

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

XI

 Springer

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

Elfter Band
1932



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Inhaltsübersicht.

Erstes Heft.

	Seite
W. Hähnle: Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder (Dissertation)	1
R. Stix: Thermische Wicklungszeitkonstanten von elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung der Temperaturgefälle	24
M. Liwshitz u. H. Raymond: Stoßerregung bei der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschine	60
R. Rüdénberg: Gemeinschaftsschwingungen gekuppelter Synchronkraftwerke mit asynchronen Netzen	69
F. Oertel: Über Versuche zur Klarstellung der wirtschaftlichsten Betriebsweise bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen	103
H. Kühlewein: Über die magnetischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt und einigen Legierungen bei höheren Temperaturen	124

Zweites Heft.

R. Becker: Reversible Vorgänge in einem magnetischen Material mit starken inneren Spannungen	1
H. Gerdien u. H. Neumann: Über ein astatiches Kompensationsmagnetometer	12
H. Neumann u. K. Warmuth: Über die rechnerische Auswertung ballistischer Entmagnetisierungsfaktoren kreiszylindrischer Stäbe	25
M. Steenbeck: Ähnlichkeitsgesetze für Gasentladungen und ihr Gültigkeitsbereich	36
R. Strigel: Über den Entladeverzug in homogenen elektrischen Feldern und in Luft von Atmosphärendruck	52
H. Kniepkamp u. C. Nebel: Zum Problem des Emissionsmechanismus von Oxydkathoden	75
W. Kroll: Über die Reduzierbarkeit des Berylliumoxydes	88
G. Masing u. W. Pocher: Technische Eigenschaften der Be-haltigen Cu-Ni-Legierungen	93
W. Nagel u. E. Baumann: Vergleichende Studien über den Härtungsprozeß bei Schellack und Phenolformaldehydharzen	99
Namenverzeichnis zu Band XI, Heft 1 und 2.	115
Sachverzeichnis zu Band XI, Heft 1 und 2.	117

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

XI. Band

Erstes Heft (abgeschlossen am 12. März 1932)

Mit 136 Bildern

Unter Mitwirkung von

Rudolf Bingel, Heinrich von Buol, Robert Fellingner, Ludwig Fischer, Adolf Franke, Hans Gardien, Walter Hähnle, Friedrich Heintzenberg, Carl Köttgen, Heinrich Kühlewein, Michael Liwschitz, Walter Mollier, Franz Oertel, Hellmuth Raymund, Walter Reichel, Reinhold Rüdberg, Moritz Schenkel, Walter Schottky, Hermann von Siemens, Adolf Stauch, Robert Stix, Richard Swinne, Erich Thürmel, Carl Trettin

herausgegeben von der

Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten
des Siemens-Konzerns



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1932

ISBN 978-3-642-98853-0 ISBN 978-3-642-99668-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-99668-9

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1932 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Verlag von Julius Springer, Berlin 1932
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1932

Vorwort.

Zur Einleitung des XI. Bandes unserer Wissenschaftlichen Veröffentlichungen möchten wir auf das Vorwort im ersten Heft des X. Bandes zurückgreifen, in dem auf eine Umgestaltung der inhaltlichen Anordnung der einzelnen Hefte hingewiesen wurde. Die Herausgabe von Heften geringeren Umfangs und einigermaßen geschlossenen Inhalts hat bei unseren Lesern Anklang gefunden. Wir möchten daher auch bei dem neuen Bande auf dem beschrittenen Weg bleiben, wobei allerdings zu bemerken ist, daß die in diesem Jahre unerläßliche weitere Einschränkung des Jahresumfangs unserer Wissenschaftlichen Veröffentlichungen die Schwierigkeit einer noch strengeren Auswahl des vorhandenen, der Veröffentlichung harrenden Stoffes mit sich bringt.

Das vorliegende Heft ist wieder wie das erste Heft des vorigen Bandes in der Hauptsache „elektrotechnisch“ eingestellt. In der ersten Arbeit über: „Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder“ von W. Hähnle werden die Analogien zwischen linearen elektrischen und linearen mechanischen Gebilden sowie die elektromechanischen Umwandler behandelt, in Weiterführung und allgemeinerer Begründung der Berechnung von Lautsprechern mit starrer Kreismembran desselben Autors (vgl. X, 4 S. 73—116). In der folgenden Arbeit bringt R. Stix eingehende Berechnungen über: „Thermische Wicklungszeitkonstanten von elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung der Temperaturgefälle“; dadurch wird die früher bei uns erschienene Arbeit von C. Trettin (IX, 2 S. 1—41) über: „Die Berechnung und Messung der Wärmeströmungen in Gleichstrommaschinen“ entsprechend dem mittlerweile erzielten Fortschritt grundlegend erweitert. Die nächste Arbeit von M. Liwschitz und H. Raymund über: „Stoßerregung bei der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschine“ hat besonderes Interesse im Zusammenhang mit der Frage der Stützung der Leitungen bei der Übertragung elektrischer Energie auf große Entfernungen. Auf das Gebiet der Großkraftnetze begibt sich die Arbeit von R. Rüdemberg: „Gemeinschaftsschwingungen gekuppelter Synchronkraftwerke mit asynchronen Netzen“, die sich mit der Leistungsverteilung und Frequenzpendelungen (der Maschinen gegeneinander) in verkoppelten Großkraftnetzen befaßt. Eine Erweiterung grundlegender Betrachtungen über den Zusammenhang der Wirtschaftlichkeit elektrischer Arbeitsmaschinen mit der aus Betriebsversuchen gewonnenen Theorie bringt F. Oertel in seiner Abhandlung: „Über Versuche zur Klarstellung der wirtschaftlichsten Betriebsweise bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen“.

Zum Schluß bringt H. Kühlewein in seiner mehr physikalisch orientierten Abhandlung: „Über die magnetischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt und einigen Legierungen bei höheren Temperaturen“ wichtige experimentelle Ergebnisse über die verwickelte Frage magnetischer Umwandlungstemperaturen.

Wir geben der Hoffnung Ausdruck, daß auch dieses Heft unserem Leserkreis erwünschtes Neues und Anregung zu weiteren Fortschritten bringt.

Berlin-Siemensstadt, im März 1932.

**Zentralstelle für wissenschaftlich-technische
Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns.**

Inhaltsübersicht.

	Seite
W. Hähnle: Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder	1
R. Stix: Thermische Wicklungszeitkonstanten von elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung der Temperaturgefälle	24
M. Liwschitz u. H. Raymund: Stoßerregung bei der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschine	60
R. Rüdtenberg: Gemeinschaftsschwingungen gekoppelter Synchronkraftwerke mit asynchronen Netzen	69
F. Oertel: Über Versuche zur Klarstellung der wirtschaftlichsten Betriebsweise bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen	103
H. Kühlewein: Über die magnetischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt und einigen Legierungen bei höheren Temperaturen	124

Anfragen, die den Inhalt dieses Heftes betreffen, sind zu richten an die Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns, Berlin-Siemensstadt, Verwaltungsgebäude.

Die Darstellung elektromechanischer Gebilde durch rein elektrische Schaltbilder.

Von **Walter Hähnle**.

Mit 41 Bildern.

Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 10. September 1931.

Inhaltsübersicht.

Einleitung (Beispiel).	ordnungen in Kräftekreisbilder (Gebrauchsanweisung).
A. Die Entsprechungen (Analogien) zwischen linearen elektrischen und linearen mechanischen Gebilden:	7. Erweiterungen des Verfahrens.
1. Die verschiedenen Gruppen mechanischer Gebilde.	8. Widerstandsreziproke mechanische Schaltungen.
2. Wahl der Zählrichtungen.	B. Die Umwandler:
3. Bezeichnungen.	1. Der elektrodynamische Umwandler.
4. Die Gleichungen für die elektrischen und mechanischen Elemente.	2. Der elektromagnetische Umwandler.
5. Kräftekreisbilder.	3. Der elektrostatische Umwandler.
6. Umwandlung einfacher mechanischer An-	Schlußbemerkung.
	Zusammenfassung.
	Literatur.

Einleitung.

Die Darstellung linearer mechanischer Gebilde durch die analogen elektrischen Gebilde ist seit etwa 40 Jahren bekannt¹⁾. In neuerer Zeit haben unter anderen besonders auch W. Hahnemann und H. Hecht²⁾ mit dieser Darstellungsart gearbeitet. Über die Behandlung linearer elektromechanischer Systeme dagegen findet man auch in der neuesten Literatur Angaben, die nicht ohne weiteres miteinander in Einklang zu bringen sind. R. L. Wegel³⁾ und neuerdings Le Corbeiller⁴⁾ weisen darauf hin, daß die Gleichungen für elektrodynamische und elektromagnetische Systeme sich in ihrem Aufbau grundsätzlich von den Gleichungen für rein elektrische Systeme unterscheiden. Es scheint hieraus die Folgerung hervorzugehen, daß elektrodynamische und elektromagnetische Systeme nicht durch rein elektrische Systeme darstellbar seien. Im Gegensatz hierzu wird aber z. B. von W. Hahnemann und H. Hecht bei der Behandlung von akustischen Resonanzstrahlern (Unterwasser-Schallsender) die mechanische Belastung durch eine in das elektrische Schaltbild eingefügte Größe ersetzt⁵⁾. Ebenso ist z. B. in dem deutschen Reichspatent 498990 vorausgesetzt, daß allgemein ein Ersatz von mechanischen Scheinwiderständen durch

¹⁾ R. Franke: Vortrag siehe Literaturverzeichnis.

²⁾ Vgl. z. B. W. Hahnemann und H. Hecht: Physik. Z. Bd. 17 (1916) S. 601.

³⁾ R. L. Wegel: J. Amer. Inst. electr. Engr. Bd. 40 (1921) Nr. 10, S. 791.

⁴⁾ Ph. Le Corbeiller: Ann. Postes Télégr. 1929 S. 1.

⁵⁾ W. Hahnemann und H. Hecht: Physik. Z. Bd. 20 (1919) S. 104 und Bd. 21 (1920) S. 264.

elektrische Scheinwiderstände möglich ist. S. Ballantine¹⁾ und W. Mc Lachlan²⁾ arbeiten in diesem Sinne mit einem „Transduktions-Koeffizienten“, um mechanische Scheinwiderstände in elektrische Scheinwiderstände umzuwandeln.

Die folgende Arbeit zeigt, welche Eigenschaften elektromechanische Gebilde besitzen müssen, um durch rein elektrische Gebilde ersetzbar zu sein, und gibt ein neues Verfahren an, durch das die Ersatzschaltungen zwangsläufig gefunden werden. Zur Entwicklung dieses Verfahrens waren die von K. Matthies und F. Strecker aufgestellten Beziehungen für widerstandsreziproke Gebilde sehr nützlich³⁾.

Beispiel:

Ehe wir die allgemeinen Beziehungen entwickeln, zeigen wir im folgenden an einem Beispiel, auf welche Weise die formale Übereinstimmung der Gleichungen für elektromechanische Gebilde mit den Gleichungen für rein elektrische Gebilde erreicht wird. Wir gehen von den bekannten Gleichungen für ein einfaches lineares elektromagnetisches oder elektrodynamisches Gebilde ohne Eisenverluste aus. Dieses Gebilde kann zum Beispiel ein Telephon oder ein Lautsprechersystem sein. Es kann nach beiden Richtungen betrieben werden, d. h. zur Umwandlung von elektrischer in akustische Leistung oder umgekehrt.

Die Gleichungen werden so aufgestellt, daß sie für beide Übertragsrichtungen gleichbleiben. Es sind nun die als positiv zählenden Richtungen für alle Größen festzulegen. Wir schließen das elektromechanische Gebilde auf der elektrischen Seite an ein Element *I* an, das ein elektrischer Verbraucher oder ein elektrischer Generator sein kann. Wir nennen die Klemmenspannung positiv, wenn die Pfeilrichtung des Stromes innerhalb des Elementes vom höheren zum niedrigeren Potential weist, im anderen Fall negativ. Das Produkt von Spannung mal Strom erhält dadurch ein negatives Vorzeichen, wenn das Element ein Generator ist, ein positives, wenn es ein Verbraucher ist.

Auf der mechanischen Seite schließen wir das Gebilde an ein Element *II* an, das ein mechanischer Verbraucher oder ein mechanischer Generator sein kann. Wir setzen willkürlich die Geschwindigkeit positiv, die eine positive Klemmenspannung erzeugt. Die Zählrichtung für die Kraft wählen wir so, daß das Produkt von Kraft mal Geschwindigkeit ein positives Vorzeichen erhält, wenn Element *II* ein Verbraucher ist. Damit ist das Vorzeichen für die Kraft so festgelegt, daß ein positiver Strom im Element *I* eine negative Kraft im Element *II* erzeugt.

Bezeichnungen:

ω = Kreisfrequenz.

U = Spannung an den Klemmen von Element *I*.

\mathfrak{S} = Strom im Element *I*.

\Re = elektrischer Scheinwiderstand bei festgebremstem System.

\mathfrak{P} = die Kraft, welche vom System nach außen ausgeübt wird.

v = Geschwindigkeit des Systems.

$\mathfrak{Y} = \left. \frac{\mathfrak{P}}{v} \right|_{\mathfrak{S}=0}$ = mechanischer Scheinwiderstand des Systems bei geöffnetem Stromkreis.

A = Konstante.

Die deutschen Buchstaben bedeuten, wie üblich, komplexe Größen, die lateinischen reelle Größen. Es ergibt sich damit das bekannte Gleichungspaar:

$$\mathfrak{P} = -\mathfrak{Y} \cdot v - A \cdot \mathfrak{S}, \quad (1)$$

$$U = A \cdot v - \Re \cdot \mathfrak{S}. \quad (2)$$

Dieses Gleichungspaar unterscheidet sich von dem sonst formal übereinstimmenden Gleichungspaar für einen elektrischen Übertrager nur durch einen Unterschied im Vorzeichen. Das Produkt $A \cdot \mathfrak{S}$ der Gl. (1) hat ein negatives Vorzeichen, das Produkt $A \cdot v$ der Gl. (2) hat ein positives Vorzeichen. Dieser Vorzeichenunterschied erscheint in den erwähnten Arbeiten von Wegel und von Le Corbeiller als eine für elektromagnetische und elektrodynamische Systeme bezeichnende Eigenschaft.

Um ihn zu beseitigen, schreiben wir die Gl. (1) und (2) in anderer Form:

Nach (1) und (2) ist:

$$v = -\frac{1}{\mathfrak{Y}} \cdot \mathfrak{P} - \frac{A}{\mathfrak{Y}} \cdot \mathfrak{S}, \quad (3)$$

$$U = -\frac{A}{\mathfrak{Y}} \cdot \mathfrak{P} - \left(\frac{A^2}{\mathfrak{Y}} + \Re \right) \cdot \mathfrak{S}. \quad (4)$$

¹⁾ S. Ballantine: Proc. Instn. Radio Engr. Bd. 17 (1929) S. 929.

²⁾ W. McLachlan: Philos. Mag. Bd. 7 (1929) S. 1021.

³⁾ K. Matthies und F. Strecker: Arch. Elektrotechn. Bd. 14 I (1924).

Die Gl. (3) und (4) entsprechen nunmehr formal vollständig den Gleichungen für einen elektrischen Übertrager ohne Eisenverluste. Es bedeute zum Beispiel für einen Übertrager (siehe Bild 1):

- | | |
|--|------------------------------------|
| L_1 = primäre Induktivität. | $\Re_2 = j\omega L_2 + R_2$. |
| R_1 = primärer Wirkwiderstand. | $\Re_{1,2} = j\omega L_{1,2}$. |
| L_2 = sekundäre Induktivität. | U_1 = primäre Klemmenspannung. |
| R_2 = sekundärer Wirkwiderstand. | U_2 = sekundäre Klemmenspannung. |
| $L_{1,2}$ = gegenseitige Induktivität. | I_1 = primärer Strom. |
| $\Re_1 = j\omega L_1 + R_1$. | I_2 = sekundärer Strom. |

Nun ist bei Wahl der Zählrichtungen nach Bild 1, wobei die Strompfeile den Kern in gleichem Sinn umkreisen,

$$\begin{cases} U_1 = -\Re_1 \cdot I_1 - \Re_{1,2} \cdot I_2 \\ U_2 = -\Re_{1,2} \cdot I_1 - \Re_2 \cdot I_2 \end{cases} \quad (3')$$

$$\begin{cases} U_1 = -\Re_{1,2} \cdot I_1 - \Re_2 \cdot I_2 \\ U_2 = -\Re_1 \cdot I_1 - \Re_{1,2} \cdot I_2 \end{cases} \quad (4')$$

Der Vergleich von (3) und (4) mit (3') und (4') zeigt, daß folgende Größen einander entsprechen:

Elektrische Gebilde	Elektromagnetisches oder elektrodynamisches Gebilde
U_1	v
I_1	\mathfrak{P}
U_2	U
I_2	\mathfrak{I}
\Re_1	$\frac{1}{\mathfrak{Y}}$
\Re_2	$\frac{A^2}{\mathfrak{Y}} + \mathfrak{R}$
$\Re_{1,2}$	$\frac{A}{\mathfrak{Y}}$

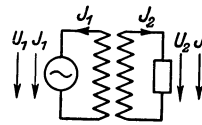


Bild 1. Übertrager.

Oder mit Worten: Die Größe U_1 entspricht der Größe v und nicht der Größe \mathfrak{P} . Die Größe I_1 entspricht der Größe \mathfrak{P} und nicht der Größe v . Die übrigen Beziehungen gestalten sich entsprechend. Es ist damit die formale Übereinstimmung des Gleichungspaares (3) und (4) mit dem Gleichungspaar (3') und (4') nachgewiesen. Es ist aber noch nicht dargelegt, auf welche Weise die Koeffizienten der Gl. (3') und (4') durch elektrische Gebilde verwirklicht werden können. Dieser Nachweis wird im folgenden ganz allgemein geführt

und das Verfahren zur Umwandlung angegeben. Wir behandeln daher dieses Einzelbeispiel nicht weiter, sondern erläutern die allgemeinen Gesetze.

A. Entsprechungen zwischen elektrischen und mechanischen Gebilden.

1. Die verschiedenen Gruppen mechanischer Gebilde.

Es werden in diesem Abschnitt nur die Entsprechungen zwischen elektrischen und mechanischen Gebilden, nicht zwischen elektrischen und elektromechanischen Gebilden behandelt.

Zwischen den allgemeinen Gleichungen von Schallwellen im Raum und den Gleichungen von elektromagnetischen Wellen im Raum bestehen zwar formale Ähnlichkeiten, aber keine Entsprechungen.

Schallwelle¹⁾:

- v = Teilchengeschwindigkeit.
- p = Druck, p_0 = Mittelwert des Druckes.
- ρ_0 = Mittelwert der Luftdichte.
- κ = Verhältnis der spezifischen Wärmen.

Unter der Bedingung, daß v klein gegen c ist, ist angenähert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \cdot \text{grad } p \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\kappa \cdot p_0 \cdot \text{div } v \end{aligned} \right\} \text{Schallwelle.}$$

¹⁾ Sämtliche Gleichungen sind Größengleichungen.

Elektromagnetische Welle: \mathfrak{H} = magnetische Feldstärke. \mathfrak{E} = elektrische Feldstärke. \mathfrak{D} = dielektrische Verschiebung. \mathfrak{B} = Induktion. i = Leitungsstrom.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= -\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + i \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{elektromagnetische Welle.}$$

Dagegen bestehen zwischen elektrischen Netzwerken und ganz bestimmten mechanischen Gebilden Entsprechungen. Beim Vergleich mechanischer Gebilde mit elektrischen Netzwerken ist folgender Unterschied grundlegend: Bei elektrischen Netzwerken gibt es nur wenige Arten von Zusammenschaltungen der Elemente, nämlich die Hintereinander-, die Parallelschaltung und die verschiedenen Kreuzschaltungen. Letztere lassen sich rechnerisch auf Glieder zurückführen, die nur Hintereinander- und Parallelschaltungen enthalten. Es ist deshalb z. B. bei elektrischen Gebilden nicht möglich, lineare Elemente so zusammenzuschalten, daß ein nichtlineares Netzwerk entsteht. Bei mechanischen Gebilden dagegen gibt es viel mehr Arten der Zusammenschaltung. Nur ganz bestimmte Arten entsprechen den Hintereinander-, Parallel- oder Kreuzschaltungen. Die Mehrzahl der Zusammenschaltungen ist anderer Natur. Dieser grundsätzliche Unterschied rührt davon her, daß die Bewegungen mechanischer Gebilde nicht nur in einer, sondern in drei räumlichen Dimensionen erfolgen können. Es sind deshalb bei mechanischen Gebilden nicht nur die einzelnen Elemente, sondern auch die Arten der Zusammenschaltungen zu prüfen. Wir unterscheiden daher bei mechanischen Gebilden zunächst folgende 2 Gruppen:

1. Gebilde, deren Elemente so verbunden sind, daß ihre Zusammenschaltung der von elektrischen Netzwerken entspricht.
2. Gebilde, deren Zusammenschaltung ganz anderer Art ist.

Diese beiden Gruppen decken sich nicht mit dem Begriff linearer und nichtlinearer Gebilde. Es gibt nichtlineare mechanische Gebilde, die zu Gruppe 1 gehören, und lineare, die zu Gruppe 2 gehören (z. B. Biegungsschwingungen von Stäben). Wir behandeln zunächst nur die erste Gruppe, und diese nur mit linearen Elementen. Es ist im folgenden festzulegen, was unter einem linearen Element zu verstehen ist.

Gruppe 1 mit linearen Elementen.

Ein Beobachter befinde sich in einem Raume, der — auf diesen Beobachter bezogen — frei von einem Schwerfeld sei. Alle Vorgänge sollen sich zunächst nur in einem derartigen schwerfeldfreien Raume abspielen. (Diese Beschränkung auf einen schwerfeldfreien Raum ist nicht in allen Fällen notwendig. Es kann von Fall zu Fall ein Raum zugelassen werden, in dem ein Schwerfeld von bestimmten Eigenschaften vorhanden ist.)

Wir gehen von einem einfachen Sonderfall aus und erweitern ihn zu einem allgemeinen Fall: Alle Bewegungen sollen auf einer für den Beobachter ruhenden Geraden verlaufen. Die Elemente bestehen aus Massen, die an einzelnen Punkten vereinigt sind, masselosen Federn und Reibungswiderständen. Diese 3 Elemente sollen die mechanischen Grundelemente heißen. Wir setzen voraus, daß jedes Element, für sich betrachtet, linear ist. Darunter ist zu verstehen, daß die Gesetze von Gl. (7)

bis (9) erfüllt sind (s. Bild 6). Werden die Elemente so zusammengeschaltet, daß alle Bewegungen auf einer festen Geraden verlaufen, so ist das entstehende Gebilde linear. Es ist für die grundsätzliche Betrachtung zunächst gleichgültig, ob diese Bedingungen auch genau verwirklicht werden können.

An die Stelle der Bewegungen auf einer für den Beobachter ruhenden Geraden können auch Drehungen um eine ruhende Achse treten. Es können noch allgemeiner die Bewegungen auf einer beliebig im Raume gekrümmten Bahn erfolgen, wenn alle auf die Bewegungsrichtung bezogenen Kräfte unabhängig von den Krümmungen der Bahn bleiben. Es können auch die einzelnen Elemente verschiedene Bahnen haben, wenn sie durch lineare Übertragungsglieder (Zahnräder, Schneckenräder, Hebel usw.) gekoppelt sind.

Es können auch die Einzelelemente durch künstlich linear gemachte Gebilde dargestellt werden (z. B. Federn mit krummer Charakteristik, welche durch Zusammenschaltung mit einem geeigneten Hebelsystem zu einem linearen Element umgestaltet werden).

Durch Übergang zu unendlich vielen unendlich kleinen Elementen läßt sich zeigen, daß Longitudinalschwingungen und Torsionsschwingungen von Stäben zur Gruppe 1 gehören. Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen in Röhren mit konstantem oder veränderlichem Querschnitt können bei Vernachlässigung der Reibung ebenfalls in diese Gruppe eingeordnet werden.

Es gibt noch eine Art von Gebilden, die in diese Gruppe gehören, nämlich transversalschwingende gespannte Saiten ohne Biegungssteifigkeit. Die Massen können dabei an einzelnen Punkten vereinigt oder stetig verteilt sein. Transversalschwingungen von Saiten ohne Biegungssteifigkeit sind bei kleinen Amplituden genügend genau lineare Gebilde und haben in diesem Falle dasselbe (lineare) Ersatzschaltbild wie Longitudinalschwingungen. — (Sind die Amplituden so groß, daß auch die höheren Glieder berücksichtigt werden müssen, so gehören sie nicht mehr zu den linearen Gebilden.)

Gruppe 2 (vgl. S. 4 unten).

a) Lineare Gebilde. Hierher gehören z. B. Biegungsschwingungen von Stäben. Die Fortpflanzung von Biegungsschwingungen in Stäben konstanten Querschnittes z. B. erfolgt in erster Näherung ohne nichtlineare Verzerrungen. Es ist bisher nicht gelungen, für solche Schwingungen eine streng entsprechende elektrische Anordnung zu finden.

b) Nichtlineare Gebilde. Die Mehrzahl der mechanischen Zusammenschaltungen ist nichtlinear. Dies erscheint im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen als ein Nachteil, es beruht aber gerade hierauf die größere Vielseitigkeit mechanischer Vorrichtungen. Zwischen den Wegen von zwei Punkten eines mechanischen Gebildes läßt sich z. B. durch Hebel- und durch Kurvenscheiben-Übertragungen jede gewünschte Beziehung herstellen. Frequenzverdopplungen können mechanisch auf einfache Weise erreicht werden. Verwandlungen von Gleichbewegungen in Wechselbewegungen werden z. B. einfach durch das Schubkurbelgetriebe erzeugt. Entsprechende elektrische Vorrichtungen, die ohne grobmechanische Bewegungen Gleichstrom in Wechselstrom umwandeln, sind Elektronen- und Ionenröhren. Diese Vorrichtungen haben jedoch weder die Einfachheit noch den Wirkungsgrad des Schubkurbelgetriebes erreicht.

Nach diesem Überblick wenden wir uns ausschließlich der Gruppe 1 zu. Um die Definitionen anschaulich zu machen, ist im folgenden überall nur der einfachste Fall betrachtet, daß alle Bewegungen auf einer Geraden verlaufen. Die Erweiterungen ergeben sich nach dem oben Gesagten von selbst.

2. Wahl der Zählrichtungen.

Für die Spannungen, Ströme, Kräfte, Relativgeschwindigkeiten sind die als positiv zu zählenden Richtungen festzulegen. Bei einem zu einer Gleichung gehörenden Bilde sind die Pfeile jeweils zu dem Element gesetzt, auf das sich die Gleichung bezieht.

Die Zählrichtung der Klemmenspannung und des Stromes ist stets gleich gewählt. Das Produkt von Klemmenspannung und Strom hat daher bei einem Verbraucher ein positives, bei einem Generator ein negatives Vorzeichen. Ist z. B. ein Generator mit einem Ohmschen Widerstand belastet und bedeuten u , i , R die Klemmenspannung, den Strom und den Ohmschen Widerstand, so heißt die Gleichung für den Ohmschen Widerstand $u = +R \cdot i$, für den Generator $u = -R \cdot i$.

Die Zählrichtung für Kraft und Relativgeschwindigkeit wird ebenfalls so gewählt, daß das Produkt dieser beiden Größen für einen Verbraucher positiv wird. Es ist dabei noch freigelassen, ob dem Druck oder dem Zug das positive Zeichen beigelegt wird.

Bei den in dieser Arbeit behandelten elektromechanischen Gebilden der Gruppe 1 werden Spannungen in Relativgeschwindigkeiten oder in Kräfte, Ströme in Kräfte oder in Relativgeschwindigkeiten verwandelt. Wir legen willkürlich fest, daß diejenige mechanische Größe, die eine Spannung erzeugt, dasselbe Vorzeichen erhält wie die erzeugte Spannung. Damit sind alle Festlegungen getroffen.

Bezeichnungen:

Spannung \longrightarrow	Druck $\triangleright \leftarrow$ (auf das betrachtete Element von außen ausgeübter Druck)
Strom \dashrightarrow	Relativgeschwindigkeit $\dashleftarrow \dashrightarrow$
Zug \longleftrightarrow (auf das betrachtete Element von außen ausgeübter Zug)	


3. Bezeichnungen.


Elektrische Größen:


- u = elektrische Spannung zwischen 2 Punkten eines elektrischen Netzwerkes, Augenblickswert.
- i = Strom in einem Zweige eines elektrischen Netzwerkes, Augenblickswert.
- Ⓢ = Spannungsquelle ohne inneren Widerstand.
- Ⓣ = Stromquelle mit unendlich hohem innerem Widerstand.
- L = Induktivität.
- C = Kapazität.
- R = Ohmscher Widerstand.
- t = Zeit.


Mechanische Größen:

- p = Mechanische Kraft, Augenblickswert.
- v = Relativgeschwindigkeit zweier Punkte eines mechanischen Gebildes. $\int_0^t v dt$ ist der relative Weg zwischen 2 Punkten.
- Ⓚ = Kraftquelle. Definition: Eine Kraftquelle wird dargestellt durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die auf 2 Punkte a und b eines mechanischen Gebildes in Richtung ihrer Verbindungsgeraden wirken. $a \leftarrow \rightarrow b$ $a \rightarrow \leftarrow b$
- Ⓛ = Relativgeschwindigkeitsquelle. Definition: Eine Relativgeschwindigkeitsquelle wird dargestellt durch eine vollkommen starre und masselose Vorrichtung, welche die Relativgeschwindigkeit zweier Punkte eines mechanischen Gebildes steuert.

m
 = Masse eines materiellen Punktes.
 Bild 2.

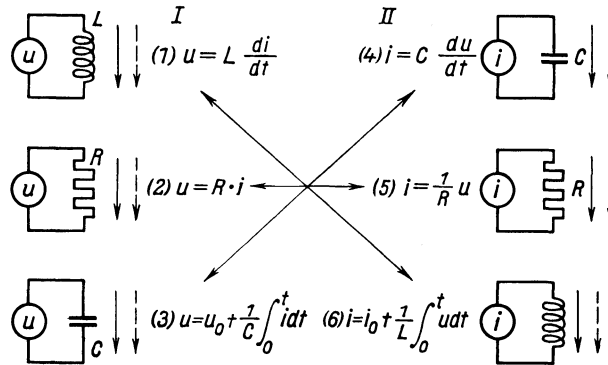
F
 = Nachgiebigkeit einer masselosen Feder mit linearer Charakteristik.
 Bild 3.

W
 = Reibungswiderstand. Definition: Durch die Relativbewegung zweier Punkte eines mechanischen Gebildes entsteht im Reibungswiderstande eine der Richtung der Relativbewegung entgegengesetzte Kraft p . Diese soll der Voraussetzung nach proportional der Relativgeschwindigkeit v sein. Das Verhältnis p/v heißt Reibungswiderstand.

 = relativ zum Beobachter ruhender Punkt.
 Bild 5.

4. Die Gleichungen für die elektrischen und mechanischen Elemente.

Elektrische Elemente:



Mechanische Elemente:

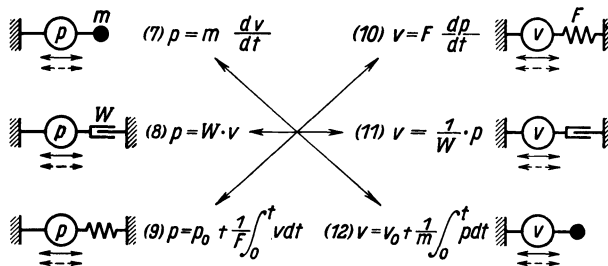


Bild 6.

Die Gl. (1) bis (12) haben folgende Eigenschaften:

Gl. (1) ist inhaltlich gleich Gl. (6)	Gl. (1) hat denselben Aufbau wie Gl. (4)
„ (2) „ „ „ „ (5)	„ (2) „ „ „ „ „ (5)
„ (3) „ „ „ „ (4)	„ (3) „ „ „ „ „ (6)
Gl. (7) ist inhaltlich gleich Gl. (12)	Gl. (7) hat denselben Aufbau wie Gl. (10)
„ (8) „ „ „ „ (11)	„ (8) „ „ „ „ „ (11)
„ (9) „ „ „ „ (10)	„ (9) „ „ „ „ „ (12)

Für die elektrischen Gebilde sind hieraus alle hier angeführten Folgerungen in der erwähnten Arbeit von K. Matthies und F. Strecker gezogen: Es gibt zum Element (1) (das Element 1 ist die neben der Gl. (1) stehende Schaltung) ein „widerstandsreziprokes“ Element (4) usw. Diese Entsprechung beschränkt sich bei elektrischen Gebilden nicht auf die Elemente, sondern läßt sich auf alle Zusammenschaltungen ausdehnen. Der Hintereinanderschaltung von n Elementen entspricht ein

widerstandsreziprokes Gebilde von n Parallelschaltungen und umgekehrt; den Spannungsquellen ohne inneren Widerstand entsprechen Stromquellen mit unendlich großem innerem Widerstand. Bezeichnen A und B reelle Konstanten und die Indizes 1 und 2 die Größen des ursprünglichen und des zu diesem widerstandsreziproken Stromkreises, und setzt man:

$$u_2 = A \cdot B \cdot i_1, \quad (13)$$

$$i_2 = \frac{B}{A} \cdot u_1, \quad (14)$$

$$R_2 = A^2 \cdot \frac{1}{R_1}, \quad (15)$$

$$L_2 = A^2 \cdot C_1, \quad (16)$$

$$C_2 = \frac{1}{A^2} \cdot L_1, \quad (17)$$

so entstehen durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gl. (1), (2), (3) die Gl. (4), (5), (6), z. B.

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = \frac{A}{B} i_2 = A^2 \cdot C_2 \cdot \frac{1}{A \cdot B} \cdot \frac{du_2}{dt}$$

oder

$$i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt},$$

ebenso

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 = \frac{A}{B} \cdot i_2 = A^2 \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{A \cdot B} \cdot u_2$$

oder

$$i_2 = \frac{1}{R_2} \cdot u_2$$

usw.

Die Gl. (7) bis (12) beziehen sich auf die mechanischen Elemente nur der Gruppe 1. Sie haben den gleichen Aufbau und die gleichen gegenseitigen Beziehungen wie die Gl. (1) bis (6).

Es ist bisher üblich, die durch die Gl. (7) bis (9) gegebenen mechanischen Elemente nur durch die entsprechenden elektrischen Elemente der Gl. (1) bis (3) darzustellen. Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen aber, daß es nicht 2 elektrische und 1 mechanisches Gebilde gibt, die einander entsprechen, sondern 2 elektrische und 2 mechanische, also im ganzen 4. Wir bezeichnen sie mit *I*, *II*, *III* und *IV*. Wir werden später folgendes zeigen: Die beiden elektrischen Entsprechungen *I* und *II* sind für die mechanischen Gebilde von Gruppe 1 meist ohne weiteres ausführbar. Nur bei einigen wenigen braucht man ideale Übertrager, d. h. Elemente, die sich nicht genau verwirklichen lassen. Umgekehrt braucht man zu den mechanischen Entsprechungen einfacher linearer elektrischer Netzwerke häufig masselose Hebel, die sich nicht genau verwirklichen lassen. Auch das zu einem gegebenen mechanischen Gebilde der Gruppe 1 widerstandsreziproke mechanische Gebilde kann meist nur mit masselosen Hebeln gebildet werden (Beispiele s. unter 6. bis 8.).

In der folgenden Tafel gehören die 3 Gleichungen jeder Vertikalreihe je zu einem Gebilde, während die 4 Gleichungen einer Horizontalreihe die einander entsprechenden Glieder der 4 einander entsprechenden Gebilde darstellen.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
(1)	(4)	(7)	(10)
(2)	(5)	(8)	(11)
(3)	(6)	(9)	(12)

Daraus folgt, daß es für jedes mechanische Gebilde der Gruppe 1 nicht nur 1, sondern 2 entsprechende elektrische Gebilde gibt. Es gibt also außer der Entsprechung *III—I* noch die Entsprechung *III—II*.

<i>III</i>	<i>I</i>
Kraft	Elektrische Spannung
Geschwindigkeit	Strom
Reibungswiderstand	Ohmscher Widerstand
Masse	Induktivität
Nachgiebigkeit	Kapazität
Mechanischer Scheinwiderstand	Elektrischer Scheinwiderstand

<i>III</i>	<i>II</i>
Kraft	Strom
Geschwindigkeit	Spannung
Reibungswiderstand	Ohmscher Leitwert
Masse	Kapazität
Nachgiebigkeit	Induktivität
Mechanischer Scheinwiderstand	Elektrischer Scheinleitwert

Die Entsprechung *III—II* scheint zunächst gesucht. Wir werden jedoch zeigen, daß sie für mechanische Gebilde zweckmäßiger und außerdem für elektromagnetische und elektrodynamische Gebilde die einzig mögliche Darstellung ist.

5. Kräftekreisbilder.

Ehe wir die Vorschriften zur Umwandlung mechanischer Gebilde der Gruppe 1 in elektrische Gebilde geben, müssen „Kräftekreisbilder“ aus den mechanischen Anordnungen abgeleitet werden. Es ist sonst üblich, Kräfte durch Pfeile zu kennzeichnen, die an einem bestimmten Punkt angreifen. Nun gibt es in Wirklichkeit keine einzelnen Kräfte, sondern nur Zug- oder Druckspannungen entlang von geraden oder krummen Linien. Bei den mechanischen Gebilden der Gruppe 1 bilden alle Linien, entlang denen Zug- oder Drucklinien laufen, geschlossene Kreise, die genau den elektrischen Stromkreisen entsprechen. Gemäß dieser Vorstellung ist unter „Kraft“ bei allen Betrachtungen stets die Zug- oder Druckspannung entlang einer Linie verstanden. Wir führen für die mechanischen Schaltbilder Symbole ein, die dieser Vorstellung entsprechen.

a) Kraftquelle zwischen 2 festen Punkten. Die Kraft wirke z. B. als Druck auf die 2 „festen“ Körper der nebenstehenden Abbildung. Diese 2 „festen“ Körper seien außerdem durch irgendwelche starren Verbindungsstangen verbunden, die dann eine der Druckspannung gleiche Zugspannung aufnehmen. Die Kraft ist also in diesem Falle in sich „kurzgeschlossen“. Das zugehörige Symbol (Kräftekreisbild) ist eine in sich kurzgeschlossene Kraftquelle.

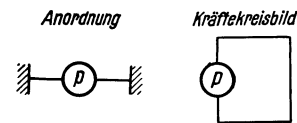


Bild 7. Kraftquelle.

b) Relativgeschwindigkeitsquelle. Der Punkt *a* sei frei und habe relativ z. B. zur Erde irgendeine beliebig veränderliche Geschwindigkeit. Punkt *b* habe gegenüber Punkt *a* die Relativgeschwindigkeit *v*. Es werden daher von keinem der Punkte Kräfte ausgeübt. Das entsprechende Symbol ist eine beiderseits offene (leerlaufende) Relativgeschwindigkeitsquelle.

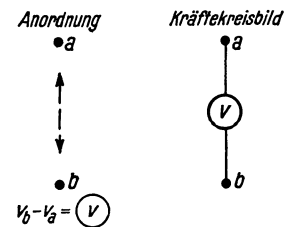


Bild 8. Relativgeschwindigkeitsquelle.

c) Reibungswiderstand. Den Reibungswiderstand betrachten wir in einem geschlossenen Kräftekreis. Eine Kraft wirke z. B. als Druck an einem Ende auf einen

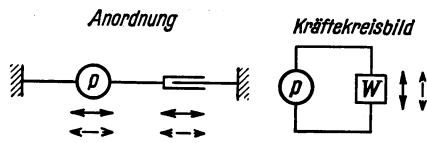


Bild 9. Reibungswiderstand.

festen Körper, am anderen Ende auf einen Reibungswiderstand. Der Kräftekreis sei geschlossen über irgendeine starre Verbindungsstange zwischen den festen Körpern. Diese Anordnung entspricht einer über einen Verbraucher geschlossenen Kraftquelle.

d) Masse. Die Masse betrachten wir ebenfalls in einem geschlossenen Kräftekreis. Wir setzen voraus, daß der Raum, vom Beobachter aus gesehen, schwerefeldfrei sei

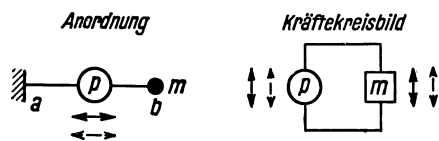


Bild 10. Masse.

und daß der Punkt a relativ zum Beobachter ruhe. Der Punkt b sei frei beweglich und mit der Masse m behaftet. Zwischen a und b wirke die Kraftquelle p . Die von dem beschleunigten Körper m ausgeübte Gegenkraft läßt sich ersetzen durch eine Zug- oder Drucklinie zwischen

dem Punkte b und einem relativ zum Beobachter ruhenden Punkte. Da der Punkt a diese Eigenschaft der Voraussetzung nach erfüllt, so ist der Kräftekreis geschlossen. Das zugehörige Symbol ist eine über einen Verbraucher geschlossene Kraftquelle.

e) Nachgiebigkeit. Die Nachgiebigkeit betrachten wir ebenfalls in einem geschlossenen Kräftekreis. Die Überlegungen sind gleich wie bei c).

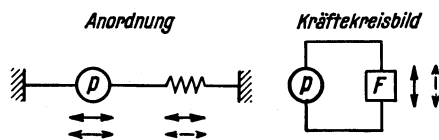


Bild 11. Nachgiebigkeit.

Es zeigt sich also, daß sich die Masse bezüglich ihres Kraftschlusses grundsätzlich anders verhält als alle übrigen Elemente. (Kraftquelle, Relativgeschwindigkeitsquelle, Reibungswiderstand, Nachgiebigkeit.) Diese Sonderstellung der

Masse in mechanischen Gebilden zeigt sich darin, daß die die Hemmung durch Trägheit darstellende, in der Abbildung der Anordnung (Bild 10) nicht gezeichnete Spannungslinie zwischen einem relativ zum Beobachter ruhenden Punkte und dem Punkte b verläuft. Bei allen massefreien Elementen verlaufen die Spannungslinien stets zwischen 2 Punkten des Gebildes, unabhängig von dem Bewegungszustande dieser Punkte zum Beobachter. Darauf folgt, daß in den Kräftekreisbildern die Masse stets zwischen einen beweglichen Punkt des Gebildes und einen relativ zu dem Beobachter ruhenden Punkt geschaltet ist. Es ergeben sich folgende Unterschiede zwischen masselosen und massebehafteten Gebilden: Bei masselosen Gebilden ist das Schwerfeld ohne Einfluß. Bei massebehafteten Gebilden ist das Schwerfeld nicht gleichgültig. Die allen Betrachtungen vorangesetzte Voraussetzung eines schwerefeldfreien Raumes hat daher nur der Massen wegen Bedeutung. Es ist aber auch ein nicht schwerefeldfreier Raum zulässig, wenn das Schwerfeld so beschaffen ist, daß es auf den Bewegungszustand der Massen relativ zum Beobachter keinen Einfluß ausübt. Bei Längsbewegungen entlang von geraden oder gekrümmten Bahnen ist z. B. ein Schwerfeld zulässig, das überall senkrecht zur Bewegungsrichtung verläuft. Bei Querbewegungen dagegen, also z. B. bei transversal schwingenden Saiten, sind Schwerfelder stets von Einfluß. In diesem Falle können sie nur, wenn sie homogen und zeitlich konstant sind, in einfacher Weise bei der Bildung des Ersatzschaltbildes berücksichtigt werden.

Zusammenstellung einfacher mechanischer Schaltungen und ihrer elektrischen Entsprechungen.

Anordnung	Kräftekreisbild III	Elektr. Entsprechung II	Elektr. Entsprechung I
¹⁾			

Bild 12. Mechanische Schaltungen und ihre elektrischen Entsprechungen.

Für die Umwandlung des Kräftekreisbildes *III* in die elektrische Entsprechung *II* gelten die folgenden Gleichungen (18) bis (22), für die Umwandlung in die Entsprechung *I* die folgenden Gleichungen (22) bis (27). Die Bezeichnungen *I*, *II*, *III* und *IV* beziehen sich auf die Gleichungen (1) bis (12) von Bild 6.

$$u_{II} = A_{II} \cdot v. \quad (18) \qquad u_I = B_I \cdot p. \quad (23)$$

$$i_{II} = B_{II} \cdot p. \quad (19) \qquad i_I = A_I \cdot v. \quad (24)$$

$$L_{II} = \frac{A_{II}}{B_{II}} \cdot F. \quad (20) \qquad L_I = \frac{B_I}{A_I} \cdot m. \quad (25)$$

$$R_{II} = \frac{A_{II}}{B_{II}} \cdot \frac{1}{W}. \quad (21) \qquad R_I = \frac{B_I}{A_I} \cdot W. \quad (26)$$

$$C_{II} = \frac{B_{II}}{A_{II}} \cdot m. \quad (22) \qquad C_I = \frac{A_I}{B_I} \cdot F. \quad (27)$$

A_{II} und B_{II} sind reelle Konstanten.

An diesen Beispielen können folgende Regeln für die Schaltungen mechanischer Gebilde abgelesen werden: Die mechanische Anordnung wird in das Kräftekreisbild folgendermaßen umgeschrieben: Man läßt die Verbindung der Elemente \textcircled{p} , \textcircled{v} , F , W , wie sie ist. Die Masse schaltet man immer zwischen den ihr in der mechanischen Anordnung zukommenden Punkt und den ruhenden Punkt des mechanischen Gebildes. Alle ruhenden Punkte sind in dem Kräftekreisbild unmittelbar miteinander zu verbinden.

Es zeigt sich, daß dem so gewonnenen Kräftekreisbild *III* vollkommen die elektrische Schaltung *II* entspricht, während die elek-

¹⁾ Die auf der Querstange sitzenden Punkte sind mechanisch ein und derselbe Punkt; die Querstange stellt nicht einen Hebel dar. Hebel werden durch ein besonderes Zeichen dargestellt (vgl. Bild 19).

trische Schaltung *I* von ihr abweicht. Da die Schaltung *I* zu der Schaltung *II* widerstandsreziprok ist, so kann jene aus dieser entwickelt werden.

6. Umwandlung einfacher mechanischer Anordnungen in Kräftekreisbilder (Gebrauchsanweisung).

Wir geben nun die Gebrauchsanweisung zum Umschreiben der „mechanischen Anordnungen“ in Kräftekreisbilder an Hand einiger Beispiele:

Beispiel 1 der Zusammenstellung (Bild 12), vgl. Bild 13.

Die ruhenden Punkte sind mit *a* bezeichnet. Die beweglichen Punkte haben alle denselben Bewegungszustand und sind deshalb alle mit dem gleichen Buchstaben *b* zu bezeichnen. Für *F* und *W* ist die Lage zwischen *a* und *b* im Kräftekreisbild dieselbe wie bei der wirklichen „Anordnung“. *m* ist zwischen seinen Punkt *b* und den ruhenden Punkt zu schalten, der in diesem Falle ebenfalls *a* ist.

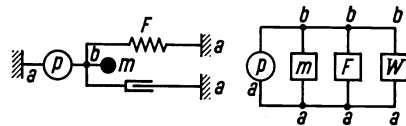


Bild 13. Beispiel.

Beispiel 2 der Zusammenstellung (Bild 12) vgl. Bild 14.

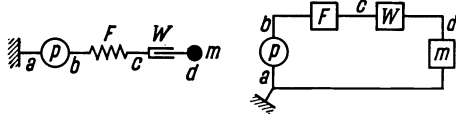


Bild 14. Beispiel.

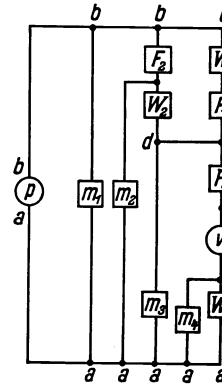
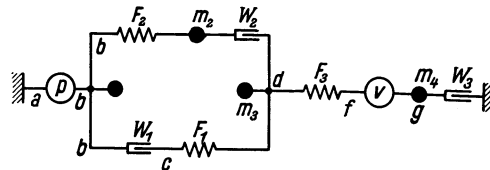


Bild 15. Beispiel.

Zuerst werden alle Elemente außer *m* eingezeichnet. Hierauf wird *m* zwischen seinen Punkt *d* und den ruhenden Punkt, also *a* geschaltet.

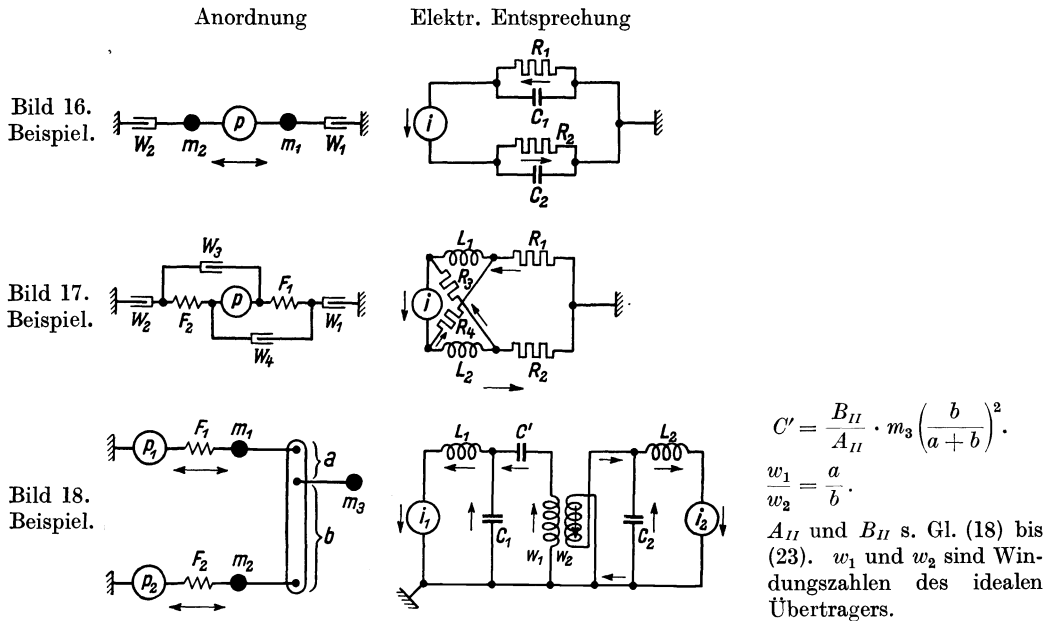
Beispiel mit vielen Elementen (vgl. Bild 15).

Hierbei verfährt man genau in der gleichen Weise wie bei dem vorhergehenden Beispiel. Die einander entsprechenden Punkte der Anordnung und des Kräftekreisbildes sind jeweils mit denselben Buchstaben bezeichnet.

7. Erweiterungen des Verfahrens.

Das Verfahren ist auch auf mechanische Gebilde anwendbar, welche Kreuzschaltungen entsprechen. Außerdem können durch Einfügung idealer, d. h. starrer masseloser Hebel neue Schaltungen geschaffen werden (s. Bild 18). Damit für das Kräftekreisbild *III* nicht neue Symbole eingeführt werden müssen, ist im folgenden nur die „Anordnung“ und die „elektrische Entsprechung *II*“ gezeichnet. Den idealen Hebeln der mechanischen Gebilde entsprechen ideale Übertrager bei den elektrischen Entsprechungen. Unter einem idealen Übertrager ist ein Übertrager

mit unendlicher Induktivität, ohne Ohmschen Widerstand und ohne Streuung verstanden. Für die Umrechnung gelten die Gl. (18) bis (22), falls nichts Besonderes bemerkt ist. Bei Bild 16 sitzt die Kraftquelle zwischen 2 beweglichen Elementen, nicht wie bei den bisherigen Beispielen, zwischen einem ruhenden Punkt und einem beweglichen Element. Bild 17 gibt ein Beispiel einer Kreuzschaltung. Diese beiden



Beispiele können genau wie die früheren behandelt werden. Bild 18 enthält einen masselosen Hebel, dessen Drehpunkt nicht ruht, sondern mit irgendeinem beweglichen Element verbunden ist. Die elektrische Entsprechung II enthält einen idealen Übertrager. Die Berechnung der der Masse entsprechenden Kapazität C' folgt aus den Hebelgesetzen, die übrigen Ersatzgrößen werden wie bisher bestimmt.

8. Widerstandsreziproke mechanische Schaltungen.

Zur Vervollständigung des Bildes zeigen wir, daß das zu einem einfachen mechanischen Gebilde widerstandsreziproke mechanische Gebilde häufig nur mit Hilfe von idealen Hebeln darstellbar ist (vgl. Bild 19).

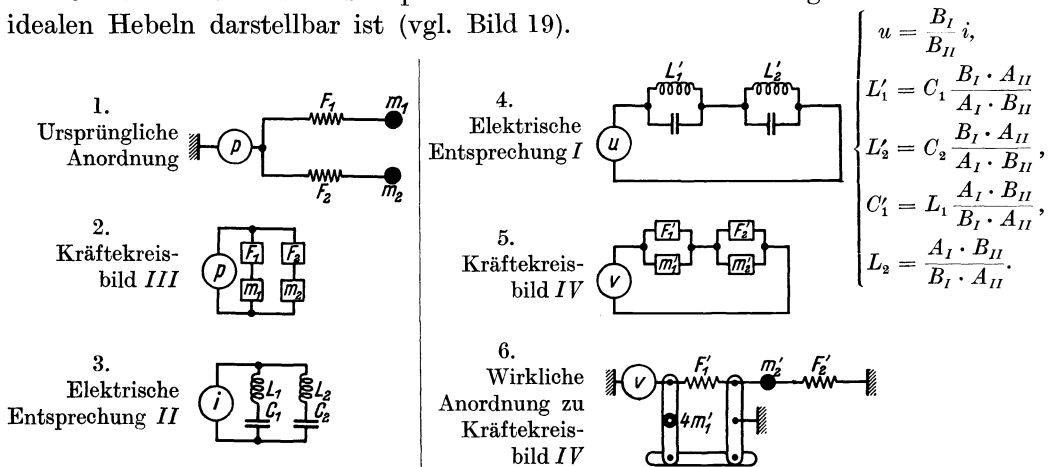


Bild 19. Widerstandsreziproke mechanische Schaltungen [vgl. Gl. (18) bis (27)].
(Zahlen 1. bis 6. geben die Reihenfolge der Verwandlungen an.)

Das Kräftekreisbild *IV* kann nicht durch einfache mechanische Elemente in eine mechanische Anordnung verwandelt werden, weil bei mindestens einer der beiden Massen beide Anschlußpunkte nicht fest sind. Die gezeichnete Anordnung enthält 3 starre masselose Hebel in reibungslosen Gelenken, um die Masse in der Schaltung *IV* zu verwirklichen. Es sind somit die widerstandsreziproken Gebilde von mechanischen Anordnungen der Gruppe 1 nicht allgemein mit den 3 einfachen Grundelementen der mechanischen Anordnungen zu verwirklichen.

B. Die Umwandler.

1. Der elektrodynamische Umwandler¹⁾.

Wir denken uns einen masselosen Leiter von dem Ohmschen Widerstand 0, der in einem konstanten Magnetfelde senkrecht zu den Kraftlinien beweglich ist. Der Leiter werde durch das Zeichen \textcircled{l} dargestellt.

Bezeichnungen:

B = Induktion in dem Magnetfeld.

l = Länge des Leiters, soweit er im Felde liegt.

v = Geschwindigkeit des Leiters in Richtung senkrecht zu den Kraftlinien.

p = Kraft, die auf den Leiter wirkt.

u = Spannung zwischen den Klemmen des Leiters.

i = Strom im Leiter.

Fall a). Der Leiter sei stromdurchflossen; dann wirkt auf ihn eine Kraftquelle p (s. Bild 20).

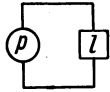


Bild 20.
Kraftquelle.

Es ist daher

$$p = l \cdot B \cdot J.$$

$$\textcircled{i} = \frac{1}{l \cdot B} \cdot \textcircled{p}. \quad (28)$$

Der elektrodynamische Umwandler läßt sich daher als eine Vorrichtung darstellen, die Kraftquellen in Stromquellen oder Stromquellen in Kraftquellen umwandelt.

Fall b). Der Leiter werde von außen mechanisch mit einer gegebenen Geschwindigkeit angetrieben; dann wirkt auf ihn eine Relativgeschwindigkeitsquelle. Diese erzeugt eine Relativgeschwindigkeit zwischen dem Leiter und dem Feldmagnet. (Bei den üblichen Ausführungen steht das Feld still.) Es entsteht eine EMK, die der Relativgeschwindigkeit proportional ist (s. Bild 24).

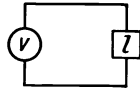


Bild 21.
Relativgeschwindigkeitsquelle.

Die Relativgeschwindigkeitsquelle wird somit in eine Spannungsquelle verwandelt und umgekehrt.

$$\textcircled{u} = l \cdot B \cdot \textcircled{v}. \quad (29)$$

Fall c). Es sind nun entsprechende Beziehungen für m , W und F aufzustellen.

Diese Elemente sind Vorrichtungen, welche selbsttätig Beziehungen zwischen Kraft und Relativgeschwindigkeit herstellen. Wir ersetzen jedes Element durch eine Hintereinanderschaltung einer Kraftquelle und einer Relativgeschwindigkeitsquelle, die sich gegenseitig steuern. Die Steuerung erfolgt nach den Gl. (7) bis (12). Dann ist nach den Gl. (7), (8), (10):

$$m = \frac{p}{dv/dt}, \quad W = \frac{p}{v}, \quad F = \frac{v}{dp/dt}.$$

¹⁾ Sämtliche Gleichungen sind Größengleichungen.

Wir ersetzen also jedes Element m, W, F durch eine Kraftquelle und eine Geschwindigkeitsquelle, die nach den obigen 3 Gleichungen verbunden sind. Dementsprechend ergibt sich nach (28) und (29):

$$m = l^2 B^2 \frac{i}{du/dt},$$

$$W = l^2 B^2 \frac{i}{u},$$

$$F = \frac{A}{l^2 B^2} \cdot \frac{u}{di/dt}.$$

Nach den Gleichungen (4), (2), (1) ist:

$$C = \frac{i}{du/dt},$$

$$R = \frac{u}{i},$$

$$L = \frac{u}{di/dt}.$$

Die Größen C, R, L ersetzen wir in entsprechender Weise durch eine Hintereinanderschaltung einer Spannungsquelle und einer Stromquelle, die sich gegenseitig steuern. Dann ist:

$$C = \frac{m}{l^2 B^2}, \tag{30}$$

$$R = \frac{l^2 B^2}{W}, \tag{31}$$

$$L = l^2 B^2 \cdot F. \tag{32}$$

Die Gl. (28) bis (32) sind die Umwandlungsgleichungen des elektrodynamischen Umwandlers.

Bemerkungen: Der Leiter des elektrodynamischen Umwandlers ist in Wirklichkeit mit Ohmschem Widerstand, Induktivität und Masse behaftet. Diese sind in die zugehörigen Stromkreise bzw. Kraftkreise noch einzufügen. Diese Art der Behandlung ist durch die Ersatzbilder für elektrische Übertrager, Gleichrichter usw. allgemein bekannt.

Der Umwandler arbeitet nach beiden Richtungen nach denselben Gesetzen. Die Ersatzgrößen gelten also sowohl für die Umwandlung elektrischer Energie in mechanische wie für die umgekehrte Umwandlung.

Es können auch für nichtlineare mechanische Gebilde Umwandlungsgesetze entwickelt werden. Dies ist hier nicht weiter verfolgt.

Beispiel.

Der elektrodynamische Lautsprecher mit Druckübersetzung und Trichter.

Wir ersetzen den Trichter durch einen mechanischen Scheinwiderstand η ; dieser ist eine Funktion der Kreisfrequenz ω . Für einen unendlich langen Exponentialtrichter ist z. B.¹⁾

$$\eta = O_2 \cdot \rho \cdot c \cdot e^{j \arcsin \frac{\omega_0}{\omega}}.$$

Mit dieser Beziehung wird an Hand der in den Abschnitten A, 6 und B, 1 erläuterten Beziehungen das vollständige elektrische Ersatzschaltbild des Lautsprechers entwickelt (s. Bild 22).

¹⁾ J. B. Crandall: Theory of Vibrating Systems and Sound. New York: D. Van Nostrand Co.

Bezeichnungen¹⁾:

- ω = Kreisfrequenz.
- ω_0 = Grenz-Kreisfrequenz eines unendlich langen Exponentialtrichters.
- O_1 = Oberfläche des Kolbens.
- O_2 = Austrittsquerschnitt des Druckraumes = Eintrittsquerschnitt des Trichters.
- \ddot{u} = O_1/O_2 .
- h = Höhe des Druckraumes.
- V = Volumen des Druckraumes.
- m = Masse des (starr gedachten) Kolbens samt Leiter.
- F_1 = Nachgiebigkeit der Feder zwischen Kolben und Gehäuse.
- F_2 = Nachgiebigkeit des Luftpolsters des Druckraumes.
- ρ, v = lineares mechanisches Gebilde.
- η = mechanischer Scheinwiderstand der Luft am Eintrittsquerschnitt des Trichters.
- ρ = Dichte der Luft bei 20° = $1,2 \cdot 10^{-3}$ g/cm³.
- c = Schallgeschwindigkeit einer ebenen Welle in freier Luft bei 20° = $3,43 \cdot 10^4$ cm/sec.
- R_1 = Ohmscher Widerstand des Leiters.
- L_1 = Induktivität des Leiters.
- u, i = lineares elektrisches Netzwerk mit Strom- und Spannungsquellen.

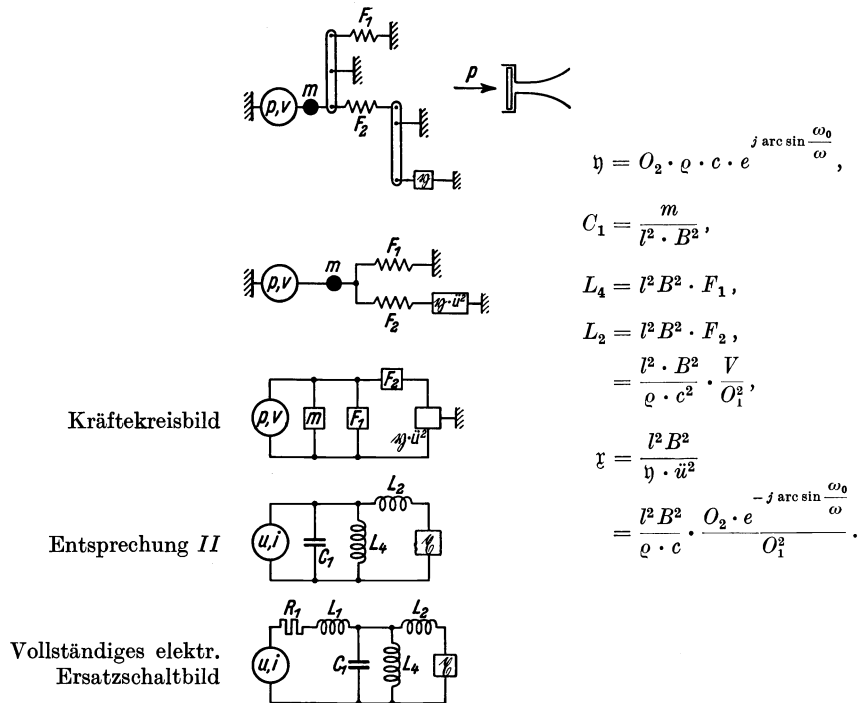


Bild 22. Elektrisches Ersatzschaltbild eines Trichterlautsprechers.

Zahlenrechnung. Der Frequenzverlauf des Scheinwiderstandes und des Scheinwirkungsgrades wird an Hand des Ersatzschaltbildes durch graphische Rechnung bestimmt. Der Scheinwirkungsgrad ist das Verhältnis der akustisch abgestrahlten Wirkleistung zu der dem Lautsprecher zugeführten Scheinleistung. Bei der Aufstellung des Ersatzschaltbildes sind folgende Voraussetzungen gemacht: Der Kolben ist starr und läuft dicht und reibungsfrei in seiner Führung; der Druckraum wird daher durch die Vorderseite des Kolbens dicht abgeschlossen. Der Abschluß auf der Rückseite des Kolbens ist so ausgestaltet, daß im ganzen zu übertragenden Frequenz-

¹⁾ g bezeichnet das Massegramm, 1 g = dyn · sec²/cm.

band keine merklichen Drücke auf die Rückseite des Kolbens ausgeübt werden. Die Luftführung im Druckraum, d. h. zwischen Kolben und Trichtereingang, hat Weglängen von höchstens $\frac{1}{4}$ Wellenlänge und ergibt keine raschen Querschnitts- und Richtungsänderungen für die durchstreichende Luft. Alle Reibungsverluste, insbesondere die Reibungsverluste der Luft im Druckraum und Trichter werden vernachlässigt.

Alle diese Voraussetzungen sind selbst bei den besten heute auf dem Markt befindlichen Trichterlautsprechern nur sehr mangelhaft erfüllt; die Abweichungen zwischen gerechneten und gemessenen Scheinwirkungsgraden sind daher ziemlich groß. — Als Trichter wird als gerader unendlich langer Exponentialtrichter mit sehr tiefer Grenzfrequenz ω_0 vorausgesetzt. Der Wert $e^{j \arcsin \frac{\omega_0}{\omega}}$ darf daher im ganzen zu übertragenden Frequenzbande = 1 gesetzt werden. Der Trichter ist nach dem Gesetz gebaut:

$$O_x = O_2 \cdot e^{\frac{2\omega_0 \cdot x}{c}},$$

$$O_2 = \text{Querschnitt Trichtereingang,}$$

$$O_x = \text{Querschnitt im Abstände } x \text{ vom Eingang, gemessen auf der Trichterachse.}$$

Gegeben:

$O_1 = 20 \text{ cm}^2.$	$\eta = O_2 \cdot c \cdot \rho = 164,8 \text{ g} \cdot \text{sec}^{-1}.$
$O_2 = 4 \text{ cm}^2.$	$R_1 = 10 \cdot 10^{-3} \Omega.$
$\ddot{u} = 5.$	$L_1 = 0,3 \cdot 10^{-6} \Omega.$
$V = 2 \text{ cm}^3.$	$l = 20 \text{ cm.}$
$m = 1 \text{ g.}$	$B = 12000 \text{ Gauß.}$
$F_1 = 0,635 \cdot 10^{-6} \text{ cm/dyn.}$	

Bemerkung: Das Übersetzungsverhältnis ist in diesem Beispiel absichtlich kleiner gewählt, als es zur Erreichung eines großen Frequenzbandes zweckmäßig wäre. Die Änderungen des Scheinwiderstandes treten dadurch deutlicher hervor.

Im technischen Maßsystem (Volt, Amp., Ohm) ist:

$R_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm,}$	$L_4 = 36,5 \cdot 10^{-6} \text{ Henry,}$
$L_1 = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ Henry,}$	$L_2 = 0,202 \cdot 10^{-6} \text{ Henry,}$
$C_1 = 17,3 \cdot 10^{-3} \text{ Farad,}$	$\chi = 13,95 \cdot 10^{-3} \text{ Ohm.}$

Bestimmung des Scheinwirkungsgrades:

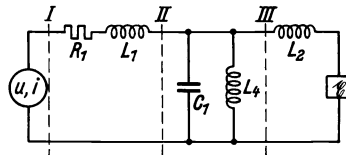


Bild 23. Elektrisches Ersatzschaltbild eines Trichterlautsprechers.

Wir schneiden das Schaltbild (s. Bild 23) an den bezeichneten Stellen *I*, *II*, *III* auf und bestimmen jeweils den Scheinwiderstand \mathfrak{S}_I , \mathfrak{S}_{II} , \mathfrak{S}_{III} des vom Schnittpunkt rechts liegenden Teils. Dann ist für ein reelles χ :

$$\eta = \frac{|\chi|}{|\mathfrak{S}_{III}|} \cdot \frac{|\mathfrak{S}_{II}|}{|\mathfrak{S}_{III}|} \cdot \frac{|\mathfrak{S}_{II}|}{|\mathfrak{S}_I|} = \frac{|\chi| \cdot |\mathfrak{S}_{II}|^2}{|\mathfrak{S}_I| \cdot |\mathfrak{S}_{III}|^2}.$$

Die Größen \mathcal{E}_I und η sind für die Frequenzen 50 bis 15000 Hz (bzw. 10000 Hz) in den Bildern 24 und 25 aufgetragen. Für die Beträge von \mathcal{E}_I , \mathcal{E}_{II} , \mathcal{E}_{III} und für η ergeben sich folgende Werte:

Frequenz	$ \mathcal{E}_I $	$ \mathcal{E}_{II} $	$ \mathcal{E}_{III} $	η
	Ω	Ω	Ω	%
50	$17,25 \cdot 10^{-3}$	$8,95 \cdot 10^{-3}$	$13,95 \cdot 10^{-3}$	32,7
200	$23,40 \cdot 10^{-3}$	$13,65 \cdot 10^{-3}$	$13,95 \cdot 10^{-3}$	57,5
500	$21,15 \cdot 10^{-3}$	$12,1 \cdot 10^{-3}$	$13,96 \cdot 10^{-3}$	49,5
1000	$15,65 \cdot 10^{-3}$	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$14,02 \cdot 10^{-3}$	30,5
2000	$11,50 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$14,20 \cdot 10^{-3}$	12,2
5000	$12,65 \cdot 10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	$15,33 \cdot 10^{-3}$	1,72
10000	$20,5 \cdot 10^{-3}$	$0,98 \cdot 10^{-3}$	$18,80 \cdot 10^{-3}$	0,185

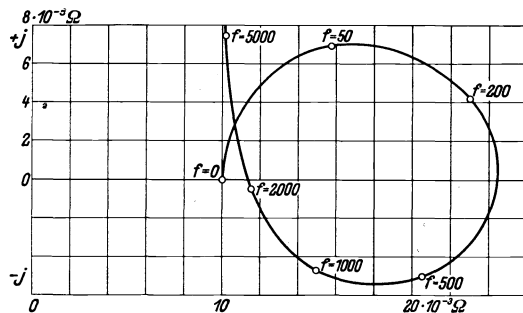


Bild 24.

Scheinwiderstand \mathcal{E}_I eines Trichterlautsprechers.

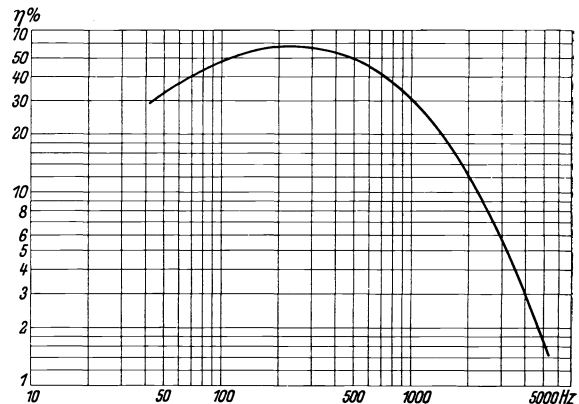


Bild 25.

Scheinwirkungsgrad η eines Trichterlautsprechers.

2. Der elektromagnetische Umwandler.

Wir setzen zunächst folgendes voraus: Der elektromagnetische Umwandler sei frei von Eisenverlusten. Die Kraft sei nur vom Strom, die Spannung nur von der Relativgeschwindigkeit abhängig. Diese Beziehungen seien linear. In diesem Falle sind die Beziehungen dieselben wie bei dem elektrodynamischen Umwandler, nur mit anderen Konstanten. Es sei A eine Konstante, so ist entsprechend den Gl. (28) bis (32):

$$\textcircled{i} = \frac{1}{A} \cdot p, \quad (33)$$

$$\textcircled{u} = \textcircled{A} \cdot v, \quad (34)$$

$$C = \frac{1}{A^2} \cdot m, \quad (35)$$

$$R = \frac{A^2}{W}, \quad (36)$$

$$L = A^2 \cdot F. \quad (37)$$

Erläuterungen: Der elektrische Scheinwiderstand des festgebremsten Umwandlers werde für verschiedene Frequenzen gemessen und hieraus eine Ersatzschaltung gebildet. Diese sieht im allgemeinen so aus:

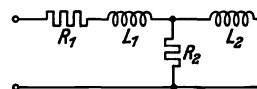


Bild 26. Elektrisches Schaltbild des festgebremsten elektromagnetischen Umwandlers.

R_1 stellt den Ohmschen Widerstand der Wicklung, L_1 eine eisenunabhängige Induktivität, L_2 und R_2 die mit Eisenverlusten behaftete Induktivität dar.

Wir bauen nun dieser Schaltung die mit (u, i) bezeichneten Elemente ein. Mit (u, i) soll ein ganz beliebiges lineares elektrisches Netzwerk bezeichnet sein, das Ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten, Spannungs- und Stromquellen enthalten kann.

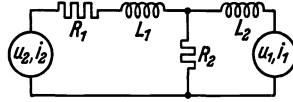


Bild 27. Allgemeines elektrisches Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Umwandlers.

Mit (u_1, i_1) sollen in diesem Falle die von der Bewegung herrührenden Größen, mit (u_2, i_2) die elektrisch zugeführten Größen dargestellt sein. In entsprechender Weise fügen wir in das Kräftekreisbild mechanische Gebilde (p, v) ein, die von der elektrischen Seite stammen (s. Beispiele).

a) Der elektromagnetische Tonabnehmer (Bild 28 bis 32).

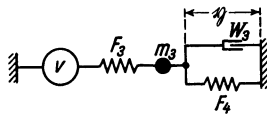


Bild 28. Anordnung.

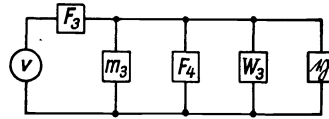


Bild 29. Kräftekreisbild.

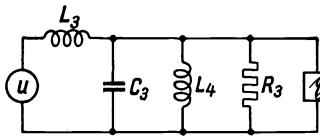


Bild 30. Elektr. Entsprechung II zu obigem Kräftekreisbild.

$$u = A \cdot v \quad C_3 = \frac{1}{A^2} \cdot m_3$$

$$L_3 = A^2 \cdot F_3 \quad L_4 = A^2 \cdot F_4 \quad R_3 = \frac{A^2}{W_3}$$

$\zeta = \text{Elektrische Belastung}$

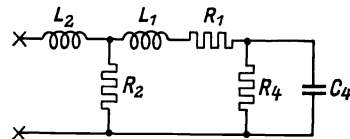


Bild 31. Elektrische Belastung ζ .

Setzt man diese Teile zusammen, so ergibt sich das elektrische Gesamtschaltbild:

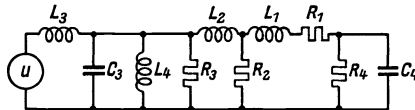


Bild 32. Elektrisches Ersatzschaltbild eines elektromagnetischen Tonabnehmers.

Ersatzgröße	Herkunft
u	Nadelgeschwindigkeit
L_3	Nachgiebigkeit der Nadelspitze
C_3	Ankermasse
L_4	Nachgiebigkeit der Einspannung des Ankers
R_3	Reibungswiderstand
L_2	Induktivität mit Eisenverlusten
R_2	
L_1	Eisenfreie Induktivität
R_1	Ohmscher Widerstand der Wicklung
R_4	Elektrische Belastung durch Gitterkapazität und Gitterableitwiderstand
C_4	

b) Das elektromagnetische Telephon (s. Bild 33). Es bleibt alles ebenso wie beim Tonabnehmer, nur sitzt an Stelle der elektrischen Belastung R_4 und C_4 eine Spannungsquelle u , an Stelle von u und L_3 der Scheinwiderstand ζ . Dabei ist:

$$\zeta = \frac{A^2}{\eta},$$

η ist der mechanische Belastungswiderstand, der durch die Luft gebildet wird.

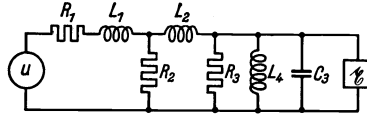


Bild 33. Elektrisches Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Telephons.

3. Der elektrostatische Umwandler.

Der elektrostatische Umwandler verwandelt Kraft in Spannung, Relativgeschwindigkeit in Strom. Dadurch unterscheidet er sich grundsätzlich vom elektrodynamischen und elektromagnetischen.

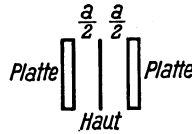


Bild 34. Anordnung bei einem elektrostatischen Umwandler.

Die Anordnung (Bild 34) ist folgende: Zwischen 2 leitenden Platten befindet sich eine Metallhaut, an der die äußeren Kräfte angreifen. Die Haut soll sich nur senkrecht zu den Platten bewegen können. Zwischen den Platten liegt eine Gleichspannung U_g . Im Nullzustande soll das Potential der Metallhaut die Spannung zwischen den Platten genau halbieren. Das Potential u der Metallhaut wird von diesem Nullzustande aus gerechnet. Wir berechnen nun die Kapazität der Haut gegen die Platten und die Kraft, die auf die Haut beim Anlegen eines Potentials u ausgeübt wird, an Hand folgender Schaltung (Bild 35).

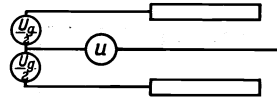


Bild 35. Schaltbild eines elektrostatischen Umwandlers.

Bezeichnungen:

- p = Kraft.
- U_g = Gleichspannung zwischen den Platten.
- u = Potential der Metallhaut.
- O = Fläche der Haut.
- a = Abstand der Platten.
- s = Weg der Haut.
- ϵ = Dielektrizitätskonstante des Mediums¹⁾.
- C = Kapazität der Haut gegen die beiden Platten zusammen.

Bei Vernachlässigung der Randstörungen ist für die Haut zwischen 2 Platten

$$C = \epsilon \cdot O \left(\frac{1}{\frac{a}{2} + s} + \frac{1}{\frac{a}{2} - s} \right)$$

¹⁾ Bei den Größengleichungen dieses Abschnittes sind ϵ und μ für den leeren Raum nicht = 1, sondern es ist $\epsilon_0 = 0,886 \cdot 10^{-13}$ Farad/cm, $\mu_0 = 1,129 \cdot 10^{13}$ Henry/cm.

oder bei Vernachlässigung von $(2s/a)^2$ gegen 1:

$$C = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot O}{a}. \quad (38)$$

C ist daher eine Konstante bei Vernachlässigung der Glieder mit $(2s/a)^2$ und aller höheren Glieder gegenüber 1.

Zwischen der auf die Haut wirkenden Kraft p und der Spannung u besteht folgende Beziehung

$$p = \frac{\varepsilon \cdot O}{2} \left[\left(\frac{\frac{U_g}{2} + u}{\frac{a}{2} - s} \right)^2 - \left(\frac{\frac{U_g}{2} - u}{\frac{a}{2} + s} \right)^2 \right]$$

oder wenn wir wieder $(2s/a)^2$ gegen 1 vernachlässigen:

$$p = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot O \cdot U_g}{a^2} \cdot u.$$

Es ist also p gleich einer Konstante mal u , wenn $(2s/a)^2$ und alle höheren Glieder gegen 1 vernachlässigt werden. Wir setzen

$$\frac{4 \cdot \varepsilon \cdot O \cdot U_g}{a^2} = \frac{1}{A},$$

dann ist

$$\textcircled{u} = A \cdot \textcircled{p}. \quad (39)$$

Um die entsprechende Beziehung zu finden zwischen i und v ersetzen wir die Spannungsquelle \textcircled{u} durch einen widerstandslosen Strommesser. Bei Bewegung der Haut fließt Strom. Bezeichnet C_1 und C_2 die Kapazitäten der Platten 1 und 2 gegen die Haut, Q_1 und Q_2 die Elektrizitätsmengen dieser Kapazitäten, so ist für $u = 0$.

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \frac{U_g}{2}, \\ Q &= C_2 \frac{U_g}{2}, \\ i &= \frac{d(Q_1 - Q_2)}{dt} = \frac{U_g}{2} \cdot \frac{d(C_1 - C_2)}{dt}. \end{aligned}$$

Nun ist entsprechend den Gleichungen für C :

$$C_1 - C_2 = \varepsilon \cdot O \left(\frac{1}{\frac{a}{2} - s} - \frac{1}{\frac{a}{2} + s} \right),$$

daher

$$i = \frac{\varepsilon \cdot O \cdot U_g}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{a}{2} - s\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + s\right)^2} \right) \frac{ds}{dt}$$

oder bei Vernachlässigung von $(2s/a)^2$ gegen 1

$$i = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot O \cdot U_g}{a^2} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Setzt man wieder $\frac{1}{A} = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot O \cdot U_g}{a^2}$,
so ist

$$\textcircled{i} = \frac{1}{A} \cdot \textcircled{v}^* \quad (40)$$

*) Gl. (40) auch unmittelbar aus (39) durch Energiegleichung.

Durch den elektrostatischen Umwandler wird somit das Kräftekreisbild nicht in das ihm äußerlich gleiche elektrische Schaltbild II, sondern in das widerstandsreziproke Schaltbild I umgewandelt.

Die Gleichungen sind hier für eine symmetrische Anordnung mit 2 Platten entwickelt worden. Für ein System mit nur 1 Haut und 1 Platte ändern sich die Gl. (39) und (40) nicht. (Es wird dabei angenommen, daß die Ruhekräfte kompensiert werden.) Es muß aber in diesem Falle nicht nur $(2s/a)^2$ gegen 1, sondern $2s/a$ gegen 1 vernachlässigbar sein.

Beispiele.

a) Das elektrostatische Mikrophon (Bild 34 bis 38).

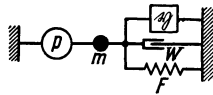


Bild 36. Mechanische Anordnung.

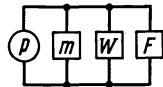


Bild 37. Kräftekreisbild.

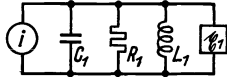


Bild 38.

Elektrische Entsprechung II von Bild 37.

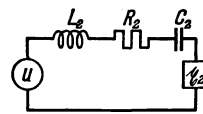


Bild 39. Elektrische Entsprechung I von Bild 37.

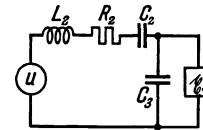


Bild 40. Ersatzschaltbild eines elektrostatischen Mikrophons.

$$u = A \cdot p,$$

$$L_2 = A^2 \cdot m,$$

$$R_2 = A^2 \cdot W,$$

$$C_2 = \frac{F}{A^2},$$

$$C_3 = \frac{a}{A \cdot U_0},$$

$$A = \frac{a^2}{40 \cdot U_0},$$

$$\xi_3 = \text{Belastungs-} \\ \text{widerstand.}$$

b) Der elektrostatische Lautsprecher. Das elektrische Gesamtschaltbild kann aus dem des elektrostatischen Mikrophons auf folgende Weise entwickelt werden: L_2 ,

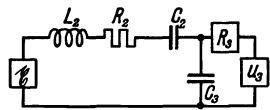


Bild 41. Elektrisches Ersatzschaltbild des elektrostatischen Lautsprechers.

R_2, C_2, C_3 bleiben. An Stelle von ξ_3 tritt ein Generator mit der Spannung u_3 und dem inneren Widerstande \Re_3 . An Stelle von \textcircled{u} tritt der Belastungswiderstand $\xi = A^2 \cdot \eta$, wobei η den akustischen Scheinwiderstand an der schallabstrahlenden Haut bezeichnet. Damit ergibt sich folgendes Schaltbild (Bild 41).

Schlußbemerkung.

Bei Lautsprechern tritt die Frage auf, ob sich auch räumliche lineare Gebilde durch elektrische Ersatzschaltbilder darstellen lassen. Hierzu ist folgendes zu sagen: Ein räumliches Gebilde, wie z. B. ein Schallfeld, läßt sich allgemein weder durch elektrische Kettenleiter noch durch räumliche elektrische Gebilde nachbilden. Dagegen lassen sich bestimmte räumliche Gebilde durch elektrische Kettenleiter darstellen. Die Bedingungen hierfür sind folgende: Die Vorgänge im Raume müssen wirbelfrei sein, und es müssen Niveauflächen (Flächen gleicher Zustände) vorhanden sein. Ein Lautsprecher mit starrer Kolbenmembran ist darstellbar, da der akustische Scheinwiderstand der abstrahlenden Fläche berechenbar ist. Sein Schallfeld ist nicht auf diese Weise darstellbar. Das Schallfeld einer atmenden Kugel ist darstellbar. Vorgänge in Röhren mit veränderlichem Querschnitt (Trichter) sind darstellbar, wenn sich (mit genügender Annäherung) Niveauflächen angeben lassen und die

Wirbelverluste vernachlässigbar sind. Trichter endlicher Länge sind mit diesen Einschränkungen ebenfalls darstellbar, da es möglich ist, den akustischen Scheinwiderstand am Trichterausgang (in Richtung auf den freien Raum) zu bestimmen.

Zusammenfassung.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Entsprechungen zwischen linearen elektrischen und linearen mechanischen Gebilden behandelt. Es wird gezeigt, daß eine Entsprechung nur möglich ist, wenn nicht nur die Gleichungen für die einzelnen Elemente, sondern auch die Arten der Zusammenschaltungen übereinstimmen. Hieraus ergibt sich, daß sich nur für mechanische Gebilde von ganz bestimmten Eigenschaften elektrische Entsprechungen finden lassen und daß es für ein derartiges mechanisches Gebilde nicht nur ein entsprechendes elektrisches Gebilde gibt, sondern zwei elektrische und ein mechanisches Gebilde.

Im zweiten Teil werden die elektromechanischen Umwandler behandelt. Es wird gezeigt, daß ein linearer elektrodynamischer Umwandler und ein linearer elektromagnetischer Umwandler die mechanischen Größen eines elektromechanischen Gebildes in die elektrischen Größen des einen der beiden entsprechenden elektrischen Gebilde verwandelt, während ein elektrostatischer Umwandler sie in die elektrischen Größen des anderen der beiden entsprechenden elektrischen Gebilde verwandelt. Damit sind die in der Einleitung erwähnten scheinbaren Widersprüche geklärt.

Die Verfahren zur Verwandlung der elektromechanischen Gebilde in rein elektrische Gebilde werden entwickelt und an Beispielen erläutert.

Literatur.

- K. Matthies und F. Strecker: Arch. Elektrotechn. Bd. 14 I (1924).
R. L. Wegel: J. A. I. E. E. Bd. 40 (1921) H. 10, S. 791.
W. Hahnemann und H. Hecht: Physik. Z. Bd. 17 (1916) S. 601; Bd. 20 (1916) S. 104; Bd. 21 (1920) S. 264.
H. Riegger: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. III, 2. (1924).
C. A. Nickle: A. I. E. E. Bd. 44 (1925) H. 12, S. 1277.
H. Lichte: E. N. T. Bd. 3 (1926) S. 183.
C. R. Hanna: Trans. Amer. Inst. Electr. Eng. Bd. 47 (1928) H. 2, S. 607.
I. B. Crandall: Theory of Vibrating Systems and Sound. New York: D. van Nostrand Co.
W. McLachlan: Philos. Mag. Bd. 7 (1929) S. 1021.
S. Ballantine: Proc. Inst. Radio Eng. Bd. 17 (1929) S. 929.
K. Küpfmüller: Handbuch der Experimentalphysik, herausg. von W. Wien und F. Harms, Bd. 11, T. 3: Schwachstromtechnik. Leipzig 1931.
Ph. Le Corbeiller: Ann. Postes Télégr. 1929 S. 1.
F. Strecker und R. Feldtkeller: E. N. T. Bd. 6 (1929) H. 3, S. 93.
E. L. Norton (bei der International Standard Electr. Corporation in New York): DRP. 498990, Kl. 21a², Gr. 36. (Ausgegeben 4. Juni 1930.)
R. Franke: Eine vergleichende Schalt- und Getriebelehre. (Vortrag vom 11. November 1929 in der Techn. Hochschule Charlottenburg.) München und Berlin: R. Oldenbourg 1930.
-

Thermische Wicklungszeitkonstanten von elektrischen Maschinen unter Berücksichtigung der Temperaturgefälle.

Von Robert Stix.

Mit 17 Bildern.

Mitteilung aus dem Berechnungsbüro der Österreichischen Siemens-Schuckert-Werke zu Wien.

Eingegangen am 19. Juni 1931, mit Ergänzungen am 17. Januar 1932.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen.

- A. Die Wärmeabgabe erfolgt nur an den Seitenflächen des betrachteten Körpers.
- B. Die Erwärmung von Spulen mit rechteckigem Querschnitt.
- C. Temperaturverteilung in Stäben, die Wärmeabgabe erfolgt längs des ganzen Stabes und an den Stabenden.
- D. Temperaturverlauf bei teilweise in Eisen eingebetteten Wicklungsspulen.
- E. Temperaturverlauf bei teilweise in Eisen eingebetteten Wicklungsspulen mit Kühlfahnen an den Enden.
- F. Temperaturverlauf bei in Eisen eingebetteten Wicklungsspulen unter Berücksichtigung des Wärmeaustausches zwischen Wicklung und Eisen.
- G. Wärmeaustausch zwischen Wicklung und Eisen bei unterteilten Blechpaketen.
- H. Rechnungsbeispiel.

Zusammenfassung.

Einleitung.

Die rechnerische Vorausbestimmung der Erwärmung der einzelnen Teile einer elektrischen Maschine im stationären Zustand ist mit genügender Genauigkeit durchführbar, wenn die erforderlichen Angaben über die Wärmeleitfähigkeiten der einzelnen Konstruktionsteile und die Wärmeabgabe an deren Oberflächen zur Verfügung stehen. Das Problem ist in dieser Form auch bereits von verschiedenen Seiten behandelt worden¹⁾. In vielen Fällen ist jedoch auch die Temperaturverteilung von Interesse, die sich für einen bestimmten Zeitpunkt vor Erreichung des Beharrungszustandes einstellt, wie dies beispielsweise für die Maschinen zutrifft, die für kurzzeitige Belastung oder Aussetzleistung von vornherein zu entwerfen sind. Auch für die Beurteilung von Erwärmungsmessungen kann es von Wichtigkeit sein, den Erwärmungsverlauf nach dem Abstellen bei in der Regel stark geänderten Abkühlungsverhältnissen abschätzen zu können, da dieselben ja meistens erst kurze Zeit nach dem Abstellen durchgeführt werden und die Messung während des Laufes in vielen Fällen

¹⁾ R. Richter: Elektrische Maschinen Bd. 1, S. 312. Berlin: Julius Springer 1924; und die dort angegebene Literatur. — C. Trettin: Die Berechnung und Messung der Wärmeströmungen in Gleichstrommaschinen. Wiss. Veröff. Siemens-Konz. IX, 2 (1930) S. 1.

praktisch undurchführbar ist. Rechnet man dann in der üblichen Weise die thermische Zeitkonstante aus der Wärmekapazität, der Wärmeabgabezahl der Oberfläche und der Größe der Oberfläche des betrachteten Körpers, so erhält man nur dann einigermaßen richtige Ergebnisse, wenn derselbe homogenen Aufbau aufweist und die Temperaturunterschiede in seinem Innern gegenüber seiner Gesamterwärmung zu vernachlässigen sind. Sind aber erfahrungsgemäß bei einem Konstruktionsteil größere Temperaturdifferenzen zwischen seinen wärmeren und kälteren Teilen zu erwarten, so entsteht die Frage, ob die übliche Ermittlung der thermischen Zeitkonstante noch einigermaßen zutreffend ist, bzw. ob es überhaupt noch zulässig ist, mit einer einheitlichen Zeitkonstante für den Erwärmungs- oder Abkühlungsvorgang zu rechnen.

In der Mehrzahl der praktischen Fälle treten die Temperaturunterschiede nur in einer bevorzugten Richtung auf, während die Wärmegefälle in den dazu senkrechten Ebenen vergleichsweise geringe Beträge erreichen, so daß man mit Mittelwerten über den Wicklungsquerschnitt rechnen kann. In Übereinstimmung damit wird in den nachstehend behandelten Beispielen der übersichtlicheren rechnerischen Behandlung wegen der Temperaturverlauf nur in der erwähnten Hauptrichtung untersucht; die Erwärmungsunterschiede in dazu senkrechten Ebenen jedoch vernachlässigt. Daß die ungleichmäßige Erwärmung beispielsweise bei Ankerwicklungen innerhalb der Leiterquerschnitte einer Nut gegenüber den Temperaturgefällen in axialer Richtung keine große Rolle spielt, ist ohne weiteres einleuchtend, aber auch in Körpern größerer Ausdehnung, wie z. B. in den Blechpaketen elektrischer Maschinen sind die Temperaturgefälle in radialer Richtung im allgemeinen nicht ausschlaggebend, wie von anderer Seite bereits untersucht wurde¹⁾. Eine Ausnahme hiervon bilden unter Umständen die Magnetspulen von Gleichstrommaschinen, da bei denselben der Wärmetransport zur Oberfläche, rechteckiger Spulenquerschnitt vorausgesetzt, in beiden aufeinander senkrechten Richtungen von gleicher Größenordnung sein kann. Das gleiche gilt auch für Transformatorwicklungen. Aus diesem Grunde wurde für rechteckige Spulenquerschnitte der Erwärmungsverlauf auch bei Berücksichtigung die Wärmeströmung in zwei aufeinander senkrechten Richtungen behandelt.

Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen.

- i_s = Stromdichte in A/cm².
- ϑ = Übertemperatur in °C.
- T = thermische Zeitkonstante in sec.
- λ = elektrische Leitfähigkeit des Kupfers in Siemens/cm.
- λ_0 = elektrische Leitfähigkeit des Kupfers bei 0°C.
- ε = Widerstandskoeffizient des Kupfers °C⁻¹.
- k = Wärmeleitfähigkeit, Watt/°C · cm.
- s = spez. Gewicht, g/cm³.
- c = spez. Wärme, Joule/°C, g.
- h_0 = Wärmeabgabezahl der Endfläche, Watt/°C cm².
- h = Wärmeabgabezahl der Endfläche, auf den Leiterquerschnitt bezogen, Watt/°C cm².
- p = Wärmeabgabezahl der Seitenflächen, Watt/°C cm³.
- 2a, 2b = Seitenabmessungen der Magnetspule mit rechteckigem Querschnitt, cm.
 - l = Länge des Wärmeleiters, von seiner wärmsten Stelle gerechnet, cm.
 - m = halbe Blechpaketlänge einschließlich Luftschlitze, cm.
 - n = halbe Länge einer Stirnverbindung, cm.
 - V = Verluste in Watt/cm³.
 - V_0 = Verluste in Watt/cm³ bei der Ausgangstemperatur $\vartheta = 0$.
 - r = Wärmeübertrittszahl zwischen Wicklung und Blechpaket in Watt/cm³, °C.
 - σ = Füllfaktor bei Wicklungsspulen.

¹⁾ C. Trettin: l. c. S. 15.

A. Die Wärmeabgabe erfolgt nur an den Seitenflächen des betrachteten Körpers.

Ein Beispiel hierfür sind die Magnetspulen von Gleichstrommaschinen, wenn das Wärmegefälle in axialer Richtung nicht von Bedeutung ist und die Wärmeabgabe praktisch nur an der äußeren Mantelfläche erfolgt. Das Wärmegefälle innerhalb der Spule bildet sich dann in der Hauptsache senkrecht zu derselben aus, also mit Bezug auf Bild 1 in der Richtung von x . Bei der in Bild 1 dargestellten Spule ist außerdem noch angenommen, daß an der Innenfläche keine Wärme abgegeben wird, daß sich also für $x = 0$ das Temperaturmaximum einstellt. Als Wärmequelle innerhalb der Spule kommen nur die Ohmschen Verluste in Betracht, mit den eingangs gewählten Bezeichnungen betragen dieselben in Watt/cm³:

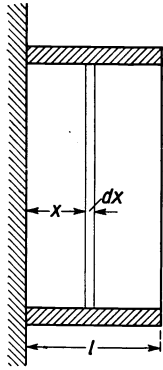


Bild 1.
Magnetspule.

$$V = \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \sigma (1 + \varepsilon \vartheta). \quad (1)$$

Aus der Wärmebilanz für jedes Volumenelement ergibt sich bekanntlich¹⁾ die Differentialgleichung für den räumlichen und zeitlichen Temperaturverlauf:

$$V + k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (2)$$

Entsprechend dem Aufbau der Spule aus Wicklungs- und Isolationsmaterial sind hierbei bei zahlenmäßigen Auswertungen für k und $s \cdot c$ die der tatsächlichen Zusammensetzung entsprechenden Mittelwerte einzuführen. Berücksichtigt man, daß die Verluste nach Gl. (1) von der Temperatur abhängig sind, so erhält die Ausgangsgleichung (2) die Form:

$$\sigma \cdot \frac{i_s^2}{\lambda_0} + \sigma \cdot \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \vartheta + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \quad (3)$$

Um zur Lösung dieser ganz allgemeinen Beziehung zu gelangen, sei zunächst willkürlich die Erwärmung ϑ in 2 Anteile zerlegt, nämlich

$$\vartheta = \vartheta' + \vartheta''. \quad (4)$$

Wählt man nun diese beiden Teilerwärmungen so, daß ϑ' der Beziehung genügt:

$$\sigma \cdot \frac{i_s^2}{\lambda_0} + \sigma \cdot \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \vartheta' + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

während ϑ'' durch die Gleichung gegeben ist:

$$\sigma \cdot \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \vartheta'' + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta''}{\partial t}, \quad (6)$$

so stellt offenbar ϑ' die Erwärmung im Beharrungszustand dar, welcher der vorhandenen Strombelastung der Spule entspricht; während ϑ'' den jeweiligen Unterschied zwischen der tatsächlichen Erwärmung im Zeitpunkt t und der zugehörigen Enderwärmung im stationären Zustand angibt. Handelt es sich beispielsweise um eine Wicklung, welche im Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, so ist für diesen Moment $\vartheta = 0$ und $\vartheta'' = -\vartheta'$ zu setzen, ϑ'' klingt langsam ab, so daß im stationären Zustand dann tatsächlich $\vartheta = \vartheta'$ wird. Bei einem Abkühlungsvorgang von der Anfangstemperatur ϑ_0 auf den Endwert $\vartheta = 0$ ist sinngemäß $\vartheta'' = \vartheta_0$ zu setzen, die Abkühlung

¹⁾ Bezüglich der Ableitung von Gl. (2) siehe z. B. H. Gröber: Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges, S. 9ff. Berlin: Julius Springer 1921.

selber erfolgt, wie weiter unten gezeigt wird, nach den gleichen Gesetzen wie der Erwärmungsvorgang.

Für die stationäre Temperaturverteilung erhält man aus Gl. (5) die Lösung

$$\vartheta' = A' \cdot \cos \alpha x + A'' \sin \alpha x - \frac{1}{\varepsilon}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \sigma}{k}}, \quad (7)$$

in welcher die beiden Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen zu ermitteln sind. Oben wurde bereits die Annahme getroffen, daß in der Innenfläche der Spule das Temperaturmaximum herrschen solle. Daraus errechnet sich $A'' = 0$. Die Erwärmung der Spule an der äußeren Oberfläche ergibt sich aus der Bedingung, daß die ganzen durch innere Wärmeleitung zur Oberfläche gebrachten Verluste durch Strahlung und Konvektion an das umgebende Kühlmittel weitergeleitet werden müssen. Erfahrungsgemäß kann mit guter Annäherung die Wärmeabgabe an der Oberfläche proportional der Oberflächentemperatur gesetzt werden, man gewinnt daraus eine Beziehung für die Größe des Temperaturgefälles in der Spule unmittelbar an der Oberfläche:

$$k \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} \Big|_{x=l} + h \cdot \vartheta' \Big|_{x=l} = 0. \quad (8)$$

Mit dieser neuen Bedingungsgleichung errechnet sich:

$$A' = \frac{h}{\varepsilon [h \cdot \cos \alpha l - k \alpha \sin \alpha l]} \quad (9)$$

und damit ϑ' :

$$\vartheta' = \frac{h [\cos \alpha x - \cos \alpha l] + k \alpha \sin \alpha l}{\varepsilon [h \cos \alpha l - k \alpha \sin \alpha l]}. \quad (10)$$

Die mittlere Erwärmung der ganzen Spule, die durch Widerstandsmessung bestimmt werden kann, ergibt sich dann aus (10) zu:

$$\vartheta'_m = \frac{h \left[\frac{1}{\alpha l} \cdot \sin \alpha l - \cos \alpha l \right] + k \alpha \sin \alpha l}{\varepsilon [h \cos \alpha l - k \alpha \sin \alpha l]}. \quad (11)$$

Vernachlässigt man den Einfluß der Erwärmung auf die Verluste, was zulässig ist, wenn die Erwärmungsunterschiede innerhalb der Spule nicht allzu groß sind, so kann man auch einfacher direkt von Gl. (2) ausgehen. Für V ist dann der der voraussichtlichen Erwärmung entsprechende Wert einzusetzen. Man erhält dann unter Voraussetzung der gleichen Grenzbedingungen wie vorher an Stelle von Gl. (10) bzw. Gl. (11) die einfacheren Beziehungen:

$$\vartheta' = \frac{V}{2k} \left[l^2 - x^2 + k \cdot \frac{2l}{h} \right] \quad (12)$$

und

$$\vartheta'_m = \frac{V}{2k} \left[\frac{2}{3} l^2 + k \cdot \frac{2l}{h} \right]. \quad (13)$$

Bei Wicklungsteilen der beschriebenen Art, bei denen die Kühlungsverhältnisse an der äußeren und inneren Mantelfläche gleichartig sind, stellt sich das Erwärmungsmaximum in der Mitte ein. Verlegt man dorthin den Bezugspunkt O mit $x = 0$, so gelten die angeschriebenen Gleichungen auch für den Fall, nur bedeutet l dann die halbe Spulenstärke. Sind die Kühlungsverhältnisse der beiden Mantelflächen voneinander verschieden, dann muß die Ermittlung der beiden Integrationskonstanten A' und A'' unter Zuhilfenahme der den beiden Gl. (8) entsprechenden Oberflächenbedingungen erfolgen.

Nachdem solcherart die stationäre Enderwärmung ermittelt ist, ist der zeitliche Verlauf der Erwärmung von Interesse, der durch den Erwärmungsteil ϑ'' gegeben ist. Man erhält¹⁾ für denselben als Lösung von Gl. (6)

$$\vartheta'' = \sum_{\beta=\alpha}^{\beta=\infty} e^{\frac{k(\alpha^2-\beta^2)}{s \cdot c} \cdot t} [B' \sin \beta x + B'' \cos \beta x]. \quad (14)$$

In dieser Beziehung bedeuten B' und B'' wiederum Integrationskonstanten, β kann innerhalb der angegebenen Grenzen zunächst jeden beliebigen Wert annehmen. Um den zeitlichen Verlauf der Gesamterwärmung, etwa bei einem Einschaltvorgang, zu bestimmen, muß der Temperaturverlauf im stationären Zustand entsprechend (10) in passender Weise in einer Reihe von Sinuslinien zerlegt werden, deren Nulllinien mit der Abszissenachse zusammenfallen; aus dem zu jeder Sinuslinie gehörigen Wert von β errechnet sich dann deren Zeitkonstante zu

$$T = \frac{s \cdot c}{k(\beta^2 - \alpha^2)} = \frac{s \cdot c}{k \beta^2 - \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot s \cdot \sigma}. \quad (15)$$

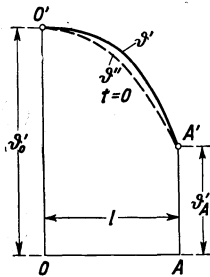


Bild 2. Übertemperaturverlauf in der Spule nach Bild 1.

Meistens wird nach Bild 2 die Ersetzung der stationären Temperaturkurve ϑ' durch eine cos-Linie durchführbar sein, ohne daß störende Abweichungen auftreten, wenn letztere wie gezeichnet, so gelegt wird, daß die Punkte O' und A' für beide Kurven zusammenfallen. Die beiden Erwärmungen ϑ_0' und ϑ_A' sind nach Gl. (10) oder (12) bereits bestimmbar. Man erhält für die Ersatzkurve

$$\vartheta'' = \vartheta_0' \cdot \cos \beta x \quad (16)$$

und folglich

$$\cos \beta l = \frac{\vartheta_A'}{\vartheta_0'} = \frac{k \alpha \sin \alpha l}{h(1 - \cos \alpha l) + k \alpha \sin \alpha l} \quad (17)$$

und aus β die gesuchte thermische Zeitkonstante T .

Setzt man zur Vereinfachung in Gl. (17) $\cos \beta l = 1 - \frac{\beta^2 l^2}{2}$ und $\cos \alpha l = 1 - \frac{\alpha^2 l^2}{2}$ bzw. $\sin \alpha l = \alpha l$, so erhält man für β^2 den folgenden, für Zahlenrechnungen bequemeren Ausdruck:

$$\beta^2 = \frac{2h}{h l^2 + 2k l}. \quad (18)$$

Wie sich aus (10) bzw. (17) ergibt, ist das Verhältnis der Erwärmungen im stationären Zustand an der Spulenoberfläche und an der heißesten Stelle $\vartheta_A'/\vartheta_0'$ von der Höhe der Belastung nahezu unabhängig. Daher ist auch der Wert von β lediglich durch die Wärmeleitfähigkeit und Wärmeabgabezahl der Spule gegeben. Die thermische Zeitkonstante ist nach (15) jedoch in starkem Maß von der Kupferbelastung abhängig; sie nimmt mit steigender Belastung zu, kann für $\alpha = \beta$ theoretisch den Wert ∞ erreichen, wobei sich im stationären Zustand auch unendliche Erwärmungen ergeben würden, und ist für Erwärmungsvorgänge immer größer als für Abkühlungsvorgänge.

Um die Beeinflussung der thermischen Zeitkonstante von Magnetspulen durch die Höhe ihrer Beanspruchung näher zu zeigen, seien die Erwärmungsverhältnisse an einem derartigen Beispiele durchgerechnet. Die Magnetspule soll, mit Bezug auf Bild 1 und 2, aus Runddraht von 2 mm Durchmesser blank und 2,3 mm Durchmesser isoliert bestehen; als Isolationsmaterial sei Baumwolle angenommen. Dem beschriebenen Rechnungsgang entsprechend wird die Wärmeabgabe der Innenmantelflächen und der beiden Stirnflächen am Polkern und Gehäuse vernachlässigt. Die Belastung des Kupfers wurde zu $i_s = 240 \text{ Amp/cm}^2$ angenommen, derart, daß sich nach einer Stunde die zulässigen Übertemperaturen nach REM ergeben. Die Spulenstärke sei $l = 4 \text{ cm}$, die durchschnittliche Wärmeleitfähigkeit vom Spulennern zur Oberfläche betrage $k = 0,008 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2$, die Wärmeabgabezahl der äußeren Mantel-

¹⁾ H. Gröber: l. c.

²⁾ R. Richter: Elektrische Maschinen Bd. 1. S. 231.

fläche sei $h = 0,0035 \text{ W/}^\circ\text{C}\cdot\text{cm}^2$, bei Annahme einer Kühlluftgeschwindigkeit von rund 4 m/sec. Die elektrische Leitfähigkeit des kalten Kupfers ist $\lambda_0 = 56 \cdot 10^4$ bei einem Temperaturkoeffizienten $\varepsilon = 0,004$; der Füllfaktor der Spule sei gleich $\sigma = 0,6$.

Mit diesen Zahlenwerten erhält man nach Gl. (10) bei Verwendung von $\alpha = 0,176$ aus Gl. (7) die Übertemperaturen $\vartheta'_0 = 250^\circ$ und $\vartheta'_A = 130^\circ$ bzw. für die mittlere Übertemperatur entsprechender Messung aus der Widerstandszunahme nach Gl. (11) $\vartheta'_m = 209^\circ$. Zwecks Ermittlung der thermischen Zeitkonstante ist zunächst die durchschnittliche Wärmekapazität der Spule zu berechnen. Mit den Werten $s = 8,94 \text{ g/cm}^3$ und $c = 0,388 \text{ Joule/}^\circ\text{C}\cdot\text{g}$ für Kupfer bzw. $s = 1,48 \text{ g/cm}^3$ und $c = 1,51 \text{ Joule/}^\circ\text{C}\cdot\text{g}$ für Baumwolle wird dieselbe bei dem angegebenen Füllfaktor von $\sigma = 0,6$ gleich $s \cdot c = 3,01 \text{ Joule/}^\circ\text{C}\cdot\text{cm}^3$. Der Wert für β der Ersatztemperaturkurve ermittelt sich aus Gl. (17) zu $\beta = 0,255$; bei Verwendung der angenäherten Gl. (18) würde sich $\beta = 0,242$ ergeben. Mit dem genaueren ersten Wert errechnet sich dann die thermische Zeitkonstante nach Gl. (15) zu $T = 11000 \text{ sec}$. Der ungewöhnlich hohe Wert für dieselbe ist durch den verzögernden Einfluß der Widerstandszunahme bedingt, der hier bei den relativ ungünstig angenommenen Abkühlungsverhältnissen bereits stark zur Geltung kommt. Für den Abkühlungsvorgang bei unbelasteter Spule und den gleichen Kühlungsverhältnissen ($\alpha = 0$) würde die Zeitkonstante $T = 5800 \text{ sec}$ betragen. Wäre in üblicher Weise die Ermittlung der Zeitkonstante unter Vernachlässigung des verzögernden Einflusses der Widerstandszunahme ($\alpha = 0$) und unter Vernachlässigung der inneren Wärmegefälle der Spule vorgenommen worden [$k = \infty$ in Gl. (12) und (15)], so hätte sich dieselbe nach der Formel $T = s \cdot c \cdot \frac{l}{h}$ zu 3450 sec ergeben.

Würde man die betrachtete Spule vom kalten Zustand aus mit der angegebenen Stromdichte belasten, so erhielt man nach Ablauf von 1 Stunde mit dem erstgenannten Wert für T im Punkte O eine Erwärmung von 70° C , im Punkte A eine solche von $36,5^\circ \text{ C}$ und eine mittlere Spulenerwärmung von $58,5^\circ \text{ C}$; nach Ablauf von 2 Stunden wären die entsprechenden Erwärmungen 129° , 67° und $107,5^\circ \text{ C}$.

Hätte man in der üblichen einfacheren Weise unter Vernachlässigung der inneren Wärmegefälle der Spule und mit einer mittleren, der voraussichtlichen Erwärmung entsprechenden Leitfähigkeit des Kupfers gerechnet, so hätte sich mit $\lambda = 46 \cdot 10^4$ und $k = \infty$ aus Gl. (13) die Erwärmung ϑ'_m nach der Gleichung $\vartheta'_m = V \cdot l/h$ zu 85° im stationären Zustand ergeben. Mit dem oben ermittelten Werte von $T = 3450 \text{ sec}$ würde dann demzufolge die Erwärmung nach Ablauf von 1 bzw. 2 Stunden 55° C respektive $74,5^\circ \text{ C}$ betragen. Während daher in vorliegendem Fall eine Überschreitung der zulässigen Betriebszeit um das Doppelte der angenäherten Rechnung zufolge erst eine Überschreitung der zulässigen Grenzerwärmung um $14,5$ bedingen würde, errechnet sich die tatsächlich zu gewärtigende Überschreitung derselben zu $47,5^\circ \text{ C}$ auf Grund der genauen Rechenmethode.

Wenn in dem gewählten Rechnungsbeispiel auch die Angaben so getroffen wurden, daß die Unterschiede zwischen der genauen und der üblichen angenäherten Rechnung deutlich hervortreten, so ist doch zu erkennen, daß in Fällen, wo es sich um hohe Endtemperaturen und stark ausgeprägte Wärmegefälle innerhalb des betrachteten Körpers handelt, die Vernachlässigung der Wärmegefälle und der Änderung des Widerstandes mit der Erwärmung Ergebnisse zeitigen können, die als viel zu günstig anzusehen sind.

Bei Untersuchung der Erwärmungsvorgänge in Magnetspulen ist die beschriebene Art der Ersetzung der Temperaturkurve im stationären Zustand durch eine einfache cos-Linie nach Gl. (16) in der Regel ohne weiteres zulässig, die Abweichungen zwischen der tatsächlichen und der Ersatztemperaturkurve bleiben innerhalb der Genauigkeitsgrenze der ganzen Rechnung. In Übereinstimmung damit ist auch die praktische Erfahrung, daß im Prüffelde aufgenommene Erwärmungskurven derartig einfacher Körper verhältnismäßig genau dem Exponentialgesetz folgen, die Zeitkonstante des ganzen Erwärmungsvorganges also ziemlich konstant bleibt.

B. Die Erwärmung von Spulen mit rechteckigem Querschnitt.

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Methode zur Ermittlung der Erwärmung von stromdurchflossenen Spulen ergibt in solchen Fällen zu ungünstige Werte, in denen die Wärmeabgabe an den beiden Stirnflächen nicht mehr zu vernachlässigen ist. Es ist dann erforderlich, die Wärmeströmung in beiden aufeinander

senkrechten Richtungen zu untersuchen¹⁾. In Bild 3 ist eine derartige Spule zur Darstellung gebracht, bei welcher voraussetzungsgemäß lediglich an der inneren Mantelfläche keine Wärmeabgabe stattfinden soll. Im Punkte O ist dann die höchste Temperatur zu erwarten, daher soll dieser Punkt als Koordinatenursprung gewählt werden. Der allgemeine Fall der rechteckigen Spule mit gleichen Kühlungsverhältnissen je zweier gegenüberliegender Seiten ist dabei mitenthalten, da die Anordnung nach Bild 3 spiegelbildlich ergänzt werden kann; es wären dann die Spulenseiten gleich $2a$ bzw. $2b$. Bei Anwendung von rechteckigen Kupferquerschnitten sind die Wärmefähigkeiten k_x und k_y im allgemeinen voneinander verschieden, desgleichen die Wärmeabgabezahlen der Oberflächen h_x und h_y .

Die Differentialgleichung des Erwärmungsverlaufes ergibt sich hier in Analogie zum früher Gesagten zu:

$$V + k_x \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (1)$$

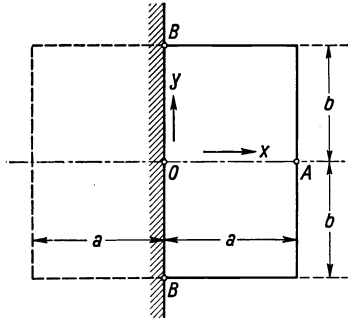


Bild 3. Magnetspule. Wärmefälle in x - und y -Richtung.

bzw. bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Verluste mit der Erwärmung

$$\frac{i_x^2}{\lambda_0} \cdot \sigma + \frac{i_y^2}{\lambda_0} \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \vartheta + k_x \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (2)$$

Für den stationären Erwärmungsanteil erhält man als eine Lösung von Gl. (2)

$$\vartheta' = A \cdot \cos \alpha_1 x \cos \alpha_2 y - \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3)$$

wenn α_1 und α_2 so gewählt werden, daß sie der Bedingung genügen

$$k_x \alpha_1^2 + k_y \alpha_2^2 = \frac{i_x^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \sigma \quad (4)$$

Als weitere Bedingungsgleichungen sind die Grenzbedingungen an den Oberflächen heranzuziehen. Dieselben sind hier:

$$\left. \begin{aligned} k_x \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} \Big|_{x=a} + h_x \cdot \vartheta' \Big|_{x=a} &= 0, \\ k_y \cdot \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} \Big|_{y=b} + h_y \cdot \vartheta' \Big|_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Führt man in diese Beziehungen den Ansatz Gl. (3) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} h_x A \cdot \cos \alpha_1 a \cos \alpha_2 y - k_x \cdot A \cdot \alpha_1 \sin \alpha_1 a \cos \alpha_2 y &= \frac{h_x}{\varepsilon}, \\ h_y A \cdot \cos \alpha_2 b \cos \alpha_1 x - k_y \cdot A \cdot \alpha_2 \sin \alpha_2 b \cos \alpha_1 x &= \frac{h_y}{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wie sofort erkenntlich, sind mit dem gewählten Ansatz die Oberflächenbedingungen nicht exakt einzuhalten. Beschränkt man sich darauf, daß die Gl. (6) nur für $x = 0$ bzw. $y = 0$ erfüllt werden, daß also bloß in den Punkten A und B in Bild 3 den Oberflächenbedingungen exakt Genüge geleistet wird, und setzt man ferner noch

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 a &= 1 - \frac{\alpha_1^2 a^2}{2}, & \cos \alpha_2 b &= 1 - \frac{\alpha_2^2 b^2}{2}, \\ \sin \alpha_1 a &= \alpha_1 a, & \sin \alpha_2 b &= \alpha_2 b, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹⁾ M. Jakob: Die Temperaturverteilung in einer elektrischen Wicklung von rechteckigem Querschnitt. Arch. Elektrotechn. Bd. 8 S. 117.

so erhält man schließlich zur Ermittlung von α_1 und α_2 aus den Gl. (4) und (6) die folgenden Endformeln:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{h_x \left(h_y \frac{b^2}{2} + k_y b \right)}{h_x k_x \left(h_y \frac{b^2}{2} + k_y b \right) + h_y k_y \left(h_x \frac{a^2}{2} + k_x a \right)}, \\ \alpha_2^2 &= \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{h_y \left(h_x \frac{a^2}{2} + k_x a \right)}{h_x k_x \left(h_y \frac{b^2}{2} + k_y b \right) + h_y k_y \left(h_x \frac{a^2}{2} + k_x a \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Für quadratische Spulen mit homogenem Aufbau und gleichartigen Kühlungsverhältnissen aller 4 Seiten vereinfacht sich obiger Ausdruck zu

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \sigma}{2k}. \quad (9)$$

Wird nun mit den bereits erhaltenen Werten für α_1 und α_2 die Integrationskonstante A aus einer der beiden Gl. (6) ermittelt und in Gl. (3) eingeführt, so bekommt man schließlich für den Temperaturverlauf im stationären Zustand die beiden einander äquivalenten Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta' &= \frac{h_x [\cos \alpha_1 x \cos \alpha_2 y - \cos \alpha_1 a] + k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a}{\varepsilon [h_x \cos \alpha_1 a - k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a]}, \\ \vartheta' &= \frac{h_y [\cos \alpha_2 y \cos \alpha_1 x - \cos \alpha_2 b] + k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b}{\varepsilon [h_y \cos \alpha_2 b - k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b]} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und für die mittlere Erwärmung entsprechend der Widerstandsmessung

$$\left. \begin{aligned} \vartheta'_m &= \frac{h_x \left[\frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1 a} \cdot \frac{\sin \alpha_2 b}{\alpha_2 b} - \cos \alpha_1 a \right] + k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a}{\varepsilon [h_x \cos \alpha_1 a - k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a]}, \\ \vartheta'_m &= \frac{h_y \left[\frac{\sin \alpha_2 b}{\alpha_2 b} \cdot \frac{\sin \alpha_1 a}{\alpha_1 a} - \cos \alpha_2 b \right] + k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b}{\varepsilon [h_y \cos \alpha_2 b - k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b]}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Für den nichtstationären Erwärmungsanteil ϑ'' erhält man als Lösung von Gl. (2) in Analogie zum vorhergehenden Abschnitt:

$$\vartheta'' = \sum e \frac{k_x (\alpha_1^2 - \beta_1^2) + k_y (\alpha_2^2 - \beta_2^2)}{s \cdot c} \cdot B \cdot \cos \beta_1 x \cdot \cos \beta_2 y, \quad (12)$$

wobei, wie bereits erwähnt wurde, die Zerlegung von ϑ'' in die einzelnen Wärmewellen so zu erfolgen hat, daß für den Ausgangspunkt $t = 0$ der Wert von ϑ'' die der Belastung entsprechende End-erwärmung ϑ' zum Momentanwert ϑ möglichst genau ergänzt. Bei Untersuchung eines Erwärmungsvorganges vom kalten Zustand aus oder auch bei Betrachtung des Abkühlungsvorganges der abgeschalteten Spule ist daher dem Absolutwert nach $\vartheta'' = \vartheta'$ zu setzen. Meist wird es genügen, nach Bild 4 die Temperaturfläche ϑ' im stationären Zustand durch die Grundwelle von ϑ'' so zu ersetzen, daß die Erwärmungen in O' , A' , und B' für beide dieselben sind. Bei dem gleichartigen Verlauf der beiden Flächen und der Kleinheit der Unterschiede

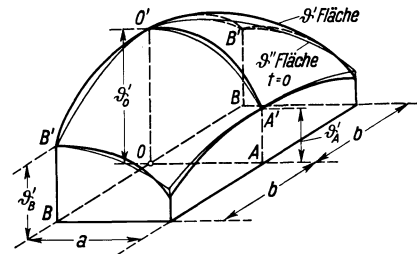


Bild 4. Übertemperaturverlauf in der Spule nach Bild 3.

spielen auch hier die Oberwellen der Temperaturverteilung keine Rolle, die Zeitkonstante des Erwärmungsvorganges beträgt daher einheitlich:

$$T = \frac{s \cdot c}{k_x(\beta_1^2 - \alpha_1^2) + k_y(\beta_2^2 - \alpha_2^2)}. \quad (13)$$

Die Werte α_1 und α_2 sind bereits bekannt, β_1 und β_2 ermitteln sich nach dem Gesagten aus den Gl. (10) zu:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_1 a &= \frac{\vartheta'_A}{\vartheta'_0} = \frac{k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a}{h_x [1 - \cos \alpha_1 a] + k_x \alpha_1 \sin \alpha_1 a}, \\ \cos \beta_2 b &= \frac{\vartheta'_B}{\vartheta'_0} = \frac{k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b}{h_y [1 - \cos \alpha_2 b] + k_y \alpha_2 \sin \alpha_2 b}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Verwendet man auch hier die Vereinfachungen, die in Abschnitt A zu Gl. (18) geführt haben, so erhält man für β_1 und β_2 die kürzeren Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{2h_x}{h_x a^2 + 2k_x a}, \\ \beta_2^2 &= \frac{2h_y}{h_y b^2 + 2k_y b}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Auch bei rechteckigen Spulen sind daher die Werte von β_1 bzw. β_2 nur in geringem Maße von der Spulenbelastung abhängig; die thermische Zeitkonstante ist hier ebenfalls für Erwärmungsvorgänge größer als für Abkühlungsvorgänge.

Zur näheren Erläuterung der abgeleiteten Formeln seien hier dieselben ebenfalls an einem Rechenbeispiel angewendet. Für die Magnetspule, deren Erwärmung untersucht werden soll, seien die entsprechenden Angaben von Abschnitt A beibehalten, da es sich um eine Runddrahtspule handelt, ist die Wärmeleitfähigkeit für die x - und y -Richtung dieselbe, nämlich $k_x = k_y = 0,008 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}$. Die Wärmeabgabe der äußeren Mantelfläche sei unverändert $h_x = 0,0035 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2$, diejenige der beiden Stirnflächen soll nur $h_y = 0,00175 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2$ betragen, um die ungünstigeren Abkühlungsverhältnisse an denselben zu berücksichtigen. Die gesamte Spulenhöhe sei endlich $2b = 12 \text{ cm}$, die Spulenstärke wurde mit $a = 4 \text{ cm}$ beibehalten.

Mit den angenommenen Zahlenwerten erhält man zunächst aus Gl. (8) $\alpha_1 = 0,150$ und $\alpha_2 = 0,0915$ und damit nach Gl. (10) und (11) die Übertemperaturen im stationären Zustand zu $\vartheta'_0 = 157^\circ$, $\vartheta'_A = 77^\circ$ [Gl. (10a)]; $\vartheta'_0 = 149^\circ$, $\vartheta'_B = 88^\circ$ [Gl. (103)] und $\vartheta'_m = 107^\circ$ bzw. 108° [Gl. (11a) und (11b)].

Die beiden Werte für ϑ'_0 und ϑ'_m ergeben sich nicht genau gleich, weil bei Ermittlung von α_1 und α_2 die vereinfachten Gl. (8) herangezogen wurden. Nachdem nun die zu erwartende Erwärmung im stationären Zustand bekannt ist, erhält man aus Gl. (14) $\beta_1 = 0,265$ und $\beta_2 = 0,157$ und damit die thermischen Zeitkonstanten zu $T = 5900 \text{ sec}$ für den Erwärmungsvorgang bei der angenommenen Belastung bzw. zu $T = 4000 \text{ sec}$ für den Abkühlungsvorgang der unbelasteten Spule. Durch die günstigeren Wärmeabgabeverhältnisse erhält man also hier wesentlich kleinere Enderwärmungen und geringere Zeitkonstanten als beim Rechnungsbeispiel in Abschnitt A; die starke Abhängigkeit der Zeitkonstante von der jeweils zugehörigen Belastung ist aber auch hier vorhanden.

Die angegebenen Gleichungen sind auch mit Vorteil anzuwenden, wenn es sich beispielsweise darum handelt, die Zeit für die Ausbildung der Wärmegefälle bei Transformatorwicklungen abzuschätzen. Ein Beispiel möge auch dies erläutern.

Es handelt sich darum, die Übertemperatur der Sekundärwicklung eines Ofentransformators zu ermitteln, die dieselbe gegenüber dem sie umgebenden Öl annimmt. Die Wärmeabgabe derselben soll nach allen Seiten gleichmäßig erfolgen können und mit $h_x = h_y = 0,0110 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2$ angenommen werden. Da es sich um massive Kupferschienen handeln soll, ist auch die Wärmeleitfähigkeit nach beiden Richtungen gleich und beträgt $k_x = k_y = 3,8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}$. Die Strombelastung der Windung soll 500 Amp/cm^2 betragen; die Seitenlängen des rechteckigen Querschnittes seien $2a = 1 \text{ cm}$ und $2b = 5 \text{ cm}$. Mit diesen Werten erhält man, ohne daß dazu die stationären Erwärmungen ermittelt werden müssen, nach Gl. (8) $\alpha_1^2 = 0,00039$, $\alpha_2^2 = 0,00008$ und nach Gl. (15) $\beta_1^2 = 0,0058$ bzw. $\beta_2^2 = 0,00115$. Damit kann nach (13) die Zeitkonstante direkt angegeben werden, dieselbe beträgt bei der angegebenen Stromdichte 140 sec ; für die Stromdichte Null (Abkühlungsvorgang) erhält man $T = 130 \text{ sec}$. Der erhaltene Wert ist so geringfügig, daß bei allen Erwärmungsmessungen, die nach Abschaltung der Belastung vorgenommen werden, das Wicklungskupfer bereits die Temperatur des umgebenden Öles

zum größten Teil angenommen hat und daher das Temperaturgefälle zwischen Wicklung und Öl nur zum geringsten Teile mitgemessen wird.

