Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung

Von

Dr. O. Neugebauer
Assistent am mathematischen Institut
der Universität Göttingen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1926

Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung

Von

Dr. O. Neugebauer
Assistent am mathematischen Institut
der Universität Göttingen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1926

ISBN 978-3-662-40793-6 ISBN 978-3-662-41277-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41277-0

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung dem Wunsche, die logisch-begrifflichen Grundlagen der Mathematik eines der interessantesten Völker des Altertums zu untersuchen. Kap. I ist in erster Linie diesem Thema gewidmet. Von der gewonnenen Einstellung aus beschäftigt sich dann Kap. II mit dem bisher wohl am meisten umstrittenen Problem der ägyptischen Mathematik: der Bruchrechnung. — Über die Gesamtrichtung und Ergebnisse der Arbeit berichtet die Einleitung.

Ich möchte nicht versäumen, Herrn Prof. Courant und Prof. Sethe für ihre immer hilfsbereite Anteilnahme an den Schicksalen dieser Arbeit meinen aufrichtigsten Dank zum Ausdruck zu bringen. Herrn Prof. Sethe verdanke ich insbesondere eine Reihe wertvoller Bemerkungen und Berichtigungen in ägyptologischen Dingen. Ferner gilt mein Dank der Leitung der Göttinger Universitätsbibliothek, die durch das Entgegenkommen, mit dem sie mir ihre Einrichtungen zur Verfügung stellte, meine Arbeit wesentlich gefördert hat. Die Großzügigkeit des Verlages J. Springer hat schließlich das Erscheinen dieser Schrift überhaupt erst ermöglicht.

Göttingen, 6. August 1926. O. Neugebauer.

Inhaltsverzeichnis.

„Es ist eben Mathematik auch eine Wissenschaft, die von M e n s c h e n *betrieben wird, und jede Zeit, sowie jedes Volk hat nur* E i n e n *Geist."*

H. H a n k e l, *Tübingen 1869.*

Einleitung.

Nicht nur die griechische Wissenschaft ist dem Zauber erlegen, den eine tausendjährige Vergangenheit über alles ägyptische Denken gebreitet hatte; auch die moderne Wissenschaft hat erst allmählich lernen müssen, „vorurteilslos" an die Dinge heranzutreten und sie so zu verstehen, wie sie g e w o r d e n sind. Neben die Forderung, nicht alle Phasen eines Prozesses wie Gleichzeitiges und für unser Verständnis Gleichwertiges zu betrachten, tritt die andere, sich soweit als irgend möglich davor zu hüten, uns geläufige moderne Begriffe und Anschauungen auf antike Verhältnisse kritiklos zu übertragen. So selbstverständlich diese beiden Forderungen zu sein scheinen, so schwierig hatten und haben sie es, sich durchzusetzen. Auch in Untersuchungen über die Mathematik der Ägypter ist oft genug gegen sie verstoßen worden; ich brauche etwa nur auf die willkürlichen Konstruktionen von M. Cantor oder Hultsch hinzuweisen. Kritik und Sorgfalt der Historiker der Mathematik haben es in diesem Punkte nicht vermocht, mit der gleichzeitigen philologischen Arbeit Schritt zu halten.

Auch die Mathematik der letzten Jahrhunderte hat eine große Wandlung erfahren; ihre „Arithmetisierung" hat große Fortschritte gemacht und die Untersuchungen über ihre logischen Grundlagen sind in ein entscheidendes Stadium getreten. Beide Richtungen haben den Blick dafür geschärft, den begrifflichen Kern mathematischer Sätze und Operationen herauszuschälen. Es ist klar, daß auch die Geschichte gerade der A n f ä n g e der Mathematik danach streben muß, das Verhältnis zu erkennen, in dem die Begriffe, die in der gegebenen geschichtlichen Entwicklung die ursprünglichen sind, zu jenen Begriffen stehen, die nach modernen Anschauungen diesen Platz in rein logischer Hinsicht einnehmen müßten. In dem Vergleich dieser durch eine mehrtausendjährige wechselvolle Entwicklung getrennten Gedankenreihen liegt ein großer Reiz, um so mehr als sich trotz allen Wechselspiels zwischen Ausbildung klarer Begriffe und Überwucherung durch algorithmischen Schematismus doch auch hier wieder die Macht logischer Notwendigkeit offenbart.

Es war mein Bestreben, beide Tendenzen, sowohl die der historischen wie der mathematischen Wissenschaften, soweit es in meinen Kräften stand, hier zur Geltung zu bringen.

Das wichtigste prinzipielle Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Einsicht in die ausschließlich a d d i t i v e Grundlage der ägyptischen Mathematik, welche der gesamten weiteren Entwicklung ihr spezifisches Gepräge gibt[1]). Für das Verständnis der ägyptischen Mathematik ist

1) Ich muß betonen, daß ich sehr wohl weiß, daß sich der Ausdruck „additiv", wie ich ihn im Folgenden gebrauche, nicht mit absoluter Schärfe umgrenzen läßt und dabei ein gewisses gefühlsmäßiges Moment eine Rolle spielt. Wollte ich diesen Begriff mit Hilfe moderner Terminologie in etwas übertriebener Härte herausarbeiten, so könnte ich sagen: „additiv" heißt ausschließliche Beschränkung auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Es ist also 1 das einzige erzeugende Element dieser Gruppe, während z. B. 2 durch $1 + 1$ d e f i n i e r t ist und nur als abgeleitetes Element anzusehen ist. Obwohl sich selbst eine so extreme Betrachtungsweise in weitem Maße durchführen ließe, will ich es doch vermeiden, historisch Gewordenes zu dogmatisieren; ich muß allerdings dafür in Kauf nehmen, daß meine Ausdrucksweise einen gewissen Spielraum läßt, der erst dadurch auszufüllen ist, daß man sich mit dem gesamten Charakter der aegyptischen Mathematik innerlich vertraut macht.

diese Eigentümlichkeit von größter Bedeutung. Der additive Charakter, herstammend von dem ursprünglichen Zählen, ist wohl das Kennzeichen der primitiven Mathematik eines jeden Volkes; aber gerade beim Ägypter kommt noch eine Eigenschaft hinzu, die uns auf allen Gebieten seiner Kultur immer wieder entgegentritt: er bewahrt, auch in der Weiterentwicklung und schließlichen Umgestaltung einer ursprünglichen Schöpfung, mit größter Zähigkeit ihre Rudimente, er scheut sich mit Vergangenem kurzer Hand zu brechen; lieber wird in mehr oder minder erkennbarer Weise angestückelt als neu gebaut. So wird uns in Ägypten jene Beziehung zur einfachsten Operation, zur Addition, auch in einem schon viel weiter fortgeschrittenen Stadium nicht verlassen und sich als die innere Ursache der großen Umständlichkeit des ägyptischen Rechnens erweisen. Die moderne Gliederung ägyptischer Mathematik nach „Rechnungsarten" und Disziplinen wird damit hinfällig, während die Mannigfaltigkeit der ägyptischen Terminologie nun verständlich ist: Bei der inneren Einheitlichkeit aller mathematischen Methoden kann die Bezeichnung nicht wie bei uns an diese anknüpfen, sondern richtet sich vielmehr nach dem speziellen äußerlichen Charakter des Problems, eine Tendenz, die natürlich durch die wesentlich praktische Einstellung des Ägyptertums nur noch verstärkt wird.

Nach Feststellung dieser Grundlagen wird es notwendig sein, in der oben gekennzeichneten Richtung die weitere Entwicklung zu verfolgen. Insbesondere beabsichtige ich in einer anschließenden Arbeit das weitere Material des mathematischen Papyrus Rhind und der übrigen Quellen zu verwerten.

Erstes Kapitel.

Die begrifflichen Grundlagen der ägyptischen Mathematik.

Der Zweck dieses Kapitels soll es sein, die Grundlagen klarzulegen, auf denen sich das ganze System der ägyptischen Mathematik aufbaut, und zwar soll es sich dabei nicht etwa um die Darstellung bestimmter rechnerischer Methoden, wie sie zur Behandlung gegebener Probleme angewandt werden, handeln, sondern vielmehr darum, zu untersuchen, welches die allgemeine Einstellung mathemathischen Fragen gegenüber ist, aus der heraus sich erst weiterhin der Aufbau der speziellen Methode ergibt.

Ich will im großen und ganzen darauf verzichten, in diesem Kapitel explizite Beispiele zur Stütze der vorgetragenen Anschauungen beizubringen. Das ganze zweite Kapitel dieser Arbeit, das sich mit der Bruchrechnung, dem in jeder Hinsicht wichtigsten Teile der ägyptischen Mathematik, beschäftigt, wird diese Lücke von selbst ausfüllen. Die in Kapitel II vorgenommene Untersuchung ist überhaupt nur möglich, wenn einmal der in Kapitel I dargelegte Standpunkt den Grundlagen der ägyptischen Denkweise gegenüber gewonnen ist. Und die innere Geschlossenheit der in Kapitel II gewonnenen konkreten Ergebnisse muß dann wieder rückwirkend zur Sicherung und Vertiefung der allgemeinen Anschauungen über das Wesen der ägyptischen Mathematik dienen.

§ 1. Die ganzen Zahlen.

Das ägyptische Ziffernsystem ist bekanntlich ein dezimales. Zur Bezeichnung der Einheit dient der einzelne Strich[1] (ı); jede weitere Potenz von 10 (wie hoch damit gegangen wird, ist zu verschiedenen Zeiten verschieden) wird durch ein neues Zeichen ausgedrückt. Innerhalb jeder einzelnen Stufe herrscht das Prinzip, das entsprechende Zeichen so oft zu wiederholen, als es der zugehörige Koeffizient in der dekadischen Entwicklung angibt; die so entstehenden Zeichengruppen werden dann durch einfaches Nebeneinanderstellen in absteigender Reihe additiv verknüpft[2]. Auf Einzelheiten einzugehen ist hier überflüssig, um so mehr als dieses ganze Gebiet eine ausführliche und erschöpfende Darstellung in dem Buche von Sethe „Von Zahlen und Zahlworten" gefunden hat[3].

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die Darstellung der niedrigsten ganzen Zahlen durch die Schrift d. h. die einfache Aneinanderreihung von Strichen (Marken) das unmittelbare Ab-

---

1) Gewöhnlich vertikal gestellt; in älterer Zeit aber auch horizontal (vgl. Erman [1], § 240). Ich erwähne dies nur, weil an ähnliche Vorkommnisse in Babylonien und China etwas weitgehende Hypothesen geknüpft worden sind. (Smith-Karpinski [1], S. 28 f.)

2) Beispiel: 1025 wird 𓆼𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 geschrieben. — Die auf rein graphischer Basis sich vollziehende Umbildung der hieroglyphischen Zeichen in der kursiven Schrift kommt natürlich für das Folgende nicht in Betracht.

3) Vgl. das Literaturverzeichnis am Schluß, Sethe [1].

bild des Zählens ist[1]). Das Hinzufügen neuer Zeichen beim Fortschreiten zu größeren Zahlwerten, entsprechend dem schrittweisen „Weiterzählen um 1", muß aber aus Gründen der Übersichtlichkeit sehr bald ein Ende finden[2]); man bedarf der Ruhepunkte beim Zählen[3]). Von der Anzahl der Finger ausgehend, verlegen die „dezimalen" Systeme diese Cäsur in die Zahl 10, die nun, auch in der Schrift, zur neuen Einheit wird, mit der nach dem alten Prinzip weiter verfahren werden kann. Mit dieser vollen Ausbildung eines (etwa dekadischen) Systems ist der erste große Fortschritt in der praktischen Handhabung der Zahlzeichen getan. Für unser modernes Gefühl scheint damit auch bereits ein multiplikatives Element in die Zahlbezeichnung hineingetragen zu sein. Daß dies, wenigstens in der Schrift, nicht der Fall ist, zeigt sich aber schon daran, daß einerseits in jeder einzelnen Größengruppe die alte „additive Schreibweise" der einfachen Zeichenwiederholung angewandt wird, und daß andrerseits die Aneinanderfügung der einzelnen Gruppen ebenso selbstverständlich als Addition aufgefaßt wird, wie es beim Nebeneinanderschreiben der einzelnen Zeichen geschieht. Es ist eben nach wie vor die naturgemäße direkte Schreibung durch „Aufweisung", wie man sie in Übertragung eines Hilbert'schen Terminus auch nennen könnte, nur vereinfacht durch den technischen Kunstgriff der Verwendung neuer Zeichen.

Mit diesem additivem Charakter im schriftlichen Ausdruck der Zahlen scheint die Sprache, ja selbst gewisse Schreibungen höherer Zahlwerte[4]) im Widerspruch zu stehen. Eine Bezeichnung wie „dreihundert" für $100 + 100 + 100$ scheint in der Tat rein multiplikativ zu sein, so daß z. B. Hankel in seiner Geschichte der Mathematik mit aller Deutlichkeit auf dieses Mißverhältnis zwischen einer primitiven Schreibweise und einem viel fortgeschritteneren sprachlichen Ausdruck hingewiesen hat[5]).

Aber gerade diese tiefe Diskrepanz, die sich bereits in die dunkelsten Anfänge aller Kultur zurückerstrecken müßte, hätte gegen diesen „multiplikativen" Charakter des sprachlichen Ausdruckes vorsichtig machen sollen — „multiplikativ" hierbei natürlich immer im rein mathematischen Sinne als Ausdruck einer neuen Operation verstanden; daß die Sprache nicht mit der Methode der Schrift, nämlich der schrittweise fortgesetzten Aufweisung, übereinstimmt, ist natürlich nicht zu leugnen. Eine solche Übereinstimmung ist aber auch gar nicht zu erwarten, Schrift und Sprache befinden sich nämlich in prinzipiell verschiedener Lage: Während die Schrift in der Aneinanderreihung immer wiederholter Einheiten eine unmittelbare Abbildung der zu zählenden Menge darstellt, so daß der Prozeß des Zählen nun immer wieder Schritt für Schritt an dieser Bildmenge vorgenommen werden kann, so vermag die Sprache nur das Resultat des Zählens zu geben — sie ist nicht, oder doch nur in sehr beschränktem Maße[6]), im Stande, den Prozess des Zählens („eins und eins und eins . . .") nachzuahmen.

---

1) Gunn [1], S. 280 meint auf Grund einer älteren Form des Zeichens I, daß dieses „a small object of bone or wood, used in some kind of tally or aid to reckoning" darstelle. Wie mir aber Prof. Sethe mündlich mitteilte, ist auch dies nur als eine rein graphische Variante des einfachen Zeichens aufzufassen (etwa wie unser I).

2) Man vgl. z. B. Lidzbarski [1], Tafel 46 (bei 15).

3) Schon A. v. Humboldt ([1], S. 209) hat darauf hingewiesen, daß diese durch die Grundzahlen eines Ziffersystems gegebenen Werte nur „Ruhepunkte" des Zählens sind, nicht aber beweisen, daß man nicht weiter hätte zählen können. Anders liegt es selbstverständlich bei denjenigen Zahlworten, die „viel", „unendlich" bedeuten. Höhere Werte sind damit als „praktisch unzählbar" gekennzeichnet.

4) Vgl. z. B. Sethe [1], S. 8 ff., Lidzbarski [1], S. 201.

5) Hankel [1], S. 38. Im Übrigen hat Hankel den ursprünglich additiven Charakter jeder primitiven „Multiplikation" mit aller Klarheit erkannt. In den späteren Werken zur Geschichte der Mathematik ist dann allerdings nur mehr wenig von dem Geist der Hankel'schen Arbeit zu spüren.

6) Hierzu könnte man etwa Bildungen wie $6 = 5 + 1$ im Sumerischen und dgl. rechnen. Vgl. Thureau-Dangin [1], S. 125.

Wie früher bei den Zahlzeichen, so kommen wir jetzt bei den Zahlworten[1]) durch das Fortschreiten zu größeren Zahlen zu einer Schwierigkeit: jedem neuen Schritt („+ 1“) müßte ein neues Zahlwort entsprechen; man hätte unbegrenzt viele Zahlworte nötig. Dieses Problem löst die Sprache in einer dem schriftlichen Ausdruck völlig analogen Weise: es werden höhere Einheiten geschaffen (also im Dezimalsystem zunächst 10), die nun ihrerseits Objekt des Zählens werden. Die höheren Zahlworte stehen jetzt zu den niedrigeren in demselben Verhältnis wie ursprünglich die Zahlworte überhaupt zu dem gezählten Ding. Von einer neuen, multiplikativen Auffassung im Aufbau eines Zahlensystems kann also keine Rede sein; der Unterschied zwischen Schrift und Sprache ist nur der naturgemäße Ausdruck einer verschiedenen Stellung dem gemeinsamen Urgrund des Zählens gegenüber, der Unterschied eben zwischen Prozeß und Resultat; er ist aber nicht mathematisch begründet.

Der tatsächliche sprachliche Befund bestätigt völlig die vorgetragene Anschauung. Wie Sethe[2]) gezeigt hat, folgt in der Sprache das gezählte Ding (im Plural) dem Zahlwort. Soll also bei höheren Zahlausdrücken die neue Einheit zum gezählten Objekt werden, so muß nunmehr das niedrigere Zahlwort dem als Ding, also substantivisch, gefaßten höheren Zahlwort vorangehen[3]). Tatsächlich ist ja gerade dies der Fall[4]); und der substantivische Charakter der Zahlworte zeigt sich daran, daß Possessivsuffixe und Demonstrativpronomina auf den Zahlausdruck bezogen werden, während schließlich der gezählte Gegenstand als Apposition folgt — eine Erscheinung, die das Ägyptische mit den semitischen Sprachen überhaupt teilt[5]). — Daß auch die Existenz eines Wortes „mal“ (*sp*) nicht für das explizite Vorhandensein einer Multiplikation als besonderer Operation herangezogen werden kann, zeigt der Umstand, daß die grammatische Konstruktion von *sp* in Verbindung mit Zahlworten durchaus der eines Gegenstandes entspricht, sodaß also einfach „Male“ ausgezählt werden[6]).

Wenn ich also in dem sprachlichen Ausdruck der ganzen Zahlen durchaus kein dem additiven Prinzip der Schrift entgegengesetztes „multiplikatives“ System finden kann, so wird es schließlich noch nötig sein, die Fälle zu untersuchen, wo die Schrift selbst einen solchen multiplikativen Charakter zu zeigen scheint. Im Ägyptischen[7]), wie auch in semitischen Schriften[8]) gibt es nämlich Fälle, wo höheren Zahlzeichen niedrigere vorangesetzt werden und dann eine offenbar multiplikative Wirkung zeigen (also etwa 3 100 für 100 100 100), angewandt allerdings nur bei relativ großen Zahlen. Lidzbarski spricht daher geradezu von einer indessen erworbenen Kenntnis der Multi-

1) Hierunter sind immer die Kardinalzahlworte verstanden. Das Ordinalzahlwort erhält seine ausgezeichnete Stellung und Bedeutung gerade dadurch, daß es doch in gewissem Sinne auch den Prozeß des Zählens anzudeuten vermag. Sagt doch Sethe ([1], S. 127) geradezu, daß „das Wesen des Ordinalzahlwortes“ darin besteht, „daß es lediglich denjenigen bezeichnet, der eine gegebene Zahl um eins vermehrt.“ In § 3 wird hierauf noch zurückzukommen sein.

2) Sethe [1], S. 45 ff.

3) Das gezählte, d. h. höhere Zahlwort hätte dabei entweder im Plural zu stehen (so daß also 300 als *ḫmt.t šn.wt* zu lesen wäre) oder, falls schon hier die Auffassung als „Kategorie“ (Sethe [1], S. 47) eintreten könnte, im Singular; man hätte demgemäß das „ꜥꜣ 300 *ꜣṯp.t*“ („300 beladene Esel“) ausführlich als „*ḫmt.t* [m] *šn.t* [m] ꜥꜣ“ zu lesen, wobei natürlich das *m* („an“) in dem Zahlausdruck noch viel eher weggelassen wird wie vor dem ꜥꜣ. Will man im Deutschen den substantivischen Charakter der Zahlworte zum Ausdruck bringen, so wird man das „*t* 1000 *ḥḳ.t* 1000“ der Totenformel etwa mit „eine Tausendschaft Brot, eine Tausendschaft Bier“ zu übersetzen suchen.

4) Über die Ausnahmestellung der Zahl 2 (und Dualis), die hier nicht in Betracht kommt, vgl. Sethe [1], S. 46, 97; [2], S. 481, 482.

5) Brockelmann [1], Bd. I, S. 484 ff.

6) Vgl. Sethe [1], S. 46, sowie eine demnächst erscheinende Note in der ÄZ über die Konstruktion von *sp* im mathematischen Papyrus Rhind.

7) Sethe [1], S. 8 ff.

8) Lidzbarski [1], S. 201.

plikation und sieht hierin einen unmittelbaren Parallelismus zur Sprache: „man sagte dreihundert und schrieb $3 \cdot 100$“ — ein Parallelismus, der allein schon nach dem Vorangehenden auf den richtigen Weg führen muß. Aber darüber hinaus zeigt gerade das Ägyptische, wie eine solche Schreibung entstanden sein mag. Statt nämlich ein höheres Zahlzeichen mehrmals zu wiederholen, wird seine Vielfachheit unter ihm, sozusagen als Index, angemerkt. Daß dieser „Index“ in engster Verbindung mit dem darüber stehenden Zahlzeichen steht, folgt schon daraus, daß eine solche Schreibweise im Prinzip zweideutig wäre: ist doch Untereinanderschreiben und Hintereinanderschreiben äquivalent. Der Index zeigt also offenbar nur an, wie oft das andere Zeichen geschrieben zu denken ist; dieser „Multiplikator“ erscheint als bloße schreibtechnische Vereinfachung der Zeichenwiederholung, zumal gerade die höheren Zahlzeichen kompliziertes Aussehen tragen [1]). Alle bekannten Fälle für solche Schreibungen stammen übrigens aus relativ später Zeit (mittleres und neues Reich) [2]).

Die geschilderte Art des Ausdrucks höherer Zahlen stellt gewissermaßen die Brücke zwischen der gewöhnlichen Schreibweise und dem Ausdruck der Sprache dar; der „Index“ gibt das neuerliche Abzählen der höheren Einheit wieder. Stellt sich die Notwendigkeit heraus, die im Daruntersetzen des „Index“ liegende Mehrdeutigkeit zu vermeiden, so muß aus $\begin{matrix}1000\\3\end{matrix}$ notwendig 3 1000 werden, um es von 1000 3 zu unterscheiden; ein Vorgang, der von einer indessen erworbenen Kenntnis der Multiplikation völlig unabhängig ist. Natürlich bleibt immer die Möglichkeit offen, daß eine spätere Zeit die multiplikative Wirkung der Voranstellung explizite erkennt und ausnützt; z. B. dürfte man wohl in Babylonien bis zu dieser Stufe gelangt sein.

Mir scheint also der Schluß gerechtfertigt, daß sich nirgends in Schrift oder Sprache ein Abweichen von dem zeigt, was ich oben als ihren „additiven Charakter“ bezeichnet habe. Es wird die Aufgabe des Weiteren sein, diese Eigentümlichkeit in ihrer Auswirkung auf die ägyptische Mathematik zu verfolgen.

§ 2. Die elementaren Rechenoperationen.

Mit der Addition berühren wir die einfachste aber auch wichtigste Operation der ägyptischen Mathematik. Sie ist das Fundament aller übrigen Rechnungsarten. Über ihre praktische Durchführung ist kaum etwas zu sagen [3]); sie wird immer ohne weitere Bemerkung vorgenommen und ist offenbar als selbstverständlich vorausgesetzt. In der Tat ist das ägyptische Ziffernsystem in seiner unmittelbaren Ableitung aus dem schrittweisen Zählen gerade der Addition vorzüglich angepaßt — in § 1 ist ja schon dieser „additive“ Charakter zur Genüge betont worden.

Wenden wir uns von der Addition sofort zu ihrer inversen Operation, der Subtraktion, so sehen wir zunächst, daß sie mit derselben Leichtigkeit ausgeführt wurde, wie die Addition. Die Gründe hierfür sind selbstverständlich die nämlichen wie eben. Als Terminus technicus dient ein Wort *ḫbj*, das die Bedeutung von „vermindern“, „abziehen“ hat [4]).

---

1) Um so mehr wird ein solches Verfahren nötig, wenn es sich um das höchste Zahlzeichen der Schrift handelt; vgl. Sethe [1], S. 9. — In welche Schwierigkeiten bei so hohen Zahlen auch die Sprache geraten kann, zeigen Ausdrücke, wie sie Friedlein ([1], S. 70 f.) anführt. So finden sich im Mittelalter Ausdrücke wie „mille mille mille mille milium vel octaginta milia milia milia milium“.

2) Vgl. neuerdings Scharff [1], Sp. 97 f.

3) Einen kurzen und klaren Überblick über die verschiedenen ägyptischen Rechenoperationen in sachlicher wie in sprachlicher Hinsicht gibt Peet [1], S. 11 ff. — In den folgenden Ausführungen habe ich immer in erster Linie die Verhältnisse vor Augen, wie sie im Pap. Rhind vorliegen.

4) Die moderne Transkription ägyptischer Wörter macht man sich bekanntlich durch willkürliche Vokaleinschaltungen (meist e) aussprechbar.

