig. 75. Kennfunktion bei einem wagerechten Zylinder und bei freier Strömung
Vgl. Gleich. (151).

Abszissen: $\log \frac{d^3 \cdot \gamma^2 \cdot (T_W - T_R)}{g \cdot \mu^2 \cdot T_m}$

Ordinaten: $\alpha \frac{d}{\lambda}$.

Die Punkte aller Versuche stimmen soweit überein, daß sich durch sie in zwangloser Weise eine Kurve hindurchlegen läßt. Die Kurve stellt in logarithmischen Koordinaten das Abbild der Funktion ψ vor in der Gleichung

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda} = \psi \left(\frac{d^3 \cdot \gamma^2 \cdot (T_W - T_R)}{g \cdot \mu^2 \cdot T_m} \right) \dots \dots \dots (151)$$

Die einzelnen Punkte der Figur weichen ziemlich weit voneinander ab und bei genauerer Untersuchung zeigt sich, daß diese Abweichungen durchaus nicht willkürlich sind, sondern daß eine deutlich erkennbare Regelmäßigkeit besteht. Die Abweichungen sind also keine ausschließliche Folge von Versuchsfehlern, sondern sie lassen erkennen, daß eine Gesetzmäßigkeit — allerdings von untergeordnetem Einfluß — in dem Ansatz (151) nicht zum Ausdruck kommt. Welcher Art diese Gesetzmäßigkeit ist, läßt sich aus den Versuchen nachträglich nicht mehr feststellen.

Da die Berechnung der Kenngröße Gr eine sehr umständliche Arbeit ist, so ist für die wichtigsten Werte der Raumtemperatur, nämlich $t_R = 0^\circ, 20^\circ$ und 40° C eine Tabelle ausgerechnet. Die Tabelle Nr. 24 ist für einen Zylinderdurchmesser $d = 0,01$ m und für einen Barometerstand $b = 760$ mm berechnet. Die so errechnete Kenngröße sei deshalb als Gr_{vorläufig} bezeichnet.

Zahlentafel Nr. 24.

Kerngröße Gr, abhängig von t_w und t_R .

t_w	$t_R = 0^\circ$ C		$t_R = + 20^\circ$ C		$t_R = + 40^\circ$ C	
	t_m	Gr vorl.	t_m	Gr vorl.	t_m	Gr vorl.
— 200	— 121	— 700 000	— 115	— 637 000	— 108	— 566 000
— 150	— 85	— 189 000	— 77	— 176 000	— 69	— 161 000
— 100	— 53	— 59 700	— 45	— 60 500	— 37	— 59 600
— 50	— 26	— 16 900	— 16	— 20 200	— 8	— 22 300
\mp 0	0	0	+ 10	— 3 700	+ 19	— 6 400
+ 50	+ 24	+ 7 300	+ 35	+ 3 800	+ 45	+ 1 200
100	48	10 400	58	7 200	70	4 500
150	70	11 500	82	8 600	93	6 300
200	92	11 600	104	9 100	114	7 200
250	112	11 600	125	9 200	137	7 300
300	131	11 100	144	9 000	158	7 200
350	152	10 500	165	8 500	178	7 100
400	170	9 900	185	8 100	198	6 800
450	190	9 300	203	7 700	217	6 500
500	208	8 600	221	7 400	236	6 100
550	227	8 000	240	6 900	255	5 900
600	244	7 600	258	6 500	272	5 600
650	261	7 100	275	6 200	291	5 300
700	278	6 700	292	5 800	308	5 000
750	295	6 300	309	5 500	327	4 700

Beträgt der Barometerstand nicht 760 m/m, sondern b m/m und ist der Durchmesser des Zylinders nicht 0,01 [m], sondern d [m], so ist der tatsächliche Wert der Kenngröße

$$Gr = \left(\frac{b}{760}\right)^2 \cdot \left(\frac{d}{0,01}\right)^3 Gr_{\text{vorl.}} \dots \dots \dots (152)$$

Für den ersten Faktor sind die Werte für $b = 760$ bis $b = 700$ m/m in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

b =	760	750	740	730	720	710	700
(b/760) ²	1,00	0,98	0,95	0,92	0,90	0,87	0,85

Zahlenbeispiel.

In einem Raum von 20° C ist ein heißes Rohr von 200° Oberflächen-temperatur wagrecht gelagert. Der Durchmesser des Rohres ist 3,3 cm und der Luftdruck beträgt 715 mm. — Wie groß ist die Wärmemenge, welche das Rohr in der Zeiteinheit an den Raum abgibt?

1. Die Berechnung der W. Ü. Z.:

Für $t_R = 20^\circ \text{C}$ und $t_W = 200^\circ \text{C}$ entnehmen wir aus Tabelle Nr. 24 den Wert $Gr_{\text{vorl.}} = 9100$ und berechnen dann mit Gleichung (152) den Wert

$$Gr = \left(\frac{715}{760}\right)^2 \cdot \left(\frac{0,033}{0,010}\right)^3 \cdot 9100$$

$$= 0,89 \cdot 35,9 \cdot 9100 = 290\,000.$$

Aus der Fig. 175 lesen wir ab, daß zu $Gr = 290\,000$ der Wert $\alpha \cdot \frac{d}{\lambda_m} = 10,59$ gehört.

Aus Tabelle Nr. 24 entnehmen wir $t_m = 104^\circ$ und damit aus Tabelle N. 40, $\lambda_m = 0,0265$.

Es ergibt sich jetzt $\alpha = \frac{0,0265}{0,033} \cdot 10,59 = 8,50 \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{std. Grad.}} \right]$.

2. Berechnung der Wärmemenge Q:

Nach der Gleichung: $Q = \alpha \cdot (t_W - t_R) \cdot F$ erhalten wir für die Wärmemenge, die ein Stück von der Länge L des Rohres in der Stunde abgibt:

$$Q = 8,50 \cdot (200 - 20) \cdot 0,033 \cdot \pi \cdot L = 158,6 \cdot L \text{ [W. E/std.].}$$

Der Wärmeverlust durch Strahlung ist natürlich hierbei noch nicht berücksichtigt.

Der Wärmeverlust von Dampfleitungen.

Bei isolierten und nackten Dampf- und Warmwasserleitungen schwanken die Oberflächentemperaturen zwischen $t_W = 30^\circ \text{C}$ und $t_W = 200^\circ \text{C}$ und darüber. Bei einer Raumtemperatur von $t_R = 20^\circ$ ergibt sich mit diesen Werten, daß $Gr_{\text{vorl.}}$ zwischen 1000 und 10000 schwankt.

Die Rohrdurchmesser bewegen sich im allgemeinen in den Grenzen $d = 1 \text{ cm}$ bis $d = 30 \text{ cm}$. Daraus ergibt sich, daß die Kenngröße in dem Bereich von $Gr = 10^3$ bis $Gr = 2,7 \cdot 10^8$ liegt.

Wie sich aus der Fig. 75 entnehmen läßt, kann man für dieses Gebiet die Kennfunktion durch eine Potenzfunktion, und zwar durch die Gleichung darstellen:

$$\alpha \cdot \frac{d}{\lambda_m} = 0,468 \cdot \text{Gr}^{1/4} \dots \dots \dots (153a)$$

oder
$$\alpha = \frac{0,468}{g^{1/4}} \cdot d^{-1/4} \cdot \frac{\lambda \cdot \gamma^{1/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \left(\frac{T_W - T_R}{T_m} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (153b)$$

Für die Wärmemenge Q/L, welche die Längeneinheit des Rohres in der Zeiteinheit an die vorbeistreichende Luft abgibt, errechnet sich der Wert

$$\begin{aligned} Q/L &= \alpha \cdot d \cdot \pi \cdot (T_W - T_R) \\ &= \pi \cdot \frac{0,468}{g^{1/4}} \cdot d^{3/4} \cdot \frac{\lambda \cdot \gamma^{1/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \frac{(T_W - T_R)^{5/4}}{T_m^{1/4}} \\ &= 0,01385 \cdot d^{3/4} \cdot \text{Funkt}(t_w, t_R, b) \dots \dots \dots (154) \end{aligned}$$

Zur zahlenmäßigen Berechnung dienen die beiden nachstehenden Zahlentafeln Nr. 25 und Nr. 26. Der zweiten Zahlentafel ist hierbei eine Raumtemperatur t_R von + 20° C zugrunde gelegt.

Zahlentafel Nr. 25.
Werte der Potenz d^{3/4}.

d	d ^{3/4}						
0,01	0,032	0,06	0,121	0,11	0,191	0,16	0,253
2	0,053	7	0,136	12	0,200	17	0,265
3	0,072	8	0,150	13	0,216	18	0,277
4	0,090	9	0,164	14	0,229	19	0,288
0,05	0,105	0,10	0,178	0,15	0,241	0,20	0,299

Zahlentafel Nr. 26.

Werte von $0,01385 \cdot \frac{\lambda \cdot \gamma^{1/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \frac{(T_W - T_R)^{5/4}}{T_m^{1/4}}$ bei T_R = 293° abs.

t _w °C	t _m °C	$\frac{(T_W - T_R)^{5/4}}{T_m^{1/4}}$	$\cdot 0,01385 \frac{\lambda \cdot \gamma^{1/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \frac{(T_W - T_R)^{5/4}}{T_m^{1/4}}$		
			b = 760 mm	b = 730 mm	b = 700 mm
40	30	10,1	148	146	143
60	40	23,8	349	344	337
80	49	39,0	580	568	555
100	58	56,0	802	795	768
120	68	73,5	1068	1048	1028
140	77	91,7	1333	1308	1282
160	86	111,0	1600	1570	1528
180	95	129,6	1880	1830	1795
200	104	150,0	2164	2120	2080

In der Gleichung (154) ist das Glied λ · γ^{1/2} · μ^{-1/2} innerhalb des Bereiches, welchen die Zahlentafel Nr. 26 umfaßt, fast ganz unabhängig von der Temperatur und dem Barometerstand. Es hat bei t_m = 104°

und $b = 700$ mm seinen Kleinstwert mit 1000 und bei $t_m = 30^\circ$ und $b = 760$ mm seinen Größtwert mit 1060.