Bei Spulen, deren Kühlung nur an der äußeren Mantelfläche und an einer Stirnseite erfolgt, während beide anderen Seiten wärmedicht abisoliert sind, kann der beschriebene Rechnungsgang ebenfalls beibehalten werden. Eine derartige Spule kann als die Hälfte der im Bild 3 dargestellten Anordnung aufgefaßt werden, der wärmste Punkt rückt dann in die Ecke, in welcher die beiden nichtgekühlten Flächen zusammentreffen.

Der Aufbau der Gleichungen für den Erwärmungsverlauf im stationären Zustand [Gl. (10), Abschnitt A bzw. Gl. (10), Abschnitt B] sowie auch die Rechnungsbeispiele zeigen ferner, daß bei längeren Wärmegefällswegen und höheren spezifischen Belastungen die maximalen Erwärmungen beträchtliche Werte erreichen können; ferner daß unter Umständen eine Steigerung der Beanspruchung unter dem Einfluß der Widerstandszunahme eine wesentlich stärkere Mehrerwärmung verursachen kann, als der üblichen quadratischen Umrechnung entspricht.

C. Temperaturverteilung in Stäben; die Wärmeabgabe erfolgt längs des ganzen Stabes und an den Stabenden.

In diese Gruppe fallen beispielsweise hinsichtlich ihrer Wärmeabgabeverhältnisse Dämpferwicklungen oder Käfigwicklungen, die Wärmeabgabe erfolgt an der ganzen Ankermantelfläche teils direkt, teils über das Blechpaket und außerdem an den Enden durch die Kurzschlußringe oder durch besondere Kühlfahnen zur Erhöhung der Wärmeableitung. Die diesbezüglichen Verhältnisse sind schematisch in Bild 5 dargestellt, der Bezugspunkt ist in Blechpaketmitte angenommen, bei gleichmäßiger Kühlung beider Ankerseiten ist dort auch die Symmetrieebene für den Erwärmungsverlauf. Besitzt das Ankerblechpaket achsennormale Kühlschlitze, so ist die Wärmeabgabe des Stabes im Kühlschlitz von der im Blechpaket verschieden. Man kann in bekannter Weise¹⁾ eine einheitliche mittlere Wärmeabgabezahl bestimmen, die längs des ganzen Stabes gültig ist und die verbesserte Abkühlung durch die Kühlschlitze berücksichtigt. Außerdem werden, wie bereits eingangs erwähnt, die Temperaturunterschiede senkrecht zur Stabachse vernachlässigt. Mit diesen Vereinfachungen erhält man als Bedingungsgleichung für den Erwärmungsverlauf in axialer Richtung:

$$V - p \cdot \vartheta + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (1)$$

bzw.

$$\frac{i_s^2}{\lambda_0} - \left[p - \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \right] \cdot \vartheta + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad (2)$$

hierbei bedeutet die Größe p die Wärmeabgabe senkrecht zur Stabachse in Watt für 1° Temperaturunterschied, 1 cm Stablänge und 1 cm^2 Stabquerschnitt, ist also in $\text{Watt/cm}^3 \cdot ^\circ\text{C}$ in Rechnung zu stellen. Setzt man zur Abkürzung

$$q = p - \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon, \quad (3)$$

¹⁾ O. Böhm: Erwärmung von Maschinen mit radialen Schlitzen, Elektrotechn. Z. 1921 S. 1389 — Vorausberechnung der Erwärmung elektr. Maschinen, Elektrotechn. Z. 1922 S. 810.

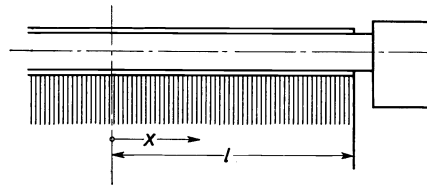


Bild 5. Leiter im Blechpaket; die Wärmeabgabe erfolgt an den Enden und über die ganze Länge.

so ergibt sich für positive Werte von q (die Wärmeabgabe längs der Stabachse überwiegt die Verlustvermehrung infolge Widerstandszunahme) für die Erwärmung im stationären Zustand die Differentialgleichung:

$$\frac{i_s^2}{\lambda_0} - q \cdot \vartheta' + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta'}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

mit der Lösung

$$\vartheta' = A' \cdot \mathfrak{C}o[\alpha x] + A'' \cdot \mathfrak{S}i n \alpha x + \frac{i_s^2}{q \cdot \lambda_0}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{q}{k}}. \quad (5)$$

Die Endbedingungen zur Ermittlung von A' und A'' sind dieselben wie im Abschnitt A; nur ist zu beachten, daß in Gl. (8), Abschnitt A, die Wärmeabgabebezahl der Kühlfahren h_0 auf den Stabquerschnitt zu beziehen ist. Man erhält dann:

$$\vartheta' = \frac{h[\mathfrak{C}o[\alpha l] - \mathfrak{C}o[\alpha x]] + k \cdot \alpha \cdot \mathfrak{S}i n \alpha l}{\frac{q \cdot \lambda_0}{i_s^2} [h \cdot \mathfrak{C}o[\alpha l] + k \cdot \alpha \cdot \mathfrak{S}i n \alpha l]} \quad (6)$$

und für den Mittelwert der Erwärmung über die ganze Stablänge

$$\vartheta'_m = \frac{h \left[\mathfrak{C}o[\alpha l] - \frac{1}{\alpha l} \cdot \mathfrak{S}i n \alpha l \right] + k \cdot \alpha \cdot \mathfrak{S}i n \alpha l}{\frac{q \cdot \lambda_0}{i_s^2} [h \cdot \mathfrak{C}o[\alpha l] + k \alpha \mathfrak{S}i n \alpha l]}. \quad (7)$$

Ergibt sich $q < 0$, so wird durch die Substitution

$$\frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon - p = \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon' \quad (8)$$

Gl. (2) auf die Form von Gl. (3), Abschnitt A, zurückgeführt, deren Lösung dort bereits angegeben wurde. Für den Grenzfall $q = 0$ tritt an Stelle von (6) bzw. (10), Abschnitt A, die einfache Beziehung:

$$\vartheta' = \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \left[\frac{l}{h} + \frac{l^2 - x^2}{2k} \right], \quad (9)$$

die bereits in Abschnitt A, Gl. (12), allerdings nur annäherungsweise, erhalten wurde.

Von Interesse ist aber wieder der zeitliche Verlauf des Erwärmungs- bzw. Abkühlungsvorganges. Für den nichtstationären Erwärmungsanteil lautet jetzt die Differentialgleichung:

$$-q \cdot \vartheta'' + k \cdot \frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial x^2} = s \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta''}{\partial t} \quad (10)$$

und deren allgemeine Lösung:

$$\vartheta'' = \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} e^{-\frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{s \cdot c} \cdot t} [B' \sin \beta x + B'' \cos \beta x] + \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} e^{-\frac{k(\alpha^2 - \gamma^2)}{s \cdot c} \cdot t} [C' \mathfrak{S}i n \gamma x + C'' \mathfrak{C}o[\gamma x]]. \quad (11)$$

Die Herleitung dieser Gleichung hat analog der von Gl. (14), Abschnitt A, zu erfolgen, die angegebenen Grenzwerte für β bzw. γ ergeben sich aus der Überlegung, daß bei endlichen Erwärmungen der Wert der Zeitkonstante nicht negativ werden kann. Man wird also wiederum bei einem Erwärmungsvorgang die stationäre Endüber-temperaturverteilung, bei einem Abkühlungsvorgang die Verteilung der anfänglich vorhandenen Übertemperatur in passender Weise durch Sinuslinien ersetzen; bei exakter Rechnung ist ihre Zerlegung ähnlich jener nach Fourierschen Reihen erfordert. Als Zeitkonstante ergibt sich aus (11) für die noch zu bestimmenden Werte von β und γ :

$$T = \frac{s \cdot c}{k(\alpha^2 + \beta^2)} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{s \cdot c}{k(\alpha^2 - \gamma^2)}. \quad (12)$$

Ist es mit Rücksicht auf die geforderte Genauigkeit zulässig, diese Ersetzung wie im Abschnitt A nach Bild 2 vorzunehmen, so erhält man wieder für den Wert von β :

$$\cos \beta l = \frac{\vartheta'_A}{c'_0} = \frac{k \cdot \alpha \cdot \mathfrak{C} \sin \alpha l}{h [\mathfrak{C} \cos \alpha l - 1] + k \alpha \mathfrak{C} \sin \alpha l}. \quad (13)$$

Setzt man, analog wie im Abschnitt A, zur weiteren Vereinfachung noch $\cos \beta l = 1 - \frac{\beta^2 l^2}{2}$; $\mathfrak{C} \sin \alpha l = \alpha l$ und $\mathfrak{C} \cos \alpha l = 1 + \frac{\alpha^2 l^2}{2}$, so erhält man auch hier:

$$\beta^2 = \frac{2h}{h l^2 + 2kl}. \quad (14)$$

Wäre keine besondere Kühlung der Stabenden vorhanden, so würde die thermische Zeitkonstante

$$T = \frac{sc}{k \cdot \alpha^2} = \frac{s \cdot c}{q} \quad (15)$$

betragen; durch die vermehrte Kühlung vermindert sich dieselbe nach Gl. (12), die hierfür maßgebende Größe β^2 ist hier ebenfalls von der Höhe der Verluste im Stab nahezu unabhängig und lediglich durch die Kühlungsverhältnisse an den Stabenden gegeben.

Bei kräftiger Wärmeabgabe längs des Stabes erhält man Temperaturverteilungen ähnlich Bild 6, man darf dann die einfache Ersetzung durch eine einzige cos-Linie nicht mehr anwenden, kann daher auch die Erwärmung bzw. Abkühlung nicht durch eine einheitliche Zeitkonstante charakterisieren. Zur Ermittlung des zeitlichen Temperaturverlaufes entsprechend Bild 6 dient nach Gl. (11) folgender Ansatz:

$$\vartheta''|_{t=0} = \sum B'' \cos \beta x, \quad (16)$$

und mit der Grenzbedingung Gl. (8), Abschnitt A, errechnet sich Bedingungsgleichung, welcher die Werte von β genügen müssen:

$$l \cdot \beta \cdot \operatorname{tg} \beta l = \frac{h}{k} \cdot l. \quad (17)$$

Infolge der Periodizität der Tangensfunktion ergibt sich für βl eine unendliche Reihe von Lösungen, deren Werte in einfacher Weise aus Bild 8 auf S. 39 entnommen werden können. Es ist dort $\beta l \cdot \operatorname{tg} \beta l$ in Abhängigkeit von βl aufgetragen; greift man den Wert $\frac{h}{k} \cdot l$ auf der Ordinatenachse ab und zieht zur Abszissenachse eine Parallele, so ergeben die Abszissen der Schnittpunkte mit der Kurve die gesuchten Lösungen für βl . Es ist nun die vorgegebene Erwärmungskurve entsprechend (16) nach einer Fourierschen Reihe zu zerlegen, deren β -Werte jedoch vorgeschrieben sind. Ist dieselbe in der Form gegeben

$$\vartheta''|_{t=0} = F(x), \quad (18)$$

so errechnen sich¹⁾ die Amplituden von Grund- und Oberwellen aus der Gleichung

$$B''_n = \frac{\int_{-l}^{+l} F(x) \cdot \cos(\beta_n x) \cdot dx}{\int_{-l}^{+l} \cos^2(\beta_n x) \cdot dx}. \quad (19)$$

¹⁾ H. Gröber: Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges, S. 32.

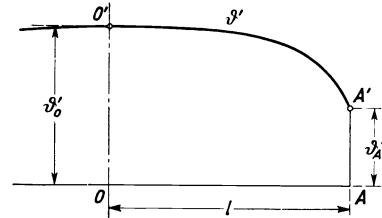


Bild 6. Übertemperaturverlauf längs des Stabes nach Bild 5.

Will man die in der Regel graphisch auszuführende Integration nach Gl. (19) vermeiden, so kann man annäherungsweise auch so vorgehen, daß man aus (17) nur β_1 und β_2 für die Grund- und erste Oberwelle ermittelt und die zugehörigen Amplituden B_1'' und B_2'' so bestimmt, daß diese vereinfachte Ersatzkurve durch die Punkte O' und A' hindurchgeht. Es ist dann

$$\left. \begin{aligned} B_1'' + B_2'' &= \vartheta_0' \\ B_1'' \cos \beta_1 l + B_2'' \cos \beta_2 l &= \vartheta_A' \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und daraus

$$B_1'' = \frac{\vartheta_0' \cdot \cos \beta_2 l - \vartheta_A'}{\cos \beta_2 l - \cos \beta_1 l}, \quad B_2'' = \frac{\vartheta_0' \cdot \cos \beta_1 l - \vartheta_A'}{\cos \beta_1 l - \cos \beta_2 l}. \quad (21)$$

Infolge der kleineren thermischen Zeitkonstanten der Oberwellen treten diese speziell bei raschen Temperaturänderungen mehr und mehr in Erscheinung, so daß sie beispielsweise bei Untersuchung von kurzzeitigen Überlastungen das Bild beherrschen können. Es ist dann die beschriebene genaue Rechnungsart mit Vorteil anzuwenden. Man hat dann zum Unterschied von den in Abschnitt A und B beschriebenen Verhältnissen keinen einheitlichen Ablauf des Erwärmungs- bzw. Abkühlungsvorganges mehr zu erwarten, insbesondere erfolgt bei Betrachtung des zeitlichen Verlaufes der mittleren Erwärmung die Angleichung des Erwärmungsanteiles der Oberwellen an den stationären Zustand wesentlich rascher als die des Anteiles der Grundwelle. Bei Erwärmungsvorgängen, die dem vorliegenden Fall nahekommen, ist daher mit einer anfänglich raschen, später jedoch wesentlich langsamer werdenden Temperaturzunahme zu rechnen, bei Abkühlungsvorgängen geht umgekehrt der erste Abfall relativ schnell vor sich.

D. Temperaturverlauf bei teilweise in Eisen eingebetteten Wicklungsspulen.

In diesem Abschnitt werden die Erwärmungsverhältnisse untersucht, wie sie in der Praxis beispielsweise bei Dynamoankerwicklungen auftreten. Wie in Bild 7

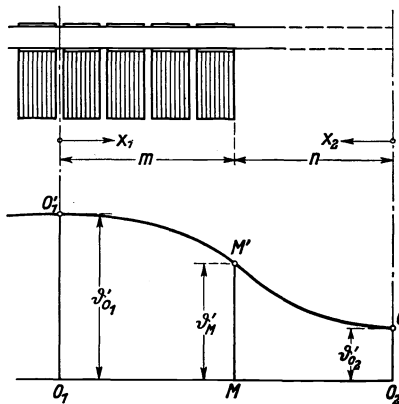


Bild 7. Teilweise in Eisen eingebettete Spule, Erwärmungsverlauf längs Blechpaket und Stirnverbindung.

dargestellt, liegt ein Teil der ganzen Windung im Ankereisen und kann seine Wärme nur mittelbar an die Kühlluft abgeben, während der andere Teil der Windung, die Stirnverbindung, von letzterer unmittelbar umspült wird. In Bild 7 ist ein Viertel des ganzen Spulenumfanges dargestellt, m bedeutet die halbe Blechpaketlänge einschließlich Kühlschlitz, n die halbe Länge der Stirnverbindung. Bei radialer Kühlung und gleichartiger Ausbildung der Stirnverbindungen auf beiden Seiten sind die Erwärmungsverhältnisse symmetrisch zur Maschinenmitte, es stellt sich dann der dargestellte Erwärmungsverlauf im stationären Zustand ein. Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt und später noch ausführlicher behandelt,

ist bei Ankern mit achsennormalen Kühlschlitzten mit dem Mittelwert aus der Wärmeabgabe im Teilpaket und im Kühlschlitz zu rechnen.

Für den im Blechpaket liegenden Wicklungsteil gelten im allgemeinen andere Wärmeabgabewerte senkrecht zur Stabachse, andere Wärmekapazitäten und evtl.

auch verschiedene Wärmeleitfähigkeiten als wie für die Stirnverbindung, letzteres insbesondere dann, wenn beispielsweise der Kupferquerschnitt in Nut und Stirnverbindung verschieden gewählt wurde. Im folgenden bezieht sich der Index 1 stets auf die Partie im Blechpaket, der Index 3 auf die Stirnverbindung. Mit Verwendung der Abkürzungen

$$q_1 = p_1 - \frac{i_{s1}^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon, \quad q_3 = p_3 - \frac{i_{s3}^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \quad (1)$$

erhält man wieder für die beiden Wicklungsabschnitte die Beziehung, nach welcher der räumliche und zeitliche Temperaturverlauf vor sich geht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{i_{s1}^2}{\lambda_0} - q_1 \vartheta_1 + k_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x_1^2} &= s_1 c_1 \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \\ \frac{i_{s3}^2}{\lambda_0} - q_3 \vartheta_3 + k_3 \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x_3^2} &= s_3 c_3 \cdot \frac{\partial \vartheta_3}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und analog wie früher als allgemeine Lösung für den Verlauf der Erwärmung im stationären Zustand:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1' &= A_1' \mathcal{C}0 \int \alpha_1 x_1 + A_1'' \mathcal{S}in \alpha_1 x_1 + \frac{i_{s1}^2}{q_1 \lambda_0}; & \alpha_1 &= \sqrt{\frac{q_1}{k_1}}, \\ \vartheta_3' &= A_3' \mathcal{C}0 \int \alpha_3 x_3 + A_3'' \mathcal{S}in \alpha_3 x_3 + \frac{i_{s3}^2}{q_3 \lambda_0}; & \alpha_3 &= \sqrt{\frac{q_3}{k_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Grenzbedingungen zur Ermittlung der Integrationskonstanten erhält man, wenn man berücksichtigt, daß die Erwärmungen ϑ_{0_1} und ϑ_{0_2} Extremwerte darstellen, ferner daß im Punkt M der Temperaturverlauf stetig sein muß und die von der einen Seite zugeführte Wärmemenge auf der anderen Seite wieder abgegeben wird. Damit ergeben sich zunächst die Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= 0; & \frac{\partial \vartheta_3'}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \\ \vartheta_1' \Big|_{x_1=m} &= \vartheta_3' \Big|_{x_3=n}, \\ k_1 \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial x_1} \Big|_{x_1=m} &= -k_3 \frac{\partial \vartheta_3'}{\partial x_3} \Big|_{x_3=n} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und nach Auswertung der Integrationskonstanten die Gleichung für den Temperaturverlauf im stationären Zustand

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1' &= \frac{i_{s1}^2}{q_1 \lambda_0} + \frac{k_3 \alpha_3}{z} \left[\frac{i_{s3}^2}{q_3 \lambda_0} - \frac{i_{s1}^2}{q_3 \lambda_0} \right] \cdot \mathcal{S}in \alpha_3 n \mathcal{C}0 \int \alpha_1 x_1, \\ \vartheta_3' &= \frac{i_{s3}^2}{q_3 \lambda_0} + \frac{k_1 \alpha_1}{z} \left[\frac{i_{s1}^2}{q_1 \lambda_0} - \frac{i_{s3}^2}{q_1 \lambda_0} \right] \cdot \mathcal{S}in \alpha_1 m \mathcal{C}0 \int \alpha_3 x_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mit Verwendung der Abkürzung

$$z = \alpha_1 k_1 \mathcal{S}in \alpha_1 m \mathcal{C}0 \int \alpha_3 n + \alpha_3 k_3 \mathcal{S}in \alpha_3 n \mathcal{C}0 \int \alpha_1 m. \quad (6)$$

Bei Ermittlung des zeitlichen Verlaufes des Erwärmungs- bzw. Abkühlungsvorganges tritt gegenüber den bisher behandelten Beispielen die Möglichkeit des Wärmeaustausches zwischen den beiden Abschnitten des Wärmeleiters hinzu. Davon abgesehen bleibt die Rechnung grundsätzlich dieselbe; es muß zunächst die Zerlegung der Erwärmungskurve im stationären Zustande in passender Weise vorgenommen werden. Den Ausgangspunkt hierzu liefert wieder die Gleichung (11), Abschnitt C,

welche in etwas geänderter Form für die beiden Leiterabschnitte hier neuerlich angeführt sei:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= \sum_{\beta_1^2 = -\alpha_1^2}^{\beta_1^2 = \infty} e^{-\frac{k_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{s_1 \cdot c_1} \cdot t} [B_1' \cos \beta_1 x_1 + B_1'' \sin \beta_1 x_1], \\ \vartheta_3'' &= \sum_{\beta_3^2 = -\alpha_3^2}^{\beta_3^2 = \infty} e^{-\frac{k_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)}{s_3 \cdot c_3} \cdot t} [B_3' \cos \beta_3 x_3 + B_3'' \sin \beta_3 x_3]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ergibt sich bei der Ermittlung von β^2 dieses negativ (Intervall $-\alpha^2 < \beta^2 < 0$), dann treten an Stelle der Kreisfunktionen in bekannter Weise Hyperbelfunktionen. Die Werte von β müssen zunächst so bestimmt werden, daß den Grenzbedingungen Genüge geleistet wird, letztere wurden bereits mit Gl. (4) ermittelt. Die Integrationskonstanten B_1' , B_1'' , B_3' und B_3'' der Grundwelle und jeder Oberwelle der Temperaturverteilung ergeben sich dann aus der Zerlegung der resultierenden Temperaturkurve.

Bei der hier behandelten Anordnung entsprechend Bild 7 können, wie unmittelbar erkennbar, die sin-Glieder in Fortfall kommen. Die Stetigkeitsbedingungen für den Erwärmungsverlauf im Punkt M ergeben die Möglichkeit, die Werte von β zu bestimmen. Man erhält für den Punkt M :

$$\sum e^{-\frac{k_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{s_1 \cdot c_1} \cdot t} B_1' \cos \beta_1 m = \sum e^{-\frac{k_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)}{s_3 \cdot c_3} \cdot t} B_3' \cos \beta_3 n \quad (8)$$

und

$$\sum e^{-\frac{k_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{s_1 \cdot c_1} \cdot t} k_1 \beta_1 B_1' \sin \beta_1 m = \sum e^{-\frac{k_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)}{s_3 \cdot c_3} \cdot t} k_3 \beta_3 B_3' \sin \beta_3 n \quad (9)$$

und daraus für jedes Wertepaar β_1 , β_3 die Bedingungsgleichungen

$$\frac{q_1 + k_1 \beta_1^2}{s_1 \cdot c_1} = \frac{q_3 + k_3 \beta_3^2}{s_3 \cdot c_3}, \quad (10)$$

$$\frac{k_1}{m} \cdot \beta_1 m \cdot \operatorname{tg} \beta_1 m = -\frac{k_3}{n} \cdot \beta_3 n \operatorname{tg} \beta_3 n. \quad (11)$$

Infolge der Periodizität der Tangensfunktion sind auch hier wieder eine unendliche Reihe von Wertepaaren für β_1 und β_3 möglich. Nach Bestimmung derselben ist die Wellenlänge für Grund- und Oberwellen der Temperaturverteilung bekannt, zur Ermittlung der Amplituden hat die Zerlegung der Ausgangstemperaturverteilung ähnlich der nach einer Fourierschen Reihe zu erfolgen. — Die Zeitkonstante zugehöriger Oberwellen der beiden Abschnitte ist gleich groß, die Wellenlänge infolge der voneinander verschiedenen Wärmeabgabezahlen p_1 und p_3 jedoch nicht dieselbe, sondern entsprechend (10) für den Wicklungsabschnitt mit der kräftigeren Wärmeabgabe größer als für den mit der geringeren Wärmeabgabe.

Die Bestimmung der Lösungen für β_1 und β_3 aus Gl. (10) und (11) erfolgt am einfachsten durch Probieren, wobei zu berücksichtigen ist, daß, wie erwähnt, β^2 auch negative Werte annehmen kann. Setzt man $\gamma = i \cdot \beta$, so kann man die beiden Gleichungen etwas verändert in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{s_1 c_1} \cdot \frac{1}{m^2} \beta_1^2 m^2 - \frac{k_3}{s_3 c_3} \cdot \frac{1}{n^2} \beta_3^2 n^2 &= \frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \\ \frac{k_1}{s_1 c_1} \cdot \frac{1}{m^2} \beta_1^2 m^2 + \frac{k_3}{s_3 c_3} \cdot \frac{1}{n^2} \beta_3^2 n^2 &= \frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta_1 m \operatorname{tg} \beta_1 m}{\beta_3 n \operatorname{tg} \beta_3 n} &= -\frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{m}{n} \\ \frac{\beta_1 m \cdot \operatorname{tg} \beta_1 m}{\gamma_3 n \operatorname{tg} \gamma_3 n} &= +\frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{m}{n} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Im Bild 8 ist der Verlauf der Funktion $\beta_1 m \operatorname{tg} \beta_1 m = f(\beta_1 m)$ bzw. $-\gamma_3 n \cdot \mathfrak{Tg} \gamma_3 n = f(\gamma_3 n)$ dargestellt, um einerseits einen Überblick über die möglichen Lösungen zu erhalten, andererseits die Auswertung der β -Werte leichter vornehmen zu können.

Werden beispielsweise für die erste Oberwelle die Streckenabschnitte $\overline{OA}_1 = \beta_1 m$ und $\overline{OB}_1 = \beta_3 n$ gemacht und die zu diesen Abszissenwerten zugehörigen Ordinaten mit a_1 und b_1 bezeichnet, so sind diese Abschnitte so zu bestimmen, daß

$$\frac{k_1}{s_1 c_1} \cdot \frac{1}{m^2} \overline{OA}_1^2 - \frac{k_3}{s_3 c_3} \cdot \frac{1}{n^2} \overline{OB}_1^2 = \frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \quad (14)$$

und das Ordinatenverhältnis a_1/b_1 den Wert

$$\frac{a_1}{b_1} = - \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{m}{n} \quad (15)$$

besitzt.

Je höher die Ordnungszahl der Oberwelle ist, desto mehr tritt der Einfluß der Wärmeabgabe längs der Stabachse in den Hintergrund; für große Werte von β erhält man bei Vernachlässigung der rechten Seiten von Gl. (14) noch einfacher:

$$\frac{\overline{OA}_1^2}{\overline{OB}_1^2} = \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{s_1 c_1}{s_3 c_3} \cdot \frac{m^2}{n^2}. \quad (16)$$

Hinsichtlich der Grundwelle liegen die Verhältnisse insofern etwas anders, als sich für den stärker gekühlten Wicklungsteil $\beta_3^2 n^2 < 0$ ergeben würde. Man muß demnach zur Lösung die zweiten Varianten von (13) und (14) zu Hilfe nehmen, also wieder entsprechend Bild 8 die beiden Strecken $\beta_1 m = \overline{OA}_0$ und $\gamma_3 n = \overline{OB}_0$ so bestimmen, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{s_1 c_1} \cdot \frac{1}{m^2} \overline{OA}_0^2 + \frac{k_3}{s_3 c_3} \cdot \frac{1}{n^2} \overline{OB}_0^2 \\ = \frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und das Streckenverhältnis a_0/b_0 wieder den Wert

$$\frac{a_0}{b_0} = - \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{m}{n} \quad (18)$$

annimmt. Für kleine Werte von $\beta_1 m$ und $\gamma_3 n$, also in Fällen, in welchen das Temperaturgefälle in der Stablängsachse nicht übermäßig groß ist, erhält man aus Gl. (10) und (11) mit der Vereinfachung $\operatorname{tg} \beta_1 m = \beta_1 m$ und $\operatorname{tg} \gamma_3 n = \gamma_3 n$ für $\beta_1 m$ und $\gamma_3 n$ der Grundwellen folgende Ausdrücke, aus denen dieselben sofort annäherungsweise ermittelt werden können:

$$\beta_1^2 m^2 = \frac{m \left[\frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \right]}{\frac{k_1}{m \cdot s_1 c_1} + \frac{k_3}{n s_3 c_3}}, \quad \gamma_3^2 n^2 = \frac{n \left[\frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \right]}{\frac{k_3}{n s_3 c_3} + \frac{k_1}{m s_1 c_1}}. \quad (19)$$

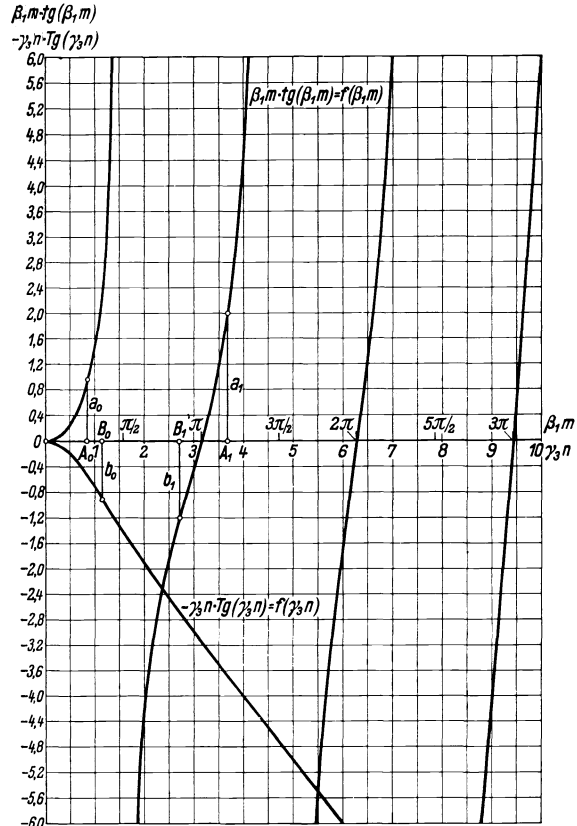


Bild 8. Verlauf der Funktionen $\beta_1 m \cdot \operatorname{tg}(\beta_1 m) = f(\beta_1 m)$ und $-\gamma_3 n \cdot \mathfrak{Tg}(\gamma_3 n) = f(\gamma_3 n)$.

Annäherungsweise kann die Zerlegung der Ausgangserwärmungskurve analog der nach einer Fourierschen Reihe entfallen, wenn man (Bild 7) die Ersatzkurve so ermittelt, daß sie durch die Punkte O'_1 , O'_2 und M' geht und dabei den Grenzbedingungen Genüge leistet. Hierzu ist der folgende Ansatz hinreichend:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta''_1 &= B_{11} \cos \beta_{11} x_1 + B_{12} \cos \beta_{12} x_1 + B_{13} \cos \beta_{13} x_3, \\ \vartheta''_3 &= B_{31} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \gamma_{31} x_3 + B_{32} \cos \beta_{32} x_3 + B_{33} \cos \beta_{33} x_3, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wobei auch nach Gl. (8) die Beziehungen einzuhalten sind:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} \cos \beta_{11} m &= B_{31} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \gamma_{31} n, \\ B_{12} \cos \beta_{12} m &= B_{32} \cos \beta_{32} n, \\ B_{13} \cos \beta_{13} m &= B_{33} \cos \beta_{33} n. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nach Auswertung dieser Gleichungen sind die Amplituden von Grund- und Oberwellen folgendermaßen zu ermitteln:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \vartheta'_{01} & 1 & 1 \\ \vartheta'_m & \cos \beta_{12} m & \cos \beta_{13} m \\ \vartheta'_{02} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{vmatrix} & B_{12} &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} 1 & \vartheta'_{01} & 1 \\ \cos \beta_{11} m & \vartheta'_m & \cos \beta_{13} m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \gamma_{31} n} & \vartheta'_{02} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{vmatrix} \\ B_{13} &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \beta_{11} m & \cos \beta_{12} m & \cos \beta_{13} m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \gamma_{31} n} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{vmatrix} & A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \beta_{11} m & \cos \beta_{12} m & \cos \beta_{13} m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \gamma_{31} n} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Schließlich sind B_{31} , B_{32} und B_{33} aus Gl. (21) zu bestimmen, wodurch die Amplituden der Grundwellen und der beiden ersten Oberwellen annäherungsweise bekannt sind.

Die zur Grundwelle und zu jeder Oberwelle gehörigen Zeitkonstanten der Erwärmung sind aus Gl. (8) zu berechnen, wie schon erwähnt, sind dieselben für zueinander gehörige Oberwellen für die beiden Wicklungsabschnitte gleich. Man erhält für die Zeitkonstante der Grundwelle

$$T_1 = \frac{s_1 c_1}{q_1 + k_1 \beta_{11}^2} = \frac{s_3 c_3}{q_3 - k_3 \gamma_{31}^2} \quad (23)$$

bzw. für die der n -ten der Oberwelle

$$T_n = \frac{s_1 c_1}{q_1 + k_1 \beta_{1n}^2} = \frac{s_3 c_3}{q_3 - k_3 \beta_{3n}^2}. \quad (24)$$

Hinsichtlich der praktischen Anwendung der abgeleiteten Gleichungen bei Auswertung eines bestimmten Erwärmungsvorganges sei auf das im Abschnitt H gebrachte Rechnungsbeispiel verwiesen, bei welchem allerdings außerdem noch der Einfluß des Wärmeaustausches zwischen Wicklung und Blechpaket berücksichtigt wurde. Letzterer kann auf den Verlauf des Erwärmungsvorganges von bedeutendem Einfluß sein und gelangt nachstehend noch besonders zur Untersuchung. Handelt es sich um rasche, überschlägige Ermittlung der Zeitkonstanten der Grundwellen des Erwärmungsvorganges, so kann Gl. (19) in Verbindung mit (23) zur Bestimmung derselben verwendet werden. Da hierzu nur die Wärmeabgabezahlen, Wärmeleitfähigkeiten, spezifischen Wärmen und Beanspruchungen der Wicklung bekannt sein müssen, die genaue Kenntnis des Erwärmungsverlaufes im stationären Zustand aber nicht erforderlich ist, eignen sich diese Gleichungen, um den Einfluß von Änderungen

in der Auslegung und Beanspruchung von Maschinen auf die Zeitkonstante zu beurteilen. Dabei muß aber im Auge behalten werden, daß die nach diesen Gleichungen ermittelten Werte erst einige Zeit nach Beginn des Erwärmungs- bzw. Abkühlungsvorganges Gültigkeit haben, da ja gezeigt wurde, daß die ersten Temperaturänderungen wesentlich rascher erfolgen.

E. Temperaturverlauf bei teilweise in Eisen gebetteten Wicklungen mit Kühlfahnen an den Enden.

Bei Wicklungen dieser Gattung erfolgt durch die Wirkung der Kühlfahnen an den Wicklungsenden eine verstärkte Wärmeabfuhr gegenüber der im letzten Kapitel behandelten Anordnung; man findet diese Ausführungsart in der Regel bei Ankerwicklungen von mittel- bis ganz großen Gleichstrommaschinen bzw. Wechselstromkollektormotoren, eine diesbezügliche Anordnung ist wieder schematisch im Bild 9 dargestellt, zur Vereinfachung der Rechnung sei weiter angenommen, daß, wie auch im vorhergehenden Beispiel, die Wärmeabgabeverhältnisse beiderseits der Maschinenmittelebene gleichartig seien.

Der Rechnungsgang zur Ermittlung des zeitlichen und räumlichen Erwärmungsverlaufes bei gegebenen Belastungsverhältnissen ändert sich nicht gegen früher; nur ist auf die etwas abweichenden Randbedingungen hinsichtlich des Punktes O_2 Rücksicht zu nehmen. Man erhält zunächst als allgemeine Lösung für den Erwärmungsverlauf im stationären Zustand die beiden Gl. (3), Abschnitt D; hingegen ergibt sich für die Grenzbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta'_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} &= 0; & k_3 \frac{\partial \vartheta'_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= h \cdot \vartheta'_3 \Big|_{x_3=0}, \\ \vartheta'_1 \Big|_{x_1=m} &= \vartheta'_3 \Big|_{x_3=n}, \\ k_1 \frac{\partial \vartheta'_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=m} &= -k_3 \cdot \frac{\partial \vartheta'_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=n}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Bei Ermittlung der Wärmeabgabezahl h ist zu berücksichtigen, daß dieselbe auf den Stabquerschnitt unmittelbar vor Anschluß der Kühlzunge zu beziehen ist, für welchen auch der Wert k gilt. Das Wärmegefälle in der Kühlzunge selber wird damit, da vernachlässigbar, nicht in Rechnung gestellt.

Nach Ausrechnung der Integrationskonstanten in Gl. (3), Abschnitt D, ergibt sich endlich für den Erwärmungsverlauf im Beharrungszustand

$$\left. \begin{aligned} \vartheta'_1 &= \frac{i_{s_1}^2}{q_1 \lambda_0} + \frac{1}{z} \cdot k_3 \alpha_3 \mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_1 x_1 \left[\frac{i_{s_3}^2}{q_3 \lambda_0} - \frac{i_{s_1}^2}{q_1 \lambda_0} \right] \left[\mathfrak{E} \sin \alpha_3 n + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_3 n \right] - \frac{1}{z} \cdot \frac{i_{s_3}^2}{q_3 \lambda_0} \cdot h \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_1 x_1 \right], \right. \right. \\ \vartheta'_3 &= \frac{i_{s_3}^2}{q_3 \lambda_0} \left[1 + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathfrak{E} \sin \alpha_3 x_3 \right] + \frac{1}{z} \cdot k_1 \alpha_1 \left[\mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_3 x_3 + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathfrak{E} \sin \alpha_3 x_3 \right] \cdot \left[\frac{i_{s_1}^2}{q_1 \lambda_0} - \frac{i_{s_3}^2}{q_3 \lambda_0} \right] \cdot \mathfrak{E} \sin \alpha_1 m \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{z} \cdot \frac{i_{s_3}^2}{q_3 \lambda_0} \cdot h \cdot \left[\mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_3 x_3 + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathfrak{E} \sin \alpha_3 x_3 \right] \cdot \left[\mathfrak{E} \sin \alpha_1 m \mathfrak{E} \sin \alpha_3 n \cdot \frac{k_1 \alpha_1}{k_3 \alpha_3} + \mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_1 m \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{D} \left[\alpha_3 n \right] \right] \right] \right], \right. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

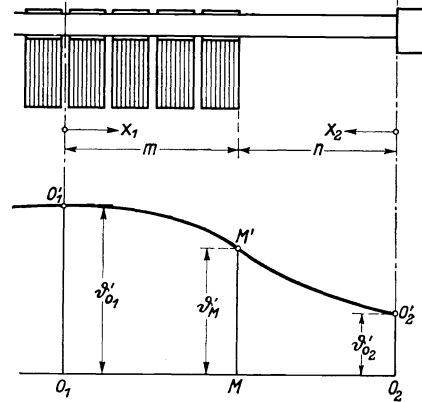


Bild 9. Teilweise in Eisen eingebettete Spule mit Kühlfahnen an den Enden, Erwärmungsverlauf längs Blechpaket, und Stirnverbindung.

hierin bedeutet die Größe z :

$$z = k_3 \alpha_3 \mathcal{C}o\alpha_1 m \left[\mathcal{S}in \alpha_3 n + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathcal{C}o\alpha_3 n \right] + k_1 \alpha_1 \mathcal{S}in \alpha_1 m \left[\mathcal{C}o\alpha_3 n + \frac{h}{k_3 \alpha_3} \mathcal{S}in \alpha_3 n \right]. \quad (4)$$

Den Ausgangspunkt zur Berechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufes bilden die beiden Gl. (7), Abschnitt D, die nachstehend der Übersichtlichkeit halber noch einmal angeschrieben sind,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= \sum_{\beta_1^2 = -\alpha_1^2}^{\beta_1^2 = \infty} e^{-\frac{k_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{s_1 c_1} \cdot t} [B_1' \cos \beta_1 x_1 + B_1' \sin \beta_1 x_1], \\ \vartheta_3'' &= \sum_{\beta_3^2 = -\alpha_3^2}^{\beta_3^2 = \infty} e^{-\frac{k_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)}{s_3 c_3} \cdot t} [B_3' \cos \beta_3 x_3 + B_3' \sin \beta_3 x_3], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und nach denen die Zerlegung der Ausgangserwärmungsverteilung zu erfolgen hat. Um den Grenzbedingungen (1) Genüge leisten zu können, dürfen nur die Werte für B_1' gleich Null gesetzt werden; die Grenzbedingung für das Temperaturgefälle im Punkte O_2 liefert hingegen für die Werte B_3''

$$B_3'' = B_3' \cdot \frac{h}{k_3 \beta_3}. \quad (6)$$

Damit erhält man mit neuen Werten für die Integrationskonstanten an Stelle von (5):

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= \sum_{\beta_1^2 = -\alpha_1^2}^{\beta_1^2 = \infty} e^{-\frac{k_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{s_1 c_1} \cdot t} \cdot B_1 \cos \beta_1 x_1, \\ \vartheta_3'' &= \sum_{\beta_3^2 = -\alpha_3^2}^{\beta_3^2 = \infty} e^{-\frac{k_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2)}{s_3 c_3} \cdot t} \cdot B_3 \cos \left(\beta_3 x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für größere Werte von β_3 , wie sie sich für die Oberwellen der Temperaturverteilung ergeben, wird $h/k_3 \beta_3$ bald vernachlässigbar klein und damit

$$\cos \left(\beta_3 x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_3} \right) = \cos \beta_3 x_3, \quad (8)$$

die Lage der Oberwellen wird nicht wesentlich durch das Anbringen der Kühlfahnen an den Stabenden beeinflusst. Es darf also, mit genügender Annäherung die Ermittlung der Werte von β_1 und β_3 nach der im früheren Abschnitt beschriebenen Methode durchgeführt werden. Bei Ermittlung der Wellenlänge der Grundwelle der Erwärmungsverteilung ist diese Vernachlässigung jedoch nicht statthaft, wenn man den Einfluß der Kühlfahnen nicht gänzlich außer acht lassen will. Man bekommt mit $\gamma_3 = i \cdot \beta_3$ für die Grundwelle zunächst an Stelle von Gl. (7)

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{11}'' &= e^{-\frac{q_1 + k_1 \beta_{11}^2}{s_1 c_1} \cdot t} \cdot B_{11} \cos \beta_{11} x_1, \\ \vartheta_{31}' &= e^{-\frac{q_3 - k_3 \gamma_{31}^2}{s_3 c_3} \cdot t} \cdot B_{31} \mathcal{C}o\left[\gamma_{31} x_3 + \mathfrak{A}r \mathfrak{I}g \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und daraus unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen im Punkt M die Gleichungen zur Ermittlung von β_{11} bzw. γ_{31} :

$$\frac{q_1 + k_1 \beta_{11}^2}{s_1 c_1} = \frac{q_3 - k_3 \gamma_{31}^2}{s_3 c_3} \quad (10)$$

und

$$\frac{k_1}{m} \cdot \beta_{11} m \operatorname{tg} \beta_{11} m = \frac{k_3}{n} \cdot \gamma_{31} n \mathfrak{I}g \left[\gamma_{31} n + \mathfrak{A}r \mathfrak{I}g \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right]. \quad (11)$$

Mit der weiteren Vereinfachung $\operatorname{tg} \beta_{11} m = \beta_{11} m$ und

$$\mathfrak{Tg} \left[\gamma_{31} n + \operatorname{Ar} \mathfrak{Tg} \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right] = \gamma_{31} n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}}$$

erhält man endlich folgende angenäherte Gleichungen zur Ermittlung von β_{11} und γ_{31}

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11}^2 &= \frac{\frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} + \frac{h}{s_3 c_3 n}}{\frac{k_1}{s_1 c_1} + \frac{k_1}{s_3 c_3} \cdot \frac{m}{n}}, \\ \gamma_{31}^2 &= \frac{\frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} - \frac{h}{s_1 c_1 m}}{\frac{k_3}{s_1 c_1} \cdot \frac{n}{m} + \frac{k_3}{s_3 c_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Diese beiden Beziehungen entsprechen den in Abschnitt D entwickelten Gl. (19) und gehen für $h = 0$ in dieselben über. Sie können vorteilhaft zur überschlägigen Ermittlung der Wellenlängen und Zeitkonstanten der Grundwelle herangezogen werden. Die Berechnung der Zeitkonstanten von Grund- und Oberwellen erfolgt auch hier unter Verwendung der beiden Gl. (23) und (24) in Abschnitt D; sie besitzen den gleichen Wert für zueinander gehörige Wellen der beiden Wicklungsabschnitte.

Eine Verbesserung der aus (12) angenähert ermittelten Werte für β_{11} und γ_{31} kann unter Benützung von Bild 8 gewonnen werden. Setzt man in (11) zur Vereinfachung

$$\mathfrak{Tg} \left[\gamma_{31} n + \operatorname{Ar} \mathfrak{Tg} \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right] = \mathfrak{Tg} \gamma_{31} \left[n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2} \right], \quad (13)$$

so kann Gl. (11) zunächst in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{k_1}{m} \cdot \beta_{11} m \operatorname{tg} \beta_{11} m = \frac{k_3}{n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2}} \cdot \gamma_{31} \left(n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2} \right) \cdot \mathfrak{Tg} \gamma_{31} \left(n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2} \right). \quad (14)$$

Mit Verwendung von Bild 8 erhält man dann analog wie im Abschnitt D verbesserten Werte für β_{11} und γ_{31} , wenn die beiden Strecken $\overline{OA}_0 = \beta_{11} m$ und $\overline{OB}_0 = \gamma_{31} \left(n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2} \right)$ so gewählt werden, daß

$$\frac{k_1}{s_1 c_1} \cdot \frac{1}{m^2} \overline{OA}_0^2 + \frac{k_3}{s_3 c_3} \cdot \frac{1}{\left[n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2} \right]} \cdot \overline{OB}_0^2 = \frac{q_3}{s_3 c_3} - \frac{q_1}{s_1 c_1} \quad (15)$$

und das Streckenverhältnis a_0/b_0 den Wert

$$\frac{a_0}{b_0} = - \frac{k_3}{k_1} \cdot \frac{m}{n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2}} \quad (16)$$

annimmt. Zur Berechnung von $n + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2}$ ist dabei der aus Gl. (12) bereits angenähert bekannte Wert γ_{31} zu verwenden.

Ein Vergleich der hier erhaltenen Ergebnisse mit jenen in Abschnitt D zeigt, daß durch die Wirkung der Kühlfahnen an den Stabenden eine Verringerung des Wertes für γ_{31} und eine Erhöhung jenes für β_{11} eintritt Gl. (12). Beides wirkt im Sinne einer Verringerung der Erwärmungskonstante der Grundwelle, so daß auch hier die bekannte Erfahrung rechnermäßig bestätigt wird, derzufolge jede Verbesserung der Wärmeabgabeverhältnisse eine Abkürzung des Erwärmungsanstieges oder der Abkühlung einer Maschine und damit eine schnellere Erreichung des stationären Zustandes zur Folge hat.

Zur annäherungsweise Zerlegung der Ausgangstemperaturverteilung in ihre Grundwelle und die beiden ersten Oberwellen kann ebenfalls die Annahme getroffen werden, daß die Ersatzkurve durch die Punkte O_1 , M' und O_2 hindurchgeht. Hierzu genügt der Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta'_1 &= B_{11} \cos \beta_{11} x_1 + B_{12} \cos \beta_{12} x_1 + B_{13} \cos \beta_{13} x_1, \\ \vartheta'_3 &= B_{31} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} x_3 + \mathfrak{A} \mathfrak{r} \mathfrak{T} \mathfrak{g} \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right] + B_{32} \cos \left[\beta_{32} x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_{32}} \right] \\ &\quad + B_{33} \cos \left[\beta_{33} x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_{33}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Führt man auch hier die Vereinfachungen ein, die schon bei Ermittlung der β - und γ -Werte vorgenommen wurden, so ergibt sich für ϑ'_3 einfacher

$$\vartheta''_3 = B_{31} \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} x_3 + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}} \right] + B_{32} \cos \beta_{32} x_3 + B_{33} \cos \beta_{33} x_3. \quad (18)$$

Die Stetigkeitsbedingungen im Punkt M liefern analog wie im vorigen Abschnitt

$$\left. \begin{aligned} B_{11} \cos \beta_{11} m &= B_{31} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} n \left(1 + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2 n} \right) \right], \\ B_{12} \cos \beta_{12} m &= B_{32} \cos \beta_{32} n, \\ B_{13} \cos \beta_{13} m &= B_{33} \cos \beta_{33} n. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Damit ist man in der Lage, die Amplituden von Grund- und Oberwellen auch hier zu ermitteln. Man erhält für dieselben:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} \vartheta'_{01} & 1 & 1 \\ \vartheta'_m & \cos \beta_{12} m & \cos \beta_{13} m \\ \vartheta'_{02} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{array} \right| & B_{12} &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \vartheta'_{01} & 1 \\ \cos \beta_{11} m & \vartheta'_m & \cos \beta_{13} m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} n \left(1 + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2 n} \right) \right]} & \vartheta'_{02} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{array} \right| \\ B_{13} &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \vartheta'_{02} \\ \cos \beta_{11} m & \cos \beta_{12} m & \vartheta'_m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} n \left(1 + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2 n} \right) \right]} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \vartheta'_{02} \end{array} \right| & \Delta &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \cos \beta_{11} m & \cos \beta_{12} m & \cos \beta_{13} m \\ \frac{\cos \beta_{11} m}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \left[\gamma_{31} n \left(1 + \frac{h}{k_3 \gamma_{31}^2 n} \right) \right]} & \frac{\cos \beta_{12} m}{\cos \beta_{32} n} & \frac{\cos \beta_{13} m}{\cos \beta_{33} n} \end{array} \right| \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

F. Temperaturverteilung bei in Eisen eingebetteten Wicklungsspulen unter Berücksichtigung des Wärmeaustausches zwischen Wicklung und Eisen.

Bei den bisher behandelten Beispielen wurde nicht berücksichtigt, daß im Blechpaket selber Wärmequellen vorhanden sind, und daß diese, sowie die Wärmekapazität des Blechpaketes auf den Erwärmungsverlauf der Wicklung unter Umständen von entscheidendem Einfluß sein können. Ist der Einfluß der Eisenverluste auf die Wicklungserwärmung nicht mehr vernachlässigbar, so muß der Wärmeaustausch zwischen Wicklung und Blechpaket in Rechnung gezogen werden, dasselbe ist auch bei Verfolgung des Verlaufes der Eisenerwärmungen erforderlich. Dabei kann dann natürlich eine entsprechend umständliche Rechnung nicht vermieden werden.

Zunächst sollen die dabei auftretenden Verhältnisse bei einer Anordnung entsprechend der nach Bild 5 untersucht werden, das Blechpaket sei wie dort ohne

achsennormale Kühlschlitze gedacht. Entsprechende Wicklungsanordnungen sind in der Praxis, wie bereits erwähnt, bei Käfig- oder Dämpferwicklungen anzutreffen, auch Spulenwicklungen mit kurzen Stirnverbindungen und relativ großer Paketlänge dürften nach der nachstehend geschilderten Rechnungsart zu behandeln sein. Letztere gilt natürlich auch ganz allgemein für die Fälle, wo in zwei Körpern Wärmegefälle parallel zu ihrer Berührungsfläche auftreten und außerdem ein Wärmeaustausch senkrecht dazu stattfinden kann. Die Kühlungsverhältnisse seien wieder der Einfachheit halber symmetrisch zur Symmetrieebene SS des Wicklungskörpers angenommen (Bild 10).

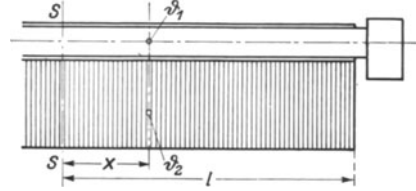


Bild 10. Leiter im Blechpaket. Berücksichtigung des Wärmeaustausches zwischen Leiter und Blechpaket.

Es bezeichnet V die Verluste in Watt/cm³ für den betrachteten Teil ($V = i_s^2 / \lambda_0$ für das Wicklungsmetall), weiter soll Index 1 bzw. 2 sich auf Wicklung resp. Blechpaket beziehen. Die Wärmemenge, welche durch Wärmeaustausch zwischen Wicklung und Eisenkörper der ersteren entzogen wird, sei, auf 1 cm³ Wicklungsmetall bezogen, gleich

$$W_1 = r_1(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (1)$$

Die Wärmemenge, die vom Blechpaket aufgenommen wird, sei, ebenfalls auf 1 cm³ Blechmaterial bezogen,

$$-W_2 = r_2(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (2)$$

Mit diesen Festsetzungen erhält man als Ausgangsgleichungen für den Wärmeverlauf in der Richtung von x :

$$\left. \begin{aligned} V_1 - \left[p_1 - \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon \right] \cdot \vartheta_1 - r_1(\vartheta_1 - \vartheta_2) + k_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} &= s_1 c_1 \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \\ V_2 - p_2 \vartheta_2 - r_2(\vartheta_2 - \vartheta_1) + k_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} &= s_2 c_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

oder bei Verwendung der Abkürzungen

$$q_1 = p_1 - \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon + r_1; \quad q_2 = p_2 + r_2, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 - q_1 \vartheta_1 + r_1 \vartheta_2 + k_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} &= s_1 c_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \\ V_2 - q_2 \vartheta_2 + r_2 \vartheta_1 + k_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} &= s_2 c_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mit der allgemeinen Lösung für den Wärmeverlauf im stationären Zustand

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{V_2 r_1 + V_2 q_2}{q_1 q_2 - r_1 r_2} + A_1' \mathcal{C}0[\alpha_1 x + B_1' \mathcal{S}in \alpha_1 x + A_1'' \mathcal{C}0[\alpha_2 x + B_1'' \mathcal{S}in \alpha_2 x, \\ \vartheta_2 &= \frac{V_1 r_2 + V_2 q_1}{q_1 q_2 - r_1 r_2} + A_2' \mathcal{C}0[\alpha_1 x + B_2' \mathcal{S}in \alpha_1 x + A_2'' \mathcal{C}0[\alpha_2 x + B_2'' \mathcal{S}in \alpha_2 x, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wobei α gegeben ist durch

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{[k_1 q_2 + k_2 q_1] \pm \sqrt{[k_1 q_2 - k_2 q_1]^2 + 4 k_1 k_2 r_1 r_2}}{2 k_1 k_2}. \quad (7)$$

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten sind wieder die Grenzbestimmungen in Betracht zu ziehen, bei der Anordnung nach Bild 10 gilt für $x = l$:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \cdot \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial x_1} + h_1 \cdot \vartheta_1' &= 0, \\ k_2 \cdot \frac{\partial \vartheta_2'}{\partial x_2} + h_2 \cdot \vartheta_2' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wobei h_1 und h_2 auf den Wicklungs- bzw. Eisenquerschnitt bezogen werden müssen, auch wenn die Oberfläche durch konstruktive Mittel künstlich vergrößert ist. Weiter sind die Integrationskonstanten in Gl. (6) mit Rücksicht auf (5) noch den folgenden Bedingungen unterworfen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A'_2}{A'_1} = \frac{B'_2}{B'_1} = \frac{q_1 - k_1 \alpha_1^2}{r_1} = \kappa_1, \\ \frac{A''_2}{A''_1} = \frac{B''_2}{B''_1} = \frac{r_2}{q_2 - k_2 \alpha_2^2} = \frac{1}{\kappa_2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Führt man noch die Abkürzungen ein:

$$M = \frac{V_2 r_1 + V_1 q_2}{q_1 q_2 - r_1 r_2}; \quad N = \frac{V_1 r_2 + V_2 q_1}{q_1 q_2 - r_1 r_2}, \quad (10)$$

$$z = \left. \begin{aligned} (1 - \kappa_1 \kappa_2) k_1 k_2 \cdot \alpha_1 \text{Sin} \alpha_1 l \cdot \alpha_2 \text{Sin} \alpha_2 l + (1 - \kappa_1 \kappa_2) h_1 h_2 \text{Cos} \alpha_1 l \cdot \text{Cos} \alpha_2 l \\ + (h_1 k_2 - h_2 k_1 \cdot \kappa_1 \kappa_2) \cdot \text{Cos} \alpha_1 l \cdot \alpha_2 \text{Sin} \alpha_2 l - (h_1 k_2 \cdot \kappa_1 \kappa_2 - h_2 k_1) \cdot \alpha_1 \text{Sin} \alpha_1 l \cdot \text{Cos} \alpha_2 l, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

so erhält man schließlich für die Temperaturverteilung bei der Anordnung nach Bild 10 im stationären Zustand:

$$\vartheta'_1 = \left. \begin{aligned} M + \frac{1}{z} \cdot \text{Cos} \alpha_1 x [h_2 k_1 \cdot N \kappa_2 - h_1 k_2 M] \cdot \alpha_2 \text{Sin} \alpha_2 l + h_1 h_2 (N \kappa_2 - M) \text{Cos} \alpha_2 l \\ + \frac{1}{z} \cdot \text{Cos} \alpha_2 x [h_1 k_2 \cdot M \kappa_1 \kappa_2 - h_2 k_1 N \kappa_2] \cdot \alpha_1 \text{Sin} \alpha_1 l + h_1 h_2 (M \kappa_1 \kappa_2 - N \kappa_2) \text{Cos} \alpha_1 l, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\vartheta'_2 = \left. \begin{aligned} N + \frac{1}{z} \cdot \text{Cos} \alpha_2 x [h_1 k_2 \cdot M \kappa_1 - h_2 k_1 N] \cdot \alpha_1 \text{Sin} \alpha_1 l + h_1 h_2 (M \kappa_1 - N) \text{Cos} \alpha_1 l \\ + \frac{1}{z} \cdot \text{Cos} \alpha_1 x [h_2 k_1 \cdot N \kappa_1 \kappa_2 - h_1 k_2 M \kappa_1] \cdot \alpha_2 \text{Sin} \alpha_2 l + h_1 h_2 (N \kappa_1 \kappa_2 - M \kappa_1) \text{Cos} \alpha_2 l. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ist derart rechnerisch wie beschrieben oder auch experimentell der Erwärmungsverlauf im stationären Zustand ermittelt, so kann mit der Bestimmung der nichtstationären Angleichsvorgänge begonnen werden. Es wird wieder der Erwärmungsanteil ϑ'' berechnet, welcher im betrachteten Zeitpunkt die stationäre Erwärmung ϑ' zur tatsächlich vorhandenen Gesamterwärmung ergänzt. ϑ'' ist dann aus der Differentialgleichung zu bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} -q_1 \vartheta''_1 + r_1 \vartheta''_2 + k_1 \frac{\partial^2 \vartheta''_1}{\partial x^2} = s_1 c_1 \cdot \frac{\partial \vartheta''_1}{\partial t}, \\ -q_2 \vartheta''_2 + r_2 \vartheta''_1 + k_2 \frac{\partial^2 \vartheta''_2}{\partial x^2} = s_2 c_2 \cdot \frac{\partial \vartheta''_2}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta''_1 = \sum e^{-\xi t} [B'_1 \cos \beta_1 x + B''_1 \sin \beta_1 x], \\ \vartheta''_2 = \sum e^{-\xi t} [B'_2 \cos \beta_2 x + B''_2 \sin \beta_2 x]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufes der Erwärmungen muß also auch hier die Zerlegung der Temperaturkurve in Grund- und Oberwellen durchgeführt werden, deren Zeitkonstanten dann einzeln zu berechnen sind. Bei dem hier näher betrachteten Beispiel der Anordnungen nach Bild 10 sind zur Ermittlung der β -Welle die Grenzbedingungen (8) maßgebend, man erhält

$$l \beta_1 \cdot \text{tg} l \beta_1 = \frac{h_1}{k_1} \cdot l \quad \text{und} \quad l \beta_2 \cdot \text{tg} l \beta_2 = \frac{h_2}{k_2} \cdot l, \quad (16)$$

woraus die β -Werte unter Zuhilfenahme von Bild 8 direkt zu berechnen sind. Die Amplituden der Grund- und der ersten Oberwelle sind dann annäherungsweise durch Gl. (20) und (21), Abschnitt C, gegeben; die Sinusglieder entfallen, da symmetrische

Temperaturverteilung und Wärmeabgabeverhältnisse vorausgesetzt werden. Erscheint es hinreichend, nur mit der Grundwelle allein zu rechnen, so sind deren Amplituden und Wellenlängen noch einfacher nach Gl. (13), Abschnitt C, zu ermitteln.

Ist die beschriebene Zerlegung der Erwärmungskurven durchgeführt, so kann die Ermittlung der thermischen Zeitkonstanten vorgenommen werden. Zunächst werde angenommen, daß $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ für die beiden thermisch parallelgeschalteten Körper sei. Dann erhält man aus (14) und (15) die nachstehende Bedingungsgleichung zwischen ξ und β :

$$[s_1 c_1 \xi - k_1 \beta^2 - q_1][s_2 c_2 \xi - k_2 \beta^2 - q_2] - r_1 r_2 = 0 \quad (17)$$

bzw. für ξ :

$$\xi_{1,2} = \frac{s_1 c_1 (q_2 + k_2 \beta^2) + s_2 c_2 (q_1 + k_1 \beta^2)}{2 s_1 c_1 s_2 c_2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_1 c_1 (q_2 + k_2 \beta^2) - s_2 c_2 (q_1 + k_1 \beta^2)}{2 s_1 c_1 s_2 c_2} \right)^2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 c_1 s_2 c_2}}. \quad (18)$$

Es zerfallen also hier infolge des Wärmeausgleiches zwischen Wicklung und Blechpaket die Amplituden der Wärmeverteilung in je zwei Teile, von denen jeder mit der ihm zugehörigen Zeitkonstante abklingt. Bezeichnet etwa M_1 die Amplitude der Grundwelle von ϑ_1'' und N_1 jene von ϑ_2'' , so errechnen sich die beiden Anteile von M_1 bzw. N_1 :

$$\left. \begin{aligned} M_1' + M_1'' &= M_1, \\ N_1' + N_1'' &= N_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

aus Gl. (14), indem man zu β die beiden Werte von ξ einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= \frac{M_1 - S N_1}{1 - R S}, & M_1'' &= \frac{N_1 S - M_1 R S}{1 - R S}, \\ N_1' &= \frac{M_1 R - N_1 R S}{1 - R S}, & N_1'' &= \frac{N_1 - M_1 R}{1 - R S}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wobei die Abkürzungen R und S die Bedeutung haben:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{q_1 + k_1 \beta^2 - s_1 c_1 \xi_1}{r_1}, \\ S &= \frac{q_2 + k_2 \beta^2 - s_2 c_2 \xi_2}{r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Für den Grenzfall verschwindenden Wärmeaustausches ($r_1 = 0$ und $r_2 = 0$) erhält man für die reziproken Zeitkonstanten ξ_1' und ξ_2' aus (18)

$$\xi_1' = \frac{q_2 + k_2 \beta^2}{s_2 c_2} \quad \text{und} \quad \xi_2' = \frac{q_1 + k_1 \beta^2}{s_1 c_1}, \quad (22)$$

es sind dies die gleichen Werte, die im Abschnitt C gefunden wurden, wo dieselbe Wicklungsanordnung, aber ohne Rücksicht auf den Wärmeaustausch untersucht wurde. Bei Berücksichtigung des Wärmeaustausches liegt, wenn derselbe im Vergleich zur Wärmeabgabe nicht sehr groß ist, die eine Lösung ξ_1 von Gl. (18), in der Nähe von ξ_1' und stellt den Reziprokwert der Zeitkonstante für jenen Erwärmungsanteil dar, für welchen die Wärmekapazität des Blechpaketes maßgebend ist und die Wärmeabgabe sowohl direkt als auch über die Wicklung erfolgt. Umgekehrt liegt die Lösung ξ_2 in der Nähe von ξ_2' und gilt im wesentlichen für den zeitlichen Verlauf der Wicklungserwärmung. Durch die Wirkung des Wärmeaustausches wird somit der Erwärmungsverlauf im Blechpaket im allgemeinen beschleunigt ($\xi_1 > \xi_1'$) und in der Wicklung verzögert ($\xi_2 < \xi_2'$). Für sehr hohe Werte der Wärmeaustauschzahlen bei geringer Wärmeabgabe stellt ξ_1 den Reziprokwert der Zeitkonstante für den Ausgleich der

Temperaturunterschiede zwischen Wicklung und Blechpaket dar, während ξ_2 die gemeinsame Zeitkonstante für das Erreichen des Beharrungszustandes angibt.

Im allgemeinen sind aber die β -Werte für die beiden thermisch parallelgeschalteten Körper nicht dieselben, sondern mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen (8) voneinander verschieden. Es kann dann mit dem Lösungsansatz Gl. (15) der Einfluß des Wärmeaustausches nur annäherungsweise berücksichtigt werden, wobei wie nachstehend beschrieben vorzugehen ist. Es sollen nur die Verhältnisse der Grundwelle der Erwärmungsverteilung betrachtet werden; ist es notwendig, auch die Oberwellen in Rechnung zu stellen, so hat dies sinngemäß zu erfolgen.

Zunächst sind aus den Grenzbedingungen (8) oder bei Vernachlässigung der Oberwellen aus Gl. (13), Abschnitt C, die Werte β_1 und β_2 für Wicklung und Blechpaket sowie die zugehörigen Amplituden zu bestimmen. Man erhält dann als Lösungsansatz für den nichtstationären Erwärmungsteil, wenn, wie vorausgesetzt, nur die Grundwelle betrachtet wird,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= e^{-\xi t} \cdot B_1 \cos \beta_1 x, \\ \vartheta_2'' &= e^{-\xi t} \cdot B_2 \cos \beta_2 x. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Führt man diese Werte in die Ausgangsdifferentialgleichungen (14) ein, so ist sofort ersichtlich, daß infolge der Verschiedenheit von β_1 und β_2 dieselben nur für ein bestimmtes, passend zu wählendes x erfüllt werden können. Trifft man die Festsetzung, daß für $x = l'$ die Gl. (14) exakt erfüllt sein sollen, so erhält man als Beziehung zwischen B_1 und B_2

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\cos \beta_2 l'}{\cos \beta_1 l'} \cdot \frac{r_1}{q_1 + k_1 \beta_1^2 - s_1 c_1 \xi_1} = \frac{\cos \beta_2 l'}{\cos \beta_1 l'} \cdot \frac{q_2 + k_2 \beta_2^2 - s_2 c_2 \xi_2}{r_2} \quad (24)$$

und daraus als Bedingungsgleichung zwischen β_1 , β_2 und ξ :

$$[s_1 c_1 \xi - k_1 \beta_1^2 - q_1][s_2 c_2 \xi - k_2 \beta_2^2 - q_2] - r_1 r_2 = 0 \quad (25)$$

mit den Lösungen für ξ :

$$\xi_{1,2} = \frac{s_1 c_1 (q_2 + k_2 \beta_2^2) + s_2 c_2 (q_1 + k_1 \beta_1^2)}{2 s_1 c_1 s_2 c_2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_1 c_1 (q_2 + k_2 \beta_2^2) - s_2 c_2 (q_1 + k_1 \beta_1^2)}{2 s_1 c_1 \cdot s_2 c_2} \right)^2 + \frac{r_1 r_2}{s_1 c_1 s_2 c_2}} \quad (26)$$

Für die Aufteilung der Amplituden auf die zwei Teilwellen verschiedener Zeitkonstante gelten auch hier unveränderlich die beiden Gl. (20), nur die Größe von R und S hängt von der Wahl der Strecke l' ab. Man erhält für R bzw. S :

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{q_1 + k_1 \beta_1^2 - s_1 c_1 \xi_1}{r_1} \cdot \frac{\cos \beta_1 l'}{\cos \beta_2 l'}, \\ S &= \frac{q_2 + k_2 \beta_2^2 - s_2 c_2 \xi_2}{r_2} \cdot \frac{\cos \beta_2 l'}{\cos \beta_1 l'}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Will man den Einfluß der ungleichen Werte von β_1 und β_2 auf den Wärmeaustausch im Mittel richtig berücksichtigen, so ist für die Grundwelle der Erwärmungsverteilung in Anbetracht ihres parabelähnlichen Verlaufes zweckmäßig $l' = \frac{l}{3}$ einzuführen. Bei der Kleinheit der Amplituden der Oberwellen wird es mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Rechnung in der Regel zulässig sein, $l' = 0$ zu setzen, wodurch der letzte Faktor in Gl. (27) in Fortfall kommt.

G. Wärmeaustausch zwischen Wicklung und Eisen bei unterteilten Blechpaketen.

Sind die Stärken der einzelnen Teilpakete, wie dies in der Praxis bei größeren Maschinen stets der Fall ist, klein im Verhältnis zur gesamten Blechpaketlänge, dann kann man bei Wicklungsanordnungen ähnlich denen, die unter Abschnitt D und E behandelt werden, für den gegenseitigen Wärmeaustausch mit der mittleren Wicklungs- bzw. Eisenerwärmung je Teilpaket rechnen. Es treten dann die Erwärmungsdifferenzen innerhalb jedes Teilabschnittes gegenüber der Gesamterwärmung in den Hintergrund. Berücksichtigt man noch, daß infolge der die einzelnen Teilpakete trennenden Luftkanäle der Wärmeaustausch zwischen diesen in axialer Richtung verschwindend ist, so können die Überlegungen des vorigen Abschnittes unverändert beibehalten werden, wenn man $k_2 = 0$ setzt. Die Größe ϑ_2 bedeutet dann sinngemäß die mittlere Übertemperatur der Teilpakete.

Mit den im vorhergehenden Abschnitt angewendeten Bezeichnungen ergibt sich demnach zunächst als allgemeine Gleichung für den Wärmeverlauf:

$$\left. \begin{aligned} V_1 - q_1 \vartheta_1 + r_1 \vartheta_2 + k_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} &= s_1 c_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \\ V_2 - q_2 \vartheta_2 + r_2 \vartheta_1 &= s_2 c_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und als Lösung für den stationären Zustand:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1' &= \frac{V_2 r_1 + V_1 q_2}{q_1 q_2 - r_1 r_2} + A_1 \cdot \cos \alpha x + B_1 \sin \alpha x, \\ \vartheta_2' &= \frac{V_1 r_2 + V_2 q_1}{q_1 q_2 - r_1 r_2} + A_2 \cdot \cos \alpha x + B_2 \sin \alpha x, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\alpha^2 = \frac{r_1}{k_1} \left[\frac{q_1}{r_1} - \frac{r_2}{q_2} \right]. \quad (3)$$

Der Temperaturverlauf der Wicklung in axialer Richtung stellt sich also auch bei Berücksichtigung des Wärmeaustausches so ein, wie unter Abschnitt D und E für Wicklungen mit Kühlung durch die Stirnverbindungen bzw. Kühlfahnen hergeleitet wurde. Man kann die dort abgeleiteten Beziehungen unverändert verwenden, wenn man in den Gl. (5), Abschnitt D, und (2), (3), Abschnitt E, den Wert

$$\frac{i_{s_1}^2}{q_1 \lambda_0} = \frac{V_2 r_1 + V_1 q_2}{q_1 q_2 - r_1 r_2} \quad (4)$$

setzt und in den Gl. (5), (6), Abschnitt D, und (2) bis (4), Abschnitt E, für die Größe α den nach Gl. (3) ermittelten Wert einführt.

Der Verlauf der mittleren Erwärmungen je Teilblechpaket ist am einfachsten aus Gl. (1) zu ermitteln, man erhält dann:

$$\vartheta_2' = \frac{V_2 + r_2 \vartheta_1'}{q_2}, \quad (5)$$

woraus dieselben nach erfolgter Bestimmung der Wicklungserwärmungen ohne weiteres angegeben werden können.

Bei der dargestellten Berechnung des Erwärmungsverlaufes wurde nach dem Vorgange von Böhm¹⁾ das tatsächlich vorhandene, durch achsennormale Kühlschlitze unterteilte Blechpaket durch ein solches von homogenem Aufbau ersetzt,

¹⁾ Siehe Fußnote S. 33.

dessen Wärmeleitfähigkeit in axialer Richtung gleich Null gesetzt wurde. Es beziehen sich daher auch die in die Rechnung eingeführten Größen V_2 , q_2 , r_2 und $s_2 c_2$ auf diesen Ersatzkörper. Um den Zusammenhang zwischen denselben und den entsprechenden Größen des tatsächlich vorhandenen unterteilten Blechpaketkörpers zu erhalten, muß der Wärmeverlauf in den einzelnen Teilpaketen des letzteren näher betrachtet werden. Spezifische Verluste, Wärmeabgabezahlen, spez. Wärmen usw., die sich auf die einzelnen Teilpakete beziehen, sollen dabei den Index e erhalten.

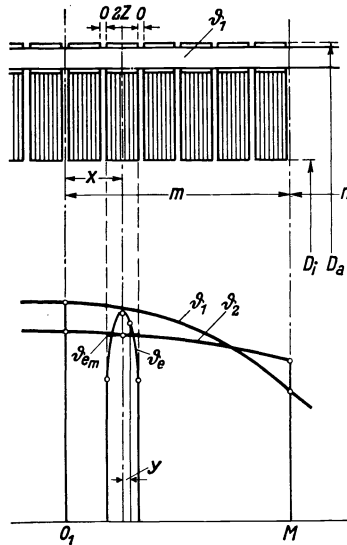


Bild 11. Verlauf der Übertemperaturen in den einzelnen Teilpaketen (ϑ_e); durchschnittlicher Verlauf im Blechpaket (ϑ_2) und in der Wicklung (ϑ_1).

Für das Teilpaket, dessen Mittellinie (Bild 11) durch x gegeben ist, betrage die mittlere Wicklungsübertemperatur ϑ_1 . Die Wärmeübergangszahl von der Wicklung zum Blechpaket, auf das letztere bezogen, sei r_e ; die Wärmeabgabezahl der Mantelflächen p_e ; die Wärmeabgabezahl der Seitenflächen an den Kühlkanälen h_e ; die spezifischen Verluste seien mit V_e ; die spezifische Wärme mit $s_e \cdot c_e$ und die Wärmeleitfähigkeit quer zum Paket mit k_e bezeichnet. Bedeutet ferner

$$q_e = p_e + r_e, \quad (6)$$

dann erhält man für den Erwärmungsverlauf im Teilpaket:

$$V_e - q_e \vartheta_e + r_e \vartheta_1 + k_e \frac{\partial^2 \vartheta_e}{\partial y^2} = s_e c_e \cdot \frac{\partial \vartheta_e}{\partial t} \quad (7)$$

und, weil für ϑ_1 der Mittelwert längs der Strecke $2z$ genommen wurde, für ϑ_e im stationären Zustand:

$$\vartheta_e' = \frac{V_e + r_e \vartheta_1'}{q_e} \cdot \frac{h_e [\mathfrak{C}o] \alpha z - \mathfrak{C}o[\alpha y] + k_e \alpha \cdot \mathfrak{S}in \alpha z}{h_e \cdot \mathfrak{C}o[\alpha z] + k_e \alpha \mathfrak{S}in \alpha z}; \quad (8)$$

$$\alpha = \sqrt{q_e / k_e}$$

bzw. als Mittelwert

$$\vartheta_2' = \vartheta_{em}' = \frac{V_e + r_e \vartheta_1'}{q_e} \cdot \frac{h_e \left[\mathfrak{C}o[\alpha z] - \frac{1}{\alpha z} \cdot \mathfrak{S}in \alpha z \right] + k_e \alpha \mathfrak{S}in \alpha z}{h_e \mathfrak{C}o[\alpha z] + k_e \alpha \mathfrak{S}in \alpha z}. \quad (9)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Kennzahlen für das unterteilte Blechpaket und für den homogenen Ersatzkörper ergeben sich damit zu

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= V_e \cdot \frac{2z}{2z + o}, & r_2 &= r_e \cdot \frac{2z}{2z + o}, \\ q_2 &= q_e \cdot \frac{2z}{2z + o} \cdot \frac{h_e \cdot \mathfrak{C}o[\alpha z] + k_e \alpha \mathfrak{S}in \alpha z}{h_e \left[\mathfrak{C}o[\alpha z] - \frac{1}{\alpha z} \cdot \mathfrak{S}in \alpha z \right] + k_e \alpha \cdot \mathfrak{S}in \alpha z} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Ausdrücke für V_2 und r_2 leiten sich aus der Überlegung her, daß diese Größen auf die Paketlänge einschließlich Kühlschlitze bezogen sind, während V_e und r_e nur für die wirksame Eisenlänge Geltung haben. Damit ergibt sich dann unter Benützung von Gl. (5) und (9) die obige Beziehung für q_2 .

Mit Rücksicht auf die im allgemeinen geringen Werte der Stärke der einzelnen Teilpakete $2z$ kann noch zur Vereinfachung in Gl. (10) $\mathfrak{S}in \alpha z = \alpha z$; $\mathfrak{C}o[\alpha z] = 1 + \frac{\alpha^2 z^2}{2}$ und $\frac{1}{\alpha z} \mathfrak{S}in \alpha z = 1 + \frac{\alpha^2 z^2}{6}$ gesetzt werden, der entstehende Fehler ist in allen

Fällen unbedeutend. Dann erhält man an Stelle von Gl. (10) den für Zahlenrechnungen bequemeren Ausdruck

$$q_2 = \frac{2z}{2z + o} \cdot \frac{1 + q_e \left[\frac{z^2}{2k_e} + \frac{z}{h_e} \right]}{\frac{z^2}{3k_e} + \frac{z}{h_e}}. \quad (11)$$

Bezüglich des zeitlichen Verlaufes der Erwärmung gelten im wesentlichen die Überlegungen des vorigen Abschnittes, nur ist zu beachten, daß Unterschiede hinsichtlich der Grenzbedingungen im Punkte M bestehen, da hier die verstärkte Kühlung der Stirnverbindungen zu berücksichtigen ist (Bild 7), evtl. auch der Einfluß zusätzlicher Kühlfahnen an den Stabenden (Bild 9). Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden wieder die beiden Gl. (15), Abschnitt F:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= \sum e^{-\xi t} [B_1' \cos \beta_1 x + B_1'' \sin \beta_1 x] && \text{für die Wicklung} \\ \text{bzw. } \vartheta_2'' &= \sum e^{-\xi t} [B_2' \cos \beta_2 x + B_2'' \sin \beta_2 x] && \text{für das Blechpaket.} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für die Ermittlung der β_2 -Werte des Ersatzblechpaketkörpers bei Vorhandensein von achsennormalen Kühlschlitzen ist zu berücksichtigen, daß entsprechend der als verschwindend klein angenommenen axialen Wärmeleitfähigkeit k_2 auch die Wärmeabgabezahl h_2 der Endfläche in Gl. (16) Abschnitt F, gleich Null zu setzen ist; demnach kann der Ausdruck $l\beta_2 \cdot \operatorname{tg} l\beta_2$ jeden Wert annehmen und folglich β_2 beliebig gewählt werden. Sind die Erwärmungsunterschiede zwischen den Teilpaketen in der Mitte und am Ende der Maschine nicht erheblich, derart, daß auch dem Ersatzblechpaketkörper eine im wesentlichen gleichartige Erwärmung zuzuschreiben ist, dann ist es am einfachsten, mit einem Mittelwert von ϑ_2 zu rechnen und β_2 gleich Null anzunehmen. Man erhält dann, da auch die Wicklungsübertemperatur längs eines Teilpaketes als konstant angesehen wurde und daher β_1 für Ermittlung der Blechpaketzeitkonstanten ebenfalls gleich Null zu setzen ist, für die reziproken Zeitkonstanten an Stelle von Gl. (26), Abschnitt F:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{q_1}{s_1 c_1} + \frac{q_2}{s_2 c_2} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{q_1}{s_1 c_1} - \frac{q_2}{s_2 c_2} \right]^2 + \frac{4r_1 r_2}{s_1 c_1 s_2 c_2}}. \quad (13)$$

Die Bestimmung der β_1 -Werte der Wicklung hat mit Rücksicht auf die Kühlungsverhältnisse der Stirnverbindungen zu erfolgen, sie ergeben sich verschieden, je nachdem dieselben mit Kühlfahnen ausgerüstet sind oder nicht. Als Grenzbedingungen im Punkt M erhält man analog Gl. (10) und (11), Abschnitt D, bzw. (10) und (11), Abschnitt E:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{q_1 + k_1 \beta_1^2}{s_1 c_1} + \frac{q_2 + k_2 \beta_2^2}{s_2 c_2} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{q_1 + k_1 \beta_1^2}{s_1 c_1} - \frac{q_2 + k_2 \beta_2^2}{s_2 c_2} \right]^2 + \frac{4r_1 r_2}{s_1 c_1 s_2 c_2}} = \frac{q_3 + k_3 \beta_3^2}{s_3 c_3}, \quad (14)$$

wobei sich die mit Index 3 gekennzeichneten Größen auf die Stirnverbindung beziehen, ferner

$$\frac{k_1}{m} \cdot \beta_1 m \operatorname{tg} \beta_1 m = - \frac{k_3}{n} \beta_3 n \operatorname{tg} \beta_3 n \quad (15)$$

oder an deren Stelle Gl. (11), Abschnitt E, falls die Wicklung mit Kühlfahnen in Mitte der Stirnverbindung ausgerüstet ist.

Wie aus Gl. (14) erkennbar, tritt der Einfluß des gegenseitigen Wärmeaustausches auf die Wellenlänge der Oberwellen der Temperaturverteilung (große Werte von β_1 und β_3) mehr und mehr in den Hintergrund. Setzt man annäherungsweise $r_1 r_2 = 0$,

so erhält man für die beiden Lösungen von β_1 und β_3 an Stelle von (14), wie in Abschnitt D bereits hergeleitet wurde:

$$\frac{q_1 + k_1 \beta_1^2}{s_1 c_1} = \frac{q_3 + k_3 \beta_3^2}{s_3 c_3}, \quad (16)$$

woraus in Verbindung mit Gl. (15) und unter Zuhilfenahme von Bild 8 die Wellenlänge der Temperaturoberwellen zu bestimmen ist.

Für die Grundwelle der Erwärmungsverteilung können sich auch hier β_1^2 und β_3^2 in Gl. (14) und (15) negativ ergeben, so daß in bereits beschriebener Weise der Temperaturverlauf mittels Hyperbelfunktionen anzugeben ist. Die Ermittlung von β_1 und β_3 aus den beiden Gleichungen muß dabei empirisch erfolgen, wobei ebenfalls Bild 8 mit herangezogen werden kann.

Durch die Wirkung des Wärmeaustausches zerfällt auch hier die Grundwelle in zwei Anteile, die mit verschiedener Zeitkonstante abklingen; außerdem sind aber noch die zugehörigen Wellenlängen entsprechenden beiden Vorzeichen in Gl. (14) voneinander verschieden. Da für die Oberwellen der Einfluß des Wärmeaustausches vernachlässigt wurde, entfällt bei denselben rechnermäßig die eine Teilwelle; wollte man hier ebenfalls den Wärmeaustausch genau berücksichtigen, so müßte die Aufspaltung in die beiden Teilwellen mit verschiedener Zeitkonstante in derselben Weise rechnermäßig verfolgt werden.

Wird zur Ermittlung der Amplituden von Grund- und Oberwellen die Zerlegung der Ausgangstemperaturverteilung wie im Abschnitt C und D vorgenommen, so erhält man an Stelle von Gl. (20), Abschnitt D, für Wicklungen mit Kühlung durch die Stirnverbindungen auf Grund der vorigen Überlegungen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= B'_{11} \cos \beta'_{11} x_1 + B''_{11} \cos \beta''_{11} x_1 + B_{12} \cos \beta_{12} x_1 + B_{13} \cos \beta_{13} x_1, \\ \vartheta_3'' &= B'_{31} \cos \beta'_{31} x_3 + B''_{31} \cos \beta''_{31} x_3 + B_{32} \cos \beta_{32} x_3 + B_{33} \cos \beta_{33} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

bzw. für Wicklungen mit zusätzlicher Kühlung durch Kühlfahnen:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1'' &= B'_{11} \cos \beta'_{11} x_1 + B''_{11} \cos \beta''_{11} x_1 + B_{12} \cos \beta_{12} x_1 + B_{13} \cos \beta_{13} x_1, \\ \vartheta_3'' &= B'_{31} \cos \left[\beta'_{31} x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta'_{31}} \right] + B''_{31} \cos \left[\beta''_{31} x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta''_{31}} \right] \\ &\quad + B_{32} \cos \left[\beta_{32} x_2 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_{32}} \right] + B_{33} \cos \left[\beta_{33} x_3 - \arctg \frac{h}{k_3 \beta_{33}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die zu den einzelnen Temperaturwellen gehörigen Zeitkonstanten sind dann am einfachsten aus der Gleichung

$$T = \frac{s_3 c_3}{q_3 + k_3 \beta_3^2} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{s_3 c_3}{q_3 - k_3 \gamma_3^2}; \quad \gamma_3 = i \cdot \beta_3 \quad (19)$$

zu berechnen. Die beiden Teilamplituden der Grundwelle des im Blechpaket befindlichen Wicklungsteiles sind nicht unabhängig voneinander, sie sind vielmehr, wie bereits im Abschnitt F dargelegt, nach Gl. (20) durch die Beziehung verbunden

$$\frac{B'_{11}}{B''_{11}} = \frac{\frac{N_1}{M_1} \cdot S - RS}{1 - S \cdot \frac{N_1}{M}} = P, \quad (20)$$

wobei R und S durch (21) bzw. (27), Abschnitt F, gegeben sind und das Verhältnis N_1/M_1 zunächst schätzungsweise einzuführen ist. Desgleichen besteht zwischen

B'_{31} und B''_{31} die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{B'_{31}}{B'_{31}} &= \frac{\cos \beta'_{31} n}{\cos \beta''_{31} n} \cdot \frac{\cos \beta''_{11} m}{\cos \beta'_{11} m} \cdot P = Q' \\ \text{bzw.} \quad \frac{B''_{31}}{B'_{31}} &= \frac{\left(\cos \beta'_{31} n + \frac{h}{k_3 \beta'_{31}} \right)}{\left(\cos \beta''_{31} n + \frac{h}{k_3 \beta''_{31}} \right)} \cdot \frac{\cos \beta''_{11} m}{\cos \beta'_{11} m} = P = Q'' \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

für Wicklungen mit Kühlfahnen. Führt man diese Werte in die Gl. (17) und (18) ein, so erhält man mit den bereits bekannten Erwärmungen ϑ'_{01} , ϑ'_{02} und ϑ'_{0n} im stationären Zustand drei weitere Gleichungen, aus denen, wie früher beschrieben, alle Amplituden von Grund- und Oberwellen ermittelt werden können, wodurch der zeitliche Verlauf der Erwärmung in den Einzelheiten bekannt ist.

Das beschriebene Ermittlungsverfahren gilt in der vorliegenden Form auch für den allgemeineren Fall des nicht unterteilten Blechpaketes mit der thermischen Leitfähigkeit k_2 , wobei dann auch der Wert für β_2 entsprechend der Oberflächenbedingung des Blechpaketes in Gl. (14) Berücksichtigung finden kann. Für unterteiltes Blechpaket ergibt sich, da für das Einzelpaket k_2 , β_2 und β_1 verschieden, zur Ermittlung der Zeitkonstanten desselben die Gl. (12); in derselben muß noch die Wärmekapazität $s_2 c_2$ des Ersatzkörpers aus den thermischen Konstanten des tatsächlich vorhandenen unterteilten Eisenkörpers berechnet werden. Dieselbe ist dabei so zu ermitteln, daß die thermische Zeitkonstante des Ersatzkörpers mit der des vorhandenen Blechpaketes übereinstimmt. Man hat also unter Benützung von Gl. (12), Abschnitt C, zu setzen:

$$T_e = \frac{s_2 c_2}{q_2} = \frac{s_e c_e}{q_e + k_e \beta^2}, \quad (22)$$

wobei sich β nach Gl. (13), Abschnitt C, errechnet zu

$$\cos \beta z = \frac{k_e \alpha \cdot \text{Sin } \alpha z}{h_e (\text{Cos } \alpha z - \lambda) + k_e \alpha \text{ Sin } \alpha z} \quad (23)$$

oder mit den Vereinfachungen wie früher

$$\beta^2 = \frac{2 h_e}{h_e z^2 + 2 k_e z}. \quad (24)$$

Man erhält demnach endlich als Wert von $s_2 c_2$

$$s_2 c_2 = q_2 \cdot \frac{s_e c_e}{q_e + k_e \beta^2}. \quad (25)$$

H. Rechnungsbeispiel.

Auf Grund der angestellten Überlegungen möge nun der Erwärmungsverlauf an einem Beispiel ermittelt werden, und zwar sollen die Erwärmungsverhältnisse der Ständerwicklung eines Drehstromgenerators untersucht werden. Dabei gelangen insbesondere die Entwicklungen in Abschnitt D und G zur Anwendung. Dem Rechnungsbeispiel werden die gleichen Angaben zugrunde gelegt, die auch bei der analogen Rechnung von R. Richter¹⁾ angenommen werden.

Es handelt sich um eine Maschine für 6500 kVA, 10000 V, 50 Hertz und 83 Umdr./min, deren Erwärmungsverhältnisse im Ständer untersucht werden sollen und deren Aufbau den Prinzipskizzen Bild 7 und 11 entspricht. Mit Bezug auf dieselben ist:

$$D_a = 5,97 \text{ m}, \quad D_i = 5,65 \text{ m}, \quad m = 52 \text{ cm}, \quad n = 37,5 \text{ cm}.$$

$2z = 4,78 \text{ cm}$; $o = 1 \text{ cm}$. Es sind 18 Teilpakete vorhanden, die Zahl der Nuten ist 432, der Kupferquerschnitt pro Nut $3,85 \text{ cm}^2$, der gesamte Eisenquerschnitt 15600 cm^2 . Die Kupferverluste bei kalter

¹⁾ R. Richter: Elektrische Maschinen Bd. 1 S. 341, bezüglich der angenommenen Beanspruchungen, Wärmeabgabewerte und Wärmeleitfähigkeiten s. S. 342.

Maschine betragen 50 kW, die Eisenverluste 160 kW. Man erhält zunächst für das Blechpaket mit den angenommenen Wärmeabgabezahlen:

$$\begin{aligned} V_2 &= 0,119 \text{ W/cm}^3, & V_2 &= 0,098 \text{ W/cm}^3, & [\text{Gl. (10), Abschn. G}] \\ r_e &= 0,00174 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & r_2 &= 0,00144 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & [\text{Gl. (10), Abschn. G}] \\ p_e &= 0,00074 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & q_e &= 0,00248 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & [\text{Gl. (6), Abschn. G}] \\ k_e &= 0,01 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}, & h_e &= 0,005 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, & \alpha_e = 0,5, & [\text{Gl. (8), Abschn. G}] \\ q_2 &= 0,0033 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3 & & & & [\text{Gl. (10), Abschn. G}] \end{aligned}$$

und entsprechend für den im Blechpaket liegenden Wicklungsteil

$$\left. \begin{aligned} \frac{i_s^2}{\lambda_0} &= V_1 = 0,169 \text{ W/cm}^3, & \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon &= 0,00068 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ p_1 &= 0,00161 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & q_1 &= 0,01443 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ r_1 &= 0,0135 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & k_1 &= 3,8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm} \end{aligned} \right\} [\text{Gl. (4), Abschn. F}]$$

bzw. für die Stirnverbindungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{i_s^2}{\lambda_0} &= V_3 = 0,169 \text{ W/cm}^3, & \frac{i_s^2}{\lambda_0} \cdot \varepsilon &= 0,00068 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ p_3 &= 0,0123 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, & q_3 &= 0,016 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ k_3 &= 3,8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}. \end{aligned} \right\} [\text{Gl. (1), Abschn. D}]$$

Mit diesen Kennziffern kann der Erwärmungsverlauf im stationären Zustand berechnet werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \vartheta'_1 &= 68 + A_1 \cdot \mathcal{C} \text{ of } 0,047 x_1, & [\text{Gl. (2), Abschn. G}] \\ \vartheta'_2 &= 59,3 + 0,435 A_1 \cdot \mathcal{C} \text{ of } 0,047 x_1, & [\text{Gl. (5), Abschn. G}] \\ \vartheta'_3 &= 14,5 + A_3 \cdot \mathcal{C} \text{ of } 0,056 x_3 & [\text{Gl. (3), Abschn. D}] \end{aligned}$$

und nach Auswertung der Integrationskonstanten:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta'_1 &= 68 - 5 \mathcal{C} \text{ of } 0,047 x_1, \\ \vartheta'_2 &= 59,3 - 2,2 \mathcal{C} \text{ of } 0,047 x_1, \\ \vartheta'_3 &= 14,5 + 6 \mathcal{C} \text{ of } 0,056 x_3 \end{aligned} \right\} \text{ nach Gl. (5) und (6), Abschn. D.}$$

Nachdem nun die Übertemperaturen im stationären Zustand bekannt sind, soll als erstes der Erwärmungsvorgang bei Inbetriebsetzung der kalten Maschinen berechnet werden. Zuerst müssen die Wärmekapazitäten bestimmt werden. Man erhält für das Wicklungskupfer

$$s_k = 8,9 \text{ g/cm}^3, \quad c_k = 0,388 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{g}, \quad s_k c_k = 3,45 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3.$$

Berücksichtigt man die Wärmekapazität der Nutisolation (0,4 cm Glimmer) bzw. der Isolation der Stirnverbindungen (0,2 cm Glimmer) mit dem spez. Gewicht $s_g = 3 \text{ g/cm}^3$ und der spezifischen Wärme $c_g = 0,862 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3$, so erhält man bei einem Nut- bzw. Leiterumfang von 16,8 cm eine auf den Leiterquerschnitt bezogene Wärmekapazität von

$$s_1 c_1 = 7,95 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3$$

für das Nutenkupfer bzw.

$$s_3 c_3 = 6,05 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3$$

für die Stirnverbindungen.

Für das Blechpaket beträgt:

$$s_e = 7,7 \text{ g/cm}^2, \quad c_e = 0,462 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{g}, \quad s_e c_e = 3,55 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{g}$$

und die nach Gl. (25), Abschn. G, bestimmte reduzierte Wärmekapazität für den Ersatzkörper

$$s_2 c_2 = 3,10 \text{ Joule/}^\circ\text{C} \cdot \text{g}.$$

Mit diesen Werten kann nun die eigentliche Ermittlung des zeitlichen Temperaturverlaufes begonnen werden. Für das Blechpaket ergeben sich aus Gl. (13), Abschn. G, die reziproken Zeitkonstanten

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0,00240 \text{ sec}^{-1}, \\ \xi_2 &= 0,00047 \text{ sec}^{-2}. \end{aligned}$$

Wäre die Berechnung derselben nach der genaueren Gl. (26), Abschn. F, vorgenommen worden mit $\cos \beta_1 \cdot m = 1$ und $\cos \beta_2 \cdot m = 46,4/59,3$ (Verhältnis der Erwärmung der mittleren und der Endpakete), so hätten sich ergeben

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0,00246 \text{ sec}^{-1}, \\ \xi_2 &= 0,00049 \text{ sec}^{-1}. \end{aligned}$$

Bei diesem, wie ersichtlich, verschwindend kleinen Einfluß des Wärmegefälles in axialer Richtung auf die Erwärmungszeitkonstanten des unterteilten Blechpaketes kann demnach dasselbe ganz vernachlässigt werden, wodurch die Berechtigung, die vereinfachte Formel (13), Abschn. G, anzuwenden, nachgewiesen ist.

Die Wellenlängen und Zeitkonstanten der Wicklung sind an Hand von Gl. (14) und (15), Abschn. G, für die Grundwelle bzw. (16) und (15), Abschn. G, für die Oberwellen zu ermitteln, man erhält für dieselben mit den angenommenen Zahlenwerten:

Grundwelle	$\gamma'_{11} = 0,0258$,	$\beta'_{31} = 0,0216$,	$\xi'_1 = 0,0022 \text{ sec}^{-1}$,
	$\beta''_{11} = 0,0215$,	$\gamma'_{31} = 0,047$,	$\xi''_1 = 0,00055 \text{ sec}^{-1}$,
1. Oberwelle	$\beta_{1,2} = 0,039$,	$\beta_{32} = 0,0315$,	$\xi_2 = 0,0026 \text{ sec}^{-1}$,
2. Oberwelle	$\beta_{1,3} = 0,073$,	$\beta_{33} = 0,064$,	$\xi_3 = 0,0045 \text{ sec}^{-1}$.

Die Zeitkonstanten der Grundwellen der Wicklung sind dabei praktisch dieselben wie die für das Blechpaket bereits ermittelten; der kleinere Wert von $1/\xi'_1 = 450 \text{ sec}$ bedeutet im wesentlichen die Zeitkonstante der Wicklung, insbesondere der Stirnverbindung, der größere Wert von $1/\xi''_1 = 1820 \text{ sec}$ im wesentlichen die des Blechpaketes.

Die Berechnung der Amplituden der Einzelwellen der Erwärmungsverteilung wurde nach dem beschriebenen Verfahren durchgeführt, man erhält mit den berechneten Werten der Wellenlängen und Zeitkonstanten zunächst nach Gl. (21), Abschn. F:

$$R = -0,415 \quad \text{und} \quad S = +1,11.$$

Mit dem vorerst geschätzten Wert von $N_1/M_1 = 0,8$ ergibt sich dann nach Gl. (20), Abschn. G, $P = 12,3$; nach Gl. (21), Abschn. G, $Q' = 0,59$ und nach den Gl. (20) bis (22), Abschn. D, endlich für die Amplituden der Wärmewellen bei Zerlegung der resultierenden Temperaturkurve nach Gl. (17), Abschn. G, für den in das Blechpaket eingebetteten Wicklungsteil

$$B'_{11} = 4,95^\circ, \quad B''_{11} = 61^\circ, \quad B_{12} = -0,05^\circ, \quad B_{13} = -2,9^\circ$$

bzw. für die Stirnverbindungen

$$B'_{31} = 14,7^\circ, \quad B''_{31} = 8,8^\circ, \quad B_{32} = 0,06^\circ, \quad B_{33} = -3,05^\circ$$

und für die B'_{11} und B''_{11} entsprechenden Amplituden der Erwärmungsverteilung im Blechpaket, die nach Gl. (20), Abschn. F, zu ermitteln sind, wobei der getroffenen Annahme von $N_1/M_1 = 0,8$ entsprechend $M_1 = B'_{11} + B''_{11} = 66^\circ$ und $N_1 = 52,8$ zu setzen ist:

$$B'_{21} = -2,2^\circ, \quad B''_{21} = 55^\circ.$$

Da die Erwärmung des Blechpaketes (größte Übertemperatur in Maschinenmitte gleich $57,1^\circ$, mittlere Übertemperatur 54°) ungefähr dem Wert von N_1 entspricht, so ist damit die Berechtigung erwiesen, für N_1/M_1 den Wert 0,8 einzuführen. Man muß bei derartigen Rechnungen natürlich zuerst empirisch vorgehen, um schrittweise einen passenden Wert für N_1/M_1 zu erhalten.

In Bild 12 ist der Erwärmungsvorgang der Maschine graphisch zur Darstellung gebracht. Kurve 1 stellt den Temperaturanstieg ϑ_{01} der Wicklung in Maschinenmitte, Kurve 2 ϑ_M beim Übergang zur Stirnverbindung im Punkte M und Kurve 3 ϑ_{02} in der Mitte der Stirnverbindung dar. Kurve 4 zeigt den zeitlichen Verlauf der mittleren Erwärmung ϑ_{1m} , wie sie etwa experimentell aus der Widerstandszunahme gemessen werden kann, Kurve 5 den zeitlichen Verlauf der mittleren Erwärmung ϑ_{2m} des Blechpaketes.

Aus Bild 13 ist der Erwärmungsverlauf längs der Wicklung im stationären Zustand zu ersehen (Kurve 1) und die Ersatzkurve, die durch die Grundwelle und die beiden ersten Oberwellen gebildet ist (Kurve 2). Die Unterschiede zwischen den beiden Kurven vermitteln ein Bild über die Genauigkeit des Verfahrens, wenn man sich mit der Zerlegung in nur 3 Temperaturwellen begnügt. Ferner ist der

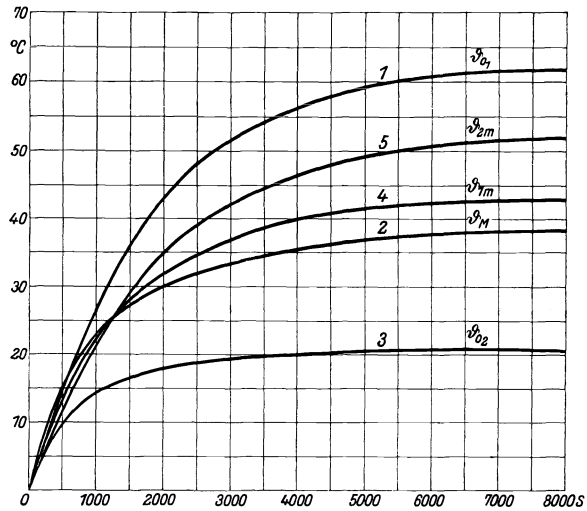


Bild 12. Zeitlicher Temperaturverlauf; Erwärmungsvorgang.

räumliche Temperaturverlauf längs der Wicklung für zwei Zeitpunkte des Erwärmungsvorganges eingetragen (Kurve 3 und 4); es bezieht sich die erstere der beiden Kurven auf den Zeitpunkt $t = 1000$ sec vom Beginn des Erwärmungsvorganges an gerechnet, der letztere auf den Zeitpunkt $t = 3000$ sec. Man erkennt deutlich den verhältnismäßig raschen Temperaturanstieg der Stirnverbindungen, während die Erwärmung von Nutenkupfer und Blechpaket durch die Wirkung des Wärmeaustausches ziemlich

einheitlich und wesentlich langsamer erfolgt.

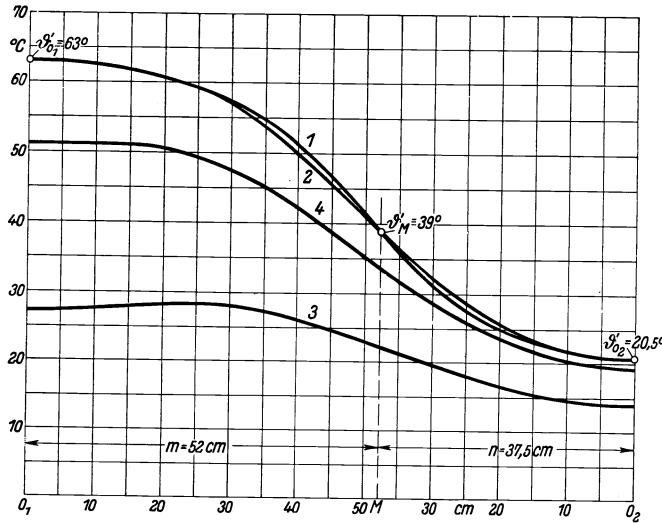


Bild 13. Räumlicher Temperaturverlauf; Erwärmungsvorgang.

1 = Temperaturverlauf im stationären Zustand. 2 = Ersatzkurve zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufes. 3 = Temperaturverlauf für $t = 1000$ sec. 4 = Temperaturverlauf für $t = 3000$ sec.

Sind die Stirnverbindungen derjenige Teil, der bei Belastung der Maschine am ehesten die Beharrungstemperatur annimmt, so erfolgt auch ihre Abkühlung bei laufender, aber entlasteter Maschine wesentlich rascher als die des Blechpaketes. Der Abkühlungsvorgang kann auf die gleiche Weise rechnerisch untersucht werden. Die Maschine soll dabei vom Netz abgeschaltet und entregt gedacht sein, ihre Drehzahl aber unverändert beibehalten. Da somit die Kupfer- wie auch Eisenverluste entfallen, ändern sich teilweise die für den Abkühlungsvorgang maßgebenden Kennzahlen. Man erhält für die geänderten Werte

$$\begin{aligned} V_e &= 0, & V_2 &= 0, \\ V_1 &= 0, & q_1 &= 0,0151 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ V_3 &= 0, & q_3 &= 0,0123 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3 \end{aligned}$$

und damit nach Gl. (13), Abschn. G, unter Verwendung der bereits ermittelten Wärmekapazitäten usw. für die reziproken Zeitkonstanten des Blechpaketes:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0,00248 \text{ sec}^{-1}, \\ \xi_2 &= 0,00051 \text{ sec}^{-1} \end{aligned}$$

und für die in gleicher Weise wie bei Berechnung des Erwärmungsanstieges zu ermittelnden Wellenlängen und reziproken Zeitkonstanten der Wicklung:

$$\begin{aligned} \text{Grundwelle. . . } \gamma'_{11} &= 0,0225, \\ \beta'_{31} &= 0,0195, \\ \xi'_1 &= 0,0023 \text{ sec}^{-1}, \\ \beta''_{11} &= 0,0215, \\ \gamma'_{31} &= 0,048, \\ \xi'_1 &= 0,00058 \text{ sec}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. Oberwelle . . } \beta_{12} &= 0,039, \\ \beta_{32} &= 0,0315, \\ \xi_2 &= 0,00265 \text{ sec}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. Oberwelle . . } \beta_{13} &= 0,074, \\ \beta_{33} &= 0,063, \\ \xi_3 &= 0,0046 \text{ sec}^{-1}. \end{aligned}$$

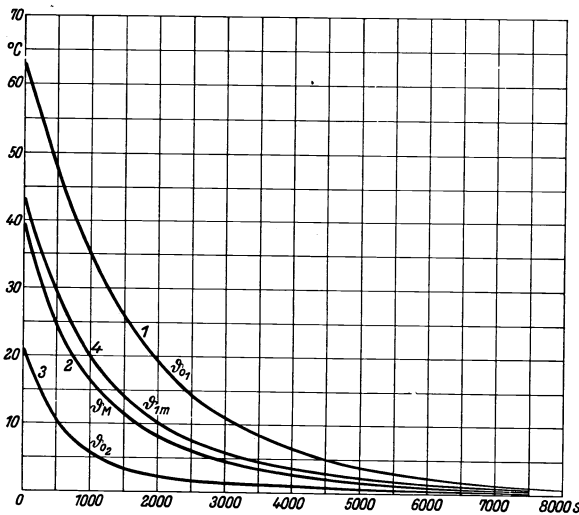


Bild 14. Zeitlicher Temperaturverlauf; Abkühlungsvorgang bei laufender Maschine.

Bei Ermittlung der Amplituden von Grund- und Oberwellen ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$$R = -0,37, \quad S = 1,04,$$

für N_1/M_1 wurde der Wert 0,85 eingesetzt, womit man für $P = 10,6$ und $Q' = 0,61$ erhält; nach Zerlegung der stationären Erwärmungskurve in Grund- und Oberwellen nach Gl. (17), Abschn. G, erhält man endlich für die Amplituden derselben die nachstehenden Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 5,8^\circ, & B''_{11} &= 61^\circ, & B_{12} &= -1,3^\circ, & B_{13} &= -2,5^\circ, \\ B'_{31} &= 13,7^\circ, & B''_{31} &= 8,4^\circ, & B_{32} &= 1,5^\circ, & B_{33} &= -2,8^\circ. \end{aligned}$$

Wie ein Vergleich mit den bei Untersuchung des Erwärmungsvorganges erhaltenen Werten zeigt, sind die Lage und Größe der einzelnen Wellen nahezu unverändert geblieben. In Bild 14 und 15 ist ebenfalls, unter Verwendung der gleichen Bezeichnungen, der Abkühlungsvorgang dargestellt. Die starke Verzögerung des Abkühlungsvorganges durch die große Wärmekapazität des Blechpaketes ist deutlich zu erkennen.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse, wenn man etwa den Abkühlungsvorgang der stillgesetzten Maschine betrachtet. Während für die laufende Maschine die Wärmeabgabezahlen¹⁾ mit $50 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2$ für Innenmantel des Blechpaketes, Kühlschlitz und Wicklung an den Kühlschlitz, $14 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2$ für Außenmantel des Blechpaketes und $45 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2$ für die Stirnverbindungen angenommen wurden, ermäßigen sich diese Werte für die ruhende Maschine und sollen mit $8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2$ für Innenmantel und Kühlschlitz des Blechpaketes bzw. $14 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2$ für Außenmantel des Blechpaketes und Wicklung angenommen werden. Man erhält dann gegenüber früher die folgenden Rechnungsgrößen:

Blechpaket:

$$\begin{aligned} V_e &= 0, & V_2 &= 0, \\ r_e &= 0,00174 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, \\ r_2 &= 0,00144 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, \\ p_e &= 0,00026 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, \\ q_e &= 0,0020 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, \\ k_e &= 0,01 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}, \\ h_e &= 0,0008 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^2, \\ \alpha_e &= 0,45, \\ q_2 &= 0,0019 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Wicklung innerhalb des Blechpaketes:

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ p_1 &= 0,0005 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ k_1 &= 3,8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}, \\ r_1 &= 0,0135 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ q_1 &= 0,0140 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3. \end{aligned}$$

Stirnverbindungen:

$$\begin{aligned} V_3 &= 0, & p_3 &= 0,0038 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3, \\ & & k_3 &= 3,8 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}, \\ & & q_3 &= 0,0038 \text{ W/}^\circ\text{C} \cdot \text{cm}^3 \end{aligned}$$

und damit nach Gl. (13), Abschn. G, für die reziproken Zeitkonstanten des Blechpaketes:

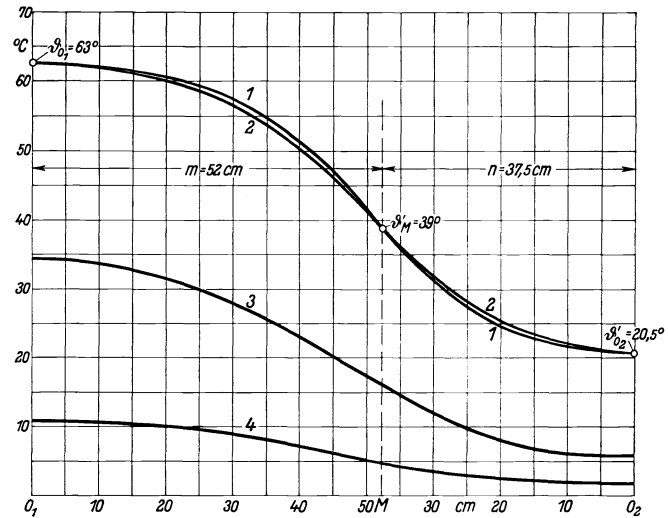


Bild 15. Räumlicher Temperaturverlauf; Abkühlungsvorgang bei laufender Maschine.

1 = Temperaturverlauf im stationären Zustand. 2 = Ersatzkurve zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufes. 3 = Temperaturverlauf für $t = 1000 \text{ sec}$. 4 = Temperaturverlauf für $t = 3000 \text{ sec}$.

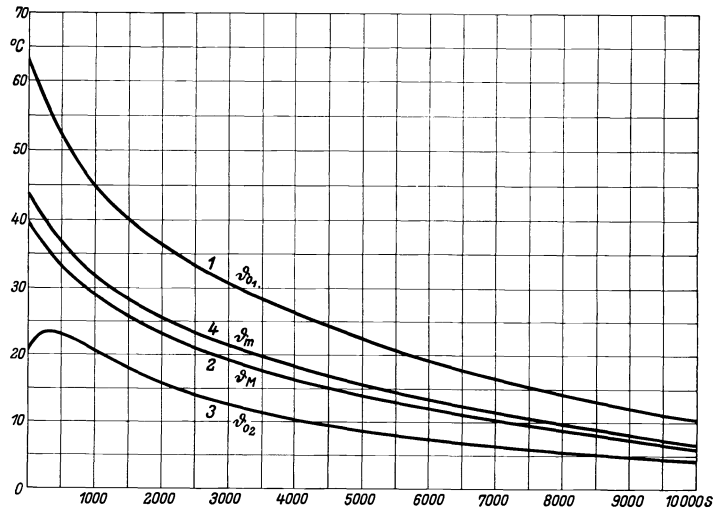


Bild 16. Zeitlicher Temperaturverlauf; Abkühlungsvorgang bei stillstehender Maschine.

$$\xi_1 = 0,00225 \text{ sec}^{-1},$$

$$\xi_2 = 0,000125 \text{ sec}^{-1}.$$

¹⁾ R. Richter: Elektrische Maschinen Bd. 1 S. 342.

Für die Wellenlängen und reziproken Zeitkonstanten der Wicklung erhält man die folgenden Werte:

Grundwelle	$\gamma'_{11} = 0,0623,$	$\beta'_{31} = 0,0298,$	$\xi' = 0,0012 \text{ sec}^{-1},$
	$\beta''_{11} = 0,017,$	$\gamma'_{31} = 0,0275,$	$\xi''_1 = 0,00016 \text{ sec}^{-1},$
1. Oberwelle	$\beta_{12} = 0,0275,$	$\beta_{32} = 0,049,$	$\xi_2 = 0,00212 \text{ sec}^{-1},$
2. Oberwelle	$\beta_{13} = 0,0685,$	$\beta_{33} = 0,0735,$	$\xi_3 = 0,00402 \text{ sec}^{-1}.$

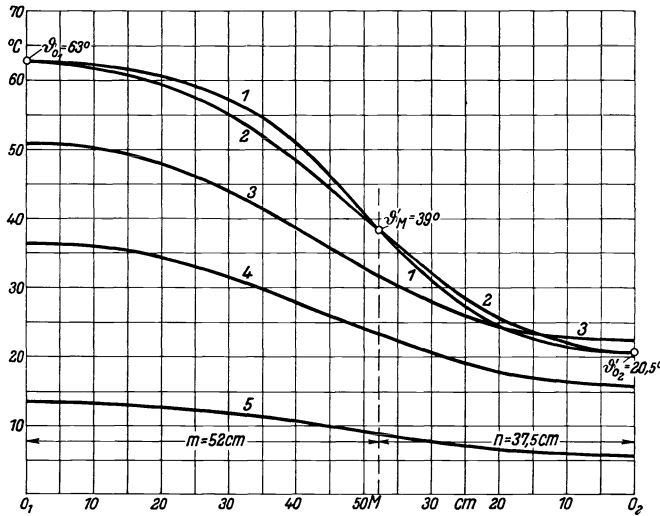


Bild 17. Räumlicher Temperaturverlauf: Abkühlungsvorgang bei stillstehender Maschine.

1 = Temperaturverlauf im stationären Zustand. 2 = Ersatzkurve zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufes. 3 = Temperaturverlauf für $t = 500 \text{ sec}$. 4 = Temperaturverlauf für $t = 2000 \text{ sec}$. 5 = Temperaturverlauf für $t = 8000 \text{ sec}$.

Um zu den Amplituden der einzelnen Wellen zu gelangen, sind zuerst wieder die Größen R und S zu bestimmen; dieselben betragen jetzt

$$R = -0,76, \quad S = +0,97,$$

für N_1/M_1 ist auf Grund einiger Versuchsrechnungen der Wert 1,02 einzuführen, mit welchem man endlich für die Amplituden der Grund- und Oberwellen nachstehende Zahlenwerte bekommt:

$$\begin{aligned} B'_{11} &= 0,3^\circ, & B''_{11} &= 50^\circ, \\ B'_{31} &= 8,5^\circ, & B''_{31} &= 20,5^\circ, \\ B_{12} &= 14^\circ, & B_{13} &= -1,5^\circ, \\ B_{32} &= -7^\circ, & B_{33} &= -1,5^\circ. \end{aligned}$$

In Bild 16 ist wieder der zeitliche Verlauf der Wicklungserwärmung für Mitte Blechpaket, Übergang zur Stirnverbindung und Mitte der Stirnverbindung sowie der Verlauf des Mittelwertes der Erwärmung eingetragen, aus Bild 17 ist der räumliche Temperaturverlauf zu verschiedenen Zeitpunkten

zu ersehen. Von Interesse ist besonders der Verlauf der Erwärmung der Stirnverbindung, man erkennt sofort, daß die Temperatur derselben einige Zeit nach dem Abstellen größere Werte erreicht als im stationären Zustand bei voller Belastung. Die Ursache dafür liegt im Ausgleich der inneren Erwärmungsdifferenzen nach Fortfall der forcierten Kühlung durch die Lüfter des Rotors; sind die Erwärmungsunterschiede im Beharrungszustand sehr bedeutend, so kann unter Umständen der Temperaturanstieg nach dem Abstellen beträchtliche Werte erreichen. Infolge der verhältnismäßig sehr guten Wärmeleitfähigkeit des Wicklungskupfers ist dabei die Zeitkonstante des Ausgleichsvorganges im allgemeinen gering. Sie beträgt im vorliegenden Fall ($T = 1/\xi_2$ der ersten Oberwelle) rund 480 Sekunden, kann aber auch wesentlich kleinere Werte annehmen.

Zusammenfassung.

Es werden die Gesetzmäßigkeiten untersucht, nach denen der räumliche und zeitliche Temperaturverlauf bei den wichtigsten Bauformen der Wicklungen von Dynamomaschinen vor sich geht. Es zeigt sich dabei, daß dem Begriff einer einheitlichen thermischen Zeitkonstante nur unter gewissen Umständen eine physikalische Bedeutung zukommt; und zwar nur dann, wenn die Temperaturgefälle innerhalb des betrachteten Körpers gegenüber seiner Gesamterwärmung keine wesentliche Rolle spielen. Ist dies nicht der Fall, dann ergeben sich mehr oder weniger große Abweichungen von dem einfachen Temperaturverlauf nach einer Exponentialfunktion; bei Erwärmungsvorgängen beispielsweise kann der erste Temperaturanstieg wesentlich rascher erfolgen, während die Angleichung an den stationären Zustand nur stark verzögert vor sich geht. Rechnet man in solchen Fällen trotzdem mit einer mittleren Zeitkonstante, so muß man sich vor Augen halten, daß dies nur eine ziemlich grobe Näherung darstellt und die tatsächlichen Erwärmungen unter Umständen wesent-

lich höher sein können; besonders wenn es sich etwa um starke kurzzeitige Überlastungen handelt. Will man in allen derartigen Fällen den Erwärmungs- oder Abkühlungsvorgang genauer erfassen, dann muß eine Zerlegung des Temperaturverlaufes in Grund- und Oberwellen durchgeführt werden, wobei letztere besonders bei kurzzeitigen Belastungen von ausschlaggebender Bedeutung sein können. Es ist dann auch möglich, den im allgemeinen unhomogenen Aufbau der elektrischen Maschinen und Transformatoren in der Rechnung zu berücksichtigen.

Handelt es sich um thermisch parallelgeschaltete Körper, wie etwa Wicklung und Blechpaket bei Dynamomaschinen, zwischen denen ein mehr oder minder großer Wärmeaustausch stattfinden kann, so ist es selbst dann unzulässig, mit einer einheitlichen Zeitkonstante zu rechnen, wenn durch die Grundwelle die Erwärmungsverteilung mit genügender Genauigkeit beschrieben ist und die Oberwellen keine Rolle spielen. Es tritt eine Aufspaltung jeder einzelnen Welle in zwei Teilwellen ein, die mit voneinander verschiedenen Zeitkonstanten abklingen, wobei die beiden Teilzeitkonstanten je nach Größe des gegenseitigen Wärmeaustausches mehr oder weniger den Eigenzeitkonstanten der beiden parallelgeschalteten Körper entsprechen.

Bei Magnetspulen mit verhältnismäßig ungünstigen Wärmeabgabeverhältnissen zeigt sich, daß auch bei größeren inneren Wärmegefällen die Charakterisierung des Erwärmungsvorganges durch die Zeitkonstante der Grundwellen im allgemeinen zu keinen störenden Fehlern führt, da die Amplituden der Oberwellen nur geringfügige Beträge erreichen. Es ergibt sich aber eine nicht unbedeutende Beeinflussung der Zeitkonstanten durch die Höhe der Wicklungsbeanspruchung, deren Ursache in der Wirkung der Widerstandszunahme auf den Erwärmungsvorgang liegt. Dadurch wird die Zeitkonstante des Erwärmungsvorganges größer als die des Abkühlungsvorganges bei gleichbleibender Wärmeabgabe an den Oberflächen der Spule. Mit Rücksicht auf die bei Wicklungsspulen vielfach in beiden aufeinander senkrechten Richtungen ausgebildeten Wärmegefälle wird die Erwärmung von Spulen mit rechteckigem Querschnitt sowohl ein- als auch zweidimensional behandelt.

Stoßerregung bei der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschine.

Von Michael Liwschitz und Hellmuth Raymund.

Mit 17 Bildern.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke A.-G.
zu Siemensstadt.

Eingegangen am 17. Februar 1932.

Inhaltsübersicht.

1. Schaltschema der Stoßerregung.
2. Verlauf des Ständerstromes während des Stoßens.
3. Die Zeitkonstante von synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschinen sowie von deren Erregermaschinen.
4. Vergleich der Stoßerregung bei einer synchronen und einer asynchronen Blindleistungsmaschine gleicher Leistung und Drehzahl.

1. Schaltschema der Stoßerregung.

Im folgenden sollen die synchrone und asynchrone Blindleistungsmaschine hinsichtlich ihres Verhaltens bei Stoßerregung¹⁾ verglichen werden. Die bei der Synchronmaschine übliche Anordnung der Stoßmaschine zeigt Bild 1. Die Stoßerregung

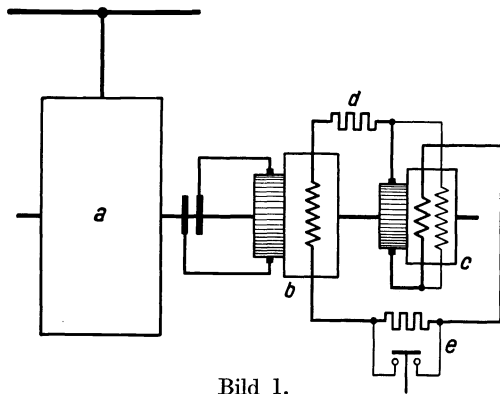


Bild 1.

Schaltbild der synchronen Blindleistungsmaschine mit Stoßerregungseinrichtung.

a = Synchronmaschine; b = Erregermaschine; c = Hilfserregermaschine; d = Schnellerregungswiderstand; e = Stoßregler.

wird dadurch bewirkt, daß im Erregerkreis der Erregermaschine bei Absinken der Netzspannung unter ein bestimmtes Maß durch ein Relais (Stoßregler e) plötzlich ein Widerstand kurzgeschlossen wird. Dadurch werden der Erregerstrom und die kapazitive Blindleistung der Synchronmaschine vergrößert, was zur Aufrechterhaltung bzw. Erhöhung der Netzspannung führt. Die Zeitkonstante der Erregermaschine muß klein gehalten werden. Dies geschieht dadurch, daß in ihren Erregerkreis ein fester Widerstand (Schnellerregungswiderstand d) eingeschaltet wird, dessen Größe ein Mehrfaches des

Widerstandes der Erregerwicklung beträgt. Die Hilfserregermaschine wird infolgedessen relativ groß. Die Erregermaschine erhält geblättrtes Joch, geblättrte Pole

¹⁾ Über „Schaltvorgänge beim Betrieb gesättigter Synchronmaschinen“ s. R. Rüdberg: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. X, 1 (1931) S. 1. — Über „Reguliertvorgänge bei Laststößen in Verbindung mit Schnellreglern“ erscheint demnächst eine Arbeit von J. Tittel in der Siemens-Z.

und eine Kompensationswicklung, welche die Ankerdurchflutung aufhebt. Die Hilfs-erregemaschine wird als selbsterregte Maschine ausgeführt und arbeitet mit konstanter Spannung.

Bei der asynchronen Blindleistungsmaschine ist die gleiche Stoßerregungsanordnung möglich wie bei der Synchronmaschine, da der Schlupf der asynchronen Blindleistungsmaschine sehr gering ist. Das entsprechende Schaltschema ist in Bild 2 dargestellt. Die Erregemaschine wird als Lydall-Scherbius-Maschine mit Ständererregung ausgeführt. Joch und Pole sind bei dieser stets geblättert, das Ankerfeld wird mittels Kompensationswicklung aufgehoben. Wie bei der Erregemaschine für die synchrone Blindleistungsmaschine kann auch hier zur Verkleinerung der Zeitkonstante ein Widerstand in den Erregerkreis eingeschaltet werden. Die Hilfs-erregemaschine ist ein kompensierter oder nichtkompensierter Frequenzwandler. Sie wird von einem besonderen Synchrongenerator gespeist, dessen Antriebsmaschine als Synchronmotor mit großer Überlastungsfähigkeit ausgeführt ist, derart daß er bei etwa 30 % der Netzspannung noch in Tritt bleibt. Das Erregeraggregat läßt sich im übrigen bei anderen für die asynchrone Blindleistungsmaschine entwickelten Stoßerregungseinrichtungen vermeiden. Die

beschriebene Anordnung ist hier gewählt worden, weil für diese der Vergleich mit der Stoßerregung bei der synchronen Blindleistungsmaschine mit einheitlicher Berechnungsmethode durchführbar ist.

In den weiter folgenden Ableitungen wird der Einfluß der Dämpferwicklung auf den Verlauf des Ankerstromes der Synchronmaschine nicht berücksichtigt, wohl aber auf die Größe seines Anfangswertes. Weiter wird angenommen, daß plötzlich eine Spannungsänderung eintritt und während des Regelvorganges die neue Größe der Spannung konstant bleibt.

2. Verlauf des Ständerstromes während des Stoßens.

Für den vorübergehenden Teil des Erregerstromes der Hauptmaschine während des Regelvorganges gilt die Beziehung

$$i_v r = -w \frac{d\Phi}{dt} + e_{zus}. \quad (1)$$

Hierin bedeuten:

- i_v den veränderlichen Teil des Erregerstromes,
- r den Ohmschen Widerstand der Läuferwicklung der Hauptmaschine,
- w die Windungszahl der Läuferwicklung der Hauptmaschine,
- Φ den Polfluß,
- e_{zus} die vom Haupterregter während des Regelvorganges gelieferte Zusatzspannung.

Die Gl. (1) gilt auch für die asynchrone Blindleistungsmaschine. Dies sieht man ohne weiteres ein, wenn man annimmt, daß die Hauptmaschine ebenso wie die Er-

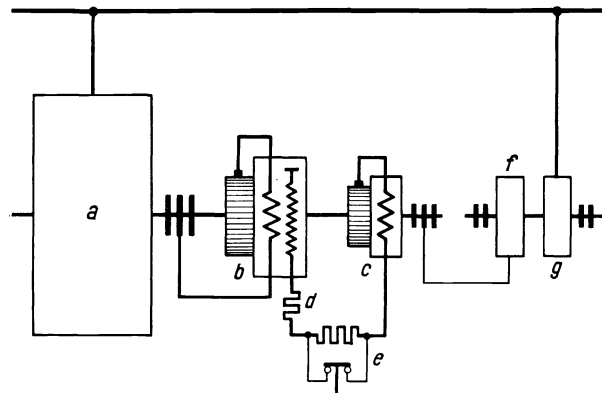


Bild 2. Schaltbild der asynchronen Blindleistungsmaschine mit Stoßerregungseinrichtung.

a = Asynchronmaschine; b = Erregemaschine; c = Hilfs-erregemaschine; d = Schnellerregungswiderstand; e = Stoßregler; f = Synchron-generator; g = Synchronmotor.

regermaschine (Bild 2) synchron läuft. Dann liefert die Hilfsregermaschine (Frequenzwandler) eine Gleichspannung, und es wird sowohl die Hauptmaschine wie die Erregermaschine mit Gleichstrom erregt.