Eine besondere Rechenmethode oder Schreibart für diese Operation existiert nicht; das Resultat des „Abziehens“ wird höchstens durch Addition verifiziert. Für eine solche Addition besteht sogar ein besonderer terminus technicus, nämlich *škm* d. h. „ergänzen“. Rein mathematisch genommen, ist eine solche „Ergänzung“ einer Subtraktion gleichwertig, für den Ägypter aber lag ihre Bedeutung in ihrem Zweck, eine Größe durch Addition einer anderen auf einen bestimmten Betrag zu bringen. Der Gedanke an eine neue Operation lag ihm völlig ferne. Gerade hier bei Addition und Subtraktion zeigt sich, daß die Verknüpfung einer Operation mit ihrer inversen noch eine ganz enge ist, oder besser, daß die Subtraktion noch nicht mehr ist als ein bloßes Korrelat zur Addition, daß es sich nicht um eine ihr wirklich gleichberechtigte, selbständige Operation handelt. In der Tat würde dies notwendig zu einer „Erweiterung des Zahlbereiches“ führen müssen, man bedürfte der Null und der negativen Zahlen, ein Schritt, den die Ägypter nie (auch in keinem analogen Falle) getan haben. Es ist also im Grunde genommen völlig unrichtig, etwa von einer Kenntnis „der vier Spezies“ in Ägypten zu sprechen. In Wahrheit steht man völlig unter dem Banne der einen Fundamentaloperation der Addition und hat nur das Ziel, von hier aus so viel als möglich an praktischen Rechenaufgaben bewältigen zu können; nach deren Charakter wird dann die Rechenweise benannt. In Kapitel II werde ich zeigen, wie sich dies auch in dem weiteren Gebrauche des Wortes *škm* in seiner Beziehung zur Bruchrechnung erkennen läßt.

Die ägyptische Multiplikation zeigt ein recht originelles Äußere. Um 7 mit 5 zu multiplizieren, bildet man

∕ 1	7
2	14
∕ 4	28

und findet durch Addition der mit ∕ bezeichneten Zahlen — *„Kennziffern“* wie ich sie nennen will — den Wert 35. Die ganze Multiplikation beruht also, kurz gesagt, auf einer dyadischen Entwicklung des einen Faktors und ist damit auf reine Verdoppelung und Additionen zurückgeführt.

Das Grundprinzip dieser Rechenmethode ist aufs engste verwandt mit der Darstellung der Zahlen durch die Schrift. Durch fortgesetztes Aneinanderfügen zunächst der Einheit, dann durch Wiederholung des Verfahrens an den höheren Zahlzeichen, war es möglich, zu größeren Zahlen fortzuschreiten; so wird auch hier zunächst das Ausgangselement als Ganzes wiederholt d. h. „verdoppelt“ und dieses Verfahren so lange fortgesetzt, bis man zu genügend hohen Zahlen gelangt ist[1], um nun aus den so gewonnenen Elementen neue Größen durch unmittelbare Addition zusammensetzen zu können. Wir werden natürlich auch den Prozeß des „Verdoppelns“ in dem rein additiven Sinne des Nochmalsetzens aller Zahlzeichen zu verstehen haben[2]. Die „Kennziffer“ begleitet das Verfahren in absoluter Parallelität; und wenn es möglich ist, aus Zahlzeichen der Kennziffern eine gegebene Zahl zusammenzusetzen, so müssen also auch die nebenstehenden Zahlzeichen entsprechend oft aufgetreten sein. So wie man bei ∩∩∩ (30) die neue Einheit der ∩ (10) wieder abzählt und dann die alten Einheiten (etwa IIII) dazugibt und so das 34-fache derselben erhalten hat, so wird auch bei der „Multiplikation“ der eine Faktor sozusagen zur neuen Einheit, die nun wiederholt angeschrieben und gezählt werden kann[3]. Daß diese auf der Berücksichtigung

1) Es finden sich mehrfach Fälle, wo der Schreiber in seinem Eifer weiter verdoppelt hat, als es nötig wäre.

2) Das Verdoppeln bildet einen der ursprünglichsten Begriffe des Denkens überhaupt, wie uns die Sprache zeigt: Hierfür existiert eine besondere grammatische Form, der Dualis, die erst in späterer Zeit den spezielleren Sinn von „nur zwei“, „genau zwei“ bekommen hat. (Vgl. Sethe [1], S. 97, [2], S. 482.)

3) Redewendungen wie „*ỉrj ḫr-k* $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ *sp.w* 5“ (Papyrus Rhind No. 55) „mache (oder etwas freier „nimm“)

des Schriftcharakters eingestellte Denkweise dem Ägypter immer vertraut geblieben ist, zeigt der Umstand, daß allein die Multiplikation mit 10 stets direkt vorgenommen wird.

Wir werden sehen, zu welcher wichtigen Rolle die „Kennziffern“ in der Bruchrechnung gelangen. Einstweilen wollen wir uns begnügen hervorzuheben, daß mit dieser „dyadischen“ Multiplikationsmethode ein Algorithmus geschaffen ist, der aufs engste mit der Addition zusammenhängt und demgemäß mit fast derselben Sicherheit zu handhaben ist, wie diese selbst. Damit ist also der Addition ein neues weites Feld eröffnet [1]).

Ganz ähnlich der Subtraktion tritt die „Division“ nirgends als neue Operation hervor. Auch hier wieder haben wir die enge Zusammengehörigkeit einer Operation und ihrer inversen vor Augen: der Quotient ist sozusagen dadurch „definiert“, daß er mit der gegebenen Zahl multipliziert die andere liefert. Praktisch läßt sich dies dadurch realisieren, daß der Divisor so lange mit ganzen Zahlen (dyadisch natürlich) multipliziert wird, bis man dem Dividend von unten her möglichst nahe kommt und dann den Rest durch Addition geeigneter Bruchteile ergänzt. Also wird beispielsweise [2]) 80 : 3,5 berechnet durch [3])

1	3 + 1/2
10	35
∕ 20	70
∕ 2	7
∕ 2/3	2 + 1/3
∕ 1/21	1/6
∕ 1/7	1/2

ist somit gleich 22 + 2/3 + 1/7 + 1/21. Die ganze „Division“ wird also geradezu auf eine multiplikative „Probe“ reduziert, d. h. auf einen additiven Prozeß zurückgeführt.

Eine interessante Erscheinung bietet die Betrachtung einer ägyptischen Ausdrucksweise für „Division“ und „Multiplikation“ (*wꜣḥ*). Einerseits wird nämlich, was uns nicht wunder nehmen kann, sprachlich nicht besonders zwischen diesen beiden Operationen unterschieden [4]); was aber wichtiger ist: das hierbei verwendete Verbum *wꜣḥ* bedeutet soviel wie „hinzulegen“ und ist gleichzeitig (neben einem andern, *dmḏ*) als Terminus der Addition gebraucht. Man sagt z. B. [5]) *wꜣḥ tp m* 8 *sp.w* 8 (für 8 × 8); behält man den additiven Charakter der ägyptischen Multiplikation im Auge, so wird man auch hier versuchen dürfen, *wꜣḥ* mit „addieren“ wiederzugeben, also etwa zu übersetzen „addiere angefangen mit 8, 8 Male“ [6]) (oder „bis zu 8 Malen“: *r sp.w* 8 [7])). Dabei drückt das „angefangen mit ..... bis“ gerade das sukzessive Verfahren der Multiplikation aus, während *wꜣḥ* allein das gewöhnliche einmalige Addieren bedeutet. Dabei braucht natürlich

---

$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ fünf Male“ bestätigen diese Auffassung unmittelbar. „You are to multiply $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ five times“ ist viel zu modern übersetzt — abgesehen davon, daß das „multiplizieren“ zu dem Ausdruck „fünf Male“ gar nicht passen will.

1) Heath ([1], Bd. I, S. 53, Anm. 1) berichtet übrigens, daß eine der ägyptischen analoge Multiplikationsmethode noch heute in Rußland vorkommen soll.

2) Pap. Rh. No. 68 (Peet [1], S. 115).

3) Man beachte die Ausnützung der 10 (Schrift!) in den ersten vier Zeilen. — Das vorliegende Beispiel ist übrigens ein ziemlich kompliziertes. Die sukzessive Annäherung an das Ziel zeigen auch deutlich die Rechnungen Pap. Rhind No. 31 und 33.

4) Auf den Terminus *njś*, der mir dem Sinne nach mit dem lateinischen „denominator“ in Beziehung zu stehen scheint, vermag ich nicht einzugehen. Sehr beachtenswert sind die Ausführungen, die Gunn [2], S. 124 f. hierüber macht.

5) Pap. Rhind No. 50.

6) Ich verdanke diese Übersetzung von *tp m ... sp.w* (oder *r sp.w*) Prof. Sethe. Vgl. neuerdings auch Gunn [2], S. 124.

7) Pap. Rhind No. 41.

dieses schrittweise Addieren nicht tatsächlich in der angegebenen Anzahl von Malen durchgeführt zu werden, sondern es kann, um z. B. das 20ste Mal zu erreichen, ein einfaches Verdoppeln und Verzehnfachen (vgl. S. 8) genügen; aber die ursprüngliche Bedeutung dieser Operation ist in der Verwendung des Wortes *wꜣḥ* klar erhalten, wenn es auch später im Sinne eines festen terminus technicus gebraucht wird. So sagt man dann auch *wꜣḥ tp m* 5 *r gm.t* 15 d. h. „mache so lange *wꜣḥ* angefangen mit 5 bis Du 15 findest" (‚dividiere' 15 durch 5)[1]). Das tatsächliche Nichtvorhandensein einer besonderen Division ist natürlich wieder eine neue Bestätigung des absolut additiven Charakters der ganzen ägyptischen Mathematik. — Der Zusammenhang dieser Erscheinung mit der Bruchrechnung und die Behandlung der anschließenden Fragen soll § 3 vorbehalten bleiben.

Die Art des Vorkommens von „Quadratwurzeln" in der ägyptischen Mathematik entspricht durchaus dem Bisherigen. Auch hier kann nicht von einer wirklich neuen Begriffsbildung und noch weniger von einer dadurch bedingten Erweiterung des Zahlbereiches die Rede sein. Bei dem geschilderten Charakter der ägyptischen Multiplikation und Division ist die Bestimmung einer Wurzel einem Quadrieren äquivalent. Die vorkommenden Fälle von Quadratwurzeln beziehen sich demgemäß auch nur auf reine Quadrate rationaler Zahlen[2]). Daß rein gegenständlich[3]) der Begriff eines Quadrates bezw. seiner Seitenlänge existiert, hat mit einer wirklich mathematischen Ausbildung einer dem „Quadrieren" inversen Operation wenig zu tun.

Wenn wir nun auf diese ganze, unserem Empfinden zunächst ziemlich fremde Rechen- und Denkweise zurückblicken, so müssen wir doch gestehen, daß ihr eine große innere Geschlossenheit zukommt. In der alles beherrschenden Bezugnahme auf die eine grundlegende Operation der Addition liegt, wenn auch selbstverständlich ungesucht, eine große logische Klarheit. Die enge Abhängigkeit zwischen Operationen, die wir heute als zu einander „inverse" bezeichnen, ist doch ein Ausdruck dafür, daß ein Zusammenhang zwischen ihnen, wie er rein logisch tatsächlich besteht, als etwas Selbstverständliches betrachtet wird. Gerade die moderne Entwicklung der Mathematik hat erst wieder durch den Begriff der G r u p p e diese innere Zusammengehörigkeit in aller Schärfe zum Ausdruck gebracht, während er der Mathematik des täglichen Lebens (und des Elementarunterrichtes) durch die Ausbildung so gründlich verschiedener Algorithmen für die verschiedenen „Spezies" in weitem Maße verloren gegangen ist. Dem ägptischen Denken liegt zwar eine konsequente Ausbildung mathematischer Ideen um ihrer selbst willen völlig fern, aber es trägt doch den Stemgel logischer Klarheit, der einem auf sich gestellten ursprünglichen Denken zukommt.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen, so wird man sagen können: D i e ä g y p t i s c h e M a t h e m a t i k b e r u h t a u f d u r c h a u s a d d i t i v e r G r u n d l a g e. Man hat sich also sehr zu hüten, zugleich mit unserer Terminologie auch unsere stark multiplikative Einstellung in das ägyptische Denken hineinzutragen; Versuche mit dem Primzahlbegriff in Ägypten zu operieren, wie es z. B. Eisenlohr, Cantor, Hultsch getan haben, sind von vornherein zur Unfruchtbarkeit verurteilt. Und ferner: nicht um die Ausbildung neuer Begriffe und Operationen handelt es sich, sondern um E r w e i t e r u n g d e s W i r k u n g s b e r e i c h e s d e s u r s p r ü n g l i c h e n S c h e m a s.

Wie sehr diese beiden Merkmale aller ägyptischen Mathematik auch in der Bruchrechnung zur Geltung kommen, soll zunächst im folgenden Paragraphen behandelt werden.

---

1) Pap. Rhind No. 26.

2) Vgl. Peet [1], S. 20.

3) Vgl. auch Schack-Schackenburg [1], S. 139.

§ 3. Brüche.

Als ein Ergebnis der bisherigen Betrachtungen könnte man den Satz aufstellen, daß die ägyptische Mathematik nirgends den Bereich der „natürlichen Zahlen“ überschritten hat. Dabei ist allerdings die Wendung „natürliche Zahlen“ etwas anders zu verstehen, wie in dem üblichen mathematischen Sinne der positiven ganzen Zahlen; „natürlich“ soll hier den Inbegriff von Zahlbildungen bezeichnen, die im täglichen Leben eine Rolle spielen: die ganzen Zahlen und die wichtigsten Bruchteile wie 1/2, 1/4, . . ., 1/3 usw. Um diese letzteren, d. h. also die einfachsten Brüche des Zählers eins, herab bis etwa zu 1/8 [1]), besonders hervorzuheben, will ich sie unter der Bezeichnung *„natürliche Brüche“* zusammenfassen, ohne indessen schon jetzt eine nähere Abgrenzung dieses Begriffes zu geben; sie spielen für die Entwicklung der ägyptischen Bruchrechnung eine wichtige Rolle [2]). Alle jene Bruchzahlen aber — es handelt sich in Ägypten bekanntlich immer nur um Brüche des Zählers eins, um sogen. „Stammbrüche“ [3]) —, deren Nenner über die durch die natürlichen Brüche gesetzte Schranke hinausgehen, will ich als *„algorithmische Brüche“* bezeichnen; $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{912}$ oder gar $\frac{1}{4753}$ sind beliebige, dem Papyrus Rhind entnommene Beispiele für diesen Typus. Die hierfür gewählte Bezeichnung soll zum Ausdruck bringen, daß es sich um Größen handelt, die ihr Vorkommen nur den Konsequenzen des schematischen Rechnens, dem bloßen „Algorithmus“ verdanken. Man könnte sagen, daß es sich bei ihnen, im Sinne des Ägypters, wirklich um eine Erweiterung des natürlichen Zahlbereiches handelt; es ist die einzige der ganzen ägyptischen Mathematik geblieben.

Da in Kapitel II das Rechnen mit Brüchen ausführlich behandelt werden soll, so werden jetzt die algorithmischen Brüche im Wesentlichen beiseite bleiben müssen; es wird sich vielmehr dem ganzen Plane dieses Kapitels nach hier nur darum handeln können, den grundlegenden Begriff „natürliche Brüche“ noch etwas zu erläutern [4]).

Für das tägliche Leben haben die Bruchzahlen eine ebenso individuell gegenständliche Bedeutung wie die ganzen Zahlen. „Halbe“, „Viertel“, „Achtel“ sind in ihrer Beziehung zu Maßen und Gewichten (auch heute noch) völlig selbständige anschauliche Begriffe [5]), bei denen man kaum an ihre Verknüpfung mit den ganzen Zahlen denkt; sie spielen in jeder Hinsicht die Rolle neuer Einheiten, nur mit der speziellen Eigenschaft, daß sich die alten in charakteristischer Weise ganzzahlig durch sie ausdrücken lassen. Daß dem Ägypter ein solcher Gedankengang, wie ich ihn hier kurz als „Einführung neuer Einheiten“ gekennzeichnet habe, geläufig war, zeigen auch Bildungen

---

1) Hierzu kommt noch der Bruch 2/3; ein Zusatz der auch im Folgenden immer stillschweigend gemacht ist. Die weiteren „Komplementbrüche“ (vgl. unten S. 11 u. 12) 3/4 und 5/6 spielen für das Rechnen keine ausgezeichnete Rolle. Das „3/4“ bei Peet [1] oder Spiegelberg [1] entspricht immer einem 1/2 + 1/4 des Originals.

2) Man vergleiche die fundamentale Bedeutung des Begriffes „rational“ (d. h. ‚vernünftig‘) für die spätere Entwicklung der Mathematik!

3) Auch 2/3 zähle ich der Einfachheit halber mit zu den „Stammbrüchen“.

4) Ich möchte nur noch mit Rücksicht auf das in § 2 Gesagte darauf hinweisen, daß man aus der Art des Operierens mit Brüchen im Pap. Rhind den Eindruck gewinnen könnte, als hätte man dem Ägypter doch die Ausführung unmittelbarer Multiplikationen zuzuschreiben (etwa bei der „Multiplikation“ zweier Stammbrüche). Dagegen spricht aber nicht nur die Erwägung, daß dann die gleichzeitige Umständlichkeit des Rechnens mit ganzen Zahlen unbegreiflich wäre, sondern auch die Tatsache, daß sich gelegentlich die zugehörigen Nebenrechnungen (in der üblichen dyadischen Form) angegeben finden (vgl. etwa Peet [1], S. 38 f., 2/7, 2/11); im Allgemeinen aber hat sie der Schreiber als für die eigentliche Bruchrechnung uninteressant weggelassen.

5) Vgl. auch auch Sethe [1], S. 135 (zu S. 76).

der Sprache wie „zu einer Achtheit (*ḫmn.t*) machen“ für unser „in 8 Teile teilen“ und ähnliches [1]). Die frühere Einheit ist also zu einer Achtheit geworden, gezählt in der neuen Einheit des „Achtels“. So erscheinen zunächst die natürlichen Brüche als Größen, die ebenso als Elemente des zahlenmäßigen Denkens zu gelten haben wie die ganzen Zahlen 1, 2, 3, . . ., 10, . . . usw.

Die Scheidung zwischen natürlichen und algorithmischen Brüchen findet übrigens (abgesehen von ihrem rein mathematischen Hervortreten) nicht in der Metrologie ihre einzige Stütze, sondern ist auch in der Sprache deutlich erkennbar. Gerade die „natürlichen Brüche“ sind es, die Bezeichnungen führen [2]), welche nicht aus dem Werte ihres Nenners abgeleitet sind (Entsprechendes gilt auch für 2/3), sondern einen andern Ursprung haben (wie etwa 1/2 (*gś*) : „eine Seite“), also durchaus individuellen Charakter tragen Für die große Menge der algorithmischen Brüche dagegen ist ihr Nenner das einzige Kennzeichen.

Sehen wir also die natürlichen Brüche in einer den ganzen Zahlen wesentlich gleichwertigen Stellung, so erhebt sich aber nunmehr die Frage: Wie werden diese verschiedenen durch das tägliche Leben entwickelten Begriffe einer einheitlichen rechnerischen Behandlung zugänglich gemacht, wie lassen sich die Beziehungen, die zwischen den „natürlichen (ganzen) Zahlen“ und den „natürlichen Brüchen“ bestehen, unter ein gemeinsames algorithmisches Schema bringen? Selbstverständlich muß das Rechnen in dem früher entwickelten ganzzahligen Gebiet als Ausgangspunkt dienen.

In Kapitel II wird sich zeigen, daß gerade dieses Problem, die Ausdehnung des von den ganzen Zahlen her gewohnten Schemas auf dem Gebiet der Brüche das Grundproblem der ägyptischen Bruchrechnung überhaupt darstellt. Mit diesem Ziel vor Augen sind allmählig die Methoden entwickelt worden, welche schließlich jenes merkwürdige Gebäude der ägyptischen Stammbruchrechnung ergeben haben, wie es dann für das ganze weitere Altertum bestimmend geblieben ist. Erst dadurch, daß auch das Rechnen mit Brüchen einem Algorithmus unterworfen ist, dessen innere Struktur wieder wesentlich additiven Charakter trägt, wird jene Einheitlichkeit ägyptischer Mathematik, die schon einmal betont werden mußte, wirklich vollständig.

Nachdem hiermit die Grundlagen genannt sind, auf denen sich die ägyptische Bruchrechnung aufbaut, wende ich mich zum Abschlusse dieses Paragraphen einer viel umstrittenen Frage zu: Haben die Ägypter den Begriff des „gemischten Bruches“ gekannt?

Es ist bekannt, daß die ägyptische Schrift und Sprache jedenfalls kein Ausdrucksmittel für gemischte Brüche entwickelt hat — die besonderen Verhältnisse, welche bei dem „Komplementbrüchen“ $\left(\text{d. h. den Brüchen } \frac{n-1}{n}\right)$ wie 2/3 obwalten, kommen hierbei nicht in Frage. Es muß sich also zunächst darum handeln, sich klar zu machen, welchen Sinn der Ägypter mit einer Bildung wie 5/7 zu verbinden hätte. Man wird auch hier wieder vom Zählen, von dem „additiven“ Aufbau des ägyptischen Zahlensystems auszugehen haben. Das „Siebentel“ muß zum Element des Zählens werden, so wie bei den ganzen Zahlen die Eins oder die Zehn, wie beim „Multiplizieren“ der eine Faktor [3]); dies gerade ist der tiefste Grund für die dominierende Stellung des Stammbruches. Bei einem solchen Vorgang ist 5/7 „definiert“ durch $1/7 + \cdots + 1/7$, aber nicht „fünf-mal“, wie wir in unserer typisch multiplikativen Einstellung sagen würden, wenn wir das „$+ \cdots +$“ in Worte fassen wollten, sondern zählend im Gebiet der Siebentel, additiv gedacht: „bis zum fünften“; oder ausführlicher: so lange bis beim Mitzählen wirklich fünf Marken dastehen wie bei der Fünf die 5 Einerstriche, d. h. „bis die fünf voll sind“.

1) Sethe [1], S. 44, [2], S. 480.

2) Charakteristischer Weise erhalten in der Beziehung zu Ackermaßen und Scheffel. Vgl. Sethe [1], S. 72 ff., [2], S. 483.

3) Vgl. § 1 und 2.

Damit haben wir aber gewonnenes Spiel. Zunächst: diese Auffassung hat uns von selbst zu einer Erscheinung geführt, deren Klarlegung man Sethe verdankt und die ihrerseits zur Erkenntnis des additiven Charakters der ägyptischen Mathematik hätte führen können: ich meine den Zusammenhang zwischen Ordinalzahlwort und Bruchbezeichnung und die Aufklärung des Wesens der Komplementbrüche [1]). Während wir in § 1 einen Gegensatz zwischen Schrift und Sprache darin gesehen haben, daß die Schrift gewissenmaßen den Prozeß des Zählens immer wiederspiegelt, während die Sprache nur sein Resultat angibt, so zeigen uns Sethe's Untersuchungen, wie doch auch der Prozeß des Zählens auf die Sprache zurückwirkt: Komplementbruch wie Ordinalzahl geben uns an, wann er ein Ende hat; sie kennzeichnen gerade den letzten Schritt im Zählen, das Erreichen des Resultats, das „Vollwerden" einer gewissen Menge [2]). Bei den Brüchen speziell sind zwei Glieder in der Kette des Zählens besonders ausgezeichnet: das eigentliche Element des Zählens, der „Stammbruch", und das letzte Glied, mit dem wieder die alte Einheit erreicht wird: der „Komplementbruch".

Wenden wir uns nun den Mittelgliedern einer solchen Bruchreihe zu. Uns ist eine Zahl vollständig anschaulich gegeben, wenn wir ihre dezimale Entwicklung vor Augen haben: die „angezeigte Division" $\frac{529}{356}$ ist „ausgeführt", wenn wir sie durch das dezimale Schema 1,485 . . . $= 1 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots$ ersetzt haben. Ganz ähnlich ergeht es dem Ägypter. Von seinen Zahlzeichen her ist er gewohnt, die Einheiten (Einer, Zehner usw.) Stück für Stück nachzählen zu können; das ist für ihn die wirklich explizite Angabe einer Zahl, alles andere hat nur den Charakter einer impliziten Definition. Von diesem Gesichtspunkt aus bleibt also über das wiederholte Anschreiben des Stammbruches hinaus nichts zu tun übrig; es ist die einzige, aber auch „triviale" Darstellung eines gemischten Bruches.

Aber gerade diesem Verfahren des Aneinanderfügens begegnen bald die praktischen Schwierigkeiten der Unübersichtlichkeit, zu der sich bei Brüchen die wesentliche weitere gesellt: die Größenverhältnisse gegenüber der alten Einheit 1 sind nicht unmittelbar zu übersehen — so wie es auch noch uns mit $\frac{173}{356}$ im Gegensatz zu $\frac{4}{10} + \frac{8}{100} \sim 1/2$ ergeht. Wir haben schon die Auswege kennen gelernt, die zur Vermeidung der Unübersichkeit beim Ausdruck der ganzen Zahlen eingeschlagen worden sind. Zunächst ist es die Wahl neuer Einheiten; sie war, wenn auch im Prinzip willkürlich, nach dem dekadischen System getroffen worden. Bei den Brüchen aber besteht eine solche Willkür nicht mehr: zu $1/n$ gehört als ausgezeichneter Ruhepunkt des Weiterzählens der Wert n/n, also im allgemeinen ein nicht gerade nach 10 Schritten erreichbarer Punkt. Es ist also wieder das Verhältnis zur Einheit 1, das hindernd in den Weg tritt, da es verlangen würde, jedem n sozusagen sein eigenes Zahlensystem zuzuordnen. Wir mit unserer multiplikativen Denkweise helfen uns damit, daß wir ein bestimmtes solches System auszeichnen, nämlich das zu $\frac{1}{10^k}$ gehörige und danach „entwickeln" — ein unendlicher Prozeß, der natürlich für den Ägypter (abgesehen von seiner multiplikativen Basis) nicht in Frage kommt [3]).

Eine andere Lösungsmöglichkeit wäre die, wie wir sie gelegentlich der „multiplikativen" Ziffernschreibung angetroffen haben [4]), bei welcher man die Vielfachheit des Stammbruches durch

---

1) Sethe [1], Kap. III und IV.

2) Vgl. die Zusammenfassung bei Sethe [2], S. 487.

3) Ebensowenig ist selbstverständlich an eine vollständige dyadische Entwicklung zu denken, die allerdings sofort Stammbrüche liefern würde.

