Д.Я. Стройк

КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

5–Е ИЗДАНИЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Перевод с немецкого И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКОМАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.1г
С86
УДК 51(091)

ABRISS DER GESCHICHTE
DER MATHEMATIK

VON DIRK J. STRUIK

VEB DEUTSCHER VERLAQ
DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1963

С т р о й к Д. Я. **Краткий очерк истории математики.** Пер. с нем.—5-изд., испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.мат. лит., 1990.— 256 с. ISBN 5-02-014329-4.

Книга известного голландского математика и историка математики Д. Стройка является одной из лучших в мировой математической литературе, в ней живым, образным языком изложена история математики от зарождения этой науки до конца 19го столетия. 4е изд.— 1984 г.

Для преподавателей математики, студентов университетов и педагогических институтов, лиц, интересующихся математикой, ее историей и историей науки вообще.

С1602010000117　3290
053 (02) 90

ISBN 5020143294

Предисловие OCR-редактора

История математики, как свидетельствует практика, мало интересует самих математиков, а философы недостаточно математически подкованы, чтобы чувствовать себя здесь уверенно. Книга Стройка частично восполняет лакуну в Интернет-контенте данной области.

Книга была отсканирована и отредактирована в конце марта 2005 (вплоть до 4.04.2005). Я придерживался принципа отображения «страница-в-страницу», т.е. порядковый номер страницы оригинала совпадает номером, вставляемым Вордом. Некоторые формулы были набраны вручную, списки литературы сверялись в незначительной степени, поэтому они изобилуют опечатками (у меня не хватило сил их править, равно как и изменять в подстрочнике апостроф на единицу).

Matigor, mivmiv_@aport.ru

ПРЕДИСЛОВИЕ
КО ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

«Краткий очерк истории математики» известного голландского математика и историка науки Д. Я. Стройка не нуждается в особых рекомендациях. С 1948 г., когда эта книга появилась на английском языке, она вышла в переводе на польский (двумя изданиями), украинский, немецкий (четырьмя изданиями), венгерский, китайский, японский и чешский языки; потребовались и два новых английских издания книги. В очень скромном объеме автор дал последовательное и живое изложение основных фактов, событий, идейных направлений многовековой истории математики от ее зарождения до начала двадцатого столетия, все это — с учетом движущих сил общественного развития в целом. Принципиальные установки автора с достаточной четкостью сформулированы в его предисловии к немецкому изданию, а также в предисловии, написанном им для русского издания. Среди выдвигаемых Д. Я. Стройком положений есть и спорные, но несомненно, что его книга не догматична, она будит мысль н вполне соответствует современному состоянию истории науки.

Перевод сделан с учетом немецких изданий, в которые автор внес ряд изменений и дополнений. В соответствии с пожеланиями автора и издательства переводчик добавил несколько параграфов по истории математики в России[1]) (эти параграфы отмечены звездочкой), а также значительно пополнил библиографию и снабдил примечаниями некоторые места авторского текста. Эти примечания имеют свою нумерацию и обозначены числами в квадратных скобках.

И. Погребысский

') Пятое издание печатается без добавлений переводчика.— *Примеч. редакции*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Впервые эта история математики появилась в 1948 г. (изд. Dover Company в НьюЙорке). В предшествовавшие годы я время от времени читал курсы лекций по истории естествознания и математики в Массачусетском технологическом институте, и первый такой курс был прочитан по предложению профессора Тайлера (Harry W. Tyler), известного как соавтор, вместе с Седжвиком (W. T. Sedgwick), учебника по истории естествознания (1917 г.), одной из первых книг такого рода в США. А мое первое знакомство с историей естествознания состоялось в годы, когда я был студентом Лейденского университета, где Вольграф (J. A. Vollgraf) читал лекции небольшой студенческой аудитории, — тот самый др Вольграф, который вложил столько добросовестного и самоотверженного труда в издание собрания сочинений Гюйгенса. Но понастоящему я заинтересовался историей математики во время пребывания в Италии в 1924— 1925 гг., когда Бортолотти (Etlore Bortolotti) познакомил меня со своими исследованиями о болонских алгебраистах шестнадцатого века. Этот интерес усилился благодаря встречам в Риме с Энриквесом (F. Enriques) и Вакка (G. Vacca), авторами замечательных работ по истории науки. Там же я встретился с Джино Лориа (Gino Loria). На классической почве Италии нетрудно заинтересоваться историей нашего научного наследия.

С самого начала я понял, что история математики — не только история развития понятий, но одна из частей истории человеческой деятельности, в которой отражается борьба человека с природой, притом не абстрактного человека, а человека как члена общества. Однако большинство историков математики рассматривают ее почти исключительно как историю идей, понятий, переходящих от одного математика к другому, который их далее развивает. Галилей повлиял на Кавальери, Кавальери — на Торричелли, Торричелли — на Паскаля, Паскаль — на Лейбница, а Лейбниц — на братьев Бернулли. Эти историки лишь при случае упоминают о том или ином важном политическом или религиозном событии — таком, как завоевания Александра Македонского или распространение ислама,— влияние которого на развитие математики столь велико, что игнорировать его нельзя. Этот метод односторонен, но не ошибочен — он выявляет важные этапы в истории математики. Но при этом не выясняется, что существует тесная зависимость между математикой и общекультурными устремлениями эпохи, устремлениями, которые сами отражают, непосредственно или опосредствованно, преобладающие общественные и экономические условия.

Важным примером является деятельность алгебраистов шестнадцатого столетия. Эти математики Возрождения были участниками общего культурного движения, заодно они были творческими медиками, архитекторами, живописцами, гражданскими и военными инженерами, были и купцами; бурное развитие больших и могущественных торговых городов вдохновляло их деятельность. Ранний меркантилизм дал нам не только новую теорию алгебраических уравнений, но и новую науку о перспективе.

Часто мы вынуждены ограничиваться только историей идей, в частности, при рассмотрении эпох, когда трудно собрать или истолковать данные социальноэкономического характера, как в случае древней Индии. Однако мы можем утверждать, что, вообще говоря, важные направления математического творчества (или отсутствие такового) можно понять только в связи, косвенной или непосредственной, с социальноэкономическими условиями. Такой гений, как Ньютон, может прокладывать новые пути в математике и механике только тогда, когда есть в обществе классы, готовые поддерживать и ободрять его, готовые создать ему условия для работы и для того, чтобы быть услышанным. Характер греческой математики, как доэллинистической, так и эллинистической, можно понять только при условии учета того, каким было древнее средиземноморское общество — общество, где благодаря рабству мог существовать класс располагавших досугом людей,— причем в восточных областях существовал контакт с общественными формами, основанными на ирригационном земледелии. Столь же верно, что возникновение в семнадцатом столетии современной математики можно понять лишь с учетом того, что в то время в экономической жизни Западной Европы капиталистические общественные формы начинают брать верх над отступающим феодализмом. Такие же обстоятельства надо учитывать, если мы пытаемся найти ответ на вопрос, почему Китай, где многие столетия наука и техника развивались на уровне Европы или превосходя его, не принял участия в революции Галилея — Декарта,— проблема, которой много занимался Нидхем (Needham). Понимание природы современного капиталистического, а теперь и социалистического промышленного общества необходимо, чтобы уяснить себе направление, в котором математика развивалась за последние сто пятьдесят лет. Влияние общественноэкономических факторов на это развитие обычно не было непосредственным. Факторы эти влияли чаще через физику, географию, навигацию или даже архитектуру, живопись, религию и философию. Важные математические исследования редко бывают прямым результатом общественного воздействия, в них нет ничего утилитарного. Харди (G.H. Hardy) както заметил, что «настоящая» математика «настоящих» математиков, математика Ферма и Эйлера, математика Гаусса, Абеля и Римана почти полностью «бесполезна» с точки зрения практического использования. Но суть дела не в этом (хотя удивительно много из этой «бесполезной» математики прошлого стало практически «полезным» в наш век вычислений, космических полетов, автоматизации и вообще научной технологии). Мы должны стараться понять, *каким образом* общество влияет на точные науки, и это часто значительно углубляет наше понимание направлений, господствующих в этих науках. Конечно, верно, что общество, в котором развиваются университеты, поддерживает форму научной деятельности, когда можно жить в мире собственных идей. Но этот мир идей является своеобразным выражением нужд или тенденций эпохи — достаточно вспомнить о том, как теория групп объединила несколько различных областей математики, ранее развивавшихся почти независимо. Подобное явление в области чистой мысли было следствием огромного объема геометрических исследований в годы, последовавшие за французской революцией, и связанного с этим революционизирования математической мысли. Роль Гаусса в математике можно сравнить с ролью Ге геля в философии, Бетховена в музыке, Гёте в литературе. А разве Галуа не был воистину сыном французской революции?

Весьма поучительный пример того, как нематематические факторы стимулируют математические изыскания, Представляют поиски метода определения долготы судна, длившиеся три столетия, начиная с путешествий Васко да Гама и Колумба. В период воинствующего меркантилизма эти поиски преследовали вполне практическую цель — обеспечить безопасность океанских плаваний. Правительства, академии и частные лица поощряли занятия проблемой определения долгот почестями, пожертвованиями и премиями. Одним из мотивов при создании Лондонского Королевского общества и Парижской академии наук была необходимость решить эту насущную проблему. В поисках ее решений были усовершенствованы навигационные приборы и часы, исследовано движение Луны и спутников Юпитера. Математика выиграла при этом благодаря исследованиям Гюйгенса о маятниковых часах и Ньютона о задаче двух тел (напомним об очерке Б. Гессена о Ньютоне, 1931г.). В свою очередь труды Ньютона привели Эйлера к исследованию движения Луны как одного из случаев задачи трех тел. Нужды картографии вызвали к жизни математические теории Меркатора и Ламберта. Гук, экспериментируя с пружинными стопорами, заложил основы теории упругости, а Галлей, проводя опыты в Атлантике, стал основателем теории земного магнетизма. Все эти исследования по картографии, навигации, механике и астрономии оплодотворили математику этой эпохи, в частности анализ. Это влияние было и непосредственным, и опосредствованным: механистическая философия тех дней охотно пользовалась часами как моделью вселенной и рассматривала математику, как ключ к постижению своих проблем. Как известно, проблема долгот была в конце концов решена, когда изобрели хронометр и создали удовлетворительную теорию Луны.

Однако никогда мы не должны забывать, что сами идеи способны порождать новые идеи. Немало математических открытий было сделано в области отвлеченной мысли, когда какойнибудь мыслитель оказывал влияние на своих коллег или учеников. В том, что математику описывают как постепенное развитие идей, то непрерывное, то скачкообразное, есть большая доля истины. Обозначения тоже имеют определенное значение: замена прежних обозначений лучшими создает новую форму для создания новых идей. Хотя историки математики не пользуются гегелевской терминологией, развитие математики вполне можно описать в терминах Гегеля: сложение положительных целых чисел отрицается в вычитании, а оно в свою очередь отрицается на высшем уровне арифметики, когда вводятся как положительные, так и отрицательные числа. Можно пользоваться, описывая математические открытия, такими терминами диалектики, как «объективизация» и «отчуждение», хотя я не советовал бы это делать. Таким образом можно превратить историю математики, рассматриваемую только как история идей, в новую и специализированную «феноменологию духа», в феноменологию ума, и компетентный автор смог бы воздвигнуть своими руками великолепный дворец мысли. «Философия математики» Германа Вейля иногда напоминает мне такую феноменологию, будучи сходна с гегелевской и в отдельных уступках материалистическому мировоззрению.

Все же такой подход к истории математики, при всей своей привлекательности, остается односторонним, а порой даже дезориентирует. Мы должны всегда помнить, что математические понятия — не произвольные творения ума, а отражение реального, объективного мира, пусть часто в весьма абстрактном виде. Это объясняет, почему математики различных эпох могли понимать друг друга, почему теоретическая математика может стать прикладной математикой и почему прикладная математика может выражать законы механики, физики, даже законы некоторых областей биологии и экономической науки. Это объясняет также, почему возможна материалистическая диалектика математики, на что указывал Фридрих Энгельс. Поэтому историк математики должен действовать осмотрительно, учитывая свободу математического творчества в создании своих собственных понятий и в то же время сознавая, что эти понятия могут иметь ценность в ходе дальнейшего развития математики лишь при условии, что они выражают какуюто зависимость, какуюто закономерность реального мира, мира чувственных восприятий, в котором человек живет как существо общественное.

Позволю себе закончить это введение замечанием другого рода. Преподавание истории математики окажется пустой тратой времени, если студенты из-за языковых трудностей не смогут читать тексты в оригинале, оказав шись в полной зависимости от того, что узнают из вторых илп третьих рук. Это все равно что изучать историю английской литературы, не будучи в состоянии читать Шекспира, или историю русской литературы, не читая Пушкина. Это является помехой особенно в Соединенных Штатах, где студентам часто трудно читать на какомлибо языке, кроме английского, но такие трудности должны быть и в других странах, особенно когда дело доходит до латинских текстов. Греческие математики не причиняют затруднений, так как главные авторы — Евклид, Архимед, Диофант — имеются в превосходных переводах на многие языки, хотя и здесь есть существенные пробелы (например, повидимому, нет английского перевода Паппа). Такое затруднение можно преодолеть лишь при услввии, что все большее число классиков таких, как Кеплер, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, будет доступно в дешевых изданиях их переводов с необходимыми комментариями. Такую работу надо вести систематически, а не от случая к случаю, в зависимости от прихоти того или иного переводчика. Тем временем известную помощь может оказать собрание текстов, доступных в переводах. Мною уже был опубликован список переводов на английский язык (Scripta Mathematica.— 1949.— V. 15.— P. 115—131), и список этот убедительно показывает, насколько несистематически ведется эта работа.

Я признателен профессору А. П. Юшкевичу за его интерес к моей работе, что содействовало ее переводу на русский язык. Ценность этой книги возросла благодаря добавлению сведений по истории математики в России.

Д. Стройк

Массачусетский технологический институт
Кембридж, штат Массачусетс
17 декабря 1962 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Математика — широкое поприще идей, и ее история знакомит нас с некоторыми из благороднейших помыслов неисчислимых поколений. Можно было сжать эту историю до объема книги меньше, чем в триста страниц, только подчиняясь суровому требованию — давать очерк развития немногих основных идей и сводить к минимуму описание других направлений. Биографии сведены к наброскам, многие достаточно важные авторы, например Гоберваль, Ламберт, Шварц, опущены. Но, быть может, наибольший ущерб причинен неполнотой описания общей культурной и общественной атмосферы, в которой формировалось (или затухало) развитие математики в ту или иную эпоху. На математику оказывали влияние земледелие, торговля и промышленность, военное дело, инженерное дело и философия, физика и астрономия. Влияние гидродинамики на теорию функций, влияние кантианства и землемерия на геометрию, электромагнетизма — на теорию дифференциальных уравнений, картезианства — на механику и схоластики — на математический анализ — обо всем этом можно было сказать лишь несколько фраз или, пожалуй, несколько слов. Между тем добиться понимания хода развития и содержания математики можно лишь при учете всех этих определяющих факторов. Ссылка на литературу нередко заменяет исторический анализ. И наша история заканчивается 1900-м годом, так как современная математика — настолько многосторонняя наука, что невозможно — по крайней мере для автора этой книги — дать компетентную оценку хотя бы ее основных направлений[1]).

