

WERKSTATTBÜCHER

FÜR BETRIEBSBEAMTE, VOR- UND FACHARBEITER
HERAUSGEGEBEN VON EUGEN SIMON, BERLIN

HEFT 20

Festigkeit und Formänderung

Von

Dipl.-Ing. H. Winkel

Mit 67 Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1925

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort des Herausgebers	3
I. Grundbegriffe und Versuchsergebnisse	3
Aufgabe der Festigkeitslehre	3
Längenänderungen und Normalspannungen	4
Spannung und Formänderung	4
Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen	6
Winkeländerungen und Schubspannungen	7
Die Härte	9
Schlag- oder Kerbzähigkeit	10
Schwingungsfestigkeit	10
Arten der Festigkeit	10
II. Formänderung und zulässige Spannung	11
Bedeutung der Formänderung für den Maschinenbau	11
Zulässige Spannung	11
III. Zug-, Druck- und Scherfestigkeit	14
Vorspannung	16
IV. Die Biegefestigkeit	17
Allgemeines	17
Biegespannungen	19
Trägheitsmomente und Widerstandsmomente ebener Flächen	20
Querkraft- und Biegemomentenflächen	26
Durchbiegungen	34
Schiefe Belastung	42
V. Die Knickfestigkeit	45
Die Last greift in der Stabachse an	45
Die Last liegt aus der Mitte	51
VI. Die Drehfestigkeit	54
VII. Zusammengesetzte Festigkeit, Normal- und Schubspannungen	58
Der einachsige Spannungszustand	59
Der zweiachsige Spannungszustand	60
Der ebene Spannungszustand	60
Biegung und Drehung	63
VIII. Die Festigkeit der Federn	65
Die Blattfeder	65
Die zylindrische Schraubenfeder mit rundem Querschnitt	67

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1925 by Julius Springer in Berlin.

ISBN-13: 978-3-7091-9730-1 e-ISBN-13: 978-3-7091-9977-0
DOI: 10.1007/978-3-7091-9977-0

Vorwort des Herausgebers.

Festigkeit und Formänderung der Werkstoffe bzw. der Konstruktionsteile und Maschinen gehen ebenso sehr den Konstrukteur wie den Betriebsmann an. Wenn der Konstrukteur meist, um seine Teile richtig bemessen zu können, ihre Festigkeit und Formänderung rechnerisch genau bestimmen muß, so genügt für den Betriebsmann sehr oft das richtige Gefühl. Dieses aber ist vor allem das Ergebnis von Erfahrungen und Beobachtungen, die durch die Kenntnis der exakten Grundlagen geordnet und gerichtet sind. Diese Grundlagen nun will das vorliegende Heft geben. Es wird daher dem Betriebsmann, der sich in diesen Stoff ernstlich hineinarbeiten oder Vergessenes auffrischen will, willkommen sein. Es wird auch dem Konstrukteur wie dem Lernenden — auch wenn es nicht weit genug geht — gute Dienste leisten.

Der Verfasser hat sich bemüht, bei aller wissenschaftlichen Strenge klar und einfach zu schreiben. Es hätte deshalb nahegelegen, bei den Ableitungen die höhere Mathematik zu vermeiden. Doch da das nur auf Kosten der Einfachheit und Durchsichtigkeit der Rechnung möglich ist, hat der Verfasser vorgezogen, Differential- und Integralrechnung wohl zu benutzen, die Integrale aber nur graphisch zu lösen.

Wenn so dieses Heft für weite Kreise der Leser der Werkstattbücher sehr hohe oder gar zu hohe mathematische Anforderungen stellt, so kann das nur durch die Eigenheit des Stoffes entschuldigt werden, der eine andere exakte Behandlung nicht zuläßt. Trotzdem darf dies Heft hoffen, auch in der Werkstatt viele Freunde zu finden, weil es Verhältnisse und Probleme des Betriebes besonders berücksichtigt.

I. Grundbegriffe und Versuchsergebnisse.

Aufgabe der Festigkeitslehre. In der Lehre von den Kräften oder der Mechanik nimmt man die von Kräften angegriffenen Körper als starr an, setzt also voraus, daß sie trotz der Kraftwirkung ihre Gestalt unverändert beibehalten. Nun lehrt aber die Erfahrung, daß alle Baustoffe mehr oder minder dehnbar oder elastisch sind. Unter der Dehnbarkeit oder Elastizität soll die Fähigkeit der Körper verstanden werden, unter Wirkung der Kräfte ihre Gestalt zu ändern und ihre ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, wenn die Kraftwirkung aufhört. Der Gegensatz zu dem dehnbaren oder elastischen Körper ist der bildsame oder plastische Körper, bei dem jede Kraftwirkung eine bleibende Gestaltänderung hervorruft. Will man das Verhalten der Baustoffe selbst unter dem Einfluß von Kräften untersuchen, so muß man die Voraussetzung eines starren Körpers fallen lassen. Das geschieht in der Festigkeitslehre im Gegensatz zu der Mechanik.

Im allgemeinen befinden sich die auf ihre Festigkeit und Formänderung zu prüfenden Bauteile in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung; sie sind, wie die Mechanik sagt, im Gleichgewichtszustande. Diesen Gleichgewichtszustand der angreifenden und widerstehenden Kräfte (das sind vornehmlich die Auflagedrucke) herzustellen, ist die Aufgabe, die jeder Festigkeitsuntersuchung voranzugehen hat.

Wir denken uns die Körper aus sehr kleinen Teilen, den sog. Molekülen, bestehend und beobachtet, daß bei einer Trennung dieser Moleküle voneinander durch Zerschneiden, Zerreißen, Biegen usw. ein Widerstand zu überwinden ist. Diese Eigenschaft der Körper, der Trennung ihrer Moleküle Widerstand entgegenzusetzen, heißt Kohäsion; das Maß für die Größe der Zusammenhangskraft ist die Festigkeit.

Die Festigkeitslehre hat die Aufgabe, Hilfsmittel für die Bemessung von Körpern zu liefern, die durch Kräfte beansprucht sind und so gestaltet werden müssen, daß die Festigkeit ausreicht und die Formänderung unschädlich ist.

Längenänderungen und Normalspannungen. Spannt man einen Rundeisenstab, in den im Abstände von l mm zwei Marken leicht eingeritzt sind, in eine Zerreißmaschine und belastet ihn, so zeigt eine sorgfältige Messung am belasteten Stabe eine Vergrößerung des Abstandes l ; er sei auf l_1 mm gewachsen. Die Zunahme der Länge beträgt $(l_1 - l)$ mm. Um beliebige Messungen an verschiedenen Baustoffen zuverlässig vergleichen zu können, ist man übereingekommen, die auf die ursprüngliche Länge bezogene Verlängerung als Kennzeichen der Formänderungsfähigkeit des Baustoffes anzusehen, und nennt das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\text{Verlängerung}}{\text{ursprüngliche Länge}}$$

die Dehnung. Sie ist eine Verhältniszahl und hat als solche keine Benennung oder Dimension. Bei der angegebenen Art der Belastung fällt die Wirkungslinie der angreifenden Kraft in die Stabachse. Dabei dürfen wir annehmen, daß alle Fasern des Stabes gleichmäßig an der Kraftübertragung teilnehmen, d. h. alle werden gleichmäßig gespannt.

Um ein eindeutiges Bild über die Größe der Beanspruchung belasteter Stäbe zu erhalten, sei festgelegt: der Teil der Kraft, der von 1 cm^2 des Querschnittes aufgenommen oder übertragen wird, heißt Spannung. Da die Einheit der Kraft 1 kg ist, wird die Einheit der Spannung 1 kg/cm^2 ; daneben kommen die Einheiten 1 kg/mm^2 und 1 t/cm^2 vor. In der eigentlichen Festigkeitslehre werden die Spannungen stets in kg/cm^2 gemessen. Da sie nach Größe und Richtung unterschieden werden müssen, sind sie Vektoren; für die Zusammensetzung gleichartiger Spannungen gelten die Regeln der Vektorrechnung. Bezeichnet man mit F in cm^2 den Querschnitt und mit P in kg die angreifende Kraft, so wird bei der oben angegebenen Belastungsart

$$\sigma = \frac{P}{F}, \text{ gemessen in } \text{kg/cm}^2,$$

die Spannung des auf Zug beanspruchten Stabes.

Spannung und Formänderung. Unsere Kenntnis von dem Zusammenhange zwischen den Dehnungen und Spannungen verdanken wir nur dem Versuch, bei dem die Belastung stufenweise gesteigert und die zugehörigen Verlängerungen gemessen werden. Der Versuch zeigt zunächst ein langsames Wachsen der auf die Längeneinheit bezogenen Verlängerungen bei zunehmender Belastung, und zwar erfolgen die Dehnungen verhältnismäßig den Spannungen; man sagt: zwischen beiden herrscht direkte Proportionalität. Diese einfache Beziehung besteht aber nur innerhalb bestimmter Belastungsgrenzen. Wird der Grenzwert überschritten, so wachsen die Dehnungen rascher als die Spannungen. Der Grenzwert selbst heißt Proportionalitätsgrenze; sie ist eine Spannung und wird in kg/cm^2 angegeben. Um ein Bild von dem Verhalten des Stabes zu erhalten, trägt man die Dehnungen ε

auf der x -Achse, die zugehörigen Spannungen σ auf der y -Achse eines rechtwinkligen Achsenkreuzes ab (Fig. 1). Die Spannungsdehnungskurve verläuft bis zur Proportionalitätsgrenze σ_p geradlinig; bei wachsender Belastung geht sie in leichter Krümmung bis F . Von da an tritt eine bedeutende Verlängerung bei geringer Zunahme der Belastung ein: der Stab streckt sich, er beginnt zu fließen. Die Spannung σ_f , bei der das Strecken oder Fließen beginnt, heißt Streck- oder Fließgrenze. Hat man einen bearbeiteten Stab mit glatter Oberfläche in die Zerreißmaschine gespannt, so zeigen sich jetzt feine Linien, die sich unter 90° kreuzen und gegen die Stabachse unter einem Winkel von 45° geneigt sind; man nennt sie Fließfiguren (vgl. S. 59). Bei weiter gesteigerter Belastung verschwinden sie wieder, und kurz darauf zeigt sich an einer Stelle des Stabes eine deutliche Einschnürung. Der Querschnitt wird hier erheblich kleiner; infolgedessen fällt der Belastungshebel der Maschine ab, d. h. der Stab hat die größte Tragfähigkeit überschritten. Will man einen vorzeitigen Bruch vermeiden, so wird man die Belastung verringern. Die Spannungsdehnungskurve fällt von B auf Z . Während dieses Teiles des Versuches ist die Verlängerung des Stabes mit bloßem Auge zu verfolgen, aber sie beschränkt sich auf die der Einschnürung unmittelbar benachbarten Teile. Endlich tritt der Bruch ein. Im allgemeinen begnügt man sich mit der Feststellung der Spannung σ_b (gleich der Strecke $B_0 B$ in Fig. 1) und verzichtet auf die Ermittlung des letzten Teiles BZ der Dehnspannungskurve. $B_0 B = \sigma_b = \max \sigma$ heißt Zugfestigkeit, sie wird auf den ursprünglichen Querschnitt bezogen und mit K_z bezeichnet.

Ist l' die Länge des Stabes nach dem Bruch, die man durch Messung der sorgfältig aneinandergelegten Bruchstücke erhält, so ist $l' - l$ die Verlängerung und somit die Bruchdehnung in Hundertteilen der ursprünglichen Länge

$$\varphi = 100 \cdot \frac{l' - l}{l}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß der Bruch im mittleren Drittel der Meßlänge erfolgt; andernfalls ist die Probe Ausschuß.

Für eine eingehende Kenntnis des Baustoffes genügt der einfache Zerreißversuch nicht. Entlastet man nämlich einen bereits verlängerten Stab, so verliert er die erlittene Formänderung nicht vollständig; es bleibt ein Dehnungsrest, der bleibende Dehnung heißt (z. B. die Bruchdehnung). Die wieder verschwindende, auf die Einheit bezogene Längenänderung heißt federnde oder elastische Dehnung; die bleibende Dehnung ist so gut wie Null. Man setzt als Elastizitätsgrenze diejenige Spannung fest, bei der die bleibende Dehnung 0,02% der Meßlänge erreicht. Hat ein Körper bei der Entlastung seine ursprüngliche Gestalt mehr oder minder vollkommen eingenommen, so pflegt man den erreichten Zustand im allgemeinen als endgültig anzusehen. Daß wir zu dieser Anschauung nicht immer berechtigt sind, zeigen die Versuche von Bach¹⁾, der festgestellt hat, daß sich der allmählich entlastete Stab seinem ursprünglichen Zustande mit verschiedener Geschwindigkeit nähert. Das gleiche gilt bei der allmählichen Belastung. Die Ausbildung der einem bestimmten Belastungszustande entsprechenden Formänderung beansprucht Zeit, die zu

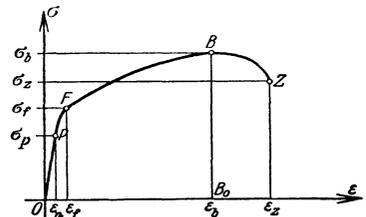


Fig. 1.

¹⁾ Bach: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. Berlin: Julius Springer 1924.

weilen kurz, mitunter auch sehr lang sein kann. Werkzeugstahl erreicht die ihm zukommende Formänderung sofort, während Lederriemen noch nach Jahren Längenänderungen bei gleichbleibender Beanspruchung erfahren. Man nennt diese Erscheinung der allmählichen Ausbildung der Formänderung federnde oder elastische Nachwirkung, die von der bleibenden Dehnung zu unterscheiden ist.

Neben der Zeit beeinflußt die Temperatur die Festigkeit, bzw. Tragfähigkeit der Baustoffe. Zahlreiche Versuche haben ergeben, daß bei den Metallen zunächst bei erhöhter Temperatur eine Zunahme der Festigkeit verbunden mit verminderter Dehnung eintritt, der aber bei höheren Temperaturen eine starke Abnahme der Festigkeit folgt.

Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen. Solange sich die Belastungen in mäßigen Grenzen halten, folgen manche Baustoffe im allgemeinen dem Geradliniengesetz von Hooke

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma;$$

für Baustoffe, die keine Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen zeigen, gilt das Potenzgesetz von Bach und Schüle

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^n$$

mit hinreichender Genauigkeit; dieses Gesetz ist insofern umfassender, als es das Hookesche (für $n = 1$) einschließt, das demnach nur ein Sonderfall des Potenzgesetzes ist. Da die wichtigsten Baustoffe, Stahl und Flußeisen, dem Geradliniengesetz folgen, ist dieses die Grundlage der Festigkeitslehre bis auf den heutigen Tag geblieben, obwohl eine ganze Reihe von Stoffen, wie Gußeisen, Beton, Holz, Granit, Leder usw., sich abweichend verhalten.

Die physikalische Bedeutung der Verhältnisziffer α ergibt sich aus

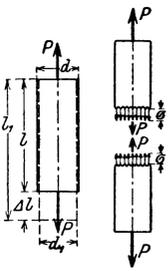


Fig. 2.

worin α zu einer Dehnung ε wird, wenn man die Spannung $\sigma = 1 \text{ kg/cm}^2$ wählt. α heißt Dehnungszahl und ist die Dehnung, die ein Stab bei der Spannung $\sigma = 1 \text{ kg/cm}^2$ erfährt. Der umgekehrte Wert

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \text{ gemessen in } \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{kg/cm}^2},$$

ist die Spannung, für welche die Dehnung des Stabes gleich 1 wird. Diese kann als Verhältnis der Verlängerung zur ursprünglichen Länge nur dann gleich 1 werden, wenn die Verlängerung gleich der ursprünglichen Länge wird; d. h. bei der Spannung E würde sich die Stablänge verdoppeln. Da die meisten Baustoffe lange vor der Erreichung dieser Belastung brechen, so ist E schlecht vorstellbar, während α außerordentlich anschaulich ist. Trotzdem rechnet die Festigkeitslehre lieber mit E und nennt E das Dehnmaß oder den Elastizitätsmodul. Aus dem durch Messung bestimmten α muß E berechnet werden.

Bei dem der Beobachtung zugrunde gelegten Zugversuch ist die Längenänderung nicht die einzige auftretende Formänderung. Gleichzeitig mit ihr ist eine Abnahme des Durchmessers zu beobachten (Fig. 2), die erwartet werden muß, da ja die Menge des Stoffes keine Zunahme erfährt und das Volumen sich nicht ändert. Es ist üblich, die Verringerung des Durchmessers auf die Längen-

einheit zu beziehen, und, wenn d den ursprünglichen, d_1 den verkleinerten Durchmesser bedeutet, zu schreiben

$$\varepsilon_q = \frac{d - d_1}{d}.$$

Diese Zahl heißt Querkusammenziehung. Das Verhältnis

$$m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{\text{Dehnung}}{\text{Querkusammenziehung}}$$

heißt Poissonsche Zahl; ihre Größe liegt für feste Körper zwischen 3 und 4; für

Metalle setzt Bach $m = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q} = \frac{10}{3}$.

Unter der Einschnürung ϕ versteht man die Verringerung des Querschnittes, ausgedrückt in Hundertteilen des ursprünglichen Querschnittes. Sind F und F_1 die zu den Durchmessern d und d_1 gehörigen Flächeninhalte, so ist

$$\phi = 100 \cdot \frac{F - F_1}{F} = 100 \cdot \frac{314,2 - 137,5}{314,2} = 43,7\%$$

die Einschnürung eines Rundeisenstabes von 20 mm Φ , der an der Bruchstelle einen Durchmesser von 15 mm hat.

Um ein Bild von der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt zu erhalten, pflegt man sie als Senkrechte über der wagerechten Achse des Querschnittes darzustellen. In Fig. 2 ist der gezogene Stab durchgeschnitten; die gleichförmige Verteilung der Spannungen ist ein Rechteck mit der Höhe $\sigma = P:F$. Die zeichnerische Wiedergabe des Verlaufes der Spannungen längs der Querschnittachse heißt Spannungsschaubild oder Spannungsdiagramm.

Weil bei der angenommenen Belastungsart die auftretenden Spannungen senkrecht oder normal zur Querschnittebene gerichtet sind, nennt man sie Normalspannungen und bezeichnet sie mit σ . Die durch sie hervorgerufene Formänderung ist eine Längenänderung.

Winkeländerungen und Schubspannungen. Ein Würfel (Fig. 3) werde in der unteren Grundfläche festgehalten und in der oberen durch eine Kraft P angegriffen, die senkrecht zur Stabachse gerichtet ist, und von der angenommen sei, daß sie sich gleichmäßig über jeden Querschnitt verteile. Jetzt fallen die Spannungen in die Ebene des Querschnittes. Denkt man sich einen wagerechten Schnitt durch den Würfel gelegt, so würde die angreifende Kraft P den oberen, beweglichen Teil des Stabes gegen den unteren, festen verschieben. Spannungen dieser Art heißen Schubspannungen und werden mit τ bezeichnet. Mit F cm² Flächeninhalt des Querschnittes wird

$$\tau = \frac{P}{F}, \text{ gemessen in } \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

die Schubspannung in dem betrachteten Querschnitt. Sie ist ebenso wie die Normalspannung nach Größe und Richtung zu unterscheiden.

Unter dem Einfluß der Kraft P möge der Würfel die gestrichelte Form annehmen. Das ist zunächst eine Voraussetzung, von der dahingestellt sein mag, ob sie bei der gedachten Art des Kraftangriffes tatsächlich eintritt. Die Figur zeigt eine Formänderung, die man dadurch kennzeichnen kann, daß man sagt: Die wagerechten Schichten des Stabes verschieben sich gegeneinander und zwar

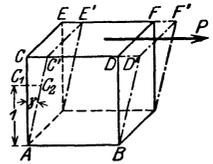


Fig. 3.

um so mehr, je weiter sie von dem festgehaltenen Einspannungsquerschnitt entfernt sind. Der Würfel $ABCDEF$ geht in das schiefe Prisma $ABC'D'E'F'$ über; der vordem rechte Winkel CAB wird zu dem spitzen Winkel $C'A'B$. Für den Fall, daß die Verschiebungen verhältnismäßig den Entfernungen von der Grundfläche wachsen, kann die Änderung γ des rechten Winkels als Maß für die Größe der Verschiebung angesehen werden. Solange es sich um kleine Formänderungen handelt, ist

$$\gamma = \frac{CC'}{CA} = \frac{C_1 C_2}{l}, \text{ gemessen im Bogenmaß};$$

man nennt γ die Schiebung und versteht darunter die Strecke, um die sich zwei 1 cm voneinander entfernte Querschnitte unter dem Einfluß der Schubspannung $\tau = P : F$ gegeneinander verschieben. Entsprechend dem Hookeschen Gesetz für Normalspannungen setzt man auch bei den Schubspannungen die Formänderungen verhältnismäßig den Spannungen und schreibt

$$\gamma = \beta \cdot \tau,$$

wobei β innerhalb eines gewissen Spannungsgebietes als unveränderlich angesehen werden darf. Aus

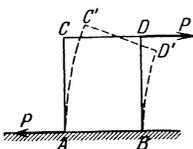


Fig. 4.

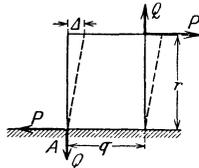


Fig. 5.

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau}, \text{ gemessen in cm}^2/\text{kg},$$

folgt $\beta = \gamma$, wenn $\tau = 1 \text{ kg/cm}^2$ wird; d. h. β ist die Größe der Schiebung für die Einheit der Spannung und heißt Schubzahl; ihr umgekehrter Wert $1 : \beta = G$ heißt Gleitmaß oder Gleit-

modul, gemessen in kg/cm^2 . Man kann auch sagen: unter der Einwirkung einer Schubspannung $\tau = 1 \text{ kg/cm}^2$ verschieben sich zwei 1 cm voneinander entfernte Querschnitte um den Betrag β cm.

Jetzt wäre nachzuprüfen, ob die angenommene Formänderung auch wirklich eintritt. Wollte man einen stark dehnsamen Körper, z. B. Gummi, nach Art der Fig. 3 belasten, so würde er zweifellos die Form $ABC'D'$ (Fig. 4) annehmen. Die Faserschicht AC würde länger, die Faserschicht BD kürzer werden. Um die geforderte Formänderung zu erhalten, müßte man BD strecken, AC kürzen. Damit also der Stab (der nicht mehr als Würfel gedacht zu werden braucht) in die gestrichelte Form der Fig. 5 übergeht, bedarf es der Kräfte Q , die Längenänderungen der Faserschichten hindern. Sie sind nicht etwa willkürlich hinzugefügte oder neue äußere Kräfte, sie müssen vielmehr wirksam sein, wenn die gedachte Formänderung der Fig. 3 infolge der Kraft P zustande kommen soll. Durch Q werden in den senkrechten Querschnitten ebenfalls Schubspannungen hervorgerufen. Ist $F_1 \text{ cm}^2$ der Flächeninhalt des wagerechten durch P beanspruchten Querschnittes, F_2 der Flächeninhalt des senkrechten durch Q beanspruchten Querschnittes, so werden

$$\tau_1 = \frac{P}{F_1} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{Q}{F_2}$$

die beiden in zwei aufeinander senkrechtstehenden Querschnitten auftretenden Schubspannungen. Das Gleichgewicht des herausgeschnittenen Prismas erfordert

$$P \cdot r = Q \cdot q,$$

wenn man von der sehr kleinen Verschiebung Δ absieht.

Mit $P = \tau_1 \cdot F_1$ und $Q = \tau_2 \cdot F_2$ erhält man

$$\tau_1 \cdot F_1 \cdot r = \tau_2 \cdot F_2 \cdot q.$$

Da $F_1 \cdot r$ und $F_2 \cdot q$ den Rauminhalt des Prismas darstellen, so heben sich beide Werte aus der Gleichung heraus, und es folgt

$$\tau_1 = \tau_2.$$

Das rechnerisch gefundene Ergebnis heißt in Worten: Schubspannungen treten stets paarweise auf und sind in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen gleich groß, wenn die vorausgesetzte Formänderung wirklich eintreten soll.

Über die Beziehungen zwischen der Dehnungszahl α und der Schubzahl β , bzw. dem Dehnmaß E und dem Gleitmaß G siehe S. 62.

Die Härte. Zu den Zahlen, welche die Festigkeit und Formänderungsfähigkeit der Baustoffe kennzeichnen, gehört auch die Härtezah1. Als erste haben die Mineralogen die bekannte Härteskala aufgestellt und dabei als Ausgangspunkt die Härte des Diamanten gewählt, der den Härtegrad 10 erhielt. Die übrigen 9 Normalstoffe wurden so eingestuft, daß man den folgenden mit dem vorangehenden ritzen kann. Soll also der Härtegrad eines beliebigen Körpers festgestellt werden, so hat man lediglich zu prüfen, mit welchem der Normalstoffe ein Einritzen noch möglich ist. Zur Messung ist dieser einfache Versuch nicht geeignet, da er keinen zahlenmäßigen Ausdruck für den Widerstand liefert, den ein Baustoff dem Eindringen eines Prüfkörpers entgegensetzt. Die erste Ausbildung der Härtebestimmung zu einem genauen Meßverfahren verdanken wir Hertz, der für die Oberflächen der sich berührenden Körper bestimmte Formen vorschlug und gleichen Baustoff für beide Körper forderte. Von dieser Forderung ist man jedoch später abgegangen, weil sich die Härte ohne sie einfacher bestimmen läßt. Eine besondere Schwierigkeit war insofern zu überwinden, als die Erfahrung lehrte, daß das Gesetz, nach dem geometrisch ähnliche Körper geometrisch ähnliche Formänderungen erfahren, bei dieser Prüfung nicht zutrif. Nach der von A. Föppl¹⁾ vertretenen Ansicht ist diese Beobachtungstatsache darauf zurückzuführen, daß sich die oberflächlichen Schichten eines Körpers anders verhalten als die im Innern gelegenen Teile. Daraus folgt, daß zur Gewinnung vergleichbarer Versuchszahlen Probekörper von denselben Abmessungen zu verwenden sind. Die heute übliche Form der sog. Kugeldruckprobe stammt von Brinell, der eine Gußstahlkugel von 10 mm mit $P = 3000$ kg auf die zu prüfende Platte drückt. Dabei erfährt die Platte einen bleibenden Eindruck, die Kugel dagegen bleibt unversehrt. In neuerer Zeit hat man P abgestuft je nach der Härte des zu prüfenden Baustoffes. Unter Umständen verzichtet man ganz auf das zahlenmäßige Festlegen des Druckes und begnügt sich mit dem Vergleich zweier Eindrücke, indem man eine Kugel von 10 mm Durchmesser zwischen das Probestück und eine besondere Meßplatte legt und beide im Schraubstock zusammenpreßt. Aus dem Verhältnis beider Eindrücke läßt sich auf Grund einer der Meßplatte entsprechenden Zahlentafel die Festigkeit des Probestückes ablesen (Kugeldruckapparat der Poldi-Hütte).

Neben der Prüfung nach Brinell wird in der Werkstatt häufig die Härte mit dem Skleroskop bestimmt. Bei diesem von Shore angegebenen Verfahren läßt man ein kleines Fallgewicht mit Diamantkopf aus 250 mm Höhe auf die Probe fallen und beurteilt die Härte nach der Höhe des Rücksprunges. Hierbei erfährt das Prüfstück eine so geringe bleibende Formänderung, daß die Prüfung an fertigen Teilen bequem durchführbar ist. Unzulässig ist natürlich der Rückschluß auf die Festigkeit, da die Dehnsamkeit oder Elastizität des Prüf-

¹⁾ Vgl. A. und L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. II, S. 236. München und Berlin: R. Oldenbourg 1920.

stoffes von großem Einfluß auf die Rückfederung ist. Man hat also die Härteprüfung nach Brinell oder kurz die Brinellhärte von der Härteprüfung mit dem Skleroskop oder kurz der Skleroskophärte scharf zu trennen¹⁾.

Schlag- oder Kerbzähigkeit. Die bisher erwähnten Prüfverfahren geben noch kein Bild von der Widerstandsfähigkeit eines Baustoffes gegen plötzliche, schlagartige Belastungen. Dazu dient die Schlagbiegeprobe, bei der das Probestück Fig. 6²⁾ von einem pendelnd aufgehängten, axähnlichen Hammer mit einem Schläge durchgeschlagen oder zum mindesten stark gebogen wird. Die Arbeit in mkg, die auf 1 cm² des Bruchquerschnittes entfällt, heißt Schlagarbeit (gemessen in mkg/cm²) und ist ein Maß für die Größe der Kerbzähigkeit (siehe auch Schwingungsfestigkeit).

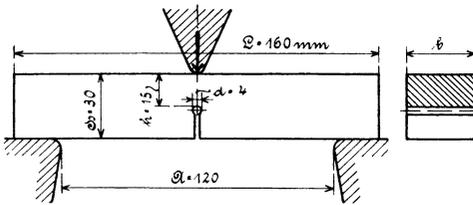


Fig. 6.

Um schädliche Folgen der Kerbwirkung auszuschalten, vermeidet man bei Konstruktionen scharfe Ecken und sieht überall da, wo Querschnittänderungen erforderlich sind, Hohlkehlen oder allmähliche Übergänge vor.

Schwingungsfestigkeit. Solange ein Probestab einer einmaligen Prüfung unterworfen wird, wie es z. B. bei der Bestimmung der Zugfestigkeit durch den Zerreißversuch der Fall ist, werden Fehlstellen von verschwindend kleiner Ausdehnung keinen Einfluß auf das Ergebnis haben. Wesentlich anders liegen dagegen die Verhältnisse, wenn der Stab beständig belastet und entlastet wird, oder wenn die Art der Belastung dauernd wechselt, also beispielsweise Zug und Druck abwechselnd auftreten. Dann tritt an der Fehlstelle, die in einer kaum sichtbaren Verletzung der Oberfläche bestehen kann, eine bleibende Formänderung auf,

die bei genügend oft wiederholten Belastungswechseln zum Bruche führt, obwohl die rechnerisch ermittelte Spannung, auf den ganzen, unverletzten Querschnitt bezogen, weit unter der Festigkeit des Baustoffes liegt. Föppl³⁾ nennt den Widerstand eines Baustoffes gegen wiederholte — wechselnde — Belastungen, wie sie der Betrieb jeder

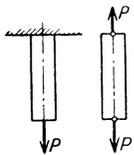


Fig. 7.

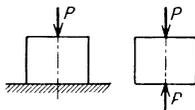


Fig. 8.



Fig. 9.

Transmissionswelle beispielsweise mit sich bringt, Schwingungsfestigkeit und unterscheidet sie scharf von der Bruchfestigkeit schlechthin. Zu den Fehlstellen, die von beträchtlichem Einflusse auf die Schwingungsfestigkeit sind, gehören auch Risse und andere Oberflächenbeschädigungen, und mancher Bruch eines Maschinenteiles dürfte in der zu geringen Schwingungsfestigkeit seine zutreffende Erklärung finden.

Arten der Festigkeit. Je nach der Art des Kraftangriffes unterscheidet man:

1. Zugfestigkeit (K_2). Der Stab wird durch zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte P (Fig. 7) beansprucht (wenn wir seine Einspannung durch eine Gegenkraft ersetzt denken), die in der Stabachse wirken.

¹⁾ Vgl. Simon: Härten und Vergüten. Werkstattbücher. Heft 7 und 8.

²⁾ Bach: Elastizität und Festigkeit. 9. Aufl., S. 145.

³⁾ A. und O. Föppl: Grundzüge der Festigkeitslehre B. G. Teubner 1923.

2. Druckfestigkeit (K). Der Stab wird durch zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte P (Fig. 8) beansprucht (wenn wir die Unterlage durch eine Gegenkraft ersetzt denken), die ebenfalls in der Stabachse wirken.

3. Knickfestigkeit. Ist der gedrückte Stab (Fig. 9) im Verhältnis zu seinen Querschnittabmessungen sehr lang, so wird er bei genügend großen Kräften P ausknicken. Jeder gedrückte Stab ist auf Knicksicherheit zu untersuchen.

4. Scherfestigkeit (K_s). Wirken zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P (Fig. 10) senkrecht zur Stabachse, so wird der Stab auf Abscheren beansprucht.