4) Vgl. § 1, S. 5 f.

einen „Index" anzugeben hätte, ein Verfahren, das für eine additive Denkweise höchstens eine Vereinfachung der Schreibweise bedeuten könnte, obwohl es in der Tat zu unserer multiplikativen Auffassung des gemischten Bruches überleiten würde. Gerade das Fehlen eines solchen Verfahrens zeigt wieder einmal, wie sehr dem Ägypter jedes multiplikative Denken ferne lag.

Der letzte Ausweg aus diesen Schwierigkeiten, den der Ägypter nun gefunden hat, besteht in der Ersetzung der wiederholten gleichen Stammbrüche durch eine Summe verschiedener Stammbrüche. Der zusammengesetzte Ausdruck wird also auch gewissermaßen „entwickelt", allerdings nicht nach einem ein für allemal festen Zahlensystem, sondern in einem mehr additiven Schema, durch Aneinanderfügung einer kleinen Anzahl verschiedener Stammbrüche. Wir werden in Kapitel II noch im einzelnen sehen, wie sich die Summanden einer solchen „Entwicklung" (oder „Zerlegung", wenn man vom gemischten Bruch ausgeht) aus dem ursprünglichen Nenner bestimmen. lassen. Aber schon jetzt ist leicht zu sehen, welches Problem dem Ägypter hier zuerst entgegengetreten sein muß. Wir haben nämlich schon die Ausdehnung der bei der rechnerischen Behandlung ganzer Zahlen üblichen Methode auf das Gebiet der Brüche als das Grundproblem der Bruchrechnung bezeichnet: dann ist es aber vor allem das Resultat des Verdoppelns, das aus der trivialen Gestalt $1/n + 1/n$ in eine wirklich neue Form übergeführt werden muß. Denn da nur durch solches Verdoppeln zu allen höheren Zahlen fortgeschritten wird, so muß bereits beim ersten Schritt die Zerlegung von $1/n + 1/n$ durchgeführt werden, um nicht doch am Schluß nur bei $1/n + \cdots + 1/n$ zu landen. Andererseits ist aber bereits durch die Zerlegung von $1/n + 1/n$ alles weitere geleistet, da dann die dyadische Rechenweise vollständig auch auf das Bruchgebiet anwendbar wird. Es ist also nicht zu verwundern, daß der Papyrus Rhind gerade mit dieser entscheidenden Aufgabe beginnt. Die ganzen in den vorangegangenen Erörterungen berührten Strömungen fließen hier in ein gemeinsames Bett zusammen. Wie sie sich einzeln geltend machen, wie sich dabei das Gebiet der natürlichen Brüche zwangläufig zu dem der algorithmischen erweitert, wird in Kapitel II zu behandeln sein.

In diesem Parapraphen bleibt nur noch übrig, sich wieder der Frage nach den „gemischten Brüchen" zuzuwenden. Von dem jetzt gewonnenen Standpunkt rückblickend, wird man sie einfach als falsch gestellt zu bezeichnen haben; von einem additiven Gesichtspunkt erscheint das Problem der Vervielfachung eines Stammbruches etwa in der Form wie es soeben erörtert wurde, führt aber keinesfalls zu einem unserem gemischten Bruch entsprechenden neuen Bruchbegriff $\frac{m}{n}$, der etwa eine „Multiplikation" oder „Division" andeuten soll. Gegen die Existenz eines solchen neuen Begriffs spricht schon, wie Sethe mit Recht hervorgehoben hat [1]), der Mangel eines Ausdrucks durch Schrift und Sprache. Schließlich wird die Einsicht in die auch für das Gebiet der Brüche rein additive Rechenweise die aus der Rechnung selbst gewonnenen Stützen für die Möglichkeit „gemischter Brüche" beseitigen [2]). Man wird sich also auch in dieser Frage hüten müssen, mit moderner Terminologie gleichzeitig moderne Vorstellungen in die Betrachtung ägyptischer Mathematik hineinzutragen.

Im folgenden Paragraphen sollen, zur Abrundung des bisher gewonnenen Bildes, noch kurz die übrigen Gebiete der ägyptischen Mathematik berührt werden, jedoch ohne auf spezielle Fragen einzugehen. Nachdem im letzten Paragraphen dieses Kapitels noch einige Bemerkungen allgemeiner Natur hinzugefügt sind, wird in Kapitel II ausführlich auf die ägyptische Bruchrechnung zurückzukommen sein.

1) Sethe [3], S. *141* f. Vgl. auch die Bemerkungen von Sethe [1], S. 107 und [2], S. 487.

2) Ich korrigiere damit meine eigene Auffassung dieser Frage, wie ich sie [1], S. 68 vertreten habe.

§ 4. Zur übrigen Mathematik der Aegypter.

Bereits in den vorangehenden Paragraphen hat sich gezeigt, wie vorsichtig man bei der Übertragung moderner Bezeichnungen und Begriffe auf ägyptische Mathematik sein muß, wie wenig die ägyptische Betrachtungsweise mit der unsern übereinstimmt. Dies gilt erst recht, sobald es sich um konkrete Rechenaufgaben handelt. Die Momente, die zur Ausbildung einer Mathematik in Ägypten geführt haben, sind vorwiegend praktischer Natur, und so sind es auch lediglich praktische, nicht theoretische Gesichtspunkte, von denen aus der Ägypter seine Mathematik betrachtet und klassifiziert. Welche Stellung für ihn selbst der Mathematik im täglichen Leben zukommt, zeigt ja am besten ein Dokument wie die berühmte „literarische Streitschrift" [1]).

Eine rein mathematische Einstellung tritt bloß dort zu Tage, wo es sich gewissermaßen nur um die Bereitstellung des Materials handelt, das dann zur tatsächlichen Durchführung von Rechnungen benötigt wird, also (wie man es heute ausdrücken würde) bei der Anlegung von „Tabellen" [2]). Der Natur der Sache nach sind dies vor allem einerseits die Tabellen zur Handhabung der Bruchrechnung, andererseits Tafeln zur Umrechnung verschiedener Maße in einander, Typen wie sie beide auch im Papyrus Rhind vertreten sind. Die „rein mathematischen" Tabellen zeichnen sich schon äußerlich dadurch aus, daß es sich bei ihnen um Rechnen mit „unbenannten" Größen handelt, während alle anderen Aufgaben in „eingekleideter" Form, d. h. gerade in ihrer eigentlichen Gestalt erscheinen. Trotzdem mag auch bei diesen manchmal ein „theoretisches" Interesse zur Geltung kommen, wie etwa in der Aufgabe Nr. 79 des Papyrus Rhind [3]), der wohl kaum ein wirklich praktischer Zweck zugeschrieben werden kann (in 7 Häusern 7 Katzen, pro Katze 7 Mäuse usw.). Nur muß man sich hüten in diesem Beispiel, das ja die Summation einer geometrischen Reihe in sich schließt, mehr sehen zu wollen als eine, ich möchte fast sagen spielerisch fortgesetzte Anwendung des üblichen Multiplikationsverfahrens; von einer rein abstrakten Kenntnis einer Summenformel der geometrischen Reihe kann keine Rede sein [4]). Ganz ähnlich steht es wohl auch mit der „arithmetischen Reihe" in Nr. 40, wo schon die Verwendung desselben terminus technicus (*twnw*) wie in Nr. 39, wo es sich nicht um arithmetische Progression handelt, zeigt, daß nicht diese besondere

---

1) Pap. Anastasi I. Eine Übersetzung bei Erman [2], insbesondere S. 281 ff.

2) Dieser Ausdruck darf selbstverständlich nicht zu wörtlich verstanden werden; wirklich exakte Systematik ist nie eine starke Seite des Ägypters gewesen.

3) Peet [1], S. 121 f.

4) Dem scheint die Tatsache zu widersprechen, daß der Wert der Summe $7 + 7^2 + \cdots + 7^5$ zwar einerseits durch unmittelbare Berechnung der einzelnen Potenzen von 7 und ihre Addition erhalten wird, andererseits aber der Summenwert von 19607 (ohne eine weitere Erklärung) nochmals durch die Berechnung von 7 . 2801 ausgedrückt wird; nun ist aber $2801 = \frac{7^5 - 1}{7 - 1}$, so daß man versucht ist, für Ägypten eine Kenntnis der Summenformel der geometrischen Reihe anzunehmen. Schreibt man sich aber die Durchführung der ägyptischen Rechnung für $7 + \cdots + 7^5$ ausführlich auf, so sieht man, daß es sich hier garnicht um etwas handelt, was als „very flattering to their mathematical intelligence" bezeichnet werden muß, sondern daß man nur etwas praktische Geschicklichkeit des Schreibers anzunehmen hat, um sofort auf die Zahl 2801 geführt zu werden. Das fortgesetzte „Multiplizieren" mit 7 führt nämlich unmittelbar zu dem Schema

/ 1	7	49	343	2401	2801
/ 2	14	98	686	4802	5602
/ 4	28	196	1272	9604	11204
7	49	343	2401	16807	19607

wobei die außerhalb der Striche stehenden Zahlen durch Addition der Zahlen der zugehörigen Spalten bezw. Zeilen erhalten werden. Bei dieser, schon durch die Schrift suggerierten Anordnung ist es aber auf den ersten Blick evident, daß das Resultat 19607 sowohl durch Addition der Zahlen 7, 49, . . ., 16807, wie durch Addition von 2801, 5602, 11204 eralten werden kann: und nur dies ist der Inhalt der beiden Rechnungen in Nr. 79. Es steckt darin also nicht mehr als mathematische Eigenschaft das charakteristische Moment abgibt [1]). Im allgemeinen wird es sich bei der ägyptischen Mathematik immer darum handeln, unter Ausnutzung eines festen Schematismus, d. h. mit einem Minimum theoretischer Überlegungen, ein Maximum praktischer Fragen zu erledigen [2]).

Auch die Behandlung von Fragen, die wir der „Geometrie" zuzuzählen gewohnt sind, nimmt ihren Ursprung in praktischen Erfordernissen. Von einer reinen Geometrie als getrennter mathematischer Disziplin, wie sie später bei den Griechen von so großer Bedeutung wird, ist in Ägypten nichts zu spüren. Die Bestimmung von Flächen oder Volummaßen stellt ebenso nur Anwendungen des Zahlenrechnens auf konkrete Dinge dar, wie die Bestimmung von Brotrationen u. dergl.; das rein Geometrische tritt dabei ganz in den Hintergrund. So ist es auch nur natürlich, wenn im Papyrus Rhind unter den Aufgaben „geometrischer" Natur auch eine Umrechnungstabelle für Volummaße vorkommt [3]), die rein mathematisch betrachtet, garnicht hierher gehörte. Für den Ägypter ist der Zusammenhang mit den übrigen Aufgaben eben durch die Gemeinsamkeit des Anwendungsgebietes bestimmt. Das „geometrische" solcher Aufgaben liegt nicht in der Beziehung zu gewissen Kenntnissen über die Gestalt von Flächen oder Körpern, sondern in der Ausdehnung der gewöhnlichen Zahlenrechnung auf dieses Gebiet. Die Regeln selbst, nach denen, etwa bei einer Flächenberechnung, vorzugehen ist, sind wohl unmittelbar der Anschauung oder Empirie entnommen und nicht für sich der Gegenstand mathematischer Untersuchung (wenigstens so weit unsere bisherigen Quellen reichen).

Mit dieser Auffassung hängt eine Tatsache zusammen, der wir in ähnlicher Weise schon einmal begegnet sind: eine gewisse unwillkürliche Klarheit der Begriffsbildung in logischer Hinsicht. Da das Interesse einer geometrischen Aufgabe in ihrer zahlenmäßigen Beherrschung liegt, so ist der ganze additiv-abzählende Charakter der Arithmetik auch hier ausschlaggebend; es kommt dem Ägypter nicht in den Sinn, „Ellen mit Ellen zu multiplizieren", um „Quadratellen" zu erhalten, so wenig er Brote mit Broten multiplizieren wollte. Sein Rechnen wird also meist ein ganz korrektes Operieren mit „unbenannten Zahlen" [4]), soweit es ihre rechnerische Kombinierung betrifft, wenn sie auch immer eine ganz gegenständliche Bedeutung haben. Die Relationen zwischen Längen- und Flächeneinheiten werden nicht mit dem Abzählen der letzteren in Verwirrung gebracht; die im Grunde sinnlose Unterscheidung zwischen „benannten" und „unbenannten" Zahlen ist diesem ursprünglichen Denken noch fremd.

---

ein Ausprobieren des kommutativen Gesetzes der Addition. Auch ich habe seinerzeit die Kenntnisse der Ägypter in diesem Punkte zu hoch eingeschätzt ([1], S. 69). Man darf eben nicht vergessen, daß eine Rechnung wie

/ 1	2801
/ 2	5602
/ 4	11204
7	19607

für den Ägypter eine Addition bedeutet (vgl. § 2), während wir uns nur zu leicht zu einer multiplikativen Auffassung verleiten lassen.

1) Demgemäß muß die Bemerkung von Peet ([1], S. 78) über *twnw* als „difference of schare" und „common difference" gerade umgekehrt werden.

2) Die Bemerkung Peet's ([1], S. 61), die Verwendung des Wortes *'ḥ'* als mathematischer Terminus sei „a good example of the concrete nature of Egyptian mathematics" scheint mir allerdings nicht stichhaltig zu sein, ebensowenig wie man aus der Bezeichnung „Mengenlehre" auf den konkreten Charakter dieser Disziplin schließen kann. Im Gegenteile liegt gerade in der Verwendung eines so allgemeinen Ausdrucks wie *'ḥ'* (vgl. auch das Determinativ!) ein gewisser Gegensatz zu der sonst üblichen konkreten Benennung der Zahlen. — Man beachte übrigens die Verwendung von „acervum" in ganz abstrakter Bedeutung in der von Sethe ([1], S. 121) zitierten Stelle Horat. Epist. I 6 34, 35. Ferner neuerdings Gunn [2], S. 124 u. S. 130.

3) Nr. 47, Peet [1], S. 87.

4) Vgl. auch Peet's Kommentar zu Nr. 56 ([1], S. 98).

Eine kleine Gruppe von Beispielen des Papyrus Rhind möchte ich noch erwähnen, um durch sie das Gesagte zu illustrieren. Um das Fassungsvermögen eines kubischen Behälters der Länge $l = 10$ in einer bestimmten Maßeinheit zu erhalten, hat man $V = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{20}\, l^3$ zu bilden und erhält $V = 75$ (Nr. 44[1])). Nr. 45 verlangt nun umgekehrt aus dem Fassungsvermögen 75 die Dimensionen des Speichers zu bestimmen. Wie unrichtig es wäre, hier das Auftreten des Begriffes der Kubikwurzel zu erwarten, zeigt die Rechnung, die der Formel $l = \left(\frac{2}{3} \cdot 20\right) \frac{V}{10 \cdot 10}$ entspricht, also zwar richtig $l = 10$ liefert, aber doch im allgemeinen keineswegs der Bestimmung einer dritten Wurzel äquivalent ist. Nr. 46 wiederholt die vorangehende Aufgabe, aber mit $V = 25$; und die angewandte Formel ist wieder $l = \left(\frac{2}{3} \cdot 20\right) \frac{V}{10 \cdot 10}$ was nun $l = 3 + \frac{1}{3}$ ergibt, so daß der Behälter die Dimensionen $10 \times 10 \times \left(3 + \frac{1}{3}\right)$ erhalten müßte.

Man sieht also: bei keiner der drei Aufgaben war die spezielle geometrische Gestalt von wesentlichem Interesse; sie kommt nur so weit in Betracht, als sie eine einfache Bestimmung des Volumens gestattet. So ist es auch garnicht die mathematische Beziehung des „Volumen $= l^3$", welche den Sinn der Aufgabe ausmacht, sondern bloß das Ausdrücken des Fassungsvermögens in den richtigen Einheiten und das schematische Umkehren *dieser* Aufgabe. Für den Ägypter bildete also das Operieren mit dem Koeffizienten $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{20}$ den Kern der Aufgabe. Nicht die Brücke zu den gestaltlichen Beziehungen, sondern die zu den Maßgrößen und Maßsystemen wird durch diese Aufgaben geschlagen, die *Griffith* und *Peet* unter der treffenden Bezeichnung „mensuration" zusammengefaßt haben.

§ 5. Der allgemeine Charakter der ägyptischen Mathematik.

Obwohl ich in Kap. II § 7 nach Behandlung der Bruchrechnung nochmals auf den allgemeinen Charakter der ägyptischen Mathematik zu sprechen kommen werde, so möchte ich doch auch dieses Kapitel mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen schließen.

Die Beurteilung der ägyptischen Mathematik hat ähnliche Schicksale erfahren wie die der ägyptischen Kunst. Auch diese hat es sich lange gefallen lassen müssen, nur vom Standpunkt späterer und fremder Entwicklung betrachtet zu werden — eine Tendenz, die notwendig zu Irrtümern führen mußte. Der Vergleich mit der Kunstgeschichte geht aber tiefer: ich denke vor allem an H. *Schäfer's* Untersuchungen[2]) über die Perspektive im ägyptischen Relief. Schäfer hat dort gezeigt, daß es prinzipiell unrichtig ist, zu sagen, der Ägypter hätte nicht perspektivisch zeichnen *gekonnt*; die Alternative „können" oder „nicht können" beruht auf einer unhistorischen Problemstellung, die dem ägyptischen Denken ganz ferne gelegen war. Der Ägypter *wollte* gar keine Perspektive, sie ist erst für unser Gefühl die „einzig richtige" Art der zeichnerischen Darstellung; für den Ägypter wäre sie geradezu falsch. Ganz ähnlich scheinen mir die Dinge zu liegen, wenn man sagt, der Ägypter hätte nur mit 2 (abgesehen von 10) direkt multiplizieren „können". Im Gegenteil: er wollte garnicht „multiplizieren", sondern sein Ziel ist gerade die Zurückführung jeder anderen Operation auf ein additives Schema. Vom ägyptischen Standpunkt aus kann man also nicht sagen, daß Multiplikation und Division nur unvollkommen entwickelt gewesen seien[3]),

1) Peet [1], S. 84 ff.

2) Schäfer [1].

3) Z. B. steht noch die Darstellung bei Erman-Ranke völlig auf diesem Boden ([1], S. 424 f.).

sondern vielmehr, daß die Addition zu einem äußerst leistungsfähigen Werkzeug ausgebaut war [1]). Was die ägyptische Mathematik an Fortgeschrittenheit in unsern Augen verliert, gewinnt sie an Einheitlichkeit.

Selbstverständlich handelt es sich bei allen diesen Dingen viel mehr um Eigentümlichkeiten des Volkscharakters als um eine beabsichtigte Entwicklung. Das Bewahren des Altüberkommenen, der Hang zum wohlgeregelten Schematismus, schließlich die Einstellung auf das rein Nützliche sind die Momente, deren Ineinandergreifen ich schon im Vorangehenden zu zeigen versucht habe.

Von einer wirklich „wissenschaftlichen" Mathematik kann also in Ägypten keine Rede sein, sie fällt noch ganz in den Bereich der „vorwissenschaftlichen" Periode, wie es Hankel so treffend ausdrückt. Vor allem fehlt diesem Stadium der Begriff des „Beweises" und der „Formel", Begriffe, die aufs engste innerlich zusammenhängen. Jede Rechnung ist eine spezielle Zahlenrechnung, womit ein allgemeiner Beweis überflüssig gemacht ist; die „Probe" tritt gewissenmaßen an seine Stelle [2]). Trotzdem scheint mir aber der Gegensatz der „vorwissenschaftlichen" Epoche gegen die „wissenschaftliche" nicht in dem mangelnden Bedürfnis nach einem Beweise, sondern vielmehr in dem Unterschied zwischen dem immer wiederholten praktisch-empirischen [3]) und dem abstrakten Beweis zu liegen: die vorwissenschaftliche Periode hat noch nicht das „ideale Element der Formel adjungiert" [4]). Den bewußten Schritt zum Beweise haben erst die griechischen Mathematiker getan; und es ist wohl kein Zweifel, daß die geometrische Konstruktion nicht nur die Brücke zur Empirie schlägt, sondern andererseits durch die große Freiheit bei der Wahl der Annahmen psychologisch die Rolle unserer allgemeinen Formel spielt.

Die ganze Geschichte der Mathematik wird beherrscht von einem Wechselspiel zwischen Arithmetik und Geometrie. Ganze Völker und Kulturen lösen sich ab in ihrer Rolle an diesem Prozeß; sie ist nicht zu trennen von allen anderen Äußerungen ihres Geisteslebens. Hermann Hankel hat sein Werk zur Geschichte der Mathematik in diesen Rahmen gespannt; der Forschung der seither vergangenen Dezennien haben wir es zu verdanken, wenn nun auch die Anfänge dieses Schauspiels allmählich klarer erkennbar werden. Bleibt man sich der Mangelhaftigkeit bewußt, die jeder schlagwortartigen Klassifizierung historischen Geschehens notwendig innewohnt, so wird man sagen dürfen, daß die älteste Phase mathematischen Denkens, die ägyptische Mathematik, „arithmetischen" Charakter trägt, wenn auch nur auf einer primitiven Stufe, der Stufe der unmittelbar aus dem Zählen entwickelten Mathematik; „more geometrico" zu denken blieb einer späteren Zeit vorbehalten.

---

1) In diesem Sinne möchte ich auch die Äußerungen der Griechen verstehen, sie hätten ihre Geometrie von den Ägyptern gelernt. Bekanntlich sind sie ja wirklich in ihrem Zahlenrechnen aufs engste von dem ägyptischen Schema abhängig gewesen. So können sie also tatsächlich die Anwendung der Rechnung auf geometrische Probleme in Ägypten gelernt haben; nur ist dabei für den Ägypter die „arithmetische" Seite, für den Griechen die geometrisch-gestaltliche das Primäre.

2) Vgl. Peet [1], S. 22.

3) Diesem entspricht die „Regel", das „mache es immer so wie in diesem Falle" (vgl. Pap. Rhind No. 61 b (bei Eisenlohr 61) und No. 66). Sie ist das Grundelement der Mathematik des praktischen Lebens.

4) Hilbert [1], S. 174 ff.

Zweites Kapitel.

Die ägyptische Bruchrechnung.

Das Ziel des Folgenden ist es, unter Anwendung der im ersten Kapitel entwickelten Gesichtspunkte den Aufbau der ägyptischen Bruchrechnung, insbesondere die Stammbruch-Zerlegung mit der sich der erste Teil des Papyrus Rhind beschäftigt, aufzuklären. Es soll gezeigt werden, daß es tatsächlich möglich ist, aus der scheinbaren Willkürlickeit dieser Rechnungen eine einfache Entstehungsgeschichte herauszulesen.

§ 1. Vorbemerkungen.

Ehe ich mich meinem eigentlichen Thema zuwende, will ich in diesem Paragraphen einige Bemerkungen vorausschicken, um nicht später durch sie den Gedankengang unterbrechen zu müssen.

Zunächst komme ich nochmals auf den Begriff der „natürlichen Brüche" zurück, den ich schon seiner allgemeinen Stellung nach in Kapitel I § 3 gekennzeichnet habe. Ich will nun hier, wo dieser Begriff sogleich in eine ganz bestimmte Beziehung zur Bruchrechnung treten wird, versuchen, eine kurze Skizze seiner Entwicklung zu geben, wie sie mir jetzt im Zusammenhaug mit dem Folgenden am wahrscheinlichsten scheint; ich bin mir aber wohl bewußt, daß damit nur ein Rahmen gegeben sein kann, den auszufüllen die Aufgabe einer speziellen Untersuchung sein muß.

Als älteste Gruppe von „natürlichen Brüchen" möchte ich 1/2, 1/3, 1/4 und die zugehörigen Komplementbrüche 2/3 bzw. 3/4 ansehen. Die letzteren sind die beiden einzigen Komplementbrüche, denen auch in der hieroglyphischen Schrift (wenigstens in der ältesten Zeit) besondere Zeichen zukommen [1]). Die Einfügung des Gebietes der „gebrochenen Zahlen" in die übrige Mathematik geschieht nun, wie wir sogleich sehen werden, durch sinngemäße Ausdehnung des für die ganzen Zahlen üblichen dyadischen Schemas. Das Einsetzen dieses Algorithmus äußert sich darin, daß die natürlichen Brüche einerseits in bestimmter Weise geordnet, andererseits um einige neue vermehrt werden; geordnet in so ferne als nun die Brüche als enger zusammengehörig zu betrachten sind, die sich dyadisch aneinanderreihen lassen, d. h durch fortgesetztes Halbieren, oder rückwärts gesehen, durch fortgesetztes Verdoppeln, aus einander hervorgehen; womit sofort eine Erweiterung des Bruchgebiets verbunden ist. So entstehen aus dem ursprünglichen Komplex zwei Gruppen von Brüchen, die ich kurz als die „1/2-*Reihe*" und die „1/3-*Reihe*" bezeichnen will: die „1/2-Reihe" ausgehend von 1/2, 1/4, über 1/8 fortschreitend zu 1/16, 1/32 usw. [2]), die „1/3-Reihe" bestehend aus 2/3, 1/3, 1/6, 1/12 usw. Man sieht: der Komplementbruch 3/4 fügt sich nicht mehr in dieses Schema; in der Tat verschwindet er schon in sehr früher Zeit aus der Schrift [3]); 2/3 tritt dagegen

---

1) Über diese Ausnahmestellung von 2/3 und 3/4 vgl. Sethe [1], S. 91 ff., S. 98, ebenso S. 81 f.

2) Über 1/32 („der neue Teil") vgl. Sethe [1], S. 79 f.

3) Vgl. Sethe [1], S. 98.

vor 1/3 im Gegensatz zu der ursprünglichen auf das Zählen begründeten Reihenfolge, wie sie noch in der Sprache erkennbar geblieben ist — wird doch 1/3 mit „*r* 1", 2/3 mit „*r* 2" bezeichnet[1]). In der Mathematik, d. h. beim Rechnen, das ja die Ursache dieses Vorganges bildet, wird die Reihenfolge 2/3 → 1/3 dermaßen die herrschende, daß 1/3 immer nur durch Halbierung des für 2/3 berechneten Wertes gefunden wird[2]). Schließlich erhält 1/6 keine selbständige Rolle und tritt gleichwertig etwa neben 1/12[3]).