Bezieht man alle Größen auf den entsprechenden Wert bei Leerlauf (Index 0), so erhält man den veränderlichen relativen Erregerstrom

$$\frac{i_v}{i_0} = -\frac{w\Phi_0}{i_0 r} \frac{d(\Phi/\Phi_0)}{dt} + \frac{e_{zus}}{i_0 r}. \quad (2)$$

Führt man an Stelle des Flusses Φ die entsprechende EMK E ein und berücksichtigt, daß $\frac{w\Phi_0}{i_0}$ die Induktivität L_0 des Erregerkreises im Leerlauf ist, so geht Gl. (2) über in

$$\frac{i_v}{i_0} = -\frac{L_0}{r} \frac{d(E/E_0)}{dt} + \frac{e_{zus}}{i_0 r}, \quad (3)$$

$L_0/r = T_0$ ist die magnetische Zeitkonstante der Blindleistungsmaschine im Leerlauf. Für den veränderlichen relativen Erregerstrom erhält man

$$\frac{i_v}{i_0} = -\frac{d(E/E_0)}{d(t/T_0)} + \frac{e_{zus}}{i_0 r} \quad (4)$$

und hiermit

$$\Delta\left(\frac{E}{E_0}\right) = \Delta\left(\frac{t}{T_0}\right) \left[\frac{e_{zus}}{i_0 r} - \frac{i_v}{i_0} \right]. \quad (5)$$

Um die graphische Integration zu vermeiden, wird für die weiteren Ableitungen angenommen, daß die innere Charakteristik der Maschine, d. h. die Abhängigkeit der EMK bei Belastung vom Erregerstrom, geradlinig verläuft.

Mit den Bezeichnungen des Bildes 3, das für Spannungsabsenkung auf 0, d. h. für satten Kurzschluß gilt, ergibt sich der veränderliche relative Erregerstrom zu

$$\frac{i_v}{i_0} = \frac{i_p - i_s}{i_0} - \frac{E_s - E}{E_0} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

Die Erregerspannung steigt von dem stationären Wert e_s vor der Belastungsänderung auf den Endwert e_e nach einem exponentialen Gesetz

$$e_{zus} = (e_e - e_s) \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_e} \frac{t}{T_0}} \right). \quad (7)$$

T_e ist hier die magnetische Zeitkonstante der Erregermaschine. Durch Einführung von Gl. (6) und (7) in Gl. (4) erhält man

$$\frac{d(E/E_0)}{d(t/T_0)} = -\frac{i_p - i_s}{i_0} + \frac{E_s - E}{E_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{i_s - i_e}{i_0} \left(1 - e^{-\frac{T_0}{T_e} \frac{t}{T_0}} \right). \quad (8)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0} - \frac{i_p - i_e}{i_0} \operatorname{tg} \alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{t}{T_0}} \right) + \frac{i_s - i_e}{i_0} \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{T_0}{T_e}} \left(e^{-\frac{t}{T_e}} - e^{-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{t}{T_0}} \right), \quad (9)$$

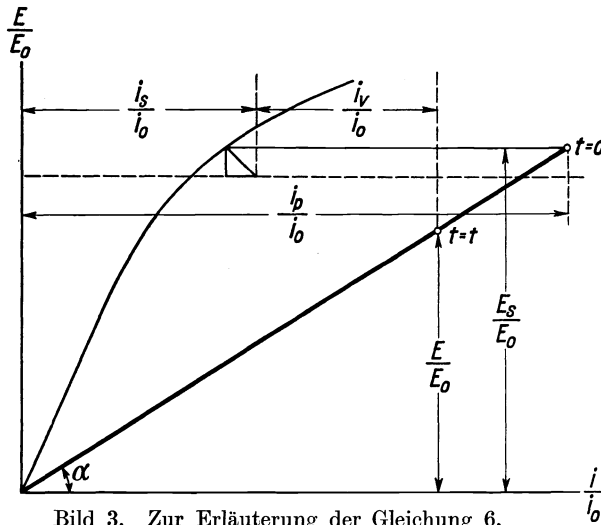


Bild 3. Zur Erläuterung der Gleichung 6.

zur Zeit $t = 0$ ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0},$$

zur Zeit $t = \infty$ ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0} - \frac{i_p - i_c}{i_0} \operatorname{tg} \alpha.$$

Ist die Stoßerregung nicht vorhanden, so ist $i_e = i_s$ und Gl. (9) geht über in

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0} - \frac{i_p - i_s}{i_0} \operatorname{tg} \alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{t}{T_0}}\right), \quad (10)$$

zur Zeit $t = 0$ ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0},$$

zur Zeit $t = \infty$ ist

$$\frac{E}{E_0} = \frac{E_s}{E_0} - \frac{i_p - i_s}{i_0} \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Annahme, daß die innere Charakteristik der Maschine geradlinig verläuft, gilt nur für relativ kleine Erregerspannungen. Mit wachsender Erregung nimmt die Sättigung vor allem infolge der vermehrten Polstreuung bei Belastung sehr stark zu. Ihren Einfluß auf den Verlauf der inneren Charakteristik einer synchronen Blindleistungsmaschine bei einer Spannungssenkung auf 80% der Nennspannung zeigt Bild 4. Bei Ermittlung des Stromverlaufes der Blindleistungsmaschine mit Hilfe der Gl. (9) ist mit dem der Stoßerregerspannung entsprechenden Winkel α zu rechnen.

Entsprechend Bild 4 ist z. B. der einer Erregerspannung $4e_n$ zugeordnete Winkel gleich α_4 .

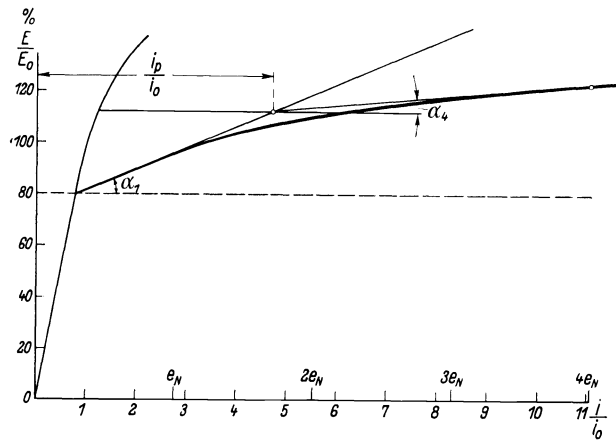


Bild 4. Innere Charakteristik einer synchronen Blindleistungsmaschine.

Aus der EMK E der Belastung und der jeweiligen Größe U der Netzspannung ergibt sich, wenn man die Streureaktanz der Hauptmaschine mit x_s bezeichnet, der Ständerstrom während des Stoßens zu

$$J = \frac{E - U}{x_s}. \quad (11)$$

Für die Leerlaufzeitkonstante der Asynchronmaschine gilt die Beziehung

$$T_0 = \frac{w \cdot \zeta \cdot \Phi_0}{J_0 \cdot \sqrt{2} \cdot r}, \quad (12)$$

wo ζ den Wicklungsfaktor der Läuferwicklung und J_0 den Effektivwert des Leerlaufstromes auf den Läufer umgerechnet bedeuten.

3. Die Zeitkonstante von synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschinen und von deren Erregermaschinen.

Die Größe der Zeitkonstante von synchronen Blindleistungsmaschinen ist außer von der Leistung bei Übererregung auch von der bei Untererregung geforderten Leistung abhängig. Die Vergrößerung der Leistung bei Untererregung bedingt eine

Vergrößerung des Kurzschlußverhältnisses im Leerlauf. Die hiermit verbundene Vergrößerung des Erregerstromes führt zu einer Verkleinerung der magnetischen Zeitkonstante. In Bild 5 sind die Zeitkonstanten bei Leerlauf und Nennspannung für synchrone Blindleistungsmaschinen mit einem Kurzschlußverhältnis bei Leerlauf $k_0 = 0,6$ und $k_0 = 0,9$ sowie die Zeitkonstanten von asynchronen Blindleistungsmaschinen in Abhängigkeit von der Polleistung dargestellt. Ein Vergleich der Kurven zeigt, daß die Zeitkonstanten der asynchronen Blindleistungsmaschinen wesentlich

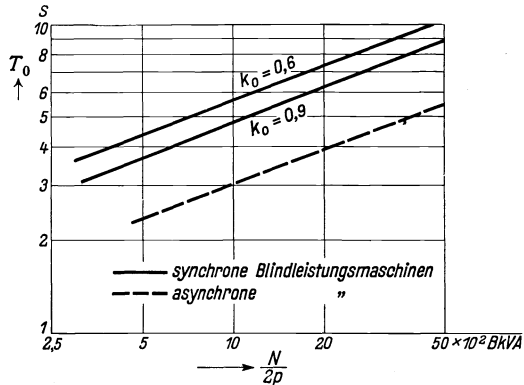


Bild 5. Magnetische Zeitkonstante bei Leerlauf und Nennspannung von Blindleistungsmaschinen in Abhängigkeit von der Polleistung.

kleiner sind als die Zeitkonstanten der synchronen Blindleistungsmaschinen gleicher Polleistung. Die Zeitkonstanten gelten für eine Temperatur des Erregerwiderstandes von 75°C und sind gerechnet für einheitlich entworfene Modellreihen beider Maschinenarten. Der große Unterschied in den Zeitkonstanten der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschinen erklärt sich durch den Unterschied der Konstruktion ihrer Läufer und durch die verschiedenen Ausführungsarten ihrer Wicklung.

Die Zeitkonstanten der Erregermaschinen können, wie schon oben erwähnt, durch Ausführung der Maschine mit geblätterttem Joch und geblättertten Polen sowie durch Einschalten eines Ohmschen Widerstandes in den Erregerkreis sehr klein gehalten werden. Die Größe der Zeitkonstante ist auch von der Sättigung der Maschine abhängig. Sie nimmt mit zunehmender Sättigung ab, da der Erregerstrom rascher zunimmt als der Fluß.

4. Vergleich der Stoßerregung bei einer synchronen und einer asynchronen Blindleistungsmaschine gleicher Leistung und Polzahl.

Als Beispiel soll die Stoßerregung bei einer synchronen Blindleistungsmaschine für 30 000 BkVA, $n = 600$ U/min, und einer asynchronen Blindleistungsmaschine

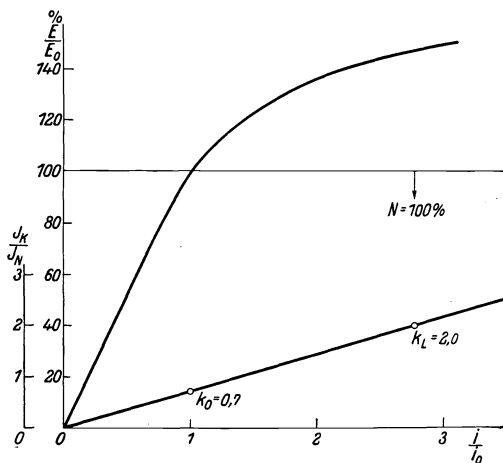


Bild 6. Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristik einer synchronen Blindleistungsmaschine für 30 000 BkVA, $n = 600$ U/min.

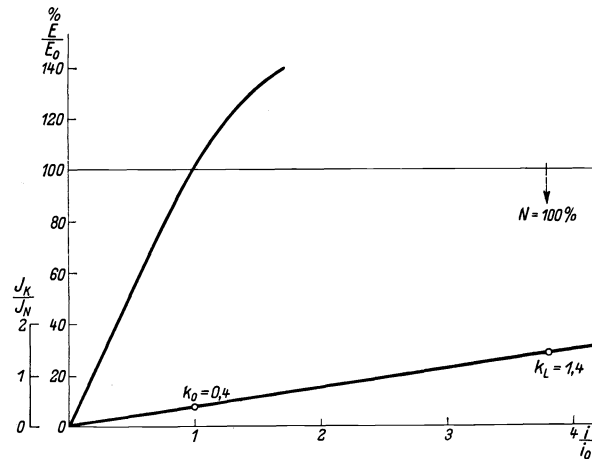


Bild 7. Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristik einer asynchronen Blindleistungsmaschine für 30 000 BkVA, $n = 600$ U/min.

gleicher Leistung und Drehzahl verglichen werden. Die Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristik für beide Maschinen zeigen Bild 6 und 7. Die synchrone Blindleistungsmaschine ist für eine Leistung bei Untererregung von 70 % der Leistung bei Übererregung bemessen. Dementsprechend ist ihr Kurzschlußverhältnis bei Leerlauf $k_0 = \approx 0,7$. Bei der asynchronen Blindleistungsmaschine ist die Größe des Luftspaltes nur durch mechanische Forderungen bestimmt. Die Maschine liefert ja ohne weiteres bei Über- und Untererregung 100 % ihrer Leistung. Luftspalt und damit Kurzschlußverhältnis bei Leerlauf können mithin bei der asynchronen Blindleistungsmaschine wesentlich kleiner ausgeführt werden als bei der synchronen Blindleistungsmaschine. Die Zeitkonstante der synchronen Blindleistungsmaschine bei Leerlauf und Nennspannung ist $T_0 = 7,5$ sec. Der entsprechende Wert für die asynchrone Blindleistungsmaschine ist $T_0 = 4,5$ sec. Aus der Differenz dieser beiden Werte folgt, daß der Stoßvorgang bei der asynchronen Blindleistungsmaschine schneller beendet sein wird als bei der synchronen Blindleistungsmaschine. Die Zeitkonstante der Erregermaschine für beide Maschinen beträgt $T_e = 0,09$ sec, wenn im Erregerkreis ein Ohmscher Widerstand von achtfacher Größe des Widerstandes der Erregerwicklung vorgesehen wird.

a) Die Anfangsströme beim Stoßen.

Das Luftspaltfeld der Maschine ist im ersten Augenblick des Stoßens praktisch gleich dem Feld, das der Belastung vor der Spannungssenkung entspricht. Bei der Blindleistungsmaschine ist die algebraische Differenz zwischen der EMK E , die dem

Luftspaltfeld entspricht und der Netzspannung U gleich der Streuspannung der Maschine. Diese ist dem Ständerstrom proportional. In unserem Beispiel ist die Streuspannung der synchronen Blindleistungsmaschine bei Nennlast 12 % der Nennspannung. In Bild 8 ist für eine Erregung entsprechend Leerlauf bei Nennspannung und für Nennerregung der Anfangswert des Stromes beim Stoßen in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung dargestellt. Infolge der kleinen Streuung der synchronen Blindleistungsmaschine treten hier relativ hohe Anfangsströme auf.

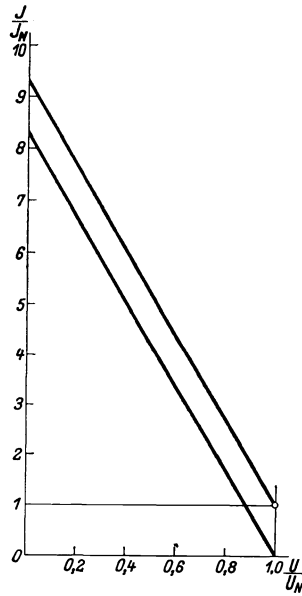


Bild 8. Anfangsströme beim Stoßen der synchronen Blindleistungsmaschine in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung.

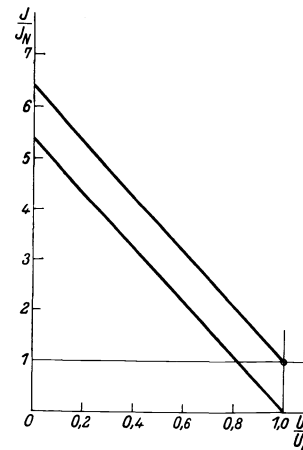


Bild 9. Anfangsströme beim Stoßen der asynchronen Blindleistungsmaschine in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung.

Die entsprechenden Werte für die asynchrone Blindleistungsmaschine zeigt Bild 9. Allgemein ist die Streuung der asynchronen Blindleistungsmaschine größer als die der synchronen.

Die hier betrachtete Maschine z. B. hat bei Nennlast eine Streuspannung von 18,5 % der Nennspannung. Die Anfangswerte beim Stoßen liegen damit im Verhältnis 12 : 18,5 tiefer als bei der synchronen Blindleistungsmaschine.

b) Die Endströme und Endleistungen nach dem Stoßen.

Bild 10 und 11 zeigen die Endströme nach dem Stoßen in Abhängigkeit von der Erregerspannung bei konstanter Netzspannung. Die Kurven haben bei beiden Maschinen ähnlichen Verlauf. Nur bei kleinen Werten der Erregerspannung ändert sich

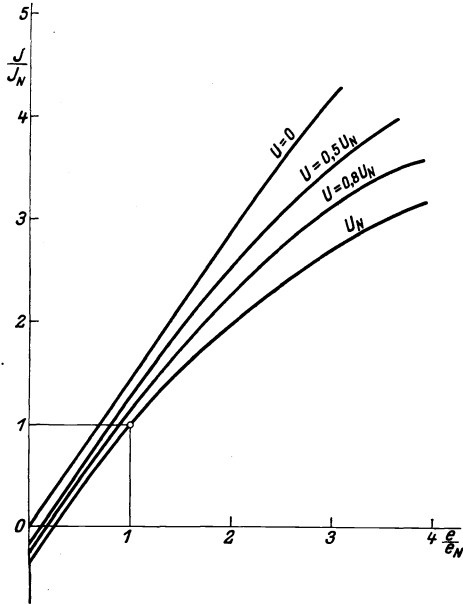


Bild 10. Endströme nach dem Stoßen der synchronen Blindleistungsmaschine in Abhängigkeit von der relativen Erregerspannung.

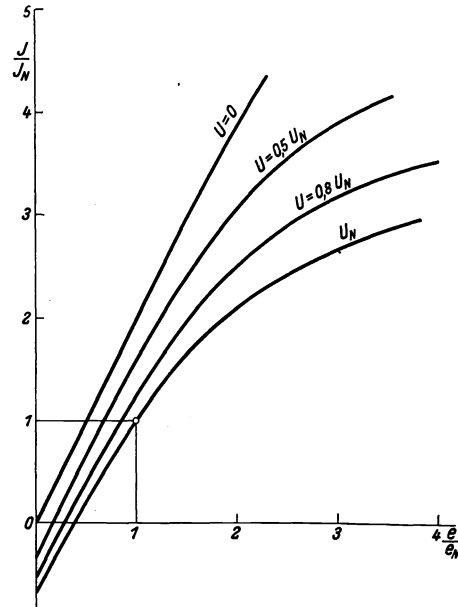


Bild 11. Endströme nach dem Stoßen der asynchronen Blindleistungsmaschine in Abhängigkeit von der relativen Erregerspannung.

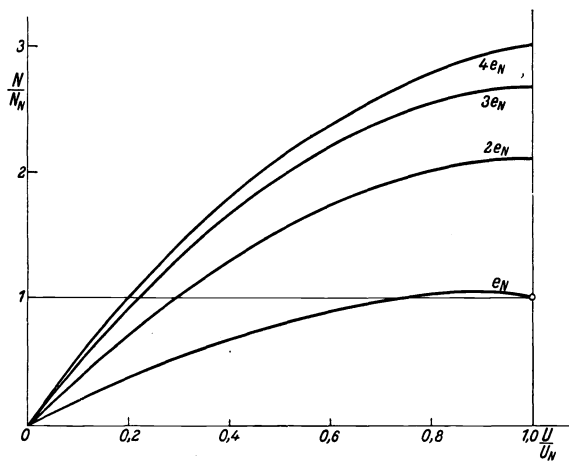


Bild 12. Leistung der synchronen Blindleistungsmaschine nach dem Stoßen in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung.

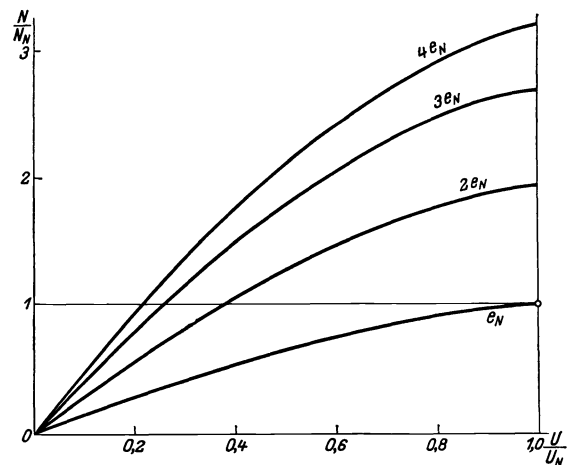


Bild 13. Leistung der asynchronen Blindleistungsmaschine nach dem Stoßen in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung.

der Ständerstrom linear mit dieser. Mit wachsender Erregerspannung macht sich vor allem infolge der großen Polstreuung bei Belastung die Sättigung der Maschine sehr stark bemerkbar. Man erkennt, daß es hier unzuweckmäßig sein würde, bei der Stoßerregung über den etwa dreifachen Wert der Nennererregerspannung hinauszugehen.

Die Endleistungen der Blindleistungsmaschine nach dem Stoßen in Abhängigkeit von der relativen Netzspannung bei konstanter Erregerspannung zeigen die Bilder 12 und 13. Auch diese lassen klar erkennen, daß durch eine Vergrößerung der Erregerspannung über den dreifachen Betrag des Nennwertes hinaus infolge der Sättigung der Maschine nur noch eine geringe Vergrößerung der Blindleistung zu erzielen ist.

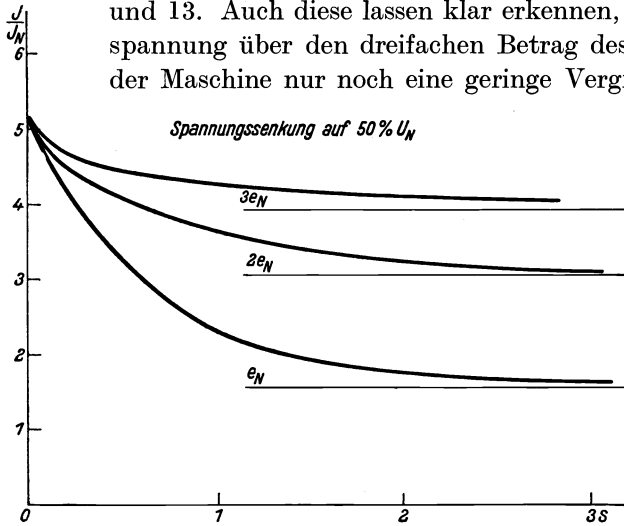


Bild 14. Stromverlauf der synchronen Blindleistungsmaschine während des Stoßens in Abhängigkeit von der Zeit. Spannungssenkung auf 50% der Nennspannung.

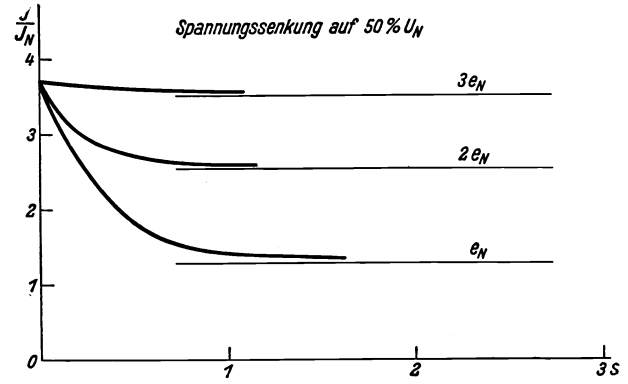


Bild 15. Stromverlauf der asynchronen Blindleistungsmaschine während des Stoßens in Abhängigkeit von der Zeit. Spannungssenkung auf 50% der Nennspannung.

e) Der zeitliche Verlauf des Stromes der Blindleistungsmaschine während des Stoßens.

Mit Hilfe der unter 2. angegebenen Gleichungen ist der Stromverlauf der Blindleistungsmaschine während des Stoßens ermittelt worden. Bild 14 und 15 gelten für den Fall, daß die Stoßerregungseinrichtungen bei einer Spannungssenkung auf 50% der Nennspannung ansprechen, Bild 16 und 17 für den Fall, daß die Stoßerregungseinrichtungen bei einer Spannungssenkung auf 30% der Nennspannung ansprechen.

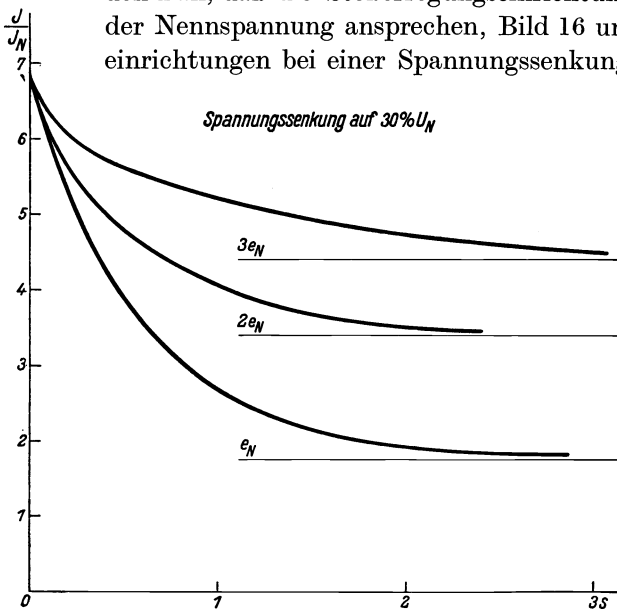


Bild 16. Stromverlauf der synchronen Blindleistungsmaschine während des Stoßens in Abhängigkeit von der Zeit. Spannungssenkung auf 30% der Nennspannung.

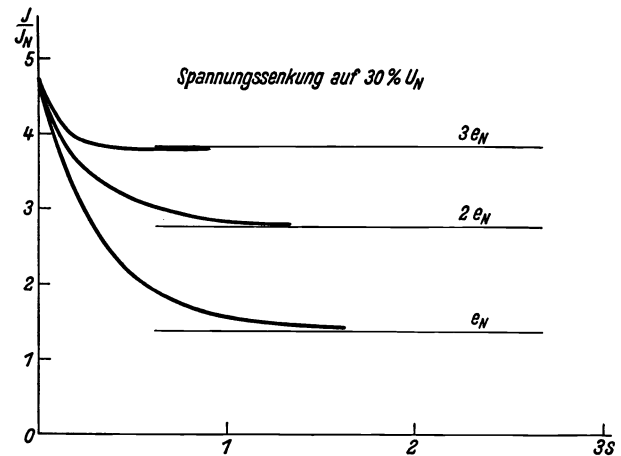


Bild 17. Stromverlauf der asynchronen Blindleistungsmaschine während des Stoßens in Abhängigkeit von der Zeit. Spannungssenkung auf 30% der Nennspannung.

Der Stoßvorgang ist bei der synchronen Blindleistungsmaschine praktisch in 1,5 Sekunden, bei der asynchronen Blindleistungsmaschine infolge ihrer kleineren Zeitkonstante in kürzerer Zeit, praktisch in 1 Sekunde, beendet. Soll die Zeit des Stoßvorganges abgekürzt werden, so muß die Zeitkonstante der Hauptmaschine verkleinert werden, was sich im allgemeinen nur durch eine Vergrößerung des Modelles erreichen läßt. Eine Herabsetzung der Zeitkonstante der Erregermaschine würde im vorliegenden Falle ohne nennenswerten Einfluß auf die Zeit des Stoßvorganges bleiben.

Zusammenfassung.

Das Verhalten der synchronen und asynchronen Blindleistungsmaschinen bei Stoßerregung wird untersucht. Zunächst wird die Gleichung für den Ständerstrom während des Stoßens abgeleitet und die Zeitkonstante für synchrone und asynchrone Blindleistungsmaschinen normaler Bauart in Abhängigkeit von der Polleistung dargestellt. Dann wird als Beispiel der Stromverlauf während des Stoßens für eine synchrone und asynchrone Blindleistungsmaschine mit einer Leistung von 30000 BkVA, $n = 600$ U/min ermittelt. Es zeigt sich, daß der Stoßerregungsvorgang in verhältnismäßig kurzer Zeit, für das Beispiel in 1 bis 1,5 sec, beendet ist. Eine weitere Verkürzung des Stoßerregungsvorganges ist möglich, wenn die Zeitkonstante der Hauptmaschine verkleinert wird. Eine Änderung der Zeitkonstante der Erregermaschine ist praktisch ohne Bedeutung, da die Zeitkonstante der Erregermaschine stets sehr klein ist im Vergleich zu der der Hauptmaschine.

Gemeinschaftsschwingungen gekoppelter Synchronkraftwerke mit asynchronen Netzen.

Von **Reinhold Rüdberg.**

Mit 21 Bildern.

Mitteilung aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 12. März 1932.

Inhaltsübersicht.

- | | |
|---|---|
| 1. Einleitung. | 5. Reglerschwingungen gekoppelter Kraftmaschinen. |
| 2. Zusammenwirken von synchronen und asynchronen Maschinen. | 6. Mechanische und elektrische Gemeinschaftsschwingungen. |
| 3. Dämpfung der asynchronen Pendelschwingungen. | 7. Frequenzschwingungen bei Belastungsstößen. |
| 4. Zahlreiche Synchronmaschinen am Netz. | 8. Schlußfolgerungen und Meßergebnisse. |

1. Einleitung.

In den letzten Jahrzehnten hat man unsere elektrischen Kraftwerke und Verteilungsnetze zu immer größeren Gemeinschaftssystemen zusammengeschlossen, um die wirtschaftlichen Vorteile auszunutzen, die sich hierbei durch die Ersparnis von Reserven, durch den örtlichen und zeitlichen Lastausgleich und durch die Heranziehung der jeweils günstigsten Energieerzeugungsstätten ergeben. Für jeden Zustand der Stromverbraucher und Stromerzeuger kann man in einem derartigen Netzsystem die stationäre Verteilung des Energieflusses bestimmen. Bei jeder Änderung dieser Verteilung können jedoch Ausgleichsvorgänge entstehen, die sowohl die Leitungen als die Stromverbraucher mit ihren festen Anschlüssen und ihren Motoren als auch die Energieerzeuger mit ihren Generatoren, Kraftmaschinen und Reglern aller Art umfassen. Sie können zu Leistungs- und Frequenzpendelungen führen, die sich wegen der Größe der wirkenden Energien sehr unangenehm bemerkbar machen.

Es ist bekannt, daß Kraftmaschinen unter dem Einfluß ihrer Drehzahlreglerschwingungsfähige Systeme sind. In großen Netzsystemen arbeiten zahlreiche derartige Maschinen zusammen, ihre Schwingungen sind untereinander verkoppelt und sollen im folgenden näher untersucht werden. Weiter ist bekannt, daß miteinander parallel arbeitende Synchronmaschinen Schwingungen ausführen können. Sie arbeiten in unseren Netzsystemen jedoch auch mit leistungsfähigen Asynchronmotoren zusammen, die auf diese Schwingungen einwirken, und sie werden durch die eben erwähnten Reglerschwingungen mit beeinflußt. Auch diese Erscheinung wollen wir genauer zergliedern. Wir nehmen dabei an, daß

die Pendelungen durch eine plötzliche Änderung des Beharrungszustandes, also durch einen einmaligen Stoß angeregt werden und verfolgen nur die Wirkungen dieses Stoßes, nicht die der Beharrungsleistungen. Um nicht zu weitschweifig zu werden, wollen wir alle unsere Betrachtungen nur auf solche Schwingungen erstrecken, bei denen wir lineares Verhalten aller Größen voraussetzen dürfen. Der funktionelle Zusammenhang aller wirkenden Kräfte und Erscheinungen läßt sich hierdurch ausreichend klären.

Bei jeder elektrischen Maschine nach Bild 1 können wir die Lage des Läuferfeldes, z. B. im Polrad einer Synchronmaschine, vergleichen mit der Lage des Spannungsvektors, z. B. in der Ständerwicklung oder an den Sammelschienen oder an anderen Punkten des Netzes. Den Winkel zwischen beiden nennen wir ϑ , im stationären Betrieb bleibt er konstant, bei schwankendem Betrieb bezeichnen wir seine zeitliche Veränderung im Verhältnis zur Netzfrequenz als Schlüpfung

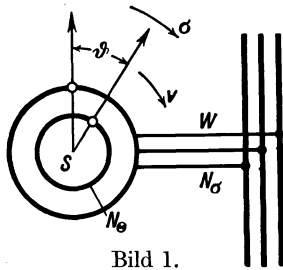


Bild 1.

$$\sigma = \frac{1}{\omega} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (1)$$

Die Beschleunigung oder Verzögerung dieses Winkels wird durch die Änderung der Schlüpfung

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \quad (2)$$

dargestellt. Ebenso wie der Winkel beziehen sich Schlüpfung und Verzögerung stets auf zwei bestimmte Punkte der Anlage. Man kann sie aber auch auf einen inneren und einen außenliegenden Punkt, etwa eine feste Vergleichsfrequenz, beziehen.

Bei jeder auftretenden Schwankung ändert sich die synchrone Leistung in den Generatoren proportional dem Winkel zwischen Polrad und Sammelschiene. Sie ist

$$W = N_s \vartheta = k_s N_o \vartheta, \quad (3)$$

wobei N_o die Nennleistung der Maschine, N_s ihre synchronisierende Leistung und k_s die Synchronisierziffer entsprechend dem Verhältnis dieser beiden bezeichnet.

Die asynchrone Leistung N_σ sowohl in den Drehstrommotoren des Netzes wie in den Dämpferwicklungen der Synchronmaschinen ist proportional der Schlüpfung zwischen Läuferwicklung und Ständerspannung. Bezeichnet man mit σ_a die bei der regulären Leistung vorhandene Asynchronschlüpfung, so ist

$$N_\sigma = N_a \sigma = \frac{N_o}{\sigma_a} \sigma = \frac{N_a}{\omega} \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (4)$$

Dabei ist zur Abkürzung mit N_a die Asynchronstärke der Läuferwicklung bezeichnet.

Die Trägheitsleistung der Schwungmassen von synchronen oder asynchronen Maschinen, die bei Veränderung ihrer Drehzahl zur Wirkung kommt, ist proportional der Verzögerung, also

$$N_\theta = S v = S \frac{d\sigma}{dt} = \frac{S}{\omega} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}. \quad (5)$$

Dabei ist mit

$$S = \Theta g \omega_0^2 = T_a N_o \quad (6)$$

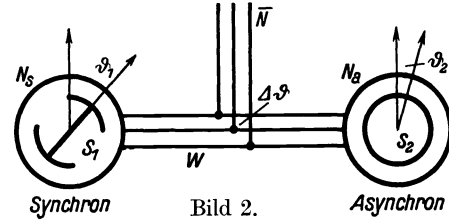
die doppelte kinetische Energie oder die Schwungleistung bezeichnet, die sich auch als Produkt der Anlaufzeitkonstante T_a mit der Nennleistung ausdrücken

läßt. Da die Verzögerung zur Bestimmung der Trägheitsleistung stets auf die absolute Zeit bezogen ist, so müssen wir den Winkel ϑ in Gl. (5) immer gegenüber einem völlig gleichmäßig rotierenden Spannungsvektor verstehen. Die Nennleistung N_o müssen wir natürlich in allen diesen Beziehungen einheitlich entweder in Kilowatt oder in Kilovoltampere ausdrücken.

Nach diesen Vorbereitungen können wir stufenweise an die Lösung unserer Probleme gehen.

2. Zusammenwirken von synchronen und asynchronen Maschinen.

Da in unseren Netzen Synchrongeneratoren und Asynchronmotoren in großer Zahl zusammen arbeiten, so betrachten wir zuerst das Zusammenwirken eines einzigen Synchrongenerators mit einem einzigen Asynchronmotor nach Bild 2. Bei Ausgleichsvorgängen geben die Schwungmassen beider Maschinen Trägheitsleistung ab, jedoch kann nur die Synchronmaschine synchronisierende Leistung entwickeln. Um einen einfachen Überblick zu erhalten, vernachlässigen wir die Dämpferleistung des Generators und sehen beim Motor den Asynchronechlupf σ_a als außerordentlich klein an, so daß der Läufer sich starr mit der Ständerspannung bewegt. Dann kommt nach Bild 2 für die synchrone Leistung der Unterschied des Polradwinkels ϑ_1 der Synchronmaschine und des Ständer- oder Läuferwinkels ϑ_2 der Asynchronmaschine in Betracht. Wenn wir beide Polradwinkel auf einen gleichmäßig rotierenden Vektor beziehen, so lautet die Energiebilanz der Synchronmaschine 1 daher für ihre Ausgleichsleistung



$$N_s(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{S_1}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} = 0. \quad (7)$$

Die synchronisierende Leistung N_s enthält dabei die Wirkung aller Streuungen, die zwischen den Winkeln ϑ_1 und ϑ_2 liegen, also die Querfeld- und Ständerstreuung der Synchronmaschine und die Ständer- und Läuferstreuung der Asynchronmaschine. Sie ist

$$\frac{N_s}{N_{o1}} = k_s = \frac{E}{E_{(q+s)1} + E_{(s+b)2}} = \frac{k_{s1}}{1 + \frac{k_{s1} N_{o1}}{k_{s2} N_{o2}}}, \quad (8)$$

wobei k_{s1} und k_{s2} im wesentlichen die reziproken Streuungen der beiden Maschinen bedeuten, die etwa in der Größe von 2 und 4 liegen.

Die von der Synchronmaschine abgegebene elektrische Leistung wird in jedem Augenblick von der Asynchronmaschine 2 aufgenommen, deren Energiebilanz lautet daher

$$-N_s(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{S_2}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} = 0. \quad (9)$$

Durch Addition zu Gl. (7) ergibt sich

$$\frac{S_1}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} + \frac{S_2}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} = 0. \quad (10)$$

Daraus folgt durch Integration unter Fortlassung von Konstanten, die nur die stationären Winkelabweichungen darstellen würden,

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = -\frac{S_1}{S_2}, \quad (11)$$

was dem Flächensatz der Mechanik entspricht. Die Pendelwinkel der asynchronen und synchronen Maschinen verhalten sich daher umgekehrt wie die Schwungleistungen.

Setzt man ϑ_2 hieraus in Gl. (7) ein und zieht die Schwungleistungen zusammen, so entsteht die Differentialgleichung für die Synchronmaschine

$$N_s \vartheta_1 + \frac{S_1 S_2}{\omega(S_1 + S_2)} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} = 0, \quad (12)$$

und diese gibt als Lösung eine harmonische Schwingung des Polradwinkels

$$\vartheta_1 = A_1 \cos \nu t \quad (13)$$

mit seiner Amplitude A_1 und der Eigenfrequenz

$$\nu = \sqrt{\omega N_s \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right)} = \sqrt{\frac{\omega k_s}{T_{a1}} \left(1 + \frac{T_{a1} N_{o1}}{T_{a2} N_{o2}} \right)}. \quad (14)$$

Wir sehen daraus, daß auch ein Maschinensatz aus Synchron- und Asynchronmaschine harmonische Eigenschwingungen ausführen kann mit einer Frequenz, die durch die synchronisierende Leistung der Synchronmaschine und durch die Schwungleistungen beider Maschinen bestimmt wird. Ihr Zusammenwirken ist derart, daß nach Gl. (14) die kleinere Schwungleistung den größten Einfluß auf die Eigenfrequenz besitzt. Für einen kleinen Asynchronmotor an einer großen Synchronmaschine überwiegt das zweite Glied in der Klammer von Gl. (14), er pendelt daher relativ schnell mit Amplituden, die nach Gl. (11) groß gegen die der Synchronmaschine sind. Als Beispiel erhält man für ein Leistungsverhältnis von 10:1 mit Gl. (8)

$$\nu = \sqrt{\frac{314 \cdot 0,33}{10} \left(1 + \frac{10 \cdot 10}{1 \cdot 1} \right)} = 32,5 \text{ in } 2\pi \text{ sec, also } 5,2 \text{ Per/sec.}$$

Bei einem großen Asynchronmotor, der mit einer kleinen Synchronmaschine zusammen wirkt, überwiegt das erste Klammerglied in Gl. (14), die Synchronmaschine schwingt daher entsprechend ihrer eigenen Schwungmasse fast so wie an einem starren Netz. Nach Gl. (11) hat sie jetzt die überwiegenden Ausschläge. Als Beispiel hat man für ein Leistungsverhältnis von 1:5

$$\nu = \sqrt{\frac{314 \cdot 2}{10} \left(1 + \frac{10 \cdot 1}{15 \cdot 5} \right)} = 9,1 \text{ in } 2\pi \text{ sec, oder } 1,45 \text{ Per/sec.}$$

Die resultierende Schwungleistung zur Bestimmung der Eigenfrequenz ist nach Gl. (12) und (14)

$$S = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{S_1}{1 + \frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}}. \quad (15)$$

Sind beide Schwungmassen einander gleich, so ist sie genau halb so groß wie die jeder Maschine. Die Winkelausschläge sind entgegengesetzt gleich, die Maschinen schwingen im symmetrischen Gegentakt.

Wenn jetzt gemäß Bild 2 ein Leistungsstoß \bar{N} auf den Maschinensatz trifft, so bewirkt sein Strom eine plötzliche Änderung des Winkels ϑ beider Maschinen um den Betrag $\Delta\vartheta$. Während die Synchronmaschine hierauf gemäß Gl. (3) momentan durch Abgabe größerer Leistung reagiert, so wie es im Spannungsdiagramm von Bild 3 dargestellt ist, kann die Asynchronmaschine ihren Leistungsanteil nicht

in gleicher Weise steigern, sie kann ihn vielmehr nur durch Verzögerung ihrer Schwungmassen übernehmen. Da sie keine synchronisierende Leistung besitzt, so trifft der Leistungsstoß im ersten Augenblick allein auf die Synchronmaschine. In Bild 4 sind diese Verhältnisse dargestellt. Die Synchronmaschine verzögert sich entsprechend dem vollen Leistungsstoß, die Asynchronmaschine läuft anfänglich unverändert weiter. Die Maschinen kommen daher gegeneinander ins Pendeln.

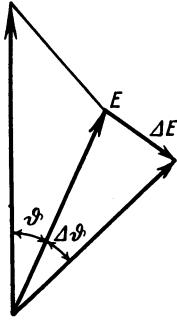


Bild 3.

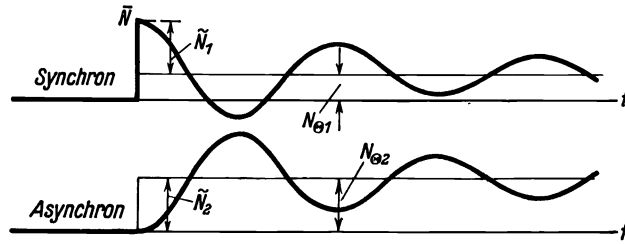


Bild 4.

Einige Zeit nach dem Stoß verzögern sich beide Schwungmassen gleichartig. Entsprechend Gl. (5) ist ihre gemeinsame Verzögerung

$$v = \frac{\bar{N}}{S_1 + S_2}. \quad (16)$$

Daher ist die Verzögerungsleistung der Synchronmaschine

$$N_{\theta 1} = v S_1 = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \bar{N} \quad (17)$$

und die der asynchronen

$$N_{\theta 2} = v S_2 = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \bar{N}. \quad (18)$$

Zum Übergang der anfänglichen Stoßverteilung auf diesen Endwert entwickelt sich nach Bild 3 eine Schwingungsamplitude, die für die Synchronmaschine beträgt

$$\tilde{N}_1 = \bar{N} - N_{\theta 1} = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \bar{N} \quad (19)$$

und für die Asynchronmaschine

$$\tilde{N}_2 = 0 - N_{\theta 2} = -\frac{S_2}{S_1 + S_2} \bar{N}, \quad (20)$$

also derselbe Betrag mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der weitere Leistungsverlauf ist danach in Bild 4 für einige Perioden dargestellt unter Berücksichtigung der in Wirklichkeit auftretenden Dämpfung.

Wir sehen hiernach, daß alle plötzlich auftretenden Leistungsstöße im ersten Augenblick lediglich auf die Synchronmaschine wirken, daß diese also empfindlicher auf die Netzschwankungen reagiert als die Asynchronmaschine, und daß sich die Stöße erst späterhin entsprechend den Schwungleistungen auf beide Maschinen verteilen. Hat die Asynchronmaschine die größeren Schwungmassen, so übernimmt sie später auch den größeren Teil des Leistungsstoßes und zieht ihn vom Synchron-generator ab. Daher sind die zwischen Synchron- und Asynchronmaschinen auftretenden Pendelungen nach Gl. (19) und (20) vor allem durch die Schwungleistung der Asynchronmaschine bestimmt.

Es bedarf noch einer näheren Erläuterung, in welcher Weise Asynchronmaschinen auf schnelle Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ des Spannungsvektors reagieren. Wenn nach Bild 3 ein entsprechender Spannungssprung ΔU auf die Ständerwicklung der Asynchronmaschine trifft, so entwickelt er ein plötzlich auftretendes Zusatzfeld in der Maschine, das quer zum umlaufenden Arbeitsfeld steht. Der Asynchronläufer kann daher keine Arbeit mit ihm entwickeln. Das plötzlich auftretende Stehfeld verursacht vielmehr kurzschlußartige Ausgleichsströme mit abweichenden Frequenzen im Ständer und Läufer, die sich den regulären Strömen überlagern und nur den stetigen Anschluß der geänderten Ströme und Spannungen bewirken, ohne nützliche Drehmomente zu entwickeln.

3. Dämpfung der asynchronen Pendelschwingungen.

Wir wollen unsere Betrachtungen jetzt verfeinern, indem wir die Dämpfungskräfte der Schwingungen mit berücksichtigen, die durch die Schlüpfung des Asynchronmotors hervorgerufen werden. Wir könnten auch leicht die Wirkung des Dämpfers in der Synchronmaschine mit erfassen und ebenso die dämpfende Wirkung der sonstigen Widerstandsbelastung des Netzes, die außer den Asynchronmotoren praktisch vorhanden zu sein pflegt. Da alle diese Dämpfungen nur geringen Einfluß auf das Einsetzen der Schwingungserscheinungen haben und nur auf einen beschleunigten Ablauf derselben hinwirken,

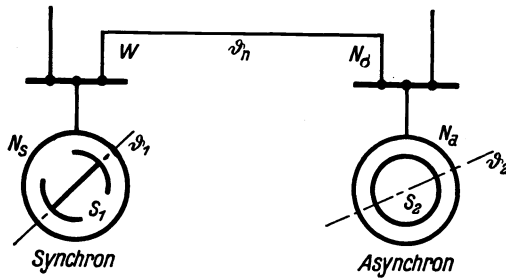


Bild 5.

so wollen wir uns mit der Behandlung der asynchronen Schlüpfungsdämpfung begnügen, die im allgemeinen einen überwiegenden Einfluß besitzt.

Wir können nach Bild 5 den Winkel des synchronen Generators ϑ_1 , den des asynchronen Motors ϑ_2 und den des Netzes ϑ_n unterscheiden. Wir beziehen jetzt den Netzwinkel ϑ_n auf die absolute Zeit, dagegen die Maschinenwinkel ϑ_1 und ϑ_2 relativ auf den Netzwinkel ϑ_n . Dann erhalten wir für die Energiebilanz der Synchronmaschine nach Gl. (3) und (5)

$$N_s \vartheta_1 + \frac{S_1}{\omega} \frac{d^2(\vartheta_1 + \vartheta_n)}{dt^2} = 0, \quad (21)$$

für die Asynchronmaschine nach Gl. (4) und (5)

$$\frac{N_a}{\omega} \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{S_2}{\omega} \frac{d^2(\vartheta_2 + \vartheta_n)}{dt^2} = 0 \quad (22)$$

und für die Sammelschienen, die nur die Pendelleistungen der Maschinen vermitteln,

$$N_s \vartheta_1 + \frac{N_a}{\omega} \frac{d\vartheta_2}{dt} = 0. \quad (23)$$

Eliminiert man zunächst ϑ_2 aus den beiden letzten Gleichungen und alsdann ϑ_n aus der ersten, so erhält man als Differentialgleichung für die Synchronmaschine

$$N_s \vartheta_1 + \frac{N_s}{N_a} S \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{S}{\omega} \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = 0. \quad (24)$$

Darin sind die beiden Schwungmassen zu einer resultierenden S nach Gl. (15) zusammengefaßt. Die Lösung für den Pendelwinkel des Generators stellt jetzt in Erweiterung von Gl. (13) eine gedämpfte Schwingung dar

$$\vartheta_1 = A_1 \varepsilon^{-\frac{\varrho}{2}t} \cos \nu t, \quad (25)$$

bei der der Dämpfungsfaktor den Wert

$$\varrho = \omega \frac{N_s}{N_a} = \omega k_s \sigma_a \frac{N_{o1}}{N_{o2}} \quad (26)$$

besitzt, während die Eigenfrequenz gegenüber Gl. (14) den um die Dämpfung etwas verminderten Betrag

$$\nu = \sqrt{\frac{\omega N_s}{S} - \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2} \quad (27)$$

erhält.

Während die Schwingungsdämpfung von Synchronmaschinen um so stärker ist, je kräftiger ihr Dämpferkäfig und je geringer seine Nennschlüpfung ist, so wird die Dämpfungswirkung bei Asynchronmotoren um so stärker, je geringer ihre Asynchronstärke und je größer daher ihre Asynchronschlüpfung ist. Für eine Synchronisierziffer vom Betrage 2 und einen asynchronen Schlupf von 2% eines Asynchronmotors, der die fünffache Nennleistung des Synchrongenerators besitzt, ist der Dämpfungsexponent

$$\frac{\varrho}{2} = \frac{314 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 100} \frac{1}{5} = 1,26/\text{sec}.$$

Die Dämpfungszeitkonstante ist also 0,8 sec, während man für Dämpfungskäfige von Synchronmaschinen meistens 2 bis 3 sec erhält.

Solange der erste Faktor unter der Wurzel von Gl. (27) überwiegt, und das ist bei großen Asynchronmotorleistungen stets der Fall, treten ausgeprägte Schwingungen auf. Die Dämpfung ist um so schwächer, je größer nach Gl. (26) die Asynchronleistung im Verhältnis zur synchronen ist. Diese Verhältnisse liegen in unseren praktischen Netzen mit starker Motorenleistung gegenüber jedem einzelnen Synchrongenerator meistens vor, die Dämpfung ist dort nur ein Bruchteil der eben berechneten. Wenn jedoch die synchrone Leistung groß und die asynchrone gering ist, so kann das zweite Glied unter der Wurzel der Gl. (27) überwiegen, so daß nur noch aperiodische Vorgänge möglich sind. Das periodische Gebiet läßt sich mit Gl. (15) und (26) bestimmen aus

$$\frac{\omega N_s}{S_1} \left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) > \left(\frac{\omega}{2} \frac{N_s}{N_a}\right)^2 \quad (28)$$

oder nach Einsetzen der spezifischen Ziffern von Gl. (3), (4), (6) und (8) und Näherungsentwicklung für kleine Asynchronleistungen zu

$$\sigma_a < \sqrt{\frac{4}{\omega T_{a2} k_{s2}}}. \quad (29)$$

Für mittlere Verhältnisse liefert das eine Grenzsclüpfung von

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{4}{314 \cdot 1 \cdot 4}} = 5,65\%,$$

über der Asynchronmotoren nicht mehr schwingungsfähig sind.

Während Gl. (25) den Winkel ϑ_1 zwischen Synchronmaschine und Netz angibt, können wir den Schwingungswinkel ϑ_2 des Asynchronmotors gegenüber dem Netz nunmehr durch Integration von Gl. (23) bei mäßiger Dämpfung finden zu

$$\vartheta_2 = -\frac{\omega N_s}{N_a} \int \vartheta_1 dt \cong j \frac{\rho}{\nu} \vartheta_1. \quad (30)$$

Der Asynchronmotor schwingt also mit 90° verschobener Phase gegenüber dem Synchrongenerator, seine Schwingungsamplitude ist außerdem gering, wenn der Faktor ρ/ν einen kleinen Wert darstellt. Für unser Beispiel ist

$$\frac{\rho}{\nu} = \frac{2 \cdot 1,26}{9,1} = 0,28,$$

was für praktische Netze meist noch weit unterschritten wird.

Den Netzwinkel ϑ_n können wir am einfachsten aus Gl. (21) bestimmen, wenn wir deren erstes Glied aus Gl. (24) einsetzen und dabei die Dämpfung wieder als klein ansehen. Wir erhalten dann

$$\vartheta_n = -\frac{S_1}{S_1 + S_2} \vartheta_1 - j \frac{\rho}{\nu} \frac{S_2}{S_1 + S_2} \vartheta_1 \quad (31)$$

und ersehen daraus, daß das Netz fast im Gegentakt zum Synchrongenerator schwingt, und zwar in seinem ersten Hauptglied bei überwiegender Synchronschwungleistung S_1 relativ stark, bei überwiegender Asynchroneleistung S_2 relativ schwach.

Da der Motorwinkel ϑ_2 gegenüber dem Netz nach Gl. (30) meist relativ klein ist, so stimmt die Bewegung des Asynchronmotors fast mit der Netzschwingung ϑ_n nach Gl. (31) überein, sie eilt nur in der Phase nach Maßgabe der Dämpfung etwas hinter ihr her und ist

$$\vartheta_2 + \vartheta_n = -\frac{S_1}{S_1 + S_2} \left(1 - j \frac{\rho}{\nu}\right) \vartheta_1. \quad (32)$$

Die totale Generatorschwingung setzt sich aus ϑ_1 und ϑ_n zusammen und ist nach Gl. (31)

$$\vartheta_1 + \vartheta_n = \frac{S_2}{S_1 + S_2} \left(1 - j \frac{\rho}{\nu}\right) \vartheta_1. \quad (33)$$

Die absoluten Schwingungswinkel der Maschinen verhalten sich daher wieder wie früher in Gl. (11) umgekehrt wie ihre beiden Schwungleistungen.

4. Zahlreiche Synchronmaschinen am Netz.

Unser bisheriges Arbeitsschema eines Synchrongenerators und eines Asynchronmotors stellt nur ein rohes Bild der Massenwirkungen in unseren großen verkuppelten Netzen dar, in Wirklichkeit arbeiten zahlreiche Synchrongeneratoren und zahlreiche Asynchronmotoren zusammen. Um deren Schwingungsverhältnisse zu bestimmen, müssen wir die einzelnen Synchronmaschinen alle für sich betrachten, denn jede bringt eine selbständige synchronisierende Ausgleichleistung in das Gesamtsystem hinein. Dagegen dürfen wir die asynchronen Motoren der gesamten parallel arbeitenden Netze in ihrer Wirkung zusammenfassen, denn wir haben eben gesehen, daß sie gegenüber dem Netzvektor nur recht geringe Eigenbewegungen ausführen, die wir im folgenden ganz vernachlässigen wollen.

Wir erhalten dann das Schema des Bildes 6, in dem eine Reihe von g Synchrongeneratoren auf eine gemeinsame Sammelschiene arbeiten, der der Spannungsvektor des Netzes E_n zugeordnet ist und von der alle Asynchronmaschinen des Netzes n mit ihren gesamten Schwungleistungen $\sum S_n$ gespeist werden. Bild 7 stellt das Vektor-diagramm der Spannungen dar. Der Netzvektor kann hierbei um den Betrag ϑ_n gegen einen absolut gleichmäßig rotierenden Vektor schwan- ken, das Polrad jedes Generators kann um den Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots$ gegen den Netzvektor schwingen.

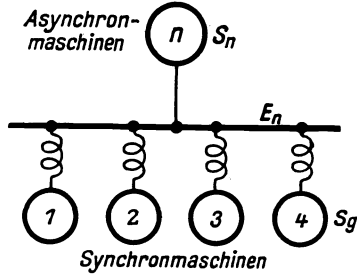


Bild 6.

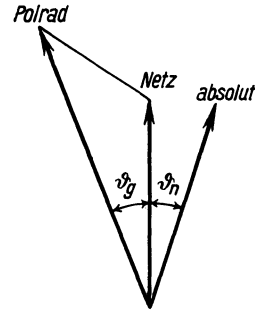


Bild 7.

Für jede der Synchronmaschinen erhalten wir dann nacheinander folgende Gleichungen für die Energiebilanz, die unter Vernachlässigung der Dämpfung nur die beiden Posten der synchronisierenden Leistung und der Trägheitsleistung nach Gl. (3) und (5) enthält

$$\left. \begin{aligned} N_{s1} \vartheta_1 + \frac{S_1}{\omega} \frac{d^2(\vartheta_1 + \vartheta_n)}{dt^2} = 0, \\ N_{s2} \vartheta_2 + \frac{S_2}{\omega} \frac{d^2(\vartheta_2 + \vartheta_n)}{dt^2} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Alle synchronisierenden Leistungen werden elektrisch an das Netz abgegeben und beschleunigen daher die Schwungmassen der Asynchronmotoren. Deren Energiebilanz wird also dargestellt durch

$$N_{s1} \vartheta_1 + N_{s2} \vartheta_2 + \dots = \frac{\sum S_n}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_n}{dt^2}. \quad (35)$$

Wir wollen dieses System linearer Differentialgleichungen dadurch direkt lösen, daß wir für die einzelnen Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ und ϑ_n harmonische Funktionen nach dem Schema der Gl. (13) ansetzen, die die Amplituden oder Winkelausschläge A_1, A_2, \dots und A_n besitzen und wollen versuchen, die Schwingungsfrequenz ν dieser Ausschläge zu bestimmen, die mit dem Gleichungssystem verträglich ist. Wenn wir als Abkürzung die starren Schwingungsfrequenzen

$$\frac{\omega N_{s1}}{S_1} = \nu_1^2, \quad \frac{\omega N_{s2}}{S_2} = \nu_2^2 \quad \text{usw.} \quad (36)$$

introduzieren, die jeder der Generatoren nach Gl. (34) an einem unendlich starren Netz mit $\vartheta_n = 0$ besitzen würde, so erhalten wir aus dieser selben Gleichung für die Amplituden die Gleichungsfolge

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 A_1 - \nu^2(A_1 + A_n) = 0, \\ \nu_2^2 A_2 - \nu^2(A_2 + A_n) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Das Verhältnis der Generatorausschläge zu den Netzausschlägen ist also

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{\nu^2}{\nu_1^2 - \nu^2}, \quad \frac{A_2}{A_n} = \frac{\nu^2}{\nu_2^2 - \nu^2}, \quad \text{usw.} \quad (38)$$

Ferner folgt aus Gl. (35) die Amplitudengleichung

$$N_{s_1} A_1 + N_{s_2} A_2 + \dots = - \frac{\sum S_n}{\omega} \nu^2 A_n. \quad (39)$$

Setzt man hier die einzelnen Generatoramplituden nach Gl. (38) ein, so hebt sich die des Netzes heraus, und es bleibt die Beziehung

$$\frac{N_{s_1}}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{N_{s_2}}{\nu_2^2 - \nu^2} + \frac{N_{s_3}}{\nu_3^2 - \nu^2} + \dots = - \frac{\sum S_n}{\omega}. \quad (40)$$

Durch Einführung der synchronisierenden Leistungen von Gl. (36) kann man sie noch übersichtlicher schreiben als

$$S_1 \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu^2} + S_2 \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu^2} + S_3 \frac{\nu_3^2}{\nu_3^2 - \nu^2} + \dots = - \sum S_n. \quad (41)$$

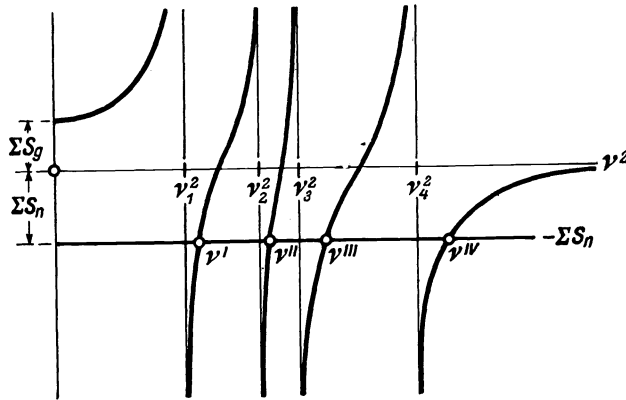


Bild 8.

Aus dieser Gleichung läßt sich die Eigenfrequenz ν aller gekoppelten Maschinen bestimmen.

Wir lösen diese Bedingungsgleichung am besten graphisch, indem wir uns ihre linke Seite in Bild 8 über der Abszisse ν^2 auftragen und sie zum Schnitt mit der konstanten rechten Seite bringen. Da für $\nu = 0$ die Frequenzquotienten alle zu 1 werden, so beginnt die Kurve

mit dem Wert der gesamten Generatorschwungmassen

$$\sum S_g = S_1 + S_2 + S_3 + \dots \quad (42)$$

Sie steigt hyperbelartig an, besitzt für $\nu = \nu_1, \nu_2, \nu_3$ usw. Pole, in denen sie von $+\infty$ auf $-\infty$ springt, und durchschneidet auf ihrem Verlauf die Gerade für $\sum S_n$ so viele Male, als Generatoren vorhanden sind. Die Schnittpunkte $\nu', \nu'', \nu''', \dots$ stellen die Lösungen der Gl. (41) und daher die Eigenfrequenzen dar, in denen die gekoppelten Netze schwingen können. Für g unterschiedliche Generatoren ergeben sich g Eigenfrequenzen, die hiernach leicht bestimmt werden können, sie sind alle etwas höher als die starren Frequenzen der Generatoren selbst.

Würde man die Netzsprungmassen S_n größer und größer machen, so würde das Netz sich immer starrer verhalten, und die Unterschiede von ν_1 und ν' usw. würden in Bild 8 durch Herunterrücken der Geraden für $\sum S_n$ immer mehr verschwinden. Sind dagegen die Netzsprungmassen gering, so rückt die Gerade $\sum S_n$ weiter gegen die Nulllinie herauf, die Eigenfrequenzen werden alle größer und verschieben sich nach dem nächst höheren starren Wert zu. Sie bleiben aber alle in engen Grenzen bis auf die höchste Eigenfrequenz, die mit abnehmender Netzsprungmasse immer weiter anwächst und schließlich ins Unendliche läuft. Die g Generatoren besitzen daher ohne Netzsprungmasse nur $g - 1$ Eigenfrequenzen. Die endlich bleibenden

Werte stellen daher vornehmlich die Schwingungen der Synchrongeneratoren gegeneinander dar, die mit abnehmender Netzschwingungsmasse anwachsende höchste Eigenfrequenz stellt dagegen die Schwingung der asynchron arbeitenden Netzschwingungsmassen gegen die Gesamtheit aller Generatoren dar.

Wenn mehrere oder gar alle Generatoren unter sich gleiche starre Eigenfrequenzen besitzen, so werden die Frequenzquotienten der entsprechenden Glieder in Gl. (41) einander gleich, und die Kurven fallen für diese Maschinen mit ihren Polen zusammen. Die Netzgerade $\sum S_n$ schneidet sie dann mehrfach, und es treten die gleichen Eigenfrequenzen gehäuft auf. Bild 9 stellt den Fall dar, daß sämtliche

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \dots \tag{43}$$

einander gleich sind. Dann arten die von $-\infty$ bis $+\infty$ ansteigenden Kurvenäste alle in dieselbe gerade Linie aus, und es ergibt sich bei g Generatoren für $g - 1$ Eigenfrequenzen

$$\nu' = \nu'' = \nu''' \dots = \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 \dots \tag{44}$$

Sie unterscheiden sich also nicht mehr von denen am starren Netz. Dagegen bleibt die höchste Eigenfrequenz gesondert bestehen, sie ergibt sich nach Gl. (41) aus

$$(S_1 + S_2 + S_3 + \dots) \frac{\nu_1^2}{\nu_1^2 - \nu^2} = - \sum S_n \tag{45}$$

und wird mit der abkürzenden Bezeichnung von Gl. (42)

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{\sum S_g}{\sum S_n}}. \tag{46}$$

Diese Formulierung stimmt überein mit Gl. (14), die wir für die Eigenfrequenz eines Synchrongenerators mit einem Asynchronmotor gewonnen haben, nur enthält sie hier das Verhältnis der Summe S_g aller Generatorschwingleistungen zur Summe S_n aller Motorschwingleistungen. Diese höchste Frequenz stellt also tatsächlich jetzt die Schwingung aller Generatoren gemeinsam gegen alle Motoren dar.

Die sämtlichen Maschinen zusammengeschlossener Kraftwerke und Netze können also eine erhebliche Zahl von Eigenschwingungen vollführen. Die Mindestzahl der Frequenzen ist bei lauter gleichen Generatoren 2, die Höchstzahl ist gegeben durch die Zahl der arbeitenden unterschiedlichen Synchronmaschinen. Die Frequenzen verschieben sich nicht nur mit jeder Änderung der starren Eigenzahlen ν_1, ν_2, ν_3 usw. der Maschinen, etwa durch Ändern ihrer Erregung oder Belastung, und nicht nur durch Zu- oder Abschaltung von Synchronmaschinen, sondern auch durch Änderung der Netzschwingungsmassen S_n , die bei wechselnder Zahl der im Betrieb befindlichen Motoren und ihrer Arbeitsmaschinen erheblich schwankt. Alle diese Schwingungen laufen durcheinander, so daß ein Netz mit zahlreichen derartigen Resonanzstellen ein ganzes Schwingungspaket besitzt.

Während die Netzamplituden A_n aller dieser Eigenschwingungen von gleicher Größenordnung sein können, hebt sich für jeden einzelnen Generator eine bestimmte Schwingung in markanter Weise heraus. Die Amplitude A_1 des Generators 1 z. B. bestimmt sich nach Gl. (38) aus einem Quotienten, dessen Nenner durch die Differenz

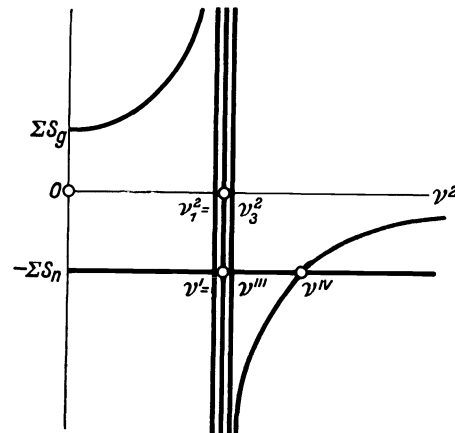


Bild 9.

des Frequenzquadrates von ν_1 und der betrachteten Eigenschwingung ν gegeben ist. Nach Bild 10 besitzt diese Differenz nun einen besonders kleinen Wert nur für diejenige Eigenfrequenz ν' , die gerade der starren Frequenz ν_1 benachbart ist. Für alle anderen Eigenfrequenzen ν'' , ν''' usw. ist die Differenz dieses Nenners dagegen viel größer. Daher erhält der Generator 1 nur erhebliche Schwingungsamplituden A_1 für diese benachbarte Frequenz ν' , für alle anderen Eigenfrequenzen führt er nur schwache Schwingungen aus. Man kann daher ν' als die aus ν_1 abgewandelte Eigenfrequenz dieses Generators ansehen. Er schwingt mit ihr gegenüber dem Netz nebst allen anderen Generatoren. Für den Generator 2 wird nach Gl. (38) lediglich die Nennerdifferenz mit ν'' besonders klein, und daher schwingt diese Maschine vorwiegend in dieser Eigenfrequenz. Jeder Generator hat also eine überwiegende Schwingungsamplitude für diejenige Eigenfrequenz, die seiner starren Netzfrequenz unmittelbar benachbart ist. Nur für das ihm zugehörige ν ergibt sich also ein großer Ausschlag. Wenn die Netzschwingmassen S_n allerdings sehr gering sind, so kann entsprechend

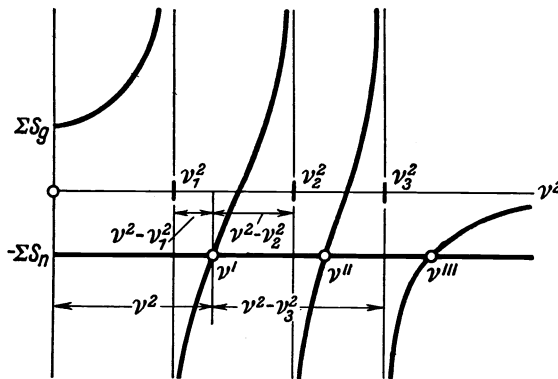


Bild 10.

Bild 10 außer der höheren zugehörigen Frequenz wohl auch einmal die nächst tiefere benachbarte Eigenfrequenz zu größeren Ausschlägen angeregt werden.

Die Schwingmasse jeder einzelnen Synchronmaschine führt demnach vorwiegend eine einzige starke Schwingung aus, der als Gegenwirkung schwache Amplituden aller anderen synchronen und asynchronen Schwingmassen im Gegenteil gegenüberstehen. Jede Maschine erhält also

von sämtlichen anderen Synchronmaschinen deren einzelne Eigenschwingungen nur in schwachem Maße aufgedrückt. Im Netz mit seinen asynchronen Schwingmassen lagern sich alle diese Schwingungen mit gleicher Größenordnung übereinander, das Schwingungspaket kann hier zu ganz unregelmäßigen Interferenzen führen, die sehr verwickelt erscheinende Frequenzschwankungen und Ausgleichleistungen zwischen den einzelnen Netzteilen zur Folge haben können.

Wir können nun übersehen, in welcher Weise sich ein im Netz anfallender Leistungsstoß \bar{N} auf dessen zahlreiche synchronen und asynchronen Maschinen verteilt. Im ersten Augenblick nehmen nur die Synchronmaschinen durch ihre synchronisierenden Kräfte an der Deckung der Stoßleistung teil, während die Asynchronmaschinen mangels synchronisierender Kräfte keinen Anteil erhalten. Die Stoßleistung ΔW jedes einzelnen Synchrongenerators ist daher

$$\Delta W = \frac{N_s}{\sum N_s} \bar{N}, \quad (47)$$

wobei die Summe aller synchronisierenden Leistungen sich natürlich nur auf die Synchronmaschinen beziehen kann.

Nunmehr verzögern sich sämtliche Synchronmaschinen entsprechend dieser Zusatzbelastung und pendeln mit Frequenzen, wie sie eben errechnet wurden, um den mittleren Netzwinkel herum. Auch die Asynchronmaschinen werden dadurch be-

einflußt, und schließlich verzögert sich nach Abklingen aller dieser Schwingungen das ganze Netz entsprechend Gl. (5) um einen mittleren Wert

$$v = \frac{\bar{N}}{\sum(S_g + S_n)}. \quad (48)$$

Der Leistungsstoß verteilt sich jetzt bei dieser gemeinsamen Verzögerung entsprechend den Schwungleistungen und ist für jeden Synchrongenerator

$$N_{\theta_g} = \frac{S_g}{\sum S_g + S_n} \bar{N} \quad (49)$$

und ebenso für jeden Asynchronmotor

$$N_{\theta_n} = \frac{S_n}{\sum(S_g + S_n)} \bar{N}. \quad (50)$$

In Bild 11 sind die anfänglichen Verzögerungen einiger synchroner und asynchroner Maschinen eines Netzes dargestellt und auch die Schwingungen, mit denen sie allmählich in die mittlere Netzverzögerung übergehen. Die Leistungsamplituden dieser Schwingungen sind für jeden Synchrongenerator bestimmt durch die Differenz der Anfangsleistung nach Gl. (47) und der Endleistung nach Gl. (49), also

$$\tilde{N}_g = \Delta W - N_{\theta} = \left(\frac{N_s}{\sum N_s} - \frac{S_g}{\sum(S_g + S_n)} \right) \bar{N}. \quad (51)$$

Jeder Generator schwingt mit diesem Leistungsbetrage in der ihm selbst zukommenden Eigenfrequenz, wenn man von den geringen Bewegungen absieht, mit denen er an den fremden Frequenzen auch teilnimmt.

Für jeden Asynchronmotor ergibt sich die Schwingungsamplitude der Leistung aus der Anfangsleistung 0 und der Endleistung nach Gl. (50) zu

$$\tilde{N}_n = 0 - N_{\theta_n} = - \frac{S_n}{\sum(S_g + S_n)} \bar{N}. \quad (52)$$

Für die Gesamtheit aller im Gleichtakt schwingenden Asynchronmotoren und daher für das gesamte Belastungsnetz ist die schwingende Leistung durch die einfache Summe aller Einzelleistungen gegeben.

Unter dem Einfluß dieser Schwingungen verzögert sich das Asynchronnetz, wie man aus Gl. (50) und Bild 11 erkennt, zeitweise mit doppelter Stärke. Es schwingt in der gleichen Weise gegenüber der Gesamtheit aller Synchronmaschinen, wie wir dies an Hand von Bild 4 für ein einzelnes Maschinenpaar kennengelernt hatten. Da sowohl die mittlere Verzögerungsleistung nach Gl. (50) wie die Schwingungsleistung jedes Asynchronmotors nach Gl. (52) seiner individuellen Schwungleistung, also dem Produkt $T_a N_{\theta}$ proportional ist, so können bei starken Leistungsstößen Motoren mit übermäßig großer Anlaufzeitkonstante viel stärker belastet werden, als es ihrer anteiligen Nennleistung entspricht, und hierbei durch Überlastung außer Tritt fallen. Dies kann z. B. bei Motoren für schwere Transmissionsantriebe oder Motoren mit Ilgner-Schwungrad eintreten, die wegen ihrer Anlaufzeitkonstante von mehreren 100 sec einen sehr großen Anteil jedes Belastungsstoßes auf sich ziehen. Gleichverteilung der Stoßleistung auf alle

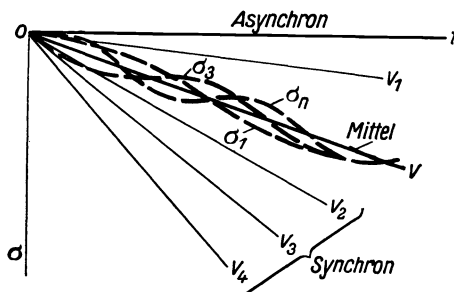


Bild 11.

Motoren entsprechend ihrer Nennleistung erhielte man nur bei gleichen Zeitkonstanten, die aber praktisch nicht erzielbar sind.

Während wir hiernach die Leistungsstöße der Asynchronmotoren kaum beeinflussen können, kann man danach fragen, unter welchen Umständen die geringsten Schwingungsmöglichkeiten für die Synchronmaschinen auftreten können, die ja im Betriebe gegen solche Stöße viel empfindlicher sind. Dazu schreiben wir Gl. (51) in der Form

$$\tilde{N}_g = \left(\frac{N_s}{S_g} - \frac{\sum N_s}{\sum S_g + S_n} \right) \frac{S_g}{\sum N_s} \bar{N}, \quad (53)$$

so daß in der Klammer die Werte jeder Einzelmaschine von den Summenwerten getrennt erscheinen. Wir sehen, daß der Klammerwert für jede Maschine den gleichen Betrag erhält, wenn wir für alle Synchrongeneratoren

$$\frac{N_s}{S_g} = \frac{k_s N_o}{T_a N_o} = \frac{k_s}{T_a} = \text{const} \quad (54)$$

machen. Dann ist nach Gl. (53) die Pendelleistung jeder Maschine stets proportional ihrer Schwungleistung S_g , die nach Gl. (49) sowieso für die letzte Verteilung der Leistungsstöße maßgebend ist. Die Pendelleistungen aller Maschinen sind also anteilig gleich, bezogen auf ihre Schwungwirkungen.

Nun ergibt die Abstimmungsbedingung Gl. (54) der Synchronisierziffer jedes Generators auf seine Anlaufzeitkonstante, daß nach Gl. (36) alle starren Eigenfrequenzen, und daher nach Gl. (44) auch alle wirksamen Eigenfrequenzen der Generatoren untereinander denselben Wert besitzen. Alle Synchronmaschinen schwingen daher nunmehr im Gleichtakt, Ausgleichleistungen zwischen ihnen treten nicht mehr auf. Sie schwingen vielmehr nur noch gemeinsam gegenüber der Gesamtheit aller Asynchronmotoren mit guter Gleichverteilung der Pendelleistung entsprechend ihren Schwungleistungen. Dieses günstigste Verhalten der Synchronmaschinen läßt sich also nur erreichen, wenn man sie durch zweckmäßige Wahl ihrer Synchronisierziffern nach Gl. (54) alle auf gleiche Eigenfrequenz abstimmt. Durch richtige Einstellung der von jeder Maschine übernommenen Blindleistung des Netzes läßt sich dies im Betriebe fast stets erzielen.

5. Reglerschwingungen gekuppelter Kraftmaschinen.

Man pflegt größere Dampf- und Wasserturbinen, wie sie als Antriebskraftmaschinen elektrischer Generatoren benutzt werden, stets mit indirekt arbeitender Regelung zu versehen, bei der die Geschwindigkeitsregler bei Abweichung der Drehzahl vom Sollwert ein Steuerkommando an einen Servomotor geben, der die Leistungszufuhr zur Kraftmaschine durch Verstellen des Dampf- oder Wasserzuflusses beherrscht. In Bild 12 sind mehrere derartige Kraftmaschinen dargestellt, denen eine augenblickliche Leistung N_1, N_2, N_3, \dots zugeführt wird. Wir wollen das Zusammenwirken der Steuerungen dieser Maschinen im Gemeinschaftsbetrieb beliebig vieler Kraftmaschinen verfolgen. Dabei sollen aber nur die Hauptwirkungen der Maschinenregelung in Rechnung gestellt werden, die von grundlegendem Einfluß auf das Zusammenarbeiten sind, während wir die zahlreichen Nebeneinflüsse unserer heutigen Regler im Interesse der Übersichtlichkeit unberücksichtigt lassen. Die Wirkung der Rückführung werden wir jedoch zum Schluß noch ausführlich betrachten. Da wir das gegenseitige elektrische Verhalten der Generatoren im vorigen Ab-

schnitt kennengelernt haben, so wollen wir von den rein elektrischen Schwingungen hier absehen und demgemäß eine elektrisch starre Kupplung der Generatoren untereinander und mit den Motoren des Netzes voraussetzen.

Für jeden Kraftmaschinensatz muß die mechanisch zugeführte Leistung N , die elektrisch abgeführte Leistung W und die Trägheitsleistung im Gleichgewicht stehen, es ist also mit Gl. (5)

$$N + S \frac{d\sigma}{dt} + W = 0. \quad (55)$$

Dabei wollen wir wieder vom stationären Belastungszustand sämtlicher Maschinen vollständig absehen und unsere Betrachtungen nur auf die Schwankungen oder Abweichungen von den stationären Verhältnissen erstrecken. Die Energiebilanz für sämtliche Kraft- und Synchronmaschinen lautet daher

$$\sum N + \sum S_g \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \sum W = 0. \quad (56)$$

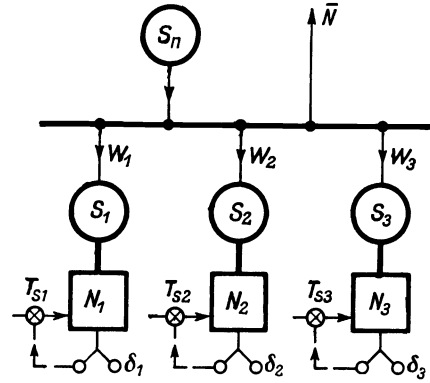


Bild 12.

Dabei darf man berücksichtigen, daß die Schlüpfung oder Drehzahländerung σ wegen der starren elektrischen Kupplung für alle Maschinen die gleiche ist, so daß sie vor das Summenzeichen gezogen werden kann.

Im Netz fließt die Schwankung sämtlicher elektrischen Leistungen W in die Schwungmassen aller angeschlossenen Asynchronmotoren und beschleunigt oder verzögert sie. Von einer Änderung der sonstigen Netzbelastung mit der Frequenz, die nur dämpfend wirkt, wollen wir dabei absehen. Die Energiebilanz des Netzes lautet also

$$\sum W = \sum S_n \cdot \frac{d\sigma}{dt}. \quad (57)$$

Setzt man dies in Gl. (56) ein, so entsteht als Gesamtbilanz für die gemeinschaftliche Frequenzänderung

$$\sum (S_g + S_n) \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \sum N = 0. \quad (58)$$

Man strebt bei Drehzahlreglern eine geradlinige Charakteristik zwischen der Leistungsabgabe N der Kraftmaschine und der Änderung der Drehzahl n an. Den gesamten Drehzahlunterschied δ zwischen Leerlauf und Vollast nennt man den Ungleichförmigkeitsgrad des Reglers. Jeder kleinen Abweichung dN der Leistung von ihrem Beharrungswert entspricht nach Bild 13 eine Drehzahlabweichung oder Schlüpfung σ der Maschine gegen ihren Beharrungswert nach der Beziehung

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{\sigma}{\delta}. \quad (59)$$

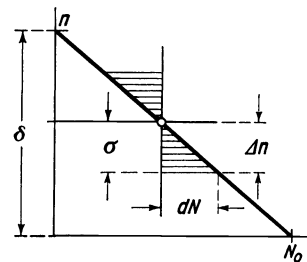


Bild 13.

Die Ungleichförmigkeiten der verschiedenen Regler in einem Netz können stark unterschiedliche Werte besitzen.

Jeder Servomotor erhält von seinem Drehzahlregler zwar ein Kommando, das der Drehzahl- oder Leistungsabweichung vom Sollwert nach Gl. (59) entspricht, er kann ihm aber wegen seiner endlichen Schlußgeschwindigkeit nicht plötzlich nach-

kommen. Er stellt vielmehr eine zeitliche Änderung der Leistungszufuhr ein, deren Größe selbst bei höchster Abweichung vom Sollwert mit $\sigma = \delta$ durch seine Schlußzeit T_s bestimmt ist. Die zeitliche Leistungssteigerung jeder Maschine ist daher

$$\frac{dN/N_o}{dt} = \frac{\sigma/\delta}{T_s} \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dt} = \frac{N_o}{\delta T_s} \sigma, \quad (60)$$

wobei δ und T_s bekannte Eigenschaften jeder individuellen Kraftmaschinensteuerung sind.

Da die Drehzahlabweichungen σ aller Maschinen übereinstimmen, so können wir Gl. (60) für alle Kraftmaschinen summieren und erhalten als Energiebilanz für die von sämtlichen Servomotoren gesteuerten Zuflußleistungen

$$\sum \frac{dN}{dt} = \sum \frac{N_o}{\delta T_s} \cdot \sigma. \quad (61)$$

Der hierin auftretende Quotient $N_o/\delta T_s$ ist ein Maß für die Steuer- oder Reguliergeschwindigkeit in kW/sec, mit der jede einzelne Maschine bei einer Drehzahlabweichung σ auf das Erreichen des Beharrungszustandes mit $\sigma = 0$ hinwirkt. Dieser Quotient kann für die verschiedenen Maschinen stark unterschiedliche Zahlenwerte besitzen, die nicht nur von ihrer Nennleistung N_o , sondern ebenso stark von dem Produkt des Ungleichförmigkeitsgrades δ des Drehzahlreglers mit der Schlußzeit T_s des Servomotors abhängen. Alle Werte der Gl. (61) zusammen steigern die Leistungszufuhr zum gesamten Maschinensystem des elektrischen Netzes.

In Gl. (58) und (61) haben wir nun zwei Beziehungen zwischen der Leistungsabweichung $\sum N$ und der Drehzahlabweichung σ vom Beharrungszustand gewonnen, die sich auf sämtliche parallel arbeitenden Maschinen aller zusammengeschlossenen Kraftwerke erstrecken. Sie ergeben gemeinsam die Differentialgleichung

$$\sum (S_g + S_n) \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \sum \frac{N_o}{\delta T_s} \cdot \sigma = 0 \quad (62)$$

für die relative Frequenzabweichung σ und eine ganz analoge Gleichung auch für die Leistungsabweichung $\sum N$. Die Lösung dieser Schwingungsgleichung ist für die Drehzahl- oder Frequenzschwingung

$$\sigma = F \cos(\mu_0 t + \gamma). \quad (63)$$

Darin ist mit

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sum N_o/\delta T_s}{\sum (S_g + S_n)}} \quad (64)$$

die Frequenz der auftretenden Gesamtschwingung, mit F ihre Amplitude und mit γ als Integrationskonstante ihre Phase bezeichnet. Nach Gl. (58) folgt daraus für die Leistungsschwankung des Gesamtnetzes

$$\sum N = \mu_0 F \sum (S_g + S_n) \cdot \sin(\mu_0 t + \gamma) = \sum \tilde{N} \sin(\mu_0 t + \gamma). \quad (65)$$

Die Amplituden der totalen Leistungsschwankung und Frequenzschwankung verhalten sich also wie

$$\frac{\sum \tilde{N}}{F} = \mu_0 \sum (S_g + S_n) = \sqrt{\sum (S_g + S_n) \cdot \sum \frac{N_o}{\delta T_s}}. \quad (66)$$

Aus der Tatsache, daß sich für alle zusammengeschlossenen Kraftwerke eine gemeinsame Schwingungsdifferentialgleichung ergibt, erkennen wir, daß das gesamte Netz unter der Wirkung aller Kraftmaschinenregler Gemeinschaftsschwingungen ausführt. Sämtliche Drehzahlregler und Servomotoren arbeiten hiernach im gleichen Takt auf die Leistungszufuhr aller Kraftmaschinen, die ebenso im gleichen Takt sämtliche synchronen und asynchronen Schwungmassen des Netzes beschleunigt oder verzögert.

Für die Frequenz der Schwingungen ergibt sich wegen der erheblichen synchronen und asynchronen Schwungmassen aus Gl. (64) meistens ein geringer Wert. Es ist deshalb übersichtlicher, die Schwingungsdauer in Sekunden anzuschreiben, die unter Beachtung von Gl. (6) ist

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\sum(S_o + S_n)}{\sum N_o/\delta T_s}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum T_a N_o}{\sum N_o/\delta T_s}}. \quad (67)$$

Man erhält z. B. für ein Stromversorgungsnetz, das drei Synchronkraftmaschinen von 5, 10 und 20 MW Leistung besitzt, mit Anlaufzeitkonstanten von 8, 5 und 20 sec, mit Drehzahlreglern von 5, 3 und 6 % Ungleichförmigkeit und Servomotoren mit 2, 1 und 4 sec Schlußzeit bei einer Netzschwungleistung von 500 MWsec eine gemeinschaftliche Schwingungsdauer von

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{8 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 20 \cdot 20 + 500}{5 + \frac{10}{2} + \frac{20}{4}}} = 2\pi \sqrt{\frac{40 + 50 + 400 + 500 \text{ MW sec}}{50 + 333 + 83 \text{ MW/sec}}} = 2\pi \sqrt{\frac{990}{466}} = 9,2 \text{ sec}.$$

Die Schwingungsdauern der einzelnen frei laufenden Maschinen wären demgegenüber

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{40}{50}} = 5,6 \text{ sec}, \quad \tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{50}{333}} = 2,4 \text{ sec}, \quad \tau_3 = 2\pi \sqrt{\frac{400}{83}} = 13,8 \text{ sec}.$$

Die Frequenz eines derartigen Netzes läßt sich also bei Abweichungen vom Beharrungszustand niemals schneller regeln, als es dieser Schwingungsdauer von fast 10 sec entspricht. Bemerkenswert ist dabei, daß sowohl für die Massenwirkung als für die Wirkung der Zuflußleistung nur die Summenwirkung aller Maschinen von Einfluß ist. Die Massenwirkung wird bei unseren heutigen Netzen mit starker motorischer Besetzung wesentlich durch die mit den Asynchronmotoren verbundenen Schwungmassen mitbestimmt. Wegen ihrer Unterbelastung liegt sie häufig in der mehrfachen Größe der gesamten Schwungmassen der Synchronkraftmaschinen. Man mißt für die Netzanlaufzeit $T_n = 10$ bis 30 sec bezogen auf die gesamte Generatorleistung. Die Zuflußleistungen werden in ihrer Wirkung nicht nur durch die Größe der Kraftmaschinen, sondern sehr wesentlich durch die Eigenschaften der Regler und der Steuerorgane bestimmt. Man sieht aus dem Zahlenbeispiel, daß die mittelgroße Maschine von 10 MW durch ihren Regler mit kleiner Ungleichförmigkeit und ihren Servomotor mit kleiner Schlußzeit bei weitem den stärksten Einfluß auf die Wiedererreichung des Beharrungszustandes besitzt, der viermal so groß ist als der von der 20 MW-Maschine zur Verfügung gestellte Anteil.

Bei jeder Belastungsänderung $\sum N$ des ganzen Netzes, die die Drehzahl zum Schwanken bringt, beteiligen sich nach Gl. (60) und (61) die verschiedenen Synchronkraftmaschinen genau nach Maßgabe ihrer Reguliergeschwindigkeit in kW/sec. Jede einzelne Maschine erhält daher durch die Wirkung ihrer Steuerung

einen Leistungsanteil zugewiesen, der sich durch Division dieser beiden Gleichungen bestimmt zu

$$N = \frac{N_o/\delta T_s}{\sum N_o/\delta T_s} \sum N. \quad (68)$$

Wünscht man alle Maschinen entsprechend ihrer Nennleistung an der Aufnahme dieser Stöße zu beteiligen, so muß man die Drehzahlregler und Servomotoren so aufeinander abstimmen, daß das Produkt δT_s aller Maschinen untereinander gleich ist.

Da die Stoßleistung vor dem langsamen Eingreifen der Regler jedoch, wie wir früher gesehen haben, entsprechend den Schwungleistungen, also nach Gl. (6) wie $T_a N_o$ verteilt war, so tritt durch die Wirkung der Kraftmaschinensteuerung im allgemeinen eine Veränderung der Leistungsaufteilung ein, und es treten Schwankungen und Leistungsverschiebungen zwischen den verschiedenen Maschinen auf. Man kann sie nur dann vermeiden, wenn man die Verteilung nach den Schwungleistungen und die Verteilung nach den Steuermechanismen für sämtliche Kraftmaschinen gleich macht. Man muß also

$$\frac{T_a N_o}{N_o/\delta T_s} = \delta T_s T_a = \text{const} \quad (69)$$

für alle Maschinen machen. Das erfordert eine Abstimmung der Steuerung jeder Maschine auf ihre Anlaufzeitkonstante, die im allgemeinen erreichbar ist.

Es ist üblich, den Drehzahlreglern der Kraftmaschinen zur Stabilisierung eine Rückführung vom Servomotor her zu geben, derart, daß der Betätigungsschieber für den Servomotor nicht nur vom Drehzahlregler, sondern außerdem noch in entgegengesetzter Richtung vom Servomotor selbst beeinflußt wird, dessen Stellung der Leistungszufuhr zur Kraftmaschine proportional ist. Die Leistungssteigerung jeder Maschine wird dann in Erweiterung von Gl. (60) bestimmt durch

$$\frac{dN/N_o}{dt} = \frac{\sigma/\delta - N/N_o}{T_s} \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dt} = \frac{N_o}{\delta T_s} \sigma - \frac{N}{T_s}. \quad (70)$$

Sie ist also außer von der Drehzahlabweichung σ auch abhängig von der jeweiligen Leistungsabweichung N .

Wenn wir diese Beziehung für sämtliche Maschinen summieren, so können wir für das letzte Glied beachten, daß die Leistungen aller Maschinen zwar ungleich groß sind, daß sie aber nach Gl. (68) bei allen auftretenden Schwingungen im Gleichtakt verlaufen. Wir können daher als Summe bilden

$$\sum \frac{N}{T_s} = \frac{\sum N}{T_s}, \quad (71)$$

wobei unter T_s eine mittlere Schlußzeit aller Servomotoren sämtlicher Kraftwerke zu verstehen ist, die bestimmt ist durch

$$T_s = \frac{\sum N}{\sum N/T_s} = \frac{\sum N_o/\delta T_s}{\sum N_o/\delta T_s^2}. \quad (72)$$

Darin ist für den jeweiligen Leistungsbetrag der einzelnen Maschinen ihr Wert nach Gl. (68) eingesetzt. Die mittlere Schlußzeit T_s ist daher eine Konstante des gesamten Netzes und kann aus den Steuerungsdaten aller einzelnen Maschinen

leicht bestimmt werden. Sie berechnet sich z. B. für unser früheres Beispiel mit unterschiedlichen Maschinen von 1, 2 und 4 sec Schlußzeit zu

$$T_s = \frac{\frac{5}{5\% \cdot 2} + \frac{10}{3\% \cdot 1} + \frac{20}{6\% \cdot 4}}{\frac{5}{5\% \cdot 2^2} + \frac{10}{3\% \cdot 1^2} + \frac{20}{6\% \cdot 4^2}} = 1,23 \text{ sec.}$$

Ihr Zahlenwert liegt zwischen den Schlußzeiten der einzelnen Maschinen, das Übergewicht geben wieder die Maschinen mit stärkstem $N_o/\delta T_s$.

Für die Summe aller Leistungsänderungen erhält man nun aus Gl. (70)

$$\sum \frac{dN}{dt} = \sum \frac{N_o}{\delta T_s} \cdot \sigma - \frac{1}{T_s} \sum N, \quad (73)$$

und wenn man hierin die Summenleistung selbst nach der Trägheitsgleichung (58) einsetzt, die nach wie vor gültig ist, so entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{T_s} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sum N_o/\delta T_s}{\sum (S_g + S_n)} \sigma = 0. \quad (74)$$

Sie unterscheidet sich von der früheren Gl. (62) nur durch Hinzutreten des mittleren Dämpfungsgliedes mit dem reziproken Wert der Netzschlußzeit. Ihre Lösung für die Drehzahlabweichung ist

$$\sigma = F \varepsilon^{-\frac{t}{2T_s}} \cos(\mu_0 t + \gamma), \quad (75)$$

wobei die Eigenfrequenz jetzt durch

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\sum N_o/\delta T_s}{\sum (S_g + S_n)} - \left(\frac{1}{2T_s}\right)^2} \quad (76)$$

bestimmt wird. Sie wird durch die Dämpfung verkleinert, so daß die Schwingungen etwas langsamer verlaufen.

Zur Bestimmung der Leistungsschwankung nach Gl. (58) muß man jetzt in Gl. (75) beide zeitlich veränderlichen Faktoren differenzieren. Faßt man die entstehende Summe mit Hilfe der letzten Gleichung zu einer resultierenden Leistungsschwankung zusammen, so erhält man

$$\sum N = F \sqrt{\frac{\sum N_o}{\sum \delta T_s} \cdot \sum (S_g + S_n)} \varepsilon^{-\frac{t}{2T_s}} \sin(\mu_0 t + \gamma + \varphi). \quad (77)$$

Darin ist durch

$$\text{tg } \varphi = \frac{1}{2\mu_0 T_s} \quad (78)$$

eine Phasenverschiebung φ definiert, die sich zwischen der Leistungs- und Frequenzschwingung einstellt.

Die Gl. (75) und (77) unterscheiden sich von den früheren Beziehungen (63) und (66) nur durch die Dämpfung und diese innere Phasenverschiebung. Ihr Amplitudenverhältnis ist jedoch dasselbe, und daher bleiben auch die Gesamterscheinungen der Schwingungen qualitativ ungeändert.

Nur wenn die mittlere Schlußzeit des Netzes T_s sehr klein ist, dann wird die Frequenz nach Gl. (76) imaginär, und es ergeben sich an Stelle der Schwingungen aperiodische Erscheinungen. Die Vorgänge bleiben periodisch für

$$T_s > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum (S_g + S_n)}{\sum N_o/\delta T_s}} = \frac{\tau_0}{4\pi} \quad \text{oder} \quad T_s > \frac{1}{4} \delta (T_a + T_n). \quad (79)$$

Darin ist zur Gewinnung einer Übersicht auf der rechten Seite ein Mittelwert angegeben, der sich bei Vorhandensein lauter gleichartiger Maschinen ergibt. Wir sehen daraus, daß große Netzschwungmassen einen Übergang der periodischen Schwingungen in aperiodische Bewegungen begünstigen, was vorteilhaft für den Gesamtbetrieb des Netzes ist.

Für praktisch vorkommende Verhältnisse ist im Mittel

$$\frac{\delta(T_a + T_n)}{4T_s} = \frac{5 \cdot (10 + 20)}{100 \cdot 4 \cdot 3} = 0,125,$$

so daß die Reglerschwingungen zusammengeschlossener Kraftwerksnetze im allgemeinen periodisch sind.

6. Mechanische und elektrische Gemeinschaftsschwingungen.

Nachdem wir die in gekoppelten Netzwerken auftretenden elektrischen Schwingungen der Synchron- und Asynchronmaschinen und die mechanischen Schwingungen der Kraftmaschinen mit ihren Reglern getrennt betrachtet haben, wollen wir nunmehr

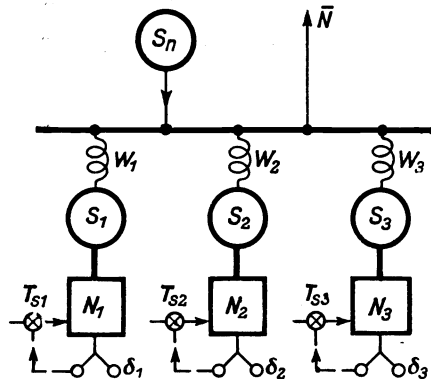


Bild 14.

einen Schritt weitergehen und das Zusammenwirken dieser beiden Schwingungsmöglichkeiten verfolgen, um ein vollständiges Bild der Leistungs- und Frequenzschwankungen solcher Netze bei irgendwelchen Zustandsänderungen zu erhalten.

Wir nehmen dazu nach Bild 14 an, daß das Verbrauchernetz zahlreiche Asynchronmaschinen besitzt, deren Schwungleistungen wir nach den früheren Erörterungen gemeinsam behandeln dürfen, daß die Erzeugung der elektrischen Leistung durch Synchrongeneratoren vorgenommen wird, die hinsichtlich ihrer Schwing-

leistungen und synchronisierenden Kräfte individuell gebaut sein können, und daß alle diese Generatoren von Kraftmaschinen angetrieben werden, deren Bauart und deren Regler- und Steuereigenschaften ganz unterschiedliche Werte besitzen können. Auch wenn Synchronmotoren oder Asynchrongeneratoren in den Netzen vorhanden sind, stellt dies keine Erschwerung der Betrachtung dar. Wir nehmen an, daß die Synchronmaschinen über ihre Selbst- und Streureaktanz auf eine gemeinsame Sammelschiene arbeiten, an der auch die Asynchronmaschinen hängen. Sind zwischen den einzelnen synchronen oder asynchronen Maschinen erhebliche weitere Reaktanzen vorhanden, z. B. in Transformatoren oder Fernleitungen, so kann man das wirkliche System nach bekannten Rechnungsregeln stets auf das in Bild 14 dargestellte Sternsystem transfigurieren, und die jeder einzelnen Maschine zugeordnete resultierende Reaktanz und synchronisierende Leistung berechnen.

Genau wie im letzten Abschnitt steht für jeden einzelnen Kraftmaschinensatz die mechanisch zugeführte, die elektrisch abgeführte und die Trägheitsleistung im Gleichgewicht, es ist wie in Gl. (55)

$$N + S \frac{d\sigma}{dt} + W = 0. \quad (80)$$

Wir wollen diese Leistungen jetzt durch den elektrischen Polradwinkel ausdrücken. Dazu müssen wir die Schlüpfung σ nach Gl. (1) durch die Summe des Netzwinkels ϑ_n und des Winkels zwischen Netz und jeder einzelnen Maschine, z. B. ϑ_1 , ausdrücken. Es ist also für die erste Maschine

$$\sigma = \frac{1}{\omega} \frac{d(\vartheta_1 + \vartheta_n)}{dt}. \quad (81)$$

Die Abweichung der Antriebsleistung vom Sollwert bestimmt sich daher durch Integration von Gl. (60) zu

$$N = \left(\frac{N_o}{\delta T_{s1}} \right) \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_n}{\omega}. \quad (82)$$

Setzen wir die beiden letzten Gleichungen und den Ausdruck für die synchrone Leistung nach Gl. (3) in die Energiegleichung (80) ein, so erhalten wir sie für den Maschinensatz 1 in der Form

$$\left(\frac{N_o}{\delta T_{s1}} \right) \frac{\vartheta_1 + \vartheta_n}{\omega} + \frac{S_1}{\omega} \frac{d^2(\vartheta_1 + \vartheta_n)}{dt^2} + N_{s1} \vartheta_1 = 0. \quad (83)$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der ersten von Gl. (34), so sieht man, daß zu der elektrischen synchronisierenden Leistung zwischen Generator und Netz noch eine vom Steuerungsmechanismus herrührende mechanische synchronisierende Leistung hinzutritt, deren Stärke durch die uns schon geläufige Wirkungsgeschwindigkeit der Kraftmaschinensteuerung $N_o/\delta T_s$ bestimmt wird und die proportional dem gemeinsamen Maschinen- und Netzwinkel ist.

Wenn wir uns einen solchen Maschinensatz zunächst an einem unendlich starren Netz vorstellen, dessen Winkel ϑ_n nicht schwankt und daher aus der Differentialgleichung (83) gestrichen werden kann, so geht sie nach Division mit S_1/ω über in

$$\frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} + \left(\frac{N_o}{\delta T_s S} + \frac{\omega N_s}{S} \right)_1 \vartheta_1 = 0. \quad (84)$$

Ersetzt man die Schwungleistung S_1 des Maschinensatzes nach Gl. (6) durch die Anlaufzeitkonstante, so kann man mit

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{\omega N_{s1}}{S_1} = \left(\frac{\omega k_s}{T_a} \right)_1 \\ \mu_1^2 &= \left(\frac{N_o}{\delta T_s S} \right)_1 = \left(\frac{1}{\delta T_s T_a} \right)_1 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

zwei unterschiedliche Eigenfrequenzen bezeichnen. Die erstere tritt allein unter dem Einfluß der synchronisierenden elektrischen Leistung der Maschine 1 auf, die letztere unter dem alleinigen Einfluß ihrer Reglersteuerung. Als tatsächliche Eigenfrequenz des Maschinensatzes am starren Netz ergibt sich der Wert

$$\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \mu_1^2} = \sqrt{\frac{\omega k_s}{T_a} + \frac{1}{\delta T_s T_a}}; \quad (86)$$

dabei ist auf der rechten Seite der Index 1 fortgelassen, weil diese Beziehung nunmehr für jeden beliebigen Kraftmaschinensatz gilt.

Die elektrische Schwingungsfrequenz von Synchronmaschinen wird also durch die Einwirkung der Kraftmaschinensteuerung vergrößert. Zahlenmäßig ist der Einfluß aber meistens gering, man erhält selbst bei extremen Verhältnissen

mit 10 sec Anlaufzeit, einer Synchronisierziffer von 1,5, einer Ungleichförmigkeit von 3% und einer Servomotorschlußzeit von 1 sec

$$\frac{\nu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{314 \cdot 1,5}{10} + \frac{100}{3 \cdot 1 \cdot 10}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{47 + 3,3} = 1,13 \text{ Per/sec,}$$

was nur um 4% von 1,09 Per/sec ohne Einfluß des Reglers abweicht.

Führen wir die Abkürzungen der Gl. (85) in die Differentialgleichung (83) für den Maschinensatz 1 ein, so erhalten wir für diesen und entsprechend auch für die weiteren Maschinen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\vartheta_1 + \vartheta_n)}{dt^2} + \nu_1^2 \vartheta_1 + \mu_1^2 (\vartheta_1 + \vartheta_n) &= 0, \\ \frac{d^2(\vartheta_2 + \vartheta_n)}{dt^2} + \nu_2^2 \vartheta_2 + \mu_2^2 (\vartheta_2 + \vartheta_n) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Die Konstanten ν und μ für alle Maschinen bestimmen sich analog den Werten von Gl. (85). Dieses Gleichungssystem (87) stellt eine Erweiterung der Gln. (34) ohne Kraftmaschinenregler dar.

Genau wie früher wirken nun sämtliche elektrischen Leistungen der Synchronmaschinen, die ins Netz fließen, auf die Beschleunigung oder Verzögerung der Asynchronmotoren, so daß auch hier entsprechend Gl. (57) oder (35) gilt

$$\left. \begin{aligned} \sum W &= \sum S_n \cdot \frac{d\sigma_n}{dt} \\ \text{oder} \quad N_{s_1} \vartheta_1 + N_{s_2} \vartheta_2 + \dots &= \sum \frac{S_n}{\omega} \cdot \frac{d^2 \vartheta_n}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Wir setzen jetzt wieder für die einzelnen Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ harmonische Funktionen entsprechend Gl. (13) an mit den Amplituden A_1, A_2, \dots und A_n , die alle die gleiche Frequenz ν besitzen. Dann erhalten wir aus den Gln. (87)

$$\left. \begin{aligned} -\nu^2 (A_1 + A_n) + \nu_1^2 A_1 + \mu_1^2 (A_1 + A_n) &= 0, \\ -\nu^2 (A_2 + A_n) + \nu_2^2 A_2 + \mu_2^2 (A_2 + A_n) &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

und daraus für das Verhältnis der Generatoramplituden zur Netzamplitude

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{\nu^2 - \mu_1^2}{\mu_1^2 + \nu_1^2 - \nu^2}, \quad \frac{A_2}{A_n} = \frac{\nu^2 - \mu_2^2}{\mu_2^2 + \nu_2^2 - \nu^2} \quad \text{usw.} \quad (90)$$

Andererseits ergibt sich auch aus Gl. (88) eine Amplitudengleichung, die sich nach Ersetzung der synchronisierenden Leistungen durch die Eigenfrequenzen mit Hilfe der ersten Gl. (85) schreibt

$$\nu_1^2 S_1 A_1 + \nu_2^2 S_2 A_2 + \dots = -\nu^2 \sum S_n A_n. \quad (91)$$

Drückt man hierin die Amplituden der einzelnen Maschinen durch die eben gewonnenen Gln. (90) aus, so erhält man

$$S_1 \frac{\nu_1^2 (\nu^2 - \mu_1^2)}{\mu_1^2 + \nu_1^2 - \nu^2} + S_2 \frac{\nu_2^2 (\nu^2 - \mu_2^2)}{\mu_2^2 + \nu_2^2 - \nu^2} + \dots = -\sum S_n. \quad (92)$$

Diese Bestimmungsgleichung für die Eigenfrequenz ν oder ihr Quadrat sieht zwar komplizierter aus als die frühere Gl. (41) ohne Einfluß der Kraftmaschinenregler, sie kann aber zahlenmäßig genau in der gleichen Weise ausgewertet werden.

Die graphische Lösung ist in Bild 15 dargestellt. Die rechte Seite stellt wieder den konstanten Wert der Summe aller Netzschwingmassen dar, der als horizontale Gerade eingetragen ist. Die linke Seite besitzt auch hier für jede Maschine einen Pol, in dem die Kurve von $+\infty$ nach $-\infty$ springt, er liegt aber jetzt an der Stelle der resultierenden Eigenfrequenz, die sich nach Gl. (86) aus der Summe der elektrischen und mechanischen synchronisierenden Kraft für jede Maschine berechnet.

Außerdem hat die linke Seite jedoch noch einen Pol für $\nu = 0$, da hier ihre sämtlichen Glieder negativ unendlich werden, es tritt also eine Schwingungsmöglichkeit μ_0 mehr als früher auf. Für g unterschiedliche Synchronkraftmaschinen ergeben sich jetzt $g + 1$ Eigenfrequenzen. Da zur graphischen Aufzeichnung von Gl. (92) alle Schwingmassen S_1, S_2, \dots und S_n und alle Frequenzen ν_1, ν_2, \dots und μ_1, μ_2, \dots nach Gl. (85) aus den Eigenschaften sämtlicher Maschinen als bekannt angesehen werden können, so kann man für jedes noch so kompliziert gestaltete zusammengesessene Netzwerk nach der Konstruktion von Bild 15 alle auftretenden Eigenfrequenzen $\mu_0, \nu', \nu'', \nu''', \dots$ berechnen.

Da diese Konstruktion bei zahlreichen Maschinen aber relativ mühsam ist, so wollen wir Näherungsbetrachtungen für die Eigenfrequenzen ν anstellen. Wenn die Netzmasse unendlich groß wäre, so rückte in Bild 15 die Netzgerade ins negativ Unendliche, die oberen Eigenfrequenzen würden mit den starren Werten nach Gl. (86) übereinstimmen, die niedrigste Eigenschwingung würde nach Null konvergieren. Bei endlicher Netzschwingmasse werden alle Eigen-

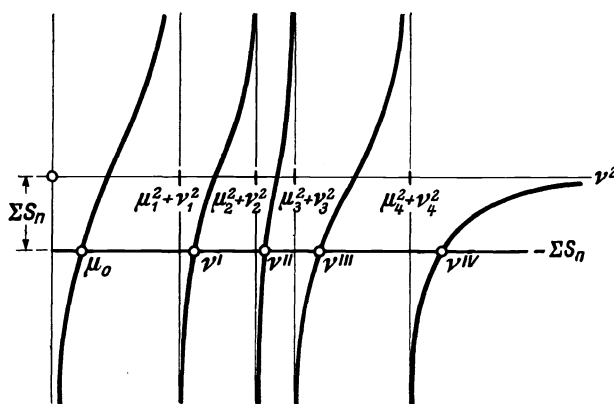


Bild 15.

frequenzen nach Bild 15 ein wenig größer. Da die Netzschwingleistung im allgemeinen in der Größenordnung der gesamten Maschinenschwingleistung liegt, so wollen wir uns für die oberen Frequenzen mit den Näherungswerten nach Gl. (86) begnügen. Wir sehen, daß sie die elektrischen Eigenschwingungen aller Maschinen darstellen. Für kleine Netzschwingleistungen gelten überdies dieselben Betrachtungen, wie wir sie bereits im Abschnitt 3 für die elektrischen Schwingungen angestellt haben. Nur ist hier stets zu der rein elektrischen Maschinenfrequenz ν_1^2 noch die mechanische μ_1^2 nach Gl. (86) hinzuzufügen.

Für die tiefste Eigenfrequenz μ_0 wollen wir jedoch eine wirkliche Näherungsformel für endliche Netzmassen S_n herleiten. Wir dürfen dazu beachten, daß bei überwiegenden elektrischen Synchronisierkräften die ihnen entsprechenden Frequenzen ν_1^2, ν_2^2, \dots aller Maschinen sowohl groß sind gegenüber den mechanischen Frequenzen μ_1^2, μ_2^2, \dots als auch gegenüber der jetzt zu bestimmenden sehr kleinen Frequenz μ_0^2 . Es ist also

$$\nu^2 = \mu_0^2 \ll \nu_1^2, \nu_2^2 \dots; \quad \mu_1^2 \ll \nu_1^2, \quad \mu_2^2 \ll \nu_2^2 \dots \quad (93)$$

Dann bleibt in den Klammerwerten der Nenner von Gl. (92) nur noch ν_1^2, ν_2^2, \dots bestehen und hebt sich gegen den gleichen Wert in den Zählern fort. Aus Gl. (92) wird also

$$S_1(\nu^2 - \mu_1^2) + S_2(\nu^2 - \mu_2^2) + \dots = -\nu^2 \sum S_n. \quad (94)$$

Hierin können wir auf der linken Seite alle Glieder mit ν^2 zusammenfassen und nach rechts schaffen, so daß in

$$S_1\mu_1^2 + S_2\mu_2^2 + S_3\mu_3^2 + \dots = \nu^2 \sum S_g + \nu^2 \sum S_n = \nu^2 \sum (S_g + S_n) \quad (95)$$

die Summe aller Generatorschwungleistungen S_g erscheint, und zwar gemeinsam mit der Summe aller Netzschwungleistungen S_n . Für alle einzelnen Glieder auf der linken Seite können wir nach der zweiten Gl. (85) setzen

$$S_1\mu_1^2 = \left(\frac{N_o}{\delta T_{s,1}}\right); \quad S_2\mu_2^2 = \left(\frac{N_o}{\delta T_{s,2}}\right) \quad \text{usw.} \quad (96)$$

und erhalten für die zu bestimmende niedrigste Eigenfrequenz des gesamten Netzes

$$\nu = \mu_0 = \sqrt{\frac{\sum S_g \mu_g^2}{\sum (S_g + S_n)}} = \sqrt{\frac{\sum N_o / \delta T_s}{\sum (S_g + S_n)}}. \quad (97)$$

Dieser Wert stimmt genau mit derjenigen Frequenz überein, die wir in Gl. (64) für die gemeinsamen Reglerschwingungen aller starr verbundenen Generatoren hergeleitet hatten.

Wir sehen also, daß die vollständige Lösung der genauen Schwingungsdifferentialgleichungen des Netzkomplexes uns in guter Annäherung wieder auf die elektrischen Schwingungen und die Reglerschwingungen führt, die wir bereits früher untersucht haben. Wir dürfen hiernach im allgemeinen beide für sich betrachten, da sie gegenseitig nur relativ geringen Einfluß aufeinander ausüben. Die mechanischen Schwingungen haben niedrige Frequenz und bedingen eine Energieschwingung der Zuflußleistung aller Antriebsmaschinen gegenüber sämtlichen Schwungmassen des Netzes und der Generatoren. Die elektrischen Schwingungen spielen sich dagegen vorwiegend zwischen den Schwungmassen jeder einzelnen Synchronmaschine und den Schwungmassen aller anderen synchronen und asynchronen Maschinen ab.

Wenn die synchronisierenden Kräfte einzelner oder aller Maschinen durch Störungen im Netz, wie Kurzschlüsse, stark verkleinert werden, so kann es allerdings vorkommen, daß die elektrischen Synchronisierkräfte nicht mehr nach Gl. (93) die mechanischen überwiegen. Dann ist unsere Näherungsbetrachtung nicht mehr zulässig, und man muß die tiefste mechanische Eigenfrequenz graphisch genau bestimmen. Sie wird dabei immer noch verschieden von der nächstgelegenen elektrischen Eigenfrequenz bleiben, da sich die Zahl der auftretenden Schwingungen hierbei nicht ändert.

Wir können aus den Gln. (90) leicht die Amplituden der Generatorschwingungen bestimmen. Für die schnellen elektrischen Schwingungen überwiegt im Zähler die Eigenfrequenz ν^2 bei weitem, so daß wir für sie alle in guter Annäherung erhalten

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{\nu^2}{(\mu_1^2 + \nu_1^2) - \nu^2} = \frac{\nu^2}{\Delta \nu^2}, \quad \frac{A_2}{A_n} = \frac{\nu'^2}{\Delta \nu'^2} \quad \text{usw.} \quad (98)$$

Jeder Generator wird also wieder nur mit derjenigen Frequenz große Schwingungen ausführen, für die $\Delta \nu^2$ in Bild 15 gering ist, die ihm also selbst zugehörig ist.

Für die langsamen mechanischen Schwingungen können wir die Näherungen von Gl. (93) benutzen und erhalten aus Gl. (90)

$$\frac{A_1}{A_n} = \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{\nu_1^2}; \quad \frac{A_2}{A_n} = \frac{\mu_0^2 - \mu_2^2}{\nu_2^2} \quad \text{usw.} \quad (99)$$

Da nun nach Gl. (93) beide Frequenzen dieser Zähler klein gegenüber den Nennerwerten sind, so erkennt man, daß die Amplituden A_1, A_2, \dots zwischen den Synchronmaschinen und dem Netz für diese tiefen Reglerschwingungen stets klein gegenüber der Netzamplitude A_n selbst sind. Die totalen Winkelamplituden der Generatoren $A_1 + A_n, A_2 + A_n$ usw. stimmen also weitgehend mit den Netzamplituden selbst überein.

Durch den Vergleich der Winkelamplituden A_1, A_2, \dots untereinander kann man jedoch die Einzelleistungen der Maschinen messen. Es ergibt sich mit Gl. (3) und der ersten Gl. (85) die elektrische Leistung der Maschinen zu

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= N_{s1} A_1 = \frac{v_1^2 S_1}{\omega} A_1 = \frac{S_1}{\omega} (\mu_0^2 - \mu_1^2) A_n, \\ W_2 &= \frac{S_2}{\omega} (\mu_0^2 - \mu_2^2) A_n \quad \text{usw.} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Tragen wir uns in Bild 16 die mechanischen Eigenfrequenzen μ^2 nach der zweiten Gl. (85) auf, die die Reglerschwingung jeder Maschine für sich darstellen, wenn sie abgeschaltet vom Netz betrieben würde, und zeichnen daneben die nach Gl. (97) bestimmte gemeinsame Regelungsfrequenz μ_0^2 , so sehen wir, daß die elektrische Leistung der einzelnen Synchronmaschinen, die nach Gl. (100) durch die Differenz dieser Quadrate dargestellt ist, also durch Δv^2 in Bild 16, für die verschiedenen Maschinen ganz unterschiedliche Werte besitzt und sogar negative Beträge annehmen kann. Oben in Bild 16 ist ein Betrag μ_0^2 eingetragen, der sich als Mittelwert nach Gl. (97) für ein Kraftwerk mit zahlreichen Generatoren ergibt, das nicht mit Netzschwingmassen belastet ist. Hier arbeiten die Generatoren mit ihren Leistungen zum Teil gegeneinander. Die Maschinen mit großer Reguliergeschwindigkeit beschleunigen diejenigen mit großer Schwingleistung elektrisch.

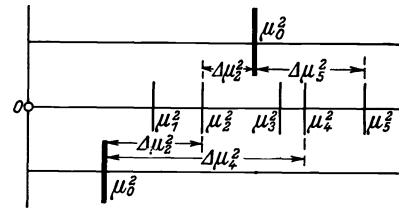


Bild 16.

Unten in Bild 16 ist nach Gl. (97) die viel kleinere Schwingungsfrequenz für den Fall der Belastung mit Netzschwingmassen dargestellt. Jetzt arbeiten die Generatoren zwar alle im gleichen Sinne, aber ihre Leistungen sind sehr unterschiedlich und werden mit dieser Verteilung keineswegs den Nennleistungen der Maschinensätze entsprechen. Je nach den Reglereigenschaften der Kraftmaschinen kann z. B. eine große Maschine ein großes δT_s besitzen und damit nach Gl. (85) ein kleines μ_1^2 , während eine kleine Maschine ein kleines δT_s haben kann und damit ein großes μ_2^2 erhält. Die kleine Maschine wird dann bei diesen Schwingungen in sehr viel stärkerem Leistungsaustausch mit dem Netz stehen als die große Maschine und möglicherweise stark überlastet werden.

Am einfachsten werden die Verhältnisse zweifellos, wenn alle einzelnen μ_1^2, μ_2^2, \dots übereinstimmen, denn dann ist eine angemessene Gleichverteilung der elektrischen Ausgleichleistungen sämtlicher Maschinen bei allen Reglerschwingungen vorhanden. Die elektrischen Leistungen verhalten sich dann nach Gl. (100) genau wie ihre Schwingleistungen S_1, S_2, \dots . Dies führt nach der zweiten Gl. (85) auf die Bedingung, daß für alle Maschinen

$$\delta_1 T_{s1} T_{a1} = \delta_2 T_{s2} T_{a2} = \delta_3 T_{s3} T_{a3} \dots = \text{const} \quad (101)$$

sein soll. Wir haben also dieselbe Abstimmungsgleichung für die Kraftmaschinen erhalten, die wir bereits auf Grund unserer Näherungsanschauung in Gl. (69) gewonnen haben. Für diesen Fall wird jede Maschine bei beliebigen Frequenzschwankungen des ganzen Netzes stets mit ihrer Trägheitsleistung, ihrer elektrischen Leistung und ihrer mechanischen oder thermischen Leistungszufuhr im Verhältnis gleich belastet und kann keine Störungen oder Überlastungen erleiden.

7. Frequenzschwingungen bei Belastungsstößen.

Wenn in einem zusammengeschlossenen Netzwerk ein Leistungsstoß beliebiger Art erfolgt, so stellt sich das System aller Maschinen nach einiger Zeit auf einen neuen Gleichgewichtszustand ein, der durch die Summeneigenschaften aller Kraftmaschinenregler bestimmt ist. Dabei ändert sich im allgemeinen nicht nur die Leistung, sondern auch die Drehzahl der Maschinen oder die Frequenz des Netzes. Für jede Kraftmaschine ist nach Bild 13 ihre endliche Leistungsänderung im Beharrungszustand

$$\Delta N = \frac{N_o \cdot \Delta n}{\delta} . \quad (102)$$

Die Summe aller dieser Änderungen ist durch den Gesamtstoß bestimmt, und da die Drehzahländerungen Δn aller Maschinen gleich sind, so ist

$$\bar{N} = \left(\frac{N_{o1}}{\delta_1} + \frac{N_{o2}}{\delta_2} + \dots \right) \Delta n = \sum \frac{N_o}{\delta} \cdot \bar{\sigma} , \quad (103)$$

wobei an Stelle der bleibenden Drehzahländerung auch die Frequenzänderung $\bar{\sigma}$ geschrieben werden kann, beides im relativen Werte gemessen. Die gesamte Leistungs-Drehzahlcharakteristik sämtlicher Netzgeneratoren baut sich nach Gl. (103) durch einfache Summation aller Kennlinien nach der Leistung über der Drehzahl auf, wie es in Bild 17 dargestellt ist.

Die bleibende Drehzahländerung unter der Wirkung des Leistungsstoßes \bar{N} ergibt sich danach zu

$$\Delta n = \bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{\sum N_o/\delta} \quad (104)$$

und der Einzelstoß für jede Maschine nach Gl. (102) zu

$$\Delta N = \frac{N_o/\delta}{\sum N_o/\delta} \bar{N} . \quad (105)$$

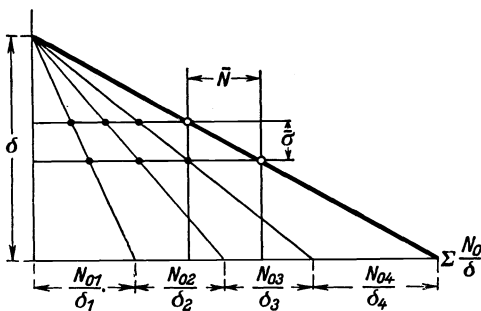


Bild 17.

Die im Netz anfallenden Leistungsänderungen verteilen sich also auf die einzelnen Kraftmaschinen im Beharrungszustand entsprechend der Statik der Regler, die aus dem Quotient von Nennleistung und Ungleichförmigkeit in kW/% gemessen wird.

Wir hatten nun früher gesehen, daß wir während der Regulierperiode der Maschinen bestenfalls erreichen können, daß die Leistungsstöße sich wie die Schwingleistungen, also entsprechend $T_a N_o$ auf die einzelnen Maschinen verteilen. Wünscht man daher möglichst günstigen Anschluß des Beharrungszustandes an die Regulierperiode, so muß man

$$\frac{T_a N_o}{N_o/\delta} = \delta T_a = \text{const} \quad (106)$$

für alle Kraftmaschinen machen. Das erfordert eine Abstimmung aller Drehzahlregler derart, daß ihre Ungleichförmigkeit umgekehrt proportional der Anlaufzeitkonstante des Maschinensatzes ist. Für ein bestimmtes Netz mit stark unterschiedlichen Maschinen könnte man die Regler z. B. nach folgender Tabelle abstimmen:

Anlaufzeitkonstante der Maschinen $T_a =$	3	5	7	10	15	20	sec,
Ungleichförmigkeit der Regler $\delta =$	10	6	4,3	3	2	1,5	%.

Wenn man außerdem noch die Abstimmungsbedingung (101) des vorigen Abschnittes einhalten will, nach der eine Gleichverteilung der elektrischen Leistungen während der Regulierperiode vorhanden ist, so müßte man die Schlußzeiten der Servomotoren aller Kraftmaschinen untereinander gleich halten.

Kurz nach Auftreten jedes Stoßes treten schnelle elektrische Schwingungen und alsdann zum Übergang in den neuen Beharrungszustand langsame Reglerschwingungen auf, welche letztere in Bild 18 dargestellt sind. Diese Schwingungen vermitteln den stetigen Übergang zwischen dem Dauerzustand vor und nach dem Leistungsstoß \bar{N} , der mit einer Frequenzänderung $\bar{\sigma}$ nach Gl. (104) verknüpft ist. Wir haben nun in Gl. (63) und (65) den Zusammenhang von Leistung und Frequenz während irgendwelcher Ausgleichsschwingungen hergeleitet und dürfen diese

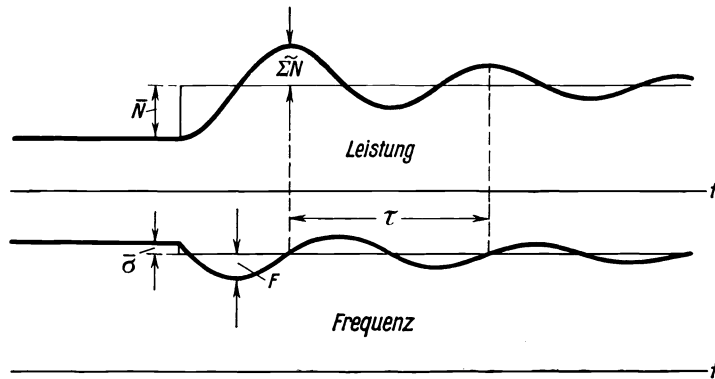


Bild 18.

Formeln nach den Erörterungen des letzten Kapitels als ausreichend genau für die praktischen Netzverhältnisse betrachten. Würden wir statt dessen die genaueren Formeln (75) und (77) mit Berücksichtigung der Dämpfung benutzen, so erhielten wir trotz viel komplizierterer Rechnungen nur wenig abweichende Ergebnisse.

Der Leistungs- und Frequenzstoß bildet nach Bild 18 den Anfangswert dieser Schwingungen zur Zeit $t = 0$, und daher ist nach Gl. (63) die Frequenzabweichung

$$\sigma = F \cos \gamma \tag{107}$$

und nach Gl. (65) die Leistungsabweichung

$$\bar{N} = \mu_0 F \sum (S_g + S_n) \cdot \sin \gamma. \tag{108}$$

Daraus ergibt sich für den Phasenwinkel γ der Reglerschwingungen

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\bar{N}}{\bar{\sigma} \mu_0 \sum (S_g + S_n)} = \frac{\sum N_o / \delta}{\sqrt{\sum (S_g + S_n) \cdot \sum N_o / \delta T_s}}. \tag{109}$$

Darin ist der Quotient $\bar{N} / \bar{\sigma}$ nach Gl. (104) und die Regelungsfrequenz μ_0 nach Gl. (64) eingesetzt.