') См в связи с этим Weyl H. A. Halfcentury of Malhematics / Amer. Math. Monthly.—1951.—V. 58.—P. 523—553.

Все же я надеюсь, что, несмотря на такие ограничения удалось дать вполне добросовестное описание главных направлений, по которым в течение веков шло развитие математики, и тех общественных и культурных условий, в которых оно происходило. Конечно, отбор материала не был обусловлен только объективными факторами — сказывались симпатии и антипатии автора, степень его осведомленности.

Что касается последнего, надо сказать, что не всегда автор мог непосредственно опираться на источники, слишком часто приходилось пользоваться источниками из вторых и даже третьих рук. Поэтому следует посоветовать (что относится не только к этой книге, но и ко всем исследованиям такого рода) по возможности проверять утверждения автора, обращаясь к оригиналам. По многим причинам это является правильным положением. При изучении таких авторов, как Евклид, Диофант, Декарт, Лаплас, Гаусс или Риман, не следует ограничиваться только цитатами из исторических книг, в которых описаны их труды. В подлинниках Евклида и Гаусса содержится такая же живительная сила, как и в подлинниках Шекспира; у Архимеда, у Ферма, у Якоби можно найти столь же великолепные места, как у Горация или Эмерсона [1]).

В число положений, которыми руководствовался автор при изложении материала, входили следующие четыре:

1. Подчеркивать связи и родство восточных цивилизаций, а не исходить из механического разбиения на египетскую, вавилонскую, китайскую, индийскую и арабскую культуры.

2. Проводить различие между установленными фактами, гипотезами и преданиями, особенно в греческой математике.

3. Связать два течения в математике Возрождения, арифметикоалгебраическое и «флюкционное», с торговыми и техническими запросами эпохи соответственно.

4. Строить изложение математики девятнадцатого столетия больше по лицам и школам, чем по предметам. (Здесь в качестве основного руководства можно было принять книгу Клейна «Лекции о развитии математики в XIX столетии».) Изложение по отдельным дисциплинам дают книги Кеджори и Белла, а с большим числом тех

[1]) Эмерсон Ралф Уолдо (1803—1882) — известный американский критик, поэт и моралист.

нических подробностей — немецкая «Энциклопедия математических наук» (Enzyklopadie der mathematischen Wissenschaften, 24 тома, Лейпциг, 1898—1935) и Repertorium der hoheren Analysis (5 томов, Лейпциг, 1910—1929) Паскаля (Pascal).

Автор выражает свою благодарность О. Нейгебауеру, который охотно согласился прочесть первые главы книги, что дало возможность во многих местах улучшить изложение. Профессору А.П. Юшкевичу автор обязан многими улучшениями при изложении науки стран ислама.

Во втором английском издании исправлены многие опечатки и ошибки, имевшиеся в первом издании. Автор благодарен Р. Арчибалду (R. C. Archibald), Э. Дейкстерхойсу (E. J. Dijksterhuis), С. Иоффе (S. A. Joffe) и другим читателям книги, благодаря вниманию которых эти погрешности были обнаружены. В немецкое издание были внесены новые исправления.

Д. Стройк

ВВОДНЫЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Ниже приводится список ряда важнейших книг по истории, математики в целом. В этом списке не нуждаются те читатели, которые могут воспользоваться книгой Sarton G. The Study of the History of Mathematics.— Cambridge, 1936, содержащей не только интересное введение в наш предмет, по и полную библиографию. Данные о более поздней литературе можно найти в соответствующих отделах реферативных журналов по математике: Jahrbuch iiber die Fortschritte der gesamten Malhematik (нем.), Mathematical Reviews (амер.), Zentralblatt ftir Mathemalik (нем.) и реферативный журнал «Математика» (изд. Института научной информации АН СССР, с 1953 г.).

Работы советских ученых по истории математики приведены в библиографических указателях: История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1917—1947).— М., 1949; История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1948— 1958).— М., 1955. Полезна также книга Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1917—1952 гг.—М.; Л., 1957. Кроме того, см. Зубов В.П. Историография естественных наук в России.— М., 1956.

Книги на английском языке:

Archibald R. C. Outline of the History of Mathematics.— 6th ed.— Amer. Math. Montrly.— Jan. 1949.— № 561.

Эта книга в 114 с. дает прекрасный очерк истории математики и содержит много библиографических указаний.

Cajori F. A. History of Mathematics.—2nd ed.— N. Y., 1938. Это образцовая книга в 514 с.

Smith D. E. History of Mathematics. V. I.— Boston, 1923. V. II. Boston, 1925.

Автор книги ограничился в основном изложением истории элементарной математики, но приводит данные о всех выдающихся математиках и многочисленные иллюстрации, новые издания— 1951 — 1953, 1958.

Bell E. T. Men of Mathematics.—N. Y., 1937.

Bell E. T. The Development of Mathematics.—2nd ed.—N. Y.; London, 1945.

Эти две книги содержат обширный материал как о математиках, так и об их достижениях. Вторая книга посвящена главным образом математике XIX—XX вв.

Scott J. F. A History of Mathematics from Antiquity to the Beginning of the Nineteenth Century.— London, 1958.

Turnbull H. W. The Great Mathematicians.— London. 1929. Новое изд. N. Y., 1961.

Преимущественно элементарная математика рассматривается в книгах:

Sanford V. A. Short History of Mathematics.— Boston, 1930.

Rouse Ball W. VV. A Short Account of the History of Mathematics.— 6th ed.— London, 1915; переиздана в 1960 г.

Хорошо написанная, но устаревшая книга.

Eves H. An Introduction to the History of Mathematics.N. Y., 1953.

Интересный материал собран в книге Cajori F.A. History of Mathematical Notations. V. I.— Chicago, 1928. V. II. Chicago, 1929.

Образцовой книгой по истории математики все еще остается

Cantor M. Vorlesungen fiber Geschichte der Mathematik.— Bd 1—4.— Leipzig, 1900–1908.

Эта работа большого масштаба (четвертый том написан группой специалистов под общим руководством М. Кантора) охватывает историю математики до 1799 г. Во многих местах она устарела, особенно в разделах об античной математике, во многих частностях она ошибочна, но, как и раньше, она хороша для первой ориентировки.

Поправки к ней Эиестрема (G. Enestrom) и др. публиковались в журнале Bibliotheca Mathematica.

Другие книги на немецком языке:

Zeuthen H. G. Geschichle der Mathematik im Alterlum und Mittelalter.— Kopenhagen, 1896 (французское издание — Paris, 1902; первое датское издание вышло в

1893 г., в 1949 г. появилось второе датское издание, переработанное О. Нейгебауером, русский перевод (с нем. издания): Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века.— 2е изд.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938).

Zeuthen H. G. Geschichte der Mathematik im 16 und 17. Jahrhundert.— Leipzig, 1903; русский перевод: Цейт.ен Г. Г. История математики в XVI и XVII столетиях. 2-е изд. М.; Л.: ГОНТИ, 1938.

Giinther S., Wieleitner H. Geschichte der Mathematik.— Bd 1—2 (первый том написан Гюнтером, издано Вилейтнером).— Berlin, 1939. Написанная Вилейтнером часть вошла в русское издание: Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия.— М.: Физматгиз, 1960. 2е изд.— М.: Наука, 1966.

Tropfke J. Geschichte der Elmentarmathematik.— 2 Aufl. Bd 1–7. Leipzig, 1921-1924. 3 Aufl.— Bd 1 — 4. Leipzig, 1930-1940.

Первая часть первого тома переведена на русский язык: Тропфке И. Арифметика.— М., 1914.

В издание: Die Kultur der Gegenwart III, I.— Leipzig; Berlin, 1912 вошли работы:

Zeuthen H. G. Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter; Voss A. Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur; Timerding H. E. Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.

Becker O., Hofmann J. E. Geschichte der Mathematik.— Bonn, 1951.

Hofmann J. E. Geschichte der Mathematik.— Bd 1— 3.— Собрание Goschen.— Bd 226, 875, 882, Berlin, 1953— 1957.

Эти книги содержат подробный указатель литературы.

Becker O. Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.— Freiburg; Miinchen, 1954.

Немецкий перевод книги А. П. Юшкевича (см. ниже) является ее вторым, улучшенным изданием.

Старейшая книга по истории математики на французском языке

Montucla J. E. Historie des mathematiques.— T. 1— 4.— Paris, 1799—1802. Первое издание, в двух томах, появилось в 1758 г. Труд, где рассматривается прикладная математика, и сейчас представляет интерес.

Весьма интересна книга, выпущенная под коллективным псевдонимом группы современных математиков, Bourbaki, Nicolas. Elements d'histoire des mathematiques.— Paris, 1961.

Всю историю математики охватывают соответствующие главы большого коллективного труда

Hisloire generale des Sciences.— Т. 1—3.— Paris, 1960—1964, под общей редакцией профессора Татона (R. Taton).

Укажем также:

D'Ocagne M. Histoire abregee des Sciences mathematiques/Ouvrage recueilli et acheve par R. Dugas.— Paris, 1952.

Книга дает краткие очерки об ученых. Dedron I., Itard J. Mathematiques et mathematiciens.— Paris, 1919.

На итальянском языке есть хорошая книга: Loria G. Storia delle mathematiche.— Т. 1—3.— Torino, 1929—1933. См. также Bortolotti E. Storia della matematica elementare.— Т. 3.— Milano, 1950.— Р. 2. . Кроме того, укажем:

Caruccio E. Mathematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo.— Torino, 1958.

Книги на русском языке:

Кольман Э. Я. История математики в древности.— М.; Физматгиз, 1961.

Юшкевич А. П. История математики в средние века.— М.: Физматгиз, 1961.

Рыбников К. А. История математики.— Т. I.— М., 1960. Т. II.— М., 1963.

Шереметьевский В. П. Очерки по истории математики.— М., 1940.

Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России.— М.; Л.: Гостехиздат, 1946.

Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 г.— М.: Наука, 1968.

Б у р б а к и Н. Очррки по истории математики/Перевод с франц. И. Г. Башмаковой под ред. К. А. Рыбникова, М.: ИЛ, 1963.

История отечественной математики /Отв. ред. И. 3. Штокало. Т. I.— Киев, 1966. Т. П.— Киев, 1967. Т. III.— Киев, 1968. Т. IV (в двух книгах).— Киев, 1970. В первых двух томах изложение доведено до 1917 г., третий и четвертый тома посвящены советскому периоду. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/Под ред. А. П. Юшкевича, Т. I: С древнейших времен до начала нового времени.— М.: Наука,

1970. Т. II: Математика XVII столетия.— М.: Наука, 1970 Т. III: Математика XVIII столетия.— М.: Наука, 1970.

Имеются также историко-математические антологии;

Smith D. E. A Source Book iu Mathematics.—N. Y., 1929.

Wieleitner A. Mathemalische Quellenbucher.— Bd 1—4.— Berlin, 1927—1929; русский перевод; Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам, вып. 1—4.— М.; Л.: ГТТИ, 1932. 2е изд. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

Speiser A. Klassische Sliicke dor Malhematik.— Zurich; Leipzig, 1925.

Newmann I. R. The World of Mathematics.— V. 1— 4. N. Y., 1956.

Это сборник очерков о математике и о математиках.

Полезна также книга:

Callandier E. Celebres problemes mathematiques.— Paris, 1949.

Имеются также книги по истории отдельных дисциплин. Мы укажем следующие работы.

Dickson L. E. History of the Theory of Numbers.— V. 13.Washington, 19191927.

Muir T. The Theory of Determinants in the Historical Order of Development.—V. 1—4.—London, 1906—1923; Contributions to the History of Determinants 1900—1920.— London, 1930.

von Braunmuhl A. Vorlesungen uber Geschichte der Trigonomentrie. Bd 1.—Leipzig, 1900. Bd 2,— Leipzig, 1903.

Dantzig T. Number, The Language of Science.— 3rd ed.—N. Y., 1943.

Coolidge J. L. A History of Geometrical Methods.— Oxford. 1940.

Loria G. II passato e il presente delle principal! teorie geometriche.— 4 ed.—Torino, 1931.

Loria G. Storia della geometria descrittiva delle origine sino ai giorni nostri.—Milano, 1921.

Loria G. Curve piani special! algebriche e transcendenti.— T. 1—2.— Milano, 1930; нем. изд., Bd 1.— Leipzig, 1910; Bd 2. Leipzig, 1911.

Cajori F. A History of Mathematical Notations. V. 1.— Chicago, 1928. V. 2.—Chicago, 1929.

Karpinski L. C. The History of Arithmetic. — Chicago, 1925.

Walker H. W. Studies in the History of Statistical Methods.— Baltimore, 1929.

Reiff R. Geschichte der unendlichen Reihen,— Tubingen, 1889.

Todhunter I. History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century.— Cambridge, 1861.

Todhunter I. History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.— Cambridge, 1865.

Todhunter I. History of the Mathematical Theory of Attraction and the Figure of Earth from the Time of Newton to that of Laplace.— London, 1873.

Coolidge J. L. The Mathematics of Great Amateurs.— Oxford, 1949.

Archibald R. C. Mathematical Tables Makers.— N. Y., 1948.

Dugas R. Histoire de la mecanigue.—Neufchatel, 1950.

Boyer C. History of Analytic Geometry.— N. Y., 1956.

Boyer C. History of the Calculus and its Conceptual Development.— N. Y., 1949, 1959.

Beth E. W. Geschiedenis der logica.— Haag, 1944.

Из книг на русском языке по истории отдельных дисциплин укажем:

Тимченко И. Ю. Основания теории аналитических функций, ч. I: Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций.— Одесса, 1899; также в «Записках матем. отделения Новороссийского общества естествоисп.»— Одесса, 1892. Т. 12; 1896. Т. 16; 1899. Т. 19.

В этой книге собран огромный материал по истории развития основных понятий анализа.

Каган В. Ф. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии.— Одесса, 1907; также в «Записках Новороссийского университета».— Одесса, 1907.— Т. 108 и 109. Каган В. Ф. Основания геометрии, ч. I.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.

Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк.— Пг., 1919, 1922.

Кеджори Ф. История элементарной математики/ Перевод с англ, и дополнения И. Ю. Тимченко.— 2е изд.— Одесса, 1917.

Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики.— М., 1940.