Wie einfach die Berechnung des Wärmeverlustes mit Hilfe der Gleichung (154) und der beiden Zahlentafeln sich gestaltet, zeigt das nachstehende Beispiel:

Zahlenbeispiel.

Wie groß ist die Wärmemenge, welche die Längenheit eines Rohres in der Zeiteinheit an die Luft abgibt, wenn der Durchmesser des Rohres 5 cm, der Barometerstand 715 mm, die Raumtemperatur 20° C und Rohrwandtemperatur 160° C beträgt?

Aus den Tabellen lesen wir direkt ab:

$$\frac{Q}{L} = d^{3/4} \cdot \text{Funkt} (t_w, t_R, b) \\ = 0,105 \cdot 1549 = 163 \frac{W \cdot E}{\text{std} \cdot m \cdot \text{Grd.}}$$

Zum Schlusse sei aber nochmals darauf hingewiesen, daß die Gleichung (154) nur innerhalb des Bereiches gilt, welchen die beiden Zahlentafeln umfassen, und daß die Wärmestrahlung noch nicht berücksichtigt ist.

c) Die anderen Aufgaben über freie Abkühlung.

Der geneigte und der senkrechte Zylinder.

Wir hatten bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß der Zylinder so lange sei, daß die Wirkung der Enden nicht von Bedeutung ist.

Wenn wir diese einschränkende Voraussetzung aufheben, so müssen wir in die Kennfunktionen die bezogene Länge $L : d$ als weiteres Argument aufnehmen.

Verallgemeinern wir unsere Betrachtung noch weiter, indem wir einen Zylinder betrachten, der unter dem Winkel ω gegen die Wagrechte geneigt ist, so kommt auch dieser Winkel noch als weiteres Argument hinzu. Zum Beispiel lautet die Gleichung (150) in diesem Falle:

$$\alpha = \frac{-\lambda}{d} \cdot \psi \left(\text{Gr}, \frac{L}{d}, \omega \right)$$

Die Art dieser Funktion ist noch gänzlich unbekannt. Wir können nur die eine Eigenschaft voraussagen, daß sie für den Grenzfall „ $\omega = 0^\circ$ “ in die Funktionen, die für das wagrechte Rohr gelten, übergehen müssen.

Der andere Grenzfall — das senkrechte Rohr — ergibt sich, wenn man $\omega = 90^\circ$ setzt. Für die freie Abkühlung des senkrechten Rohres sind mir keine Veröffentlichungen über Versuche bekannt. Dagegen kenne ich einen nicht veröffentlichten Versuch aus dem Laboratorium für techn. Physik München:

Ein Rohr wurde durch einen elektrischen Heizkörper in seinem Inneren geheizt und zwar so, daß auf die Längeneinheit des Rohres überall dieselbe Heizenergie traf. Das Rohr wurde senkrecht aufgehängt und durch Thermoelemente an verschiedenen Stellen die Oberflächentemperatur gemessen.

Wir erwarteten, daß das Rohr oben höhere Oberflächentemperatur aufweisen würde als unten, weil oben die Luft bereits erwärmt ist, also geringere Kühlwirkung besitzt als unten.

Der Versuch ergab nun gerade das Gegenteil, das Rohr war oben kälter als unten. Wenn man für diese befremdende Tatsache nachträglich eine Erklärung sucht, so geht man am besten von der Gleichung

$$dQ = \alpha \cdot (t_W - t_R) \cdot d\pi \cdot dl$$

oder
$$t_W = t_R + \frac{dQ/dl}{\alpha \cdot d \cdot \pi}$$

aus. Wir hatten bei der obigen Voraussage angenommen, daß α längs des Rohres konstant sei oder sogar von unten nach oben abnimmt. Hierbei war die Vorstellung maßgebend, daß die Luft so ströme, wie die linke Seite der Fig. 76 andeutet. Bei sehr langen Rohren sind aber vom hydrodynamischen Standpunkte aus sehr wohl Bedenken möglich, ob eine solche Strömung stabil ist, ob sich nicht vielmehr die Strömung in einzelne Stufen unterteilt, so wie dies die rechte Seite der Figur andeutet. Dann wäre bei den oberen Strömungen eine stärkere Bewegung anzunehmen und damit ein höherer Wert der W. Ü. Z. und das würde, wie die obige Gleichung zeigt, zu einer Verminderung der Rohrwandtemperatur führen. Es wäre also damit die Abnahme der Temperatur t_W nach oben erklärt.

Da der oben angeführte Versuch nur einmal ausgeführt wurde (und deshalb auch nicht veröffentlicht wurde), so wäre eine nochmalige, einwandfreie Prüfung des Ergebnisses äußerst wichtig.

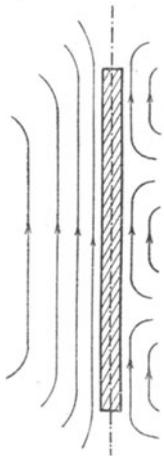


Fig. 76. Freie Strömung längs eines senkrechten, heißen Rohres.

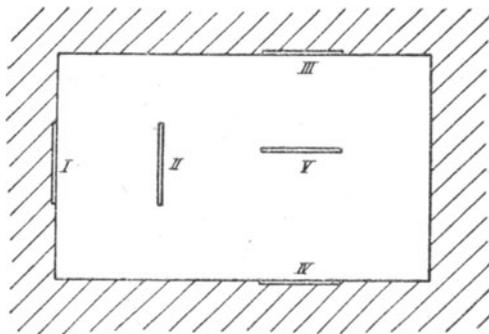


Fig. 77. Verschiedene Lagerung von ebenen Heizflächen im Raum.

Ebene Heizflächen.

Ähnliche Strömungsvorgänge werden sich bei ebenen senkrechten Heizflächen einstellen, und zwar werden sich hier geringe Verschiedenheiten zeigen, je nachdem die Heizfläche in eine Wand eingelassen ist oder frei im Raume hängt. Fig. 77 Fall I und II.

Ganz andere Strömungsverhältnisse und damit auch ganz andere Gesetzmäßigkeit werden sich ergeben, wenn die Heizfläche wagrecht angeordnet ist und hier ist es von wesentlichem Einfluß, ob die Heizfläche in die Decke oder in den Boden eingelassen ist (Fall III und IV) oder ob sie frei im Raume aufgehängt ist (Fall V).

Bisher war stets angenommen, daß die Abmessungen des Raumes sehr groß seien gegen die Abmessungen der wärmeabgebenden Flächen. Ist dies nicht der Fall oder liegt der Körper in der Nähe der Wandungen des Raumes, so gehen die Raumausmaße oder die Lage des Körpers ebenfalls in die Kennfunktionen ein. So wird z. B. ein Dampfleitungsrohr, welches in der Ecke zwischen Wand und Decke verlegt ist, ganz andere Strömungen bewirken und damit anderen Wärmeverlust aufweisen als ein Rohr, welches frei durch einen großen Raum geführt ist.

Die isolierenden Luftschichten.

Wir bezeichnen mit Δ die Dicke, mit H die Höhe und mit B die Breite der Luftschicht (vgl. Fig. 78), ferner mit T_1 und T_2 die Temperaturen der beiden Flächen, welche die Luftschicht begrenzen und wählen ferner Δ zur Bezugsgröße; dann treten in den Kennfunktionen die Argumente

$$\left(\frac{\Delta^3 \cdot \gamma^2 \cdot (T_1 - T_2)}{g \cdot \mu^2 \cdot T_m}, \frac{L}{\Delta}, \frac{B}{\Delta} \right) \text{ auf.}$$

Solange die Luftschichten nicht allzu schmal sind, wird ihre Wirkung von der Breite nicht sehr beeinflußt werden. Dagegen wird das Verhältnis $L : \Delta$ stets von großem Einfluß sein.

Bei Luftschichten, welche im Vergleich zu ihrer Höhe sehr dick sind, wird der Strömungszustand sehr einfach sein (vgl. Fig. 78). Die Luft wird sich an der heißeren Oberfläche erwärmen, dadurch leichter werden und emporsteigen. Dann wird sie an der oberen Begrenzungsfläche der Luftschicht hinüberstreichen nach der Seite der kälteren Wand, sich dort abkühlen usw. Diese einfache Strömung der Luft, dieses Zirkulieren wird jedoch nur eintreten, wenn der Hohlraum genügend weit im Verhältnis zur Höhe ist. Bei sehr großen Werten $L : \Delta$, also bei hohen und dünnen Luftschichten, wird diese eben beschriebene Strömung wahrscheinlich labil werden. Welcher Strömungszustand sich dann einstellt, läßt sich nicht voraussagen. Ich vermute, daß sich die Strömung in einzelne Höhenschichten unterteilt, ähnlich wie dies in der rechten Seite der Fig. 76 für das senkrechte Rohr dargestellt ist.

Bei allen Versuchen, die über die freie Abkühlung von Körpern in Luft angestellt werden, halte ich es für äußerst wichtig, daß noch vor Messung der Wärmemengen die hydrodynamische Seite der Probleme nach Möglichkeit geklärt wird. Vielleicht ist es möglich, durch Rauchfäden die Luftbewegungen sichtbar zu machen, ohne daß dabei der ursprüngliche Strömungsvorgang gestört wird.

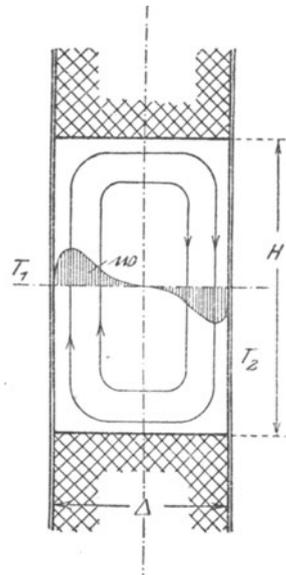


Fig. 78. Luftschichten als Wärmeschutz (Darstellung der Luftströmung).