Die Amplitude der Frequenzschwingung ergibt sich hiermit aus Gl. (107) zu

$$F = \frac{\bar{\sigma}}{\cos \gamma} = \bar{\sigma} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \bar{\sigma} \sqrt{1 + \frac{(\sum N_o / \delta)^2}{\sum (S_g + S_n) \cdot \sum N_o / \delta T_s}}, \tag{110}$$

sie ist also im allgemeinen erheblich größer als der bleibende Frequenzunterschied. Setzen wir, um Zahlenwerte für ein Beispiel zu gewinnen, lauter Kraftmaschinen mit gleichartiger Regelung und gleichen Anlaufzeiten voraus, so können wir die Summe der Nennleistungen herausheben und erhalten den einfachen Ausdruck

$$F = \bar{\sigma} \sqrt{1 + \frac{T_s}{\delta(T_a + T_n)}}. \quad (111)$$

Für 3 sec Schlußzeit, 5% Ungleichförmigkeit und eine Anlaufzeit des Gesamtsystems von 30 sec erhält man eine Schwingungsamplitude vom

$$\frac{F}{\bar{\sigma}} = \sqrt{1 + \frac{3 \cdot 100}{5 \cdot 30}} = 1,73 \text{ fachen}$$

Wert des bleibenden Frequenzunterschiedes. Es tritt demnach ein erhebliches Überregulieren auf, das aber durch die Wirkung der großen Netzschwingmassen nach Gl. (111) gegenüber dem Einzellauf jeder individuellen Maschine ohne T_n erheblich vermindert ist.

Durch die Wirkung der Rückführung werden diese Schwingungen entsprechend Gl. (75) gedämpft. Da ihr Maximalwert nach Bild 18 zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ der Periodendauer liegt, deren Größenordnung wir im obigen Beispiel zu 9 sec berechnet hatten, so beträgt die Dämpfung etwa das

$$\varepsilon^{-\frac{\tau/3}{2T_s}} = \varepsilon^{-\frac{9/3}{2 \cdot 3}} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} = 0,6 \text{ fache.}$$

Führt man die stationäre Frequenzabweichung nach Gl. (104) in Gl. (110) ein, so erhält man die Amplitude der Frequenzschwingung in Abhängigkeit vom Leistungsstoß

$$F = \bar{N} \sqrt{\frac{1}{(\sum \bar{N}_o/\delta)^2} + \frac{1}{\sum (S_g + S_n) \cdot \sum \bar{N}_o/\delta T_s}} \cong \frac{\bar{N}}{\sum \bar{N}_o} \sqrt{\delta^2 + \frac{\delta T_s}{T_a + T_n}}. \quad (112)$$

Der letzte Wert gilt wieder für ganz gleichartige Maschinen. Man sieht hier am deutlichsten, wie durch den Einfluß kleiner Schwungmassen und schlechter Steuerungseigenschaften der Kraftmaschinen das Überspringen der Frequenz hervorgerufen wird.

Für die Amplitude der Leistungsschwingung der gesamten Kraftmaschinen des Netzes erhält man nunmehr aus Gl. (66)

$$\sum \tilde{N} = \bar{N} \sqrt{\frac{\sum (S_g + S_n) \cdot \sum \bar{N}_o/\delta T_s}{(\sum \bar{N}_o/\delta)^2} + 1} \cong \bar{N} \sqrt{\frac{\delta(T_a + T_n)}{T_s} + 1}, \quad (113)$$

wobei auch der Wert für gleichartige Schwung- und Regelungsverhältnisse hinzugefügt ist. Man sieht, daß für die Leistungsschwankungen große Netzschwingmassen ungünstig sind. Für das eben erwähnte Beispiel erhält man ein Überspringen der Leistungspendelungen um den 1,23fachen Betrag des Leistungsstoßes.

Es hat Interesse, die Winkelamplitude zu bestimmen, die der Netzvektor unter dem Einfluß dieser langsamen Reglerschwingungen mit der Frequenz μ_0 ausführt, z. B. für die Beurteilung des Synchronisierens neuer Maschinen unmittelbar nach einem Belastungsstoß. Wir erhalten sie durch Integration von Gl. (1) zu

$$A_n = \frac{\omega}{\mu_0} F \cong \omega \delta T_s \sqrt{1 + \frac{\delta(T_a + T_n)}{T_s}} \cdot \frac{\bar{N}}{\sum \bar{N}_o}. \quad (114)$$

Darin ist F nach Gl. (112) und μ_0 nach Gl. (64) eingesetzt, und die Formel ist für lauter gleichartige Maschinen ausgewertet. Für das gleiche Beispiel wie eben erhält man bei einem Leistungsstoß von 10 % der gesamten Generatorleistungen

$$A_n = 314 \cdot \frac{5}{100} \cdot 3 \sqrt{1,5} \cdot \frac{1}{10} \cdot 57,3 = 330^\circ.$$

Die Polräder führen unter der Wirkung dieses Stoßes also außerordentlich große Schwingungen gegenüber einem gleichmäßig rotierenden Vektor aus.

Wir berechnen nun noch die Einzelleistungen, die jeder Generator während der gemeinsamen Frequenzschwingungen elektrisch an das Netz abgibt. Wir können dazu die in Gl. (114) bestimmte Winkelamplitude des Netzes in Gl. (100) einführen und erhalten als Schwingungsamplitude der synchronen Leistung

$$\tilde{W} = \frac{S_g}{\mu_0} (\mu_0^2 - \mu_1^2) F. \quad (115)$$

Drücken wir hierin die Frequenzamplitude entsprechend dem ersten Wert von Gl. (66) durch die Leistungsamplitude des Gesamtnetzes aus und setzen für μ_0^2 und μ_1^2 ihre Werte nach Gl. (64) und (85) ein, so erhalten wir die individuelle Leistungspulsation jedes Generators zu

$$\tilde{W} = \left(\frac{S_g}{\sum (S_g + S_n)} - \frac{N_o/\delta T_s}{\sum N_o/\delta T_s} \right) \sum \tilde{N}. \quad (116)$$

Dieses Ergebnis entspricht der Tatsache, daß die Stoßleistungen sich, nach Abklingen der anfänglichen elektrischen Schwingungen, entsprechend den Schwungmassen auf alle Maschinen verteilen, während sie von den Kraftmaschinen nach Maßgabe der Reguliergeschwindigkeiten der Steuerungen aufgenommen werden. Der Unterschied dieser beiden Verteilungen kommt nach Gl. (116) als elektrische Leistungsschwingung zur Wirkung.

Wären keine Netzschwingmassen vorhanden, so könnten wir den Klammerwert dieser Gleichung zum Verschwinden bringen, wenn wir für sämtliche Synchronkraftmaschinen

$$\frac{S_g}{N_o/\delta T_s} = \frac{T_a N_o}{N_c/\delta T_s} = \delta T_s T_a = \text{const} \quad (117)$$

machen würden, denn dann würden diese gleichen Werte jeder Maschine mit dem Summenwert für das ganze Netz übereinstimmen. Um diese Abstimmung zu erreichen, muß man nach der zweiten Gl. (85) die Eigenfrequenzen der Reglerschwingungen für sämtliche Einzelmaschinen einander gleich halten.

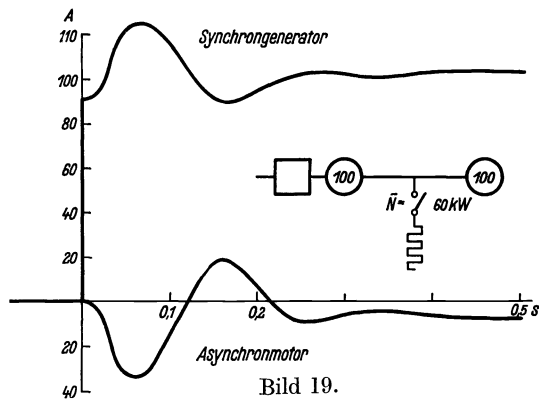
Auch unter der Wirkung der Netzschwingmassen hat diese Abstimmungsmethode den großen Vorteil, daß die Leistungsanteile aller Synchronmaschinen sich genau entsprechend ihren eigenen Schwungmassen aufteilen. Man erkennt dies am besten, wenn man Gl. (116) umschreibt in

$$\tilde{W} = \left(\frac{\sum N_o/\delta T_s}{\sum (S_g + S_n)} - \frac{N_o/\delta T_s}{S_g} \right) \frac{S_g}{\sum N_o/\delta T_s} \sum \tilde{N}, \quad (118)$$

denn jetzt werden die Werte in der Klammer für alle Maschinen einander gleich. Die Synchronkraftmaschinen arbeiten jetzt während aller Ausgleichsvorgänge nach einem Laststoß nicht mehr gegeneinander, sondern führen alle ihre Schwingungen gemeinschaftlich und anteilsgleich und im gleichen Takte mit den Netzschwingmassen aus. Diese Gleichverteilung der Leistung entsprechend den Schwungleistungen aller Maschinen ist die sicherste Gewähr dafür, daß keine Störungen durch Außertrittfallen einzelner Maschinen eintreten.

8. Schlußfolgerungen und Meßergebnisse.

Das Gesamtbild der Erscheinungen, die sich in unseren großen elektrischen Netzen als Folge eines plötzlich auftretenden Leistungsstoßes abspielen, sei es nun ein Belastungs- oder Entlastungsstoß, können wir nunmehr folgendermaßen beschreiben: Der Stoß trifft im ersten Augenblick lediglich die Synchronmaschinen des Netzes, vor allem also die Generatoren in den Kraftwerken. Er verteilt sich auf die einzelnen Synchronmaschinen zunächst nach Maßgabe ihrer jeweiligen synchronisierenden Leistung, die ihrerseits vor allem durch die Streuverhältnisse der Maschinen und durch die abgegebene Blindleistung bestimmt ist. Die Asynchronmaschinen, vor allem also die zahlreichen Motoren des Netzes, merken den Stoß im ersten Augenblick nicht. Diese anfängliche Stoßverteilung ist günstig, einerseits weil man jede Laständerung letzten Endes ja doch ausschließlich durch die Generatoren mit ihren Kraftmaschinen aufnehmen lassen muß, andererseits weil die synchronisierende Leistung ein vorzügliches Maß für die elektrische Leistungsfähigkeit der einzelnen Generatoren ist, die daher alle in gerechtem Maße zur Deckung der Stoßleistung herangezogen werden.



In Bild 19 sind die Zusatzströme dargestellt, die ein 100 kW-Synchrongenerator und ein 100 kW-Asynchronmotor erhalten, wenn eine elektrische Belastung von 60 kW plötzlich zugeschaltet wird. Der Stoß fällt vollständig auf die Synchronmaschine, die nachfolgenden Pendelungen beider Maschinen von 5,3 Per/sec sind stark gedämpft.

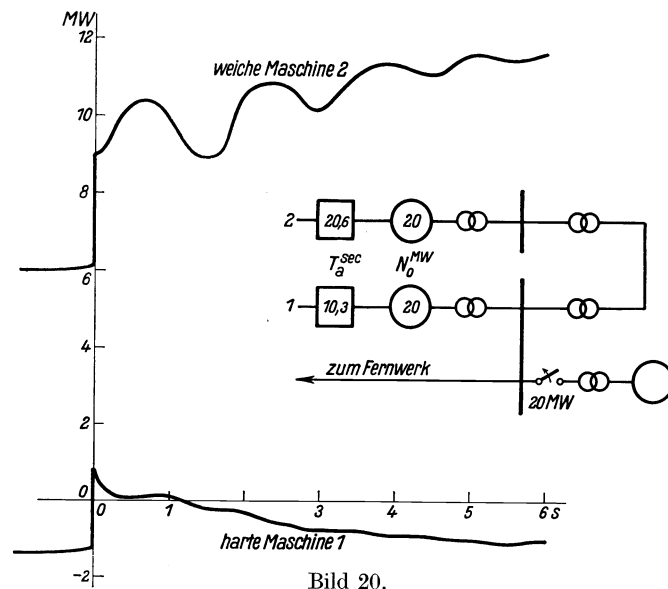
Unter der Wirkung ihrer Stoßleistungen beschleunigen oder verzögern sich alle Synchrongeneratoren und nehmen dabei sehr bald sämtliche Asynchronmotoren des ganzen Netzes mit, so daß auch diese nunmehr in einen Leistungsaustausch treten. Die Asynchronmotoren verzögern sich alle im Gleichtakt, sie nehmen daher nach Maßgabe ihrer Schwungleistungen am Leistungsausgleich teil, der aber sehr verschieden von ihren Nennleistungen sein kann. Die Synchrongeneratoren verzögern sich unterschiedlich und kommen dadurch gegeneinander ins Pendeln. Sie verlieren während der Verzögerung einen Teil der anfänglich aufgenommenen gesamten Stoßleistung und geben ihn an die Asynchronmaschinen des Netzes ab, wodurch auch eine Schwingung sämtlicher Synchronmaschinen gegen sämtliche Asynchronmaschinen eingeleitet wird. Alle diese Pendelungen und Schwingungen haben unterschiedliche Eigenfrequenzen, wenn die Generatoren verschiedenartig gebaut sind. Das Pendeln aller Generatoren untereinander läßt sich durch Abstimmung ihrer Eigenfrequenzen verhindern, das Pendeln der Gesamtheit der Generatoren gegenüber dem Netz mit seinen Asynchronmotoren kann man nicht vermeiden.

Bild 20 zeigt die elektrischen Schwingungen von zwei Drehstromgeneratoren von je 20 MW Nennleistung, die mit einem anderen Großkraftwerk zusammenarbeiten und durch plötzliches Abschalten eines dritten 20 MW-Generators einen starken Belastungsstoß erhielten. Entsprechend den unterschiedlichen Synchronisierleistungen

und Schwungleitungen ergeben sich verschieden große Anfangsstöße, die das System ins Pendeln bringen. Die schwere, über mehrere Transformatoren lose gekoppelte Maschine führt große langsame Schwingungen mit einer Frequenz von 0,7 Per/sec aus, die leichtere, direkt verbundene schwingt schwächer und schneller mit 1,15 Per/sec gegen das Gesamtnetz. In beiden Kurven erkennt man auch schwach die überlagerten fremden Frequenzen des Netzes.

Während oder nach Ablauf dieser anfänglichen Eigenschwingungen beginnen die Kraftmaschinenregler der verschiedenen Generatoren einzugreifen, da sich die Frequenz und die Drehzahlen inzwischen geändert haben. Sie versuchen jeder zu seinem Teil den Leistungsmangel oder Leistungsüberschuß ihrer individuellen Maschinen durch veränderte Füllung auszugleichen. Da sie aber alle von der gleichen Frequenzänderung beeinflußt werden, so schieben sie ihren Kraftmaschinen eine Leistungsänderung zu, die sich nur nach der Wirkungsgeschwindigkeit der Steuerung richtet und die wieder eine andere Verteilung auf alle Generatoren ergibt als die vorherige nach der Schwungleistung. Nur wenn man die Wirkungsgeschwindigkeit der Steuermechanismen aller Maschinen aufeinander abstimmt, kann man die gleiche Verteilung der Leistung wie vorher erzielen und Ausgleichsschwankungen untereinander vermeiden.

Unter der Wirkung der geänderten Energiezufuhr zu den Generatoren strebt die Fre-



quenz dem endgültigen Werte wieder zu. Die Summe der Synchrongeneratoren übernimmt dabei wieder die Leistung, die sich die Asynchronmaschinen während der Trägheitsperiode angeeignet hatten. Dieser Leistungsausgleich geht unter Schwingungen vor sich, die wegen der großen Massenwirkung der Synchron- und Asynchronmaschinen des Gesamtnetzes relativ langsam verlaufen und dabei zeitweise zum Überregulieren der Frequenz und der Leistungen führen.

In Bild 21 sind die Leistungs- und Frequenzschwingungen eines Großkraftnetzes dargestellt, dessen Generator 1 im Kraftwerk A plötzlich mit 24 MW abgeschaltet wurde, so daß diese Leistung von den anderen Maschinen der zusammengeschlossenen Werke momentan übernommen werden mußte. Es bildet sich dabei eine Frequenzschwankung von 23 sec Schwingungsdauer aus, deren Amplitude etwa 2,4‰ beträgt. An der korrespondierenden Leistungsschwingung des Generators 4 mit einer Amplitude von 9 MW erkennt man, daß sie um eine Viertelperiode gegen die Frequenzschwingung versetzt ist. Man sieht auch wieder an allen Leistungslinien die anfänglichen schnellen Synchronschwingungen, die der plötzliche Laststoß angeregt hat.

Aus dem Knick der Frequenzkurve im Augenblick des Laststoßes kann man die Schwungleistung des ganzen Netzes nach Gl. (5) abschätzen. Die Frequenzänderung

beträgt etwa $1^0/_{00}/\text{sec}$ und daraus ergibt sich die Schwungleistung zu

$$\sum (S_g + S_n) = \frac{24 \text{ MW}}{1^0/_{00}/\text{sec}} = 24\,000 \text{ MW}/\text{sec}.$$

Bezogen auf die gesamte speisende Generatorenleistung von ca. 800 MVA bestimmt sich die Gesamtanlaufzeit von Generatoren und Motoren zu

$$T_a + T_n = \frac{24\,000}{800} = 30 \text{ sec}.$$

Man wird davon etwa $1/3$ bis $1/2$ für die Synchronmaschinen, den Rest für die Asynchronmaschinen des Netzes rechnen können.

Eine genaue Nachrechnung der Versuche ist schwer möglich, weil die Maschinendaten des ganzen Netzes nur zum kleinen Teil bekannt sind. Rechnet man mit 6 %

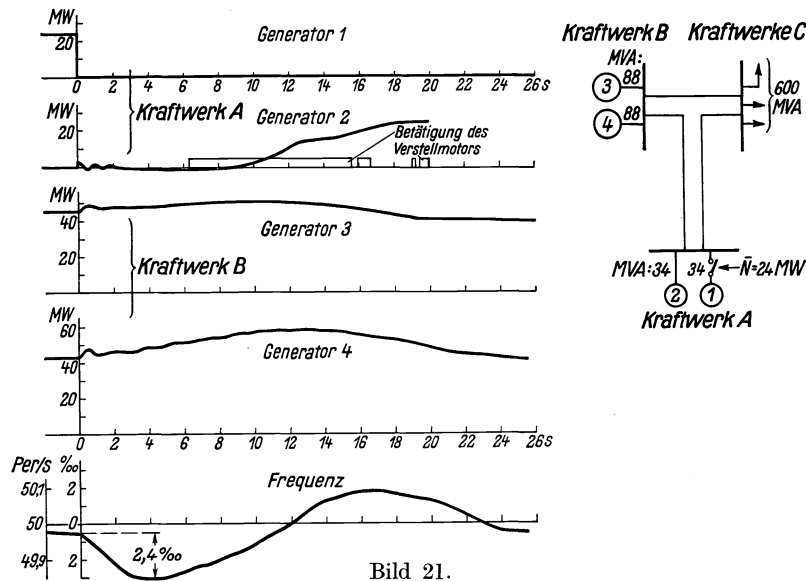


Bild 21.

mittlerer Ungleichförmigkeit und mit 6 sec mittlerer Schlußzeit sämtlicher Kraftmaschinensteuerungen, so ergibt sich nach Gl. (67) eine Schwungsdauer

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{24\,000}{800/6\% \cdot 6}} = 20,7 \text{ sec},$$

während 23 sec gemessen wurde. Die Frequenzamplitude berechnet sich nach Gl. (112) zu

$$F = \frac{24}{800} \sqrt{\left(\frac{6}{100}\right)^2 + \frac{6 \cdot 6}{100 \cdot 30}} = 3,75^0/_{00},$$

ihre Dämpfung nach Gl. (75) für eine Viertelschwingung von 5 sec zu

$$\varepsilon^{-\frac{5}{2 \cdot 6}} = 0,66,$$

so daß die größte Frequenzabweichung $0,66 \cdot 3,75 = 2,48^0/_{00}$ betragen sollte, während $2,4^0/_{00}$ gemessen wurde.

Wenn der Beharrungszustand erreicht ist, dem das ganze Netzgebilde zustrebt, verteilen sich die Leistungen entsprechend der Statik oder der Ungleichförmigkeit der Drehzahlregler. Dies liefert eine weitere, wieder andere Leistungsverteilung auf die einzelnen Synchronkraftmaschinen. Man kann die hierbei auftretenden Ausgleichsschwingungen nur vermeiden, wenn man die Un-

gleichförmigkeiten der Drehzahlregler auf die Schwungleistungen der Kraftmaschinen abstimmt.

Die Lastverteilung der Drehzahlregler im Beharrungszustand stimmt gar nicht immer mit derjenigen Verteilung überein, die man aus wirtschaftlichen Gründen zu haben wünscht. Man schließt daher häufig noch eine Programmregelung an, indem man die Leistung einer oder mehrerer Kraftmaschinen durch äußere Eingriffe von Hand oder selbsttätige Vorrichtungen auf eine möglichst wirtschaftliche Belastung unabhängig von ihrem Drehzahlregler einstellt.

Den Ablauf der vorhergehenden Erscheinung kann eine derartige Programmregelung, die als Leistungs- oder Frequenzregelung ausgeführt sein kann, natürlich nicht beeinflussen, wenn man sie, wie es meist üblich ist, nur relativ langsam zur Wirkung kommen läßt. Die Leistungsübernahme bei Belastungsstößen aller Art richtet sich zunächst nur nach den Haupteigenschaften der Maschinen, nach der synchronisierenden Kraft und der Schwungleistung, nach der Ungleichförmigkeit und der Wirkungsgeschwindigkeit ihrer Drehzahlregler. Wenn man sie beeinflussen will, muß man daher in die Wirkungsweise dieser Leistungs- und Steuerapparate mit entsprechendem Kraftaufwand eingreifen.

Nicht immer sind die Leistungsstöße, die im Netz auftreten, so schroff, wie wir es vorausgesetzt haben, um den ungünstigsten Fall zu treffen. Sind die Stöße weicher, erstreckt sich also die Änderung der Netzleistung über eine gewisse Zeit, so kann man sie als Summe von aufeinanderfolgenden kleinen Teilstößen auffassen. Man erkennt daraus, daß derartige Stöße im wesentlichen nur solche Leistungspendelungen hervorrufen können, deren Schwingungsdauer größer ist als die Dauer der anfallenden Leistungsänderung. Beträgt die Anstiegsdauer eines Leistungsstoßes im Netz beispielsweise 3 sec, so wird er kaum elektrische Eigenschwingungen anregen, weil deren Schwingungsdauer im allgemeinen höchstens 1 sec beträgt. Dagegen werden die Reglerschwingungen mit ihren Wirkungszeiten von etwa 10 sec fast ebenso angestoßen, als wenn die Leistungsänderung plötzlich erfolgt wäre.

Wenn mehrere schnelle oder langsame Leistungsstöße in positiver oder negativer Richtung aufeinanderfolgen, so überlagern sich ihre Auswirkungen auf die Schwingungsvorgänge des ganzen Netzes. Man kann daher die Folgen von beliebigen Leistungsänderungen im Netz stets durch Superposition aus den hier besprochenen Wirkungen der plötzlichen Leistungsstöße herleiten.

Zusammenfassung.

In elektrischen Erzeugungs- und Verteilungsnetzen, die zu großen gekuppelten Netzwerken zusammengefaßt sind, treten bei jeder Belastungsänderung und bei jeder Störung Ausgleichs- oder Übergangerscheinungen auf, die wegen der großen Zahl zusammenarbeitender Maschinen sehr verwickelten Charakter besitzen. Eine Zerlegung der Erscheinungen in möglichst einfache Teilvorgänge zeigt, daß zwei große Gruppen von Schwingungsmöglichkeiten auftreten.

Durch schnelle Laststöße werden zunächst Pendelungen zwischen jeder Synchronmaschine und allen anderen synchronen und asynchronen Maschinen des Netzwerkes angeregt. Die Stöße verteilen sich dabei auf die Maschinen in zeitlich wechselnder Form, zuerst auf die synchronen und dann auch auf die asynchronen Maschinen. Sie

hinterlassen Pendelungen aller Maschinen gegeneinander, die vorwiegend durch die Schlüpfung der zahlreichen Asynchronmaschinen des Netzes gedämpft werden und Schwingungsdauern besitzen, die bei gesundem Netz in der Größenordnung von 1 sec liegen.

Außerdem ruft jeder Leistungsstoß eine Änderung der Drehzahl aller Kraftmaschinen und damit eine langsame Wogung der Netzfrequenz hervor, die unter Umständen stark über das erwünschte Maß hinauschießen kann und wiederum eine ungleiche Verteilung der Leistung auf die Kraftmaschinen bewirkt. Bei diesen Schwingungen wirken die Steuer- und Regeleinrichtungen sämtlicher Kraftmaschinen im Gleichtakt zusammen, alle Maschinen pendeln daher miteinander. Die Dämpfung dieser Schwingungen erfolgt hauptsächlich durch die Rückführung der Kraftmaschinenregler. Ihre Schwingungsdauer liegt wegen der großen Netzschwungmassen in der Größenordnung von 10 sec.

Der Vergleich der Schwingungsamplituden, die sich beim Zusammenwirken aller dieser Gemeinschaftsschwingungen ergeben, zeigt, daß man einen Teil derselben in günstig geleiteten Betrieben vermeiden kann. Durch Abstimmung der Eigenschaften der Synchronmaschinen und ihrer Kraftmaschinenregler kann man gleichzeitig eine bestimmte Verteilung der Leistung auf die Generatoren auch während der Schwingungs- und Regulierperioden erreichen.

Literatur.

- A. Föppl: Das Pendeln parallel geschalteter Maschinen. *Elektrotechn. Z.* 1902 S. 59.
 W. Bauersfeld: Die automatische Regulierung der Turbinen. Berlin 1905.
 W. Sarfert: Über das Schwingen der Wechselstrommaschinen im Parallelbetrieb. *Forsch.-Arb. Ing.-Wis.* 1908 Heft 61.
 J. M. Oliver: The control of generating station loads and regulation of frequency and voltage on an interconnected system. Gesamtbericht der zweiten Weltkraftkonferenz, Berlin 1930 Bd. 14 S. 3.
 M. Schenkel: Die Beeinflussung des Parallelbetriebes von Generatoren mit Kolbenmaschinenantrieb durch die Regler der Antriebsmaschinen. *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* IX, 1 (1930) S. 187.
 T. E. Purcell und A. P. Hayward: Operating characteristics of turbine governors. *J. Amer. Inst. electr. Engr.* Bd. 49 (1930) S. 366.
 National Electric Light Association: Hydraulic turbine governors and frequency control. N. E. L. A. Publ. Bd. 13 (1930) (enthält weitere Literaturangaben).
 R. C. Buell, R. J. Caughey, E. M. Hunter und V. M. Marquis: Governor performance during system disturbances. *Electr. Engng.* Bd. 50 (1931) S. 37.
 E. Frensdorff, K. Kühn, R. Mayer und W. Peters: Versuche über Maschinenregelung und Parallelbetrieb in den Großkraftwerken Hirschfelde und Böhlen. *Elektrotechn. Z.* 1931 S. 791, 1185, 1349, 1509.
 R. Rüdberg: Die synchronisierende Leistung großer Wechselstrommaschinen. *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* X, 3 (1931) S. 41.
 W. Kieser: Über die Regelung von Spitzenlasten und Grundlastmaschinen. *Elektr.-Wirtsch.* 1931 S. 164.
 J. S. Gheorghiu: Le problème général de la répartition des puissances actives et réactives dans la marche en parallèle des usines génératrices. *Rev. gén. Électr.* Bd. 29 (1931) S. 577 (enthält weitere Literaturangaben).
 E. Friedländer: Regulierung parallel arbeitender Maschinen in frequenzhaltenden Kraftwerken. *VDE-Fachberichte* 1931 S. 120.
 K. Ott: Frequenz- und Leistungsregelung zusammengeschlossener Großkraftwerke. *VDE-Fachberichte* 1931 S. 131.
 H. Langrehr: Versuche über Leistungs- und Frequenzregelung im Kraftwerk Kiel. *VDE-Fachberichte* 1931 S. 133.
 L. Barbillion: Répercussion des variations de charge d'un réseau sur les groupes électrogènes des centrales. *Conférence internationale des grands réseaux électriques*, 1931. Bd. III. S. 919.

Über Versuche zur Klarstellung der wirtschaftlichsten Betriebsweise bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen¹⁾.

Von **Franz Oertel**.

Mit 17 Bildern.

Mitteilung aus der Abteilung Industrie der
Siemens-Schuckertwerke A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 1. Juni 1931.

Inhaltsübersicht.

I. Technologische Vorbemerkungen.	6. Reglereinstellung.
1. Ziel der Versuche.	7. Bestimmung der Mehrproduktion.
2. Neuerungen am Spinnregler.	b) Lagendrehzahlregelung.
3. Bedeutung des „günstigsten Drehzahlverlaufes“.	8. Grundsätzliches.
4. Fadenbruchzahl.	9. Reglereinstellung.
5. Verfahren zur Einstellung des Reglers auf „günstigsten Drehzahlverlauf“.	10. Mehrproduktion.
II. Besprechung der Versuchsdurchführung. Auswertung.	11. Abspinnen mit Lagenregelung.
a) Grunddrehzahlregelung.	c) Ergebnisse.
	III. Ausblick.
	IV. Zusammenfassung.

I. Technologische Vorbemerkungen.

1. Ziel der Versuche.

Das Ziel der nachstehend besprochenen Versuche bestand in erster Linie darin, ein praktisch genügend brauchbares Verfahren für die Einstellung eines Spinnreglers auf einen die höchste Produktion ergebenden „günstigsten Drehzahlverlauf“ einer Ringspinnmaschine unter Benutzung einer verlässlichen Einstellvorschrift zu entwickeln und die Frage der Mehrproduktion durch Geschwindigkeitsregelung möglichst einwandfrei zu klären. Die Brauchbarkeit des Verfahrens sollte für verschiedene Betriebsverhältnisse durch Beispiele gefahrener Garnabzüge belegt werden.

2. Neuerungen am Spinnregler.

Die Versuche wurden ausgeführt mit Hilfe eines Versuchsmodells einer neuen Regleranordnung, die gestattet, auf Grund einer Einstellvorschrift einen Drehzahlverlauf nach Bild 1 schnell, sicher und bequem einzustellen. Der Aufbau dieses Reglers ist in Bild 2, sein Anbau an die Ringspinnmaschine in Bild 3 dargestellt.

Kinematischer Aufbau. Der neue Spinnregler gestattet vermöge verbesserter kinematischer Anordnung eine unabhängige Grund- und Lagendrehzahleinstellung, indem die von der Grund- und der Lagenformkurve abgeleiteten Hebelausschläge

¹⁾ Vgl. Wiss. Veröff. Siemens-Konz. IX, 1. 1930. „Die Erkenntnis technologischer Arbeitsvorgänge als Grundlage für die Durchbildung von Arbeitsmaschinenreglern (gezeigt an der Ringspinnmaschine).“

vor ihrer Vereinigung im Differentialhebel durch besondere verstellbare Hebel-
längen verändert werden können. Die sonst übliche Hilfsscheibe ist durch einen von
der Grundscheibenformkurve gesteuerten Anschlag ersetzt, wodurch beim An- und
Abspinnen die Lagendrehzahlkurven entsprechend abgeschnitten werden.

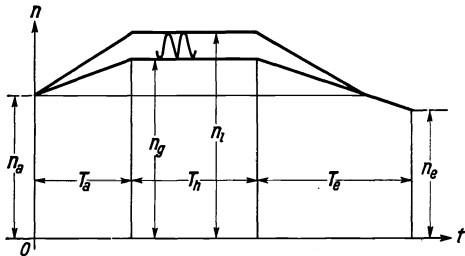


Bild 1. Grundsätzliches Drehzahlschaubild.
 n = Drehzahlen (g = Grunddrehzahlen; l = Lagen-
drehzahlen); T = Zeiten (a = Anspinnen; h = Haupt-
spinnen; e = Abspinnen).

Das grundsätzliche Drehzahlschaubild des
neuen Reglers zeigt Bild 4. Der theoretisch
richtige Grunddrehzahlverlauf kann durch den
gebrochenen Linienzug $a-b-c-d$ näherungs-
weise ersetzt werden. Sämtliche den Grund-
drehzahlverlauf bestimmenden Regelgrößen,
nämlich Anspinnendrehzahl n_a , Grunddrehzahl-
anstieg $n_g - n_a$, Abspinnendrehzahl n_e und die
Spinnzeiten T_a , T_h und T_e können beliebig
eingestellt werden. Dem Grunddrehzahlverlauf

ist die Lagenregelung überlagert, die in ihrer Höhe $n_l - n_g$ verändert werden kann,
wobei immer vom Anspinnpunkt a an bis b ($t = T_a$) die Lagenregelung vom Wert 0
bis zum vollen Wert $n_l - n_g$ zunimmt, von b bis c gleichbleibt und von c wieder
abnimmt bis auf einen jeweils von der Höhe des Punktes d abhängigen End-
wert ($n_l - n_e$).

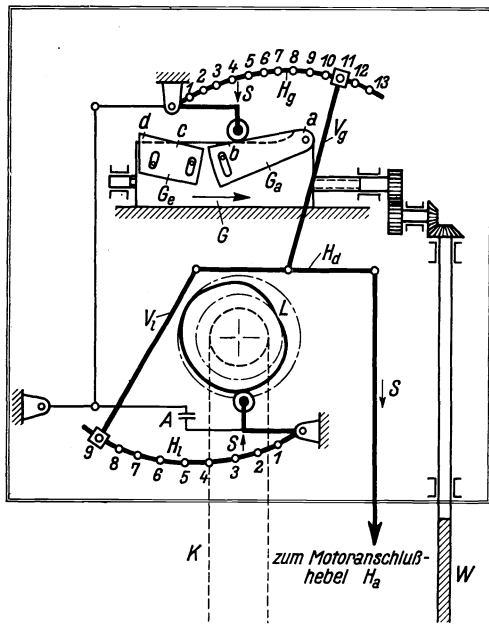


Bild 2.

G = Grundlineal; G_a = Anspinn-Formstück; G_c = Ab-
spinn-Formstück; H_g = Grundhebel; V_g = Reiterstange
am Grundhebel; L = Lagenscheibe; H_l = Lagenhebel;
 V_l = Reiterstange am Lagenhebel; A = bewegl. Anschlag;
 H_a = Differentialhebel.

ist, daß beim Spinnen von langen Kötzern das Lineal um ca. 10 cm verschoben
wird. Im Augenblick des Anspinnens steht die Grundrolle über dem Drehpunkt des
Anspinnformstückes G_a im Anspinnpunkt a . Mit fortschreitendem Abzug bewegt
sich die Grundrolle auf dem Anspinnformstück nach abwärts, bis sie im Punkt b
(vgl. Bild 4) den waagerechten Teil des Grundlineals erreicht, welcher die Grund-

Die von der Herzwelle (Bild 2) über
eine Kette K angetriebene Lagenscheibe L
wird an ihrem parabolisch geschnittenen
Umfang von einer am Lagenhebel H_l sitzen-
den Rolle abgetastet. Durch Verschieben
des Reiters der Verbindungsstange V_l
auf dem kreisbogenförmigen Arm des Lagen-
hebels können die auf den Differential-
hebel H_a übertragenen Lagenregelungs-
ausschläge verändert werden. Zu diesem
Zwecke besitzt der Lagenhebel 9 Bohrungen
in gleichem Abstand voneinander, in die der
Bolzen des Reiters gesteckt werden kann.
Das an dem Anschlußhebel H_a angeordnete
Gewicht Q (Bild 3) muß so groß bemessen
sein, daß während des Hauptspinnens die
Lagenrolle immer dem Umfang der Lagen-
scheibe L folgt.

Das Grundlineal G wird von der Schalt-
radeinrichtung der Spinnmaschine waage-
recht verschoben, wobei die Übersetzung
des Zwischenvorgeleges so gewählt worden

drehzahl n_g erzeugt. Bis zum Schnittpunkt c mit dem Abspinnformstück G_e bleibt die Grunddrehzahl unverändert, von da an bewegt sich die Rolle wieder nach oben bis zum Punkt d , wo der Abzug zu Ende ist. Hierbei ist die Grunddrehzahl entsprechend bis auf n_e gesunken. Während der Punkt a gegenüber b immer die gleiche Höhe besitzt, kann der Punkt d des Abspinnformstückes beliebig hoch eingestellt werden, je nachdem, wie tief die Enddrehzahl n_e im Vergleich zur Anspinnndrehzahl n_a beim Abspinnen abnehmen soll.

Entsprechend wie bei der Lagenregelung können die vom Grundlineal hervorgerufenen Ausschläge des Grundhebels H_g durch Verstellung des Reiters der Verbindungsstange V_g auf dem kreisbogenförmigen Arm des Grundhebels nach Belieben verändert werden, wofür 13 Bohrungen auf dem Grundhebel vorgesehen sind. Beim Zurückkurbeln der Ringbank in die Anspinnstellung wird auch gleichzeitig das Grundlineal zwangsläufig in die Anspinnstellung zurückverschoben.

Die Verkleinerung der Lagenregelung beim An- und Abspinnen geschieht durch den von dem Grundlineal G gesteuerten Anschlag A , welcher, sobald die Grundrolle auf den schrägen Kurven $a-b$ bzw. $c-d$ abrollt, die Lagenrolle von der Lagenscheibe um so mehr abhebt, je höher die Grundrolle über $b-c$ steht (Abschneiden der Lagenlinien). In der Anspinnstellung (Grundrolle in a) berührt die Lagenrolle die Lagenscheibe nur an ihrer äußersten Spitze, so daß die Lagenregelung 0 beträgt.

Die Hebelausschläge der Grund- und Lagenregelungsanordnung werden durch den Differentialhebel H_d vereinigt und ihr resultierender Ausschlag auf den Anschlußhebel H_a der Motorbürstenbrücke übertragen. Zwischen dem Anschlußhebel H_a und dem Handhebel der Motorbürstenbrücke ist eine Feinstelldose D angeordnet, an welcher die Anspinnndrehzahl n_a zu Beginn des Abzuges eingestellt werden kann.

Einstellvorschrift. Der durch das Regeldiagramm Bild 4 dargestellte grundsätzliche Drehzahlverlauf der Ringspinnmaschine ist durch folgende am Regler und Motor einstellbare Größen festgelegt:

- Anspinnndrehzahl n_a in Trommelumdr./min,
- Grunddrehzahlanstieg $(n_g - n_a)$ in Trommelumdr./min,
- Lagendrehzahlanstieg $(n_l - n_g)$ in Trommelumdr./min,
- Abspinnndrehzahl n_e in Trommelumdr./min,
- Anspinnverhältnis T_a/T ,
- Abspinnverhältnis T_e/T .

Die Einstellung der sechs genannten Regelgrößen wird an den folgenden Getriebeteilen vorgenommen (vgl. Bild 2 und 3):

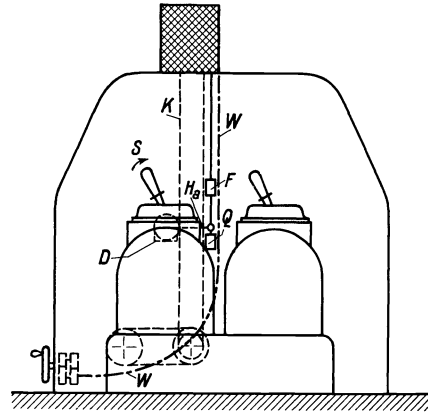


Bild 3.

F = Verstelldose; H_a = Motoranschlußhebel; D = Feinstelldose; K = Kette; W = biegsame Welle; Q = Gewicht; s = „schneller“.

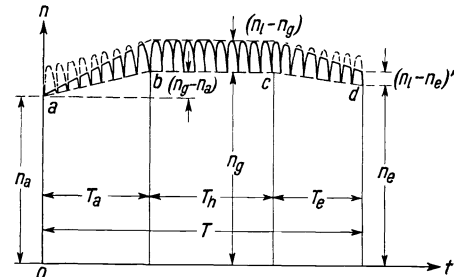


Bild 4. Drehzahl-schaubild des neuen Reglers. (Bezeichnungen wie in Bild 1.)

Einstellung der Anspindrehzahl n_a an der Motorverstelldose D , des Grund- und Lagendrehzahlanstiegs ($n_g - n_a$, $n_l - n_g$) durch Festlegung des Reiters der Verbindungsstangen (V_g , V_l) in einer der Bohrungen des Grund- bzw. Lagenhebels, der Abspindrehzahl n_e am Formstück G_e durch Vergleich der Höhe d mit der von a , des An- und Abspinnverhältnisses:

$$\frac{T_a}{T}, \quad \frac{T_e}{T}$$

an den Formstücken G_a , G_e durch Veränderung ihrer Neigung, wofür auf dem Grundlineal eine Zentimeterskala 0—10 angebracht ist, deren Schnittpunkte b und c die betreffenden Verhältnisse unmittelbar in Zehnteln ablesen lassen.

Aus Vorstehendem ist ersichtlich, daß die geschilderte Regleranordnung nicht nur eine vielseitige und bequeme Verstellbarkeit aller in Frage kommenden Größen erlaubt, sondern daß auch durch den kinematischen Aufbau völlige Unabhängigkeit zwischen Grund- und Lagendrehzahleinstellung gesichert ist. Dadurch wird es möglich, eine auf dem Drehzahlverhalten von Kommutatormotoren fußende, aus Zahlenangaben bestehende, handliche Einstellvorschrift zu schaffen, mit der für einen bestimmten, von der Spinnereibetriebsleitung zu wählenden Drehzahlverlauf die zugehörigen Einstellmarken vom Büro aus eindeutig vorgeschrieben werden können, deren praktische Einstellung am Regler durch Spinnsaalgehilfen dann keinerlei Ansprüche an deren Auffassungsgabe bedeutet, so daß Irrtümer ausgeschlossen bleiben. So wird auf diesem Wege die Möglichkeit bereitet, die Geschwindigkeitsregelung als

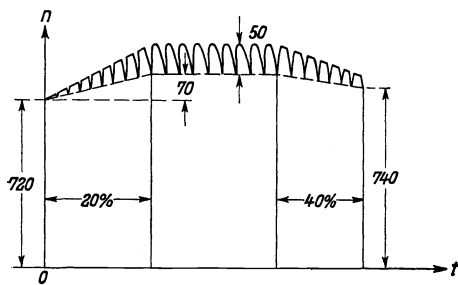


Bild 5. Drehzahlverlauf mit Reglereinstellung nach Seite 106. (Bezeichnung wie in Bild 1.)

Betriebsverfahren in einem Ringspinnstuhl sachgemäß zu organisieren, anstatt sie, wie bisher, einem meist wenig ergebnisreichen, eigenmächtigen Herumprobieren durch Saalgehilfen zu überlassen. Nachstehend sei in Zahlentafel 1 ein Beispiel gegeben für das Aussehen einer solchen Vorschrift und die einfache Auffindung der Einstellmarken (Bild 5).

Für die zu einem bestimmten Garn gehörigen Einstellangaben, beispielsweise

$$n_a = 720 \text{ Trommelumdrehungen/min,}$$

$$n_g - n_a = 70 \quad ,,$$

somit

$$n_g = 720 + 70 = 790 = \text{rd. } 800 \text{ Uml/min,}$$

ferner

$$n_l - n_g = 50,$$

ergeben sich an Grund- und Lagenhebel die Einstellmarken 8 bzw. 4, wie in der Zahlentafel 1 durch Pfeillinien angedeutet.

Es braucht nicht besonders betont zu werden, daß ein verlässliches Arbeiten mit einer derartigen Einstellvorschrift die Verwendung eines Antriebsmotors mit einwandfreiem Nebenschlußverhalten voraussetzt, der die jeweils eingestellte Drehzahl unbeeinflusst durch Belastungs- oder Spannungsschwankungen völlig festzuhalten vermag.

Zahlentafel 1. Spinnregler-Einstellvorschrift.

		Einstellmarken an Hebel H_g						
Grunddrehzahlanstieg ($n_g - n_a$)	120	—	—	13	12	13	—	—
	110	—	13	12	12	12	13	—
	100	13	12	11	11	12	13	—
	90	13	11	10	10	11	12	—
	80	12	10	8	8	10	11	—
	70	11	8	7	7	8	10	13
	60	9	6	5	5	7	9	11
	50	7	4	3	3	4	8	10
	40	5	3	2	2	3	4	9
	30	3	1	1	1	1	2	4
	20	1	—	—	—	—	1	2
10	—	—	—	—	—	—	1	
n_g		400	500	600	700	800	900	1000
Legendrehzahlanstieg ($n_l - n_g$)	10	1	—	—	—	—	—	1
	20	1	1	1	1	1	1	3
	30	2	2	2	2	2	3	5
	40	3	2	2	2	3	4	6
	50	3	3	3	3	4	5	9
	60	4	4	4	4	5	6	11
	70	5	5	5	5	6	7	—
	80	6	5	5	6	7	10	—
	90	7	6	6	7	8	11	—
	100	8	7	7	8	10	—	—
	110	9	8	8	9	11	—	—
120	10	9	9	10	—	—	—	
130	11	10	10	11	—	—	—	
		Einstellmarken an Hebel H_l						

3. Bedeutung des „günstigsten Drehzahlverlaufes“.

Der der Reglereinstellung zugrunde zu legende „günstigste Drehzahlverlauf“ bezweckt die volle Ausnutzung der Spinnmaschine und damit eine möglichst hohe Garnproduktion, ohne hierbei die Spinnerin über ihre Leistungsfähigkeit hinaus zu beanspruchen.

In dem obenerwähnten Aufsatz¹⁾ war auf S. 269 die Gesetzmäßigkeit dargelegt, nach der mit steigender Spindeldrehzahl die Fadenspannung beim Spinnen anwächst in dem durch Brüche besonders gefährdeten Stück zwischen Lieferwalze und Fadenaugen. Mit dieser Fadenspannung beim Spinnen wächst auch die Neigung zu Fadenbrüchen, und zwar einleuchtenderweise verhältnismäßig, unter Absehung von Nebeneinflüssen, so daß das Gelingen der Regelaufgabe, nämlich die Fadenspannung während der ganzen Abzugsdauer auf gleicher Höhe zu erhalten, nach außen hin in einer entsprechend gleichmäßigen Verteilung der Gesamtanzahl von Fadenbrüchen in Erscheinung tritt. Sobald die Anzahl der während des ganzen Abzuges auftretenden Fadenbrüche größer wird als die Zahl der von der Spinnerin angeknüpften Fäden, dann kann infolge des Einflusses der leerlaufenden Spindeln bei gleicher Arbeitsleistung der Spinnerin trotz höherer Spindeldrehzahl die Produktion der Spinnmaschine sich verringern.

Setzt man eine über den ganzen Abzug gleichmäßige Arbeitsweise der Spinnerin für das Anknüpfen gebrochener Fäden voraus ($a = \text{const}$), dann ist die Zahl der

¹⁾ Vgl. Fußnote auf Seite 103.

leerlaufenden Spindeln nur noch abhängig von dem Grade des Auftretens der Fadenbrüche, den man innerhalb gewisser Grenzen nach Belieben durch die Geschwindigkeitsregelung beeinflussen kann. Diese dauernd gleichmäßige Beanspruchung der Spinnerin stellt den Ausgangspunkt für die Ermittlung einer über den ganzen Abzug „zulässigen“ Zahl von Fadenbrüchen/min dar, welcher ein Drehzahlverlauf entspricht, der als der auf höchste Produktion gerichtete „günstigste Drehzahlverlauf“ zu betrachten ist.

4. Fadenbruchzahl.

Zulässiger Wert. Außer den durch zu hohe Fadenspannungen beim Spinnen gebrochenen Fäden hat die Spinnerin noch solche Fäden anzuknüpfen, deren Bruch auf andere Ursachen zurückzuführen ist; hierher gehören: Fadenbrüche durch Schleuderfäden und durch Störungen beim Abwickeln des Vorgarns oder im Streckwerk. Ferner müssen auch beim Auswechseln von Vorgarnspulen, von Spindel-sehnüren und Läufern die Fäden neu angeknüpft werden. Zu diesen Nebenarbeiten gehört auch das Reinigen der Maschine während des Abzuges, insbesondere Befreien der Putzwalzen von dem beim Fadenbruch aufgelaufenen Vorgarn.

Durch Beobachtung wurde festgestellt, daß eine geübte Spinnerin in der Lage war, bei einer Ringspinnmaschinen-seite mit 200 Spindeln in der Minute bei angestrenzter Tätigkeit 5—6 Fadenbrüche ohne Nebenarbeiten zu beseitigen. Die für obengenannte Nebenarbeiten erforderliche Zeit setzt bei gleichmäßiger Verteilung derselben über den ganzen Abzug diesen Wert jedoch beträchtlich herunter, und zwar ergaben die Beobachtungen, daß eine durchschnittliche Fadenbruchzahl von etwa 2,5/min denjenigen Grenzwert darstellt, bei welchem eine geübte und fleißige Spinnerin bei dauernder Inanspruchnahme noch in der Lage ist, die zugehörigen Nebenarbeiten zu leisten.

Wenngleich dieser Wert anscheinend etwas höher liegt als der in der Praxis durchschnittlich übliche, wurde er den Versuchen doch als betriebsmäßig möglich zugrunde gelegt, und demzufolge als „günstigster Drehzahlverlauf“ derjenige betrachtet, der einer über den ganzen Abzug gleichbleibenden Fadenbruchzahl von 2,5/min entspricht.

Ermittlung. Da nicht alle Fadenbrüche im Augenblick ihres Entstehens sofort gezählt werden können, müssen sie aus der Anzahl der in einem bestimmten Zeitabschnitt angeknüpften Fäden und der Anzahl der zu Beginn und Ende dieses Zeitabschnittes leerlaufenden Spindeln berechnet werden. Bezeichnet man die Zahl der leerlaufenden Spindeln zur Zeit t_1 mit l_1 und zur Zeit t_2 mit l_2 , dann ergibt sich hieraus die Anzahl der in der Zeit $(t_2 - t_1)$ aufgetretenen Fadenbrüche zu $a + l_2 - l_1$ mit a als Anzahl der in der gleichen Zeit angesponnenen Fäden. Ihre durchschnittliche Anzahl je Minute beträgt alsdann:

$$f/\text{min} = \frac{a + l_2 - l_1}{t_2 - t_1}.$$

Praktisch wurde die Fadenbruchermittlung so durchgeführt, daß der eine Beobachter hinter der Spinnerin herging und die Anknüpfungen gebrochener Fäden zählte, die durch zu hohe Fadenspannung entstanden waren, und der andere die Zahl der infolge Fadenbruchs leerlaufenden Spindeln zu Beginn und zu Ende jedes Zeitabschnittes (meistens 5 oder 10 Minuten) feststellte. Aus diesen Werten kann sofort die durchschnittliche minutliche Fadenbruchzahl nach jedem Zeitabschnitt berechnet werden,

so daß während des ganzen Abzuges eine ständige Kontrolle der Fadenbruchhöhe möglich ist. Hierbei treten infolge des angewandten Zählverfahrens sowie ungleichmäßiger Garnbeschaffenheit oft mehr oder weniger starke Verschiedenheiten der aufeinanderfolgenden Fadenbruchwerte auf, die jedoch bei graphischer Darstellung des Fadenbruchverlaufes durch eine mittlere Linie ausgeglichen werden können.

5. Verfahren zur Einstellung des Reglers auf „günstigsten Drehzahlverlauf“.

Der Drehzahlverlauf für eine während des ganzen Abzuges gleichbleibende Fadenbruchzahl, die einer nahezu konstanten Fadenspannung entspricht, läßt sich bekanntlich in einen Grunddrehzahlverlauf und eine darübergelagerte Lagenregelung zerlegen, die unabhängig voneinander am Spinnregler einstellbar sind. Will man somit den Regler auf den „günstigsten Drehzahlverlauf“, d. h. also auf einen Gesamtdrehzahlverlauf mit einer gleichbleibenden, als zulässig erachteten Fadenbruchzahl von $f_m = 2,5/\text{min}$ einstellen, dann muß dieser aus einem Grund- und einem Lagenregelungsverlauf aufgebaut werden.

Das Verfahren, um diesen günstigsten Gesamtdrehzahlverlauf bei gegebenen Betriebsverhältnissen aufzufinden, besteht somit in einer getrennten Ermittlung des zugehörigen Grund- und Lagendrehzahlverlaufes.

II. Besprechung der Versuchsdurchführung, Auswertung.

a) Grunddrehzahlregelung.

6. Reglereinstellung.

Handabzüge. Als das einwandfreieste Verfahren zur Ermittlung des günstigsten Grunddrehzahlverlaufes wurde die von Hand erfolgende Regelung der Drehzahl des Antriebsmotors gewählt, und zwar wurde diese Art der Regelung der bequemen Bedienung wegen in Stufen (Treppen) vorgenommen, so daß alsdann durch Interpolation die günstigste Grunddrehzahlkurve ermittelt werden konnte. Sofort nach jeder Beobachtungszeit, die normal 5 oder 10 Minuten betrug, wurde die Fadenbruchzahl errechnet und in einer Kurve fortlaufend aufgetragen, aus welcher die Höhe der folgenden Drehzahlstufe geschätzt werden konnte.

Das Beispiel eines derartigen Handabzuges zur Ermittlung des günstigsten Grunddrehzahlverlaufes zeigt für ein Kammgarn Nr. 26 metr. Bild 6 und Zahlentafel 2, in welchen der Verlauf der Drehzahl n als Treppenkurve sowie in Zuordnung hierzu der Fadenbruchverlauf f , der aus den Werten der Kurven a und l ermittelt wurde, dargestellt ist.

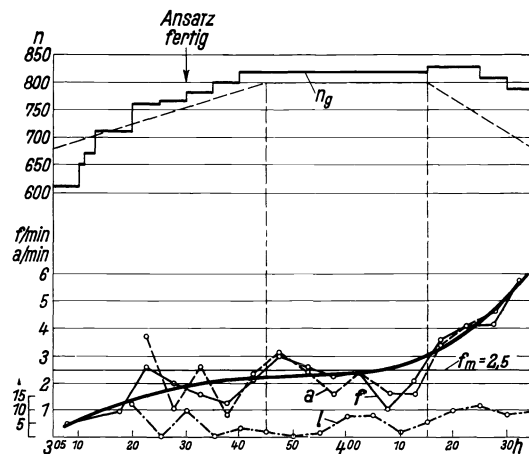


Bild 6. Kammgarn Nr. 26 metr. Abzug mit Regelung von Hand zur Ermittlung des Grunddrehzahlverlaufes n_g für mittlere Fadenbruchzahl $f_m = 2,5/\text{min}$.

Bezeichnungen:
 n = Trommeldreh-
 zahlen/min
 f = Fadenbrüche/min
 a = Anspinner/min
 l = leerlaufende Spindeln, gezählt zu Ende jeder Versuchsdauer.
 ———— wirklich gefahren
 - - - - - für die Reglereinstellung zugrunde gelegt.
 } ermittelt über je 5 - 10/min

Zahlentafel 2. Anspinner, leerlaufende Spindeln, Fadenbrüche während eines Abzuges.

Uhrzeit	l	a	a/min	f	f/min	$n_{\text{Tr.}}$
3 Uhr 20 Minuten	6	19	3,8	13	2,6	760
3 „ 25 „	0	5	1	10	2,0	765
3 „ 30 „	5	13	2,6	8	1,6	780
3 „ 35 „	0	4	2,8	6	1,2	800
3 „ 40 „	2	12	2,4	11	2,2	820
3 „ 45 „	1	16	3,2	15	3,0	820
3 „ 50 „	0	12	2,4	13	2,6	820
3 „ 55 „	1	8	1,2	11	2,2	820
4 „ 00 „	4	12	2,4	12	2,4	820
4 „ 05 „	4	8	1,6	5	1,0	820
4 „ 10 „	1	8	1,6	10	2,0	820
4 „ 15 „	3	17	3,4	19	3,6	830
4 „ 20 „	5	19	3,8	20	4,0	830
4 „ 25 „	6	23	4,6	21	4,1	810
4 „ 30 „	4	27	5,4	28	5,8	790
4 „ 35 „	5					
Beobachtungszeit = 75 Minuten	47 : 16 = 3/min	203 : 75 = 2,72/min	202 : 75 = 2,7/min	12865 : 16 = 805 Umdr./min		

Auffindung des Grunddrehzahlverlaufs. Der Fadenbruchkurve f ist zu entnehmen, daß die „zulässige“ Fadenbruchhöhe von 2,5/min zu Beginn des Abzuges unterschritten und zu Ende überschritten wird, indem beim Abspinnen der hier stark zunehmenden Fadenspannung mit der Handregelung nicht schnell genug gefolgt worden war.

Hieraus ist zu erkennen, daß für den am Regler einzustellenden günstigsten Grunddrehzahlverlauf schätzungsweise die gestrichelte Linie als die einer Faden-

bruchzahl von 2,5/min entsprechende angesehen werden kann, welche daher der Reglereinstellung zugrunde gelegt wurde. Es waren somit folgende Werte der Drehzahlen und Spinnzeiten am Regler einzustellen:

$$n_a = 680, \quad n_g = 800,$$

$$n_e = 680 \text{ Umdr./min},$$

$$T_a = 45\%, \quad T_e = 25\%.$$

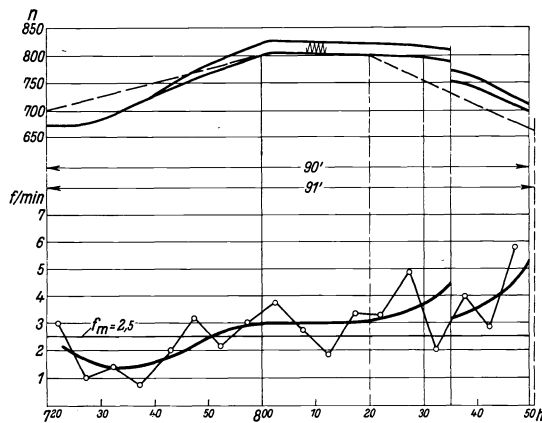


Bild 7. Kammgarn Nr. 26 metr. Abzug mit Reglereinstellung nach Grunddrehzahlverlauf Bild 6. (Bezeichnungen wie in Bild 6.)

Da an dem Proberegler die Lagenregelung nicht ganz ausgeschaltet werden konnte, um eine reine Grunddrehzahlregelung zu erreichen, wurde die Lagenregelung auf den niedrigsten Wert von etwa 20 Umdr./min eingestellt. Das Ergebnis dieser Reglereinstellung zeigt der 2. Abzug in Bild 7, dessen zugehörige Zahlentafel in bezug auf Darstellung und Ermittlung der Fadenbruch- und Drehzahlwerte grundsätzlich ebenso aufgebaut ist wie die Tafel 1, so daß eine Wiedergabe — wie auch bei den folgenden Abzügen — sich erübrigt.

Man ersieht aus dem Drehzahlschaubild, daß der Grunddrehzahlanstieg sowie die Anstiegdauer ziemlich richtig getroffen sind, die Drehzahlen während des Abspinnens

jedoch immer noch zu hoch liegen, selbst nach einer zur Zeit 8 Uhr 35 Minuten vorgenommenen Nachstellung des Abspinnformstückes. Die Fadenbruchkurve (*f*) zeigt während des Hauptspinnens einen Mehrbetrag von etwa 0,5/min, der auf die nicht völlige Ausschaltung der Lagenregelung zurückzuführen ist. Die Anspinn-drehzahl n_a kann noch höher als 670, etwa auf 700 liegen, während die Abspinn-drehzahl auf etwa 670 gesenkt werden müßte. Die sich hieraus ergebende gestrichelte Linie wurde als „günstigster Drehzahlverlauf“ sowohl für die endgültige Reglereinstellung als auch für die nachfolgende Bestimmung der Mehrproduktion angesehen.

Die Versuche ließen erkennen, daß die Eigenschaften des Reglers — schnelle, einfache Einstellung in bequemer Augenhöhe, treffsicher, so daß umständliche Berichtigungen entfallen — das praktische Auffinden eines günstigsten Grunddrehzahlverlaufes in genügend kurzer Zeit möglich machen, auch wenn man die Beurteilung der Spindeldrehzahl in bezug auf Zulässigkeit wegen der Fadenbrüche nicht auf Grund genauer Zählungen, sondern bloßer Beobachtung vornimmt.

7. Bestimmung der Mehrproduktion.

Formel. Der Flächeninhalt zwischen der Regelkurve und der Zeitachse stellt bekanntlich als Produkt ($\sum n \cdot dt$) die Summe der Spindelumdrehungen während des Abzuges dar und ist somit ein Maß für die erzeugte Garnmenge. Will man die Mehrproduktion bei Regelbetrieb gegenüber einer konstanten Drehzahl berechnen, so braucht man nur den Flächeninhalt *F* durch die Abzugsdauer zu teilen, um die mittlere Drehzahl n_m zu erhalten. Dann beträgt die Mehrproduktion gegenüber einem Betrieb mit konstanter Drehzahl (n const)

$$p = \left(\frac{n_m}{n_{\text{const}}} - 1 \right) 100 \text{ in } \%$$

Vergleichsdrehzahl. Eine sehr umstrittene Frage bei der Bestimmung der durch Geschwindigkeitsregelung erreichbaren Mehrproduktion ist die der Rechnung zugrunde zu legende Vergleichsdrehzahl. Als solche steht zur Wahl zunächst die niedrigste im Drehzahlverlauf vorkommende. Wenn man für die Einstellung des Reglers der Richtlinie gefolgt ist, daß eine bestimmte, als zulässig erachtete Fadenbruchzahl, hier 2,5/min, zu keiner Zeit überschritten werden soll, dann muß diese Richtlinie aus Gründen einer Gleichhaltung der Versuchsbedingungen auch für die Auswahl der (konstanten) Vergleichsdrehzahl Gültigkeit behalten. Unter dieser ist dann entweder die Anspinn- oder die Abspinn-drehzahl zu verstehen, je nachdem, welche von beiden die niedrigere ist. Beim Spinnen mit dieser über den ganzen Abzug gleichbleibenden niedrigsten Drehzahl (Transmissions- oder Kurzschlußmotorbetrieb) erhält man während des Hauptspinnens weniger Fadenbrüche, so daß die Spinnerin in dieser Zeit nicht voll mit Anknüpfen in Anspruch genommen und die Maschine nicht voll ausgenützt sein würde. Nur beim Anspinnen bzw. Abspinnen tritt die zulässige Zahl von Fadenbrüchen auf.

Bezieht man hiernach die Mehrproduktion auf diese niedrigst vorkommende Drehzahl $n_e = 670/\text{min}$, dann erhält man für den in Bild 7 punktierten zugrunde gelegten Drehzahlverlauf die mittlere Drehzahl zu

$$n_m = \frac{68000}{90} = 755/\text{min},$$

und die Mehrproduktion gegenüber $n_e = 670/\text{min}$ zu

$$p = \left(\frac{n_m}{n_{\text{const}}} - 1 \right) 100 = \left(\frac{755}{670} - 1 \right) 100 = 12,5 \, \%.$$

Bei der vorstehenden Ermittlung der Mehrproduktion war der — versuchstechnisch unanfechtbare — Standpunkt eingenommen worden, daß eine Auswertung von Vergleichsversuchen nur so lange einen Sinn hat, als gleiche Versuchsbedingungen in beiden Fällen vorgelegen haben. Geht man von diesem Standpunkt ab und läßt für den Vergleichsversuch mit konstanter Drehzahl eine höhere zu, die dann beim An- und Abspinnen mehr Fadenbrüche als 2,5/min ergeben wird, dann hat die Auswahl unter den verschiedenen konstanten Drehzahlen offenbar auf diejenige zu fallen, bei welcher mit dieser Betriebsweise die höchste Produktion erreicht wird. Daß eine solche „optimale“ Drehzahl vorhanden sein muß, folgt aus einer Gegenüberstellung wahrscheinlicher Grenzfälle, z. B.:

1. 500 Umdrehungen: Produktion niedrig, Fadenbrüche 0,
2. 700 „ „ „ höher, trotz Zunahme der Fadenbrüche gegenüber 1.,
3. 1000 „ „ „ unter 2., infolge stärkerer Überhandnahme des Fadenbruchs.

Die „optimale“ Drehzahl liegt höher als die zuerst beschriebene niedrigst vorkommende, und zwar so hoch, daß ein Ausgleich der Fadenbrüche gegenüber der „zulässigen“ Zahl von 2,5/min während des An- und Hauptspinnens möglich ist, wobei die Spinnerin die während des Anspinnens über 2,5/min auftretenden Fadenbrüche erst von dem Zeitpunkt an allmählich beseitigen kann, sobald die Fadenbruchzahl unter den Wert 2,5/min gesunken ist. Von diesem Augenblick an nimmt dann die Zahl der leerlaufenden Spindeln wieder ab bis auf einen der „zulässigen“ Fadenbruchzahl entsprechenden, von der Arbeitsweise der Spinnerin abhängigen Wert, so daß nunmehr alle bisher angesammelten Fadenbrüche behoben sind. Da jetzt die Fadenbrüche über den Wert 2,5/min ansteigen (Abspinnen), nimmt auch die Zahl der leerlaufenden Spindeln wieder zu bis zum Ende des Abzuges, wobei auch hier wie beim Anspinnen eine Verringerung der Garnproduktion eintritt, was sich besonders nachteilig auch in der Bildung stark verkrüppelter Kötzer äußert.

Das Fahren mit einer konstanten Drehzahl, etwa in der Gegend der „optimalen“, bedeutet also eine durchaus ungleichmäßige Beanspruchung der Arbeitsleistung der Spinnerin infolge der Verschiedenheiten im Auftreten der Fadenbrüche, wofür der Grund in dem starken Wechsel der Fadenspannungen zu suchen ist, mit dem andererseits entsprechende gütemindernde Unterschiede in der Dehnung (somit auch der Drehung), der Festigkeit, Gleichmäßigkeit und dem Aussehen des Garnes einhergehen, alles Mängel, die durch eine Geschwindigkeitsregelung vermieden werden, unter Zugabe von Mehrproduktion.

Die „optimale“ Drehzahl ist infolge ihrer Abhängigkeit sowohl von dem Verlauf der Fadenbrüche als auch dem der leerlaufenden Spindeln der Berechnung schwer zugänglich und wurde daher bei der Ermittlung der Mehrproduktion nur geschätzt, wobei die praktisch wohl kaum zu erfüllende Annahme gemacht werden mußte, daß die Spinnerin auch auf längere Dauer mehr als die hier als zulässig erachteten Fadenbrüche von 2,5/min beseitigen kann.

In Bild 8 sind auf Grund mehrerer mit diesem Kammgarn gefahrener Handabzüge, die im Anschluß an die Abzüge der Bilder 6 und 7 vorgenommen wurden, wobei infolge der seit der letzten Reinigung der Maschine ziemlich weit vorgeschrittenen Verschmutzung der Ringe eine Zunahme der durchschnittlichen Fadenbruchwerte eintrat, Fadenbruchlinien für verschiedene konstante Drehzahlen zusammengestellt. Man ersieht hieraus, daß an der Versuchsmaschine bei allen Drehzahlen die Fadenbruchzahl während des Abspinnens wesentlich höher ansteigt als beim Anspinnen und daß auf sie daher bei Entscheidung für die optimale Drehzahl bevorzugte Rücksicht genommen werden muß, weil gegen Ende des Abzuges zunehmende Fadenbrüche — anders als beim Anspinnen — nicht mehr nachgeholt werden können.

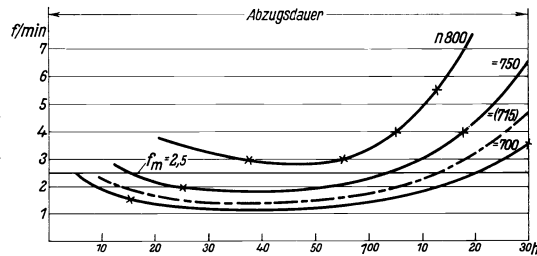


Bild 8. Kammgarn Nr. 24 metr. Fadenbruchverlauf (f) für unveränderte Trommeldrehzahlen (n). (Bezeichnungen wie in Bild 6.)

Sucht man aus dieser Linienschar (Bild 8) die optimale Drehzahl zu schätzen, so ist ein Wert von etwa 715 Umdr./min als derjenige anzusehen, bei welchem die während der Anspinnperiode auftretenden häufigeren Fadenbrüche in der Hauptspinnperiode, da hier $f < f_m$ ist, nachgeholt werden können. Gegen Ende des Abzuges steigen die Fadenbrüche erheblich über 2,5/min an, wodurch die Zahl der leerlaufenden Spindeln vermehrt wird, die bis dahin gehaltene Produktion also eine Verminderung erfährt.

Mit einer Vergleichsdrehzahl von $n_{\text{const}} = 715/\text{min}$ (statt $n_e = 670/\text{min}$) ergibt sich naturgemäß eine wesentlich geringere Mehrproduktion, nämlich nur

$$p_{\text{(opt)}} = \left(\frac{755}{715} - 1 \right) 100 = 5,6 \%$$

gegenüber = 12,5% für $n_e = 670/\text{min}$.

b) Lagendrehzahlregelung.

8. Grundsätzliches.

Begründung Mehrproduktion. Wird die Spindeldrehzahl über den ganzen Abzug gleichbleibend erhalten, so tritt bei jedem Ringbankspiel eine stetige Veränderung der Fadenspannung T auf (s. Bild 9), welche am größten wird beim Spinnen auf dem kleinen Spulhalbmesser (T_0). Betrachtet man diesen Wert als zulässig in bezug auf die dabei auftretenden Fadenbruchzahlen, so kann man diese Fadenspannung T_0 über den ganzen Ringbankhub hinweg in Anwendung bringen dadurch, daß man die Spindeldrehzahl n steigert nach einer Linie n (Bild 9), die dem Verlauf von T (für $n = \text{const}$) entspricht, wobei man eine Mehrproduktion im Ausmaß der schraffierten Fläche gewinnt.

Form Lagendrehzahlkurve, -scheibe. Die günstigste Form dieser Linie ist durch wiederholte Untersuchungen von verschiedenen Stellen als ungefähr parabelförmig bestätigt worden. Nun sind andere Spinnregler zum Teil so eingerichtet, daß man eine Annäherung an diese günstigste Kurvenform erreicht, unter Benutzung einer gewöhnlichen Herscheibe, wie sie an der Spinnmaschine zur Ringbankbewegung verwendet wird. Die Bewegung der Motorbürstenbrücke geschieht dann geradlinig

(s. Bild 10) nach den beiden Schenkeln eines Dreiecks. Durch die Verwendung eines Anschlags wird die Spitze des Dreiecks abgeschnitten, so daß ein Trapez daraus wird. Diese Annäherung ist praktisch befriedigend (vgl. Bild 10 rechts und links) im Falle geeigneter Anschlagseinstellung. Diese setzt aber Bedienungshandgriffe und eine

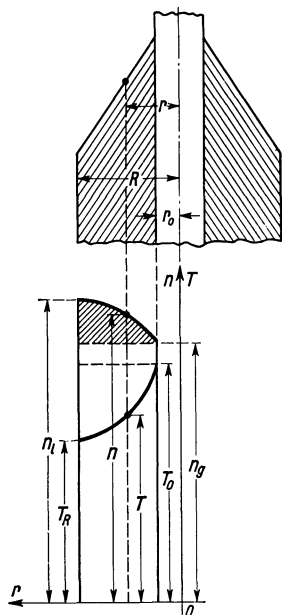


Bild 9. Drehzahlerhöhungen (n) für Spinnen auf gleichbleibende Fadenspannung (T_0) (Lagen-drehzahlreglung).

besondere Vertrautheit mit dem Regler voraus. Sofern hierauf nicht mit Sicherheit gerechnet werden kann, erscheint es dann richtiger, auf die Spinnherzbenutzung zu verzichten und eine besondere Lagenformscheibe anzuordnen, deren Umfang auszugestalten ist für einen Drehzahlverlauf genau nach Bild 10 rechts, wobei dann die Veränderung der Lagenregelungshöhe nur durch Gestängeverstellung zu bewirken ist. Dann hat man die Sicherheit, daß der richtige Kurvenverlauf stets gewahrt bleibt, und außerdem eine Reglereinstellung weniger. Letzteres ist ausschlaggebend, wenn die Bestimmung vorliegt, daß die Reglereinstellung auf Grund einer Einstellvorschrift vorgenommen werden soll, welcher Bedingung der bei den vorliegenden Versuchen benutzte neue Regler genügt.

Fadenbruchverlauf. Der Lagenregelungstheorie liegt der Gedanke zugrunde, daß bei ihrer Durchführung die Fadenbruchzahl während des Verlaufs eines Ringbankspiels nicht größer ausfallen wird als bei Betrieb mit unveränderter Grunddrehzahl, wenn nur der für die Gleichhaltung der Fadenspannung zugrunde gelegte Fadenspannungswert T_0 (Bild 9) nirgends überschritten wird. Diese Auffassung ist insofern nicht ganz richtig, als nach der Heraufsetzung aller Fadenspannungen bis auf T_0 die mit ihrer Höhe zunehmende Gelegenheit zur Fadenbruchbildung tatsächlich häufiger geboten wird. Es ist also bei Übergang zur Lagenregelung eine gewisse Zunahme der Fadenbrüche zu erwarten; diese hält sich aber im Vergleich zu der damit gewinnbaren Mehrproduktion in bescheidenen Grenzen, solange man — bei einer allmählichen Steigerung der Lagendrehzahl — den T_0 entsprechenden Wert noch nicht überschritten hat.

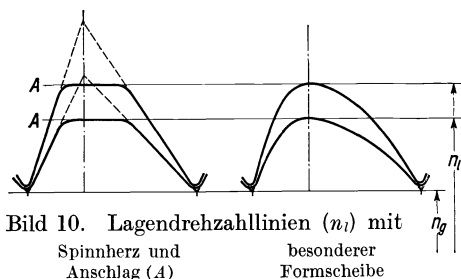


Bild 10. Lagenzahlverläufe (n_i) mit Spinnherz und Anschlag (A) besonderer Formscheibe

Erst dann wird die Fadenbruchzahl in einer auffällig merkbaren Weise in die Höhe gehen; hierin ist also eine praktisch brauchbare Beurteilungsmöglichkeit zu erblicken dafür, ob die günstigste Lagen-drehzahlhöhe erreicht oder schon überschritten ist. Ziel der nachfolgenden Versuche war, auf diese Weise die Bestimmung der günstigsten Lagenregelungshöhe an Beispielen

praktisch durchzuführen und den Hergang in Form eines durch Beifügung der betreffenden Versuchsangaben nachprüfbar gemachten Verfahrens darzustellen.

9. Reglereinstellung.

Abzüge mit Handregelung. Da die Partie Kammgarn 26 metr. zu Ende war, konnte die Ermittlung dieser günstigsten Lagenregelung im Anschluß an die Um-

stellung des Reglers auf den günstigsten Grunddrehzahlverlauf für dieses Garn nicht mehr vorgenommen werden. Es mußte daher für die aus Kammgarn Nr. 32 metr. bestehende neue Partie nach dem oben beschriebenen Verfahren durch Handabzug der günstigste Grunddrehzahlverlauf neu aufgefunden werden. Zu diesem Zwecke wurde ein Abzug mit Regelung von Hand in Stufen bis zur Mitte gefahren (Bild 11). Nach dem Fadenbruchverlauf (Bild 11) erwies sich der gewählte Drehzahlanstieg als richtig gegriffen.

Auffindung des günstigsten Lagendrehzahlverlaufs. Alsdann wurde der Regler eingeschaltet, um gegebenenfalls auch schon die günstigste Lagenregelung ermitteln zu können. Während je 20 Minuten wurden Lagenregelungswerte von 22, 36 und 50 Umdr./min bei gleicher Grunddrehzahl $n_g = 815$ eingestellt und hierfür die Fadenbruchzahlen ermittelt, als Mittel aus je 3—4 Aufnahmen. Die ausgezogenen Kurvenstücke in Bild 11 durch die Punkte 842, 856, 870 sollen den mutmaßlichen Fadenbruchverlauf andeuten unter Voraussetzung völliger Gleichmäßigkeit im Vor-

garn und in den übrigen spinntechnischen Verhältnissen. Hier ist darauf hinzuweisen, daß derartige Versuche nur ausführbar sind mit einem Regler, bei dem der Übergang von Lagenregelung Null auf beliebige Werte durch bloße Verstellung von Gestängen bequem in Augenhöhe vollziehbar ist. Kurz vor Beendigung dieser Lagenregelungsversuche wurde der Regler wieder abgestellt und nochmals 15 Minuten lang mit reiner Grunddrehzahl gefahren. Gegenüber dem Wert 2,5/min in der Mitte des Abzuges ist hierbei auch die Fadenbruchzahl für reine Grundregelung, da das Gebiet des Abspinnens schon erreicht war, bis auf etwa 5/min gestiegen, so daß man den Fadenbruchverlauf während des ganzen Abspinnens für die Grunddrehzahl 815 durch die gestrichelte Kurve (820) darstellen kann. Auf Grund des gewonnenen Fadenbruchverlaufes wurde der gestrichelt gezeichnete Drehzahlverlauf von 800 bis herunter auf 650 als der für die Reglereinstellung günstigste angesehen und eingestellt.

Die für die verschiedenen Lagenregelungswerte ermittelten Fadenbruchzahlen lassen eine ziemlich erhebliche Zunahme der Fadenbrüche mit der Lagendrehzahllhöhe erkennen, die sich ausdrückt in dem wachsenden Unterschied gegenüber der Fadenbruchzahl bei reiner Grunddrehzahlregelung. Für die Auswahl einer günstigsten Lagendrehzahl sind diese Versuche noch nicht zu verwerten, weil man dabei schon zu sehr in das Abspinngebiet hineingeraten war und deshalb schon auf der Grunddrehzahl mit den Fadenbrüchen zu hoch lag.

An einem neuen Abzug (Bild 12) wurde daher der Einfluß verschieden großer Lagenregelung bereits vom Beginn des Hauptspinnens an untersucht, da während des Hauptspinnens erfahrungsgemäß für gleichbleibende Grunddrehzahl die Fadenbruchzahl ebenfalls als einigermaßen gleichbleibend angenommen werden kann. Um jedoch für die Grunddrehzahl die Fadenbruchhöhe dauernd überprüfen zu

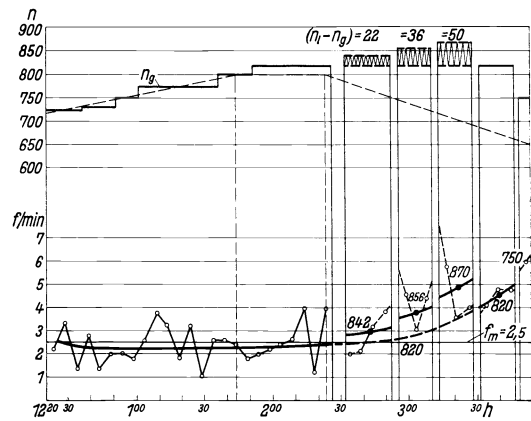


Bild 11. Kammgarn Nr. 32 metr. Abzug mit Regelung von Hand zur Ermittlung des Lagendrehzahlunterschiedes ($n_l - n_g$) und des Grunddrehzahlverlaufes n_g .

können, wurde zeitweise der Regler abgestellt und nur mit der Grunddrehzahl gefahren. Auch hier wurde mit dem letzten Teilversuch (Lagenregelung 22/min s. Bild 12) schon wieder das Gebiet des Abspinnens berührt, was aus dem Ansteigen der Fadenbruchlinie für Grunddrehzahl $n = 800$ zu entnehmen ist. Daraus erhellt

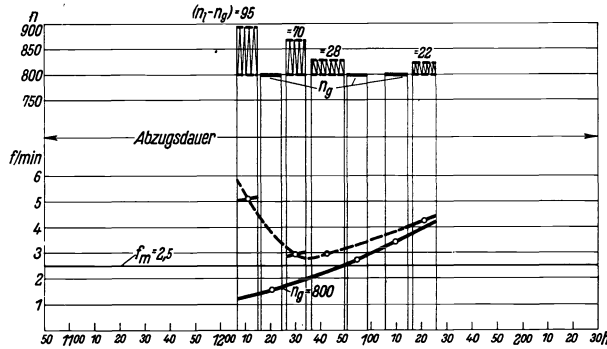


Bild 12. Kammgarn Nr. 32 metr. Wechselnde Einstellung des Lagenzahlunterschiedes ($n_l - n_g$) zur Ermittlung des Bestwertes.

von $f = \approx 5$ /min ergab (s. Bild 12), also offensichtlich zu hoch lag. Bei Heruntergehen auf $(n_l - n_g) = 70$ /min zeigte sich eine Annäherung bereits auf etwa 1 Fadenbruch an die für reine Grunddrehzahlregelung $n_g = 800$ gefundene Linie. Mit weiterer Verkleinerung von $(n_l - n_g)$ auf 28 und 22/min wurde dieser Abstand nicht mehr nennenswert verringert,

wieder das Erfordernis schnellster Verstellbarkeit des Reglers besonders für solche kurzzeitige Probeabzüge, bei denen die Hauptspinn-dauer schnell abgelaufen ist. Dieser Umstand hat aber, wie weiter gezeigt wird, die Erreichung des Zieles, zu einer einwandfreien Entscheidung über die günstigste Lagen-drehzahl zu gelangen, nicht gestört.

Angefangen wurde mit einer hohen Lagenregelung $(n_l - n_g) = 95$ /min, die eine Fadenbruchzahl

$$(n_l - n_g) = 70/\text{min}$$

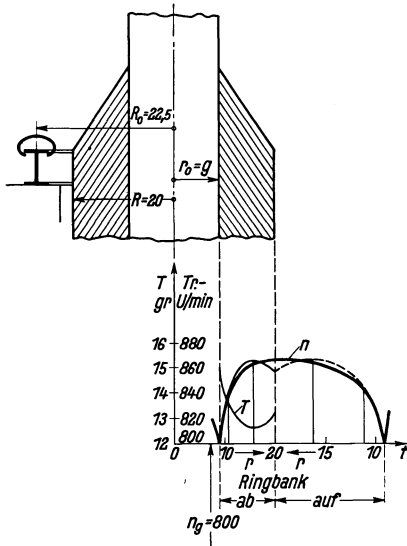


Bild 13. Fadenspannungen und Lagen-drehzahlen nach Zahlentafel 3.

stellt also nach Bild 12 denjenigen Lagenregelungswert dar, bei dessen Überschreitung sich die nach früherer Darlegung zu erwartende entschiedene Aufwärtswendung der Fadenbruchlinie einstellt. Dieser Wert stimmt sowohl mit dem durch Rechnung gefundenen als auch dem von der Spinnereileitung angegebenen Erfahrungswert überein.

Ein Verfahren zur rechnerischen Ermittlung von Höhe und Form der Lagenzahlkurve ist vom Verfasser in Melliands Textilber. 1929 H. 8—11 angegeben.

Rechnerische Bestätigung. Diese Berechnung ist für den vorliegenden Fall auf Zahlentafel 3 durchgeführt, und zwar zunächst die Berechnung der Fadenspannung T in Abhängigkeit vom Aufwindhalbmesser für eine Trommeldrehzahl von $n = 800$ /min und ein Ringbankspiel während des Hauptspinnens. — Dann sind für den dabei höchstvorkommenden Fadenspannungswert T_0 von ≈ 15 g die nach den obigen Ausführungen anzusetzenden Lagen-drehzahlen in Abhängigkeit vom Aufwindhalbmesser bestimmt. Die Reibungswertziffer μ ist aus Bild 6 der erwähnten Melliand-Veröffentlichung entnommen, jedoch zu etwa 10 % höher, als dort angesetzt, mit Rücksicht darauf,

Diese Berechnung ist für den vorliegenden Fall auf Zahlentafel 3 durchgeführt, und zwar zunächst die Berechnung der Fadenspannung T in Abhängigkeit vom Aufwindhalbmesser für eine Trommeldrehzahl von $n = 800$ /min und ein Ringbankspiel während des Hauptspinnens. — Dann sind für den dabei höchstvorkommenden Fadenspannungswert T_0 von ≈ 15 g die nach den obigen Ausführungen anzusetzenden Lagen-drehzahlen in Abhängigkeit vom Aufwindhalbmesser bestimmt. Die Reibungswertziffer μ ist aus Bild 6 der erwähnten Melliand-Veröffentlichung entnommen, jedoch zu etwa 10 % höher, als dort angesetzt, mit Rücksicht darauf,

daß für Läufer von Kammgarnringspinnmaschinen ein höherer Reibungswiderstand, verglichen mit der Verspinnung von Baumwolle, vorauszusetzen ist, infolge der mehr oder weniger stets vorhandenen Verschmutzung der Ringe durch einen aus Wolf fett und Spinnstaub bestehenden Überzug. Das Rechnungsergebnis von 65 Umdrehungen stimmt mit dem versuchsmäßig Gewonnenen ziemlich genau überein (s. Bild 13).

Zahlentafel 3.

Kammgarn $N_m = 32$; Drehung/m $\delta \sqrt{N} = 600$. Läufergewicht $G_L = 0,08$ g; Abmessungen siehe Bild 13.

I. Berechnung der Fadenspannungen in Abhängigkeit vom Windehalbmesser für $n = 800$ Trommel Umdr./min bei Ansatzbeendigung:

Spindeldrehzahl $n_{sp.} = 800 \cdot \frac{200 + 3}{28 + 3} - 2\%$ Schlupf = 5100 Umdr./min.

Ringreibungswertziffer für Wolle $\mu_1 = 0,5$.

Aufwindehalbmesser	$r =$	0,009	0,011	0,016	0,02	m
$\sin \alpha = \frac{r}{R_0}$	$=$	0,4	0,5	0,7	0,7	—
$F(\alpha)$ nach Bild 6 ¹⁾	$=$	3,2	3,6	3,9	3,8	—
Nach Gl. (9) ¹⁾ : $b = \sqrt{\frac{N \cdot 0,59 \cdot G_L \cdot R_0}{9,81 \cdot F(\alpha)}}$	$=$	0,207	0,195	0,187	0,190	m
Läuferdrehzahl $n_0 = \frac{n}{1 + \frac{1}{2rn \cdot \delta \cdot \sqrt{N}}}$	$=$	4950	4970	5020	5050	Umdr./min
Nach Gl. (1) ¹⁾ : $T = \left(\frac{b \cdot n_0}{61}\right)^2 \cdot \frac{1}{0,59 \cdot N}$	$=$	15,0	13,5	12,6	13,2	g

II. Berechnung der Lagendrehzahlen für wechselnde Halbmesser auf Grund höchstzulassener Fadenspannung $T_0 = 15$ g:

Spindeldrehzahl nach Gl. (10) ¹⁾ :					
$n_{sp.} = \frac{61}{2\pi} \sqrt{\frac{T \cdot 9 \cdot F(\alpha)}{R_0 \cdot G_L}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha \cdot 2 \cdot R_0 \cdot \pi \cdot \delta \cdot \sqrt{N}}\right)$					
$= 2670 \sqrt{F(\alpha)} \cdot \left(1 + \frac{0,0118}{\sin \alpha}\right)$	$=$	5120	5410	5550	5490 Umdr./min
Trommeldrehzahl $n_{tr.} = n_{sp.} \cdot \frac{31}{203} + 2\%$	$=$	800	842	865	855 „

Nachdem nun für das vorliegende Garn auf Grund des Abzuges nach Bild 12 die günstigste Lagenregelung zu $65 \div 70$ Umdr./min ermittelt ist, sind alle für die Einstellung des Reglers auf den günstigsten Drehzahlverlauf erforderlichen Schaubildgrößen (vgl. Bild 1) festgelegt, so daß nun sowohl der in dem Bild 11 gestrichelt gezeichnete günstigste Grunddrehzahlverlauf mit den Werten $n_a = 720$, $n_g = 800$ und $n_e = 650$ $T_a = T_e = 40\%$ von 212/min = 85/min als auch die Lagenregelung von $(n_l - n_g) = 65$ Umdr./min. eingestellt werden kann.

Das Ergebnis zeigt für den nächsten Abzug das Bild 14. Man erkennt aus dem Drehzahlverlauf, daß die auf Grund der Einstellvorschrift vorgenommene Einstellung der Grunddrehzahl nur wenig von $n_g = 800$ abweicht. Sowohl die An- und Abspinn-dauer als auch die Lagenregelung ist richtig getroffen. Die Abspinndrehzahl ist noch

¹⁾ Siehe Aufsatz F. Oertel: Über die Geschwindigkeitsregelung bei Ringspinnmaschinen. Mel-liand Textilber. 1929 H. 8—11.

etwas zu tief geraten, und man sieht, daß die Lagendrehzahlregelung hier zu schnell verschwindet, infolgedessen die durch sie erreichbare Mehrproduktion unnötig niedrig ausfällt, anscheinend im Aufbau des Spinnreglers ein Mangel, auf dessen Beseitigung später eingegangen wird.

Aus dem Fadenbruchverlauf dieses Abzuges kann man entnehmen, daß die Anspinnendrehzahl noch etwas höher gewählt werden könnte, ferner könnte die Anspinn-

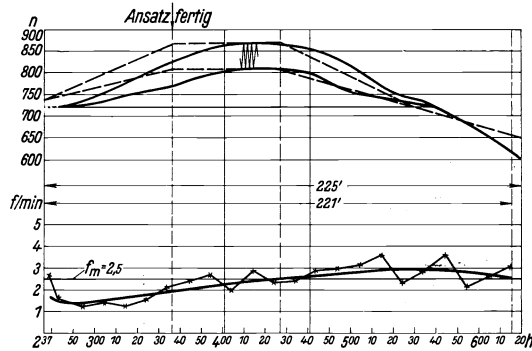


Bild 14. Kammgarn Nr. 32 metr.
Abzug durchgesponnen mit Regler.
Einstellung nach Grunddrehzahlverlauf Bild 11.
Einstellung nach Lagendrehzahlverlauf Bild 12.

dauer etwa bis zur Ansatzbeendigung (25 %) verkürzt, hingegen die Abspinn-
dauer auf etwa 50 % der ganzen Abzugs-
dauer erhöht werden. Diese lange An-
und lange Abspinn-
dauer ist für Kamm-
garnmaschinen ohne Fadentrenner be-
merkenswert zum Unterschied zu den
sonst bei Baumwollmaschinen üblichen
Werten¹⁾. Der in das Drehzahl-
schaubild dieses Abzuges (Bild 14) gestrichelt
eingezeichnete verbesserte Drehzahl-
verlauf wäre nunmehr als endgültiger, gün-
stigster für weitere Abzüge beizubehalten.
Die gegebenenfalls erforderliche Anpas-
sung an die nach den ersten Abzügen

infolge Verschmutzung der Ringe auftretende Fadenbruchzunahme kann am ein-
fachsten durch Tieferlegen der ganzen Drehzahl-
linie (allmähliches Senken der An-
spinnendrehzahl n_a an der Verstelldose des Motors) vorgenommen werden.

10. Mehrproduktion.

Vergleichsdrehzahl. Nunmehr ist die Frage nach der gesamten Mehrproduk-
tion infolge der Geschwindigkeitsregelung zu beantworten, und der Anteil der Lagen-
regelung daran von dem der reinen Grunddrehzahlregelung zu trennen. Zu deren Be-
urteilung kann man ebenso, wie auf S. 111—113 besprochen, verschiedene Bezugs-
drehzahlen zugrunde legen.

Nimmt man die niedrigst vorkommende, das ist in diesem Falle die Abspinn-
drehzahl $n_p = 650$ (Bild 14), dann ergibt sich dafür aus der Gesamtfläche des ge-
strichelten Drehzahlverlaufs, zu dem für gleiche Schaubildfläche eine Spinn-
dauer

$$T = 221/\text{min}$$

gehört, eine mittlere Drehzahl

$$n_m = \frac{17580}{221} = 795/\text{min}$$

und eine gesamte Mehrproduktion

$$p = \left(\frac{795}{650} - 1 \right) 100 = 22,4\%,$$

ebenso für die Grunddrehzahlregelung allein die mittlere Drehzahl

$$= \frac{168000}{221} = 762/\text{min},$$

¹⁾ Vgl. Melliand Textilber. 1929 S. 845, Bild 19.

die Mehrproduktion

$$p_g = \left(\frac{762}{650} - 1 \right) 100 = 17\%,$$

somit für die Lagenregelung allein $p_l = 5,4\%$.

Diese Rechnung ist sinngemäß auch für die optimale Vergleichsdrehzahl (vgl. S. 113) durchzuführen. Für deren Ermittlung wurde hier eine verlässliche Grundlage zu schaffen gesucht dadurch, daß bei einem von Hand gefahrenen Abzug die Drehzahl in der aus Bild 15 ersichtlichen Art stufenweise geändert wurde, so daß allen zugehörigen Fadenbruchlinien annähernd gleiche Betriebsverhältnisse zugrunde lagen. Als optimale Drehzahl wurde unter Berücksichtigung der auf S. 112 erörterten Zusammenhänge

$$n_{\text{opt.}} = 730/\text{min}$$

geschätzt. Damit ergibt sich dann die gesamte Mehrproduktion zu

$$p = \left(\frac{795}{730} - 1 \right) 100 = 9\%,$$

für Grunddrehzahlregelung allein zu

$$p_g = \left(\frac{659}{630} - 1 \right) 100 = 4,5\%,$$

somit für die Lagenregelung allein $p_l = 4,5\%$.

Dies Ergebnis erscheint nicht sehr befriedigend, was auch nicht wundert, wenn man sich in Bild 14 die verhältnismäßig kurze Hauptspinndauer vor Augen hält, die hauptsächlich daher stammt, daß das Abspinnen nach einer in vielen Ringspinnereien anzutreffenden Gepflogenheit mit bis auf Null abnehmender Lagenregelung betrieben wurde.

11. Abspinnen mit Lagenregelung.

Hierzu liegt spinn technisch eigentlich keine Veranlassung vor. Wohl wird beim Ansatzbeginn zunächst während des ganzen Ringbankspiels auf die nackte Hülse gewickelt, dabei wird der Außendurchmesser erst allmählich größer. Hier ist es also berechtigt, auch die Lagenregelung von Null an allmählich bis auf ihren Höchstwert zunehmen zu lassen. Beim Abspinnen dagegen bleibt die regelmäßige Durchmesseränderung bestehen und wird sogar zunehmend noch etwas größer. Daß hier ein Fadenspannungsunterschied bis zu Ende vorhanden bleibt, kann man am Ballon sehen und auch mit dem Finger deutlich fühlen.

Es scheint danach spinn technisch geboten, die während des Hauptspinnens als passend befundene Lagenregelungshöhe auch während des Abspinnens beizubehalten

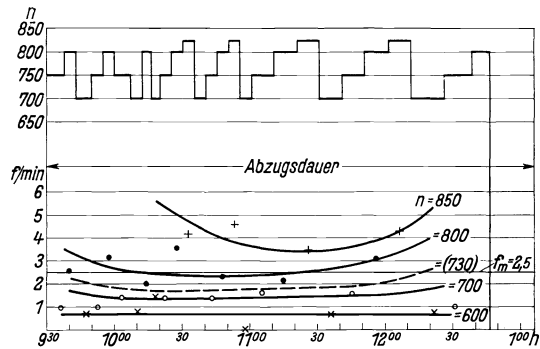


Bild 15. Kammgarn Nr. 32 metr. Fadenbruchverlauf (f) für unveränderte Trommeldrehzahlen (n).

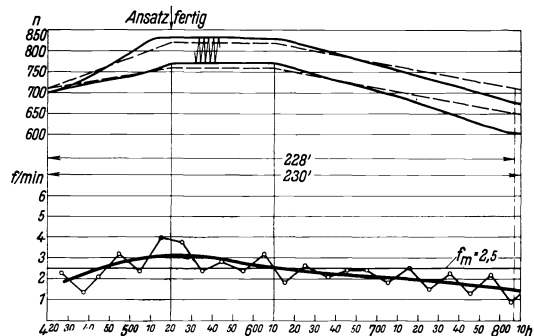


Bild 16. Kammgarn Nr. 32 metr. Abzug mit Reglereinstellung nach Bild 14, jedoch Abspinnen mit unverkürzter Lagenregelung.

mit einer geringen Zunahme nach dem Abzugende hin und in die endgültige Reglerausführung noch ein Sperrglied einzufügen, durch welches das Kleinerwerden der Lagenregelung beim Abspinnen verhindert wird.

Das wurde durchgeführt an einem neuen Abzug (Bild 16), in dem nach dem Hauptspinnen der die Lagenregelung begrenzende Anschlag des Spinnreglers herausgenommen wurde. Die Richtigkeit der Überlegung wird durch den Fadenbruchverlauf bestätigt, auf Grund dessen man zum Schluß die Drehzahlen noch hätte etwas höher legen können. Die hiernach noch etwa in Frage kommenden geringen Berichtigungen sind durch die gestrichelten Drehzahllinien angedeutet, nach denen sich nun eine Mehrproduktion ergibt mit

$$n_m = \frac{174600}{228} = 766/\text{min},$$

insgesamt zu

$$p = \left(\frac{766}{650} - 1\right) 100 = 17,8\% \quad \text{mit} \quad n_e = 650$$

und

$$p_{\text{opt.}} = \left(\frac{766}{690} - 1\right) 100 = 11\% \quad \text{mit} \quad n_{\text{opt.}} = 690.$$

Betreffs Wahl dieser Optimaldrehzahl ist hinzuzufügen, daß bei — im übrigen ungeänderter Regeleinrichtung — für den Abzug nach Bild 15 die ganze Drehzahlhöhenlage um rd. 5% gesenkt werden mußte, wenn die mittlere Fadenbruchzahl $f_m = 2,5/\text{min}$ nicht überschritten werden sollte. Dies ist darauf zurückzuführen, daß inzwischen die Verschmutzung der Maschine, insbesondere der Ringe und Läufer, durch Wollfett so weit zugenommen hatte, daß die dementsprechende (in der Spinnerei bekannte und zwischen zwei Maschinenreinigungen teilweise bis auf 10% laufend bei allen Maschinen vorgenommene) Drehzahlsenkung nicht mehr aufzuschieben war. Somit war auch von der für Abzug Bild 15 ermittelten optimalen Drehzahl ein Abzug von 5%, also von $n_{\text{opt.}} = 730$ auf 690 zu machen.

Weiterhin findet sich für die Mehrproduktion durch Grunddrehzahl allein

$$p_g = \left(\frac{728}{690} - 1\right) 100 = 5,5\%.$$

Somit für Lagenregelung allein

$$p_l = 5,5\%.$$

Auf Zahlentafel 4 sind die aus allen Versuchen ausgewerteten Mehrproduktionsziffern zusammengestellt.

Zahlentafel 4.

Mehrproduktion (p) durch Regelung gegenüber unveränderten Bezugsdrehzahlen (n_e bzw. $n_{\text{opt.}}$).

Mehrproduktion p durch \rightarrow				Grund-	Lagen-	Zu-
Kammgarn	Schau-	Bezugsdrehzahl	drehzahl-	drehzahl-	sammen	
	bild		regelung	regelung	p	
			p_g	p_l		
Nr. 26 metr.	7	niedrigst vorkommende $n_e = 670$	12,5%	—	12,5%	
		optimale $n_{\text{opt.}} = 715$	5,6%	—	5,6%	
Nr. 32 metr.	14	niedrigst vorkommende $n_e = 650$	17%	5,4%	22,4%	
		optimale $n_{\text{opt.}} = 730$	4,5%	4,5%	9%	
Nr. 32 metr.	16	niedrigst vorkommende $n_e = 650$	11,5%	6,3%	17,8%	
		optimale $n_{\text{opt.}} = 690$	5,5%	5,5%	11%	

c) Ergebnisse.

Die Ergebnisse können insofern als verhältnismäßig verlässlich angesprochen werden, als alle wesentlichsten Einfluß nehmenden Umstände bei den Versuchen laufend in nachprüfbarer Form aufgezeichnet worden sind. Es zeigt sich, daß bei sachgemäßer Reglereinstellung und voller Lagenregelung während des Abspinnens die mit der Geschwindigkeitsregelung erzielte Gesamtmehrproduktion sich einigermaßen gleichmäßig auf Grund- und Lagendrehzahlregelung verteilt. Im ganzen wird man, unter ungünstigsten Voraussetzungen für die Auswertung (Zugrundelegung der optimalen Drehzahl für den Produktionsvergleich), mindestens auf 10 % durchschnittliche Mehrproduktion rechnen können. — In Wirklichkeit aber auf mehr (schätzungsweise 12,5—15 %), da man bei nicht mit Reglern versehenen Ringspinnmaschinen bzw. solchen mit unverändertem Drehzahlverlauf nicht darauf rechnen kann, daß jede immer genau auf ihre oben erläuterte optimale Drehzahl eingestellt sein wird. Dies trifft noch in viel höherer Größenordnung zu bei Maschinen, für deren Drehzahlführung überhaupt nur eine Veränderung in mehr oder weniger groben Stufen vorgesehen ist, nämlich beim Antrieb durch polumschaltbare Drehstrommotoren, Kurzschlußmotoren oder Transmissionen mit Riemenscheibenauswechslung. Letztere bedeutet unter allen Umständen eine Zeit- und Produktionseinbuße, entweder durch den Zeitverlust bei der lästigen Durchführung oder durch die Abweichungen von der optimalen Drehzahl, falls die Ersatzriemenscheiben nach Anzahl und Durchmesser nicht genügend unterteilt sind, also überhaupt von der Riemenscheibenauswechslung aus Bequemlichkeit — wie häufig — Abstand genommen wird. Gegenüber solchem Betrieb kann man für eine Maschine mit einwandfreier Lagenregelung getrost 15—20 % Mehrproduktion einsetzen.

III. Ausblick.

Bei den Versuchen hat sich die eingangs gezeigte Regleranordnung in bezug auf Schnelligkeit und Treffsicherheit der Einstellung bestens bewährt. Die Einstellangaben können vom Spinnereibüro aus an Hand der Einstellvorschrift gemacht und von den Saalaufsehern die entsprechenden Einstellungen ohne lange Überlegungen bequem in Augenhöhe ausgeführt werden. Berichtigungen der Einstellung sind jeweils nur in ganz geringem Umfange nötig, die Art ihrer Ausführung ist auf Grund der Regleranordnung unmittelbar einleuchtend, stellt also keinerlei Anforderungen an die Auffassungsgabe des Personals. Mit dem Regler ist man in der Lage, jeder kleinsten Änderung der spinntechnischen Verhältnisse an der Maschine (Vorgarngüte, Feuchtigkeitsverhältnisse, Reinigungszustand der Maschine u. a.) sofort zu folgen, und zwar auch auf bloße Beobachtungen an der Maschine hin durch Augenschein, sofern man von der etwas umständlichen Fadenbruchzählung absehen will. Die richtige Einstellung des Reglers ist nicht mehr Gefühlssache, sondern nach klaren Gesichtspunkten leicht zu überprüfen.

Die Ermittlung des richtigen Drehzahlverlaufes durch Fadenbruchzählung hat aber viel für sich. — Bei bloßer Schätzung kann man sich leicht bis 10 % und darüber irren. Auf Grund der vorliegenden Versuche scheint es empfehlenswert, Fadenbruchermittlungen in der gezeigten Weise wenigstens für eine Anzahl von Hauptgarnsorten durchzuführen und die Ergebnisse geordnet nach den einflußnehmenden spinntechnischen Veränderlichen (Rohstoffart, Garnnummer, Drehungsgrad, Ring-

durchmesser, Läufer-Nr. usw.) schaubildlich zusammenzustellen, da sich dann für dazwischen liegende Verhältnisse die entsprechenden Drehzahlverlaufsbilder leicht erschließen lassen.

Hiernach muß man zu dem Schluß kommen, daß sich eine solche Organisierung der Geschwindigkeitsregelung unbedingt lohnen wird, weil in diesem Falle die nach Zahlentafel 4 bestimmte zu erzielende Gesamtmehrproduktion von durchschnittlich mindestens 10 % tatsächlich stets da sein wird, wogegen sie bei einer nicht straff und sachgemäß durchgeführten Behandlung der Reglerfrage, vor allen Dingen auch bei Verwendung nicht wirklich vollwertiger Regler, höchstens bei Abnahmeversuchen erreicht werden, in Wirklichkeit also nur auf dem Papier stehenbleiben wird.

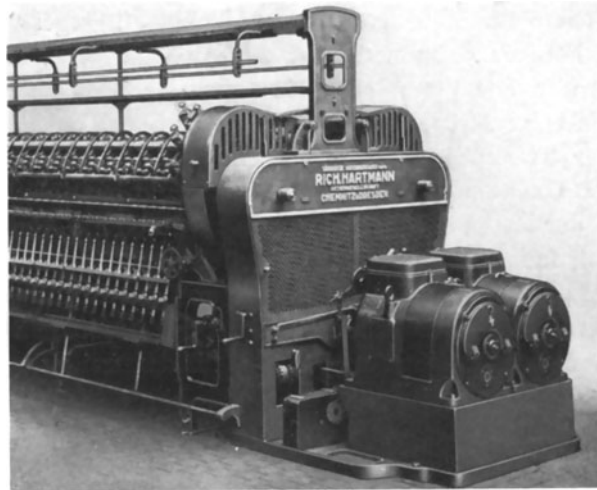


Bild 17.

Die Versuche zeigen weiterhin die verhältnismäßig großen Schwierigkeiten, wirklich einwandfreie und technisch vergleichsfähige Ziffern über die erreichbare Mehrproduktion zu erhalten. Unbeschadet dessen ist aber die technische Zweckmäßigkeit der Geschwindigkeitsregelung ganz offenbar, weil man nur damit die Maschine wirklich in die Hand bekommt. Zur Ringspinnmaschine gehört ein ordentlicher Spinnregler als notwendiges Zubehör genau so wie ein brauchbarer Fliehkraftregler zur Dampfmaschine.

Bild 17 zeigt eine Kammgarn-Ringspinnmaschine, angetrieben durch Drehstromkommutator-Nebenschlußmotoren mit einem Spinnregler (älterer Bauart).

Zusammenfassung.

Im Anschluß an einen früheren Aufsatz¹⁾, der die Steuerung von Arbeitsmaschinen auf günstigste Betriebsweise mit Hilfe mechanischer Regler am Beispiel der Ringspinnmaschine behandelt, wird besprochen, wie durch Neuerungen am Spinnregler der Aufbau einer einfachen Einstellvorschrift möglich wird, welche die Einstellung

¹⁾ S. Fußnote S. 103.

auf einen bestimmten Drehzahlverlauf treffsicher und ohne besondere Ansprüche an die Auffassungsgabe der Bedienung durchzuführen erlaubt. An Hand einer an Kammgarn-Ringspinnmaschinen aufgenommenen Versuchsreihe wird gezeigt, wie ein solcher Regler benutzt werden kann, um die in bezug auf Drehzahlführung günstigste Betriebsweise der Arbeitsmaschine unter Ausschaltung der Nebeneinflüsse schrittweise zu ermitteln, wobei vertiefte Einblicke in die Technologie des Arbeitsvorgangs und die an den Regler zu stellenden Anforderungen gewonnen werden. Das Ergebnis einer solchen zwangläufigen Drehzahlführung wird herausgeschält und die wirtschaftliche Bedeutung einer weiteren Durchbildung und betriebsmäßigen Organisierung des Regelverfahrens gewürdigt.

Über die magnetischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt und einigen Legierungen bei höheren Temperaturen.

Von Heinrich Kühlewein.

Mit 23 Bildern.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 20. Juni 1931, mit Ergänzung am 28. Januar 1932.

Verschiedene in letzter Zeit erschienene Arbeiten brachten die Erkenntnis, daß mit steigender Temperatur der Verlauf der magnetischen Eigenschaften beim Verschwinden des Ferromagnetismus — beim Curiepunkt — wie auch beim Durchlaufen polymorpher Umwandlungen erheblich komplizierter ist, als bisher angenommen wurde.

R. Forrer¹⁾ erkannte, daß mit steigender Temperatur beim Verschwinden des Ferromagnetismus zwei bestimmte Temperaturen von Bedeutung sind, nämlich

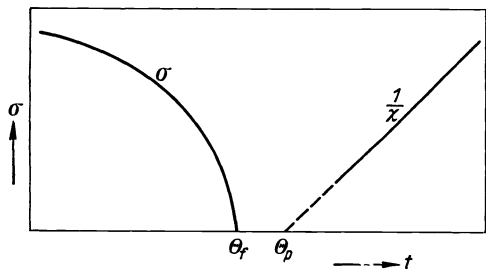


Bild 1.

der ferromagnetische (Θ_f) und der paramagnetische (Θ_p) Curiepunkt. Beim ferromagnetischen Curiepunkt (Θ_f) wird die spontane Magnetisierung (σ) bzw. die Remanenz (B_r) gleich Null, während die kritische Feldstärke, d. h. die Feldstärke, bei der z. B. bei gezogenem Nickeldraht die vollständige „Umklappung“, der große Barkhausen-sprung, einsetzt bzw. die Koerzitivkraft (H_c) extrapoliert erst bei einer höheren Tempe-

ratur gleich Null wird. Bild 1 gibt diesen Befund schematisch wieder. Bei der Extrapolation des Curie-Weißschen Gesetzes $\chi \cdot (T - \Theta) = C$ für $1/\chi = 0$ erhält man den paramagnetischen Curiepunkt Θ_p ; er ist nach Forrer identisch mit dem extrapolierten Punkte des Nullwerdens der kritischen Feldstärke bzw. der Koerzitivkraft. Hierbei ist immer Θ_p oberhalb ($10-50^\circ$) von Θ_f . Bei Eisen-Kobalt-Legierungen beobachtet man jedoch ein plötzliches Absinken der Magnetisierbarkeit. Es soll, nach Forrer, in diesem Falle Θ_p unterhalb Θ_f liegen, und daher fällt, weil die freie „Umklappbarkeit“, die oberhalb Θ_p herrscht, unverträglich mit ferromagnetischer Induktion ist, die Magnetisierbarkeit im paramagnetischen Curiepunkt plötzlich zu Null ab (Bild 2). H. Masumoto²⁾ findet diesen eben beschriebenen Steil-

¹⁾ R. Forrer: J. Physique Radium Bd. 1 (1930) S. 49 — C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 188 (1929 II) S. 1242.

²⁾ H. Masumoto: Sci. Rep. Tôhoku Univ. Bd. 15 (1926) S. 449.

abfall der Magnetisierbarkeit an Eisen-Kobalt-Legierungen mit einem Kobaltgehalt von etwa 20—70 %.

Eine weitere ferromagnetische Eigentümlichkeit bei höheren Temperaturen ist die Entdeckung Masumotos, daß die Magnetisierbarkeit von hexagonalen Kobaltlegierungen mit steigender Temperatur bei der Umwandlung des dichtgepackten hexagonalen Gitters in das flächenzentriert kubische Gitter stark ansteigt.

Die angeführten Versuche von Forrer und Masumoto wurden an Probestäben oder Drähten gemacht, deren Entmagnetisierungsfaktor nicht vernachlässigt werden durfte. Es seien daher im nachfolgenden einige Versuche beschrieben, die mit der für diesen Zweck geeigneten ballistischen Ringmeßmethode¹⁾ ausgeführt wurden.

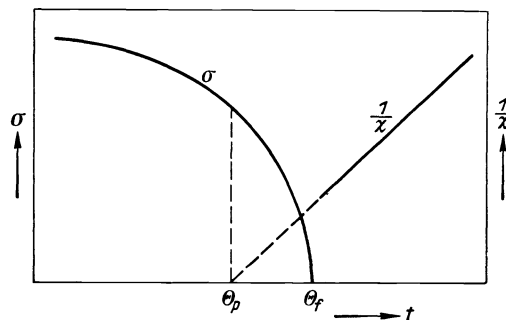


Bild 2.

Es kamen durchweg Blechringe zur Verwendung, deren Durchmesser 60 und 45 mm betragen. Die Blechdicke war etwa 0,35 mm.

Nickel.

Bei den Versuchen an Nickel (Nickel mit ca. 1 % Mn) ergab sich eine ziemlich große Temperaturhysterese hinsichtlich des Curiepunktes, deren Ursache wahrscheinlich durch den Mangengehalt bedingt ist.

Die Hystereseschleifen werden mit steigender Temperatur ganz normal immer schmaler. In der Nähe des Curiepunktes ist schließlich bei steigender und fallender Temperatur die ganze Schleifenöffnung auf den Koordinatenanfangspunkt zusammengedrängt, d. h. der Sättigungsanstieg ist reversibel. Bild 3 zeigt eine solche Schleife als typisches Beispiel. Es ist zu beachten, daß in der Zeichnung der Ordinatenmaßstab sehr auseinandergezogen ist; die Remanenz beträgt in dem dargestellten Falle bei sinkender Temperatur nur etwa 61 Gauß, während die Koerzitivkraft schon 0,12 Oersted beträgt. Bei Zimmertemperatur beträgt bei gleichem äußeren Feld die Remanenz 2800 Gauß und die Koerzitivkraft 0,75 Oersted. Während also die Remanenz erst etwa 2 % der ursprünglichen wieder angenommen hat, hat die Koerzitivkraft schon 16 % des ursprünglichen Wertes.

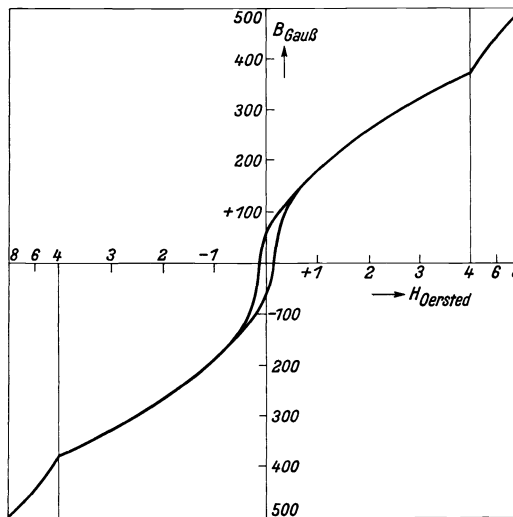


Bild 3. Nickel bei 333° C mit fallender Temperatur.

Der gesamte Temperaturverlauf von Remanenz, Koerzitivkraft und Hystereseverlust, sämtlich nach einer Endfeldstärke von 8 Oersted, ist aus Bild 4 und Tabelle 1 zu ersehen. Der Übersichtlichkeit halber sind nur die Kurven bei steigender Temperatur wiedergegeben. Die Remanenz nimmt bei steigender Temperatur erst ziem-

¹⁾ H. Kühlewein u. H. Neumann: Physik. Z. Bd. 32 (1931) S. 727.

lich rasch, dann langsamer und bei Annäherung an den Curiepunkt wieder sehr rasch ab, während die Koerzitivkraft in einer vollständigen Geraden abfällt, deren extrapoliertes Schnittpunkt mit der Abszisse etwa 58° oberhalb des Nullwertes der Remanenz liegt. Nach Forrer wäre also $\Theta_f = 378^\circ$ und $\Theta_p = 436^\circ$. Bei fallender Temperatur ist der Vorgang entsprechend: $\Theta_f = 340^\circ$ und $\Theta_p = 394^\circ$; die Differenz beträgt also nur 54° . Diese Verschiedenheit der Differenzen von Θ_p und Θ_f dürfte jedoch innerhalb der durch die Extrapolation bedingten Fehler liegen.

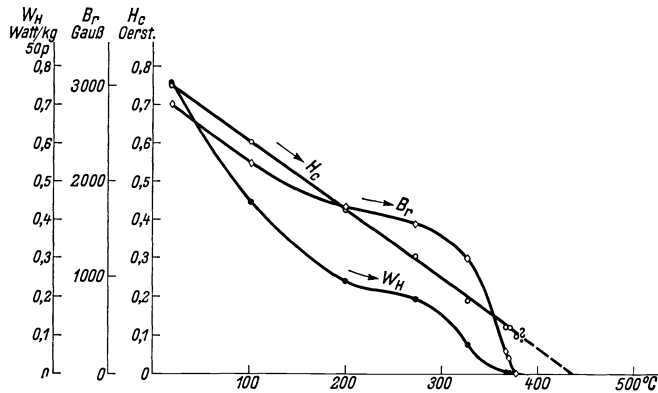


Bild 4. Nickel. Remanenz, Koerzitivkraft und Hystereseverlust bei $H = 8$ Oersted mit steigender Temperatur.

Tabelle I. Nickel.

Temperatur °C	B_r	H_c	W_H
	Gauß	Oersted	Watt/kg 50 per.
20	2800	0,75	0,756
103	2180	0,60	0,477
200	1720	0,42	0,239
273	1540	0,30	0,190
328	1180	0,19	0,073
350	227	0,12	0,0094
371	154	0,12 ?	0,0077 ?
378	0	0,1 ?	0
375	0	?	0
357	0	?	0
338	7 ?	0,1 ?	0,0005 ?
333	61	0,12	0,0023
324	555	0,14	0,0320
309	893	0,16	0,0445

Eisen.

Als Versuchsmaterial wurde schwedisches Holzkohleneisen verwendet.

Bild 5 zeigt die Hystereseschleifen in der Nähe des Curiepunktes. Die Schleifen wurden aufgenommen bei einem äußeren Feld von 8 Oersted. Es ist hierbei wieder

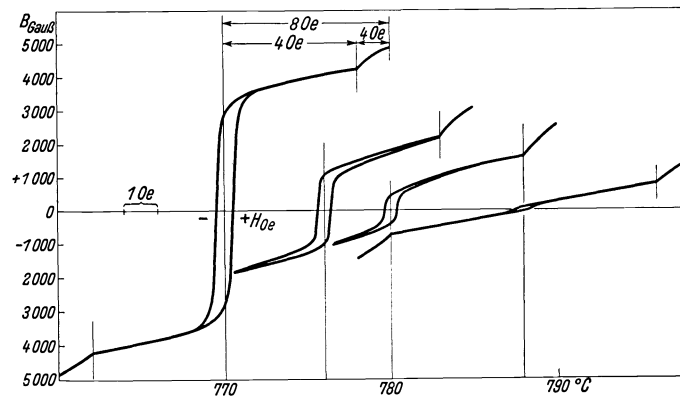


Bild 5. Eisen. Hystereseschleifen bei $H = 8$ Oersted in der Nähe des Curiepunktes.

deutlich zu erkennen, wie die Remanenz mit steigender Temperatur rasch abnimmt, während die Koerzitivkraft sich nur sehr wenig vermindert. Die Schleife bei 788° ist, da sie zum besseren Vergleich im selben Maßstab gezeichnet ist wie die vorhergehende, kaum mehr als solche zu erkennen. In anderem Maßstabe gezeichnet, sieht die Schleife ähnlich der Nickelschleife (Bild 3) aus.

In Bild 6 und Tabelle 2 sind Koerzitivkraft, Remanenz und Hystereseverlust nach einer Endfeldstärke von 8 Oersted bei steigender Temperatur aufgetragen. Zuerst

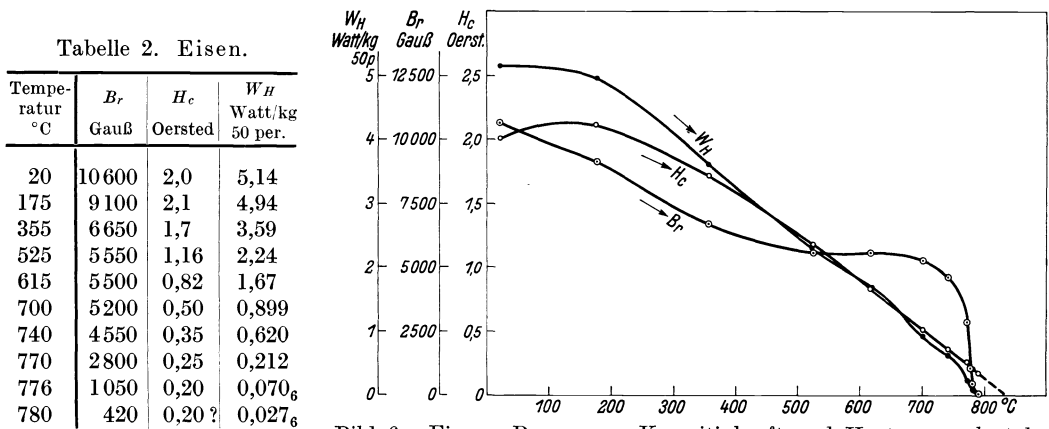


Bild 6. Eisen. Remanenz, Koerzitivkraft und Hystereseverlust bei $H = 8$ Oersted mit steigender Temperatur.

steigt die Koerzitivkraft etwas an, fällt dann aber schließlich wieder weitgehend geradlinig ab. Der Verlauf der Remanenz ist ähnlich wie bei Nickel, während der Gang des Hystereseverlustes durch den anfänglichen Anstieg der Koerzitivkraft beeinflusst ist.

Der geradlinige Abfall der Koerzitivkraft bei hohen Temperaturen ergibt wieder bei Extrapolation einen Schnittpunkt mit der Temperaturachse, der höher liegt als das Nullwerden der Remanenz. Bild 7 gibt diesen Befund in etwas größerem Maßstabe wieder. Es wäre demnach $\theta_f = 790^\circ$ und $\theta_p = \text{ca. } 830^\circ$, also $\theta_p - \theta_f = 40^\circ$.

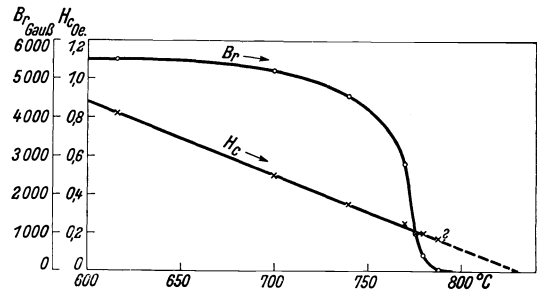


Bild 7. Eisen. Remanenz und Koerzitivkraft bei $H = 8$ Oersted in der Nähe des Curiepunktes.

Legierungen.

Es wurden nun einige Legierungen untersucht, die im Eisen-Nickel-Kobalt-System teils im α -, teils im γ - oder im Grenzgebiet lagen. Bild 8 zeigt die Lage der einzelnen Legierungen.

1. Legierung 95% Fe, 5% Ni.

Die Eisenlegierung mit 5% Nickel fällt in das Gebiet der sog. irreversiblen Eisen-Nickel-Legierungen. Mit steigender Temperatur nimmt die Magnetisierbarkeit erst langsam, dann rascher sehr stark zu; d. h. die Permeabilität wird größer, wie dies ja bei fast allen ferromagnetischen Materialien beobachtet wurde. Die Hystereseschleifen werden bei gleicher Feldstärke (in unserem Falle immer 8 Oersted) immer schmaler und höher. In Bild 9 kommt dieser Verlauf durch Kurve *a* zum Ausdruck. Die Abszisse ist wieder die Temperatur, die Ordinate in diesem Falle die Induktion für $H = 8$. Die Induktion steigt zu einem Maximum an, dann erfolgt die A_3 -Umwandlung von raumzentriertem in flächenzentriertes Gitter, und damit verschwindet der Ferromagnetismus.

D. h. bei dieser polymorphen Umwandlung von der α - in die γ -Struktur wird magnetisches Material mit raumzentriert kubischem Gitter, oder anders ausgedrückt, Material, das unterhalb der „ α -Curielinie“ liegt, umgewandelt in ein magnetisches Material mit flächenzentriert kubischem Gitter, das ist Material, das oberhalb der „ γ -Curielinie“ liegt¹⁾. Wir haben es hier also nicht mit einem wahren Curiepunkte zu tun. Die α - β -Umwandlung des Eisens, d. h. der wahre Curiepunkt, würde bei 5% Ni-Zusatz schon höher liegen als die A_3 -Umwandlung. Daher rührt auch der verhältnismäßig steile Abfall der Magnetisierung mit steigender Temperatur.

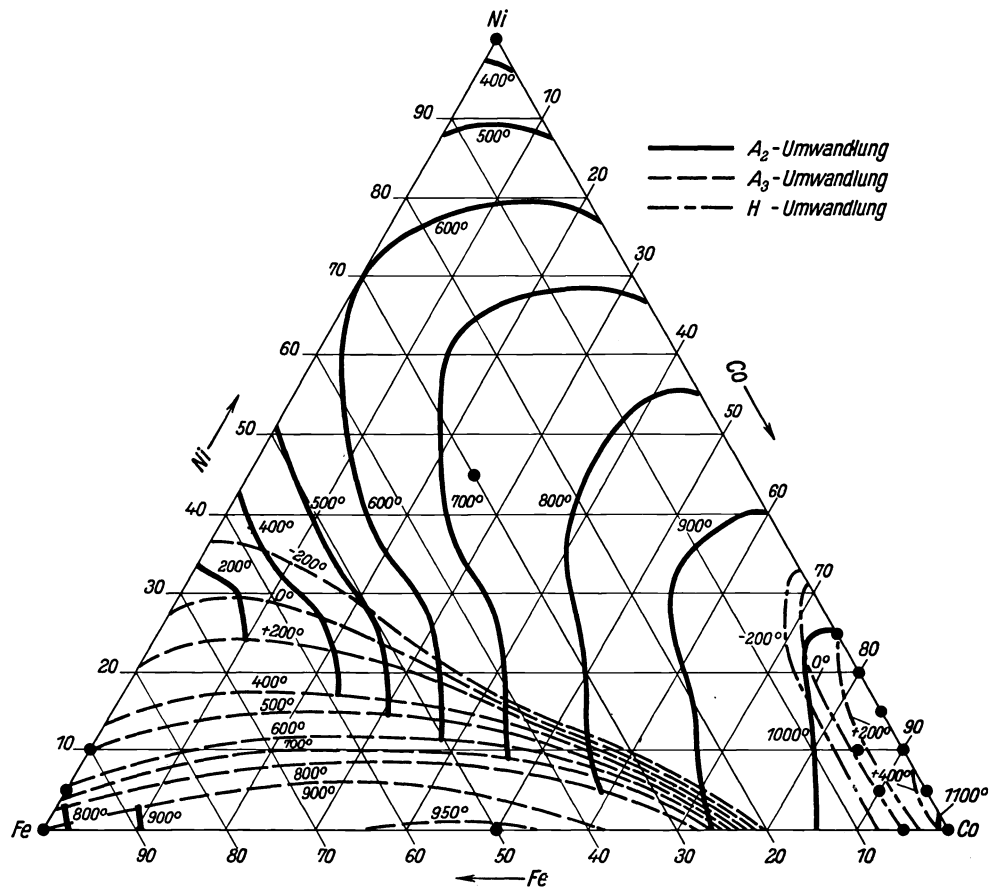


Bild 8. Das ternäre System Eisen—Nickel—Kobalt: Isotherme Umwandlungspunkte.

Bei sinkender Temperatur bleibt zunächst die unmagnetische γ -Modifikation bestehen, wir erhalten eine große Temperaturhysterese, bis der Ferromagnetismus wieder in Erscheinung tritt. Bei der Wiederkehr des Ferromagnetismus, die wiederum sehr steil erfolgt, tritt das Maximum der Permeabilität kaum mehr in Erscheinung. Bei steigender Temperatur nähern wir uns also schon sehr stark dem α -Curiepunkte (ansteigende Permeabilität), es tritt jedoch kurz vor diesem Curiepunkte die polymorphe Umwandlung ein, während wir bei der Wiederkehr des α -Gitters schon weit vom Curiepunkte entfernt sind.