Маркушевич А. И,. Очерки по истории теории аналитических функций.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Деимаи И. Я. История арифметики.— М., 1959.

Медведев Ф. А. Развитие теории множесгв в XIXвеке. М., 1965.

Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега.— М., 1966.

Песин И. Н. Развитие понятия интеграла.— М.,1966.

Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк.— М., 1967.

См. также литературу в конце каждой главы.

История математики излагается и в книгах по общей истории науки. Образцовым трудом является Sarton G. Introduction to the History of Science.— V. 1—5.— Washington; Baltimore, 1927—1948.

Изложение доведено до четырнадцатого столетия. В нашей книге транскрипция греческих и восточных имен дается, в основном, по Сартону.

Дополнением к пяти томам Сартона является книга Sarton G. The Study of the History of Science, with an Introductory Bibliography.— Cambridge, 1936').

Хорошая книга для школ:

Sedgwick W. Г., Tyler H. W. A Short History of Science. 2nd ed N. Y., 1939.

Влияние математики на культуру рассматривается в книге: Kline M. Mathematics in Western Culture.— N. Y., 1953.

Полезны также десять статей Миллера (G. A. Miller) : A first Lesson in the History of Mathematics, A second Lesson и т. д. в «National Mathematics Magazine», (с 1939. V. 13 до 1945. V. 19).

Периодические издания по истории математики или по истории естествознания в целом и т. п.:

Bibliotheca mathemalica, серии 1—3 (1884—1914).

Scripta mathematica (с 1932).

Isis (с 1913).

Revue d'histoire des sciences (с 1947).

Archives internationales d'histoire des sciences (с 1947).

Centaurus (с 1950).

NTM. Z. f. Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (с 1960).

') См. также книгу Сартона, указанную на с. 13.

Archiv fur Geschichte der Mathematik, der Naturwisscnschaflen und der Technik (1909—1931).

Physis (c 1959).

Archive for History of Exact Sciences (c 1960).

Mitteilungen zur Geschichte der Medizin, Naturwissenschaft und Technik (Referatenorgan, c 1961).

Вопросы истории естествознания и техники (с 1956),

Историко-математические исследования (с 1948).

См. также Труды Института истории естествознания АН СССР, тт. I—IV, 1947—1952, и продолжение этого издания под названием Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, 1954—1962 (по истории физикоматематических наук, т. 1, 5, 10, 15, 17, 19, 22, 28, 34, 43).

Глава I

НАЧАЛО

1. Наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе древнего каменного века — палеолита. В течение сотен тысячелетий этого периода люди жили в пещерах, в условиях, мало отличавшихся от жизни животных, и их энергия уходила преимущественно на добывание пищи простейшим способом — собиранием ее, где только это было возможно. Люди изготовляли орудия для охоты и рыболовства, вырабатывали язык для общения друг с другом, а в эпоху позднего палеолита украшали свое существование, создавая произведения искусства, статуэтки и рисунки. Возможно, рисунки в пещерах Франции и Испании (давности порядка 15 тысяч лет) имели ритуальное значение, но несомненно в них обнаруживается замечательное чувство формы.

Пока не произошел переход от простого *собирания* пищи к активному ее *производству,* от охоты и рыболовства к земледелию, люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений. Лишь с наступлением этого фундаментального перелома, переворота, когда пассивное отношение человека к природе сменилось активным, мы вступаем в новый каменный век, в неолит.

Это великое событие в истории человечества произошло примерно десять тысяч лет тому назад, когда ледяной покров в Европе и Азии начал таять и уступать место лесам и пустыням. Постепенно прекращались кочевые странствия в поисках пищи. Рыболовы и охотники все больше вытеснялись первобытными земледельцами. Такие земледельцы, оставаясь на одном месте, пока почва сохраняла плодородие, строили жилища, рассчитанный на более долгие сроки. Стали возникать деревни для защитй от непогоды и от врагов-хищников. Немало таких нео литических поселений раскопано. По их остаткам видно, как постепенно развивались такие простейшие ремесла, нак гончарное, ткацкое и плотничье. Существовали житницы, так что население могло, производя излишки, запасать продукты на зиму и на случай неурожая. Выпекали хлеб, варили пиво, в эпоху позднего неолита плавили и обрабатывали медь и бронзу. Совершались открытия, были изобретены гончарный круг и тележное колесо, совершенствовались лодки и жилища. Все эти замечательные новшества возникали лишь в пределах той или иной зоны и не всегда распространялись вне ее. Например, американские индейцы узнали о существовании тележного колеса лишь после прихода белых. Тем ие менее теми технического прогресса в колоссальной мере ускорился по сравнению с древним каменным веком.

Деревни вели между собой значительную торговлю, которая настолько развилась, что можно проследить наличие торговых связей между областями, удаленными на сотни километров друг от друга. Эту коммерческую деятельность сильно стимулировали открытие техники выплавки меди и бронзы и изготовление сначала медных, а затем бронзовых орудий и оружия. Это в свою очередь содействовало дальнейшему формированию языков. Слова этих языков выражали вполне конкретные вещи и весьма немногочисленные абстрактные понятия, но языки уже имели известный запас слов для простых числовых терминов и для некоторых пространственных образов. На таком уровне находились многие племена в Австралии, Америке и Африке, когда они впервые встретились с белыми людьми, а некоторые племена и сейчас живут в таких условиях, так что есть возможность изучить их обычаи и способы выражения мыслей.

2. Числовые термины, выражающие некоторые из «наиболее абстрактных понятий, какие в состоянии создать человеческий ум», как сказал Адам Смит, медленно входили в употребление. Впервые они появляются скорее как качественные, чем количественные термины, выражая различие лишь между одним (или, вернее, «какимто»— «какойто» скорее, чем «один человек») и двумя и многими. Древнее качественное происхождение числовых понятий и сейчас еще выявляется в тех особых двоичных терминах, которые имеются в некоторых языках, как, например, в греческом и кельтском. С расширением понятия числа большие числа сначала образовывались с

помощью сложения: 3 путем сложения 2 и 1, 4 путем сложения 2 и 2, 5 путем сложения 2 и 3.

Вот примеры счета некоторых австралийских племен:

Племя реки Муррей: 1 = энэа, 2 = петчевал, 3 = петчевалэнэа, 4 = петчевалпетчевал.

Камиларои: 1 = мал, 2 = булан, 3 = гулиба, 4 = буланбулан, 5 = булангулиба, 6 = гулибагулиба[1]).

Развитие ремесла и торговли содействовало кристаллизации понятия числа. Числа группировали и объединяли в большие единицы, обычно пользуясь пальцами одной руки или обеих рук — обычный в торговле прием. Это вело к счету сначала с основанием пять, потом с основанием десять, который дополнялся сложением, а иногда вычитанием, так что двенадцать воспринималось как 10+2, а девять — как 10 — 1[2]). Иногда за основу принимали 20 — число пальцев на руках и ногах. Из 307 систем счисления первобытных американских народов, исследованных Илсом (W. C. Eels), 146 были десятичными, 106 — пятичными и пятичнымидесятичными, остальные — двадцатичными и пятичнодвадцатнчными. В наиболее характерной форме система с основанием двадцать существовала у майя в Мексике и у кельтов в Европе. Числовые записи велись с помощью пучков, зарубок на палках, узлов на веревках, камешков или ракушек, сложенных по пять в кучки,— приемами, весьма схожими с теми, к каким в давние времена прибегал хозяин постоялого двора, пользовавшийся бирками. Для перехода от таких приемов к специальным символам для 5, 10, 20 и т. д. надо было сделать лишь один шаг, и именно такие символы мы обнаруживаем в пользовании в начале писанной истории, на так называемой заре цивилизации.

Древнейший пример пользования бирками приходится на эпоху палеолита. Это — обнаруженная в 1937 г. в Вестонице (Моравия) лучевая кость молодого волка длиной около 17 сантиметров с 55 глубокими зарубками. Первые двадцать пять зарубок размещены группами по пять, за ними идет зарубка двойной длины, заканчивающая этот ряд, а затем с новой зарубки двойной длины

[1]) Con ant L. The Number Concept.—N. Y., 1896.—P. 106— 107, с многими подобными примерами; см. также статью И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича, указанную в библиографии в конце этой главы.

[2]) Eels W. C. Number Systems of North American Indians // Amer. Math. Monthly— 1913.— V. 20.— P. 293.

начинается новый ряд из зарубок[1]). Итак, очевидно, что неправильно старое утверждение, которое мы находим у Якоба Гримма и которое часто повторяли, будто счет возник как счет на пальцах. Пальцевый счет, то есть счет пятками и десятками, возник только на известной ступени общественного развития. Но раз до этого дошли, появилась возможность выражать числа в системе счисления, что позволяло образовывать большие числа. Так возникла примитивная разновидность арифметики. Четырнадцать выражали как 10 + 4, иногда как 15 — 1. Умножение зародилось тогда, когда 20 выразили не как 10 + + 10, а как 2 X 10. Подобные двоичные действия выполнялись в течение тысячелетий, представляя собой нечто среднее между сложением и умножением, в частности в Египте и в доарийской культуре МохенджоДаро на Инде. Деление началось с того, что 10 стали выражать как «половину тела», хотя сознательное применение дробей оставалось крайне редким явлением. Например, у североамериканских племен известны только немногие случаи применения дробей, и почти всегда это только дробь ½, хотя иногда встречаются 1/3 и ¼ [2]).

Любопытно, что увлекались очень большими числами, к чему, может быть, побуждало общечеловеческое желание преувеличить численность стада или убитых врагов; пережитки такого уклона заметны в библии и в других религиозных книгах.

[i] Происхождение и развитие счета вообще, систем счисления в частности, и связанное с этим развитие понятия натурального числа изложены Д. Стройном крайне кратко. Большой этнографический, археологический и филологический материал, который приходится привлекать при таких исследованиях, не позволяет дать вполне определенные ответы на все вопросы, но некоторые этапы

') Isis, 1938 —V. 28.—P. 462—463; взято из London News IHustr. от 2.X 1937. [См. также данные о предметах, найденных при раскопках палеолитической стоянки в Меяине (Черниговской области УССР), в книге: История отечественной математики, т. 1, с. 40.— *Примеч. пер]*

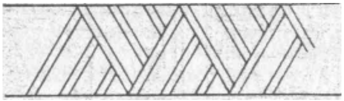
[2]) Миллер (G. A. Miller) обратил внимание на то, что слова one half, semis, moitie, обозначающие (в английском, латинском, французском языках) половину, не имеют прямой связи со словами тех же языков, означающими 2 (two, duo, deux), в отличие 1/3, ¼, ...(англ.: one third, one fourth, ...); это, видимо, указывает на то, что понятие ½ возникло независимо от понятия целого числа. См. Nat. Math. Magazine, 1939.—V. 13.—P. 272, 24

и некоторые общие черты в развитии техники счета и понятия числа можно установить с высокой степенью достоверности. На русском языке этот круг проблем наиболее обстоятельно и вместе с тем компактно освещен в статье И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича (см. библиографию в конце главы I). Интересные данные, указывающие па более раннее развитие числовых представлений (чем до сих пор предполагалось), собраны в статье: Фролов Б. А. Применение счета в палеолите и вопрос об истоках математики // Изв. СО АН СССР, сер. общ. наук.— 1965.— № 9, вып. 3.

3. Возникла и необходимость измерять длину и емкость предметов. Единицы измерения были грубы, п при этом часто исходили из размеров человеческого тела. Об этом нам напоминают такие единицы, как *палец, фут* (то есть ступня), *локоть.* Когда начали строить дома такие, как у земледельцев Индии или обитателей свайных построек Центральной Европы, стали вырабатываться правила, как строить по прямым линиям и под прямым углом. Английское слово «straight» (прямой) родственно глаголу «stretch» (натягивать), что указывает на использование веревки[1]). Английское слово «line» (линия) родственно слову «linen» (полотно), что указывает на связь между ткацким ремеслом и зарождением геометрии. Таков был один из путей, по которому шло развитие математических интересов.

Человек неолита обладал также острым чувством геометрической формы. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, корзин и тканей, позже — обработка металлов вырабатывали представление о плоскостных и пространственных соотношениях. Должны были сыграть свою роль и танцевальные фигуры. Неолитические орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию и подобие фигур. В этих фигурах могут проявляться и числовые соотношения, как в некоторых Доисторических орнаментах, изображающих треугольные числа; в других орнаментах мы обнаруживаем «священные» числа. Такого рода орнаменты оставались в ходу и в исторические времена. Прекрасные образцы мы виДим на дипилоновых вазах минойского и раннегреческого периода, позже — в византийской и арабской мозаике, в персидских и китайских коврах. Первоначально ранние орнаменты, возможно, имели религиозное или магическое

') Во многих странах людей, занимавшихся межеванием, называли «натягивателями веревки» (греческое «harpenodaptai», арабское «massah», ассирийское «masihanu»). См. Gandz S.— Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik.—1930.— Bd 1.— S. 255—277.

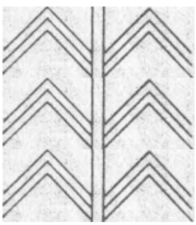


Этот орнамент встречается па иео литическоп керамике из Боснии и на предметах искусства древней Месопотамии

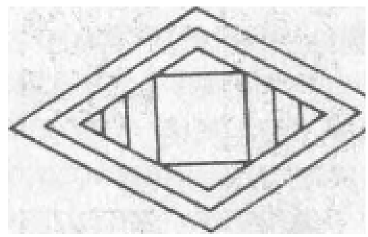
значение, но постепенно преобладающим стало их эстетическое назначение.

В религии каменного века мы можем уловить первые попытки вступить в борьбу с силами природы. Религиозные обряды были насквозь пронизаны магией, магический элемент входил в состав существовавших тогда числовых и геометрических представлений, проявляясь также в скульптуре, музыке, рисунке.