Damit haben wir ein Stadium der Entwicklung erreicht, wie es dem Papyrus Rhind zu Grunde liegt; für diesen werden wir speziell als „1/2-Reihe" etwa die Brüche 1/2, 1/4, 1/8 als „1/3-Reihe" 2/3, 1/3, 1/6, 1/12 zu verstehen haben, eine Abgrenzung, die sich einfach durch die damit erzielten Ergebnisse (vgl. § 2 und § 7) rechtfertigen läßt. Eine Festlegung des Bereiches der natürlichen Brüche in verschiedenen Epochen muß sich vor allem auf eine Untersuchung der gleichzeitigen Metrologie (etwa nach dem Vorbilde von Griffith [2] und [3]) stützen. Man wird aber nicht vergessen dürfen, daß die Entstehung der Rechnungen, welche im Papyrus Rhind (wenigstens in den in § 2 und § 6 zu besprechenden Teilen) enthalten sind, einer ganz wesentlich früheren Zeit entstammen können, als die effektive Abfassung des Papyrus selbst (etwa Dyn. XII). Von grundsätzlicher Bedeutung bleibt für uns nur, daß das Gebiet der natürlichen Brüche eine Unterteilung erfährt, die durch eine Art von mathematischem Schematismus bedingt ist und damit von dem ursprünglichen Bereich zu dem der „algorithmischen" Brüche überleitet.

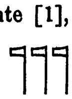
Neben den beiden Bruchreihen spielen die übrigen Brüche nur eine sehr sekundäre Rolle, wenn sie auch im Prinzip noch den natürlichen Brüchen zuzurechnen wären. Der Bruch 1/10 ist zwar durch das dezimale Schriftsystem ausgezeichnet und kommt auch tatsächlich als Bruchteil bei Maßgrößen[4]), sowie beim praktischen Rechnen vor[5]); aber in der mathematischen Entwicklung als solcher treten weder 1/10 noch das Doppelte, 1/5, besonders hervor. Ganz Ähnliches gilt auch von 1/7 oder 1/9. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in der dominierenden Rolle, die dem dyadischen Algorithmus in der ägyptischen Mathematik zukommt. Sie ist etwa vergleichbar mit der Bedeutung des Dezimalsystems in der Gegenwart; der hohe Glaubenseifer, mit dem ihm angehangen wird, wenn auch nicht gerade auf Grund mathematischer Sachkenntnisse, mag vielleicht auch für sein ägyptisches Seitenstück kennzeichnend sein.

Ich schließe diese Vorbemerkung mit der Einführung einiger Bezeichnungen, die ich im Folgenden verwenden werde.

---

1) Vgl. auch Sethe [1], S. 96 f., wonach 2/3 wahrscheinlich eine Dualform ist. Vgl. Gunn [2], S. 125 (zu P. 15)

2) Die Bemerkung von Griffith [4], Text S. 16: „1/3 could only be reached through halving 2/3" möchte ich aber dadurch modifizieren, daß ich auf das „können" nicht solches Gewicht legen möchte (vgl. Kap. I § 5). Vgl. auch § 4, S. 31.

3) Man könnte vielleicht versuchen 1/2, 1/3, 2/3 für sich zu einer noch älteren Gruppe zusammenzufassen und damit die besondere Bedeutung von *ḥśb* (sowohl für „1/4", wie für „rechnen") in Zusammenhang zu bringen, etwa als Andeutung des hier zuerst auf das Bruchgebiet angewandten Algorithmus. Gerade der Umstand, daß 1/3 und 2/3 mit *r* 1 und *r* 2 bezeichnet werden, d. h. unter Verwendung des Wortes *r* (Mund), das dann für alle Stammbrüche in Gebrauch kommt, scheint mir darauf hinzuweisen, daß die Bezeichnungen von 1/3 und 2/3 einer andern Epoche angehören wie die der übrigen Brüche. Sonst wäre ja eine Inkonsequenz der Bezeichnungen wie *r* 1 = 1/3, *r* 2 = 2/3, aber *r* 5 = 1/5 usw. ganz unverständlich. — Eine entsprechende Veränderlichkeit im Laufe der Zeiten besteht auch im Bereiche der ganzen Zahlen (vgl. Sehte [1], S. 11 ff.). Nach unten verfolgt hat vielleicht der Ausdruck des Plurals durch Dreimalsetzen (später  für  d. h. „die Götter" — vgl. S. 6) analoge Bedeutung (vgl. S. 4, Anm. 3). Das ist selbstverständlich später in Vergessenheit geraten (Sethe [1], S. 51, Anmerkg. 1).

4) Vgl. z. B. die Tabelle bei Griffith [3], S. 410/11.

5) Z. B. Spiegelberg [1], S. 10/11. — Auf die Aufgaben No. 1 bis 6 des Pap. Rhind (Peet [1], S. 50 ff.) werde ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Ueber die Grundaufgabe der ägyptischen Bruchrechnung, die Zerlegung eines „gemischten" Bruches in „Stammbrüche" und über diesen Begriff selbst habe ich schon in Kapitel I § 3 gesprochen. Wenn also demnach für den ägyptischen Bruchbegriff eine Unterscheidung von „Zähler" und „Nenner" unwesentlich wird, so will ich mich doch dieser und ähnlicher moderner Termini bedienen, um nicht zu ägyptischer Umständlichkeit gezwungen zu sein, was aber nie in sachlicher Hinsicht mißverstanden werden darf. — Wie schon dort bemerkt, zähle ich auch 2/3 im allgemeinen zu den Stammbrüchen.

In ähnlichem Sinne spreche ich auch von „Tabellen", insbesondere von der „$2/n$-*Tabelle*", in welche ich die ersten Rechnungen des Papyrus Rhind zur Zerlegung von Brüchen der Form $2/n$ in eine Summe von Stammbrüchen zusammenfasse[1]). Ebenso werde ich auch von einer „2/3-Tabelle" oder einer „Ergänzungstabelle" reden, will aber dabei die Frage unerörtert lassen, wieweit eine solche Bezeichnung mit dem ägyptischen Empfinden übereinstimmen würde; daß aber z. B. in den auf 1/10 bezüglichen Beispielen No. 1 bis 6 des Papyrus Rhind der Fall $10 \cdot 1/10 = 1$ nicht übergangen wird, spricht doch wohl für einen gewissen tabellarischen Charakter solcher Rechnungen.

Schließlich will ich in diesem ganzen Kapitel eine Schreibweise anwenden, die sich im Verlaufe der Arbeit als sehr nützlich herausgestellt hat. Ich werde nämlich in Anpassung an das Ägyptische an Stelle von $\frac{1}{a}$ immer $\bar{a}$ schreiben, außer wenn ich mit diesen Größen im modernen Sinne gerechnet wissen will[2]). Dagegen soll die additive Verknüpfung, um eine Verwechslung mit unserer Multiplikation zu vermeiden, durch „$+$" besonders gekennzeichnet werden[3]).

Für den Bruch 2/3 verwende ich das besondere Zeichen $\bar{\bar{3}}$; ich schreibe also beispielsweise $\bar{\bar{3}} + \bar{3} = 1$. — Einige weitere Bezeichnungen sollen an späterer Stelle hinzugefügt werden.

§ 2. Der erste Teil der $2/n$-Tabelle.

Den Ausgangspunkt der weiteren Untersuchung bildet die folgende Überlegung: bei dem additiven Grundcharakter der ägyptischen Mathematik, bei dem Fehlen einer selbständigen Division, kann man zu einem Verständnis der Bruchrechnung nur dadurch zu gelangen hoffen, daß man versucht, auch sie von einem additiven Gesichtspunkt aus zu erklären. Dabei wird man erwarten dürfen, daß die Eingliederung der Bruchrechnung in die übrige Mathematik möglichst schematisch vorgenommen wurde, also insbesondere, soweit als möglich, nach der „dyadischen" Methode.

Über die begrifflichen Grundlagen der Stammbruchzerlegung habe ich schon in Kapitel I gesprochen und darauf hingewiesen, daß eine Zerlegung $2\bar{n} = \bar{n} + \bar{n}$ als „trivial" von vorneherein nicht in Betracht kommt. Wie wird man sich also zu helfen suchen, wenn man das Doppelte eines Stammbruches mit Hilfe beispielsweise zweier anderer Stammbrüche darstellen will? Kann man

---

1) Plate A bis D bei Peet [1] (abgesehen vom Titel); Kommentar S. 33 ff.

2) Ich möchte auf die große suggestive Kraft hinweisen, die einer solchen Äußerlicheit innewohnt. Erst durch diese Schreibweise und die der ägyptischen Art angepaßte Verwendung von zweierlei Tinte konnte ich es vermeiden, dauernd in den uns gewohnten Algorithmus zurückzufallen. Statt dessen habe ich natürlich immer wieder die Schreib- und Rechenfehler gemacht, die uns auch im Pap. Rhind begegnen. Es ist ja oft auf deren Fülle hingewiesen worden; aber nach allem was wir sonst von der Flüchtigkeit ägyptischer Schreiber gewohnt sind, und nach meiner eigenen Erfahrung übersteigen sie sicher nicht das zu erwartende Maß. Eine nicht sehr sorgfältig gesetzte erste Fahnenkorrektur einer mathematischen Arbeit ist meist nicht viel besser zu bewerten als die Leistung des alten Schreibers.

3) Die jeder Systematik Hohn sprechende Bezeichnungsweise, wie sie allmählich in Arbeiten zur Geschichte der Mathematik üblich geworden ist, findet sich leider auch in dem sonst so ausgezeichneten Werke von Peet. So soll $1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ heißen: $\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}$ und dies unmittelbar neben $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$!

vielleicht dadurch zum Ziele kommen, daß man das „Verdoppeln" der Multiplikation sozusagen nach der anderen Seite fortsetzt, d. h. von $2\overline{n}$, wenn schon nicht zu dem „trivialen" Bestandteil $\overline{n}$, so doch zu dem nächsten Gliede der dyadischen Kette, nämlich $\overline{2}\,\overline{n}$ übergeht? Ein solches Fortsetzen des dyadischen Schemas ist ja außerdem etwas von allem Messen und Wägen ganz Vertrautes. Kann man also $2\overline{n}$ etwa aus $\overline{2}\,\overline{n}$ und einem geeigneten andern Stammbruch so zusammensetzen, wie man dies mit 3a und 2a+1a zu tun gewohnt ist? Nur werden jetzt Brüche an die Stelle der ganzen Zahlen treten müssen [1]), die einfachen Elemente, die „natürlichen Brüche", werden zum Aufbau der komplizierteren dienen.

Soll ein solches Verfahren zum Ziele führen, so muß $2\overline{n} = \overline{2n} + \overline{m}$ werden, wo $\overline{m}$ irgend einen geeigneten Stammbruch bezeichnet. Machen wir uns klar, was dies für den Ägypter bedeutet. Für jedes bestimmte $\overline{n}$ bewegen wir uns im Gebiete der „n-tel" als Objekte des Zählens. Soll nun, um zu $2\overline{n}$ zu gelangen, ein solcher Bruch verdoppelt werden, während man andrerseits versucht mit $\overline{2}\,\overline{n}$ zu operieren, so handelt es sich also um den Aufbau der Anzahl 2 dieser $\overline{n}$ aus zwei Bestandteilen, nämlich $\overline{2}$ und $1+\overline{2}$. Soll aber die Zerlegung von $2\overline{n}$ nicht doch in die „triviale" $2\overline{n} = \overline{2n} + \overline{n} + \overline{2n} = \overline{n} + \overline{n}$ zurückfallen, so muß der Ausdruck $(1+\overline{2})\overline{n}$ für sich allein — ich nenne ihn kurz den „*Ergänzungsterm*" im Gegensatz zu dem „*Hauptglied*" $\overline{2}\,\overline{n}$ [2]) — zu einem Stammbruch $\overline{m}$ führen. Oder ägyptisch ausgedrückt: $2\overline{n}$ d. h. das Doppelte eines n-tels, läßt sich dann als Summe von zwei Stammbrüchen darstellen, deren einer $\overline{2n}$, d. h. die Hälfte dieses n-tels, ist, wenn man einen Bruch $\overline{m}$ so finden kann, daß $1+\overline{2} = \overline{m}\cdot n$ also das n-fache dieses m-tels wird. Mit einer derartigen Relation beginnen in der Tat die sämtlichen Rechnungen zur „$2/n$-Tabelle" des Papyrus Rhind [3]).

Lassen wir aber zunächst die ägyptische Rechenweise beiseite und fragen uns, wann überhaupt eine solche Methode zu einem Ergebnis führen kann. Um $\frac{2}{n}$ in der Form $\frac{1}{2n}+\frac{1}{m}$ darstellen zu können, muß

$$\frac{2}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{3}{2n}=\frac{1}{m}$$

werden, d. h. es muß n durch 3 teilbar sein. In Tafel I habe ich die $2/n$-Tabelle des Papyrus Rhind, die von $n = 5$ bis $n = 101$ läuft, wiedergegeben [4]); ihr entnimmt man, daß die obige Zerlegung in allen Fällen, wo sie überhaupt möglich ist, ausnahmslos angewandt wird [5]). Damit sind also die Zahlen n = 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99 erledigt.

Ohne vorerst wieder auf die ägyptische Ausdrucksweise zurückzukommen, will ich sogleich den einmal eingeschlagenen Weg weiter verfolgen. Soll eine Zerlegung mit Hilfe des nächsten

---

1) Wie weit die Gleichartigkeit in der Behandlung von ganzen Zahlen und Brüchen geht, zeigt z. B. Pap. Rhind No. 61 b, wo es heißt, man solle das zweifache und sechsfache von 1/5 nehmen (*ir ḫ[r]-k sp-f 2 sp.w 6-f*) um 2/3 von 1/5 zu erhalten (statt das 1/2 fache bzw. 1/6 fache).

2) Die Bezeichnungen „Hauptglied" und „Ergänzungsterm" werde ich übrigens gelegentlich auf die entsprechende Zerlegung der Zahl 2 selbst (also hier $\overline{2}$ bzw. $1+\overline{2}$) anwenden. Insbesondere gilt dies für die Tafeln.

3) Dies gilt auch für 2/3. Die Bemerkung von Peet ([1] S. 38) „No proof is necessary" ist unrichtig und beachtet nicht die 2 im Original. Sowohl der Papyrus Rhind wie die Kahun-Papyri geben hier 3 $\overline{\overline{3}}$ 2 an und dieses steht in genauer Parallele zu den „Beweisen", wie sie in ganz stereotyper Form in den Kahun-Papyri gegeben sind, z. B. 5 $\overline{3}$ $1+\overline{\overline{3}}$ $\overline{15}$ $\overline{3}$, was sowiel heißt wie

$$\frac{2}{5}=\overline{3}+\overline{15},\qquad \text{denn}\qquad \overline{3}=(1+\overline{\overline{3}})\overline{5},\qquad \overline{15}=\overline{3}\cdot\overline{5}.$$

Ganz ebenso bedeutet 3 $\overline{\overline{3}}$ 2

$$\frac{2}{3}=\overline{\overline{3}},\qquad \text{denn}\qquad \overline{\overline{3}}=2\cdot\overline{3}.$$

4) Vgl. die Tafeln am Ende der Arbeit. Teilbarkeit durch 3 heißt also Hauptglied $\overline{2}$ und Ergänzungsterm $1+\overline{2}$.

5) $\overline{\overline{3}}$ bleibt unzerlegt. Über die Zerlegung $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$, die sich ebenfalls unserer Regel fügt, vgl. später (§ 6).

Bruches der 1/2-Reihe, mit $\overline{4}$, möglich sein, d. h. soll

$$2\,\overline{n} = \overline{4\,n} + \overline{m}$$

sein, so muß also

$$\frac{2}{n} - \frac{1}{4n} = \frac{7}{4n} = \frac{1}{m},$$

d. h. n durch 7 teilbar werden. Wie Tafel I zeigt, ist diese Zerlegung unter den noch übrigen Zahlen angewandt bei 7, 49, 77, nicht aber bei $n = 35$ und 91, zwei Zahlen, die wir als „Ausnahmezahlen" zu bezeichnen haben; in § 6 werde ich noch auf sie zurückkommen.

Geht man in der 1/2-Reihe noch um einen Schritt weiter, d. h. versucht man $\overline{8}$ zur Bildung des Hauptgliedes zu verwenden, so erhält man nichts Neues, da man nur auf Teilbarkeit durch 15 geführt wird, was also bereits durch den ersten Fall umfaßt wird. Auch für $\overline{16}$ gilt Entsprechendes.

Die Zerlegung in Stammbrüche war bisher nach dem Prinzip erfolgt, das für die ganzen Zahlen übliche Schema mutatis mutandis auf das Bruchgebiet auszudehnen, wobei die Brüche der 1/2-Reihe die Rolle der „Kennziffern" übernahmen: statt mit $2n$, $4n$, $8n$ rechnet man eben mit $\overline{2\,n}$, $\overline{4\,n}$, $\overline{8\,n}$. Aber dieses Verfahren findet mit dem Gebiete der natürlichen Brüche seine Grenze: man hat nicht die mathematische Tendenz etwa rein dyadisch zu entwickeln, sondern man will kompliziertere Bildungen mit Hilfe einfacherer ausdrücken, wenn es sich auch nicht ganz vermeiden läßt, das Gebiet des „Algorithmischen" zu betreten. Der Bereich der natürlichen Brüche ist aber mit der 1/2-Reihe nicht erschöpft; neben sie tritt noch die 1/3-Reihe, diesmal sogar im engeren Sinne verstanden, da $\overline{\overline{3}}$ wegen seines Zählers 2 nicht als Hauptglied in Betracht kommt. An $\overline{2\,n}$, $\overline{4\,n}$, $\overline{8\,n}$ schließen sich also nun Zerlegungen mit $\overline{3\,n}$, $\overline{6\,n}$, $\overline{12\,n}$.

Ein Hauptglied $\overline{3\,n}$ führt wegen

$$\frac{2}{n} - \frac{1}{3n} = \frac{5}{3n} = \frac{1}{m}$$

auf Teilbarkeit von n durch 5. In der Tat sind 5, 25, 65 und 85 so zerlegt, während 55 und 95 einstweilen noch „Ausnahmen" bleiben. Das Rechnen mit $\overline{6\,n}$ verlangt Teilbarkeit durch 11, wofür nur noch 11 selbst und eben 55 übrig sind. In der Tat sind beide Zahlen so behandelt; 55 ist also nur von der Zerlegung mit $\overline{3}$ in die mit $\overline{6}$ geraten. Schließlich ergibt das Hauptglied $\overline{12\,n}$ die Zerlegung von $2 \cdot \overline{23}$ wie es auch sein soll.

Wir haben nun beide Reihen natürlicher Brüche erschöpft; die erste Tabelle in Tafel II stellt die zugehörigen Fälle nochmals zusammen.

Es liegt auf der Hand, wie man jetzt weiterzugehen hat. Wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen faßt man die einfachsten Elemente additiv zusammen und sieht nach, was sich derart ausdrücken läßt. Man wird also versuchen etwa

$$2\,\overline{n} = \overline{2\,n} + \overline{4\,n} + \overline{m}$$

zu bilden. Der Stammbruchcharakter des Ergänzungsterms $\overline{m}$ verlangt dann wegen

$$\frac{2}{n} - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n}\right) = \frac{5}{4n} = \frac{1}{m}$$

Teilbarkeit von n durch 5. Ein solches n gestattet aber bereits die einfachere Zerlegung mit dem Hauptglied $\overline{3\,n}$. Dagegen liefert $\overline{4\,n} + \overline{8\,n}$ die Zerlegung von $2 \cdot \overline{13}$. Untersucht man in dieser Weise alle durch Kombination von zwei Gliedern der 1/2- und 1/3-Reihe zu erhaltenden Fälle, so ergibt sich die zweite Tabelle von Tafel II. Wie man aus dieser entnimmt, ist eine Reihe von Fällen bereits durch Tabelle I überflüssig geworden, dagegen werden erst jetzt die Zahlen 13, 17, 19, 37 und 41 erfaßt. Dazu kommt noch $2 \cdot \overline{95}$, das mit einem Hauptglied $\overline{4 \cdot 95} + \overline{6 \cdot 95}$ zerlegt wird an Stelle des einfacheren $\overline{3}\,.\,\overline{95}$. Damit ist also auch die zweite Ausnahmezahl aus Fall I 4) untergebracht. Dagegen erscheint 43 (zu $\overline{8}+\overline{12}$ gehörig) als Ausnahmezahl; es ist eben $\overline{8}+\overline{12}$ schon eine ziemlich extreme Kombination[1]).

Im Prinzip könnte man noch weiter gehen und dreifache Hauptglieder verwenden. Dabei zeigt sich aber, daß von den 20 möglichen Kombinationen nur vier (oder streng genommen nur zwei) nicht schon in den früheren Fällen enthalten sind. Es ist dies einerseits die Zerlegung

$$2\cdot\overline{29} = \overline{2}\cdot\overline{29}+\overline{8}\cdot\overline{29}+\overline{6}\cdot\overline{29}+(1+\overline{6}+\overline{24})\overline{29},$$

sowie die beiden weiteren mit $\overline{2}+\overline{8}+\overline{12}$ bzw. $\overline{4}+\overline{8}+\overline{3}$ im Hauptglied, die auf $n = 31$ führen, aber beide nicht angewandt sind; das Durchprobieren solcher dreigliedriger Ausdrücke setzt eben schon zu viel Systematik voraus. Wir müssen also auch 31 den „Ausnahmezahlen" zuzählen. Schließlich erscheint noch die Summe

$$2\cdot\overline{101} = \overline{2}\cdot\overline{101}+\overline{3}\cdot\overline{101}+\overline{6}\cdot\overline{101}+\overline{101},$$

die der „trivialen" Zerlegung äquivalent ist, da ja gerade die Relationen $\overline{2}+\overline{6} = \overline{\overline{3}}$, $\overline{\overline{3}}+\overline{3} = 1$ dem Ägypter ganz geläufig sind. Offenbar gingen hier alle Hilfsmittel zu Ende; in der Tat hat das bisher geschilderte Verfahren jetzt seine Grenzen erreicht; die noch übrigen Zahlen sind diesem Schema nicht mehr zugänglich[2]).

Fassen wir unsere, zunächst rein äußerlichen Ergebnisse zusammen, so können wir sagen: Soweit es überhaupt möglich ist, erscheint das angegebene Verfahren angewandt[3]); nur vier wirkliche Ausnahmen, nämlich $n = 31$, 35, 43 und 91 sind zurückgeblieben. Aber von selbst ist noch eine zweite Gruppe von Zahlen ausgesondert, nämlich 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97, also 11 Zahlen, die ich — zusammen mit den vier anderen — kurz als die „*Ausnahmezahlen*" bezeichnen will[4]). In § 6 werde ich noch ausführlich auf sie zurückkommen.

Unsere nächste Aufgabe wäre es jetzt, wenigstens für den soeben besprochenen Hauptteil der $2/n$-Tabelle, die Frage zu beantworten, wie sich für den Ägypter eine Rechnung vollzog, die hier zunächst ohne besondere Rücksicht auf ägyptische Denkweise dargestellt wurde. Aber zu ihrer Behandlung müssen erst weitere Eigentümlichkeiten der ägyptischen Bruchrechnung berücksichtigt werden, denen ich mich nun zuwende.

§ 3. Die erste Art von *škm*-Rechnung.

Ich habe schon erwähnt, daß der Ägypter, um 7 viermal zu nehmen, die folgende Rechnung durchführt

1	7
2	14
/ 4	28,

1) Über die Rolle von $\overline{12}$ vgl. auch § 7.

2) Gunn ([2], S. 128 f.) meint, daß diese Zerlegung von $\frac{2}{101}$ vielleicht das Muster für alle weiteren Zerlegungen (über 99) abgegeben habe, was mir in der Tat sehr gut möglich zu sein scheint.

3) Es sind dies 34 Zerlegungen von 49 überhaupt.

4) Zufällig (d. h. mit guten mathematischen Gründen) sind diese 11 Zahlen sämtlich Primzahlen. Es ist aber klar, daß dieser Begriff in Ägypten noch keine Rolle gespielt hat. — Eine solche, sich von selbst ergebende Ausnahmestellung gewisser Primzahlen hat vielleicht auch Eisenlohr, der bereits die Teilbarkeitseigenschaften der Bruchnenner untersucht hat (vgl. Eisenlohr [2], S. 12 ff., S. 28 ff., allerdings ohne jede Beziehung zu dem dyadischen Verfahren) dazu verleitet, die Primzahlen überhaupt besonders zu betrachten. Es ist dies ein völliges Verkennen historischer Möglichkeiten.

wo die „Kennziffern" links abzählen durch wievielfaches Setzen der ersten Zahl (hier 7) — ich habe sie in Kapitel I geradezu als „neue Einheit" bezeichnet – die Zahlen jeder weiteren Zeile aus der ersten entstanden sind. Gehen wir nun zum Gebiet der B r ü c h e über, so stehen z. B. $\overline{28}$, $\overline{14}$, $\overline{7}$ zu einander in der Beziehung, daß die Verdoppelung von $\overline{28}$ zu $\overline{14}$, die von $\overline{14}$ zu $\overline{7}$ führt; **d i e R e i h e n f o l g e d e r a b z ä h l e n d e n K e n n z i f f e r n h a t s i c h a l s o j e t z t u m g e k e h r t**; $\overline{28}$ wird zur Einheit, $\overline{7}$ erhält das Gewicht 4. Wir bewegen uns damit nicht auf dem Gebiet rein theoretischer Überlegungen: die Rechnungen des Papyrus Rhind enthalten in der Tat mehrfach solche den eigentlichen Kennziffern entgegenlaufende Zahlenreihen, die ich von nun an als „*Hilfszahlen*" bezeichnen werde[1]) und (in Nachahmung der besonderen roten Schrift im Papyrus) durch fette Typen hervorhebe[2]). Dann haben wir also

1	$\overline{7}$	**4**
$\overline{2}$	$\overline{14}$	**2**
$\overline{4}$	$\overline{28}$	**1**.