Greifen die entgegengesetzt gerichteten Kräfte nicht in ein und derselben Geraden an, haben sie also nicht dieselbe Wirkungslinie, so bilden sie bei gleicher Größe und paralleler Richtung ein sog. Kräftepaar. Es ist jetzt zu unterscheiden, wie die Stabachse zu der Ebene steht, die durch die beiden Kräfte (genauer durch die Wirkungslinien der Kräfte) geht.

5. Biegefestigkeit (K_b). Fällt die Stabachse in diese Ebene (Fig. 11), so wird der Stab gebogen.

6. Drehfestigkeit (K_d). Steht die Stabachse senkrecht zu dieser Ebene, so werden die Querschnitte des Stabes gegeneinander verdreht (Fig. 12).

Die Fälle 1, 2, 3, 5 ergeben Normalspannungen und Längenänderungen, die Fälle 4 und 6 Schubspannungen und Winkeländerungen.

Tritt mehr als eine Art von Beanspruchung auf, so sagt man, der Stab ist auf zusammengesetzte Festigkeit beansprucht.

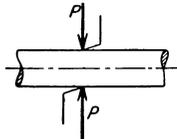


Fig. 10.

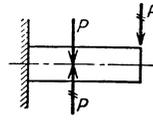


Fig. 11.

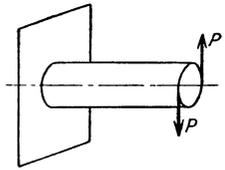


Fig. 12.

II. Formänderung und zulässige Spannung.

Bedeutung der Formänderung für den Maschinenbau. Die Formänderung der Baustoffe unter der Einwirkung äußerer Kräfte spielt für den Maschinenbau eine große Rolle.

Bleibende Formänderungen sollen an fertigen Konstruktionen nicht vorkommen, weil sie das richtige Spielen aller Teile hindern würden; hingegen sind sie ein wichtiges Mittel zur Formgebung bei der Herstellung der Einzelteile: beim Schmieden, Warmpressen, Kaltstauchen, Kaltstrecken, Gewinderollen usw. sind sie Grundlage und Ziel der Bearbeitung.

Elastische Formänderungen sind auch bei den fertigen Konstruktionen unvermeidlich und innerhalb gewisser Grenzen unschädlich. Bei den Werkzeugmaschinen besonders sind sie jedoch sorgfältig zu beachten, wenn hohe Genauigkeit von der Arbeit verlangt wird. Denn unter dem Schnittdruck wird die elastische Verbiegung oft größer als zulässig.

Beim Fräsen biegt sich der Fräser mit dem Dorn ab, um so mehr, je länger der Dorn ist. Bleibt der Fräser in der Endstellung dann längere Zeit auf der Arbeitsfläche, so federt er allmählich wieder vor und fräst dabei tiefer als an den andern Stellen. Diesem Vorgang entspricht beim Drehen, Hobeln, Stoßen und Schleifen das sog. „Nachschneiden“: unter dem Schnittdruck

federt das Werkzeug gegenüber dem Werkstück zurück, so daß das Werkzeug, wenn es in derselben Stellung nochmals über die Arbeitsfläche geht, wieder etwas schneidet.

Sind Arbeitstücke sehr dünnwandig oder bei großer Länge nur an den Enden eingespannt (lange Welle zwischen Spitzen auf der Drehbank), so kann die Ausbiegung so stark werden, daß die Arbeitsfläche eine erheblich veränderte Form bekommt, oder das Arbeitstück aus der Spannung gerissen wird.

Andererseits wirkt der Schnittdruck entsprechend auf die Maschine. Die Arbeitspindeln der Drehbänke, Fräsmaschinen usw. verbiegen sich unter dem Druck und erhöhen so die Schiefstellung infolge des Spieles zwischen Zapfen und Lagerschale. Infolgedessen liegen die Lagerzapfen nicht mehr in ihrer ganzen Länge an den Lagerschalen an, sondern drücken fast nur in der Nähe der vorderen Kante der Schale (Kantenpressung), wodurch die Lagerschale leicht zerstört wird.

Weiter biegen sich die Maschinenbetten, besonders bei Drehbänken und Senkrechtbohrmaschinen, oft erheblich durch und üben dadurch einen ungünstigen Einfluß auf die Arbeit aus.

Einige der hieraus sich ergebenden Aufgaben werden später noch genauer behandelt werden.

Zulässige Spannung. Da im allgemeinen allen Festigkeitsberechnungen das Geradliniengesetz zugrunde liegt, dürfen die Baustoffe niemals über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht werden. Die Grenze, bis zu der eine gefahrlose Belastung möglich ist, heißt zulässige Spannung. Für sie gelten im Maschinenbau die von C. Bach vorgeschlagenen Werte, im Hochbau die sog. „Preußischen Bestimmungen“. Nach Bach unterscheiden wir drei Belastungsfälle, und zwar sind zu wählen die Zahlen unter I (s. nachstehende Tafel), wenn die Belastung ruhend ist, unter II, wenn die Belastung beliebig oft von Null bis zu einem größten Werte stetig wächst und dann wieder auf Null zurückgeht, unter III, wenn die Belastung beliebig oft derart wechselt, daß die durch sie hervorgerufenen Spannungen abwechselnd von Null bis zu einem größten Wert stetig wachsen, dann bis Null sinken, um in umgekehrter Richtung bis zu einem größten negativen Wert zu wachsen und wieder bis Null zu fallen. Der Hochbau kennt diese Unterschiede nicht, weil hier die Umkehr der Spannungsrichtung, die bei jeder umlaufenden Welle vorhanden ist, kaum in Betracht kommen dürfte. Dafür bestehen aber genaue Vorschriften über den Zweck und die Belastung der Bauteile.

Die Sicherheit \mathfrak{S} gegen Bruch ist das Verhältnis der Festigkeit zur zulässigen Spannung; z. B. für Zug $\mathfrak{S} = K_z : k_z$, wenn man die zulässigen Spannungen mit k bezeichnet. Liegen keine besonderen Vorschriften über die Wahl der zulässigen Spannung vor, so ist die Sicherheit \mathfrak{S} gegen Bruch maßgebend. Wird z. B. eine 8fache Sicherheit für ausreichend erachtet, so wäre k_z für Chromnickelstahl mit $K_z = 6500 \text{ kg/cm}^2$

$$k_z = \frac{K_z}{\mathfrak{S}} = \frac{6500}{8} = \text{rd. } 800 \text{ kg/cm}^2$$

zu wählen.

In der nachstehenden Zahlentafel sind die im Maschinenbau üblichen Spannungen durch I, II, III hervorgehoben, entsprechend den drei Belastungsfällen, die übrigen Zahlen gelten für den Hochbau.

Tafel der zulässigen Spannungen in kg/cm².

Baustoff	Zug k_z		Druck k		Schub k_s		Biegung k_b		Drehung k_d		Sicherheit gegen Ausknicken	
	von	bis	von	bis	von	bis	von	bis	von	bis		
Schweißeisen:	I	—	900	—	900	—	720	—	900	—	360	5
„	II	—	600	—	600	—	480	—	600	—	240	
„	III	—	300	—	—	—	240	—	300	—	120	
Flußeisen:	I	900	1200	900	1200	720	960	900	1200	600	840	5
„	II	600	800	600	800	480	640	600	800	400	560	
„	III	300	400	—	—	240	320	300	400	200	280	
„	Hochbau	—	1200	—	1200	—	1000	—	1200	—	—	
Flußstahl:	I	1200	1500	1200	1500	960	1200	1200	1500	900	1200	5
„	II	800	1000	800	1000	640	800	800	1000	600	800	
„	III	400	500	—	—	320	400	400	500	300	400	
„	Hochbau	—	1400	—	1400	—	—	—	1400	—	—	
Stahlguß:	I	600	900	900	1200	480	840	750	1050	480	840	5
„	II	400	600	600	900	320	560	500	700	320	560	
„	III	200	300	—	—	160	280	250	350	160	280	
„	Hochbau	—	—	—	—	—	—	—	1200	—	—	
Gußeisen:	I	—	300	—	900	—	300	—	—	—	—	6 bis 8
„	II	—	200	—	600	—	200	—	—	—	—	
„	III	—	100	—	—	—	100	—	—	—	—	
„	Hochbau	—	—	500	1000	—	200	—	250	—	—	
Kupferblech, gewalzt:	I	—	600	—	—	—	—	—	—	—	—	
„	„ II	—	300	—	—	—	—	—	—	—	—	
Zinkblech		—	200	—	200	—	—	—	150	—	—	
Hölzer: Kiefer		100*	120	60*	80	10*	15	100*	120	—	—	10
„	⊥	—	—	—	—	60*	70	—	—	—	—	
Buche, Eiche		100*	120	80*	100	15*	20	100*	120	—	—	
„	⊥	—	—	—	—	60*	90	—	—	—	—	
Esche		100	120	—	70	—	—	—	—	—	—	
Hartholz		—	200	—	160	⊥	30	—	200	—	—	
Steine:	Granit			60*	90	Auflagersteine		10		bis kg/cm ²		
	Sandstein			30*	50	„		15				
	Kalkstein			30*	40	„		15				
Mauerwerk:	Ziegel			—	7	in Kalkmörtel						
	Hartbrandstein			12	15	in Kalkzementmörtel						
	Kalksandstein			—	7	in Kalkmörtel						
	Kalksandstein			12	15	in Kalkzementmörtel						
	Klinker			20	30	in Zementmörtel						
	porige Ziegel			3	6							
	Schwammstein			—	3							
	Bruchstein			—	5	in Kalkmörtel						
	Schüttbeton			6	8	für Fundamente						
	Stampfbeton			10	15	für Fundamente						
Baugrund				3	4	höhere Beanspruchung ist besonders zu begründen.						

Die mit * bezeichneten Zahlen gelten bei Dauerbelastung.

III. Zug-, Druck- und Scherfestigkeit.

Für die Bemessung des Querschnittes gilt die Festigkeitsbedingung: Die rechnerisch ermittelte Spannung muß stets kleiner als die zulässige sein. Daraus ergibt sich der erforderliche Querschnitt F in cm^2 , wenn P in kg die angreifende Kraft ist, für

$$\text{Zug: } F \cong \frac{P}{k_z}; \quad \text{Druck: } F \cong \frac{P}{k}; \quad \text{Abscheren: } F \cong \frac{P}{k_s}.$$

Meist wird der ausgeführte Querschnitt von dem erforderlichen abweichen, aber er darf niemals kleiner sein als dieser. Selten wird der Querschnitt in gleichbleibender Größe durch den ganzen zu berechnenden Bauteil gehen; das Natürliche ist, daß er in irgendeiner Weise mit einem andern verbunden oder, wie man sagt, angeschlossen ist. In solchen Fällen ist der kleinste Querschnitt für die Festlegung der Abmessungen maßgebend, man nennt ihn den gefährlichen Querschnitt. Z. B. Eine Zugstange von 8 m Länge soll eine Kraft von $P = 17000 \text{ kg}$ übertragen. Wählt man Flußeisen mit $K_z = 4500 \text{ kg/cm}^2$ Zugfestigkeit als Baustoff und setzt 5fache Sicherheit gegen Bruch fest, so erhält man die zulässige Zugspannung

$$k_z = \frac{1}{5} \cdot K_z = \frac{1}{5} \cdot 4500 = 900 \text{ kg/cm}^2.$$

Dann wird der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{k_z} = \frac{17000}{900} = 18,9 \text{ cm}^2.$$

Man entscheidet sich zunächst für Rundeisen und wählt $d = 50 \text{ mm}$, dem ein Querschnitt $F' = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 19,64 \text{ cm}^2$ entspricht. Damit erhält man als rechnerisch ermittelte Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F'} = \frac{17000}{19,64} = 866 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Stange muß aber irgendwie an einen andern Bauteil angeschlossen werden. Soll das durch ein Gewinde geschehen, so ist der Kernquerschnitt maßgebend. Die deutschen Industrie-Normen für Whitworth-Gewinde geben $2\frac{1}{2}''$ mit $F' = 24,08 \text{ cm}^2$ Kernquerschnitt bei 55,37 Kern- und 63,5 mm äußerem Durchmesser als nächst höheren Querschnitt an. Rundeisen als Handelsware ist mit 64 mm Φ erhältlich, so daß zwar 50 mm Φ rechnerisch genügen, aber 64 mm Φ aus praktischen Rücksichten ausgeführt werden müßten. Bei dem Anschluß durch Gewinde ist außerdem noch ein Punkt zu berücksichtigen: unsere Festigkeitsbedingung gilt nur für den Fall, daß sich die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen. Damit diese Voraussetzung erfüllt ist, müßten aber die Auflageflächen der Gewinde mit der Mutter vollkommen genau übereinstimmen, was wohl selbst bei sorgfältigster Herstellung nicht zu erreichen sein dürfte. Es liegt deshalb bei jeder Schraube die Gefahr vor, daß bei ungleichmäßiger Spannungsverteilung eine Stelle überanstrengt wird. Die Folge davon ist, daß bei häufiger Wiederholung der Belastung und Entlastung, wie sie jeder Betrieb mit sich bringt, ein Bruch eintreten kann, da nicht die Zug-, sondern die Schwingungsfestigkeit maßgebend ist. Vielfach läßt sich die Gefahr des Schwingungsbruches durch das Einschalten eines federnden oder elastischen Zwischengliedes mildern. Im all-

gemeinen hilft sich die Praxis, indem sie als zulässige Spannung niedrige Werte wählt. Für Schrauben ist $k_z \leq 600 \text{ kg/cm}^2$; damit wird in unserm Beispiel eine Schraube von $2\frac{3}{4}''$ mit $28,8 \text{ cm}^2$ Kernquerschnitt; $60,55 \text{ mm}$ Kern- und $69,85 \text{ mm}$ äußerem Durchmesser erforderlich. Das zu wählende Rundeisen müßte also 70 mm stark sein, obwohl 50 mm rechnerisch genügen würden!

Günstiger wäre die Verwendung eines Flacheisens, das durch Niete abgeschlossen wird, wie es beispielsweise Fig. 13 zeigt. Um ein Bild von der Größe der Schwächung des Querschnittes durch die Niete zu erhalten, ermittelt man zunächst die Nietdurchmesser. Es seien $n = 6$ Niete vorgesehen, und jeder Niet hat eine Scherfläche, also ist

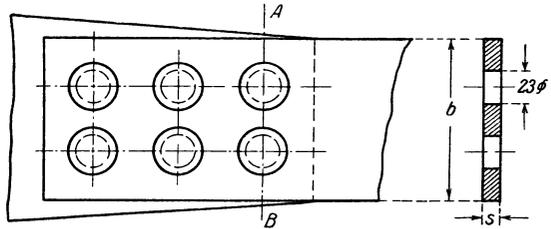


Fig. 13.

$F = n \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ der tragende Querschnitt. Setzt man die zulässige Scherspannung k_s für flußeiserne Niete mit 600 kg/cm^2 an, so wird

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{n \cdot k_s} = \frac{17000}{6 \cdot 600} = 4,72 \text{ cm}^2.$$

Einem Kreisquerschnitt von $4,72 \text{ cm}^2$ entspricht ein Durchmesser von $24,6 \text{ mm}$. Handelsübliche Niete haben aber $20, 23, 26 \text{ mm } \Phi$, also müßte der Nietdurchmesser $d = 26 \text{ mm}$ mit $5,31 \text{ cm}^2$ Querschnitt gewählt werden, sofern es sich um einen Bauteil des Maschinenbaues handelt; für den Hochbau ist $k_s = 1000 \text{ kg/cm}^2$ und damit

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{n \cdot k_s} = \frac{17000}{6 \cdot 1000} = 2,84 \text{ cm}^2,$$

dem ein Durchmesser $d = 20 \text{ mm}$ mit $\frac{\pi d^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2$ entspricht. Die Schubspannung wird im ersten Falle

$$\tau = \frac{17000}{6 \cdot 5,31} = \sim 535 \text{ kg/cm}^2, \text{ im zweiten } \tau = \frac{17000}{6 \cdot 3,14} = \text{rd. } 900 \text{ kg/cm}^2.$$

Sollen in beiden Fällen Niete von 26 mm Durchmesser verwendet werden, so hat der Hochbauer nur

$$n = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot k_s} = \frac{17000}{5,31 \cdot 1000} = 4$$

Niete nötig. Der schwächste Querschnitt liegt in $A - B$ (Fig. 13), sein Flächeninhalt wird um $s \cdot 2 d$ vermindert. Für die Ausführung wählen wir Flacheisen $150 \times 20 \text{ mm}$ mit $F' = 15 \cdot 2 - 2 \cdot 2,6 \cdot 2 = 19,6 \text{ cm}^2$; das ergibt

$$\sigma = \frac{17000}{19,6} = \sim 850 \text{ kg/cm}^2$$

als rechnerisch ermittelte Spannung. Flacheisen wiegt bei 150×20 mm Querschnitt $g = 23,4$ kg/m; Rundeisen von 70 mm ϕ dagegen $g = 30$ kg/m. Das bedeutet bei Verwendung von Flacheisen eine Gewichtseersparnis von

$$\frac{30 - 23,4}{23,4} \cdot 100 = \sim 28\% .$$

Da häufig auch Klarheit über die Verlängerung herrschen muß, welche die belastete Stange erfährt, so sei die Berechnung angegeben. Aus dem Geradenliniengesetz $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ folgt mit $\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l}$ und $\alpha = \frac{1}{E}$

$$l_1 - l = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot l = \frac{1}{2150000} \cdot 850 \cdot 8000 = \text{rd. } 3,7 \text{ mm} ,$$

wobei $E = 2150000$ kg/cm² ist und l in mm eingesetzt wird, wenn die Verlängerung $l_1 - l$ ebenfalls in mm gemessen werden soll.

In ähnlicher Weise ist die Querschnittsverminderung durch den Anschluß auch bei Verwendung von Walzeisen zu berücksichtigen.

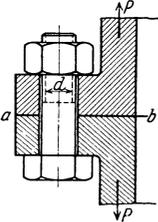


Fig. 14.

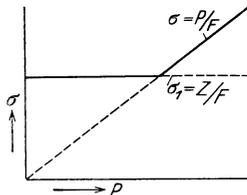


Fig. 15.

Vorspannung. Häufig kommt es vor, daß man einem Bauteil von vornherein eine Spannung erteilt, ohne daß die im Betriebe aufzunehmenden Kräfte wirken. So wird man die Schrauben am Deckel eines Dampfmaschinenzylinders festziehen, bevor der Dampf eintritt; die Schrauben, mit denen ein Konsol an der Wand gehalten wird, werden angezogen, bevor das Konsol die Last aufnimmt, für die

es bestimmt ist; jeder erkaltete Niet hat Zugspannungen, ohne daß die Stäbe, die er verbindet, Lasten tragen, usw. In solchen Fällen sagt man, die Maschinenteile haben eine Vorspannung erhalten. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß zwei Körper (die Flansche in Fig. 14) durch die Spannkraft Z der Schraube gegeneinander gepreßt werden, zu der während des Betriebes die aufzunehmende Kraft P tritt. Wie groß ist die Gesamtspannung des Schraubenschaftes? Ist d der Kerndurchmesser, so ist die Vorspannung

$$\sigma_1 = \frac{Z}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{\text{Spannkraft } Z}{\text{Querschnitt}} .$$

Infolge des Anziehens der Schraube mit dem Schlüssel hat sich eine Gleichgewichtslage eingestellt, die einem ganz bestimmten Spannungs- und Formänderungszustand entspricht. Jetzt fängt die neue Kraft P (genauer die beiden gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräfte P) an zu wirken. Offenbar kann sie erst dann eine neue Formänderung, d. h. eine Verlängerung des Schraubenschaftes hervorrufen, wenn die beiden Flansche ohne Druck aneinanderliegen. Die Flächenpressung in dem Schnitt $a - b$ muß also erst aufgehoben werden, bevor eine zusätzliche Verlängerung des Schraubenschaftes eintritt. Da der gesamte Druck in der Fläche $a - b$ gleich der Kraft Z ist, mit der die Schraube angezogen wurde, heißt das, erst von dem Augenblick an, wo P größer wird als Z , ist die Gesamtspannung im Schaft größer als die Vorspannung. Das Anwachsen der Gesamt-

spannung mit wachsendem P zeigt Fig. 15. Aus ihr geht hervor, daß bei der Schraube zwei Belastungsfälle zu unterscheiden sind:

1. P kleiner als Z ; die Gesamtspannung ist gleich der Vorspannung $\sigma_1 = Z : F$;
2. P größer als Z ; die Gesamtspannung ist $\sigma = P : F$. Das trifft jedoch nur dann zu, wenn die Flansche in Fig. 14 starr sind. Streng genommen ist allerdings die Annahme starrer Flansche unzulässig, doch ist sie insofern nicht unberechtigt, als die Formänderung der Flansche gegen die des Schraubenschaftes vernachlässigt werden darf.

IV. Die Biegefestigkeit.

Allgemeines. Die Erfahrung zeigt, daß sich ein Stab, der nach Fig. 16 belastet wird, biegt; die vor der Belastung gerade Stabachse ist eine krumme Linie, solange die Kräfte P auf den Träger wirken, sie heißt Biegungslinie des Stabes oder auch elastische Linie (Fig. 16b). Um die entstehende Formänderung genauer zu beschreiben, bauen wir uns aus

einem stark dehnسامen Baustoff einen Probestab nach Fig. 16a und ritzen in die senkrechte Oberfläche zwei gerade Striche I und II und die Stabachse ein, dann zeigt der belastete Stab das Bild Fig. 16b. Die Geraden I und II sind gerade geblieben; die Stabachse ist krumm, und zwar stehen die Geraden auf der gekrümmten Achse senkrecht. Das Ergebnis besagt mit andern Worten: Die durch die Geraden I und II angedeuteten Querschnitte des Stabes sind trotz der Biegung eben geblieben; sie erscheinen gegeneinander gedreht. Aus Parallelen sind gegeneinander geneigte Gerade geworden. Das ist nur möglich, wenn die Faserschicht $a - a'$ kürzer, die Faserschicht $b - b'$ länger wird. Überlegung und Beobachtung lehren, daß $c - c'$ seine ursprüngliche Länge beibehält. Man nennt die Faserschicht, die senkrecht zur Bildebene durch die Stabachse geht, die neutrale Faserschicht, sie schneidet den Querschnitt in der Nulllinie $n - n$. Aus den Formänderungen schließen wir auf die Spannungen. Da es sich um Längenänderungen handelt, sind die Spannungen Normalspannungen: $a - a'$ wird gedrückt, $c - c'$ ist spannungslos, $b - b'$ wird gezogen. Maßgebend für die Bemessung des Querschnittes sind die Spannungen; für sie lautet die Festigkeitsbedingung auch im Falle der Biegung: die rechnerisch ermittelte Spannung muß unter der zulässigen bleiben. Ein Bild über ihre Größe erhält man, wenn man den Stab in dem Querschnitt, den man untersuchen will, durchschneidet. Dadurch wird das Gleichgewicht, das vor dem Schnitt bestanden hat, gestört. Jetzt versucht man, den abgetrennten Teil durch Kräfte wieder ins Gleichgewicht zu bringen; gelingt das, dann werden die hinzugefügten Kräfte genau so wirken wie die ungeschnittenen Fasern des Stabes. In Fig. 17 ist der Stabteil x abgetrennt. An ihm wirken der Auflagerdruck A , der zuerst ermittelt werden muß, und die Kraft P_1 . Beide

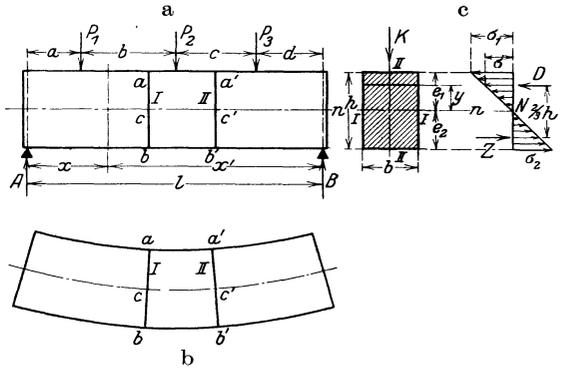


Fig. 16 a - c.

Winkel, Festigkeit.

Kräfte sind verschieden, also wird ein Überschuß ($A - P_1$) vorhanden sein, der nach oben gerichtet ist, wenn $A > P_1$ ist. Gleichgewicht ist aber nur dann vorhanden, wenn sich sämtliche Kräfte in der senkrechten Ebene aufheben, ihre Summe also gleich Null ist. Es muß in der Schnittstelle eine Kraft Q_l nach unten angesetzt werden, die dem Überschuß ($A - P_1$) das Gleichgewicht hält. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$Q_l = A - P_1$$

ist. In Ruhe bleibt aber der abgetrennte Teil trotz der hinzugefügten Kraft Q_l nicht, vielmehr wird er sich unter dem Einfluß der an ihm wirkenden Kräfte rechts herum drehen. Das würde durch zwei Kräfte D und Z verhindert, von denen D im oberen Teil drückt, Z im unteren zieht. Da auch kein Überschuß an Kraft in wagerechter Richtung auftreten darf, muß $D = Z$ sein. Zwei Kräfte D und Z dieser Art, die also gleich groß sind, entgegengesetzte Richtung und parallele Wirkungslinien haben, nennt man ein Kräftepaar, den Abstand f Hebelarm. Das Maß für die Größe der Wirkung eines Kräftepaares ist das Produkt aus Kraft und Hebelarm ($D \cdot f$ oder $Z \cdot f$), es heißt statisches Moment des Kräftepaares. Über die Größe von D und Z erhalten wir ein Bild, wenn wir be-

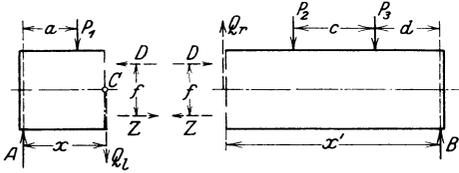


Fig. 17.

achten, daß keine Drehung auftreten darf. Betrachten wir vom Punkte C aus die Drehwirkungen der fünf Kräfte, so werden wir sagen: A dreht am Hebelarm x rechts um C ; P_1 am Hebelarm $(x - a)$ links um C ; D am Hebelarm $\frac{1}{2} f$ links um C ; Z am Hebelarm $\frac{1}{2} f$ links um C ; Q_l dreht gar nicht, weil sein Hebelarm in Be-

ziehung auf C gleich Null ist. Gleichgewicht wird vorhanden sein, wenn die Drehwirkungen insgesamt den Wert Null haben. In Form einer Gleichung lautet der Satz

$$A \cdot x - P_1(x - a) - D \cdot \frac{1}{2} f - Z \cdot \frac{1}{2} f = 0,$$

wenn die entgegengesetzte Drehrichtung durch entgegengesetzte Vorzeichen gekennzeichnet wird. Mit $D = Z$ erhält man

$$A \cdot x - P_1(x - a) = D \cdot f = Z \cdot f.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht das statische Moment des Kräftepaares D (bzw. Z), auf der linken die Summe der statischen Momente aller links vom betrachteten Schnitt angreifenden äußeren Kräfte; diese Summe der statischen Momente aller links vom betrachteten Schnitt angreifenden Kräfte heißt Biegemoment im Querschnitt, der untersucht werden soll. Die Kraft Q_l , die im Querschnitt wirkt, heißt Querkraft, sie ist gleich der Mittelkraft aller links von dem zu untersuchenden Querschnitt angreifenden Kräfte. Nunmehr ist der abgetrennte Teil vollständig in Ruhe, er ist im Gleichgewicht.

Was für den linken abgetrennten Stabteil gilt, das gilt auch für den rechten. An ihm ergeben die 3 Kräfte P_2 , P_3 und B einen Überschuß ($P_2 + P_3 - B$) nach unten, da die Summe $P_2 + P_3 > B$ ist. Das Gleichgewicht in senkrechter Richtung wird durch eine nach oben gerichtete Kraft Q_r erzielt, die gleich dem Überschuß sein muß. Sie ist genau so groß wie Q_l , weil beim nicht geschnittenen Träger

$$A - P_1 - P_2 - P_3 + B = 0$$

sein muß, damit kein Überschuß an Kraft in senkrechter Richtung vorhanden ist, aber sie ist von entgegengesetzter Richtung wie Q_l . Sowohl D links und D rechts als auch Z links und Z rechts können ebenfalls keine Größenunterschiede haben, nur die Richtungen sind entgegengesetzt. Zwischen $D \leftarrow$ und $D \rightarrow$ kann man sich eine Druckfeder, zwischen $Z \rightarrow$ und $Z \leftarrow$ eine Zugfeder gelegt denken, dann geben beide Federn ein Bild von der Beanspruchung der oberen und unteren Stabhälfte. Von C aus betrachtet erhält man in gleicher Weise wie vorher

$$B \cdot x' - P_3 \cdot (x' - d) - P_2 \cdot (x' - d - c) = Z \cdot f = D \cdot f.$$

Aber diesmal stellt die linke Seite der Gleichung ein linksdrehendes, die rechte Seite ein rechtsdrehendes Moment dar. Genau genommen wirken also im Schnitt I zwei gleich große, entgegengesetzt drehende Biegemomente und zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Querkkräfte, doch sprechen wir der Einfachheit halber von dem Biegemoment und der Querkraft im untersuchten Querschnitt. Die beiden Querkkräfte Q_l und Q_r suchen die beiden Stabteile gegeneinander zu verschieben; die durch sie hervorgerufenen Spannungen sind Schubspannungen. Die Biegemomente drehen die Querschnitte des Stabes gegeneinander (Fig. 16); die durch sie hervorgerufenen Spannungen sind Normalspannungen und heißen Biegespannungen; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß in ein und demselben Querschnitt Zug- und Druckspannungen herrschen.

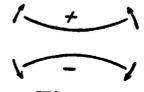


Fig. 18.

Zusammenfassend sagen wir: Jeder Querschnitt eines gebogenen Stabes wird beansprucht:

1. Durch eine Querkraft auf Schub, die gleich der algebraischen Summe sämtlicher links (oder auch rechts) vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte ist,
2. Durch ein Biegemoment, das gleich der algebraischen Summe der statischen Momente sämtlicher links (oder auch rechts) vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte ist.

Ferner legen wir fest: Ein Biegemoment ist positiv (+), wenn es die Trägerachse nach unten wölbt, negativ (-), wenn es die Trägerachse nach oben wölbt (Fig. 18). Das ist nötig, weil die Drehrichtung keine Unterscheidung mehr zuläßt. Betrachtet man in Fig. 17 den linken Stabteil, so dreht das Moment der äußeren Kräfte rechts um C , betrachtet man den rechten Stabteil, so dreht das Moment der äußeren Kräfte links um C . Die Rechnung muß aber stets dasselbe ergeben, ganz gleichgültig, ob man von rechts oder links aus das Biegemoment in einem Punkte eines Trägers berechnet.

Die bisherige Untersuchung hat gezeigt, daß neben der Biegung stets eine Querkraft auftritt; strenggenommen läge also der Fall der zusammengesetzten Festigkeit vor. Über den Sonderfall der reinen Biegung ohne Querkraft siehe S. 28. Im allgemeinen vernachlässigt man die infolge der Querkraft auftretenden Schubspannungen und bemißt den Querschnitt des gebogenen Stabes nach der größten errechneten Biegespannung.