Существовали магические числа такие, как 3, 4, 7, и магические фигуры, как, например, пятиконечная звезда и свастика; некоторые авторы даже считают, что эта сторона математики была решающим фактором в ее развитии[1]), но, хотя общественные корчи математики в новейшие времена, быть может, стали менее за



Орнамент с египетской керамики додинастиче ского периода (4000—3500 до н э)

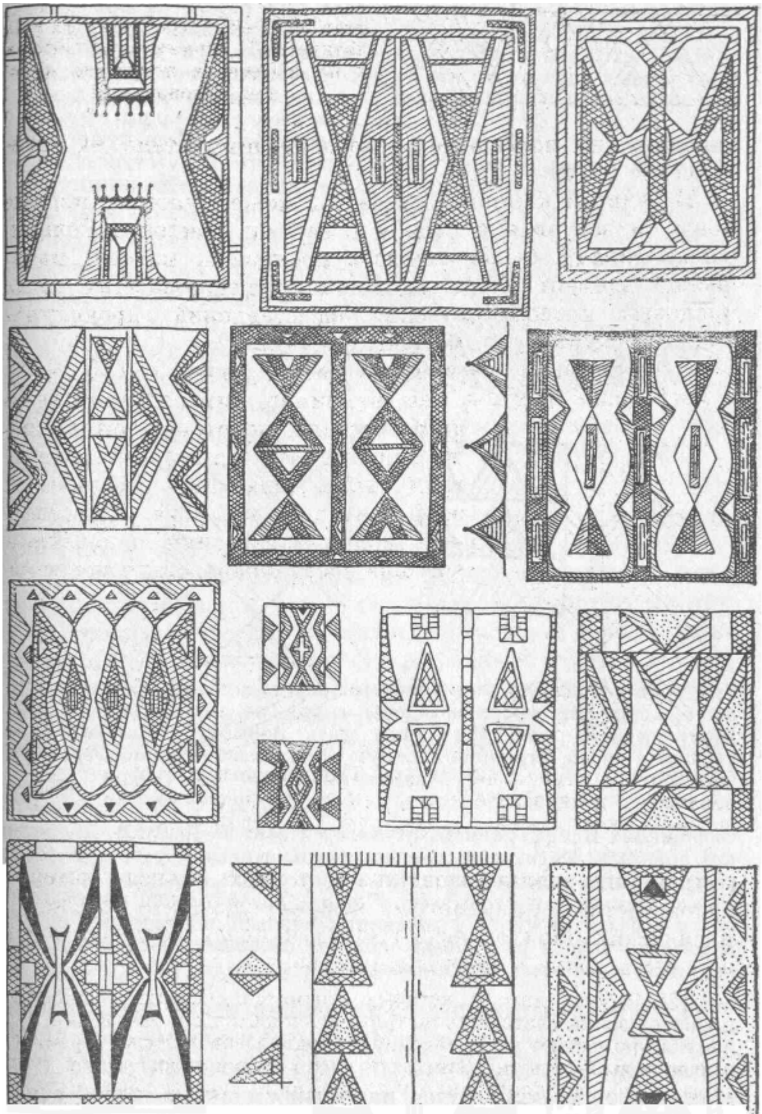


Геометрический орнамент американских индейцев

метны, они вполне очевидны в раппем периоде истории человечества. Современная «нумерология»—пережиток магических обрядов, восходящих к неолитической, а может быть, даже к палеолитической эпохе.

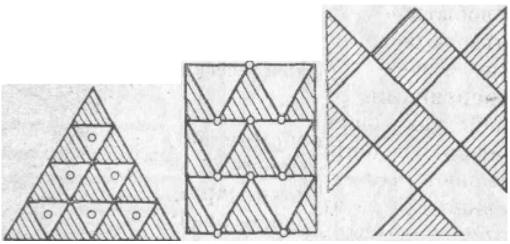
[2] Работы, авторы которых стремятся доказать ритуальное происхождение счета и хеометрии, появляются и в наши дни. Эти работы примыкают к тем течениям в социологии, которые стремятся всячески выпятить значение религии в истории человеческой культуры Одна из последние исследований такого рода — статья А Зайденбер! а «Ритуальное происхождение счета» (S e i d e пberg A. The Ritual Origin of Counting.—Archive for History of Exact Sciences.— 1962.—V. 2, N 1). Автор прямо заявляет, что рассматривает свою работу как частичное выполнение программы лорда Раглапа: доказать, что вся цивилизация — ритуального про

') McGee W. J. Primitive Numbers.—Nineteenth Annual Report, Bureau Amer. Ethnology, 1897—1898 (1900).—P. 825—851.



Такие орнаменты были в ходу у жителей свайных построек близ Любляны (Югославия) Гальштатского периода (Центральная Европа, 1000—500 до н. э.)

исхождения [1]). По Зайденбергу, счет был изобретен при особых обстоятельствах в связи с созданием определенного ритуала. Но большое сходство в построении числительных и приемах счета у различных народов делает версию совершенно неправдоподобной (поскольку она связывает счет с весьма специфическими приемами), если не допустить, что счет был изобретен таким образом в какомто одном месте и уже оттуда распространился путем заимствования по всему миру. И. А. Зайдевберг не отступает перед этим выводом и в особой работе, напечатанной в «Математических



Эти прямоугольники, заполненные треугольниками, и треугольники с кружками воспроизведены с урн из захоронений вблизи Шопрона в Венгрии Мы видим здесь попытку образовать треуюльные числа, игравшие важную роль позже — в пифагорейской математике

сообщениях Калифорнийского университета» за 1960 г.[2]), пытается его доказать. Насколько невероятно то, что счет у всех народов общего происхождения, читатель может судить сам, если вспомнит о ра юбщеппости первобытных общин, о значительной неравномерности в развитии счета у различных народов, о наличии у одного и того же народа различных слов для обозначения одного и того же числа различных предметов и т. д.

4. Даже у самых отсталых племен мы находим какой-то отсчет времени и. следовательно, какието сведения о движении Солнца, Луны и звезд. Сведения этого рода впервые приобрели более научный характер, когда стали развиваться земледелие и торговля. Пользование лунным календарем относится к очень давней эпохе в истории

') Lord Raglan. How Came Civilisation.
[2]) University of California Mathematical Publications.— V. A3, N4

человечества, так как изменение в ходе произрастания растений связывали с фазами Луны. Примитивные народы обратили внимание и на солнцестояние, и на восход Плеяд в сумерках. Самые древние цивилизованные народы относили астрономические сведения к наиболее отдаленному, доисторическому периоду своего существования. Другие первобытные народы пользовались при плавании созвездиями как ориентирами. Эта астрономия дала некоторые сведения о свойствах сферы, окружностей, об углах.

Древнеегипетский глиняный сосуд
(додинастический период)

5. Эти краткие сведения из эпохи зарождения математики показывают, что наука в своем развитии не проходит обязательно все те этапы, из которых теперь складывается ее преподавание. Лишь недавно ученые обратили должное внимание на некоторые из древнейших известных человечеству геометрических фигур такие, как узлы или орнаменты. С другой стороны, некоторые более элементарные ветви нашей математики, как построение графиков или элементарная статика, сравнительно недавнего происхождения. А. Шпайзер заметил с известной едкостью: «За позднее происхождение элементарной математики говорит хотя бы то, что она явно склонна быть скучной,— свойство, видимо, ей присущее,— тогда как творческий математик всегда предпочтет заниматься задачами интересными и красивыми»[1]).

[3] Это суждение А. Шпайзера, известного как своими работаМи по теории групп, так и трудами по изданию полного собрания сочинений Леонарда Эйлера, остроумно и парадоксально, но вряд ли можно его отстаивать всерьез И в книге по истории математики надо оговорить содержащиеся в нем погрешности против истории.

Что такое элементарная математика? Общепринятого определения нет, содержание этого понятия, несомненно, менялось. Если

') Speiser A. Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung — Leipzig, 1925, N. Y., 1954.—P. 3.

к элементарной математике отнести материал, входящий в курс средней школы» (что тоже далеко не однозначно характеризует элементарную математику), то нетрудно убедиться в крайней разнородности отдельных ее частей. В арифметике, кроме обучения счету, мы встречаем решение задач с использованием приемов, большей частью достаточно давнего происхождения, и некоторый сведения из теории целых чисел, которые в большинстве восходят к античной математике. И геометрия до недавнего времени в течение столетий излагалась в основном по Евклиду. В алгебре и тригонометрии основной материал гораздо более недавнего происхождения, причем некоторые понятия и приемы (графики, функциональная зависимость) в значительной мере модернизованы. «Скучен» ли он? Для обучаемого это зависит от того, как ведется обучение, для обучащего — от того, есть ли тут возможность для творчества, не обязательно научного, а педагогического, методического. Многочисленные предложения реформы школьных программ, настойчивые попытки ввести в курс средней школы некоторые сведения из математического анализа, математической логики, теории вероятностей и т. п. показывают, что здесь есть немалое поле для интересной деятельности.

Элементарную математику пытались определять отрицательно, как часть математики, где не применяются такието (более сложные) методы и понятия, например, где не пользуются математическим анализом (дифференциальным и интегральным исчислением). Но при этом в элементарную математику попадут многие достаточно отвлеченные и трудные области, которые привлекали и привлекают творческих математиков и где есть немало «интересных и красивых задач»1), например значительная часть теории множеств, теории групп, математической логики. Нетрудно также привести примеры, когда так называемое элементарное доказательство того или иного положения находили позже и с большим трудом, чем неэлементарные.

ЛИТЕРАТУРА

Кроме уже упомянутых книг Конанта, Илса, Смита и Шпайзера, укажем еще:

Feltweis E. Das Rechen der Naturvolker.— Leipzig, 1927.

Menninger K. Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichle der Zahlen.— 2 Aufl.— Bd 1.— Gottingen, 1957. 2 Aufl.— Bd 2 (Zahlschrift und Rechnen).—Gottingen, 1958.

Smith D. E., Ginsburg J. Numbers and Numerals.— N. Y. Teacher' College, 1937.

Childe Gordon. What Happened in History.— Harmondsworth; N. Y.: Pelican Book, 1942.

Интересные арпаменты описаны в работах:

Spier L. Plains Indian Parfleche Designs // Univ. Washington Publ. in Anthrop.— 1931.—V. 4.—P. 293—322.

Deacon A. B. Geometrical Drawings from Malekula and Other Islands fo the New Hebrides // J. Roy. Anthrop. Inst—1934.— V. 64.— P. 129—175.

Popova M. La geometric dans la broderie bulgare / Comptes Rendus, Premier Congres des Mathematiciens des pays slaves, Warsaw, 1929.— P. 367—369.

') Не говоря уже о том, сколько субъективного связано с такими определениями.

Математика американских индейцев рассматривается в статье: Thompson J.E.S. Maya Arithmetic // Contribution to Amer Anthropology and History.1941.V. 36.Carnegie Inst, of Washington Publ.— P. 37—62.

Подробную библиографию см. в книге:

Smith D. E. History of Mathematics.— V. 1.— Boston, 192.3.—P. 14.

См. также:

Piaget J. La genese du nombre chez 1'enfant.— Neufchatel, 1941

Piaget J. Le developpement des quantites chez 1'enfant— Neufchatel, 1941.

На русском языке см.: Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем счисления // Энциклопедия элементарной математики, т. I.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951,—С. 11—74.

Глава II

ДРЕВНИЙ ВОСТОК

1. В течение пятого, четвертого и третьего тысячелетия до н. э. новые и более совершенные формы общества складывались на основе упрочившихся общий нового каменного века, существовавших на берегах великих рек Африки и Азии в субтропическом поясе и вблизи него. Эти реки — Нил, Тигр и Евфрат, Инд, позже — Ганг, Ху анхэ, еще позже — Янцзы.

Прибрежные земли в районах этих рек могли давать обильные урожаи при условии регулирования разливов и осушения болот. В противоположность бесплодным пустыням и горным областям и равнинам, примыкавшим к этим речным долинам, последние можно было сделать райским местом. И в течение столетий такую задачу удалось решить путем постройки валов и плотин, создания сети каналов и водохранилищ. Регулирование водоснабжения потребовало совместных усилий населения обширных районов в размерах, значительно превосходивших то, что предпринималось в этом роде раньше. Это повело к установлению централизованного управления, сосредоточенного в городских центрах, а не в варварских селенияк предшествующих эпох. Сравнительно большие излишки, которые давало значительно усовершенствованное и интенсивное земледелие, повысили уровень жизни населения в целом, заодно это создало городскую аристократию во главе с могущественными вождями. Возникло немало профессий и специальностей — их представляли ремесленники, солдаты, писцы и жрецы. Руководство общественными рабогами находилось в руках бессменных должносшых лиц — группы людей, сведущих в смене времен года, движении небесных тел, в деле землеустройства, хранения запасов пищи и взимания налогов. Пользовались письменностью, чтобы придать форму закона требованиям администрации и действиям правителей.

Чиновники, равно как и ремесленники, накопили значительный запас технических знаний, включая сюда металлургию и медицину. В состав этих знаний входило и искусство счета и измерения.

Теперь уже прочно сложились общественные классы. Это были вожди («цари»), самостоятельные землевладельцы и арендаторы, ремесленники, писцы и чиновники, крепостные и рабы. Местные вожди стали настолько богаче и сильнее, что их уже нельзя было считать чемто вроде феодалов с ограниченной властью, — они становились вполне самодержавными царями Раздоры и войны между различными деспотами приводили к возникновению более обширных владений, управляемых единым монархом. Так эти общественные формы, в основе которых лежало орошаемое и интенсивное земледелие, дали некий «восточный» вид деспотизма. Такой деспотизм мог держаться столетиями и затем пасть, то ли под ударами горных племен или кочевников пустыни, привлеченных богатствами речной долины, то ли изза того, что запущенной оказывалась обширная, сложная и жизненно необходимая оросительная система. При таких обстоятельствах власть в племени либо переходила от одного царя к другому, либо же сообщество распадалось на меньшие объединения, причем процесс слияния мог затем начаться заново. Впрочем, при всех этих династических переворотах и повторных переходах от раздробленности к абсолютному деревни, составлявшие основу этого общества, собственно оставались незатронутыми и, стало быть, экономический и общественный строй в основном сохранялся. Восточное общество жило циклами, и даже сейчас в Азии и Африке есть много общин, сохранявших в течение тысячелетий один и тот же уклад жизни. В этих условиях продвижение вперед было медленным и извилистым, и периоды культурного подъема разделялись столетиями застоя и упадка.

Такая статичность Востока создавала некую исконную освященность его установлений, и это облегчало отождествление церкви и государственного аппарата. Чиновничество в значительной своей части было религиозного склада, как и государство в целом; во многих восточных странах жрецы были правителями областей. А так как заниматься наукой было задачей чиновничества, то во многих (но не во всех) восточных странах жрецы занимали выдающееся положение как обладатели научных знании.