¹⁾ H. Kühlewein: Physik. Z. Bd. 31 (1930) S. 629.

In Bild 9 und Tabelle 3 ist noch der Gang der Remanenz und der Koerzitivkraft (Kurve *b* und *c*) bei steigender und fallender Temperatur angegeben. Auch hier kann man sagen, es ist bei steigender Temperatur wahrscheinlich, daß bei Extrapolation

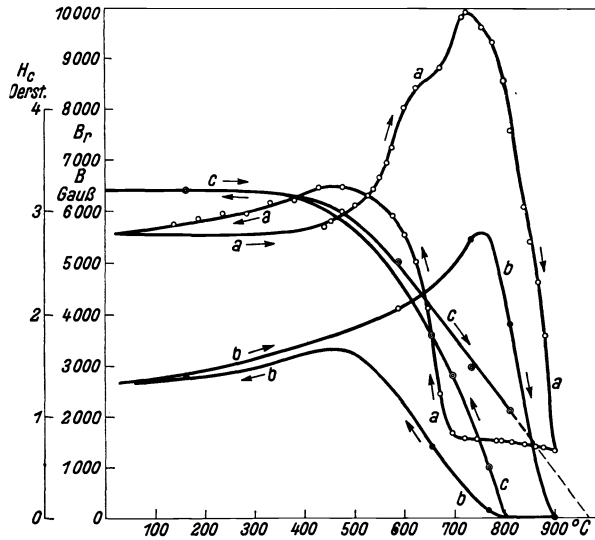


Bild 9. 95% Fe; 5% Ni.

a = *B* bei *H* = 8 Oersted. *b* = Remanenz nach *H* = 8 Oersted. *c* = Koerzitivkraft nach *H* = 8 Oersted.

die Koerzitivkraft erst bei einer höheren Temperatur Null wird als die Remanenz. Man kann hier jedoch, wie schon bemerkt, von keinem reinen Curiepunkte mehr sprechen, da die A_3 -Umwandlung diesen Effekt gerade schon verwischt.

Die Wiederkehr des Ferromagnetismus bei fallender Temperatur ist so zu verstehen, daß sich das γ -Gitter allmählich wieder in α -Gitter umwandelt, und zwar bei einer Temperatur, bei der das α -Gitter sich schon längst rein ferromagnetisch verhält. Koerzitivkraft und Remanenz hängen also nur vom jeweiligen Gehalt an α -Gitter ab, sie werden also von der gleichen Temperatur ab wieder in Erscheinung treten.

Tabelle 3. 95% Fe, 5% Ni.

Temperatur °C	<i>B_r</i> Gauß	<i>H_c</i> Oersted	<i>W_H</i> Watt/kg 50 per.
20	3720	2,7	2,96
164	2900	3,2	2,57
588	4100	2,45	2,95
733	5450	1,45	2,03
811	3850	1,0	1,04
770	ca. 120	0,5	ca. 0,041
656	1400	1,8	0,83

2. Legierung 90% Fe, 10% Ni.

Bei der Legierung 90% Fe, 10% Ni ist der Verlauf der magnetischen Eigenschaften bei steigender und fallender Temperatur der Legierung mit 5% Ni ganz analog. Es tritt hier noch besser in Erscheinung, daß das Absinken der Magnetisierbarkeit mit der Temperatur bedingt ist durch die Umwandlung von magnetischer raumzentrierter in die unmagnetische flächenzentrierte Struktur, denn die Koerzitivkraft fällt mit der Remanenz ab (Bild 10). In Bild 11 ist der Verlauf der Magnetisierungsintensität für $H = 8$ Oersted dargestellt. Hierbei ist an Kurve *b* zu erkennen, daß bei nochmaliger Erhitzung das Maximum der Magnetisierbarkeit bei etwa 500° wieder erreicht wird. Es wurde nun die Temperatur hier wieder vermindert, wobei

sich das überraschende Resultat ergab, daß jetzt die verhältnismäßig hohe Magnetisierbarkeit bis zur Raumtemperatur erhalten blieb; gleichzeitig verblieb jedoch auch die Remanenz auf ihrem hohen Wert (in der Kurve der Übersichtlichkeit halber nicht

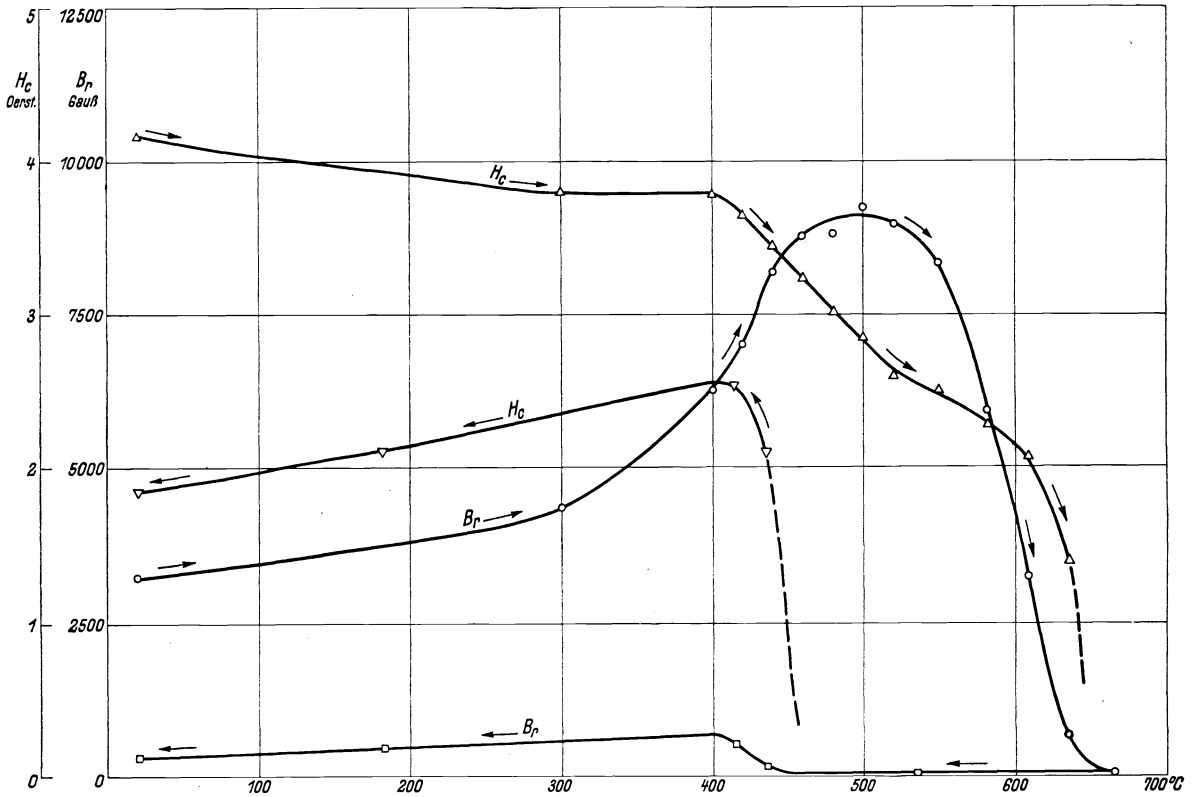


Bild 10. 90% Fe; 10% Ni. H_c und $B_r = f(t)$.

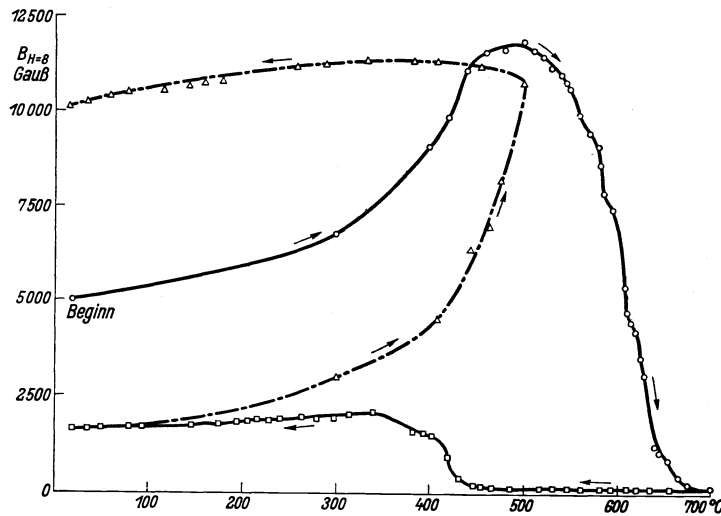


Bild 11. 90% Fe; 10% Ni. $B_{H=8} = f(t)$.

ingezeichnet), und die Koerzitivkraft stieg ebenfalls. Bei einer Temperaturumkehr im Maximum der Magnetisierbarkeit erhält man also bei Zimmertemperatur, trotz größerer Magnetisierbarkeit, einen erheblich größeren Hystereseverlust.

3. Legierung 45% Ni, 30% Fe, 25% Co.

Es wurde nun eine Legierung untersucht, die bei Zimmertemperatur typische Perminvareigenschaften zeigt¹⁾, d. h. die Hystereseschleifen sind eingeschnürt. Die Legierung 45% Ni, 30% Fe, 25% Co fällt im Legierungssystem Eisen-Nickel-Kobalt in das reine γ -Gebiet; mit steigender Temperatur tritt nur der Curiepunkt auf, das γ -Gitter bleibt bis zum Schmelzpunkt erhalten.

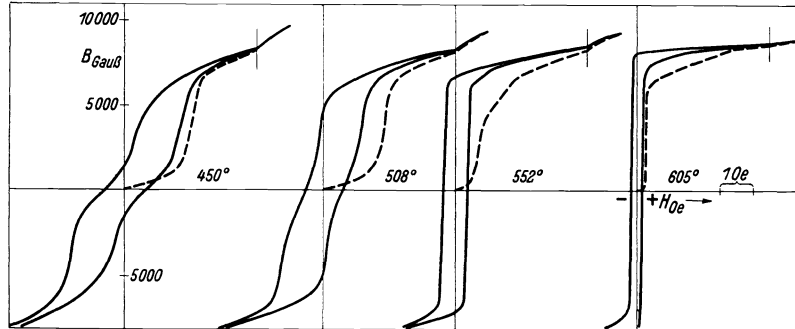


Bild 12. 45% Ni; 30% Fe; 25% Co. Hystereseschleifen bei steigender Temperatur.

Um den typischen Perminvarcharakter zu erhalten, wurde die Legierung vor der Untersuchung eine Stunde bei 1000° geglüht und dann langsam im Ofen abgekühlt.

Es wurden im ganzen 25 Schleifen mit Neukurven bei $H = 8$ Oersted zwischen 20 und 900° in kontinuierlicher Reihe aufgenommen. Hierbei ergaben sich folgende Resultate:

Hystereseschleifen: Bei Zimmertemperatur zeigt die Hystereseschleife bei 8 Oersted die normale „engeschnürte“ Form. Mit steigender Temperatur bis etwa

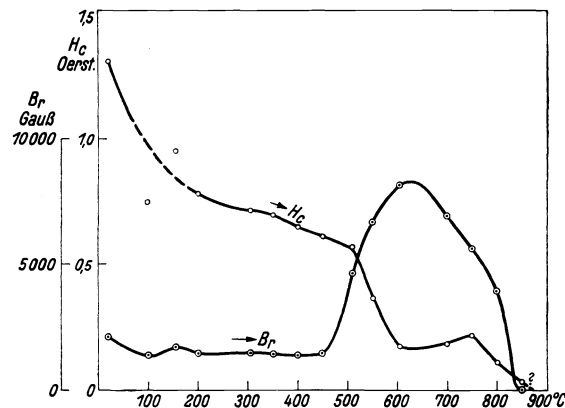


Bild 13. 45% Ni; 30% Fe; 25% Co. Remanenz und Koerzitivkraft für $H = 8$ Oersted mit steigender Temperatur.

450° wird diese Form im wesentlichen beibehalten, die Schleife wird nur allmählich etwas steiler. Bei noch weiter steigender Temperatur wird die Schleife nun sehr rasch erheblich steiler, die Einschnürung verliert sich, und bei etwa 550° haben wir eine normale, permalloyähnliche Form (Bild 12). Steigt die Temperatur weiter an, so sinkt die Koerzitivkraft zuerst, die Schleifen werden schmaler, und die Remanenz

¹⁾ G. W. Elmen: J. Franklin Inst. Bd. 206 (1928) Nr. 3. — H. Kühlewein: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. X, 2 (1931) S. 72.

steigt. Später wird die Koerzitivkraft noch einmal etwas größer, bis schließlich der normale Abfall zum Curiepunkt eintritt. Bild 13 zeigt den Gang der Koerzitivkraft und der Remanenz mit steigender Temperatur. In dem Temperaturgebiet, in welchem der Perminvarcharakter verschwindet, ist deutlich der starke Abfall der Koerzitivkraft und der gleichzeitige Anstieg der Remanenz zu erkennen.

Das letzte Absinken der Koerzitivkraft erfolgt wieder ziemlich geradlinig, und man kann hier bei Extrapolation wieder erkennen, daß Θ_p oberhalb Θ_f liegen muß.

Bei der Messung der Schleifen trat bei allen Steilschleifen, also oberhalb 500° , ein Störeffekt auf, der vor kurzem schon beschrieben wurde¹⁾. Es wird deshalb hier nicht näher darauf eingegangen.

Neukurven: Bild 14 zeigt nun sämtliche gemessene Neukurven zwischen 20° und 800° bei steigender Temperatur. Hieraus ergeben sich, außer dem allmählichen

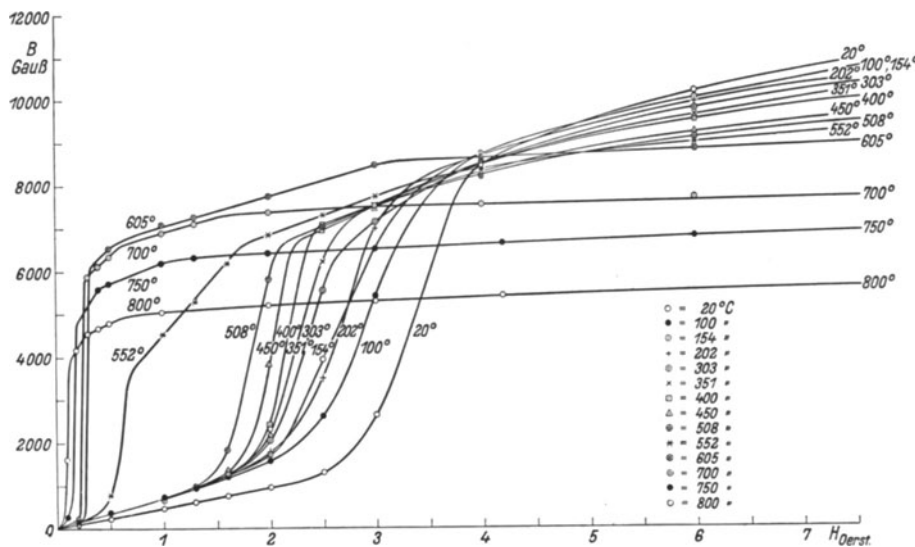


Bild 14. 45% Ni; 30% Fe; 25% Co. Neukurven mit steigender Temperatur.

Steilwerden, folgende neue Momente: bei 300° ist das obere Knie schon sehr deutlich ausgebildet, bei 350° jedoch ist das Stück oberhalb dieses Knies vollständig geradlinig. Dieses geradlinige Stück bleibt nun erhalten bis etwa 500° . Bei 550° haben sich deutlich zwei geradlinige Stücke herausgebildet. Das zweite Stück liegt vor dem ersten, das vorerst noch seine Neigung streng beibehalten hat. Die Messung bei 600° weist leider zu wenig Meßpunkte auf, jedoch sind bei 700° , 750° und 800° noch deutlich beide geradlinigen Stücke zu erkennen. Sie haben sich jedoch in ihren Neigungen geändert. Bild 15 zeigt diese ganze Entwicklung noch in anderer Darstellung. Es ist hier die differentielle Permeabilität in Abhängigkeit von der Feldstärke aufgetragen. Solange die Neukurve geradlinig verläuft, bleibt natürlich $\mu_{\text{diff.}} = dB/dH$ konstant. Sehr deutlich kommt hier zum Ausdruck, wie sich bereits bei 300° das erste (obere) geradlinige Stück herausbildet. Bei 350° ist dieses Stück bereits vollkommen geradlinig und von der gleichen Neigung, nur noch etwas kürzer als bei den nachfolgenden Temperaturen. Bei 600° wird die Neigung dieses geradlinigen Stückes geringer, erreicht bei 700° ein Minimum und steigt dann wieder an.

¹⁾ H. Kühlewein: Physik. Z. Bd. 32 (1931) S. 860.

Das zweite (untere) geradlinige Stück ist bei 550° schon sehr gut ausgebildet. Seine Neigung geht ebenfalls bei etwa 700° durch ein Minimum.

Der Verlauf der Neukurven bei höheren Temperaturen hat also einen sehr ähnlichen Charakter wie Magnetisierungskurven von Einkristallen.

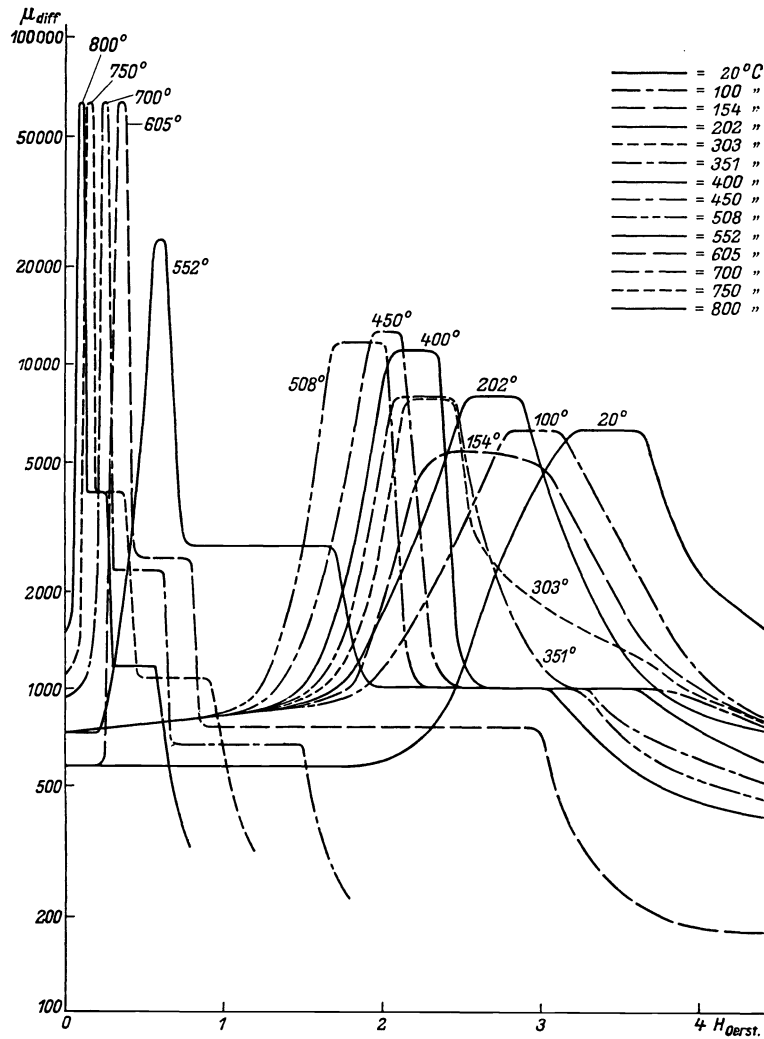


Bild 15. dB/dH an der Neukurve mit steigender Temperatur.

4. Legierung 50% Fe, 50% Co.

In Bild 2 wurde der Fall gezeigt, für den nach Forrer Θ_p unterhalb Θ_f liegt. Forrer vermutete, daß dies bei Eisen-Kobalt-Legierungen mit etwa 20—70% Co zuträfe. Es wurde daher noch eine Legierung mit 50% Eisen und 50% Kobalt untersucht. Der Nickelgehalt betrug etwa 1%.

Bild 16 gibt das Resultat wieder. Die Magnetisierungsintensität für $H = 8$ Oersted fällt bei steigender Temperatur zuerst langsam, dann etwas rascher und schließlich plötzlich sehr steil ab. Dieser Steilabfall entspricht der polymorphen A_3 -Umwandlung des α -Gitters in das γ -Gitter. Da man sich vor dieser polymorphen Umwandlung unterhalb des Curiepunktes des α -Gitters, nach der Umwandlung oberhalb des

Curiepunktes des γ -Gitters befindet, muß die Magnetisierungsintensität den bekannten plötzlichen Abfall zeigen. Wenn dieser plötzliche Abfall der Magnetisierungsintensität durch $\Theta_p < \Theta_f$ bedingt sein sollte, so müßte auch nach Forrer die Koerzitivkraft für diesen Punkt auf den Wert Null zustreben. Nach unseren Versuchsergebnissen (Bild 16) ist dies jedoch augenscheinlich nicht der Fall. Übrigens schwanken in der Literatur die Temperaturwerte für die A_3 -Umwandlung, wahrscheinlich infolge verschiedener Verunreinigungen, beträchtlich; Forrer führt als Beweis die Arbeit von A. Preuß¹⁾ an, wahrscheinlich weil dessen Werte tatsächlich erheblich höher liegen als die von R. Forrer gefundenen, als Θ_p bezeichneten Punkte, während die von H. Masumoto²⁾ erhaltenen A_3 -Temperaturen sogar unterhalb der Forrerschen Θ_p -Punkte liegen. Nach H. Masumoto stimmen die Temperaturwerte für den Steilabfall der Magnetisierungsintensität auch überein mit der Änderung des

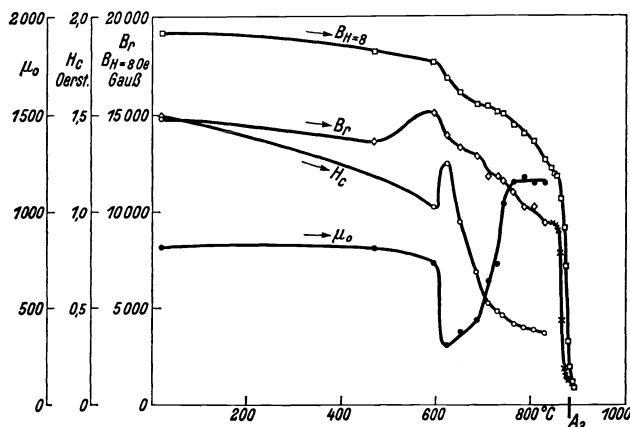


Bild 16. 50% Fe; 50% Co. Magnetische Eigenschaften bei $H = 8$ Oersted mit steigender Temperatur.

Unregelmäßigkeiten bei Eisen-Kobalt-Legierungen fand auch schon H. Masumoto; ebenso konnten wir eine kleine Änderung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten feststellen.

Bei der Messung der Hystereseschleifen der 50proz. Eisen-Kobalt-Legierung oberhalb 500° konnte wieder, ähnlich wie bei der beschriebenen Perminvarlegierung, eine Ummagnetisierung im Steilteil der Schleife beobachtet werden, die zeitlich bei konstantem Feld ziemlich langsam erfolgte. Dies machte sich bei der ballistischen Messung so störend bemerkbar, daß die erhaltenen Schleifen nicht verwendet werden konnten, um den Hystereseverlust zu ermitteln.

Hexagonale Kobaltlegierungen.

Reines Kobalt hat bei Zimmertemperatur dichtgepacktes hexagonales Gitter. Bei steigender Temperatur findet bei etwa 450° eine polymorphe Umwandlung statt³⁾, das hexagonale Gitter geht über in ein flächenzentriertes kubisches (γ -) Gitter. Die Umwandlungstemperatur sinkt bei Zusatz von Eisen beträchtlich und erreicht bei etwa 5% Fe Zimmertemperatur, während bei Nickelzusatz die Umwandlung bei Zimmertemperatur erst mit etwa 25% Ni erhalten wird. Die Umwandlung ist bei

¹⁾ A. Preuß: Diss. Zürich 1912.

²⁾ H. Masumoto: loc. cit.

³⁾ H. Masumoto: Sci. Rep. Tôhoku Univ. Bd. 15 (1926) S. 449.

thermischen Ausdehnungskoeffizienten.

Bei den Eisen-Kobalt-Legierungen liegt also Θ_p nicht unterhalb Θ_f . Die magnetische Umwandlung ist kein Curiepunkt, sondern sie ist durch die A_3 -Umwandlung bedingt.

Die Ursache des bei unseren Versuchen gefundenen plötzlichen Anstieges der Koerzitivkraft und des gleichzeitigen Absinkens der Anfangspermeabilität bei etwa 600° konnte noch nicht geklärt werden. Ähnliche

Eisen- oder Nickelzusatz mit ziemlich großer Temperaturhysterese verknüpft, d. h. bei der Temperaturvariation wird ein heterogenes ($H + \gamma$ -) Gebiet durchlaufen.

Nach den Messungen von H. Masumoto nimmt die Magnetisierbarkeit dieser hexagonalen Kobaltlegierungen mit der Umwandlung erheblich zu. D. h. das hexagonale Gitter ist schwerer als das γ -Gitter magnetisierbar. Die Sättigung wird jedoch durch die Gitterumwandlung nicht beeinflusst¹⁾.

Im folgenden seien einige Versuche an solchen hexagonalen Kobaltlegierungen mitgeteilt.

Zur Herstellung der Legierungen wurde technisches Kobalt verwendet, das etwa 2% Ni und beinahe 2% Fe enthielt. In Tabelle 4 sind die zur Untersuchung gelangten Legierungen in ihrer Zusammensetzung, wie sie die chemische Analyse ergab, angegeben.

Tabelle 4.

Legierungsnummer	Ni %	Fe %	Mn %	Co %
M 311	1,94	1,84	0,64	Rest
M 312	7,12	1,75	0,40	„
M 314	11,95	1,70	0,72	„
M 313	16,75	1,64	0,67	„
M 315	22,13	1,54	0,60	„
M 316	26,52	1,57	1,18	„
M 317	2,03	4,70	0,80	„
M 318	6,30	4,87	0,80	„
M 319	11,97	6,60	0,90	„

Die Legierung M 311 hatte, wie die Röntgenanalyse ergab, bei Zimmertemperatur dichtgepacktes hexagonales Gitter. Unsere Untersuchung ging nun folgendermaßen vor sich: Es wurde die Induktion für ein bestimmtes Feld ($H = 8$ Oersted) bei steigender und fallender Temperatur durch Kommutieren gemessen (Bild 17). Es

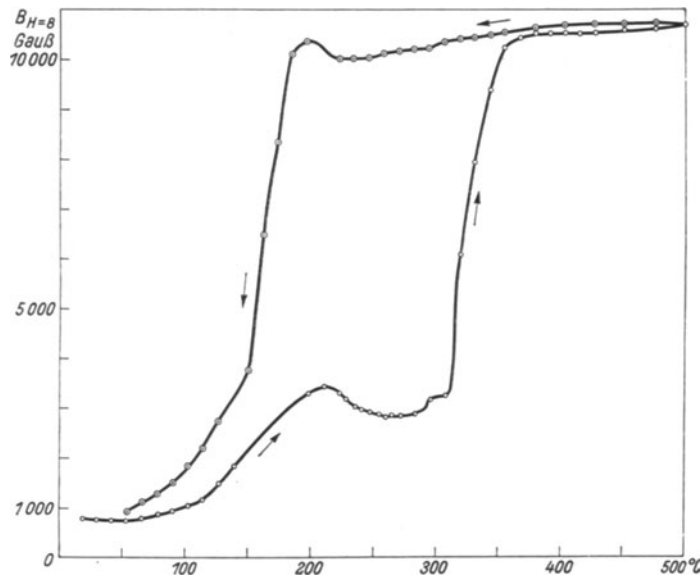


Bild 17. Kobalt. $B_{H=8} = f(t)$.

zeigte sich, daß die Magnetisierbarkeit mit steigender Temperatur zuerst über ein Maximum ging, um dann erst bei der $H - \gamma$ -Umwandlung steil anzusteigen zu dem Induktionswert, der dem γ -Gitter zugehört. Bei fallender Temperatur trat das zuerst genannte Maximum nur schwach auf, die Magnetisierung fällt wieder bei der Zurückumwandlung in das hexagonale Gitter auf den ursprünglichen Induktionswert. Die

¹⁾ O. Bloch: Arch. Sci. phys. nat. Bd. 33 (1912) S. 293.

Temperaturhysterese beträgt dabei etwa 160° . In Bild 18 sind die Hystereseschleifen bei $H = 8$ Oersted im hexagonalen und im γ -Gebiet aufgezeichnet.

Bei den übrigen Legierungen trat das erwähnte kleine Maximum nicht auf.

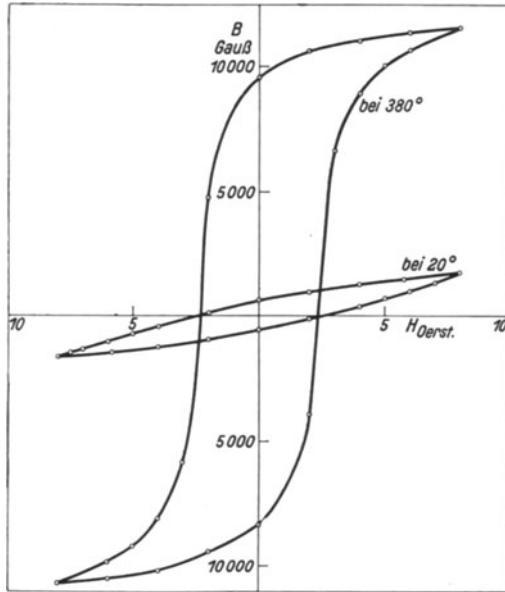


Bild 18. Kobalt. Hystereseschleifen für $H = 8$ Oersted in hexagonalem und im γ -Gebiet.

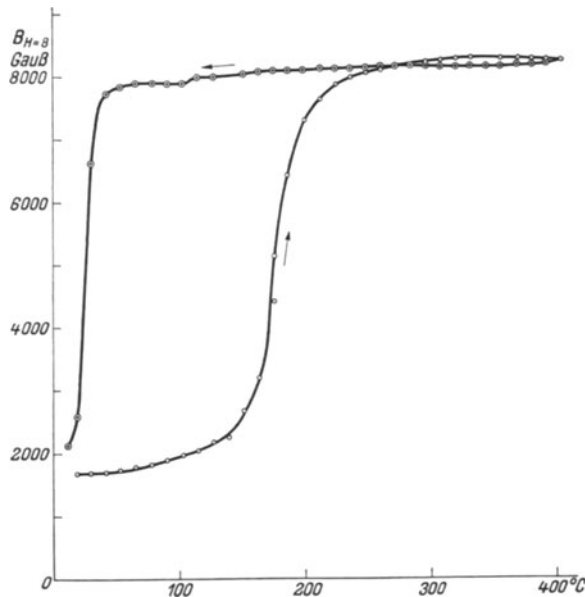


Bild 19. 80% Co; 20% Ni. $B_{H=8} = f(t)$.

folgte wieder ähnlich wie zuvor. Kurve *c* zeigt die Temperaturumkehr während der eigentlichen $H - \gamma$ -Umwandlung. Wir erhielten hier bei sinkender Temperatur das Maximum sehr stark ausgeprägt, dann erfolgte direkt an das Maximum

Bild 19 zeigt z. B. den entsprechenden Verlauf der Induktion für die Legierung M 315 (ca. 22% Ni). Der Temperaturverlauf der Induktion ist auch bei steigender Temperatur normal. Im übrigen sind die Umwandlungstemperaturen bei steigender wie bei fallender Temperatur aller untersuchten Legierungen in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen von H. Masumoto, so daß hierauf nicht näher eingegangen zu werden braucht.

H. Masumoto fand bei seinen Legierungen, die nur wenige Prozente Eisen bzw. Nickel enthielten, ebenfalls keinen derartig glatten Verlauf wie bei hexagonalen Kobaltlegierungen mit größeren Nickelgehalten. Wir unterzogen daher die Legierung M 311 einer eingehenderen magnetischen Untersuchung.

Bei gleichbleibendem äußeren Feld wurde die Magnetisierungsintensität bei steigender und fallender Temperatur aufgenommen, wobei die jeweils erreichte Höchsttemperatur allmählich erhöht wurde. Bild 20 zeigt diesen Verlauf der Magnetisierungsintensität bei $H = 8$ Oersted. Die Temperaturumkehr (Kurve *a*) erfolgte vor dem Erreichen des Maximums. Wir erhielten eine Temperaturhysterese; der letzte Abfall erfolgte so, als ob die $H - \gamma$ -Umwandlung bereits stattgefunden hätte. Bei Kurve *b* wurde etwas über das Maximum gegangen. Nach der Temperaturumkehr wurde das Maximum, allerdings mit einer gewissen Temperaturhysterese, wieder überschritten, der Abfall der Induktion erfolgte wieder ähnlich wie zuvor.

anschließend die Rückumwandlung. Diese wurde nun durch eine nochmalige Temperaturumkehr unterbrochen. Bei diesem Wiederaufstieg der Temperatur erhielten wir wieder das Maximum. Der weitere Verlauf der Kurve *c* entspricht etwa dem ersten Versuch (Bild 17).

Bei der Annahme, daß die schwere Magnetisierbarkeit des hexagonalen Gitters durch große Spannungen bedingt ist, die hervorgerufen werden erstens durch die verschiedene thermische Ausdehnung und zweitens durch die verschiedene Magnetostraktion der Achsen der Einzelkristalle, ist folgende Überlegung naheliegend: Wenn die Magnetostraktion im hexagonalen Gitter sehr große innere Spannungen erzeugt, so ist die Möglichkeit gegeben, daß z. B. bei der Abkühlung die Umwandlung $\gamma - H$ durch ein Dauerfeld verzögert werden könnte. D. h. solange wir uns im γ -Gebiet

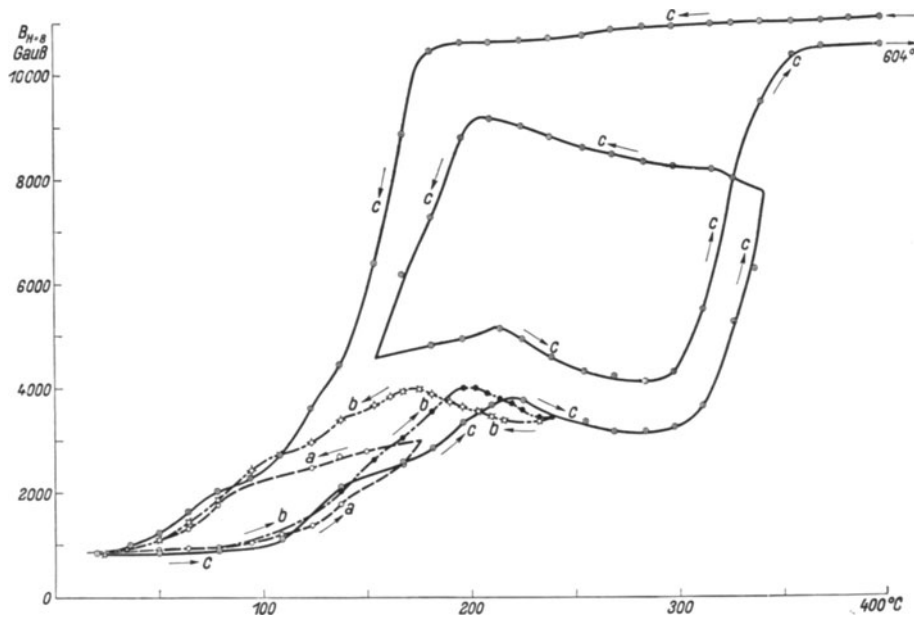


Bild 20. Kobalt. $B_{H=8} = f(t)$.

befinden, sind die durch die Magnetostraktion bedingten Spannungen verhältnismäßig gering, setzt die Umwandlung jedoch ein, so könnten die jetzt auftretenden Magnetostraktionsspannungen eine „Unterkühlung“ bewirken. Bei steigender Temperatur müßte die $H - \gamma$ -Umwandlung aus denselben Gründen früher einsetzen.

Wir suchten nun einen Indikator für die Umwandlung, da die Induktion im Dauerfeld an Ringen schlecht gemessen werden konnte. Kommutiert man das Feld jedoch, so kann durch das, wenn auch nur kurze Nullwerden des äußeren Feldes der ganze gesuchte Effekt verschwinden. Wir fanden nun durch Zufall eine Hilfe in der reversiblen Permeabilität, die bei jeder beliebigen Induktion durch Kommutieren eines überlagerten sehr kleinen Feldes gemessen werden kann.

Der Meßvorgang war also folgendermaßen: Zuerst wurde für ein bestimmtes Feld (in unserem Falle 4,6 Oersted) bei steigender und fallender Temperatur die Magnetisierungsintensität durch Kommutieren und gleichzeitig die dazugehörige reversible Permeabilität (μ_r) gemessen (Versuch mit Momentanfeld). Die Temperaturänderung betrug hierbei etwa 2° pro Minute. Dann wurde bei gleichem Feld, das

jedoch dauernd eingeschaltet war, und gleichem Temperaturgang nur die reversible Permeabilität gemessen (Versuch mit Dauerfeld). Die Versuche wurden in umgekehrter Reihenfolge wiederholt, wobei qualitativ das gleiche Ergebnis erzielt wurde.

Bild 21 stellt das Versuchsergebnis dar: Die ausgezogene Kurve gibt den Gang der Induktion und die strichlierte Kurve den Gang der reversiblen Permeabilität beim Versuch mit Momentanfeld wieder. Die Meßpunkte der reversiblen Permeabilität

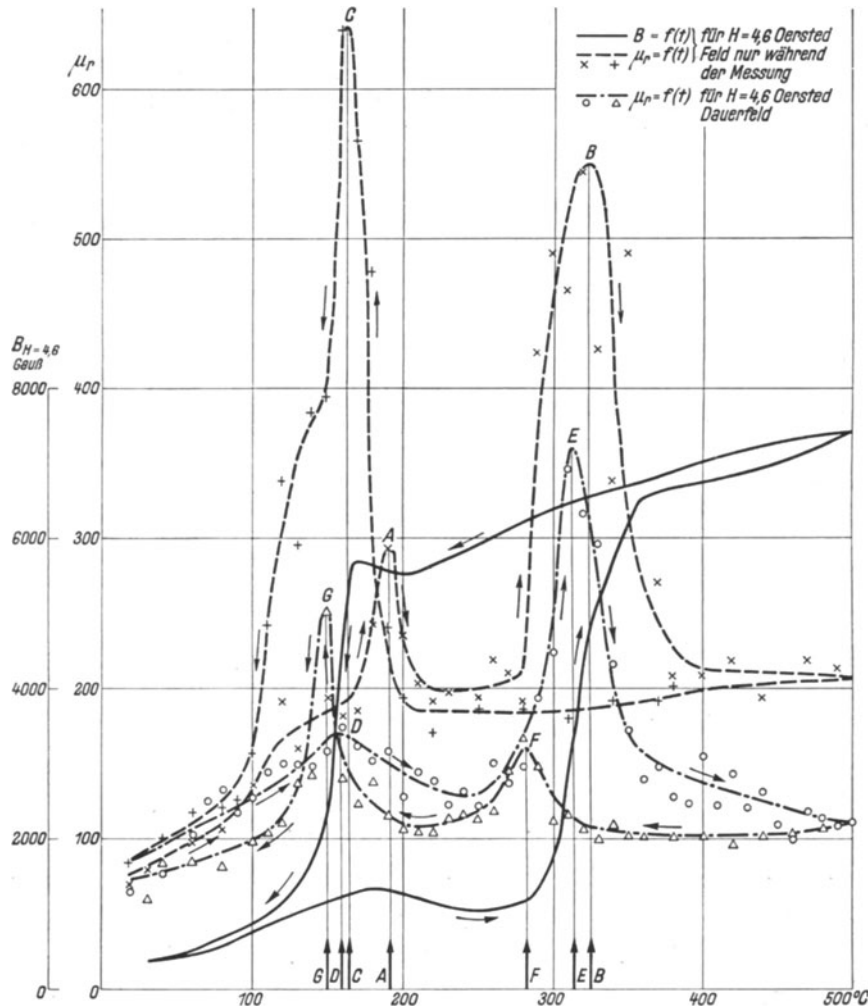


Bild 21. Kobalt.

streuen infolge der Kleinheit des Galvanometerauschlages beträchtlich, doch ist der Temperaturgang einwandfrei zu erkennen, während die Meßpunkte der Induktion innerhalb der Strichdicke liegen. Bei steigender Temperatur geht die reversible Permeabilität über ein ausgeprägtes erstes Maximum (A), das dem kleinen Maximum der Induktion entspricht, zu einem zweiten hohen Maximum (B), das bei der $H-\gamma$ -Umwandlung liegt. Bei fallender Temperatur tritt nur ein steiles Maximum (C) auf, das der $\gamma-H$ -Umwandlung zugehört. Eigenartigerweise zeigt also der Verlauf der reversiblen Permeabilität sehr ausgeprägte Maxima, sobald die polymorphe Umwandlung eintritt.

Betrachtet man nun den Verlauf der reversiblen Permeabilität in Abhängigkeit von der Temperatur während des Dauerfeldes (strichpunktierte Kurve in Bild 21), so erkennt man, daß die drei genannten Maxima wieder auftreten (*D, E, G*), wenn sie auch schwächer ausgebildet sind. Sie liegen sämtlich bei tieferen Temperaturen als beim Versuch mit Momentanfeld. In Tabelle 5 sind die Temperaturen der Maxima zusammengestellt. Außerdem trat bei fallender Temperatur noch ein Maximum *F* auf, das beim ersten Versuch nicht in Erscheinung trat.

Tabelle 5.

	Maximum der Induktion		<i>H</i> — γ -Umwandlung		<i>H</i> — γ -Umwandlung	
	Max.	Temp.	Max.	Temp.	Max.	Temp.
Momentanfeld . . .	<i>A</i>	191°	<i>B</i>	324°	<i>C</i>	164°
Dauerfeld	<i>D</i>	160°	<i>E</i>	313°	<i>G</i>	149°
	<i>A—D</i>	31°	<i>B—E</i>	11°	<i>C—G</i>	15°

Herr Dr. W. Jubitz hat im Anschluß an diese Versuche im Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns die thermische Ausdehnung an den gleichen Legierungen, jedoch aus einer anderen Schmelzcharge gemessen. Bild 22 zeigt die thermische Ausdehnung der Legierung M 311. Die

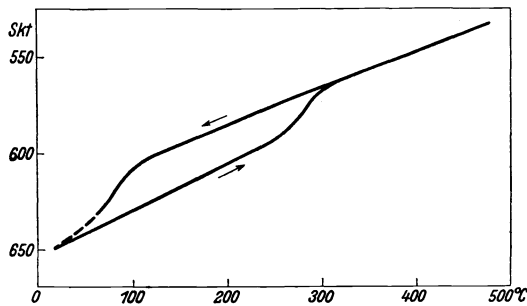


Bild 22. Kobalt. Thermische Ausdehnung.

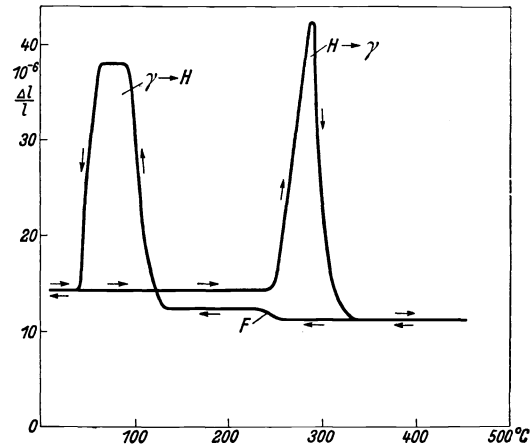


Bild 23. Kobalt. Thermischer Ausdehnungskoeffizient.

polymorphe Umwandlung ist demnach mit starker Ausdehnung bzw. Zusammenziehung verknüpft. Auch ist der Ausdehnungskoeffizient im flächenzentriert kubischen Gitter kleiner als im hexagonalen Gitter, wie sich dies aus Bild 23, das den Ausdehnungskoeffizienten darstellt, besser ergibt.

Die Umwandlungstemperaturen stimmen nicht ganz mit den Daten aus der magnetischen Untersuchung überein. Die Differenzen sind aber schon bei geringen Verschiedenheiten der Verunreinigungen erklärlich; wir wollen sie daher im folgenden außer acht lassen.

Aus dem Vergleich des Verlaufes des thermischen Ausdehnungskoeffizienten und der reversiblen Permeabilität läßt sich folgendes feststellen: 1. Die *H*— γ - und die γ —*H*-Umwandlung sind verbunden mit starker Ausdehnung bzw. Zusammenziehung; gleichzeitig während dieser großen Volumenänderung weist die reversible Permeabilität Maxima auf. 2. Das Maximum der Induktion bei steigender Temperatur ist im Verlauf des thermischen Ausdehnungskoeffizienten nicht vorhanden. 3. Das Maximum *F* von μ_r bei fallender Temperatur macht sich durch eine kleine Änderung

im Ausdehnungskoeffizienten bemerkbar. Diese Änderung wurde übrigens bei sämtlichen Versuchen beobachtet, ist daher sicher reell.

Die Versuchsergebnisse lassen demnach zusammenfassend folgende Schlüsse zu:

1. Die Umwandlung des hexagonalen Gitters in flächenzentriert kubisches Gitter und umgekehrt bei Kobaltlegierungen läßt sich hinsichtlich der Temperaturlage durch ein äußeres Dauerfeld beeinflussen, wahrscheinlich weil die durch die Magnetostriktion bedingten inneren Spannungen im hexagonalen Gitter größer sind als im γ -Gitter.

2. Das Maximum der Magnetisierbarkeit bei steigender Temperatur im hexagonalen Gebiet hat mit der polymorphen Umwandlung nichts zu tun, da der Verlauf des thermischen Ausdehnungskoeffizienten an dieser Stelle keine Unregelmäßigkeit zeigt. Es ist durch ein Dauerfeld in seiner Temperaturlage beeinflußt, es kann daher sein, daß die Magnetostriktion in diesem Temperaturgebiet kleiner wird.

Zusammenfassung.

Es wurden Eisen, Nickel, Kobalt und mehrere ihrer Legierungen bei hohen Temperaturen magnetisch ausgemessen. Das Versuchsmaterial kam in Form von Blechringen zur Verwendung. Es ergab sich:

1. Die Existenz zweier Curiepunkte nach R. Forrer bestätigt sich bei Eisen, Nickel und einer Eisen-Nickel-Kobalt-Legierung, die dem flächenzentriert kubischen Gitter zugehört. Hierbei ist die paramagnetische Curietemperatur Θ_p stets größer als die ferromagnetische Curietemperatur Θ_f .

2. Die Ansicht R. Forrers, daß bei bestimmten Eisen-Kobalt-Legierungen $\Theta_p < \Theta_f$, wird nicht bestätigt. Die magnetische Umwandlung ist identisch mit der A_3 -Umwandlung.

3. An hexagonalen Kobaltlegierungen wird gezeigt, daß die Umwandlung des hexagonalen Gitters in flächenzentriert kubisches Gitter und die umgekehrte Umwandlung sich durch ein äußeres Feld beeinflussen läßt.

4. Oberhalb 500° verhalten sich Perminvare einkristallähnlich.

Reversible Vorgänge in einem magnetischen Material mit starken inneren Spannungen.

Von Richard Becker.

Mit 2 Bildern.

Mitteilung aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule zu Berlin.

Eingegangen am 1. Juli 1932.

1. Die Abhängigkeit der Energie von der Richtung der Magnetisierung.

Die technische Magnetisierung wird heute allgemein durch die Weiss'sche Annahme beschrieben, daß die einzelnen Teilgebiete eines Ferromagnetikums stets zur Sättigung J_s magnetisiert sind, und daß ein äußeres Feld H lediglich die Aufgabe hat, die zunächst statistisch orientierten Vektoren der Magnetisierung in mehr oder weniger vollkommener Weise auszurichten. Ein einzelnes homogen magnetisiertes Teilgebiet nennen wir einen Weiss'schen Bezirk. Aus der Tatsache, daß man zur technischen Magnetisierung stets eine endliche Magnetisierungsarbeit aufwenden muß, folgt dann notwendig, daß in den einzelnen Bezirken bestimmte energetische Vorzugslagen für die Richtung der Magnetisierung vorhanden sein müssen, aus denen sie nur unter Arbeitsleistung entfernt werden kann. Solange kein äußeres Feld wirkt, können diese Vorzugslagen durch drei verschiedene Ursachen bestimmt werden:

Erstens sind durch die kristalline Natur der Ferromagnetika gewisse Richtungen ausgezeichnet. So wissen wir, daß beim Eisen die Würfelkante, beim Nickel dagegen die Raumdiagonale des kubischen Gitters die Richtung kleinster Energie repräsentiert.

Zweitens können durch elastische Spannungen einzelne Richtungen ausgezeichnet sein: Zum Beispiel werden beim Nickel unter Zugspannung die Richtungen senkrecht zum Zug bevorzugt, dagegen bei Eisen mit etwa 10 % Nickel die Zugrichtung selbst.

Drittens kommt noch in Betracht die magnetische Rückwirkung seitens der übrigen Bezirke. Hier wäre noch zu unterscheiden zwischen derjenigen der entfernt liegenden Bezirke, welche im wesentlichen unter dem Begriff des „Entmagnetisierungsfaktors“ zusammengefaßt werden kann, sowie derjenigen der unmittelbar benachbarten Bezirke. Diese hängt in komplizierter Weise von der Gestalt und Orientierung der Nachbarn ab und wird gelegentlich als „Streifeld“ in die Rechnungen eingeführt. Wir werden im folgenden dieses Streifeld nicht berücksichtigen, während dem Entmagnetisierungsfaktor dadurch Rechnung getragen werden soll, daß wir weiterhin unter der Feldstärke H stets das um die Größe des entmagnetisierenden Feldes verminderte innere Feld verstehen.

Für ein dem regulären Kristallsystem angehörendes Ferromagnetikum läßt sich nun die Abhängigkeit der freien Energie F von den Richtungskosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (bezogen auf die Würfelkanten!) der spontanen Magnetisierung allgemein angeben: Sie lautet:

$$\left. \begin{aligned} F = & K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) \\ & + s\{A_{11}(\alpha_1^2 - \frac{1}{3}) + A_{22}(\alpha_2^2 - \frac{1}{3}) + A_{33}(\alpha_3^2 - \frac{1}{3})\} \\ & + 2p\{A_{12}\alpha_1\alpha_2 + A_{23}\alpha_2\alpha_3 + A_{31}\alpha_3\alpha_1\} \\ & - J_s H\{\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + \alpha_3\eta_3\}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Außer den α_i treten hier 2 Sorten von Größen auf, nämlich einmal die allgemeinen Materialkonstanten K, s, p, J_s , sowie diejenigen, durch welche der spezielle Zustand des Bezirks gekennzeichnet wird: das sind die elastischen Verzerrungen A_{11}, A_{12} usw., das Magnetfeld H , sowie dessen Richtungskosinusse η_1, η_2, η_3 gegen die Würfelkanten. Die Funktion Gl. (1) ist in gewissem, hier nicht näher zu erörterndem Sinne die allgemeinste, welche mit der regulären Symmetrie des Kristallgitters verträglich ist. Die Magnetisierung wird im allgemeinen solche Richtungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bevorzugen, welche F zu einem Minimum machen. In Gl. (1) bedeutet die erste Zeile die Kristallenergie, die zweite und dritte Zeile den magnetischen Anteil der Verzerrungsenergie, die letzte schließlich die Energie gegen das äußere Feld H . Von den 4 Materialkonstanten bedeutet J_s natürlich den Betrag der spontanen Magnetisierung. Der Wert von K ergibt sich als Differenz der Magnetisierungsarbeiten U eines unverzerrten Einkristalls bei Magnetisierung nach verschiedenen kristallographischen Richtungen. Offenbar ist z. B.

$$U_{111} - U_{100} = \frac{1}{3}K [\text{erg/cm}^3]. \quad (2)$$

Die Werte s und p ergeben sich aus Messung der Magnetostriktion¹⁾: Fügt man zu F noch die rein elastische Verzerrungsenergie hinzu, so werden sich bei gegebener Magnetisierungsrichtung α_i solche Verzerrungen A_{ik} einstellen, daß die Summe $F + F_{\text{elastisch}}$ zum Minimum wird²⁾. Diese Verzerrungen bewirken speziell eine Längenänderung $\lambda = (\delta l/l)$ in Richtung der Magnetisierung (Longitudinal-Effekt), welche mit der Richtung α_i zusammenhängt durch

$$\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = -\frac{1}{3G} [s + 3(p - s)\{\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2\}], \quad (3)$$

wo G den Schubmodul der Elastizitätstheorie bedeutet. Aus Gl. (3) erhält man die Bedeutung der Zahlen s und p :

$$\lambda_{100} = -\frac{s}{3G}; \quad \lambda_{111} = -\frac{p}{3G}; \quad \lambda_{110} = -\frac{1}{3G} \cdot \frac{s+3p}{4} \quad (4)$$

und ferner für polykristallines Material durch Mittelung über alle Richtungen

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{3G} \cdot \frac{2s+3p}{5} = \frac{2}{5}\lambda_{100} + \frac{3}{5}\lambda_{111}. \quad (4a)$$

Es hat sich nun gezeigt, daß es gelingt, manche technisch wichtige Eigenschaften von polykristallinen Materialien zu beschreiben, ohne auf die Kristallenergie explizit Rücksicht zu nehmen. Das wird zunächst immer dann gestattet sein, wenn die

¹⁾ Die durch die Faktoren K, s, p gekennzeichneten Glieder von F stellen die rein magnetische Wechselwirkungsenergie der Elementarmagnete dar. Ihre Größenordnung läßt sich theoretisch errechnen. Da aber eine genauere Berechnung auf Schwierigkeiten stößt, entnimmt man ihren Zahlenwert besser aus Messungen der Magnetisierungsenergie bzw. der Magnetostriktion.

²⁾ Vgl. etwa R. Becker und M. Kersten: Z. Physik Bd. 64 (1930) S. 661.

Verzerrungen A_{ik} durch starke Verformung, Einlagerung von Fremdkörpern oder äußere elastische Beanspruchung so stark sind, daß der Verzerrungsanteil von F wesentlich überwiegt. Aber auch, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, scheinen für manche Erscheinungen, wie insbesondere die praktisch wichtige Anfangspermeabilität, allein die Verzerrungen maßgebend zu sein¹⁾. Aus dem bisher vorliegenden Versuchsmaterial läßt sich nämlich entnehmen, daß z. B. im spannungsfreien Eisen der Übergang des Magnetisierungsvektors aus der Richtung einer Würfelkante in die einer anderen fast ohne Energieaufwand erfolgt. Erst wenn durch überlagerte Spannungen die energetische Gleichheit der verschiedenen Würfelkanten aufgehoben wird, ergibt sich ein endlicher Wert der Anfangspermeabilität, die man nach Kersten tatsächlich näherungsweise so berechnen darf, als ob der Magnetisierungsvektor stetig gedreht würde und dabei nur der von der Verzerrungsenergie herführende Anteil von F zu überwinden wäre. Wir werden dieses Bild auch den nachstehenden Rechnungen zugrunde legen. Dann gehören zu einem gegebenen Spannungszustand stets zwei um 180° gegeneinander verdrehte Lagen der Magnetisierung. Von diesen beiden werden wir im Remanenzpunkt stets diejenige antreffen, welche mit der Richtung der vorhergegangenen Sättigung einen spitzen Winkel einschließt.

Im nachfolgenden soll mit Hilfe der Drehvorstellung insbesondere die Wirkung eines schwachen Magnetfeldes oder eines elastischen Zuges am Remanenzpunkt untersucht werden. Dabei wird sich die Möglichkeit einer ziemlich scharfen numerischen Prüfung der Theorie ergeben.

Solche Betrachtungen über den Einfluß der Spannungen wurden bisher²⁾ wesentlich unter der stark schematisierenden Annahme durchgeführt, daß das Material sich hinsichtlich der Magnetostriktion isotrop verhält, nach Gl. (3) also für den Spezialfall $s = p$. Nur in diesem Fall liegt das Minimum von F stets in der Richtung der größten oder kleinsten Hauptdehnung, d. h. also nur dann gilt die einfache Regel: Vorzugslage entweder in der Richtung der größten Dehnung oder in der Richtung der größten Stauchung. Dieser Fall ist zwar bei Nickel, wenn auch nur in grober Näherung, realisiert. Dagegen ist zum Beispiel beim Eisen λ_{100} positiv, λ_{111} dagegen negativ, so daß hier jene einfache und anschauliche Behandlung nicht mehr berechtigt ist. In solchen allgemeineren Fällen, d. h. also bei beliebig gegebenen Konstanten s und p , läßt sich eine etwas tiefergehende mathematische Analyse des Verzerrungsanteils von F nicht vermeiden. Wir haben dazu in folgender Weise vorzugehen. Wir schreiben zunächst den von den α_i abhängigen Anteil der Verzerrungsenergie aus Gl. (1) heraus. Er lautet

$$G = \sum_{i,k=1}^3 B_{ik} \alpha_i \alpha_k, \quad (5)$$

wo der symmetrische Tensor B_{ik} gegeben ist durch

$$B_{ik} = B_{ki} = \begin{pmatrix} sA_{11} & pA_{12} & pA_{13} \\ pA_{21} & sA_{22} & pA_{23} \\ pA_{31} & pA_{32} & sA_{33} \end{pmatrix}. \quad (5a)$$

Wir suchen diejenige Richtung des Vektors a , für welche G seinen kleinsten Wert annimmt. Sodann haben wir zu berechnen, wie diese Richtung geändert wird, wenn entweder ein Magnetfeld H oder eine zusätzliche Verzerrung zur Wirkung kommt.

¹⁾ M. Kersten: Z. Physik Bd. 71 (1931) S. 553.

²⁾ R. Becker: Z. Physik Bd. 62 (1930) S. 253 sowie M. Kersten: l. c.

2. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Verzerrungsenergie.

Wir suchen zunächst diejenige Richtung $\mathfrak{a} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, für welche die Funktion G ein Minimum hat. Das ist eine gewöhnliche Extremumsaufgabe, mit der Nebenbedingung, daß stets

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad (6)$$

ist. Nach der Methode von Lagrange hat man zu diesem Zweck das absolute Minimum der Funktion

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{ik} B_{ik} \alpha_i \alpha_k - b \cdot \sum_i \alpha_i^2 \quad (7)$$

durch Auflösen der 3 Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

zu bestimmen. Aus den 4 Gleichungen (Gl. 6 und Gl. 8) sind dann die 4 Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und b zu berechnen. Aus der Identität

$$L \equiv \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}$$

erkennt man, daß b zugleich den gesuchten Extremwert der Funktion G darstellt.

Nun haben die 3 Gleichungen (Gl. 8)

$$\left. \begin{aligned} (B_{11} - b) \alpha_1 + B_{12} \alpha_2 + B_{13} \alpha_3 &= 0 \\ B_{21} \alpha_1 + (B_{22} - b) \alpha_2 + B_{23} \alpha_3 &= 0 \\ B_{31} \alpha_1 + B_{32} \alpha_2 + (B_{33} - b) \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

für die α_i nur dann eine Lösung, wenn ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} B_{11} - b & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} - b & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - b \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

verschwindet. Das ist eine Gleichung dritten Grades für den Energiewert b . Man bezeichnet die nach der Größe geordneten drei Wurzeln von Gl. (9)

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \text{ als „Eigenwerte“ des Tensors } B_{ik}. \quad (10a)$$

Zu jeder dieser 3 Wurzeln liefert uns dann Gl. (7) die drei zugehörigen

$$\text{„Eigenvektoren“ } \mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \mathfrak{a}^{(3)} \quad (10b)$$

mit den Komponenten

$$\alpha_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}, \alpha_i^{(3)},$$

welche also (nach Gl. 8) den Gleichungen

$$\sum_k B_{ik} \alpha_k^{(r)} = b_r \alpha_i^{(r)}; \quad i, r = 1, 2, 3 \quad (11)$$

genügen. Wegen der Symmetrirelation $B_{ik} = B_{ki}$ folgt aus Gl. (10)

$$(b_r - b_s) \cdot \sum_i \alpha_i^{(r)} \alpha_i^{(s)} = 0. \quad (12)$$

Das heißt, die zu zwei verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind zueinander senkrecht.

[Durch Angabe der 3 Eigenwerte Gl. (10a) sowie der zugehörigen Eigenvektoren Gl. (10b) ist die Verzerrungsenergie Gl. (5) erschöpfend beschrieben.

Wir wollen nun diese Fundamentalgrößen aufsuchen für den Spezialfall, daß die Deformation A_{ik} hervorgerufen wird durch eine einfache Zugspannung Z , welche in der Richtung $\{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3\} = g$ gegen die Würfelkanten wirkt.

Diese erzeugt in der Richtung g eine Dehnung Z/E und senkrecht dazu eine Querkontraktion $-\frac{Z}{E}\mu$. Rechnet man diesen Spannungszustand um auf die Richtungen der Würfelkanten, so erhält man als Verzerrung hervorgerufen durch $Z[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3]$:

$$A_{ii} = \frac{Z}{E} \{\gamma_i^2(1 + \mu) - \mu\}; \quad A_{ik} = \frac{Z}{E} \gamma_i \gamma_k (1 + \mu). \quad (13)$$

Unter Benutzung der Relation $2G(1 + \mu) = E$ zwischen Dehnungsmodul E , Schubmodul G und Querkontraktion μ sowie mit der Abkürzung $\frac{\mu}{1 + \mu} = m$ und $\frac{p}{s} = \varrho$ wird also jetzt nach Gl. (5a) unser Tensor B_{ik}

$$B_{ik} = \frac{Zs}{2G} \begin{pmatrix} \gamma_1^2 - m & \varrho \gamma_1 \gamma_2 & \varrho \gamma_1 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 - m & \varrho \gamma_2 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_3 \gamma_1 & \varrho \gamma_3 \gamma_2 & \gamma_3^2 - m \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Seine Eigenwerte b sind nach Gl. (9) die Wurzeln einer kubischen Gleichung. Setzen wir

$$b = \frac{Zs}{2G} (x - m), \quad (15)$$

so muß x der Gleichung genügen

$$\begin{vmatrix} \gamma_1^2 - x & \varrho \gamma_1 \gamma_2 & \varrho \gamma_1 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 - x & \varrho \gamma_2 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_3 \gamma_1 & \varrho \gamma_3 \gamma_2 & \gamma_3^2 - x \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$-x^3 + x^2 - x(1 - \varrho^2) \{\gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2\} + (1 - \varrho)^2 (1 + 2\varrho) \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 = 0. \quad (16)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung würde zu sehr unhandlichen Ausdrücken führen. Wir sehen aber, daß sie für zwei spezielle Werte des Zahlenverhältnisses

$$\varrho = \frac{p}{s} = \frac{\lambda_{111}}{\lambda_{100}}$$

zu einfachen Lösungen führt. Einmal im Fall der Isotropie: $\varrho = 1$. In diesem Fall lauten die 3 Lösungen von (16): 0, 0, 1. Welche dieser 3 Lösungen den tiefsten Eigenwert b_1 liefert, hängt nach Gl. (15) vom Vorzeichen des Produktes Zs ab.

Zs positiv (Zugspannung bei negativer Magnetostriktion oder Druckspannung bei positiver) liefert, wenn man die für das Folgende unwesentliche Konstante $-\frac{Zs}{2G}m$ fortläßt,

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 & \alpha^{(1)} &\perp \text{ auf } Z, \\ b_2 &= 0 & \alpha^{(2)} &\perp \text{ auf } Z, \\ b_3 &= \frac{Zs}{2G} & \alpha^{(3)} &\parallel \text{ zu } Z. \end{aligned}$$

Dagegen wird für Zs negativ (Druckspannung bei negativer oder Zugspannung bei positiver Magnetostriktion)

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{-Zs}{2G} & \alpha^{(1)} &\parallel \text{ zu } Z, \\ b_2 &= 0 & \alpha^{(2)} &\perp \text{ auf } Z, \\ b_3 &= 0 & \alpha^{(3)} &\perp \text{ auf } Z. \end{aligned}$$

Das entspricht dem bekannten, mehrfach diskutierten Verhalten für den Fall der isotropen Magnetostriktion.

Wir bemerken aber, daß die Gl. (16) auch in dem Fall $\varrho = -\frac{1}{2}$ sich noch recht einfach lösen läßt. Nach Gl. (4) ist das derjenige Fall, daß λ_{100} und λ_{111} verschiedenes Vorzeichen haben und λ_{100} doppelt so groß ist wie λ_{111} . Dieser Fall ist tatsächlich näherungsweise beim reinen Eisen realisiert. In diesem Fall hat Gl. (16) die 3 Lösungen

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ x'' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-3w}, \\ x''' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-3w}, \end{aligned} \tag{17}$$

wo w als Abkürzung für

$$w = \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \gamma_3^2 \gamma_1^2$$

gebraucht ist. w ist = 0 für die Richtung der Würfelkante, = $\frac{1}{4}$ für die Flächendiagonale und = $\frac{3}{8}$ für die Raumdiagonale. Wir haben also für die Abhängigkeit der 3 Eigenwerte von der Zugrichtung das in Bild 1 dargestellte Verhalten:

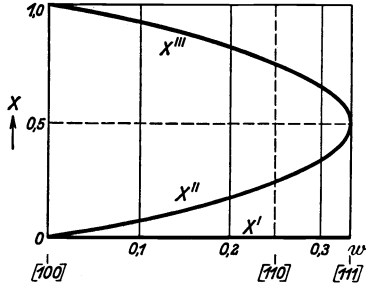


Bild 1.

Ob x' oder x''' dem kleinsten Eigenwert entspricht, hängt nach Gl. (16) wieder vom Vorzeichen des Produktes $Z \cdot s$ ab. Beim Eisen (s negativ) wäre für Druckspannungen $b_1 = 0$, für Zugspannungen dagegen

$$b_1 = -\frac{Zs}{2G} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-3w} \right).$$

Der zu einem bestimmten Eigenwert x gehörige Eigenvektor α_i ergibt sich durch Auflösen der 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} (\gamma_1^2 - x)\alpha_1 + \varrho\gamma_1\gamma_2\alpha_2 + \varrho\gamma_1\gamma_3\alpha_3 &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

allgemein nach einer elementaren Rechnung

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \frac{\gamma_1}{x + (\varrho - 1)\gamma_1^2} : \frac{\gamma_2}{x + (\varrho - 1)\gamma_2^2} : \frac{\gamma_3}{x + (\varrho - 1)\gamma_3^2}. \tag{18}$$

Einen verhältnismäßig einfachen Ausdruck für den Winkel ϑ zwischen der energetisch bevorzugten Richtung $\alpha^{(1)}$ der Magnetisierung und der Zugrichtung g erhält man daraus im Fall $\varrho = -\frac{1}{2}$ nur für den Eigenwert $x = 0$, d. h. für einen Druck in der Richtung $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. In diesem Fall folgt aus Gl. (18) durch weitere Rechnung

$$\cos \vartheta = \sum_i \alpha_i^{(1)} \gamma_i = \frac{3\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2}}. \tag{19}$$

Die Gl. (18) gibt zwar die strenge Lösung des hier behandelten Hauptachsenproblems; sie scheint aber eine allgemeine und übersichtliche Diskussion kaum zu gestatten. Solange man sich auf die Untersuchung spezieller Zugrichtungen wie (100) oder (111) beschränkt findet man die Lösungen leicht unmittelbar aus der Gl. (16).

3. Die Anfangspermeabilität bei starker Verzerrung.

Auf unser Material wirke jetzt außer dem Tensor der Verzerrungsenergie B_{ik} noch ein schwaches Magnetfeld H in der Richtung $\eta_1 \eta_2 \eta_3$. Zur Bestimmung der energetisch günstigsten Lage haben wir nunmehr nach Gl. (1) das Minimum der Funktion

$$\sum_{i,k} B_{ik} \alpha_i \alpha_k - H J_s \sum_i \alpha_i \eta_i - b \sum_i \alpha_i^2 \tag{20}$$

aufzusuchen. Für $H = 0$ ist dieses Minimum gegeben durch den Vektor $\alpha^{(1)}(\alpha_i^{(1)})$ mit dem Eigenwert b_1 . Unter der Wirkung eines schwachen Feldes H wird diese Gleichgewichtslage sich nur wenig verschieben, und zwar muß diese Verschiebung offenbar senkrecht stehen auf dem Ausgangsvektor $\alpha^{(1)}$. Wir suchen also die aus Gl. (20) folgende Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_k B_{ik} \alpha_k = \frac{1}{2} H J_s \eta_i + b \alpha_i \quad (21)$$

zu befriedigen durch den Ansatz $\alpha = \alpha^{(1)} + p_2 \alpha^{(2)} + p_3 \alpha^{(3)}$, also

$$\alpha_i = \alpha_i^{(1)} + p_2 \alpha_i^{(2)} + p_3 \alpha_i^{(3)}, \quad (22)$$

wo durch p_2 und p_3 die gesuchte Einwirkung des Feldes beschrieben wird. Auch der neue Eigenwert b wird sich von b_1 nur wenig unterscheiden:

$$b = b_1 + \varepsilon. \quad (23)$$

Trägt man Gl. (22) und Gl. (23) in Gl. (21) ein so erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (11) und unter Weglassung aller Größen welche Produkte der kleinen Größen H , p_2 , p_3 , ε unter sich enthalten:

$$(b_2 - b_1) p_2 \alpha_i^{(2)} + (b_3 - b_1) p_3 \alpha_i^{(3)} = \varepsilon \alpha_i^{(1)} + \frac{1}{2} H J_s \eta_i.$$

Wegen der Orthogonalität der Vektoren $\alpha^{(i)}$ folgt daraus nach Multiplikation mit $\alpha_i^{(2)}$ bzw. $\alpha_i^{(3)}$ und Summation über den Index i :

$$p_2 = \frac{1}{2} H J_s \cdot \frac{\sum_i \alpha_i^{(2)} \eta_i}{b_2 - b_1}; \quad p_3 = \frac{1}{2} H J_s \cdot \frac{\sum_i \alpha_i^{(3)} \eta_i}{b_3 - b_1}.$$

Es sei nun

ϑ = Winkel zwischen Feldrichtung und der Richtung der spontanen Magnetisierung.

Ferner

ϑ_r = der Winkel zwischen Feld und Eigenvektor $\alpha^{(i)}$;

also

$$\cos \vartheta = \sum_i \alpha_i \eta_i; \quad \cos \vartheta_r = \sum_i \alpha_i^{(r)} \eta_i.$$

Dann ist nach Gl. (22) also die Richtung α der Magnetisierung bei schwachem Feld gegeben durch

$$\alpha = \alpha^{(1)} + \frac{1}{2} H J_s \left[\alpha^{(2)} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{b_2 - b_1} + \alpha^{(3)} \cdot \frac{\cos \vartheta_3}{b_3 - b_1} \right].$$

Daraus ergibt sich durch skalare Multiplikation mit η_i für den Winkel ϑ :

$$\cos \vartheta - \cos \vartheta_1 = \frac{1}{2} H J_s \left\{ \frac{\cos^2 \vartheta_2}{b_2 - b_1} + \frac{\cos^2 \vartheta_3}{b_3 - b_1} \right\}.$$

Nach Multiplikation mit J_s ergibt sich daraus der Beitrag des ins Auge gefaßten Bezirks zur Suszeptilität im Limes $H = 0$:

$$\kappa = \frac{J_s (\cos \vartheta - \cos \vartheta_1)}{H} = \frac{1}{2} J_s^2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta_2}{b_2 - b_1} + \frac{\cos^2 \vartheta_3}{b_3 - b_1} \right). \quad (24)$$

Bei einem polykristallinen Material sind alle Werte von $\cos \vartheta_i$ gleich wahrscheinlich, so daß wir für die Anfangspermeabilität erhalten ($\overline{\cos^2 \vartheta_1} = \frac{1}{3}$):

$$\frac{\partial J}{\partial H} = \kappa_0 = \frac{1}{6} J_s^2 \left(\frac{1}{b_2 - b_1} + \frac{1}{b_3 - b_1} \right). \quad (25)$$

Zur vollständigen Diskussion müßte man natürlich erst eine detaillierte Vorstellung über den Deformationszustand besitzen und dann damit durch Lösung des in Ab-

schnitt 2 diskutierten Hauptachsenproblems die Energiewerte $b_1 b_2 b_3$ ermitteln. In roher Abschätzung kann man aus den dortigen Überlegungen über die Größenordnung von $b_2 - b_1$ und $b_3 - b_1$ etwa sagen:

$$b_2 - b_1 \approx b_3 - b_1 \approx \frac{|\sigma_i s|}{2G},$$

wobei σ_i (an Stelle des oben benutzten Zuges Z) so etwas wie eine mittlere innere Spannung bedeutet. Unter Einführung einer Magnetostriktion

$$|\lambda| \approx \frac{s}{3G},$$

also

$$b_2 - b_1 \approx \frac{2}{3} |\sigma_i \lambda|$$

liefert dann Gl. (25)

$$\kappa_0 \approx \frac{2}{9} J_s^2 \cdot \frac{1}{|\sigma_i \lambda|}. \quad (25a)$$

Der Zusammenhang zwischen „inneren Spannungen“ σ_i und Anfangspermeabilität wurde in dieser Form von Kersten angegeben und in sehr fruchtbarer Weise diskutiert. Es scheint danach in der Tat sehr zweckmäßig, umgekehrt aus dem gemessenen κ_0 den für viele magnetische Eigenschaften maßgebenden Verformungsgrad σ_i geradezu durch Gl. (25a) zu definieren, solange die strengere, durch Gl. (24) und Gl. (25) gegebene Beziehung sich einer praktisch brauchbaren Auswertung entzieht.

4. Die Wirkung einer kleinen zusätzlichen Verzerrung.

Wir nehmen wieder an, wir hätten das Hauptachsenproblem die Verzerrungsenergie

$$\sum_k B_{ik} \alpha_k^{(r)} = b_r \alpha_i^{(r)} \quad (26)$$

gelöst und die Eigenwerte b_r samt den Eigenvektoren $\alpha^{(r)}$ gefunden. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß b_1 wirklich kleiner ist als b_2 . Jetzt soll zu den B_{ik} eine kleine zusätzliche Verzerrung ζ_{ik} hinzugefügt werden. Wir suchen die Lösungen des dadurch entstehenden neuen Problems

$$\sum (B_{ik} + \zeta_{ik}) \alpha_k^{(r)} = b'_r \cdot \alpha_i^{(r)} \quad (27)$$

unter der Annahme, daß die Störung ζ_{ik} klein gegen B_{ik} ist und daß auch die neuen Größen b'_r und $\alpha^{(r)}$ von den alten nur wenig verschieden sind. Dazu versuchen wir die Lösung

$$\alpha^{(r)} = \alpha^{(r)} + \sum_s c_{sr} \alpha^{(s)}$$

oder

$$\alpha_i^{(r)} = \alpha_i^{(r)} + \sum_s c_{sr} \alpha_i^{(s)}$$

und

$$b'_r = b_r + \varepsilon_r$$

wo wir die c_{sr} und ε_r wieder als kleine Größen ansehen. Setzen wir das in Gl. (27) ein, so erhalten wir unter Weglassung aller Größen, welche klein von höherer Ordnung sind, wegen Gl. (26):

$$\sum_s c_{sr} (b_s - b_r) \alpha_i^{(s)} = \varepsilon_r \alpha_i^{(r)} - \sum_k \zeta_{ik} \alpha_k^{(r)}$$

und daraus nach Multiplikation mit $\alpha_i^{(r)}$ und Summation über i wegen der Orthogonalität der $\alpha^{(r)}$:

$$\varepsilon_r = \sum_{ik} \alpha_i^{(r)} \zeta_{ik} \alpha_k^{(r)}$$

und

$$c_{sr} = - \frac{\sum_{i,k} \alpha_i^{(s)} \zeta_{ik} \alpha_k^{(r)}}{b_s - b_r}.$$

Bezeichnen wir noch mit

$$\zeta^{(r,s)} = \sum_{i,k} \alpha_i^{(r)} \zeta_{ik} \alpha_k^{(s)}$$

die Komponenten des Störungstensors ζ_{ik} nach den Eigenvektoren $\alpha^{(r)}$, so haben wir also für die Richtung der neuen Gleichgewichtslage:

$$\alpha'^{(1)} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \cdot \frac{\zeta^{(2,1)}}{b_2 - b_1} - \alpha^{(3)} \cdot \frac{\zeta^{(3,1)}}{b_3 - b_1}. \quad (28)$$

Besteht die Störung speziell in einem Zug σ in der Richtung $g = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)$, so ist nach unseren obigen Betrachtungen (etwa Gl. 14):

$$\zeta_{ik} = \frac{\sigma s}{2G} \begin{pmatrix} \gamma_1^2 - m & \varrho \gamma_1 \gamma_2 & \varrho \gamma_1 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_2 \gamma_1 & \gamma_2^2 - m & \varrho \gamma_2 \gamma_3 \\ \varrho \gamma_3 \gamma_1 & \varrho \gamma_3 \gamma_2 & \gamma_3^2 - m \end{pmatrix}$$

($G =$ Schubmodul, $s = -3G \lambda_{100}$, $\varrho = \frac{\lambda_{111}}{\lambda_{100}}$).

Bezeichnet man, wie oben, mit ϑ_r den Winkel zwischen den Richtungen g und $\alpha^{(r)}$, so folgt nach leichter Zwischenrechnung

$$\zeta^{(1,2)} = \sum_{i,o} \alpha_i^{(1)} \zeta_{ik} \alpha_k^{(2)} = \frac{\sigma s}{2G} \left\{ \varrho \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 + (1 - \varrho) \sum_i \gamma_i^2 \cdot \alpha_i^{(2)} \cdot \alpha_i^{(1)} \right\}. \quad (29)$$

Wir interessieren uns insbesondere für die Änderung der in die Zugrichtung g fallenden Komponente $J_s \cos \vartheta$ der Magnetisierung. Dafür ergibt sich aus Gl. (28) und Gl. (29):

$$\cos \vartheta - \cos \vartheta_1 = - \frac{\sigma s}{2G} \left[\frac{\varrho \cos^2 \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_1 + (1 - \varrho) \cos \vartheta_2 \sum_i \gamma_i^2 \alpha_i^{(2)} \alpha_i^{(1)}}{b_2 - b_1} + \frac{\dots}{b_3 - b_1} \right]. \quad (30)$$

Zu einer Aussage über polykristallines Material gelangt man von hier aus durch geeignete Mittelung über die Lagen des Zuges σ gegen die Hauptachsen α_i des Tensors B_{ik} . Im völlig entmagnetisierten Zustand gibt Gl. (30) bei der Mittelung natürlich Null. Dagegen erhalten wir eine ganz bestimmte Aussage über das Verhalten im Remanenzpunkt, wenn wir einen Zug parallel der pauschalen remanenten Magnetisierung ausüben: Wir betrachten also einen Bezirk welcher zunächst in der Richtung g zur Sättigung magnetisiert war und dessen J_s -Vektor nun nach Abschalten des Feldes in diejenige Richtung $\alpha^{(1)}$ zurückgegangen ist, welche mit g einen spitzen Winkel ($\leq 90^\circ$) bildet. In diesem Fall haben wir also nur über diejenigen g -Werte zu mitteln, welche auf der Halbkugel $\cos \vartheta_1 \geq 0$ liegen. Man erhält somit wegen $\cos \vartheta_2 = \sin \vartheta_1 \cdot \cos \varphi$ (vgl. Bild 2):

$$\overline{\cos^2 \vartheta_2 \cos \vartheta_1} = \int_{\cos \vartheta_1 = 0}^1 \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi = 0}^{2\pi} \cos \vartheta_1 \cdot \sin^2 \vartheta_1 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \cdot d(\cos \vartheta_1),$$

also

$$\overline{\cos^2 \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_1} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) x dx = \frac{1}{8}.$$

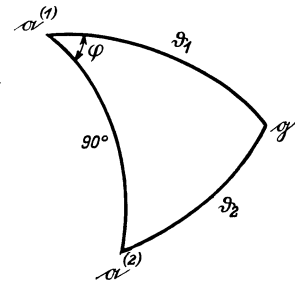


Bild 2.

Zur Berechnung des zweiten in Gl. (30) auftretenden Mittelwerts drücken wir γ_i durch die Projektionen von g auf die Hauptachsen $\alpha^{(r)}$ aus:

$$g = \sum_r p_r \alpha^{(r)} \quad \text{oder} \quad \gamma_i = \sum_r p_r \alpha_i^{(r)},$$

wo bedeuten

$$p_r = \cos \vartheta_1; \quad p_2 = \sin \vartheta_1 \cdot \cos \varphi; \quad p_3 = \sin \vartheta_1 \cdot \sin \varphi;$$

alsdann wird

$$\cos \vartheta_2 \cdot \sum_i \gamma_i^2 \cdot \alpha_i^{(2)} \cdot \alpha_i^{(1)} = p_2 \cdot \sum_{r,l,i} p_r p_l \alpha_i^{(r)} \alpha_i^{(l)} \alpha_i^{(2)} \alpha_i^{(1)}.$$

Bei der Mittelung über die Halbkugel $\cos \vartheta_1 \geq 0$ liefern (bei festgehaltenen Richtungen $\alpha^{(r)}$) nur die beiden Summanden mit $r = 1, l = 2$ und mit $r = 2, l = 1$ einen Beitrag $\overline{p_2^2 p_1} = \frac{1}{8}$, so daß man erhält

$$\overline{\cos \vartheta_2 \cdot \sum_i \gamma_i^2 \cdot \alpha_i^{(2)} \alpha_i^{(1)}} = \frac{1}{4} \sum_i (\alpha_i^{(1)})^2 \cdot (\alpha_i^{(2)})^2.$$

Mittelt man jetzt auch noch über alle Richtung $\alpha^{(r)}$ des Spannungstensors B_{ik} , so liefert die noch verbleibende Summe \sum_i im Mittel $\frac{1}{3}$, so daß im ganzen aus Gl. (30) folgt

$$\overline{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1} = -\frac{\sigma}{2G} \left[\frac{p}{8} + \frac{s-p}{20} \right] \cdot \left(\frac{1}{b_2 - b_1} + \frac{1}{b_3 - b_1} \right).$$

Unter Einführung der mittleren Sättigungsmagnetostriktion

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{3G} \frac{2s+3p}{5}$$

wird daher

$$\overline{\cos \vartheta - \cos \vartheta_1} = \frac{3}{16} \sigma \cdot \bar{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{b_2 - b_1} + \frac{1}{b_3 - b_1} \right].$$

Da wir nur kleine Zugspannungen σ in Betracht gezogen haben, ergibt sich wegen $J = J_s \cdot \overline{\cos \vartheta}$ endlich als Folge von Gl. (30):

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma} = \frac{3}{16} J_s \bar{\lambda} \left[\frac{1}{b_2 - b_1} + \frac{1}{b_3 - b_1} \right]. \quad (31)$$

Ein Vergleich von Gl. (31) mit Gl. (25) für die Anfangspermeabilität zeigt, in welchem Sinne am Remanenzpunkt durch ein Magnetfeld H oder durch einen Zug σ die gleiche Änderung der Magnetisierung J bewirkt werden kann. Als Hemmung treten in beiden Fällen die von den inneren Spannungen bewirkten Energieunterschiede $b_2 - b_1$ und $b_3 - b_1$ in den Hauptachsenrichtungen des Tensors B_{ik} auf. Bilden wir daher den Quotienten aus beiden Größen, so fällt der durch die b_r gegebene spezielle Verformungszustand überhaupt heraus:

$$\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial J}{\partial \sigma} \right)_H = \frac{9}{8} \frac{\bar{\lambda}}{J_s}. \quad (32)$$

5. Die Magnetostriktion am Remanenzpunkt.

Gl. (32) sollte am Remanenzpunkt streng gültig sein, solange für die Magnetisierung nur Drehprozesse in Frage kommen. Da eine unmittelbare experimentelle Prüfung bisher nicht vorliegt¹⁾, wollen wir noch einen Zusammenhang herstellen zwischen der in Gl. (32) berechneten Größe und der kürzlich von Lichtenberger gemessenen Magnetostriktion am Remanenzpunkt. Wenn nämlich die Länge l und die Magnetisierung J eines Stabes beide als Funktionen von Feld H und Zugspannung σ

¹⁾ Daß κ und $\partial J / \partial \sigma$ am Remanenzpunkt in gleicher Weise von den inneren Spannungen abhängen, wurde von M. Kersten experimentell sichergestellt. Seine Beobachtungen sollen demnächst mitgeteilt werden.

beschrieben sind, so verlangt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik notwendig die Relation

$$\frac{\partial l}{\partial H} = \frac{\partial J}{\partial \sigma}.$$

Beschreibt man nun l nicht als Funktion von H und σ , sondern von J und σ , so wird

$$\frac{\partial l}{\partial H} = \frac{\partial l}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial H} = \frac{\partial l}{\partial J} \kappa.$$

Nach Gl. (32) muß also am Remanenzpunkt auch gelten¹⁾

$$\frac{\partial l}{\partial J} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial J}{\partial \sigma} = \frac{9}{8} \frac{\bar{\lambda}}{J_s}. \quad (33)$$

Die Längenänderung beim Durchgang durch den Remanenzpunkt wurde von Lichtenberger²⁾ am Nickel sehr sorgfältig gemessen. Er fand $\partial l/\partial J = -0,82 \cdot 10^{-7}$, während wir aus Gl. (33) mit den für Nickel gültigen Zahlen $\bar{\lambda} = -3,6 \cdot 10^{-5}$ und $J_s = 490$ erhalten: $-0,83 \cdot 10^{-7}$, in praktisch vollkommener Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert. Allerdings muß dabei erwähnt werden, daß Lichtenberger selbst bei seinem Resultat einen Fehler von mehr als 10% für möglich hält wegen der an den Enden des Stabes sicher nicht ganz homogenen Magnetisierung.

Zusammenfassung.

Die vorstehende Notiz enthält die mathematischen Grundlagen zu einer strengeren rechnerischen Behandlung der auf Drehprozessen beruhenden Magnetisierungsvorgänge. In physikalischer Hinsicht bringt sie nur eine Bestätigung von Zusammenhängen, die im wesentlichen bereits auf Grund primitiver Behandlungsmethoden vorher bekannt waren³⁾.

¹⁾ Die Formel (Gl. 33) wurde für den Fall der isotropen Magnetostriktion $\lambda_{100} = \lambda_{111}$ in anschaulicher Weise bereits von M. Kersten [Z. Physik Bd. 72 (1931) S. 500] angegeben, allerdings mit dem nicht korrekten Zahlenfaktor 3/2 anstatt 9/8.

²⁾ F. Lichtenberger: „Remanenz und Hysteresis der Magnetostriktion bei Nickel.“ Z. Physik, im Druck.

³⁾ In diesem Zusammenhang sei auf eine in der Elektr. Nachr.-Techn. demnächst erscheinende zusammenfassende Darstellung von F. Preisach besonders hingewiesen.

Über ein astatisches Kompensationsmagnetometer.

Von **Hans Gerdien** und **Hans Neumann**.

Mit 5 Bildern.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 8. Juli 1932.

Ogleich für die Durchführung magnetischer Messungen, insbesondere für die Untersuchung ferromagnetischer Legierungen, überwiegend die ballistische Methode oder Wechselstrommessungen an ringförmigen Proben in der Brücke verwendet werden, sind doch magnetometrische Messungen nicht entbehrlich geworden. Sie ergeben die Möglichkeit, auch langsam verlaufende Änderungen zu verfolgen, die durch die anderen Methoden nicht erfaßt werden können; bei hochpermeablen Materialien, z. B. Permalloy, können — besonders bei großen Probequerschnitten — die durch Wirbelströme bewirkten Nachwirkungszeiten erhebliche Beträge annehmen. Aber auch für die Messung magnetisch sehr harter Materialien, wie z. B. bei der Bestimmung des Temperaturkoeffizienten von Dauermagnetstahl, ist die magnetometrische Methode sehr bequem in der Anwendung. Dennoch ist die Scheu vor der Anwendung dieser Methoden weit verbreitet. Sie ist auf die Störungsempfindlichkeit der magnetometrischen Messungen zurückzuführen. Die bisher durch keine der beschriebenen Meßmethoden einwandfrei beseitigte Störungsempfindlichkeit hatte den einen von uns (H. G.) schon vor längerer Zeit dazu geführt, grundsätzlich den Einfluß der zu untersuchenden Probe auf das Magnetometersystem durch sehr große Annäherung der Probe gegenüber den Störfeldern hervorzuheben¹⁾. Es wurde damals die einfache Magnetnadel, auf die das Probestück in erster Hauptlage wirkte, durch Tordieren des Aufhängefadens angenähert in die Ruhelage zurückgeführt und der Restausschlag zur Korrektur der angenähert herbeigeführten Kompensation benutzt. Es konnte so auch bei der Messung verhältnismäßig starker magnetischer Momente der Probe eine Änderung der Nadelmagnetisierung vermieden werden. Schon damals war beabsichtigt gewesen, die Empfindlichkeit des Instrumentes durch Astasierung mittels einer zweiten, entgegengesetzt gleichmagnetisierten Nadel zu steigern, und die Messung so auch von der in die Korrektur eingehenden Horizontalkomponente des Erdmagnetismus frei zu machen. Dieser Weg ist von F. Kohlrausch und L. Holborn in ihrem störungsfreien Torsionsmagnetometer²⁾ beschritten worden.

¹⁾ H. Gerdien: Über den Einfluß der Torsion auf das magnetische Moment zirkular magnetisierter Nickel-Eisen-Drähte, S. 9ff. Diss. Göttingen 1903.

²⁾ F. Kohlrausch u. L. Holborn: Über ein störungsfreies Torsionsmagnetometer. Ann. Physik (4) Bd. 10 (1903) S. 287.

Dieses Magnetometer wird in seinem Wert etwas beeinträchtigt durch die Veränderung der Astasierung, die durch eine Temperaturdifferenz zwischen der oberen und der unteren Magnetnadel herbeigeführt wird. Störender für die praktische Anwendung in der Technik ist aber die Unmöglichkeit, die Empfindlichkeit des Instrumentes bequem den wechselnden Bedürfnissen anpassen zu können. Als daher im Jahre 1921 an den einen von uns (H. G.) die Aufgabe herantrat, ein für technische Messungen in magnetisch stark gestörter Umgebung geeignetes Magnetometer zu schaffen, entschloß er sich, ein Prinzip zu verwenden, das von H. Th. Simon und E. Madelung beschrieben worden ist¹⁾. Sie verwendeten bei ihrem Magnetometersystem statt eines permanenten Magneten eine drehbar aufgehängte stromdurchflossene Spule²⁾ und kompensierten den von der Probe herrührenden Ausschlag durch das Feld einer ebenen Kreisspule, durch die ein gemessener Strom geschickt wurde. H. Th. Simon und E. Madelung haben bereits den Vorschlag gemacht, auch das von ihnen benutzte Meßverfahren durch Astasierung störungsunempfindlich zu machen. Wie bei jedem astatischen System kann ein voller Erfolg nur dann erzielt werden, wenn das Störungsfeld hinreichend homogen, d. h. am Orte der oberen und unteren Spule nach Richtung und Größe praktisch das gleiche ist. Hat man es mit Proben zu tun, die eine sehr hohe Permeabilität aufweisen, und ist man gezwungen, sie zwecks Messung sehr kleiner Koerzitivkräfte in sehr geringen Abstand vom Meßsystem zu bringen, so bedingt die Anordnung des ebenen Kompensationskreises von H. Th. Simon und E. Madelung Änderungen des auf die Probe wirkenden Feldes, die sich schwer rechnerisch berücksichtigen lassen, weil das Feld des ebenen Kompensationskreises in der Längsachse der Probe nicht homogen ist. Wir haben daher den im folgenden beschriebenen Weg beschritten.

Das drehbare System des Magnetometers besteht aus zwei von dem gleichen Strom durchflossenen Spulen, die nach ihrer Windungsfläche möglichst genau entgegengesetzt gleichgebaut sind. Auf die untere Spule³⁾ wirkt in der ersten Hauptlage die in der Feldspule liegende Probe. Das Feld der Feldspule kann, wie üblich, durch eine auf der entgegengesetzten Seite der unteren Spule liegende, ebenfalls vom Feldstrom durchflossene Kompensationsspule am Ort der unteren Spule auf Null gebracht werden, so daß nur das von der Probe ausgehende Feld auf die untere Spule des drehbaren Systems wirkt. Auf die obere Spule wirkt das magnetische Feld einer stromdurchflossenen eisenfreien Toroidspule ein, in der ein meßbarer Kompensationsstrom so einreguliert wird, daß er das von der Probe auf die untere Spule ausgeübte Drehmoment gerade kompensiert. Wünscht man durch sehr große Annäherung der Probe an das Meßsystem besonders hohe Empfindlichkeit zu erreichen, so kann man als Feldspule eine östlich und westlich der unteren Spule durchlaufende Magnetisierungsspule verwenden, deren Feldwirkung auf die untere Spule durch eine besondere, auf dem Toroid angebrachte Wicklung kompensiert wird, die auf die obere Spule wirkt. Letztere wird dabei immer von einem dem Feldstrom proportionalen, durch Abzweigung von diesem erhaltenen Strom durchflossen.

¹⁾ H. Th. Simon u. E. Madelung: Über ein neues magnetometrisches Verfahren zur Messung magnetischer Momente. Physik. Z. Bd. 5 (1904) S. 410—413.

²⁾ Das Prinzip der drehbaren, stromdurchflossenen Spule für magnetometrische Messungen ist später auch von M. Siegbahn (Diss. Lund 1911) benutzt worden.

³⁾ Die Wirkung auf die obere Spule kann in bekannter Weise auf einen kleinen Bruchteil dieser gebracht werden.

Die Feldspule kann für diesen Zweck so aus einzelnen, in gleichem Abstände voneinander liegenden Teilen aufgebaut werden, daß sie die Möglichkeit gibt, das Magnetometersystem in den Zwischenraum zwischen zwei benachbarten Teilen einzubringen. Es wird so erreicht, daß die Probe auch bei sehr großer Annäherung an das System sich in einem wesentlich homogenen Feld befindet. Benutzt man, um die Einwirkung der Probe auf die obere Drehspule nach Möglichkeit klein zu halten, einen erheblichen Abstand zwischen den beiden Drehspulen, so wird es in einem nicht besonders für magnetische Messungen eingerichteten Gebäude durch die Nachbarschaft von Stahlträgern in den Decken und anderen stählernen Gegenständen, die noch dazu in einem Laboratoriumsbetriebe häufig ihren Platz wechseln (stählerne Gasflaschen), nicht leicht möglich sein, einen Ort zu finden, an dem das Störungsfeld hinreichend homogen ist, so daß die obere und die untere Spule, vor allem auch bei zeitlichen Änderungen des Störungsfeldes, die gleichen Einwirkungen erfahren¹⁾. Es hat sich deswegen als notwendig herausgestellt, Mittel aufzuwenden, um die erforderliche Homogenität des Feldes künstlich zu erzeugen. Wir haben zu diesem Zwecke ein System symmetrisch zur oberen Drehspule liegender, magnetisch ost-westlich und nord-südlich orientierter Helmholtz-Gaugain-Spulen angeordnet, die wir von Strömen derart durchfließen lassen, daß nach Richtung und Größe der gewünschte Zusatzfeldvektor am Orte der oberen Spule erzeugt wird. Um die in den ost-westlich und nord-südlich orientierten Zusatzfeldspulen verlaufenden Stromkomponenten bequem so justieren zu können, daß der gesuchte Zusatzvektor in kurzer Zeit gefunden werden kann, haben wir uns einer Einrichtung bedient, die es erlaubt, den Betrag des Vektors getrennt von seiner Richtung zu verändern (siehe unten). Es läßt sich so leichter eine Übersicht darüber für den Beobachter gewinnen, was die von ihm getroffenen Maßnahmen im einzelnen für eine Wirkung haben, als wenn er gezwungen wäre, die Komponenten des Feldzusatzvektors einzeln zu justieren²⁾.

Das von uns benutzte magnetometrische Meßverfahren läßt, wenn die Windungsflächen der beiden Drehspulen hinreichend genau gleich sind und die Dimensionen der zur Kompensation benutzten Toroidspule genügend genau gemessen werden können, sogar eine absolute Messung des am Orte der unteren Spule wirksamen Feldes zu, das von der Probe erzeugt wird. Für diesen Zweck muß der Aufbau der Toroid-Kompensationsspule ähnlich dem oben für die Feldspule geschilderten so getroffen werden, daß die obere Drehspule sich in den Zwischenraum zwischen zwei benachbarte Teilspulen des Toroides einbauen läßt. Man kann dann mit hinreichender Genauigkeit, besonders wenn die Dimensionen der Teilspulen im Verhältnis zu denen der Drehspulen groß gewählt werden, das Kompensationsfeld am Orte der oberen Drehspule als homogen ansetzen und aus den Dimensionen berechnen. Es ist dann entgegengesetzt gleich dem von der Probe am Orte der unteren Drehspule erzeugten Feld. Bequemer läßt sich die Eichung des Magnetometers in bekannter Weise durch Einwirkenlassen einer von gemessenem Strom durchflossenen ebenen Flachspule von gemessenen Dimensionen oder ballistisch bestimmter Windungsfläche durchführen.

¹⁾ Bei unserer Magnetometeranordnung ist das Erdfeld am Ort der oberen Spule etwa 4% kleiner als am Ort der $\frac{1}{2}$ m tiefer gelegenen Spule.

²⁾ Gelegentlich haben wir auch die zweite, auf der Toroidspule angebrachte Wicklung zur Erzeugung einer Ost-West-Komponente des Zusatzfeldes am Orte der oberen Spule allein benutzt.

Als wesentliches Vorteil des von uns benutzten Magnetometers betrachten wir die bequeme Wahl der Empfindlichkeit, die sich innerhalb weiter Grenzen durch die Drehspulen durchfließenden Meßstrom einstellen läßt. Der Fortfall der permanenten Magnete am Meßsystem und ihr Ersatz durch stromdurchflossene Drehspulen ergibt den weiteren Vorteil, daß man bei kurzzeitigen, sehr großen magnetischen Störungen das empfindliche Meßsystem durch Ausschalten des Meßstromes vor Stößen und Aufpendelungen bewahren kann. Bei Präzisionsmessungen läßt sich eine hohe Empfindlichkeit nur dann erreichen, wenn es gelingt, die Inhomogenität des lokalen Feldes praktisch zu beseitigen, eine Wirkung, die sich durch die Anwendung des Zusatzvektors am Orte der oberen Spule leicht erzielen läßt. Es hat sich erwiesen, daß man während einiger Stunden sehr gut mit einem einmal eingestellten Zusatzvektor durchkommen kann.

Fühlbarer als der durch die Inhomogenität des Erdfeldes bedingte Fehler ist der Winkelfehler, der von der nicht genauen Parallelstellung der beiden Drehspulen zueinander herrührt¹⁾. Dieser bedingt einen ungefähr ost-westlich gerichteten resultierenden Vektor, dessen Drehmoment im Erdfeld naturgemäß von der Einstellung des Magnetometers abhängt. Da wir jedoch eine Nullmethode verwenden, spielt diese letztere Abhängigkeit praktisch keine Rolle. Das Drehmoment des resultierenden Vektors kann durch einen von dem Systemstrom abgezweigten Strom, der durch eine zweite Wicklung der Helmholtz-Gaugain-Spulen fließt, kompensiert werden²⁾. Im übrigen ist natürlich die Tageszeit, in der der übrige Laboratoriumsbetrieb ruht, die günstigste für die Ausführung magnetischer Feinmessungen. Für Messungen höchster Präzision empfiehlt sich auf alle Fälle die Überwachung des Erdfeldes durch ein Deklinations- und Horizontalintensitäts-Variometer.

Die Empfindlichkeit des Magnetometers ist proportional dem Produkt von Windungsfläche und Meßstromstärke der Drehspulen und umgekehrt proportional der Direktionskraft der Aufhängung. Wünscht man für praktische Messungen eine bestimmte Einstellzeit des Systems bei hinreichend großer Dämpfung zu erhalten, so führen nach bekannten Grundsätzen der Meßtechnik alle Überlegungen dazu, ein möglichst leichtes System zu verwenden.

Die Empfindlichkeit ist aus thermischen Gründen dann auf bestimmte Meßstromstärken hin begrenzt, und zwar liegt die Grenze nicht in der Entfestigung der Spulen durch unzulässige Erwärmung, sondern in der thermischen Störung durch unvermeidliche Wirbelbildung innerhalb des Gehäuses, der man allerdings durch möglichst symmetrische Ausbildung des Gehäuses in der Nachbarschaft der Spulen weitgehend entgegenwirken kann. Für kurze Zeit läßt sich der Meßstrom über die bei Dauerbelastung zulässige Grenze hinaus steigern, was in vorteilhafter Weise ausgenutzt werden kann, indem man die Kompensation zunächst roh mit einer bei Dauerbelastung zulässigen Meßstromstärke ausführt und diese dann nur kurzzeitig zwecks Feineinstellung steigert.

¹⁾ F. Kohlrausch u. L. Holborn: a. a. O.

²⁾ Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten ganz zu umgehen, besteht darin, den Drehspulen einen kleinen definierten Winkel zu verleihen und mittels einer senkrecht zur Spulenebene angeordneten zweiten Wicklung — die dann einer besonderen Zuführung bedarf — das System durch Einregulierung der beiden Stromkomponenten genau zu astasieren.

Weiter besteht auch die Möglichkeit, kleine Differenzen in den Windungsflächen und Winkelfehler zu beseitigen durch Anbringen einer besonderen Hilfsschleife innerhalb einer Drehspule, wenn man diese Windungsflächen nach Lage und Größe dem resultierenden Vektor der beiden Drehspulen entgegengesetzt gleichmacht.

Einzelheiten der Ausführung.

Das drehbare System hat ein Gesamtgewicht von ca. 10 g. Es besteht aus 2 Spulen von je 482 Windungen eines 0,05 mm dicken Kupferdrahtes, der in 15 Lagen untergebracht ist. Der Widerstand jeder Spule beträgt bei Zimmertemperatur 320Ω , der Gesamtwiderstand des Systems einschließlich der Zuleitungen beträgt 784Ω . Das System ist aufgehängt an einem Bronzeband von 530 mm Länge und $0,1 \times 0,01 \text{ mm}^2$ Querschnitt. Am unteren Ende des Systems ist die Stromableitung durch einen Wollastondraht von ca. 60 mm Länge und 0,012 mm Dmr. und ca. 80Ω Widerstand bewirkt. Der Abstand der Spulen von Mitte zu Mitte beträgt 532 mm.

Die Spulen bilden kleine Rechtecke von $33,4 \times 15,8 \text{ mm}$ Außenmaß; die Länge jeder Lage der Drahtwicklung beträgt 5 mm. Sie sind verbunden durch ein mit ihnen verkitetetes Glasrohr von 1,5 mm Außendurchmesser und 1 mm lichter Weite von 500 mm Länge; in ihm ist ein Kupferdraht von 0,2 mm Dmr. verlegt, der die Verbindung von der oberen zur unteren Spule bewirkt¹⁾. Am unteren Ende des Systems befindet sich ein vergoldeter Glimmerflügel von 30 mm Breite und 80 mm Höhe, der innerhalb eines mit verschiebbaren Dämpfungseinsätzen versehenen Gehäuseteils schwingt und so eine nach Wunsch einstellbare Luftdämpfung des schwingenden Systems gewährleistet²⁾. Das drehbare System hängt innerhalb eines Messingrohrgehäuses, an dessen oberem Ende das zur Aufhängung und Stromzuleitung dienende Bronzeband wie üblich in einem Torsionskopf befestigt ist. Bild 1 zeigt den Aufbau des Drehspulensystems sowie den Querschnitt des Rohres, das mit Rücksicht auf einen leichten Einbau zwischen zwei Teilspulen des Toroides oberhalb und unterhalb der Systeme sehr eng gehalten ist. Unterhalb der unteren Drehspule ist ein Planspiegel befestigt, der die Stellung des drehbaren Systems durch ein im Gehäuse angebrachtes Fenster zu beobachten erlaubt. Wir haben mit 4 m Skalenabstand und objektiver Ablesung gearbeitet. Das Magnetometersystem wird durch einen aus Kupfer gefertigten Dreifuß mitten über einer magnetisch ost-westlich ausgelegten Holzschiene von H-Querschnitt (vgl. Bild 2) gehalten. Die Schiene hat 285 cm Länge und trägt Feld- und Feldkompensationsspule. Sie ist mit einer durchlaufenden

Bild 1. Magnetometerdrehspulensystem.

¹⁾ Das Glasrohr hat sich zur Verbindung der beiden Drehspulensysteme wesentlich besser bewährt als ein ursprünglich verwendetes Aluminiumrohr, das magnetische Störungen wegen des Eisengehaltes zeigte. Da das größte, praktisch vorkommende Drehmoment (bei einer Probe von Eisen-Kobalt mit dem Sättigungswert $4\pi J = 23680$ von 2 cm^2 Querschnitt und bei 40 cm Abstand und 25 mA Systemstrom) 15,0 dyncm beträgt, muß man beim Bau darauf achten, daß das System gegenüber derartigen Torsionsmomenten noch genügend starr ist.

²⁾ Das Trägheitsmoment des Systems berechnet sich aus der experimentell bestimmten Direktionskraft von 0,054 dyncm und der Schwingungsdauer von 40 sec zu $8,76 \text{ gcm}^2$.

Spiegelskala versehen, an der die Abstände der Feld- bzw. Kompensationsspule eingestellt werden.

Wir haben ursprünglich als Feldspulen wassergekühlte Spulen folgender Bauart benutzt: Jede Spule bestand aus 56 Doppelspiralen zu je 18 Windungen (insgesamt 1008 Windungen) eines Vierkantkupferrohres von außen $3 \times 3 \text{ mm}^2$ und innen $1,5 \times 1,5 \text{ mm}^2$ Querschnitt ($6,75 \text{ mm}^2$ Kupferquerschnitt, $2,25 \text{ mm}^2$ Wasserquerschnitt). Jede der Doppelspiralen hatte 9 von außen nach innen gewickelte Windungen, die innen auf eine danebenliegende Spirale aus 9 von innen nach außen gewickelten Windungen überging. Je zwei solcher Flachspulen bildeten eine mechanische, fest miteinander verbundene Einheit, die mit dem einen Ende isoliert an eine Wasserzuleitung angeschlossen war. Der Wasserausfluß erfolgte sichtbar aus dem anderen freien Ende über einem an der ganzen Spule entlang laufenden Ablauftrög. Es ergab sich so die Möglichkeit, alle hydraulisch parallel und elektrisch hintereinandergeschalteten Doppelflachspulen gut zu überwachen und jede die Kühlung beeinträchtigende Verstopfung rechtzeitig zu bemerken. Jede Spule konnte bei einem Widerstand von $0,66 \Omega$ bei 210 V mit 320 A entsprechend einer Leistung von 67 kW belastet werden und ergab dann im Innern der Spule ein Feld von 10200 Oersted. Die Spulenkonstante war $31,88 \text{ Oe/A}$; jede Spule hatte 39,5 cm Länge bei 3,7 cm Innendurchmesser und 11 cm Außendurchmesser. Das von uns angestrebte Ziel, sehr hohe, auch zur Sättigung sehr harter Magnetstähle ausreichende Felder zu erzielen, wurde zwar so erreicht, es erwies sich aber als zu mühevoll, die für Feinmessungen unbedingt notwendige Kompensation des Feldes am Orte der unteren Drehspule auf die Dauer zu erreichen, da der mechanische Aufbau der Spulen für die bei hohen Stromstärken auftretenden Kräfte sich nicht als hinreichend fest genug erwies.

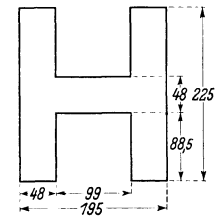


Bild 2. Profil der Magnetometerschiene.

Des weiteren verringerte sich im Laufe langdauernden Betriebes mit Leitungswasser die Durchlässigkeit einzelner Flachspulen. Dieser Mißstand hätte sich zwar durch die Verwendung anderer Kühlflüssigkeiten oder durch die Wahl eines Kupferrohres mit größerer lichter Weite vermeiden lassen, wir haben es aber als vorteilhaft erkannt, zunächst etwas geringere Feldstärken mit luftgekühlten Spulen zu erreichen. Jede der beiden (Feld- und Kompensations-) Spulen besteht aus 35 Flachspulen zu je 60 Windungen (insgesamt 2100 Windungen) eines Vierkantkupferdrahtes von $2 \times 2,8 \text{ mm}^2$ Querschnitt. Die Flachspulen haben einen Innendurchmesser von 4 cm und einen Außendurchmesser von 18 cm, jede Spule hat eine Dicke von 0,66 cm, der Abstand von der Nachbarspule beträgt 0,5 cm. Die Gesamtlänge der Feldspule ist 40 cm. Jede Spule hat einen Widerstand von $2,55 \Omega$ und eine Spulenkonstante von $66,04 \text{ Oe/A}$. Die einzelnen Flachspulen sind durch Behandeln mit gehärtetem Schellack zu äußerst festen Einheiten gestaltet, die innerhalb eines auf 4 Stellschrauben ruhenden Messingrahmens gehalten werden. Bei Kühlung mit einem Ventilator sind 33 A entsprechend 2180 Oe bei einer Spulentemperatur von 90° dauernd zu erhalten. Kürzere Zeit können 50 A entsprechend 3300 Oe angewendet werden, ein Wert, der sich für die bloße Sättigung harter Materialien noch auf 6—7000 Oe bringen läßt. Zwecks Kompensation des Feldes am Orte der unteren Drehspule werden die Spulen auf der H-Schiene zunächst nach Möglichkeit symmetrisch eingestellt und mittels der Stellschrauben horizontalisiert. Die Feinkompensation wird dann durch einen Nebenschluß zu der ersten nach außen gekehrten Windung jeder

Spule erreicht¹⁾. Das Diagramm Bild 3 zeigt den Feldverlauf in der Achse der alten wassergekühlten und der neuen luftgekühlten Spulen, bezogen auf das Feld in der Mitte der Spule. Wie das Diagramm erkennen läßt, zeigt das Feld in der Achse der Spule stetigen Verlauf. Eine von den einzelnen Flachspulen herrührende Welligkeit ist nicht zu erkennen²⁾. Das auf die obere Drehspule wirkende Kompensations-

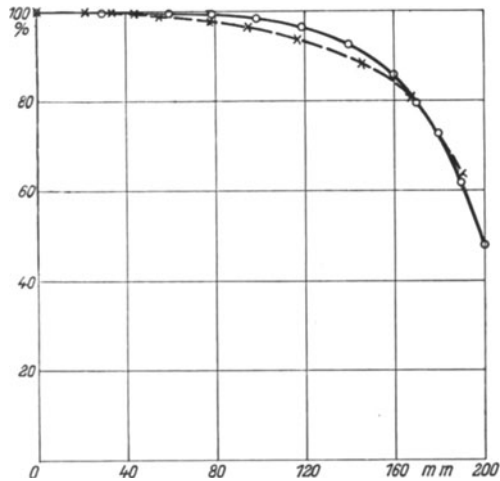


Bild 3. Feldverteilung in der Achse der Magnetometerspule.

o wassergekühlte Spule, x luftgekühlte Spule.

toroid besteht aus 40 Spulen, die gleichmäßig über einen kreisringförmigen Kern aus Hartholz verteilt sind. Der Innendurchmesser des Holzkernes beträgt 470 mm, der Außendurchmesser 576 mm, seine Höhe 103 mm. Es sind folgende Wicklungen vorhanden:

A. 1 Windung pro Spule, insgesamt 40 Windungen, Widerstand $2,3 \Omega$, Spulenkonstante $0,291 \text{ Oe/A}$.

B. 40 Windungen pro Spule, insgesamt 1600 Windungen, Widerstand 57Ω , Spulenkonstante $12,0 \text{ Oe/A}$.

C. 19 Lagen zu 40 Windungen pro Spule, insgesamt 30400 Windungen, Widerstand 1125Ω , Spulenkonstante $221,5 \text{ Oe/A}$.

Die Streuung der auf dem Kompensationstoroid befindlichen Wicklungen beträgt am Orte der unteren Drehspule für die Wicklung A $1 \cdot 10^{-3}$ des Toroidfeldes, für die Wicklungen B und C $5 \cdot 10^{-5}$ dieser Felder. Die Helmholtz-Gaugain-Spulen bestehen

aus 2 Nord-Süd-Spulen von 250 mm Innendurchmesser und 2 Ost-West-Spulen von 280 mm Durchmesser mit je 2 Wicklungen zu 24 Windungen.

Das Aufsuchen des am Orte der oberen Drehspule anzubringenden Zusatzfeldvektors, der zur Ausgleichung der Inhomogenität des Störungfeldes dient, geschieht mittels folgender Vorrichtung (Bild 4):

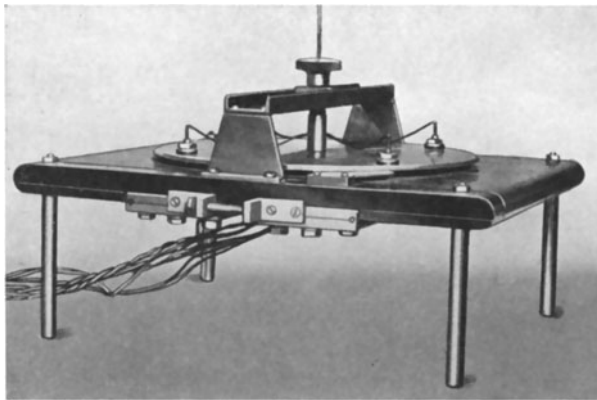


Bild 4. Vorrichtung zum Aufsuchen des Zusatzfeldvektors.

Ein Manganinblechstreifen von 320 mm Breite, 0,2 mm Dicke und 1000 mm Länge

ist an seinen beiden Schmalseiten zwischen starken, über die ganze Breite des Streifens laufenden Kupferzuleitungen eingespannt und so über eine 30 mm

¹⁾ Hierbei sind beide Teilspulen magnetisch in Serie geschaltet; das Verhältnis der Ströme von Haupt- zu Teilspule beträgt etwa 25:1; die von den Teilspulen auf die Drehspulen ausgeübten Kräfte liegen wegen des größeren Abstandes und wegen des großen Unterschiedes in den Windungszahlen (Faktor 35) weit unter 0,1% der durch die Hauptspulen erzeugten Kräfte.

²⁾ Die von der zweiten Feldspule herrührende Feldverminderung ist bei einem Spulenabstand von 99,1 cm (von Mitte zu Mitte) kleiner als 1%; bei kleineren Abständen muß sie berücksichtigt werden.

dicke, 500 mm lange, an den Kanten halbzyklindrisch abgerundete Hartpapier-Platte gespannt, daß die beiden Stromzuleitungen auf der Mitte der Unterseite dieser Platte dicht beieinander liegen. Über der Oberseite des Manganinstreifens schwebt, in einem querverlaufenden Träger gelagert, eine um eine vertikale Achse drehbare, am Rande mit einer Winkelteilung versehene kreisförmige Platte, deren Stellung an einem festen Index abgelesen werden kann. Die Platte trägt an den Enden zweier zueinander senkrecht liegender Durchmesser isolierte, nach unten federnd gegen den Manganinstreifen angedrückte Metallstifte, die sich auf einem Kreise mit dem Radius 150 mm bewegen, wenn die Teilungsplatte gedreht wird. Sie dienen dazu, um 2 Spannungen von dem Manganinstreifen abzugreifen, die sich, wenn dieser von einem gemessenen Strom durchflossen wird, stets wie \sin zu \cos des Winkels verhalten, unter dem die zugehörigen Durchmesser gegen die Stromlinien des den Manganinstreifen in der Längsrichtung durchfließenden Stromes gerichtet sind¹⁾. An die drehbaren Kontaktstücke ist mittels biegsamer Litzen, die durch die hohle Achse der Drehscheibe laufen, über je einen Strommesser das Helmholtz-Gaugain-Spulensystem angeschlossen. Durch Wahl der Stromstärke in dem Manganinstreifen (bis zu etwa 30 A) läßt sich der Betrag des Zusatzvektors aufsuchen, während durch Drehen der mit Teilung versehenen Scheibe die Richtung des Vektors eingestellt werden kann. Hat man mittels der beschriebenen Vorrichtung den gesuchten Zusatzvektor nach Größe und Richtung aufgesucht, so braucht die Vorrichtung nicht dauernd in Betrieb gehalten zu werden. Es genügt dann, an den beiden vor dem Helmholtz-Gaugain-Spulensystem eingeschalteten Strommessern die zur Kompensation erforderlichen Stromstärken abzulesen und sie durch Einregulieren besonderer Stromkreise wiederherzustellen.

Die mittels unseres Magnetometers erreichbare Meßgenauigkeit hängt von den am Orte der Aufstellung vorhandenen Störungen ab. Diese Abhängigkeit ist zwar weit geringer als die bei anderen Magnetometern bisher erreichte, aber immerhin noch vorhanden. Die Meßgenauigkeit ist durch die elektrische Kompensationsmethode auf die einer Stromstärkemessung zurückgeführt. Die durch die Eigenschaften des Drehspulensystems gegebene Empfindlichkeit kann für das von uns benutzte Drehspulensystem auf 1 mm Ausschlag für etwa 10^{-6} Oe bei 4000 mm Skalenabstand und 20 mA Meßstrom in den Drehspulen bei 40 sec Schwingungsdauer des schwach gedämpften und 20 sec Einstellzeit und 40 sec Rückkehrzeit

¹⁾ Die bei den einzelnen Winkeln gemessenen Spannungen stimmen im Durchschnitt auf 0,5% mit den berechneten Werten überein. Der maximale Fehler beträgt 1,4%.

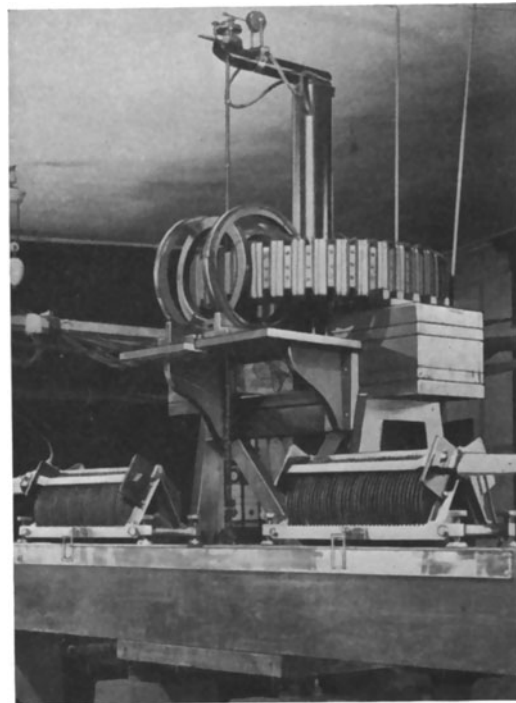


Bild 5. Gesamtansicht des Magnetometers.

des aperiodisch gedämpften Systems angegeben werden. Die Empfindlichkeit liegt damit um eine Größenordnung höher als bei dem Kohlrausch-Holborn-Torsionsmagnetometer. Wesentlich für die Fernhaltung von Erschütterungen und Störungen durch wechselnde Raumtemperatur ist bei unserer Meßeinrichtung die Aufstellung in einem Kellerlaboratorium, bei dem die Betonpfeiler, welche das Magnetometer tragen, unmittelbar auf gewachsenem Boden ruhen. Zur Fernhaltung grober Erschütterungen haben wir die 3 Stellschrauben, auf denen das Gehäuse des Meßsystems ruht, unter Zwischenlage von dicken Weichgummischeiben auf den Betonpfeilern aufgebaut. Alle zur Justierung des Feldzusatzvektors, zur Einregulierung der Meßstromstärke in den Drehspulen, des die Feld- und Kompensationspule durchfließenden Stromes und des die Toroidspule durchfließenden Kompensationsstromes erforderlichen Einrichtungen befinden sich auf eisenfreien Schalttafeln und Meßtischen nebst der Beleuchtungseinrichtung und der Mattglasskala in mindestens 3,5 m Abstand von dem Meßsystem. Die Regulierwiderstände sind so angeordnet, daß sie am Orte der Meßspule keine Horizontalkomponente eines Magnetfeldes ergeben können. Alle Leitungen, besonders die zur Feld- und Kompensationspule führenden, sind konzentrisch oder sorgfältig bifilar verlegt. Als Stromquellen dürfen nur Akkumulatorenbatterien verwendet werden, die allein für die magnetometrischen Messungen zur Verfügung stehen, damit jede unerwünschte Stromschwankung in den abgeglichenen Stromkreisen ausgeschlossen ist. Bild 5 gibt die Gesamtansicht des Magnetometers wieder.

Justierung.

Die zur Justierung des Magnetometers erforderlichen Maßnahmen ergeben sich nach der Beschreibung von selbst. Zunächst muß die H-Schiene horizontal und magnetisch ost-westlich ausgelegt werden, dann muß nach Horizontierung des Magnetometergehäuses das Drehspulensystem zum freien Schwingen symmetrisch innerhalb des Gehäuses gebracht werden. Man überzeugt sich durch Einschalten eines Meßstromes von einigen Milliampere davon, daß die Astasierung des Systems im großen und ganzen vorhanden ist. Kleine, beim Einschalten des Meßstromes noch vorhandene Ausschläge rühren im wesentlichen von einer Inhomogenität des Erdfeldes sowie von dem Winkelfehler der Drehspulen her. Der erstere Fehler wird durch Aufsuchen des auf die obere Spule wirkenden Zusatzfeldvektors auf ein Minimum gebracht, der zweite Fehler wird — für einen bestimmten Systemstrom — zum größten Teil durch Einwirkenlassen eines konstanten ost-westlich gerichteten Feldes des Toroides kompensiert; zur genauen Kompensation, die jedoch meist entbehrlich ist, müssen die zweiten Wicklungen der Helmholtz-Gaugain-Spulen an den Systemstrom angeschlossen und die Teilströme dem resultierenden Vektor der Drehspulen entsprechend eingestellt werden. Nun werden auf der ost-westlich verlaufenden H-Schiene unter Zuhilfenahme der Spiegelglasskala die Feldspule und die Kompensationsspule nach Möglichkeit symmetrisch zur Meßspule ausgerichtet und nach Einschalten eines zunächst kleinen, später gesteigerten Feldstromes durch Einstellen der Nebenschlüsse zu den äußersten Windungen der Feld- und Kompensationsspule die genaue Kompensation am Orte der Meßspule hergestellt¹⁾. Die Kompensation muß zeitweise

¹⁾ Die Kompensation muß dabei nicht nur für die Ost-West-Richtung stimmen, es darf auch vor allen Dingen kein Winkel [Th. Erhard: Ann. Physik (4) Bd. 9 (1902) S. 724] zwischen den Achsen der Feldspulen vorhanden sein, da sonst eine auf die beiden Drehspulen verschieden stark wirkende

nach längerem Betriebe der Spulen mit großen Stromstärken und entsprechend eingetretener Erwärmung der Spulen kontrolliert werden; dann wird eine der drei auf dem Toroid befindlichen Wicklungen in Betrieb genommen und durch Regulieren des Kompensationsstromes in ihr ein bekanntes, auf die untere Meßspule wirkendes Feld einer ebenen Kreisspule kompensiert. Man überzeugt sich nun durch Wahl und Kompensation mehrerer verschieden starker Felder in aufsteigender und absteigender Richtung davon, daß die Umgebung der Meßspulen, Feld- und Kompensationsspulen und die Toroidspule eisenfrei sind, was aus der Proportionalität der Ströme in der Eichspule und der Kompensationsspule des Toroides unmittelbar hervorgeht¹⁾. Damit ist die Justierung beendet, und es kann die Messung einer Probe beginnen. Die Probe wird zweckmäßig innerhalb eines von Kühlwasser gemessener Temperatur durchströmten Mantels gemessen, damit Fehler durch die thermische Einwirkung der Feldspule vermieden werden. Für die Messung der Probe bei höheren Temperaturen benutzen wir einen feldfreien Platinwiderstandsofen, der mit einem Wasserkühlmantel versehen ist und der in die Feldspule eingeführt werden kann. Nach Abschluß jeder Messungsreihe und nach Bedarf auch innerhalb jeder Messungsreihe (nach Entfernen der Probe) überzeugt man sich von der noch vorhandenen Vollkommenheit der Justierung. Wir geben im folgenden das Beispiel einer vollständigen Messungsreihe wieder.

1. Erdfeldkompensation und Winkelfehler.

Das Erdfeld betrug zur Zeit der Messung am Ort der oberen Spule 0,155 Oe, am Ort der unteren Spule 0,161 Oe. Der Winkelfehler wurde durch ein ost-westlich gerichtetes Feld von 0,4 mOe kompensiert, und zwar für einen Meßstrom von $i_s = 5$ mA; eine Abzweigung vom Systemstrom war entbehrlich, da die endgültige Ablesung immer bei ein und demselben Meßstrom erfolgte. Die Deklinationsschwankungen während der Messungen betragen im Maximum 1° , waren aber ohne merklichen Einfluß auf den Nullpunkt des Systems.

2. Prüfung auf Eisenfreiheit.

Da die Ströme in der Eichspule und im Toroid einerseits und in der Feldspule und im Toroid andererseits bis auf einen Meßfehler von $2^0/_{00}$ proportional waren, ist das Magnetometer als praktisch eisenfrei anzusehen.

3. Eichung des Magnetometers.

Das Magnetometer wurde mit einer Flachspule von 8 Windungen und einem Radius r von 5,625 cm, der aus den Dimensionen bestimmt wurde, geeicht.

Abstand der Eichspule $a_1 = 49,563$ cm,

Systemstrom $i_s = 5$ mA,

Eichstrom $i_E = 7,5$ A,

Toroidstrom $i_T = 7,5 \cdot 10^{-4}$ A,

Nord-Süd-Komponente auftritt, welche die Astasierung verändert. Ebenso ist darauf zu achten, daß das Magnetometersystem genau in der Achse der Feldspulen sich befindet, sonst treten bei seitlicher Einstellung wegen der Inhomogenität des resultierenden Feldes der Magnetisierungsspule Pendelbewegungen des Systems auf, welche eine Ablesung unter Umständen in Frage stellen können.