Anhang.

Übersicht über die am häufigsten vorkommenden Buchstabenbezeichnungen.

x, y, z	rechtwink. geradl. Koordinaten	λ	Wärmeleitfähigkeit
r, φ , z	Zylinder-Koordinaten	a	Temperaturleitfähigkeit
r, φ , ψ	Kugel-Koord. mit φ als geogr. Länge und ψ als Polabstand	b	b = Wert (s. S. 70)
τ	Zeit	α	Wärmeübergangszahl
t	Temperatur (Celsius)	k	Wärmedurchgangszahl
T	„ (absolut)	w	Strömungsgeschwind. in m/std.
		ω	Strömungsgeschwind. in m/sek.
		p	Druck
		ρ	Massendichte
		γ	spez. Gewicht
		v	„ Volumen
		Q	Wärmemenge
		R	Gaskonstante
		c	spezif. Wärme bei festen und flüssigen Körpern
		c_p	spezif. Wärme bei Gasen
		c_v	„ „ „ „
		κ	Verhältnis $c_p : c_v$.
		g	Erdbeschleunigung

Übersicht über die gewählten Temperaturbezeichnungen.

t	Temperatur in der 100-Teilung. Nullpunkt = Eispunkt
T	„ „ „ „ „ „ = absoluter Nullpunkt
θ	„ „ „ „ „ „ je nach Aufgabe
ϑ	bei Wärmeleitung: Raumtemperatur
δ	„ Wärmedurchgang: Differenz zwischen den beiden Flüss-Temp.
T_0	Oberflächen-Temperatur bei Wärmeleitung in festen Körpern
T_W	Wand- „ „ „ „ Flüssigkeiten
T_F	mittl. Temperatur der Flüssigkeit in einem Querschnitt. S. Seite 175.
T_m	„ „ (Hilfsbegriff f. d. Rechnung). S. Seite 178 u. 207.
T_i	Temperatur in einem Innenraum
T_a	„ „ „ Außenraum
T_1	„ „ der wärmeren Flüssigkeit
T_2	„ „ kälteren „
T_a	Anfangstemperatur
T_e	Endtemperatur

Die Dimensionen einiger Größen.

Zeit: Std Länge: m	Kraft: kg Temperatur: Grd (100 teil.)
$\text{grad } T = \left[\frac{\text{Grd}}{\text{m}} \right]$	$\gamma = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
$\Delta^2 T = \left[\frac{\text{Grd}}{\text{m}^2} \right]$	$\varrho = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{Std}^2}{\text{m}^4} \right]$
$p = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$	$c_v = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{kg} \cdot \text{Grd}} \right]$ f. d. Gewichts- Einheit
$\text{grad } p = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	$g \cdot c_v = \left[\frac{\text{W. E. m}}{\text{kg} \cdot \text{Grd} \cdot \text{Std}^2} \right]$ f. d. Maß- Einheit
$g = \left[\frac{\text{m}}{\text{std}^2} \right]$	$C_v = c_v \cdot \gamma = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^3 \cdot \text{Grd}} \right]$ f. d. Raum- Einheit
$\mu = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{std}}{\text{m}^2} \right]$	$u = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Std}^2} \right]$ für die Massen-Einheit
$w = \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}} \right]$	$\lambda = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m} \cdot \text{Std} \cdot \text{Grd}} \right]$
$\frac{d w}{d \tau} = \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}^2} \right]$	$a = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Std}} \right]$
$\text{div } w = \left[\frac{1}{\text{Std}} \right]$	$b = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Grd} \cdot \text{Std}^{1/2}} \right]$
$\Delta^2 w = \left[\frac{1}{\text{m} \cdot \text{Std}} \right]$	$\alpha = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Std} \cdot \text{Grd}} \right]$
Diss. Funkt (w) = $\left[\frac{1}{\text{Std}^2} \right]$	$k = \left[\frac{\text{W. E.}}{\text{m}^2 \cdot \text{Std} \cdot \text{Grd}} \right]$

Übersicht über die Kenngrößen.

Gebiet	mathem. Ausdruck	Bezeichnung	Seite des Buches
Wärmeleitung in festen Körpern	$\frac{a \tau}{l_0^2}$	Fo = Fourier	122
	$h \cdot l_0$	Bi = Biot	124
Hydrodynamik	$\frac{\rho \cdot w \cdot l_0}{\mu}$	Re = Reynolds	152
	$\text{grad } p \frac{l_0}{\rho \cdot w^2}$	Eu = Euler	152
	$\text{grad } p \cdot \frac{l_0^2}{\mu \cdot w}$	La = Lagrange	152
	$\frac{W}{l_0^3} \cdot \frac{l_0}{\rho \cdot w^2}$	He = Helmholtz	154
	$\frac{W}{l_0^3} \cdot \frac{l_0^2}{\mu \cdot w}$	Ki = Kirchhoff	154
Wärmeübergang bei aufgezwingener Strömung	$\frac{a}{w_0 \cdot l}$	Pe = Peclet	168
	$\frac{\lambda}{c_p \cdot \mu \cdot g}$	St = Stanton	168
	$\text{grad } \Theta \cdot \frac{l_0}{\Theta_a - \Theta_w}$	Ma = Mach	169
Wärmeübergang bei freier Strömung	$\frac{l_0^3 \cdot \gamma^2 \cdot (t_w - t_R) \cdot \beta}{\mu^2 \cdot g}$	Gr = Grashof	235
	$\frac{\lambda}{c_p \cdot \mu \cdot g}$	St = Stanton	235

Formeln aus der Vektoranalysis.

U und V = skalare Größen. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} = Vektoren.

$|\mathfrak{A}|$ = absoluter Betrag eines Vektors, also Größe ohne Richtung.

I. $\text{grad}(U \cdot \mathfrak{A}) = U \cdot \text{grad } \mathfrak{A};$

II. $\text{div grad } U = \Delta^2 U;$

III. $\text{div}(U, \mathfrak{A}) = U \cdot \text{div } \mathfrak{A} + (\mathfrak{A}, \text{grad } U);$

IV. $\frac{dU}{d\tau} = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (m, \text{grad } U)$
 V. $\frac{d\mathfrak{A}}{d\tau} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \tau} + (m, \text{grad } \mathfrak{A})$ } wobei τ die Zeit und m die Strömungsgeschwindigkeit ist;

VI. $\int_{\text{Fläche}} \mathfrak{A}_n \cdot d\mathbf{f} = \int_{\text{Vol.}} \text{div } \mathfrak{A} \cdot d\mathbf{v};$ Gaußscher Satz;

VII. $|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$ } in rechth. geradl. Koord.

VIII. a) $\text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ } in rechth. geradl. Koord.

b) $= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r \cdot A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ } in Zylinderkoord.

c) $= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial \sin \psi \cdot A_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ } in Kugelkoord.

IX. a) $\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ } in rechth. geradl. Koord.

b) $= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ } in Zylinderkoord.

c) $= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{\cos \psi}{r^2 \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \psi}$
 $+ \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$ } in Kugelkoord.

Zahlentafel Nr. 27.
Exponentialfunktion e^{+x} und e^{-x} .

x	e^{+x}	e^{-x}	x	e^{+x}	e^{-x}	x	e^{+x}	e^{-x}
0,0	1,00	1,00	1,5	4,50	0,22	3,0	20,1	0,050
0,1	1,11	0,90	1,6	4,95	0,20	3,1	22,0	0,045
0,2	1,22	0,82	1,7	5,45	0,18	3,2	24,5	0,041
0,3	1,34	0,74	1,8	6,05	0,17	3,3	27,0	0,037
0,4	1,49	0,67	1,9	6,63	0,15	3,4	30,0	0,033
0,5	1,67	0,61	2,0	7,39	0,14	3,5	33,1	0,030
0,6	1,82	0,55	2,1	8,12	0,12	3,6	36,6	0,027
0,7	2,00	0,49	2,2	9,03	0,11	3,7	40,5	0,025
0,8	2,22	0,45	2,3	9,98	0,10	3,8	44,7	0,022
0,9	2,48	0,41	2,4	11,0	0,091	3,9	49,2	0,020
1,0	2,72	0,37	2,5	12,3	0,083	4,0	54,6	0,018
1,1	3,00	0,33	2,6	13,5	0,074	4,1	59,9	0,017
1,2	3,32	0,30	2,7	14,8	0,067	4,2	66,7	0,015
1,3	3,60	0,27	2,8	16,4	0,061	4,3	74,0	0,014
1,4	4,06	0,25	2,9	18,2	0,055	4,4	81,5	0,012

Zahlentafel Nr. 28.

Gaußsches Fehlerintegral: $G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} \cdot dx.$

x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)
0,05	0,056	0,55	0,563	1,05	0,862	1,55	0,972
0,10	0,113	0,60	0,604	1,10	0,880	1,60	0,976
0,15	0,168	0,65	0,642	1,15	0,896	1,65	0,980
0,20	0,223	0,70	0,678	1,20	0,910	1,70	0,984
0,25	0,276	0,75	0,711	1,25	0,923	1,75	0,987
0,30	0,329	0,80	0,742	1,30	0,934	1,80	0,990
0,35	0,379	0,85	0,771	1,35	0,944	1,85	0,991
0,40	0,419	0,90	0,797	1,40	0,952	1,90	0,993
0,45	0,476	0,95	0,821	1,45	0,960	1,95	0,994
0,50	0,521	1,00	0,843	1,50	0,966	2,00	0,995

Zahlentafel Nr. 29.