Es ist hiernach klar, daß im Prinzip der Bruch mit dem größten Nenner die Hilfszahl **1** erhält; wir werden aber bald sehen, in welcher Weise von dieser ursprünglichen Regel abgewichen wird. — Aber auch im praktischen Leben kann man die Bedeutung dieser Hilfszahlen-Rechnung erkennen. Wie L e p s i u s[3]) gezeigt hat, werden die Monatstage derart mit Hilfe von Stammbrüchen ausgedrückt, daß 1/30, d. h. ein Tag, zur Einheit des Zählens wird (dem also die Hilfszahl **1** zukommt). Dann bedeutet z. B. $\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$ den 24., was nach Einführung der Hilfszahlen $\mathbf{20}+\mathbf{3}+\mathbf{1}$ ganz evident ist; ebenso ist durch $\overline{3}+\overline{15}$ d. h. $\mathbf{10}+\mathbf{2}$ der 12. Tag gegeben[4]).

Ohne mich an dieser Stelle mit Fragen aufzuhalten, die sich an das Rechnen mit Hilfszahlen knüpfen, wende ich mich jetzt einer Gruppe von Rechnungen des Papyrus Rhind zu, die Peet als „first group of completions (*śkm*)" zusammenfaßt, und die nach der Eisenlohr'schen Zählung die Nummern 7 bis 20 tragen[5]). Dabei werde ich zunächst von den Hilfszahlen absehen, um sie danach um so entscheidender heranzuziehen.

Ich beginne mit Nr. 11. Dort steht

	1	$\overline{7}$	
Nr. 11	$\overline{2}$	$\overline{9}$	verbessert: $\overline{14}$
	$\overline{4}$	$\overline{18}$	
	Summe	$\overline{4}$;	

$\overline{18}$ in $\overline{28}$ zu verbessern ist unterlassen, aber die Summe ist richtig mit $\overline{4}$ angegeben[6]). Modern ausgedrückt haben wir also hier die Berechnung von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{7}$ angegeben.

Hieran schließen sich nun einerseits Nr. 7, 7b, 10 und 9, andrerseits Nr. 12, 13 und 14, 15. Nr. 7 und 7b[7]) lauten

1) Hultsch [1] redet von „Hilfseinheiten".

2) Ich setze sie allerdings zur Platzersparnis meist rechts, nicht u n t e r die zugehörigen Zahlen.

3) [1], insbesondere S. 102 ff. — Ich verdanke Prof. S e t h e den Hinweis auf diese Arbeit.

4) Ähnliches gilt für die Einteilung der Elle. Interessant ist hier die Abweichung im Fall des Komplementbruches 23/24, der „23" statt „$\overline{\overline{3}}+\overline{6}+\overline{8}$" heißt (Lepsius [1], S. 108 f.).

5) Für den hieratischen Text vgl. Eisenlohr [1], Tafel IX. — Diese Aufgaben enthalten übrigens besonders viele Flüchtigkeitsfehler, auf deren, meist schon von P e e t gegebene Verbesserung ich aber doch eingehen muß. Im allgemeinen gebe ich dann die Rechnungen immer in ihrer richtigen Form wieder. Eine Zusammenstellung findet sich auf Tafel III.

6) Vgl. Peet [1], S. 55.

7) Sie unterscheiden sich nur durch Weglassung einiger Hilfszahlen in 7 b.

	1	$\overline{4}+\overline{28}$
Nr. 7,7b	$\overline{2}$	$\overline{8}+\overline{56}$
	$\overline{4}$	$\overline{16}+\overline{112}$
		Summe $\overline{2}$

$\overline{4}+\overline{28}$ ist die der $2/n$-Tabelle entsprechende Zerlegung von 2/7, so daß wir hier das Resultat von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{2}{7}$ vor uns haben. Dazu kommt noch Nr. 10 mit

	1	$\overline{4}+\overline{28}$	
Nr. 10	$\overline{2}$	$\overline{7}$	
	$\overline{4}$	9	(sic)
		Summe $\overline{2}$	

also, abgesehen von Schreibfehlern [1]) nochmals dasselbe Ergebnis.

Schließlich Nr. 9

	1	$\overline{2}+\overline{10}$
Nr. 9	$\overline{2}$	$\overline{4}+\overline{20}$
	$\overline{4}$	$\overline{8}+\overline{50}$
		Summe 1.

Das Erscheinen einer Summe 1 verlangt eine Verbesserung [2]) in

1	$\overline{2}+\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{4}+\overline{28}$
$\overline{4}$	$\overline{8}+\overline{56}$
	Summe 1

also in $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{4}{7}$.

Wie wir bisher 1/7, 2/7, 4/7 aus einander abgeleitet haben, so handeln Nr. 12, 13 bezw. 14, 15 von 1/14 und 1/28.

Nr. 12 lautet

	1	$\overline{9}$	verbessert: $\overline{14}$
Nr. 12	$\overline{2}$	$\overline{28}$	(verbessert aus $\overline{18}$)
	$\overline{4}$	$\overline{36}$	
		Summe $\overline{8}$	

muß also eigentlich

1	$\overline{14}$
$\overline{2}$	$\overline{28}$
$\overline{4}$	$\overline{56}$
	Summe $\overline{8}$

heißen [3]) und handelt von $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{14}$ in direktem Anschluß an Nr. 11.

Nr. 13 dagegen

	1	$\overline{16}+\overline{112}$
Nr. 13	$\overline{2}$	$\overline{32}+\overline{224}$
	$\overline{4}$	$\overline{64}+\overline{448}$
		Summe $\overline{8}$

ist aus Nr. 7 (welche sich auf 2/7 bezog) durch Vervierfachung der Nenner entstanden.

1) Vgl. Peet [1], S. 55.

2) Peet [1], S. 55.

3) Peet [1], S. 56. Vgl. auch Nr. 14.

An Nr. 12 schließt sich Nr. 14 mit

Nr. 14
$$\begin{array}{ll} 1 & \overline{18} \\ \overline{2} & \overline{36} \\ \overline{4} & \overline{72} \end{array}$$
$$\text{Summe } \overline{16}.$$

Es ist originell zu sehen, wie die Verdoppelung ganz schematisch vorgenommen wurde: der Anfangsfehler 1 $\overline{9}$ aus Nr. 12 ist einfach hierher übernommen, obwohl das Resultat richtig dasteht. Nr. 14 sollte nämlich lauten [1])

$$\begin{array}{ll} 1 & \overline{28} \\ \overline{2} & \overline{56} \\ \overline{4} & \overline{112} \end{array}$$

und gibt $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{28}$ an. Dasselbe leistet wieder Nr. 15 im Anschluß an Nr. 13

Nr. 15
$$\begin{array}{lr} 1 & \overline{32}+\overline{228} \\ \overline{2} & \overline{64}+\overline{456} \\ \overline{4} & \overline{128}+\overline{912} \end{array}$$
$$\text{Summe } \overline{16}.$$

Der Text bemerkt hierzu „falsch" und hat recht damit; es sollte $\overline{224}$ statt $\overline{228}$ heißen. Dann ergibt sich [2])

$$\begin{array}{lr} 1 & \overline{32}+\overline{224} \\ \overline{2} & \overline{64}+\overline{448} \\ \overline{4} & \overline{128}+\overline{896} \end{array}$$
$$\text{Summe } \overline{16}.$$

Damit haben wir also folgende Tabelle gewonnen: $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ wird kombiniert in

Nr. 9	mit	4/7
Nr. 7, 7b, 10	„	2/7
Nr. 11	„	1/7
Nr. 12, 13	„	1/14
Nr. 14, 15	„	1/28.

Die eben dargelegten Zusammenhänge lassen sich aber noch weiter verfolgen, sobald man die bisher beiseite gelassenen Hilfszahlen berücksichtigt, die sich bei einigen dieser Rechnungen finden. Gehen wir nochmals zu Nr. 7 zurück, so lautet diese Rechnung ausführlicher so:

Nr. 7
$$\begin{array}{lccc} 1 & \overline{4} & + & \overline{28} \\ & \mathbf{7} & & \mathbf{1} \\ \overline{2} & \overline{8} & + & \overline{56} \\ & \mathbf{3}+\overline{\mathbf{2}} & & \overline{\mathbf{2}} \\ \overline{4} & \overline{16} & + & \overline{112} \\ & \mathbf{1}+\overline{\mathbf{2}}+\overline{\mathbf{4}} & & \overline{\mathbf{4}} \end{array} \qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{2}{7}.$$

Die erste Zeile enthält also gerade solche Hilfszahlen, wie sie nach den einleitenden Bemerkungen dieses Paragraphen als ursprüngliche anzusehen sind, nämlich *ganze* Zahlen. Die weiteren Zeilen

1) Peet hat die Notwendigkeit dieser Korrektur übersehen. — Indessen hat auch Gunn in seiner ausführlichen Anzeige von Peet's Edition diese Verbesserung vorgenommen ([2], S. 129 f.). Überhaupt hat Gunn die Zusammengehörigkeit der einzelnen Rechnungen dieser Gruppe in der Reihenfolge erkannt, wie ich sie im Folgenden angebe. Gunn's Arbeit ist mir erst nach Abschluß meiner eigenen bekannt geworden.

2) Peet [1], S. 56.

gehen dann aus dieser ersten, samt ihren Hilfszahlen, durch schematische Ausführung des Halbierens hervor, wie es die Kennziffern $\bar{2}$ und $\bar{4}$ angeben. Wir sehen also hier ganz deutlich vor uns, wie der dyadische Algorithmus von einem einfachen Ausgangspunkte aus zu neuen Bildungen überleitet. In Nr. 7b ist diese Rechnung nochmals wiederholt, nur sind die Hilfszahlen der beiden ersten Zeilen vergessen. Aber wir können mehr sagen: an Stelle von Nr. 7b sollte eine andere Rechnung stehen, die uns fehlt. Die Rechnungen Nr. 13 und 15 zeigen nämlich das folgende System der Hilfszahlen

Nr. 13
$$\begin{array}{lr} \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} & \bar{\mathbf{4}} \\ \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \\ \bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} & \overline{\mathbf{16}} \end{array} \qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{14},$$

Nr. 15
$$\begin{array}{lr} \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \\ \bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}} & \overline{\mathbf{16}} \\ \bar{\mathbf{8}}+\overline{\mathbf{16}}+\overline{\mathbf{32}} & \overline{\mathbf{32}} \end{array} \qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{28}.$$

Man sieht: Diese Zahlen sind nicht nur Zeile für Zeile auseinander schematisch entwickelt, sondern Nr. 15 als Ganzes ist die Hälfte von Nr. 13 — und diese genau ein Viertel von Nr. 7, so wie 1/28, 1/14 und 2/7 auseinander hervorgehen [1]). Es fehlt also das zu 1/7 gehörige Zwischenglied (mit Rücksicht auf Späteres bezeichne ich es mit [Nr. 11b]):

[Nr. 11 b]
$$\begin{array}{llr} 1 & \bar{8}+\overline{56} & \\ & \mathbf{3}+\bar{\mathbf{2}} & \bar{\mathbf{2}} \\ \bar{2} & \overline{16}+\overline{112} & \\ & \mathbf{1}+\bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}} & \bar{\mathbf{4}} \\ \bar{4} & \overline{32}+\overline{224} & \\ & \bar{\mathbf{2}}+\bar{\mathbf{4}}+\bar{\mathbf{8}} & \bar{\mathbf{8}} \end{array} \qquad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{7}$$

an dessen Stelle Nr. 7b getreten sein mag.

Nachdem so die Nummern 7, [11b], 13, 15 in eine feste Reihenfolge gebracht sind, lassen sich nun auch leicht die übrigen Nummern einordnen. Nr. 11, 12 und 14 stehen dadurch in offenbarem Zusammenhang, daß sie unmittelbar von 1/7 ausgehen und nicht die Zerlegung von 2/7 wie Nr. 7 benützen. Nr. 11 und 12 zeigen keine Hilfszahlen, wohl aber Nr. 14, und zwar in folgender Art

$$\begin{array}{ccc} 1 & \overline{28} & \mathbf{1} \\ \bar{2} & \overline{56} & \bar{\mathbf{2}} \\ \bar{4} & \overline{112} & \bar{\mathbf{4}} \end{array}$$

also in scheinbar zweckloser Reihenfolge, da sie ja mit den Kennziffern identisch sind. Berücksichtigt man aber den Übertragungsmechanismus, den wir soeben bei den anderen Rechnungen kennen gelernt haben, so müßte durch Verdoppeln rückwärts übertragen Nr. 12 lauten:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \bar{2} & \overline{28} & \mathbf{1} \\ \bar{4} & \overline{56} & \bar{\mathbf{2}} \end{array}$$

und schließlich Nr. 11:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \bar{7} & \mathbf{4} \\ \bar{2} & \overline{14} & \mathbf{2} \\ \bar{4} & \overline{28} & \mathbf{1}. \end{array}$$

1) Daß Peet dieser Zusammenhang gänzlich entgangen ist, beweist z. B. seine Bemerkung zu Nr. 13, wo er verlangt, man hätte 448 statt 28 als L.C.M. nehmen sollen!

Hier stehen jetzt genau diejenigen Hilfszahlen, die wir bei einem ursprünglichen Schema anzunehmen haben (vgl. S. 24). Damit ist also die Zusammengehörigkeit der Nummern 11, 12 und 14 neuerlich bewiesen und gezeigt, daß man wohl das Recht hat, in jeder der vorkommenden Rechnungen Hilfszahlen zu ergänzen. Dann sind aber auch Nr. 10 und 9 sogleich an ihren Platz zu setzen. Nr. 10 ist ein drittes Exemplar von Nr. 7, während Nr. 9 daraus durch Verdoppelung hervorgeht. Die hiermit erhaltene endgültige Anordnung habe ich auf Tafel III zusammengestellt.

Aber welches ist der Sinn dieser Tabelle? Gehen wir von der einfachsten dieser Rechnungen aus: Nr. 11. Hier ist das Prinzip der Rechnung und ihrer Hilfszahlen noch klar ersichtlich: es handelt sich um die Kombination von $\overline{7}$ mit $1 + \overline{2} + \overline{4}$ oder, wenn wir uns des im vorigen Paragraphen Gesagten erinnern, gerade um die Berechnung des zur Zerlegung von 2/7 gehörigen Ergänzungstermes. Ich bezeichne daher unsere Tabelle als die „*Ergänzungstabelle*" zu 2/7.

Mit dieser entscheidenden Bemerkung eröffnet sich uns ein erster Einblick in die tatsächliche Berechnung der $2/n$-Tabelle. Wie wir wissen, ist das zu 2/7 gehörige Hauptglied mit $\overline{4}$ zu bilden, während etwa das Rechnen mit $\overline{2}$ erfolglos bleiben muß. Die Entscheidung bringt der Ergänzungsterm; rechnet man mit $\overline{4} \cdot \overline{7}$ als Hauptglied, so ist dieser $(1 + \overline{2} + \overline{4})\ \overline{7}$. Nr. 11 zeigt, wie die Addition der Hilfszahlen in dieser Rechnung eine Summe **7** (bezogen auf $\overline{28}$ als neue Einheit) ergibt, woraus folgt (vgl. § 4), daß $\overline{4}$, also ein Stammbruch, der Wert des Ergänzungsterms ist. Nun ist das Hauptglied leicht berechnet, in dem 1/4 von $\overline{7}$ gebildet wird, also zunächst 1/2, dann 1/4. Nr. 12 und 14 führen dies durch, indem dabei die ganze Ausgangsrechnung schematisch mitgeführt wird, was zwar wenig praktischen Wert hat, aber doch in jedem einzelnen Schritt das Resultat bestätigt. So ergibt sich die Zerlegung $\overline{4} + \overline{28}$. Aber damit ist dem Ägypter nicht genug. Ist $\overline{4} + \overline{28}$ „wirklich" die Zerlegung von 2/7, so muß sich dies auch aus den Hilfszahlen ergeben, wie man sie verwenden müßte, wenn $\overline{4} + \overline{28}$ für sich addiert werden sollten. Dann muß also $\overline{28}$ die Hilfszahl **1** bekommen, $\overline{4}$ die Hilfszahl **7** wie es in Nr. 7 geschieht. Und nun wird die ganze Rechnung nochmal nach beiden Seiten mit diesen Hilfszahlen durchgeführt[1]), was selbstverständlich immer wieder die Zerlegung in Hauptglied und Ergänzungsterm $\overline{4} + (1 + \overline{2} + \overline{4})$ erkennen läßt. Der Schlußeffekt liegt wohl in Nr. 9, wo sich 1 als Resultat der Vervierfachung der 1/7-Rechnung ergibt, während die Hilfszahlensumme **28** beträgt. Solche Hilfszahlenadditionen sind uns mehrmals erhalten; auf einen ganz ähnlichen Fall werden wir sogleich zu sprechen kommen.

Bevor ich mich dem restlichen Teil der *škm*-Rechnung zuwende, will ich auf diese Bezeichnung selbst eingehen. *škm* heißt etwa „voll machen", „ergänzen" und wird auch als mathematischer Terminus in dieser ursprünglichen Bedeutung gebraucht, z. B. in der „zweiten Gruppe" von Ergänzungsrechnungen (Nr. 21 bis 23), wo etwa $\overline{3} + \overline{5}$ zu 1 „ergänzt" werden soll. Nachdem wir die Beziehung der soeben besprochenen Rechnungen zur $2/n$-Zerlegung erkannt haben, zeigt sich, daß auch hier die Bezeichnung „Ergänzungsrechnung" völlig berechtigt ist, handelt es sich ja doch hier gerade um die Bestimmung eines „Ergänzungstermes" einer solchen Zerlegung: $1 + \overline{2} + \overline{4}$ ergänzt das Hauptglied $\overline{4}$ zu 2. Wir sehen also hier bestätigt, daß sich die ägyptische Terminologie an den sachlichen Inhalt einer Rechnung anschließt, nicht aber an die spezielle mathematische Gestalt. Andererseits werden natürlich gerade durch solche Ausdrücke auch innere Beziehungen für uns erkennbar.

---

1) Man hat es also hier gewissermaßen mit einem Analogen zur zweimaligen Berechnung der Summe der „geometrischen Reihe" in Nr. 79 (vgl. Kap. I § 4 Anmerkg. 4 S. 14) zu tun. — Auf die Beziehung zwischen „Probe" und „Beweis" habe ich schon Kap. I § 5 hingewiesen.

Es bleibt noch übrig, die letzten der *škm*-Rechnungen, d. h. die Nummern 8 und 16 bis 20 zu untersuchen. Ihre Anordnung zu einer Tabelle ist auf Grund ähnlicher Schlüsse, wie ich sie oben bei der 2/7-Ergänzungstabelle ausführlich dargelegt habe, leicht zu bewerkstelligen: ich habe das Resultat in Tafel III, 2 angegeben. Damit ist die „erste Gruppe" von *škm*-Rechnungen des Papyrus Rhind gerade erschöpft.

Welche Bedeutung hat aber nun diese neue Tabelle? Die erste Schwierigkeit ist, daß $1+\overline{\overline{3}}+\overline{3}=2$ doch nicht in einem Ergänzungsterm für 2 auftreten kann. Ferner: Auf Grund des Hilfszahlensystems **1**, **2**, **3** von Nr. 18 hat man offenbar diese Rechnung als Ausgangspunkt zu betrachten. Dort wird aber mit $\overline{6}$ gerechnet, also mit einem Bruch eines geraden Nenners, was wieder nicht zu einer $2/n$-Zerlegung passen will. Aber die Verwendung des Terminus *škm* und die Analogie zur 2/7-Ergänzungstabelle lassen doch keinen Zweifel über eine Beziehung zur $2/n$-Tabelle. Und eine solche besteht in der Tat.

Die $2/n$-Tabelle selbst beginnt mit $\overline{\overline{3}}$, zerlegt diesen Bruch aber nicht weiter, sondern betrachtet ihn offenbar als selbständige Einheit; andrerseits ist die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ eine in der ganzen ägyptischen Mathematik immer verwandte Zerlegung, auf die wir auch noch zurückkommen werden. Schließlich ist die Reziprozität zwischen $\overline{\overline{3}}$ und $1+\overline{2}$ eine wohlbekannte, wie viele Beispiele beweisen [1]).

Wir betrachten nun den Fall einer $2/n$-Zerlegung, wo mit $\overline{2}$ im Hauptglied, also mit $1+\overline{2}$ im Ergänzungsterm gerechnet wird. Dann muß, damit die Zerlegung funktioniert, $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{n}$ ein Stammbruch werden oder, ägyptisch aufgefaßt: es muß sich $\overline{n}$ in die Form $\overline{\overline{3}}\cdot\overline{m}$ setzen lassen; und $n=9$ ist, wie wir wissen, die erste Zahl, die (nach 3) hierfür in Frage kommt (Tafel II, Fall I, 1). Nimmt man noch die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$ hinzu, so entpuppt sich schließlich unsere Tabelle als eine zur Zerlegung von 2/9 gehörige Ergänzungstabelle, ganz ähnlich der zu 2/7, nur in etwas anderer Form geschrieben.

Nr. 18 handelt von $\overline{6}$, d. h. von dem Ergänzungsterm der Zerlegung $2/9=1/18+1/6$ und als zweites Element findet sich $2/3\cdot1/6=1/9$, d. h. gerade die entscheidende Relation, natürlich in ägyptischer Art als Verifikation der Behauptung geschrieben. Welchen Sinn die Ausdehnung der Rechnung auf $\overline{3}$ hat, zeigen die Hilfszahlen, die dann in der Ausgangsrechnung die ganzzahlige Folge **1**, **2**, **3** durchlaufen; doch will ich hierauf erst in § 4 zurückkommen, um hier nicht allgemeine Erörterungen einschalten zu müssen. Einstweilen dürfen wir also die dritte Zeile einfach beiseite lassen.

Nun ergibt sich auch die Bedeutung der übrigen Rechnungen ganz nach dem Muster der Tabelle zu 2/7. Die Verifikation der Rechnung und ihrer Hilfszahlen benützt die Relation $\overline{\overline{3}}=\overline{2}+\overline{6}$, wobei wieder die Rechnungen als Ganzes entsprechend transformiert werden, was die Hilfszahlen deutlich erkennen lassen. Zunächst Nr. 16 als „1"; daraus abgeleitet Nr. 8 für 1/2; dann Nr. 19 für 1/6 (die Summen dienen ja geradezu als Nummerierung) und durch Zusammenfassung Nr. 17 für 2/3, woraus nun wieder alles dyadisch abgeleitet werden kann: 2/3, 1/3, 1/6 und sogar noch 1/12, das hier wohl nur diesem Schema seine Existenz verdankt. Überall ist die $\overline{3}$-Zeile die entscheidende, und sie gerade enthält die Zerlegung $\overline{6}+\overline{18}$ als solche. Sobald man sich etwas übt, in einem solchen Schema zu lesen, bemerkt man überall die schönsten derartigen Beziehungen. Daß gerade sie der Ägypter gesehen hat, ist mir kein Zweifel; so ist es auch wohl kein Zufall, daß in Nr. 8 die Summe der Hilfszahlen gebildet wird, was eben die **9** ergibt, um die es sich hier überhaupt handelt. Man könnte diese ganze Art des Rechnens fast der Freude an Wortspielen in Parallele

1) Z. B. bei 2/21, 2/27, 2/33 usw.

setzen, die aus der übrigen ägyptischen Literatur wohlbekannt ist; heute würde man allerdings solche Rechnungen etwas prosaischer als bloße Identitäten bezeichnen.

Damit verlasse ich die „erste Gruppe der *škm*-Rechnungen“. Es folgt ihr jene zweite Gruppe, die ich schon erwähnt habe, weil sie den Grund ihrer Benennung noch unmittelbar erkennen läßt; sie gehört aber nicht mehr zum Gebiet der $2/n$-Tabelle. Dagegen wird man vielleicht annehmen dürfen, daß „Ergänzungstabellen“, wie wir sie hier für 2/7 und 2/9 festgestellt haben, auch noch für die übrigen Zerlegungsschemata (vgl. Tafel II) bestanden haben. Sie sind nun für uns, wenigstens prinzipiell, leicht rekonstruierbar.

§ 4. Das Rechnen mit Brüchen.

Bevor ich mich dem restlichen Teile der $2/n$ - Tabelle zuwende, will ich hier einige Bemerkungen über das Rechnen mit Brüchen und Hilfszahlen einschalten, wie es den „Ergänzungsrechnungen“ zu Grunde liegt und dann sogleich für die Behandlung der Ausnahmezahlen von Bedeutung werden wird.

Ich erinnere zunächst an die begriffliche Grundlage des Rechnens mit Brüchen, wie ich es in Kapitel I dargelegt habe: die Auffassung der ursprünglich vorhandenen natürlichen Brüche als Individuen, die Objekte des Zählens werden. Die Anpassung an die Rechnung führt dann zu den algorithmischen Brüchen; die fortgesetzte Ausdehnung dieses Bereiches durch Bildung von Bruchteilen eines Bruches — oder kurz die „multiplikative“ Verknüpfung von Stammbrüchen — ist ohne weiteres ausführbar, da legt schon die Schrift das richtige Verfahren an die Hand. Aber lassen sich nicht auch Summen von Brüchen zu neuen Gruppen zusamenziehen, so wie aus ||||| und |||| und | ein neuer Komplex ∩ (10) wird?