Biegespannungen. Aus der Fig. 17 konnten wir zwar das Kräftepaar $Z \cdot f$, bzw. $D \cdot f$ finden, das im Gesamtergebnis ein Bild von der Beanspruchung des Querschnittes gibt, wie sich aber D und Z über den Querschnitt verteilen, ist damit noch nicht festgestellt. Wir schließen auf sie durch die Betrachtung der Fig. 16 und sagen: Die Dehnungen der Fasern nehmen verhältnismäßig der Entfernung von der Nulllinie nach dem Rande hin zu; dasselbe tun die Spannungen, wenn wir für den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen das Geradliniengesetz von Hooke zugrunde legen. Mit Hilfe dieser Überlegung, die

letzten Endes eine Annahme ist, erhalten wir das Schaubild (Fig. 16c) der Spannungsverteilung eines auf Biegung beanspruchten Querschnittes, es zeigt geradliniges Anwachsen der Spannungen nach dem Rande des Querschnittes. Nennt man die Randspannung σ_1 , die Spannung in der Entfernung y dagegen σ , so wird

$$\sigma = \frac{y}{e_1} \cdot \sigma_1 = \frac{y}{e_2} \cdot \sigma_2.$$

Da der rechteckige Querschnitt überall gleich breit ist, dürfen wir uns statt der veränderlichen Spannung σ eine gleichförmig verteilte mittlere Spannung σ_m denken, die im oberen Querschnittsteil drückt, im unteren zieht. Nach der Erklärung des Spannungsbegriffes überträgt jedes cm^2 des Querschnittes σ_m kg, also der obere Teil $D = \frac{1}{2} h \cdot b \cdot \sigma_m$, der untere $Z = (\frac{1}{2} h \cdot b \cdot \sigma_m)$ kg. Die Gleichgewichtsbedingung

$$D \cdot f = A \cdot x - P_1 \cdot (x - a) = M_b$$

geht mit $f = \frac{2}{3} h$ über in

$$\frac{1}{2} h \cdot b \cdot \sigma_m \cdot \frac{2}{3} h = M_b.$$

wenn wir beachten, daß die Mittelkraft der Einzelspannungen σ im Schwerpunkt des Spannungsdreiecks angreifend gedacht werden muß und die rechte Seite das Biegemoment in dem zu untersuchenden Querschnitt darstellt. Da die mittlere Spannung σ_m gleich der halben Randspannung σ_1 ist, erhält man

$$\frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \frac{2}{3} h = M_b \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = \frac{6 M_b}{b h^2} = \frac{M_b}{\frac{1}{6} b h^2}.$$

Die Spannung im beliebigen Abstände y von der Nulllinie wird

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \frac{y}{e_1} = \frac{M_b}{\frac{1}{6} b h^2 \cdot e_1} \cdot y \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{M}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot y.$$

Der rechnerisch gefundene Ausdruck $\frac{1}{6} b h^2 = W$ heißt Widerstandsmoment, der rechnerisch gefundene Ausdruck $\frac{1}{12} b h^3 = J$ heißt Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnittes.

Beide Größen sind mathematische Ausdrücke, die Eigenschaften eines Querschnittes zum Ausdruck bringen. Zwischen beiden besteht eine einfache Beziehung, denn W ergibt sich aus J , wenn wir $J = \frac{1}{12} b h^3$ durch den Abstand $e_1 = \frac{1}{2} h$ der äußersten Faser von der Nulllinie dividieren. Führt man die Werte J und W in die Gleichungen ein, so erhält man

$$\sigma = \frac{M_b}{J} \cdot y \quad \text{und für die Randspannung} \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{M_b}{W}.$$

Allerdings sind die Gleichungen nur für den rechteckigen Querschnitt abgeleitet, doch läßt sich ihre allgemeine Gültigkeit leicht nachweisen.

Die Festigkeitsbedingung für den auf Biegung beanspruchten Stab erhält jetzt die Form

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{W} \leq k_b.$$

Trägheitsmomente und Widerstandsmomente ebener Flächen.

In Fig. 19 habe der Stab einen beliebig begrenzten Querschnitt, für den das Geradenliengesetz der Spannungen angenommen ist. Die rechnerische Form dieses Gesetzes lautet:

$$\sigma = y \cdot \sigma_0 = \sigma_1 \cdot \frac{y}{e_1} = \sigma_2 \cdot \frac{y}{e_2}.$$

Für einen Flächenstreifen von verschwindend kleiner Dicke dy darf die Spannung als unveränderlich angesehen werden. Ist sie im Abstände y von der als bekannt vorausgesetzten Nulllinie σ , so überträgt der Streifen $dF = x \cdot dy$ eine Kraft $\sigma \cdot dF = (\sigma \cdot x \cdot dy)$ kg. Aus der Gleichgewichtsbedingung: Summe aller wagerechten Seitenkräfte gleich Null folgt

$$\int \sigma \cdot dF = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_0 \cdot \int y \cdot dF = 0; \quad \text{d. h.} \quad \int y \cdot dF = 0.$$

Die Gleichung besagt, daß die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen muß, denn nur für die Schwerachse ist die Summe der Produkte aus Flächenstreifen und Abstand von der Achse gleich Null.

Ferner verlangt das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften, daß die Summe der Momente gleich Null ist. Für $N - N$ als Bezugsachse wird also mit $\sigma \cdot dF$ als Kraft und y als Hebelarm

$$\int \sigma \cdot dF \cdot y = M_b \quad \text{oder} \quad \sigma_0 \cdot \int dF \cdot y^2 = M_b.$$

Man setzt $\int dF \cdot y^2 = J$ und nennt J das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die Achse $N - N$; es ist ein mathematischer Ausdruck und bedeutet die

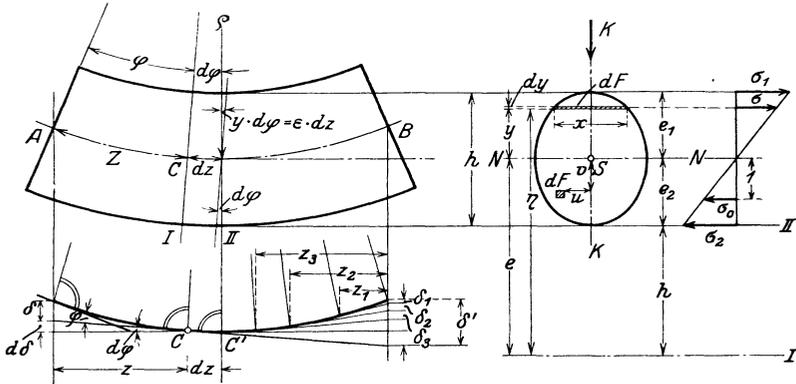


Fig. 19.

Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Flächenteilen dF und dem Quadrat ihrer Abstände y von einer Achse. Unsere Gleichung nimmt die Form

$$\sigma_0 \cdot J = M_b \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{M_b}{J} \cdot y$$

an. Für die Randspannungen σ_1 und σ_2 ist $y = e_1$, bzw. $y = e_2$, so daß für sie wird

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{J} \cdot e_1, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_2 = \frac{M_b}{J} \cdot e_2.$$

Die Nenner erhält man, wenn man das Trägheitsmoment durch den Abstand der äußersten Faser dividiert; sie heißen die Widerstandsmomente des Querschnittes und werden mit W_1 und W_2 bezeichnet. Als Randspannungen ergeben sich

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{W_1} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M_b}{W_2}.$$

Das Trägheitsmoment wird wegen des Produktes (Fläche in $\text{cm}^2 \times$ Quadrat des Abstandes in cm^2) in cm^4 , das Widerstandsmoment in cm^3 gemessen, wenn die Längen in cm eingesetzt werden.

Häufig kommt es vor, daß das Trägheitsmoment, das zuerst errechnet werden muß, auf eine andere als die Schwerachse bezogen werden soll. Liegt sie im Abstände e (Fig. 19) parallel zur Schwerachse, so wird

$$J_1 = \int dF \cdot \eta^2 = \int dF (e + y)^2 = e^2 \cdot \int dF + 2e \cdot \int dF \cdot y + \int dF \cdot y^2.$$

Da $\int dF \cdot y = 0$, $\int dF = F$ und $\int dF \cdot y^2 = J_s$ ist, wobei J_s das Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerachse, bedeutet, so ist

$$J_I = J_s + F \cdot e^2.$$

Trägheits- und Widerstandsmomente häufig verwendeter Querschnittformen siehe Tafel auf S. 23; hier soll auf den beliebig begrenzten Querschnitt ausführlicher eingegangen werden, weil er im Maschinenbau nicht selten ist. Für $J_I = \int dF \cdot \eta^2$ kann man setzen $J_I = \int dF (h + y)^2$ und bezieht das Trägheitsmoment zunächst auf eine Achse I, die von der unteren Tangente II den Abstand h hat, der gleich der Höhe des Querschnittes ist. Erweitert man auf der rechten Seite der Gleichung mit h^2 , so erhält man mit $dF = x \cdot dy$

$$J_I = h^2 \cdot \int x \cdot \frac{(h + y)^2}{h^2} \cdot dy = h^2 \cdot \int x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2 \cdot dy.$$

Der Klammerausdruck $\left(1 + \frac{y}{h}\right)^2$ ist eine Zahl, die größer als 1 ist, also $x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2 = z_2$ eine Strecke in mm, wenn x in mm gemessen wird. Trägt man z_2 von einer Senkrechten aus in der zugehörigen Höhe y wagerecht ab, so umschließt die Verbindungslinie der Endpunkte eine Fläche, deren Inhalt F_2 gleich dem Integral ist. Damit wird

$$J_I = h^2 \cdot F_2,$$

und man erhält das auf die Schwerachse bezogene Trägheitsmoment J_s zu

$$J_s = J_I - F \cdot e^2 = F_2 \cdot h^2 - F \cdot e^2.$$

Die Flächeninhalte F des Querschnittes und F_2 der Hilfsfläche werden durch sorgfältiges Auszählen genügend genau bestimmt, wenn man auf Millimeterpapier zeichnet; im andern Falle benutzt man ein Planimeter. Diese Art

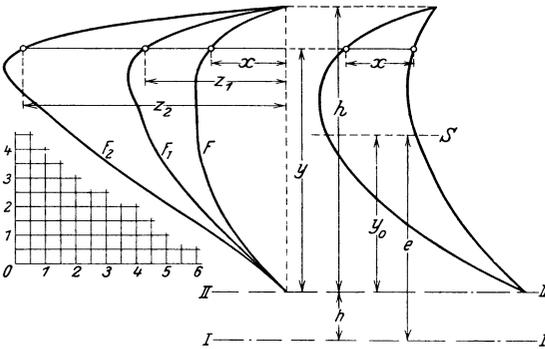


Fig. 20.

der Ermittlung des Trägheitsmomentes hat den Vorteil, daß nur der Längenmaßstab der Zeichnung nötig ist.

Da die Lage der Nulllinie, die durch den Schwerpunkt geht, als bekannt vorausgesetzt ist, soll das angegebene Verfahren auch zur Bestimmung des Schwerpunktes benutzt werden. Es ist das statische Moment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die Achse I, gleich der Summe der statischen Momente der Querschnittsteile, also

$$F \cdot e = \int dF \cdot \eta = \int x \cdot dy \cdot (h + y) = h \int x \cdot dy \cdot \frac{h + y}{h}$$

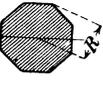
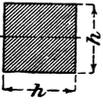
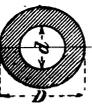
oder mit $x \cdot \frac{h + y}{h} = x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right) = z_1$ und $\int x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right) \cdot dy = F_1$

$$e = h + e_2 = \frac{h}{F} \int x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right) \cdot dy = h \cdot \frac{F_1}{F}.$$

Die Strecken $z_1 = x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right)$ werden in gleicher Weise von derselben Senkrechten aus wagerecht abgetragen wie $z_2 = x \cdot \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2$; die Verbindungslinie ihrer Endpunkte umschließt die Fläche F_1 , deren Inhalt ebenfalls durch sorgfältiges Auszählen ermittelt wird. Im allgemeinen genügt es, 10 Punkte der Umrißlinien zu bestimmen; sind die 10 Teile gleich groß, so lassen sich $\alpha = \left(1 + \frac{y}{h}\right)$ und $\alpha^2 = \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2$ ein für allemal für $\frac{y}{h} = 0,1 \div 0,2 \div 0,3$ usw. berechnen; die Breite x des Querschnittes ist der Zeichnung zu entnehmen. Der Querschnitt einer Dampfturbinenschaufel (Fig. 20) liefert folgende Zahlentafel (der Abstand h der Achsen I und II ist verkürzt gezeichnet):

$\frac{y}{h}$	$\alpha = 1 + \frac{y}{h}$	$\alpha^2 = \left(1 + \frac{y}{h}\right)^2$	x mm	$z_1 = \alpha \cdot x$ mm	$z_2 = \alpha^2 \cdot x$ mm	F mm ²	F_1 mm ²	F_2 mm ²
1	2	4	0	0	0	—	—	—
0,9	1,9	3,61	20,1	38,2	72,5	114	218	408
0,8	1,8	3,24	28,8	51,8	93,4	251	466	860
0,7	1,7	2,89	30,5	51,9	88,2	300	524	918
0,6	1,6	2,56	30	48	76,8	300	498	822
0,5	1,5	2,25	29,2	43,8	65,7	298	460	715
0,4	1,4	1,96	26,6	37,2	52,1	282	405	590
0,3	1,3	1,69	22,5	29,3	38,0	245	330	450
0,2	1,2	1,44	16,7	20,0	24,1	195	245	310
0,1	1,1	1,21	9,2	10,12	11,1	130	150	172
0	1	1	0	0	0	45	50	55
						2160	3346	5300

Tafel.

Nr.	Querschnitt	Trägheits- und Widerstandsmoment	Nr.	Querschnitt	Trägheits- und Widerstandsmoment
1.		$J = \frac{bh^3}{12}$ $W = \frac{bh^2}{6}$	6.		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0,6381 R^4$ $W = 0,6906 R^3$
2.		$J = \frac{h^4}{12}$ $W = \frac{h^3}{6}$	7.		$J = \frac{\pi d^4}{64}$ $W = \frac{\pi d^3}{32} = \sim 0,1 d^3$
3.		$J = \frac{bh^3}{36}$ $W = \frac{bh^2}{24}$ für $e = \frac{2}{3} h$	8.		$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $W = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$
4.		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$ $W = \frac{5}{8} R^3 = 0,625 R^3$	9.		$J = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $W = \frac{\pi a^2 b}{4}$
5.		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$ $W = 0,5413 R^3$	10.		$J = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a^3 b_1)$ $= \sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) d$ $W = \sim \frac{\pi}{4} a (a + 3b) d$

Damit erhält man

$$e = h \cdot \frac{F_1}{F} = 100 \cdot \frac{3346}{2160} = 154,9 \text{ mm}; \quad y_0 = h \cdot \frac{F_1}{F} - h = 154,9 - 100 = 54,9 \text{ mm}$$

$$J_s = h^2 \cdot F_2 - F \cdot e^2 = 100 \cdot 53 - 21,6 \cdot 15,49^2 = 117 \text{ cm}^4.$$

Lautet der Längenmaßstab der Zeichnung 1 mm = 0,4 mm, so wird

$$1 \text{ mm}^2 = (0,4 \text{ mm})^2 = 0,16 \text{ mm}^2; \quad 1 \text{ mm}^4 = (0,4 \text{ mm})^4 = 0,0256 \text{ mm}^4.$$

Damit erhält man

$$y_0 = 54,9 \text{ mm} \cdot \frac{0,4 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} = 21,96 \text{ mm} \text{ und } J_s = 117 \text{ cm}^4 \cdot \frac{0,0256 \text{ mm}^4}{1 \text{ mm}^4} = 2,995 = \sim 3 \text{ cm}^4.$$

Widerstandsmomente in cm^3 von Bauhölzern (Handelsware).

Breite in cm	Höhe in cm												
	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	
8	85,3	133,3											
10	106,7	166,7	240	326,7									
12		200	288	392	512								
14		281,3	336	457,3	597,3	756	933,3						
16			384	522,7	682,7	864	1067	1291					
18				588	768	972	1200	1452	1728				
20				653,3	853,3	1080	1333	1613	1920	2253			
22					938,6	1188	1467				2875		
24						1296	1600		2304	2704		3600	
26							1733		2496	2929	3397		
28								2259				4200	
30									2880		3920		

Die Widerstandsmomente für die gewählte Schwerachse ergeben sich zu

Maßstab 1 mm = 1 mm

$$W_1 = \frac{117}{5,49} = 21,3 \text{ cm}^3$$

$$W_2 = \frac{117}{4,51} = 25,9 \text{ cm}^3$$

Maßstab 1 mm = 0,4 mm

$$W_1 = \frac{2,995}{2,196} = 1,37 \text{ cm}^3$$

$$W_2 = \frac{2,995}{1,804} = 1,62 \text{ cm}^3.$$

Es empfiehlt sich, kleine Querschnitte in vergrößertem Maßstabe aufzuzeichnen.

Da durch den Schwerpunkt eines Querschnittes beliebig viele Achsen möglich sind, so hat jeder Querschnitt beliebig viele Trägheitsmomente, je nach der Achse, auf die sie bezogen werden. In Fig. 19 haben wir die Lage der Nulllinie als bekannt vorausgesetzt, obwohl wir nur wissen, daß sie durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen muß; dagegen bleibt zunächst offen, welche Richtung sie hat. Die Ebene des Biegemomentes der äußeren Kräfte, die durch die Stabachse geht (Fig. 16) schneide den Querschnitt in der Geraden $K-K$ (Fig. 19), die wir Kraftlinie nennen. In Beziehung auf diese Gerade ist das Moment der äußeren Kräfte gleich Null. Damit keine Drehung des Querschnittes um $K-K$ erfolgt, muß auch das Moment der inneren Kräfte gleich Null sein. Das Flächenteilchen dF mit den Abständen u von der Kraftlinie $K-K$ und v von der Nulllinie $N-N$ überträgt ($\sigma \cdot dF$) kg; das Moment dieser Teilkraft, bezogen auf die Kraftlinie ist $\sigma dF \cdot u$, also die Summe der Momente sämtlicher Teilkräfte $\int \sigma dF \cdot u$. Nach dem Schaubild der Spannungsverteilung über den Querschnitt ist aber $\sigma = \sigma_0 \cdot v$, so daß wir als Bedingung für die Beziehung zwischen der Kraftlinie $K-K$ und der Nulllinie $N-N$ erhalten

$$\sigma_0 \cdot \int dF \cdot u \cdot v = 0 \quad \text{oder} \quad \int dF \cdot u \cdot v = 0.$$

Kreisförmiger Querschnitt.

$J = \text{äquatoriales Trägheitsmoment}; W = \text{Widerstandsmoment.}$

d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$	d	$J = \frac{\pi d^4}{64}$	$W = \frac{\pi d^3}{32}$
1	0,0491	0,0982	51	332 086	13 023	101	5 108 055	101 150
2	0,7854	0,7854	52	358 908	13 804	102	5 313 378	104 184
3	3,976	2,651	53	387 323	14 616	103	5 524 830	107 278
4	12,57	6,283	54	417 393	15 459	104	5 742 532	110 433
5	30,68	12,27	55	449 180	16 334	105	5 966 604	113 650
6	63,62	21,21	56	482 750	17 241	106	6 197 171	116 928
7	117,9	33,67	57	518 166	18 181	107	6 434 357	120 268
8	201,1	50,27	58	555 497	19 155	108	6 678 287	123 672
9	322,1	71,57	59	594 810	20 163	109	6 929 087	127 139
10	490,9	98,17	60	636 172	21 206	110	7 186 886	130 671
11	718,7	130,7	61	679 651	22 284	111	7 451 813	134 267
12	1 018	169,6	62	725 332	23 398	112	7 723 997	137 929
13	1 402	215,7	63	773 272	24 548	113	8 003 571	141 656
14	1 886	269,4	64	823 550	25 736	114	8 290 666	145 450
15	2 485	331,3	65	876 240	26 961	115	8 585 417	149 312
16	3 217	402,1	66	931 420	28 225	116	8 887 958	153 241
17	4 100	482,3	67	989 166	29 527	117	9 198 425	157 238
18	5 153	572,6	68	1 049 556	30 869	118	9 516 956	161 304
19	6 397	673,4	69	1 112 660	32 251	119	9 843 689	165 440
20	7 854	785,4	70	1 178 588	33 674	120	10 178 763	169 646
21	9 547	909,2	71	1 247 393	35 138	121	10 522 320	173 923
22	11 499	1 045	72	1 319 167	36 644	122	10 874 501	178 271
23	13 737	1 194	73	1 393 995	38 192	123	11 235 450	182 690
24	16 286	1 357	74	1 471 963	39 783	124	11 605 311	187 182
25	19 175	1 534	75	1 553 156	41 417	125	11 984 229	191 748
26	22 432	1 726	76	1 637 662	43 096	126	12 372 350	196 387
27	26 087	1 932	77	1 725 571	44 820	127	12 769 824	201 100
28	30 172	2 155	78	1 816 972	46 589	128	13 176 799	205 887
29	34 719	2 394	79	1 911 967	48 404	129	13 593 424	210 751
30	39 761	2 651	80	2 010 619	50 265	130	14 019 852	215 690
31	45 333	2 925	81	2 113 051	52 174	131	14 456 235	220 706
32	51 472	3 217	82	2 219 347	54 130	132	14 902 727	225 799
33	58 214	3 528	83	2 329 605	56 135	133	15 359 483	230 970
34	65 597	3 859	84	2 443 920	58 189	134	15 826 658	236 219
35	73 662	4 209	85	2 562 392	60 292	135	16 204 411	241 547
36	82 448	4 580	86	2 685 120	62 445	136	16 792 899	246 954
37	91 998	4 973	87	2 812 205	64 648	137	17 292 282	252 442
38	102 354	5 387	88	2 943 748	66 903	138	17 802 721	258 010
39	113 561	5 824	89	3 079 853	69 210	139	18 324 378	263 660
40	125 664	6 283	90	3 220 623	71 569	140	18 857 416	269 392
41	138 709	6 766	91	3 366 165	73 982	141	19 401 999	275 206
42	152 745	7 274	92	3 516 586	76 448	142	19 958 294	281 103
43	167 820	7 806	93	3 671 992	78 968	143	20 526 466	287 083
44	183 984	8 363	94	3 832 492	81 542	144	21 006 684	293 148
45	201 289	8 946	95	3 998 198	84 173	145	21 699 116	299 298
46	219 787	9 556	96	4 169 220	86 859	146	22 303 933	305 533
47	239 531	10 193	97	4 345 671	89 601	147	22 921 307	311 855
48	260 576	10 857	98	4 527 664	92 401	148	23 551 409	318 262
49	282 979	11 550	99	4 715 315	95 259	149	24 194 414	324 757
50	306 796	12 272	100	4 908 738	98 175	150	24 850 496	331 340

Auch hier kennzeichnet der mathematische Ausdruck $\int dF \cdot u \cdot v$ lediglich eine Eigenschaft des Querschnittes; er heißt Zentrifugalmoment und wird wie das Trägheitsmoment in cm^4 gemessen. Nun lassen sich für jeden Querschnitt zwei und zwei aufeinander senkrechtstehende Achsen angeben, für die das Zentrifugalmoment den Wert Null hat; sie heißen Hauptachsen des Querschnittes; die auf sie bezogenen Trägheitsmomente Hauptträgheitsmomente. In dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 16) sind die Achsen I-I und II-II Hauptachsen, und zwar ist

$$J_I = \frac{bh^3}{12} = \max J \text{ das größte, } J_{II} = \frac{hb^3}{12} = \min J \text{ das kleinste.}$$

Auf den Zusammenhang zwischen den Trägheits- und Zentrifugalmomenten kann hier nicht näher eingegangen werden, es sei auf Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau, 4. Aufl., S. 464. Berlin: Julius Springer, verwiesen. Für unsere Zwecke genügt es, die Lage der Hauptachsen als bekannt anzusehen, zumal sie in den Zahlentafeln der gebräuchlichen Querschnitte angegeben sind (Normalprofile von Walzeisen usw.)

Die Nulllinie eines Querschnittes steht nur dann senkrecht auf der Kraftlinie, wenn die Kraftlinie mit einer Hauptachse des Querschnittes zusammenfällt.

Querkraft- und Biegemomentenflächen. Aus der Festigkeitsbedingung

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{W} \leq k_b$$

folgt, daß das größte auftretende Biegemoment der Berechnung zugrunde zu legen ist. Um ein Bild über das Anwachsen der Biegemomente zu erhalten, pflegt man diese mit Hilfe eines Maßstabes senkrecht zur Stabachse aufzutragen und die Endpunkte zu verbinden. Die so entstehende Linie heißt Momentenlinie. In gleicher Weise verfährt man mit der Querkraft und erhält die Querkraftlinie. Die von den Linien und der wagerechten Achse eingeschlossenen Flächen heißen Momentenfläche und Querkraftfläche. In Fig. 21 ist ein Träger AB mit einer Einzellast P belastet. Mit den Bezeichnungen der Figur ergeben sich die Auflagerdrucke

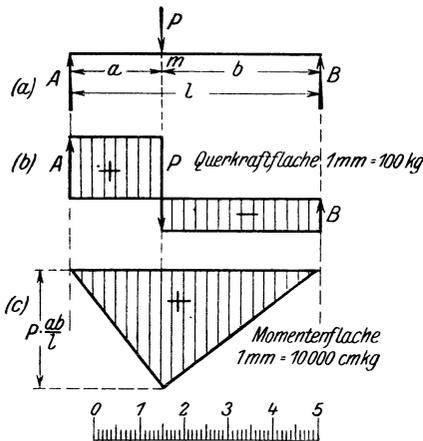


Fig. 21.

$$A = P \cdot \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad B = P \cdot \frac{a}{l}.$$

hinzutritt; die Querkraftlinie läuft parallel zu der wagerechten Achse. Im Punkte m greift die nach unten gerichtete Kraft P an; für einen Punkt, der unmittelbar links von m liegt, ist $Q_m = A$; für einen Punkt, der unmittelbar rechts von m liegt, wird $Q'_m = A - P$ als Summe sämtlicher links vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte. Zwischen m und B bleibt die Querkraft in jedem Punkte des Trägers gleich groß, die Querkraftlinie also eine Parallele zur Achse im Abstände $Q'_m = A - P$. Da $Q_B = B$ ist, muß bei richtiger Zeichnung der Endpunkt der nach oben gerichteten Kraft B in die Achse fallen. Die Querkraftfläche besteht in unserm Beispiel aus zwei Teilflächen, die teils über, teils unter der Achse liegen und durch entgegengesetzte Vorzeichen gekennzeichnet werden (Fig. 21b). In m wechselt die Querkraft das Vorzeichen. Es ist üblich, die nach oben gerichtete Querkraft $Q_A = A$ als positiv zu bezeichnen.

Nach der Erklärung der Querkraft (S. 18) ist $Q_A = A$; sie bleibt bis m unverändert, da zwischen A und m keine neue Kraft eintritt. Zwischen m und B bleibt die Querkraft in jedem Punkte des Trägers gleich groß, die Querkraftlinie also eine Parallele zur Achse im Abstände $Q'_m = A - P$. Da $Q_B = B$ ist, muß bei richtiger Zeichnung der Endpunkt der nach oben gerichteten Kraft B in die Achse fallen. Die Querkraftfläche besteht in unserm Beispiel aus zwei Teilflächen, die teils über, teils unter der Achse liegen und durch entgegengesetzte Vorzeichen gekennzeichnet werden (Fig. 21b). In m wechselt die Querkraft das Vorzeichen. Es ist üblich, die nach oben gerichtete Querkraft $Q_A = A$ als positiv zu bezeichnen.

Zum Entwurf der Momentenlinie berechnet man für verschiedene Punkte des Trägers die Momente und trägt sie ebenfalls senkrecht unter den Punkten auf, für die sie berechnet sind. Nach der Erklärung des Biegemomentes (S. 18)

ist $M_A = 0$; $M_m = A \cdot a = P \cdot \frac{ab}{l}$. Mit diesen beiden Werten sind zwei Punkte

der Momentenlinie bestimmt, es fragt sich nur, wie sie zwischen ihnen verläuft. Wir denken uns einen Punkt im Abstände x von A , so daß $x < a$ ist, dann ist

$M_x = A \cdot x$ und $M_m = A \cdot a$; es verhält sich also $M_x : M_m = A \cdot x : A \cdot a = x : a$;

das heißt: Die Momentenlinie ist zwischen A und m gerade. In gleicher Weise

erhält man für den rechten Trägerteil mB $M_B = 0$; $M_m = B \cdot b = P \cdot \frac{ab}{l}$.

Das führt selbstverständlich zu demselben Wert von M_m , da es gleichgültig sein muß, ob wir den Träger von A oder B aus berechnen. Der rechte Ast der Momentenlinie ist ebenfalls gerade. Die Figur zeigt: 1. wo die Querkraftlinie

parallel zur Achse läuft, ist die Momentenlinie eine schräge Gerade; 2. wo die Querkraftfläche das Vorzeichen wechselt, liegt das größte Biegemoment; 3. die Ordinate der Momentenlinie ist gleich dem Inhalt der zugehörigen Querkraftfläche. Die Richtigkeit des dritten Ergebnisses ersieht man unmittelbar aus der Figur, denn $M_m = A \cdot a = B \cdot b = P \cdot \frac{ab}{l}$ ist gleich dem Inhalt des

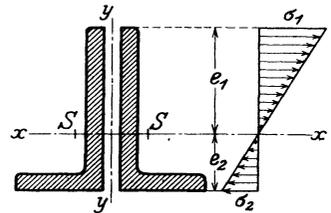


Fig. 22.

Teiles der Querkraftfläche, der über a liegt, oder

ebenso gleich dem Inhalt des Teiles der Querkraftfläche, der über b liegt. Wenn auch unsere Ergebnisse nur aus dem gezeichneten Sonderfall abgeleitet sind, so kommt ihnen doch allgemeine Gültigkeit zu.

Zahlenbeispiel: $P = 2200$ kg; $a = 2$ m; $b = 3,5$ m; $l = 5,5$ m.

$$A = P \cdot \frac{b}{l} = 2200 \cdot \frac{3,5}{5,5} = 1400 \text{ kg}; \quad B = P \cdot \frac{a}{l} = 2200 \cdot \frac{2}{5,5} = 800 \text{ kg};$$

$$\max M = M_m = P \cdot \frac{ab}{l} = 2200 \cdot \frac{200 \cdot 350}{550} = 280000 \text{ cmkg}.$$

Baustoff: Holz mit $k_b = 80$ kg/cm² erfordert $W = \frac{280000}{80} = 3500$ cm³.

Aus der Tafel auf S. 24 wird entnommen: ein Balken 24×30 cm hochkant mit $W = 3600$ cm³, so daß $\max \sigma = \frac{280000}{3600} = 78$ kg/cm²,

oder aus der Tafel auf S. 25 ein Rundholz von 34 cm Φ mit $W = 3859$ cm³, so daß $\max \sigma = \frac{280000}{3859} = 73$ kg/cm².

Baustoff: Flußeisen mit $k_b = 1200$ kg/c m² (S. 13) erfordert

$$W = \frac{280000}{1200} = 225 \text{ cm}^3.$$

In Frage kommen für die Ausführung:

1. Rundeisen $d = 135$ mm mit $W = 241,5$ cm³;
2. I-Eisen $NP 21$ mit $W_x = 244$ cm³;

3. Differdinger Nr. 18 B mit $W_x = 390 \text{ cm}^3$;
4. □-Eisen NP 22 mit $W_x = 245 \text{ cm}^3$;
5. III-Eisen NP 16 mit $W_x = 2 \cdot 117 = 234 \text{ cm}^3$;
6. □□-Eisen NP 16 mit $W_x = 2 \cdot 116 = 232 \text{ cm}^3$;
7. H-Eisen NP 47 $\frac{1}{2}$ mit $W_y = 235 \text{ cm}^3$;
8. H-Differdinger Nr. 24 B mit $W_y = 254 \text{ cm}^3$;
9. JL-Eisen 100 × 200 × 14 Nr. 10/20 mit $J_x = 2 \cdot 1653 = 3306 \text{ cm}^4$.

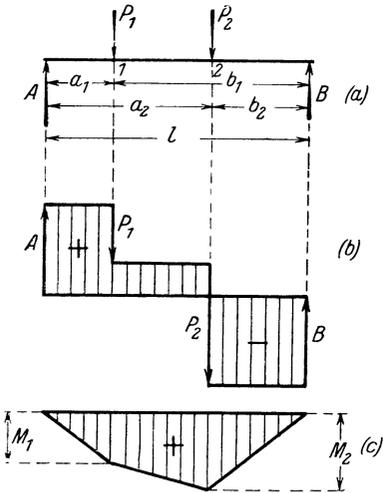


Fig. 23.

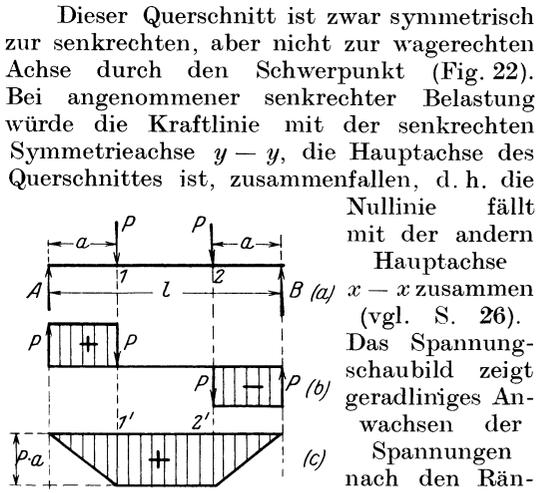


Fig. 24.