Besselsche Funktionen $J_0(x)$ und $Y_0(x)$.

x	$J_0(x)$	$Y_0(x)$	x	$J_0(x)$	$Y_0(x)$
0,0	1,00	$-\infty$	5,0	- 0,18	- 0,50
0,5	0,94	- 0,59	5,5	- 0,01	- 0,53
1,0	0,77	+ 0,23	6,0	+ 0,15	- 0,44
1,5	0,51	+ 0,66	6,5	+ 0,26	- 0,24
2,0	0,22	+ 0,83	7,0	+ 0,30	- 0,01
2,5	- 0,05	+ 0,78	7,5	+ 0,27	+ 0,22
3,0	- 0,26	+ 0,56	8,0	+ 0,17	+ 0,37
3,5	- 0,38	+ 0,25	8,5	+ 0,04	+ 0,43
4,0	- 0,40	+ 0,07	9,0	- 0,09	+ 0,38
4,5	- 0,32	+ 0,34	9,5	- 0,19	+ 0,25

Zahlentafel Nr. 30.

Potenz: x^n . $n = - 0,16$.

x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,005	2,33	0,025	1,81	0,12	1,40
6	2,27	30	1,75	14	1,37
7	2,21	35	1,71	16	1,34
8	2,17	40	1,67	18	1,31
9	2,13	45	1,64	20	1,29
10	2,09	50	1,62	25	1,24
12	2,03	0,06	1,57	30	1,22
14	1,98	7	1,53	40	1,16
16	1,94	8	1,50	50	1,12
18	1,90	9	1,47	70	1,06
0,020	1,87	0,10	1,45	1,00	1,00

Zahlentafel Nr. 31.

Potenz: x^n . $n = -0,05$.

x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,1	1,12	—	—	—	—
2	1,08	2,0	0,97	20	0,86
3	1,06	3,0	0,95	30	0,84
4	1,05	4,0	0,93	40	0,83
5	1,04	5,0	0,92	50	0,82
6	1,03	6,0	0,91	60	0,81
7	1,02	7,0	0,91	70	0,81
8	1,01	8,0	0,90	80	0,80
9	1,01	9,0	0,89	90	0,80
1,0	1,00	10,0	0,89	100	0,79

Zahlentafel Nr. 32.

Potenz: x^n . $n = +0,21$.

x	x^n	x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,006	0,342	0,045	0,52	0,5	0,86	6,0	1,46
7	0,352	50	0,53	6	0,90	7,0	1,50
8	0,362	60	0,55	7	0,93	8,0	1,55
9	0,372	70	0,57	8	0,95	9,0	1,59
10	0,380	80	0,59	9	0,98	10,0	1,62
12	0,395	90	0,60	1,0	1,00	15,0	1,75
14	0,408	0,100	0,62	1,5	1,09	20,0	1,88
16	0,420	12	0,64	2,0	1,16	25,0	1,97
18	0,431	14	0,66	2,5	1,21	30,0	2,04
20	0,439	16	0,68	3,0	1,26	35,0	2,11
25	0,461	18	0,70	3,5	1,30	40,0	2,17
30	0,478	20	0,71	4,0	1,34	45,0	2,22
35	0,495	30	0,77	4,5	1,37	50,0	2,28
0,040	0,510	0,4	0,83	5,0	1,40	—	—

Zahlentafel Nr. 33.

Potenz: x^n . $n = + 0,79.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,01	0,025	0,1	0,16	1,0	1,00	10	6,17
2	0,046	2	0,28	2	1,73	15	8,47
3	0,063	3	0,39	3	2,38	20	10,7
4	0,079	4	0,49	4	2,99	25	12,7
5	0,093	5	0,58	5	3,56	30	14,7
6	0,108	6	0,67	6	4,11	35	16,6
7	0,122	7	0,76	7	4,65	40	18,4
8	0,135	8	0,84	8	5,16	45	20,2
0,09	0,148	0,9	0,92	9,0	5,66	50	21,9

Zahlentafel Nr. 34.

Potenz: x^n . $n = + 0,95.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,1	0,11	1,1	1,10	2,5	2,39	10,0	8,9
2	0,22	1,2	1,19	3,0	2,83	15,0	13,1
3	0,32	1,3	1,29	3,5	3,29	20,0	17,3
4	0,42	1,4	1,38	4,0	3,72	25,0	21,2
5	0,52	1,5	1,47	4,5	4,17	30,0	25,1
6	0,62	1,6	1,56	5,0	4,60	35,0	29,1
7	0,71	1,7	1,65	6,0	5,47	40,0	33,1
8	0,81	1,8	1,74	7,0	6,34	45,0	37,0
9	0,90	1,9	1,83	8,0	7,20	50,0	41,0
1,0	1,00	2,0	1,93	9,0	8,05	—	—

Zahlentafel Nr. 35.

Potenz: x^n . $n = + 1,05.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n	x	x^n
10	11,2	50	60,5	90	113	400	537
20	23,3	60	73,3	100	126	500	684
30	35,5	70	86,7	200	260	600	822
40	48,0	80	100	300	398	700	966

Zahlentafel Nr. 36.

Potenz: x^n . $n = +1,16.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,005	0,0021	0,025	0,0141	0,12	0,085
6	26	30	171	14	102
7	32	35	205	16	119
8	37	40	239	18	137
9	42	45	274	20	155
10	48	50	309	22	173
12	59	60	383	24	191
14	71	70	457	26	209
16	83	80	533	28	229
18	95	90	612	30	247
0,020	0,0107	0,100	0,0692	—	—

Zahlentafel Nr. 37.

Potenz: x^n . $n = +1,21.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,005	0,0016	0,025	0,0115	0,12	0,077
6	21	30	144	14	93
7	25	35	174	16	109
8	29	40	204	18	125
9	34	45	234	20	143
10	38	50	266	22	160
12	47	60	335	24	178
14	58	70	403	26	196
16	68	80	473	28	215
18	78	90	543	0,30	0,233
0,020	0,0088	0,100	0,0617	—	—

Zahlentafel Nr. 38.

Potenz: x^n . $n = + 1,79.$

x	x^n	x	x^n	x	x^n
0,1	0,016	1,0	1,000	10	61,7
2	0,056	2,0	3,46	20	214
3	0,116	3,0	7,13	30	442
4	0,194	4,0	11,9	40	741
5	0,289	5,0	17,8	50	1096
6	0,401	6,0	24,7	60	1514
7	0,527	7,0	32,4	70	1995
8	0,670	8,0	41,7	80	2541
9	0,828	9,0	51,3	90	3162
1,0	1,000	10,0	61,7	100	3802

Zahlentafel Nr. 39.

Übersicht über die Werte

 γ [kg/m³] = spez. Gewicht, c [W. E./kg] = spez. Wärme der Gewichtseinheit, $c \cdot \gamma$ [W. E./m³] = spez. Wärme der Raumeinheit, λ [W. E./m. Std. Grad] = Wärmeleitfähigkeit, $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Std.}} \right]$ = Temperaturleitfähigkeit [Definition S. 16], $b = \sqrt{\lambda \cdot c \cdot \gamma}$ [W. E./m². Grd. Std. ^{1/2}] = b-Werte [Defin. S. 70].

Anmerkung: 1. Die Angaben der physikalischen und technischen Literatur über spezifische Wärmen und vor allem über W. L. F. sind äußerst unsicher und die hier angegebenen Dezimalstellen dürfen keineswegs über den Grad der Genauigkeit täuschen.

2. Die Angaben: z. B. für Steinkohle ist $\lambda = 0,12-0,15$ besagt nur, daß solche Angaben in der Literatur gefunden wurden. Die wirklichen Abweichungen können je nach Reinheit noch größer sein.

3. Die Physik rechnet λ in gr cal/cm . Sek. Grad, deshalb sind deren Zahlen für λ 360 mal kleiner.

4. Für die Lektüre englischer Schriften sei angegeben: 1 [B. T. U.] = 1 British Thermal Unit = 0,252 WE. 1 Inch = 2,539 cm und 1 Fuß = 12 Zoll = 0,3048 m.

a) Metalle und Legierungen bei 20–40° C.

	γ	c	c γ	λ	a	b
Aluminium, gegossen	2560	0,21	557	175	0,31	310
„ gehämmert	2750					
Blei	11250 bis 11370	0,031	350	30	0,086	100
Fluß- und Schweißbeisen	7800	0,12 bis 0,14	920	40 bis 60	0,05	210
Fluß- und Schweißstahl	7860					
Gußeisen	7250					
Gold	19300	0,031	600	250	0,41	390
Kupfer, gegossen	8300 bis 8900	0,094	820	260 bis 340	0,37	500
„ gewalzt	8950					
Nickel, gegossen	8350	0,11	940	50	0,053	220
„ gewalzt	8600 bis 8900					
Platin	21400					
Silber, gegossen	10470	0,056	590	360	0,61	460
„ gehämmert	10550					
Zink, gegossen	6860	0,093	650	95	0,15	250
„ gewalzt	7160					
Zinn, gegossen	7200	0,056	410	54	0,13	150
„ gewalzt	7400					
Messing, gegossen	8400 bis 8700	0,092 bis 0,099	820	74 bis 97	0,1	260
„ gewalzt	8400 bis 8730					
Rotguß 85,7 Cu + 7,2 Zn + 6,4 Sn + 0,6 Ni	—					
Neusilber	8400 bis 8700					
85,4 Ni + 7,6 Fe + 0,4 Si	—	0,104	—	38	—	—
Woods Legierung 26 Pb + 7 Cd + 52 Bi + 15 Sn	—	0,035	—	11,5	—	—

b) Holz, Glas und verschiedene Stoffe bei 20–40° C.