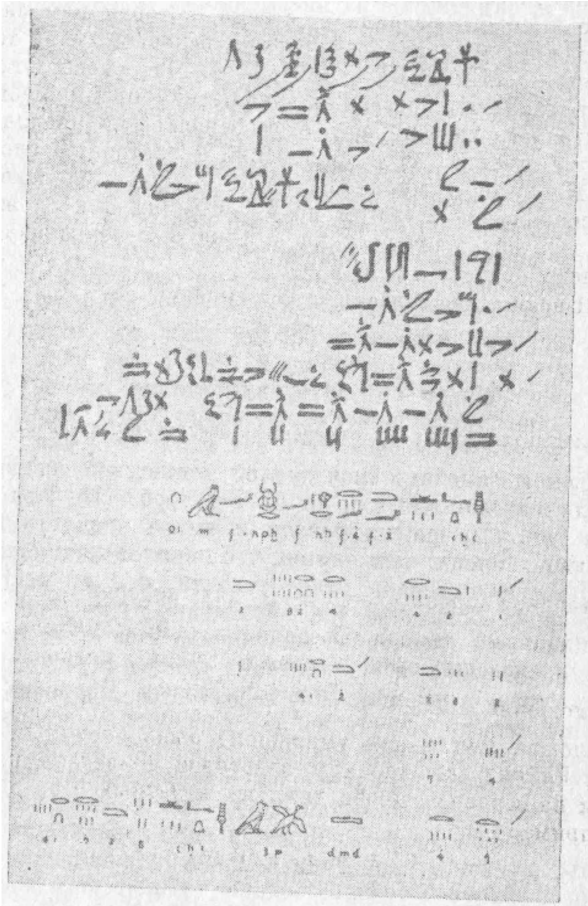
2. Восточная математика возникала как прикладная наука, имевшая целью облегчить календарные расчеты, распределение урожая, организацию общественных работ и сбор налогов. Вначале, естественно, главным делом били арифметические расчеты и измерения. Однако в науке, которую столетиями культивировали специалисты, чьей задачей было не только ее применение, но и посвящение в ее тайны, должен был развиться абстрактный уклон. Постепенно наукой стали заниматься ради нее самой. Из арифметики выросла алгебра не только потому, что это облегчало практические расчеты, но и в результате естественного развития науки, культивируемой и совершенствуемой в школах писцов. В силу тех же причин из измерений возникли начатки (но не больше) теоретической геометрии.

Хотя торговля и процветала в этих обществах древнего Востока, их экономическая сердцевина оставалась земледельческой, хозяйственной основой были села, обособленные и консервативные. Это приводило к тому, что различные культуры оставались резко отличными одна от другой, вопреки сходству экономического строя и одинаковому в основном уровню научных сведений. Замкнутость китайцев и египтян вошла в поговорку. Никогда не составляло труда отличить друг от друга искусство и письменность Египта, Месопотамии, Китая, Индии. Точно так же мы можем говорить о египетской, месопотамской, китайской и индийской математике, хотя в общем по своей арифметико-алгебраической природе они весьма схожи. Даже если наука одной из этих стран в течение некоторого периода обгоняла науку другой, она сохраняла свойственные ей приемы и символику.

На Востоке трудно датировать новые открытия. Статический характер его общественного строя приводил к тому, что научные сведения сохранялись без изменений в течение столетий и даже тысячелетий. Открытия, сделанные в пределах одного городского поселения, могли остаться неизвестными в других местностях. Хранилища научных и технических знаний могли быть уничтожена войнами при смене династий, наводнениями. Предание гласит, что в 221 г. до н. э., когда один абсолютный деспот Цинь Шихуанди (династии Цинь, Первый Желтый император) установил свое господство над всем Китаем он приказал уничтожить все научные книги. Позже многое было вновь записано по памяти, но подобные события весьма затрудняют датировку открытий.

Другая трудность в датировке достижений восточной яауки связана с материалом, которым пользовались для их закрепления. Народы Двуречья обжигали глппяные таблички, которые практически были неразрушимы[1]). Египтяне пользовались папирусом, и поэтому значительная часть памятников их письменности сохранилась в условиях сухого климата. Китайцы и индийцы применяли значительно менее надежный материал — древесную кору пли бамбук. Китайцы во втором столетии н. э. начали пользоваться бумагой, но мало что сохранилось от тысячелетия, предшествующего семисотому году н. э. Поэтому наши сведения о восточной математике весьма отрывочны, и для столетий догреческой эпохи мы, кроме материалов Египта и Двуречья, почти ничем не располагаем. Вполне возможно, что новые открытия поведут к полной переоценке относительного значения различных форм восточной математики. В течение долгого времени самыми богатыми историческими источниками мы обладали по Египту благодаря открытому в 1858 г. так называемому папирусу Райнда (Rhind), написанному около 1650 г. до н. э., но содержащему значительно более старый материал. За последние двадцать лет наши сведения о вавилонской математике значительно возросли благодаря замечательным открытиям О. Нейгебауера и Ф. Тюро-Данжена, которые расшифровали большое число глиняных табличек. Теперь выясняется, что вавилонская математика была значительно более развита, чем ее восточные партнерши. Возможно, это заключение будет окончательным, так как существует известное соответствие в содержании вавилонских и египетских текстов за ряд столетий. Более того, в экономическом развитии Двуречье ушло дальше, чем другие страны так называемого плодородного пояса на Ближнем Востоке, простиравшегося от Двуречья до Египта. Двуречье было перекрестком многочисленных караванных путей, тогда как Египет находился сравнительно в стороне. К этому надо добавить то обстоятельство, что возделывание почвы в районе блуждающих Тигра и Евфрата требует больше технического искусства и регулировки, чем в районе Нила, этой «самой добропорядочной из всех рек», если воспользоваться выражением Уильяма Уилкокса. Быть может, дальнейшее изуче

') Если только их тщательно сберегать после того, как они откопаны. Много табличек пропало изза плохого обращения с ними.



Страница из папируса Райнда

ние древнеиндийской математики обнаружит неожиданные достижения, но пока притязания на это не кажутся достаточно обоснованными.

3. Источником большей части наших сведений об египетской математике являются два математических папируса. Один из них – это уже упомянутый папирус Райнда, содержащий 84 задачи, второй – так называемый московский папирус, который, может быть, на два столетия старше и содержит 25 задач. Эти задачи были уже достаточно

стары, когда составлялись папирусы, но есть меиьшие папирусы значительно более позднего происхождения, даже римских времен, которые не отличаются от названных по своим приемам. Математика, которая в них изложена, основана на десятичной системе счисления со специальными знаками для каждой десятичной единицы более высокого разряда — системе, которая нам знакома благодаря римским обозначениям, основанным па том же принципе: MDCCCLXXVIII= 1878. На основе такой системы египтяне построили арифметику преимущественно аддитивного характера, т. е. ее основное направление состоит в сведении всех умножений к повторным сложениям. Например, умножение на 13 получается умножением сначала на 2, затем на 4, затем на 8 и сложением результатов умножения на 4 и на 8 с первоначальным числом:

Например, для вычисления 13*11 писали:

*1	11
2	22
*4	44
*8	88

и складывали все числа, отмеченные звездочкой, что дает 143.

Самой замечательной чертой египетской арифметики являются действия с дробями. Все дроби сводятся к суммам так называемых *основных дробей,* то есть дробей, имеющих числителем единицу. Единственное исключение составляла дробь 2/3=1 — 1/3 , для которой существовал специальный символ. Сведение к суммам основных дробей производилось с помощью таблиц, которые давали разложение дробей вида 2/n — единственное необходимое разложение, так как умножение было двоичным. Папирус Райнда дает таблицу, в которой приведены разложения па основные дроби для всех нечетных n от 5 до 331, например

2/7=1/4+1/28,

2/97=1/56+1/679+1/776

Из чего исходили при таком сведении к основным дробям, не ясно (например, почему 2/19 заменяется суммой 1/12+1/76+1/114, а не суммой 1/12+1/57+1/228?)

Такие действия с дробями придавали египетской математике тяжеловесность и растянутость, однако разложение на сумму основных дробей применялось в течение тысячелетий, не только в эпоху эллинизма, но и в средние века. В то же время указанное разложение предполагает определенное математическое искусство, и существуют интересные теории для объяснения того способа, каким египетские специалисты могли получить свои результаты').

Многие задачи очень просты и сводятся к линейному уравнению с одним неизвестным:

Некое количество, его 2/3, его 1/2 и его 1/7, сложенные вместе, дают 33. Каково это количество?

Ответ: 14 28/97, записан в основных дробях: 14+1/4+1/97+1/56+1/679 +1/776+1/194+1/388. Для неизвестного в уравнении существовал иероглиф, обозначавший «кучу» и произносившийся «хау» или «аха». Поэтому египетскую алгебру иногда называют «хау-исчислением»

В задачах речь идет о количестве хлеба и различных сортов пива, о кормлении животных и хранении зерна, и это указывает на практическое происхождение такой запутанной арифметики и примитивной алгебры. В некоторых задачах проявляется теоретический интерес, например в задаче, в которой требуется разделить сто хлебов между пятью людьми так, чтобы их доли составляли арифметическую прогрессию и чтобы одна седьмая суммы трех больших долей была равна сумме двух меньших. Мы даже встречаем геометрическую прогрессию в задаче о семи домах, в каждом из которых есть семь кошек, каждая из которых поедает семь мышей и т. д., что выявляет знание формулы для суммы членов геометрической прогрессии.

[1])Neugebauer O. Arithmeiik und Rechnentechmlc dm Agypler / Quellen und Studien zur Geschichte der Malheraatik.1931.—Bd 1.— S. 301380; van der Waerden B. L. Die Entwickiungsgeschichte der agyptischen Bruchrechnung // Quelleu und Studien zur Geschichte der Mathematik.— 1938.— Bd 41.— P. 359—382; Яновская С. А. К теории египетских дробей / Тр. Ин-та истории естествознания.— 1947,— Т. 1,—С. 269—282; Веселовский И.Н. Египетская наука и Греция / Тр Ин-та истории естествознания.1948.—Т. 2.—С. 426—428; см также Bruins E. M.Proc. Nederl. Akad. Wet.—1952.V. A55.

Некоторые задачи имеют геометрическую природу и касаются преимущественно измерений. Площадь треугольника находится как половина произведения основация и высоты; площадь круга диаметра d определяется как $(d-d/9)^2$, что дает для π значение $256/81\approx3{,}1605$. Мы находим также некоторые формулы для объемов тел, таких, как куб, параллелепипед и круговой цилиндр, причем все они рассматриваются конкретно как сосуды, преимущественно для зерна. Самым замечательным результатом в египетских измерениях была формула для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием $V=h/3(a^2+ab+b^2)$, где a и b суть длины сторон квадратов, а h—высота. Этот результат, которому не найдено соответствующего ни в какой другой древней математике, особенно примечателен, поскольку нет указаний на то, чтобы египтяне имели какое-либо представление даже о теореме Пифагора, вопреки некоторым необоснованным рассказам о гарпедонафтах, которые якобы строили прямые углы с помощью веревки, имевшей 3 + 4 + 5=12 узлов').

Мы здесь должны предостеречь от преувеличения древности египетской математической науки. Строителям пирамид эпохи 3000 лет до н. э. и даже раньше приписывали всевозможные результаты высокоразвитой науки. Существует даже много раз серьезно преподносившаяся версия, будто египтяне в 4212 г. до н. э. приняли так называемый сотический цикл для календаря. Нельзя всерьез приписывать столь точные математические и астрономические работы народу, едва вышедшему из условий каменного века, и источником таких рассказов, как обычно удается установить, является позднее египетское предание, дошедшее до нас через греков. Общей чертой древних цивилизаций является стремление датировать главные сведения весьма ранними эпохами. Все доступные тексты указывают, что египетская математика была скорее примитивного характера. На таком же уровне находилась и их астрономия.

4. Переходя к математике Двуречья, мы оказываемся на гораздо более высоком уровне, чем тот, которого ког

') См Gandz S. // Quellea and Studien zur Geschichte der Malhematik. 1930 Bd 1 S. 7.

да-либо достигала египетская математика. Здесь мы можем даже уловить прогресс в ходе столетий. Уже самые древние тексты, относящиеся к последнему шумерскому периоду (третья династия Ура, 2100 г. до н. э.), показывают высокое вычислительное искусство. Эти тексты содержат таблицы для умножения, в которых хорошо развитая шестидесятичная система счисления сочетается с более ранней десятичной системой; здесь имеются клинописные символы, обозначающие 1, 60, 360 и также 60^{-1}, 60^{-2}. Однако не это было наиболее характерной их чертой. В то время как египтяне каждую единицу более высокого разряда обозначали новым символом, шумеры пользовались одним и тем же символом, но указывали его значение его *положением.* Так, 1, за которой следовала другая 1, давала запись числа 61, а 5 с последующим 6 с последующим 3 (мы это будем записывать как 5, 6, 3) обозначало $5•60^2+6•60+3 = 18363$. Такая позиционная (или поместная) система не отличается, по сути дела, от нашей системы записи чисел, при которое символ 343 заменяет $3•10^2 + 4•10+3$. Подобная система имеет огромное преимущество при вычислениях, что можно сразу увидеть, если попытаться выполнить умножение и в нашей системе, и в системе с римскими цифрами. Позиционная система устраняла многие трудности в арифметике дробей так же, как это происходит при нашей системе с введением десятичных дробей. По-видимому, вся эта система была непосредственным результатом развития техники управления, что засвидетельствовано в тысячах текстов того же периода, где речь идет о поставках скота, зерна и т. п. и о связанных с этим арифметических вычислениях.

При таком способе счета существовала некоторая неопределенность, так как значение символа не всегда было ясно по его положению. Так, (5, 6, 3) могло также означать $560^1 +6•60°+ 3•60^{-1}=306\ 1/20$, и точное исстолкование надо было извлечь из контекста. Другая неопределенность возникала из-за того, что незаполненное место иной раз означало нуль, так что (11,5) могло стоять вместо $11•60^2 +5=39605$. Иной раз появляется специальный символ для нуля, но не ранее персидской эпохи. Так называемое «изобретение нуля» было, таким образом, логическим следствием введения поместной системы, но только после того, как техника вычислений была значительно усовершенствована.

Оборотная сторона древневавилонской таблички, хранящейся в Эрмитаже (Эрм. 15073). Вероятно, XVII в. до н. э.

Как шестидесятатаая система, так и позиционность и системы счисдеевия оказались прочиым достоянием человечества. Наше современное деление часа на 60 минут и 3600 секунд восходит к шумерам, равно как и наше деление окружности на 360 градусов, каждого градуса на 60 минут и каждой минуты на 60 секунд. Есть основания полагать, что выбор в качестве основы 60 вместо 10 появился при попытке унифицировать системы измерения, хотя то обстоятельство, что 60 имеет много делителей, тоже могло иметь значение. Что касается поместной системы, непреходящее значение которой сравнивают со значением алфавита'), так как оба изобретения заменя

')Neugebauer O The History of Ancient Astronomy // Journal of Near Eastern Studies.— 1945,— V. 4.— P. 12.

ют сложную символику методом, легко доступным широкому кругу людей, то ее история в значительной мере еще темна. Есть основание предполагать, что как индийцы, так и греки познакомились с нею на караванных путях, которые вели через Вавилон. Нам известно также, что арабы говорили о ней как об индийском изобретении. Однако вавилонская традиция могла повлиять на все позднейшее распространение поместной системы.