Dieser Querschnitt ist zwar symmetrisch zur senkrechten, aber nicht zur wagerechten Achse durch den Schwerpunkt (Fig. 22). Bei angenommener senkrechter Belastung würde die Kraftlinie mit der senkrechten Symmetrieachse $y - y$, die Hauptachse des Querschnittes ist, zusammenfallen, d. h. die Nulllinie fällt mit der andern Hauptachse $x - x$ zusammen (vgl. S. 26). Das Spannungsschaubild zeigt geradliniges Anwachsen der Spannungen nach den Rändern. Es wird

$$\sigma_1 = \frac{\max M}{W_1}, \quad \text{wobei} \quad W_1 = \frac{J_x}{12,88} = \frac{3306}{12,88} = 256 \text{ cm}^3,$$

$$\sigma_2 = \frac{\max M}{W_2}, \quad \text{wobei} \quad W_2 = \frac{J_x}{7,12} = \frac{3306}{7,12} = 464 \text{ cm}^3.$$

so daß

$$\sigma_1 = \max \sigma = \frac{280000}{256} = \sim 1095 \text{ kg/cm}^2$$

wird.

Der Träger sei mit zwei Einzellasten belastet (Fig. 23). Die Querkraftlinie hat eine Treppenform; in den Punkten des Lastangriffs springt sie um den Betrag der angreifenden Kraft. Zweifellos ist es schwer, sich den plötzlichen Übergang von $Q_1 = A$ links von Punkt 1 auf $Q'_1 = A - P_1$ rechts von 1 vorzustellen; doch darf man nicht vergessen, daß Lasten nicht gerade in einem Punkte oder einer Geraden angreifen. Punktübertragung liegt bei einer Kugel, Übertragung in einer Geraden bei einem Rade vor, und auch das nur theoretisch! In Wirklichkeit wird immer eine Berührungsfläche vorhanden sein, so daß der plötzliche Übergang je nach der Ausdehnung der Berührungsfläche gemildert wird.

Die Momentenfläche zeigt nur positive Werte und hat ihre größte Ordinate in 2, weil in diesem Punkte die Querkraftlinie von + auf - wechselt. Den Sonderfall symmetrischer Belastung gibt Fig. 24 wieder. Zwischen 1 und 2 ist die Querkraft stets gleich Null; sämtliche Querschnitte des Trägers zwischen 1 und 2 erfahren reine Biegung (vgl. S. 19) infolge des Momentes $M_1 = M_2 = P \cdot a$, das in allen Punkten zwischen 1 und 2 gleich groß ist.

Der Träger habe gleichförmig verteilte Last (Fig. 25). Wegen der Symmetrie wird $A = B = \frac{p \cdot l}{2} = \frac{P}{2}$. Die Querkraft Q_x in dem beliebigen Punkte x ist $Q_x = A - p \cdot x$, da die Teillast über der Strecke x gleich $p \cdot x$ ist, wenn p in kg/m die Belastung der Längeneinheit bedeutet. In der Gleichung $Q_x = A - p x$ ist x in der 1. Potenz; dieser Form entspricht zeichnerisch eine gerade Linie, die man aufzeichnen kann, wenn zwei Punkte bestimmt sind. Man erhält (und das gilt allgemein bei der zeichnerischen Darstellung von Gleichungen) einen Punkt der Kurve, wenn man in die Gleichung für den beliebigen Wert x einen bestimmten einsetzt. In unserm Falle würden wir sagen

$$\text{für } x = 0 \text{ wird } Q_x = Q_A = 0 - Q_A = \frac{P}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{,, } x = \frac{l}{2} \text{ ,, } Q_x &= Q_m = A - \frac{p \cdot l}{2} \\ &= \frac{P}{2} - \frac{P}{l} \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{,, } x = l \text{ ,, } Q_x &= Q_B = A - p \cdot l \\ &= \frac{P}{2} - \frac{P}{l} \cdot l = -\frac{P}{2}. \end{aligned}$$

Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Größen $Q_A; Q_m; Q_B$, die wir als Strecken mit Hilfe eines Kräftemaßstabes darstellen, gibt die Querkraftlinie als Schräge, die in der Mitte des Trägers die Achse schneidet und dort das Vorzeichen wechselt; d. h. das größte Biegemoment liegt in der Mitte des Trägers. Im allgemeinen genügt es, die Lage des größten Momentes zu bestimmen (der zugehörige Schnitt ist der gefährliche Querschnitt) und für diesen einen Punkt die Größe des Momentes zu berechnen. Es wird

$$\max M = M_m = A \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \cdot l}{8}.$$

Das ist immer zulässig, wenn der Träger gleichbleibenden Querschnitt erhält (Walzeisen). Soll dagegen der Träger mit veränderlichem Querschnitt ausgeführt werden, wie es beispielsweise bei der abgesetzten Welle der Fall ist, dann muß man sämtliche Biegemomente kennen, also über das Anwachsen der Momente unterrichtet sein. Das Moment im Schnitt t in der Entfernung x von A ist

$$M_x = A \cdot x - p x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2,$$

wenn wir uns die auf der Strecke x ruhende Last von $(p x)$ kg im Schwerpunkt des dichter gestrichelten Rechtecks vereinigt denken. In gleicher Weise wie bei der Querkraftlinie errechnet man nunmehr eine Anzahl Momente, indem man für x verschiedene Werte einsetzt, und trägt sie mit Hilfe eines Momentenmaßstabes als Strecken senkrecht zur Stabachse auf. Die stetige Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken ergibt die Momentenlinie,

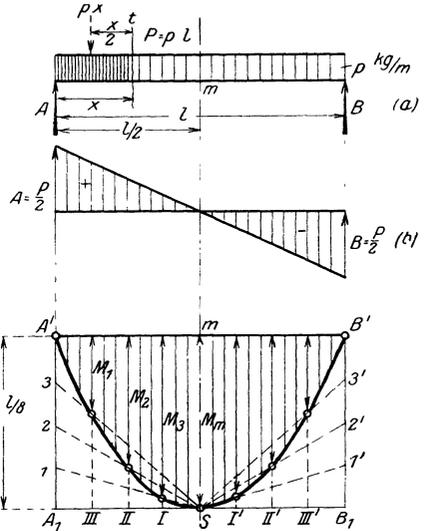


Fig. 25.

die in unserm Falle der gleichförmigen Belastung eine Parabel ist, deren Scheitel S im tiefsten Punkt der Kurve liegt. Ist der Scheitel infolge $M_m = \frac{P \cdot l}{8}$ bekannt, so läßt sich die Parabel auch ohne Berechnung von Zwischenwerten einzeichnen (Fig. 25c).

Fig. 26 zeigt einen Träger auf zwei Stützen, der gleichzeitig durch Einzelkräfte und gleichförmig verteilte Last belastet ist. Wir bringen die Kräfte nacheinander auf den Träger und entwerfen zunächst die Querkraftlinie für die Einzellasten, nachdem die Auflagerdrucke A_p und B_p berechnet sind; dann entwerfen wir die Querkraftlinie für die gleichförmig verteilte Last und zeichnen sie so auf, daß sich ihre Ordinaten mit denen der ersten Linie addieren. Das erreichen wir, wenn wir die positiven Größen nach unten, die negativen nach oben abtragen. Die Summe beider Flächen ergibt die Querkraftfläche infolge der Gesamtbelastung. Ebenso entwirft man zunächst die geradlinig begrenzte Momentenfläche der Einzellasten, trägt die Ordinaten nach unten ab und zeichnet dann die Momentenlinie infolge der gleichförmigen Last nach oben, die durch eine Parabel begrenzt ist. Die Momentenfläche der Gesamtbelastung ist die Summe beider Flächen, aus der Lage und Größe des größten Biegemomentes $max M$ entnommen werden. Es liegt im Abstände x_0 von A , wo die Querkraft das Vorzeichen wechselt, bzw. gleich Null ist.

Reicht eine gleichförmig verteilte Last nicht über den ganzen Träger, so nennt man sie Streckenlast. Fig. 27 gibt einen beiderseits überhängenden Träger wieder, der durch Einzellasten, gleichförmig verteilte Last und Streckenlast belastet ist. Da man in der Praxis meist auf die Entwicklung der Querkraft- und Momentenfläche verzichtet, so sei die Aufgabe rechnerisch durchgeführt unter

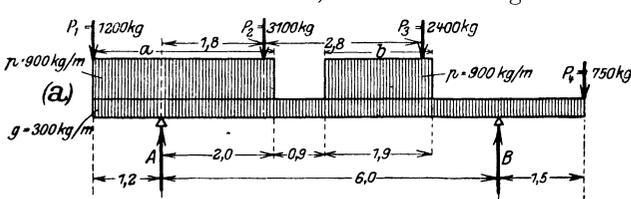


Fig. 27.

der Annahme eines gleichbleibenden Querschnittes; es käme also lediglich auf die Ermittlung des größten Momentes an. Für die Berechnung der Auflagerdrucke denkt man sich die verteilten Lasten

in den Schwerpunkten der Rechtecke angreifend, durch die sie in der Zeichnung dargestellt werden. Danach hat $G = g \cdot L = 300 \cdot 8,7 = 2610$ kg den Abstand $[\frac{1}{2} (1,2 + 6 + 1,5) - 1,5] = 2,85$ m; $P = 900 \cdot (1,2 + 2,0) = 2880$ kg den Abstand $[6 + 1,2 - \frac{1}{2} (1,2 + 2)] = 5,6$ m; $P' = 900 \cdot 1,9 = 1710$ kg den Abstand $[1,2 + \frac{1}{2} \cdot 1,9] = 2,15$ m von B . Somit lautet die Momentengleichung sämtlicher Kräfte für B als Drehpunkt

$$1200 \cdot 7,2 + 2880 \cdot 5,6 + 3100 \cdot 4,2 + 2610 \cdot 2,85 + 1710 \cdot 2,15 + 2400 \cdot 1,4 - 750 \cdot 1,5 - A \cdot 6 = 0,$$

wobei zu beachten ist, daß A und $P_4 = 750$ kg im entgegengesetzten Sinne um B drehen. Man erhält $A = 8523$ kg. Für A als Drehpunkt wird mit den entsprechenden Hebelarmen

$$750 \cdot 7,5 + 2400 \cdot 4,6 + 2880 \cdot 0,4 + 2610 \cdot 3,15 + 3100 \cdot 1,8 + 1710 \cdot 3,85 - 1200 \cdot 1,2 - B \cdot 6 = 0.$$

Daraus $B = 6127$ kg. Jetzt muß der Querkraftnullpunkt ermittelt werden, bzw. der Punkt, wo die Querkraft das Vorzeichen wechselt.

Unmittelbar links von A ist $Q_A = -1200 - (900 + 300) \cdot 1,2 = -2640$ kg;

unmittelbar rechts von A ist $Q'_A = -2640 + 8523 = +5883$ kg;

also ist A ein gefährlicher Querschnitt. Zwischen A und B schätzen wir $Q = 0$ im Abstände $2,9$ m von A und finden $Q = -1200 + 8523 - (900 + 300) \cdot 3,2 - 300 \cdot 0,9 = +113$ kg.

Von da ab vermindert sich Q um $900 + 300 = 1200$ kg/m. Ist x_0 die Strecke, die mit 1200 kg/m belastet ist, so wird

$$Q = +113 - 1200 \cdot x_0 = 0 \quad \text{und} \quad \text{daraus} \quad x_0 = 0,09 \text{ m.}$$

Der zweite gefährliche Querschnitt ist demnach $2,9 + 0,09 = 2,99$ m von A , bzw. $3,01$ m von B entfernt.

Unmittelbar rechts von B ist $Q_B = +750 + 1,5 \cdot 300 = +1200$ kg;
unmittelbar links von B ist $Q'_B = +1200 - 6127 = -4927$ kg;

also liegt in B der dritte gefährliche Querschnitt. Es müssen alle drei Momente berechnet werden.

$$M_A = -1200 \cdot 1,2 - (900 + 300) \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -2304 \text{ mkg.}$$

$$M_0 = 6127 \cdot 3,01 - 750 \cdot 4,51 - 2400 \cdot 1,61 - 900 \cdot 1,81 - 0,905 - 300 \cdot 4,51 \cdot 2,255 = +6670 \text{ mkg}$$

$$M_B = -750 \cdot 1,5 - 300 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1462,5 \text{ mkg.}$$

Da für die Bemessung des Querschnittes das zahlenmäßig größte Moment ohne Rücksicht auf das Vorzeichen maßgebend ist, so schreiben wir $\max M = 6670$ mkg = 667000 cmkg.

Im Maschinenbau ist der Fall nicht selten, daß die Kräfte nicht in einer Ebene wirken, wie Fig. 28 zeigt, in der eine Vorgelegewelle dargestellt ist. Man zerlegt jede Kraft nach senkrechter und wagerechter Richtung und entwirft für jede Lastgruppe getrennt die Momentenfläche. Aus den Umfangskräften S , die beispielsweise als Riemenzüge gedacht werden können, bestimmt man die Kräfte P , die auf die Welle kommen (meist $P = 1,5 \div 3 S$). Die Zerlegung nach der senkrechten und wagerechten Richtung liefert

$$\begin{aligned} V_1 &= P_1 \cdot \sin \alpha_1 & V_3 &= P_3 \cdot \sin \alpha_3 & H_2 &= P_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ V_2 &= P_2 \cdot \sin \alpha_2 & H_1 &= P_1 \cdot \cos \alpha_1 & H_3 &= P_3 \cdot \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

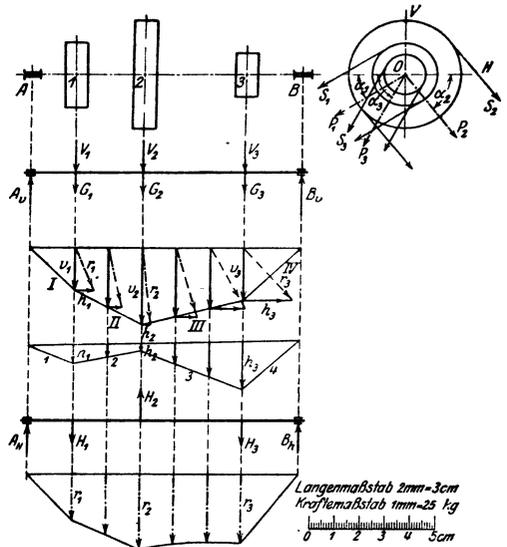


Fig. 28.

Zu den senkrechten Kräften V tritt noch das Eigengewicht der Scheiben. Sind $l_1; l_2; l_3$ die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte P von A ; l die Stützweite AB , so wird für A als Drehpunkt

$$B_v \cdot l - (V_3 + G_3) \cdot l_3 - (V_2 + G_2) \cdot l_2 - (V_1 + G_1) \cdot l_1 = 0; \text{ daraus } B_v.$$

Aus $(V_1 + G_1) + (V_2 + G_2) + (V_3 + G_3) - B_v - A_v = 0$ erhält man A_v .

Als Momente in den Angriffspunkten der Kräfte ergeben sich

$$M_A = 0; \quad v_1 = A_v \cdot l_1; \quad v_2 = A_v \cdot l_2 - (V_1 + G_1) \cdot (l_2 - l_1); \quad v_3 = B_v \cdot (l - l_3).$$

Die Momentenlinie ist der Linienzug I- II - III - IV. Die Belastung durch die wagerechten Kräfte zeigt Bild 5 in Fig. 28. Für A als Drehpunkt wird

$$B_h \cdot l - H_3 \cdot l_3 + H_2 \cdot l_2 - H_1 \cdot l_1 = 0; \text{ daraus } B_h.$$

Aus $H_1 - H_2 + H_3 - B_h - A_h = 0$ erhält man B_h .

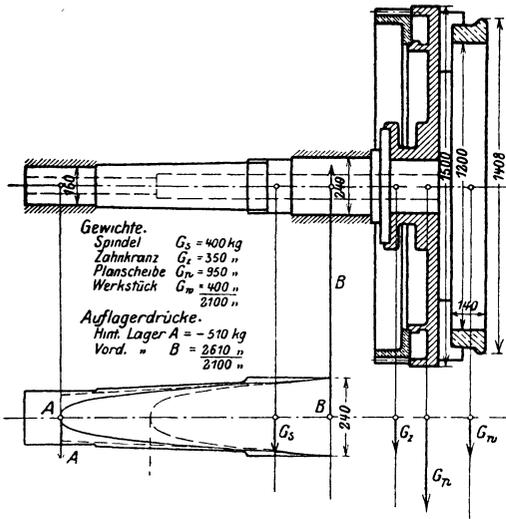


Fig. 29 a.

Die Momente in den Angriffspunkten der Kräfte ergeben sich zu

$$M_A = 0; \quad h_1 = A_h \cdot l_1; \\ h_2 = A_h \cdot l_2 - H_1 \cdot (l_2 - l_1); \\ h_3 = B_h \cdot (l - l_3).$$

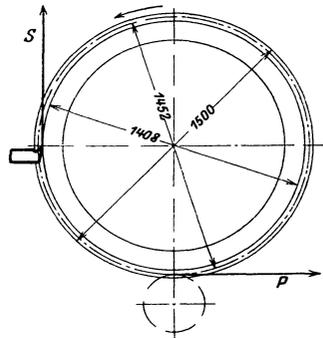


Fig. 29 b.

Die Momentenlinie ist der Linienzug 1 - 2 - 3 - 4 in Bild 4 (Fig. 28). Aus den Ordinaten v und h bestimmt sich das resultierende Moment r als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit v und h als Katheten (Bild 3 der Fig. 28). Da die Momente r durchaus nicht in der Zeichenebene liegen, klappt man sie der übersichtlicheren Darstellung wegen in diese zurück und erhält so das Bild 6 in Fig. 28. Die Kurve der zurückgeklappten resultierenden Momente ist nur zwischen A und 1 und B und 3 geradlinig, zwischen 1 und 2, bzw. 2 und 3 dagegen schwach hyperbolisch gekrümmt. Mit dem Maßstab $8 \text{ mm} = 9000 \text{ cmkg}$ der M -Flächen erhält man als größtes resultierendes Moment

$$\max M = r_2 = 32 \text{ mm} \cdot \frac{9000 \text{ cmkg}}{8 \text{ mm}} = 36000 \text{ cmkg}.$$

Längen- und Kräftemaßstab sind in der Fig. 28 angegeben, die Auflagerdrücke zeichnerisch ermittelt.

Festigkeitsnachweis einer Drehbankspindel. (Vgl. Nickel: Theoretische Fragen im Werkzeugmaschinenbau; Werkstatt-Technik, S. 21. Januar 1911). Untersucht wird die Spindel einer schweren Bandagen- und Räderdreh-

bank mit 700 mm Spitzenhöhe der Sächsischen Maschinenfabrik vorm. Rich. Hartmann, Chemnitz. Die Abmessungen sind der Fig. 29 zu entnehmen; die Gewichte sind

der Spindel	$G_s = 400$ kg
des Zahnkranzes	$G_z = 350$ „
der Planscheibe	$G_p = 950$ „
des Werkstückes	$G_w = 400$ „
	$\Sigma G = 2100$ kg.

Für den senkrecht nach unten gerichteten Auflagerdruck A infolge der ständigen Belastung durch die Gewichte G erhält man mit B als Momentendrehpunkt

$$A \cdot 108 + 400 \cdot 23 - 350 \cdot 25,5 - 950 \cdot 37,5 - 400 \cdot 54 = 0; \text{ daraus } A = 530 \text{ kg};$$

für den senkrecht nach oben gerichteten Auflagerdruck B

$$B \cdot 108 - 400 \cdot 85 - 350 \cdot 133,5 - 950 \cdot 145,5 - 400 \cdot 162 = 0; \text{ daraus } B = 2630 \text{ kg}.$$

Das größte Moment liegt über der Stütze B und ist

$$\max M = M_B = -A \cdot 108 - 400 \cdot 23 = -530 \cdot 108 - 400 \cdot 23 = -66440 \text{ cmkg};$$

das Vorzeichen ist negativ, weil die angreifenden Kräfte den Träger nach oben wölben (vgl. Fig. 18, S. 19).

Der Querschnitt im Punkte B ist kreisringförmig mit 240 mm Außen- und 90 mm Innendurchmesser; sein Trägheitsmoment ist

$$J_{24} = 16286 \text{ cm}^4 \quad J_9 = 322 \text{ cm}^4 \quad J = 16286 - 322 = 15964 \text{ cm}^4,$$

sein Widerstandsmoment $W = \frac{J}{r_a} = \frac{15964}{12} = 1330 \text{ cm}^3$. Die größte Biegebeanspruchung wird

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W} = \frac{66440}{1330} = 50 \text{ kg/cm}^2.$$

Der schwächste Querschnitt liegt im kegligen Teile der Spindel, wo die Bohrung von 70 auf 90 mm wechselt; dieser Punkt ist vom Auflager A 380 mm entfernt und hat infolgedessen ein Biegemoment

$$M' = A \cdot 38 = -530 \cdot 38 = -20140 \text{ cmkg}.$$

Der Außendurchmesser des Kegels ist $d' = 175 + 25 \cdot \frac{240}{680} = 183,8 \text{ mm}$.

Das Trägheitsmoment eines Kreises mit 18,38 cm wird durch geradliniges Einschalten der Zahlentafel auf S. 25 entnommen, es ist

$$J_{18,38} = 5153 + 244 \cdot \frac{38}{100} = 5245 \text{ cm}^4; \quad J_9 = 322 \text{ cm}^4; \quad J = 4923 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{4923 \cdot 2}{18,38} = 536 \text{ cm}^3 \quad \sigma' = \frac{20140}{536} = 38 \text{ kg/cm}^2.$$

Arbeitet die Maschine, so treten zu den ständigen Belastungen der Zahndruck am Zahnkranz und der Stahldruck am Werkzeug, von denen der Stahldruck senkrecht nach oben wirkend angenommen werden darf. Die Richtung des Zahndruckes hängt davon ab, wo der Zahnkranz angetrieben wird. Liegen Zahnkranz-achse und Triebachse in einer wagerechten Ebene durch die Spindelachse, so ändern die beiden nahezu gleich großen, aber entgegengesetzten Kräfte wenig an

dem Spannungszustande der Spindel. Ungünstiger wird die Belastung, wenn die Triebachse in einer senkrechten Ebene durch die Spindelachse liegt (Fig. 29), dann greift der Zahndruck P am Teilkreisdurchmesser an und ist wagerecht gerichtet. Die Spindel ist also auf senkrechte und wagerechte Kräfte zu untersuchen.

Senkrechte Belastung. Zu der ständigen Last tritt der Stahldruck S , dessen Größe zu 2000 kg angenommen werden soll (Fig. 29). Der senkrecht nach oben wirkende Auflagerdruck A_v wird mit B als Momentendrehpunkt

$$A_v = \frac{1}{108} (400 \cdot 23 - 350 \cdot 25,5 - 950 \cdot 37,5 - 400 \cdot 54 + 2000 \cdot 60) = 590 \text{ kg}.$$

Der senkrecht nach unten wirkende Auflagerdruck B_v wird mit A als Momentendrehpunkt

$$B_v = \frac{1}{108} (-400 \cdot 85 - 350 \cdot 133,5 - 950 \cdot 145,5 - 400 \cdot 162 + 2000 \cdot 168) = 480 \text{ kg}.$$

Das größte Moment tritt in B auf und wird

$$M_{Bv} = 590 \cdot 108 - 400 \cdot 23 = + 54500 \text{ cmkg},$$

es ist positiv, weil die Wölbung der Stabachse nach unten geht (vgl. Fig. 18, S. 19).

Wagerechte Belastung. Der Zahndruck $P = S \cdot \frac{1408}{1452} = 1950 \text{ kg}$ liefert eine Einzelkraft P in der wagerechten Ebene durch die Spindelachse und ein Kräftepaar mit dem Moment $M_d = 1950 \cdot \frac{145,2}{2} = \sim 142000 \text{ cmkg}$, das die Drehung hervorruft. Die wagerechte Einzelkraft P liefert (Fig. 29) die Auflagerdrücke

$$A_h = 1950 \cdot \frac{245}{1080} = 440 \text{ kg} \text{ und } B_h = 1950 \cdot \frac{1325}{1080} = 2390 \text{ kg}.$$

Das größte Biegemoment tritt in B auf und ist

$$M_{Bh} = 440 \cdot 108 = 47600 \text{ cmkg}.$$

Das resultierende Biegemoment ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Katheten M_{Bv} und M_{Bh} und wird demnach

$$M_B = \sqrt{M_{Bv}^2 + M_{Bh}^2} = \sqrt{54500^2 + 47600^2} = 72400 \text{ cmkg}.$$

Die größte Biegespannung ist $\max \sigma = \frac{M_B}{W} = \frac{72400}{1330} = 55 \text{ kg/cm}^2$.

Alle Spannungen bleiben weit unter den zulässigen. Die Abmessungen sind mit Rücksicht auf die auftretenden Formänderungen so groß gehalten, damit die Senkung des freien Trägers praktisch gleich Null ist.

Die Nachprüfung auf Biegung und Drehung siehe S. 65.

Durchbiegungen. Die Verlängerung, die eine Faser von der Länge dz (Fig. 19) im Abstände y von der Nulllinie erfährt, ist nach S. 16 gleich $\varepsilon \cdot dz$. Das Zeichen d vor dem z bedeutet, daß z verschwindend klein angenommen wird; wir betrachten also zwei Querschnitte I und II, die unendlich nahe nebeneinander liegen. Bezeichnet man den Winkel, den beide Querschnitte nach eingetretener Formänderung bilden, mit $d\varphi$, so ist andererseits

$$\varepsilon \cdot dz = y \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad d\varphi = \frac{\varepsilon \cdot dz}{y}.$$

Aus $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma = \frac{1}{E} \cdot \sigma$ und $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ folgt

$$d\varphi = \frac{1}{E} \cdot \frac{M}{J} dz \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{1}{E} \cdot \int_0^z \frac{M}{J} \cdot dz.$$

Dabei ist φ der Winkel, um den sich ein Querschnitt I im Abstände z von A gegen den Querschnitt A dreht. Um denselben Winkel drehen sich auch die Tangenten in den Punkten A und C (Fig. 19) gegeneinander. Demnach ist δ die Strecke senkrecht unter A , die von der Tangente im Punkte C an die Biegelinie abgeschnitten wird. Wir können sie als Summe der Teilstrecken $d\delta$ auffassen, die von je zwei unendlich benachbarten Tangenten in C und C' abgeschnitten werden. Von den verschwindend kleinen Größen $d\varphi$ und $d\delta$ sagen wir aus

$$d\delta = z \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad \delta = \int_0^z z \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad d\varphi \text{ eingesetzt} \quad \delta = \frac{1}{E} \cdot \int_0^z \frac{M}{J} \cdot z \cdot dz.$$

Das Zeichen \int_0^z (gelesen: Integral von Null bis z) bedeutet, daß sich die Summenbildung von A bis C , entsprechend den Größen $z = 0$ und $z = z$, erstrecken soll. Auf der rechten Trägerhälfte ist die Entwicklung in stark vergrößerter Weise dargestellt, sie zeigt

$$\begin{aligned} \delta' &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots \\ &= z_1 \cdot \varphi_1 + z_2 \cdot \varphi_2 + z_2 \cdot \varphi_3 + \dots \end{aligned}$$

als Abschnitt, den die Tangenten in C und B an die Biegelinie senkrecht unter B abschneiden. Diese Darstellung ist jedoch nur dann erlaubt, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ verschwindend kleine Winkel sind, die wir uns zwar vorstellen, aber nicht mit hinreichender Kleinheit zeichnen können, und dann auch nur, wenn die Biegelinie eine schwach gekrümmte Linie ist. Alle diese Voraussetzungen werden durch das d vor z und φ , bzw. durch das Integralzeichen \int für die Summenbildung zum Ausdruck gebracht. dz heißt das Differential von z und bedeutet einen verschwindend oder unendlich kleinen Zuwachs von z . Da Kenntnisse in der Rechnung mit unendlich kleinen Größen nicht vorausgesetzt werden, soll eine Deutung der Gleichungen versucht werden. Dabei wollen wir zunächst die vereinfachende Annahme eines unveränderlichen Querschnittes machen und schreiben

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \int_0^z M \cdot dz \quad \text{und} \quad \delta = \frac{1}{EJ} \int_0^z M \cdot z \cdot dz.$$

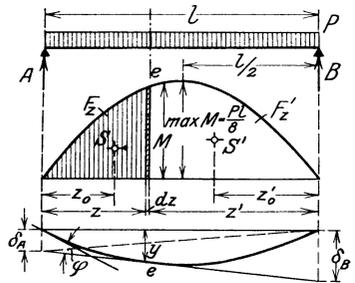


Fig. 30.

Es sei ein gleichförmig belasteter Träger AB (Fig. 30) zu untersuchen, für den die Momentenfläche nach S. 29 entworfen ist. Sie ist von einer Parabel begrenzt, deren Scheitelhöhe $\max M = \frac{P \cdot l}{8}$ ist. Die Ordinate im Abstände z von A ist M .

Dann ist $M \cdot dz$ der Flächeninhalt eines Streifens der Momentenfläche von der Breite dz und der Höhe M , den wir wegen der verschwindend kleinen Größe von

dz als Rechteck auffassen dürfen. Das $\int_0^z M \cdot dz$ bilden heißt, die Summe aller solcher Flächenstreifen bilden, die über z , also von A bis C , möglich sind. Das ergibt aber den Inhalt des Teiles der M -Fläche, der über z liegt. Nennen wir ihn F_z , so erhalten wir für den Winkel φ , den die Tangente in C mit der in A bildet,

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \cdot F_z.$$

$M \cdot dz \cdot z$ ist das Produkt aus dem Inhalt des Flächenstreifens $M \cdot dz$ und dem Abstände z seines Schwerpunktes von A . Denn wenn dz als verschwindend klein angenommen wird, hat es keinen Sinn, als Schwerpunktsabstand $z + \frac{1}{2} dz$ zu schreiben. Dieses Produkt $M \cdot dz \cdot z$ bezeichnet man als das statische Moment des Flächenstreifens, bezogen auf A . Dann ist das Integral aus $M \cdot dz \cdot z$ von 0 bis z nichts anderes als das statische Moment des Teiles F_z der M -Fläche, der über z liegt, ebenfalls bezogen auf A . Da das statische Moment der Fläche F_z gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F_z und dem Schwerpunktsabstände z_0 von A ist, erhält man

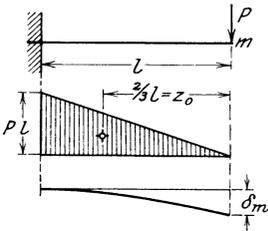


Fig. 31.

$$\delta_A = \frac{1}{EJ} \cdot F_z \cdot z_0 \text{ und in gleicher Weise } \delta_B = \frac{1}{EJ} \cdot F'_z \cdot z'_0,$$

wenn man den nicht gestrichelten Teil der M -Fläche mit F'_z , den zugehörigen Schwerpunktsabstand von B mit z'_0 bezeichnet. Zu beachten ist, daß δ stets von Tangenten an die Biegelinie abgeschnitten wird. Die senkrechte Verschiebung y des Punktes C erhält man zu

$$y = \delta_A \cdot \frac{z'}{l} + \delta_B \cdot \frac{z}{l} = \frac{1}{EJ} \left(F_z \cdot z_0 \cdot \frac{z'}{l} + F'_z \cdot z'_0 \cdot \frac{z}{l} \right).$$

Damit ist die Berechnung der Durchbiegung eines Trägers zurückgeführt auf die Berechnung der statischen Momente von Flächen.

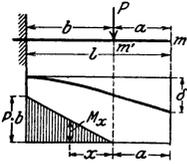


Fig. 32.