Keine Schwierigkeiten bieten die Fälle, wo gleiche Stammbrüche nebeneinander stehen: entweder sie sind zurückführbar auf einen Stammbruch in höheren Einheiten (Teilbarkeit des Nenners) oder gar auf $1 = \frac{n}{n}$ oder aber man hat die „trivale“ Darstellung $\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ mit der sich als solcher nichts anfangen läßt. Aber es gibt Fälle, wo sich auch eine Reihe einzelner verschiedener Brüche zu einem neuen Individuum zusammenfassen lassen, z. B. dann, wenn sich der eine Bruch in das „Zahlensystem“ (oder besser „Zählsystem“) des andern (vgl. Kap. I § 3, S. 12) eingliedern läßt. Dann bewegt man sich wieder völlig im Gebiete der n - tel und kann dann unter Umständen wie im trivialen Falle reduzieren. Dies festzustellen ist der Zweck der Hilfszahlen. Dabei ist also naturgemäß der kleinste Bruch mit **1** zu bezeichnen. Dann hat man einfach diese Hilfszahlen zu addieren und nachzusehen ob eine Reduktion durchführbar ist, was unmittelbar durch dyadische Multiplikation feststellbar ist. Ein Schema wie

1	$\overline{7}$	**4**
$\overline{2}$	$\overline{14}$	**2**
$\overline{4}$	$\overline{28}$	**1**

läßt sofort erkennen, daß die Gesamtzahl der Achtundzwanzigstel gleich 7 ist, und daß diese zusammen gerade 1/4 ergeben, ist wieder aus der Rechnung ersichtlich, denn 1/28 ist danach 1/4 von einem Siebentel der Einheit der ganzen Zahlen, so daß 7 solche gerade ein Viertel der Einheit bilden. Ein solcher Schluß beruht im Grunde nur auf dem klaren Bewußtsein, daß n n - tel die Einheit wieder voll machen[1]). Wie der Kern der ägyptischen „Division“ in ihrer multiplikativen (d. h. additiv

1) Ganz ähnliche Überlegungen bilden die Grundlage des Verfahrens zur „Auflösung linearer Gleichungen“, wie es im Pap. Rhind aber auch in den Kahun-Papyri (Griffith [4]) vorkommt.

ausführbaren) Umkehrung liegt, so ruht auch die Bruchrechnung auf der umgekehrt laufenden, dafür aber ganzzahligen Reihe der Hilfszahlen.

Der Hilfszahlenalgorithmus ist in der beschriebenen Weise immer leicht durchführbar und in bestem Anschluß an das Rechnen mit ganzen Zahlen, so lange nur die 1/2-Reihe in den Kennziffern zur Anwendung kommt. Aber bei dem Bruche $\overline{\overline{3}}$, dem doch auch eine individuelle Bedeutung in der Menge der natürlichen Brüche zukommt, ist die Hilfszahlen-Methode ihres Fundamentes, der Möglichkeit des Abzählens, beraubt: 1 läßt sich nicht mehr in 2/3-teln auszählen. Aber hier kommt wieder der Ursprung dieses Bruchbegriffes zur Geltung, nämlich daß $\overline{\overline{3}}$ ein durch Verdoppelung aus $\overline{3}$ abgeleiteter Bruch ist (vgl. § 1). Also erhält $\overline{\overline{3}}$ gegenüber $\overline{3}$ die Hilfszahl **2**; 1 aber **3**. Es ist also alles wieder dadurch auszählbar geworden, daß $\overline{\overline{3}}$ sozusagen in das Zählsystem von $\overline{3}$ „eingebettet" wurde. Das Schema $1 \to \overline{\overline{3}} \to \overline{3}$ und die Hilfszahlen $\mathbf{1} \to \mathbf{2} \to \mathbf{3}$ entsprechen einander ebenso (gegeneinander laufend!), wie dyadisch Halbieren und Verdoppeln[1]). Es ist nur die Durchführung *dieses* Gedankens, die uns in der Dreizeiligkeit der 2/9-Ergänzungstabelle im vorigen Paragraphen begegnet ist.

Von dieser Grundlage aus werden nun kompliziertere Rechnungen abgeleitet: Rechnung, Hilfszahlen und Resultat werden als Ganzes dem dyadischen Algorithmus unterworfen, wie wir es ja deutlich im vorigen Paragraphen verfolgen konnten. Die Ausführbarkeit der einfachen Ausgangsrechnung überträgt sich damit auf schwierigere Fälle, bloß durch Halbieren und Verdoppeln.

Durch diese Betrachtungen erledigt sich ganz von selbst die Frage, ob die Ägypter Brüche mit Hilfe eines „gemeinsamen Nenners" addiert hätten. Es ist wohl jetzt klar, daß davon keine Rede sein kann, daß die Bedeutung der Hilfszahlen keine multiplikative ist, sondern daß sie unmittelbar auf das Fundament aller ägyptischer Mathematik, das Zählen, zurückgehen[2]). Damit löst sich auch das Paradoxon, daß es einerseits dem Ägypter nicht möglich gewesen sein soll, mit Zahlen größer als 2 direkt zu multiplizieren, er aber andrerseits Bruchadditionen ausführen konnte, die auch uns noch recht unbequem werden und zwar mit „gemeinsamen Nennern", die ihrerseits Aggregate von Brüchen als Multiplikatoren benützen. So müßte man z. B. in Nr. 15 annehmen, daß der Ägypter berechnen konnte, daß sich $\frac{1}{128}$ zu $\frac{1}{896}$ verhält wie $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ zu $\frac{1}{32}$, und dieses, ohne gemischte Brüche verwenden zu dürfen! Wie viel einfacher es tatsächlich zugegangen ist, lehrt ein Blick auf Tafel III. Wir sehen jetzt wie der Unterschied zwischen „natürlich" und „algorithmisch" ganz wesentlich in die gesamte ägyptische Mathematik eingreift.

Das Rechnen mit den Hilfszahlen hat demnach ursprünglich nur dann Sinn, wenn ihre Reihe mit **1** beim kleinsten vorkommenden Bruche beginnt. Die Addition von Brüchen wird insbesondere dann durchführbar, wenn die Summe der Hilfszahlen dem Nenner dieses kleinsten Bruches gleich wird, d. h. wenn es sich um n n-tel handelt[3]). So sehen wir auch z. B. in Nr. 21 (und 22) vorgegangen, wo $\overline{15}+\overline{\overline{3}}$ zu 1 zu ergänzen ist. Man geht aus von den Hilfszahlen $\mathbf{1}+\mathbf{10}$, so daß noch 4 Fünfzehntel zu ergänzen sind; dies wird dann an den gefundenen Zahlen nachgewiesen.

Von diesen einfachsten Anfängen aus läßt sich leicht das Operieren mit Hilfszahlen ausgestalten. Den Ausgangspunkt bilden immer die Rechnungen mit *ganzen* Hilfszahlen; durch das Verfahren des Übertragens ganzer Rechnungen gelangt man zu neuen Brüchen, denen nun auch gebrochene Hilfszahlen zugehören können. Andrerseits gibt die Methode der „Einbettung", wie wir

1) Dies liefert wohl auch den Grund für die merkwürdige Gewohnheit, $\overline{\overline{3}}$ durch den Umweg über $\overline{3}$ zu berechnen.

2) Rein äußerlich kann dies allerdings manchmal mit unserem Verfahren des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners übereinstimmen. — In [1] habe ich diesen Sachverhalt noch nicht durchschaut.

3) Der Wert dieser Hilfszahlen ist ohne Weiteres durch Rückwärtsdurchlaufen der gewöhnlichen Kennziffern-Rechnung zu erhalten.

es für $\overline{\overline{3}}$ und $\overline{3}$ kennen gelernt haben, die Möglichkeit von gebrochenen Hilfszahlen wieder zu ganzen zurückzukommen, wobei dann allerdings die **1** als Anfangsglied nicht mehr in der Rechnung selbst vorzukommen braucht. Der Erfolg eines solchen verwickelten Algorithmus läßt natürlich leicht den eigentlichen Ausgangspunkt vergessen; der Gegensatz zwischen „natürlich“ und „algorithmisch“ vertieft sich zu dem zwischen Idee und Methode, wie ihn uns die Geschichte der Mathematik immer wieder vor Augen führt.

Ich will hier darauf verzichten, diesen Prozeß an einzelnen Beispielen zu verfolgen, da ich hierauf in einer zweiten Arbeit eingehen werde, während dies für die Grundlagen der Bruchrechnung nicht von Bedeutung ist. Ich will nur bemerken, daß die Wahl der neuen Einheit, auf welche die Hilfszahlen bezogen werden, meist aus der ersten (zur Kennziffer 1 gehörigen) Zeile erkennbar ist und dort dem Prinzip folgt, zunächst dem kleinsten Bruch die Hilfszahl **1** zuzuweisen oder doch eine solche, daß diese Zeile durchgehends ganze Hilfszahlen erhält. Das Bestimmen der weiteren Hilfszahlen ist dann ein Leichtes; ist z. B. $\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{45} \\ \overline{45} & \mathbf{1} \end{array}$ das Ausgangsschema, so erhält $\overline{8}$ nach dyadischem Verfahren

$$\begin{array}{cl} 1 & \mathbf{45} \\ \overline{2} & \mathbf{22}+\overline{\mathbf{2}} \\ \overline{4} & \mathbf{11}+\overline{\mathbf{4}} \\ \overline{8} & \mathbf{5}+\overline{\mathbf{2}}+\overline{\mathbf{8}} \end{array}$$

die Hilfszahl $\mathbf{5}+\overline{\mathbf{2}}+\overline{\mathbf{8}}$ (vgl. Nr. 23[1])). Alles dies ist nur eine Ausdehnung jener einfachsten Methode, die ich oben als „Einbettung“ bezeichnet habe. Mit einem Beziehen von 1/8 auf einen Nenner 1/45 hat dies aber nichts zu tun; für den Ägypter ist es nicht mehr als eine geschickte Anwendung seiner gewohnten dyadischen Methode.

§ 5. Die Ausnahmezahlen.

Wir wenden uns wieder der $2/n$-Tabelle zu. In § 2 haben wir gesehen, wie eine Zerlegung von Brüchen der Form $\frac{2}{n}$ in Stammbrüche dadurch möglich wird, daß die natürlichen Brüche und ihre einfachsten Kombinationen an die Stelle ganzzahliger Koeffizienten treten. Der entscheidende Punkt für das Funktionieren dieser Methode lag dann in dem Verhalten des zugehörigen „Ergänzungsterms“. In § 2 hatten wir diese Frage der Kürze halber durch Teilbarkeitseigenschaften entschieden — jetzt müssen wir zusehen, wie sie sich für den Ägypter beantworten ließ.

Hier sind es nun gerade die Hilfszahlen, die uns den richtigen Weg weisen. Die zu 2/7 oder 2/9 gehörigen Ergänzungsrechnungen zeigen ganz deutlich, wie man aus ihnen unmittelbar den Stammbruchcharakter des Ergänzungstermes ablesen kann, indem in den Ausgangsrechnungen Nr. 11 bezw. 18 die Hilfszahlensumme dem Nenner gleich wird. Daß man gerade diese Art des Ergänzens auch in viel komplizierteren Fällen anzuwenden wußte, zeigt z. B. die „Ergänzungsrechnung“[2]) aus Nr. 37, wo

$$\begin{array}{l} \overline{2}+\overline{4}+\overline{8}+\overline{72}+\overline{16}+\overline{32}+\overline{64}+\overline{576} \qquad \text{Summe } \overline{8} \\ \qquad\quad \mathbf{8}\quad \mathbf{36}\quad \mathbf{18}\quad \mathbf{9}\quad \mathbf{1} \qquad\qquad\qquad \mathbf{72} \end{array}$$

gebildet ist. Es wird also nachgewiesen, daß die Summe der fünf letzten Brüche gerade $\overline{2}+\overline{4}+\overline{8}$ zu 1 ergänzt d. h. gleich $\overline{8}$ ist. Dies ergibt sich aber leicht aus den Hilfszahlen, denn ihre Summe ist **72** und da **8** zu $\overline{72}$ gehört, so ghört zu **72** der Bruch $\overline{8}$, einfach auf Grund des Gegeneinanderlaufens von Kennziffern und Hilfszahlen.

1) Nr. 23 ist übrigens offensichtlich keine ursprüngliche Rechnung, sondern hängt mit Nr. 21 und 22 zusammen.

2) Sie ist dort ausdrücklich so genannt. Vgl. Peet [1], S. 74, Anm. 2.

Läßt sich eine bestimmte $2/n$-Zerlegung einmal durchführen, so folgen hieraus nach dem Übertragungsprinzip sofort eine Reihe weiterer Zerlegungen für die Vielfachen dieses Nenners, wobei auch die Hilfszahlen mitgenommen werden, so daß auch dann die richtigen Hilfszahlensummen im Ergänzungsterm erscheinen. Wir werden also annehmen können, daß die Zerlegung von $2/n$ sehr bald als ein auf die Hilfszahlen des Ergänzungstermes bezügliches Problem erkannt wird.

Rekonstruiert man sich demgemäß die Hilfszahlen für die Ergänzungsterme der $2/n$-Tabelle, so bestätigt sich sofort, daß man aus ihnen den Stammbruchcharakter dieser Ausdrücke erkennen kann. Dabei ist aber von Bedeutung, daß dies nicht nur für die schon behandelten Zahlen gilt, sondern vor Allem auch für die „Ausnahmezahlen"[1]).

Ich beginne mit 2/43. Im Ergänzungsterm wird mit $1+\overline{42}$ operiert, wozu eine Hilfszahlensumme $\mathbf{42+1=43}$ gehört, so daß als Ergänzungsterm $\overline{43}\ (1+\overline{42})$ offenbar ein Stammbruch (nämlich $\overline{42}$) erscheint. Es ist also jetzt der Ergänzungsterm der Ausgangspunkt der Rechnung und das Problem besteht in der Auffindung eines zugehörigen Hauptgliedes. Wir lassen aber zunächst diese Frage beiseite und bestimmen die Hilfszahlen für die übrigen Ausnahmezahlen, nach dem Prinzip, daß Hilfszahlen in ursprünglichen Rechnungen immer ganzzahlig sein müssen. Wie wird 2/61 zu zerlegen sein? Dyadisch wird 61 durch $40+20+1$ ausgedrückt. Soll also die Hilfszahlensumme im Ergänzungsterm genau **61** sein — dann erhält man nämlich einen Stammbruch — so entspricht den Hilfszahlen $\mathbf{40+20+1}$ ein Ergänzungsterm mit $1+\overline{2}+\overline{40}$, wie es in der Tat in der $2/n$-Tabelle geschieht. Der Wert des Ergänzungsterms selbst ist dann natürlich $\overline{40}$.

Hieran schließen sich die beiden nächsten Ausnahmezahlen 67 und 71 mit den unmittelbar verständlichen Ergänzungstermen

67	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$	
	40 20 5 2	Summe **67**
71	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$	
	40 20 10 1	Summe **71**.

Auch die nächsten vier Ausnahmezahlen d. h. 73, 79, 83, 89 sind nach einem hier anschließenden Schema behandelt, nur daß jetzt von **60** statt von **40** ausgegangen ist; in Tafel IV, 2 sind diese Zerlegungen zusammengestellt. Die Hilfszahlensumme der Ergänzungsterme läßt sofort den Aufbau dieses Bestandteiles der Zerlegung erkennen.

Wie steht es aber nun mit den zugehörigen Hauptgliedern? Entsprechen z. B. bei 2/61 dem Bruche $\overline{40}$ die Hilfszahl **1** und wird **61** durch $\mathbf{40+20+1}$ zusammengesetzt, so lautet nach dem Grundgedanken des Hilfszahlenrechnens der Ergänzungsterm einfach $\overline{40}$, da 61 Vierzigstel vorhanden sind. Da nun einmal im Gebiet der Vierzigstel gerechnet wird, so muß der Koeffizient des Hauptgliedes so bestimmt werden, daß er mit dem Ergänzungsterm zusammen $2.40=80$ Vierzigstel ergibt; d. h. es müssen im Hauptglied noch $80-61=19$ von ihnen aufgebracht werden, oder m. a. W. die Hilfszahlensumme soll **19** werden. Das ägyptische Schema für eine solche Aufgabe ist aber leicht rekonstruierbar: wir müssen nur versuchen mit möglichst einfachen dyadischen Rechnungen zu Rande zu kommen. So bildet man zunächst

	1	**40**
	$\overline{2}$	**20**
/	$\overline{4}$	**10**
/	$\overline{8}$	**5**

wo es mit ganzen Hilfszahlen ein Ende hat. Die beiden letzten Glieder liefern schon **15**, also fehlen noch **4**, die sich selbstverständlich aus

1) Sie sind auf Tafel IV, 1 nochmals zusammengestellt.

1	**40**
/ $\overline{10}$	**4**

ergeben. Also ist $\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$ als Hauptglied brauchbar; und so steht es auch tatsächlich in der $2/n$-Tabelle.

Ich habe diese Überlegungen absichtlich in der schwerfälligen ägyptischen Ausdrucksweise durchgeführt, weil sich ganz analoge Schlußreihen in der sogenannten „Hau-Rechnung" (*ʿḥʿ*) finden, die von Peet ausführlich in seinem Kommentar zu den Nummern 24 bis 38 des Papyrus Rhind behandelt ist[1]. In moderner Sprechweise heißt unser Problem einfach so: ist b der „gemeinsame Nenner" des Ergänzungsterms, so soll auf Grund der Relation

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{2\,b-n}{b}+\frac{n}{b}\right)$$

$\frac{2\,b-n}{b}$ durch Stammbrüche ausgedrückt werden. Wie diese Aufgabe gelöst wird, haben wir eben für $n = 61$, $b = \mathbf{40}$ gesehen. Für $n = 67$ gilt es, von $b = \mathbf{40}$ ausgehend, $2\,b - n = \mathbf{80} - \mathbf{67} = \mathbf{13}$ zusammenzusetzen, was unmittelbar dadurch geschehen kann, daß man die letzte Hilfsrechnung noch um eine Zeile erweitert[2])

1	**40**
$\overline{10}$	**4**
$\overline{5}$	**8**

und $\underset{\mathbf{5}}{\overline{8}}+\underset{\mathbf{8}}{\overline{5}}$ zusammennimmt. Schließlich verlangt $n = 71$ ein Hauptglied mit der Hilfszahlensumme $\mathbf{80} - \mathbf{71} = \mathbf{9}$ d. h. den Ausdruck $\underset{\mathbf{5}}{\overline{8}}+\underset{\mathbf{4}}{\overline{10}}$.

Ganz entsprechend erhält man die Hauptglieder für $n = 73$, 79, 83, 89 mit Hilfe der auf $b = \mathbf{60}$ bezüglichen Nebenrechnungen

1	**60**	1	**60**	1	**60**
$\overline{2}$	**30**	$\overline{10}$	**6**	$\overline{\overline{3}}$	**40**
$\overline{4}$	**15**	$\overline{5}$	**12**	$\overline{3}$	**20**
				$\overline{6}$	**10**

die folgendermaßen zusammenzufassen sind

n	$2b-n$	Zusammensetzung	Hauptglied
73	$\mathbf{120}-\mathbf{73} = \mathbf{47}$	$\mathbf{47} = \mathbf{15}+\mathbf{12}+\mathbf{20}$	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{3}$
79	$\mathbf{120}-\mathbf{79} = \mathbf{41}$	$\mathbf{41} = \mathbf{15}+\mathbf{6}+\mathbf{20}$	$\overline{4}+\overline{10}+\overline{3}$
83	$\mathbf{120}-\mathbf{83} = \mathbf{37}$	$\mathbf{37} = \mathbf{15}+\mathbf{12}+\mathbf{10}$	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}$
89	$\mathbf{120}-\mathbf{89} = \mathbf{31}$	$\mathbf{31} = \mathbf{15}+\mathbf{6}+\mathbf{10}$	$\overline{4}+\overline{10}+\overline{6}$

Tafel IV lehrt, daß das Resultat dieser hypothetischen Rechnungen mit den Tatsachen übereinstimmt.

Ganz ähnlich sind noch $n = 31$ und $n = 47$ und 53 zu behandeln. Der Ergänzungsterm für $n = 31$ lautet $1+\overline{2}+\overline{20}$; also ist $2b-n = 9$, was mit Hilfe von

1) Peet [1], S. 60 ff.

2) Diese Reihenfolge zur Bildung von $\overline{5}$ folgt z. B. aus Pap. Rhind Nr. 1 bis 6. Ich werde speziell hierauf in einer folgenden Arbeit im Einzelnen eingehen.

1	**20**		1	**20**
$\overline{2}$	**10**		$\overline{10}$	**2**
∕ $\overline{4}$	**5**		∕ $\overline{5}$	**4**

sofort auf das Hauptglied $\underset{\mathbf{5}}{\overline{4}} + \underset{\mathbf{4}}{\overline{5}}$ führt. Entsprechend gilt:

n	Ergänzungsterm	$2b-n$
47	$\underset{\mathbf{30}}{1} + \underset{\mathbf{15}}{\overline{2}} + \underset{\mathbf{2}}{\overline{15}}$	**13**
53	$\underset{\mathbf{30}}{1} + \underset{\mathbf{20}}{\overline{\overline{3}}} + \underset{\mathbf{3}}{\overline{10}}$	**7**

Die Hauptglieder bestimmen sich aus

1	**30**		1	**30**
$\overline{10}$	**3**		$\overline{3}$	**10**
			$\overline{6}$	**5**

bzw. aus

1	**30**		1	**30**
$\overline{2}$	**15**		$\overline{15}$	**2**

zu $\underset{\mathbf{3}}{\overline{10}} + \underset{\mathbf{10}}{\overline{3}}$ bzw. $\underset{\mathbf{5}}{\overline{6}} + \underset{\mathbf{2}}{\overline{15}}$.

Und schließlich noch $n = 43$, wovon wir ausgegangen waren. Hier ist $2b - n = 2 \cdot 42 - 43 = 41$. Also haben wir **41** in Zweiundvierzigsteln auszudrücken, was auf die Hilfsrechnungen führt

1	**42**		1	**42**		1	**42**
∕ $\overline{2}$	**21**		∕ $\overline{3}$	**14**		∕ $\overline{7}$	**6**
			$\overline{6}$	**7**			

d. h. das Hauptglied $\overline{2} + \overline{3} + \overline{7}$ liefert.

Man wird von selbst zu diesen Hilfsrechnungen geführt, wenn man zunächst mit dem dyadischen Schema beginnt und dieses so weit fortsetzt, bis gebrochene Hilfszahlen auftreten müßten; der noch zu ergänzende Rest ergibt sich dann leicht hieraus. Auch hier dient also das dyadische Prinzip dazu, aus der Fülle der Möglichkeiten bestimmte Zerlegungen herauszugreifen. Nirgends hatten wir explizite Addition von Brüchen anzunehmen; *allein* das dyadische Rechenschema ist imstande alle Zerlegungen zu liefern und so automatisch zu Ausdrücken zu gelangen, deren direkte Überprüfung die Kräfte der ägyptischen Mathematik weit übersteigen würde.

Von den 15 Ausnahmezahlen sind jetzt 11 erledigt. Für sie alle war der Gedanke maßgebend, den Ergänzungsterm der Zahl n anzupassen und danach das zugehörige Hauptglied zu bestimmen.

Zu den noch übrig bleidenden vier Ausnahmezahlen gehören zwei (35, 91), die sich bereits dem Zerlegungsverfahren aus § 2 hätten fügen müssen. Sie sind also jetzt wirkliche Ausnahmen geblieben. Hierzu kommt noch 2/97, das sich nach der letzten Methode mit einem Ergänzungsterm $1 + \overline{3} + \overline{6} + \overline{15} + \overline{20}$ und einem Hauptglied $\overline{3} + \overline{20}$ zerlegen ließe, und 2/59 etwa mit $1 + \overline{\overline{3}} + \overline{10} + \overline{5}$ und $\overline{30}$. Woher die tatsächlich vorgenommenen Zerlegungen dieser vier Zahlen stammen, kann ich nicht sagen. 35 und 91 zeigen schon dadurch ein ganz irreguläres Verhalten, daß sie die beiden einzigen Zahlen sind, die im Hauptglied $\overline{\overline{3}}$ enthalten, was ja im allgemeinen unsinnig ist, und nur in diesen speziellen Fällen möglich ist[1]). Auch die Ergänzung von Hilfszahlen, selbst wenn ihre Summe gleich n ist, hilft nicht weiter.

Wir haben nun sämtliche Zerlegungen der $2/n$-Tabelle behandelt und konnten sie bis auf vier Ausnahmen in einfache Schemata einordnen. Bevor ich in § 7 nochmals auf die Entstehung der gesamten $2/n$-Tabelle zurückkomme, will ich im folgenden Paragraphen noch eine weitere Gruppe von Rechnungen des Papyrus Rhind besprechen, welche für die Grundlagen der Bruchrechnung von gewisser Bedeutung sind.

§ 6. Die 2/3-Tabelle.

Die Rechnungen Papyrus Rhind No. 61 und 61 b sind bisher nur wenig beachtet worden[2]). No. 61 gebe ich auf Tafel VI nochmals wieder, No. 61 b[3]) enthält in Worten die Regel zur Zerlegung von $\overline{\overline{3}}$ in $\overline{2}+\overline{6}$, No. 61 dagegen verschiedene Rechnungen mit $\overline{\overline{3}}$.

Rein äußerlich zerfällt diese „2/3-Tabelle" in drei Teile, in denen der Text verschieden gestaltet ist, was ich auch in Übersetzung und Anordnung in Tafel VI zum Ausdruck zu bringen versucht habe[4]). Wir werden sogleich sehen, daß diese Unterschiede auch inhaltlich erkennbar sind.