5. Следующая группа клинописных текстов относится ко времени первой вавилонской династии, когда в Вавилоне правил царь Хаммурапи (около 1950 г. до н. э.) и семитское население подчинило себе исконных жителей — шумеров. В этих текстах мы видим, что арифметика развилась в хорошо разработанную алгебру. Египтяне того же периода были в состоянии решать только простые линейные уравнения, а вавилоняне времен Хаммурапи полностью владели техникой решения квадратных уравнений. Они решали линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, решали даже задачи, сводящиеся к кубическим и к биквадратным уравнениям. Такие задачи они формулировали только при определенных числовых значениях коэффициентов, но их методы не оставляют никакого сомнения относительно того, что они знали общие правила.

Приведем пример, взятый из одной из глиняных табличек этого периода.

«Площадь *A*, состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет 2/3 стороны другого квадрата, уменьшенные на 10. Каковы стороны квадратов?»

Это приводит к уравнениям $x^2 + y^2 = 1000$, $y = 2/3 \cdot x - 10$, решение которых сводится к решению квадратного уравнения

$13/9\, x^2 - 40/3\, x - 900 = 0$

имеющему положительный корень $x = 30$.

В действительности решение в клинописном тексте ограничивается, как и во всех восточных задачах, простым перечислением этапов вычисления, необходимого для решения квадратного уравнения:

«Возведи в квадрат 10; это дает 100; вычти 100 из 1000; это дает 900» и т.д.

Резко выраженный арифметико-алгебраический характер вавилонской математики проявляется и в геометрии. Как и в Египте, геометрия развивалась на основе практических задач измерения, но геометрическая форма задачи обычно является только средством для того, чтобы поставить алгебраический вопрос. Предыдущий пример показывает, как задача относительно площади квадрата приводит к нетривиальной алгебраической проблеме, и этот пример не составляет исключения. Тексты показывают, что вавилонская геометрия семитского периода располагала формулами для площадей простых прямолинейных фигур и для объемов простых тел, хотя объем усеченной пирамиды еще не был найден. Так называемая теорема Пифагора была известна не только для частных случаев, но и в полной общности. Основной чертой этой геометрии был все же ее алгебраический характер. Это в равной мере относится и ко всем позднейшим текстам, особенно к текстам третьего периода, от которого до нас дошло немалое их число,— эпохи нововавилонской, персидской и эпохи Селевкидов (примерно от 600 г. до н. э. до 300 г. н. э.). Тексты этого последнего периода обнаруживают значительное влияние вавилонской астрономии, которая в это время приобретает характер настоящей науки, что сказывается в тщательном анализе различных эфемерид. Вычислительная техника математических текстов становится еще более совершенной; алгебра справляется с задачами на уравнения, для которых требуется значительное вычислительное искусство. От эпохи Селевкидов дошли вычисления, которые доведены до семнадцатого шестидесятичного знака. Столь сложные вычислительные работы уже нельзя связывать с вычислением налогов или измерением — стимулом для них были астрономические задачи или просто любовь к вычислениям.

Многое в этой вычислительной арифметике выполнялось с помощью таблиц, в наборе которых есть и простые таблицы для умножения, и таблицы обратных величин, квадратных и кубических корней. В одной из таблиц имеется ряд чисел вида $n^3 + n^2$, которым, повидимому, пользовались для решения кубических уравнений вида $x^3 + x^2 = a$. В них содержатся некоторые превосходные приближения: $\sqrt{2}\approx$ дается 1 5/12 ($\sqrt{2}\approx1.4142$, 1 5/12$\approx$ 1.4167)[1]), для $2/\sqrt{2}\approx0.7071$ дается $17/24\approx0.7083$. Видимо, квадратные корпи определялись по формуле

') Neugebauer O. Exact Sciences in Antiquity // Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conference, Studies in Civilization, Philadelphia, 1941.— P. 13—29.

наподобие следующей:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a} \approx \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

Что касается значения π, в большинстве случаев таблички обходятся библейским π=3. Есть указания на то, что применялись и лучшие приближения, дававшие для π значение 3 1/8 [1]).

Уравнение $x^3+x^2=a$ появляется в задаче, в которой требуется решить систему уравнений $xyz + xy = 1 + 1/6$, $y=2/3\ x$, $z=12x$, что сводится к уравнению

$(12x)^3+(12x)^2=252$

или, согласно таблицам, $12x = 6$.

В клинописных текстах есть задачи и на сложные проценты. Например, ставится вопрос, за какое время удвоится сумма денег, ссуженная под 20 (годовых) процентов. Это приводит к уравнению$(1\ 1/5)^x=2$, которое решается так: сначала замечают, что $3 < x < 4$, а затем применяют линейную интерполяцию. В наших обозначениях

$$4 - x = \frac{(1.2)^4 - 2}{(1.2)^4 - (1.2)^3}$$

что дает для x значение 4 года минус (2, 33, 20) месяцев.

Повидимому, одной из особых причин, вызвавших развитие алгебры примерно около 2000 г. до н. э., было то, что новые семитские правители Вавилона использовали прежнее шумерийское письмо. Это письмо, как и иероглифы, было набором идеограмм — каждый знак обозначал отдельное понятие. Семита воспользовались им для фонетической записи слов своего языка и вместе с тем применяли некоторые знаки в их прежнем значении. Следовательно, эти знаки попрежнему выражали понятия, но произносились иначе. Такие идеограммы были вполне пригодны для алгебраического языка, подобно нашим современным знакам +, —, ..., которые в действительности тоже идеограммы. В вавилонских школак администраторов этот алгебраический язык стал частью учебной программы на много поколений и, хотя власть

') Bruins E. M, Rutten M. Textes mathematiques de .— Paris, 1961,— P, 18, переходила в руки новых правителей — касситов, ассирийцев, мидян, персов, эта традиция оставалась в силе.

Самые сложные задачи относятся к более поздним периодам в истории древней цивилизации, а именно, к персидской эпохе и эпохе Селевкидов. В те времена Вавилон уже не был политическим центром, но в течение ряда столетий он оставался интеллектуальной столицей обширной империи, в которой вавилоняне смешались с персами, греками, евреями, индусами и многими другими народами. Но во всех клинописных текстах видна непрерывность традиции, что, вероятно, указывает на местную непрерывность развития.

Можно быть уверенным в том, что этому развитию способствовало взаимно обогащавшее общение с другими цивилизациями. Мы знаем, что вавилонская астрономия этого периода оказала влияние на греческую и что вавилонская математика повлияла на вычислительную арифметику. Есть основания полагать, что вавилонские школы писцов были посредниками между наукой Греции и наукой Индии. Мы все еще мало осведомлены о роли персидской и селевкидской Месопотамии в распространении древневосточной и античной астрономии и математики, но все доступные данные указывают на то, что эта роль должна была быть значительной. Средневековая арабская и индийская наука опиралась не только на традиции Александрии, но и на традиции Вавилона.

6. Во всей математике Древнего Востока мы нигде не находим никакой попытки дать то, что мы называем доказательством. Нет никаких доводов, мы имеем только предписания в виде правил: «делай то-то, делай так-то». Мы не знаем, как там были получены теоремы, например, как вавилонянам стала известна теорема Пифагора. Было сделано несколько попыток объяснить, как египтяне и вавилоняне получали свои результаты, но все они являются только предположениями. Нам, воспитанным на строгих выводах Евклида, весь этот восточный способ рассуждения кажется па первый взгляд странным и крайне неудовлетворительным. Но такое впечатление исчезает, когда мы уясняем себе, что большая часть математики, которой мы обучаем современных инженеров и техников, все еще строится по принципу «делай то-то и делай так-то», без большого стремления к строгости доказательств. Алгебру во многих средних школах все еще изучают не как дедуктивную науку, а скорее как набор правил. Видимо, восточная математика никогда не могла

освободиться от тысячелетнего влияния технических проблем и проблем управления, для пользы которых она и была создана.

7. Вопрос о влиянии Греции, Китая и Вавилона имеет глубокое и определяющее значение для изучения древнеиндийской математики. Коренные ученые Индии и Китая прошлого, а иногда и настоящего времени обыкновенно подчеркивали большую древность их математики, но у них нет математических текстов, которые можно было бы надежно отнести ко времени до н. э. Самые древние индийские тексты относятся, пожалуй, к первым столетиям п. э., самые древние китайские тексты такого же или даже более позднего происхождения. Установлено, что древние индусы пользовались десятичной системой счисления без позиционных обозначений. Такую систему составляли так называемые числа Брахми, имевшие особые знаки для каждого из чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10; 20, 30, 40, ..., 100; 200, 300, ..., 1000, 2000, ... Эти символы — по меньшей мере эпохи короля Ашока (300 лет до н. э.). Затем мы имеем так называемые «Сульвасутры», часть которых давности 500 лет до н.э. или еще древнее; в них изложены математические правила древнего местного происхождения. Мы находим эти правила среди обрядовых предписаний, некоторые из которых относятся к построению алтарей. Мы имеем здесь рецепты для построения квадратов и прямоугольников, выражения для зависимости между диагональю и стороной квадрата и для равновеликости квадратов и кругов. Встречаются частные случаи теоремы Пифагора и некоторые любопытные приближения с помощью «основных» дробей, вроде такого (в наших обозначениях):

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{34} (\approx 1.4142156);$$

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right)^2 = 18(3 - 2\sqrt{2})(\approx 3.088)$$

То любопытное обстоятельство, что эти результаты «Сульвасутр» не встречаются в более поздних индийских трудах, показывает, что мы еще не можем говорить применительно к индийской математике о той непрерывности традиции, которая столь типична для математики Египта или Вавилона, и возможно, что в столь большой стране, как Индия, такой непрерывности и не было. Могли быть различные традиции, связанные с различными школами. Мы знаем, например, что джайнизм, религия столь же древняя, как буддизм (около 500г. до н. э.), поощрял математические исследования, и в священных книгах джайнизма обнаружено значение для $\pi \approx \sqrt{10}$.

8. При изучении древнекитайской математики значительным препятствием является отсутствие переводов, хотя мы благодаря книгам Миками и Нидхема хорошо осведомлены о положении математики в Древнем Китае. Тем, кто знает русский язык, доступен значительно больший материал, имеется даже русский перевод классического математического произведения «Девять книг (разделов) о математическом искусстве» (Цзю чжан суань шу) . Как эта книга, так и «Чжоу-би» в своем нынешнем виде дошли до нас от периода династии Хань (206 г. до н. э. — 220 г. н. э.), но в них, конечно, может содержаться материал значительно более раннего происхождения. Книга Чжоуби только частично посвящена математике, но интересно, что в ней рассматривается теорема Пифагора. Напротив, «Девять книг (разделов)»— чисго математическое произведение, которое вполне характерно для древнекитайской математики следующего тысячелетия, да и более поздней.

Очень стары также некоторые диаграммы из книг периода династии Хань, например из «Книги перемен» (И цзинь, VIII — VII вв. до н. э.). В числе их следующий, связанный со многими легендами, магической квадрат (ло шу):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Система счисления у китайцев всегда была десятичной, и уже во втором тысячелетии до нашей эры мы встречаемся с числами, записанными с помощью девяти символов в позиционной системе. Такой способ записи получил права гражданства в период династии Хань или еще раньше. Девять знаков изображались с помощью бамбуковых палочек, поразному размещенных; например ⊥II = III обозначало число 6729, которое именно

') Datta B. The Jaina School of Mathematics // Bull. Calcutta Math Soc — 1929.— V. 21.— P. 115—146.

таким образом и записывалось. Арифметические действия выполнялись с помощью счетных досок; пропуски, т. е, пустые места, обозначали нуль (специальный знак для нуля появляется только в тринадцатом столетии н. э., хотя он, возможно, и старше).

При календарных расчетах применялось нечто вроде шестидесятичной системы, что можно сопоставить с сочетанием двух связанных друг с другом зубчаток, из которых одна имеет двенадцать зубьев, а другая — десять. Так число шестьдесят стало единицей высшего разряда, «периодом» («Катэйский период» в одном из стихотворений Теннисона).

Математика «Девяти книг» состоит в основном из задач и общих указаний, как их решать. Эти задачи возникают из практических применений арифметики и сводятся к алгебраическим уравнениям с числовыми коэффициентами. Вычисляются и квадратные, и кубические корни, например число 751½ определяется как корень квадратный из 564752 ¼. При вычислениях с окружностью принимается $\pi = 3$. Ряд задач сводится к системам линейных уравнений, например к системе

$3x + 2y + z = 39,$

$2x + 3y + z = 34,$

$x + 2y + 3z = 26,$

которая записывается «матрицей» своих коэффициентов. Решение этой системы приводится в таком виде, которое мы теперь назвали бы «матричным преобразованием». Эти матрицы содержат и отрицательные числа, здесь впервые появляющиеся в истории математики.

Китайская математика занимает особое положение — практически до последних лет мы видим в ней непрерывность традиции, так что мы можем выяснить, каково ее место в обществе, более полно, чем в случав египетской и вавилонской математики, принадлежащих исчезнувшим цивилизациям.

Например, мы знаем, что кандидаты, подвергавшиеся экзамену, должны были знать «Десять классиков» в точно определенном объеме и что успех на экзамене определяется в основном умением точно цитировать тексты на память. Таким образом, традиционное учение передавалось из поколения в поколение с обременительной хщательностью. В такой застойной культурной атмосфере но вые открытия стали чрезвычайно редким явлением, а это опять-таки обеспечивало неизменность математической традиции. Такая традиция могла передаваться в течение тысячелетий и могла пострадать только иногда, при больших исторических потрясениях.

В Индии существовали аналогичные условия, и там мы находим даже такие математические тексты, которые написаны стихотворными размерами с целью облегчить запоминание. Нет никаких особых причин считать, что приемы, которыми пользовались в древнем Египте и в Вавилоне, могли значительно отличаться от практики Индии и Китая.

Чтобы прервать процесс полного окостенения математики, должна была возникнуть цивилизация совершенно другого рода. Математика достигла, наконец, уровня настоящей науки благодаря тому новому микровоззрению, которое характерно для цивилизации греков.

ЛИТЕРАТУРА

The Rhind Mathematical Papyrus/Ed. T. E. Peot.—London, 1923.

The Rhind Mathematical Papyrus/Ed. A. B Chance, L. Bull, H P. Manning, R. C. Archibald. V, 1— Oberlin, Ohio 8, 1927. V. 2.— Oberlin, Ohio 8, 1929.

В этом труде содержится обширная библиография по египетской и вавилонской математике. Библиография, преимущественно по древней астрономии, имеется в книге О. Нейгебауера.

Mathimatischer Papyrus des staatlichen Museums der schonon Kunste in Moscau/Изд. В. В. Струве и В А. Тураев.— Berlin, 1930.

Neugebauer O. Vorlesungen űber Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, I: Vorgiechische Malhematik.— Berlin, 1934').

Neugebauer O. Mathematische Keilschrift — Texte.— Bd 1—3.—Berlin, 1935—1937.