Beispiele. 1. Der Freitragler (Fig. 31). Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $\max M = P \cdot l$, dessen Moment in Beziehung auf den Punkt m gleich $F \cdot z_0$ ist. Man erhält

$$\delta_m = \frac{1}{EJ} \cdot F \cdot z_0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot P \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

2. Der Freitragler (Fig. 32). Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $P \cdot b$, der Schwerpunktsabstand von m ist $a + \frac{2}{3} b$, damit

$$\delta_m = \delta = \frac{1}{EJ} \cdot F \cdot z_0 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} b \cdot P \cdot b \cdot \left(a + \frac{2}{3} b \right) = \frac{P \cdot b^2 \cdot \left(a + \frac{2}{3} b \right)}{2 \cdot EJ}.$$

Die Biegelinie für den unbelasteten Teil a des Trägers ist gerade, da über dem Teil a die Momentenfläche Null ist.

3. Der Träger auf zwei Stützen (Fig. 33). Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit der Höhe $\max M = P \cdot \frac{ab}{l}$. Es wird

$$f = \frac{1}{EJ} \left(F_z \cdot z_0 \cdot \frac{b}{l} + F'_z \cdot z'_0 \cdot \frac{a}{l} \right) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} a \cdot P \frac{ab}{l} \cdot \frac{2}{3} a \frac{b}{l} + \frac{1}{2} b \cdot P \frac{ab}{l} \cdot \frac{2}{3} b \frac{a}{l} \right),$$

$$f = \frac{1}{EJ} \cdot \left(P \cdot \frac{a^3 b^2}{3l^2} + P \cdot \frac{a^2 b^3}{3l^2} \right) = \frac{P a^2 b^2}{3 EJ \cdot l}.$$

Sonderfall: Last in der Mitte ergibt $f = \frac{Pl^3}{48 EJ}$.

4. Der Freitrag mit gleichförmig verteilter Last (Fig. 34). Die Momentenfläche ist

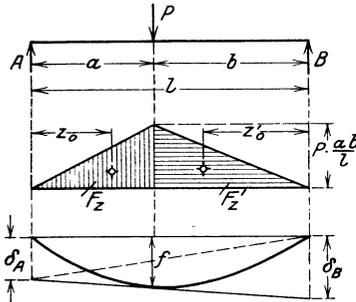


Fig. 33.

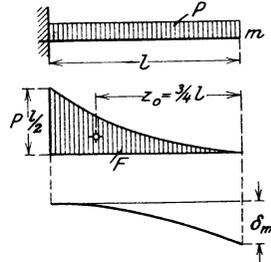


Fig. 34.

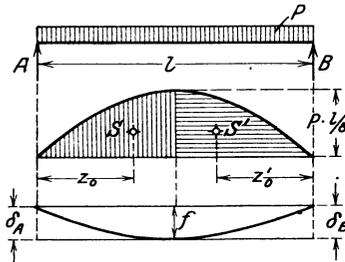


Fig. 35.

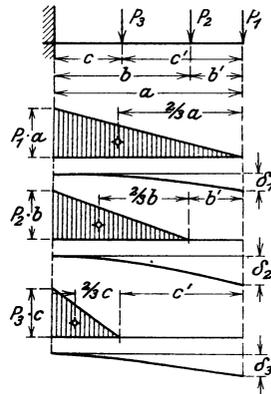


Fig. 36.

von einer Parabel begrenzt, deren Ordinate in der Einspannstelle $\max M = P \cdot \frac{l}{2}$ ist.

$$\delta_m = \frac{1}{EJ} \cdot F \cdot z_0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot P \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} l \right) = \frac{Pl^3}{8 EJ}.$$

5. Der Träger auf zwei Stützen mit gleichförmig verteilter Last (Fig. 35). Die Momentenfläche ist von einer Parabel mit der Pfeilhöhe $\max M = \frac{1}{8} Pl$ begrenzt, die symmetrisch zur Mittellinie liegt. Die allgemeine Gleichung für y auf S. 36 vereinfacht sich insofern, als $F'_z \cdot z'_0 = F_z \cdot z_0$ und $z' = z = \frac{1}{2} l$ ist, so daß

$$f = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot F_z \cdot z_0 \cdot \frac{\frac{1}{2} l}{l} = \frac{1}{EJ} \cdot F \cdot z_0 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{8} \right) \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} \right),$$

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

6. Der Freitragger mit mehreren Einzellasten (Fig. 36). Wir bringen die Lasten nacheinander auf den Träger und addieren die Einzelwirkungen. Es ist

$$\delta_m = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

wobei

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot P_1 \cdot a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{P_1 a^3}{3EJ},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot P_2 \cdot b \cdot \left(b' + \frac{2}{3} b \right) = \frac{P_2 b^2 \cdot (b' + \frac{2}{3} b)}{2EJ},$$

$$\delta_3 = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot P_3 \cdot c \left(c' + \frac{2}{3} c \right) = \frac{P_3 c^2 (c' + \frac{2}{3} c)}{2EJ}.$$

7. Der Freitragger mit veränderlichem Querschnitt (Fig. 37). Auf S. 35 war das von der Tangente abgeschnittene Stück

$$\delta_z = \frac{1}{E} \int_0^z \frac{M}{J} \cdot z \cdot dz.$$

Man erhält $M : J$, wenn man die Ordinate M der Momentenlinie durch das Trägheitsmoment des zugehörigen Querschnittes dividiert. Die so erhaltene Fläche heißt $(M : J)$ -Fläche. Fig. 37 zeigt einen Freitragger, der am Ende eine nach oben gerichtete Einzellast P trägt. Die Momentenfläche ist ein Dreieck mit $\max M = P \cdot l_4$ an der Einspannstelle B . Dividiert man $P \cdot l_4$ der Reihe nach durch $J_1; J_2; J_3$ und J_4 und trägt diese errechneten Werte ebenfalls unter der Einspannstelle auf, so begrenzen die Verbindungsgeraden mit dem Punkte P vier $(M : J)$ -Flächen, von denen jede so weit zu benutzen ist, wie der Querschnitt mit dem zugehörigen J reicht. Das ergibt die sagenformige $(M : J)$ -Fläche der Figur.

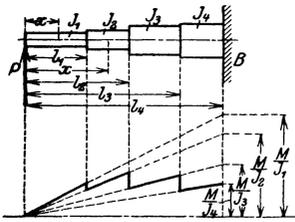


Fig. 37.

Unter dem Einfluß der Kraft P weicht das freie Ende des Trägers um einen Betrag δ_P nach oben aus, der jetzt gleich dem $\frac{1}{E}$ fachen statischen Moment der $(M : J)$ -

Fläche ist. Beim glatten Träger war δ_P gleich dem $\frac{1}{EJ}$ fachen statischen Moment der M -Fläche. Die $(M : J)$ -Fläche besteht aus vier Dreiecken mit den Spitzen in P ; ihre Höhen sind $\left(\frac{M}{J_1} - \frac{M}{J_2} \right) \cdot \frac{l_1}{l_4}$; $\left(\frac{M}{J_2} - \frac{M}{J_3} \right) \cdot \frac{l_2}{l_4}$; $\left(\frac{M}{J_3} - \frac{M}{J_4} \right) \cdot \frac{l_3}{l_4}$ und $\frac{M}{J_4}$; damit erhält man als Summe der statischen Momente, bezogen auf die Spitze P :

$$\begin{aligned} E \cdot \delta_P &= \frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \left(\frac{M}{J_1} - \frac{M}{J_2} \right) \cdot \frac{l_1}{l_4} \cdot \frac{2}{3} l_1 + \frac{1}{2} \cdot l_2 \cdot \left(\frac{M}{J_2} - \frac{M}{J_3} \right) \cdot \frac{l_2}{l_4} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot \left(\frac{M}{J_3} - \frac{M}{J_4} \right) \cdot \frac{l_3}{l_4} \cdot \frac{2}{3} \cdot l_3 + \frac{1}{2} \cdot l_4 \cdot \frac{M}{J_4} \cdot \frac{2}{3} l_4. \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich vereinfachen, und man erhält mit $M = P \cdot l_4$

$$\delta_P = \frac{P}{3E} \left(\frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{J_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{J_3} + \frac{l_4^3 - l_3^3}{J_4} \right)$$

oder, wenn man das größte Trägheitsmoment J_4 und die Gesamtlänge $l_4 = l$ vor die Klammer bringt,

$$\delta_P = \frac{Pl^3}{3EJ_4} \left(\frac{J_4}{J_1} \cdot \frac{l_1^3}{l^3} + \frac{J_4}{J_2} \cdot \frac{l_2^3 - l_1^3}{l^3} + \frac{J_4}{J_3} \cdot \frac{l_3^3 - l_2^3}{l^3} + \frac{l^3 - l_3^3}{l^3} \right).$$

Die Ausdrücke in der Klammer sind lediglich Verhältniszahlen, die mit Hilfe von Zahlentafeln schnell berechnet werden können.

Zahlenbeispiele. 1. An einem Freitragler von $l = 2,4$ m Länge nach Fig. 31 hänge ein Flaschenzug für 1500 kg Tragkraft. Baustoff: Flußeisen mit $k_b = 1200$ kg/cm² und $E = 2150000$ kg/cm².

$$\max M = P \cdot l = 1500 \cdot 240 = 360000 \text{ cmkg}; \quad W = \frac{360000}{1200} = 300 \text{ cm}^3.$$

Gewählt: a) I -Eisen NP 23 mit $W = 314$ cm³ und $J = 3607$ cm⁴.

$$\sigma = \frac{360000}{314} = 1150 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_m = \frac{P \cdot l^3}{3EJ} = \frac{1500 \cdot 240^3}{3 \cdot 2150000 \cdot 3607} = 0,9 \text{ cm}.$$

b) II -Eisen NP 18 mit $W = 2 \cdot 150$ cm³ und $J = 2 \cdot 1354$ cm⁴

$$\sigma = \frac{360000}{2 \cdot 150} = 1200 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_m = \frac{P \cdot l^3}{3EJ} = \frac{1500 \cdot 240^3}{3 \cdot 2150000 \cdot 2 \cdot 1354} = \sim 1,2 \text{ cm}.$$

Baustoff: Holz mit $k_b = 100$ kg/cm² und $E = \sim 100000$ kg/cm²

$$W = \frac{360000}{100} = 3600 \text{ cm}^3;$$

Querschnitt: c) 24 · 30 cm mit

$$W = 3600 \text{ cm}^3 \text{ (S. 24) und } J = W \cdot 0,5 \text{ h} = 3600 \cdot 15 = 54000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{360000}{3600} = 100 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_m = \frac{P \cdot l^3}{3EJ} = \frac{1500 \cdot 240^3}{3 \cdot 100000 \cdot 54000} = \sim 1,3 \text{ cm}.$$

Querschnitt: d) 2 · 20 · 24 mit $W = 2 \cdot 1920$ cm³ und $J = 2 \cdot 1920 \cdot 12$ cm⁴

$$\sigma = \frac{360000}{2 \cdot 1920} = \sim 95 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_m = \frac{P \cdot l^3}{3EJ} = \frac{1500 \cdot 240^3}{3 \cdot 100000 \cdot 2 \cdot 1920 \cdot 12} = 1,5 \text{ cm}.$$

Berücksichtigt man das Eigengewicht der Träger, wie es eigentlich stets geschehen sollte, so kämen hinzu im Falle

$$\text{a) } \text{I} \text{ NP 23 mit } g = 33,52 \text{ kg/m}; \quad M_g = \frac{33,52 \cdot 2,4 \cdot 240}{2} = 9655 \text{ cmkg}$$

$$\sigma_g = \frac{9655}{314} = 31 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_g = \frac{P \cdot l^3}{8 \cdot EJ} = \frac{33,52 \cdot 2,4 \cdot 240^3}{8 \cdot 2150000 \cdot 3607} = 0,018 \text{ cm}.$$

$$\text{b) } \text{II} \text{ NP 18 mit } g = 2 \cdot 22 = 44 \text{ kg/m}; \quad M_g = \frac{44 \cdot 2,4 \cdot 240}{2} = 12700 \text{ cmkg}$$

$$\sigma_g = \frac{12700}{300} = 42,5 \text{ kg/cm}^2; \quad \delta_g = \frac{P \cdot l^3}{8 \cdot EJ} = \frac{44 \cdot 2,4 \cdot 240^3}{8 \cdot 2150000 \cdot 2 \cdot 1354} = 0,031 \text{ cm}.$$

Die Gesamtspannung wird $\sigma + \sigma_g = 1200 + 42,5 = 1243$ kg/cm²; da dieser Wert die zulässige Grenze überschreitet, müßte das nächst höhere Profil gewählt werden.

c) Ebenso reicht der Balken 24 · 30 cm nicht aus, denn der Spannungszuwachs infolge des Eigengewichtes läßt die Gesamtspannung den zulässigen Wert übersteigen.

d) Das Eigengewicht der Balken ist $G = 2 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 2,4 \cdot 0,5 = 115$ kg; rechnet man für feuchtes Kiefernholz das spez. Gewicht mit $0,5 \cdot 1,8 = 0,9$, so wird das Eigengewicht $G = 2 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 2,4 \cdot 0,9 = 207$ kg; damit

$$M_g = 207 \cdot 120 = 24840 \text{ cmkg}; \quad \sigma_g = \frac{24840}{2 \cdot 1920} = 6,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Da auch in diesem Falle die Gesamtspannung $95 + 6,5 = 101,5$ kg/cm² die zulässige überschreitet, darf der Doppelbalken nicht ausgeführt werden.

2. Der Flaschenzug für $P = 1500 \text{ kg}$ Tragkraft hänge nach Fig. 33 an einem zweifach gestützten Balken von 2,4 m Länge. Die ungünstigste Laststellung ist die Last in der Mitte; dann wird $\max M = P \cdot \frac{l}{4} = 1500 \cdot \frac{240}{4} = 90\,000 \text{ cmkg}$.

Baustoff: Flußeisen mit $k_b = 1200 \text{ kg/cm}^2$ und $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$ erfordert $W = 90\,000 : 1200 = 75 \text{ cm}^3$.

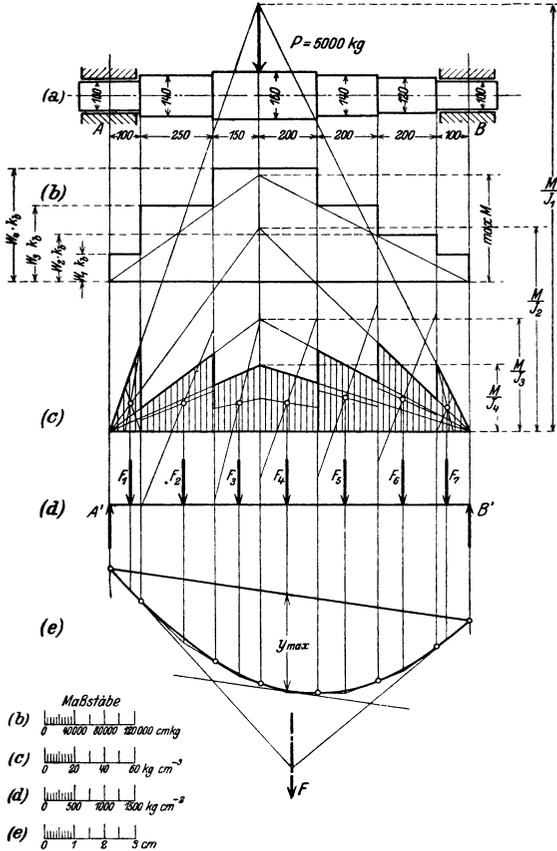


Fig. 33.

a) I -Eisen NP14 mit $W = 81,9 \text{ cm}^3$; $J = 573 \text{ cm}^4$; $g = 14,37 \text{ kg/m}$. Das Gesamtmoment mit Berücksichtigung des Eigengewichtes wird

$$M = P \cdot \frac{l}{4} + G \cdot \frac{l}{8} = 90\,000 + 14,37 \cdot 2,4 \cdot \frac{240}{8} = 91\,035 \text{ cmkg}.$$

$$\sigma = \frac{91\,035}{81,9} = 1110 \text{ kg/cm}^2; \quad f = \frac{P \cdot l^3}{48 EJ} + \frac{5}{384} \cdot \frac{G \cdot l^3}{EJ}$$

$$f = \frac{1500 \cdot 240^3}{48 \cdot 2\,150\,000 \cdot 573} + \frac{5 \cdot 14,37 \cdot 2,4 \cdot 240^3}{384 \cdot 2\,150\,000 \cdot 573} = 0,35 + 0,05 = \sim 0,4 \text{ cm}.$$

b) JL NP 6½: 13 mit $J_\xi = 2 \cdot 320 \text{ cm}^4$; $g = 2 \cdot 14,6 \text{ kg/m}$.

Das Gesamtmoment wird

$$M = 90000 + \frac{2 \cdot 14,6 \cdot 2,4 \cdot 240}{8} = 92140 \text{ cmkg}.$$

Das kleinste Widerstandsmoment wird $W = \frac{2 \cdot 320}{13 - 4,65} = 76,6 \text{ cm}^3$;

$$\sigma = \frac{92140}{76,6} = 1200 \text{ kg/cm}^2; \quad f = \frac{P \cdot l^3}{48 EJ} + \frac{5}{384} \cdot \frac{Gl^3}{EJ}$$

$$f = \frac{1500 \cdot 240^3}{48 \cdot 2150000 \cdot 2 \cdot 320} + \frac{5 \cdot 2 \cdot 14,6 \cdot 2,4 \cdot 240^3}{384 \cdot 2150000 \cdot 2 \cdot 320} = 0,31 + 0,09 = 0,4 \text{ cm}.$$

c) Baustoff: Holz mit $k_b = 100 \text{ kg/cm}^2$; $E = 100000 \text{ kg/cm}^2$ erfordert bei $W = \frac{90000}{100} = 900 \text{ cm}^3$ einen Balken $14 \times 20 \text{ cm}$ mit

$$W = 933,3 \text{ cm}^3 \text{ und } J = W \cdot 0,5 h = 933,3 \cdot 10 = 9333 \text{ cm}^4$$

und $G = 1,4 \cdot 2,0 \cdot 24 \cdot (0,5 \cdot 1,8) = 60,5 \text{ kg}$. Damit wird

$$\sigma = \frac{90000 + 60,5 \cdot 30}{933,3} = 98,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$f = \frac{1500 \cdot 240^3}{48 \cdot 100000 \cdot 9333} + \frac{5 \cdot 60,5 \cdot 240^3}{384 \cdot 100000 \cdot 9333} = 0,464 + 0,012 = 0,48 \text{ cm}.$$

d) Rundholz von 22 cm Durchmesser mit $W = 1045 \text{ cm}^3$; $J = 11499 \text{ cm}^4$ und $G = \frac{2,2^2 \cdot \pi}{4} \cdot 24 \cdot (0,5 \cdot 1,8) = 82 \text{ kg}$. Damit wird

$$\sigma = \frac{90000 + 82 \cdot 30}{1045} = 88,5 \text{ kg/cm}^2$$

$$f = \frac{1500 \cdot 240^3}{48 \cdot 100000 \cdot 11499} + \frac{5 \cdot 82 \cdot 240^3}{384 \cdot 100000 \cdot 11499} = 0,395 + 0,013 = 0,41 \text{ cm}.$$

3. Für die abgesetzte Welle der Fig. 38 ist die Senkung des Lastangriffspunktes zu berechnen. Das größte Biegemoment wird

$$\max M = \frac{5000 \cdot 70 \cdot 50}{120} = \sim 145000 \text{ cmkg}$$

Die Auflagerdrucke sind $A = 5000 \cdot \frac{70}{120} = 2900 \text{ kg}$; $B = 5000 \cdot \frac{50}{120} = 2100 \text{ kg}$.

Mit $k_b = 400 \text{ kg/cm}^2$ als zulässiger Biegungsspannung wird die Tragfähigkeit der einzelnen Querschnitte

$$M_{100} = W \cdot k_b = 98,17 \cdot 400 = 39200 \text{ cmkg} > 2900 \cdot 10 = 29000 \text{ cmkg}.$$

$$M_{120} = W \cdot k_b = 169,6 \cdot 400 = 67800 \text{ cmkg} > 2100 \cdot 30 = 63000 \text{ cmkg}.$$

$$M_{140} = W \cdot k_b = 269,4 \cdot 400 = 107600 \text{ cmkg} > 2900 \cdot 35 = 101500 \text{ cmkg}.$$

$$M_{160} = W \cdot k_b = 402,1 \cdot 400 = 160000 \text{ cmkg} > 2900 \cdot 50 = 145000 \text{ cmkg}.$$

An allen Stellen, wo der Querschnitt wechselt, ist das Biegemoment kleiner als die Tragfähigkeit. Zeichnet man um die Momentenfläche, die ein Dreieck mit der Höhe 145000 cmkg ist, die Linie der Tragfähigkeit ein, so bleibt die M -Linie stets innerhalb der Tragfähigkeitslinie. In Fig. 38c ist die $(M:J)$ -Fläche gezeichnet, die in Einzelflächen zerlegt ist, deren Schwerpunktlagen bekannt sind (Dreiecke und Trapeze). Wird sehr sauber gezeichnet, so dürfen zur Bestimmung der statischen Momente Teilflächen und Schwerpunktabstände der Zeichnung entnommen werden. Für die Rechnung genügt eine Skizze. Nach S. 36 wird

$$\delta_P = \frac{70}{120} \cdot \delta_A + \frac{50}{120} \cdot \delta_B.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung auf S. 39 erhält man

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{A \cdot 50^3}{3 \cdot E \cdot J_{160}} \left(\frac{J_{160}}{J_{100}} \cdot \frac{10^3}{50^3} + \frac{J_{160}}{J_{140}} \cdot \frac{35^3 - 10^3}{50^3} + \frac{50^3 - 35^3}{50^3} \right) \\ &= \frac{2900 \cdot 50^3}{3 \cdot 2150000 \cdot 3217} \left(\frac{3217}{491} \cdot \frac{1000}{125000} + \frac{3217}{1886} \cdot \frac{41875}{125000} + \frac{82125}{125000} \right) = \frac{3625}{207497} \cdot 1,278 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{B \cdot 70^3}{3 \cdot E \cdot J_{160}} \left(\frac{J_{160}}{J_{100}} \cdot \frac{10^3}{70^3} + \frac{J_{160}}{J_{120}} \cdot \frac{30^3 - 10^3}{70^3} + \frac{J_{160}}{J_{140}} \cdot \frac{50^3 - 30^3}{70^3} + \frac{70^3 - 50^3}{70^3} \right) \\ &= \frac{2100 \cdot 70^3}{3 \cdot 2150000 \cdot 3217} \left(\frac{3217}{491} \cdot \frac{1000}{343000} + \frac{3217}{1018} \cdot \frac{26000}{343000} + \frac{3217}{1886} \cdot \frac{98000}{343000} + \frac{218000}{343000} \right) \\ &= \frac{7203}{207497} \cdot 1,421, \text{ also } \delta_P = \frac{70}{120} \cdot \frac{3625}{207497} \cdot 1,278 + \frac{50}{120} \cdot \frac{7203}{207497} \cdot 1,421 = 0,034 \text{ cm.} \end{aligned}$$

4. Beim Abdrehen wird eine Welle durch den Schneiddruck durchgebogen. Es soll die Durchbiegung bestimmt werden, die die Welle durch $P_0 = 1 \text{ kg}$ an der Schneidstelle erfährt. Ist diese Durchbiegung gleich y , dann ist die von $P \text{ kg}$ Schneiddruck senkrecht zur Stabachse erzeugte Durchbiegung

$$f = P \cdot y.$$

In Anlehnung an Fig. 33 sei x die Entfernung des Schneidstahls von der linken Einspannstelle, l die Länge der Welle, $(l - x)$ die Entfernung des Schneidstahls von der rechten Einspannstelle, dann ist

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 \cdot x^2 (l - x)^2}{3 \cdot E J \cdot l} \\ &= \frac{1 \cdot l^3 \cdot 64}{3 \cdot 2150000 \cdot \pi d^4} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \\ y &= 3,11 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \\ d^3 &= \alpha \cdot \frac{l^3}{d^4}. \end{aligned}$$

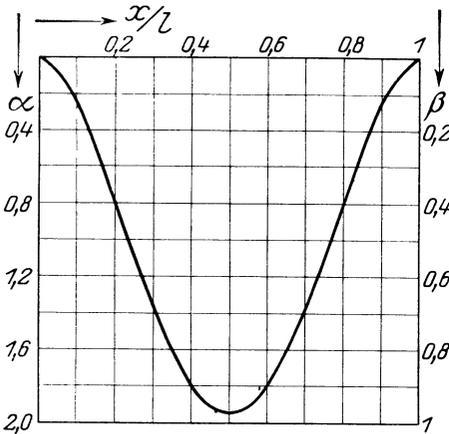


Fig. 39.

Der Faktor α ist in Fig. 39 in Abhängigkeit von $x : l$ dargestellt. Infolge eines Druckes $P \text{ kg}$ erfährt der Punkt x die Durchbiegung

$$f = \alpha \cdot \frac{P \cdot l^3}{d^4}.$$

z. B. $P = 50 \text{ kg}$; $l = 2 \text{ m}$; $d = 60 \text{ mm}$; $\max f = ?$ Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte auf, für die $x : l = 0,5$ ist; die α -Kurve liefert $\alpha = 1,94$, so daß

$$\max f = \frac{1,94 \cdot 50 \cdot 2^3}{6^4} = 0,6 \text{ mm.}$$

Die α -Kurve ist so gezeichnet, daß l in m, P in kg, d in cm einzusetzen sind, dann ergibt sich f in mm. Um Fig. 39 auch für andere Querschnitte brauchbar zu machen, ist neben der α -Teilung eine zweite Teilung vorgesehen, und zwar ist

$$f = \beta \cdot \frac{P l^3}{J},$$

wobei l ebenfalls in m, P in kg, J in cm^4 einzusetzen sind; f ergibt sich in mm (vgl. Beispiel 3 auf S. 37). Z. B. $P = 12000 \text{ kg}$, $l = 8 \text{ m}$; verwendet wird ein Differdinger \perp -Eisen Nr. 34B mit $J = 35241 \text{ cm}^4$. Die Kurve der Fig. 39 liefert für $x : l = 0,5$, d. h. die Mitte des Trägers. $\beta = 0,97$, so daß

$$\max f = 0,97 \cdot \frac{12000 \cdot 8^3}{35241} = 17 \text{ mm wird.}$$

Schiefe Belastung. Fällt die Kraftlinie nicht mit einer Hauptachse zusammen, so nennt man die Belastung schief. In Fig. 40 seien die Achsen I und II Haupt-

achsen. Man zerlegt das in die Ebene $K-K$ fallende Biegemoment M nach den Richtungen I und II und erhält

$$M_I = M \cdot \sin \beta' = M \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad M_{II} = M \cdot \cos \beta' = -M \cdot \cos \beta.$$

Für den Fall, daß nur M_I wirkt, wird $\sigma_1 = -\frac{M_I}{J_I} \cdot y = -\frac{M \cdot \sin \beta \cdot y}{J_I}$

„ „ „ „ „ M_{II} „ „ $\sigma_2 = +\frac{M_{II}}{J_{II}} \cdot x = -\frac{M \cdot \cos \beta \cdot x}{J_{II}}$

Treten beide Momente gleichzeitig auf, so wird $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, da beide Einzelspannungen gleiche Richtung haben. Für die Lage der Null-Linie müssen die Bedingungen

$$\text{a) } \sigma = 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } v = 0$$

erfüllt sein, denn der Punkt P soll ein Punkt der Null-Linie sein.

Aus $v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha = 0$ folgt $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$

Aus $v = -\frac{M_I \sin \beta}{J_I} y + \left[-\frac{M_{II} \cos \beta}{J_{II}} \right] \cdot x = 0$ folgt $\frac{y}{x} = -\frac{J_I}{J_{II}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$,

daraus

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{J_I}{J_{II}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Damit ist die Lage der Null-Linie festgelegt, wenn die Hauptachsen des Querschnittes bekannt sind. Der Winkel, den die Null-Linie mit der Kraftlinie bildet, sei δ . Die Spannung σ können wir uns durch ein Biegemoment $M \cdot \sin \delta$ hervorgerufen denken, das in gleicher Weise den Querschnitt um die Null-Linie zu drehen sucht, wie das Moment $A \cdot x - P_1 \cdot (x - a)$ der äußeren Kräfte auf S. 18. Die 3. Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ für die Null-Linie als Momentenachse erfordert mit $\sigma \cdot dF \cdot v$ als statischem Moment der durch einen Flächenstreifen dF (im Abstände v und parallel zur Null-Linie) übertragenen Flächenkraft

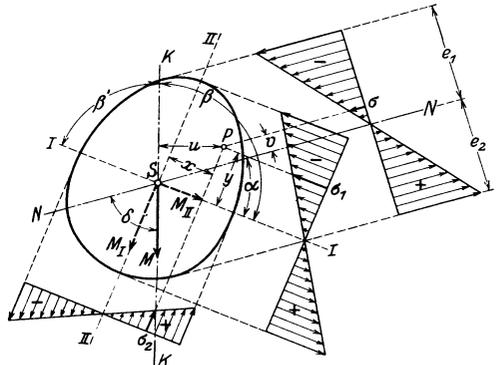


Fig. 40.

$$\int \sigma \cdot dF \cdot v = M \cdot \sin \delta \quad \text{oder mit } \sigma = \sigma_0 \cdot v \quad \sigma_0 \cdot \int dF \cdot v^2 = M \cdot \sin \delta.$$

$\int dF \cdot v^2$ ist das auf die Null-Linie bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes, das mit J_n bezeichnet wird.

Damit ergibt sich

$$\sigma_0 \cdot J_n = M \cdot \sin \delta, \quad \text{mit } \sigma_0 = \frac{\sigma}{v} \quad \text{wird} \quad \sigma = \frac{M \cdot \sin \delta}{J_n} \cdot v.$$

Sind e_1 und e_2 die Entfernungen der äußersten Fasern von der Null-Linie, so erhält man

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot \sin \delta}{J_n} \cdot e_1 = \frac{M}{W_n}; \quad \sigma_2 = \frac{M \cdot \sin \delta}{J_n} \cdot e_2 = \frac{M}{W'_n}; \quad W_n = \frac{J_n}{e_1 \cdot \sin \delta}; \quad W'_n = \frac{J_n}{e_2 \cdot \sin \delta}$$

und bezeichnet W_n und W'_n ebenfalls als Widerstandsmomente.

Beispiele. 1. Ein Freitragler von rechteckigem Querschnitt (Fig. 41) sei so eingespannt, daß die Kraftlinie in die senkrechte Diagonale fällt, dann folgt aus

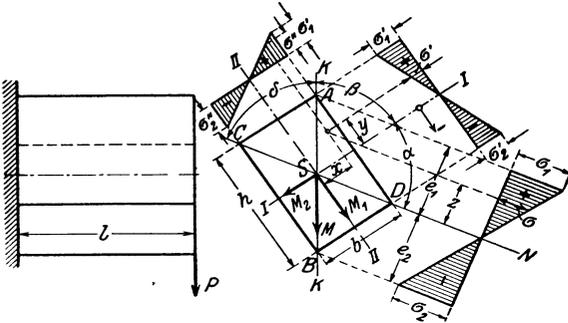


Fig. 41.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{J_{II}}{J_{I}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \\ &= -\frac{b}{h} \cdot \frac{bh^3}{hb^3} = -\frac{h}{b}, \end{aligned}$$

daß die andere Diagonale Null-Linie ist. Für sie wird

$$\begin{aligned} J_n &= 2 \cdot \frac{d \cdot \left(\frac{d}{2} \cdot \sin \delta\right)^3}{12} \\ &= \frac{1}{48} \cdot d^4 \cdot \sin^3 \delta; \\ e_1 &= \frac{d}{2} \cdot \sin \delta = e_2; \end{aligned}$$

$$W_n = W'_n = \frac{J_n}{c_1 \cdot \sin \delta} = \frac{\frac{1}{48} \cdot d^4 \cdot \sin^3 \delta}{\frac{d}{2} \cdot \sin^2 \delta} = \frac{1}{24} \cdot d^3 \cdot \sin \delta,$$

$$\max \sigma = \frac{M}{W_n} = \frac{P \cdot l \cdot 24}{d^3 \cdot \sin \delta} \quad \text{oder mit } \sin \delta = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} = 2 \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{h}{d}$$

$$\max \sigma = \frac{P \cdot l \cdot 12}{bh \cdot d} = \frac{12 P \cdot l}{F \cdot d}.$$

Die Zerlegung des Momentes nach den Hauptachsen liefert $M_I = M \cdot \sin \beta = P \cdot l \cdot \sin \beta$ und $M_{II} = M \cdot \cos \beta = P \cdot l \cdot \cos \beta$.