Die Grundlage bildet die Regel $\overline{\overline{3}} = \overline{2}+\overline{6}$, welche ja mit dem Zerlegungsschema der $2/n$-Tabelle übereinstimmt (vgl. § 2). Sie wird nicht näher begründet und bildet wohl eine der ältesten Regeln der Bruchrechnung überhaupt. Unmittelbar ergibt sich nach dieser Vorschrift die Zerlegung für 2/3 von 1/3 als $\overline{6}+\overline{18}$ (Zeile 3) und hieraus nach dem dyadischen Verfahren einerseits Zeile 1: 2/3 von 2/3 ist $\overline{3}+\overline{9}$, andrerseits Zeile 4: 2/3 von $\overline{6}$ ist $\overline{12}+\overline{36}$. Hier zeigt sich wieder der rein schematische Charakter des ägyptischen Rechnens, denn $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$ bedürfte garnicht einer Stammbruchzerlegung $\overline{12}+\overline{36}$[5]). Dazu kommt noch 1/3 von 2/3 wohl nur aus alter Gewohnheit der Reihenfolge $\overline{\overline{3}} \rightarrow \overline{3}$. Es ist also bisher $\overline{\overline{3}}$ mit $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ kombiniert, d. h. mit den natürlichen Brüchen der 1/3-Reihe, denen man höchstens noch $\overline{12}$ hinzufügen möchte, was auch zum weiteren Verlauf der Tabelle durchaus passen würde. Wir haben also bisher die Tabelle[6])

Zeile 1	$\overline{\overline{3}}$	von $\overline{\overline{3}}$	ist	$\overline{3}+\overline{9}$
Zeile 2 und 3	$\overline{\overline{3}}$	von $\overline{3}$	ist	$\overline{6}+\overline{18}$
Zeile 4	$\overline{\overline{3}}$	von $\overline{6}$	ist	$\overline{12}+\overline{36}$.

Die Fortsetzung bildet Zeile 5 bis 8. Hier wird nun die 1/3-Reihe mit der 1/2-Reihe kombiniert, d. h. eigentlich nur mit $\overline{2}$ selbst; alles Weitere ist dyadisch unmittelbar erhältlich.

---

1) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\frac{1}{35} = \frac{5}{6\cdot 35} = \frac{1}{42}$ und $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{30}\right)\frac{1}{91} = \frac{21}{30\cdot 91} = \frac{1}{10\cdot 7} = \frac{1}{70}$. Die Zerlegung von 2/35 ist an und für sich einfach genug und ganz verständlich. Aber schon der alte Schreiber hat sich vielleicht nicht ganz sicher gefühlt und Hilfszahlen hinzugefügt, die einzigen, die explizite in diesem Teile her $2/n$-Tabelle vorkommen (vgl. Peet [1], S. 41).

2) Eisenlohr [1], S. 150; Griffith [1], Bd. 16, S. 230 f. Ausführlicher Peet [1], S. 103 f., der vor allem auf die äußeren Ungleichmäßigkeiten der Tabelle hingewiesen hat.

3) Bei Eisenlohr im Text nicht besonders gezählt, in Tafel XIX mit a bezeichnet.

4) Ägyptisch heißt es: Zeile 1: $\overline{\overline{3}}$ *n* $\overline{\overline{3}}$ *m* $\overline{3}+\overline{9}$.
Zeile 5: $\overline{\overline{3}}$ *n* $\overline{2}$-*f* *m* $\overline{3}$.
Zeile 9: $\overline{9}$ $\overline{\overline{3}}$-*f* *m* $\overline{18}$ [+ $\overline{54}$].

5) Hieraus folgt, daß auch $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ nicht als $\frac{2}{9}$ der $2/n$-Tabelle entnommen ist, sondern für sich berechnet ist. — Man vgl. dagegen No. 18 (Tafel III, 2), woraus man neuerdings ersieht, daß es sich dort um keine abgeleitete Rechnung handelt.

6) Von genauer Wiedergabe der sprachlichen Eigentümlichkeiten sehe ich jetzt ab.

Zeile 5	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{3}$
Zeile 6	$\overline{3}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{6}$
Zeile 7	$\overline{6}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{12}$
Zeile 8	$\overline{12}$ von $\overline{2}$ ist $\overline{24}$.

Es ist bemerkenswert, daß hier die Reihe bis $\overline{12}$ fortgesetzt wird in Übereinstimmung mit dem Ende der 1/3-Reihe in der $2/n$-Tabelle.

Zeile 9 bis 19. Nun wird schließlich die 1/3-Reihe mit den übrigen natürlichen Brüchen kombiniert, d. h. mit $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$. Dabei ist aber das Rechnen mit $\overline{10}$ als selbstverständlich beiseite gelassen. So ergibt sich, ausgehend von der 2/3-Regel, die folgende Tabelle, in der die Ergänzungen zerstörter Zeilen, im wesentlichen in Übereinstimmung mit Peet, durch [ ] angegeben sind:

Zeile 12	[$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{10}+\overline{30}$]
„ 13	[$\overline{3}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{20}+\overline{60}$]
„ 16	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{7}$ ist $\overline{14}+\overline{42}$
„ 9	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{18}+\overline{54}$
„ 10	[$\overline{3}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{36}+\overline{108}$]
„ 18	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{11}$ ist $\overline{22}+\overline{66}$.

Schließlich kommt noch die Verbindung dieser Brüche mit $\overline{2}$

Zeile 14	[$\overline{2}$ von $\overline{5}$ ist $\overline{10}$]
„ 15	$\overline{4}$ von [$\overline{5}$] ist $\overline{20}$]
„ 17	$\overline{2}$ von $\overline{7}$ ist $\overline{14}$
„ 11	[$\overline{2}$ von $\overline{9}$ ist $\overline{18}$]
„ 19	$\overline{2}$ von $\overline{11}$ ist $\overline{22}$.

Seitlich hinzugefügt sind dann noch in Zeile 18 bzw. 19 die direkten Resultate von $\overline{3}\cdot\overline{11}$ und $\overline{4}\cdot\overline{11}$ d. h. $\overline{33}$ bzw. $\overline{44}$[1]).

Diese ganze dritte Gruppe von Rechnungen zeigt also wesentlich denselben Typus wie die beiden vorangehenden, nur läßt man sich im allgemeinen damit genug sein, bloß die ersten Zeilen für 1/3- und 1/2-Reihe anzugeben, aus denen sich ja alles Weitere von selbst ergibt. No. 61 enthält also drei Tabellen: 1) Kombination der 1/3-Reihe mit sich selbst, 2) mit der 1/2-Reihe, 3) der 1/3 und 1/2-Reihe mit den übrigen natürlichen Brüchen.

Diese Art der Gruppierung äußert sich auch, wie schon bemerkt, im sprachlichen Ausdruck und zwar genau in Übereinstimmung mit der gegebenen Anordnung auf Grund des mathematischen Inhaltes. Demnach scheint mir eine Unterscheidung zwischen einer „korrekten" und einer „weniger korrekten" Sprechweise[2]), wie sie Peet macht, ganz überflüssig, zumal sie sich auch nicht anderweitig begründen läßt.

Wie sich diese Tabellen in ihrer jetzigen Form zusammengefunden haben. kann man natürlich nicht mehr sagen. Ich hielte es aber für möglich, daß sie tatsächlich auf verschiedene Quellen zurückgehen. Der Schreiber mag sich dann bemüht haben, sie äußerlich in Übereinstimmung zu bringen, gab aber das Radieren[3]) nach der zweiten Tabelle auf und merkte die Verbesserung nur mehr ganz generell in der ersten Zeile der dritten an.

1) Peet will noch ergänzen: in Zeile 16: $\overline{3}\cdot\overline{7} = \overline{21}$ und in Zeile 17: $\overline{4}\cdot\overline{7} = \overline{28}$.

2) „1/9 von 2/3 ist ..." soll deshalb weniger korrekt sein, als „1/9, 2/3 von ihm ist ..." weil der Ägypter nicht direkt durch 9 dividieren konnte. Aber jedes Kind weiß längst, was 1/4 von einem Apfel ist, bevor es durch 4 „dividieren" kann.

3) Vgl. Peet [1], Plate R. Note a.

Im Prinzip, d. h. aus mathematischen Gründen, wäre eine Tabelle, die Brüche mit Brüchen kombiniert, überflüssig, da dyadische Multiplikation und $2/n$-Tabelle bereits ausreichend wären. Der Ursprung dieser „2/3-Tabellen" liegt also wohl in der gegenständlichen Bedeutung der Brüche; für den Ägypter ist $\overline{\overline{3}}$ eine durchaus einheitliche Bruchgröße, der man ihren Zähler 2 nicht so anmerkt, wie bei unserer viel formaleren Schreibweise $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{m}$. Es ist wieder der individuell-selbständige Charakter der natürlichen Brüche, der uns hier begegnet.

§ 7. Zusammenfassung. Zur Entstehungsgeschichte der $2/n$-Tabelle.

Die Bedeutung der 2/3-Tabelle liegt in ihrer Beziehung zu dem Ausgangspunkt unserer Untersuchung der Bruchrechnung, zu dem Unterschied zwischen natürlichen und algorithmischen Brüchen. Während die $2/n$-Tabelle das Gebiet der ganzen Zahlen mit dem der Brüche verbindet, schließt die 2/3-Tabelle den Kreis des Rechnens im Gebiet der Brüche selbst. Die ganze ägyptische Mathematik ruht auf zwei Pfeilern: den natürlichen Zahlen und den natürlichen Brüchen. Sie werden verbunden durch den dyadischen Algorithmus, der sein Fundament im Zählen findet.

Schon in § 1 habe ich darauf hingewiesen, daß das Gebiet der natürlichen Brüche vielleicht in $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{\overline{3}}$ einen ältesten Kern aufweist. Entsprechend könnte die Zerlegung von $\overline{\overline{3}}$ in $\overline{2}+\overline{6}$ den Ausgangspunkt aller $2/n$-Zerlegungen gebildet haben; tatsächlich steht gerade diese außerhalb des gewöhnlichen Rahmens der $2/n$-Tabelle (sowohl des Pap. Rhind, wie der der Kahun Papyri), während $\overline{\overline{3}}$ in den Tabellen selbst als vollwertiger Stammbruch angesehen wird und nur mehr in ganz äußerlicher Weise dem Schema der $2/n$-Zerlegungen eingeordnet wird [1]).

Wird also der Fall $n = 3$ in der $2/n$-Tabelle, wie sie uns jetzt vorliegt, nur schematisch den übrigen Fällen angepaßt, so gehört doch die Zerlegung $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6} = (1 + \overline{2})\ \overline{3} + \overline{2} \cdot \overline{3}$ jener wichtigen Gruppe von Zerlegungen an, die $\overline{2}$ als Hauptglied verwenden, und die, wie wir wissen, in allen jenen Fällen anwendbar sind, in denen n durch 3 teilbar ist. Untersucht man die Behandlung dieser Fälle im Pap. Rhind genauer, so zeigt sich, daß sich doch noch Unterschiede zeigen, die zwar nicht mathematisch begründet sind, dafür aber um so tiefer mit der historischen Entwicklung der ganzen $2/n$-Tabelle verknüpft sind. Ich verzichte darauf diese Untersuchung schrittweise vorzuführen, sondern gebe vielmehr nur ihr Resultat wieder, wie ich es schließlich nochmals in Form einer Tabelle (Tafel V) zusammenfasse.

I. Zerlegungen mit dem Hauptglied $\overline{2}$.

Allgemeine Voraussetzung ist hier: n durch 3 teilbar.

a) 2/3. Schematische Anpassung an das Folgende (vgl. oben).

b) 2/9. Hier kommt zuerst die Idee von der Zerlegung in Hauptglied und Ergänzungsterm zur Durchführung. Die Nebenrechnung zum Beweise der Zerlegung $\frac{2}{9} = \overline{6} + \overline{18}$ lautet

$$\begin{array}{rlcrl} & 1 & 9 & & \\ & \overline{\overline{3}} & 6 & & \\ & \overline{3} & 3 & & \\ / & \overline{6} & 1+\overline{2} & / \ \overline{18} & \overline{2} \end{array}$$

schließt also mit Angabe der Resultatwerte $\overline{6}$ und $\overline{18}$.

c) 2/15. Der Beweis von $\frac{2}{15} = \overline{10} + \overline{30}$ ist bereits zu

1) Vgl. S. 21 Anm. 3.

$$\begin{array}{llll} 1 & 15 & & \\ \diagup\ \overline{10} & 1+\overline{2} & \diagup\ \overline{30} & \overline{2} \end{array}$$

verkürzt, schließt aber wieder mit $\overline{10}$ und $\overline{30}$.

Hiermit sind alle durch 3 teilbaren (ungeraden) Zahlen zwischen 1 und 15 umfaßt.

d) Volle Erfassung des Verfahrens. Es wird ausgedehnt bis $n = 87$, d. h. bis zur letzten durch 3 teilbaren (ungeraden) Zahl unter 90. Für dieses Stadium bildet also $90 = 3 \cdot 3 \cdot 10$ den natürlichen Endpunkt, nicht etwa 100, das mit der Grundeigenschaft der Teilbarkeit durch 3 nichts zu tun hat [1]).

Die Nebenrechnungen haben die Gestalt (z. B. für $n = 21$)

$$\begin{array}{llllll} 1 & 21 & & & & \\ \diagup\ \overline{\overline{3}} & 14 & 1+\overline{2} & \diagup\ 2 & 42 & \overline{2} \end{array}$$

bezeichnen also nicht mehr die Resultatwerte [2]) ($\overline{14}$ und $\overline{42}$), sondern stellen die mathematisch bedeutsamen Größen $1+\overline{2}$ und $\overline{2}$ voran, wobei vor allem auch die Reziprozität von $\overline{\overline{3}}$ und $1+\overline{2}$ ausgedrückt wird.

Allen bisherigen Rechnungen ist die absolute Wortlosigkeit gemeinsam. Die Worte *njś* 2 *ḫnt* . . . und *sšm.t* (die Peet mit „Divide by . . . .“ und „Working out“ wiedergibt) sind nichts weiter als Kolumnentitel in der speziellen Anordnung des Papyrus Rhind (vgl. Eisenlohr [1], Tafel I bis VIII).

e) Ausdehnung der Tabelle von „90 bis 100“ (d. h. 91 bis 101), wodurch für unsere Zerlegung noch 93 und 99 hinzukommen (vgl. V b.).

II. $n = 5, 7, 11, 13$.

Es sind dies die noch nicht behandelten Zahlen zwischen 1 und 15. Die Nebenrechnungen sind vom Typus I b, d. h. sie schließen mit den Resultatziffern selbst und führen die ganze Rechnung explizite durch (7 und 11 sogar noch mit Angabe der gewöhnlichen Multiplikationen). Weiter fehlt jeder Text.

Fassen wir dies mit I a, b und c zusammen, so ergibt sich eine (wie man wohl sagen darf) älteste Reihe von Zerlegungen:

1) 2/3
2) 2/5, 2/7, 2/9, 2/11, 2/13
3) 2/15.

Ein Blick auf Tafel II lehrt: Es sind dies genau die Fälle, wo man entweder mit einem einfachen Hautglied $\overline{2}$, $\overline{4}$, ($\overline{8}$) und $\overline{3}$, $\overline{6}$ auskommt oder Elemente der 1/2-Reihe allein zu zweien zusammennimmt ($\overline{4}+\overline{8}$). Wir haben also für dieses Stadium $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$ und ($\overline{\overline{3}}$), $\overline{3}$, $\overline{6}$ als natürliche Brüche anzusehen und stehen noch ganz im Banne der einfachsten dyadischen Entwicklung, die nicht gerne 1/2- und 2/3-Reihe durcheinanderwirft. Die wichtigste Rolle spielt naturgemäß das Hauptglied $\overline{2}$. Zunächst wird 2/15 in die Tabelle einbezogen; dann aber erfolgt die Ausdehnung dieser Methode auf alle damit überhaupt faßbaren Zahlen bis 90 (I d).

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse zu bemerken, daß die erste Gruppe von *škm*-Rechnungen (Nr. 7 bis Nr. 20), deren Zusammenhang mit der Zerlegung von 2/7 und 2/9 oben (vgl. § 3) dargelegt wurde, auch in ihre äußeren Form nicht die Zugehörigkeit zur $2/n$-Tabelle verleugnet. Abgesehen

---

1) Ich spreche natürlich nur der Kürze halber immer von „Teilbarkeit“. Wie sich dies für den Ägypter äußert, habe ich oben behandelt.

2) Ich unterscheide nicht zwischen Nebenrechnungen dieser Art und solchen vom Typus

$$\begin{array}{lll} 1 & 27 & \\ \overline{\overline{3}} & \overline{18} & \text{statt } 18. \end{array}$$

Vgl. Anm. 1 von S. 21

von der einen Überschrift *tp n škm.t* („Example of completion“) enthalten diese Aufgaben keinerlei Text, sondern nur das Zeichen der Buchrolle für *dmḏ* „zusammen“, und unterscheiden sich dadurch sehr merkbar von den nachfolgenden Beispielen Trotzdem wird man aber hieraus nicht ohne weiteres schließen dürfen, daß diese *škm*-Tabellen genau derselben Entwicklungsphase angehören wie die bisher behandelten Zerlegungen. In der Tat wird man nicht in den Fehler verfallen dürfen, einfach aus der Zahl der Worte das Alter einer Rechnungsmethode bestimmen zu wollen. Nur das scheint mir gerechtfertigt, daß man diese *škm*-Rechnungen bereits auf Grund ihrer äußeren Gestalt in eine Epoche verweist, die im Wesentlichen mit der Entstehungszeit der $2/n$-Tabelle zusammenfällt und wohl viel früher anzusetzen ist, als die Redaktion der übrigen Textaufgaben des Papyrus.

III. *ḏꜣ.t* und *dmḏ*.

Eine neue Gruppe von Rechnungen unterscheidet sich in doppelter Hinsicht von den bisherigen: einerseits wird die 2/3-Reihe der natürlichen Brüche um den Bruch $\overline{12}$ erweitert, andererseits wird nun mit der Anwendung zweifacher Hauptglieder Ernst gemacht. Dadurch erhält man einmal die Zerlegung von 2/23, dann (nach Tafel II, II) die von 2/17, 2/19, 2/37, 2/41 und (abgesehen von der zu $\overline{8}+\overline{12}$ gehörigen Ausnahmezahl 43) nur diese. Die Zusammengehörigkeit dieser Zerlegungen ist nun wieder äußerlich erkennbar. Genau bei 17, 19, 23, 37 und 41 tritt in den Rechnungen ein Terminus *ḏꜣ t* d. h. „Rest“ auf und bei 19, 23, 41 auch noch das Zeichen der Buchrolle für *dmḏ* („zusammen“, Peet: „Total“), das man also füglich auch noch bei 17 und 37 wird ergänzen dürfen. Sowohl *ḏꜣt* wie Buchrolle treten nur bei den genannten Rechnungen auf, mit der einzigen Ausnahme $n = 53$. Während aber alle übrigen „*ḏꜣ.t*-Rechnungen“ darin übereinstimmen, daß ihre Nebenrechnungen ausführlich alle Zwischenglieder der Rechnung für 1, $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ bis zu $\overline{12}$ bezw. $\overline{24}$ vorführen, so enthält 2/53 nur die Zahlen „1“ und die Endzeile „$\overline{30}$“ (vgl. Peet [1], S. 43) und das Wort *ḏꜣ.t* an unrichtiger Stelle, oder mindestens in anderem Gebrauche als bei den vorangehenden Rechnungen, da es nach deren Muster sofort nach der Zeile „$\overline{30}$“ stehen müßte und zwar als „*ḏꜣ.t* $\overline{6}+\overline{15}$“, nicht erst später nur als „*ḏꜣ.t* $\overline{15}$“. Hier hat also wohl ein Schreiber erst nachträglich seine Kunst erweisen wollen, und war, wie meist in solchen Fällen, dabei nicht ganz glücklich in der Nachahmung seiner Vorgänger. Wenn wir also 53 weglassen, so ist unsere „*ḏꜣ.t*-Tabelle“ genau mit einer mathematisch wohldefinierten Klasse von Rechnungen identisch.

IV. *gmj*.

Nunmehr tritt eine neue mathematische Idee auf den Plan: die konsequente Behandlung der „Ausnahmezahlen“, gestützt auf die Untersuchung des Ergänzungstermes und der zugehörigen Hilfszahlen (vgl. § 5). In dem Intervall von $n = 43$ bis $n = 89$ (darauf wollen wir uns hier beschränken) sind, abgesehen von den durch 3 teilbaren Zahlen (vgl. I d) fast nur noch Ausnahmezahlen enthalten. Die wenigen noch durch Teilbarbeit zu behandelnden Zahlen werden mit deren Hilfe erledigt, für die Ausnahmezahlen müssen die in § 5 geschilderten Überlegungen zur Geltung kommen. Diese Rechnungen sind sämtlich dadurch kenntlich, daß sie fast alle Nebenrechnung unterdrücken, statt dessen aber das Wort *gmj* („finden“) enthalten, das hier etwa so viel bedeuten wird wie unser „man findet“. Es tritt also *gmj* in allen Zerlegungen auf, mit genauer Auslassung der durch 3 teilbaren *n*. Es ist vielleicht kein Zufall, daß der erste Bruch (2/43) dieser „*gmj*-Tabelle“ gerade derjenige ist, dessen Zerlegung sich in schlagendster Weise auf die Hilfszahlen des Ergänzungstermes (**42 + 1**) stützt (vgl. S. 33); man könnte glauben, daß die neue Methode gerade an diesem Beispiel erfunden wurde, um dann sofort auf alle restlichen Ausnahmefälle erstreckt zu werden[1]). Ein so kluger Rechner durfte sich dann auch erlauben, ein kurzes *gmj* „wie man leicht findet“ an Stelle der langweiligen Nebenrechnungen zu setzen.

V. Vervollständigung der Tabelle.

a) Zwischen $n = 15$ und der *gmj*-Tabelle klafft noch eine kleine Lücke, die von der *ḏ3.t*-Tabelle nicht vollständig ausgefüllt werden kann: von 25 bis 35, wobei nur 27 und 33 wegen ihrer Teilbarkeit durch 3 (I d) wegzulassen sind. Es wird nun 2/25 richtig mit dem Hauptglied $\overline{3}$ (Teilbarkeit durch 5) zerlegt, 2/31 nach dem Muster der *gmj*-Tabelle ganz geschickt mit den Hilfszahlen $\mathbf{20 + 10 + 1}$. Ferner ist 29 entweder von dem dreifachen Hauptglied $\overline{2} + \overline{6} + \overline{8}$ oder vom Ergänzungsterm mit den Hilfszahlen $\mathbf{24 + 4 + 1}$ aus behandelt. Ganz zufällig ist aber die Zerlegung von 2/35, was sich ja auch schon (vgl. S. 35 und 36 Anm. 1) rein äußerlich im Papyrus zeigt. — Das Wort *gmj* findet sich hier nirgends, trotz der Kürze der Rechnungen.

b) Ergänzung von 91 bis 101. Hier steht nun überall *gmj*[2]), auch bei den durch 3 teilbaren Zahlen 93 und 99. Aber der Schreiber war sehr viel ungeschickter als sein Vorgänger. Zwar 2/93 und 2/99 hat er gerade noch richtig zerlegt, wenn er auch mit den Merkstrichen und dgl. nicht ganz genau verfuhr. Aber bei 95 entging ihm, daß er bereits mit $\overline{3}$ im Hauptglied statt mit $\overline{4} + \overline{6}$ hätte auskommen können und 91 und 97 sind ganz willkürlich behandelte Ausnahmezahlen, obwohl z. B. 2/91 sehr bequem nach dem Vorbild von 89 zu zerlegen gewesen wäre. Schließlich ist 2/101 fast ganz „trivial“ zerlegt, nämlich durch $\overline{101} + (\overline{202} + \overline{303} + \overline{606})$[3]).

Mit diesen beiden Ergänzungen hat die $2/n$-Tabelle die Gestalt erreicht, wie sie uns heute im Papyrus Rhind vorliegt. Es ist vielleicht nicht zu gewagt, in den drei Worten *snn pw n* d. h. „es ist eine Abschrift von“, die Peet noch aus den New-Yorker Fragmenten erwähnt (Peet [1], S. 49), ein Zitat auf noch andere benutzte Quellen zu erblicken, neben der bereits in der Einleitung des Papyrus genannten. Jedenfalls aber scheint mir kein Zweifel möglich, daß die im Vorangehenden besprochenen Teile der $2/n$-Tabelle verschiedenen zeitlich vielleicht recht weit auseinanderliegenden Entwicklungsphasen angehören[4]).

Es ist selbstverständlich nicht möglich, die Schritte dieser Entwicklung in jedem Einzelfalle zu verfolgen; aber ihre große Linie ist wohl nicht mehr zu verkennen. Man darf auch hier nicht in den Fehler verfallen, von dem Ägypter zu viel bewußte Systematik vorauszusetzen. Die Grundlage der Berechnung bildet zweifellos ein gewisses Eyperimentieren, das zeigen schon die kleinen Schwankungen um die Regel. Aber dieses Experimentieren erfolgt nach einem in seiner Wurzel so einheitlichen und festen Schema, daß es von selbst zu ganz bestimmten Resultaten führt. Für den Ägypter war die Stammbruchzerlegung praktisch eine eindeutige.

So rundet sich das Bild der ägyptischen Mathematik, das ich gleich zu Anfang durch das Stichwort „additiv“ zu kennzeichnen versucht habe, zu einem großen Ganzen. Das Zählen, der Ausgangspunkt jedes Rechnens, entwickelt sich in Übereinstimmung mit Sprache und Schrift zur Ausbildung eines ersten Rechenverfahrens, zur wiederholten Addition, d. h. zur „dyadischen

---

1) Man beachte die Einheitlichkeit der Behandlung von 47, 53, von 61, 67, 71 und von 73, 79, 83, 89 (vgl. Tafel IV, 2 bezw. Tafel V).

2) Bei 91 sogar zweimal. Bei 101 ist es vielleicht in den zerstörten Teilen zu ergänzen.

3) Vgl. S. 23 bezw. S. 23 Anm. 2.

4) Auch B. Gunn ist durch Betrachtung der äußeren Anordnung der Nebenrechnungen in der $2/n$-Tabelle zu einer Klassifizierung dieser Zerlegungen gekommen, die fast genau mit der soeben besprochenen übereinstimmt (Gunn [2], S. 128; auch den Gebrauch von *gmj* hat Gunn mit herangezogen). Diese Übereinstimmung erscheint mir um so erfreulicher, als Gunn nicht durch die bei mir vorangehenden theoretischen Überlegungen beinflußt ist.