Neugebauer O., Sachs A. Mathematical Cuneiform Texts.— New Haven, 1945.

Bruins E. M., Rutten M. Texles mathematiques de Suse.— Pans, 1961.

Thureau-Dangin F. Sketch of a history of the sexagesimal system.— Osiris, 1939.— Bd 7.— С. 95—141.

Thureau-Dangin F. Textea mathematiques babyloniens — Leiden, 1938.

Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире.— 2е изд.— М.: Наука, 1967.

Вайман А. А. Шумеровавилонская математика, III—I тысячелетня до н.э.— М., 1961

Экономическая документация использована как источник для истории математики в древнем Двуречье в работах:

') Русский перевод: Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук Т. I: Догреческая математика/ Предисловие и приложения С. Я. Лурье — М.; Л.: ОНТИ, M37.

Раздымаха Г.С. Физико-математические знания в дрепних рабовладельческих государствах Двуречья по документам хозяйственной отчетности / Науков! записки Кам'янецьПод1льского пед. шту.~ 1958.— Т. 6,— С. 125—191.

Раздимаха Г. С. Математика Двуріччя за економичпою документален} / Тсторикоматем. збирник.— 1961.— Т. 2 — С. 128—147.

Раздимаха Г. С. Проблема межувапня земл! у вавшонекщ геометра / 1сторикоматем. зборник.— 1962.— Т. 3.— С. 75—95.

О. Нейгебауер и Ф. Тюро — Дагокен по ряду пунктов расходятся в истолковании вавилонской математики. По этому вопросу см.

G a n d z S. Conflicting of Babylonian Mathematics / Isis, 1940,V. 31.P. 405425.

Хороший обзор догреческой в математике см. в работе Archibald R. C. Mathematics before the Greek / Science.— 1930.— V. 71.— P. 109—121, 342; см. также Science, 1930.— V. 72.—

P. 36.

S m e t h D. E. Algebra of 4000 Years Ago / ScpJpta maihematica.— 1936.— V. 4.— P. 111—125.

Voge1 K. Vorgriechische Mathematik.— V. 1, 2,— Hannover. Paderborn, 1958—1959.

Сведения об индийской математике см. в журнале Bulletin of the Calcutta Mathematical Society и в книге D a tta B., Singh A. N. History of Hindu Mathematics.—V. 1.—Lahore, 1935.— V. 2.— Lahore, 1938

Рецензия О. Нейгебауера:

Neugebauer O. / Quellen und Stndien.—1936.—V. 3B.— P. 263—271.

G u r j a r L. V. Ancient Indian Mathematics and Vedha — Poona.—Vidwans, 1947.

Kaye G. R. Indian Mathematics / Isis.—1819.—V. 2.— P. 326—356.

Seidenberg T. The ritual oridgin of geometry / Arch, for hist, of exact sc.— 1962.— V. 1.— P. 408—527.

Műller C. Die Malhematik der Sulvasutra / Abh. math. Sem. Univ. Hamburg.— 1929.— Bd 7.— S. 173—204.

О японскокитайской математике см.:

S u i k a m i I. The Development of Mathematics in China and Japan.— Leipzig, 1913.

Smith D. E., M i k a m i LA History of Japanese Mathematics.— Shicago, 1914.

Древнекитайский трактат: Математика в девяти книгах/Перевод, вступительная статья и примечания Э. И. Березкиной / Историкоматематические исследования, вып. X.— М.: Гостехиздат, 1957,— С. 425—584.

Си: Раик А. Е. О вычислении некоторых объемов в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах» / Историкоматематические исследования, вып. XIV.— М.: Физматгиз, 1961.

Книга I — Ching, И цзинь, то есть «Книга перемен», имеется в ашлийском переводе Р Вильгельма (R. Wilhelm) — 1950, ц в русском переводе Ю. К. Шуцкою (Китайская классическая «Книга перемен».—М., 1960).

Третий том запланированного в семи томах труда: Needham J. Science and civilization in China.— Cambridge, 1959, посвящен точным наукам в Китае.

Некоторые соображения относительно китайской, содержатся в работе Juschkiewitch A.P., Rosenfeld B.A. Die Mathematik der Lander des Ostens im Mittelalter // Beitrage zur fCeschichte der Naturwissenschaft /Hrsg. von G. Hang,— Berlin, 1960.

См. также указанную на с. 74 книгу О. Нейгебауэра и литературу на с. 99. О природе восточного общества см. литературу к гл. IV, а также:

Wi11foge1 K.A. Die Theorie der orientalischen Geseus // Zeitschrift fur Sozialforschung—1938 Bd 7.—S. 90— 122.

Также: Le mode de production asiatique / La pensee.V. 114. P. 3-73.

Needham J. Science and Society in East and West //Science and Society.— 1964 — V. 28,— P. 385—408.

Глава III

ГРЕЦИЯ

1. В течение последних столетий второго тысячелетия до н. э. в бассейне Средиземного моря и в прилегающих к нему областях очень многое изменилось в экономике и в политике.

Бронзовый век сменился тем нашим веком, который мы зовем веком железа, и происходило это в смутное время переселений и войн. Лишь немногие частности известны нам об этой революционной эпохе, но мы знаем, что к ее завершению, примерно около 900 г. до н. э., уже не было царства Миноса и Хеттской державы, значительно слабее стали Египет и Вавилон и ча исторической сцене появились новые народы. Наиболее выдающимися среди них были евреи, ассирийцы, финикийцы и греки. Вытеснение бронзы железом означало не только переворот в военном деле, но и ускорение роста экономики благодаря удешевлению средств производства, и это сделало возможным более деятельное участие широких слоев общества в делах экономического и общественного значения. Это сказалось и в двух важных новшествах: в замене неудобного письма Древнего Востока легко доступным алфавитом и во введении чеканной монеты, что послужило оживлению торговли. Наступило то время, когда культурные ценности уже пе могли дальше оставаться исключительным достоянием восточного чиновничества.

Деятельность «морских разбойников»— так египетские тексты характеризуют некоторые переселявшиеся народы — первоначально сопровождалась немалыми культурными потерями. Критская цивилизация исчезла, егапетское искусство пришло в упадок, наука Вавилона и Египта окостенела на столетия. Мы не имеем никаких математических текстов этого переходного периода. Когда положение снова стало устойчивым, Древний Восток оп равился, оставаясь в основном верным традиции, но было расчищено место для цивилизации целиком нового склада — греческой цивилизаций.

Те города, которые возникли на побережье Малой Азии и в самой Греции, уже не были административными центрами страны оросительного земледелия. Это были торговые города, где феодалы-землевладельцы старого уклада были обречены на поражение в борьбе, которую им довелось вести с независимым, обретшим политическое самосознание классом купцов. В течение седьмого и шестого столетий до н. э. это купечество взяло верх, но ему пришлось в свою очередь вступить в борьбу с мелкими торговцами и ремесленниками, с демосом.

Итогом был расцвет греческого полиса, самоуправляющегося городагосударства — новое социальное явление, вполне отличное от ранних городовгосударств Шумера и других стран Востока. Наиболее значительные из этих городовгосударств сложились в Ионии, на анатолийском берегу. Их растущая торговля связала их со всем побережьем Средиземного моря, с Двуречьем, Египтом, со Скифией и даже более далекими странами. Долгое время ведущее место занимал Милет. Но и города на других берегах: Коринф, позже Афины в собственно Греции, Кротон и Гиарент в Италии, Сиракузы в Сицилии — становились богаче и значительнее. Новый общественный уклад создал новый тип человека. Купец-путешественник никогда еще не пользовался такой независимостью, и он знал, что она добыта в упорной и жестокой борьбе. Он никак не мог разделять устоявшиеся воззрения Востока. Он жил в период географических открытий, сравнимых только с открытиями западноевропейского шестнадцатого столетия, он не признавал ни абсолютного монарха, ни власти, предстающей в виде охранительного божества. А кроме того он мог пользоваться известным досугом благодаря своему богатству и труду рабов. Он мог поразмыслить об окружающем его мире. Отсутствие вполне установившейся религии привело многих обитателей этих прибрежных городов к мистицизму, но это способствовало и противоположному — росту рационализма и научному подходу.

2. Современная математика родилась в этой атмосфере ионийского рационализма — математика, которая ставила не только восточный вопрос «как?», но и современный, научный вопрос *«почему?».* Согласно преданию отцом греческой математики является милетский купец

Фалес, в первой половине шестого века посетивший Вавилон и Египет. Но если он даже целиком легендарная фигура, то за нею стоит нечто вполне реальное. Это — образ, соответствующий тем условиям, в которых закладывались основы не только современной математики, но и всей современной науки и философии. Первоначально греки занимались математикой, имея одну основную цель — понять, какое место занимает во вселенной человек в рамках некоторой рациональной схемы. Математика помогла найти порядок в хаосе, связать идеи в логические цепочки, обнаружить основные принципы. Она была наиболее теоретической из всех наук.

Несомненно, что греческие купцы познакомились с восточной математикой, прокладывая свои торговые пути. Но люди Востока почти не занимались теорией, и греки быстро обнаружили это. Почему в равнобедренных треугольниках два угла равны? Почему площадь треугольника равна половине площади прямоугольника при одинаковых основаниях и высотах? Такие вопросы естественно возникали у людей, ставивших сходные вопросы в области космологии, биологии и физики.

К сожалению, у нас нет первоисточников, описывающих ранний период развития греческой математики. Уцелевшие рукописи относятся к эпохе христианства и ислама и их только в малой мере дополняют заметки в египетских папирусах несколько более раннего периода. Все же классическая филология дала возможность восстановить тексты, которые восходят к четвертому столетию до н. э. и далее, и мы благодаря этому располагаем надежными изданиями Евклида, Архимеда, Аполлония и других великих математиков античности. Но в этих текстах перед нами уже вполне развитая математическая наука, и даже с помощью позднейших комментариев по ним трудно проследить ход исторического развития. Об эпохе формирования греческой математики приходится судить, основываясь лишь на небольших фрагментах, приводимых в более поздних произведениях, и на отдельных замечаниях философов и других не строго математических авторов. Очень много остроумия и труда было вложено в критику текстов, благодаря чему удалось разъяснить немало темных мест в этом раннем периоде. Эта работа, проделанная такими исследователями, как Поль Таннери (Tannery), Хит (T. L. Heath), Цейтен (H. G. Zeuten), Франк (E. Frank) и др., позволяет нам дать в известной мере связную, хотя в значи тельной части предположительную картину греческой математики в эпоху ее формирования.

3. В шестом столетии до н. э. на развалинах Ассирийской империи возникла новая обширная восточная держава — Персия Ахеменидов. Она завоевала города Анатолии, но общественный строй греческой метрополии пустил уже глубокие корни и его нельзя было сокрушить. Персидское нашествие было отражено в исторических битвах при Марафоне, Саламине и Платее. Главным результатом греческой победы было расширение и экспансия Афин. Здесь во второй половине пятого столетия, при Перикле, влияние демократических элементов все время возрастало. Они были движущей силой экономической и военной экспансии, и около 430 г. они сделали Афины не только центром Греческой империи, но и центром новой и любопытной цивилизации — золотого века Греции.

В обстановке общественной и политической борьбы философы и наставники излагали свои теории и заодно и новую математику. Впервые в истории группа критически мыслящих, «софистов», менее скованная традицией, чем какаялибо иная предшествовавшая ей группа ученых, стала рассматривать проблемы математического характера скорее с целью уяснения их сути, чем ради пользы.

Так как такой подход позволил софистам дойти до основ точного мышления вообще, было бы чрезвычайно поучительно познакомиться с их рассуждениями. К несчастью, от этого периода дошел лишь один цельный математический фрагмент, принадлежащий ионийскому философу Гиппократу из Хиоса. Математические рассуждения в этом фрагменте на весьма высоком уровне, и достаточно типично то, что в нем рассматривается совсем «непрактический», но теоретически существенный вопрос о так называемых луночках — плоских фигурах, ограниченных двумя круговыми дугами.

Этот вопрос — найти площадь таких луночек, у которых площадь рационально выражается через диаметр,— имеет прямое отношение к центральной проблеме греческой математики — квадратуре круга. Анализ этой проблемы у Гиппократа[1]) показывает, что у математиков

') Исследование этого вопроса средствами современной математики см. в работах Landau E. / Borirhte Berliner Math. Ges.— 1903.— Bd 2,—S 1—6; Чеботарев Н. Г. / Собрание со золотого века Греции была упорядоченная евстема плоской геометрии, в которой в полном объеме применялся принцип логического заключения от одного утверждения к другому («апагоге»). Были заложены основы аксиоматики, на что указывает название приписываемой Гиппократу книги «Начала» («Stoicheia»), название всех греческих аксиоматических трактатов, включая трактат Евклида. Гиппократ исследовал площади плоских фигур, ограниченных как прямыми линиями, так и дугами окружности. Он учит, что площади подобных круговых сегментов относятся, как квадраты стягивающих их хорд. Он знает теорему Пифагора, а также соответствующее неравенство для непрямоугольных треугольников. Весь его трактат уже мог бы быть отнесен к евклидовой традиции, если бы он не был старше Евклида более чем на столетие.

Проблема квадратуры круга — одна из «трех знаменитых математических проблем античности», которые в этот период стали предметом исследования. Эти проблемы таковы:

1) Трисекция угла, то есть разделение любого заданного угла на три части.

2) Удвоение куба, то есть определение ребра такого куба, который имел бы объем, вдвое больший объема заданного куба (так называемая делийская задача).

3) Квадратура круга, то есть нахождение такого квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга.

Значение этих проблем в том, что их нельзя точно решать геометрически с помощью конечного числа построений прямых линий и окружностей,— это можно сделать только приближенно,— вследствие чего эти проблемы стали средством для проникновения в новые области математики. Б связи с этими проблемами были открыты конические сечения, некоторые кривые третьего и четвертого порядка и трансцендентная кривая, названная квадратриссой. Мы не должны с предубеждением подходить к вопросу о значении этих проблем из-за того, что иной раз они появлялись в виде анекдота (дельфийские пророчества и т. п.). Не раз случалось, что основной важности вопросы излагали в виде анекдота или голово

чинении, Т. I.—М.; Л., 1949.—С. 193—207; Д о р о д е о в А. В // ДАН СССР.—1947.—Т. 58.—С. 965—968. См. также Dantzig Г. The Bequest of the Greeks.— N. Y., 1955, Ch. 10.

ломки,— вспомним о яблоке Ньютона, о клятвопреступничестве Кардано, о винных бочках Кеплера. Математики разных эпох, включая нашу, показали, какая связь существует между этими греческими проблемами и современной теорией уравнений, связь, затрагивающая вопросы об областях рациональности, алгебраические числа и теорию групп.