Mit $\sin \beta = \frac{h}{d}$ und $\cos \beta = \frac{b}{d}$ erhält man

$$\sigma'_1 = \frac{P \cdot l \cdot \frac{h}{d}}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} \quad \text{und} \quad \sigma''_1 = \frac{P \cdot l \cdot \frac{b}{d}}{hb^3} \cdot \frac{b}{2}$$

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma''_1 = \frac{6 \cdot Pl}{bh \cdot d} + \frac{6 \cdot Pl}{bh \cdot d} = \frac{12 Pl}{F \cdot d}.$$

2. Ein 2 m langer Träger auf zwei Stützen trage in der Mitte eine Einzellast $P = 1000$ kg und sei gegen die Wagerechte um $23^\circ 50'$ geneigt; das größte Biegemoment wird

$$M = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{1000 \cdot 200}{4} = 50000 \text{ cmkg}.$$

Bei gerader Belastung wäre für $k_b = 1200$ kg/cm² ein I-Eisen NP12 mit $W_x = 54,7$ cm³ ausreichend; für die schiefe Belastung schätzen wir auf I-Eisen NP 20 mit $J_x = 2142$ cm⁴, $W_x = 214$ cm³; $J_y = 117$ cm⁴; $W_y = 26$ cm³. Die Zerlegung von M nach den Richtungen der Hauptachsen liefert (Fig. 42):

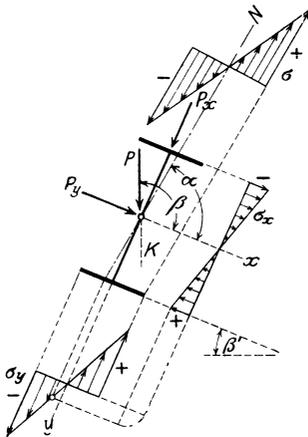


Fig. 42.

$$M_x = M \cdot \cos 23^\circ 50' = 50\,000 \cdot 0,915 = 45\,750 \text{ cmkg},$$

$$M_y = M \cdot \sin 23^\circ 50' = 50\,000 \cdot 0,404 = 20\,200 \text{ cmkg},$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45\,750}{214} + \frac{20\,200}{26} = 214 + 785 = \sim 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Lage der Null-Linie ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = - \frac{2142}{117} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ + 23^\circ 50')} = - \frac{2142}{117} \cdot \frac{1}{-2,264} = \sim 8.$$

3. Darf ein wagerechtes hochkant stehendes Winkeleisen 65/130/12 benutzt werden? Die Tafeln liefern (Fig. 43) für den Schwerpunkt $a = 1,53 \text{ cm}$, $b = 4,75 \text{ cm}$. Die Trägheitsmomente, bezogen auf die Hauptachsen, $J_x = 395 \text{ cm}^4$, $J_y = 41,3 \text{ cm}^4$; als Steigung der x -Achse gegen die Wagerechte $\operatorname{tg} \varphi = 0,255$, also $\varphi = 14^\circ 20'$. Die Abstände der äußersten Fasern werden $x_0 = 1,53 \cdot \cos \varphi + 4,75 \cdot \sin \varphi = 2,68 \text{ cm}$ und $y_0 = 8,25 \cdot \cos \varphi + 1,2 \cdot \sin \varphi = 8,3 \text{ cm}$.

Damit erhält man $W_x = 395 : 8,3 = 47,6 \text{ cm}^3$; $W_y = 41,3 : 2,68 = 15,4 \text{ cm}^3$. Die Zerlegung von $M = 50\,000 \text{ cmkg}$ nach den Richtungen der Hauptachsen liefert

$$M_y = M \cdot \sin \varphi = 50\,000 \cdot 0,248 = 12\,400 \text{ cmkg},$$

$$M_x = M \cdot \cos \varphi = 50\,000 \cdot 0,969 = 48\,450 \text{ cmkg},$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{48\,450}{47,6} + \frac{12\,400}{15,4} = 1020 + 805 = 1825 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Lage der Null-Linie ergibt sich aus

$$\alpha = - \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = - \frac{395}{41,3} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 14^\circ 20')} = - \frac{395}{41,3} \cdot \frac{1}{3,914} = \sim 2,44.$$

Das Winkeleisen darf nicht benutzt werden.

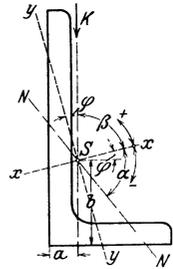


Fig. 43.

V. Die Knickfestigkeit.

Die Last greift in der Stabachse an. Wir denken uns einen geraden Stab senkrecht stehend und an seinem unteren Ende eingespannt (Fig. 44). Er werde unter stetiger Steigerung der Kraft P belastet. Der Versuch zeigt, daß die freie Spitze zwar ausweicht, daß sich jedoch eine Gleichgewichtslage trotz dieser deutlich sichtbaren Formänderung einstellt. Hat P einen bestimmten Betrag erreicht, so knickt der Stab restlos zusammen; die Spitze senkt sich bis auf den Boden. Wiederholte Versuche zeigen, daß dieser Grenzwert stets gleich bleibt, wenn gleiche Stäbe geprüft werden. Man nennt die Kraft P , bei der das Knicken erfolgt, Knicklast und bezeichnet sie mit P_k .



Fig. 44.

Macht man Stäbe gleicher Abmessungen aus verschiedenen Baustoffen, so zeigt sich, daß die Knicklasten von dem elastischen Verhalten des Baustoffes abhängen. Die Zahl, die dieses Verhalten kennzeichnet, war das Dehnmaß E (S. 6). Der Stab hält am meisten, der das größte E hat. Wir entnehmen aus dem Versuch, daß die Knicklast in einem einfachen Verhältnis zu E steht; sie ist E verhältnismäßig.

Man stelle sich Rohre gleicher Länge her mit kreisringförmigem Querschnitt und mache sämtliche Querschnitte gleich groß; d. h. ist D in cm der äußere, d in cm der innere Durchmesser, so ist $\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$ der Flächeninhalt, gemessen in cm^2 . Bei allen Rohren soll nun F in cm^2 gleich groß sein; das Rohr mit großem D hat also geringe Wandstärke, das Rohr mit kleinem d große Wandstärke. Diese

Rohre werden der Reihe nach bis zum Knicken belastet. Der Versuch zeigt, daß die Knicklasten trotz der gleichen Querschnitte verschieden sind. Und zwar trägt das Rohr mit dem größten Durchmesser am meisten, das Rohr mit dem kleinsten Durchmesser am wenigsten. Die Knicklasten wachsen mit dem Durchmesser. Wir lernen daraus, daß es bei der Knickfestigkeit auf die Form des Querschnittes mehr ankommt als auf den Flächeninhalt. Die Größe, die die Form des Querschnittes bei der Tragfähigkeit berücksichtigt, war das Trägheitsmoment (vgl. S. 20). Die Knicklast ist dem Trägheitsmoment des Querschnittes verhältnismäßig. Da ein Ausweichen nach der Seite des geringsten Widerstandes erfolgt, ist das kleinste Trägheitsmoment maßgebend.

Zum dritten denke man sich Stäbe gleichen Querschnittes, von denen der erste eine Länge l habe, der zweite messe $2l$, der dritte $3l$ usw. Der Versuch zeigt, daß ein Stab von doppelter Länge nur den 4. Teil der Last trägt; ein Stab von dreifacher Länge trägt nur den 9. Teil der Last des Stabes von der Länge l ; ein Stab mit der Länge $4l$ trägt nur den 16. Teil des Stabes von der Länge l . Bei dieser Versuchsreihe haben wir es nicht mit einer einfachen, sondern einer quadratischen Abhängigkeit zu tun, und zwar steht die Tragfähigkeit im umgekehrten Verhältnis zur Länge des Stabes.

Schreibt man die Versuchsergebnisse in Form einer Gleichung, so erhält man für die Knicklast

$$P_k = C \cdot \frac{E \cdot J}{l^2},$$

wobei C eine Verhältniszahl ist. C ist von dem Mathematiker Euler berechnet worden; er fand je nach der Art der Befestigung

Fig. 45 $C = \frac{\pi^2}{4}$, $P_k = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{4 \cdot l^2}$

Fig. 46 $C = \pi^2$, $P_k = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$

Fig. 47 $C = 4\pi^2$, $P_k = \frac{4\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$

Fig. 48 $C = 2\pi^2$, $P_k = \frac{2\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$

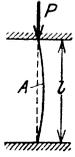
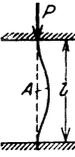
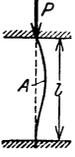
Hierin bedeuten:

P_k die Knicklast des Stabes in kg,

l die Länge des Stabes in cm,

J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes in cm^4 ,

E das Dehnmaß des Baustoffes in kg/cm^2 .

	Ein Stabende eingespannt, das andere frei beweglich	Grundfall Freie in der Achse geführte Stabenden	Eingespannte, in der Achse geführte Stabenden	Ein Stabende eingespannt, das andere frei in der Achse geführt
Darstellung des Belastungsfalles				
	Fig. 45.	Fig. 46.	Fig. 47.	Fig. 48.
Knicklast $P_k =$	$\frac{\pi^2 \cdot EJ}{4 \cdot l^2}$	$\frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$	$\frac{4 \pi^2 \cdot EJ}{l^2}$	$\frac{2 \pi^2 \cdot EJ}{l^2}$

Nun ist es ohne weiteres klar, daß man keinen Stab bis zur Knickgrenze belasten darf, ebensowenig wie wir die Zerreißfestigkeit als zulässige Zugspannung setzten. Man wählt einen Bruchteil der Knicklast als zulässige Belastung und setzt

$$P = \frac{P_k}{\zeta},$$

wobei ζ den Sicherheitsgrad gegen Knicken bedeutet, der für verschiedene Baustoffe verschieden ist.

Im allgemeinen wird Fall 2 (Fig. 46) vorliegen. Für ihn sollen die Eulerschen Knickgleichungen einfacher geschrieben werden. Aus

$$P = \frac{P_k}{\zeta} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{\zeta \cdot l^2} \quad \text{ergibt sich} \quad \min J = \frac{P \cdot \zeta \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\zeta}{\pi^2 \cdot E} \cdot P \cdot l^2$$

als kleinstes Trägheitsmoment; setzt man die Last in t; die Länge in m ein, d. h. ist $P = (P_1 \cdot 1000)$ kg; $l = (l_1 \cdot 100)$ cm, wobei P_1 in t; l_1 in m gemessen werden, so wird

$$\min J = \frac{\zeta \cdot 1000 \cdot 100^2}{\pi^2 \cdot E} \cdot P_1 \cdot l_1.$$

Gußeisen:	$\zeta = 8$;	$E = 1000000$ kg/cm ²	gibt	$\min J = 8 \cdot P_1 \cdot l_1^2$
Schweißeisen:	$\zeta = 5$;	$E = 2000000$	„ „	$\min J = 2,5 \cdot P_1 \cdot l_1^2$
Flußeisen:	$\zeta = 5$;	$E = 2150000$	„ „	$\min J = 2,33 \cdot P_1 \cdot l_1^2$
Flußstahl:	$\zeta = 5$;	$E = 2200000$	„ „	$\min J = 2,24 \cdot P_1 \cdot l_1^2$
Holz:	$\zeta = 10$;	$E = 100000$	„ „	$\min J = 100 \cdot P_1 \cdot l_1^2$

Der Belastungsfall 2 (Fig. 46) setzt Spitzenlagerung voraus; die in der Praxis vorkommende Befestigung bewirkt aber meist eine erhebliche Einspannung, die in der Weise berücksichtigt wird, daß die Knicklänge l als Bruchteil der Gesamtlänge L in die Rechnung eingeführt wird. Auf Grund zahlreicher Versuche setzt man nach v. Tetmajer und v. Emperger

$l = 0,95 \cdot L$ bei mäßiger Einspannung des einen und freier Führung des andern Endes;

$l = 0,9 \cdot L$ bei mäßiger Einspannung beider Enden;

$l = 0,85 \cdot L$ bei guter Einspannung des einen und mäßiger Einspannung des andern Endes;

$l = 0,8 \cdot L$ bei guter Einspannung beider Enden;

$l = 0,7 \cdot L$ bei gedruckten Fachwerkstben, die durch Nieten angeschlossen sind

Beispiele. Eine Säule von 4 m Gesamtlänge ist durch eine Kraft von 10000 kg zentrisch belastet. Gesucht sind die Abmessungen des Querschnittes.

a) Baustoff: Holz mit $\zeta = 10$.

Erforderlich ist $\min J = 100 \cdot P_1 \cdot l_1^2 = 100 \cdot 10 \cdot 4^2 = 16000$ cm⁴.

1. Ein unbearbeiteter Baumstamm von 25 cm Durchmesser hat $J = 19175$ cm⁴ und darf bei Behelfsbauten, zum Abstützen u. dgl. benutzt werden. Die wirklich nach Euler vorhandene Knicksicherheit folgt aus der Überlegung:

$$J = 16000 \text{ cm}^4 \text{ hat } \zeta = 10,$$

$$J = 19175 \text{ cm}^4 \text{ hat } \zeta = 10 \cdot \frac{19175}{16000} = \sim 12.$$

Die in dem Stabe auftretende Druckspannung ist

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10000}{491} = \sim 21 \text{ kg/cm}^2;$$

sie bleibt weit unter der zulässigen Grenze von $k = 100$ kg/cm².

2. Es soll geprüft werden, ob ein vorhandener Balken von $24 \cdot 26$ cm benutzt werden darf. Das kleinste Trägheitsmoment dieses rechteckigen Querschnittes ist

$$\min J = \frac{26 \cdot 24^3}{12} = 29952 \text{ cm}^2.$$

Die Sicherheit gegen Knicken ist

$$\sigma = 10 \cdot \frac{29952}{16000} = 18,7.$$

Der Balken ist reichlich.

3. Es sind zwei Balken $18 \cdot 18$ cm vorhanden. Dürfen sie benutzt werden? Jeder Balken muß für die halbe Last knicksicher sein; das erfordert

$$\min J = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10 \cdot 4^2 = 8000 \text{ cm}^4.$$

Vorhanden ist

$$J = \frac{18 \cdot 18^3}{12} = 8748 \text{ cm}^4.$$

Demnach ist die Sicherheit $\sigma = 10 \cdot \frac{8747}{8000} = \sim 11$.

Die Balken reichen aus.

b) Baustoff: Flußeisen mit $\sigma = 5$. Erforderlich ist

$$\min J = 2,33 \cdot 10 \cdot 4^2 = 373 \text{ cm}^4.$$

1. H -Eisen NP 29 mit $\min J = J_y = 406 \text{ cm}^4$; $\sigma = 5 \cdot \frac{406}{373} = 6,4$.

2. H -Differdinger 18 B mit $\min J = J_y = 390 \text{ cm}^2$; $\sigma = 5 \cdot \frac{390}{373} = 5,2$.

3. L -Eisen 150/150/16 mit $J_y = 391 \text{ cm}^4$; $\sigma = 5 \cdot \frac{391}{373} = 5,2$.

4. C -Eisen NP 28 mit $J_y = 399 \text{ cm}^4$; $\sigma = 5 \cdot \frac{399}{373} = 5,3$.

5. Volle Röhre aus Quadranteisen Nr. 5 min mit

$$J = 576 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad \sigma = 5 \cdot \frac{576}{373} = 7,7.$$

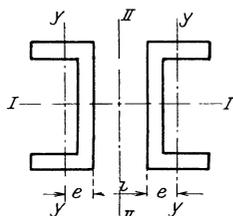


Fig. 49.

6. C -Eisen NP 10 (Fig. 49). Die beiden U-Eisen werden so weit auseinandergerückt, daß die Trägheitsmomente J_I und J_{II} , bezogen auf die wagerechte und senkrechte Hauptachse, gleich groß sind. Dann ist $J_I = 2 \cdot J_x = J_{II}$, wobei J_x das der Tabelle zu entnehmende J_x bedeutet. Man findet demnach die Profilnummer, indem man in der Spalte J_x die Zahl sucht, die gegen $\frac{1}{2} \cdot \min J = \frac{1}{2} \cdot 373 = 187$ die nächsthöhere ist. Das ist 206; sie gehört zu NP 10. Beide Eisen haben ein Gesamtträgheitsmoment von $2 \cdot 206 = 412 \text{ cm}^4$, so daß

$$\sigma = 5 \cdot \frac{412}{373} = 5,5$$

ist. Wie weit die U-Eisen auseinander zu setzen sind, damit die Trägheitsmomente, bezogen auf die Hauptachsen, gleich groß sind, ist in manchen Tabellen in der Spalte i in Millimetern angegeben. Ist das nicht der Fall, so findet man i durch Rechnung auf folgende Weise (Fig. 49):

$$J_{II} = J_I = 2 \cdot J_x \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \left[J_y + F \cdot \left(\frac{i}{2} + e \right)^2 \right] = 2 \cdot J_x$$

$$J_y + F \cdot \left(\frac{i}{2} + e \right)^2 = J_x; \quad F \cdot \left(\frac{i}{2} + e \right)^2 = J_x - J_y; \quad \left(\frac{i}{2} + e \right)^2 = \frac{J_x - J_y}{F}$$

$$\frac{i}{2} + e = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} \quad \text{oder} \quad \frac{i}{2} = \sqrt{\frac{J_x - J_y}{F}} - e.$$

Mit den Abmessungen der Profilnummer 10 wird

$$\frac{i}{2} = \sqrt{\frac{206 - 29,3}{13,5}} - 1,55 = 2,07 \text{ cm}, \quad \text{folglich} \quad i = 2 \cdot 20,7 = 41,4 \text{ mm}.$$

Wollte man beide U-Eisen ohne Querverbindungen einfach nebeneinander stellen, so müßte jedes für sich für die halbe Last knicksicher sein, müßte also ein $J_y \geq \frac{1}{2} \min J$ oder $J_y \geq 187 \text{ cm}^4$ haben. Das erforderte zwei U-Eisen NP 22 mit $J_y = 197 \text{ cm}^4$. Sorgt man aber dafür, daß beide U-Eisen von Zeit zu Zeit durch Bänder oder Winkel-eisen verbunden werden, wie es in Fig. 50 — für NP 26 — dargestellt ist, so genügt NP 10. Die freie Länge a darf nicht größer sein, als dem $J_y = 29,3 \text{ cm}^4$ entspricht; sie berechnet sich aus $J_y = 2,33 \cdot (\frac{1}{2} \cdot F_1) \cdot l_0^2$ zu

$$a = \sqrt{\frac{J_y}{2,33 \cdot \frac{1}{2} \cdot F_1}} = \sqrt{\frac{29,3}{2,33 \cdot 5}} = 1,58 \text{ m.}$$

Es müßten also mindestens zwei Querverbindungen bei einer Gesamtlänge von $l = 4 \text{ m}$ vorgesehen werden.

7. Es soll ein ringförmiger Querschnitt verwendet werden. Ge-wählt $D = 100 \text{ mm}$; $d = 70 \text{ mm}$; Wandstärke $s = 15 \text{ mm}$. Es ist

$$J = J_{100} - J_{70}$$

laut Tafel (S. 25)

$$= 490,9 - 117,9 = 373 \text{ cm}^4.$$

Die Sicherheit beträgt $\zeta = 5$, da das erforderliche und das vorhandene Trägheitsmoment gleich groß sind.

Neuere Versuche haben ergeben, daß die Eulerschen Gleichungen nicht für alle Belastungsfälle zuverlässige Ergeb-nisse liefern; sie bleiben für schlanke, dünne Stäbe brauchbar, versagen aber bei kurzen, dicken. Maßgebend für die Gültig-keit ist das Verhältnis der Länge in cm zu dem Trägheitshalb-messer des Querschnittes; es ist

$$x = \frac{l}{i} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{F}}}$$

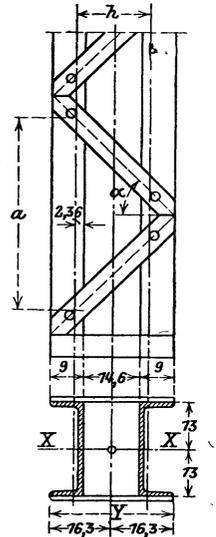


Fig. 50.

Die Gültigkeitsgrenze ist nachstehender Tafel zu entnehmen.

Nr.	Baustoff	Untere Proportionalitätsgrenze in kg/cm^2 σ_p	Dehnmaß in kg/cm^2 E	Gültigkeitsgrenze $x = \frac{l}{i} \geq$
1	Holz	150	100 000	80
2	Graues Gußeisen	~ 2000	1 000 000	70
3	Schweißeisen	1500	2 000 000	115
4	Flußeisen	2000	2 150 000	102
5	Flußstahl	2400	2 200 000	95
6	Beton bei höchstens 50 kg/cm^2 Spannung	~ 100	200 000	140

Nach Tetmajer wird bei $x = \frac{l}{i} <$ als das des Grenzfalles nach Euler, wenn man

mit $\sigma_k = P_k : F$ die Knickspannung bezeichnet, für

Flußeisen: $\sigma_k = 3100 - 11,4 \cdot x$ Gußeisen: $\sigma_k = 7760 - 120 \cdot x + 0,53 \cdot x^2$

Holz: $\sigma_k = 293 - 1,94 \cdot x$ Schweißeisen: $\sigma_k = 3030 - 12,9 \cdot x$

Flußstahl: $\sigma_k = 3350 - 6,2 \cdot x$.

Bei $x = \frac{l}{i} >$ als das des Grenzfalles nach Euler für

Flußeisen: $\sigma_k = 21219640 \left(\frac{i}{l}\right)^2$; Gußeisen: $\sigma_k = 9869600 \left(\frac{i}{l}\right)^2$

Schweißeisen: $\sigma_k = 19739200 \left(\frac{i}{l}\right)^2$; Holz: $\sigma_k = 986960 \left(\frac{i}{l}\right)^2$.

$\sigma_k = P_k : F$ gemessen in kg/cm^2 .

Winkel, Festigkeit.

Bei der Benutzung der Tetmajerschen Gleichungen muß der Querschnitt geschätzt, die Spannung nachgerechnet werden; sie eignen sich deshalb nur zur Nachprüfung gegebener Abmessungen. Ist $\sigma = P:F$ die Druckspannung in kg/cm^2 , so wird der Sicherheitsgrad gegen Knicken

$$\varrho = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{\sigma_k \cdot F}{P}$$

Für die vorstehenden Beispiele erhält man

1.
$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{19175}{491}} = 6,25 \text{ cm}; \text{ also } \frac{l}{i} = \frac{400}{6,25} = 64.$$

Da $64 < 80$ (lt. Tafel), so ist die Eulersche Gleichung unzulässig; nach Tetmajer würde

$$\sigma_k = 293 - 1,94 \cdot \frac{l}{i} = 293 - 1,94 \cdot 64 = 169 \text{ kg/cm}^2,$$

also
$$\varrho = \frac{169 \cdot 491}{10000} = \sim 8.$$

Die Sicherheit reicht nicht aus, da Holz $\varrho = 10$ verlangt. $d = 30 \text{ cm } \Phi$ hat $F = 707 \text{ cm}^2$; $J = 39761 \text{ cm}^4$, so daß

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{39761}{707}} = 7,5 \text{ cm};$$

also
$$\frac{l}{i} = \frac{400}{7,5} = 53,3$$

$$\sigma_k = 293 - 1,94 \cdot 53,3 = 189 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\varrho = \frac{189 \cdot 707}{10000} = 13,4.$$

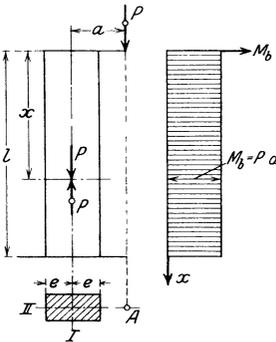


Fig. 51.

2.
$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{29952}{24 \cdot 26}} = 7,2 \text{ cm}; \frac{l}{i} = \frac{400}{7,2} = 55,6.$$

Auch hier versagt die Eulersche Gleichung; der Balken hat nur eine Sicherheit bei

$$\sigma_k = 293 - 1,94 \cdot 55,6 = 180 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{von} \quad \varrho = \frac{180 \cdot 24 \cdot 26}{10000} = 11,2$$

gegen $\varrho = 18,7$ nach Euler. Der Balken reicht.

b) I-Eisen NP 29 hat

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{406}{64,9}} = 2,5 \text{ cm}, \text{ also } x = \frac{l}{i} = \frac{400}{2,5} = 160.$$

Die Eulersche Gleichung ist gültig. Der Sicherheitsgrad bestimmt sich nach Tetmajer mit

$$\sigma_k = 21219640 \cdot \left(\frac{i}{l}\right)^2 = \frac{21219640}{160^2} = 830 \text{ kg/cm}^2 \text{ zu } \varrho = \frac{830 \cdot 64,9}{10000} = \sim 5,4$$

gegen 6,4 nach Euler.

In gleicher Weise sind die übrigen Querschnitte nachzurechnen, wobei zu beachten ist, daß man sich bei einer Berechnung nach Tetmajer meist mit einem geringeren Sicherheitsgrade begnügt als bei einer Berechnung nach Euler.

Die Last liegt aus der Mitte. Der Fall liegt vor, wenn die Kraft durch ein Konsol auf eine Säule übertragen wird (Abb. 51). Wir fügen in der Stabachse

zwei gleich große, entgegengesetzte Kräfte P hinzu und erhalten eine Einzelkraft P in Richtung der Stabachse, die den Stab auf Druck beansprucht, und ein Kräftepaar mit dem unveränderlichen Moment $M_b = P \cdot a$, das den Stab auf Biegung beansprucht. Infolge dieses Biegemomentes biegt sich der Stab durch, so daß sich der Hebelarm um den Betrag der Durchbiegung vergrößert. Ist der Hebelarm im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnittes klein, so darf die Festigkeitsbedingung in der angenäherten Form

$$\max \sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_b}{W} \leq k$$

angeschrieben werden. Hierbei ist $P : F$ die durch die Einzelkraft P hervorgerufene Druckspannung, $M_b : W$ die durch das Kräftepaar hervorgerufene Biegungsspannung. Das Widerstandsmoment ist auf die Achse I—I (Fig. 51) zu beziehen.

Mit Berücksichtigung der Durchbiegung erhält man die größte auftretende Druckspannung der frei stehenden Säule zu

$$\max \sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot a}{\cos \left(l \cdot \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right)} \cdot \frac{e}{J}.$$

Hierin ist e die Entfernung der äußersten Faser und J das auf die Achse I—I bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes.

Zahlenbeispiel. a) In unserm Beispiel (Nr. 6, S. 48) sei $a = 35$ cm; $P = 10000$ kg; es liege beispielsweise eine Kranbahn auf Konsolen; dann ist

$$M_b = P \cdot a = 10000 \cdot 35 = 350000 \text{ cmkg.}$$

Der Querschnitt Fig. 49 hat als Abstand der äußersten Faser von der Achse II—II $50 + 20,7 = 70,7$ mm; damit wird

$$W = \frac{2 \cdot 206}{7,07} = 58,5 \text{ cm}^3.$$

Die größte Druckspannung wird

$$\max \sigma = -\frac{10000}{2 \cdot 13,5} - \frac{350000}{58,5} = -6370 \text{ kg/cm}^2;$$

die beiden \square -Eisen sind viel zu klein!

Der Querschnitt Fig. 50 hat ein auf die Y -Achse bezogenes Trägheitsmoment von

$$J_y = 2 \cdot (317 + 48,3 \cdot 9,66^2) = 9648 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad W_y = \frac{9648}{16,3} = 590 \text{ cm}^3.$$

folglich
$$\max \sigma = -\frac{10000}{2 \cdot 48,3} - \frac{350000}{590} = -105 - 595 = -700 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Querschnitt ist reichlich. In der genaueren Berechnung tritt zu dem Nenner W der Faktor

$$\cos \left(l \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot J}} \right) = \cos \left(400 \sqrt{\frac{10000}{2150000 \cdot 9648}} \right) = \cos 0,2772;$$

damit wird
$$\max \sigma = -\frac{10000}{2 \cdot 48,3} - \frac{350000}{0,962 \cdot 590} = -105 - 620 = -725 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Das Konsol trage ein Vorgelegewellenlager; der Riemenzug sei $P = 250$ kg und gegen die Wagerechte unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ geneigt (Fig. 52).

Die Zerlegung von P nach der wagerechten und senkrechten Richtung liefert

$$H = P \cdot \cos \alpha = 250 \cdot 0,866 = 217 \text{ kg}; \quad V = P \cdot \sin \alpha = 250 \cdot 0,5 = 125 \text{ kg}.$$

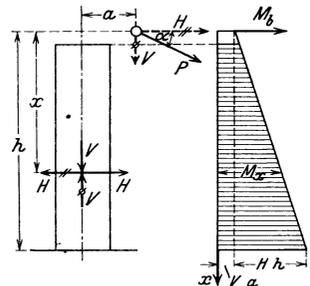


Fig. 52.

Im Querschnitt x von der Wellenmitte erhält man durch Hinzufügen zweier gleichgroßer, entgegengesetzter Kräfte V eine Einzelkraft V in Richtung der Stabachse, die die Säule auf Druck beansprucht, und ein Kräftepaar P mit dem unveränderlichen Biegemoment $M_1 = V \cdot a$. Die beiden gleich großen, entgegengesetzten Kräfte H liefern im Querschnitt x eine Einzelkraft H , die den Querschnitt auf Schub beansprucht (Querkraft) und im allgemeinen vernachlässigt werden darf, und ein Kräftepaar H mit dem Biegemoment $M_2 = H \cdot x$, das für $x = h$ seinen größten Wert annimmt. Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannstelle; für ihn wird angenähert

$$\max \sigma = -\frac{V}{F} - \frac{M_1 + M_2}{W};$$

$$M_1 = V \cdot a = 125 \cdot 35 = 4375 \text{ cmkg}; \quad M_2 = H \cdot h = 217 \cdot 415 = 90000 \text{ cmkg}.$$

Das Moment der wagerechten Seitenkraft ist bei weitem das größte. Da es nach unten hin zunimmt, läßt man häufig die beiden U-Eisen nach unten zu auseinandergehen und kommt dadurch mit kleineren Profilen aus. Beim Entwurf des Querschnittes schätzt man aus $H \cdot h$ auf das erforderliche Widerstandsmoment für $k_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$, wenn $k = 1200 \text{ kg/cm}^2$ die zulässige Druckspannung ist. In unserem Falle erfordert $M_2 = 90000 \text{ cmkg}$ ein Widerstandsmoment $W = 90000 : 1000 = 90 \text{ cm}^3$. Der Abstand der beiden U-Eisen betrage an der Einspannstelle $i = 70 \text{ mm}$, dann wird

$$J_{II} = 2 \cdot \left\{ J_y + F \cdot \left(\frac{i}{2} + e \right)^2 \right\} = 2 \cdot \left\{ 29,3 + 13,5 \cdot 5,05^2 \right\} = 747 \text{ cm}^4$$

$$W_{II} = 747 : 8,5 = \sim 88 \text{ cm}^3; \quad \max \sigma = -\frac{125}{2 \cdot 13,5} - \frac{90000 + 4375}{88} \\ = -1080 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Anordnung setzt freie Beweglichkeit der Spitze und sichere Verbindung der beiden U-Eisen nach Fig. 50 voraus.

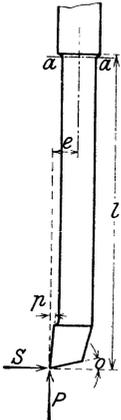


Fig. 53.