Multiplikation" der im täglichen Leben vorkommenden ganzen Zahlen. Aber neben diesen spielen die einfachsten Bruchteile eine ebenso wichtige und fast noch individuellere Rolle. Obwohl diese Brüche nicht so unmittelbar miteinander zu verknüpfen sind, wie die ganzen Zahlen, so hat man sicherlich schon früh erkannt, daß etwa 1/3 durch ein halbes Drittel zu 1/2 ergänzt werden kann und dgl. mehr. Man lernt auch mit Bruchteilen zu „rechnen" — es ist das nächstliegende Problem, zu versuchen dieses Rechnen nach dem Muster einzurichten, das bei den ganzen Zahlen ausgebildet ist; die Schrift tut das Ihre, ein solches Verfahren an die Hand zu legen. — Wie die konsequente Durchführung dieses Gedankens unter allmählicher Überwindung mancher Schwierigkeiten zu der uns überlieferten Bruchrechnung führen mußte, habe ich im Vorangehenden zu zeigen versucht. Ich glaube kaum, daß dieses Bild der ägyptischen Mathematik noch wesentlicher Ergänzungen bedarf, daß man genötigt ist, Multiplikationstabellen, besondere Rechengeräte („Abacus") und dergleichen anzunehmen, ohne daß sie sich tatsächlich überliefert finden [1]: Die bisher entwickelten Hilfsmittel der ägyptischen Mathematik sind ausreichend zur Bewältigung der ihr gestellten Aufgaben. — Und nur der beispiellosen Zähigkeit des Ägypters, getreulich zu bewahren, was sie „in den Schriften der alten Zeit" gefunden haben, verdanken wir es, daß wir heute noch versuchen können, die Grundlagen ihrer Mathematik aufzudecken.

1) Z. B. Griffith [1], Bd. 16, S. 172 (‡). Ich denke hier natürlich immer nur an die klassische Zeit. Die Erzählung von den Rechenbrettern, die sich in den Büchern über Geschichte der Mathematik eingebürgert hat, stützt sich bloß auf die beiden Worte λογίζονται ψήφοισι in der berühmten Stelle Herodot II 36.

Anhang.

I. Verzeichnis der gebrauchten Abkürzungen.

Brockelmann [1] = C.B., Grundriß der vergleichenden Grammatik der semitischen Sprachen. 2. Bde. Berlin, Reuther & Reichard, I 1908, II 1913.

Eisenlohr [1] = A.E., Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum) übersetzt und erklärt. Leipzig, Hinrichs 1877. I Commentar, II Tafeln.

— [2] = 2. Ausgabe von [1] aber ohne Tafeln. — S. 275 bis 278 enthält Verbesserungen zu [1]. Von Seite 9 der 2. Ausgabe an erhält man die Seitenzahlen von [1] durch Addition von 18. [2] ist nicht 1877, sondern 1891 erschienen (vgl. Hultsch [2], S. 178 Anm. 2).

Erman [1] = A.E., Ägyptische Grammatik mit Schrifttafel, Literatur, Lesestücken und Wörterverzeichnis. 3. Aufl. Berlin, Reuther & Reichard, 1911 = Porta linguarum orientalium XV.

— [2] = Die Literatur der Ägypter. Gedichte, Erzählungen und Lehrbücher aus dem 3. und 2. Jahrtausend v. Chr. Leipzig, Hinrichs, 1923.

Erman-Ranke [1] = A.E. und H.R., Ägypten und ägyptisches Leben im Altertum. Tübingen, Mohr, 1923. (Neubearbeitung der 1. Aufl. durch Ranke).

Friedlein [1] = G.F., Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen, Ambr. Deichert, 1869.

Griffith [1] = F.L.G., The Rhind Mathematical Papyrus. PSBA 13 (1891) S. 328 ff; 14 (1892) S. 26 ff.; 16 (1894) S. 164 ff., S. 201 ff., S. 230 ff.

— [2] = The Metrology of the Medical Papyrus Ebers. PSBA 13 (1891) S. 392 ff.

— [3] = Notes on Egyptian weights and measures. PSBA 14 (1892), S. 403 ff., 15 (1893) S. 301 ff.

— [4] = The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob. (Principally of the middle Kingdom). London, Quaritch, 1898. Text und Tafeln.

Gunn [1] = B.G., Rezension von Sethe [1]. JEA 3 (1916) S. 279 ff.

— [2] = Rezension von Peet [1]. JEA 12 (1926) S. 123 ff. (Nur nachträglich berücksichtigt.)

Hankel [1] = H.H., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, Teubner, 1874.

Heath [1] = Th.H., A History of Greek Mathematics. 2 Bde. Oxford, Clarendon Press 1921.

Hilbert = D.H., Über das Unendliche, Mathem. Annalen 95 (1925) S. 161 ff.

Hultsch [1] = Fr.H., Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung. Erste Abh., Bd. XVII d. Abh. d. sächs. Ges. d Wiss. (phil.-hist.) Nr. 1 1895.

— [2] = Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung. BM 3. Folge 2 (1901) S. 177 ff.

Humboldt [1] = A.v.H., Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. Crelle Bd. 4 (1829), S. 205 ff.

Lepsius [1] = R.L., Die Regeln in den hieroglyphischen Bruchbezeichnungen. ÄZ 3 (1865) S. 101 ff.

Lidzbarski [1] = M.L., Handbuch der Nordsemitischen Epigraphik nebst ausgewählten Inschriften. Weimar, Felber, 1898. Text und Tafeln.

Neugebauer [1] = O.N., Rezension von Peet [1]. Mathematik Tidskrift B 1925, S. 66 ff.

Peet [1] = T.E.P., The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Introduction, Translation and Commentary. Liverpool, University Preß, 1922.

Schack-Schackenburg [1] = H.Sch.-Sch., Der Berliner Papyrus 6619. ZÄ 38 (1900) S. 135 ff.

Schäfer [1] = H.Sch., Von ägyptischer Kunst, besonders der Zeichenkunst. Leipzig, Hinrichs. 1. Aufl. (2 Bde.) 1919, 2. Aufl. 1922.

Scharff [1] Die Ausgrabung von Kerma. OLZ 29 (1926) Sp. 89 ff.
Sethe [1] = K. S., Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Ein Beitrag zur Geschichte der Rechenkunst und Sprache. Straßburg, Trübner, 1916 = Schriften d. Wiss. Gesellsch. Straßburg. 25. Heft.
— [2] = Selbstanzeige von [1]. GGA 1916, S. 476 ff.
— [3] = Rezension von Peet [1]. DMV 33. (1925) 2. Abtlg. S. *139* ff.
Smith-Karpinski [1] = D.E.S. und L.Ch.K., The Hindu-Arabic numerals. Boston and London, Ginn, 1911.
Spiegelberg [1] = W.S., Rechnungen aus der Zeit Setis I. (circa 1350 v. Chr.) mit anderen Rechnungen des neuen Reiches. Text und Tafeln. Straßburg, Trübner, 1896.
Thureau-Dangin [1] = Numération et Métrologie Sumeriennes. RA 18 (1921) S. 123 ff.

ÄZ = Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde.
BM = Bibliotheca Mathematica.
Crelle = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
DMV = Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.
GGA = Göttingische gelehrte Anzeigen.
JEA = The Journal of Egyptian Archaelogy.
OLZ = Orientalistische Literaturzeitung.
PSBA = Proceedings of the Society of Biblical Archaelogy.
RA = Revue d'Assyriologie.

II. Register.

1. Sachlich.

2. Ägyptische Worte.

3. Besondere Brüche.

Geordnet nach wachsenden Nennern und wachsenden Zählern.

Tafel I.

Die $2/n$-Tabelle. [1])

n	$2/n$	Zerlegung von 2	
		Hauptglied	Ergänzungsterm
3	$\overline{2} + \overline{6}$ [2])	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
5	$\overline{3} + \overline{15}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
7	$\overline{4} + \overline{28}$	$\overline{4}$	$1 + \overline{2} + \overline{4}$
9	$\overline{6} + \overline{18}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
11	$\overline{6} + \overline{66}$	$\overline{6}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{6}$
13	$\overline{8} + \overline{52} + \overline{104}$	$\overline{4} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{8}$
15	$\overline{10} + \overline{30}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
17	$\overline{12} + \overline{51} + \overline{68}$	$\overline{3} + \overline{4}$	$1 + \overline{3} + \overline{12}$
19	$\overline{12} + \overline{76} + \overline{114}$	$\overline{4} + \overline{6}$	$1 + \overline{2} + \overline{12}$
21	$\overline{14} + \overline{42}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
23	$\overline{12} + \overline{276}$	$\overline{12}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{4}$
25	$\overline{15} + \overline{75}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
27	$\overline{18} + \overline{54}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
29	$\overline{24} + \overline{58} + \overline{174} + \overline{232}$	$\overline{2} + \overline{6} + \overline{8}$	$1 + \overline{6} + \overline{24}$
31	$\overline{20} + \overline{124} + \overline{155}$	$\overline{4} + \overline{5}$	$1 + \overline{2} + \overline{20}$
33	$\overline{22} + \overline{66}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
35	$\overline{30} + \overline{42}$	$\overline{\overline{3}} + \overline{6}$	$1 + 6$
37	$\overline{24} + \overline{111} + \overline{296}$	$\overline{3} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{24}$
39	$\overline{26} + \overline{78}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
41	$\overline{24} + \overline{246} + \overline{328}$	$\overline{6} + \overline{8}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{24}$
43	$\overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301}$	$\overline{2} + \overline{3} + \overline{7}$	$1 + \overline{42}$
45	$\overline{30} + \overline{90}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
47	$\overline{30} + \overline{141} + \overline{470}$	$\overline{3} + \overline{10}$	$1 + \overline{2} + \overline{15}$
49	$\overline{28} + \overline{196}$	$\overline{4}$	$1 + \overline{2} + \overline{4}$

1) Nach Peet [1], S. 37. Dieselben Werte, allerdings nur bis $n = 21$ nochmals in den Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1 bis 11.

2) Die Zerlegung $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$ habe ich nur der Vollständigkeit halber eingesetzt. Im Papyrus Rhind befindet sich an dieser Stelle nur $\overline{\overline{3}}$ angegeben (vgl. Peet [1], Pl. A; ebenso Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1).

n	$2/n$	Zerlegung von 2	
		Hauptglied	Ergänzungsterm
51	$\overline{34} + \overline{102}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
53	$\overline{30} + \overline{318} + \overline{795}$	$\overline{6} + \overline{15}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{10}$
55	$\overline{30} + \overline{330}$	$\overline{6}$	$1 + \overline{\overline{3}} + \overline{6}$
57	$\overline{38} + \overline{114}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
59	$\overline{36} + \overline{236} + \overline{531}$	$\overline{4} + \overline{9}$	$1 + \overline{2} + \overline{12} + \overline{18}$
61	$\overline{40} + \overline{244} + \overline{488} + \overline{610}$	$\overline{4} + \overline{8} + \overline{10}$	$1 + \overline{2} + \overline{40}$
63	$\overline{42} + \overline{126}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
65	$\overline{39} + \overline{195}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
67	$\overline{40} + \overline{335} + \overline{736}$	$\overline{5} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{8} + \overline{20}$
69	$\overline{46} + \overline{138}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
71	$\overline{40} + \overline{568} + \overline{710}$	$\overline{8} + \overline{10}$	$1 + \overline{2} + \overline{4} + \overline{40}$
73	$\overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365}$	$\overline{3} + \overline{4} + \overline{5}$	$1 + \overline{6} + \overline{20}$
75	$\overline{50} + \overline{150}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
77	$\overline{44} + \overline{308}$	$\overline{4}$	$1 + \overline{2} + \overline{4}$
79	$\overline{60} + \overline{237} + \overline{316} + \overline{790}$	$\overline{3} + \overline{4} + \overline{10}$	$1 + \overline{4} + \overline{15}$
81	$\overline{54} + \overline{162}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
83	$\overline{60} + \overline{332} + \overline{415} + \overline{498}$	$\overline{4} + \overline{5} + \overline{6}$	$1 + \overline{3} + \overline{20}$
85	$\overline{51} + \overline{255}$	$\overline{3}$	$1 + \overline{\overline{3}}$
87	$\overline{58} + \overline{174}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
89	$\overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}$	$\overline{4} + \overline{6} + \overline{10}$	$1 + \overline{3} + \overline{10} + \overline{20}$
91	$\overline{70} + \overline{130}$	$\overline{\overline{3}} + \overline{30}$	$1 + \overline{5} + \overline{10}$
93	$\overline{62} + \overline{186}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
95	$\overline{60} + \overline{380} + \overline{570}$	$\overline{4} + \overline{6}$	$1 + \overline{2} + \overline{12}$
97	$\overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$	$\overline{7} + \overline{8}$	$1 + \overline{2} + \overline{8} + \overline{14} + \overline{28}$
99	$\overline{66} + \overline{198}$	$\overline{2}$	$1 + \overline{2}$
101	$\overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606}$	$\overline{2} + \overline{3} + \overline{6}$	1

Tafel II.

Zerlegungsschemata.

I. Einfaches Hauptglied.

Fall Nr.	Hauptglied	n	Ausnahmen	Teilbarkeit durch
1)	$\overline{2}$	9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99		3
2)	$\overline{4}$	7, 49, 77	35, 91	7
3)	$\overline{8}$	= Fall 1)		15
4)	$\overline{3}$	5, 25, 65, 85	(55)[1] (95)[2]	5
5)	$\overline{6}$	11, 55		11
6)	$\overline{12}$	23		23

II. Zweifaches Hauptglied.

Fall Nr.	Hauptglied	n	Ausnahmen	Teilbarkeit durch
1)	$\overline{2}+\overline{4}$	= Fall I, 4)		5
2)	$\overline{4}+\overline{8}$	13		13
3)	$\overline{2}+\overline{8}$	= Fall I, 5)		11
4)	$\overline{3}+\overline{4}$	17		17
5)	$\overline{6}+\overline{8}$	41		41
6)	$\overline{3}+\overline{8}$	37		37
7)	$\overline{2}+\overline{3}$	= Fall I, 2)		7
8)	$\overline{4}+\overline{6}$	19, 95		19
9)	$\overline{8}+\overline{12}$		43	43
10)	$\overline{2}+\overline{6}=\overline{\overline{3}}$			
11)	$\overline{4}+\overline{12}=\overline{3}$			
12)	$\overline{2}+\overline{12}$	= Fall 4)		17
13)	$\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$			
14)	$\overline{6}+\overline{12}=\overline{4}$			
15)	$\overline{3}+\overline{12}$	= Fall 8)		19

1) Vgl. Fall 5). 2) Vgl. Fall II, 8).

Tafel III.

Ergänzungstabellen. [1]

1. Zu 2/7.

		1/7	1/14	1/28
		Nr. 11	Nr. 12	Nr. 14
		$1 \quad \overline{7} \quad [\mathbf{4}]$ $\overline{2} \quad \overline{14} \quad [\mathbf{2}]$ $\overline{4} \quad \overline{28} \quad [\mathbf{1}]$ $\overline{4}$	$1 \quad \overline{14} \quad [\mathbf{2}]$ $\overline{2} \quad \overline{28} \quad [\mathbf{1}]$ $\overline{4} \quad \overline{56} \quad [\overline{\mathbf{2}}]$ $\overline{8}$	$1 \quad \overline{28} \quad \mathbf{1}$ $\overline{2} \quad \overline{56} \quad \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{4} \quad \overline{112} \quad \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{16}$
4/7	2/7			
Nr. 9	Nr. 7, 7b, 10	[Nr. 11b]	Nr. 13	Nr. 15
$1 \quad \overline{2} + \overline{14}$ $[\mathbf{14} \quad \mathbf{2}]$ $\overline{2} \quad \overline{4} + \overline{28}$ $[\mathbf{7} \quad \mathbf{1}]$ $\overline{4} \quad \overline{8} + \overline{56}$ $[\mathbf{3} + \overline{\mathbf{2}} \quad \overline{\mathbf{2}}]$ 1	$1 \quad \overline{4} + \overline{28}$ $\mathbf{7} \quad \mathbf{1}$ $\overline{2} \quad \overline{8} + \overline{56}$ $\mathbf{3} + \overline{\mathbf{2}} \quad \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{4} \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1} + \overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} \quad \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{2}$	$[1 \quad \overline{8} + \overline{56}$ $\mathbf{3} + \overline{\mathbf{2}} \quad \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{2} \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1} + \overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} \quad \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{4} \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} + \overline{\mathbf{8}} \quad \overline{\mathbf{8}}$ $\overline{4}\,]$	$1 \quad \overline{16} + \overline{112}$ $\mathbf{1} + \overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} \quad \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{2} \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} + \overline{\mathbf{8}} \quad \overline{\mathbf{8}}$ $\overline{4} \quad \overline{64} + \overline{448}$ $\overline{\mathbf{4}} + \overline{\mathbf{8}} + \overline{\mathbf{16}} \quad \overline{\mathbf{16}}$ $\overline{8}$	$1 \quad \overline{32} + \overline{224}$ $\overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}} + \overline{\mathbf{8}} \quad \overline{\mathbf{8}}$ $\overline{2} \quad \overline{64} + \overline{448}$ $\overline{\mathbf{4}} + \overline{\mathbf{8}} + \overline{\mathbf{16}} \quad \overline{\mathbf{16}}$ $\overline{4} \quad \overline{128} + \overline{896}$ $\overline{\mathbf{8}} + \overline{\mathbf{16}} + \overline{\mathbf{32}} \quad \overline{\mathbf{32}}$ $\overline{16}$

2. Zu 2/9.

	Nr. 16	Nr. 8	
	$1 \quad \overline{2} \quad [\mathbf{9}]$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{3} \quad [\mathbf{6}]$ $\overline{3} \quad \overline{6} \quad [\mathbf{3}]$ 1	$1 \quad \overline{4} \quad \mathbf{4} + \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{6} \quad \mathbf{3}$ $\overline{3} \quad \overline{12} \quad \mathbf{1} + \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{2} \quad \mathbf{9}$	
Nr. 17	Nr. 18	Nr. 19	Nr. 20
$1 \quad \overline{3} \quad [\mathbf{6}]$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{6} + \overline{18} \quad [\mathbf{4}]$ $\overline{3} \quad \overline{9} \quad [\mathbf{2}]$ $\overline{\overline{3}}$	$1 \quad \overline{6} \quad [\mathbf{3}]$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{9} \quad [\mathbf{2}]$ $\overline{3} \quad \overline{18} \quad [\mathbf{1}]$ $\overline{3}$	$1 \quad \overline{12} \quad \mathbf{1} + \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{18} \quad \mathbf{1}$ $\overline{3} \quad \overline{36} \quad \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{6}$	$1 \quad \overline{24} \quad \overline{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{\overline{3}} \quad \overline{36} \quad \overline{\mathbf{2}}$ $\overline{3} \quad \overline{72} \quad \overline{\mathbf{4}}$ $\overline{12}$

1) [ ] bezeichnet Ergänzungen.

Tafel IV.

Die Ausnahmezahlen.

1. Uebersicht.

31	59	79
35	61	83
43	67	89
47	71	91
53	73	97

2. Zerlegungen und Hilfszahlen. [1]

n	Hauptglied: Koeffizient / Hilfszahlen	Hauptglied: Summe $2n-b$	Ergänzungsterm: Koeffizient / Hilfszahlen	Ergänzungsterm: Summe n	b
31	$\overline{4}+\overline{5}$ **5 4**	**9**	$1+2+\overline{20}$ **20 10 1**	**31**	**20**
35	$\overline{3}+\overline{6}$ **4 1**		$1+6$ **6 1**		
43	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$ **21 14 6**	**41**	$1+\overline{42}$ **42 1**	**43**	**42**
47	$\overline{3}+\overline{10}$ **10 3**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{15}$ **30 15 2**	**47**	**30**
53	$\overline{6}+\overline{15}$ **5 2**	**7**	$1+\overline{3}+\overline{10}$ **30 20 3**	**53**	**30**
59	$\overline{4}+\overline{9}$ **9 4**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{12}+\overline{18}$ **36 18 3 2**	**59**	**36**

1) Nur auf die Zerlegung von 2 bezüglich. Vgl. auch Tafel I.

n	Hauptglied Koeffizient Hilfszahlen	 Summe $2n-b$	Ergänzungsterm Koeffizient Hilfszahlen	 Summe n	b
61	$\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$ **10 5 4**	**19**	$1+\overline{2}+\overline{40}$ **40 20 1**	**61**	**40**
67	$\overline{5}+\overline{8}$ **8 5**	**13**	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$ **40 20 5 2**	**67**	**40**
71	$\overline{8}+\overline{10}$ **5 4**	**9**	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$ **40 20 10 1**	**71**	**40**
73	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{5}$ **20 15 12**	**47**	$1+\overline{6}+\overline{20}$ **60 10 3**	**73**	**60**
79	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{10}$ **20 15 6**	**41**	$1+\overline{4}+\overline{15}$ **60 15 4**	**79**	**60**
83	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}$ **15 12 10**	**37**	$1+\overline{3}+\overline{20}$ **60 20 3**	**83**	**60**
89	$\overline{4}+\overline{6}+\overline{10}$ **15 10 6**	**31**	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$ **60 20 6 3**	**89**	**60**
91	$\overline{3}+\overline{30}$ **20 1**		$1+\overline{5}+\overline{10}$ **10 2 1**		
97	$\overline{7}+\overline{8}$ **8 7**	**15**	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$ **56 28 7 4 2**	**97**	**56**

Tafel V.

Zur Entstehungsgeschichte der 2/*n*-Tabelle.

n	teilbar durch	Hauptglied	Hilfszahlen im Ergänzungsterm	Terminologie	Bemerkung
3		$\overline{2}$			
5		$\overline{3}$			
7		$\overline{4}$			
9	3				
11		$\overline{6}$			
13		$\overline{4}+\overline{8}$			
15	3				
17		$\overline{3}+\overline{4}$		*ḏꜣ.t*	
19		$\overline{4}+\overline{6}$		*ḏꜣ.t* *dmḏ*	
21	3				
23		$\overline{12}$		*ḏꜣ.t* *dmḏ*	
25	5				
27	3				
29		$\overline{2}+\overline{6}+\overline{8}$	**24 + 4 + 1**		
31			**20 + 10 + 1**		
33	3				
35					Ausnahme
37		$\overline{3}+\overline{8}$		*ḏꜣ.t*	
39	3				
41		$\overline{6}+\overline{8}$		*ḏꜣ.t* *dmḏ*	
43			**42 + 1**	*gmj*	
45	3				
47			**30 + 15 + 2**	*gmj*	
49	7			*gmj*	
51	3				
53			**30 + 20 + 3**	(*ḏꜣ.t* *dmḏ*) *gmj*	
55	11			*gmj*	11 statt 15
57	3				
59				*gmj*	Ausnahme?
61			**40 + 20 + 1**	*gmj*	
63	3				
65				*gmj*	
67			**40 + 20 + 5 + 2**	*gmj*	
69	3				
71			**40 + 20 + 10 + 1**	*gmj*	
73			**60 + 10 + 3**	*gmj*	
75	3				
77	7			*gmj*	
79			**60 + 15 + 4**	*gmj*	
81	3				
83			**60 + 20 + 3**	*gmj*	
85	5			*gmj*	
87	3				
89			**60 + 20 + 6 + 3**	*gmj*	
91				*gmj*	Ausnahme
93	3			*gmj*	
95	19			*gmj*	19 statt 5
97				*gmj*	Ausnahme
99	3			*gmj*	
101				[*gmj*]?	triviale Zerlegung

Tafel VI.

Die 2/3-Tabelle. 1)

Zeile	
1	$\overline{\overline{3}}$ von $\overline{\overline{3}}$ ist $\overline{3} + \overline{9}$
2	$\overline{3}$ „ $\overline{\overline{3}}$ „ $\overline{6} + \overline{18}$
3	$\overline{\overline{3}}$ „ $\overline{3}$ „ $\overline{6} + \overline{18}$
4	$\overline{\overline{3}}$ „ $\overline{6}$ „ $\overline{12} + \overline{36}$

Zeile	
5	$\overline{\overline{3}}$ von seinem $\overline{2}$ ist $\overline{3}$
6	$\overline{3}$ „ „ $\overline{2}$ „ $\overline{6}$
7	$\overline{6}$ „ „ $\overline{2}$ „ $\overline{12}$
8	$\overline{12}$ „ „ $\overline{2}$ „ $\overline{24}$

Zeile				
9	$\overline{9}$	$\overline{\overline{3}}$ von ihm ist	$\overline{18} + \overline{54}$	$\overline{9}$ von $\overline{\overline{3}}$ $\overline{18} + \overline{54}$ 2)
10	[$\overline{9}$	$\overline{3}$ . . . .]		
11	[$\overline{9}$	$\overline{2}$ . . . .]		
12	[$\overline{5}$	$\overline{\overline{3}}$ . . . .]		
13	[$\overline{5}$	3 . . . .]		
14	[$\overline{5}$	$\overline{2}$ . . . .]		
15	[$\overline{5}$]	$\overline{4}$ von ihm ist	$\overline{20}$	
16	$\overline{7}$	$\overline{\overline{3}}$ ist	$\overline{14} + \overline{42}$	
17	$\overline{7}$	$\overline{2}$ von ihm	$\overline{14}$	
18	$\overline{11}$	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{22} + \overline{66}$	$\overline{3}$ von ihm $\overline{33}$
19	$\overline{11}$	$\overline{2}$ von ihm	$\overline{22}$	$\overline{4}$ „ „ $\overline{44}$

1) [ ] bedeutet Ergänzung zerstörter Stellen, im Wesentlichen nach Peet [1], S. 103. Nur in Zeile 15 wäre für das [$\overline{5}$] noch Platz im Papyrus (vgl. Eisenlohr [1], Tafel XIX). Bei selbstverständlichen Ergänzungen habe ich keine Klammern eingesetzt; man vergleiche deshalb Peet [1], Pl. R.

2) Steht eigentlich (als Korrektur) vor dem übrigen Teil der Zeile.