	γ	c	$c \cdot \gamma$	λ	a	b
Eichenholz, lufttrocken	690 bis 1030	0,57	570	0,31	0,00057	13
„ frisch	930 bis 1280			⊥ 0,18	0,00031	10
Kiefernholz, lufttrocken	310 bis 760	—	—	0,31	—	—
„ frisch	380 bis 1080	—	—	⊥ 0,14	—	—
Fichtenholz, lufttrocken	350 bis 600	0,65	390	—	—	—
„ frisch	400 bis 1070					
Teackholz	604 bis 642	—	—	0,33 ⊥ 0,16	—	—
Flintglas	3150 bis 3900	0,117	410	0,515	0,0013	15
Crownglas	2450 bis 2720	0,17	440	0,63	0,0014	17
Glas $10 \text{ Na}_2\text{O} + 14 \text{ B}_2\text{O}_3 + 5 \text{ Al}_2\text{O}_3 + 71 \text{ SiO}_2$	—	—	—	0,82	—	—
Glas $79 \text{ PbO} + 21 \text{ SiO}_2$	—	—	—	0,39	—	—
Porzellan	2240 bis 2500	0,25	600	0,9	0,0015	23
Kautschuk	1000 bis 2000	—	—	0,1 bis 0,2	—	—
Steinkohle	1200 bis 1500	0,31	420	0,12 bis 0,15	0,0003	7,5
Retortenkohle	—	0,2	—	3,7	—	—
Graphit	1900 bis 2300	0,2	420	4,2	0,010	42
Kesselstein	—	—	—	1 bis 3	—	—
Eis	880 bis 920	0,5	450	0,8	0,0018	19

c) Erdreich und Baustoffe bei 20—40° C.

	γ	c	c · γ	λ	a	b
Erdreich (aus München, leutig mit Isarschotter)	2040	—	—	0,45	—	—
Flußsand, feinkörnig, 0% Feuchtigk.	1520	—	—	0,28	—	—
„ „ „ 6,9% „	1640	—	—	0,97	—	—
Feiner Quarzsand ?% „	—	0,19	—	0,05	—	—
Gewachsener Boden, lehmiger, toniger Feinsand, 14% Feuchtigk.	2020	—	—	2	—	—
Granit	2510 bis 3050	0,19	530	2,7 bis 3,5	0,0059	40
Gneis	2400 bis 2700	0,2	510	3,4	0,0067	41
Basalt	2700 bis 3200	0,2	570	1,14 bis 2,42	0,003	32
Marmor	2520 bis 2850	0,2	540	1,8 bis 3,0	0,0045	36
Sandstein	2200 bis 2500	0,17 bis 0,22	460	—	—	—
Kalkstein	2122	0,202	429	—	—	—
„ aus feinem Material	1662	—	—	0,58	—	—
„ „ grobem „	1987	—	—	0,80	—	—
Natursandstein, grau, aus Schongau in Schwaben, frisch bearbeitet	2259	—	—	1,44	—	—
Desgl. 6 Monate getrocknet	2251	—	—	1,11	—	—
Schiefer	2816	0,181	510	—	—	—
Kreide	1800 bis 2600	—	—	0,8	—	—
Gips, gegossen	970	0,26	250	0,32	0,0012	9
Baugips, 3 Wochen künstl. getrocknet	1250	—	—	0,37	—	—
Zement, gepulvert	1400 bis 1950	—	—	0,058	—	—
Zement, abgebunden	2000	0,27	540	0,78	0,0015	21
Beton I (1:2:2; 1/2 Jahr getrocknet)	2180	—	—	0,66	—	—
„ II (1:12; 2 Wochen „)	2050	0,21	440	0,76	0,0016	18
Hochofenschlackenbeton	550	—	—	0,19	—	—
Rheinische Schwemm- oder Isolierbimsteine	630	—	—	0,14	—	—

	γ	c	$c \cdot \gamma$	λ	a	b
Ziegelsteine	1400 bis 1700	0,18 bis 0,22	310	0,34 bis 0,44	0,0013	11
Ziegelmauerwerk, frisch	1570 bis 1630	—	—	0,32 bis 0,45	—	—
„ trocken	1420 bis 1460	—	—	0,45	—	—
„ sehr altes	1850	—	—	0,35	—	—
Hohlziegelmauerwerk	—	—	—	0,27 bis 0,28	—	—
Bruchsteinmauer	—	—	—	1,3 bis 2,1	—	—
Kalkmörtel, trocken	1600 bis 1650	—	—	—	—	—
„ frisch	1750 bis 1800	—	—	0,68	—	—
Asbestschiefer	1783	—	—	0,19	—	—
Gußasphalt	2100	0,22	460	0,60	0,0013	17
Stampfasphalt	1680	0,21	350	—	—	—
Linoleum	1183	—	—	0,16	—	—
Korkmentlinoleum	535	—	—	0,07	—	—

d) Feuerfeste Steine bei höheren Temperaturen.

	γ	λ bei den Temperaturen		
		200° C	600° C	1000° C
Silica	—	0,56	0,88	1,19
Dinas	—	0,74	0,93	1,13
Schamotte	1716	0,51	0,66	0,82
Magnesit	—	—	1,29	1,43
feuerfester Ton I	—	zwischen 360° und 600°: $\lambda = 0,7$ bis $0,8$		
„ „ II	—	„ 380° „ 750°: $\lambda = 1,31$		

e) Wärmeschutzmittel bei 20—40° C.

	γ	c	$c \cdot \gamma$	λ	a	b
Stark expandierter Korkschat 1—2 m/m	47,6	0,33	15,7	0,029	0,0019	0,67
„ „ „ 3—5 m/m	45,4		15,0	0,033	0,0022	0,71
Gewöhnliches Korkmehl 1—3 m/m	161	—	—	0,035	—	—
„ Korkschat 3—5 m/m	85	—	—	0,042	—	—
Sägemehl	215	—	—	0,055	—	—
Blätterholzkohle	215	—	—	0,052	—	—
TorfmuU, trocken	—	—	—	0,045	—	—
„ natur-feucht	160 bis 195	—	—	0,055 bis 0,070	—	—
Kieselgur, lose I	242	0,21	76	—	—	—
„ „ II	350	—	—	0,056	—	—
Rheinischer Bimskies 1—20 m/m	301	—	—	0,079	—	—
„ „ 15—20 m/m	292	—	—	0,2	—	—
Hochofenschlackschlacke	360	—	—	0,095	—	—
Asbest	576	—	—	0,140	—	—
Hochofenschlacke	2500 bis 3000	0,18	500	—	—	—
Schafwolle	136	—	—	0,037	—	—
Seide (Abfallseide)	101	—	—	0,041	—	—
„ („ als Zopf)	147	—	—	0,043	—	—
Rohseide	56	0,32	—	—	—	—
Baumwolle	81	—	—	0,050	—	—
Stark expandierter Korkstein	57 bis 61	0,33	19,0	0,035	0,0019	0,81
Expand., nicht imprägnierter Korkstein	163	0,43	70	—	—	—
„ „ „	206	0,31	64	—	—	—
Naturleichtkorkstein	157	0,42	66	—	—	—
Mit Pech gebundener Korkstein	190	0,36	68	—	—	—
Asphaltierter Korkstein	197	—	—	0,04 bis 0,06	—	—
Krokplatte I	60	—	—	0,035	—	—
„ II	200	—	—	0,045	—	—
„ III	400	—	—	0,059	—	—

	γ	c	c · γ	λ	a	b
Gebannter Kieselgurformstein I	200	—	—	0,067	—	—
„ „ II	200	—	—	0,059	—	—
„ „ III	300	—	—	0,070	—	—
„ „ IV	450	—	—	0,076	—	—
Isolierbimsteine	630	—	—	0,14	—	—
Hochofenschlackenbeton	550	—	—	0,19	—	—

f) Wärmeschutzmittel bei höheren Temperaturen.

	γ	λ bei der Temperatur					
		0° C	100° C	200° C	300° C	400° C	500° C
Korkmehl 1—3 m/m	161	0,031	0,048	0,055	—	—	—
Blätterholzkohle	215	0,050	0,063	—	—	—	—
Kieselgur, lose	350	0,052	0,066	0,074	0,078	—	—
Asbest	576	0,130	0,167	0,180	0,186	0,192	0,198
Schafwolle	136	0,033	0,050	—	—	—	—
Seide	101	0,038	0,051	—	—	—	—
Seidenzopf	147	0,039	0,052	—	—	—	—
Baumwolle	81	-0,047	0,059	—	—	—	—
Gebannt. Kieselgurformstein	200	0,064	0,078	0,092	0,106	0,120	—

g) Flüssigkeiten bei 20—40° C.

	γ	c	c · γ	λ	a	b
Wasser	1000	1,00	1000	0,52	0,0005	22
Alkohol	790	0,54 bis 0,64	470	0,15 bis 0,20	0,0004	9,2
Benzol	900	0,34 bis 0,42	330	0,12	0,00036	6,3
Glycerin wasserfrei	1260	0,58	730	0,25	0,00034	13,5
„ 50% H ₂ O	1130	0,81	920	0,36	0,00039	18
Olivenöl	916	0,43	390	0,15	0,00038	7,6
Mineral. Schmieröle	920	0,4	370	0,1	0,00027	6,1
Petroleum	800	0,5	400	0,13	0,00032	7,2
Quecksilber	13600	0,033	450	5,4 bis 7,1	0,012	53

$$\lambda_{\text{Wasser}} = 0,4769 \cdot (1 + 0,002984 t).$$

Zahlentafel Nr. 40.

Wärmeleitfähigkeit, spez. Wärme und spez. Gewicht von Luft.