Stoßstahl (Fig. 53). Auf den Stahl wirken die Schnittkraft P senkrecht nach oben und die Normalkraft S wagerecht, d. h. senkrecht zur Stabachse. Da P nicht in die Stabachse fällt, so entsteht eine Einzelkraft P in der Stabachse und ein Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot e$, das den Stab auf Biegung beansprucht. S ruft ein Biegemoment in entgegengesetztem Sinne von der Größe $S \cdot l$ hervor und ergibt außerdem im Einspannungsquerschnitt $a - a$ eine Querkraft S (vgl. S. 18). Die Gesamtbeanspruchung im Querschnitt $a - a$ wird

$$\max \sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{S(l - e)}{W} \quad \text{oder} \quad \max \sigma = -\frac{P}{F} \pm \frac{S \cdot l}{W},$$

wenn wir e gegen l vernachlässigen. Angenommen, die Schneide sei 30 mm breit, der Vorschub betrage $0,3 \text{ mm}$, der Schnittwiderstand 175 kg/mm^2 , dann erhält man

$$P = S = 0,3 \times 30 \times 175 = 1575 \text{ kg}.$$

Ferner sei $l = 400 \text{ mm}$; $F_{a-a} = 95 \times 22 \text{ mm}^2$, dann wird

$$F_{a-a} = 9,5 \times 2,2 = 20,9 \text{ cm}^2; \quad W = \frac{2,2 \cdot 9,5^2}{6} = 33,1 \text{ cm}^3$$

$$J = \frac{2,2 \cdot 9,5^3}{12} = 157,2 \text{ cm}^4.$$

Damit erhält man

$$\max \sigma = -\frac{1575}{20,9} \pm \frac{1575 \cdot 40}{33,1} = -75 \pm 1900 = -1975 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Durchbiegung wird

$$f = \frac{S \cdot l^3}{3 E J} = \frac{1575 \cdot 40^3}{3 \cdot 2150000 \cdot 157,2} = \sim 0,3 \text{ cm} = \sim 3 \text{ mm}.$$

Infolge der großen Durchbiegung federn lange und frei liegende Stähle.

Infolge der großen Arbeitsdrucke erfahren nicht nur das Werkstück (vgl. S. 42) und der Stahl (vgl. S. 52) Formänderungen, sondern auch die Werkzeugmaschinen selbst. Fig. 54 zeigt die Durchbiegung eines Drehbankbettes unter einem senkrechten Stahlruck von 2000 kg, über die Prof. Schlesinger im Heft I

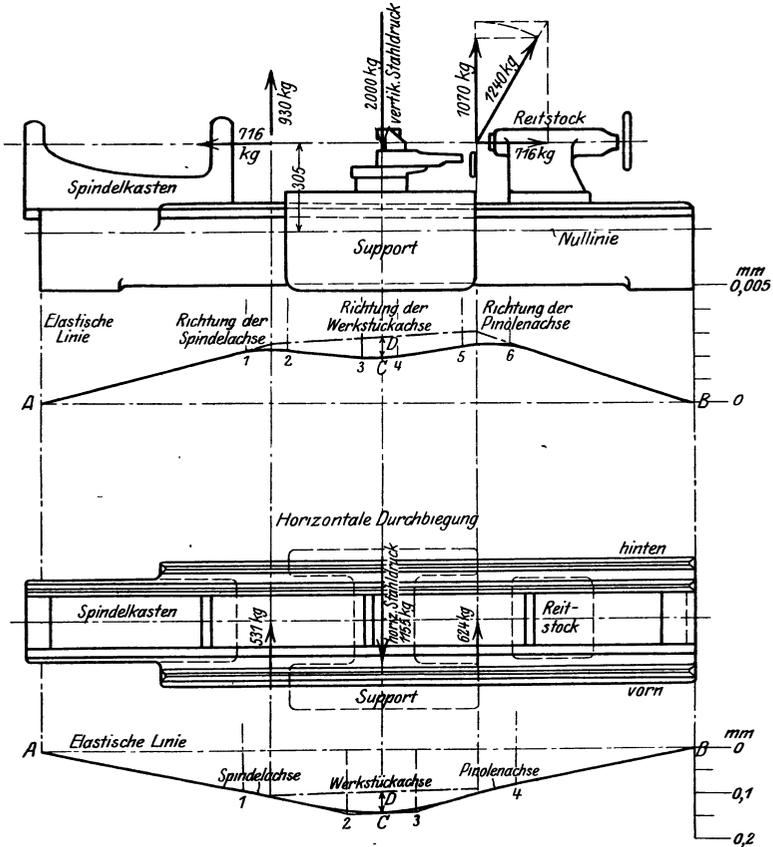


Fig. 54.

der Berichte des Versuchsfeldes für Werkzeugmaschinen an der Technischen Hochschule Berlin berichtet. In der Abbildung sind die elastischen Linien *ACB* infolge der senkrechten und wagerechten Kräfte gezeichnet, die eine Aufbiegung des Bettes nach oben erkennen lassen. Es wurden Durchbiegungen bis zu 0,06 mm gemessen.

Der Fall, daß die Wirkungslinie der Kraft nicht mit der Stabachse zusammenfällt, gehört genau genommen in den Abschnitt über zusammengesetzte Festigkeit. Er konnte hier behandelt werden, weil sich die Druck- und Biegungsspannungen nach dem Überlagerungsgesetz algebraisch addieren.

VI. Die Drehfestigkeit.

Allen bisherigen Untersuchungen über Spannungen und Formänderungen wurde die Bernoullische Annahme zugrunde gelegt, die besagt, daß die Querschnitte trotz der Formänderung eben bleiben. Bei der Drehbeanspruchung trifft diese Annahme nur für den kreisförmigen Querschnitt zu; bei andern Querschnitten lehrt der Versuch, daß sie nicht eben bleiben (vgl. Bach: Elastizität und Festigkeitslehre, 9. Aufl., S. 344). Denkt man sich nämlich auf einem geraden Stabe mit quadratischem Querschnitt senkrechte und wagerechte Linien fein eingeritzt und verdreht diesen Stab, so zeigt sich, daß die wagerechten Linien S-förmige Gestalt annehmen. Infolge des Versagens der Bernoullischen Annahme gestaltet sich die Untersuchung des Spannungs- und Formänderungszustandes bei Drehbeanspruchung recht verwickelt. Im folgenden soll deshalb nur der kreisförmige, unveränderliche Querschnitt als der für den Maschinenbauer wichtigste untersucht werden. Die Art des Kraftangriffes zeigt Fig. 55, bei der die Stabachse auf der Ebene der beiden drehenden Kräftepaare senkrecht steht. Es müssen zwei gleich große, entgegengesetzt drehende Kräftepaare vorhanden

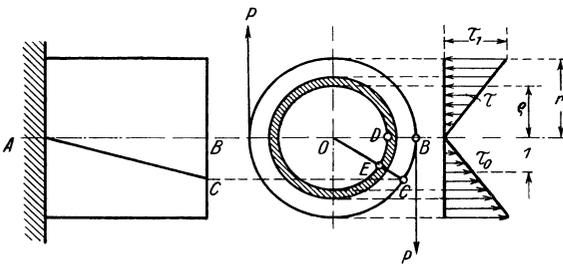


Fig. 55.

sein, damit die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ erfüllt ist; doch spricht man von einem Drehmoment und ersetzt das zweite durch eine gedachte Einspannung in dem betrachteten Punkte, wie wir es bei der Biegung auch getan haben.

In Fig. 55 habe das angreifende Kräftepaar das Drehmoment $M_d = P \cdot d$, dem

durch die Einspannung in A das Gleichgewicht gehalten wird. Infolge des Drehmomentes werden in einem Querschnitt Spannungen wachgerufen, die sich in dem Querschnitt, senkrecht zur Stabachse verteilen. Aus der entstehenden Formänderung schließen wir auf die Art der Verteilung. Wir beobachten, daß die Punkte, die am weitesten vom Mittelpunkte entfernt sind, die größte Verschiebung erfahren, während der Mittelpunkt selbst in seiner Lage verharret. Innerhalb gewisser Grenzen läßt sich feststellen, daß ein zwischen O und B liegender Punkt D, der die Entfernung ρ vom Mittelpunkt O hat, bei der Drehung ebenfalls auf einem Kreise wandert. Wir entnehmen dieser Beobachtung den Satz: die Verschiebungen nehmen nach dem Rande hin nach einem einfachen Verhältnis zu, sie sind den Entfernungen ρ vom Mittelpunkt verhältnismäßig. Aus den Formänderungen schließen wir auf die Spannungen und sagen: auch die Spannungen sind den Entfernungen ρ vom Mittelpunkt verhältnismäßig, und schreiben

$$\tau : \tau_0 = \rho : l,$$

wenn wir mit τ die Schubspannung in der Entfernung ρ , mit τ_0 die Schubspannung in der Entfernung l vom Mittelpunkt bezeichnen. Wie bei der Biegung haben wir es hier mit einer veränderlichen Spannung zu tun, d. h. mit einer Spannung, die sich nicht gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt. Wollen wir auf den Fall einer gleichförmigen Verteilung zurückgreifen, so müssen wir einen Querschnittsteil suchen, für den die Spannungen gleich groß sind. Das ist ein Kreisring von verschwindend kleiner Dicke, der in Fig. 55 durch Strichelung hervorgehoben

ist. Wir dürfen für ihn eine gleichmäßige Verteilung mit um so größerer Wahrscheinlichkeit annehmen, je geringer seine Dicke ist, und erreichen die Wirklichkeit, wenn wir den Kreisring als unendlich dünn ansehen. Nach der Erklärung des Begriffes „Spannung“ verstehen wir darunter die Kraft, die auf 1 cm^2 des Querschnittes entfällt; mißt der Ring $(\Delta F) \text{ cm}^2$ und ist τ die Spannung, so übertragen $(\Delta F) \text{ cm}^2$ eine Kraft von $(\Delta F \cdot \tau) \text{ kg}$. Nun soll zwischen den äußeren und inneren Kräften Gleichgewicht herrschen, folglich muß die algebraische Summe ihrer Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt als Drehpunkt, gleich Null sein. Wählt man O als Momentenpunkt, so hat die Teilkraft $(\Delta F \cdot \tau)$, die in der Entfernung ρ von O wirkt, das Moment $\Delta F \cdot \tau \cdot \rho$. Der ganze Querschnitt besteht aber aus unzähligen solcher verschwindend dünnen Kreisringe, die alle an der Kraftübertragung teilnehmen. Die Summe der Drehmomente aller dieser Teilkräfte ist $\sum (\Delta F \cdot \tau \cdot \rho)$; sie muß gleich dem Moment $M_d = P \cdot d$ der äußeren Kräfte sein, so daß sich die Bedingung ergibt

$$M_d = \sum \Delta F \cdot \tau \cdot \rho, \text{ die mit } \tau = \rho \cdot \tau_0 \text{ in } M_d = \tau_0 \cdot \sum \Delta F \cdot \rho^2 \text{ übergeht.}$$

wobei τ_0 als unveränderlicher Faktor, der in jedem Summanden vorkommt, vor das Summenzeichen gezogen ist.¹⁾ $\sum \Delta F \cdot \rho^2$ ist genau so gebaut wie $\sum \Delta F \cdot y^2$ auf S. 21. Der Unterschied zwischen beiden Ausdrücken besteht darin, daß ρ die Entfernung des Flächenteilchens von einem Punkte, y die Entfernung des Flächenteilchens von einer Achse bedeutet. Wir nennen $\sum \Delta F \cdot \rho^2$ ebenfalls Trägheitsmoment des Querschnittes, bezeichnen es aber zum Unterschied gegen das auf eine Achse bezogene als polares Trägheitsmoment; das übliche Zeichen dafür ist J_p . Mit $\sum \Delta F \cdot \rho^2 = J_p$ erhalten wir $M_d = \tau_0 \cdot J_p$, und daraus mit

$$\tau_0 = \frac{\tau_1}{r} \quad M_d = \frac{\tau_1}{r} \cdot J_p = \tau_1 \cdot \frac{J_p}{r}.$$

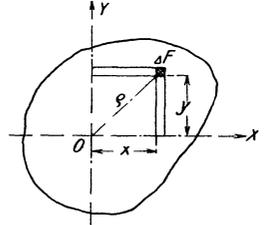


Fig. 56.

$\frac{J_p}{r}$ ist gleich dem polaren Trägheitsmoment dividiert durch die Entfernung der äußersten Faser; wir nennen diesen Ausdruck in Anlehnung an den gleichen Wert auf S. 21 das polare Widerstandsmoment des Querschnittes und bezeichnen ihn mit W_p . Die Maßeinheiten sind für das polare Trägheitsmoment cm^4 , für das polare Widerstandsmoment cm^3 . Mit $\frac{J_p}{r} = W_p$ erhalten wir die Randspannung

$$\tau_1 = \frac{M_d}{W_p}.$$

Die Festigkeitsbedingung erfordert $\tau_1 \leq k_d$, wenn k_d die zulässige Drehfestigkeit in kg/cm^2 bedeutet.

Beziehungen zwischen dem polaren und axialen Trägheitsmoment. In Fig. 56 sei ΔF ein so kleines Flächenteilchen, daß die Entfernung seines Schwerpunktes von O mit ρ zusammenfällt; dann ist $\rho^2 = y^2 + x^2$. Setzt man diesen Wert in J_p ein, so ergibt sich

$$J_p = \sum \Delta F \cdot \rho^2 = \sum \Delta F (y^2 + x^2) = \sum \Delta F \cdot y^2 + \sum \Delta F \cdot x^2.$$

¹⁾ In der Entwicklung auf S. 21 wurde das strengere \int -Zeichen für den Grenzwert einer Summe unendlich vieler und unendlich kleiner Größen statt des Summenzeichens \sum benutzt.

$\sum \Delta F \cdot y^2$ ist das auf die x -Achse bezogene axiale Trägheitsmoment J_x des Querschnittes; $\sum \Delta F \cdot x^2$ ist das auf die y -Achse bezogene axiale Trägheitsmoment J_y des Querschnittes; folglich

$$J_p = J_x + J_y.$$

Für den Kreisquerschnitt ist $J_x = J_y = J$, so daß $J_p = 2 \cdot J$ ist, wobei J der Tafel entnommen wird. Bezeichnet d in cm den Durchmesser des Kreises, so ist:

$$J_p = 2 \cdot J = 2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}; \quad W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Damit ergibt sich die Randspannung $\tau_1 = \frac{M_d}{\frac{\pi d^3}{16}}$.

Die Festigkeitsbedingung $\tau_1 \leq k_d$ erfordert

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot k_d \quad \text{oder} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{M_d}{k_d}}.$$

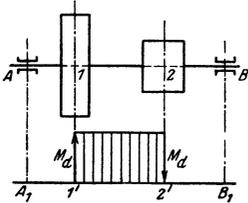


Fig. 57.

Im allgemeinen gibt der Maschinenbauer nicht das Drehmoment unmittelbar an; er sagt, eine Welle überträgt N PS bei n Umläufen in der Minute. Aus N in PS und n in Umläufen pro Minute erhält man

$$M_d = 71\,627 \cdot \frac{N}{n}, \quad \text{gemessen in cmkg.}$$

Für normale Triebwerkwellen aus gewöhnlichem Flußeisen ist $k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$; der Wert ist mit Absicht niedrig gewählt, weil neben der Verdrehung auch Biegung auftritt. Mit

$$M_d = 71\,620 \frac{N}{n} \quad \text{und} \quad k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$$

wird

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{71\,620}{120} \cdot \frac{N}{n}} = \sim 14,5 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}.$$

Beispiele. a) In eine Vorgelegewelle werden $N = 7$ PS durch Scheibe 1 (Fig. 57) hineingeleitet und 7 PS von Scheibe 2 abgenommen bei

$$n = 125 \text{ Uml./min.}; \quad k_d = 120 \text{ kg/cm}^2.$$

Drehmomentenfläche. Die Welle ist von A bis 1 spannungslos, da nur Drehspannungen berücksichtigt werden sollen. In 1 wird das volle Drehmoment

$$M_1 = 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = 71\,620 \cdot \frac{7}{125} = \sim 4000 \text{ cmkg}$$

durch die Nabe in die Welle geleitet. Obwohl die Überleitung längs der ganzen Nabe vor sich geht, nehmen wir in Anlehnung an die Querkraftflächen (S. 26) an, daß M_1 im Punkte 1 auftritt. Da zwischen 1 und 2 keine Änderung des Zustandes eintritt, bleibt M_1 unveränderlich und muß im Punkte 2 gleich M_2 sein. Von 2 bis B ist die Welle wieder spannungslos.

Querschnittabmessung. $k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$ erfordert

$$W_p = \frac{4000}{120} = 33,3 \text{ cm}^3.$$

In die Tafel auf S. 25 gehen wir mit

$$\frac{1}{2} W_p = \frac{1}{2} \cdot 33,3 = \sim 17 \text{ cm}^3$$

und finden als nächsthöheren Wert, auf 0 oder 5 abgerundet,

$$d = 60 \text{ mm} \quad \text{mit} \quad W_p = 2 \cdot 21,21 = 42,4 \text{ cm}^3.$$

Für diesen Querschnitt wird $\max \tau = \frac{4000}{42,4} = \sim 94 \text{ kg/cm}^2$.

b) In dem Punkte 2 einer Welle (Fig. 58) werden N_1 PS bei n Uml./min hineingeleitet und im Punkte 1 N_1 PS, im Punkte 3 N_3 PS entnommen.

Drehmomentenfläche. Die Welle überträgt zwischen 1 und 2 ein Drehmoment $M_1 = 71\,620 \cdot \frac{N_1}{n}$, das wir mit Hilfe eines Momentenmaßstabes von einer Wagerechten aus darstellen. Nehmen wir an, daß dieses Moment linksdrehend sei, so dreht $M_2 = 71\,620 \cdot \frac{N_2}{n}$ rechts herum, d. h. entgegengesetzt. Ist also das linksdrehende Moment M_1 nach oben abgetragen, so muß das rechtsdrehende Moment M_2 nach unten abgetragen werden. Unmittelbar links von 2 ist $M_d = M_1$; unmittelbar rechts von 2 ist $M_d = M_1 - M_2$. Diese Differenz ist negativ, da $M_2 > M_1$ ist. Da zwischen 2 und 3 kein weiteres Drehmoment hinzutritt, bleibt die Drehmomentenlinie zwischen 2 und 3 parallel zur Wagerechten. Ihre Ordinate in 3 muß gleich $M_3 = 71\,620 \cdot \frac{N_3}{n}$ sein. Dem Aufbau nach entspricht die Drehmomentenfläche der Querkraftfläche eines Trägers auf zwei Stützen, der eine Einzellast trägt (Fig. 21). Ebenso wie sich diese Einzellast auf die Stützen verteilt, wird im vorliegenden Falle das Drehmoment M_2 von den Scheiben 1 und 3 aufgenommen.

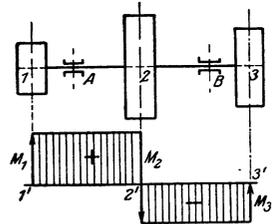


Fig. 58.

Zahlenbeispiel.

c) $N_1 = 40$ PS; $N_2 = 100$ PS; $N_3 = 60$ PS; $n = 175$ Uml./min. Daraus:

$$M_1 = 71\,620 \cdot \frac{N_1}{n} = 71\,620 \cdot \frac{40}{175} = 16\,400 \text{ cmkg},$$

$$M_2 = 71\,620 \cdot \frac{N_2}{n} = 71\,620 \cdot \frac{100}{175} = 41\,000 \quad ,,$$

$$M_3 = 71\,620 \cdot \frac{N_3}{n} = 71\,620 \cdot \frac{60}{175} = 24\,600 \quad ,,$$

Die M_d -Fläche ist in Fig. 58 dargestellt; wir entnehmen ihr als größtes Drehmoment

$\max M_d = M_3 = 24\,600 \text{ cmkg}$, das mit $k_d = 120 \text{ kg/cm}^2$ $W_p = \frac{24\,600}{120} = 205 \text{ cm}^3$ erfordert.

Die Tafel auf S. 25 liefert für $d = 105 \text{ mm}$ $W_p = 2 \cdot 113,65 = 227,3 \text{ cm}^3$, so daß

$$\max \tau = \frac{24\,600}{227,3} = 108 \text{ kg/cm}^2 \text{ wird.}$$

Die Formänderung infolge der Drehung ist durch die Angabe des Winkels gekennzeichnet, um den sich zwei Querschnitte gegeneinander verdrehen. Der

Endquerschnitt B (Fig. 55) verdreht sich gegen den Einspannquerschnitt A um den Winkel BOC , der im Bogen- oder Gradmaß gemessen wird. Nach der Erklärung (S. 8) war γ die Strecke, um die sich zwei Querschnitte im Abstände l gegeneinander verschieben; zwei l cm voneinander entfernte Querschnitte verschieben sich dann um

$$\lambda = l \cdot \gamma; \quad \text{mit } \gamma = \beta \cdot \tau \quad \text{wird } \lambda = l \cdot \beta \cdot \tau.$$

Bei verschwindend kleinen Formänderungen ist aber λ gleich dem Bogen BC . Bezeichnet man den Verdrehungswinkel BOC mit φ , so ist $BC = \lambda = r \cdot \varphi$. Die Gleichsetzung beider Werte λ ergibt

$$\varphi = \frac{l}{r} \cdot \beta \cdot \tau \quad \text{oder mit } \tau = \frac{M_d}{J_p} \cdot r,$$

$$\varphi = \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot l}{J_p} \quad \text{im Bogenmaß gemessen,}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_d \cdot l \cdot \beta}{J_p} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot l}{J_p} \quad \text{im Gradmaß gemessen.}$$

Der Verdrehungswinkel zweier Querschnitte im Abstände $l = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ wird

$$\varphi_0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{M_d \cdot 100}{J_p} \quad \text{im Gradmaß gemessen.}$$

Für Triebwerkwellen soll $\varphi_0 \cong \frac{1}{4}^\circ/\text{m}$ sein. Mit $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ und $G = 800\,000 \text{ kg/cm}^2$

erhält man
$$d = 0,734 \cdot \sqrt[4]{M_d} = \sim 12 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

In unserm Beispiel (a) wird $\varphi_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{800\,000} \cdot \frac{4000 \cdot 100}{2 \cdot 63,62} = 0,23^\circ/\text{m}.$

Beträchtliche Werte erreicht der Verdrehungswinkel bei den Spindeln der Bohrmaschinen. Nach Versuchen von Prof. Schlesinger¹⁾ hatte die Spindel der Type 21 IV E der Ludwig Loewe-A. G. mit Bohrkegel Morse 5 bei 9 PS Kraftbedarf und 50 mm Bohrerdurchmesser einen Verdrehungswinkel von 1° ; die Spindel der Type H T S von Blau & Co. mit Bohrkegel Morse 4 bei 6 PS und 50 mm Bohrerdurchmesser zeigte sogar $1^\circ 50'$ Verdrehung. Infolge des durch den Schnittwiderstand auftretenden Drehmomentes erfahren auch die Spiralbohrer selbst eine Verdrehung; da ihr Querschnitt durch die Nuten stark geschwächt ist, federn sie im Betriebe auf.

VII. Zusammengesetzte Festigkeit, Normal- und Schubspannungen.

Strenggenommen gehören die Beispiele der schiefen Belastung (S. 42) und die des außersachsen Druckes (S. 50) in die Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit. Sie konnten mit den bisherigen Hilfsmitteln bewältigt werden, weil es sich um gleichartige Spannungen — Normalspannungen — handelte. Treten

¹⁾ G. Schlesinger: Bohrmaschinen. Werkstattstechnik, 15. Juli 1923, Heft 14.

jedoch Normal- und Schubspannungen gleichzeitig auf, wie es beispielsweise bei der auf Biegung und Drehung beanspruchten Welle der Fall ist, so dürfen die Einzelspannungen weder der Größe noch der Größe und Richtung nach addiert werden.

Der einachsige Spannungszustand.

In Fig. 59 ist ein Teil eines Flacheisenstabes herausgeschnitten dargestellt, der durch die Zugkräfte P belastet ist. Mit F als Inhalt des Querschnittes wird $\sigma_x = \frac{P}{F}$ die Normalspannung in der Richtung der Stabachse (x -Achse). Die Dehnung des Stabes in Richtung x ist $\varepsilon_x = \alpha \cdot \sigma_x$, in Richtung y die Quersammenziehung

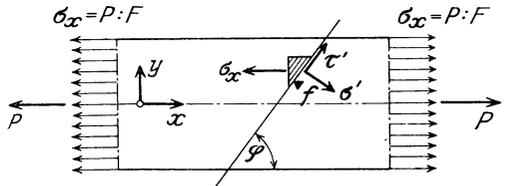


Fig. 59.

$$\varepsilon_y = \frac{1}{m} \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{m} \cdot \alpha \cdot \sigma_x.$$

Um den Spannungszustand in einem unter dem Winkel φ gegen die Stabachse geneigten Schnitt zu untersuchen, denken wir die in dem Schnitt auftretenden Spannungen in die Normalspannung σ' und die Schubspannung τ' zerlegt. Ein herausgeschnittenes Stabteilchen muß unter den als äußere Kräfte aufgefaßten Spannungen im Gleichgewicht sein. Ist die Hypotenusenfläche f ein Flächenteilchen der schrägen Schnittfläche, so erfordern die beiden ersten Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$

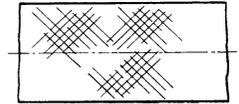


Fig. 60.

$$\begin{aligned} f \cdot \sin \varphi \cdot \sigma_x - f \cdot \sigma' \cdot \sin \varphi - f \cdot \tau' \cdot \cos \varphi &= 0, \\ f \cdot \sigma' \cdot \cos \varphi - f \cdot \tau' \cdot \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

wobei $f \cdot \sin \varphi$ die Kathetenfläche in Richtung y und $f \cdot \cos \varphi$ die Kathetenfläche in Richtung x bedeutet. Die Erweiterung der ersten Gleichung mit $\sin \varphi$, der zweiten mit $\cos \varphi$ liefert

$$\begin{aligned} \sigma' \cdot \sin^2 \varphi + \tau' \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi \\ \sigma' \cdot \cos^2 \varphi - \tau' \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= 0 \\ \frac{\sigma' \cdot \sin^2 \varphi + \tau' \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sigma' (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} &= \frac{\sigma_x \cdot \sin^2 \varphi}{\sigma_x \cdot \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

und daraus mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \dots \sigma' = \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot (1 - \cos 2\varphi)$. Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\tau' \sin \varphi = \sigma' \cos \varphi = \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi = \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \text{ daraus } \tau' = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \sin 2\varphi.$$

Für die Schnittrichtung $\varphi = 90^\circ$ wird $\sigma' = \sigma_x$ die größte Normalspannung, während die Schubspannung $\tau' = 0$ wird. $\sigma' = \sigma_x$ für $\varphi = 90^\circ$ heißt Hauptspannung. Die größte Schubspannung τ' tritt in einem Schnitt unter $\varphi = 45^\circ$, d. h. $2\varphi = 90^\circ$, auf; sie wird $\max \tau' = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x$. Aus dieser Gleichung läßt sich die Erscheinung der Fließfiguren erklären, die sich beim Zugversuch an einem Stabe mit polierter Oberfläche im Augenblick des Fließens beobachten lassen (Fig. 60). Diese Figuren zeigen zunächst an, daß in dem Prüfstabe eine bleibende Formänderung stattgefunden hat; sie lassen ferner die Auffassung zu, daß diese bleibende Formänderung dadurch entstanden ist, daß der Probekörper einen Grenzwert der Schubspannung überschritten hat, dem die Widerstandsfähigkeit des Baustoffes nicht mehr gewachsen ist. Föppl vertritt deshalb den Standpunkt, daß nicht die größte Normalspannung oder die Hauptspannung den Bruch herbeiführt, sondern die mit der Hauptspannung verbundene,

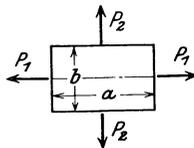


Fig. 61a.

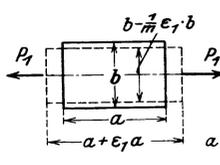


Fig. 61b.

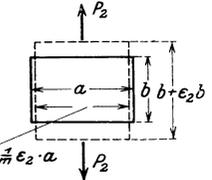


Fig. 61c.

den Bruch herbeiführt, sondern die mit der Hauptspannung verbundene,

wenn auch nur halb so große Schubspannung in Richtung der Fließfiguren. Überträgt man die Gleichung $\max \tau' = 0,5 \sigma_x$ auf die zulässigen Spannungen, so erhält man

$$\tau_{zul} = 0,5 \cdot \sigma_{zul}.$$

Der zweiachsige Spannungszustand.

Wir betrachten ein Stabteilchen (Fig. 61), das nach zwei aufeinander senkrechtstehenden Richtungen durch die Kräfte P_1 und P_2 belastet ist, und finden die resultierende Formänderung als Summe der Einzelformänderungen nach dem Überlagerungsgesetz. Infolge der Kräfte P_1 ist ϵ_1 die Dehnung in Richtung P_1 und $(-\frac{1}{m} \cdot \epsilon_1)$ in Richtung P_2 . Infolge der Kräfte P_2 ist ϵ_2 die Dehnung in Richtung P_2 und $(-\frac{1}{m} \cdot \epsilon_2)$ in Richtung P_1 . Als Gesamtdehnung in Richtung P_1 erhält man

$$\epsilon_I = \epsilon_1 - \frac{1}{m} \epsilon_2 \quad \text{und in Richtung } P_2 \quad \epsilon_{II} = \epsilon_2 - \frac{1}{m} \cdot \epsilon_1.$$

Ersetzt man nach dem Hookeschen Gesetz die Dehnungen ϵ_1 und ϵ_2 durch die sie hervorrufenden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 , so erhält man

$$\frac{\epsilon_I}{\alpha} = \sigma_1 - \frac{1}{m} \cdot \sigma_2 \quad \text{und} \quad \frac{\epsilon_{II}}{\alpha} = \sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1$$

als Spannungen, die bei einem einachsigen Spannungszustande die gleichen Dehnungen hervorrufen würden wie σ_1 und σ_2 beim zweiachsigen. Diese gedachten Spannungen heißen reduzierte Spannungen und wir schreiben

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_2, \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{red} = \sigma_2 - \frac{1}{m} \sigma_1.$$

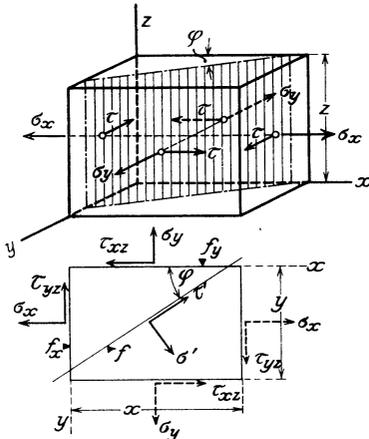


Fig. 62.