¹⁾ Es empfiehlt sich auch, sich davon zu überzeugen, ob für konstantes Produkt Meßstrom \times Eichstrom bei Durchlaufen mehrerer verschiedener Werte des Faktors das kompensierte Drehmoment konstant bleibt.

Abstand der Magnetometerdrehspulen $h = 53,2$ cm,
 Polabstand der Drehspulen $\lambda = 0,5$ cm.

Das Feld¹⁾ der Eichspule berechnet sich nach Gumlich²⁾ zu

$$H_E = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot n \cdot i_E}{(a_1^2 + r^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{\frac{3}{4} \cdot \lambda^2}{a_1^2 + \frac{\lambda^2}{4}} + \psi \left(\frac{a_1}{h} \right) \right] = 0,9012 \cdot 10^{-2}$$

[$n =$ Windungszahl, $\psi =$ Korrektionsglied³⁾ für die obere Drehspule]. Dieses Feld muß im Falle der Kompensation gleich dem von dem Toroid auf die obere Drehspule wirkenden Feld H_T sein. Die Konstante des Toroides $C_T = H_T/i_T$ (in CGS) ergibt sich demnach zu

$$C_T = \frac{H_E}{i_T} = \frac{0,9012 \cdot 10^{-2}}{0,75 \cdot 10^{-4}} = 120$$

oder $C_T = 12$, wenn man H_E auf Oersted, dagegen i_T auf A bezieht. Die Konstante muß naturgemäß vom Systemstrom unabhängig sein; in der Tat ergibt sich bei $i_s = 10$ mA bis auf einen Fehler von $\pm 0,1\%$ derselbe Wert.

Zur Kontrolle wurde die Konstante auch ballistisch bestimmt; es ergab sich ein Wert von 120,6, also eine Abweichung von nur 0,5%.

4. Messung von Koerzitivkräften.

a) 15proz. Kobaltstahl von den Dimensionen $10,3 \times 2,82 \times 1,015$ cm; Abstand $a = 50$ cm; $i_s = 5$ mA; Magnetometerausschlag bei der scheinbaren Remanenz, auf $i_s = 5$ mA umgerechnet, ca. 280 m. Sättigungsfeldstärke $H_s = 5100$ Oe. Die Koerzitivkraft wurde gemessen zu $H_c = 193,4$ Oe; Kontrollmessungen mit dem magnetischen Spannungsmesser ergaben $H_c = 192,5$ Oe. Beide Werte stimmen also bis auf einen Fehler von 0,5% überein.

b) Permalloystab von den Dimensionen $13,3 \times 1,2 \times 0,6$ cm, $a = 29,8$ cm, $i_s = 10$ mA; Magnetometerausschlag bei der scheinbaren Remanenz = ca. 12,3 cm; $H_s = 100$ Oe, $H_c = 0,045$ Oe.

5. Messung eines Ellipsoides aus Flußeisen.

Die Daten des Ellipsoides betragen $l = 27$ cm, $d = 0,6$ cm, $p = l/d = 45$. Das Volumen, aus den Dimensionen berechnet, ist $5,089$ cm³; aus der Wasserwägung ergibt sich ein Wert von $5,104$; die Differenz beträgt 0,29%. Der magnetischen Messung wurde der experimentell bestimmte Wert zugrunde gelegt. Der Entmagnetisierungsfaktor beträgt $N = 0,02169$. Der Polabstand L berechnet sich für die erste Hauptlage⁴⁾ nach der Formel

$$L = \left[\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \right] \cdot l = 0,7746 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \cdot l = 21,81 \text{ cm};$$

für den vorliegenden Fall wird der Ausdruck $\sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}$ bis auf einen Fehler von

¹⁾ Die folgenden beiden Gleichungen sind Zahlenwertgleichungen bezogen auf absolute elektromagnetische Einheiten.

²⁾ E. Gumlich: Magnetische Messungen, S. 52.

³⁾ F. Kohlrausch u. L. Holborn: Ann. Physik (4) Bd. 10 (1903) S. 287.

⁴⁾ Diese Formel läßt sich leicht aus dem in L. Graetz: Handb. d. Elektrizität und d. Magnetismus Bd. 4 (1920) S. 98 angegebenen Ausdruck ableiten.

0,25‰ gleich Eins. Der Abstand des Ellipsoids vom Magnetometer betrug $a = 50,133$ cm, die Korrektur $\psi(a/h) = -0,0665$. Da die Dimensionen des Ellipsoids etwas größer waren als der homogene Teil des Feldes in der Spule, wurde für die Feldberechnung der aus Bild 3 für die Länge des Ellipsoids ermittelte Integralwert der Spulenkonstante von 64,45 Oe/A zugrunde gelegt. Das Feld der Probe berechnet¹⁾ sich nach Gumlich zu

$$H_p = \frac{2 \cdot J \cdot V}{a^3} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} L^2 - \frac{3}{4} l^2}{a^2} + \psi\left(\frac{a}{h}\right) \right] = 0,829 \cdot 10^{-4} \cdot J.$$

Für den Fall der Kompensation durch das Toroid ist wieder $H_T = H_p$, also $H_T = 120 \cdot i_T = 0,829 \cdot 10^{-4} \cdot J$ und endlich $J = 145,0 \cdot 10^4 i_T$ oder $J = 145,0 \cdot i_T$, wenn i_T in Milliampere gemessen wird.

Zusammenstellung einer Meßreihe.

H'	i_T (mA)	J	NJ	H	\varkappa
+ 0,5545	+ 0,030	+ 4,35	0,0942	+ 0,4603	9,45
+ 0,976	+ 0,12	+ 17,39	0,3763	+ 0,600	29,0
+ 3,190	+ 0,666	+ 96,50	2,088	+ 1,102	87,6
+ 9,755	+ 2,551	+ 370	8,01	+ 1,745	212
+ 19,51	+ 5,08	+ 737	15,96	+ 3,55	207,9
+ 48,7	+ 8,535	+ 1237	26,79	+ 21,91	56,5
+ 193	+ 10,40	+ 1507	32,60	+ 160,4	9,39
+ 483,5	+ 11,51	+ 1669	36,1	+ 447,4	3,73
Schleife					
+ 483,5	+ 11,51	+ 1669	36,1	+ 447,4	
+ 193,2	+ 10,4	+ 1507	32,6	+ 160,6	
+ 48,35	+ 8,81	+ 1276	27,61	+ 20,74	
+ 18,97	+ 5,28	+ 766	16,60	+ 2,37	
+ 9,70	+ 3,47	+ 503	10,90	- 1,20	
+ 4,88	+ 2,051	+ 297,3	6,44	- 1,56	
+ 2,196	+ 1,248	+ 181,0	3,92	- 1,724	
0	+ 0,57	+ 82,65	1,790	- 1,790	
- 0,529	+ 0,408	+ 59,20	1,282	- 1,811	
- 0,977	+ 0,282	+ 40,85	0,8855	- 1,863	
- 3,176	- 0,37	- 53,7	1,163	- 2,013	
- 9,755	- 2,303	- 334	7,24	- 2,515	
- 19,51	- 4,91	- 712	15,41	- 4,10	
- 113,0	- 9,72	- 1408	30,50	- 82,50	
- 251	- 10,71	- 1553	33,60	- 217,4	
- 483,5	- 11,52	- 1671	36,20	- 447,3	
- 250,6	- 10,74	- 1557	33,70	- 216,9	
- 110,0	- 9,76	- 1414	30,60	- 79,4	
- 9,755	- 3,54	- 513,5	11,10	+ 1,345	
- 3,190	- 1,576	- 228,6	4,95	+ 1,760	
- 0,972	- 0,90	- 130,5	2,825	+ 1,853	
- 0,531	- 0,767	- 111,2	2,410	+ 1,879	
0	- 0,603	- 87,4	1,890	+ 1,890	
+ 0,529	- 0,44	- 63,8	1,381	+ 1,910	
+ 0,976	- 0,308	- 44,70	0,968	+ 1,944	
+ 3,192	+ 0,358	+ 51,85	1,122	+ 2,070	
+ 9,76	+ 2,304	+ 334,2	7,250	+ 2,510	
+ 19,51	+ 4,90	+ 710,5	15,40	+ 4,110	
+ 110,4	+ 9,70	+ 1407	30,43	+ 79,97	
+ 251,0	+ 10,71	+ 1554	33,66	+ 217,34	
+ 483,5	+ 11,52	+ 1671	36,20	+ 447,3	

¹⁾ Der folgenden Zahlenwertgleichung liegen absolute elektromagnetische Einheiten zugrunde.

Der Nullpunkt des Magnetometersystems war zum Schluß der Messung nur um 1 mm anders als zu Anfang, ein Betrag, der gegenüber den großen Ausschlägen vollkommen vernachlässigt werden kann.

In der Tabelle Seite 23 sind die Meßwerte für die Neukurve (Kommutierungskurve) und eine vollständige Schleife zusammengestellt. Dabei bedeuten H' das Spulenfeld, H das wahre Feld in der Probe, beide in Oersted, i_T den Toroidstrom in Milliampere, J die Magnetisierungsintensität, κ die Suszeptibilität.

Zur Kontrolle wurde der Sättigungswert ballistisch bestimmt. Er ergab sich zu 1693 gegenüber 1671 bei der magnetometrischen Messung; beide Werte stimmen auf 1,3% überein.

Zusammenfassung.

Es wird ein astatisches Kompensationsmagnetometer beschrieben, dessen drehbares System aus stromdurchflossenen Spulen besteht. Das auf die untere Drehspule wirkende Feld der Probe wird durch das Feld einer Toroidspule kompensiert, welches nur auf die obere Drehspule wirkt.

Die Störungen durch Inhomogenität des Feldes im Beobachtungsraum und Fehler des Systems werden eingehend diskutiert.

Über die rechnerische Auswertung ballistischer Entmagnetisierungsfaktoren kreiszylindrischer Stäbe.

Von Hans Neumann und Kurt Warmuth.

Mit 4 Bildern.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 18. Juni 1932.

Die Hauptfehlerquelle bei magnetischen Messungen von Stäben in freier Spule bildet bekanntlich die Bestimmung der wahren Feldstärke in der Probe. Es gilt hier die Beziehung¹⁾: $H = H' - NJ = H' - \frac{N}{4\pi}(B - H)$, wo N den Entmagnetisierungsfaktor, H' das Spulenfeld, H das Feld in der Probe, J die Magnetisierungsintensität und B die Induktion bedeutet. Die Feldwerte für die Magnetisierungskurve müssen daher gemäß obiger Gleichung nach dem bekannten Rayleighschen Verfahren geschert werden. Beschränkt man sich nur auf die Messung der Permeabilität, so kann man die Gleichung durch Division mit B umformen²⁾ in die Beziehung:

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{\mu'} - \frac{N}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}; \quad (1a)$$

für relativ große μ ergibt sich insbesondere

$$\mu \approx \frac{1}{\frac{1}{\mu'} - \frac{N}{4\pi}}. \quad (1b)$$

Hierbei bedeutet $\mu = B/H$ die wahre Permeabilität und $\mu' = B/H'$ die scheinbare Permeabilität. Die Genauigkeit bei der Berechnung der μ -Werte hängt daher ab 1. von der Genauigkeit der μ' -Bestimmung, 2. von der Genauigkeit, mit der der Entmagnetisierungsfaktor N bekannt ist. Je größer $N/4\pi$ in obiger Formel im Verhältnis zu $1/\mu'$ wird, um so genauer müssen die beiden Größen μ' bzw. N bekannt sein, wenn die Ungenauigkeit von μ nicht zu groß werden soll; und zwar muß insbesondere, je ungenauer der Wert von μ' bestimmt werden kann, um so genauer dafür N bekannt sein und umgekehrt.

¹⁾ Im folgenden sind überall Zahlenwertgleichungen verwendet. Vgl. Elektrotechn. Z. Bd. 51 (1930) S. 586; Bd. 53 (1932) S. 114 und Normenblatt Din 1313. Die Zahlenwerte von H, H', J und B sind auf absolute elektromagnetische Einheiten, der Zahlenwert des magnetisierenden Stromes i auf Ampere bezogen.

²⁾ H. Neumann: Über ballistische Messungen an hochpermeablen Materialien. Wiss. Veröff. Siemens-Konz. X, 2 (1931) S. 56.

Für den praktisch häufig vorkommenden Fall der Messung¹⁾ von Drähten aus hochpermeablen Materialien vom Dimensionsverhältnis $p = 500$, also noch für einen relativ günstigen Wert, geht für $\mu' = 10000$ ein Fehler in der N -Bestimmung von etwa 20 % (vgl. r' -Werte in Tab. 2) mit 8,6 % in den μ -Wert ein. Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung genauer Entmagnetisierungsfaktoren für die Meßtechnik.

Ebenso wichtig wie für die Auswertung magnetischer Messungen ist die Kenntnis des Entmagnetisierungsfaktors allgemein für die Berechnung magnetischer Kreise, insbesondere auch für den Fall der Berechnung des Kraftflusses oder der scheinbaren Permeabilität langgestreckter Stäbe. Hier gilt die aus Gl. (1b) umgeformte Beziehung

$$\mu' \approx \frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{N}{4\pi}}. \quad (2)$$

Eine streng mathematische Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors läßt sich mit beliebiger Genauigkeit nur für eine einzige Probenform durchführen, nämlich die des Rotationsellipsoids. Der bei der Benutzung von Ellipsoiden dann noch auftretende Fehler ist daher nur bedingt durch die Genauigkeit der technischen Herstellung des Ellipsoids einerseits und durch die Genauigkeit bei der μ' -Bestimmung andererseits. Für relativ große μ , d. h. relativ große N , gibt die magnetische Messung mehr Aufschluß über die Qualität der Mechanikerarbeit bei der Herstellung der Probe als über die Eigenschaften des Materials, wie schon Chrystal²⁾ für den Fall der Kugel ($N = 4,19$) als Probekörper bemerkt hat. Dieser vorwiegende Einfluß von N auf μ' bei großem μ ist aus Gl. (2) unmittelbar ersichtlich.

Die gemessene Permeabilität μ' wird für den Grenzfall $\mu = \infty$ gleich der „Grenzpermeabilität“³⁾ $\mu_g = 4\pi/N$, die nicht mehr vom Material, sondern nur noch von der Probenform abhängt.

Das Ellipsoid hat nun den prinzipiellen Vorteil, daß Magnetisierung, Feldstärke und Entmagnetisierungsfaktor im ganzen Volumen räumlich konstant sind, sowie daß der Entmagnetisierungsfaktor auch unabhängig von der Höhe der Magnetisierung (d. h. der Suszeptibilität κ) derselbe bleibt, es hat aber den Nachteil der schwierigen und kostspieligen Herstellung.

Für viele Zwecke der Technik interessiert neben der Form des Prismas von rechteckigem Querschnitt die Form des langgestreckten Zylinders. Für die erstgenannte Form haben Thompson und Moss⁴⁾ ballistische Messungen ausgeführt; für den Zylinder sind von verschiedenen Autoren⁵⁾ eine größere Anzahl Untersuchungen angestellt worden.

Bei prismatischen und zylindrischen Probestäben ist zwar die Herstellung bedeutend einfacher als bei Ellipsoiden, aber es besteht bei ersteren die Abhängigkeit

¹⁾ H. Neumann: a. a. O. S. 63ff.

²⁾ G. Chrystal: Encyclopaedia Britannica, 9. Ausgabe Bd. 15 (1883) S. 245, im Artikel: Magnetism; vgl. auch: I. A. Ewing: Magnetische Induktion in Eisen usw., Deutsch von L. Holborn und St. Lindbeck, S. 29, Berlin und München 1892, ferner R. Gans: Einführung in die Theorie des Magnetismus, S. 56. 1908.

³⁾ H. Neumann: a. a. O. S. 57.

⁴⁾ P. Thompson und E. W. Moss: Electrician Bd. 10 (Sept. 1909).

⁵⁾ C. Benedicks: Ann. Physik Bd. 6 (1901) S. 726. — C. L. B. Shuddemagen: Proc. Amer. Ac. Bd. 43 (1907) S. 185 — Physic. Rev. Bd. 31 (1910) S. 165. — O. Grotrian: Ann. Physik Bd. 34 (1911) S. 1—56. — J. Würschmidt: Z. Physik Bd. 19 (1923) S. 388; Bd. 12 (1922) S. 128. — O. E. Buckley und L. W. McKeehan: Physic. Rev., 2. Serie Bd. 26 (1925) Nr. 2 S. 261. — E. Dussler: Ann. Physik Bd. 86 (1928) S. 66—94. — D. Foster: Philos. Mag., 7. Serie Bd. 8 (1929) S. 304—313.

des Entmagnetisierungsfaktors vom Ort innerhalb des Probekörpers sowie von der Höhe der Suszeptibilität, ferner hängt, wie Dussler experimentell an Zylindern gezeigt hat (für prismatische Stäbe müssen die Verhältnisse ähnlich liegen), der Entmagnetisierungsfaktor bei Materialien mit nicht sehr hohen κ -Werten auch von der magnetischen Vorgeschichte sowie außerdem noch in einer bisher unbekanntem Weise vom Material, nämlich von κ_{\max} ab. Solange diese Verhältnisse nicht geklärt sind, ist es aussichtslos, für diesen Bereich irgendwelche Aussagen über den Entmagnetisierungsfaktor machen zu wollen.

Daher müssen wir uns für unsere theoretischen Untersuchungen auf die beiden Grenzfälle $\kappa = 0$ und $\kappa = \infty$ beschränken, bei denen die Einflüsse der magnetischen Vorgeschichte, des Materials sowie der räumlichen Inhomogenität der κ -Werte naturgemäß fortfallen. Für diese beiden Fälle fand Dussler¹⁾ für $p = 50$ gute Übereinstimmung zwischen seinen experimentell bestimmten und den von Würschmidt berechneten Werten des Entmagnetisierungsfaktors. Beide Grenzfälle haben jedoch auch ein gewisses praktisches Interesse.

Da der Entmagnetisierungsfaktor von Zylindern, wie Würschmidt für $p = 50$ gezeigt hat (Bild 1), von $\kappa = 0$ an sich zunächst nur wenig ändert, umfaßt dieser Bereich den Fall hochwertiger Magnetstähle mit großen Koerzitivkräften und demgemäß kleinen κ - oder μ -Werten; für 35proz. Kobaltstahl variiert z. B. die Permeabilität von $\mu_0 = 10$ über $\mu_{\max} = 30$ bis $\mu = 6$ bei der Sättigung²⁾. Die entsprechenden N -Werte lassen sich nach einer einfachen Formel von Dussler leicht berechnen; eine Zusammenstellung wird weiter unten gegeben.

Der andere Fall von $\kappa = \infty$ umfaßt das Gebiet der hochpermeablen Legierungen; für Permalloy zum Beispiel variiert die Permeabilität von $\mu_0 = 4000 \dots 10000$ über μ_{\max} von etwa 100000 bis zu $\mu = 500 \dots 1000$ bei der Sättigung. Auch hier bleibt der Entmagnetisierungsfaktor, wie Bild 1 zeigt, fast in dem ganzen Bereich konstant. Die praktische Bedeutung dieses Gebietes wird für den Fall der Berechnung der wahren Permeabilität μ aus der gemessenen μ' [nach Gl. (1 b)] zwar etwas eingeschränkt, da bei sehr hohem μ' auch schon für relativ kleine Entmagnetisierungsfaktoren wegen der Differenz im Nenner des Bruches beide Größen ziemlich genau bekannt sein müssen. Für $\mu = 12567$ ($\kappa = 1000$) ergibt sich für $p = 50$ z. B. nach Würschmidt ein $N = 0,0147$; μ' wird gleich 800. Setzt man für N den Wert für $\kappa = \infty$ ein, also 0,0148 statt 0,0147, so ergibt das bei Berechnung von μ aus μ' ($= 800$) den Wert $\mu = 14090$ statt 12567, also einen Fehler von 12%. Bei höherem μ wird dieser Fehler natürlich noch größer, bei kleinerem μ nimmt er zwar ab, aber dafür treten bei weiter abnehmendem μ die erwähnten Abhängigkeiten des Entmagneti-

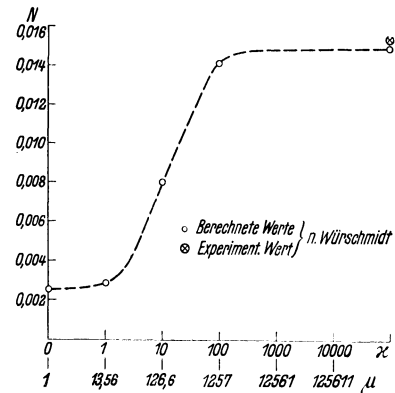


Bild 1. Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors N von der Suszeptibilität κ für einen kreiszylindrischen Stab vom Dimensionsverhältnis $p=50$.

¹⁾ E. Dussler: a. a. O. S. 75.

²⁾ H. Neumann: Über die magnetische Prüfung von Dauermagnetstahl mit dem magnetischen Spannungsmesser sowie über ein Verfahren zur direkten Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors von Dauermagneten. Veröffentlichung in Vorbereitung.

sierungsfaktors von der magnetischen Vorgeschichte sowie von κ_{\max} ein, so daß auch im Gebiet der hohen Suszeptibilitäten nach kleineren κ -Werten hin eine praktische Grenze für die Genauigkeit besteht.

Der umgekehrte Fall, nämlich die Berechnung der scheinbaren Permeabilität μ' aus der wahren Permeabilität μ , besitzt jedoch auch für hohe μ -Werte noch praktisches Interesse. Da bei der Gl. (2) im Gegensatz zu Gl. (1 b) im Nenner eine Summe statt einer Differenz steht, hängt bei großem μ' der Wert von μ vorwiegend von N ab und mithin die erzielte Genauigkeit nur von der Genauigkeit, mit der N bekannt ist.

Beim Zylinder sind nun, wie überhaupt bei allen nicht homogen magnetisierten Körperformen — je nach der verwendeten Meßmethode —, zwei verschieden definierte Entmagnetisierungsfaktoren zu unterscheiden: 1. der magnetometrische, 2. der ballistische.

Beim magnetometrischen Meßverfahren, bei dem die Kraftwirkung des Probestabes auf einen in der verlängerten Zylinderachse gelegenen Punkt bestimmt wird, gelangt wegen der inhomogenen Magnetisierungsverteilung ein räumlicher Mittelwert der Magnetisierung über das ganze Zylindervolumen zur Messung; infolgedessen korrigiert der magnetometrische Entmagnetisierungsfaktor nicht nur das Feld in der Probe, sondern gleichzeitig auch die Suszeptibilität¹⁾.

Beim ballistischen Verfahren wird dagegen durch Messung des maximalen Kraftflusses in der Äquatorialebene des Zylinders die dort vorhandene Induktion ermittelt, zu der naturgemäß nur ein einziger Feldwert gehören kann, solange die Magnetisierung in radialer Richtung noch homogen bleibt, eine Voraussetzung, die bei nicht zu kleinem p noch zutrifft. Der Entmagnetisierungsfaktor korrigiert hier also nur die Feldstärke in diesem einen Querschnitt; er ist daher strenger definiert als der magnetometrische Entmagnetisierungsfaktor.

Der ballistische und der magnetometrische Entmagnetisierungsfaktor unterscheiden sich also dadurch, daß beim ballistischen Entmagnetisierungsfaktor ein H -Wert nur einem einzigen B -Wert zugeordnet ist, während beim magnetometrischen Entmagnetisierungsfaktor ein H -Wert einem räumlichen Mittelwert der Induktion B entspricht.

Würschmidt hat in seiner ausführlichen theoretischen Arbeit ein Verfahren angegeben, den Entmagnetisierungsfaktor kreiszylindrischer Stäbe rechnerisch zu ermitteln. Auf Grund der experimentell festgestellten Verteilung der Magnetisierungsintensität längs eines harten Stahlstabes stellte Würschmidt²⁾ eine Potenzreihe auf, die dieser Verteilung angenähert entsprach. Für den Entmagnetisierungsfaktor N ergibt sich daraus für den Fall $\kappa = \infty$ folgende Beziehung:

$$N = 2\beta^2 \pi (1 + C_1 \varrho_1 + C_2 + \frac{1}{2} C_3 + \dots), \quad (3)$$

wo $\beta = 1/p$ ist. Würschmidt hat hierbei die Annahme gemacht, daß κ im ganzen Stabe konstant ist, was in Wirklichkeit nicht zutrifft. Der Fehler ist jedoch nur gering, da es hauptsächlich auf die Intensitätsverteilung in der Nähe der Stabmitte ankommt³⁾. Für die Größe ϱ_n hat Würschmidt folgende Reihe entwickelt:

$$\varrho_n = 2 \left[\ln \frac{2}{\beta} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) \right]. \quad (4)$$

¹⁾ E. Dussler: a. a. O. S. 92.

²⁾ J. Würschmidt: Theorie des Entmagnetisierungsfaktors. Sammlung Vieweg 1925 H. 78.

³⁾ J. Würschmidt: a. a. O. S. 66.

Aus Gl. (3) ist ohne weiteres ersichtlich, daß N um so genauer wird, je genauer die Konstanten $C_1, C_2 \dots C_n$ sowie ϱ_n bestimmt werden und je größer die Anzahl der Konstanten wird. Die allgemeine Gleichung dieser Konstanten C_1, C_2 usw. bis C_n lautet:

$$\frac{1}{n-1} C_1 + \frac{1}{n-2} C_2 + \frac{1}{n-3} C_3 \dots - C_n \varrho_n = \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Man sieht aus den Gl. (3) und (5), daß ihre Lösung auf eine sehr langwierige Determinantenrechnung hinausläuft. Würschmidt hat nun den Entmagnetisierungsfaktor N für das Dimensionsverhältnis $p = 50$ auf 18 Konstanten C berechnet und eine Annäherung auf 3% an den von ihm nach der Erschütterungsmethode¹⁾ bestimmten experimentellen Wert erzielt. Für den Bereich von $p = 10$ bis $p = 100$ gibt Würschmidt dann noch N -Werte mit weit geringerer Genauigkeit an, die unter Berücksichtigung von nur 2 Konstanten C berechnet worden sind²⁾.

Wir haben es nun unternommen, für den von Würschmidt bearbeiteten Bereich zylindrischer Stäbe von $p = 10 \dots 100$ sowie darüber hinaus noch für 3 weitere Werte von $p = 1000, p = 10000$ und $p = 100000$ die Entmagnetisierungsfaktoren mit etwa derselben Genauigkeit zu berechnen, wie Würschmidt es für $p = 50$ getan hat. Da nach der von Würschmidt benutzten Rechenmethode eine Rechenarbeit von einigen hundert Stunden für jeden p -Wert, unter Berücksichtigung verschiedener κ -Werte als Parameter jedoch noch ein Mehrfaches dieser Zeit nötig gewesen wäre, haben wir andere Wege eingeschlagen, die zwar mathematisch nicht so streng fundiert sind, aber doch annähernd dieselbe Genauigkeit bei erheblich geringerem Zeitaufwand liefern.

Dazu haben wir die Entmagnetisierungsfaktoren N für verschiedene p -Werte für 1—4 Konstanten C nach der Würschmidtschen Methode berechnet und dann den Quotienten $Q_{n'-1} = \frac{N_{n'}}{N_{n'-1}}$ gebildet, wo n' die Anzahl der Konstanten C bedeutet. In Bild 2 sind die 3 Quotienten Q_1, Q_2 und Q_3 in Abhängigkeit von p aufgetragen.

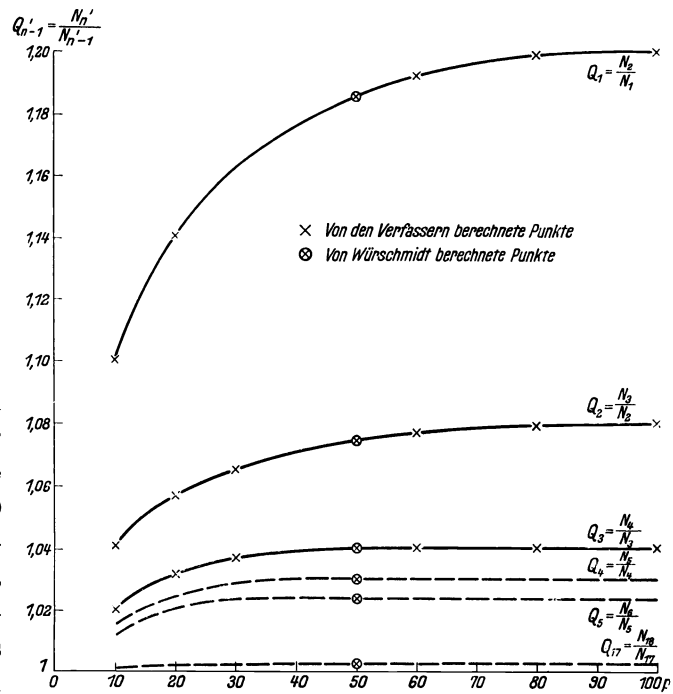


Bild 2. Quotient $Q_{n'-1} = \frac{N_{n'}}{N_{n'-1}}$ in Abhängigkeit vom Dimensionsverhältnis p .

¹⁾ J. Würschmidt: Z. Physik Bd. 19 (1923) S. 388; Bd. 12 (1922) S. 128.

²⁾ Siehe J. Würschmidt: Theorie des Entmagnetisierungsfaktors, S. 99 Tab. 25. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß bei den in dieser Tabelle angegebenen Entmagnetisierungsfaktoren für Ellipsoide im Bereich von $p = 20$ bis $p = 100$ ein Druckfehler unterlaufen ist. Die N -Werte müssen mit 10^{-1} multipliziert werden.

Man sieht 1., daß sich die Kurven mit wachsendem p einem konstanten Grenzwert nähern; 2. dieser Grenzwert wird bei um so kleineren p -Werten erreicht, je kleiner Q wird; 3. der Quotient Q wird mit steigender Konstantenzahl n' immer kleiner. Für $p = 50$ sind außerdem die Quotienten Q_4 und Q_5 aus den von Würschmidt berechneten Entmagnetisierungsfaktoren N_4 , N_5 und N_6 eingezeichnet. Auf Grund des soeben diskutierten Kurvenlaufes für Q_1 , Q_2 und Q_3 kann man jetzt den Verlauf der entsprechenden Kurve für Q_4 und Q_5 folgern; denn für alle Q -Werte kleiner als Q_3 müssen die Kurven für $p \geq 50$ parallel zur Abszissenachse verlaufen. Es ist nur noch festzustellen, wieweit die Parallelität für p -Werte kleiner als 50 gilt und wie die Krümmung für Werte bis $p = 10$ wird. Hierüber gibt uns das Kurvenblatt ebenfalls Aufschluß. Bildet man für Q_1 , Q_2 und Q_3 die Verhältnisse der absolut gemessenen Ordinaten für $p = 100$ und $p = 10$, so sieht man, daß sie in allen 3 Fällen konstant $= 2$ werden. Aus dieser Überlegung ergibt sich für alle Kurven die Lage der entsprechenden Punkte Q für $p = 10$. Die Krümmung der Kurven folgt aus der mit fortschreitendem Q bedingten Zunahme der Parallelität nach kleineren p -Werten hin. Da der Grenzwert, wie schon gesagt, mit fallendem Q bei immer kleineren p -Werten erreicht wird, so wird der gekrümmte Teil der Kurve immer kleiner, der Fehler, der bei der Zeichnung des gekrümmten Teiles gemacht werden kann, wird also sowohl relativ zu den anderen Kurven wie auch absolut (bezogen auf den Ordinatenmaßstab) immer kleiner, da Q mit steigender Konstantenzahl sich immer mehr dem Werte 1 nähert. Es zeigt sich ferner, daß für ein konstantes p die Werte $Q_{n'-1}$ mit wachsendem n' schließlich eine lineare Funktion von n' werden. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, beispielsweise von N_8 auf N_{18} zu extrapolieren und so auch den Quotienten $Q_{17} = N_{18}/N_{17}$ zu gewinnen. Für $p = 50$ ist dieser Quotient zu 1,002 ermittelt worden. Der Verlauf der Kurve für Q_{17} ergibt sich analog den obigen Ausführungen. Damit ist nun aber der Kurvenverlauf für beliebige Q -Werte zwischen $p = 10$ und $p = 100$ bekannt.

Zusammenfassend sei der Gang zur Berechnung von N für 18 Konstanten C angegeben: N_1 folgt aus den Gl. (3) und (5), N_2 ergibt sich aus dem Kurvenbild 2 zu $N_2 = Q_1 \cdot N_1$, $N_3 = Q_2 \cdot N_2$ usw., folglich

$$N_{18} = N_1 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_{16} \cdot Q_{17}. \quad (6)$$

Der Fehler bei der Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors nach diesem Verfahren

Tabelle 1. Zusammenstellung der für ∞ berechneten Entmagnetisierungsfaktoren für verschiedene Konstanten C_n (nach Würschmidt* und den Verfassern) sowie der experimentell ermittelten Werte von Würschmidt.

p	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_8	N_{18}	$N_{\text{experimentell nach Würschmidt}}$
10	0,1552	0,1710	0,1780	0,1816	0,1845	0,1869	0,1906	0,1948	
20	0,05009	0,05733	0,06049	0,06237	0,06380	0,06514	0,06644	0,06771	0,0675
30	0,02512	0,02910	0,03096	0,03207	0,03297	0,03373	0,03437	0,03506	0,0364
50*	0,01033	0,01224	0,01315	0,01368	0,01399	0,01422	0,01451	0,01485	0,0153
60	0,007458	0,008891	0,009576	0,009959	0,01025	0,01046	0,01067	0,01088	
80	0,004486	0,005375	0,005798	0,006044	0,006225	0,006350	0,006477	0,006606	
100	0,003015	0,003625	0,004072	0,004081	0,004199	0,004300	0,004386	0,004474	
1000								0,046999	
10000								0,069531	
100000								0,071205	

gegenüber der genauen Würschmidtschen Methode ist, wie im folgenden gezeigt wird, erheblich kleiner als 1 %.

Mit Rücksicht auf den nach kleineren p -Werten hin beschränkten Gültigkeitsbereich der Würschmidtschen Formel haben auch wir die Rechnung nur bis hinab zu $p = 10$ durchgeführt. In der Tab. 1 (Seite 30) sind die auf diese Weise berechneten Entmagnetisierungsfaktoren N für $n' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ und 18 Konstanten im Bereich von $p = 10$ bis $p = 100$ angegeben, sowie die Entmagnetisierungsfaktoren für $p = 1000, 10000$ und 100000 für 18 Konstanten C . Die letzte Spalte enthält

die von Würschmidt bestimmten experimentellen Werte. Man sieht, daß die Annäherung für N_{18} (18 Konstanten) an die experimentellen Werte von Würschmidt eine gute ist. Interessant ist nun weiter der Zusammenhang zwischen den Entmagnetisierungsfaktoren für $\kappa = \infty$ und $\kappa = 0$. Die Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von κ für $p = 50$ ist bereits in Bild 1 dargestellt worden. Bild 3 zeigt nun die Kurven für $N_{\kappa=\infty}$ und $N_{\kappa=0}$ in Abhängigkeit von p , wobei $N_{\kappa=0}$ sich leicht aus der folgenden von Dussler¹⁾ angegebenen Beziehung berechnen läßt:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} N = \frac{2\pi}{p^2}. \quad (7)$$

Bildet man nun $\frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}}$ und trägt dieses Verhältnis in Abhängigkeit von p auf, so erhält man die ebenfalls in Bild 3 dargestellte Kurve r , die mit wachsendem p langsam ansteigt. Trägt man diesen Quotienten r dagegen in Abhängigkeit von Logarithmus p auf, so erhält man eine gerade Linie (Bild 4). Dies folgt auch durch Division von Gl. (3) durch Gl. (7):

$$r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}} = \frac{2\beta^2 \pi (1 + C_1 \varrho_1 + C_2 + \frac{1}{2} C_3 + \dots)}{2\pi/p^2}. \quad (8)$$

Da $\beta = 1/p$ ist, folgt für

$$r = 1 + C_1 \varrho_1 + C_2 + \frac{1}{2} C_3 + \dots \quad (9)$$

Setzt man für ϱ_1 den aus Gl. (4) sich ergebenden Ausdruck in Gl. (9) ein, so

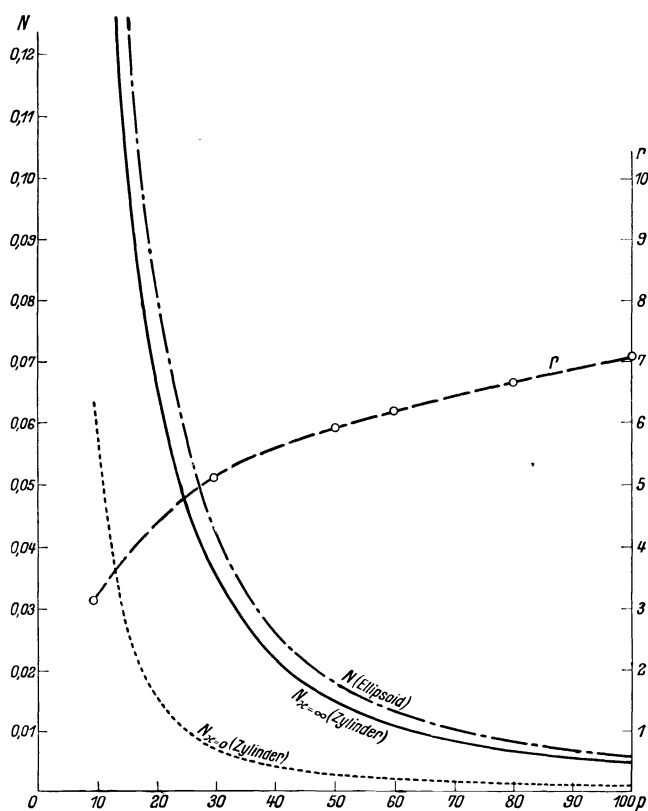


Bild 3.

I. Linker Maßstab: Entmagnetisierungsfaktoren von Ellipsoiden und kreiszylindrischen Stäben als Funktion vom Dimensionsverhältnis p . II. Rechter Maßstab: Verhältnis der Entmagnetisierungsfaktoren kreiszylindrischer Stäbe

$$r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}} \text{ als Funktion vom Dimensionsverhältnis } p.$$

¹⁾ E. Dussler: a. a. O. S. 74.

erhält man:

$$r = 1 + C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \dots + 2C_1[\ln 2p - 1,5] = 1 - 3C_1 + C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \dots + 4,606C_1 \lg 2p. \\ = 1 - 1,614C_1 + C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \dots + 4,606C_1 \lg p. \quad (10)$$

Es sei

$$1 - 1,614C_1 + C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \dots = a$$

und

$$4,606C_1 = b,$$

dann wird

$$r = a + b \lg p. \quad (11)$$

Das ist aber die Gleichung einer geraden Linie für $\lg p$ als unabhängige Variable. Die Werte der Konstanten a und b ergeben sich aus den in Tabelle 2 angegebenen r - und p -Werten zu $a = -0,92$ und $b = dr/d \lg p = 4,02$. Aus den r -Werten der Tab. 2 folgt ferner, daß b nur um $\pm 0,25\%$ schwankt. Aus der nur ganz geringen Streuung der Kurvenpunkte in Bild 4 folgt, daß die mit der angegebenen Quotientenmethode berechneten Werte der Entmagnetisierungsfaktoren sehr genau sein müssen. Andererseits ist es jetzt möglich, aus den Gl. (7) und (11) eine sehr einfache Beziehung zur Berechnung von $N_{\kappa=\infty}$ zu gewinnen:

$$N_{\kappa=\infty} = \frac{2\pi}{p^2} [4,02 \lg p - 0,92] = \frac{25,26 \lg p - 5,78}{p^2}, \quad (p \geq 10). \quad (12)$$

Tab. 2 gibt eine Zusammenstellung der Entmagnetisierungsfaktoren von kreiszylindrischen Stäben und Ellipsoiden, sowie der Quotienten $r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}}$ und $r' = \frac{N_{\text{Ellipsoid}}}{N_{\kappa=\infty}(\text{Zylinder})}$.

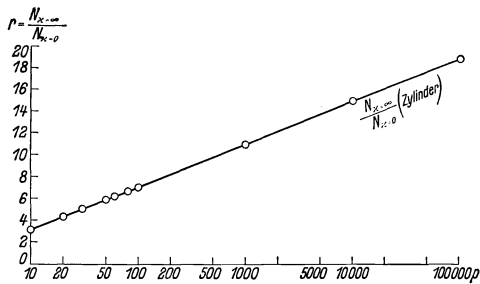


Bild 4. Quotient $r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}}$ als Funktion von Logarithmus p .

Für das Grenzgebiet der kleinen κ -Werte bis herab zu $\kappa = 0$ fand Dussler¹⁾ ebenfalls gute Übereinstimmung mit den von Würschmidt für $p = 50$ berechneten Werten. Für p -Werte < 25 treten Abweichungen auf, die Dussler darauf zurückführt, daß derart kurze Stäbe keine definierten Pole mehr besitzen. Für das Zwischengebiet der mittleren κ -Werte läßt sich ein Vergleich mit experimentellen Werten aus den eingangs angeführten Gründen nicht durchführen.

Für den Fall großer p - und κ -Werte sind dagegen Messungen an Permalloydrähten ausgeführt worden, die hier zum Vergleich herangezogen werden können. Buckley und Keehan²⁾ bestimmten den Entmagnetisierungsfaktor eines Permalloydrahtes von $p = 600$ durch Messungen des Drahtes in freier Spule sowie in einem gut passenden Joch aus Permalloy, wodurch die Scherung weitgehend eliminiert und somit der Entmagnetisierungsfaktor ziemlich genau bestimmt werden konnte. Sie fanden für $p = 600$ den Wert $N = 1,6 \cdot 10^{-4}$, während nach unserer Rechnung sich für $\kappa = \infty$ $N = 1,76 \cdot 10^{-4}$ und für $\kappa = 0$ ein Wert von $0,174 \cdot 10^{-4}$ ergibt. Die Messungen von Buckley und Keehan gelten für ein μ_{\max} von etwa 200 000 (d. h. $\kappa =$ etwa 16 000), ein Wert, der durch mechanische Spannung des Permalloydrahtes

¹⁾ E. Dussler: a. a. O. S. 74 und 79.

²⁾ O. E. Buckley und L. W. McKeehan: a. a. O.

Tabelle 2. Zusammenstellung der Entmagnetisierungsfaktoren von kreiszylindrischen Stäben und Ellipsoiden sowie der Quotienten $r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}}$ und $r' = \frac{N_{\text{Ellipsoid}}}{N_{\kappa=\infty} \text{ (Zylinder)}}$.

p	$N_{\kappa=0}$ (Zylinder)	$N_{\kappa=\infty}$ (Zylinder)	N (Ellipsoid)	$r = \frac{N_{\kappa=\infty}}{N_{\kappa=0}}$ (Zylinder)	$r' = \frac{N_{\text{Ellipsoid}}}{N_{\kappa=\infty} \text{ (Zylinder)}}$ 1)
10	0,0628 ₃	0,194 ₈	0,254 ₉	3,10	1,30 ₈
20	0,0157 ₆	0,0677 ₁	0,0848	4,31	1,25 ₂
30	0,00698 ₁	0,0350 ₆	0,0432	5,02	1,23 ₂
50	0,00251 ₃	0,0148 ₅	0,0181	5,91	1,21 ₈
60	0,00174 ₅	0,0108 ₈	0,0132	6,23	1,21 ₃
80	0,000981 ₇	0,00660 ₆	0,00800	6,73	1,21 ₁
100	0,000628 ₃	0,00447 ₄	0,00542	7,12	1,20 ₇
1000	0,0 ₅ 628 ₃	0,0 ₄ 699 ₉	0,0 ₄ 829	11,14	1,18 ₄
10000	0,0 ₇ 628 ₃	0,0 ₆ 953 ₁	0,0 ₅ 112	15,17	1,17 ₅
100000	0,0 ₉ 628 ₃	0,0 ₇ 120 ₅	0,0 ₇ 141	19,19	1,16 ₈

erreicht wurde. Der experimentelle Wert liegt also dicht unterhalb des von uns für $\kappa = \infty$ berechneten N -Wertes. Berücksichtigt man den Einfluß der unvermeidlichen Stoßfugen bei der Jochmessung, welche einen zu kleinen Entmagnetisierungsfaktor vortäuschen, so ist die Übereinstimmung mit der Rechnung als eine sehr gute zu bezeichnen. Die Differenz zwischen $\kappa = \infty$ und $\kappa = 16000$ dürfte hierbei weniger ins Gewicht fallen, liegt aber auch im Sinne der Abweichung. Bei dieser Gelegenheit sei übrigens bemerkt, daß Buckley und Keehan in ihrer Kurve für die Sättigung den Entmagnetisierungsfaktor mit Null angeben, was nach der Dussler'schen Formel (s. oben) nicht stimmen kann. Der Entmagnetisierungsfaktor muß selbst für den Grenzfall $\kappa = 0$ noch endlich sein und besitzt den angegebenen Wert von $0,174 \cdot 10^{-4}$. Die Kurve von Buckley und McKeehan, die $N = f(J/J_s)$ darstellt, muß also für den unteren Bereich nach größeren N -Werten hin etwas korrigiert werden.

Weiter sind über diesen Gegenstand noch Untersuchungen von Foster²⁾ angestellt worden. Dieser Autor bestimmte die Entmagnetisierungsfaktoren von Stäben aus Elektrolyteisen von $p = 564$ und Permalloy mit $p = 490$ und 588 , indem er mit Hilfe von besonderen Spulen die wahren Felder maß.

Tabelle 3. Vergleich der von Foster experimentell bestimmten Entmagnetisierungsfaktoren mit den nach Gleichung 12 berechneten Werten.

	N nach Foster	N berechnet
Elektrolyteisen . . . $p = 564$		
$\mu = \infty 500$	$7,2 \cdot 10^{-4}$	
$\mu_{\text{max}} = 3700$	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-4}$
Permalloy $p = 588$		
$\mu_{\text{max}} = 21600$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$1,86 \cdot 10^{-4}$
Permalloy $p = 490$	$2,02 \cdot 10^{-4}$	$2,59 \cdot 10^{-4}$

¹⁾ Es ist beachtenswert, daß der ballistische Entmagnetisierungsfaktor des Zylinders auch bei sehr großen p -Werten den Wert des Ellipsoides nicht erreicht. So ist, wie aus der letzten Spalte der Tabelle 2 hervorgeht, selbst bei $p = 100000$ noch eine Differenz von 17% vorhanden, während beim magnetometrischen Entmagnetisierungsfaktor schon bei $p = 300$ die Werte für Ellipsoid und Zylinder praktisch gleich sind (vgl. C. R. Mann: „Entmagnetisierungsfaktoren kreiszylindrischer Stäbe“, Diss. Berlin 1895).

²⁾ D. Foster: a. a. O.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß der Permalloywert für $p = 490$ etwas niedriger liegt als der von uns berechnete Wert, der Permalloywert für $p = 588$, dagegen halb so hoch und die Elektrolyteisenwerte für μ_{\max} etwa $1/4$ so hoch, für den höchsten N -Wert bei $\mu = 500$ jedoch etwa 4mal so hoch wie die entsprechenden berechneten Werte. Da aus der Theorie von Würschmidt wie aus den Messungen von Dussler und einer Messung von Foster selber sich ergibt, daß das Maximum des Entmagnetisierungsfaktors mit dem Maximum der Permeabilität zusammenfallen muß, so folgt daraus, daß die Fostersche Elektrolyteisenmessung mit einem Fehler behaftet sein muß. Der Grund für die übrigen zu niedrig gefundenen experimentellen Werte dürfte in der prinzipiell falschen Meßanordnung von Foster für die H -Bestimmung zu suchen sein. Dussler, der ja ebenfalls die Felder experimentell gemessen hat, fand schon bei einer Stabdicke von 6,6 mm, daß die von ihm benutzten Tangentialspulen von 2,9 mm radialer Ausdehnung zu große Felder, d. h. zu kleine Entmagnetisierungsfaktoren ergaben. Foster hat aber bei noch dünneren Drähten, nämlich von 1 mm Durchmesser, zwei gegeneinandergeschaltete Spulen von 10 bzw. 2 mm Durchmesser verwendet, aus deren resultierender Windungsfläche dann das Feld berechnet wurde. Da die radiale Ausdehnung dieser kombinierten Spule sowohl absolut wie relativ zum Stabdurchmesser erheblich größer war als bei der Dusslerschen Anordnung, mußte Foster N zu klein bestimmen, was für die beiden Permalloywerte und den Elektrolyteisenwert für μ_{\max} ja auch der Fall ist. Für die Unzuverlässigkeit der Fosterschen Methode spricht auch der ganz unregelmäßige Verlauf seiner $N = f(J)$ -Kurven. Daraus geht also hervor, daß die in Tab. 3 angegebenen, von uns berechneten Werte besonders mit Rücksicht auf die gute Übereinstimmung mit den von Buckley und Keehan gefundenen Ergebnissen zuverlässiger sind als die von Foster ermittelten Werte.

Zum Schluß seien noch einige ergänzende Bemerkungen zu der Dusslerschen Formel gemacht. Diese Formel, die für $\kappa = 0$ und für $p > 10$ gilt (ist $p < 10$, so ist der Polabstand nicht mehr gleich der Stablänge l zu setzen), geht nun, wie sich zeigen läßt, in die Formel für den Entmagnetisierungsfaktor einer eisenlosen Spule von dem gleichen p wie der Stab über, was ja der Fall sein muß, da für beide Fälle $\kappa = 0$ ist.

Das Feld im Innern einer unendlich langen Spule sei $H' = 0,4\pi n i/l$. Das Feld H im Innern einer endlichen Spule ist wegen der entmagnetisierenden Wirkung der Endflächen kleiner als H' , und zwar $H = \frac{0,4\pi n i}{\sqrt{l^2 + d^2}}$, woraus für $d \ll l$ die Formel für H' folgt.

In beiden Fällen ist die Windungszahl pro Zentimeter n/l natürlich als gleich vorausgesetzt. Führt man jetzt das Dimensionsverhältnis der Spule $p = l/d$ ein, so wird $H = \frac{0,4\pi n i}{l \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}}$. Der Quotient $\frac{H'}{H}$ wird $= \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}$, ein Ausdruck, der für große p übergeht in

$$\frac{H'}{H} = 1 + \frac{1}{2p^2}. \quad (13)$$

Jetzt wenden wir Gl. (2) auf diese Beziehung an. Für $\kappa = 0$, d. h. $\mu = 1$ ergibt sich daraus $\mu' = \frac{1}{1 + \frac{N}{4\pi}}$ und daher $\frac{N}{4\pi} = \frac{1}{\mu'} - 1$.

Da nun $\mu = B/H$ ist und B für $\mu = 1$ gleich H wird, ist $\mu' = B/H' = H/H'$. Für den Entmagnetisierungsfaktor einer endlichen Spule folgt somit

$$\frac{N}{4\pi} = \frac{H'}{H} - 1. \quad (14)$$

Der Entmagnetisierungsfaktor einer endlichen Spule hängt also von dem Verhältnis der Felder in der unendlich langen und der endlichen Spule ab. Weiter folgt $\frac{H'}{H} = 1 + \frac{N}{4\pi}$. Hieraus sowie aus Gl. (13) folgt für große p endlich die Dusslersche Beziehung $\frac{N}{4\pi} = \frac{1}{2p^2}$. Demnach wird der Entmagnetisierungsfaktor eines Stabes von großem p und sehr kleinem κ auch genähert wiedergegeben durch das um Eins verminderte Verhältnis der Felder in einer unendlich langen Spule und einer endlichen Spule von demselben Dimensionsverhältnis wie der Stab.

Zusammenfassung.

1. Es wird ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors kreiszylindrischer Stäbe für den Suszeptibilitätswert $\kappa = \infty$ angegeben, mit dem in wesentlich kürzerer Zeit dieselbe Genauigkeit für den Entmagnetisierungsfaktor erreicht werden kann, wie sie Würschmidt mit einer 18gliedrigen Potenzreihe erzielte.

2. Das Verhältnis zwischen den für $\kappa = \infty$ und den nach Dussler für $\kappa = 0$ berechneten Werten des Entmagnetisierungsfaktors N als Funktion von $\lg p$ liefert eine weitere einfache Beziehung, aus der für $\kappa = \infty$ für alle Werte vom Dimensionsverhältnis $p \geq 10$ die Entmagnetisierungsfaktoren berechnet werden können.

3. Ein Vergleich mit experimentell bestimmten Werten von Buckley und McKeehan liefert gute Übereinstimmung. Unterschiede gegenüber Messungen von Foster konnten auf die unzuverlässige Meßmethode zurückgeführt werden.

Ähnlichkeitsgesetze für Gasentladungen und ihr Gültigkeitsbereich.

Von **Max Steenbeck.**

Mitteilung aus der Wissenschaftlichen Abteilung der
Siemens-Schuckertwerke A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 23. April 1931.

Inhaltsübersicht.

- | | |
|--|--|
| 1. Historische Übersicht. | 6. Allgemeine Ableitung des zeitlichen Ähnlichkeitsgesetzes für nichtstationäre Entladungen. |
| 2. Die Holmschen Ähnlichkeitsgesetze für stationäre Entladungen. | 7. Übertemperaturen in der Entladung; thermisches Ähnlichkeitsgesetz. |
| 3. Gang des Beweises. | 8. Einfluß chemischer Gasreaktionen auf die Ähnlichkeitsgesetze. |
| 4. Zulässige und auszuschließende Elementarvorgänge im Entladungsraum. | Zusammenfassung. |
| 5. Zulässige Elementarvorgänge an den Wänden. | |

1. Historische Übersicht.

Die erste Beobachtung, die den späteren Ähnlichkeitsbetrachtungen von Gasentladungen zugrunde liegt, ist die von de la Rue und Müller¹⁾ gemachte Entdeckung der Konstanz der Zündspannung bei umgekehrt proportionaler Änderung von Gasdruck und Elektrodenabstand. Dieses Gesetz ist später von Paschen²⁾ näher untersucht und formuliert und meist als Paschensches Gesetz bekannt. Es gilt exakt nur zwischen Plattenelektroden; eine Erweiterung von Townsend³⁾, durch die es auf beliebige Elektrodenformen anwendbar gemacht wird, besteht darin, nicht nur den Abstand der Elektroden dem Gasdruck umgekehrt proportional zu ändern, sondern sämtliche geometrischen Dimensionen der Entladungsstrecke, also auch des gesamten Feldbildes überhaupt. Derart im exakten Sinn geometrisch ähnliche Entladungsstrecken haben die gleiche Zündspannung, wenn die Dichte der Gasfüllung des Elektrodenzwischenraumes umgekehrt wie die linearen Dimensionen geändert wird.

Diese Gesetze erstrecken sich sämtlich lediglich auf den Zündvorgang; durch diese Beschränkung gewinnt man die Möglichkeit, mit einem elektrischen Feld zwischen den Elektroden zu rechnen, das ausschließlich von den anfangs ja allein vorhandenen

¹⁾ Warren de la Rue und H. W. Müller: Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. Bd. 171 (1880) S. 65.

²⁾ F. Paschen: Wied. Ann. Bd. 33 (1889) S. 69.

³⁾ J. S. Townsend: Electrician Bd. 71 (1913) S. 348.

Oberflächenladungen der Elektroden gebildet wird und deswegen eindeutig und unter Umständen mathematisch leicht erfaßbar ist. Einen prinzipiellen Schritt weiter machte Holm¹⁾, der zum ersten Male solche Entladungsstrecken miteinander verglich, deren Gasraum bereits von irgendwelchen in der Entladung selbst gebildeten Raumladungen beliebiger Stärke angefüllt ist und bei denen daher das Feldbild von dem anfänglichen, raumladungsfreien völlig verschieden ist. Holm gelangt in seinen Ähnlichkeitsgesetzen zu wichtigen Aussagen über fertig ausgebildete stationär bestehende Entladungen, welche für die Ordnung verschiedener Beobachtungen von grundsätzlicher Wichtigkeit geworden sind. Sie enthalten die von Paschen und Townsend aufgestellten Gesetze als Grenzfälle.

2. Die Holmschen Ähnlichkeitsgesetze für stationäre Entladungen.

Die Holmsche Überlegung besteht darin, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen zwei Entladungsstrecken *I* und *II* einschließlich etwaiger Raumladungen geometrisch ähnliche Potentialbilder haben, um aus diesen Bedingungen dann Beziehungen zwischen den elektrischen und geometrischen Daten der beiden Entladungen abzuleiten; sie ist also eine Verallgemeinerung der von Townsend betrachteten raumladungsfreien ähnlichen Feldbilder. Holm zeigt, daß Entladungen, um ähnliche Potentialbilder zu ergeben, an homologen Stellen Raumladungsdichten aufweisen müssen, die sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate homologer Lineardimensionen der Entladungsstrecken; außerdem ist natürlich — wie bereits bei Townsend — notwendig, daß sich die Elektrodenanordnungen geometrisch ähneln und daß der Gasdruck — genauer die Gasdichte — umgekehrt proportional zu den geometrischen Dimensionen eingestellt wird. In diesem Fall werden an homologen Orten der beiden Entladungsstrecken von den Ladungsträgern auf einer freien Weglänge die gleichen Potentialdifferenzen durchlaufen, also das gleiche Maß an kinetischer Energie beim Fallen aufgenommen. An homologen Orten erfolgen daher die Zusammenstöße zwischen Ionen (Elektronen) und den neutralen Gasmolekülen im Mittel gleichartig in beiden Entladungen: es wird die gleiche Energiemenge in beiden Fällen abgegeben; es verbleibt also den stoßenden Ionen (Elektronen) nach dem Zusammenstoß für den Beginn eines neuen freien Falles die gleiche kinetische Anfangsenergie, d. h. die gleiche Geschwindigkeit. In ähnlichen Entladungen sind demnach die mittleren Wanderungsgeschwindigkeiten der Teilchen an homologen Orten ungeändert. Die Stromdichten (= Raumladungsdichte mal Geschwindigkeit) verhalten sich also wie die Raumladungsdichten, d. h. umgekehrt wie die Quadrate der Lineardimensionen. In geometrisch völlig ähnlichen Entladungsstrecken sind daher die Gesamtströme die gleichen. In mathematischer Formulierung besagen die Holmschen Gesetze für homologe Stücke ähnlicher Entladungsstrecken *I* und *II*:

Tabelle 1.

Voraussetzung	{	a) Lineardimensionen in <i>I</i> = <i>a</i> · Lineardimensionen in <i>II</i> .
		b) Gasdichte in <i>I</i> = $\frac{1}{a}$ · Gasdichte in <i>II</i> .
		c) Feldstärke in <i>I</i> = $\frac{1}{a}$ · Feldstärke in <i>II</i> .

¹⁾ R. Holm: Physik. Z. Bd. 15 (1914) S. 289; Wiss. Veröff. Siemens-Konz. III, 1 (1923) S. 159 und am ausführlichsten Physik. Z. Bd. 25 (1924) S. 504, unter speziellen Annahmen zum Teil auch abgeleitet von C. A. Skinner: Physic. Rev. Bd. 5 (1915) S. 483 Bd. 6 (1915) S. 158.

- Folgen
- d) Raumladungsdichte in $I = \frac{1}{a^2} \cdot$ Raumladungsdichte in II .
 - e) Flächenladungsdichte in $I = \frac{1}{a} \cdot$ Flächenladungsdichte in II .
 - f) Gesamte Gasmenge in $I = a^2 \cdot$ gesamte Gasmenge in II .
 - g) Gesamtheit der elektrischen Ladungen in $I = a \cdot$ Gesamtheit der elektrischen Ladungen in II .
 - h) Verhältnis ionisierter zu neutral. Molekülen $= \frac{1}{a} \cdot$ Verhältnis ionisierter zu neutral. Molekülen in II .
 - i) Trägergeschwindigkeit in $I =$ Trägergeschwindigkeit in II .
 - j) Strom-Spannungscharakteristik in I (einschließlich Zündspannung = Strom-Spannungscharakteristik in II (einschließlich Zündspannung).
- Außer diesen bereits von Holm aus seinem Grundgedanken abgeleiteten Aussagen ergibt sich als weitere Folge eine Erweiterung für nichtstationäre Entladungen von Steenbeck¹⁾:
- k) Zeitliche Änderung $\frac{di}{dt}$ in $I = \frac{1}{a}$ zeitliche Änderung $\frac{di}{dt}$ in II .

Die Aussagen d) bis k) folgen elementar aus den Voraussetzungen a) bis c). Die Voraussetzungen a) und b) zu erfüllen, haben wir jederzeit in der Hand. Keinen unmittelbaren Einfluß haben wir dagegen im allgemeinen Fall auf die Erfüllung der Voraussetzung c); wenn die Entladungen sich nicht freiwillig so einstellen, daß die Feldbilder in I und II sich geometrisch ähneln — etwas anderes sagt c) ja nicht aus —, so gelten die Ähnlichkeitsgesetze, d. h. die Folgerungen d) bis k), nicht. Wir können zwar den Elektroden bestimmte Spannungen aufzwingen und damit die ähnlichen Feldbilder für den speziellen raumladungsfreien Fall des Paschen-Townsend'schen Gesetzes erzeugen; aber wenn wir es in einer bereits bestehenden Entladung mit Raumladungen zu tun haben, so haben wir kein Mittel, diese Raumladungen zu zwingen, sich nun gerade in der richtigen Verteilung und der richtigen Stärke auszubilden, so daß in beiden Entladungsstrecken ähnliche Feldbilder entstehen. Nun zeigen die Beobachtungen, daß die Ähnlichkeitsgesetze tatsächlich in gewissen Fällen gelten, woraus man rückwärts schließen kann, daß die Voraussetzung c) in diesen Entladungen erfüllt war; aber es fehlt bis jetzt noch die allgemeine Beurteilung, unter welchen Bedingungen dies geschieht, d. h. welche Elementarprozesse hierzu in einer Entladung auftreten dürfen, und welche so zurücktreten müssen, daß man von ihnen absehen kann. Diese Aufgabe will die vorliegende Arbeit lösen. Unter Elementarprozessen werden hier verstanden und untersucht: Ionenwanderung im elektrischen Feld, Stoßionisation, Diffusion von Elektronen und Ionen; Rekombination von positiven Ionen mit Elektronen und negativen Ionen; Anlagerung von Elektronen an neutrale Gasmoleküle unter Bildung negativer Ionen; Adsorption von Ionen und Elektronen von festen Wänden; Einfluß des magnetischen Eigenfeldes des Entladungsstromes; Übertemperaturen im Entladungsraum; stufenweise Ionisation über angeregte und metastabile Atome und Erzeugung von Elektronen an Wänden durch metastabile Atome. Es wird sich zeigen, daß die Ähnlichkeitsgesetze unter wesentlich allgemeineren Bedingungen gültig sind, als bisher angenommen wurde, und daß sich eine thermische Erweiterung der Ähnlichkeitsgesetze angeben läßt, die auf Vakuumbogenentladungen angewendet werden kann und dabei eine Ergänzung der Schottkyschen Theorie²⁾ der positiven Säule ergibt.

¹⁾ M. Steenbeck: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. IX, 1 (1930) S. 42.

²⁾ W. Schottky: Physik. Z. Bd. 25 (1924) S. 342, 635.

3. Theoretische Grundlagen; Gang des Beweises.

Dällenbach¹⁾ hat bereits gezeigt, daß bei geometrisch ähnlichen Entladungsstrecken sich auch die Raumladungen geometrisch ähnlich und in gerade richtiger Stärke freiwillig ausbilden müssen und damit also die Folgerungen d) bis k) gelten, wenn außer Stoßionisation und Ionenwanderung im elektrischen Feld alle übrigen Elementarprozesse zurücktreten und vernachlässigt werden dürfen. Wir werden beweisen, daß es durchaus nicht notwendig ist, derart umfassende Einschränkungen zu machen, daß vielmehr zur exakten Gültigkeit der Holmschen Sätze nur ganz wenige der bereits genannten Elementarvorgänge auszuschließen sind.

Wir denken uns zum Beweis die beiden der Tabelle 1 zugrunde gelegten Entladungen folgendermaßen entstanden: In einer Entladungsstrecke, beispielsweise der mit den kleineren Lineardimensionen II , soll eine beliebige Gasentladung eingeleitet und stabilisiert sein; wir setzen lediglich voraus, daß diese Entladung stationär und schwingungsfrei brennt und — vorläufig — keinerlei wesentliche Übertemperatur in ihrem Inneren erzeugt. Die Entladung I dagegen lassen wir nicht selbständig entstehen. Wir konstruieren uns vielmehr — unabhängig von experimenteller Realisierbarkeit — einen Anfangszustand in I , von dem an wir erst die Entladung I sich selber überlassen. Die Raumladungen und Oberflächenladungen in I seien so verteilt, daß das Feldbild in I dem in II geometrisch ähnlich wird; in bekannter Weise müssen wir dazu die Bedingungen d) und e) erfüllen²⁾. Die Gastemperatur in I soll ebenso groß sein wie die in II ; es sollen also auch hier Übertemperaturen vermieden werden. Außerdem sollen die Teilchen an homologen Orten nach Größe und Richtungsverteilung die gleiche Geschwindigkeit haben; es wird also ebenfalls die Bedingung i) erfüllt. Nachdem derart der Anfangszustand von I eindeutig, wenn auch willkürlich definiert ist, überlassen wir I sich selbst ohne irgendwelche weiteren Eingriffe. Im allgemeinen wird sich dann natürlich eine derart willkürlich erzwungene Raumladungsverteilung aus dem Anfangszustand entfernen und irgendeine andere stabile Konfiguration annehmen. Wir wollen nun zeigen, daß dies bei Vernachlässigung einiger Elementarprozesse im vorliegenden Fall nicht eintritt, sondern daß hier das anfängliche Feldbild bereits das stabile, also stationär mögliche ist. Damit wäre bewiesen, daß zu einer stationären Gasentladung (II) eine im Holmschen Sinne ähnliche (I) stationär bestehen kann, was zu zeigen ja unser Ziel ist.

Zum Nachweis der Stabilität des aufgezwungenen Anfangszustandes genügt es zu zeigen, daß die Raumladungsdichte (und die Oberflächenladung) sich überall in I auf der anfänglichen Höhe hält, daß also Trägererzeugung und Trägerverluste durch Abwanderung im elektrischen Feld, Diffusion, Rekombination usw. sich gerade die Waage halten. Ist dieses der Fall, so ändert sich die Potentialverteilung nicht, damit auch nicht die Trägergeschwindigkeit an irgendeinem Ort und deren Richtungsverteilung. Wir haben ja gezeigt, daß, wenn ähnliche Entladungen überhaupt möglich sind, jedenfalls homologe Geschwindigkeiten einander gleich sein müssen; und da wir ja die Geschwindigkeiten in I bereits den homologen Geschwindigkeiten der stationären Entladung II gleich gewählt haben, ist die Geschwindigkeitsverteilung in der ganzen Entladung I bereits die zu der anfänglichen Potentialverteilung stationär zugehörnde, falls eben diese Potentialverteilung selbst sich nicht

¹⁾ W. Dällenbach: Physik. Z. Bd. 26 (1925) S. 483.

²⁾ Diese Bedingung enthält z. B. bereits die Aussagen, daß an den Elektroden von I die gleiche Spannung wie an II liegen muß.

ändert. Unser Beweis muß also lediglich darauf hinauslaufen, für jeden beliebigen Ort von I die Gleichung $d\rho_1/dt = 0$ nachzuweisen¹⁾ und entsprechend die Gleichung $d\sigma_1/dt = 0$ für die Oberflächenladungsdichte σ_1 . Wir beschränken uns zunächst auf den Nachweis der ersten Gleichung, die für den Entladungsraum gilt. Dieser Beweis muß getrennt geführt werden für die von positiven Ionen, Elektronen und negativen Ionen für sich gebildeten Raumladungen.

4. Zulässige und auszuschließende Elementarvorgänge im Entladungsraum.

Der mathematische Beweis besteht in dem Nachweis der Gleichung

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \text{const} \frac{d\rho_2}{dt} \quad (1)$$

für beliebige homologe Punkte in I und II und alle drei Raumladungsarten. Da nämlich II voraussetzungsgemäß eine stationäre Entladung sein soll, muß $d\rho_2/dt = 0$ sein; dann wäre nach Beweis von (1) ebenfalls $d\rho_1/dt = 0$ und damit auch die konstruierte Entladung stabil, d. h. ähnliche Entladungen wären stationär möglich.

Nun setzen sich die zeitlichen Änderungen von ρ_1 und ρ_2 aus einer großen Zahl einzelner Einflüsse zusammen; es sollen zunächst lediglich die drei wichtigsten Wirkungen berücksichtigt werden: Ionenneuerzeugung durch Elektronenstoß, Abwanderung im elektrischen Feld und Diffusion.

$$\frac{d\rho_{1,2}}{dt} = \left(\frac{\delta\rho_{1,2}}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}} + \left(\frac{\delta\rho_{1,2}}{\delta t}\right)_{\text{Feld}} + \left(\frac{\delta\rho_{1,2}}{\delta t}\right)_{\text{Diffusion}}. \quad (2a, b)^2$$

Wir wollen zeigen, daß folgende Gleichungen gelten:

$$\left(\frac{\delta\rho_1}{\delta t}\right)_{\substack{\text{Feld} \\ \text{Diffusion}}} = \frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{\delta\rho}{\delta t}\right)_{\substack{\text{Feld} \\ \text{Diffusion}}}. \quad (3a, b, c)^3$$

Durch Addition von (3a), (3b) und (3c) ergibt sich dann unter Berücksichtigung von (2a, b) die gesuchte Gleichung (1) mit $\text{const} = 1/a^3$. Das gleiche Resultat erhält man, wenn zu (3a, b, c) noch beliebige weitere Einflüsse hinzugenommen werden, die sich auf die Form

$$\frac{\delta\rho_1}{\delta t} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{\delta\rho_2}{\delta t} \quad (4)$$

bringen lassen. Ganz allgemein ist dann (4) Bedingung dafür, daß der untersuchte Elementarvorgang (1) exakt bestehen läßt und somit in beliebigem Umfange in ähnlichen Gasentladungen auftreten darf. Umgekehrt müssen alle diejenigen Prozesse in ähnlichen Entladungen ausgeschlossen werden, dürfen also nur unwesentlich auf die Entladung einwirken, die sich nicht auf die Form (4) bringen lassen. Es ist also bei den auf S. 38 genannten Einflüssen lediglich zu untersuchen, ob sie (4) erfüllen.

a) Ionisation durch Elektronenstoß.

Es bedeuten: ρ^+ Raumladungsdichte positiver Ionen; $\bar{\rho}$ desgl. der Elektronen; e_0 die Elementarladung, \bar{v} die Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen im Feld.

¹⁾ Der Index 1 bzw. 2 an der Raumladungsdichte ρ bezieht sich auf die Entladungsstrecke I bzw. II .

²⁾ Es gilt der Index 1 oder 2, die Zeichen δ statt d bedeuten, daß jedesmal nur ein Teilprozeß berücksichtigt wird.

³⁾ Es gilt der Index „Ionisation“ oder „Feld“ oder „Diffusion“.

Die in der Zeit dt in der Volumeneinheit neu erzeugte Raumladung $d\bar{\rho}^+ = -d\bar{\rho}^-$ ist berechenbar dadurch, daß jedes der $\frac{1}{e_0} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{v} \cdot dt$ Elektronen, die in dieser Zeit den Querschnitt 1 passieren, auf der Längeneinheit α Ionenpaare schafft:

$$\left(\frac{\delta \bar{\rho}^+}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}} = -\left(\frac{\delta \bar{\rho}^-}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}} = \alpha \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{v}. \quad (5)$$

(5) gilt natürlich für beide Entladungsstrecken (*I* und *II*). Da voraussetzungsgemäß $\bar{\rho}_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \bar{\rho}_2$ ist, und da in bekannter Weise $\alpha_1 = \frac{1}{a} \cdot \alpha_2$ ist¹⁾, folgt aus Aufstellung von (5) für *I* und *II* nach Division

$$\left(\frac{\delta \bar{\rho}_1^+}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{\delta \bar{\rho}_2^+}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}}; \quad \left(\frac{\delta \bar{\rho}_1^-}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{\delta \bar{\rho}_2^-}{\delta t}\right)_{\text{Ionisation}},$$

eine Gleichung, die bereits oben in (3a) behauptet wurde. Analog beweist man, daß ebenfalls die Ionisation durch Ionen die Gl. (3a) befriedigt.

b) Wanderung der Ionen im elektrischen Feld.

Da hierbei weder Ionen entstehen noch verschwinden, gilt die Kontinuitätsgleichung für kompressible Medien, die wir für eine Komponente aufstellen, weil die Berücksichtigung aller drei Komponente nichts Neues bringt:

$$\left(\frac{\delta \rho}{\delta t}\right)_{\text{Feld}} = -\frac{d}{dx} (\rho \cdot v_x). \quad (6)$$

Da $\rho_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \rho_2$ und $v_1 = v_2$, ist $\rho_1 v_1 = \frac{1}{a^2} \rho_2 v_2$; die örtliche Änderung von ρv erfolgt in *I* überdies a mal langsamer, da in *I* alle Längen ja a mal vergrößert sind als in *II*. Es ist also $\frac{d}{dx} (\rho v_1) = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{d}{dx} (\rho_2 v_2)$, was nach Einsatz in (6) die behauptete Gl. (3b) ergibt. Die Wanderung der Elektronen und Ionen beiderlei Vorzeichens erfüllt also das Kriterium (4).

c) Diffusion.

Die Konzentration an einem Orte und Konzentrationsgefälle ändern sich durch Ab- und Zudiffusion von Ladungsträgern aus den Nachbargebieten nach der Gleichung

$$\left(\frac{\delta \rho}{\delta t}\right)_{\text{Diffusion}} = D \cdot \frac{d^2 \rho}{dx^2}. \quad (7)^2$$

In Fortsetzung der Überlegungen unter Abschnitt b) ist

$$\frac{d^2 \rho_1}{dx^2} = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{d^2 \rho_2}{dx^2}. \quad (8)$$

Nach der Townsendschen Beziehung ist bei konstanter Temperatur die Diffusionskonstante D der Beweglichkeit proportional, also der Gasdichte umgekehrt proportional. Es gilt demnach

$$D_1 = a D_2. \quad (9)$$

¹⁾ Es ist α/p lediglich eine Funktion von \mathcal{E}/p , wo \mathcal{E} die elektrische Feldstärke und p den Gegen-
druck bedeuten. $\frac{\mathcal{E}_1}{p_1}$ ist nun gleich $\frac{\mathcal{E}_2}{p_2}$, da $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{a} \mathcal{E}_2$ und $p_1 = \frac{1}{a} p_2$ (genauer $d_1 = \frac{1}{a} d_2$). Es gilt also
ebenfalls $\frac{\alpha_1}{p_1} = \frac{\alpha_2}{p_2}$ oder $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{a}$.

²⁾ Gl. (7) behandelt lediglich den linearen Fall; im allgemeinen heißt die rechte Seite $D \cdot \text{div } \rho$. Die
Behandlung bleibt die gleiche, ebenso die Resultate.

(8) und (9) geben mit (7) die Erfüllung von (4). Auch die Diffusion kann also in ähnlichen Gasentladungen in beliebigem Umfang einwirken, ohne die Ähnlichkeitsgesetze zu stören, und zwar die aller drei Trägerarten.

d) Rekombination.

Die Wiedervereinigung von Ladungsträgern entgegengesetzten Vorzeichens folgt der Gleichung

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\delta t}\right)_{\text{Rekombination}} = R \cdot \varrho^+ \cdot \varrho^-; \quad (10)$$

darin ist R der Rekombinationskoeffizient, ϱ^+ die Konzentration der positiven Ionen, ϱ^- wahlweise diejenige der Elektronen oder der negativen Ionen.

Für die Rekombination mit negativen Ionen gilt nach Langevin¹⁾, daß sie um so rascher erfolgt, je leichter sich die Ionen unter ihrer wechselseitigen Anziehung aufeinander zu bewegen können; er erhält Proportionalität zwischen dem Rekombinationskoeffizienten und der Beweglichkeit der Ionen. Danach ist $R_1 = a R_2$; und da $\varrho_1^+ = \frac{1}{a^2} \cdot \varrho_2^+$ und $\varrho_1^- = \frac{1}{a^2} \cdot \varrho_2^-$ ist, gilt nach (10) auch für die Ionenrekombination die Gl. (4). Auch die Rekombination der Ionen stört die Ähnlichkeitsgesetze nicht. Allerdings gilt die von Langevin behauptete Beziehung exakt nur für sehr große Drucke (≈ 760 mm Hg), während bei den uns interessierenden Drucken der Rekombinationskoeffizient sich nicht so ändert, wie hier vorausgesetzt wurde. Diese Rekombination fügt sich daher nicht völlig der Gl. (4) und stört also die Ähnlichkeitsgesetze, wenn sie sehr stark auftritt.

Für die Rekombination zwischen positiven Ionen und Elektronen sind die theoretischen Grundlagen nicht völlig sicher. Erfolgt sie ebenfalls unter der gegenseitigen Anziehung zwischen Ion und Elektron auf größere Entfernungen (von der Größe der mittleren Abstände zwischen Ion und Elektron bei den betr. Konzentrationen), so gilt das gleiche wie für die Rekombination mit negativen Ionen. Erfolgt dagegen die Rekombination nach der Vorstellung von J. J. Thomson²⁾ (zufälliger thermischer Dreierstoß zwischen den beiden Ladungsträgern und einer neutralen Gasmolekel), so ist der Rekombinationskoeffizient durchproportional. Für diesen Fall wird der Transformationsfaktor von $(\delta \varrho / \delta t)_{\text{Rekombination}}$ nicht a^{-3} , wie er es nach (4) sein müßte, sondern a^{-5} ; eine derartige Rekombination müßte also die Ähnlichkeitsgesetze stören, wenn sie in wesentlichem Maße aufträte.

Gerade das kann aber nicht der Fall sein. Der sich nach dieser Auffassung ergebende Rekombinationskoeffizient ist etwa 4 Zehnerpotenzen kleiner als der nach Langevins Auffassung berechnete. Entweder erfolgt die Rekombination der Elektronen also wie die der Ionen; dann werden die Ähnlichkeitsgesetze nur wenig gestört; oder sie erfolgt nur bei thermischen Zusammenstößen zwischen Elektron und Ion — dann ist sie quantitativ unwichtig gegenüber anderen ladungsvermichtenden Prozessen und stört deswegen ebenfalls nicht.

e) Anlagerung von Elektronen an neutrale Moleküle.

Dieser Prozeß ist nächst der Diffusion wahrscheinlich der wichtigste, freie Elektronen vernichtende Vorgang in Gasentladungen.

¹⁾ P. Langevin: Thèses de Doctorat, Paris 1902.

²⁾ J. J. Thomson: Philos. Mag. Bd. 47 (1924) S. 337.

Die Anzahl der in der Zeiteinheit in der Volumeneinheit durch Anlagerung gebildeten Ionen ist proportional der in dieser Zeit überhaupt stattfindenden Zahl von thermischen Zusammenstößen zwischen Elektronen und neutralen Molekülen; diese ist gleich der Gesamtzahl der Stöße, die ein Elektron in der Zeiteinheit erlebt, multipliziert mit der Anzahl der Elektronen/cm³. Die Stoßzahl eines Elektrons ist der Quotient aus seiner Lineargeschwindigkeit \bar{v} und der Länge seines freien Weges λ . Sei w der Bruchteil aller Zusammenstöße, der zur Anlagerung des Elektrons unter Bildung eines negativen Ions führt, so ist

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\delta t}\right)_{\text{Anlagerung}} = w \cdot \bar{\varrho} \cdot \frac{\bar{v}}{\lambda}. \quad (11)$$

w wird abhängen von der Natur des neutralen Moleküls, der Relativgeschwindigkeit von Elektron und Molekül. w wird aber nicht abhängen von der Entfernung der übrigen, nicht beteiligten Moleküle. Deshalb muß w in beiden Entladungsstrecken *I* und *II* an homologen Orten gleich sein ($w_1 = w_2$).

Da $\varrho_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \varrho_2$ und $\lambda_1 = a \cdot \lambda_2$, folgt wieder die Erfüllung von (4). Die „stufenweise“ Rekombination der Elektronen, bei welcher zunächst negative Ionen gebildet werden, wird von den Ähnlichkeitsgesetzen erfüllt.

f) Stufenweise Ionisation: Zwischenglied metastabile Atome.

Bei den Stoßvorgängen im Entladungsraum werden mit endlicher Wahrscheinlichkeit (angeregte) metastabile Atome (Moleküle) geschaffen, die bei einem folgenden Zusammenstoß mit der Glaswand des Entladungsgefäßes oder — mit kleiner Wahrscheinlichkeit — beim Zusammenstoß mit einem neutralen Molekül, jedenfalls aber nicht spontan, wieder in den Grundzustand zurückgeführt werden. Beim Zusammenstoß mit einem Elektron kann das metastabile Atom ionisiert werden, und zwar leichter als ein nicht angeregtes.

Sei n_{met} die Konzentration eines metastabilen Zustandes (= Anzahl solcher Atome/cm³), so erlebt jedes Elektron in der Zeiteinheit eine Anzahl $k \cdot n_{\text{met}}$ Zusammenstöße mit metastabilen Atomen; führe davon jeder mit einer Wahrscheinlichkeit ε zur Ionisation, so bilden die Elektronen, die die Raumladung $\bar{\varrho}$ repräsentieren, in der Zeit dt je Volumeneinheit die neue Raumladung $d\varrho = \bar{\varrho} \cdot \varepsilon \cdot k \cdot n_{\text{met}} \cdot dt$, gültig für von Ionen und Elektronen gebildetes ϱ

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\delta t}\right)_{\text{met}} = \bar{\varrho} \cdot \varepsilon \cdot k \cdot n_{\text{met}}. \quad (12)$$

Bei der Transformation von *II* in *I* ändert sich $\bar{\varrho}$ mit $1/a^2$, ε und k aus geometrischen Gründen und wegen der Konstanz der Geschwindigkeiten gar nicht. Zu untersuchen bleibt das Verhalten von n_{met} .

Sei τ_{met} die mittlere Lebensdauer der metastabilen Atome, N_{met} die Anzahl der in der Zeit- und Volumeneinheit neugebildeten metastabilen Teilchen, so gilt

$$N_{\text{met}} \cdot \tau_{\text{met}} = n_{\text{met}}. \quad (13)$$

N_{met} ist proportional zu der Anzahl der pro Zeit- und Raumeinheit stattfindenden Zusammenstöße zwischen den neutralen Molekülen und den Elektronen. Sei γ der Bruchteil derjenigen dieser Zusammenstöße, der zur Bildung eines metastabilen Atoms führt, so gilt in analoger Weise wie (11)

$$N_{\text{met}} = \left(\frac{\bar{\varrho}}{e_0}\right) \cdot \gamma \cdot \bar{v} \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad (e_0 = \text{Elementarladung}) \quad (14)$$

woraus sich mit (13) ergibt

$$n_{\text{met}} = \frac{\bar{\varrho}}{e_0} \cdot \gamma \cdot \bar{v} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \tau_{\text{met}}. \quad (15)$$

(15) gestattet, zu beurteilen, wie sich n_{met} bei Transformation von II in I ändert. e_0 , γ und \bar{v} bleiben ungeändert; $\bar{\varrho}_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \bar{\varrho}_2$; $\lambda_1 = a\lambda_2$. Da metastabile Atome nur nach einem erneuten Zusammenstoß verschwinden können, diese aber in I a mal seltener erfolgen als in II , gilt im Mittel $\tau_{1\text{met}} = a\tau_{2\text{met}}$. Es ergibt sich also aus (15) $n_{\text{met}1} = \frac{1}{a^2} n_{\text{met}2}$. Dadurch wird aus (12) die Beziehung

$$\left(\frac{\delta \varrho_1}{\delta t}\right)_{\text{met}} = \frac{1}{a^4} \cdot \left(\frac{\delta \varrho_2}{\delta t}\right)_{\text{met}}, \quad (16)$$

die in Widerspruch steht zu dem Kriterium (4).

Die stufenweise Ionisation über einen metastabilen Zwischenzustand darf also in ähnlichen Gasentladungen keine wesentliche Rolle spielen.

g) Ionisation in Stufen: Zwischenglied angeregte nichtmetastabile Atome.

Es bedeute der Index a einen beliebigen angeregten Zustand. Dann gilt genau wie (12) bzw. (15)

$$\left(\frac{\delta \varrho}{\delta t}\right)_a = \bar{\varrho} \cdot \varepsilon' \cdot k \cdot n_a, \quad (17)$$

$$n_a = \frac{\bar{\varrho}}{e_0} \cdot \gamma' \cdot \bar{v} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \tau_a. \quad (18)$$

Die Lebensdauer eines angeregten nichtmetastabilen Zustandes ist nun so kurz, daß das betreffende Atom bereits (bei nicht zu hohen Drücken!) wieder ausgeklungen ist, ehe es einen weiteren Zusammenstoß erlebt. Es ist die Lebensdauer demnach unabhängig von der Gasdichte; d. h. $\tau_{a1} = \tau_{a2}$. Damit wird aus (18) $n_{a1} = \frac{1}{a^3} n_{a2}$ und somit über (17)

$$\left(\frac{\delta \varrho_1}{\delta t}\right)_a = \frac{1}{a^5} \cdot \left(\frac{\delta \varrho_2}{\delta t}\right)_a. \quad (19)$$

Die Abweichung vom Ähnlichkeitskriterium (4) ist hier also noch größer als bei (16); dieser Ionisationsweg ist also noch mehr auszuschließen als der über metastabile Zwischenzustände. Vermutlich ist er quantitativ nicht besonders wichtig. Erfolgt die Ionisation nicht über einen Zwischenzustand, sondern in mehr als zwei Stufen, so weichen die Transformationsfaktoren noch weiter von dem Sollwert a^{-3} ab, sind also völlig auszuschließen. — Durch Photonenstoß angeregte Atome (d. h. durch Absorption eines Lichtquanten) verhalten sich völlig gleich wie die, welche ihre Energie einem Elektronen- (oder auch Ionen-) Stoß verdanken, da die Konzentration der Photonen (Einstrahlung von außen ausgeschlossen) derjenigen der Elektronen proportional bleibt.

h) Ionisation von leicht ionisierbaren Gasgemischungen durch metastabile Atome.

Bei diesem Prozeß tritt Ionisierung dann ein, wenn ein metastabiles, energiereiches Atom des Hauptgases ein Atom eines leicht ionisierbaren, in geringen Mengen zugefügten Fremdgases trifft, dessen Ionisierungsspannung unterhalb der Anregungsspannung des metastabilen Zustandes liegt. Dieser Vorgang ist, wie Penning¹⁾

¹⁾ F. M. Penning: Z. Physik Bd. 57 (1929) S. 723.

gezeigt hat, von größerer Bedeutung, als man zunächst annehmen könnte. Wir nehmen an, daß die Voraussetzung b für Haupt- und Zusatzgas getrennt gilt, daß diese Gase also in konstantem Mischungsverhältnis in beiden Entladungsstrecken verwendet werden. Die Konzentrationen des Zusatzgases verhalten sich also wie $1/a$, die der metastabilen Atome wie $1/a^2$ (s. o. Abschnitt f). Die Häufigkeit der Zusammenstöße ändert sich — konstante Temperatur vorausgesetzt — wie das Produkt der Konzentrationen, also wie $1/a^3$. Dieser Prozeß erfüllt damit das Kriterium (4) und darf daher in beliebigem Umfang wirken, ohne die Ähnlichkeitsgesetze zu stören.

5. Zulässige Elementarvorgänge an den Wänden.

Für den Nachweis der zeitlichen Feldkonstanz ist außer $dQ_1/dt = 0$ Entsprechendes für die Flächenladungsdichte σ_1 der Begrenzungsflächen (einschl. Elektroden) zu beweisen. Es kann dies in völlig gleicher Weise geschehen, wie hier für Raumladungen nachgewiesen; dabei lautet das (4) entsprechende Kriterium jedoch

$$\frac{\delta \sigma_1}{\delta t} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\delta \sigma_2}{\delta t}. \quad (20)$$

Da die Ableitungen jedoch nicht prinzipiell anders verlaufen als für die Raumladungsdichten, sehen wir von einer ausführlichen Ableitung ab. (20) wird beispielsweise exakt erfüllt von den Teilchen, die im elektrischen Feld auf die Elektroden wandern, die sich nach Diffusion auf die Wände dort rekombinieren, die durch photoelektrische Prozesse und unter dem Einfluß des Ionenbombardements der Kathoden ausgelösten Elektronen, wenn die Kathoden in I und II die gleiche Oberflächenbeschaffenheit besitzen. Auch die durch andiffundierende metastabile Atome aus den Elektroden befreiten Elektronen werden in Mengen erzeugt, die (20) exakt erfüllen.

6. Allgemeine Abteilung des zeitlichen Ähnlichkeitsgesetzes für nichtstationäre Entladungen.

Wenn wir von denjenigen Ionen bildenden oder vernichtenden Prozessen absehen, die (4) bzw. (20) nicht erfüllen, so gilt (1) mit $\text{const} = 1/a^3$, und man erhält mit Berücksichtigung von $Q_1 = \frac{1}{a^2} Q_2$ und $\sigma_1 = \frac{1}{a} \sigma_2$

$$\frac{1}{Q_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{Q_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{d\sigma_2}{dt}. \quad (22)$$

Wenn wir nunmehr die bisherige Voraussetzung fallen lassen, daß die Entladung in II bereits völlig entwickelt ist, und vielmehr annehmen, daß sie sich in einem zeitgliedlosen¹⁾ Stromkreis auf- oder abbaut, so wird $d\sigma_2/dt$ und dQ_2/dt einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Denken wir uns eine derartige Entladung II im Augenblick $t = 0$ in der beschriebenen Weise durch eine Entladung I ähnlich abgebildet²⁾,

¹⁾ D. h. ohne Selbstinduktionen und Kapazitäten, jedoch mit beliebigen, auch nicht konstanten Widerständen.

²⁾ Die ähnlichen Zustände im Augenblick $t = 0$ können z. B. die völlige raumladungsfreie Anordnung beim Beginn des Zündungsvorganges zweier ähnlicher Entladungsstrecken sein.

und überlassen wir von dann an beide Entladungen sich selbst, so werden beide Entladungen ihren stabilen Endzuständen zustreben, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Wenn man den Entwicklungsvorgang in *I* und *II* mit zwei Zeitmaßstäben verfolgt, die im gleichen Maße transformiert sind wie die Lineardimensionen, so daß also die Zeiteinheit ϑ_1 für *I* a mal größer ist als diejenige für ϑ_2 für *II* ($\vartheta_1 = a \vartheta_2$), so ist am gleichen Zeitpunkt t die Maßzahl t_1 nur $1/a$ derjenigen t_2 in *II*, da ja gelten muß $t = t_1 \vartheta_1 = t_2 \vartheta_2$. Mit $t_1 = \frac{1}{a} t_2$ erhalten wir aus (21) und (22)

$$\frac{1}{e_1} \cdot \frac{d\varrho_1}{dt_1} = \frac{1}{e_2} \cdot \frac{d\varrho_2}{dt_2}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt_1} = \frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{d\sigma_2}{dt_2}. \quad (24)$$

In diesem Fall erfolgen die (relativen) zeitlichen Änderungen von Raum- und Flächenladungsdichte in *I* und *II* in völlig gleicher Weise; sie sind also nach der gleichen Anzahl von Zeiteinheiten (relativ) gleich weit entwickelt. Auf- oder Abbau ähnlicher Gasentladungen erfolgen daher nach der gleichen Zeitfunktion, wenn die Zeit in den Entladungen wie die Lineardimensionen transformiert wird; Entladung *I* entwickelt sich also a mal langsamer als *II*. Aussage k) Tabelle 1 (S. 38) ist von diesem Gesetz ein Spezialfall.

7. Übertemperaturen in der Entladung; thermisches Ähnlichkeitsgesetz.

Es bleiben noch einige Einflüsse und ihre Veränderung bei Transformation der Entladung *II* in *I* zu untersuchen, die nicht direkt Ionen schaffen, also erst auf Umwegen auf das Feldbild umgestaltend wirken können.

a) Das magnetische Eigenfeld kann bei hohen Stromdichten des Entladungsstromes erhebliche Werte annehmen und dadurch ein Abweichen der Elektronen- und Ionenbahnen von demjenigen Wege bewirken, den sie lediglich unter Einfluß des elektrostatischen Feldes beschreiben würden. Das Magnetfeld transformiert sich nach $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{a} \mathfrak{S}_2$; da die Trägergeschwindigkeiten an homologen Orten gleich sind, ist der Krümmungsradius der Teilchenbahnen $r_1 = a \cdot r_2$; er transformiert sich also wie die übrigen Lineardimensionen, so daß auch mit Berücksichtigung des magnetischen Eigenfeldes die Bahnen homologer Teilchen einander geometrisch ähnlich bleiben. Das Eigenfeld stört also bis zu beliebig hohen Stromdichten die Ähnlichkeitsgesetze nicht¹⁾.

b) Bedeutenden Einfluß übt dagegen eine im Gasraum evtl. auftretende Übertemperatur auf den Entladungsvorgang aus. Da das Gas im Entladungsgefäß — von geringen Störungen abgesehen — überall unter dem gleichen Druck steht, bedeutet eine Übertemperatur eine Gasverdünnung, die im allgemeinen nicht in beiden Entladungsstrecken in (prozentual) gleicher Weise erfolgt und damit gegen die grundlegende Voraussetzung b) Tabelle 1 verstößt (Gasdichteverhältnis $1/a!$). Die Ähnlichkeitsgesetze gelten daher nur, solange keine wesentliche Übertemperatur auftritt; nur in mäßigen Grenzen kann diese durch nachträgliche Dichtekorrektur berücksichtigt werden.

¹⁾ Das magnetische Eigenfeld, das eine Selbstinduktion im Entladungsstromkreis bedeutet, stört ebenfalls das zeitliche Ähnlichkeitsgesetz nicht, ebenfalls übrigens die Elektrodenkapazität nicht, wenn die Elektroden nur wirklich exakt geometrisch ähnlich sind.

Damit scheinen die Ähnlichkeitsgesetze auszuschneiden für sämtliche Bogenentladungen, in denen stets erhebliche Übertemperaturen auftreten. Es zeigt sich jedoch, daß der Gültigkeitsbereich jedenfalls auf einen Teil der Bogenentladungen ausgedehnt werden kann, wobei beliebige Übertemperaturen auftreten dürfen, ohne daß ein Verstoß gegen die Voraussetzungen a), b) und c) der Tabelle 1 eintritt.

Wir beschränken uns im folgenden ausschließlich auf Gase, die den idealen Gasgesetzen folgen. Die Forderung $d_1 = \frac{1}{a} d_2$ führt dann keineswegs zu der Forderung $T_1 = T_2$, wie wir sie bisher stellten; vielmehr ergibt $p_1 \cdot v_1 = c \cdot \frac{p_1}{d_1} = R T_1$ und $p_2 \cdot v_2 = c \cdot \frac{p_2}{d_2} = R T_2$ nach Division lediglich die Forderung $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 \cdot d_2}{p_2 \cdot d_1} = a \cdot \frac{p_1}{p_2}$; der Ausdruck rechts ist aber für alle homologen Orterpaare der gleiche, da im stationären Fall in I überall der konstante Druck p_1 und in II der Druck p_2 herrscht. Wenn wir die Temperaturen T_1 und T_2 in I und II ortsabhängig wählen, also Übertemperaturen zulassen, so wird trotzdem die Fundamentalforderung $d_1 = \frac{1}{a} d_2$ so lange erfüllt, als das Verhältnis der Temperaturen an homologen Orten in I und II konstant bleibt, wenn also gilt

$$T_1 = \frac{1}{b} \cdot T_2. \quad (25)$$

In diesem Fall transformieren sich die Gasdrucke gemäß

$$p_1 = \frac{1}{a \cdot b} \cdot p_2. \quad (26)$$

Wir wollen zeigen, daß bei ganz bestimmter Wahl des b der Anfangszustand in I stabil mit beliebigen Übertemperaturen möglich ist, wenn nur wieder I das ähnliche Bild einer stationären Gasentladung II ist, wobei diesmal nicht nur alle geometrischen Maße des gesamten Feldes und der Gasdruck ähnlich transformiert sind, sondern überdies auch die Temperaturen gemäß (25) mit noch zu bestimmendem b .

In einer stationären Gasentladung müssen nicht nur an jedem Ort Raum- und Oberflächenladungsdichten zeitlich konstant bleiben, sondern ebenfalls die Gastemperaturen. Damit dies geschieht, muß aus jedem Volumenelement gerade ebensoviel Energie durch Wärmeableitung entfernt werden, wie im Innern an elektrischer Energie verbraucht wird. Wenn λ das Wärmeleitvermögen darstellt, so muß demnach gelten

$$j \cdot \mathfrak{E} + \lambda \cdot \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = 0, \quad (27)$$

falls die Entladung stationär brennt. Hiervon ist das erste Glied die in der Volumeneinheit sekundlich verbrauchte elektrische Energie, das zweite Glied der Überschuß zugeleiteter über die abfließende Wärme.

Im allgemeinen Fall ist die linke Seite von (27) der Überschuß erzeugter über abgeleitete Wärmemenge je Zeit- und Volumeneinheit, also $= \frac{d}{dt} (c \cdot T)$, wobei c die spezifische Wärme der Volumeneinheit ist:

$$\frac{d}{dt} (c \cdot T) = j \cdot \mathfrak{E} + \lambda \cdot \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right). \quad (27a)$$

Wir nehmen wieder an, in II brenne eine Entladung stationär und schwingungsfrei, nun aber mit beliebigen Übertemperaturen im Innern, und ein Anfangszustand der

Entladung I sei wie bisher künstlich erzwungen, wobei das Feldbild ähnlich transformiert sei, außerdem aber jeder Punkt in I eine b mal niedrigere Temperatur habe als der homologe Punkt in II . Dann herrscht in I nur dann Temperaturgleichgewicht, wenn sich analog zu dem Beweisverfahren für die Stationarität der Raumladungen die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(c_1 \cdot T_1) = \text{const} \frac{d}{dt}(c_2 T_2) \quad (28)$$

ableiten läßt. Da nun $\frac{d}{dt}(c \cdot T)$ nach (27a) eine Summe aus zwei Gliedern darstellt, ist (28) allgemein nur möglich, wenn

$$j_1 \cdot \mathfrak{E}_1 = \text{const} j_2 \cdot \mathfrak{E}_2 \quad (29a)$$

und

$$\lambda_1 \cdot \nabla T_1 = \text{const} \cdot \lambda_2 \cdot \nabla T_2 \quad (29b)$$

gilt, wobei die Konstante in (29a) und (29b) die gleiche ist.

Die Größe dieser Konstanten ergibt sich aus (29a) wieder zu $\frac{1}{a^3}$, da $j_1 = \frac{1}{a^2} j_2$ und $\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{a} \cdot \mathfrak{E}_2$ ist. Da auch ∇T eine dreigliedrige Summe ist, muß sich jeder einzelne Summand in I um den Faktor $1/a^3$ von dem entsprechenden in II unterscheiden. Es muß also z. B. erfüllt sein

$$\lambda_1 \cdot \frac{d^2 T_1}{dx^2} = \frac{1}{a^3} \cdot \lambda_2 \cdot \frac{d^2 T_2}{dx^2}. \quad (30)$$

Damit die Fundamentalforderung $d_1 = \frac{1}{a} d_2$ erfüllt bleibt, muß (30) mit der Temperaturproportionalität (25) gelöst werden, worin lediglich b noch zu bestimmen ist.

Wäre die Wärmeleitfähigkeit in I und II an homologen Stellen die gleiche, so wäre (30) erfüllt mit $a = b$. Tatsächlich ist λ nun zwar dichteunabhängig; aber es ändert sich mit der nun ja verschiedenen Temperatur der Gase. Die kinetische Theorie der Gase ergibt bei Annahme von Temperaturunabhängigkeit der freien Weglänge:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_1^{\frac{1}{2}}}{T_2^{\frac{1}{2}}}. \quad (31)$$

Tabelle 2¹⁾.

Gas	q
Helium	0,68
Neon	0,70
Argon	0,97
Stickstoff	0,86
Wasserstoff	0,78

Tatsächlich ist der Exponent etwas größer als $\frac{1}{2}$ und liegt meist bei etwa $\frac{3}{4}$. Wir rechnen allgemein mit dem Exponenten q :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^q. \quad (32)$$

Tabelle 2 gibt eine Übersicht über q bei einigen wichtigen Gasen. In diesem Fall wird (30) erfüllt durch (25) mit

$$b = \sqrt[1+q]{a}. \quad (33)$$

Wenn in zwei Gasentladungsstrecken nicht nur die geometrischen Maße und die Gasdichten, sondern auch die Gastemperaturen ähnlich transformiert werden, sind ähnliche Gasentladungen mit beliebigen Übertemperaturen möglich. (Thermisches Ähnlichkeitsgesetz.)

Zur Erzeugung ähnlicher Temperaturverteilung in I und II genügt es dabei, die begrenzenden Wandungen auf ähnlichen, d. h. im Verhältnis $\frac{1}{b} = a^{-\frac{1}{1+q}}$ trans-

¹⁾ Errechnet aus H. Landolt und R. Börnstein: Physikalisch-Chemische Tabellen. 5. Aufl. Berlin 1923.

formierten Temperaturen zu halten; die ähnliche Temperaturverteilung stellt sich dann im ganzen Entladungsgefäß von selbst ein.

Für die Gültigkeit des thermischen Ähnlichkeitsgesetzes sind allerdings weitergehende Einschränkungen nötig als für solche Entladungen, in welchen keine wesentlichen Übertemperaturen auftreten. Es ist selbstverständlich, daß durch die Temperaturtransformation nicht neue Effekte in einem Gefäß auftreten dürfen, die im anderen fehlen; Glühemission der Elektroden und thermische Ionisation des Gases darf noch keine Rolle spielen. Weiter muß die Rekombination im Gasraum völlig zurücktreten gegenüber der Abdiffusion der Ionen und Elektronen an die Gefäßwände; denn die Rekombination ist ein stark temperaturabhängiger Vorgang und transformiert sich nunmehr gänzlich anders als bei der Ableitung unter d angenommen. Endlich dürfen die „Temperaturen“ von Elektronen und Ionen sich nicht mit transformieren, weil sonst die Voraussetzung nicht mehr erfüllt wird, daß die Trägergeschwindigkeiten an homologen Orten einander gleich sein sollen. Ionisation endlich soll nur durch direkten Stoß erfolgen, also nicht über Stufen.

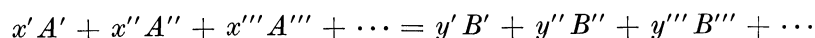
Diese sehr stark einschränkenden Bedingungen sind größtenteils wenigstens annähernd erfüllt z. B. in der positiven Säule eines Vakuumbogens in Edelgasen.

Unter weitgehend ähnlichen Voraussetzungen findet Schottky bei der Ableitung seiner Theorie der positiven Säule, daß die Längsfeldstärke eines Vakuumbogens umgekehrt zum Durchmesser steigt. Genau das gleiche Resultat ergeben die Ähnlichkeitsgesetze; aber auf einem bemerkenswerterweise völlig anderem Wege. Die Voraussetzungen sind in beiden Fällen: Trägererzeugung durch Stoß, Trägerverlust lediglich durch Diffusion an die Wand. Sowohl die Schottkysche Theorie wie die Ähnlichkeitsgesetze fordern Gleichheit der Trägertemperaturen in den verschiedenen Bogenquerschnitten. Die Ähnlichkeitsgesetze fordern eine ganz bestimmte Transformation der Wandtemperatur. Die Schottkysche Theorie läßt das offen. Die Schottkysche Theorie bestimmt die Größe des Gradienten numerisch; die Ähnlichkeitsgesetze vermögen darüber nichts auszusagen, sondern machen nur Relativangaben. Dafür setzt die Schottkysche Theorie eine konstante Gasdichte und -temperatur über den ganzen Entladungsquerschnitt voraus, während die Ähnlichkeitsgesetze beliebige Unterschiede zulassen.

8. Einfluß chemischer Gasreaktionen auf die Ähnlichkeitsgesetze.

Durch die Gasentladung wird in manchen Fällen die chemische Natur des Füllgases (bzw. -gasgemisches) verändert (z. B. Ozonbildung aus O_2 ; Bildung von Stickoxyden; Zersetzung von Ammoniak)¹⁾. Allgemeine Aussagen über den Einfluß derartiger Reaktionen auf die Entladung, insbesondere die Ähnlichkeitsgesetze, lassen sich nur dann machen, wenn angenommen wird, daß die Reaktionsprodukte miteinander im Gleichgewicht stehen. Für diesen Fall gilt das Massenwirkungsgesetz.

Wir denken uns den Entladungsraum erfüllt durch ein Gasgemisch aus den Gasen A' , A'' , $A''' \dots$, B' , B'' , $B''' \dots$, die miteinander chemisch reagieren nach der Gleichung



¹⁾ Für die Anregung zu diesem Teil der Untersuchung danke ich Herrn R. Swinne bestens.

Darin bedeutet A bzw. B ein Mol dieses Gases, x (bzw. y) ist die (relative) Anzahl der reagierenden Mole. Seien nun $c_{A'}$, $c_{A''}$. . . , $c_{B'}$, $c_{B''}$ die Molkonzentrationen der Gase A' , A'' . . . , B' , B'' (= Anzahl der Mole pro Volumeneinheit), so gilt nach dem Massenwirkungsgesetz

$$\frac{c_{A'}^{x'} \cdot c_{A''}^{x''} \cdot c_{A'''}^{x'''} \cdot \dots}{c_{B'}^{y'} \cdot c_{B''}^{y''} \cdot c_{B'''}^{y'''} \cdot \dots} = K, \quad (34)$$

wobei die Konstante wohl temperatur-, aber nicht druckabhängig ist. Wir beschränken uns weiterhin auf solche Entladungen, in denen keine wesentlichen Übertemperaturen auftreten; dann ist die Konstante in zwei ähnlichen Glimmentladungen I und II die gleiche

$$K_1 = K_2. \quad (35)$$

Damit aber ähnliche Entladungen möglich sind, müssen die Gasdichten, d. h. die Molkonzentrationen c in II a mal größer sein als in I :

$$c_{A'_1} = \frac{1}{a} \cdot c_{A'_2}. \quad (36)$$

Die Zahlen x und y , die ja nur die relativen Anzahlen der miteinander reagierenden Mole bedeuten, sind in beiden Entladungen die gleichen.

Sollten also trotz chemischer Gasreaktionen die Ähnlichkeitsgesetze im Gleichgewichtszustand gelten, so müssen (34), (35) und (36) nebeneinander erfüllt sein. Wenn wir nach (34) die Konstanten K_1 und K_2 bilden, diese nach (35) einander gleichsetzen und endlich die Konzentrationen in II nach (36) durch die entsprechenden Konzentrationen in I ersetzen, so erhalten wir als Bedingung für die Möglichkeit ähnlicher Gasentladungen:

$$\frac{c_{A'_1}^{x'} \cdot c_{A''_1}^{x''} \cdot c_{A'''_1}^{x'''} \cdot \dots}{c_{B'_1}^{y'} \cdot c_{B''_1}^{y''} \cdot c_{B'''_1}^{y'''} \cdot \dots} = \frac{(a \cdot c_{A'_1})^{x'} \cdot (a \cdot c_{A''_1})^{x''} \cdot (a \cdot c_{A'''_1})^{x'''} \cdot \dots}{(a \cdot c_{B'_1})^{y'} \cdot (a \cdot c_{B''_1})^{y''} \cdot (a \cdot c_{B'''_1})^{y'''} \cdot \dots} \quad (37)$$

$$= \frac{a^{x'+x''+x'''+\dots}}{a^{y'+y''+y'''+\dots}} \cdot \frac{c_{A'_1}^{x'} \cdot c_{A''_1}^{x''} \cdot c_{A'''_1}^{x'''} \cdot \dots}{c_{B'_1}^{y'} \cdot c_{B''_1}^{y''} \cdot c_{B'''_1}^{y'''} \cdot \dots}, \quad (38)$$

daraus folgt:

$$a^{y'+y''+y'''+\dots} = a^{x'+x''+x'''+\dots} \quad (39)$$

oder

$$\sum x = \sum y.$$

All diejenigen Gasreaktionen, die mit keiner Änderung der Molzahl verbunden sind (z. B. $N_2 + O_2 = 2 NO$), stören die Ähnlichkeitsgesetze nicht; all diejenigen Reaktionen, bei welchen eine solche auftritt (z. B. $3 O_2 = 2 O_3$), sind in ähnlichen Gasentladungen auszuschließen.

Sobald in einer Entladung Übertemperaturen auftreten, stören chemische Reaktionen auch bei Molzahlkonstanz die Ähnlichkeitsgesetze, weil die Konstante des Massenwirkungsgesetzes stark temperaturabhängig ist.

Zusammenfassung.

In ähnlichen Gasentladungen dürfen, solange wesentliche Temperaturunterschiede im Entladungsgefäß nicht auftreten, Ionenwanderung im Feld, Stoßionisation, Diffusion, Ionenrekombination, Anlagerung von Elektronen an neutrale Moleküle,

Adsorption von Ionen und Elektronen an festen Wänden, Photoemission in beliebigen Umfang wirken, möglicherweise auch die direkte Rekombination von Ionen und Elektronen, die jedoch auf alle Fälle zurücktritt. Auch das magnetische Eigenfeld der Entladung stört die Ähnlichkeitsbeziehungen nicht. Auszuschließen sind nur Ionisation in Stufen, vor allem über nichtmetastabile Zustände, während Ionisierungen von Zusatzgasen oder an den Wänden durch metastabile Atome zulässig sind.

Unter gewissen, bei Vakuumbogen in Edelgasen erfüllten Bedingungen können in ähnlichen Entladungen auch beliebige Temperaturunterschiede auftreten, ohne die Ähnlichkeitsgesetze zu stören; dabei sind außer Lineardimensionen und Gasdichte die Temperaturfelder in den Entladungen einander ähnlich. Für diesen Fall führen die Ähnlichkeitsgesetze zu Aussagen, wie sie bei ähnlichen Voraussetzungen, aber bei gänzlich anderer Ableitung, auch die Schottkysche Theorie der positiven Säule macht.

Chemische Reaktionen innerhalb des Füllgases sind dann ohne Einfluß auf die Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze, wenn mit ihnen keine Molzahländerung verbunden ist und wenn Übertemperaturen vermieden werden.

Über den Entladeverzug in homogenen elektrischen Feldern und in Luft von Atmosphärendruck.

Von Robert Strigel.

Mit 21 Bildern.

Mitteilung aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke A.-G.
zu Siemensstadt.

Eingegangen am 23. Dezember 1931.

Inhaltsübersicht.

- A. Die Verteilungskurve des Entladeverzugs.
 - 1. Frühere Messungen über den Entladeverzug.
 - 2. Schaltung des Kathodenstrahloszillographen.
 - a) Meßkreis.
 - b) Zeitkreis.
 - c) Synchronisierung von Meß- und Zeitkreis und Selbststeuerung des Aufnahmevorganges.
 - d) Entladestrecke.
 - 3. Meßresultate und Ergebnisse.
 - a) Verteilungskurve des Entladeverzugs bei gegebener Überspannung.
 - b) Reproduzierbarkeit der erhaltenen Verteilungskurven.
 - c) Abhängigkeit der Verteilungskurve von der Höhe der Überspannung.
 - d) Zusammenhang zwischen statistischer Verteilung des Entladeverzugs und den bisherigen Ergebnissen der Entladeverzugsmessungen mit dem Kathodenstrahloszillographen.
 - B. Einfluß der Ionisation auf den Entladeverzug.
 - 1. Oberflächen- und Volumionisation.
 - 2. Anordnung und Messung zur Bestimmung der Oberflächenionisation.
 - 3. Zusammenhang zwischen statistischer Streuzeit des Entladeverzugs und Oberflächenionisation.
 - 4. Ausdehnung der Messungen auf andere Ionisierungsstärken.
 - 5. Ausdehnung der Messungen auf andere Elektrodenmaterialien.
 - 6. Einfluß der Luftfeuchtigkeit.
- Zusammenfassung.

Zweck der vorliegenden Untersuchung ist, die Gesetzmäßigkeiten des Entladeverzugs im homogenen elektrischen Felde in Luft von Atmosphärendruck festzustellen. Dabei sollen in erster Linie die Art der Verteilungskurve des Entladeverzugs und der Einfluß der Ionisation auf die Dauer des Entladeverzugs näher untersucht werden¹⁾.

A. Die Verteilungskurve des Entladeverzuges.

1. Frühere Messungen über den Entladeverzug.

Unter Entladeverzug versteht man die Zeit, die zwischen dem Anlegen einer Spannung an eine Entladungsstrecke und dem Eintritt der Entladung verstreicht.

¹⁾ Die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit sind bereits in einer kurzen Notiz in den Naturwiss. Bd. 20 (1932) S. 205 mitgeteilt.

Die ersten Untersuchungen über den Entladeverzug stammen von G. Jaumann (13)¹⁾ und E. Warburg (48, 49). Jaumann mißt die Abhängigkeit des Entladeverzugs von der angelegten Spannung und kommt zu der Ansicht, daß der Entladeverzug nicht allein abhängig sei von der angelegten Spannung, sondern auch vom Spannungsanstieg. Warburg stellt fest, daß der Entladeverzug durch Bestrahlung mit ultraviolettem Licht vermindert, unter Umständen sogar aufgehoben werden kann, ferner daß er in feuchter Luft geringer ist als in trockener.

J. Algermissen (1) untersucht den Entladeverzug mittels hochfrequenter Schwingungen und findet, daß ultraviolettes Licht die Schlagweite einer Funkenstrecke für eine bestimmte Maximalspannung bei einer Frequenz bis zu $5 \cdot 10^6$ Per/sec „nur sehr wenig“, „bedeutend“ bei 10^7 Per/sec und „ganz außerordentlich“ stark bei 10^8 Per/sec vergrößert.

W. Kaufmann (14), F. W. Peeck (25) und vor allem J. I. Townsend (46) und E. Warburg (49) nehmen an, daß der Entladeverzug dadurch zustande kommt, daß sich aus einigen wenigen vorhandenen Ionen oder Elektronen durch Stoßionisation eine für den Funkenübergang ausreichende Anzahl Ladungsträger gebildet hat. U. Campbell (8) unterscheidet zwischen einem konstanten Teil des Entladeverzugs und einem sich diesem überlagernden, unregelmäßig streuenden Teil. Er sieht in der konstanten Verzugszeit diejenige Zeit, die für den eigentlichen Entladungsaufbau notwendig ist. Der unregelmäßig streuende Teil wird von ihm darauf zurückgeführt, daß in der Entladungsbahn an Stellen hoher Feldstärke ein Ion oder Elektron vorhanden sein muß, das die Entladung zur Auslösung bringt. Das Vorhandensein eines solchen Ladungsträgers in der Entladungsbahn ist etwas Zufälliges, so daß damit der Entladeverzug den Wahrscheinlichkeitsgesetzen unterworfen ist.

In der Tat konnten E. Mauz und R. Seeliger (21) und gleichzeitig in einer sehr ausführlichen Arbeit K. Zuber (50), später noch W. Braunbek (4,5) und M. Büge (6), die statistische Natur des Entladeverzuges bei niederen Drucken nachweisen. M. v. Laue zeigt in einer theoretischen Bemerkung (19) zur Arbeit K. Zubers, daß die Anzahl n_t der in dem Zeitintervall t und $t + dt$ gemessenen Verzögerungszeiten gegeben ist durch die Beziehung:

$$n_t dt = p \cdot \beta e^{-p\beta t} dt,$$

wenn β die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß sich im Entladungsraum ein Elektron oder Ion bildet bzw. in ihn hineindiffundiert und p die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß sich ein solches primäres Ion oder Elektron durch Stoßionisation so stark vermehrt, daß ein Überschlag sich ausbilden kann. Ein mittleres Maß für den Entladeverzug ergibt dann $1/p\beta = \sigma$: es sei im folgenden als die mittlere Streuzeit des Entladeverzuges bezeichnet.

In der nachstehenden Tabelle sind aus diesen Arbeiten Gasart, Druckbereich und mittlere Streuzeit des Entladeverzuges zusammengestellt:

	Gasart	Druckbereich mm Hg	Mittlerer Entlade- verzug σ sec
Mauz-Seeliger	Neon-Helium	10 mm	~ 20 sec
Zuber	Luft	3 . . 4 „	1 . . . 2 „
Braunbek	„	75 . . . 150 „	0,15 . . . 6,7 „
Büge	Neon oder Wasserstoff ²⁾	5 . . 10 „	$10^{-4} \dots 10^{-2}$ „

¹⁾ Die in Klammern angegebenen Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

²⁾ Büge gibt an, als Entladungsstrecke eine der käuflichen Glimmlampen (Betriebsspannung 220 V) nach Entfernung des eingebauten Vorschaltwiderstandes verwendet zu haben.

Auf Grund der Holmschen Ähnlichkeitsgesetze, die von M. Steenbeck (35) in zeitlicher Richtung erweitert wurden, müßte man erwarten, daß auch bei Atmosphärendruck in Luft die statistische Verteilung des Entladeverzugs erhalten bleibe, wobei die mittlere Streuzzeit entsprechend dem höheren Druck nach kürzeren Zeiten hin verschoben sein müßte.

Dem stehen jedoch eine Reihe von Arbeiten entgegen. P. O. Pedersen (24) hat gefunden, daß die Verzögerungszeit bei Atmosphärendruck zwar beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist, daß aber deutlich eine minimale Verzögerungszeit auftritt. Gegen die Versuchsanordnung von Pedersen — er hat den Entladeverzug durch den Zeitunterschied in der Ausbreitungsgeschwindigkeit Lichtenbergscher Figuren bestimmt — ist einzuwenden, daß er zur Messung des Entladeverzugs eine Anordnung verwendet hat, die, wie das Entstehen der Lichtenbergschen Figuren, ebenfalls einem Entladeverzug unterworfen ist. Auch eine Arbeit von Burawoy (7) sei in diesem Zusammenhange genannt; doch soll auf sie nicht näher eingegangen werden, da Burawoy das Ansprechen seiner Entladungsstrecke mit dem Auftreten einer Leuchterscheinung gleich setzt und nicht mit dem Eintritt des Spannungszusammenbruches. Dann aber ergeben auch die neueren Arbeiten mit dem Kathodenstrahloszillographen von R. Tamm (39), J. J. Torok (41, 42, 43), J. J. Torok und F. D. Fielder (44, 45), F. D. Fielder und J. McAuley (10) sämtliche ein Streuen der Meßpunkte um einen Mittelwert und in keiner Weise eine statistische Verteilung vom Werte Null an. Schon vor Erscheinen dieser Arbeiten hat K. Kohler (15) eine Erklärung der Erscheinungen des Entladeverzugs auf Grund der Gaußschen Verteilung versucht.

Eine der Hauptaufgaben der vorliegenden Untersuchungen ist es, den Widerspruch zu klären zwischen den älteren Arbeiten bei niedrigen Drucken und den neueren Kathodenstrahloszillographen-Untersuchungen, die bei Atmosphärendruck ausgeführt worden sind. Als Meßinstrument soll dabei ebenfalls der Kathodenstrahloszillograph zur Verwendung kommen.

2. Schaltung des Kathodenstrahloszillographen.

a) Meßkreis.

Bei den bisherigen Untersuchungen über den Entladeverzug mit Hilfe des Kathodenstrahloszillographen war der Meßkreis im allgemeinen an dem Ende einer Wanderwellenleitung angeordnet. Um den Einwand auszuschließen, daß Eigenschaften der Leitung den Entladeverzug beeinflussen könnten, wurde eine andere Schaltung gewählt, wie sie ähnlich von O. Meyer bei Untersuchungen über die Spannungsstufe beim Durchschlag verwendet worden war (22). Der zu untersuchende Entladungskreis liegt parallel zu dem Entladewiderstand einer Kondensatorbatterie. Wird die Kondensatorbatterie auf diesen Widerstand geschaltet, so fällt die gesamte Kondensatorspannung über diesem Widerstand ab. Hierdurch wird der Meßkreis aufgeladen und die Entladung in der zu untersuchenden Entladungsstrecke kann sich ausbilden. Dabei muß die Zeitkonstante des Meßkreises möglichst klein gewählt werden, um einen möglichst raschen Spannungsanstieg an der zu untersuchenden Entladungsstrecke zu erhalten. Die Zeitkonstante des spannungsliefernden Kondensatorkreises muß dagegen 2...3 Größenordnungen höher gewählt werden als die zu messenden Werte des Entladeverzuges.

Im einzelnen war die Schaltung nach Bild 1 ausgeführt. Über eine Gleichrichter-anordnung wird der Repelitkondensator C von 10^{-8} F aufgeladen und über die Hilfsfunkenstrecke F_h und einen Karbowidwiderstand R_c von $10^6 \Omega$ entladen. Die Entladezeitkonstante des Kreises beträgt demnach 10^{-2} sec. Die Erdung war zwischen Entladewiderstand und Hilfsfunkenstrecke angeordnet. Der Meßkreis bestand aus der Entladestrecke F_m , die in Reihe mit einem Widerstand R_m von 125Ω geschaltet war und an deren Enden die Ablenkplatten A des Kathodenstrahloszillographen, Bauart Rogowski-Flegler-Tamm, angeschlossen waren. Die Kapazität der Meßfunkenstrecke, ihrer Zuleitungen und der Ablenkplatten betrug etwa $6 \cdot 10^{-11}$ F, die Zeitkonstante des Meßkreises somit $7,5 \cdot 10^{-9}$ sec. Die Zeitkonstante des Meßkreises noch weiter herabzusetzen, ist zwecklos, da sie schon größenordnungsmäßig in die Durchbruchzeit der Hilfsfunkenstrecke fällt (28). Die Ablenkplatten waren mit Querdämpfung versehen (16, 17, 18).

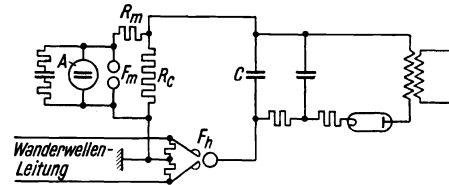


Bild 1. Meßkreis.

b) Zeitkreis.

Die Anforderungen, die an den Zeitkreis gestellt werden, lassen sich am besten durch eine Betrachtung des Weges entwickeln, die der Kathodenstrahl während einer Aufnahme zurückzulegen hat. Der unabgelenkte Kathodenstrahl steht in der Mitte der photographischen Platte, auf Bild 2 in Stellung 0. Vor Beginn der Aufnahme muß er über die Platte hinausgerückt werden in Stellung 1. Während der Aufnahme muß er in der Richtung des Pfeiles über die Platte laufen. Erst, wenn er in Stellung 2 angelangt ist, darf der aufzunehmende Vorgang auf die Ablenkplatten des Meßkreises treffen. Nach Ablauf des gesamten Vorganges muß sich der Strahl auf der anderen Seite außerhalb der Platte in Stellung 3 befinden.

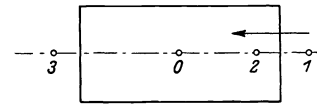


Bild 2. Strahlverlauf während der Aufnahme.

Dieser Strahlverlauf läßt sich dadurch erreichen, daß man mit Hilfe eines Ablenkplattensystemes (Haltesystem) den Strahl durch Anlegen einer konstanten Spannung auf Stellung 3 einstellt. Die Polarität und Größe der Spannung an dem Ablenkplattensystem des Zeitkreises muß dann so gewählt werden, daß der Strahl bei aufgeladenem Zeitkreis in Stellung 1 steht.

Die Zeit, die verstreicht zwischen dem Auslösen des Zeitkreises und dem Passieren des Strahles durch Stellung 2, ist tote Zeit, die im Interesse einer guten Synchronisierung von Zeit- und Meßkreis möglichst klein gehalten werden muß. Es wurde deshalb für den Zeitkreis die von W. Krug angegebene Sprungschaltung (17) verwendet, die auf der Kopplung zweier Kapazitätskreise mit verschiedenen Zeitkonstanten beruht. Die Einzelheiten der Schaltung sind aus Bild 3 ersichtlich. Ist die Kapazität der Ablenkplatten klein gegenüber derjenigen des parallel liegenden Kondensatorkreises, so wird sich sehr rasch eine Spannungsverteilung nach Ansprechen der Zündfunkenstrecke F_z im Zeitkreis einstellen, die durch das Widerstandsverhältnis $R_2/R_1 + R_2$ gegeben ist. Der Kathodenstrahl wird also sehr rasch in eine diesem

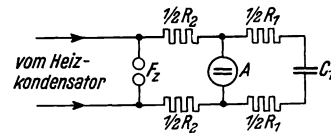


Bild 3. Sprungschaltung nach W. Krug.

Widerstandsverhältnis entsprechende Stellung geworfen. Durch eine den Entfernungen der Stellungen 1...3 und 2...3 entsprechende Dimensionierung dieses Widerstandsverhältnisses kann man den Strahl in Stellung 2 werfen; die weitere Entladung des Zeitkreises erfolgt nach einer Zeitkonstante, die angenähert $C_1(R_2 + R_3)$ ist.

c) Synchronisierung von Meß- und Zeitkreis und Selbststeuerung des Aufnahmevorganges.

Die Synchronisierung von Zeit- und Meßkreis wird mit Hilfe einer Wanderwellenleitung durchgeführt. Ein Ausgleichsvorgang wird auf eine Wanderwellenleitung gegeben. Durch kapazitive Kopplung (31, 17) wird ein Ladestoß auf ein anderes Leitungssystem übertragen und durch diesen Ladestoß die als Spaltfunkenstrecke ausgebildete Zündfunkenstrecke des Zeitkreises zum Ansprechen gebracht.

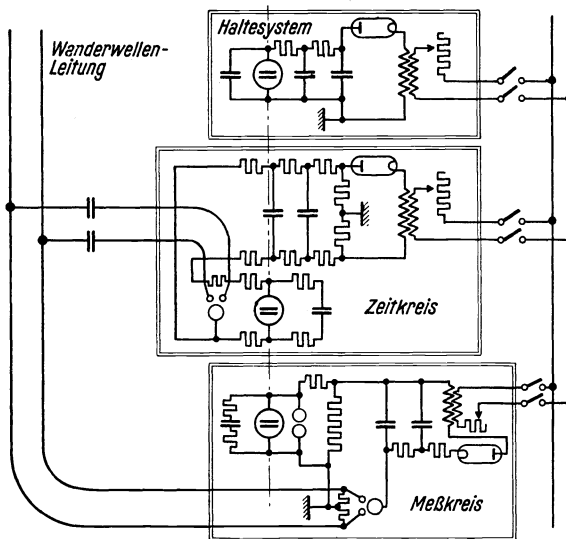


Bild 4. Gesamtschaltbild.