Berechnet mit Hilfe der Formeln: $\lambda_{\text{Luft}} = 0,00167 \frac{117}{1 + \frac{T}{T_0}}$ $c = 0,240 + 0,000031 \cdot t$ $\left[\frac{\text{W. E.}}{\text{kg Grad}} \right]$

	0°	20°	40°	60°	80°	100°	200	300	400	500
W. L. Z.:	0,0203	0,0216	0,0228	0,0240	0,0252	0,263	0,0318	0,0368	0,0418	0,0460
spez. W.:	0,240	0,241	0,241	0,242	0,242	0,243	0,246	0,249	0,252	0,255
0,1	0,125	0,117	0,109	0,103	0,97	0,92	—	—	—	—
0,5	0,627	0,584	0,547	0,513	0,485	0,459	—	—	—	—
1	1,25	1,17	1,09	1,03	0,97	0,92	0,72	0,60	0,51	0,44
2	2,51	2,33	2,19	2,05	1,94	1,84	1,45	1,32	1,02	0,88
3	3,76	3,63	3,28	3,08	2,91	2,75	2,17	1,79	1,62	1,33
4	5,01	4,67	4,37	4,11	3,88	3,67	2,89	2,38	2,03	1,77
5	6,27	5,84	5,46	5,14	4,85	4,59	3,61	2,99	2,54	2,21
6	7,52	7,01	6,56	6,16	5,81	5,50	—	—	—	—
7	8,77	8,17	7,65	7,19	6,78	6,42	—	—	—	—
8	10,02	9,35	8,75	8,22	7,76	7,34	—	—	—	—
9	11,27	10,51	9,84	9,26	8,73	8,26	—	—	—	—
10	12,53	11,68	10,93	10,27	9,70	9,18	—	—	—	—
11	13,8	12,8	12,0	11,3	10,7	10,1	—	—	—	—
12	15,0	14,0	13,1	12,3	11,6	11,0	—	—	—	—
13	16,3	15,2	14,2	13,4	12,6	11,9	—	—	—	—
14	17,5	16,3	15,3	14,4	13,6	12,8	—	—	—	—
15	18,8	17,5	16,4	15,4	14,5	13,8	—	—	—	—
16	20,0	18,7	17,5	16,4	15,5	14,7	—	—	—	—

spez. Gewicht bei 0,1 at bis 16 at.

Zahlentafel Nr. 41.

Temperaturleitfähigkeit von Luft.

at	0°	20°	40°	60°	80°	100°	200°	300°	400°	500°
0,1	0,63	0,77	0,87	0,97	1,07	1,18	—	—	—	—
0,5	0,135	0,154	0,173	0,194	0,215	0,236	—	—	—	—
1,0	0,068	0,077	0,087	0,097	0,107	0,118	0,179	0,247	0,326	0,412
2	0,034	0,039	0,043	0,049	0,054	0,059	0,089	0,112	0,163	0,206
3	0,023	0,025	0,029	0,032	0,036	0,039	0,060	0,083	0,109	0,136
4	0,017	0,019	0,022	0,024	0,027	0,030	0,045	0,062	0,082	0,102
5	0,0135	0,0154	0,0173	0,0194	0,0215	0,0236	0,036	0,050	0,065	0,082
6	0,0113	0,0128	0,0144	0,0161	0,0179	0,0197	—	—	—	—
7	0,0097	0,0110	0,0123	0,0138	0,0154	0,0170	—	—	—	—
8	0,0084	0,0096	0,0108	0,0121	0,0134	0,0148	—	—	—	—
9	0,0075	0,0086	0,0096	0,0107	0,0119	0,0131	—	—	—	—
10	0,0068	0,0077	0,0087	0,0097	0,0107	0,0118	—	—	—	—
11	0,0061	0,0070	0,0079	0,0088	0,0098	0,0107	—	—	—	—
12	0,0056	0,0064	0,0072	0,0081	0,0089	0,0098	—	—	—	—
13	0,0052	0,0059	0,0067	0,0074	0,0083	0,0091	—	—	—	—
14	0,0048	0,0055	0,0062	0,0069	0,0077	0,0084	—	—	—	—
15	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0072	0,0079	—	—	—	—
16	0,0042	0,0048	0,0054	0,0061	0,0067	0,0074	—	—	—	—

Zahlentafel Nr. 42.

Wärmeleitfähigkeit, spez. Wärme, spez. Gewicht und Temperaturleitfähigkeit von Wasserdampf.

$$\text{Berechnet mit Hilfe der Formel } \lambda_p = 0,00578 \cdot \frac{c_v \cdot \sqrt{T}}{1 + \frac{T}{327}} \left[\frac{W. E.}{m \cdot \text{Std} \cdot \text{Grd}} \right].$$

	100°	120°	140°	160°	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°
W. L. Z.: λ	0,0201	0,0212	0,0223	0,0235	0,0246	0,0258	0,0269	0,0281	0,0292	0,0303	0,0315
Spez. Wärme	0,487	0,480	0,475	0,471	0,471	0,471	0,471	0,472	0,473	0,475	0,478
c_p	—	—	—	0,499	0,490	0,484	0,482	0,481	0,481	0,482	0,483
	—	—	—	0,534	0,516	0,503	0,494	0,490	0,488	0,488	0,488
	—	—	—	—	0,545	0,526	0,511	0,501	0,496	0,495	0,494
Spez. Gewicht	0,579	0,547	0,519	0,495	0,472	0,451	0,432	0,415	0,400	0,385	0,371
γ	—	—	—	1,505	1,432	1,373	1,307	1,252	1,203	1,157	1,116
	—	—	—	2,551	2,420	2,300	2,198	2,100	2,016	1,936	1,864
	—	—	—	—	3,440	3,260	3,104	2,962	2,839	2,723	2,619
Temperaturleitfähigkeit	0,071	0,081	0,091	0,101	0,101	0,121	0,133	0,143	0,154	0,166	0,178
a	—	—	—	0,031	0,035	0,039	0,043	0,047	0,051	0,054	0,058
	—	—	—	0,017	0,020	0,022	0,025	0,027	0,030	0,032	0,035
	—	—	—	—	0,013	0,015	0,017	0,019	0,021	0,023	0,024

Zahlentafel Nr. 43.

a) Zähigkeit von Flüssigkeiten:

Werte von $\mu \cdot 10^6$, z. B. für Wasser bei 18°: $\mu = 0,000107 \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{sec}}{\text{m}^2} \right]$.

	18°	50°	100°
Benzol	67	44	26
Wasser	107	56	29
Alkohol	133	71	—
Quecksilber	162	142	122
Olivenöl	9 400	—	—
Glyzerin	100 000	—	—

b) Zähigkeit von Gasen und Dämpfen.

Werte von $\mu \cdot 10^6$, z. B. für Luft bei 300° C ist: $\mu = 0,00000289 \left[\text{kg} \cdot \frac{\text{sec}}{\text{m}^2} \right]$.

Gasart	0° C	100° C	200° C	300° C	400° C	500° C
Sauerstoff	1,84	2,34	2,79	3,19	3,56	3,89
Luft	1,69	2,15	2,53	2,89	3,21	3,53
Stickstoff	1,63	2,06	2,44	2,77	3,08	3,36
Kohlensäure	1,40	1,88	2,32	2,72	3,09	3,43
Wasserdampf	0,89	1,04	1,17	1,29	1,39	1,50
Wasserstoff	0,85	1,05	1,23	1,38	1,53	1,66

Diese Zahlentafel ist berechnet mit Hilfe der nachstehenden Formel, welche von -100° C bis $+1200^\circ \text{ C}$ gültig ist:

$$\eta_T = \eta_0 \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} \cdot \sqrt{\frac{T}{273}} \text{ mit den Werten}$$

Gasart	$\eta_0 \cdot 10^6$	C
Sauerstoff	1,84	128
Luft	1,69	114
Stickstoff	1,63	110
Kohlensäure	1,40	260
Wasserdampf	0,89	0
Wasserstoff	0,85	74

Schlußwort.

Geschichtlicher Rückblick.

Das Bestreben der Wärme von Stellen höherer Temperatur zu Stellen niederer Temperatur überzutreten ist eine Tatsache, die dem Menschen seit den frühesten Zeiten bekannt ist. Mit Mitteln, die dem jeweiligen Stand seiner Kenntnisse und Fähigkeiten entsprachen, suchte er diese Vorgänge zu fördern, wo er sie als nützlich und zu hemmen, wo er sie als schädlich erkannt hatte. So war er im Laufe der Zeiten in ausreichendem Maße zu Kenntnissen und Fähigkeiten gelangt — ausreichend für die Bedürfnisse des täglichen Lebens und der Gewerbe.

Die Wissenschaft fand erst spät Interesse an diesen Vorgängen. Wie Ernst Mach in seinen „Prinzipien der Wärmelehre“ dargelegt, begann die wissenschaftliche Erforschung dieses Gebietes am Ende des 18. Jahrhunderts und zwar mit Untersuchungen über Wärmeleitung in festen Körpern und über Wärmestrahlung. Die analytische Theorie der Wärmeleitung, die in diesem Rückblick allein besprochen werden soll, ist von Biot und Fourier begründet worden. Sie ging aus von einigen wenigen aus der Erfahrung sich ergebenden Annahmen über die Grundtatsachen der Wärmeleitung, kleidete diese Annahmen in mathematische Form und entwickelte aus ihnen durch rein analytische Methoden die Grundsätze der Wärmeleitung. In erster Linie gehört dieser Theorie das Interesse der mathematischen Physiker und der Mathematiker, da die analytischen Methoden, die diese Theorie schuf, den Ausgangspunkt bildeten für einen neuen Aufschwung der theoretischen Physik und für eine durchgreifende Umgestaltung und Erweiterung des Funktionsbegriffes in der reinen Mathematik. Von physikalischer Bedeutung ist diese Theorie durch die Lösung vieler Aufgaben, die sie gebracht hat. Zugleich führte sie aber zu der Erkenntnis, daß nur Fälle von ausgesuchter Einfachheit einer rein theoretischen Betrachtung zugänglich sind. Diese Beschränktheit in der Anwendung verbunden mit mathematischer Kompliziertheit ist der Grund, weshalb diese Theorie in die technische Wissenschaft wenig Eingang gefunden hat.