Ebene und die beiden gleich großen, aufeinander senkrechtstehenden Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} . Schneidet man ein sehr kleines Quader mit den Seitenkanten x, y und z heraus und bringt die Spannungen an den Schnittflächen als äußere Kräfte an, so muß das Quader unter dem Einfluß dieser Kräfte im Gleichgewicht sein. Die erste und zweite Gleichgewichtsbedingung, Summe aller Kräfte in den Richtungen x und y gleich Null, ist erfüllt, denn es ist mit f_x und f_y als Kantenflächen

$$f_x \sigma_x - f_x \sigma_x = 0; \quad f_y \sigma_y - f_y \sigma_y = 0; \quad f_y \tau_{yz} - f_y \tau_{yz} = 0; \quad f_x \tau_{xz} - f_x \tau_{xz} = 0.$$

Die dritte Gleichgewichtsbedingung, Summe aller Momente gleich Null, erfordert

$$f_y \cdot \tau_{xz} \cdot y - f_x \cdot \tau_{yz} \cdot x = 0,$$

$f_x = y \cdot z$ und $f_y = x \cdot z$ eingesetzt ergibt

$$\tau_{xz} \cdot x \cdot y \cdot z - \tau_{yz} \cdot x \cdot y \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad \tau_{xz} = \tau_{yz}.$$

Nummehr soll der schiefe Schnitt f gelegt werden, der gegen die xz -Ebene um den Winkel φ geneigt ist; der Spannungszustand ist zu untersuchen. Fassen wir wieder die Spannungen als äußere Kräfte auf, so muß das abgeschnittene dreiseitige Prisma mit den Mantelflächen f_x, f_y und f im Gleichgewicht sein. Es seien σ' die

Normalspannung, τ' die Schubspannung der schrägen Schnittfläche, dann erfordert die erste Gleichgewichtsbedingung $\Sigma X = 0$

$$f \cdot \sigma' \sin \varphi + f \cdot \tau' \cdot \cos \varphi = f_x \cdot \sigma_x + f_y \cdot \tau_{xz};$$

aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Y = 0$ erhält man

$$f \cdot \sigma' \cdot \cos \varphi - f \cdot \tau' \cdot \sin \varphi = f_y \cdot \sigma_y + f_x \cdot \tau_{yz}.$$

Wir setzen $f_x = f \cdot \sin \varphi$; $f_y = f \cdot \cos \varphi$; $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau$ und schreiben

$$f \cdot \sigma' \cdot \sin \varphi + f \cdot \tau' \cdot \cos \varphi = f \cdot \sigma_x \cdot \sin \varphi + f \cdot \tau \cdot \cos \varphi,$$

$$f \cdot \sigma' \cdot \cos \varphi - f \cdot \tau' \cdot \sin \varphi = f \cdot \sigma_y \cdot \cos \varphi + f \cdot \tau \cdot \sin \varphi.$$

oder, da sich f heraushebt:

$$\text{I. } \sigma' \cdot \sin \varphi + \tau' \cdot \cos \varphi = \sigma_x \cdot \sin \varphi + \tau \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{II. } \sigma' \cdot \cos \varphi - \tau' \cdot \sin \varphi = \sigma_y \cdot \cos \varphi + \tau \cdot \sin \varphi.$$

Beide Gleichungen ergeben nach σ' und τ' aufgelöst

$$\sigma' = \sigma_x \cdot \sin^2 \varphi + \sigma_y \cdot \cos^2 \varphi + 2 \tau \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$\tau' = \sigma_x \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Da der Fall, daß zwei Normalspannungen σ_x und σ_y gleichzeitig auftreten, im Maschinenbau selten ist, vereinfachen wir die gestellte Aufgabe und nehmen nur eine Normalspannung $\sigma_x = \sigma$ an. Dann gehen beide Gleichungen mit $\sigma_y = 0$ über in

$$\sigma' = \sigma \cdot \sin^2 \varphi + 2 \tau \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \tau \cdot \sin 2\varphi,$$

$$\tau' = \sigma \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot \cos 2\varphi$$

oder

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau \cdot \sin 2\varphi$$

$$\tau' = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau \cdot \cos 2\varphi.$$

Die Größe der in der schrägen Schnittfläche auftretenden Spannungen ist von dem Neigungswinkel φ abhängig. Wir fragen, für welchen Winkel φ erreicht die Normalspannung σ' ihren größten Wert und wie groß ist dieser? Nach den Regeln der Differentialrechnung erhält man die Bedingungsgleichung für φ , wenn man den ersten Differentialquotienten $\frac{d\sigma'}{d\varphi}$ gleich Null setzt.

$$\frac{d\sigma'}{d\varphi} = \sigma \cdot \sin 2\varphi + 2\tau \cdot \cos \varphi = 2\tau' = 0$$

ergibt, daß σ' seinen größten Wert annimmt, wenn die Schubspannung $\tau' = 0$ wird. $\max \sigma'$ heißt Hauptspannung, ihre Richtung Hauptrichtung. Aus

$$\sigma \cdot \sin 2\varphi + 2\tau \cdot \cos \varphi = 0 \quad \text{folgt} \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

und daraus $2\varphi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2\tau}{\sigma} \right) + n \cdot \pi$ oder $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2\tau}{\sigma} \right) + n \cdot \frac{\pi}{2}$. Es gibt demnach zwei aufeinander senkrechtstehende Schnittflächen, für die $\tau' = 0$ wird. Die Hauptspannungen stehen auf diesen Schnittflächen senkrecht.

Aus $\sigma \cdot \sin 2\varphi + 2\tau \cdot \cos \varphi = 0$ folgt ferner

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} \quad \text{und} \quad \cos 2\varphi = \mp \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}.$$

Setzt man beide Werte in die Gleichung für σ' ein, so erhält man

$$\max \sigma' = \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \text{und} \quad \min \sigma' = \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Mit der Ermittlung der Hauptspannungen ist aber die Frage nach der größten Beanspruchung nicht gelöst. Es käme jetzt darauf an zu untersuchen, welche Spannung den Bruch herbeiführt. Darüber haben wir zur Zeit zwei Anschauungen; die ältere, von Poncelet herrührende sagt, der Bruch erfolgt, wo die größte

Dehnung auftritt. Sie ist noch heute im deutschen Maschinenbau üblich. Nach ihr wäre also die reduzierte Spannung

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_1 - \frac{1}{m} \cdot \sigma_2; \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\text{red}} = \sigma_2 - \frac{1}{m} \cdot \sigma_1$$

maßgebend. Setzt man σ_1 und σ_2 ein, so erhält man

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m} \cdot \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \dots \quad \text{(I)}$$

$$m = \frac{10}{3} \quad \text{liefert} \quad \sigma_{\text{red}} = 0,35 \cdot \sigma \pm 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \dots \quad \text{(Ia)}$$

Die Festigkeitsbedingung für Stäbe, die gleichzeitig die Normalspannung σ und die Schubspannung τ erfahren, schreibt man in der Form

$$\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_{\text{zulässig}}$$

und behandelt dabei die reduzierte Spannung so, als ob sie eine wirkliche Spannung wäre. Wie wenig dieser Weg mit der Erfahrung übereinstimmt, lehrt folgende Untersuchung. Setzt man in Gleichung I die Schubspannung $\tau = 0$, so wird $\sigma_{\text{red}} = \sigma$; der ebene Spannungszustand wird zum einachsigen. Setzt man dagegen $\sigma = 0$, so wird $\sigma_{\text{red}} = \frac{m+1}{m} \cdot \tau$ und damit $\sigma_{\text{zul}} = \frac{m+1}{m} \cdot \tau_{\text{zul}}$.

Für Metalle ist $m = \frac{10}{3}$; damit erhält man $\sigma_{\text{zul}} = 1,3 \cdot \tau_{\text{zul}}$ oder $\tau_{\text{zul}} = 0,77 \sigma_{\text{zul}}$.

Dieser Wert ist aber durch neuere Versuche nicht bestätigt worden, vielmehr ergab sich $\tau_{\text{zul}} = 0,5 \sigma_{\text{zul}}$, wie wir bereits für den schiefen Schnitt beim einachsigen Spannungszustand gefunden hatten. Um Theorie und Erfahrung in Einklang zu bringen, hat v. Bach in Gleichung (I) einen Faktor α_0 eingeführt; er schreibt

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2} \quad \dots \quad \text{(II)}$$

und nennt $\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\frac{m+1}{m} \cdot \tau_{\text{zul}}}$ das Anstrengungsverhältnis. Für das Verhältnis

$\tau_{\text{zul}} = \frac{m}{m+1} \sigma_{\text{zul}}$, wie Gleichung (I) oben ergab, wird $\alpha_0 = 1$; für $\tau_{\text{zul}} = 0,5 \cdot \sigma_{\text{zul}}$ wird $\alpha_0 = 1,54$. Mit $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \cdot \sigma \pm 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \cdot \tau)^2} \quad \dots \quad \text{(IIa)}$$

Zu einem wesentlich andern Ergebnis kommt O. Mohr¹⁾ in seiner 5. Abhandlung: „Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch des Materials?“, worin er den dreiachsigen Spannungszustand untersucht und feststellt, daß σ_y auf die Bruchgefahr ohne Einfluß ist, wenn σ_x die algebraisch größte, σ_z die algebraisch kleinste Hauptspannung ist. Föppl wendet die Mohrsche Theorie auf den ebenen Spannungszustand an und nimmt für Wellenstahl als bewiesen an, daß die Bruchgefahr von $\sigma_1 - \sigma_2$ abhängt. $\sigma_1 - \sigma_2$ ist gleich der Summe der absoluten Werte σ_1 und σ_2 , wenn σ_2 negativ ist. Für Wellenstahl oder

¹⁾ Otto Mohr: Technische Mechanik. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn.

ähnliche Stoffe erhält man die reduzierte Spannung für den Fall, daß die Hauptspannungen entgegengesetzte Vorzeichen haben,

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Erfahrung am besten überein und sollte unbedingt den Gleichungen I und II vorgezogen werden.

Biegung und Drehung. Eine Welle ist gleichzeitig auf Biegung und Drehung beansprucht, wenn die Leistung durch Riemenscheiben, Seilscheiben, Zahnräder usw. übertragen wird. Die angreifenden Kräfte bilden dann ein Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabachse geht (Biegung), und ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht (Drehung). Das biegende Kräftepaar habe das Moment M_b , das drehende Kräftepaar das Moment M_d , dann ruft M_b die Normalspannung $\sigma = M_b : W$, M_d die Schubspannung $\tau = M_d : W_p$ hervor, die zu einer reduzierten Spannung zusammengesetzt werden. Zu beachten ist, daß σ und τ zusammengehörige Spannungen sind. Beim Kreisquerschnitt fallen die Punkte der größten Normalspannung und die Punkte der größten Schubspannung in die Oberfläche des Stabes, also an den Rand des Querschnittes.

Mit $W = \frac{\pi d^3}{32}$ und $W_p = 2 \cdot W = \frac{\pi d^3}{16}$; d. h. $4 W^2 = W_p^2$ wird

$$\sigma_{\text{Bach}} = 0,35 \cdot \frac{M_b}{W} + 0,65 \cdot \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4 \left(\alpha_0 \cdot \frac{M_d}{W_p}\right)^2} \cong k_b,$$

$$W \cdot k_b \cong 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2}.$$

Da die rechte Seite der Gleichung ein Moment darstellt, so nennt man sie ideelles Biegemoment.

Die Gleichung (III) liefert für den kreisförmigen Querschnitt

$$\sigma_{\text{Mohr}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_b}{W}\right)^2 + 4 \left(\frac{M_d}{W_p}\right)^2} = \text{oder } W \cdot k_b \cong \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Schraubenspindel einer Spindelpresse. Die Kraft sei $Q = 10000$ kg; die Reibungsziffer $\mu = 0,1$; der innere Schraubendurchmesser $d_1 = 55$ mm; der äußere $d_2 = 65$ mm; der mittlere $d = 60$ mm; die Steigung betrage $h = 20$ mm. Aus $\text{tg } \alpha = h : \pi d = 20 : 60 \cdot \pi = 0,11$ erhält man den Steigungswinkel $\alpha = 6^\circ 20'$. Der Reibungsziffer $\mu = 0,1 = \text{tg } \varrho$ entspricht $\varrho = 5^\circ 45'$, so daß $\alpha + \varrho = 11^\circ 5'$ wird. Das aufzuwendende Drehmoment beträgt

$$M_d = Q \cdot r \cdot \text{tg}(\alpha + \varrho) = 10000 \cdot 3 \cdot 0,196 = 5880 \text{ cmkg}.$$

Für $d_2 = 55$ mm ist $W = 16,334 \text{ cm}^3$, also $W_p = 2W = 32,67 \text{ cm}^3$, daraus

$$\tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{5880}{32,67} = 180 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Normalspannung σ wird $\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{10000}{23,76} = 420 \text{ kg/cm}^2$.

Gleichung (Ia) liefert

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \cdot 420 + 0,65 \cdot \sqrt{420^2 + 4 \cdot 180^2} = \sim 510 \text{ kg/cm}^2,$$

Gleichung (IIa) liefert mit $\sigma_{\text{zul}} = 600 \text{ kg/cm}^2$; $\tau_{\text{zul}} = 400 \text{ kg/cm}^2$ und

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{1,3 \cdot \tau_{\text{zul}}} = \frac{600}{1,3 \cdot 400} = 1,15,$$

$$\sigma_{\text{red}} = 0,35 \cdot 420 + 0,65 \cdot \sqrt{420^2 + 4 \cdot (1,15 \cdot 180)^2} = 530 \text{ kg/cm}^2$$

Gleichung (III) liefert

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{420^2 + 4 \cdot 180^2} = 555 \text{ kg/cm}^2.$$

Erachtet man $\sigma_{zul} = 600 \text{ kg/cm}^2$ als höchste Grenze, so wäre die Spindel ausreichend bemessen.

Vorgelegewelle (Fig. 57). Für die genauere Berechnung der Welle sind noch anzugeben: Die Entfernungen $A \div 1 = 250$; $1 \div 2 = 400 \text{ mm}$; $2 \div B = 300 \text{ mm}$. Der Riemenzug der Scheibe 1 sei wagerecht, der der Scheibe 2 unter 45° gerichtet; die Riemengeschwindigkeit $v = 6 \text{ m/sek}$.

Aus
$$v = \frac{\pi d_1 n}{60} \text{ folgt } d_1 = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 6}{\pi \cdot 125} = 0,915 \text{ m}.$$

Wir wählen $d_1 = 900 \text{ mm}$; $r_1 = 450 \text{ mm}$ und ermitteln die Umfangskraft U_1 aus

$$M_d = U_1 \cdot r_1 = 71\,620 \cdot \frac{N}{n} = 71\,620 \cdot \frac{7}{125} = \sim 4\,000 \text{ cmkg}$$

zu $U_1 = \sim 90 \text{ kg}$. Für die Wellenbelastung wird $P_1 = 3 U_1 = 270 \text{ kg}$. In gleicher Weise erhält man bei $d_2 = 500 \text{ mm}$

$$M_d = U_2 \cdot r_2 = 4\,000 \text{ cmkg}; \text{ also } U_2 = 160 \text{ kg}; P_2 = 480 \text{ kg}.$$

Die wagerechte Seitenkraft wird $H_2 = P_2 \cdot \cos 45^\circ = 480 \cdot 0,707 = \sim 340 \text{ kg}$, die senkrechte Seitenkraft wird $V_2 = P_2 \cdot \sin 45^\circ = 480 \cdot 0,707 = \sim 400 \text{ kg}$, wenn man das Scheibengewicht mit rd. 60 kg einsetzt.

Demnach ist die Welle belastet:

in wagerechter Richtung mit $H_1 = P_1 = 270 \text{ kg}$

und $H_2 = 340 \text{ kg}$,

in senkrechter Richtung mit $V_1 = G_1 = 75 \text{ kg}$

und $V_2 = 400 \text{ kg}$.

Diese Belastungen ergeben:

in wagerechter Richtung $A_H = 307 \text{ kg}$; $B_H = 303 \text{ kg}$;

$$M_1 = 307 \cdot 25 = 7\,675 \text{ cmkg};$$

$$M_2 = 303 \cdot 30 = 9\,090 \text{ cmkg},$$

in senkrechter Richtung $A_V = 182 \text{ kg}$; $B_V = 294 \text{ kg}$;

$$M'_1 = 182 \cdot 25 = 4\,550 \text{ cmkg};$$

$$M'_2 = 294 \cdot 30 = 8\,820 \text{ cmkg}.$$

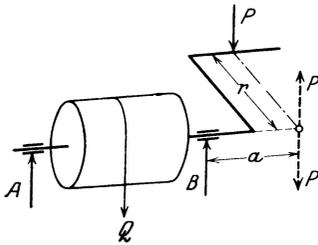


Fig. 63.

Das größte resultierende Moment tritt im Punkte 2 auf und wird

$$M_b = \sqrt{M_2^2 + M_2'^2} = \sqrt{9\,090^2 + 8\,820^2} = \sim 12\,700 \text{ cmkg}.$$

$$M_d = 71\,620 \cdot \frac{7}{125} = \sim 4\,000 \text{ cmkg}.$$

Das ideelle Biegemoment wird

$$M_I = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = 0,35 \cdot 12\,700 + 0,65 \cdot \sqrt{12\,700^2 + 4\,000^2} = 13\,150 \text{ cmkg}$$

$$M_{II} = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2} = 0,35 \cdot 12\,700 + 0,65 \cdot \sqrt{12\,700^2 + (1,1 \cdot 4\,000)^2} = 13\,200 \text{ cmkg},$$

wenn $\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}}{1,3 \cdot \tau_{zul}} = \frac{400}{1,3 \cdot 280} = 1,1$ (Fall II, S. 62),

$$M_{III} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \sqrt{12\,700^2 + 4\,000^2} = 13\,320 \text{ cmkg}.$$

Den ungünstigsten Wert der reduzierten Spannung liefert M_{III} . Es war S. 57 $d = 60 \text{ mm}$; $W = 21,21 \text{ cm}^3$; damit ergibt sich

$$\sigma_{III} = \frac{M_{III}}{W} = \frac{13\,320}{21,21} = \sim 630 \text{ kg/cm}^2,$$

ein Wert, der die zulässige Grenze nach Bach überschreitet.

Kurbel. Eine Handkurbel nach Fig. 63 werde von zwei Mann bedient, die dauernd eine Umfangskraft von je 15 kg aufwenden. Somit $P = 30 \text{ kg}$; $r = 35 \text{ cm}$; $a = 20 \text{ cm}$, so daß

$$M_b = P \cdot a = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cmkg}; \quad M_d = P \cdot r = 30 \cdot 35 = 1\,050 \text{ cmkg}.$$

Die ideellen Biegemomente werden $M_I = 0,35 M_b + 0,65 \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$
 $= 0,35 \cdot 600 + 0,65 \cdot \sqrt{600^2 + 1050^2} = 995 \text{ cmkg}.$

$$M_{II} = 0,35 \cdot M_b + 0,65 \cdot \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 \cdot M_d)^2} = 0,35 \cdot 600 + 0,65 \cdot \sqrt{600^2 + (1,1 \cdot 1050)^2}$$

$$= 1060 \text{ cmkg},$$

wenn $k_b = 400, k_d = 280 \text{ kg/cm}^2; \alpha_0 = \frac{k_b}{1,3 \cdot k_d} = \frac{400}{1,3 \cdot 280} = 1,1 \text{ ist.}$

$$M_{III} = \sqrt{M_b^2 + M_d^2} = \sqrt{600^2 + 1050^2} = 1210 \text{ cmkg}.$$

Aus $M_{III} = W \cdot k_b$ folgt $W = 1210 : 400 = \sim 3 \text{ cm}^3$ mit $d = 35 \text{ mm}.$

Drehbankspindel. Der auf S. 32 durchgeführte Festigkeitsnachweis ist zu ergänzen, da zu der Biegungsbeanspruchung noch Drehung tritt. Mit den Abmessungen der Fig. 29 wird das Drehmoment im Punkte I

$$M_d = 1950 \cdot \frac{145,2}{2} = \sim 142\,000 \text{ cmkg},$$

das Biegemoment $M_b = 2000 \cdot 34,5 - 400 \cdot 28,5 - 950 \cdot 12 = \sim 46\,000 \text{ cmkg},$
 dann wird das ideelle Biegemoment nach Mohr

$$M_{\text{Mohr}} = \sqrt{46\,000^2 + 142\,000^2} = \sim 150\,000 \text{ cmkg}.$$

Der Querschnitt ist kreisringförmig mit 220 mm Außen- und 90 mm Innendurchmesser;

$$J_{22} = 11\,499 \text{ cm}^4; J_y = 322 \text{ cm}^4; J = 11\,177 \text{ cm}^4; W = 11\,177 : 11 = 1016 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma_{\text{Mohr}} = 150\,000 : 1016 = 148 \text{ kg/cm}^2.$$

VIII. Die Festigkeit der Federn.

Die Blattfeder. Unter einer Blattfeder versteht man einen Stab aus gut federndem Stahl, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, und dessen Dicke im Vergleich zur Länge sehr gering ist. Wir behandeln sie wie einen Freitrag

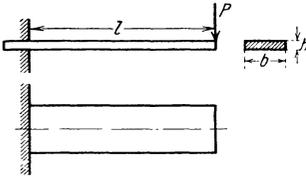


Fig. 64.

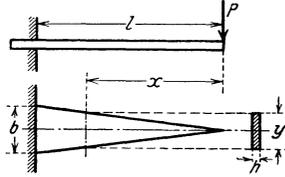


Fig. 65.

(S. 36) mit rechteckigem Querschnitt und unterscheiden Federn mit gleichbleibendem Querschnitt oder Rechteckfedern und Federn mit dreieckförmig verjüngtem Querschnitt oder Dreieckfedern. In beiden Fällen (Fig. 64 und 65) ist das größte Biegemoment $M_b = P \cdot l$; das Widerstandsmoment des Querschnittes an der Einspannstelle ist $W = \frac{1}{6} b h^2$. Die Festigkeitsbedingung

$$\sigma = \frac{M_b}{W} \leq k_b \text{ liefert } P = \frac{b h^2}{6} \cdot \frac{k_b}{l}$$

als Tragfähigkeit bei den Federn. Die Durchbiegung ergibt sich nach S. 36 für die

Rechteckfeder $f = \frac{P l^3}{3 E J}$ oder mit $J = \frac{b h^3}{12}$ $f = \frac{4 l^3}{b h^3} \cdot \frac{P}{E} = \frac{2 l^2 k_b}{3 h E}.$

Für die Dreieckfeder errechnet sich f als $1/E$ -faches statisches Moment der $(M : J)$ -Fläche, bezogen auf das freie Ende der Feder. Die M -Fläche ist ein Dreieck mit

der Höhe $M = P \cdot l$ in der Einspannstelle. Ist y die Breite der Feder im Abstände x von dem freien Ende, so ist $J_x = \frac{y \cdot h^3}{12}$; das Moment im Punkte x ist $M_x = P \cdot x$,

demnach die Ordinate der $(M:J)$ -Fläche im Punkte x : $\frac{M_x}{J_x} = \frac{P \cdot x \cdot 12}{y h^3}$.

Es verhält sich aber $y : x = b : l$, daraus $y = \frac{b}{l} \cdot x$; folglich

$$\frac{M_x}{J_x} = \frac{P \cdot x \cdot 12 \cdot l}{b \cdot x \cdot h^3} = \frac{12 P \cdot l}{b h^3} = \text{unveränderlich.}$$

Die $(M:J)$ -Fläche ist also ein Rechteck mit der Höhe $\frac{12 P l}{b h^3}$ und der Breite l ,

ihr statisches Moment, bezogen auf das freie Ende des Trägers, ist das Produkt aus Flächeninhalt und Abstand des Schwerpunktes, demnach wird

$$f = \frac{1}{E} \cdot l \cdot \frac{12 P \cdot l}{b h^3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{6 P l^3}{b h^3 \cdot E}.$$

Fig. 66.

Ersetzt man $\frac{b h^3}{12}$ durch J , so wird $f = \frac{P l^3}{2 E J} = \frac{l^2 k_b}{h \cdot E}$.

Beispiel. Eine Blattfeder mit unveränderlichem Querschnitt (Rechteckfeder) soll bei $l = 6$ cm einen Druck von rd. 2,5 kg ausüben; die Durchfederung betrage 5 mm. Es empfiehlt sich, von der Formänderungsbedingung $f = 0,5$ cm auszugehen und das erforderliche Trägheitsmoment zu berechnen.

$$\text{Aus } f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E J} \text{ ergibt sich } J = \frac{P l^3}{3 E f} = \frac{2,5 \cdot 6^3}{3 \cdot 2200000 \cdot 0,5} = \sim \frac{1}{6100} \text{ cm}^4.$$

Wir wählen einen rechteckigen Querschnitt 20×1 mm mit

$$J = \frac{b h^3}{12} = \frac{2 \cdot 1^3}{12 \cdot 1000} = \frac{1}{6000} \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad W = \frac{J \cdot 2}{h} = \frac{1 \cdot 2}{6000 \cdot 0,1} = \frac{1}{300} \text{ cm}^3,$$

so daß die größte Spannung $\sigma = M : W = 2,5 \cdot 6 \cdot 300 = 4500 \text{ kg/cm}^2$ wird. Damit das erforderliche Trägheitsmoment genau innegehalten wird, müßte die Breite der Feder

$$b = \frac{J \cdot 12}{h^3} = \frac{12 \cdot 1000}{6100 \cdot 1} = 1,97 \text{ cm}$$

sein; andernfalls beträgt der Federdruck bei einer Anspannung von 5 mm

$$P = \frac{3 \cdot E J \cdot f}{l^3} = \frac{3 \cdot 2200000 \cdot 0,5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6000} = 2,54 \text{ kg}.$$

Die Spannung von $\max \sigma = 4500 \text{ kg/cm}^2$ darf bei bestem Federstahl mit $K_z = 18000 \text{ kg/cm}^2$ für zulässig erachtet werden, da die Sicherheit noch $\varrho = 18000 : 4500 = 4$ betragen würde.

Ein Querschnitt $40 \times 0,8$ mm hat

$$J = \frac{b h^3}{12} = \frac{4 \cdot 0,8^3}{12} = \frac{1}{5860} \text{ cm}^4; \quad W = \frac{1}{5860 \cdot 0,04} = \frac{1}{234,4} \text{ cm}^3;$$

die Feder hat $\max \sigma = 2,5 \cdot 6 \cdot 234,4 \approx 3500 \text{ kg/cm}^2$. Bei der geforderten Durchbiegung von 5 mm wird der Federdruck

$$P = \frac{3 \cdot EJ \cdot f}{l^3} = \frac{3 \cdot 2200000 \cdot 0,5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5860} = 2,6 \text{ kg}.$$

Selten wird man der Feder die Form Fig. 64 geben; in den meisten Fällen erhält sie im ungespannten Zustande gekrümmte Gestalt (Fig. 66), die sich beim Spannen streckt. Streng genommen dürften unsere Rechenverfahren nicht angewendet werden, weil diese Feder ein Stab mit gekrümmter Achse ist. Die Ergebnisse sind nur angenähert richtig.

Die zylindrische Schraubenfeder mit rundem Querschnitt. (Fig. 67.) Da diese Feder aus Stahldraht auf einen Dorn schraubenförmig aufgewunden wird, heißt sie auch gewundene Feder; die Werkstatt pflegt sie Spiralfeder zu nennen. Im allgemeinen liegen die einzelnen Windungen so dicht aneinander bei geringer Steigung, daß man ohne erheblichen Fehler die Windungsfläche als eben und senkrecht zur Stabachse ansehen darf. Legt man durch die Federachse einen beliebigen Schnitt parallel zur Federachse und bringt im Schwerpunkt des kreisförmigen Querschnittes zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte P an, so erhält man in dem Querschnitt eine abwärts gerichtete Einzelkraft P und ein Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot r$. Die Einzelkraft P ist Querkraft und ruft Schubspannungen hervor. Angenähert ist allein M_d maßgebend. Aus

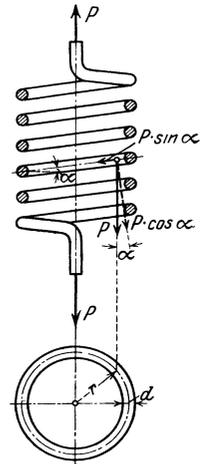


Fig. 67.

$$M_d = W_p \cdot k_d \text{ folgt } P = \frac{\pi d^3}{16 \cdot r} \cdot k_d.$$

Der Betrag, um den eine Windung auseinandergezogen wird, ist $f_0 = r \cdot \varphi$, wenn man mit φ den Verdrehungswinkel bezeichnet. Nach S. 58 ist $\varphi = l \cdot \varphi_0$, wobei unter $l = 2 \pi r$ die Länge der gestreckt gedachten Feder, unter φ_0 der Verdrehungswinkel der Längeneinheit zu verstehen ist.

Mit $\varphi_0 = \frac{M_d}{G \cdot J_p}$ und $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ erhält man bei n Windungen

$$f = \frac{2 \pi r \cdot n \cdot P \cdot r \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} \cdot r = \frac{64 n \cdot P \cdot r^3}{G \cdot d^4} = \frac{4 \pi \cdot n \cdot r^2}{d} \cdot \frac{k_d}{G}.$$

Dieselben Gleichungen gelten sinngemäß für Druckfedern.

Beispiele. 1. Eine zylindrische Schraubenfeder habe $2r = 45 \text{ mm}$ Durchmesser bei einer Drahtstärke $d = 1,5 \text{ mm}$ und $n = 12$ Windungen. Welche Beanspruchung und Verlängerung erfährt sie infolge einer Last $P_0 = 1 \text{ kg}$? Aus der Festigkeitsbedingung folgt $\tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{P \cdot r}{W_p} = \frac{1 \cdot 2,25}{2 \cdot 0,000331} \approx 340 \text{ kg/cm}^2$.

Da man bei gut gehärteten Federn, die häufig ge- und entspannt werden, $k_d = 3000 \text{ kg/cm}^2$ zuläßt, so wäre die Höchstbelastung der Feder $P = 9 \text{ kg}$; ihre Verlängerung beträgt

$$f = \frac{2 \pi r n \cdot M_d}{G \cdot J_p} \cdot r = \frac{2 \pi \cdot 2,25 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 2,25}{800000 \cdot 0,00002485} \cdot 2,25 = 21,3 \text{ cm!}$$

Die Feder wäre trotz der geringen Spannung von 340 kg/cm^2 unmöglich. Es empfiehlt sich, von der Formänderungsbedingung auszugehen und z. B. anzusetzen $f = 15 \text{ mm}$ und daraus P zu bestimmen. Aus

$$f = \frac{64 \cdot n \cdot P \cdot r^3}{G \cdot d^4} \quad \text{folgt} \quad P = \frac{G \cdot d^4 \cdot f}{64 \cdot n \cdot r^3} = \frac{800000 \cdot 0,15^4 \cdot 1,5}{64 \cdot 12 \cdot 2,25^3} = \sim 0,8 \text{ kg}.$$

$$\text{Damit ergibt sich } \tau = \frac{M_d}{W_p} = \frac{0,8 \cdot 2,25}{2 \cdot 0,000331} = \sim 3000 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Es ist eine Ventilfeeder zu berechnen, die bei geschlossenem Ventil einen Druck von $P = 3 \text{ kg}$ ausübt; der Hub betrage 5 mm . Gegeben sei $r = 40 \text{ mm}$ als mittlerer Halbmesser der Feder; $k_d = 3000 \div 5000 \text{ kg/cm}^2$.

Der Druck von $P = 3 \text{ kg}$ wird durch eine Vorspannung der Feder erreicht, der eine Verlängerung von $f \text{ cm}$ entsprechen würde. Ein Druck P' bei geöffnetem Ventil entspricht dann einer Verlängerung $f' = (f + 0,5) \text{ cm}$. Die Differenz $P' - P$ soll bei einer gut gewählten Feder möglichst gering sein. Angenommen werden die zulässige Schubspannung k_d und die Windungszahl n .

$$\text{a) } k_d = 3000 \text{ kg/cm}^2; \quad n = 8; \quad G = 800000 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\text{Aus } P \cdot r = W_p \cdot k_d \text{ folgt } W_p = \frac{P \cdot r}{k_d} = \frac{3 \cdot 4}{3000} = 0,004 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Daraus } d = 0,28 \text{ cm mit } W_p = 2 \cdot 0,002155 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Aus } f = \frac{64 \cdot r^3 \cdot P}{d^4 \cdot G} \cdot n = \frac{64 \cdot 4^3 \cdot 3 \cdot 100^4}{28^4 \cdot 800000} \cdot n = 2,5 n \text{ folgt als Verlängerung } f_0 \text{ für 1 Windung } f_0 = 2,5 \text{ cm/Windung bei einem mittleren Federdurchmesser von } 2r = 80 \text{ mm. Für } n = 8 \text{ erhält man } f = 2,5 \cdot 8 = 20 \text{ cm; also } f' = 20,5 \text{ cm.}$$

$$\text{Demnach } P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{20,5}{20} = 3,08 \text{ kg}.$$

Bei $n = 4$ Windungen wird $f = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ cm}$; also $f' = 10,5 \text{ cm}$, folglich

$$P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{10,5}{10} = 3,15 \text{ kg}.$$

$$\text{Die größte Schubspannung ist } \tau = \frac{P \cdot r}{W_p} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 0,002155} = \sim 2800 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Erscheint die Verlängerung für 1 Windung zu groß, so muß der Durchmesser d vergrößert werden. Wir nehmen $d = 0,35 \text{ cm}$ an und erhalten

$$f_0 = \frac{64 \cdot r^3 \cdot P}{d^4 \cdot G} \cdot 1 = \frac{64 \cdot 4^3 \cdot 3 \cdot 100^4}{35^4 \cdot 800000} = 1,025 \text{ cm/Windung.}$$

Bei $n = 8$ erhält man $f = 8 \cdot f_0 = 8 \cdot 1,025 = 8,2 \text{ cm}$; also $f' = 8,7 \text{ cm}$, folglich $P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{8,7}{8,2} = 3,18 \text{ kg}$.

Bei $n = 6$ erhält man $f = 6 \cdot f_0 = 6 \cdot 1,025 = 6,15 \text{ cm}$; also $f' = 6,65 \text{ cm}$, folglich $P' = P \cdot \frac{f'}{f} = 3 \cdot \frac{6,65}{6,15} = 3,25 \text{ kg}$.

$$\text{Die größte Schubspannung wird } \tau = \frac{P \cdot r}{W_p} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 0,00421} = \sim 1500 \text{ kg/cm}^2.$$