Die Auslösung des Meßkreises erfolgt ebenfalls mit Hilfe einer Spaltfunkenstrecke, die am Ende der Wanderwellenleitung angeschlossen ist und den spannungsliefernden Kondensatorkreis, der parallel zum Meßkreis liegt, zum Ansprechen bringt. Bild 4 zeigt ein Gesamtschaltbild der Aufnahmeanordnung.

Damit auf der photographischen Platte ein klares Bild des zu untersuchenden Vorganges erscheint, ist es wichtig, daß der Kathodenstrahl erst kurz vor der Aufnahme in dem Ablenkraum einfällt und kurz nach der Aufnahme aus dem Ablenkraum entfernt wird. Dies wird mit einer am Oszillographen vorgesehenen

magnetischen Strahlsperrung erzielt, die den Strahl an eine geerdete Metallwand ablenkt. Durch Automatisierung des gesamten Aufnahmevorganges wurde erreicht, daß der Kathodenstrahl weniger als $\frac{1}{2}$ sec in den Ablenkraum bei der Aufnahme einfällt. Die Automatik hatte folgende Bedingungen zu erfüllen:

- a) Aufheben der magnetischen Strahlsperrung und gleichzeitig Einschalten der Stoßbatterie, die den Ausgleichsvorgang auf die Wanderwellenleitung schickt; durch den Ausgleichsvorgang werden Zeit- und Meßkreis ausgelöst.
- b) Der Überschlag der Stoßbatterie hat das Kommando zum Abschalten der Stoßbatterie zu geben und eine Neuaufladung des Zeitkreises zu verhindern.
- c) Dann ist die magnetische Strahlsperrung wieder einzuschalten.

Man ersieht, daß die Automatik, deren Ausführung in Bild 5 wiedergegeben ist, auf zwei Kommandos beruht: Das Schaltkommando zur Einleitung des gesamten Aufnahmevorganges erfolgt von Hand durch einen Taster, der gleichzeitig die magnetische Strahlsperrung aus- und die Stoßbatterie einschaltet. Der durch den Überschlag der Stoßbatterie eingeleitete Ausgleichsvorgang wird durch kapazitive Kopplung auf ein Glimmrelais mit Kondensatorlöschung übertragen. Unter Zwischen-

schaltung eines Halterelais werden Stoßbatterie und Zeitkreis abgeschaltet. Durch Lösen des Kommandotasters werden magnetische Strahlsperrung und Zeitkreisbatterie wieder eingeschaltet, und die Automatik ist fertig für eine neue Schalthandlung.

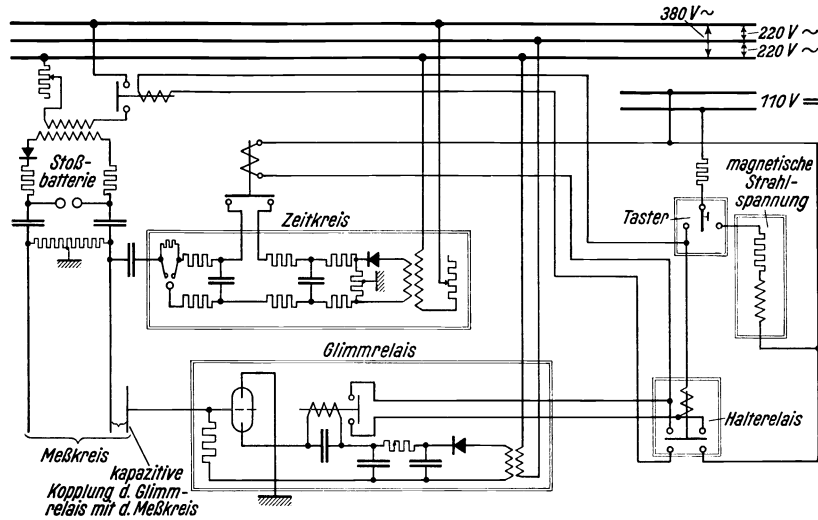


Bild 5. Aufnahmeautomatik.

d) Entladestrecke.

Als Entladestrecke wurde eine Meßfunkenstrecke von 5 cm Kugeldurchmesser mit Mikrometereinstellung verwendet: Die Messungen wurden, soweit nichts anderes angegeben, für eine statische Durchbruchsspannung von 5 kV, entsprechend einem Kugelabstand von 0,11 cm, durchgeführt, so daß das Feld in der Entladungsbahn als hinreichend homogen betrachtet werden konnte.

Die Meßfunkenstrecke wurde, ebenfalls soweit nichts anderes angegeben, durch das diffus reflektierte Licht eines Quarzbrenners an einer weißen Kalkwand bestrahlt, während der übrige Raum abgedunkelt war.

3. Meßresultate und Ergebnisse.

a) Verteilungskurve des Entladeverzuges bei gegebener Überspannung.

Der Entladeverzug an der Funkenstrecke wurde nach dem Vorgange von Tamm (39) von dem Zeitpunkt an gemessen, in dem der Spannungsanstieg an der Funkenstrecke die statische Zündspannung überschreitet (siehe Bild 6). In Bild 7 ist ein Oszillogramm wiedergegeben. Dabei war die Meßfunkenstrecke auf 0,11 cm, entsprechend einer statischen Durchbruchsspannung E_s von 5 kV, eingestellt. Die auf die Funkenstrecke gegebene Spannung E betrug 6,5 kV, also 130 % der statischen Durchbruchsspannung. Als Funkenstreckenkugeln wurden Kupferkugeln verwendet, die durch Schmirgeln ständig sauber gehalten wurden, wobei allerdings auf Entfernung von Fettschichten kein Wert gelegt wurde. Man erkennt auf dem Oszillogramm den raschen Spannungsanstieg, der der Zeitkonstante des Meßkreises entspricht und $7,5 \cdot 10^{-9}$ sec beträgt.

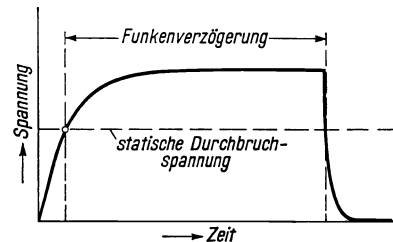


Bild 6. Definition der Verzögerungszeit nach R. Tamm.

Es wurden 65 einzelne Durchschlagsversuche oszillographiert. Das Ergebnis ist in Bild 8a wiedergegeben. Als Ordinatenwert ist die Anzahl der Durchschläge

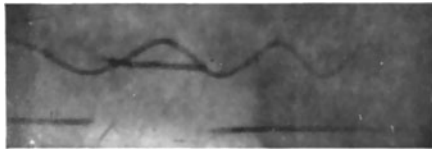


Bild 7. Kathodenstrahloszillogramm, darüber Eichschwingung $\nu = 10^6$ Per/sec.

aufgetragen, die in dem Zeitintervall von $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec erfolgt sind; als Abszissenwerte sind diese Zeitintervalle angegeben. Die Verteilung entspricht ungefähr einer e -Funktion (ausgezogene Linie in Bild 8a). In Bild 8b ist eine andere Darstellung gewählt, die ermöglicht, jeden einzelnen Überschlag mit der ihm zugehörigen Verzögerungszeit aufzutragen;

als Ordinatenwert ist dabei die jeweilige Anzahl der Versuche n_t^∞ im logarithmischen Maßsystem aufgetragen, die eine größere Verzögerungszeit ergeben haben, als dem dazugehörigen Abszissenwert t der Verzögerungszeit entspricht. Wenn eine statistische Verteilung des Entladeverzuges vorhanden ist, so muß die

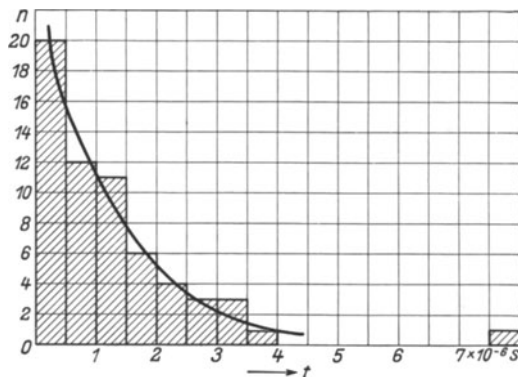


Bild 8 a. Verteilungskurve der Entladeverzugsmessungen bei 130% der statischen Durchschlagsspannung $E_0 = 5,0$ kV, $E = 6,5$ kV.

n = Anzahl der Durchschläge, die im Zeitintervall $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec erfolgt sind.

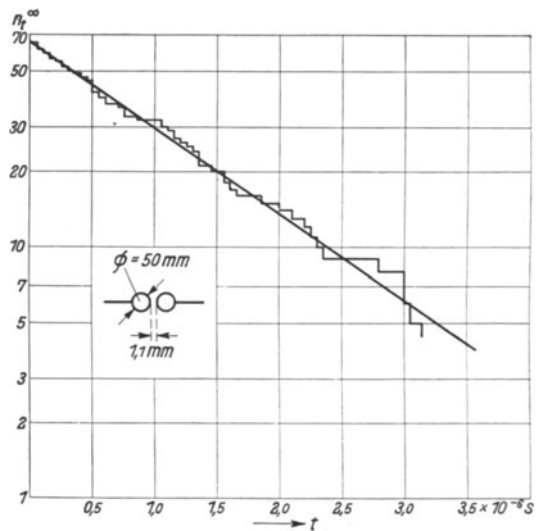


Bild 8 b. Integralverteilungskurve der Entladeverzugsmessungen bei 130% der statischen Durchschlagsspannung in halblogarithmischer Darstellung

$E_0 = 5,0$ kV, $E = 6,5$ kV.

so erhaltene Treppenkurve um eine Gerade herumliegen, entsprechend der Integraldarstellung der v. Laueschen Beziehung (19).

$$n_t^\infty = e^{-p\beta t}.$$

Dies ist für die wiedergegebene Versuchsreihe mit hinreichender Genauigkeit erfüllt.

b) Reproduzierbarkeit der erhaltenen Verteilungskurven.

Die in Bild 8 wiedergegebene Verteilung läßt sich nicht ohne weiteres reproduzieren. Wie schon Pedersen (24) angegeben hat, kann man einwandfrei reproduzierbare Kurven nur erhalten, wenn man peinlichst dieselbe Oberflächenbeschaffenheit der Entladungsstrecke herstellt. Einflüsse, die die Verteilung des Entladeverzuges stark ändern können, sind zum Beispiel Fettspuren, die sich auch nach Schmirgeln der Kugeln noch auf ihrer Oberfläche befinden; so kann die Verwendung von verschiedenem Schmirgelpapier verschiedene Verteilungskurven des Entladeverzuges zur Folge haben. Auch allmählich sich ausbildende Oxydation der Kugeln

macht sich in einer Änderung der Verteilungskurve bemerkbar. Einwandfreie Verhältnisse erhält man nur bei definierter chemischer Oberflächenbeschaffenheit der Kugeln, wenn diese sorgfältig von Fett befreit sind. Jedoch ergab sich für alle untersuchten Fälle stets eine statistische Verteilung; lediglich die Neigung der Geraden in der logarithmischen Darstellung des Bildes 8b war verschieden; die Oberflächenbeschaffenheit der Kugeln ändert also nur die Streuzeit der statistischen Verteilung, nicht diese selbst.

In Bild 9 sind 3 Versuchsreihen wiedergegeben, die wieder bei 130 % der statischen Durchschlagsspannung aufgenommen wurden. Abszissen- und Ordinatenbezeichnungen sind dieselben wie in Bild 8b, nur ist dabei n_t^∞ in Prozenten der Gesamtzahl der vorgenommenen Versuche aufgetragen. Versuchsreihe 1 wurde an reinen, entfetteten Kupferkugeln erhalten, Versuchsreihe 2 ist die unter a beschriebene Versuchsreihe, Versuchsreihe 3 wurde mit fettfreien, homogen oxydierten¹⁾ Kupferkugeln aufgenommen. Die statistische Streuzeit des Entladeverzuges ändert sich von $0,2 \cdot 10^{-6}$ sec bei blanken, entfetteten auf $15,6 \cdot 10^{-6}$ sec bei oxydierten, entfetteten Kugeln, also fast um 2 Größenordnungen. Leichte Fettschichten können den Entladeverzug um $1/2 \dots 1$ Größenordnung heraufsetzen.

c) Abhängigkeit der Verteilungskurve des Entladeverzugs von der Höhe der Überspannung.

Die Abhängigkeit der Verteilungskurve des Entladeverzuges von der Höhe der Überspannung wurde an fettfreien, blanken und oxydierten Kupferkugeln untersucht. In Bild 10a sind die Verteilungskurven des Entladeverzugs für 120 %, 130 %, 150 % und 180 %

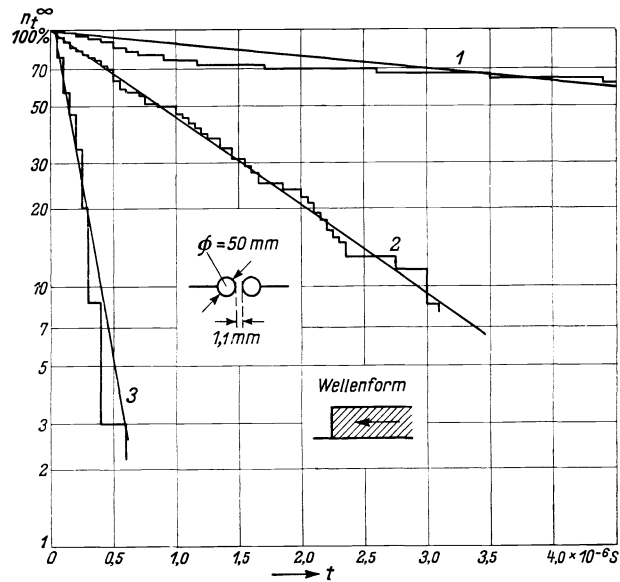


Bild 9. Oberflächeneinflüsse auf den Entladeverzug.
 1) Kupferkugel mit Kupferoxyd bedeckt und mit Alkohol gereinigt;
 2) Kupferkugeln, Oberfläche nicht von Fett befreit und mit Karborundpapier abgerieben; 3) Kupferkugeln, Oberfläche von Fett befreit und mit Karborundpapier abgerieben.

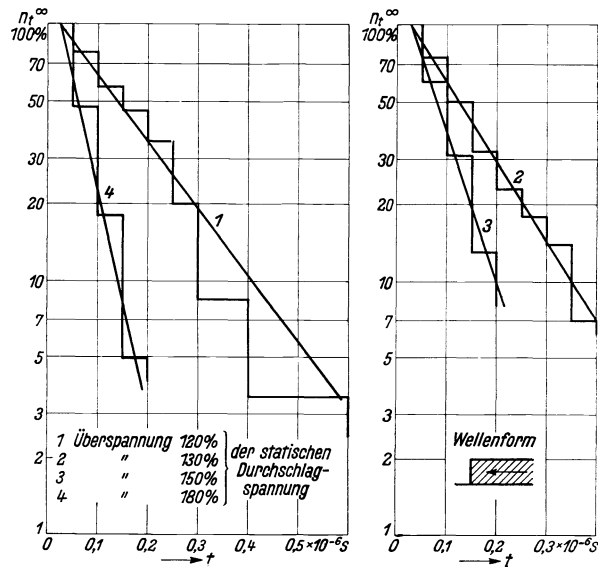


Bild 10 a. Abhängigkeit des Entladeverzugs von der Höhe der Überspannung $E_0 = 5,0$ kV.
 Elektrodenmaterial: blankes, entfettetes Kupfer.

¹⁾ Die gereinigten und von Fett befreiten Kupferkugeln wurden durch Behandlung mit einer Lösung von 5% Natronlauge und 1% Kaliumpersulfat oxydiert.

150 % und 180 % der statischen Durchbruchsspannung aufgetragen, in Bild 10b die Abhängigkeit der statistischen Streuzeit von der Höhe der Überspannung; das

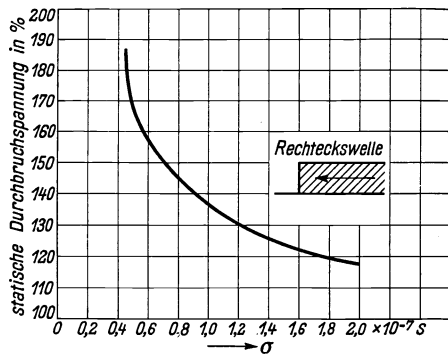


Bild 10 b. Abhängigkeit der Streuzeit von der Höhe der Überspannung, $E_0 = 5,0$ kV. Elektrodenmaterial: blankes, entfettetes Kupfer.

Oberhalb von 180 % der statischen Durchbruchsspannung ist die Abhängigkeit nur wenig ausgebildet, die Streuzeit scheint einem Endwert zuzustreben¹⁾.

d) Zusammenhang zwischen statistischer Verteilung des Entladeverzugs und den früheren Ergebnissen der Entladeverzugsmessungen mit dem Kathodenstrahloszillographen.

Nachdem durch die beschriebenen Versuche die statistische Verteilung des Entladeverzugs erwiesen ist, erhebt sich sofort die Frage, worauf der Widerspruch mit den anderen früheren Kathodenstrahlmessungen zurückgeführt werden kann. Er

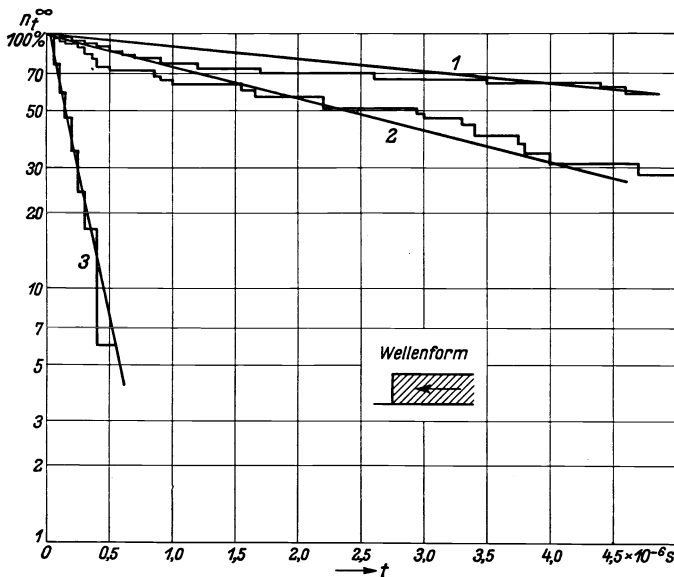


Bild 11 a. Abhängigkeit des Entladeverzugs von der Höhe der Überspannung, $E_0 = 5,0$ kV.

1) Überspannung=130 % der statischen Durchbruchsspannung; 2) Überspannung=150 % der statischen Durchbruchsspannung; 3) Überspannung=180 % der statischen Durchbruchsspannung. Elektrodenmaterial: oxydiertes, entfettetes Kupfer.

Elektrodenmaterial war hierbei blankes, fett-freies Kupfer. In Bild 11a und b sind die Ergebnisse derselben Versuche für oxydierte Kupferkugeln aufgetragen. Hierbei sind die Durchschläge, die innerhalb eines Zeitabschnittes von $5 \cdot 10^{-8}$ sec erfolgen, zusammengefaßt, da die Oszillogramme schwer eine genauere Auswertung erlauben. Man erkennt die deutliche Abhängigkeit der Streuzeit des Entladeverzuges von der Höhe der Überspannung; die Abhängigkeit ist bei oxydierten Kupferkugeln ausgeprägter als bei blanken.

ist in den erheblichen Unterschieden in der Zeitkonstante des Spannungsanstieges an der Funkenstrecke zu suchen. Während diese Zeitkonstante bei den Versuchen dieser Arbeit $6 \cdot 10^{-9}$ sec war, hatten Torok, Fielder, McAuley (41, 42, 43, 44, 45, 10) eine Zeitkonstante von etwa $0,25 \dots 0,5 \cdot 10^{-6}$ sec. Auch sie hatten sich dabei der Definition des Entladeverzugs nach Tamm angeschlossen. Die Verzögerungszeit wird demnach von dem Zeitpunkt an gemessen, in dem der Spannungsanstieg an der Entladestrecke die statische Durchbruchsspannung überschreitet. Diese Art

¹⁾ Dieselben Verhältnisse erhält man auch, wenn man die Spannungsabhängigkeit des statistischen Strommaßes des Entladeverzugs einer Glimmentladung untersucht. (Siehe eine demnächst im Arch. Elektrotechn. erscheinende Arbeit „Ein Zeittransformator zur automatischen Registrierung kurzer Zeiten“ von M. Steenbeck und R. Strigel.)

der Bestimmung der Verzögerungszeit hat ihre Berechtigung, weil der Durchschlag möglich ist, sobald die Spannung an der Funkenstrecke die statische Durchbruchsspannung überschritten hat, wenn auch die mittlere Streuzeit des Entladeverzuges in diesem Zeitmoment noch sehr große Werte annimmt, also ein Durchschlag noch sehr unwahrscheinlich ist.

Diese Definition führt zu einer Fälschung der statistischen Verteilung, wie an Hand der schematischen Bilder 12a...c näher ausgeführt werden soll. Bild 12a zeigt noch einmal die Definition des Entladeverzugs nach Tamm (39). In Bild 12b sind die Werte von $\lg n_t^\infty$, abhängig von der Verzögerungszeit für verschiedene Überspannungen, aufgetragen, wie sie etwa oxydierten Kupferkugeln entsprechen. In dem Zeitpunkt, in dem die Spannung an der Funkenstrecke gleich der statischen Durchbruchsspannung ist, wird die statistische Streuzeit des Entladeverzugs noch unendlich groß, mit steigender Überspannung nimmt sie immer kleinere Werte an; es wird sich also bei Annahme eines Spannungsverlaufes an der Funkenstrecke nach Bild 12a eine Integralverteilungskurve des Entladeverzugs ergeben, wie sie der stark ausgezogenen Kurve in Bild 12b entspricht. Die Konstruktion dieser Verteilungskurve setzt die Annahme voraus, daß durch die Vorbeanspruchung der Funkenstrecke mit niedriger Überspannung die statistische Verteilung bei höherer Spannung nicht wesentlich beeinflußt wird. Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigen die weiteren Untersuchungen über den Mechanismus des Entladeverzugs. Bild 12c stellt die Differentialkurve dieser Integralkurve dar; sie zeigt ein verhältnismäßig scharfes Maximum und geht von dem Zeitmoment, in dem die Überspannung an der Entladestrecke ihren Endwert erreicht, in die e-Funktion über; die Verteilungskurve ist von diesem Zeitpunkt ab statistisch. Man erkennt sofort, daß sich dieser Zeitmoment um so mehr der Zeit $t = 0$ nähert, je steiler ein Spannungsanstieg an der Funkenstrecke erfolgt¹⁾.

Zum Nachweis der Richtigkeit dieser Erklärung wurden auf Grund der Überspan-

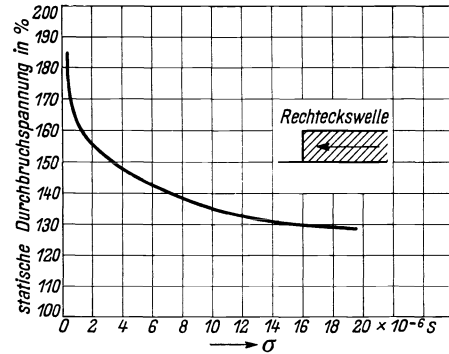


Bild 11b. Abhängigkeit der Streuzeit von der Höhe der Überspannung, $E_0 = 5,0$ kV. Elektrodenmaterial: oxydiertes, entfettetes Kupfer.

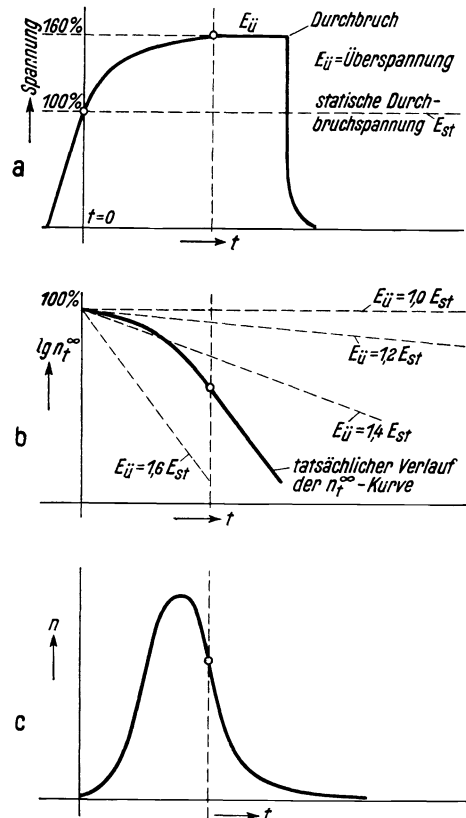


Bild 12. Entladeverzug bei allmählichem Spannungsanstieg an der Funkenstrecke; a) Form des Spannungsverlaufes an der Funkenstrecke; b) Logarithmisch aufgetragene Integralverteilungskurve; c) Verteilungskurve entsprechend dem unter a) angegebenen Spannungsverlauf.

¹⁾ Vgl. auch E. Mauz u. R. Seeliger (21).

nungsabhängigkeit der Streuzeit für oxydierte Kupferkugeln, die in Bild 11 b wiedergegeben ist, für eine Zeitkonstante des Spannungsanstieges von $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec die Häufigkeitskurven graphisch ermittelt, wie sie sich nach der angeführten Betrachtung für 140 %, 160 % und 180 % der statischen Durchbruchsspannung ergeben. Die Kurven sind in Bild 13 aufgetragen: Während bei einer Spannungshöhe von 140 % der statischen Durchbruchsspannung das Maximum der Verteilungskurve noch sehr flach und wenig ausgeprägt ist¹⁾, wird es bei höheren Spannungswerten rasch sehr stark ausgebildet. Weiter sind die Halbwerte des Anstieg- und die des Abstiegastes der Verteilungskurven miteinander verbunden und das zwischen diesen Verbindungskurven liegende Gebiet schraffiert gezeichnet. Innerhalb dieses Gebietes muß die Mehrzahl der Überschlüge erfolgen, falls der Spannungsanstieg an der Entladungsstrecke eine Zeitkonstante von $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec besitzt.

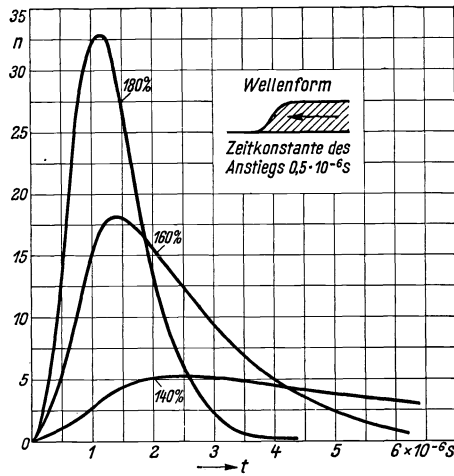


Bild 13. Häufigkeitskurven des Entladeverzugs bei einem Spannungsanstieg an der Funkenstrecke mit der Zeitkonstante $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec.

Elektrodenmaterial: oxydierte Kupferkugeln. (Ermittelt nach der graphischen Konstruktion des Bildes 12.)

Durchbruchsspannung 20...7 Durchschlagsversuche aufgenommen und in Bild 14 die Einzelmeßwerte eingetragen. Sämtliche Meßpunkte liegen innerhalb dieses wahrscheinlichen Gebietes. In Bild 15 sind die Werte der Maxima der Häufigkeits-

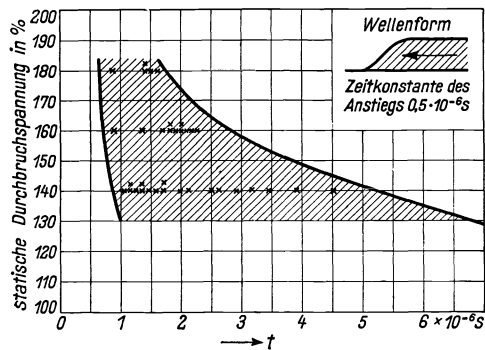


Bild 14. Wahrscheinlicher Bereich des Entladeverzugs bei einem Spannungsanstieg mit einer Zeitkonstante von $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec an der Funkenstrecke. Meßpunkte.

Elektrodenmaterial: oxydierte Kupferkugeln.

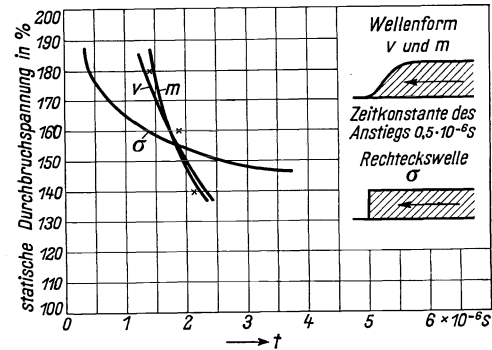


Bild 15. Vergleich zwischen den Mittelwerten der Meßpunkte (Kurve m), der Lage der Maxima der Verteilungskurven (Kurve v) bei einem Spannungsanstieg mit der Zeitkonstante $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec und der mittleren Streuzeit (Kurve σ) bei rechteckigem Spannungsanstieg an der Funkenstrecke.

Elektrodenmaterial: oxydierte Kupferkugeln.

kurven mit den aus diesen Messungen gebildeten Mittelwerten verglichen. Auch hier ergibt sich gute Übereinstimmung. Die gefundenen Mittelwerte stimmen gleichfalls größenordnungsmäßig mit den Messungen von J. J. Torok (43) überein.

¹⁾ Für derartige Durchschlagsverhältnisse gibt J. J. Torok (43) an, daß die Streuung der von ihm erhaltenen Werte sehr groß sei.

In diesem Zusammenhang sei auch auf eine Arbeit von H. Viehmann (47) hingewiesen, der den Stoßdurchschlag in Luft von Atmosphärendruck untersucht. Der Anstieg der Spannung an der Funkenstrecke erfolgt bei seinen Versuchen geradlinig; er variierte ihn zwischen 10^2 bis 10^8 kV/sec und findet selbst bei stärkster Bestrahlung mit der Quarzlampe keine regelmäßige Minimalverzögerung. Die Werte streuen vielmehr oberhalb eines unteren Grenzwertes. Wenn auch ein genauer Vergleich der Meßergebnisse mit denen der vorliegenden Arbeit nicht möglich ist, so zeigt doch eine einfache Überschlagsrechnung, daß die Ergebnisse von H. Viehmann mit der statistischen Verteilung des Entladeverzuges nicht in Widerspruch stehen. Einer Zeitkonstante von $0,5 \cdot 10^{-6}$ sec entspricht ein anfänglicher Anstieg der Spannung an der Entladestrecke von etwa 10^7 kV/sec. Viehmann erhielt bei Atmosphärendruck bei einem derartigen Spannungsanstieg bei 160 % der statischen Durchschlagsspannung Verzögerungszeiten von $1 \dots 2 \cdot 10^{-7}$ sec. Über die Art des Elektrodenmaterials sind eindeutige Angaben nicht gemacht, jedoch reinigt er vor jeder Meßreihe die Elektroden, die demnach kürzere Verzögerungszeiten liefern müssen als in den Versuchen von Bild 14. Der seiner Arbeit entnommene Meßwert entspricht etwa dem Halbwert einer Verteilungskurve, wie sie sich nach den Ergebnissen von Bild 12b für blanke Kupferelektroden graphisch ermitteln läßt.

Verteilungskurven in der Art von Bild 13 wird man immer dann erhalten, wenn die Zeit des Spannungsanstieges vergleichbar wird mit der mittleren Streuzzeit des Entladeverzuges. Damit sind auch die in Bild 10a wiedergegebenen Messungen in Übereinstimmung. Man erkennt, daß die eingetragene Verteilungskurve den Wert $n_t^\infty = 100\%$ nicht zur Zeit $t = 0$, sondern zur Zeit $t = 2 \dots 3 \cdot 10^{-8}$ sec erreicht, daß also scheinbar eine „minimale“ Verzögerungszeit besteht. Diese Verzögerungszeit entspricht aber der Zeit, nach der bei Berücksichtigung des Spannungsanstieges im Entladungskreis das Maximum der Verteilungskurve eintreten müßte. Die Zeitkonstante des Spannungsanstieges beträgt $7,5 \cdot 10^{-8}$ sec, das Maximum der Verteilungskurve wird unter Annahme einer Streuzzeit, wie sie Bild 10b entspricht, zu einer Zeit von $2,2 \cdot 10^{-8}$ sec eintreten. Dieser Zeitwert ist in guter Übereinstimmung mit dem oben angeführten experimentellen Befund.

Der Unterschied in den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit und den früheren Untersuchungen ist also auf die verschiedene Form des Spannungsanstiegs zurückzuführen. Während plötzlicher, rechteckiger Spannungsanstieg statistische Verteilung ergibt, erhält man bei allmählichem Spannungsanstieg Verteilungskurven mit einem Maximum, das um so ausgeprägter wird und um so mehr nach kürzeren Zeiten sich verschiebt, je steiler der Spannungsanstieg erfolgt. Jedoch läßt sich aus der Kenntnis der Streuzzeit der statistischen Verteilung für jeden beliebig gearteten Spannungsanstieg auf graphischem Wege die entsprechende Verteilungskurve der Verzögerungszeiten ermitteln.

B. Einfluß der Ionisation auf den Entladeverzug.

1. Oberflächen- und Volumionisation.

Bei einer Untersuchung des Einflusses vorhandener Ionisation auf den Entladeverzug ist zu bedenken, daß diese Ionisation einmal Ionisation der Luft im Entladungsraum, dann aber auch Oberflächenionisation auf der Kathode sein kann. In beiden Fällen wirken als Ionisatoren kurzwelliges Licht, radioaktive und Höhenstrahlung, also dieselben Ursachen.

Der Ionengehalt der Luft (2) beträgt in kontinentalen Gegenden etwa 520 . . . 900 Ionen eines Vorzeichens im Kubikzentimeter, die mittlere Lebensdauer eines Ions etwa 50 sec; es werden 10 . . . 20 Elektronen in der Sekunde im Kubikzentimeter Luft entstehen. Sie lagern sich sofort an neutrale Molekel, Molekelkomplexe, geladene Staubteilchen oder Tröpfchen an. Die Beweglichkeit derartiger Ladungsträger liegt bei 1 cm/sec : Volt/cm, sie ist demnach so gering, daß die Zeiten des Entladeverzugs nicht ausreichen, um die Mehrzahl der im Entladungsraum befindlichen Ionen an die Elektroden überhaupt heranzuführen. Immerhin aber wäre es denkbar, daß unter Einwirkung der im Entladungsraum herrschenden hohen Feldstärke angelegte Elektronen losgelöst werden und an die Elektroden gelangen. Dieser Ansicht stehen Untersuchungen von P. O. Pedersen (24) entgegen, der an die Funkenstrecke, deren Entladeverzug von ihm untersucht wurde, ein Gleichfeld anlegte von geringerem Betrag, als der statischen Durchbruchsspannung entsprach. Dadurch bewirkte er, daß der Entladungsraum an Luftionen verarmte. Falls ein Einfluß der Luftionen auf den Entladeverzug vorhanden wäre, müßte dann der Entladeverzug größere Werte annehmen. Pedersen konnte keinen Einfluß in dieser Richtung feststellen; dasselbe Ergebnis hatten eigene orientierende Versuche.

Die Zahl der entstehenden freien Elektronen ist so gering, daß bei den gewählten Versuchsverhältnissen, bei denen das Volumen der „wirksamen“ Entladungsstrecke kleiner als $1 \text{ cm}^2 \cdot 0,11 \text{ cm} = 0,1 \text{ cm}^3$, allerhöchstens 1 . . . 2 Elektronen pro Sekunde entstehen könnten, während die Meßergebnisse des vorhergehenden Abschnittes unter der Annahme, daß ein Elektron zur Einleitung des Überschlages ausreichend sei, zumindest $10^6 \dots 10^8$ Elektronen pro Sekunde erfordern. In der Entladungsbahn entstehende Elektronen werden daher nur bei extrem großen Schlagweiten Einfluß auf den Entladeverzug erhalten. Für die durchgeführten Versuche kommt daher der Oberflächenionisation, wie schon E. Warburg (49) annimmt, allein bestimmender Einfluß zu.

2. Anordnung und Messung zur Bestimmung der Oberflächenionisation.

Die Bestimmung der Oberflächenionisation kommt einer Messung des dunklen Vorstromes gleich, der vor Eintritt des Durchschlages zwischen den Elektroden der Meßfunkenstrecke übergeht. Nach der Townsendschen Theorie (46) hat man sich die Bildung des dunklen Vorstromes folgendermaßen vorzustellen: Werden in der Entladungsbahn an irgendeiner Stelle, zum Beispiel in der Luftsäule oder an der Elektrodenoberfläche, Elektronen unter Einwirkung eines Ionisators erzeugt, so bildet sich bei Vorhandensein eines elektrischen Feldes ein Strom aus. Steigert man die Feldstärke zwischen den Elektroden, so nimmt dieser Strom anfänglich etwa linear zu, bis bei einer bestimmten Feldstärke alle erzeugten Elektronen zur positiven Elektrode gelangen. Bei weiterem Steigern der Feldstärke bleibt zunächst der Strom konstant, und erst, wenn diese solche Werte angenommen hat, daß Stoßionisation eintritt, beginnt der Strom weiter anzusteigen nach der von Townsend für das homogene elektrische Feld angegebenen Beziehung

$$i = i_0 e^{\alpha x},$$

wobei i den jeweiligen Stromwert, i_0 den Sättigungswert des Elektronenstromes, α die Ionisierungszahl, das heißt die Anzahl der von einem Elektron auf 1 cm Weglänge durch Stoß ionisierten Atome, und x den Entstehungsort der Elektronen bedeuten. Für Oberflächenionisation wird $x = d$, wenn d der Abstand der Elektroden ist.

Zur Messung des Vorstromes wurde eine Anordnung nach Bild 16 benützt, wie sie ähnlich von M. Paaavola (23) angegeben wurde. Eine Gleichrichteranordnung arbeitet auf eine Batterie (C_1) von 10 je $2 \mu\text{F}$ Papierkondensatoren (Prüfspannung 2000 V Gleichspannung), denen zwecks Spannungsausgleich Widerstände (R_1) von je $1,5 \cdot 10^6 \Omega$ parallel geschaltet waren. Diese Kondensatorbatterie lädt zwei weitere Repelitwickelkondensatoren (C_2 und C_3) von je $0,01 \mu\text{F}$ über Widerstände (R_2 und R_3) von je $1 \cdot 10^6 \Omega$. Die Meßfunkenstrecke (F_m) ist ebenfalls über einen Widerstand (R_4) von $1 \cdot 10^6 \Omega$ an die Kondensatoranordnung geschaltet; der Widerstand soll gleichzeitig als Schutz der Strommeßanordnung gegen etwaige Überschläge der Funkenstrecke dienen. Die Spannung an der Meßfunkenstrecke wurde auf der Niederspannungsseite des Transformators mittels Voltmeter eingestellt und durch Kugelfunkenstreckenmessung geeicht. Diese Eichung ist deshalb zulässig, da die der Anordnung entnommenen Ströme von der Größenordnung $10^{-8} \dots 10^{-13} \text{ A}$ waren, also für die Anordnung so gut wie gar keine Belastung darstellten. Die Strommessung wurde elektrometrisch vorgenommen, teils in der von Paaavola verwendeten, der

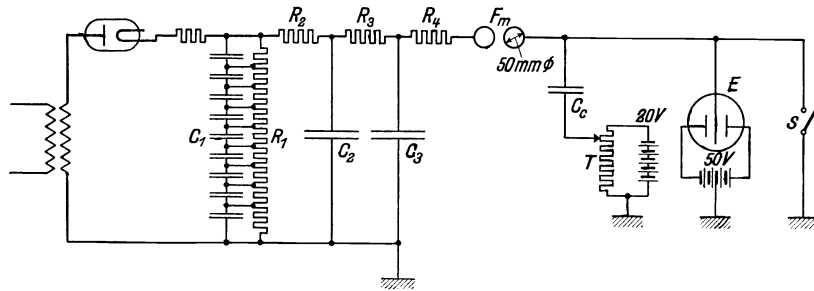


Bild 16. Anordnung zur Messung des Vorstromes an der Funkenstrecke.

Röntgentechnik entnommenen Kompensationsschaltung, teils durch direkte Aufladung des Elektrometers allein. Die Wirkungsweise der Kompensationsschaltung ist kurz folgende: Der durch die Funkenstrecke (F_m) fließende Vorstrom lädt das Elektrometer (E) und den zu diesem parallel liegenden Minosplattenkondensator (C_c) auf. Die Aufladung wird durch den Spannungsteiler (T) kompensiert.

Als Elektrometer wurde ein Wulfches Einfadeninstrument in astatischer Schaltung verwendet. Die Elektrometerempfindlichkeit war 0,08 Volt pro Skalenteil. Elektrometer, Schneidenbatterie, Kondensator C_c und die Zuleitungen zur Funkenstrecke F_m waren in einem Blechgehäuse eingebaut. Sämtliche Isolationsteile bestanden aus Bernstein oder Quarz. Außerdem war die auf der Elektrometerseite liegende Isolation der Funkenstrecke F_m mit Schutzerdung versehen. Die Luft innerhalb des Blechgehäuses wurde mit Chlorkalzium getrocknet. Es gelang dadurch, mit der gesamten Elektrometeranordnung eine Entladezeitkonstante von ungefähr 1 Stunde zu erhalten bei einer relativen Feuchtigkeit der Außenluft von 76 %. Besonderer Wert wurde auf möglichst gleichmäßige Spannung an der Meßfunkenstrecke gelegt. Die Gleichrichteranordnung wurde daher von einem durch Batterien angetriebenen Einankerumformer gespeist. Die Welligkeit der Spannung an der Meßfunkenstrecke wurde mit Hilfe des Elektrometers kontrolliert, sie ergab sich kleiner als 0,01 Volt.

Der Charakter der in dieser Schaltung aufgenommenen Kurven zur Bestimmung des Sättigungsstromes entspricht demjenigen der Kurven von Paaavola: Die Stromfeldstärke-Kurven (Bild 17 a) zeigen kein eigentliches Sättigungsgebiet, bei den nied-

rigsten gemessenen Feldstärken war schon Stoßionisation erkennbar. Der Sättigungsstrom konnte also nicht aus den Strom-Feldstärke-Kurven ermittelt werden, sondern nach dem Vorgange von Paa v o l a aus den Kurven, die die Abhängigkeit des Vorstromes vom Elektrodenabstand wiedergeben (Bild 17 b). Trägt man als Abszisse den Elektrodenabstand und als Ordinate den zugehörigen Vorstromwert in logarithmischem Maßstab auf, so erhält man entsprechend der Beziehung

$$i = i_0 e^{\alpha d}$$

für diese Kurven eine Schar von Geraden, die bei Extrapolation auf den Elektrodenabstand Null zum Schnitt kommen. Dieser, allen Kurven gemeinsame Stromwert stellt den Sättigungswert des Vorstromes dar.

Bild 17 a und b zeigt die experimentell aufgenommenen Kurven für blanke Kupferkugeln und für die Elektrodenabstände 0,5 mm, 1,0 mm und 1,5 mm. Aus den Kurven ergibt sich der Sättigungswert des Vorstromes mit einer Genauigkeit von $\pm 2,5\%$ zu $4,2 \cdot 10^{-11}$ A.¹⁾

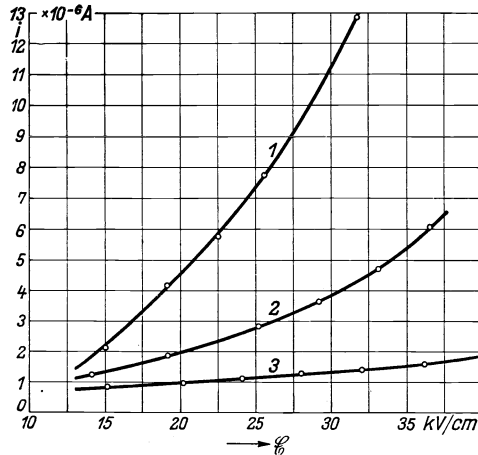


Bild 17 a. Vorstrom in Abhängigkeit von der Feldstärke bei blanken Kupferelektroden (rel. Luftfeuchtigkeit 74%).

1) Elektrodenabstand 1,5 mm, 2) 1,0 mm und 3) 0,5 mm.

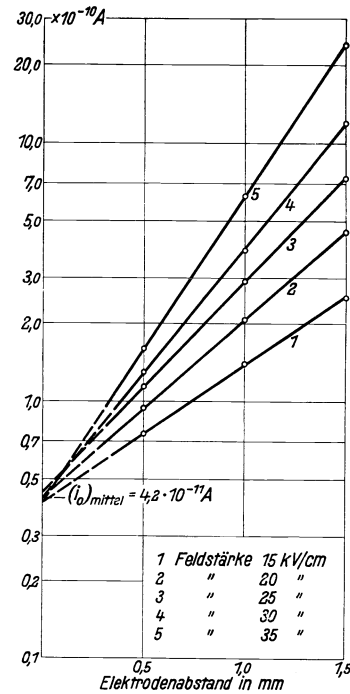


Bild 17 b. Vorstrombestimmung für blanken Kupferelektroden.

Zur Beurteilung der Ionisation auf den Entladeverzug ist aber nicht der gesamte, von Kugel zu Kugel übergehende Strom zu betrachten, sondern nur der in der Mitte der Entladungsbahn übergehende Teilstrom. Zu diesem Zweck wurde ein Stift von 5 mm Durchmesser isoliert durch die Achse der auf Erdpotential befindlichen Kugel

¹⁾ Die Werte für αd , wie sie aus diesen Kurven erhalten werden, weichen in zwei Punkten von den von Paa v o l a gemessenen Werten ab. Einmal erhält Paa v o l a erst merkliche αd -Werte oberhalb einer Feldstärke von 22,5 kV/cm, dann erfolgt der Anstieg der αd -Werte ungefähr nach einer e -Funktion, während die Messungen des Bildes 13 erkennen lassen, daß auch noch bei ganz geringen Feldstärken Stoßionisation auftritt und der Anstieg zwischen 15 und 40 kV/cm angenähert linear erfolgt. Die Stoßionisation bei niedrigeren Feldstärkewerten als 22,5 kV/cm ist auf die Oberflächenbeschaffenheit der Kugeln zurückzuführen: Die Kugeln waren bei den vorliegenden Messungen geschmirgelt, während sie bei Paa v o l a sorgfältig poliert waren; die Inhomogenitäten der geschmirgelten Oberfläche rufen in unmittelbarer Nähe der Kathodenoberfläche Feldverzerrungen hervor, die bereits bei niedrigeren Feldstärkewerten im Entladungsraum Ionisierung unmittelbar an der Elektrodenoberfläche ermöglichen. Der lineare Anstieg der αd -Werte ist auf die geometrische Gestalt der Entladungsstrecke (Kugelfeld!) und auf den Feuchtigkeitsgehalt der Luft (65 bis 70% relative Feuchtigkeit) zurückzuführen.

durchgeführt (Bild 18a). Er war mit dem Elektrometer verbunden, während der übrige Teil der Kugel an der Erde lag. Es wurde kontrolliert, daß durch die etwas abgerundeten Kanten an der Einsatzstelle des Stiftes die Vorstromverhältnisse nicht wesentlich beeinflußt wurden. In Bild 19 zeigt Kurve 1 die Abhängigkeit des Vorstromes vom Elektrodenabstand bei einer Feldstärke von 30 kV/cm; bei der Aufnahme dieser Kurve war der Stift mit der Kugel verbunden und beide lagen am Elektrometer. Kurve 1 stimmt mit der entsprechenden Kurve in Bild 17b überein. Kurve 2 gibt den auf den Stift, also die Mitte der Entladungsbahn, entfallenden Teilstrom wieder. Er ergibt sich also für blanke, entfettete Kupferkugeln zu $3,7 \cdot 10^{-12}$ A, annähernd zum 12. Teil des Gesamtstromes. Dieser Bruchteil erscheint möglich, da das Licht durch ein 2 cm großes Loch einer Pertinaxscheibe an die Funkenstrecke fiel, wie dies in Bild 18b schematisch gezeigt ist.

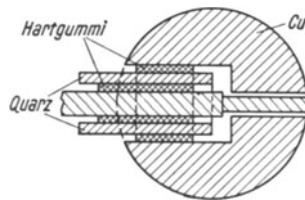


Bild 18 a. Kugelanordnung zur Stromstärkebestimmung in der Achse der Entladungsbahn.

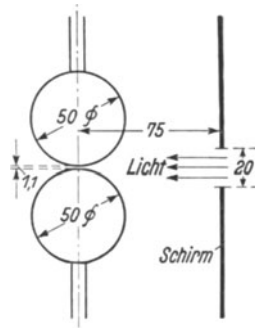


Bild 18 b. Beleuchtungsverhältnisse der Funkenstrecke.

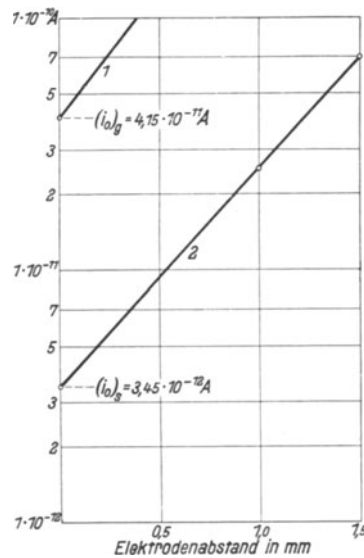


Bild 19. Vorstrombestimmung in der Mitte der Entladungsbahn.

1) Kugel mit isoliertem Stift verbunden, 2) isolierter Stift allein. Elektrodenmaterial: blankes Kupfer.

Für oxydierte Kugeln betrug der Sättigungswert des Vorstromes in der Mitte der Entladungsbahn $0,8 \cdot 10^{-12}$ A.

3. Zusammenhang zwischen statistischer Streuzeit des Entladeverzugs und Oberflächenionisation.

Aus den vorstehend ermittelten Werten des dunklen Vorstromes i_0 läßt sich die Anzahl n_0 der Elektronen bestimmen, die in der Sekunde aus der Kathode austreten. Diese ist gegeben durch

$$i_0 = n_0 e,$$

worin $e = 1,59 \cdot 10^{-19}$ Coulomb die Ladung eines Elektrons darstellt. Damit ist auch die Anzahl n_σ der Elektronen berechenbar, die in der statistischen Streuzeit σ im Mittel aus der Kathode austreten, sie wird

$$n_\sigma = n_0 \sigma.$$

Die Abhängigkeit der Anzahl n_o der Elektronen, die im Mittel in der Streuzeit des Entladeverzugs aus der Kathode austreten, von der Höhe der Überspannung ist in Bild 20 dargestellt. n_o nähert sich mit steigender Überspannung immer mehr dem Werte ein Elektron. Bei genügend hoher Überspannung leitet demnach jedes aus der negativen Elektrode austretende Elektron den Überschlag ein. Dies ist für blanke Kupferkugeln etwa bei einer Spannung von 165 %, für oxydierte Kupferelektroden bei einer solchen von 180 % der statischen Durchbruchspannung der Fall¹⁾. Für oxydierte Kupferkugeln sind auch bei einer Spannung an der Funkenstrecke von 130 % der statischen Durchbruchsspannung im Mittel nur 39 Elektronenlawinen in der Entladungsbahn während des Entladeverzugs übergegangen, das sind 2,2 Elektronen pro Quadratmillimeter. Die Breite einer Elektronenlawine ist nicht genau bekannt. M. Toepler (40) nimmt an, daß sie identisch mit der Breite von Leuchtfäden ist, die er bei Atmosphärendruck und einer Schlagweite von 1 cm zu rund 0,02 cm bestimmt hat; es wäre demnach mit

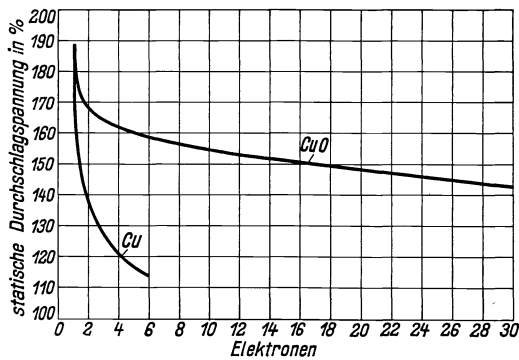


Bild 20. Anzahl der Elektronen, die im Mittel während des Entladeverzugs aus der Kathode austreten in Abhängigkeit von der angelegten Überspannung.

einem Öffnungswinkel der Lawine von $\frac{1}{50}$ zu rechnen. Aber selbst wenn man, wie W. Rogowski (29), diesen mit $\frac{1}{10}$ ansetzt, so würde eine Elektronenlawine an der positiven Elektrode eine räumliche Ausdehnung von etwa 0,04 mm betragen²⁾. Diese Annahmen lassen es sehr unwahrscheinlich erscheinen, daß zwei der 39 Elektronenlawinen innerhalb der gemessenen Verzögerungszeiten sich überdecken; es scheint also, daß auch in diesem Fall nicht eine Mehrzahl der Elektronenlawinen für die Entstehung einer selbständigen Entladung notwendig

ist, sondern daß noch das einzelne Elektron den Überschlag einleiten kann³⁾.

Bei der Diskussion der ersten Kathodenstrahloszillogramme konnte W. Rogowski (26) schon darauf hinweisen, daß in den kurzen Zeiten des Entladeverzugs die durch die Elektronenlawine gebildete Ionenladung praktisch nicht von der Stelle kommt, daß also die Befreiung weiterer Elektronen demnach nicht, wie die ursprüngliche Townsendsche Theorie angenommen hat, durch Ionenstoß auf der Kathode allein erklärt werden kann. A. v. Hippel und J. Franck (12) zeigen, daß der Durchschlag schon dann erfolgen kann, wenn die Feldverzerrung in der Nähe der Kathode durch positiven Raumladungsaufbau so weit gesteigert ist, daß

¹⁾ Eine Steigerung der Spannung über diese Werte hinaus müßte zur Folge haben, daß der Entladeverzugs bei gleichbleibender Elektrodenoberfläche sich nicht weiter verringert. Von einer weiteren Spannungssteigerung wurde jedoch abgesehen, da bei einer solchen immer größere Teile des Kugelfeldes in den Entladungsbereich hereingezogen werden.

²⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen hat F. Ollendorff [Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 193] die Kanalbreite der Elektronenlawine aus statistischen Betrachtungen über die Zusammenstöße von Elektronen mit den Gasmolekeln abgeschätzt. Er findet bei einer Temperatur im Lawinenkanal von 4000° C Übereinstimmung mit den Beobachtungen von M. Toepler (40) und den geschätzten Werten von W. Rogowski (29). Ferner gelang K. Buss [Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 261] in einer elektrodenlosen Entladung der experimentelle Nachweis, daß die Kanalbreite tatsächlich diesen Annahmen entspricht.

³⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Man vergleiche die ähnlichen Überlegungen bei K. Buss [Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 261].

die Steilheit im Kathodenfallgebiet genügt, um die Entladung instabil zu machen. Während aber A. v. Hippel und J. Franck bei ihrer Betrachtung von einer Mehrzahl von Elektronenlawinen ausgehen, wird es durch eine Reihe weiterer Arbeiten von L. B. Loeb (20), J. J. Slepian (37), M. Steenbeck (33, 34, 36), W. O. Schumann (38) und von W. Rogowski (27, 28, 29) immer wahrscheinlicher, daß bereits ein Elektron den Überschlag einleiten kann. Für diese Auffassung bilden die vorliegenden Versuche eine Bestätigung.

Bild 20 läßt ferner erkennen, daß bei oxydierten Kupferelektroden und niedrigerer Spannung an der Funkenstrecke, als 180 % der statischen Durchschlagsspannung entspricht, eine viel größere Anzahl von Elektronenlawinen nötig ist, um den Überschlag einzuleiten, als bei blanken Kupferelektroden. Eine Erklärung hierfür gibt die Tatsache, daß die Austrittsarbeit eines Elektrons aus Kupfer geringer ist als aus Kupferoxyd¹⁾. Dies soll in nachstehender Rechnung gezeigt werden.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein primäres Elektron sich durch Stoßionisation so stark vermehrt, daß ein Überschlag sich ausbildet, sei wieder mit p bezeichnet. Diesen Wahrscheinlichkeitswert kann man sich aus verschiedenen Teilbeträgen zusammengesetzt denken. Einmal kann die von dem primären Elektron herrührende Elektronenlawine eine so starke positive Raumladung hervorrufen, daß diese schon ausreicht, die Entladung instabil zu machen und den Überschlag einzuleiten; die Wahrscheinlichkeit hierfür werde mit p_0 bezeichnet. Sie ist unabhängig von der Elektrodenoberfläche, da sie nur Stoßvorgänge im Gas umfaßt. Dann aber kann die bei den Stoßprozessen der Elektronenlawine frei werdende Strahlung q weitere Elektronen auf der negativen Elektrode photoelektrisch auslösen. Der Teil dieser Strahlung, der auf die negative Elektrode auffällt, werde mit $\mu \cdot q$ bezeichnet. Die Strahlung ist ebenfalls eine reine Gaseigenschaft, also materialunabhängig.

Hingegen wird die photoelektrische Elektronenauslösung aus der negativen Elektrode umgekehrt proportional der Austrittsarbeit. Bezeichnet man mit ν den Koeffizienten der photoelektrischen Auslösung, so werden durch die Strahlung im Mittel $\nu\mu q$ Elektronen ausgelöst und die Wahrscheinlichkeit, daß ein so ausgelöstes Elektron durch seine Elektronenlawine den Überschlag herbeiführt, wird dann $p_0(\nu\mu q)$. Diese Elektronenlawine kann ebenfalls wieder photoelektrische Elektronen aus der negativen Elektrode befreien; die Wahrscheinlichkeit, daß dadurch der Überschlag eingeleitet wird, ergibt sich zu $p_0(\nu\mu q)^2$ usw. Damit wird

$$p = p_0 + p_0(\nu\mu q) + p_0(\nu\mu q)^2 + p_0(\nu\mu q)^3 + \dots = \frac{p_0}{1 - \nu\mu q}$$

und die mittlere Anzahl n der Elektronen, die in der Verzögerungszeit im Mittel aus der negativen Elektrode austreten,

$$n = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} (1 - \nu\mu q).$$

Nun sind p_0 und μq materialunabhängig. Es geht allein der Koeffizient ν der photoelektrischen Auslösung als materialabhängige Größe in diese Beziehung ein. Er wird, da er umgekehrt proportional der Austrittsarbeit ist, für blanke Kupferelektroden größere Werte annehmen als für oxydierte Elektroden, und damit wird auch die Anzahl der Elektronen, die im Mittel der Verzögerungszeit aus der Kathode

¹⁾ Nach Angabe von W. Schottky: siehe Fußnote 1 S. 773 in der Arbeit A. v. Engel (9).

austreten, für blanke Kupferelektroden geringer werden als für oxydierte Kupferelektroden.

In diesem Zusammenhang sei auch auf eine Arbeit von A. v. Engel (9) hingewiesen, in der gezeigt wird, daß der Koronaverlust an sprühenden Kupferleitern durch das Aufbringen von einer dünnen Kupferoxydschicht merklich herabgemindert wird. Auch dort wird diese Tatsache auf die größere Austrittsarbeit von Kupferoxyd gegenüber Kupfer zurückgeführt.

4. Ausdehnung der Messungen auf andere Ionisierungsstärken.

Für oxydierte Kupferkugeln wurde bei drei weiteren Ionisierungsstärken die statistische Streuzeit bei 180 % der statischen Durchbruchspannung bestimmt, also bei einer solchen Spannungshöhe an der Entladungsstrecke, bei der der experimentelle Befund ergab, daß jedes aus der negativen Elektrode austretende Elektron zum Überschlag führt. Die 3 Meßpunkte entsprechen kräftiger Quarzlampebestrahlung, Tageslicht und sehr starker Abdunkelung. Die aufgenommenen Verteilungskurven ergeben, wie schon früher ausgeführt, infolge des endlichen Spannungsanstieges eine Minimalverzögerung von $3 \cdot 10^{-8}$ sec. Die statistische Streuzeit σ ist wieder, wie auf Seite 61 ausgeführt, auf unendlich raschen Spannungsanstieg extrapoliert. Die Bestimmung des dunklen Vorstromes i_0 erfolgte in derselben Weise, wie bei den beschriebenen Versuchen. Wieder war die Funkenstrecke einseitig durch ein 2 cm großes Loch beleuchtet (Bild 18 b). Für die beiden schwachen Ionisierungen wurde nur der gesamte, von Kugel zu Kugel übergehende Strom bestimmt und der auf die Mitte der Kugeln, also die eigentliche Entladungsbahn, entfallende Strom zum 12. Teil des Gesamtstromes angenommen, zu einem Wert, wie er aus den anderen Messungen bestimmt war.

In der nachstehenden Tabelle, die auch die im vorhergehenden Abschnitt ermittelten Meßpunkte enthält, sind die Meßresultate zusammengestellt:

Material	Streuzeit des Entladeverzugs σ	Mittelwert des dunklen Vorstromes in der Entladungsbahn i_0	Mittlere Anzahl der Elektronen in der Entladungsbahn n_0
Cu	$0,45 \cdot 10^{-7}$ sec	$3,7 \cdot 10^{-12}$ A	1,06 Elektronen
CuO	$1,9 \cdot 10^{-7}$ „	$8,0 \cdot 10^{-13}$ „	0,98 „
CuO	$0,6 \cdot 10^{-7}$ „	$3,24 \cdot 10^{-12}$ „	1,24 „
CuO	$1,2 \cdot 10^{-7}$ „	$1,13 \cdot 10^{-12}$ „	0,87 „
CuO	$15,3 \cdot 10^{-7}$ „	$1,02 \cdot 10^{-13}$ „	1,00 „

Danach ergibt sich mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 25\%$ die mittlere Anzahl der Elektronen n_0 in der Entladungsbahn zu einem Elektron. Die Übereinstimmung ist

sehr weitgehend, wenn man bedenkt, daß die benutzten Methoden statistische Methoden sind, und der statistische Fehler bei der Messung des mittleren Entladeverzugs, für dessen Bestimmung etwa 50 bis 60 Oszillogramme aufgenommen wurden, etwa $\pm 15\%$ beträgt.

In Bild 21 ist noch im logarithmischen Maßsystem die Streuzeit des Entladeverzugs σ abhängig vom Mittelwert des dunklen Vorstromes in der Entladungsbahn i_0 aufgetragen. Man erhält für diese Abhängigkeit eine Gerade, die Abszissen- und Ordinatenachse unter 45° schneidet. Der Mittelwert des Entladeverzugs wird damit bei genügend hoher Überspannung über der statischen Durchbruchsspannung umgekehrt proportional dem Mittelwert des dunklen Vorstromes i_0 , wobei der Proportionalitätsfaktor gleich der Ladung eines Elektrons ist.

$$\sigma = \frac{e}{i_0} \quad (e = 1,56 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}),$$

wie aus der Bestimmung der mittleren Anzahl der Elektronen, die in der Streuzeit aus der Kathode austreten, hervorgeht.

Für die Funkenverzögerung folgt aus diesen Tatsachen, daß die von M. v. Laue angegebene Beziehung noch durch ein für eine bestimmte Schlagweite und eine bestimmte Höhe der Überspannung konstantes Glied zu ergänzen ist, das die Zeit angibt, die die Elektronenlawine benötigt, um von der Kathode zur Anode zu gelangen. Diese Zeit ist bei den vorliegenden Schlagweiten etwa $2 \cdot 10^{-9}$ sec, also verschwindend klein gegenüber der Streuzeit und der Lage des Häufigkeitsmaximums des

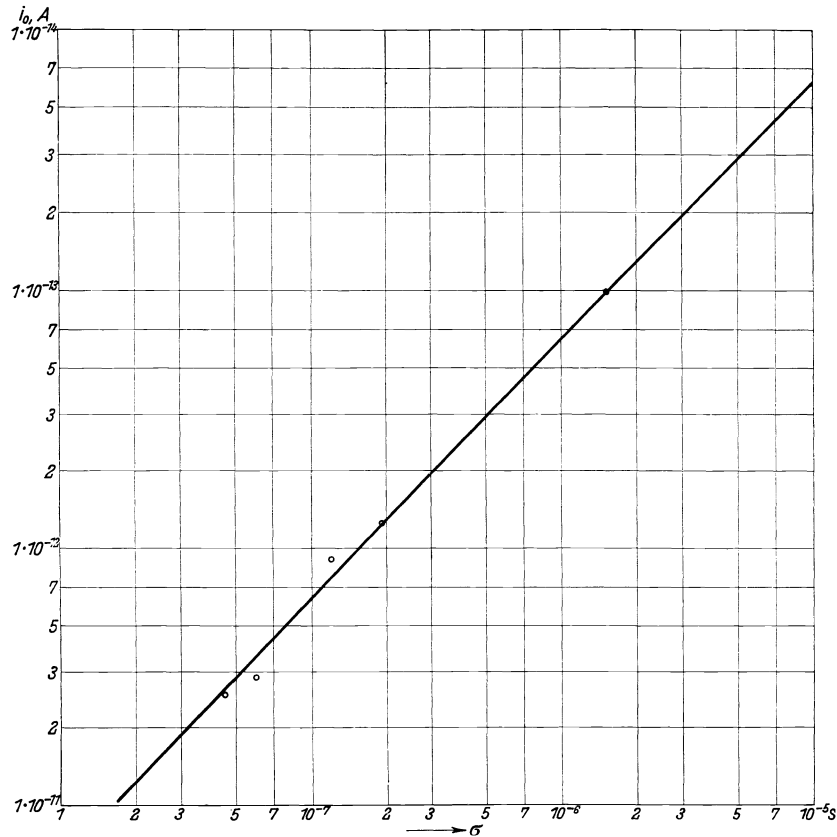


Bild 21.

Abhängigkeit des Sättigungswertes des Vorstromes von der mittleren Dauer des Entladeverzugs.

immer noch endlichen Spannungsanstieges, so daß sie in den Verteilungskurven nicht in Erscheinung tritt¹⁾.

¹⁾ Die Elektronengeschwindigkeit ist nach G. Hertz (11), siehe auch (27), durch die Beziehung gegeben:

$$v = \sqrt{\mathcal{E} \cdot \frac{e}{m} \cdot \lambda} \sqrt[4]{\frac{K}{2}}. \quad (\text{in el. st. E.})$$

\mathcal{E} ist die Feldstärke zwischen den Elektroden; sie beträgt für 9 kV (180% der statischen Durchbruchspannung) 82000 V/cm = 273 el. st. E.; $\frac{e}{m}$ ist $5,28 \cdot 10^{17} \frac{\text{el. st. E.}}{\text{g}}$, die mittlere freie Weglänge λ für Luft von Atmosphärendruck $5,7 \cdot 10^{-5}$ cm. K ist eine Konstante, die berücksichtigt, daß die Elektronen beim Stoß ihre kinetische Energie nicht vollständig verlieren; sie ist für Luft nicht bekannt, beträgt jedoch für Stickstoff 0,35. Damit wird $v = 5,9 \cdot 10^7$ cm/sec, eine Geschwindigkeit, die unter der von R. Rüdberg (32) als Grenzggeschwindigkeit von etwa $7 \cdot 10^9$ cm/sec ermittelten liegt, also mit dieser durchaus verträglich erscheint.

5. Ausdehnung der Messungen auf andere Elektrodenmaterialien.

Um den Einfluß verschiedener Kugelmateriale auf den Entladeverzug zu erfassen, wurden die Versuche auf Kugeln aus Silber, Eisen, Nickel und Messing ausgedehnt. Dabei wurden für diese Materialien bei den unter B 2 beschriebenen Ionisierungsverhältnissen die Sättigungswerte des dunklen Vorstromes i_0 ermittelt und mit Ausnahme von Nickel auch die mittlere Streuzeit σ bei 140 % der statischen Durchbruchsspannung. Bei den Messungen zur Bestimmung des Vorstromes machten sich, wenn man frisch hergestellte Kugeloberflächen untersuchte, sehr deutliche Ermüdungserscheinungen bemerkbar, ähnlich wie sie für lichtelektrische Elektronenemissionen bekannt sind. Die anfänglich gemessenen Werte des Sättigungsstromes nehmen zunächst während 5 bis 10 Minuten rasch ab, bleiben dann bei den einzelnen Materialien mehr oder minder lange konstant, um späterhin weiter abzunehmen. Der erste rasche Abfall kann auf Gasbeladung der Oberfläche zurückgeführt werden, da ja Stickstoff und Sauerstoff elektronegative Gase sind und daher die Austrittsarbeit erhöhen (3). Das weitere langsamere Absinken ist auf chemische Veränderungen der Kugeloberflächen zurückzuführen.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Meßresultate; in der ersten Spalte sind die untersuchten Materialien eingetragen, in der zweiten die statistische Streuzeit σ für 140 % der statischen Durchschlagsspannung, in einer weiteren der Vorstrom i_0 der „ermüdeten“ Oberflächen; in den drei weiteren Spalten sind der Vorstrom i_{00} der „frischen“ Oberflächen, die lichtelektrische Austrittsarbeit und die langwellige Grenze des lichtelektrischen Effektes angegeben¹⁾.

Material	Streuzeit bei 140% statischer Spannung σ 140%	Vorstrom der „ermüdeten“ Ober- fläche i_0	Vorstrom der „frischen“ Ober- fläche i_{00}	Lichtelektrische Austrittsarbeit bei 20° ²⁾	Langwellige Grenze des licht- elektrischen Effektes
Cu	$0,9 \cdot 10^{-7}$ sec	$3,7 \cdot 10^{-12}$ A	$5,3 \cdot 10^{-12}$ A	4,07 V	2955 Å
CuO	$75,0 \cdot 10^{-7}$ „	$0,8 \cdot 10^{-12}$ „	—	—	—
Fe	$0,8 \cdot 10^{-7}$ „	$3,7 \cdot 10^{-12}$ „	$5,7 \cdot 10^{-12}$ „	—	3155 „
Ag	$6,7 \cdot 10^{-7}$ „	$0,8 \cdot 10^{-12}$ „	$7,0 \cdot 10^{-12}$ „	3,67 V	3364 „
Messing	$0,7 \cdot 10^{-7}$ „	$3,9 \cdot 10^{-12}$ „	—	—	—
Ni	—	$6,1 \cdot 10^{-12}$ „	—	3,67 V	3040 „

Auffallend ist die Größe der Streuzeit σ von Kupferoxyd gegenüber Silber, obwohl beide denselben Wert des dunklen Vorstromes i_0 aufweisen. Es ist dies vielleicht so zu erklären, daß bei Silber Gasschichten auf der Oberfläche sich gebildet haben, also der niedrige Vorstromwert lediglich auf Bildung von Gasschichten auf der Oberfläche zurückzuführen ist, während bei Kupferoxyd die Kugel mit einer chemischen Verbindung überzogen ist. Es wäre denkbar, daß unter Einwirkung des Stoßes der positiven Ionen Teile der Gashaut abgelöst werden und daß hierdurch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Elektronenlawine zum Überschlag führt, bei gasbeladenen Silberelektroden größer wird als bei oxydierten Kupferelektroden. Eine Stütze dieser Ansicht sind orientierende Leuchtschirmbeobachtungen bei Silberelektroden mit einem homogenen Überzug von Schwefelsilber, bei denen der Vorstrom i_0 etwa $10^{-12} \dots 10^{-13}$ A betrug und Entladeverzugszeiten von $10^{-5} \dots 10^{-4}$ sec beobachtet wurden.

¹⁾ Die oszillographischen Aufnahmen wurden an „ermüdeten“ Oberflächen vorgenommen.

²⁾ Angaben aus Landolt-Börnstein: Erg.-Bd. 2 (1931) S. 639.

Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Vorstrom der „frischen“ Oberfläche i_{00} und den lichtelektrischen Daten erscheint jedoch nicht gesichert, da das Versuchsmaterial hierfür keineswegs ausreichend ist¹⁾.

6. Einfluß der Luftfeuchtigkeit.

Hierüber wurden keine eingehenden Versuche vorgenommen. Die relative Luftfeuchtigkeit des Laboratoriumsraumes betrug im allgemeinen 65...70%. Um aber den Einfluß wenigstens einigermaßen abschätzen zu können, wurde während einer längeren Regenperiode unter Zuhilfenahme künstlicher Mittel die relative Luftfeuchtigkeit auf 82...83% erhöht. Die mittlere Streuzzeit von oxydierten Kupferkugeln bei 130% der statischen Durchbruchsspannung ging bei der Erhöhung der Luftfeuchtigkeit von 65...70% auf 82...83% von $15 \cdot 10^{-6}$ sec auf $8 \cdot 10^{-6}$ sec zurück.

An der Durchführung der Messung hat Herr C. Bullendorf wesentlichen Anteil. Herrn Dr. M. Steenbeck danke ich für zahlreiche eingehende Diskussionen über die Versuche.

Zusammenfassung.

Der Entladeverzug in homogenen elektrischen Feldern und Luft von Atmosphärendruck wird an einer Kugelfunkenstrecke (5-cm-Kugeln, 0,11 cm Schlagweite, statische Durchbruchsspannung 5 kV) mit dem Kathodenstrahlzillographen untersucht. Es wird nachgewiesen, daß der Entladeverzug bei unzeitigem, rechteckigem Spannungsanstieg an der Funkenstrecke bei Überschreitung der statischen Durchbruchsspannung statistisch bestimmt ist. Bei stetigem, allmählichem Spannungsanstieg schwanken die Werte des Entladeverzugs um einen endlichen Mittelwert, der abhängig ist von der Steilheit des Spannungsanstieges. Es wird ein graphisches Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe man den Mittelwert des Entladeverzugs für beliebige Steilheit der auftretenden Spannungswelle bestimmen kann.

Es konnte durch elektrometrische Messung des dunklen Vorstromes in der Entladungsstrecke nachgewiesen werden, daß bereits bei einer Überspannung, die 180% der statischen Durchbruchsspannung beträgt, jedes aus der negativen Elektrode austretende Elektron zum Überschlag führt.

Untersuchungen über Oberflächeneinflüsse der Elektroden lassen erkennen, daß Fettschichten, Gashäute elektronegativer Gase sowie Oxyd- bzw. Sulfidbildung auf der Elektrodenoberfläche, den Entladeverzug um eine Größenordnung und mehr heraufsetzen.

Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit wird nicht eingehend untersucht; es wird nur festgestellt, daß der Entladeverzug von oxydierten Kupferelektroden bei einer Steigerung der relativen Luftfeuchtigkeit von 65% auf 85% auf die Hälfte zurückgeht.

Literaturverzeichnis.

1. J. Algermissen: Ann. Physik Bd. 19 (1906) S. 1016.
2. W. Angenheister: Handbuch der Physik Bd. 14 (1927).
3. K. Becker: Physik Z. Bd. 32 (1931) S. 439.

¹⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Es sei auf die Arbeiten von K. Buss u. W. Mach [Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931) S. 787] und K. Buss [Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 261] hingewiesen, bei denen eindeutig ein solcher Zusammenhang nicht besteht. Dagegen läßt eine Notiz von F. Bath u. W. Kaufmann [Naturwiss. 20 (1932) S. 87] auf einen solchen Zusammenhang schließen. F. Bath u. W. Kaufmann erhalten bei 25% Überspannung und möglichst weitgehend abgeschirmter Entladungsstrecke Entladeverzugszeiten von mehr als einer Stunde.

4. W. Braunbek: Z. Physik Bd. 36 (1926) S. 582.
 5. W. Braunbek: Z. Physik Bd. 39 (1926) S. 6.
 6. M. Büge: Arch. Elektrotechn. Bd. 19 (1928) S. 480.
 7. O. Burawoy: Arch. Elektrotechn. Bd. 16 (1926) S. 186.
 8. U. Campbell: Philos. Mag. Bd. 38 (1919) S. 314.
 9. A. v. Engel: Z. Physik Bd. 68 (1931) S. 768.
 10. F. D. Fielder u. J. McAuley: Electr. Wld. Bd. 94 (1929) S. 1014.
 11. G. Hertz: Verh. dtsch. physik. Ges. 1917 S. 268.
 12. A. v. Hippel u. J. Franck: Z. Physik Bd. 57 (1929) S. 696.
 13. G. Jaumann: Wied. Ann. Bd. 55 (1895) S. 656.
 14. W. Kaufmann: Wied. Ann. Bd. 2 (1900) S. 158.
 15. K. Kohler: Wiss. Veröff. Siemens-Konzern II (1922) S. 307.
 16. W. Krug: Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 49 (1931) S. 233.
 17. W. Krug: Elektrotechn. Z. Bd. 50 (1929) S. 681.
 18. W. Krug: Elektrotechn. Z. Bd. 51 (1930) S. 605.
 19. M. v. Laue: Ann. Physik Bd. 76 (1925) S. 261.
 20. L. B. Loeb: Science Bd. 58 (1929) S. 509.
 21. E. Mauz u. R. Seeliger: Physik. Z. Bd. 26 (1925) S. 47.
 22. O. Meyer: Arch. Elektrotechn. Bd. 24 (1930) S. 15.
 23. M. Paavola: Arch. Elektrotechn. Bd. 22 (1929) S. 443.
 24. P. O. Pedersen: Ann. Physik Bd. 71 (1923) S. 317.
 25. T. W. Peeck jun.: Dielectric Phenomena. New York 1915.
 26. W. Rogowski: Arch. Elektrotechn. Bd. 16 (1926) S. 496.
 27. W. Rogowski: Arch. Elektrotechn. Bd. 20 (1928) S. 104.
 28. W. Rogowski: Arch. Elektrotechn. Bd. 24 (1930) S. 688.
 29. W. Rogowski: Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931) S. 551.
 30. W. Rogowski u. R. Tamm: Arch. Elektrotechn. Bd. 20 (1929) S. 628.
 31. W. Rogowski u. O. Wolff: Arch. Elektrotechn. Bd. 21 (1929) S. 645.
 32. R. Rüdtenberg: Wiss. Veröff. Siemens-Konzern IX, 1 (1930) S. 1.
 33. M. Steenbeck: Z. Physik Bd. 53 (1929) S. 153.
 34. M. Steenbeck: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. VIII, 3 (1930) S. 84.
 35. M. Steenbeck: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. IX, 1 (1930) S. 42.
 36. M. Steenbeck: Z. Physik Bd. 72 (1931) S. 505.
 37. J. Slepian: Electr. Wld. Bd. 91 (1928) S. 763.
 38. W. O. Schumann: Z. techn. Physik Bd. 11 (1930) S. 201.
 39. R. Tamm: Arch. Elektrotechn. Bd. 19 (1928) S. 235.
 40. M. Toepler: Ann. Physik Bd. 53 (1917) S. 232.
 41. J. J. Torok: Amer. J. E. E. Bd. 47 (1928) S. 177.
 42. J. J. Torok: Quart. Transactions, Amer. J. E. E. Bd. 47 (1928) S. 349.
 43. J. J. Torok: Quart. Transactions, Amer. J. E. E. Bd. 49 (1930) S. 312.
 44. J. J. Torok u. F. D. Fielder: Electr. J. Bd. 26 (1929) S. 320.
 45. J. J. Torok u. F. D. Fielder: Quart. Transactions, Amer. J. E. E. Bd. 49 (1930) S. 352.
 46. J. J. Townsend: Handbuch der Radiologie Bd. I S. 283. Leipzig 1920.
 47. H. Viehmann: Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931) S. 253.
 48. E. Warburg: Wied. Ann. Bd. 59 (1896) S. 1.
 49. E. Warburg: Wied. Ann. Bd. 62 (1897) S. 285.
 50. K. Zuber: Ann. Physik Bd. 76 (1925) S. 231.
-

Zum Problem des Emissionsmechanismus von Oxydkathoden.

Von **Heinrich Kniepkamp** und **Curt Nebel**.

Mit 7 Bildern.

Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium und aus der Verstärkerabteilung des Werkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 17. Juni 1932.

I. Einleitung.

Die Größe des glühelektrischen Sättigungsstromes ist bei reinen Metall-, z. B. Wolframkathoden eine für jede beliebige Temperatur eindeutig gegebene Größe, die nur von der Größe der emittierenden Fläche und von einer Materialkonstanten, der Elektronenaustrittsarbeit, abhängt. Die Aktivität von Oxydkathoden dagegen wird stark beeinflusst sowohl durch die Behandlung der Kathode während ihrer Herstellung (Aktivierung), als auch durch die den jeweiligen Betriebszustand kennzeichnenden Werte der Temperatur und Belastung mit Elektronenemission. Dabei befolgt die Dichte des Sättigungsstromes i in Abhängigkeit von der Kathodentemperatur T in jedem Augenblick ebenso wie die einer reinen Metallkathode das Richardsonsche Emissionsgesetz

$$i = A \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{b}{T}},$$

nur sind die Größen A und b ¹⁾ im Gegensatz zur reinen Metallkathode von dem der Messung vorhergehenden Betriebszustand abhängig.

Dieses Verhalten liegt in der elektrolytischen Wirkung des durch die Oxydschicht fließenden Emissionsstromes begründet. Die Werte der beiden Emissionskonstanten hängen wesentlich von der Konzentration der elektrolytischen Zeretzungsprodukte — bei den praktisch vorwiegend verwendeten Oxydkathoden metallisches Barium und Sauerstoff — an der Oberfläche der Oxydschicht und in ihrem Innern ab²⁾. Die Untersuchung ihrer Abhängigkeit von den beiden hauptsächlichsten Versuchsparametern, der Temperatur und der emittierten Elektrizitätsmenge, ermöglicht daher weitgehende Einblicke in den Mechanismus des Emissionsvorganges und der Stromleitung durch die Oxydschicht, welche letzterer dadurch besonders verwickelt ist, daß die glühende Oxydschicht teils als Elektronen-, teils

¹⁾ Aus b berechnet sich die der Elektronenaustrittsarbeit entsprechende Spannung φ nach der Beziehung $\varphi = k b/e$, wo k die Boltzmannsche Konstante und e die Elektronenladung bedeuten. Die Konstante A hat bei reinen Wolframkathoden den quantentheoretisch berechneten Wert $60,2 \text{ A}/(\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^2)$.

²⁾ W. Espe: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. Bd. 5 (3) S. 30 und 46.

als Ionenleiter anzusehen ist, wobei der relative Anteil beider Leitungsarten an der Gesamtleitung in komplizierter Weise von den Betriebsbedingungen abhängig ist.

Die exakte Bestimmung der Emissionskonstanten mit Hilfe der Richardson'schen Gleichung bereitet, wie aus dem Vorhergehenden zu entnehmen ist, große Schwierigkeiten. Denn zur Aufnahme der Emissionskurve muß die Kathode von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt verschiedenen Emissionen und Temperaturen ausgesetzt werden. Die Einstellzeit für die Bestimmung eines Punktes liegt sicher nicht viel unter 1 min, und in dieser Zeit können schon wesentliche Aktivitätsänderungen eintreten. Der Emissionszustand, gekennzeichnet durch A und φ , ist also für jeden Punkt der gemessenen Kurve verschieden, und ihre Form muß daher von der theoretisch geforderten abweichen. Man kann zwar diese Schwierigkeiten teilweise überwinden, indem man etwa vor Beginn der Messungen die Erreichung des stationären Endzustandes bei maximaler Meßbelastung und -temperatur abwartet und die Messungen dann sehr beschleunigt¹⁾. Aber abgesehen von den großen Fehlerquellen, die durch die Ablesegeschwindigkeit trotzdem bestehen bleiben, ist die Verfolgung zeitlich schnell verlaufender Aktivitätsänderungen, die für die Untersuchung des Problems von großer Wichtigkeit sind, nach dieser subjektiven Methode nicht möglich. Man hat sich daher auch bei solchen Untersuchungen²⁾ meist mit der Messung des Emissionsstromes bei einer bestimmten Meßtemperatur als Kriterium für die Aktivität begnügt und damit auf die Trennung der beiden charakteristischen Konstanten verzichtet. Solche Messungen lassen dann auf Grund von Analogieschlüssen aus Versuchsergebnissen an anderen, einfacher zusammengesetzten Kathoden mit Fremdatomschicht (z. B. thorierte oder Caesium-Kathode) in gewissem Umfange Schlüsse auf die Vorgänge bei der Oxydemission zu³⁾.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine relativ einfache, objektive Methode beschrieben werden, die die Aufnahme von Richardson'schen Kurven in sehr kleinen Zeiten und mit sehr geringen Belastungen der Kathode ermöglicht, die also für eine exakte Messung der Emissionskonstanten vor allem auch bei zeitlich schnell verlaufenden Änderungen des Emissionszustandes geeignet ist.

Diese Methode wurde zur Untersuchung einer besonderen Art von Aktivitätsänderungen angewendet, die sich im normalen Betrieb der Kathode, beispielsweise in einer fertigen Verstärkerröhre — also bei relativ niedrigen Emissionsstromdichten und Temperaturen — einstellen und die besonders von I. A. Becker⁴⁾ eingehend beschrieben und untersucht worden sind. Sie bestehen darin, daß die Aktivität einer fertig aktivierten Kathode durch Belastung derselben mit geringem Emissionsstrom verringert und durch Glühen ohne Emission wieder regeneriert werden kann. Sie finden in einem Temperatur- und Emissionsstrombereich statt, in dem die in entgegengesetztem Sinne verlaufenden Aktivitätsänderungen durch Vergrößerung bzw. Abnahme der Ba-Konzentration an der Oberfläche infolge von Elektrolyse in der Oxydschicht bzw. thermischer Verdampfung des Metalls während der Beobachtungszeit noch nicht merkbar in Erscheinung treten. Nach Becker beruhen sie auf der Dipolwirkung des elektrolytisch in der Oxydschicht entstehenden und an die Oberfläche diffundierten Sauerstoffs. Die hier mitgeteilten vorläufigen Versuchsergebnisse stehen mit dieser Annahme im wesentlichen in Einklang.

¹⁾ W. Espe: l. c.

²⁾ I. A. Becker: *Physic. Rev.* Bd. 34 10 (1929) S. 10; Bd. 38 (1931) S. 2193.

³⁾ I. A. Becker: l. c. ⁴⁾ I. A. Becker: l. c.

II. Meßmethode und Versuchsanordnung.

1. Prinzip und Schaltung. Das Prinzip der benutzten Methode zur Messung der Emissionskonstanten ist folgendes: Schaltet man die Heizung einer Glühkathode, die einen raumladungsbegrenzten Elektronenstrom emittiert, plötzlich aus, oder reduziert man sie plötzlich auf einen Bruchteil des ursprünglichen Wertes, so wird bei konstant gehaltener Anodenspannung der Anodenstrom von dem Augenblicke an, in dem die Temperatur bei ihrem Absinken einen bestimmten, von der Anodenspannung abhängigen Wert erreicht, emissionsgesättigt werden, und von diesem Zeitpunkt an mit der Temperatur zusammen nach Maßgabe der Richardsonschen Gleichung absinken. Wenn man die Strom-Zeit-Kurven oszillographisch aufnimmt und in der Lage ist, jedem Punkte der Stromkurve diejenige Temperatur zuzuordnen, die bei Erreichen dieses Punktes an der Kathodenoberfläche geherrscht hat, so kann man aus einem solchen Ausschaltprogramm die Emissionskurve konstruieren und damit die Emissionskonstanten bestimmen. Da ein derartiger Ausschaltvorgang normalerweise nicht länger als etwa 0,5 . . . 1 s dauert, so bedeutet diese Art der Messung einen verhältnismäßig geringfügigen Eingriff in die Konstitution des emittierenden Systems.

Die Zuordnung der Kathodentemperaturen zu den Punkten der Strom-Zeit-Kurve erfolgte bei unseren Versuchen durch gleichzeitige oszillographische Messung des Kathodenwiderstandes. Zu diesem Zweck wurde die fadenförmige Oxydkathode in den einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke gelegt, deren übrige Zweige aus konstanten Präzisionswiderständen bestanden. Als Brückeninstrument diente eine Oszillographenschleife. Als Brückenspannung wurde zur Eliminierung von Thermokräften Wechselspannung benutzt, die zugleich als Heizspannung für den Glühfaden diente. Für die Meßaufnahmen wurde durch plötzliche Erniedrigung der Brückenspannung der Heizstrom auf etwa $\frac{1}{10}$ seines vorherigen Wertes herabgesetzt.

Die Schaltung der Brückenordnung geht im einzelnen aus Bild 1 hervor. In dem Bild bedeuten: *F* den Glühfaden, *A* die zylindrische Meßanode, *Z* zwei Schutzzyylinder an Anodenpotential, *B* die Anodenbatterie, die über den Symmetrierungswiderstand R_5 mit der Kathode verbunden ist. R_1, R_2, R_3 sind die Brückenwiderstände (Chaperonwiderstände); O_1 und O_2 stellen die beiden Oszillographenschleifen dar. Die Brückenwechselspannung (50 Hertz) wird über den Transformator *Tr* dem Netz entnommen. — Durch den Schalter S_1 kann entweder der Glühfaden oder der Eichrheostat R_4 in die Brücke gelegt werden. Die Heizstromstärke wird durch die Widerstände R_6 und R_7 geregelt. Während des Dauerbetriebes ist R_6 über den Schalter S_2 kurzgeschlossen. Zur Meßaufnahme wird die Heizstromstärke durch Öffnen von S_2 plötzlich auf den zur Messung benötigten Wert herabgesetzt. Die Spannungsschleife O_1 ist während des Dauerbetriebes durch den Schalter S_3 kurzgeschlossen, zur Meßaufnahme wird S_3 gleichzeitig mit S_2 geöffnet.

Bei einer Aufnahme registriert die in der Brücke liegende Schleife O_1 die durch die Temperaturänderung bewirkte Widerstandsänderung des Glühfadens, welche sich in einer zunehmenden Verstimmung der vorher in geeigneter Weise abgeglichenen

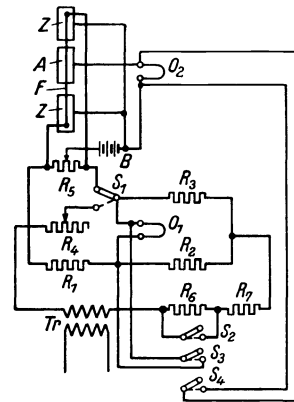


Bild 1. Schaltskizze.

Brücke äußert. Durch die im Anodenkreis der Meßröhre befindliche Schleife O_2 wird gleichzeitig das Absinken des Anodenstromes registriert; zur Eichung wird dann der Glühfaden durch den Eichrheostaten R_4 ersetzt und die Ausschläge der Brückenschleife nach Widerstandswerten geeicht. Die Temperaturbestimmung erfolgt durch die Messung der Temperaturabhängigkeit des Fadenwiderstandes.

Bild 2 zeigt die Abbildung eines in der beschriebenen Weise aufgenommenen Oszillogramms. Der Anodenstrom (Kurve I) ist nach dem Öffnen des Kontaktes S_2 noch kurze Zeit unabhängig von der sofort einsetzenden Temperaturerniedrigung, nämlich solange er noch raumladungsbegrenzt ist (Teil AB). Sobald er emissionsgesättigt wird, sinkt er mit der Temperatur zusammen ab. Der Übergang aus dem einen in das andere Gebiet geht nicht als scharfer Knick vor sich, sondern zwischen beiden liegt ein Übergangsbereich (BC), das wohl dadurch entsteht, daß die Raumladung nicht an allen Stellen des untersuchten Fadenteiles gleichzeitig verschwindet, was auf Feldinhomogenitäten an der Kathode, wahrscheinlich besonders in den Zwischenräumen zwischen den Zylindern, zurückzuführen ist¹⁾. An dieses Übergangsbereich BC schließt sich das Gebiet vollständiger Emissionssättigung CD , das

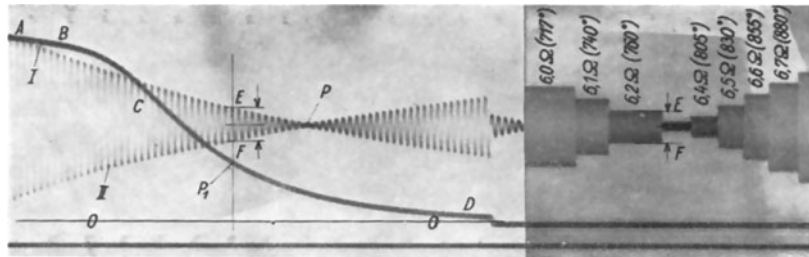


Bild 2. Ausschalttdiagramm mit Eichung.

eigentliche Meßgebiet, an. — Das Absinken der Fadentemperatur äußert sich durch Verstimmung der Brücke in der zeitlichen Änderung des Sinusstromes der Brückenschleife (Kurve II). Die Größe des Schleifenausschlages ist in jedem Augenblick dem Fadenwiderstand und damit der Fadentemperatur proportional. Als Ausschlag wird der zur Symmetrieachse der Brückenstromkurve senkrechte Abstand der beiden Einhüllenden dieser Kurve gemessen. Um die Brückenverstimmung möglichst empfindlich zu machen, wurde die Brücke nicht auf den Fadenwiderstand bei Betriebstemperatur, sondern auf einen kleineren Wert abgeglichen, so daß also der Brückenstrom O (Punkt P) erst etwa in der Mitte des Aufnahmevorganges erreicht wird. — Im zweiten Teil des Oszillogramms ist die nach der Aufnahme erfolgte Eichung der Brückenverstimmung nach Widerstandswerten mit Hilfe des Eichrheostaten R_4 wiedergegeben. Mit der hieraus entnommenen Eichkurve und der experimentell bestimmten Temperaturabhängigkeit des Fadenwiderstandes (s. unten) kann dann zu jedem Punkt der Stromkurve, deren Abweichungen von der 0-Linie $0-0$ direkt in mA geeicht sind, der zugehörige Temperaturwert angegeben werden. So gehört zum Beispiel zum Punkt P_1 der Stromkurve ein Anodenstrom von 1,4 mA und entsprechend dem Ausschlag EF der Brückenschleife ein Fadenwiderstand von $6,2 \Omega$ oder einer Temperatur von 760°K . Auf diese Weise wird Punkt für Punkt

¹⁾ Temperaturunterschiede längs der Kathode, die ebenfalls zur Erklärung herangezogen werden könnten, traten nachweislich nicht auf.

der Richardsonschen Kurve ermittelt. Aus der üblichen logarithmischen Darstellung, in der das Richardsonsche Gesetz eine Gerade ergibt (s. Bild 4), errechnet sich die Konstante A aus dem Ordinatenabschnitt der Geraden und die Konstante φ aus dem Tangens ihres Neigungswinkels gegen die Abszisse.

2. Temperaturbestimmung. Die Fadentemperaturen wurden im Gebiete sichtbarer Glut mit dem Mikropyrometer von S. & H. bestimmt. Als Absorptionsvermögen der Kathodenfläche wurde der von Davisson¹⁾ für die gleiche Art von Kathoden zwischen 800 und 1200° K gemessene Wert $\alpha = 0,4 + 2,5 \cdot 10^{-4} T/\text{grad}$ übernommen. Unterhalb der Meßgrenze des Pyrometers (etwa 980° K) liegende Temperaturen wurden durch Extrapolation der gemessenen Widerstandstemperaturkurve mit Benutzung des Kaltwiderstandes bestimmt.

Die Temperaturen, die man auf Grund der Fadenwiderstandsmessung den einzelnen Punkten der Stromkurve zuordnet, stimmen nur dann genügend genau mit den gleichzeitig an der Oberfläche vorhanden gewesenen Temperaturen überein, wenn der Wärmeausgleich zwischen Kern und Schichtoberfläche in einer gegen die Dauer der Aufnahme kleinen Zeit erfolgt. Wir können diese Ausgleichzeit bei den untersuchten Kathoden, die wie alle modernen Oxydkathoden für technische Zwecke eine Oxydschicht von sehr geringer Dicke (0,05 mm) besaßen, auf Grund besonderer Versuche auf etwa 0,005 s schätzen. Daß diese Zeit gegenüber der Aufnahmedauer von durchschnittlich etwa 0,5 s vernachlässigt werden kann, wurde dadurch nachgewiesen, daß unmittelbar hintereinander sowohl ein Einschalt- wie ein Ausschaltvorgang oszillographisch in der beschriebenen Weise aufgenommen wurde.

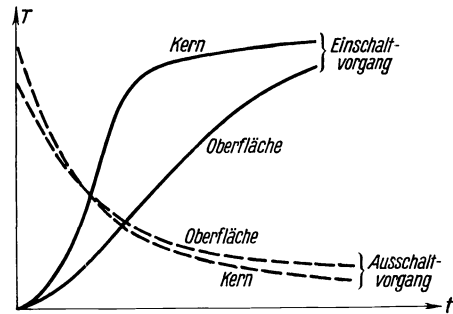


Bild 3. Wahrscheinlicher Temperaturverlauf an Kern und Oberfläche während des Ein- und Ausschaltvorganges (schematisch).

Beim Einschalten der Heizleistung wird sich nämlich infolge der relativ schlechten Wärmeleitung vom Kern zur Schicht und durch die Schicht hindurch zuerst ein stärkerer Temperaturgradient vom Kern zur Oberfläche hin ausbilden²⁾, als er dem stationären Strahlungszustand, der erst allmählich erreicht wird, entspricht; d. h. also, daß während des Einschaltvorganges die Kerntemperatur in jedem Augenblick höher sein wird als die Oberflächentemperatur. In Bild 3 ist dieser Vorgang qualitativ dargestellt; Abszisse ist die Zeit t seit dem Einschalten der Heizung, Ordinate die Temperatur T an Kern bzw. Oberfläche. Beim Ausschaltvorgang kann kurz nach dem Ausschalten der Heizung infolge des Überwiegens der Wärmestrahlung gegen die Wärmeleitung längs des Fadens ebenfalls ein Temperaturgradient vom Kern zur Oberfläche entstehen. Dieser Gradient wird aber auf alle Fälle kleiner sein als während der Zeit, in der die ganze abgestrahlte Wärme im Kern erzeugt wird und durch die Oxydschicht hindurchtransportiert werden muß. Bei den niederen Temperaturen nimmt die Strahlung proportional T^4 ab; dann kann sogar die Längsableitung der Wärme durch den Kern überwiegen und der Kern kühler sein als die Oberfläche. Da der Gesamtwiderstand des Fadens als Temperaturmaß gemessen wird, werden die Effekte an den Enden, wo diese Abkühlung besonders stark ist,

¹⁾ C. Davisson: J. C. T. Bd. 6 (1929) S. 53; siehe auch Rev. Mod. Phys. Bd. 2 (1930) S. 421.

²⁾ Die Joulesche Wärme durch Längsleitung durch die Schicht kann vernachlässigt werden.

mit bewertet. Während eines großen Teiles des Ausschaltvorganges wird die Temperatur des Kernes also nur wenig höher als die Oberflächentemperatur oder kleiner als diese sein.

Infolgedessen muß, falls die Ausgleichzeit für den Wärmeübergang von Kern zur Schichtoberfläche gegen die Zeit der Meßvorgänge in Betracht kommt, ein nach der beschriebenen Methode ausgewerteter Ausschaltvorgang eine andere Emissionskurve liefern als ein ebenso ausgewerteter Einschaltvorgang. Denn im ersten Falle werden scheinbar zu große, im zweiten Falle dagegen zu kleine Emissionsströme gemessen.

Der Versuch zeigte jedoch, daß zwei auf diese Weise gewonnene Geraden innerhalb der Meßgenauigkeit bei Aufnahmezeiten bis herunter zu 0,1 s Aufnahmedauer vollkommen übereinstimmten, wodurch also der unmittelbare Beweis dafür erbracht ist, daß die Zeit für den Temperatúrausgleich zwischen Kern und Schicht bei diesen Untersuchungen vernachlässigt werden kann.

3. Genauigkeit der Messung. Die Genauigkeit der Bestimmung von A und φ hängt ab:

1. Von der Genauigkeit der Temperaturmessung und der Größe des durch die Extrapolation zu erwartenden Fehlers.

2. Von der Ablesegenauigkeit bei der Auswertung der Oszillogramme und der daraus gewonnenen Diagramme.

Die Genauigkeit der Temperaturmessung mit dem Mikropyrometer betrug im Durchschnitt $\pm 5^\circ$. Die Extrapolation der Temperaturkurve unter Zuhilfenahme des Kaltwiderstandes ergab bei der niedrigsten für die Messung verwendeten Temperatur (720° K) einen möglichen Fehler von maximal $\pm 7 \dots 8^\circ$, also ungefähr 1,5 ... 2%. Die Bestimmung der Stromstärke aus dem Oszillogramm erfolgte mit einer Genauigkeit von $\pm 0,2\%$ bei den größten und von $\pm 2\%$ bei den kleinsten bei der Messung vorkommenden Stromwerten. Der Fehler der Temperatureichung im Oszillogramm lag unterhalb der Genauigkeitsgrenze der Temperaturmessung (s. oben).

Durch die Empfindlichkeit der Schleife war der Strommeßbereich auf etwa 1 Zehnerpotenz beschränkt. Die dadurch bedingte Unsicherheit der graphischen Auswertung der Richardsonschen Geraden wird zum Teil wieder durch die Möglichkeit aufgehoben, sehr viele Punkte der Geraden anzugeben, und daher trotz der Streuung der Punkte infolge der Ablesegenauigkeit den tatsächlichen Verlauf der Geraden mit ziemlich großer Sicherheit zu ermitteln. So ergab sich für die Bestimmung der Austrittsarbeit φ aus der Neigung der Geraden ein Fehler von etwa $\pm 1\%$. Dagegen ist der Fehler bei der Bestimmung von A aus der Größe des Ordinatenabschnittes wegen der Beschränkung des Meßbereiches sehr viel größer, er beträgt etwa $\pm 10 \dots 15\%$.

4. Kathode und Elektrodensystem. Die Untersuchungen wurden an Kathoden gemacht, die in modernen Verstärkerröhren verwendet werden und sich durch große Gleichmäßigkeit der Oxydbedeckung auszeichnen. Als Kern diente ein 75 mm langes Band vom Querschnitt $0,15 \times 0,05 \text{ mm}^2$ aus einer Speziallegierung. Der Oxydaufstrich bestand aus einem Gemisch aus BaO und SrO im ungefähren Verhältnis von 2:1, die Schichtdicke betrug 0,05 mm. Herstellung und Aktivierung dieser Kathoden erfolgte ungefähr nach denselben Gesichtspunkten, wie sie von Becker (l. c.) angegeben worden sind.

Das Anodensystem der Meßröhre bestand aus drei übereinander in kleinen Abständen angeordneten Nickelzylindern mit 10 mm Durchmesser und 22 mm Länge, von denen der mittelste als Meßanode und die beiden äußeren in der üblichen Weise als Schutzzylinder Z_1 und Z_2 benutzt wurden (s. Bild 1). Die Kathodentemperaturen konnten außer in den Zwischenräumen zwischen den Zylindern auch noch durch kleine Kreisöffnungen in der Wand eines jeden Zylinders beobachtet werden. Soweit sich mit dem Mikropyrometer verfolgen ließ, war die Kathodentemperatur weit über den Meßzylinder hinaus bis dicht an die Kathodenenden völlig gleichmäßig. — Die Röhren wurden nach den Gesichtspunkten und mit allen Hilfsmitteln der modernen Hochvakuumtechnik ausgepumpt und in abgezogenem Zustande untersucht, da die Untersuchungen möglichst Aufschlüsse über die Vorgänge in fertigen Verstärkeröhren bringen sollten. Demgemäß wurden auch die spez. Belastungen und die Betriebstemperaturen der Kathoden in den Grenzen gehalten, die bei Verstärkeröhren zwecks Erzielung genügender Lebensdauer und Konstanz beobachtet werden müssen.

III. Versuchsergebnisse.

1. Absolute Größe der Emissionskonstanten. In Bild 4 sind einige mit der beschriebenen Methode aufgenommene Emissionskennlinien in der üblichen logarithmischen Darstellung wiedergegeben. In dem Bild bedeutet i die Stromdichte in A/cm^2 , bezogen auf die Oberfläche der Kathode, soweit sie innerhalb der Meßanode liegt, T die absolute Temperatur. Alle Kennlinien zeigen innerhalb eines Strombereiches von etwa einer Zehnerpotenz gute Linearität, wie sie bei Gültigkeit des Richardson'schen Gesetzes zu fordern ist.

Aus unseren zahlreichen Messungen an verschiedenen Kathoden haben sich für die Austrittsarbeit φ einer von Sauerstoff freien Kathodenoberfläche Werte zwischen 0,95 und 1,1 V ergeben, die in guter Übereinstimmung mit den von anderen Autoren an BaO-Kathoden gefundenen Werten stehen. Für die Größe A konnten Werte gemessen werden, die untereinander zum Teil um Größenordnungen verschieden waren. Im Mittel lagen sie zwischen 10^{-2} und $1 A/(cm^2 \cdot grad^2)$. Diese großen Schwankungen und die Abweichungen von dem quantentheoretisch abgeleiteten universellen Wert $60,2 A/(cm^2 \cdot grad^2)$, die auch aus den Messungen anderer Autoren¹⁾ zur Genüge bekannt sind, sind erstens auf die nur unvollständige Bedeckung der Oberfläche

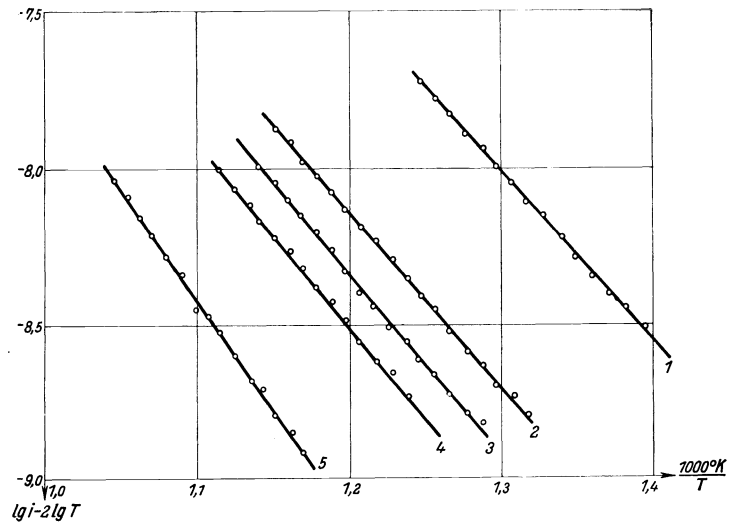


Bild 4. Emissionskennlinien während der Entaktivierung durch Emissionsstrom, aufgenommen nach verschiedenen Belastungszeiten (s. Tab.). Emissionsbelastung $70 mA/cm^2$.

¹⁾ Siehe die Zusammenstellung von S. Dushman: Rev. Mod. Phys. Bd. 2 (1930) S. 423.

mit Bariumatomen und damit fehlerhafte Berechnung der Emissionsstromdichte (s. oben) und zweitens auf die Temperaturabhängigkeit der Austrittsarbeit infolge der Anlagerung von Dipolschichten (Sauerstoff) zurückzuführen. Hierauf wird im nächsten Abschnitt etwas näher eingegangen werden.

2. Abhängigkeit der Emissionskonstanten von den Betriebsbedingungen der Kathoden. Wie schon anfangs erwähnt, nimmt bei den hier untersuchten Vorgängen (s. oben) die Aktivität einer fertig aktivierten Kathode, die einige Zeit ohne Emission gebrannt hat, sofort ab, wenn man aus der Kathode einen Emissionsstrom entnimmt, und erreicht nach gewisser Zeit einen durch bedeutend kleinere Aktivität gekennzeichneten Endzustand. Die Geschwindigkeit dieses Vorganges ist um so größer, je größer die Anodenspannung ist. Nach Abschalten der Emission kann sich unter Umständen die Kathode wieder reaktivieren. Es wurde nun eingehend untersucht, wie sich bei diesen typischen Vorgängen die Emissionskonstanten verhalten, und zwar unter Variation der Emissionsstromstärken (durch Variation der Anodenspannung) wie auch der Temperaturen. Die Emissionsströme waren dabei immer raumladungsbegrenzt. Vor jeder Meßreihe wurde die Kathode 10 ... 12 Stunden ohne Emission bei der Temperatur, bei der die Meßreihe vorgenommen werden sollte, betrieben, um so nach Möglichkeit einen definierten Anfangszustand für die Messung zu schaffen. Die Aufnahme der Richardsonschen Kurven erfolgte bei allen Messungen unter einer konstanten Meßbelastung von ungefähr 15 mA/cm^2 , die Anodenspannung wurde unmittelbar vor jeder Messung zu diesem Zwecke auf 12 V umgeschaltet. Die Aktivitätsbeeinflussung, die durch diese geringe, nur kurzdauernde Meßbelastung verursacht wird, mußte in Kauf genommen werden. Der typische Verlauf eines Entaktivierungsvorganges nach Einschalten des Emissionsstromes kann aus Bild 4 ersehen werden, in der die während des Vorganges in verschiedenen Zeiten nach dem Einsetzen der Emission ermittelten Richardsonschen Geraden wiedergegeben sind. Der raumladungsbegrenzte Emissionsbelastungsstrom betrug bei diesem Versuch etwa 70 mA/cm^2 bei einer Anodenspannung von 40 V.

Die Gerade 1 wurde unmittelbar vor Einschalten des Emissionsstromes gemessen, die Gerade 2 5 s nach dem Einschalten. Schon in dieser kurzen Zeit hat sich, wie die Unterschiede in der Lage der Geraden zeigen, eine merkbare Aktivitätsänderung eingestellt. Aus den 4 wiedergegebenen Geraden wurden die Emissionskonstanten ermittelt, die in der Tabelle aufgeführt sind, und zwar die Austrittsarbeit φ und die Größe $\lg A$ (A in $\text{A}/(\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^2)$); außerdem enthält die Tabelle die Belastungszeiten t , nach denen die Geraden aufgenommen wurden. Dieser Versuch zeigt, daß

Gerade Nr.	Belastungszeit t	φ Volt	$\lg A$
1	0	1,07	-1,0
2	5 Sek.	1,07	-1,6
3	40 Min.	1,15	-1,3 + 1,4
4	80 „	1,19	-1,3
5	360 „	1,38	-0,7

die beobachtete Aktivitätsänderung also unmittelbar nach dem Einschalten auf einer starken Verkleinerung der Größe A bei konstanter Austrittsarbeit beruht. Nach kurzer Zeit jedoch steigen sowohl A wie auch φ an. Das gleiche Verhalten der Kathoden konnte in zahlreichen Versuchen immer wieder beobachtet

werden. Es geht dies auch aus den Kurven des Bildes 5 hervor, in denen das Ergebnis des soeben besprochenen Versuches (Kurve 2) mit dem von zwei anderen unter geänderten Versuchsbedingungen (s. unten) zusammengefaßt ist. In der Abbildung gehören die mit gleichen Nummern versehenen Kurven für die Größen $\lg A$ und φ

zusammen. Als Abszisse ist die Belastungszeit in Minuten in logarithmischem Maßstabe aufgetragen.

Einfluß des Sauerstoffes. Der beobachtete gleichzeitige Anstieg der Austrittsarbeit φ mit der Größe A , der bei diesen Versuchen im Verlauf einer gewissen Zeit der Emissionsbelastung eintritt, kann durch eine mit der Zeit zunehmende Bedeckung der emittierenden Oberfläche durch Sauerstoffatome erklärt werden, die aus der schwachen Elektrolyse in der BaO-Schicht herrühren und bekanntlich wegen der großen Elektronenaffinität des Sauerstoffes eine Dipolschicht mit einer die Austrittsarbeit vergrößernden Polarisierung (negative Seite nach außen) bilden können¹⁾. Die Größe des durch diese Dipolschicht bewirkten Potentialsprunges hängt von der Flächendichte der Dipole auf der Oberfläche ab. Er beträgt, wenn p das Moment eines Dipols, N_0 die Zahl der bei maximaler Besetzung auf der Flächeneinheit vorhandenen Dipole, ϵ_0 die universelle „Verschiebungskonstante“²⁾ bezeichnet,

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot p \cdot N_0.$$

Um diesen Betrag wird die Austrittsarbeit der aktiven Fläche durch die Dipolbesetzung vergrößert. Bei unvollständiger Besetzung sind statt N_0 nur $N < N_0$ Dipole auf der Oberfläche, und die Vergrößerung der Austrittsarbeit beträgt dann nur

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot p \cdot \Theta \cdot N_0,$$

worin $\Theta = N/N_0$ als Besetzungsdichte bezeichnet wird. Sie ist also proportional der Besetzungsdichte Θ der Sauerstoffdipole.

Man muß sich nun vorstellen, daß die an der Oberfläche adsorbierten Dipole nicht vollkommen unbeweglich ausgerichtet sind, sondern daß sie je nach der Temperatur an der Oberfläche größere oder kleinere, statistisch ungeordnete Bewegungen um die Mittellage ausführen. Diese Dipolschwankungen verringern das Moment der Dipolschicht und geben ihm eine Temperaturabhängigkeit in dem Sinne, daß es um so kleiner wird, je höher die Temperatur ist. Das bedeutet im Falle von Sauerstoffdipolen, daß die Austrittsarbeit der mit Dipolen besetzten aktiven Fläche temperaturabhängig ist und um so kleiner wird, je höher die Temperatur ist. Man kann in erster Näherung diese Temperaturabhängigkeit linear annehmen³⁾.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die Austrittsarbeit b_Θ Gl. (1) bei einer Besetzungsdichte Θ mit der Austrittsarbeit b , der von Dipolen freien Fläche durch die Beziehung verbunden ist:

$$b_\Theta = b_0 + \Theta(C_0 - \beta T), \tag{1}$$

¹⁾ Näheres siehe W. Schottky: Hdb. der Experimental-Physik. Bd. XIII (2) S. 160ff.

²⁾ Vgl. Elektrotechn. Z. Bd. 53 (1932) S. 138.

³⁾ W. Schottky: l. c.



Bild 5.
Entaktivierungsvorgänge bei Emissionsbelastung.

worin C_0 und β Konstanten sind. Setzt man diesen Ausdruck in die Richardsonsche Gleichung ein, so erhält man

$$i = f \cdot \mathfrak{A} e^{\beta \Theta} \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{b_0 + \Theta C_0}{T}}. \quad (2)$$

Hierin ist $b = b_0 + \Theta C_0$ die Austrittsarbeit bei der Besetzung Θ bezogen auf 0° K , \mathfrak{A} die universelle Konstante $60,2 \text{ A}/(\text{cm}^2 \cdot \text{grad}^2)$ und f das Verhältnis der mit Ba bedeckten aktiven Fläche zur makroskopischen Kathodenfläche. Unter der Voraussetzung, daß während der Aufnahme einer Richardsonschen Geraden f und Θ konstant bleiben, was bei der beschriebenen Methode zutreffen dürfte, kann man also aus der Neigung und der Lage der Geraden nur die Werte

$$b = b_0 + \Theta C_0 \quad (3)$$

und

$$A = f \cdot \mathfrak{A} \cdot e^{\beta \Theta}$$

errechnen. Beide sind im gleichen Sinne von der Bedeckung abhängig. Die beobachteten, gleichsinnigen Änderungen beider Konstanten können also durch Änderung von Θ erklärt werden.

Diese Erklärung läßt sich noch näher prüfen, indem man den Zusammenhang zwischen den Größen b (bzw. φ) und $\lg A$ in verschiedenen Stadien des Entaktivierungsvorganges, d. h. bei verschiedenen Besetzungsdichten Θ , graphisch aufträgt. Nach Gl. (3) muß dieser Zusammenhang linear sein.

Ein solcher ist auch von Richardson¹⁾ und von Kingdon²⁾ an reinen Wolframkathoden in elektronegativen Gasen gefunden worden. Trägt man die zusammengehörigen Werte für $\lg A$ und φ aus der obigen Tabelle im Bereich ihres gemeinsamen Anstieges graphisch gegeneinander auf, so zeigt sich ebenfalls ein solcher linearer Zusammenhang mit befriedigender Genauigkeit

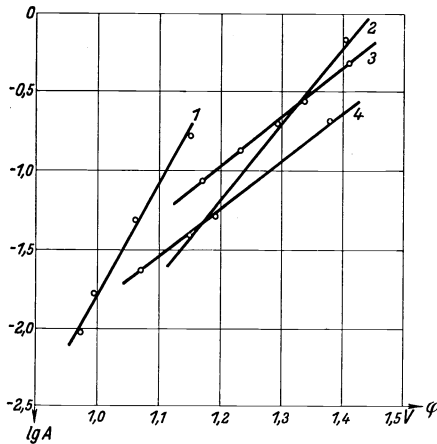


Bild 6. Zusammenhang zwischen $\lg A$ und φ während ihres gemeinsamen Anstieges bei der Entaktivierung.

(Bild 6, Kurve 4). Jeder Punkt der Geraden kennzeichnet also eine bestimmte Flächendichte der Sauerstoffdipole, die von Punkt zu Punkt infolge der fortschreitenden Elektrolyse anwächst, während einer Aufnahme der Kennlinien jedoch als konstant angesehen werden kann. Dieser Befund wurde durch mehrere Versuche, deren Resultate im Bild 6 mit aufgeführt sind, in den Grenzen der Versuchsgenauigkeit bestätigt. Die verschiedene Lage der aufgezeichneten Geraden im Diagramm läßt sich aus den vorliegenden Versuchen noch nicht erklären.

Diese Versuche sprechen also für die Richtigkeit der auch von anderen Autoren gemachten Annahme³⁾, daß die Aktivitätsänderungen infolge von Emissionsbelastung auf der Dipolwirkung von adsorbierten, elektrolytisch freigemachten Sauerstoffatomen beruhen. Wir konnten eine solche Aktivitätsänderung in dem von uns untersuchten Temperaturbereich auch bei den kleinsten, in Verstärkerröhren noch üblichen Belastungen ($20 \text{ mA}/\text{cm}^2$) feststellen. Dabei waren, wie schon oben hervorgehoben, die Ströme immer raumladungsbegrenzt, woraus also zu ersehen ist, daß auch in diesem Falle der elektrolytische Anteil der Leitung durch das Oxyd groß genug

¹⁾ O. W. Richardson: Proc. Roy. Soc., Lond. 1915 S. 191.

²⁾ K. H. Kingdon: Physic. Rev. Bd. 24 (1924) S. 510.

³⁾ Zum Beispiel I. A. Becker: l. c.

ist, um die Aktivität durch eine merkbare Vergrößerung der Austrittsarbeit zu beeinflussen.

Eine Änderung der Konzentrationsverhältnisse des metallischen Bariums in der Schicht und an ihrer Oberfläche, die sich in einer Änderung der Größe A bei Konstanz von φ äußern würde, tritt, wie die Versuche zeigen, bei diesen Emissionsbelastungen noch nicht merkbar in Erscheinung.

Soweit sich bisher feststellen ließ, geht die Vergrößerung der Austrittsarbeit nur bis zu einem Maximalwert, der nach unseren Beobachtungen bei etwa 1,7 V liegen dürfte — und offenbar bei vollständiger Besetzung der aktiven Fläche mit Sauerstoffatomen erreicht wird. Ein Gleichgewichtszustand zwischen Abdampfung, Bildung von molekularem Sauerstoff und Rückdiffusion einerseits und elektrolytischer Nachlieferung von atomarem Sauerstoff¹⁾ andererseits scheint bei normalen Belastungen (20 . . . 100 mA/cm²) und Temperaturen (1000 . . . 1100° K) erst einzutreten, wenn die Sauerstoffbedeckung vollständig geworden ist, was auch bei schwächster Belastung mit der Zeit eintritt. Aus der Tatsache, daß so betriebene Verstärkerröhren Lebensdauern von 10000 h und mehr erreichen können, läßt sich schließen, daß eine merkliche „Vergiftung“ der aktiven Schicht durch Oxydation des Ba entweder gar nicht oder nur in so geringem Maße eintritt, daß sie durch die dauernde, wenn auch geringe elektrolytische Nachlieferung von Barium praktisch kompensiert wird. Man kann also für die Austrittsarbeit einer im Betrieb befindlichen Ba-Oxydkathode den ungefähren Wert von 1,7 V als richtig annehmen²⁾. — Ganz ungeklärt ist im Augenblick noch die Ursache für das schnelle Absinken des Wertes der Konstante A bei konstant bleibender Austrittsarbeit unmittelbar nach Einsetzen des Emissionsstromes, das sich in allen Entaktivierungsversuchen gezeigt hat.

Reaktivierung der Kathode durch Glühen ohne Emission. Nach dem Vorhergehenden ist es naheliegend, die Reaktivierung der Kathode durch Glühen auf das Abdampfen der Sauerstoffdipole zurückzuführen, die bei fehlender Nachlieferung aus dem Inneren des Oxyds eine mit der Zeit fortschreitende Reinigung der aktiven Fläche bewirkt. Wenn das zutrifft, muß sich bei diesem Vorgang sowohl die Austrittsarbeit wie auch die Größe A gleichzeitig verkleinern. Die Aufnahme der Richardsonschen Geraden während eines Reaktivierungsvorganges bestätigt diese Erwartung, wie aus Bild 7, in der zwei solche Vorgänge bei verschiedenen Temperaturen durch den zeitlichen Gang der Konstanten dargestellt sind, ersichtlich ist. Die Austrittsarbeit fällt zuerst schnell, dann immer langsamer von dem im vorhergehenden Emissionsvorgang erreichten Wert auf ihren Minimalwert. Gleichzeitig sinkt auch A , jedoch scheint diese Größe nach Durchlaufen eines Minimums wieder schwach anzusteigen, was vielleicht auf einen Ausgleich des bei der Elektrolyse entstehenden Bariumkonzentrationsgradienten zurückzuführen ist. Die Kurven 1 sind bei niedrigerer Temperatur (1130° K) gemessen als die Kurven 2 (1210° K). Wie man sieht, verläuft der Vorgang um so schneller, je höher die Temperatur ist, je

¹⁾ W. Espe: l. c. S. 58.

²⁾ W. Espe stellte ebenfalls eine Erhöhung der Austrittsarbeit von 1,1 V auf 1,7 V fest, wenn er den Absorptionsbeutel vor seiner Meßröhre abschloß und dadurch Sauerstoffspuren in die Röhre eindringen ließ. Auch hier dürfte die Dipolwirkung des Sauerstoffes eingetreten sein. „Vergiftung“ der Kathode durch Oxydation des Ba läßt sich, wie aus den Versuchen von R. Koller [Physic. Rev. Bd. 25 (1925) S. 671] geschlossen werden kann, bei den hier benutzten Temperaturen offenbar erst durch Anwendung bedeutend höherer Sauerstoffdrucke (einige Millimeter) erzielen. Die Austrittsarbeit steigt dann bis auf den Betrag des Oxyds (3,1 V).

größer also auch die Abdampfungsgeschwindigkeit und die Diffusionsgeschwindigkeit des Sauerstoffes ist.

Die Untersuchung dieser Reaktivierungsvorgänge bereitete noch Schwierigkeiten, weil erstens, wie schon aus der Kurve 2 ersichtlich, die Geschwindigkeit des Vorgangs sehr groß sein kann, und zweitens durch die Messung selbst, bei der ja ein Emissionsstrom (s. oben), wenn auch nur kurze Zeit, fließen muß, die Struktur der Oberfläche beeinflusst werden kann. Eine nähere Erforschung erfordert noch die Vervollkommnung der Meßmethodik, die mitgeteilten Ergebnisse, die qualitativ oft bestätigt werden konnten, beanspruchen daher keine große Genauigkeit, sondern sollen nur als Anhaltspunkte dienen.

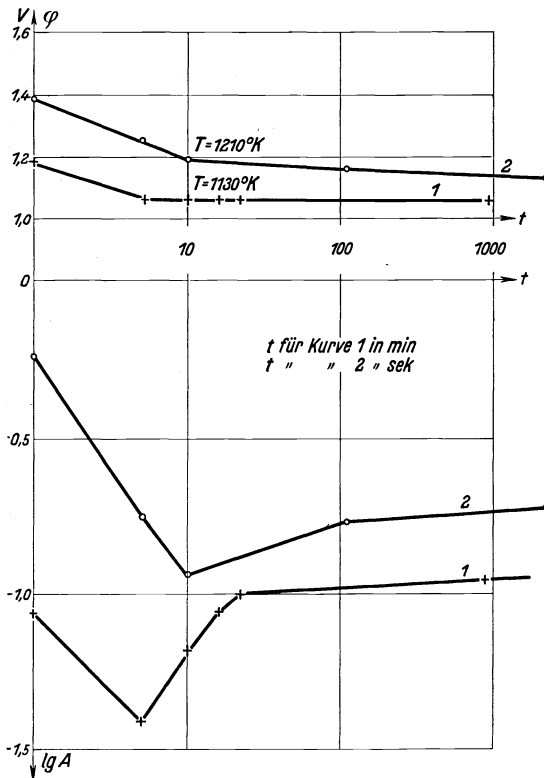


Bild 7.
Reaktivierungsvorgänge beim Glühen ohne Emission.

Diese Versuche, die noch nicht abgeschlossen sind, zeigten, daß die Geschwindigkeit, mit der die Entaktivierung nach Einsetzen der Emission fortschreitet, um so größer ist, je größer die Emissionsströme sind, was mit der obigen Annahme in Einklang steht. Auch bei diesen Versuchen waren alle Belastungsströme raumladungsgesättigt.