Neben dieser mathematisch-physikalischen Forschungsweise entwickelte sich seit dem Anfang des 19. Jahrhunderts noch eine andere Richtung, welche die technisch-empirische Forschung genannt werden soll und die von Pécolet ihren Ausgang nimmt. In demselben Maße, als sich neben den Gewerben und zum Teil aus den Gewerben heraus die Technik entwickelte und damit neue und ungewohnte Aufgaben entstanden, trat das Bedürfnis hervor, die bisherige gewerbliche Erfahrung durch die Berechnung zu ersetzen. Das Hauptinteresse herrschte

für den Wärmedurchgang durch Heiz- und Kühlflächen und für die Wärmeabgabe heißer Körper an die Umgebung. Man ging von der Vorstellung aus, daß die übertragene Wärmemenge einerseits der Größe der Heizfläche, andererseits dem Unterschied zwischen Wandtemperatur und mittlerer Flüssigkeits- bzw. Umgebungstemperatur proportional sei. Man stellte also die Formel auf

$$Q = \alpha \cdot F \cdot (t_W - t_F) \dots \text{(vergl. Seite 172.)}$$

und nahm an, daß der Proportionalitätsfaktor α , den man die Wärmeübergangszahl nannte, im wesentlichen konstant sei. Bald zeigte sich aber, daß einerseits der Begriff mittlere Flüssigkeitstemperatur ein sehr unsicherer ist und daß andererseits die Wärmeübergangszahl weit entfernt ist, eine Konstante zu sein, sondern ihrerseits wieder von allen möglichen Einflüssen in ganz erheblichem Maße abhängt. Es folgten zahlreiche Untersuchungen und Abhandlungen, um die Veränderlichkeit dieser beiden Größen festzulegen. Bei dem Mangel an leitenden, theoretisch begründeten Gesichtspunkten konnte aber diese technisch-empirische Forschung nur langsam zu Ergebnissen gelangen, und die rasch vorwärtsstrebende Technik mußte sich deshalb ohne ein festgegründetes Wissen behelfen. Persönliche Erfahrung Einzelner, sowie die traditionelle Erfahrung der Firmen mußten über diese Schwierigkeiten hinweghelfen. So ist es erklärlich, daß der Erfolg dieser technisch-empirischen Forschung kein abgeschlossenes Wissensgebiet ist, sondern nur eine unübersehbare Fülle von Einzelergebnissen, die losgelöst von ihren verwandten Problemen erscheinen. Unübersichtlichkeit und Lückenhaftigkeit sind die Eigenschaften, die das ganze Gebiet zur Darstellung und Mitteilung so ungeeignet machen und daraus erklärt sich auch, daß selbst über Teilgebiete nur wenig zusammenfassende Darstellungen bestehen. Zu diesen obengenannten Merkmalen der Unübersichtlichkeit und Lückenhaftigkeit kommt noch als Drittes die Unsicherheit. Nicht nur Abweichungen, sondern auch folgeschwere Widersprüche zwischen den Ergebnissen der verschiedenen experimentellen Arbeiten untereinander und zwischen diesen und den Erfahrungen der Praxis sind keine Seltenheit. Bei der hervorragenden technischen Bedeutung der Wärmeübertragung machen sich diese Mängel nur umso stärker fühlbar und deshalb hat auch die Technik immer wieder die Forderung nach einem Ausbau dieses Wissensgebietes aufgestellt.

In den beiden letzten Jahrzehnten hat sich deshalb das Interesse der maßgebenden technischen und wissenschaftlichen Kreise erneut den Fragen der Wärmeübertragung zugewandt. In Deutschland war es vor allem der Verein deutscher Ingenieure, der im Jahre 1897 Professor Mollier mit einer zusammenfassenden Darstellung der bis dahin erschienenen Arbeiten beauftragte, und dann eine größere Anzahl von experimentellen Arbeiten veranlaßte und finanziell sicherstellte. Die meisten derselben wurden in München im Laboratorium für technische Physik, das unter der Leitung Professor Knoblauchs steht, durchgeführt. Außerdem haben sich auch andere Forschungsinstitute mit Versuchen über Wärmeübertragung befaßt.

Unter den theoretischen Arbeiten stehen die Arbeiten von Professor

W. Nußelt obenan; sie bilden insoferne einen Wendepunkt, als es Nußelt gelungen ist, die technisch-empirische Forschungsweise mit der mathematisch-physikalischen zu vereinen. Als Ziel behält Nußelt die Lösung technisch-wichtiger Aufgaben scharf im Auge, bedient sich aber zur Lösung dieser Fragen in vorbildlicher Weise der Methoden der mathematischen Physik. Wenn wir heute hoffen dürfen, daß uns die nächste Zeit wesentliche Fortschritte in unserem Wissen von der Wärmeübertragung bringt, so verdanken wir dies in erster Linie den Arbeiten Nußelts.

Aussichten für die Zukunft.

Was nun die Aussichten für die Zukunft betrifft, so läßt sich nur das eine mit Sicherheit voraussagen, daß für viele technische Aufgaben die Möglichkeit einer streng wissenschaftlichen Lösung vorerst nicht zu erwarten ist, daß also die Erfahrung des einzelnen und die Erfahrung der Firmen nicht zu entbehren sein werden. Gerade deshalb muß aber diese Erfahrung auf eine höhere Stufe gestellt werden. Um diesen Satz zu erklären, müssen wir etwas weiter ausholen.

Es ist das Kennzeichen der Erfahrung, der reinen Erfahrung, daß sie die Vorgänge nur ihrer äußeren Erscheinung und Wirkung nach betrachtet und daß lediglich Erfolg und Mißerfolg früherer Tätigkeit entscheidend sind für spätere Entschlüsse. Diese Erfahrung, die sich zum Teil mit den Begriffen Praxis und Routine deckt, hatte zu großen Erfolgen geführt und bildet für viele Schaffensgebiete die einzige Richtlinie. Zu ihrem Nachteil zählt es, daß eine lange Lehrzeit und auch öfterer Mißerfolg zu den notwendigen Voraussetzungen für ihren Erwerb gehören und daß sie ihrer Natur gemäß dort versagen muß, wo neuartige bisher ungekannte Aufgaben zu lösen sind.

Anders ist es, wenn die Erfahrung ihren Ausgang nimmt von einem festbegründeten Wissen und erst dort einsetzt, wo die Grenzen dieses Wissens überschritten werden. Wer die Vorgänge nicht nur ihrer Erscheinungsform, sondern auch ihrem Wesen nach kennt, und wer für einige besonders typische Fälle die streng richtige Lösung vollkommen beherrscht, der wird, indem er schwierigere Fälle mit diesen vorbildlichen Fällen vergleicht, rascher Erfahrung sammeln und wird besonders bei neuartigen Problemen sicherer sein im Urteil als derjenige, der diese Richtlinien entbehren muß.

Diese Ausführungen über die Erfahrung sind stark schematisiert und doch ermöglichen sie es uns, den obigen Satz von der Vervollkommnung der Erfahrung dahin zu ergänzen, daß sie nicht ausschließlich aus dem Erleben hervorgehen darf, sondern sich auf ein möglichst ausgedehntes, einwandfreies Wissen stützen muß. Von diesem Gedanken ausgehend betrachte ich es als die Hauptaufgabe dieses Buches, eine zusammenfassende, einheitliche Darstellung der Lehre von der Wärmeleitung in festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen zu geben. Ich habe mich bei der Darstellung nicht gescheut auch die Fehler und Mängel dieses Gebietes klar hervortreten zu lassen. Ja es war sogar meine Absicht, durch die systematische Besprechung des Gebietes einmal zu zeigen, wie gering unsere wirklich einwandfreie Kenntnis in der Lehre von der

Wärmeübertragung ist. Wenn es mir dabei gelungen sein sollte, das Vertrauen zu erschüttern, das noch vielfach gegenüber den üblichen Faustformeln mit den Wärmeübergangszahlen herrscht, so würde das durchaus in meiner Absicht gelegen haben. Wir stehen mit der Art, wie diese Wärmeübergangszahlen heute gehandhabt werden, noch auf derselben Stufe, auf der der Maschinenbau stand, als man mit Hilfe der Redtenbacherschen Verhältniszahlen aus dem Kurbelzapfen heraus das ganze Dampfmaschinengetriebe konstruierte. Diese Stufe muß überwunden werden und das ist nur möglich auf Grund wissenschaftlich einwandfreier Forschung. Deshalb ist auf den nächsten Seiten eine Zusammenstellung jener Aufgaben der wissenschaftlichen Forschung gegeben, welche mir als die vordringlichsten und wichtigsten erscheinen und ich betrachte es als die zweite Aufgabe dieses Buches, die theoretische Vorarbeit für diese Aufgaben zu liefern.

Forschungsaufgaben.

Als Einleitung zu diesem Abschnitt stelle ich den Satz voran, daß ein erfolgreiches Weiterbauen auf diesem Gebiete ohne gründliche mathematische Kenntnisse nicht möglich ist. Es genügt nicht, daß man nur Versuche anstellt; solche Versuche ohne feste theoretische Grundlage führen nur zu einer Vermehrung der ohnehin schon umfangreichen Literatur, ohne aber wissenschaftlichen Fortschritt zu bedeuten oder für die Praxis brauchbares Zahlenmaterial zu liefern.

Wenn nun auch zur Gewinnung neuer Ergebnisse umfangreiche mathematische Entwicklungen nicht gescheut werden dürfen, so ist es andererseits unbedingt notwendig, die erhaltenen Ergebnisse wieder auf eine so einfache Gestalt zu bringen, daß ihre Anwendbarkeit in der Praxis gewährleistet ist. Dazu dient vor allem die Anwendung der Zahlentabelle oder noch besser des Schaubildes an Stelle der Formel. Dies setzt aber wieder voraus, daß im Endergebnis entweder von vornherein nur wenig Veränderliche auftreten, oder daß sich ihre Zahl durch Zusammenfassen vermindern läßt. Wie dies mit Hilfe des Begriffes der Kenngröße möglich ist, habe ich im vorliegenden Buch an vielen Beispielen gezeigt.

Ich komme nun zur Besprechung der drei Aufgabegruppen.

1. Bereits Fourier hat mit Hilfe der analytischen Theorie der Wärmeleitung eine Reihe von Aufgaben gelöst, die zwar unter Annahme sehr einfacher physikalischer Bedingungen aufgestellt waren, die aber doch vom technischen Standpunkte aus von großer Bedeutung sind. Die Ergebnisse erschienen meist in recht unhandlicher Form, häufig als unendliche Reihen. Wenn diese Reihen auch rasch konvergieren, so sind sie doch für die Praxis nicht brauchbar. Aus diesem Grunde hat das Wissen Fouriers und seiner Nachfolger, vom technischen Standpunkte aus betrachtet, ein Jahrhundert völlig brach gelegen. Es erscheint mir nun äußerst wichtig, daß außer bei den Aufgaben, die bereits in diesem Buche besprochen sind, noch bei einer Reihe von anderen Aufgaben die Resultate in eine vereinfachte Form übergeführt werden und daß noch einige andere Aufgaben aus dem Gebiet der Wärmeleitung in festen

Körpern, soweit sie technisch wichtig und bisher noch nicht gelöst sind, neu in Angriff genommen werden. Diese erste Gruppe umfaßt also rein rechnerische Aufgaben.

2. Die zweite Aufgabengruppe fällt der Experimentalphysik zu. Es ist dies die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit, der spezifischen Wärme, der Dichte und der Temperaturleitfähigkeit einer Reihe technisch wichtiger Stoffe. Als solche Stoffe kommen in Betracht verschiedene Werkstoffe des Maschinenbaues, Baustoffe des Hochbaues und Wärmeisierstoffe, ferner verschiedene Flüssigkeiten, wie Wasser, Öle usw. und endlich noch Gase und Dämpfe. Hierbei ist wichtig, daß sich die Untersuchungen auf das ganze Temperaturbereich erstrecken, bei welchem der Stoff technische Verwendung findet; also z. B. bei den Baustoffen der Feuertechnik bis hinauf zu Temperaturen über 1000°. Als besonders wichtig möchte ich die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten hervorheben. Ich bin mir dessen wohl bewußt, daß ich mit den beiden letzten Aufgaben¹⁾ an die experimentelle Technik sehr hohe Anforderungen stelle. Allein bei der Wichtigkeit der Aufgaben müssen sich eben Mittel und Wege finden lassen, um die experimentellen Schwierigkeiten zu überwinden. Bei allen diesen Versuchen kommt es übrigens nicht so sehr darauf an, besonders hohe Genauigkeit zu erzielen, sondern es ist viel wichtiger, daß der untersuchte Stoff hinsichtlich seiner Zusammensetzung möglichst genau bezeichnet wird. Insbesondere wäre eine Angabe zu verlangen, in welchem Sinne und innerhalb welcher Grenzen die untersuchten physikalischen Größen mit der Reinheit des Stoffes und sonstigen Eigenschaften schwanken. Um es nochmals zu wiederholen, die genaue Stoffbeschreibung, gegebenenfalls durch Angabe einer chemischen Analyse, ist viel wichtiger als die Erzielung einer großen Anzahl Dezimalstellen im Endergebnis. Hand in Hand damit müßte eine systematische Prüfung der in der Literatur verbreiteten Zahlenwerte gehen, um die falschen oder unsicheren Zahlen, die sich von einem Buch ins andere fortvererben, wieder ausmerzen zu können.

3. Das wichtigste ist, daß sich die technische Forschung in eingehender und systematischer Weise mit dem Problem des Wärmeüberganges befaßt. Vor allem muß sich die Erkenntnis Bahn brechen, daß die Art der Strömung, insbesondere die Form der wärmeabgebenden Flächen in erster Linie zu beachten sind, denn diese bestimmen das Gesetz, nach dem der Wärmeaustausch stattfindet. Die physikalische Natur des strömenden Körpers (ob es sich etwa um Wasser, Öl oder Luft handelt) kommt erst beim Einsetzen der Zahlenwerte in die Rechnung in Frage.

In den Abschnitten C und D des II. Hauptteiles dieses Buches sind eine Reihe von Aufgaben besprochen worden, welche sich durch besonders einfache Randbedingungen und zugleich durch technische Wichtigkeit auszeichnen. Um einen kurzen Ausdruck zu gebrauchen, möchte ich diese Aufgaben als die Fundamentalaufgaben des Wärmeüberganges bezeichnen und ich erblicke in ihnen zugleich die obengenannten vorbildlichen Fälle, welche der Praxis als Vergleich dienen können, bei der Lösung von schwierigen und neuartigen Aufgaben. Leider sind bis-

¹⁾ Die zweite Aufgabe ist inzwischen von Prof. Jakob gelöst worden.

her nur für zwei dieser Aufgaben die Kennfunktionen annähernd bestimmt. Hier besteht nun für die technisch-experimentelle Forschung die Aufgabe, auch für die übrigen Probleme die Kennfunktion zu bestimmen. Durch Lösung dieser Aufgaben liefert aber die Forschung nicht nur ein Zahlenmaterial, welches für die Technik unmittelbar von Nutzen sein wird, sondern sie stellt zugleich der theoretischen Forschung ein Tatsachenmaterial zur Verfügung, von dem wir uns eine weitere Vertiefung unserer Kenntnis vom Wesen der Wärmeübertragung erhoffen dürfen.

Zum Schluß noch einige Worte über die Bedeutung, welche der Lehre von der Wärmeübertragung bei den großen Gegenwartsaufgaben der Technik zukommt.

Der Krieg mit seinen vielseitigen Folgeerscheinungen hat uns einen wirtschaftlichen Zusammenbruch von solcher Schwere gebracht, wie sich dies vordem niemand auszudenken vermochte. Unsere gegenwärtige Brennstoffnot ist teils als Ursache, teils als Folge dieses Zusammenbruches zu betrachten. Jedenfalls ist ein wirtschaftlicher Wiederaufbau ohne Überwindung der Brennstoffnot nicht zu denken. Durch Vermehrung der Kohlenförderung und durch Ausbau der Wasserkräfte allein wird dies niemals möglich sein. Es ist vielmehr notwendig, daß die Technik die Forderung einer größtmöglichen Sparsamkeit im Energieverbrauch weit mehr als bisher in den Vordergrund stellt. Dies gilt vor allem hinsichtlich der Verwendung der Wärme und damit haben sich, als die großen Gegenwartsaufgaben der Technik herausgebildet: Steigerung der Wirtschaftlichkeit des Verbrennungsprozesses in den Feuerungen, Verbesserung der Wärmeübertragung auf das Heizgut, Verminderung der Abwärme oder Wiederverwendung der Abwärme, Umstellung unserer Industrien auf die einheimischen Brennstoffe, Torf und Braunkohle und damit die Aufgabe der Veredlung dieser Stoffe durch Vergasung und Trocknung, sodann größtmöglicher Wärmeschutz im Maschinenbau und Hochbau und vieles andere mehr. Diese Probleme sind aber nur lösbar bei genauer Kenntnis der Gesetze, nach denen die Wärmeübertragung vor sich geht, und aus diesem Grunde kommt einer wissenschaftlichen Vertiefung der Lehre von der „Wärmeübertragung“ in der gegenwärtigen Zeit ganz besondere Bedeutung zu.

Von diesem Gedanken ausgehend hoffe ich, daß dies Buch dazu beitragen möge, die Wärmewirtschaft in der Technik zu fördern.

Die Grundgesetze der Wärmestrahlung und ihre Anwendung auf Dampfkessel mit Innenfeuerung. Von Ing. M. Gerbel. Mit 26 Textfiguren, Preis M. 2.40

Die Grundgesetze der Wärmeleitung und ihre Anwendung auf plattenförmige Körper. Von Ing. Fritz Krauß, beh. aut. Inspektor der Dampfkesseluntersuchungs- und Versicherungs-Gesellschaft a. G. in Wien. Mit 37 Textabbildungen. Preis M. 2.80

Technische Thermodynamik. Von Prof. Dipl.-Ing. W. Schüle.
Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Vierte, neubearbeitete Auflage. Mit 232 Textfiguren und 7 Tafeln. Unter der Presse
Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen, nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 202 Textfiguren und 4 Tafeln. Gebunden Preis M. 36.—

Leitfaden der Technischen Wärmemechanik. Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Prof. Dipl.-Ing. W. Schüle. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 93 Textfiguren und 3 Tafeln. Preis M. 18.—

Technische Wärmelehre der Gase und Dämpfe. Eine Einführung für Ingenieure und Studierende. Von Ing. F. Seufert (Stettin). Zweite Auflage. In Vorbereitung

Kohlenstaubfeuerungen für ortsfeste Dampfkessel. Eine kritische Untersuchung über Bau, Betrieb und Eignung. Von Dr.-Ing. Friedrich Münzinger. Mit 61 Textfiguren. Preis M. 24.— (ohne Zuschlag)

Handbuch der Feuerungstechnik und des Dampfkesselbetriebes mit einem Anhang über allgemeine Wärmetechnik. Von Dr.-Ing. Georg Herberg, Beratender Ingenieur (Stuttgart). Zweite, verbesserte Auflage. Mit 59 Abbildungen und Schaulinien, 90 Zahlentafeln, sowie 47 Rechnungsbeispielen. Gebunden Preis M. 18.—

Die Abwärmeverwertung im Kraftmaschinenbetrieb mit besonderer Berücksichtigung der Zwischen- und Abdampfverwertung zu Heizzwecken. Eine kraft- und wärmewirtschaftliche Studie von Dr.-Ing. Ludwig Schneider. Dritte, neubearbeitete Auflage. Mit 159 Textfiguren. Preis M. 16.—; gebunden M. 20.—

Die Zwischendampfverwertung in Entwicklung, Theorie und Wirtschaftlichkeit. Von Dr.-Ing. E. Reutlinger. Mit 69 Textfiguren. Preis M. 4.—

Hierzu Teuerungszuschläge