Das Ergebnis eines solchen Versuches zur Untersuchung des Temperatureinflusses zeigt Bild 5, in das die charakteristischen Kurven für 2 Entaktivierungsvorgänge (Kurve 2 und 3) bei ungefähr den gleichen Emissionsstromdichten, aber verschiedenen Temperaturen, aufgetragen sind. (Die Kurve 1 paßt sich zwar in das Versuchsergebnis gut ein, soll aber nicht verwertet werden, weil bei der Temperatur dieses Versuches der Anodenstrom etwas abgesunken ist.) Es ergibt sich aus diesem Versuche, der mit gleichen Ergebnissen mehrfach wiederholt wurde, daß die Entaktivierung um so schneller fortschreitet, je höher die Temperatur ist. Der Anstieg

Elektrolyse bei verschiedenen Temperaturen. Es wurde nun noch versucht, durch Messung der Geschwindigkeit des Entaktivierungsvorganges bei konstanten Emissionsbelastungen und verschiedenen Temperaturen einen Einblick in den Mechanismus der Elektrizitätsleitung durch die Oxydschicht hindurch zu gewinnen, insbesondere in die Temperaturabhängigkeit der Leitungsverteilung auf Ionen- und Elektronenleitung. Hierbei wurde die sehr wahrscheinliche Annahme gemacht, daß die Schnelligkeit, mit der die Dipolbesetzung fortschreitet, ein ungefähres Maß für die Elektrolyse in der Schicht darstellt.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme wurde durch mehrere Orientierungsversuche gestützt, bei denen die Temperatur konstant gehalten und die Belastungsemissionsströme durch Änderung der Anodenspannung im Verhältnis 1:2:3 verändert wurden.

der Austrittsarbeit von ungefähr 1 V auf 1,4 V erfolgt bei einer Temperatur von 1210° K (Kurve 3) in etwa $\frac{1}{10}$ der Zeit wie bei 1130° K (Kurve 2), obwohl die Emissionsstromstärke bei Kurve 2 noch etwas größer war als bei Kurve 3. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, als man zunächst annehmen sollte, daß der Spannungsabfall an der Schicht bei der höheren Temperatur wegen des negativen Temperaturkoeffizienten des Schichtwiderstandes¹⁾ sogar bei gleichem Stromdurchgang kleiner und damit auch der elektrolytische Stromanteil geringer sein müßte als bei der tieferen Temperatur. Das Versuchsergebnis steht aber damit in Widerspruch und weist vielleicht darauf hin, daß das Verhältnis der beiden Leitungsanteile stark temperaturabhängig ist, und zwar in dem untersuchten Temperaturbereich zwischen 1000° und 1200° K in dem Sinne, daß der Anteil der Elektronenleitung mit abnehmender Temperatur anwächst. Ein solches Verhalten zeigen auch andere gemischte Leiter, z. B. Kupferjodür²⁾ im Temperaturbereich zwischen 500 und 700° K. Weitere eingehendere Untersuchungen über diesen Punkt sind im Gange.

Zusammenfassung.

1. Zur Untersuchung von zeitlichen Aktivitätsänderungen bei Bariumoxydkathoden in normalem Betrieb wird eine oszillographische Methode angegeben, die Aufnahmen von Richardsonschen Geraden innerhalb sehr kurzer Zeiten und bei schwacher Meßbelastung gestattet und damit die messende Verfolgung der charakteristischen Emissionskonstanten während der Änderungsvorgänge ermöglicht.

2. Mit dieser Methode wurden die Erscheinungen der Entaktivierung einer fertigen Kathode durch Emissionsbelastung und der Reaktivierung durch Glühen ohne Emission untersucht. Die Ergebnisse der bisherigen Versuche machen folgende Schlüsse wahrscheinlich:

a) Die beobachteten Aktivitätsänderungen sind auf die wechselnde Bedeckung der emittierenden Fläche mit Sauerstoffatomdipolen zurückzuführen.

b) Die Elektronenaustrittsarbeit der untersuchten Bariumoxydkathoden liegt bei einer von Sauerstoff freien emittierenden Fläche zwischen 0,95 und 1,10 V, die einer vollständig besetzten Fläche bei etwa 1,7 V.

c) Der elektrolytische Leitungsanteil in der Oxydschicht ist auch bei geringen, raumladungsgesättigten Emissionsströmen stark genug, um eine vollständige Besetzung der aktiven Fläche mit Sauerstoff herbeizuführen. Ein Gleichgewichtszustand zwischen abdampfendem bzw. rückdiffundierendem und nachgeliefertem Sauerstoff in normalen Temperatur- und Belastungsgrenzen tritt erst nach vollständiger Besetzung ein.

d) Der relative Anteil der Ionenleitung an der Elektrizitätsleitung des glühenden Bariumoxyds scheint in dem Temperaturbereich zwischen 1000 und 1200° K mit der Temperatur anzusteigen.

¹⁾ J. Kroczeck u. E. Lübcke: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. IX, 2 (1930) S. 261. — W. Meyer u. A. Schmidt: Z. techn. Physik Bd. 13 (1932) S. 137.

²⁾ C. Tubandt, E. Rindtorff u. W. Jost: Z. anorg. allg. Chem. 1927 S. 165, 195.

Über die Reduzierbarkeit des Berylliumoxydes.

Von Wilhelm Kroll.

Mitteilung aus dem Laboratorium „Bel'Air“ zu Luxemburg.

Eingegangen am 2. April 1932.

Bekanntlich gehört das Beryllium zu den am schwersten reduzierbaren Elementen. Es hat nicht an Versuchen gefehlt, um dieses Metall aus seinem Oxyd in metallischer Form abzuscheiden. Die in der Literatur zerstreuten Angaben über diese Frage sind vielfach so widersprechend, daß es sich lohnen mußte, eine Klärung durch neue Versuche herbeizuführen.

Die vorliegende Arbeit bezweckte, die Reduzierbarkeit des BeO durch die Elemente C, Si, Al, Li, Mg, Ca und Ce zu untersuchen. In den meisten Fällen wurde als Sammler für die abgeschiedenen Be-Flitterchen ein Zuschlag von anderen Metallen, insbesondere Fe, Ni oder Cu, verwendet. Hierdurch wurde die analytische Ermittlung des Be-Gehaltes wesentlich erleichtert, da die Bestimmung von feinverteiltem, metallischem Be neben BeO und anderen Metalloxyden eine noch ungelöste Aufgabe darstellt, wohingegen die Analysenmethoden zur Bestimmung des Be-Gehaltes in Legierungen bereits festliegen. Durch solche Zusätze wurde bewußt die Reduzierbarkeit des BeO beeinflußt und zwar in positivem Sinne, indem die an sich schlechten Ergebnisse durch die Anwesenheit fremder Metalle günstiger gestaltet werden.

Eine besondere Stelle nimmt die Reduktion des BeO durch C ein. Ohne Zusatz fremder Metalle entsteht beim Erhitzen von BeO mit C bei etwa 2000° das Karbid Be₂C. Dieses Karbid ist in den Metallen der Eisengruppe in hohem Maße löslich, wenn sich diese in flüssigem Zustande befinden. Einige Beispiele mögen diesen Fall beleuchten: Ein Gemenge von 30 g BeO mit 50 g Eisenfeile, Graphitpulver und 30 g CaC₂ lieferte bei 2000° eine Legierung mit 11,2% Be und 13,4% C, Rest Eisen. Diese Legierung zerfiel nach einiger Zeit an der Luft und zwar in den Ausscheidungen, wogegen das metallische Eisen sich verhältnismäßig gut hielt, womit bewiesen ist, daß solche Legierung hauptsächlich aus einem Gemenge von Be₂C neben mehr oder weniger mit C verunreinigtem Eisen besteht. Offenbar löst sich das Be₂C, ähnlich wie Chromkarbid, im flüssigen Eisen, scheidet sich jedoch bei der Erstarrung als solches aus. Das Beryllium gleicht in dieser Hinsicht viel eher dem Chrom als dem Silizium. Letzteres bewirkt bekanntlich die Verarmung des Fe-Bades an Kohlenstoff, wogegen offenbar das Be die Aufnahmefähigkeit des C im Fe beträchtlich vergrößert.

Der obengenannte Zusatz von Calciumcarbid bei der Reduktion erweist sich als vorteilhaft, weil bei den hohen, in Frage kommenden Temperaturen des BeO-Schmelzpunktes das Eisen verdampfen würde, wogegen durch die Anwesenheit des

Calciumcarbides eine bei 2000° flüssige Schlacke auf dem Metallbad gehalten werden kann.

Ähnlich verhält es sich auch mit der Reduktion des BeO in Anwesenheit von Nickel. In diesem Fall sind die Legierungen jedoch C- und Be-ärmer. Einige charakteristische Legierungen sind beispielsweise solche mit 2,3 bis 3% C neben 5 bis 6% Be.

Alle Versuche den C des Eisens durch Umsetzung mit geschmolzenen BeO-haltigen Schlacken zu beseitigen schlugen fehl. Derartige Schlacken kann man leicht durch Mischen von BeO mit CaO oder BaO herstellen. Bei gleichzeitiger C-Abnahme sinkt auch der Be-Gehalt, so daß bei dieser Arbeitsweise nichts gewonnen wird. Die Aufspaltung des Be₂C durch BeO ist jedenfalls in dieser Weise nicht durchführbar, und hierin unterscheidet sich das B₂C wesentlich von Chromcarbid, das bekanntlich leicht durch Cr₂O₃ zersetzt werden kann. Ebenso ergebnislos waren die Versuche zum Herausfrischen des C aus Nickelberyllium.

Bei der Reduktion von BeO durch C in Anwesenheit von Cu liegen die Verhältnisse ebenfalls sehr ungünstig. Der Schmelzpunkt des BeO, der von Wartenberg¹⁾ bei 2570° ermittelt wurde, liegt bereits wesentlich oberhalb des Kupfersiedepunktes. Mit Verflüssigungsmitteln, wie beispielsweise Calciumcarbid, führt man gleichzeitig Ca ins Cu ein. Ein Gemenge von Cu mit BeO und C gibt am Kupfersiedepunkt eine zusammengefrittete Masse, in der man sehr deutlich die Kupfer-Beryllium-Legierung erkennen kann. Beim Umschmelzen mit Flußmitteln brennt der größte Teil des Be aus. Bekanntlich gibt es auch kein Lösungsmittel für BeO, so daß die thermische Erzeugung von Cu-Be auf diesem Wege in Frage gestellt ist. Be₂C wird durch Cu unter Abscheidung von Graphit zersetzt, wobei Legierungen des Be mit Cu entstehen, wie bereits P. Lebeau feststellen konnte.

Bei der Reduktion von BeO durch andere Metalle außer Kohlenstoff müssen gewisse Bedingungen erfüllt werden, deren Verwirklichung leider größtenteils unmöglich ist. Abgesehen vom Preis, der in der Auswahl des Reduktionsmittels eine gewisse Beschränkung auferlegt, spielen folgende Umstände eine Rolle:

- a) die Bildungswärme der Oxyde,
- b) die Schmelzbarkeit der entstehenden Schlacken und ihre Bildungswärme,
- c) der Siedepunkt des reduzierenden Metalles,
- d) die Legierungsfähigkeit des Be mit anderen Metallen,
- e) die Gasatmosphäre.

Zu a. Die für die Reduktion in Frage kommenden Metalloxyde besitzen folgende Bildungswärme beim Verbrennen im Sauerstoff:

Ca	152 kcal.	$\frac{1}{3}$ Al	127 kcal.
Mg	144 „	0,5 Si	95 „
2 Li	143 „	Be	140,15 „ ²⁾

Der Wärmeüberschuß bei der Umsetzung mit BeO ist am größten beim Ca, rund +12 kcal, am geringsten beim Si, nämlich rund -45 kcal. Wie man sieht, ist auch im günstigsten Fall der Wärmeüberschuß gering. Allerdings kann die Reaktion durch die Bildungswärme der Schlacken und diejenige der Metall-Be-Verbindungen im günstigen Sinne beeinflußt werden.

¹⁾ H. v. Wartenberg: Z. anorg. allg. Chem. Bd. 190 (1930) S. 179.

²⁾ C. Matignon u. G. Marchal: C. R. Acad. Sci., Paris Bd. 183 (1926) S. 927.

Zu b. Die entstehenden Schlacken haben meist einen sehr hohen Schmelzpunkt. Nach den letzten Angaben der Literatur ist die Schmelzbarkeit der anwesenden Oxyde wie folgt:

MgO	2800° C ¹⁾	SiO ₂	2230° C
CaO	2570° C	Al ₂ O ₃	2010° C
BeO	2570° C	Li ₂ O	etwa 1000° C

Durch Mischen zweier Reduktionsmetalle können wesentlich niedrigere Schmelzpunkte erreicht werden, wie beispielsweise bei folgenden Gemischen:

CaO — Al ₂ O ₃ bei 47% CaO,	1380° C	SiO — MgO bei 47% MgO,	1550° C
CaO — SiO ₂ bei 64% SiO ₂ ,	1420° C	SiO ₂ — Al ₂ O ₃ bei 17% SiO ₂ ,	1600° C
CaO — MgO bei 33% MgO,	2300° C		

Die Schmelzpunktserniedrigung ist also teilweise sehr bedeutend. Die Bildungswärme der Schlackengemische kann die Reaktion im Sinne der Be-Abscheidung beeinflussen.

Zu c. Der Schmelzpunkt der Schlacke soll möglichst unter dem Siedepunkt des Reduktionsmetalles liegen. Diese Forderung ist nur beim Al, Li oder Ce zu erreichen, wenn man von Schlackengemischen absieht. Dies geht aus nachfolgender Gegenüberstellung hervor:

Siedepunkte der Reduktionsmetalle:			
Ca	1440° C	Si	etwa 2000° C
Al	2200° C	Li	1336° C
Mg	1197° C	Ce	etwa 2200° C

Wie ersichtlich, schneidet besonders das Mg sehr ungünstig ab, es siedet etwa 1600° C unter dem Schmelzpunkt seines Oxydes. Beim Ca liegen die Verhältnisse insofern günstiger, als der Siedepunkt rund 240° über demjenigen des Mg liegt, und die entstehenden CaO-Schlacken verhältnismäßig leicht schmelzen.

Zu d. Die Zusatzmetalle, insbesondere Fe, Ni oder Cu vermögen die Reduktion günstig zu beeinflussen durch Bildung von intermetallischen Be-Verbindungen. Die Größenordnung der hierbei frei werdenden Wärme ist unbekannt.

Zu f. Ganz wesentlich ist die Rolle der Gasatmosphäre bei derartigen Reduktionen. Erhitzt man beispielsweise Mg-Späne in Anwesenheit von BeO oberhalb 600° an der Luft, so findet eine sehr energische Oxydation und Nitrierung durch die Atmosphäre statt. Dies gilt ebenso von den Metallen Ca und Li, während beim Al die Bedingungen durch die Entstehung einer luftschützenden, flüssigen Schlacke viel günstiger sind. Will man die große Reduktionswärme der Erdalkalimetalle trotzdem ausnützen, so läßt sich die Nitrierung und Oxydation durch die Luft in der Weise weitgehend verhindern, daß man die Mischung in einen dünnwandigen Eisentiegel fest einstampft oder unter der Presse einpreßt. Der Tiegel wird in einen größeren, zylindrischen Tontiegel mit kristallisierter, geschmolzener und gepulverter Magnesia dicht eingestampft. Die Erhitzung erfolgt im Funkenstrecken-Hochfrequenzofen, der bekanntlich feine Metallteilchen in äußerst kurzer Zeit auf die höchsten Temperaturen zu erhitzen gestattet. Die Temperatur greift innerhalb weniger Sekunden durch die zu reduzierende Masse durch, womit die Reaktion schlagartig ausgelöst wird, und Wärmeverluste durch Strahlung infolge der kurzen Erhitzungszeit praktisch vermieden sind. Durch Hinzutreten geringer Mengen der

¹⁾ O. Ruff: Z. anorg. allg. Chem. Bd. 117 (1921) S. 147.

Außenluft wird bei Verwendung von Ca die Bildung einer leichtflüssigen Schlacke begünstigt, indem ein Teil dieses Metalls verbrennt und mit dem überschüssigen BeO einheitlich zusammenfließt. Beim Arbeiten unter Argon muß der Ofen mit einem Sicherheitsventil versehen werden, das die im Augenblick der Reaktion sich ausdehnenden Gase entweichen läßt. Einige Beispiele mögen die charakteristische Wirkung der verwendeten Reduktionsmetalle erläutern.

1. Reduktionsmetall Mg:

Einsatz: 20 g BeO	Hochfrequenzofen
20 g Mg-Feile	Al ₂ O ₃ -Futter
20 g Fe-Feile	Luftzutritt
33 g Fe-Tiegel	Material unschmelzbar

Es zeigt sich, daß beim Aufheizen das Mg dampfförmig brennend entweicht, so daß nur ein Gemenge von Fe-Feile und unschmelzbarem BeO zurückbleibt.

2. Reduktionsmetall Ca:

Einsatz: 40 g BeO	Ausbringen 77 g Metall mit 3,25% Be
65 g Ca	H.F.Ofen — Luftzutritt — MgO-Futter
40 g Fe-Feile	Masse geschmolzen
33 g Fe-Tiegel	Nutzeffekt auf Ca 17,3%

Wie man sieht, läßt sich das BeO teilweise durch Ca reduzieren, doch handelt es sich offenbar um eine Gleichgewichtsreaktion. Ein großer Teil des Ca verbrennt an der Luft unter Bildung einer leicht schmelzbaren Beryllatschlacke. Der höhere Siedepunkt des Ca, 1440°, begünstigt die Reduktion.

3. Reduktionsmetall Al:

Einsatz: 40 g BeO	Ausbringen 65 g Metall mit 0,063% Be und
30 g Al-Feile	4,7% Al
40 g Fe-Feile	Bedingungen wie vorstehend
63 g Fe-Tiegel	Nutzeffekt 0,3%
	Masse geschmolzen

Aus diesem Versuch kann man den schlagenden Beweis dafür ziehen, daß die Reduzierbarkeit des BeO durch Al außerordentlich gering ist. Es handelt sich offenbar um ein Gleichgewicht, das sehr stark zur Al-Seite neigt, so daß es praktisch ganz ausgeschlossen erscheint, mit Hilfe von Al Berylliumoxyd zu reduzieren.

4. Reduktionsmetall Si:

Einsatz: 40 g BeO	Ausbringen 27 g Metall mit 13,5% Si, kein Be
23 g Si	Bedingungen wie vorstehend
40 g Fe-Feile	Masse größtenteils ungeschmolzen.
39 g Fe-Tiegel	

Aus diesem Ergebnis kann man den Schluß ziehen, daß BeO nicht durch Si reduzierbar ist, was bei der geringen Bildungswärme von SiO₂ ja nicht weiter verwundern kann.

Mit Li erzielt man noch ungünstigere Ergebnisse als mit Ca, weil das Metall an der Luft viel heftiger reagiert und leichter siedet. Außerdem sind die Schlacken chemisch ungemein aktiv, was Schwierigkeiten mit dem in Frage kommenden Packungsmaterial verursacht. Cer reduziert schwach, ähnlich wie Al, und gibt dünnflüssige Schlacken. Auch mit Schwefelzusatz war die Al- und Ca-Reduktion nicht besser.

Verwendet man Mischungen von Al, Ca, Si u. dgl. zur Erzielung eines leicht schmelzbaren Schlackengemisches, so wird die Wirkung einzig und allein durch das zulegierte Calcium gekennzeichnet. Die Bestandteile Al und Si werden durch

Ca vor dem Reagieren mit BeO geschützt, so daß ein Vorteil bei Verwendung von solchen Gemischen nicht in Frage kommt.

Diese Ergebnisse sind herausgegriffen aus einer großen Zahl von Versuchen. Sie beweisen, daß die Reduzierbarkeit des BeO durch andere Metalle außerordentlich schlecht ist, und daß die bisher in der Literatur verbreiteten Angaben auf Irrtümern beruhen. Weder kann man nach dem Vorschlag von Moormann¹⁾ durch Reduktion mit Ca-Al reines Be abscheiden, noch ähnliches nach dem Patent von Merck²⁾ durch Al allein bei Zusatz von BaO₂ zur Vergrößerung der entwickelten Wärme erreichen. Es finden sich somit die früheren Angaben von Althen³⁾ durchaus bestätigt.

Daß auch durch chemische Umsetzung von Legierungen, beispielsweise Al-Fe, Ni-Ca, Cu-Mg, gegen leichtflüssige Beryllatschlacken keine nennenswerten Mengen an Be in die Legierung übergeführt werden können, wurde durch zahlreiche Versuche bewiesen, deren Einzelheiten hier nicht weiter erwähnt zu werden brauchen. In Kryolithbädern mit BeO-Zusatz nimmt Aluminium nur Spuren von Be durch chemische Umsetzung auf.

Zusammenfassung.

Bei der Reduktion von BeO mit C entsteht bei Anwesenheit von Ni oder Fe ein hochgekohltes Be-haltiges Metall. Die Beseitigung des C durch Behandlung mit leichtflüssigen Beryllatschlacken führt zu keinem Ergebnis. Bei Reduktion von BeO mit C in Anwesenheit von Cu gelangt man zu zusammengesinterten Massen, deren Schmelzpunkt über dem Siedepunkt des Cu liegt. Diese Sinterprodukte enthalten Cu-Be-Legierung. Das Umschmelzen unter Flußmitteln ist mit großen Be-Verlusten verknüpft.

Die Reduktion von BeO in Anwesenheit von Fe mit den Metallen Ca, Mg, Al, Si, Li, Ce im Hochfrequenzofen liefert nur bei Verwendung von Ca oder Ca-haltigen Gemischen Legierungen des Be mit Eisen mit nennenswertem Gehalt. Es entsteht ein Gleichgewicht zwischen dem Be des Eisens und der CaO-haltigen Schlacke, das sehr zugunsten der BeO-Bildung neigt, so daß die Be-Gehalte in der Legierung sehr gering sind. Keines von den beschriebenen Reduktionsverfahren eignet sich für die Praxis.

¹⁾ A. Moormann: Inaug.-Diss. München 1913.

²⁾ E. Merck: D.R.P. 410563 (1923).

³⁾ Alb. Althen: Inaug.-Diss. T. H. München 1911.

Technische Eigenschaften der Be-haltigen Cu-Ni-Legierungen.

Von Georg Masing und Waldemar Pocher¹⁾.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 5. Juli 1932.

1.

Bei der technischen Entwicklung der Beryllium-Kupfer-Legierungen²⁾, insbesondere der Berylliumbronze mit 2,5 % Be, haben sich bald zwei Umstände gezeigt, die ihrer technischen Verwendung Grenzen setzen. In erster Linie ist es der heute noch hohe Preis des Berylliums, in zweiter Linie die verhältnismäßig niedrige Temperatur, bei der diese Legierung ihre durch Vergütung gewonnene Härtung wieder verliert. In der Tat, oberhalb 250° ist nicht mehr damit zu rechnen, daß sie ihre Härte dauernd behält, womit manche Anwendungsgebiete wegfallen. Die berylliumhaltigen Nickel-Kupfer-Legierungen zeigen nun die Eigentümlichkeit, daß sie ihre Vergütungshärte bis zu bedeutend höheren Temperaturen behalten, und außerdem, daß sie bereits bei bedeutend geringeren Gehalten an Beryllium, etwa bei 1 %, zum Teil in einem erheblichen Maße aushärtbar sind. Die bei diesen Legierungen erreichten Höchstwerte der Härte und Festigkeit sind zwar nicht ganz so hoch wie bei den reinen Be-Bronzen. Die Erfahrung hat aber gelehrt, daß in vielen Fällen ein Bedürfnis nach Legierungen auch mit etwas geringeren Härten, in der Größenordnung von 300 Brinell, vorliegt.

Diese Gesichtspunkte gaben Veranlassung, die technischen Eigenschaften der Be-haltigen Cu-Ni-Legierungen einer eingehenderen Untersuchung zu unterziehen.

Über das Zustandsdiagramm dieser ternären Legierungen, über das später ausführlicher berichtet werden soll, ist folgendes zu sagen: Die Sättigungsgrenze der Cu- und Ni-reichen Mischkristalle an Be bei der Temperatur des Endes der Erstarrung sinkt, vom reinen Kupfer ausgehend, sehr schnell ab, wie das in Tab. 1 dargestellt ist. Bei einem Gehalt von etwa 2,5 % Ni ist der Gehalt des gesättigten α -Mischkristalles an Be bereits von etwa 2,4 % auf etwa 0,5 % gesunken. Diese Sättigungsgrenze steigt dann bis 50 % Nickel ganz langsam und dann zum reinen Nickel schneller an. Mit fallender Temperatur sinkt diese Sättigungsgrenze und erfüllt hiermit die erste Voraussetzung für die Vergütbarkeit der Be-Ni-Cu-Legierungen.

Tabelle 1.
Löslichkeitsgrenze des Berylliums
im α -Mischkristall der Cu-Ni-Reihe:
beim Ende der Erstarrung.

%Ni	%Be	%Ni	%Be
0	2,4	60	etwa 0,8
2,5	etwa 0,5	80	„ 1,4
20	„ 0,5	100	„ 2,3
40	„ 0,6		

¹⁾ Die Konstitutionsuntersuchungen und die ersten Messungen der Härten an Be-Ni-Cu-Legierungen sind in den Jahren 1927 und 1928 von Herrn O. Dahl ausgeführt worden.

²⁾ G. Masing u. O. Dahl: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. VIII, 1 S. 101 ff.

Es scheint, daß in diesen Legierungen mit mehr als etwa 2,5% Ni eine andere Kristallart mit den α -Mischkristallen im Gleichgewicht ist als die γ -Mischkristalle des Systems Be-Cu. Es scheint sich in den ternären Legierungen um eine Verbindung des Nickels mit Beryllium, etwa in der Nähe der Zusammensetzung Ni_2Be_3 , zu handeln, die anscheinend in einer gewissen Menge Cu in fester Lösung aufzunehmen vermag.

Da nur die Lage dieser Sättigungsgrenze in erster Linie für die Ausscheidungshärtung der Be-armen Kupfer-Nickel-Legierungen von Bedeutung ist, soll hier auf die weiteren Verhältnisse im ternären Diagramm nicht mehr eingegangen werden.

2.

Die Vergütungsuntersuchungen wurden in erster Linie an Hand von Härtemessungen mit Hilfe der Brinellproben durchgeführt; die Härten wurden dabei nach E. Meyer¹⁾ berechnet.

Die Legierungen wurden bei den in den Tab. 2 und 3 wiedergegebenen Versuchen in Mengen von 500 bis 1000 g im Tammanofen eingeschmolzen, in Flachkokillen von 5 bis 7 mm Stärke vergossen und auf 1 mm Dicke ausgewalzt. Die Legierungen wurden dann von folgenden Temperaturen abgeschreckt: 0 bis 30% Ni von 800°, 50% Ni von 900°, 70% Ni von 950°, 90% Ni von 1050°, und in der in den Tabellen angegebenen Weise angelassen.

Aus Tab. 2, die die Messungen an Legierungen mit 2,5% Be wiedergibt, sieht man, daß bei höheren Nickelgehalten erhebliche Vergütungshärten erzielt werden. Die Legierungen mit 50% Ni und mehr erscheinen technisch interessant. Bei der Le-

Tabelle 2. Vergütung von Cu-Be-Ni-Legierungen mit 2,5% Be. (Versuchsreihe I.)

Nr.	Zusammensetzung	Härte in kg/mm ²				
		Abgeschr.	½ Std.	1½ Std.	3½ Std.	11½ Std.
Vergütungstemp. 300°						
1	(90 Cu, 10 Ni) + 2,5 Be	118	121	124	124	141
2	(70 Cu, 30 Ni) + 2,5 Be	145	145	141	141	149
3	(50 Cu, 50 Ni) + 2,5 Be	220	220	220	214	228
4	(30 Cu, 70 Ni) + 2,5 Be	228	228	245	236	245
5	(10 Cu, 90 Ni) + 2,5 Be	188	245	254	264	275
Vergütungstemp. 400°						
1	(90 Cu, 10 Ni) + 2,5 Be	118	128	128	131	137
2	(70 Cu, 30 Ni) + 2,5 Be	145	149	141	141	154
3	(50 Cu, 50 Ni) + 2,5 Be	220	228	236	264	306
4	(30 Cu, 70 Ni) + 2,5 Be	228	319	333	376	395
5	(10 Cu, 90 Ni) + 2,5 Be	188	333	346	395	376
Vergütungstemp. 500°						
1	(90 Cu, 10 Ni) + 2,5 Be	118	124	124	124	124
2	(70 Cu, 30 Ni) + 2,5 Be	145	149	158	145	145
3	(50 Cu, 50 Ni) + 2,5 Be	220	295	333	319	346
4	(30 Cu, 70 Ni) + 2,5 Be	228	430	412	412	412
5	(10 Cu, 90 Ni) + 2,5 Be	188	475	475	475	500
Vergütungstemp. 600°						
1	(90 Cu, 10 Ni) + 2,5 Be	118	124	116		
2	(70 Cu, 30 Ni) + 2,5 Be	145	154	149		
3	(50 Cu, 50 Ni) + 2,5 Be	220	319	295		
4	(30 Cu, 70 Ni) + 2,5 Be	228	385	360		
5	(10 Cu, 90 Ni) + 2,5 Be	188	430	412		

¹⁾ Untersuchungen über Härteprüfung. Z. VDI Bd. 52 (1908) S. 645, 740, 835ff.

gierung 5 mit 90 % Ni nähert sich der Höchstwert der Härte dem bei reinem Nickel mit 2,5 % Be erreichbaren, ohne ihn wesentlich zu übersteigen.

Tabelle 3. Vergütung der Cu-Ni-Be-Legierungen. (Versuchsreihe II.)

Nr. d. Serie	Nr. d. Leg.	Zusammensetzung	Härte der Legierungen in kg/mm ² angelassen					
			Abgeschr.	½ Std.	1 Std.	3 Std.	6 Std.	
Vergütungstemp. 400°								
I	1	97,5% Cu 2,5% Ni	+ 0,5% Be	76	118	178	207	217
	2		+ 1,0% Be					
	3		+ 1,5% Be					
II	4	95,0% Cu 5,0% Ni	+ 0,5% Be	82	145	188	228	240
	5		+ 1,0% Be	89	259	275	279	264
	6		+ 1,5% Be	89	236	264	254	241
III	7	90% Cu 10% Ni	+ 2,0% Be	145	149	245	178	235
	8		+ 0,5% Be	75	133	149	160	167
	9		+ 1,0% Be	89	156	141	172	194
IV	10	30% Cu 70% Ni	+ 1,5% Be	90	170	204	259	254
	11		+ 0,0% Be	110				
	12		+ 0,5% Be	126				
	13		+ 1,0% Be	141				
	14		+ 1,5% Be	164				
	15		+ 2,0% Be	190				
Vergütungstemp. 450°								
I	1	97,5% Cu 2,5% Ni	+ 0,5% Be	76	207	220	210	210
	2		+ 1,0% Be	82	207	220	204	201
	3		+ 1,5% Be	88	172	168	160	245
II	4	95,0% Cu 5,0% Ni	+ 0,5% Be	82	236	245	232	220
	5		+ 1,0% Be	89	259	254	250	260
	6		+ 1,5% Be	89	214	201	194	217
III	7	90% Cu 10% Ni	+ 2,0% Be	145	220	207	194	204
	8		+ 0,5% Be	75	158	204	217	188
	9		+ 1,0% Be	89	182	194	191	194
IV	10	30% Cu 70% Ni	+ 1,5% Be	90	259	245	254	250
	11		+ 0,0% Be	110	116	116		
	12		+ 0,5% Be	126	132	132		
	13		+ 1,0% Be	141	158	190		
	14		+ 1,5% Be	164	329	360		
	15		+ 2,0% Be	190	360	352		
Vergütungstemp. 500°								
I	1	97,5% Cu 2,5% Ni	+ 0,5% Be	76	180	186	217	168
	2		+ 1,0% Be	82	194	201	189	168
	3		+ 1,5% Be	88	154	180	158	149
II	4	95,0% Cu 5,0% Ni	+ 0,5% Be	82	217	197	191	182
	5		+ 1,0% Be	89	245	257	250	217
	6		+ 1,5% Be	89	220	217	201	175
III	7	90% Cu 10% Ni	+ 2,0% Be	145	201	210	210	180
	8		+ 0,5% Be	75	194	197	197	168
	9		+ 1,0% Be	89	264	250	240	220
IV	10	30% Cu 70% Ni	+ 1,5% Be	90	220	217	201	180
	11		+ 0,0% Be	110				
	12		+ 0,5% Be	126	134	134	134	
	13		+ 1,0% Be	141	215	270	331	
	14		+ 1,5% Be	164	418	425	412	
	15		+ 2,0% Be	190	391	460	425	

Die Walzbarkeit der Legierungen dieser Reihe war mit Ausnahme der Legierung mit 90 % Ni nicht zufriedenstellend. Das ist auf Grund der Tab. 1 verständlich, denn die Legierungen mit 2,5 % Be liegen weit oberhalb der Löslichkeitsgrenze des Be in den α -Kristallen.

Es wurde deshalb eine zweite Legierungsreihe mit geringeren Be-Gehalten untersucht, vgl. Tab. 3. Das Ergebnis dieser Untersuchungen war, daß man bei 70 % Ni bei einem Be-Gehalt von 1 % bereits mit Höchstwerten der Härte oberhalb 300 Brinell rechnen könnte.

3.

Die beschriebenen Versuche sind im Jahre 1928 durchgeführt worden. Die in- zwischen mit den Be-Cu-Legierungen gemachten Erfahrungen haben erwiesen, daß die Vergütungsbedingungen sich im Zusammenhang mit der Vervollkommnung der

Tabelle 4. Härtesteigerungen der Beryllium-Kupfer-Nickel-Legierungen durch Vergütung. (Versuchsserie III.)

Zusammensetzung in Proz.			Nr. d. Leg.	Anlaßzeit in Minuten							
Cu	Ni	Be		0	20	40	80	160	320	640	1280
Anlaßtemperatur 350° (Härte in kg/mm ²)											
96	3	1	1	84,9	315	225	204	260	218	242	211
94	5	1	2	90,7	185	204	225	233	225	251	280
89	10	1	3	92,8	135	146	150	146	150	169	174
79	20	1	4	115	121	128	142	150	146	155	179
59	40	1	5	138	174	185	191	185	185	223	260
39	60	1	6	131	159	179	169	191	179	242	291
19	80	1	7	138	146	124	138	135	146	135	155
Anlaßtemperatur 400° (Härte in kg/mm ²)											
Abschreck- temp.											
950°			1	84,9	164	225	225	242	251	260	211
950°			2	90,7	150	233	251	242	291	270	270
1000°			3	92,8	118	138	174	174	218	191	204
1000°			4	115	138	131	179	185	191	185	197
1000°			5	138	155	197	211	233	280	270	291
1050°			6	131	150	204	211	251	291	303	291
1050°			7	138	135	142	138	128	185	260	204
Anlaßtemperatur 450° (Härte in kg/mm ²)											
950°			1	84,9	211	218	204	197	197	218	211
950°			2	90,7	251	233	242	251	260	242	251
1000°			3	92,8	159	204	204	197	197	191	204
1000°			4	115	159	191	174	179	179	204	191
1000°			5	138	218	233	251	251	270	270	260
1050°			6	131	233	260	270	280	291	315	315
1050°			7	138	121	135	135	142	191	204	185
Anlaßtemperatur 500° (Härte in kg/mm ²)											
950°			1	84,9	225	197	204	167	191	185	179
950°			2	90,7	233	251	225	218	197	204	191
1000°			3	92,8	211	179	169	179	169	159	150
1000°			4	115	185	185	191	191	197	179	174
1000°			5	138	251	270	260	270	270	251	233
1050°			6	131	270	315	303	315	315	303	291
1050°			7	138	146	138	225	211	242	242	251
Anlaßtemperatur 550° (Härte in kg/mm ²)											
1050°			6	131	315	315	291	270	251	218	204
1050°			7	138	124	135	233	233	233	225	191

technischen Darstellung des Be etwas verschoben haben, und zwar erfolgt die Vergütung bei tieferen Temperaturen (am besten für 2,5 % Be, 97,5 % Cu bei 290°) als bei den früher hergestellten Legierungen (350°). Es scheint, daß das auf die größere Reinheit des zur Zeit hergestellten Be zurückzuführen ist. Aus diesem Grunde erschien es wünschenswert, die früheren Ergebnisse mit neuem Material und unter Berücksichtigung der in § 1 angegebenen Gesichtspunkte zu wiederholen. Es wurde eine Versuchsreihe mit 1 % Be angesetzt. Um etwaige Verluste an Be durch Desoxydation zu vermeiden, wurden die Legierungen mit 0,5 % Mn vor dem Zusatz des Be desoxydiert. Für die Härtmessungen wurden die Legierungen ähnlich, wie oben beschrieben, vergossen. Für Festigkeitsmessungen wurden sie in größeren Chargen von 7 kg im Hochfrequenzofen hergestellt, in Rundkokillen von 35 mm Durchmesser vergossen, homogenisiert und auf die Stärke von 12 mm heruntergewalzt. Die Walzbarkeit war gut, die Abschrecktemperaturen sind in Tab. 4 angegeben.

Tabelle 5. Festigkeitswerte der Beryllium-Kupfer-Nickel-Legierungen. (Versuchsserie III.)

Leg.-Nr. Zu- sammen- setzung s. Tab. 4.	Zustand	Härte kg/mm ²	Elastizitäts- grenze 0,003 % - Grenze kg/mm ²	Streck- grenze 0,2 % - Grenze kg/mm ²	Bruch- last kg/mm ²	Bruch- dehnung in Proz.	E- Modul kg/mm ²
1	Abgeschreckt 950°	84,9	5,7	13,5	33,5	13,0	10850
			6,9	15,8	37,5	14,2	11660
			9,6	12,95	37,0	20,0	11400
	Abgeschreckt 950°, 11 Std. bei 400° angelassen	251	40,5	—	71,0	0,6	12300
			39,7	65,8	69,0	0,8	12600
			47,2	64,8	69,3	0,8	12400
2	Abgeschreckt 950°	90,7	7,6	15,3	39,8	29,0	12100
			7,1	15,7	40,0	25,0	12550
			255	53,8	71,8	79,2	0,8
35,5	71,8	93,0		10,0	13000		
3	Abgeschreckt 1000°	92,8		6,1	13,7	38,8	24,0
			5,1	14,9	38,0	30,0	12100
			189	25,35	44,7	67,4	20,0
26,8	37,7	60,0		11,4	13250		
30,4	46,0	68,3		21,0	13370		
4	Abgeschreckt 1000°	115	13,9	28,0	51,8	10,0	13700
			12,7	26,9	50,1	8,0	13400
			218	20,8	55,6	81,3	9,2
35,7	57,2	80,4		7,0	13950		
5	Abgeschreckt 1000°	138		22,9	35,9	63,2	13,0
			23,5	37,2	71,3	16,0	15420
			303	41,9	85,8	108,2	6,0
61,2	88,0	102,3		3,0	15900		
56,0	78,0	103,0		8,0	15900		
6	Abgeschreckt 1050°	131	18,1	26,1	63,2	43,0	16700
			13,7	26,4	65,3	32,0	16660
			16,4	26,1	64,9	41,0	16100
	Abgeschreckt 1050°, 10 Std. bei 500° angelassen	321,0	58,3	91,8	115,0	4,0	17500
			57,2	91,5	111,0	2,0	17800
			53,3	93,0	118,0	5,2	17350
7	Abgeschreckt 1050°	138,0	15,2	21,1	60,2	47,0	17930
			15,2	21,2	58,9	45,0	18000
			288	24,7	63,3	109,0	15,0
18,9	55,7	98,7		14,0	18700		
22,7	59,3	97,6		12,0	19000		

Wie man sieht, sind bei der Legierung mit 60 % Ni Härten über 300 Brinell erreichbar; wenn man mit den Ergebnissen der Tab. 2 vergleicht, hat man den Eindruck, daß die Höchstwerte in der neuen Serie etwa um 50 Brinelleinheiten tiefer liegen, als zu erwarten war. Es würden sich damit die auch bei den Be-Cu-Legierungen gemachten Wahrnehmungen bestätigen, daß der höhere Reinheitsgrad des Be zwar die Geschmeidigkeit der Legierungen verbessert, aber die erreichbaren Höchstwerte der Vergütung etwas herabsetzt.

Laut Tab. 5 werden bei 60 % Ni Festigkeiten über 110 kg/mm², bei 80 % Ni etwa 100 kg/mm² erreicht. Daß der letztere Wert niedriger wird, erklärt sich zweifellos aus der Erhöhung der Be-Löslichkeit im α -Mischkristall bei hohen Nickelgehalten, vgl. Tab. 1. Beide Legierungen zeigen eine hohe Dehnung im abgeschreckten Zustande und werden demnach vor der Vergütung sehr gut verformbar sein. Auch nach der Vergütung ist ihre Dehnung größer als bei den Be-Cu-Legierungen, insbesondere bei 80 % Ni. Bei dieser Legierung ist deshalb die Möglichkeit gegeben, noch nach der Vergütung gewisse Verformungen vorzunehmen. Technisch ist diese Möglichkeit oft wertvoller als ein Höchstwert der Festigkeit.

Eingehende Untersuchungen zur genaueren Feststellung der günstigsten Be-Ni-Gehalte im Konzentrationsgebiet 50 bis 80 % Ni sind im Gange. Es scheint, daß es für manche Zwecke möglich sein wird, den Be-Gehalt noch weiter unter 1 % zu senken.

Wie man aus der Tab. 5 sieht, steigt auch bei den Be-Ni-Cu-Legierungen genau wie bei den Be-Cu-Bronzen der Elastizitätsmodul durch die Aushärtung etwa um 5 bis 10 % gegenüber dem abgeschreckten Zustande.

Die Aushärtungstemperaturen der Legierungen mit 60 bis 80 % Ni liegen etwa bei 500°. Bei diesen Temperaturen sinkt die Härte nach dem ursprünglichen Anstieg während 20 Stunden noch nicht merklich; nach 45 Stunden fällt sie allerdings ab auf etwa 200 Brinell. Man wird also erwarten können, daß diese Legierungen Betriebstemperaturen von etwa 400° ohne Einbuße an Härte werden dauernd aushalten können.

In der Technik des Turbinenbaues und auf manchen anderen Gebieten besteht ein großes Interesse für Legierungen mit einer Festigkeit über 90 kg/mm² bei genügender Dehnung, mit hoher Warmfestigkeit und guter Korrosionsbeständigkeit. Es ist anzunehmen, daß die genannten Legierungen diesen Anforderungen weitgehend werden genügen können. Eine genauere Untersuchung der Korrosionsbeständigkeit ist eingeleitet.

Zusammenfassung.

Bei berylliumhaltigen Kupfer-Nickel-Legierungen können durch Vergüten Härten über 300 Brinell bei wesentlich geringeren Be-Gehalten als in den binären Legierungen erreicht werden. Die Legierung 39 % Cu, 60 % Ni, 1 % Be ergab im vergüteten Zustande eine Festigkeit von etwa 115 kg/mm², die Legierung mit 19 % Cu, 80 % Ni, 1 % Be eine Festigkeit von etwa 100 kg/mm² mit der bemerkenswert hohen Dehnung von etwa 13 %.

Ein Verlust dieser Festigkeitswerte durch Ausglühen ist bei dauernder Erhitzung erst oberhalb 400 bis 450° zu erwarten.

Vergleichende Studien über den Härtungsprozeß bei Schellack und Phenolformaldehydharzen.

Von Werner Nagel und Elisabeth Baumann.

Mit 3 Bildern.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 8. Dezember 1931.

Der Name „Härtung“ ist der Technik entnommen und bezeichnet zunächst weiter nichts, als daß manche Stoffe infolge von Zusätzen oder geeigneter Behandlung oder beiden vereint härter gemacht werden. Vornehmlich eine Erhöhung des Erweichungspunktes ist oft wünschenswert; hier wird also „Härtung“ so verstanden, daß der bei Naturprodukten häufig über eine ganze Reihe von Temperaturgraden sich erstreckende Schmelzbereich verengert und nach oben verschoben wird. In diesem Sinne spricht man denn auch von einer Härtung bei Harzen, bei Pechen, Asphalten, fetten Ölen usw. und versteht jeweils eine der Körperklasse angepaßte Behandlung darunter, die das obengenannte Ziel zu erreichen sucht. Durch Erhitzen der verschiedensten Harze mit Metalloxyden führt man diese in ihre höher schmelzenden Metallsalze (Resinate) über, durch Verkochen mit Glycerin, Phenol und ähnlichen in die Ester, durch Behandlung mit polymerisierend wirkenden Stoffen oder durch Destillation härtet man Pecher, durch Sauerstoffeinwirkung Asphalte, durch Wasserstoffanlagerung fette Öle und Trane usw. Die Reihe ließe sich noch erheblich verlängern, wenn man sie auch auf analoge Prozesse, die aber unter anderen Namen geläufig sind, ausdehnte.

Es erhellt schon aus dem bisher Gesagten, daß man unter demselben Namen bei verschiedenen Stoffen einen ganz anderen chemischen Vorgang versteht und daß demnach eine chemisch einheitliche Behandlung nur innerhalb einer gleich konstituierten Stoffgruppe möglich ist. Innerhalb weitgezogener Grenzen kann man die Naturharze als einheitliche Gruppe ansehen und von den Kunstharzen wenigstens die, bei denen der Begriff „Härtung“ im Vordergrund des Interesses steht, nämlich den Phenol-Formaldehyd-Harzen.

Bei der Festlegung des Arbeitsplanes jedoch für die nachstehende Untersuchung war noch eine weitere Beschränkung ins Auge gefaßt, die sicher zweckmäßig wäre. Erstens sind die fraglichen Prozesse bei so schwierigen Stoffen wie Harze noch wenig erforscht, und zweitens sind gewisse Arten von „Härtung“ bei Harzen in der Isolierstofftechnik von größter Bedeutung; andere Härtungsarten, obwohl im

allgemeinen nicht weniger wichtig, spielen auf diesem angeführten Gebiete kaum eine Rolle.

Der Erweichungspunkt wird bei dieser Härtung im engeren Sinne so in die Höhe gedrückt, daß er über den Zersetzungspunkt zu liegen kommt; praktisch sind also innerhalb eines gewissen Temperaturbereichs diese Stoffe unschmelzbar. Aus den nachfolgenden chemischen Betrachtungen folgt, daß in den beobachteten Fällen stets die beträchtliche Steigerung der Höhe der Schmelztemperatur auf eine Molekülvergrößerung zurückzuführen ist. Dies bedingt, wie die Erfahrung an zahllosen, aus anderen Gebieten der Chemie stammenden Beispielen lehrt, daß hiermit eine Verminderung der Löslichkeit in dem für den Stoff jeweils charakteristischen Lösungsmittel parallel geht; und so ist schließlich das Endergebnis: die gehärtete Substanz ist unlöslich und unschmelzbar geworden.

I. Phenol-Formaldehyd-Harze.

Das bisher Ausgeführte läßt sich sehr klar übersehen bei den Phenol-Formaldehyd-Harzen, deren in der Elektrotechnik häufigster härtpbarer Vertreter, der Bakelit, jedem mit Kunstharzen vertrauten Isolierstoffachmann bekannt ist. Er ist so wertvoll geworden, daß es eine Zeitlang schien, als wenn er den bisher üblichen Schellack ganz verdrängen sollte, und daß dem so war, verdankte er in erster Linie der gerade bei ihm erstaunlich entwickelten Fähigkeit zur Härtung. Innerhalb von Minuten geht unter der Einwirkung von Hitze und Druck das bei etwa 60° erweichende Produkt in einen unschmelzbaren Körper über und verliert dabei seine ihm vorher eigentümliche Löslichkeit in Alkohol und Aceton vollkommen. Die Preßtechnik, die Hartpapierfabrikation und mancher andere Zweig der Isolierstofftechnik machen bekanntlich von dieser Eigenschaft weitgehenden Gebrauch.

Das chemische Geschehen, das diesem so überaus wertvollen Eigenschaftswechsel zugrunde liegt, ist wenig klar durchsichtig, und eigentlich nur in den allereinfachsten Grundzügen festgelegt, trotz der umfangreichen Forschungsarbeiten, die andauern solange der Gegenstand schon bekannt ist. Es ist nicht die Aufgabe dieser Abhandlung, die für Phenol-Formaldehyd-Harze aufgestellten Härtungstheorien zu erläutern oder gar zu widerlegen; für unsere Arbeit, die sich wenigstens experimentell mehr auf den Ablauf des Härtungsprozesses beim Schellack bezieht, sollen nur die zum Verständnis des Härtungsprozesses bei Harzen überhaupt notwendigen Ansichten besprochen werden, um die Analogie zwischen Phenol-Formaldehyd-Harz und Schellackharz klar hervortreten zu lassen; eine Kenntnis von chemisch gewiß interessanten Einzelheiten erscheint zunächst wenigstens nicht unumgänglich.

Es ist eine Beobachtung, die, seit sie zuerst von A. von Baeyer¹⁾ gemacht wurde, immer wieder das Interesse der Chemiker wachgerufen hat, daß sich Formaldehyd mit Phenol zu rotbraunen, harzigen Massen vereinigen kann. Ter Meer²⁾, Claisen³⁾ und viele andere wandten sich dem Studium der entstehenden Stoffe zu, aber als bewußte Entdeckung und Studium der Formaldehydharze können diese Forschungen nicht angesprochen werden. Es waren Versuche, das Reaktionsprodukt

¹⁾ A. v. Baeyer: Ber. dtsch. chem. Ges. Bd. 5 (1872) S. 25, 280, 1094.

²⁾ E. ter Meer: Ber. dtsch. chem. Ges. Bd. 7 (1874), S. 1200.

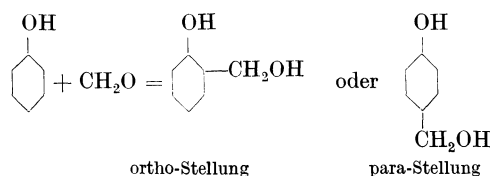
³⁾ L. Claisen: Ber. dtsch. chem. Ges. Bd. 29 (1886) S. 3316.

zwischen Formaldehyd und Phenol kristallinisch und monomer zu erhalten, und Baejer wandte sich, als ihm dies nicht gelang, bald den mehr Erfolg versprechenden aromatischen Aldehyden zu. Das entstandene Harz interessierte so wenig, daß dessen Veränderlichkeit und bedingte Härbarkeit gar nicht erkannt wurden; die Zeit der Kunstharze war eben noch nicht gekommen.

Auf diese Erstlingsarbeiten folgt eine beträchtliche Zahl anderer, in denen aber gerade das Harz, das man als neuen Kunststoff erkannt hatte, im Vordergrund des Interesses steht. Das unter Patentschutz gestellte Produkt jedoch ist, soweit wir uns auf die Angaben der betreffenden Experimentatoren und die Nacharbeiten Baekelands verlassen können, bereits fertig kondensiertes (durch Behandlung mit Säuren entsprechend behandeltes), unlösliches Endprodukt oder eine zwar als Kunstharz bezeichnete, aber blasige und mehr lederartige Masse, oder es wird direkt als Celluloidersatz angesprochen, besitzt also gerade die die Phenol-Formaldehyd-Harze im Anfangsstadium charakterisierende Sprödigkeit nicht. Der erste, der den Harzbildungsprozeß genauer studierte, war Baekeland¹⁾; er war es auch, der zeigte, daß der ganze Reaktionsmechanismus anders abläuft, je nachdem man der Mischung von Phenol und Formalinlösung Säuren oder Basen als Reaktionsbeschleuniger zusetzt. In ersterem Falle entstehen die nichthärtbaren Novolacke, im zweiten die Resole (den Technikern bekannt als Bakelit A).

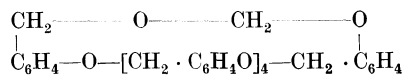
Novolacke interessieren in diesem Zusammenhang nicht; bei den Resolen läßt sich aber das chemische Geschehen vermutlich etwa folgendermaßen formulieren:

Als erstes Einwirkungsprodukt entstehen zweifellos Phenolalkohole.



Die Tatsache, daß sich der Formaldehyd sowohl in der ortho- wie der para-Stellung zur OH-Gruppe anlagern kann, daß ferner Phenol in unveränderter Form im Reaktionsprodukt vorhanden ist, und daß endlich Formaldehyd als eine der reaktionsfähigsten Substanzen der organischen Chemie sicher auch in Nebenreaktionen sich umsetzt, führt zu einem Gemisch von Körpern, von denen jeder jeden am Kristallisieren verhindert; als Resultat ergibt sich dann ein chemisch nicht mehr zu entwirrendes Durcheinander, eben das „Harz“.

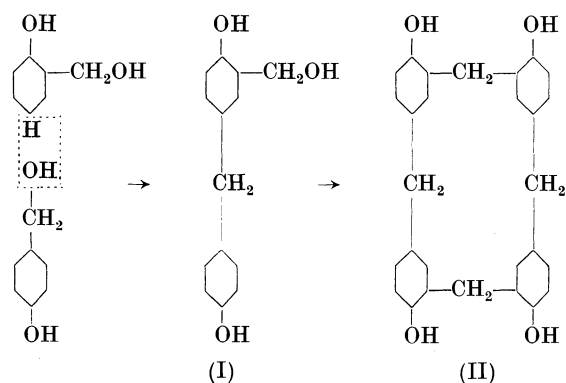
Von hier ab gehen die Meinungen bereits auseinander: Nach L. H. Baekeland²⁾ lagern sich Phenolalkoholmoleküle so aneinander, daß jeweils aus der Phenolgruppe des ersten Moleküls und der CH₂OH-Gruppe des nächsten ein Molekül Wasser austritt. So bildet sich eine Kette von sechs Phenolalkoholmolekülen, deren Endglieder durch erneute Wasserabspaltung mit einem Mol Formaldehyd verknüpft sind, es entsteht also ein ringförmiges Gebilde folgender Formulierung:



¹⁾ L. H. Baekeland: Chem.-Ztg. 1909 S. 317.

²⁾ L. H. Baekeland: Chem.-Ztg. 1909 S. 318.

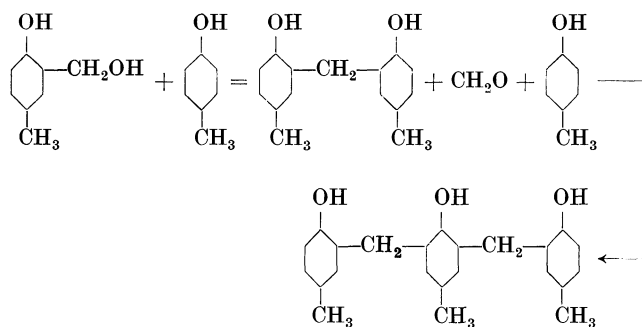
Raschig¹⁾ vermutet, daß sich je ein Molekül der in ortho- und para-Stellung substituierten Alkohole aneinanderlagern (I):



Von dem neu entstandenen Körper verbinden sich weiterhin je zwei Moleküle, indem sie sich unter erneutem Wasseraustritt in umgekehrter Stellung miteinander verketten (II).

Das so entstandene Produkt stellt nach dieser Auffassung den gehärteten Körper dar, wenn man, um den Beobachtungen der Praxis gerecht zu werden, aus je zwei benachbarten Hydroxylgruppen erneut Abspaltung von Wasser annimmt und so das in der Praxis beobachtete Unlöslichwerden in Alkali auch formelmäßig erklärt. Die grundsätzlich gleich verlaufenden Reaktionen mit den den Phenolen homologen Kresolen und Kondensationsprodukten all dieser Körper mit mehreren Molekülen Formaldehyd spielen natürlich eine wichtige Rolle.

Koebner²⁾ nimmt sowohl bei Phenol wie bei Kresol als Ausgangsmaterial mehr oder weniger lange Ketten durch Formaldehydkondensation verbundener Phenolringe an, die mit Formaldehyd weiter reagieren und so die Ausgangspunkte neuer, noch längerer Ketten bilden, die ihrerseits durch weitere Kondensation mit Phenolringen oder bereits verketteten Ringen in den Bereich erheblicher Molekülgrößen gehoben werden.



Anfangskondensations- und Endprodukt unterscheiden sich also durch die Kettenlänge. Das Auftreten von Alkaliunlöslichkeit beim gehärteten Produkt fand darin seine Erklärung, daß langkettige Phenole schon an und für sich in Alkali unlöslich sind, selbst wenn die Hydroxylgruppe vollkommen intakt ist.

¹⁾ F. Raschig: Z. angew. Chem. 1912 S. 1946.

²⁾ M. Koebner: Chem.-Ztg. 1930 S. 619.

Andere¹⁾ geben noch andere Formeln, die hauptsächlich auf den verschiedenen Darstellungsmethoden (Härtung durch Erwärmung ist keineswegs die einzige), ferner aber auch auf den Eigenschaften der erhaltenen Produkte und der Analogie mit ähnlichen, besser bekannten Prozessen basieren.

Bemerkenswert ist, daß offenbar die meisten dieser Autoren der Ansicht sind, daß derartige Kondensationsreaktionen ausreichen, um Riesenmoleküle zu schaffen, deren Vorhandensein im gehärteten Phenol-Formaldehyd-Harz zweifellos sicher ist. Nur einige wenige lassen den Reaktionsmechanismus so ablaufen, daß die letzte Stufe der ganzen Reihe eine Polymerisation ist. Nun hat aber Harries²⁾ den Begriff „Polymerisation“, wie er bis in die jüngste Vergangenheit üblich war, scharf zergliedert und gefordert, daß er nur da angewendet werde, wo es sich um ein Aneinanderlagern von Doppelbindungen gleichartiger Moleküle handelt, dort aber, wo die Betätigung von Restvalenzen, Oberflächen- oder kolloiden Kräften, die Verknüpfung von gesättigten gleichartigen Molekülen bewirkt, lieber von Aggregation zu sprechen. Polymerisation in diesem Sinne hat zweifellos Wohl vorgeschwebt, Aggregation Baekeland, wenigstens in der ersten Formulierung, die er dem Härtingsprodukt gibt.

Wenngleich eine dem hier beschriebenen Härtingsprozeß ähnliche Erscheinung bei manchen Naturharzen stattfindet (das Reifen der Kopale, das Unlöslichwerden des Japanlacks, das Verhalten des echten Bernsteins stellen hier nicht weiter zu besprechende Analoga dar), so zeigt sich die Härtung eines Naturharzes als besonders geeignet zu Vergleichszwecken, es ist dies die wenig bekannte und bisher kaum beachtete Härtung des Schellacks.

II. Schellack.

Um den Härtingvorgang im Schellack zu verstehen, ist zunächst daran zu erinnern, daß dieses Harz aus zwei Stoffgruppen besteht: dem zu rund 70 bis 75 % vorhandenen eigentlichen Harz, dem Reinharz, und einem Gemisch zahlreicher niedrigmolekularer Körper (Wachs, Farbstoff, Riechstoff, Monoxypalmitinsäure, Trioxypalmitinsäure u. a.), das durch seine die Trennung vom Reinharz ermöglichende Löslichkeit in Äther gekennzeichnet ist. Nur das Reinharz ist härubar, das heißt, es geht beim Erwärmen auf Temperaturen um 200° herum in einen unschmelzbaren Zustand über, indem es zudem noch seine Alkohollöslichkeit fast völlig verloren hat. Langzeitiges Erwärmen auf niedere Temperaturen hat dieselbe Wirkung, und es ist sogar gelungen, Schellackreinharz, das in einer Badflüssigkeit nur eben auf seine Erweichungstemperatur erhitzt war, aber 30 Stunden auf ihr belassen wurde, zu 50 % zu härten.

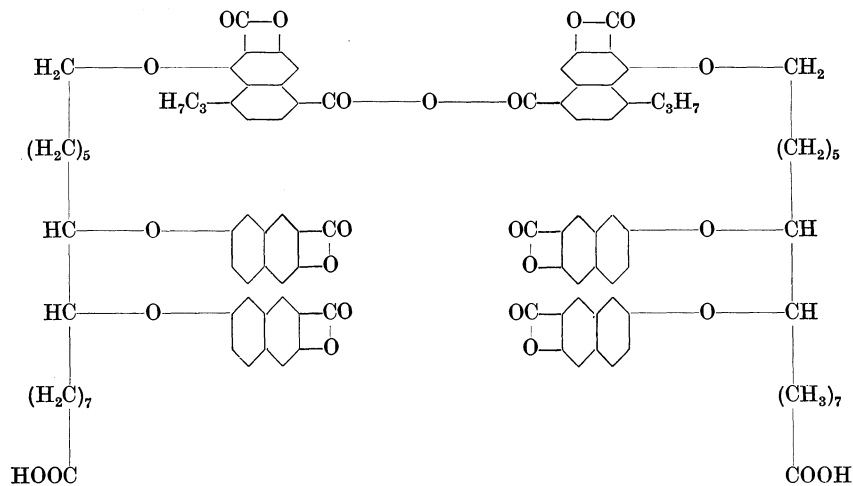
Die chemischen Vorgänge, deren Resultat die veränderten physikalischen Eigenschaften sind, sind zwar nicht so sicher gestellt, daß die einzelnen, im Zwischenstadium entstehenden Stoffe isoliert, definiert und analysiert wären, jedoch lassen sie sich aus dem Verhalten des Ausgangsmaterials und dem Verlauf des Härtingprozesses mit großer Wahrscheinlichkeit erschließen.

Die vermutliche Zusammensetzung von Schellackreinharz wurde in früheren Arbeiten dargelegt und braucht deshalb nicht besprochen zu werden. Die experi-

¹⁾ A. Wohl: Ber. dtsh. chem. Ges. Bd. 45 (1912) S. 2046. — L. H. Baekeland u. H. L. Bender: Ind. Engng. Chem. Bd. 17 S. 225. — A. E. Blumfeld: Chem.-Ztg. 1929 S. 493 usw.

²⁾ C. D. Harries: Kolloid-Z. Bd. 23 (1918) S. 181.

mentellen Unterlagen berechtigen noch nicht zur Aufstellung einer in allen Einzelheiten exakten Formel, das nachfolgende Schema ist also mit dem entsprechenden Vorbehalte wiedergegeben. Immerhin ist seine Übereinstimmung mit den zahlenmäßig festlegbaren Experimentaldaten fast durchweg eine gute; daß es breiter ausgezeichnet ist, als es der Stand der Arbeiten erlaubt, ist dem Verständnis der Vorgänge beim Härtingsprozeß zuliebe geschehen.



Monomere Formel des Schellackreinharzes

Die Formel $C_{106}H_{158}C_{25}$ verlangt ein Molekulargewicht von 1831,3.

Die Säurezahl¹⁾ würde betragen: 61,27, beobachtet wurde 55 bis 60.

Die Verseifungszahl¹⁾: 275,7, beobachtet wurde 190 bis 225.

Der Kohlenstoffgehalt²⁾: 69,46, gefunden 66,23.

Der Wasserstoffgehalt²⁾: 8,70, gefunden 8,95.

An den einzelnen Spaltsäuren müßte durch eine vollkommene Hydrolyse und quantitative Gewinnung erhalten werden:

Aleuritinsäure	33,2 %	} des angewandten Reinharzes.
Schellolsäure	32,3 %	
Schellackharzsäuren	46,8 %	

Erfaßt wurde bisher die Aleuritinsäure vollkommen; ihre Menge betrug rund 30 %³⁾, während es bei den anderen Komponenten noch nicht gelang, ein auch nur annähernd quantitatives Abscheidungsverfahren auszuarbeiten.

Für Schellolsäure ist in dem Schema die Formel einer perhydrierten Dioxy-isopropyl-naphthalindicarbonsäure gewählt; bisher nur aus Analogiegründen und um die durch Analyse festgelegte Formel C_{15} festzuhalten. Für eine solche Säure beträgt zwar die Zusammensetzung $C_{15}H_{24}O_6$, während die Verbrennung den Wert $C_{15}H_{20}O_6$ erkennen läßt, jedoch braucht vorläufig in dem Formelschema darauf noch keine Rücksicht genommen zu werden; im übrigen wurde das Vorkommen einer Doppelbindung im Molekül der Schellolsäure bereits durch Hydrierung festgelegt und für die Annahme des Vorliegens einer Brückenbindung bestehen gewichtige Gründe. Hier-

¹⁾ W. Nagel u. M. Körnchen: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. VI, 1 (1927) S. 248.

²⁾ C. Harries u. W. Nagel: Ber. dtsch. chem. Ges. Bd. 55 (1922) S. 3848.

³⁾ C. Harries u. W. Nagel: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. I, 3 (1922) S. 179.

durch würde der zu hohe Wasserstoffgehalt zwanglos die notwendige Reduktion um 4 Atome pro Molekül Schellolsäure erfahren. Für Betrachtungen über den Verlauf des Härteprozesses ist diese Differenz jedoch unwesentlich, da der Wasserstoff als nicht an Sauerstoff gebunden angenommen werden muß.

Die Formeln für die Schellackharzsäuren sind hypothetisch; es wurden dem bisherigen Experimentalergebnis entsprechend niedrigere, einbasische Homologe der Schellolsäure angenommen. Die Menge dieser Säuren entsprach der bisher stets erzielten Ausbeute am besten, wenn je 4 Moleküle von ihnen im Verband mit je zwei anderen Molekülen der Spaltsäuren angenommen wurden.

Der Härtingvorgang eines solchen Moleküls stellt sich chemisch als eine Wasserabspaltung zwischen den freien Carboxylgruppen dar, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß nicht die Carboxylgruppe der Aleuritinsäure frei zu sein braucht, daß vielmehr zwischen dieser und dem Hydroxyl des nächsten Naphthalinkerns Lactonisierung eingetreten sein kann und dafür die dort stehende Säuregruppe frei ist.

Drei experimentelle Tatsachen sprechen für die Richtigkeit dieser Auffassung des Härteprozesses; sie wurden experimentell von uns und von H. Staeger längst vorher gefunden und publiziert, eine nachträgliche Konstruktion der analytischen Grundlagen unserer Ansicht ad hoc fällt also weg.

1. Es wurde beobachtet, daß die Abspaltungsprodukte bei der Härting nur Wasser sind¹⁾.

2. Die Menge des frei werdenden Wassers ist sehr gering. Nach der Formel beträgt sie rund 1 %, festgestellt wurde von uns¹⁾ eine solche von 5,3 %, jedoch arbeiteten wir mit Schellack und nicht mit Schellackreinharz; H. Staeger findet aber bei Reinharz nach fast 40stündiger Härting bei 100° eine Gewichtsabnahme von etwas über 3 %²⁾.

3. Die Verseifungszahl (nicht Esterzahl!) ist vor und nach der Härting gleich groß³⁾.

Ob die einfache Anhydrierung das chemische Geschehen während des Härtingvorganges darstellt, bleibt aber trotzdem fraglich. Die Wasserabspaltung könnte auch eine Vorstufe oder eine parallel verlaufende Reaktion des Hauptvorganges sein. Dafür spricht die Beobachtung, daß Alkoholunlöslichkeit schon eintritt, wenn die Wasserabspaltung noch nicht vollendet ist. Eine Erklärung für dieses Verhalten zu finden, ist nicht schwer. Es ist bekannt⁴⁾, daß Lactone, Lactide und Säureanhydride Neigung zur Polymerisation (hier Aggregation) besitzen. Zur Bildung der Riesemoleküle des Härtingproduktes müßte also als Hauptvorgang eine rein kolloidchemisch zu verstehende Aneinanderlagerung der Primärteilchen angenommen werden. Daß Schellackharz hierzu neigt, zeigt die in mehreren Arbeiten besprochene Dispersitätsänderung unter dem Einfluß von ätherischer Salzsäure oder längerem Stehen. Die Peptisierbarkeit des so gewonnenen, ebenfalls unlöslichen und un-schmelzbaren Harzes zwingt zu der Annahme, daß es sich um eine echte Aggregation handelt.

Nach neuesten, noch unveröffentlichten Ergebnissen des einen von uns (Nagel) ist ferner das Vorhandensein einer Doppelbindung in der Schellolsäure festgestellt, so daß eine echte Polymerisation ebenfalls in Betracht käme.

¹⁾ W. Nagel u. M. Körnchen: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. VI, 1 (1927) S. 267.

²⁾ W. Nagel u. M. Körnchen: a. a. O., u. H. Staeger: Elektrotechn. Isoliermaterialien 1931 S. 207.

³⁾ H. Staeger: a. a. O. S. 207. ⁴⁾ J. Scheiber u. K. Sändig: Die künstlichen Harze, S. 49. 1929.

III. Das Verhalten der gehärteten Harze in der Wärme.

Aus den vorgetragenen Ansichten über den Chemismus des Härtingsprozesses beim Schellack ließ sich zweierlei mit Sicherheit folgern. Erstens das gehärtete Reinharz muß sich in der Wärme weitgehend indifferent verhalten, und zweitens die nichthärtbaren Produkte, wie sie das Reinharz im natürlichen Schellack stets begleiten und die ihrer Natur nach ziemlich genau bekannt sind, müssen ihrerseits einen nicht vorauszu sehenden, aber nachteiligen Einfluß auf die Wärmefestigkeit des gehärteten Produktes ausüben, da sie Wachse und nicht Harze sind. Gerade dieser letzte Punkt aber ist für die Elektrotechnik von besonderem Interesse. Das Verhalten von gehärtetem Schellack in der Wärme wurde daher zum Gegenstand einer genaueren Experimentaluntersuchung gemacht.

1. Arbeitsmethode und Auswertung der Resultate.

Es kam darauf an, Schellack in Form gerader Stangen unter genau festgelegten Bedingungen zu härten und dann die Durchbiegung dieser Stangen in einer Atmosphäre von erhöhter Temperatur zu messen. Nach vielem erfolglosem Herumprobieren (Homogenität der Stangen, sofortiges zweckmäßiges Verarbeiten des in geschmolzenem Zustande sehr streng flüssigen und sich in kleinem Ausmaße sehr bald härtenden Schellacks, geeignetes Material für die Stangenform, das ein nachheriges Herauslösen ohne die geringste Beschädigung gestattete, waren nur einige der zu überwindenden Schwierigkeiten) gelang es, folgende Arbeitsmethode auszuarbeiten. Sie wurde bei allen beschriebenen Versuchen befolgt:

Der fein gemahlene Schellack wird vorsichtig, das heißt unter sorgfältigster Vermeidung jeder Überhitzung, in einer Emailleschale über leuchtender Flamme geschmolzen und, wenn er als klare, zähe, nichtschäumende Masse vorliegt, in Röhren aus Aluminiumfolie gegossen, die im Trockenschrank bereits auf 120° vorgewärmt sind (als ebenfalls brauchbar wurde Cellophan befunden). Die gefüllten Röhren läßt man, wenn nötig, einige Zeit im Trockenschrank zur Klärung stehen, jedoch ist dies immer bedenklich, da selbst kurzzeitige Erwärmung auf höhere Temperatur Härtung von einigen Prozenten des Harzes bewirkt. Durch Übung läßt es sich erzielen, daß der Schellack vor dem Eingießen so weit vorgewärmt ist, daß er nicht härtet und doch genügend dünnflüssig ist, um den eingeschlossenen Luftblasen das Entweichen zu gestatten. Hat man eine solche Arbeitsroutine erreicht, ist es entschieden besser, die vollgegossenen Formen bei Zimmertemperatur abkühlen zu lassen, sie werden dann aufgeschnitten und die herausgenommenen Harzstangen auf ihre Homogenität und Alkohollöslichkeit untersucht. Erstere macht es gewöhnlich erforderlich, das obere Ende eingeschlossener Blasen wegen abzuschneiden, letztere muß 100prozentig sein oder die Stange ist als für diese Versuche ungeeignet zu verwerfen.

Stangen, die gehärtet werden sollen, werden erneut in eine Aluminiumfolie gesteckt und in einem Autoklaven unter Kohlendruck erwärmt. Letzterer ist notwendig, da die Harzmasse sonst aufschäumt und die Stange inhomogen wird. Es liegen also ganz die gleichen Probleme vor, wie beim Überführen von Bakelit A in die C-Form, und man löst sie auch in der gleichen Weise.

Man läßt diesmal im Autoklaven unter Druck erkalten, wobei zu berücksichtigen ist, ein wie außerordentlich schlechter Wärmeleiter Schellack als Harz ist.

Die wiederum aus ihrer Form herausgenommene Stange wird erneut geprüft; während nämlich in ungehärtetem Zustande der Grad der Homogenität von der Arbeitsgeschicklichkeit abhängt, ist er hier allein durch den angewandten Kohlendruck bedingt. Den geeigneten herauszufinden, erfordert oft eine ganze Anzahl von Versuchen, wenn man nicht mit fraglos ausreichenden, aber sehr hohen Drucken arbeiten will. Wir haben dies aber immer vermieden, da uns eine Abhängigkeit der Härtungsgeschwindigkeit von der Druckhöhe nicht ausgeschlossen schien; in den vielen hundert ausgeführten Versuchen konnte sie zwar nicht direkt bewiesen werden, im Gegenteil, die meisten Ergebnisse sprachen dagegen, immer wieder aber wurden einzelne Messungswerte erhalten, die eine Berücksichtigung des Druckes zu fordern schienen.

Die als einwandfrei befundenen Stangen werden in eine auf einen Holzfuß aufgeschraubte Querleiste gesteckt und in einem geräumigen Trockenschranke während einer bestimmten Zeit auf einer bestimmten Temperaturhöhe gehalten. Allmählich erweichen sie und sinken unter dem Einfluß der Schwerkraft mehr oder weniger bogenförmig ab.

Dieses Absinken erfolgt so gleichmäßig und bei festgelegten Bedingungen so reproduzierbar, daß es zu Meßzwecken ausgenutzt werden konnte. Es wurde verlangt, daß Stangen von gleichen Dimensionen, die gleichen Härtingsbedingungen unterworfen waren und vom gleichen Harz stammten, in genau dem gleichen Maße absanken, und diese Bedingung wurde innerhalb von 50° bis auf 5° genau erfüllt. Um zahlenmäßig vergleichen zu können, wird genau über die Schellackstange eine auch in der Wärme ihre Lage nicht verändernde Metallstange angebracht, die also die unveränderte Horizontale darstellt; die Entfernung des Endes dieser Metallstange von dem der abgesunkenen Schellackstange in Verhältnis gesetzt zu der bekannten Länge der Metallstange ergibt den Tangens des Abfallwinkels.

Zwar ist zu berücksichtigen, daß die Verbindungslinie der Stangenenden nur bei kleinen Ausbiegungen und auch dann nur angenähert senkrecht auf der Waagerechten steht, das gemessene Verhältnis also um so weniger den Tangens angibt, je größer der Abfallwinkel ist. Da diese Meßmethode jedoch nur zu Vergleichszwecken dient und in immer der gleichen Weise ausgeführt wurde, fallen die methodischen Fehler aus der Rechnung heraus oder können berücksichtigt werden.

Ausführung und Ergebnis der Arbeitsmethodik lassen sich am besten aus Bild 1 ersehen.

Eine weitere Methode zur Charakterisierung des Härtingsgrades wurde in der Bestimmung des alkohollöslichen Anteils des behandelten Harzes entwickelt. Diese wird in der üblichen Weise vorgenommen: Heißextraktion des fein gepulverten Materials mit absolutem Alkohol bis zur Erschöpfung (das heißt bis innerhalb einer Viertelstunde nicht mehr extrahiert wird; bei sehr langem Auskochen ist es ohne weiteres möglich, merkbare Mengen gehärteten Reinharzes in Lösung zu bringen) und Trocknung bis zur Gewichtskonstanz.

Es wurde zwischen den beiden Zahlenwerten, die durch die verschiedenen Methoden gegeben werden, bei den üblichen Temperaturen eine gute Übereinstimmung

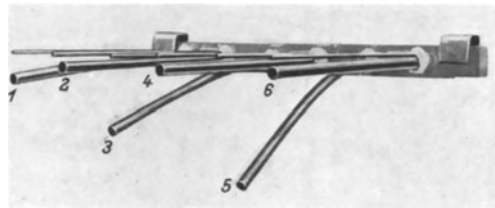


Bild 1. Ungehärtete und teilweise gehärtete Schellackstangen, $\frac{1}{2}$ Stunde auf 45° erhitzt.

erzielt. Ein teilweise gehärtetes Produkt kennzeichnet sich durch einen mittleren Durchbiegungswinkel und einen mittleren Gehalt an alkohollöslichen Anteilen.

Die Verlässlichkeit beider Methoden ist so groß, daß man sie zueinander in Parallele setzen, das heißt graphisch die Gehalte an Härtingsprodukt aus ihnen ermitteln und miteinander vergleichen kann. Im weiteren Verlauf der Untersuchung ist dies nicht geschehen, da die Feststellung des genauen Verlaufs der Kurve der Abnahme der Alkohollöslichkeit langwierige Untersuchungen vorausgesetzt hätte, die uns als vom eigentlichen Thema abseits führend erschienen. Zwar hat H. Staeger¹⁾ den Verlauf einer solchen Kurve bei 100° beschrieben, jedoch wäre für unsere Zwecke eine oder mehrere solche auch bei normalen Härtingstemperaturen, also 150 bis 200°, festzustellen gewesen. Hierbei aber überlagert sich dem Härtingprozeß ein Zersetzungsprozeß, der zu teilweise alkohollöslichen Produkten führt; es wird also, wenn man allein aus dem Prozentgehalt an Alkohollöslichem auf den Härtinggrad schließen wollte, ein hoher Grad an noch gar nicht gehärtetem Produkt vorgetäuscht, in Wirklichkeit ist aber schon Überhärtung eingetreten. Wie man sieht, ist die Ermittlung einer oder mehrerer Kurven durchaus notwendig und deren Verlauf ist, da uns der Ablauf des Zersetzungsprozesses durchaus unbekannt ist, nur empirisch feststellbar.

Bei der Auswertung der nach beiden Methoden erhaltenen Resultate ist weiterhin zu berücksichtigen, daß die 100% Härtinggrad entsprechende Menge an Alkohollöslichem immer noch etwa 25% beträgt, weil dies der Gehalt an nichthärtbaren alkohollöslichen Stoffen ist. Der diesem Härtinggrad entsprechende Durchbiegungswinkel beträgt natürlich ebenfalls nicht 90°, sondern 60 bis 70°, weil die Stange sich nicht winklig abbiegt, sondern bogenförmig. Ferner ist daran zu denken, daß die Abhängigkeit des Durchbiegungswinkels von dem Härtinggrad wiedergebende Kurve nicht wie die des Gehaltes an Alkohollöslichem in Abhängigkeit vom Härtinggrad linear, sondern parabolisch verläuft.

2. Unterschied in der Warmbiegefestigkeit zwischen gehärtetem und ungehärtetem Schellack.

In Bild 1 ist weiterhin eine Beobachtung festgehalten, die allen Erwartungen widersprach. Sie kann kurz in dem Paradoxon zusammengefaßt werden: Innerhalb der Temperaturspanne von etwa 10 bis 65° ist gehärteter Schellack weicher als ungehärteter. Man hat also das dem erwarteten Behandlungszweck Entgegengesetzte erreicht. Die nicht oder nur wenig von der horizontalen Lage abgewichenen Stangen 2, 4 und 6 sind die ungehärteten; die abgebogenen 1, 3 und 5 sind teilweise gehärtet, und zwar je mehr sie gehärtet sind, desto stärker sind sie geneigt. Diese zunächst verblüffende Tatsache findet in der Beimengung nichthärtbarer Bestandteile zum Reinharz ihre Erklärung. Beim Erwärmen auf die Härtingstemperatur kracken diese zum Teil, das heißt die langen Ketten der Moleküle werden in kleinere zertrümmert, deren tiefer Erweichungspunkt nun ein Weichwerden des Gesamtharzes zur Folge hat. Obwohl also rund 70% unerschmelzbares Harz vorliegt, erweicht der gehärtete Schellack früher als ungehärteter, in welchem ja die Krackung nicht stattgefunden hat.

¹⁾ H. Staeger: Elektrotechn. Isoliermaterialien, S. 206. 1931.

Wenn diese Überlegung zu Recht besteht, müßte Schellack, dem die nichthärtbaren Bestandteile entzogen sind, Reinharz also, nach dem Härten dies Verhalten nicht zeigen.

Dies konnte bestätigt werden.

Zwar gelang es trotz vieler Bemühungen nicht, Stangen aus Reinharz zu erhalten, vorsichtiges Erhitzen führte nur zu einer sehr zähflüssigen und sich rasch härtenden Masse, deren Viscosität zu groß war, um eingeschlossenen Luftblasen das Entweichen durch die eventuell 25 cm dicke Schmelzschicht zu gestatten. Homogenität wurde daher nie erreicht, jedoch gelang es, $\frac{1}{2}$ cm starke, stabförmige Platten herzustellen, die völlig blasenfrei waren. Diese konnten tatsächlich am einen Ende eingespannt, am anderen mit einem 10-g-Gewicht belastet, auf 100° und mehr erhitzt werden, ohne daß eine nennenswerte Abweichung von der Horizontalen beobachtet worden wäre.

Beim Erhitzen auf höhere Temperatur ändert sich natürlich das Verhalten von gehärtetem und ungehärtetem Schellack wiederum. Bei rund 70 bis 80° schmilzt das ungehärtete Harz zu einer zähflüssigen, inhomogenen Masse zusammen, während das gehärtete Produkt seinen Habitus nicht ändert, es bleibt eine lederartig zähe Masse bis gegen 220° , bei welcher Temperatur merkbar große Mengen von Zersetzungsprodukten auftreten.

Die Erklärung für dieses Verhalten erübrigt sich, sie ist durch die Charakterisierung des Reinharzes als unschmelzbar und die 30 % nicht übersteigende Menge schmelzender Anteile gegeben.

3. Abhängigkeit der Härtung von der Zeitdauer.

Bild 1 kann endlich zur Demonstration der Abhängigkeit der Härtung von der Zeitdauer dienen.

Die Stangen 1, 3 und 5 waren folgendermaßen behandelt: Alle waren bei 170° und 10 at Druck gehärtet, aber 1 blieb diesen Bedingungen 3 Stunden unterworfen, 3 6 Stunden und 5 9 Stunden. Der Gehalt an Alkohollöslichem betrug: 1 37,3 %, 3 31,6 %, 5 25,0 %. Der Durchbiegungswinkel der $\frac{1}{2}$ Stunde auf 45° erwärmten Stangen ergab sich zu $9^\circ 12'$ bei 1, $33^\circ 4'$ bei 3, $40^\circ 30'$ bei 5. Es folgert also auch hier, was bereits in früheren Arbeiten zur Kenntnis des Schellacks von dem einen von uns und von H. Staeger ausgesprochen ist, daß beim Härtingsprozeß die Temperatur durch die Zeitdauer innerhalb gewisser Grenzen ersetzt werden kann. Wo diese Grenzen liegen, wissen wir nicht, wenn eine Härtung innerhalb langer Zeiträume schon bei gewöhnlicher Temperatur stattfindet, so würde das besagen: Alterung und Härtung sind identisch; Härtung in ganz kurz bemessenen Zeiträumen dagegen bei sehr hohen Temperaturen dürfte, vorläufig wenigstens, zu nicht abzuschätzenden Resultaten führen.

Bei Härtung bei 170° spielt der bereits angedeutete Zersetzungsprozeß noch keine Rolle, wie Bild 2 zeigt.

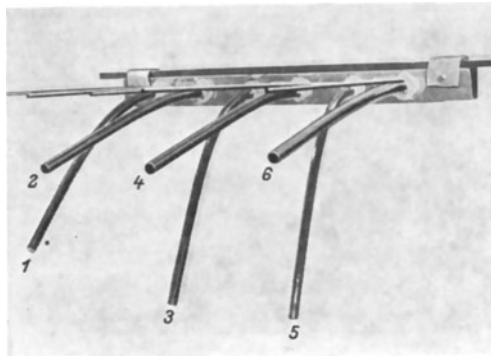


Bild 2. Ungehärtete und teilweise gehärtete Schellackstangen, $\frac{1}{2}$ Stunde auf 50° erhitzt.

In Bild 2 handelt es sich um dieselben Stangen wie in Bild 1, jedoch sind sie $\frac{1}{2}$ Stunde in einer Atmosphäre von 50° gehalten worden. Auch die ungehärteten Stangen 2, 4 und 6 sind nunmehr abgebogen und stehen in den Winkeln $14^\circ 36'$ (2), $15^\circ 2'$ (4) und $11^\circ 53'$ (6) zur Horizontalen, während die Stangen 1, 3 und 5 die Winkel $36^\circ 24'$, $54^\circ 44'$ und $57^\circ 21'$ bilden.

4. Abhängigkeit der Härtung von der Temperatur.

Zur Klarlegung der bei verschiedenen Temperaturen obwaltenden Verhältnisse werden folgende Versuchsserien beschrieben:

Fünf Schellackstangen wurden bei 10 at Druck $1\frac{1}{2}$ Stunde lang gehärtet, aber 1 bei 180° , 2 bei 190° , 3 bei 200° , 4 bei 210° und 5 bei 220° . Der Gehalt an alkohol-löslichen Bestandteilen betrug 33,5, 32,2, 30,6, 30,6 und 25,5%. Schon bei gewöhnlicher Temperatur zeigten die Stangen ein stark unterschiedliches Verhalten, das nach 24stündigem Stehen bei etwa 20° zu folgenden Durchbiegungswinkeln geführt hatte: $3^\circ 42'$ (1), $8^\circ 49'$ (2), $22^\circ 22'$ (3), $58^\circ 22'$ (4) und $65^\circ 25'$ (5). Erheblich ver-

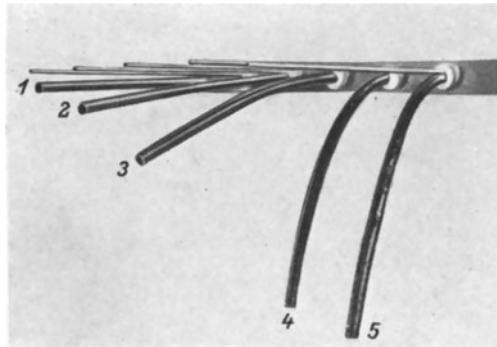


Bild 3. Schellackstangen bei verschiedenen Temperaturen gehärtet, nach 48stündigem Stehen bei Zimmertemperatur.

stärkt wurde diese steigende Erweichung bei $\frac{1}{2}$ stündigem Stehen bei 40° . Es ergaben sich hier die Winkel $10^\circ 0'$ (1), $28^\circ 30'$ (2), $36^\circ 20'$ (3), $65^\circ 10'$ (4) und $65^\circ 30'$ (5). Die Beobachtungen sind in Bild 3 wiedergegeben.

Es läßt sich nicht verkennen, daß die Stange Nr. 4, sowohl was den Gehalt an alkohol-löslichen Bestandteilen wie ihren Durchbiegungswinkel angeht, ein etwas abnormes Verhalten zeigt. Der Grund hierfür kann nicht angegeben werden, er kann in der Bildung besonderer Zersetzungsprodukte bestehen, die unter den gewählten Druckverhältnissen in diesem

Temperaturbereich nicht flüchtig sind, während sie schon bei 220° abdestillieren, er kann auch in dem bei 210° spontan auftretenden Zersetzungsprodukt überhaupt gesucht werden. Jedenfalls ist er in dem Erweichungsprozeß selbst begründet und nicht in der Arbeitsmethodik, denn bei eigens auf ihn gerichteten Versuchen konnte er immer wieder festgestellt werden.

5. Abhängigkeit der Härtung vom Druck.

Während die Abhängigkeit der Härtung von der Temperaturhöhe und der Einwirkungsdauer eine beträchtliche ist, ist eine solche von der Höhe des Druckes, wie schon ausgeführt, nicht einwandfrei festzustellen. Der Grund dürfte in dem der Härtung sich überlagernden Zersetzungsprozeß mit seinem unbekanntem Verlauf und seinen unbekanntem Ergebnissen zu suchen sein. Bleibt man aber innerhalb eines Temperaturbereiches, in welchem die Zersetzung noch keine nennenswerte Rolle spielt, so muß Unabhängigkeit angenommen werden, wie aus folgenden Zahlenwerten ersichtlich ist: Schellackstangen, die bei 180° 6 Stunden lang mit 5 bzw. 20 at gehärtet worden waren, enthielten 29,2 und 26,6% alkohol-lösliche Bestandteile; ihre Durchbiegungswinkel betragen $15^\circ 43'$ bzw. $17^\circ 37'$ bei einstäündigem Auf-

bewahren bei 35°; bei 1/2stündigem Aufbewahren bei 50° erhöhten sie sich auf 59° 27' und 60° 17', bei einstündigem Aufbewahren bei 50° auf 61° 23' bzw. 61° 22'. Anders liegen die Verhältnisse, wenn bei höheren Temperaturen gehärtet wird. Arbeitet man bei 220°, so bilden sich offenbar schon Zersetzungsprodukte, die alkohollöslich und bei dieser Temperatur gasförmig sind (Wasser? niedrig molekulare Säuren?). Diese vergrößern also die Menge des Alkohollöslichen und blähen außerdem bei unzureichendem Druck die Stange auf; Blasenbildung tritt auf und es wird demgemäß eine Stange mit erheblich größerem Abfallwinkel erzielt, als derselben Härtingstemperatur bei größerem Druck entsprechen würde. Ferner hängt das Absieden weich machender Zersetzungsprodukte, wie bereits erwähnt, vom Druck ab. Es wird also eine Beziehung zwischen Härting und Druckhöhe vorgetäuscht, die in Wirklichkeit nicht existiert.

Die Versuche, aus denen diese Folgerungen gezogen wurden, ergaben folgende Zahlenwerte: Schellackstangen bei 220° während einer halben Stunde unter einem Druck von 5 at gehärtet waren aufgebläht und stark von Blasen durchsetzt. Die Menge des Alkohollöslichen betrug 31,4%. Wurden die Stangen bei 220° ebenfalls während einer halben Stunde, aber unter einem Druck von 10 at gehärtet, so enthielten sie nachher nur noch wenige und sehr kleine Blasen. Die unter denselben Bedingungen und 15 at Druck gehärtete Stange aber war ganz homogen. Die Menge des Alkohollöslichen aber betrug 39,4%, bei der vorhergehenden 38,3%.

Die Abfallwinkel konnten in den beiden ersten Fällen nicht gemessen werden, da inhomogene Stangen natürlich unregelmäßige Werte liefern, bei der homogenen Stange betrug er 67° 58' (bei 1/2stündigem Aufbewahren bei 50°, ist also maximal, das heißt, es kann aus seiner Höhe nichts gefolgert werden, da ein durchgehärteter Schellack ohne Zersetzungsprodukte denselben Wert liefern würde).

Die folgende Tabelle faßt die Versuchsergebnisse noch einmal zusammen.

Tabelle. Unterschied zwischen gehärtetem und ungehärtetem Schellack in Abhängigkeit von Zeitdauer, Temperatur und Druck.

Material und Vorbehandlung	Alkohollösliche Bestandteile in Proz.	Warmdurchbiegung bei	
		45° 1/2 Std.	50° 1/2 Std.
Schellack, ungehärtet	100	0°	14° 36'
Schellack, ungehärtet	100	0°	15° 2'
Schellack, ungehärtet	100	0°	11° 53'
Schellack, teilweise gehärtet, 170° — 10 at — 3 Stunden	37,3	9° 12'	36° 24'
Schellack, teilweise gehärtet, 170° — 10 at — 6 Stunden	31,6	33° 4'	54° 44'
Schellack, teilweise gehärtet, 170° — 10 at — 9 Stunden	25,0	40° 30'	57° 21'
		20° 24 Std.	40° 1/2 Std.
Schellack, teilweise gehärtet, 180° — 10 at — 1/2 Stunde	33,5	3° 42'	10° 0'
Schellack, teilweise gehärtet, 190° — 10 at — 1/2 Stunde	32,2	8° 49'	28° 30'
Schellack, teilweise gehärtet, 200° — 10 at — 1/2 Stunde	30,6	22° 22'	36° 20'
Schellack, teilweise gehärtet, 210° — 10 at — 1/2 Stunde	30,6	58° 22'	65° 10'
Schellack, teilweise gehärtet, 220° — 10 at — 1/2 Stunde	25,3	65° 25'	65° 30'
		35° 1 Std.	50° 1/2 Std. 50° 1 Std.
Schellack, teilweise gehärtet, 180° — 5 at — 6 Stunden	29,2	15° 43'	59° 27' 61° 23'
Schellack, teilweise gehärtet, 180° — 20 at — 6 Stunden	26,6	17° 37'	60° 17' 61° 22'
Schellack, gehärtet, 220° — 5 at — 1/2 Stunde	31,4	—	— —
Schellack, gehärtet, 220° — 10 at — 1/2 Stunde	38,3	—	— —
			50° 1/2 Std.
Schellack, gehärtet, 220° — 15 at — 1/2 Stunde	39,4		67° 58'

Diesem Verhalten des Schellacks steht gegenüber das der Phenol- (bzw. Kresol-) Formaldehyd-Harze.

6. Das Verhalten von gehärtetem Phenol-Formaldehyd-Harz in der Wärme.

Man könnte versucht sein, anzunehmen, daß das oben geschilderte Verhalten gehärteten Schellacks ein grundsätzlicher Nachteil dieses Naturproduktes wäre; diese Ansicht ist aber nur bedingt richtig. Natürlich werden mit Schellack als Bindemittel hergestellte und gehärtete Fabrikate unter Umständen schon bei relativ niederen Temperaturen weich, lappig und mechanisch angreifbar, aber dies ist den Technikern bekannt und man weiß deshalb, wessen man sich vom Schellack zu versehen hat. Andererseits aber zeichnen sich gerade gehärtete Schellackfabrikate durch bemerkenswerte Elastizität aus. Fraglos ist auch diese Verbesserung der Eigenschaften dem Vorhandensein der unhärtbaren Bestandteile zuzuschreiben, die als natürliche Weichmachungsmittel fungieren und zudem alle Nachteile artfremder, künstlich erzeugter Plastifikatoren nicht haben.

Ein härtpbares Harz, dem die natürlichen Weichmachungsmittel fehlen, ist nun das Phenol-Formaldehyd-Harz, das denn auch ein grundlegend anderes Verhalten zeigt. Dem Phenol-Formaldehyd-Harz fehlen sowohl Nachteile als auch Vorteile des Schellacks: Verschiedene richtig durchgehärtete Handelsformen dieses Kunstharzes übertreffen bei gewöhnlicher Temperatur an Härte das Gußeisen und an Wärmebeständigkeit sind sie allen Harzen (mit Ausnahme der fossilen, also Bernstein usw.) weit überlegen. Besonders hervorzuheben aber ist, daß, wie Versuche zeigen, eine Verminderung der Warmbiegefestigkeit bei Phenol-Formaldehyd-Harzen bis 100° C nach der oben bei Schellack beschriebenen Methode nicht eintritt. Ihre Analoga finden Phenol-Formaldehyd-Harze überhaupt mehr in der anorganischen als in der organischen Chemie. Aber in bezug auf Elastizität werden sie von den gehärteten Naturprodukten übertroffen.

Zusammenfassung.

Es werden die Grundlagen des Härtungsprozesses (Härtung unter Einwirkung von Hitze und Druck) bei Phenol-Formaldehyd-Harzen und Schellack beschrieben. Nach kurzer Charakterisierung der Änderung der physikalischen Eigenschaften wird der Ablauf der Reaktionsmechanismen bei der Härtung von Phenol-Formaldehyd-Harzen wenigstens in seinen Haupt- und Grundzügen erläutert. Das chemische Geschehen, das bei der Härtung des Schellacks statthat, wird damit in Analogie gesetzt, die verbindenden und unterscheidenden Merkmale werden hervorgehoben und genau durchgesprochen. Im Zusammenhang hiermit wird auf Grund der sonst geleisteten experimentellen Vorarbeiten eine neue Konstitutionsformel für das Reinharz des Schellacks aufgestellt. Die Gründe für die Richtigkeit dieses Formelschemas werden cursorisch diskutiert. Besonderer Wert wird auf die Feststellung gelegt, daß, chemisch gesprochen, die Härtung des Schellackreinharzes nur eine Wasserabspaltung darstellt.

Weiterhin wird eine zahlenmäßige Festlegung des Härtungsprozesses und die Reproduzierbarkeit von Behandlungsvorschriften dadurch gewährleistet, daß das physikalische Verhalten ganz oder teilweise gehärteten Harzes ausgewertet wird.

Als in besonderem Maße geeignet erwies sich für diese Zwecke die Wärmefestigkeit des Schellacks, so daß wenigstens bei diesem Naturharz der behandelte Vorgang klar überschaut werden kann. Es ließ sich so ermöglichen, die Abhängigkeit des Härungsprozesses von Zeitdauer, Temperaturhöhe und Druck zu demonstrieren. Es wird klargestellt, daß die geringere Warmdurchbiegung (Biegefestigkeit) des teilweise oder des überhärteten Schellacks auf der Gegenwart niedrigmolekularer Beimengungen beruht.

Zum Schluß wird das Verhalten gehärteten Phenol-Formaldehyd-Harzes unter denselben Bedingungen beschrieben und zum Vergleich mit Schellack herangezogen.

Namenverzeichnis.

[Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Hefte, die anderen Zahlen auf die Seiten.]

- Algermissen, J. **2**, 53, 73.
 Althen, A. **2**, 92.
 Angenheister, W. **2**, 73.
- Baekeland**, L. H. **2**, 101, 103.
 Baeyer, A. v. **2**, 100f.
 Ballantine, S. **1**, 2, 23.
 Barbillion, L. **1**, 102.
 Bath, F. **2**, 73.
 Bauersfeld, W. **1**, 102.
 Baumann, E. **2**, III, 99...113.
 Becker, I. A. **2**, 76, 80, 84.
 Becker, K. **2**, 73.
 Becker, R. **2**, III, 1...11.
 Bender, H. L. **2**, 103.
 Benedicks, C. **2**, 26.
 Bloch, O. **1**, 135.
 Blumfeld, A. E. **2**, 103.
 Böhm, O. **1**, 33, 49.
 Börnstein, R. **2**, 48, 72.
 Braunbek, W. **2**, 54, 74.
 Buckley, O. E. **2**, 26, 32ff., 35.
 Büge, M. **2**, 53, 74.
 Buell, R. C. **1**, 102.
 Bullendorf, C. **2**, 73.
 Burawoy, O. **2**, 53, 74.
 Buss, K. **2**, 68, 73.
- Campbell, U. **2**, 53, 74.
 Caughey, R. J. **1**, 102.
 Chrystal, G. **2**, 26.
 Claisen, L. **2**, 100.
 Crandall, J. B. **1**, 15, 23.
- Dällenbach, W. **2**, 39.
 Dahl, O. **2**, 93.
 Davisson, C. **2**, 79.
 De la Rue, Warren **2**, 36.
 Dushman, S. **2**, 81.
 Dussler, E. **2**, 26ff., 31ff., 34f.
- Elmen, G. W. **1**, 131.
 Engel, A. v. **2**, 69f., 74.
 Erhard, Th. **2**, 20.
 Espe, W. **2**, 75f., 85.
 Ewing, I. A. **2**, 26.
- Feldtkeller, R. **1**, 23.
 Fielder, F. D. **2**, 54, 60, 74.
 Flegler, E. **2**, 55.
 Föppl, A. **1**, 102.
- Forrer, R. **1**, 124ff., 133f., 140.
 Foster, D. **2**, 26, 33ff.
 Franck, J. **2**, 68f., 74.
 Franke, R. **1**, 1, 23.
 Frensdorff, E. **1**, 102.
 Friedländer, E. **1**, 102.
- Gans**, R. **2**, 26.
 Gerdien, H. **2**, III, 12...24.
 Gheorghiu, J. S. **1**, 102.
 Graetz, L. **2**, 22.
 Gröber, H. **1**, 26, 28, 35.
 Grotrian, O. **2**, 26.
 Gumlich, E. **2**, 22f.
- Hähnle**, W. **1**, III, 1...23.
 Hahnemann, W. **1**, 1, 23.
 Hanna, C. R. **1**, 23.
 Harries, C. D. **2**, 103f.
 Hayward, A. P. **1**, 102.
 Hecht, H. **1**, 1, 23.
 Hertz, G. **2**, 71, 74.
 Hippel, A. v. **2**, 68f., 74.
 Holborn, L. **2**, 12, 15, 22, 26.
 Holm, R. **2**, III, 37ff., 54.
 Hunter, E. M. **1**, 102.
- Jakob, M. **1**, 30.
 Jaumann, G. **2**, 53, 74.
 Jost, W. **2**, 87.
 Jubitz, W. **1**, 139.
- Kaufmann**, W. **2**, 53, 73f.
 Kersten, M. **2**, 2f., 8, 10f.
 Kieser, W. **1**, 102.
 Kingdon, K. H. **2**, 84.
 Kniepkamp, H. **2**, III, 75...87.
 Koebner, M. **2**, 102.
 Körnchen, M. **2**, 104f.
 Kohler, K. **2**, 54, 74.
 Kohlrausch, F. **2**, 12, 15, 22.
 Koller, R. **2**, 85.
 Kroczek, J. **2**, 87.
 Kroll, W. **2**, III, 88...92.
 Krug, W. **2**, 55, 74.
 Kühlewein, H. **1**, III, 124...140.
 Kühn, K. **1**, 102.
 Küpfmüller, K. **1**, 23.
- Landolt, H. **2**, 48, 72.
 Langevin, P. **2**, 42.
- Langrehr, H. **1**, 102.
 Laue, M. v. **2**, 53, 71, 74.
 Lebeau, P. **2**, 89.
 Le Corbeiller, Ph. **1**, 1, 2, 23.
 Lichte, H. **1**, 23.
 Lichtenberger, F. **2**, 11.
 Lindeck, St. **2**, 26.
 Liwischitz, M. **1**, III, 60...68.
 Loeb, L. B. **2**, 69, 74.
 Lübcke, E. **2**, 87.
- McAuley, J. **2**, 53, 60, 74.
 Mach, W. **2**, 73.
 McKeehan, L. W. **2**, 26, 32ff., 35.
 McLachlan, W. **1**, 2, 23.
 Madelung, E. **2**, 13.
 Mann, C. R. **2**, 32.
 Marchal, G. **2**, 89.
 Marquis, V. M. **1**, 102.
 Masing, G. **2**, III, 93...98.
 Masumoto, H. **1**, 124f., 134ff.
 Matignon, C. **2**, 89.
 Matthies, K. **1**, 2, 7, 23.
 Mauz, E. **2**, 53, 61, 74.
 Mayer, R. **1**, 102.
 Meer, E. ter **2**, 100.
 Merck, E. **2**, 92.
 Meyer, E. **2**, 94.
 Meyer, O. **2**, 54, 74.
 Meyer, W. **2**, 87.
 Moormann, A. **2**, 92.
 Moss, E. W. **2**, 26.
 Müller, H. W. **2**, 36.
- Nagel, W. **2**, III, 99...113.
 National Electric Light Association **1**, 102.
 Nebel, C. **2**, III, 75...87.
 Neumann, H. **1**, 125; **2**, III, 12...24, 25...35.
 Nickle, C. A. **1**, 23.
 Norton, E. L. **1**, 23.
- Oertel**, F. **1**, III, 103...123.
 Oliver, J. M. **1**, 102.
 Ollendorff, F. **2**, 68.
 Ott, K. **1**, 102.
- Paavola, M. **2**, 65f., 74.
 Paschen, F. **2**, 36ff.
 Pedersen, P. O. **2**, 54, 58, 64, 74.

- Peeck, F. W. **2**, 53, 74.
 Penning, F. M. **2**, 44.
 Peters, W. **1**, 102.
 Pocher, W. **2**, III, 93...98.
 Preisach, F. **2**, 11.
 Preuß, A. **1**, 134.
 Purcell, T. E. **1**, 102.
- R**aschig, F. **2**, 102.
 Rayleigh, Lord **2**, 25.
 Raymund, H. **1**, III, 60...68.
 Richardson, O. W. **2**, 84.
 Richter, R. **1**, 24, 28, 53, 57.
 Riegger, H. **1**, 23.
 Rindtorff, E. **2**, 87.
 Rogowski, W. **2**, 55, 68f., 74.
 Rüdtenberg, R. **1**, III, 60,
 69...102; **2**, 71, 74.
 Ruff, O. **2**, 90.
- Sändig, K. **2**, 105.
 Sarfert, W. **1**, 102.
- Scheiber, J. **2**, 105.
 Schenkel, M. **1**, 102.
 Schmidt, A. **2**, 87.
 Schottky, W. **2**, 38, 49, 51, 69, 83.
 Schumann, W. O. **2**, 69, 74.
 Seeliger, R. **2**, 53, 61, 74.
 Shuddemagen, C. L. B. **2**, 26.
 Siegbahn, M. **2**, 13.
 Simon, H. Th. **2**, 13.
 Skinner, C. A. **2**, 37.
 Slepian, J. **2**, 69, 74.
 Staeger, H. **2**, 105, 108.
 Steenbeck, M. **2**, III, 36...51,
 54, 60, 69, 73f.
 Stix, R. **1**, III, 24...59.
 Strecker, F. **1**, 2, 7, 23.
 Strigel, R. **2**, III, 52...74.
 Swinne, R. **2**, 49.
- T**amm, R. **2**, 54f., 57, 61, 74.
 Thompson, P. **2**, 26.
 Thomson, J. J. **2**, 42.
- Tittel, J. **1**, 60.
 Toepler, M. **2**, 68, 74.
 Torok, J. J. **2**, 54, 60, 62, 74.
 Townsend, J. S. **2**, 36ff., 41, 53,
 64, 68, 74.
 Trettin, C. **1**, III, 24f.
 Tubandt, C. **2**, 87.
- V**iehmänn, H. **2**, 63, 74.
- W**arburg, E. **2**, 53, 64, 74.
 Warmuth, K. **2**, III, 25...35.
 Wartenberg, H. v. **2**, 89.
 Wegel, R. L. **1**, 1f., 23.
 Weiss, P. **2**, 1.
 Wohl, A. **2**, 103.
 Wolff, O. **2**, 74.
 Würschmidt, J. **2**, 26ff., 29ff.,
 32ff.
- Z**uber, K. **2**, 53, 74.

Sachverzeichnis.

[Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Hefte, die anderen Zahlen auf die Seiten.]

- Ähnlichkeitsgesetz, thermisches, bei Gasentladungen **2**, 48f.
Ähnlichkeitsgesetze für Gasentladungen **2**, 36ff.
— — —, theoretische Grundlagen **2**, 39f.
— — — bei chemischen Reaktionen **2**, 49f.
— — nichtstationäre Gasentladungen **2**, 45ff.
— — stationäre Gasentladungen **2**, 37f.
Aleuritinsäure **2**, 104.
Aluminium und Berylliumoxyd **2**, 89ff.
Anfangspermeabilität bei starker Verzerrung **1**, 6ff.
Ankerwicklungen, Einfluß von Kühlfahnen **1**, 41ff.
Asynchrone Netze, Schwingungen mit gekoppelten Synchronkraftwerken **1**, 69ff.
Asynchronmaschinen, Zusammenwirken mit Synchronmaschinen **1**, 72ff.
—, — — —, Dämpfung asynchroner Pendelschwingungen **1**, 74ff.
Asynchronmotor, Zusammenwirken mit Synchron-generator **1**, 71ff.
Ausdehnung, thermische, hexagonaler Kobaltlegierungen **1**, 139.

Ballistischer Entmagnetisierungsfaktor von Stäben **2**, 25ff.
Belastungsstöße bei gekoppelten Netzwerken **1**, 94ff.
Berylliumhaltige Cu-Ni-Legierungen **2**, 93ff.
— —, Festigkeitswerte **2**, 97f.
— —, Härte **2**, 96f.
— —, Vergütung **2**, 94ff.
Berylliumoxyd, Reduktion durch Kohlenstoff **2**, 88f.
—, — — Metalle **2**, 89ff.
—, Reduzierbarkeit von — **2**, 88ff.
Betriebsweise, wirtschaftlichste, bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen **1**, 103ff.
Blechpakete, Wärmeaustausch unterteilter — **1**, 49ff.
Blindleistungsmaschine, Stoßerregung **1**, 60ff., 64ff.
—, Zeitkonstante **1**, 63f.
—, zeitlicher Stromverlauf beim Stoß **1**, 67f.
Boltzmannsche Konstante **2**, 75.
Bruchdehnung Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 97f.
Bruchlast — — **2**, 97f.

Chemische Gasreaktionen und Ähnlichkeitsgesetze **2**, 49f.
— Zusammensetzung von Phenolformaldehydharzen **2**, 100ff.
— — — Schellack **2**, 104f.

Curiepunkt, ferromagnetischer **1**, 124ff.
—, paramagnetischer **1**, 124ff.

Dämpferwicklungen, Temperaturverteilung **1**, 33ff., 45ff.
Dämpfung asynchroner Pendelschwingungen **1**, 74ff.
Drehstromgeneratorständerwicklung, Erwärmung **1**, 53ff.
Drehzahlverlauf, günstigster, bei Ringspinnmaschinen **1**, 107f.
Druckeinfluß auf Schellackhärtung **2**, 110ff.
Dynamoankerwicklungen, Temperaturverteilung **1**, 36ff.

Eigenschwingungen von Synchron- und Asynchronmaschinen **1**, 72ff.
Eigenvektoren der Verzerrungsenergie **2**, 4ff.
Eigenwerte — — **2**, 4ff.
Eisen, magnetische Eigenschaften **1**, 126f.
Eisen-Kobalt-Legierungen, — — **1**, 133f.
Eisen-Kobalt-Nickel-Legierungen, — — **1**, 131 ff., 134f.
Eisen-Nickel-Legierungen, — — **1**, 127ff.
Eisenverluste und Erwärmung bei Wicklungsspulen **1**, 44ff.
Elastizitätsgrenze Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 97f.
Elastizitätsmodul — — **2**, 97f.
Elektrische Elemente, Gleichungen **1**, 7.
— Entsprechungen mechanischer Schaltungen **1**, 11ff.
— Gebilde, Arten der Zusammenschaltung **1**, 4.
— —, Wahl der Zählrichtungen **1**, 6.
— Maschinen, thermische Wicklungszeitkonstanten **1**, 24ff.
— Netzwerke, Gemeinschaftsschwingungen **1**, 69ff.
— Schaltbilder für elektromechanische Gebilde **1**, 1ff.
— und mechanische Gemeinschaftsschwingungen gekoppelter Netzwerke **1**, 88ff.
Elektrisches Ersatzschaltbild des elektromagnetischen Telephons **1**, 20.
— — — — Tonabnehmers **1**, 19.
— — — — Umwandlers **1**, 19.
— — — Trichterlautsprechers **1**, 16f.
Elektrodynamischer Lautsprecher **1**, 15ff.
— Umwandler **1**, 14ff.
Elektrolyteisen, Entmagnetisierungsfaktor **2**, 33f.
Elektromagnetische Welle **1**, 4.

- Elektromagnetischer Umwandler **1**, 18ff.
 Elektromechanische Gebilde, Darstellung durch elektrische Schaltbilder **1**, 1ff.
 Elektrostatischer Lautsprecher **1**, 22.
 — Umwandler **1**, 20ff.
 Elektrostatisches Mikrophon **1**, 22.
 Elementarvorgänge bei Gasentladungen **2**, 40ff.
 — — — an den Wänden **2**, 45.
 Emissionskonstante von Oxydglühkathoden **2**, 81f.
 — — — und Sauerstoffeinfluß **2**, 83ff.
 Emissionsmechanismus von Oxydglühkathoden **2**, 75ff.
 Emissionsmessung — — **2**, 77ff.
 Energie des ferromagnetischen Kristalls **2**, 2ff.
 Entladeverzug in Luft **2**, 52ff.
 — — —, Elektrodenmaterialieneinfluß **2**, 72f.
 — — —, Ionisierungseinfluß **2**, 63ff.
 — — —, Oberflächenionisierungseinfluß **2**, 67ff.
 — — —, Verteilungskurven **2**, 53ff., 58ff.
 Entmagnetisierungsfaktor, ballistischer **2**, 25ff.
 —, —, von Ellipsoiden **2**, 31f.
 —, —, — Zylindern **2**, 27ff., 31f., 34.
 —, magnetometrischer **2**, 28.
 Entsprechungen zwischen elektrischen und elektromagnetischen oder elektrodynamischen Größen **1**, 3.
 — — — — mechanischen Gebilden **1**, 3ff., 8f., 11ff.
 Erwärmung der Ständerwicklung eines Drehstromgenerators **1**, 53ff.
 — stromdurchflossener Spulen **1**, 26ff.
 — von Dynamoankerwicklungen **1**, 36ff.
 — — Spulen mit rechteckigem Querschnitt **1**, 29ff.
- Fadenbruchzahl bei Ringspinnmaschinen **1**, 108f.
 Ferromagnetischer Curiepunkt **1**, 124ff.
 — Kristall, freie Energie **2**, 2.
 — —, Verzerrungsenergie **2**, 2ff.
 Festigkeit vergüteter Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 97f.
 Flußeisenellipsoid, magnetometrische Messung **2**, 22ff.
 Frequenzschwingungen gekoppelter Netzwerke bei Belastungsstößen **1**, 94ff.
- Gasentladungen, Ähnlichkeitsgesetze für nichtstationäre — **2**, 45f.
 —, — — stationäre — **2**, 37ff.
 —, chemische Reaktionen bei — **2**, 49f.
 —, Elementarvorgänge bei — **2**, 40ff.
 —, Übertemperaturen bei — **2**, 46ff.
 Geschwindigkeitsregelung bei Kammgarn-Ringspinnmaschinen **1**, 122.
 Gleichstrommaschinenankerwicklungen, Wärmeabgabe **1**, 41ff.
 Gleichstrommaschinenmagnetspulen, Wärmeabgabe **1**, 25ff.
 Grunddrehzahlregelung bei Ringspinnmaschinen **1**, 109ff.
- Härte Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 96ff.
 Härtung von Phenol-Formaldehyd-Harzen **2**, 99ff., 112.
- — Schellack **2**, 99, 103ff., 109.
 Helmholtz-Gaugainsche Spulen **2**, 15, 18.
 Hexagonale Kobalt-Nickel-Eisen-Legierungen, magnetische Eigenschaften **1**, 134ff.
 Hystereseschleifen von Eisen, Temperatureinfluß **1**, 126f.
 — — Nickel, — **1**, 125f.
 — — Nickel-Eisen-Kobalt-Legierungen **1**, 131.
- Ionendiffusion **2**, 41f.
 Ionenrekombination **2**, 42.
 Ionenwanderung im elektrischen Feld **2**, 41.
 Ionisation, stufenweise, bei Gasentladungen **2**, 43ff.
 — durch Elektronenstoß — — **2**, 40f.
 Ionisierungseinfluß auf den Entladeverzug **2**, 63ff.
- Käfigwicklungen, Temperaturverteilung **1**, 33ff., 45ff.
 Kalzium und Berylliumoxyd **2**, 89ff.
 Kammgarn-Ringspinnmaschinen, Fadenbruchzahl **1**, 108f.
 — —, günstigster Drehzahlverlauf **1**, 107ff.
 — —, Spinnregler **1**, 103ff.
 — —, wirtschaftlichste Betriebsweise **1**, 103ff.
 Kathodenstrahlzillographenschaltung **2**, 54ff.
 Kobalt-Eisen-Legierungen, magnetische Eigenschaften **1**, 133f.
 Kobalt-Nickel-Eisen-Legierungen, — — **1**, 131ff.
 —, hexagonale, — — **1**, 134ff.
 —, —, thermische Ausdehnung **1**, 139.
 Koerzitivkraftmessung, magnetometrische **2**, 22.
 Koerzitivkraft von Eisen, Temperaturabhängigkeit **1**, 127.
 — — Eisen-Kobalt-Legierungen, — **1**, 134.
 — — Eisen-Nickel-Legierungen, — **1**, 129ff.
 — — Nickel, — **1**, 126.
 — — Nickel-Eisen-Kobalt-Legierungen, — **1**, 131.
 Kohlenstoff und Berylliumoxyd **2**, 88f.
 Kräftekreisbilder des elektromagnetischen Tonabnehmers **1**, 19.
 — — elektrostatischen Mikrophons **1**, 22.
 — — Trichterlautsprechers **1**, 16.
 — mechanischer Anordnungen **1**, 11ff.
 — — Gebilde **1**, 9ff.
 — — widerstandsreziproker Schaltungen **1**, 13.
- Kraftmaschinen, Reglerschwingungen gekoppelter — **1**, 82ff.
 Kraftquelle, Kräftekreisbild **1**, 9.
 Kühlfahneinfluß bei Ankerwicklungen **1**, 41ff.
 Kupferelektroden beim Entladeverzug in Luft **2**, 59ff., 66ff., 70ff.
 Kupfer-Nickel-Legierungen, berylliumhaltige **2**, 93ff.
 Kupferoxyd beim Entladeverzug in Luft **2**, 60ff., 67, 72f.
- Lagendrehzahlregelung bei Ringspinnmaschinen **1**, 113ff.
 Lautsprecher, elektrostatischer **1**, 22.
 Leistungsstoß bei gekoppelten Netzwerken **1**, 98ff.
 Lithium und Berylliumoxyd **2**, 89ff.
 Luftfeuchtigkeit und Entladeverzug **2**, 73.

- Magnesium und Berylliumoxyd** **2**, 89ff.
Magnetische Eigenschaften hexagonaler Kobalt-Nickel-Eisen-Legierungen **1**, 134ff.
 — — von Eisen **1**, 126f.
 — — — Eisen-Kobalt-Legierungen **1**, 133f.
 — — — Eisen-Nickel-Legierungen **1**, 127ff.
 — — — Nickel **1**, 125f.
 — — — Nickel-Eisen-Kobalt-Legierungen **1**, 131ff.
Magnetisches Material mit inneren Spannungen, Energie und Magnetisierungsrichtung **2**, 1ff.
 — — — —, reversible Vorgänge **2**, 1ff.
 — —, polykristallines **2**, 7, 9.
Magnetometer, astatiches Kompensations- **2**, 12ff.
 —, — —, Ausführungseinzelheiten **2**, 16ff.
 —, — —, Empfindlichkeit **2**, 15.
 —, — —, Justierung **2**, 20f.
 —, — —, Messungen **2**, 22ff.
Magnetostriktion **2**, 5f., 8, 10f.
Magnetspulen mit rechteckigem Querschnitt, Erwärmung **1**, 29ff.
 — von Gleichstrommaschinen, Wärmeabgabe **1**, 25ff.
Maschinen, thermische Wicklungszeitkonstanten elektrischer — **1**, 24ff.
Masse, Kräftekreisbild **1**, 10.
Mechanische Elemente, Gleichungen **1**, 7.
 — Gebilde, Arten der Zusammenschaltung **1**, 4.
 — —, Gruppen **1**, 3ff.
 — —, lineare **1**, 1, 4.
 — —, mechanische Grundelemente **1**, 4.
 — —, nichtlineare **1**, 4f.
 — —, Wahl der Zählrichtungen **1**, 6.
 — Schaltungen **1**, 5f.
 — —, widerstandsreziproke **1**, 13f.
 — — und elektrische Entsprechungen **1**, 11ff.
 — und elektrische Gemeinschaftsschwingungen gekuppelter Netzwerke **1**, 88ff.
Metastabile Atome bei Gasentladungen **2**, 43ff.
Mikrophon, elektrostatisches **1**, 22.

Nachgiebigkeit, Kräftekreisbild **1**, 10.
Netz, Energiebilanz des Netzes **1**, 83.
 —, Leistungsschwankung des — **1**, 84.
Netze, Schwingungen asynchroner — mit gekuppelten Synchronkraftwerken **1**, 69ff.
Netzschwankungen bei Synchron- und Asynchronmaschinen **1**, 73.
Netzwerke, Belastungsstoßschwingungen gekuppelter — **1**, 94ff.
 —, elektrische und mechanische Gemeinschaftsschwingungen **1**, 88ff.
 —, Leistungsstoß auf gekuppelte — **1**, 98ff.
Nickel, magnetische Eigenschaften **1**, 125f.
Nickel-Eisenkobalt-Legierungen, — — **1**, 131ff.
Nickel-Eisen-Legierungen, — — **1**, 127ff.
Nickel-Kupfer-Legierungen, berylliumhaltige **2**, 93ff.

Oberflächenionisierung und Entladeverzug in Luft **2**, 63ff.
Oxydglühkathoden, Emissionskonstante **2**, 81f.
 —, — und Betriebsbedingungen **2**, 82f.
 —, — — Sauerstoff **2**, 83ff.

Oxydglühkathoden, Emissionskonstantenmessung **2**, 77ff.
 —, Emissionsmechanismus **2**, 75ff.
 —, Reaktivierung **2**, 85ff.
 —, Temperaturbestimmung **2**, 79f.

Paramagnetischer Curiepunkt **1**, 124ff.
Permalloy, Entmagnetisierungsfaktor **2**, 32f.
Permeabilität, reversible, hexagonaler Kobaltlegierungen **1**, 137ff.
Phenolformaldehyd-Harze, gehärtete, in der Wärme **2**, 112.
 —, Härtungsvorgang **2**, 100ff.
Phenolformaldehydkondensation **2**, 100ff.

Reaktivierung von Oxydglühkathoden **2**, 85ff.
Reduzierbarkeit von Berylliumoxyd **2**, 88ff.
Reglerschwingungen gekuppelter Kraftmaschinen **1**, 82ff.
Reibungswiderstand, Kräftekreisbild **1**, 10.
Relativgeschwindigkeitsquelle, Kräftekreisbild **1**, 9.
Remanenz von Eisen, Temperatureinfluß **1**, 127.
 — — Eisen-Kobalt-Legierungen, — **1**, 134.
 — — Eisen-Nickel-Legierungen, — **1**, 129f.
 — — Nickel, — **1**, 126.
 — — Nickel-Eisenkobalt-Legierungen, — **1**, 131.
Remanenzpunkt, Magnetostriktion am — **2**, 10f.
Reversible Vorgänge in magnetischem Material mit inneren Spannungen **2**, 1ff.
Richardsonsches Elektronenemissionsgesetz **2**, 75ff., 79ff., 82ff., 85, 87.
Ringspinnmaschinen, Kammgarn-, Betriebsweise **1**, 103ff.
 —, —, Grunddrehzahlregelung **1**, 109ff.
 —, —, Lagendrehzahlregelung **1**, 113ff.
 —, —, Lagenregelung **1**, 119f.
 —, —, Mehrproduktion **1**, 111ff., 118f.

Sauerstoffeinfluß bei Oxydglühkathoden **2**, 83ff.
Schallwelle **1**, 3.
Schalbilder, elektrische, für elektromechanische Gebilde **1**, 1ff.
Schellack, chemische Zusammensetzung **2**, 104f.
 —, gehärteter, in der Wärme **2**, 106ff.
 —, Härtungsvorgang **2**, 103, 105, 109ff.
 —, Warmbiegefestigkeit **2**, 108f.
Schellackhärtung, Druckeinfluß **2**, 110ff.
 —, Temperatureinfluß **2**, 110.
 —, Zeiteinfluß **2**, 109f.
Schellackreinharz **2**, 103f.
Schellolsäure **2**, 104f.
Schwingungen gekuppelter Netzwerke, mechanische und elektrische **1**, 88ff.
 — — Synchronkraftwerke mit asynchronen Netzen **1**, 69ff.
Silizium und Berylliumoxyd **2**, 89ff.
Spannungen, innere, im magnetischem Material **2**, 1ff.
Spinnregler für Kammgarn-Ringspinnmaschinen **1**, 103ff.
Stab, ballistischer Entmagnetisierungsfaktor **2**, 25ff.
Ständerstromverlauf bei Stoßerregung der Blindleistungsmaschine **1**, 61ff.

- Ständerwicklung eines Drehstromgenerators, Erwärmung **1**, 53ff.
 — — —, Temperaturverlauf **1**, 55ff.
 Stoßerregung der Blindleistungsmaschine **1**, 60ff., 64ff.
 — — —, Ständerstromverlauf **1**, 61ff.
 — — —, Vergleich einer synchronen und asynchronen **1**, 64ff.
 Streckgrenze Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 97f.
 Streuzeit, statistische, des Entladeverzugs **2**, 60ff.
 —, — — — und Oberflächenionisierung **2**, 67ff.
 Stromverlauf, zeitlicher, der Blindleistungsmaschine beim Stoß **1**, 67f.
 Synchronkraftwerke, Schwingungen gekuppelter — mit asynchronen Netzen **1**, 69ff.
 Synchronmaschine, Zusammenwirken mit Asynchronmaschine **1**, 72ff.
 —, — — —, Dämpfung asynchroner Pendelschwingungen **1**, 74ff.
 Synchronmaschinen am Netz **1**, 76ff.
- Telephon, elektromagnetisches **1**, 20.
 Temperaturbestimmung bei Oxydglühkathoden **2**, 79f.
 Temperatureinfluß auf Schellackhärtung **2**, 110.
 Temperaturverlauf einer Drehstromgeneratorständerwicklung **1**, 55ff.
 — in Eisen eingebetteter Wicklungsspulen **1**, 45ff.
 — teilweise — — — — **1**, 36ff.
 Temperaturverteilung von Dämpferwicklungen **1**, 33ff.
 — — Käfigwicklungen **1**, 33ff.
 Thermische Ausdehnung hexagonaler Kobaltlegierungen **1**, 139.
 — Zeitkonstanten von Wicklungen elektrischer Maschinen **1**, 24ff.
 Thermisches Ähnlichkeitsgesetz bei Gasentladungen **2**, 48f.
 Tonabnehmer, elektromagnetischer **1**, 19.
 Trichterlautsprecher **1**, 16ff.
- Überspannungshöhe und Entladeverzug in Luft **2**, 59f.
 Übertemperaturen bei Gasentladungen **2**, 46ff.
- Übertemperaturen bei Wicklungen elektrischer Maschinen **1**, 28, 31, 35, 50.
 Übertrager **1**, 3, 12f.
 Umwandler, elektrodynamischer **1**, 14ff.
 —, elektromagnetischer **1**, 18ff.
 —, elektrostatischer **1**, 20ff.
- Vergütung Be-haltiger Cu-Ni-Legierungen **2**, 94ff.
 Verteilungskurve des Entladeverzuges in Luft **2**, 52ff.
 — — — — —, Oberflächenionisierungseinfluß **2**, 67ff.
 — — — — —, Überspannungseinfluß **2**, 57f., 59f.
 Verzerrung, Anfangspermeabilität bei starker — **2**, 6ff.
 —, Wirkung einer zusätzlichen — **2**, 8ff.
 Verzerrungsenergie des ferromagnetischen Kristalls **2**, 2ff.
 — — — — —, Eigenvektoren **2**, 4ff.
 — — — — —, Eigenwerte **2**, 4ff.
 Verzögerungszeit beim Entladeverzug **2**, 57f.
- Wärmeabgabe an den Seitenflächen von Magnetspulen **1**, 26ff.
 — der Ankerwicklungen bei Gleichstrommaschinen **1**, 41ff.
 — der Magnetspulen von Gleichstrommaschinen **1**, 25ff.
 — von Transformatorwicklungen **1**, 32f.
- Wärmeaustausch in Eisen eingebetteter Wicklungsspulen **1**, 44ff.
 — unterteilter Blechpakete **1**, 49ff.
 Warmbiegefestigkeit von Schellack **2**, 108ff.
 Wechselstromkollektormotoren, Wärmeabgabe **1**, 42ff.
- Wicklungen elektrischer Maschinen, Einfluß der Eisenverluste **1**, 44ff.
 — — —, thermische Zeitkonstanten **1**, 24ff.
- Widerstandsreziproke mechanische Schaltungen **1**, 13f.
- Zeiteinfluß auf Schellackhärtung **2**, 109f.
 Zeitkonstanten von Blindleistungsmaschinen **1**, 63f.
 —, thermische, von Wicklungen elektrischer Maschinen **1**, 24ff.