4. Вероятно, от группы софистов, которые в некоторой степени были связаны с демократическим движением, отмежевалась другая группа философов с математическими интересами, примыкавшая к аристократическим объединениям. Они называли себя пифагорейцами в честь основателя этой школы Пифагора, который, предположительно, был мистиком, ученым и государственным деятелем аристократического толка. Софисты в большинстве подчеркивали реальность изменений, пифагорейцы стремились найти в природе и обществе неизменное. В поисках вечных законов вселенной они изучали геометрию, арифметику, астрономию и музыку («квадривий»). Самым выдающимся их представителем был Архит из Тарента, который жил около 400 г. до н. э. и школе которого, если мы примем гипотезу Франка (E. Frank), следует приписать большую часть «пифагорейской» математики. Арифметика пифагорейцев была в высшей степени спекулятивной наукой и имела мало общего с современной ей вычислительной техникой Вавилона. Числа разбивались на классы: четные, нечетные, четночетные, нечетнонечетные, простые и составные, совершенные, дружеские, треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. Некоторые из наиболее интересных результатов получены для «треугольных чисел», связывающих арифметику и геометрию:

• 1 ∴ 3 .•˙•. 6 •••••• 10 и т.д.

Наш термин «квадратные числа» идет от построений пифагорейцев:

• 1 :: 4 ⁖⁖ 9 и т. д.

Сами фигуры значительно старше, ведь некоторые из них мы находим в неолитической керамике. Пифагорейцы же исследовали их свойства, внесли сюда налет своего числового мистицизма и сделали числа основой своей философии вселенной, пытаясь свести все соотношения к чис ловым» («все есть число»). Точка была «помещенной единицей»[1]).

Пифагорейцам были известны некоторые свойства правильных многоугольников и правильных многогранников.

Они показали, как заполнить плоскость системой правильных треугольников, или квадратов, или правильных шестиугольников, а пространство — системой кубов. Впоследствии Аристотель пытался дополнить это неверным утверждением, что пространство можно заполнить правильными тетраэдрами[2]). Возможно, что пифагорейцы знали правильный октаэдр и додекаэдр — последнюю фигуру потому, что находимые в Италии кристаллы пирита имеют форму додекаэдра, а изображения таких фигур в орнаментах или как магический символ относится еще ко временам этрусков. Они восходят к кельтским племенам Центральной Европы начала эпохи железного века (ок. 900 г. до п. э.) и позже (пирит был источником железа)[3]).

Что касается теоремы Пифагора, пифагорейцы приписывали ее своему наставнику и передавали, что он принес в жертву богам сто быков в знак благодарности. Мы уже видели, что эта теорема была известна в Вавилоне времен Хаммурапи, но весьма возможно, что первое общее доказательство было получено в школе пифагорейцев.

Наиболее важным среди приписываемых пифагорейцам открытий было открытие иррационального в виде несоизмеримых отрезков прямой линии. Возможно, что оно было сделано в связи с исследованием геометрического среднего $a : b — b : c$, величиной, которая интересовала пифагорейцев и служила символом аристократии. Чему равно геометрическое среднее единицы и двойки, двух священных символов? Это вело к изучению отношения сторон и диагонали квадрата, и было обнаружено, что такое отношение не выражается «числом», то есть тем, что мы теперь называем рациональным числом (целым числом или дробью), а только такие числа допускались пифагорейской арифметикой.

') Об арифметике пифагорейцев см van der W a e rden B. L. / Math. Ann.— 1948.— Bd 120.S 127—153, 676700.

[2]) Struik D. J. / Nieuw Arch. v. Wiskundo.— 1925.—V. 15.— P. 121137.

[3]) Lindemann F. / Sitzber. Bayr. Akad Wiss., Miinchen.— 1897.— Bd 26.— S. 625—758; см. так же, 1934,— Bd 63.— S. 265—275.

Допустим, что это отношение равно $p: q$, где целые числа p и q мы всегда можем считать взаимно простыми. Тогда $p^2 = 2q^2$, следовательно, p^2, а с ним и p — четное число, и пусть $p = 2r$. Тогда q должно быть нечетным, но, так как $q^2 = 2r^2$, оно должно быть также четным. Такое противоречие разрешалось не расширением понятия числа, как на Востоке или в Европе эпохи Возрождения, а тем, что теория чисел для таких случаев отвергалась, синтез же искали в геометрии.

Это открытие, нарушившее непринужденную гармонию арифметики и геометрии, вероятно, было сделано в последние десятилетия пятого столетня до н. э. Сверх того, обнаружилась другая трудность — обнаружилась в соображениях о реальности изменений, и этим философы занимаются до наших дней. Открытие этой новой трудности приписывают Зенону Элейскому (около 450г. до н.э.), ученику Парменида, философа-консерватора, который учил, что разум постигает только абсолютное бытие и что изменение есть только кажущееся. Это приобрело математическое значение тогда, когда в связи с такими задачами, как определение объема пирамиды, стали заниматься бесконечными процессами. Здесь парадоксы Зенона оказались в противоречии с некоторыми давними и интуитивными представлениями относительно бесконечно малого и бесконечно большого. Всегда считали, что сумму бесконечно многих величин можно сделать сколь угодной большой, даже если каждая величина крайне мала ($\infty \times \varepsilon = \infty$), а также что сумма конечного или бесконечного числа величин размера нуль равна нулю ($n \times 0 = 0$, $\infty \times 0 = 0$). Критика Зенона была направлена против таких представлений, и его четыре парадокса вызвали такое волнение, что и сейчас можно наблюдать некоторую рябь. Эти парадоксы дошли до нас благодаря Аристотелю и известны под названиями *Ахиллес, Стрела. Дихотомия* (деление на два) и *Стадион.* Они сформулированы так, чтобы подчеркнуть противоречия в понятиях движения и времени, но это вовсе не попытка разрешить такие противоречия.

Парадоксы Ахиллес и Дихотомия, которые мы изложим своими словами, разъяснят нам суть этих рассуждений.

Ахиллес. Ахиллес я черепаха движутся в одном направлении по прямой Ахиллес куда быстрее черепахи, но, чтобы ее нагнать, ему надо сначала пройти точку P, из которой черепаха начала движение. Когда Ахиллес попадет в P, черепаха продвинется в точку P_1 Ахиллес не может догнать черепаху, пока не попадет в P_1, но черепаха при этом продвинется в новую точку P_2. Если Ахиллес находихся в P_2, черепаха оказывается в новой точке P_3

и т. д. Следовательно, Ахиллес никогда не может догнать черепаху. *Дихотомия.* Допустим, что я хочу пройти от А до В по прямой. Чтобы достичь *B*, мне надо сначала пройти половину *(AB_1)* расстояния *AB;* чтобы достичь B_1 я должен сначала достичь B_2 на полпути от *A* до B_1, и так до бесконечности, так что движение никогда не сможет начаться.

Аргументы Зенона показали, что конечный отрезок можно разбить на бесконечное число малых отрезков, каждый из которых — конечной длины. Они показали также, что мы встречаемся с затруднениями при объяснении того, каков смысл заявления, что прямая «состоит» из точек. Весьма вероятно, что сам Зенон не имел представления о том, к каким математическим выводам приводят его рассуждения. Проблемы, приведшие к парадоксам Зенона, неизменно возникают в ходе философских и теологических дискуссий. Мы в них видим проблемы, связанные с отношением потенцпальной и актуальной бесконечности. Впрочем, Поль Таннери[1]) считал, что рассуждения Зенона прежде всего были направлены против пифагорейского представления пространства как суммы точек («точка есть единица положения»). Как бы дело ни обстояло, несомненно, что рассуждения Зенона оказывали влияние на математическую мысль многих поколений. Его парадоксы можно сопоставить с теми, которыми пользовался в 1734 г. епископ Беркли, показывая, к каким логическим нелепостям может привести плохая формулировка положений математического анализа, но не предлагая со своей стороны лучшего обоснования.

После открытия иррационального соображения Зенона стали даже еще больше беспокоить математиков. Возможна ли математика как точная наука? Таннери[2]) полагал, что мы можем говорить о «настоящем логическом скандале»— о *кризисе* греческой математики. Если дело обостояло именно так, то этот кризис начинается под конец Пелопонесской войны, закончившейся падением Афин (404г. до н. э.). Тогда мы можем обнаружить связь между кризисом в математике и кризисом общественной системы, так как падение Афин означало смерт

') Tannery P. La geomelrie grecque.— Paris, 1887.— P. 217— 261. Другого мнения van der Waerden B. L. *II* Math. Ann — 1940.—Bd 117.—S. 141—161.

[2]) Tannery P. La geometrie grecque.—Paris, 1887.—P. 98, Таннери там рассматривает только крах древней теории отношений в результате открытия несоизмеримых отрезков.

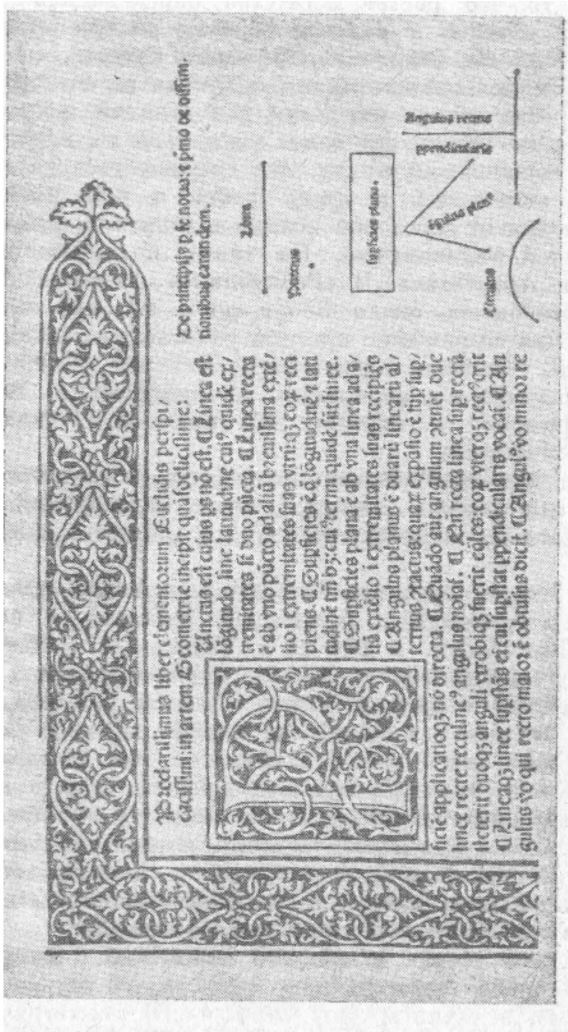
ный приговор владычеству рабовладельческой демократии и начало нового периода главенства аристократии — кризис, который был разрешен уже в духе новой эпохи.

5. Для этого нового периода греческой истории характерно то, что растет богатство определенной части правящих классов и равным образом растут нищета и необеспеченность бедняков. Правящие классы все больше средств для существования получали за счет рабского труда. Это давало им досуг для занятий искусством и наукой, но заодно все более усиливало их нерасположение к физическому труду. Эти досужие господа с презрением относились к труду рабов и ремесленников, и успокоения от забот они искали в занятиях философией и этикой индивидуума. На таких позициях стояли Платон и Аристотель. В «Республике» Платона (написанной, вероятно, около 360 г. до н. э.) мы находим самое четкое выражение идеалов рабовладельческой аристократии. «Стражи» в республике Платона должны изучать «квадривиум», состоящий из арифметики, геометрии, астрономии и музыки, для того чтобы понимать законы вселенной.

Такая интеллектуальная атмосфера (по крайней мере, в своем раннем периоде) была благоприятна для обсуждения основ математики и для умозрительной космогонии.

По меньшей мере три больших математика этого периода были связаны с Академией Платона, а именно Архит, Теэтет (ум. в 369 г.) и Евдокс (ок. 408—355). Теэтету приписывают ту теорию иррациональных, которая изложена в десятой книге «Начал» Евклида. Имя Евдокса связано с теорией отношений, которую Евклид дает в своей пятой книге, а также с так называемым методом исчерпывания, который позволил строго проводить вычисление площадей и объемов. Это означает, что именно Евдокс преодолел «кризис» в греческой математике и что его строгие формулировки помогли определить направление развития греческой аксиоматики и, в значительной мере, всей греческой математики.

Евдоксова теория отношений покончила с арифметической теорией пифагорейцев, применимой только к соизмеримым величинам. Это была чисто геометрическая теория, изложенная в строгой аксиоматической форме, и она сделала излишними какие-либо оговорки относительно несоизмеримости или соизмеримости рассматриваемых величин.



Часть страницы из первого издания «Начал» Евклида, 1482 г.

Типичным является «Определение V» книги V «Начал» Евклида:

Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой, каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.

Современная теория иррационального числа, построенная Дедекиндом и Вейерштрассом, почти буквально следует ходу мыслей Евдокса, но она открывает значительно более широкие перспективы благодаря использованию современных математических методов.

«Метод исчерпывания» (термин «исчерпывание» впервые появляется у Григория Сен Венсана, 1647 г.) был ответом школы Платона Зенону. Метод обходил все ловушки бесконечно малого, попросту устраняя их, так как сводил проблемы, в которых могли появиться бесконечно малые, к проблемам, решаемым средствами формальной логики. Например, если требовалось доказать, что объем V тетраэдра равен одной трети объема C призмы с тем же основанием и той же высотой, то доказательство состояло в том, чтобы показать абсурдность как допущения, что V>1/3P, так и допущения, что V<1/3C. Для этого была введена аксиома, известная теперь как аксиома Архимеда[1]). Она лежит в основе теории отношений Евдокса, а именно: «о тех величинах говорят, что они находятся в некотором отношении одна к другой, которые могут, будучи умножены, превзойти одна другую» (Евклид V, Определение 4). Этот метод, который у греков и в эпоху Возрождения стал стандартным методом точного доказательства при вычислении площадей и объемов, был вполне строг, и его легко превратить в доказательство, отвечающее требованиям современной математики.

Большим недостатком этого метода было то, что надо было заранее знать результат, чтобы его доказать, так что математик должен был сперва прийти к результату менее строгим путем, с помощью проб и попыток.

Есть ясные указания на то, что такого рода иной ме

[1]) Формулировка Архимеда (который явно приписывает ее Евдоксу) такова: *«Если даа пространства не равны, то можно сколько раз сложить с собою разность, на которую большее превосходит меньшее, чтобы она превзошла любое конечное пространство»* (в сочинении «О сфере и о цилиндре»).

тод действительно использовался. Мы располагаем письмом Архимеда Эратосфену (около 250 г. до н.э.), которое было обнаружено лишь в 1906 г. и в котором Архимед описывает нестрогий, но плодотворный способ получения результатов. Это письмо известно под названием «Метод». С. Лурье выдвинул предположение, что в нем выражены взгляды математической школы, которая соперничала со школой Евдокса, возникла, как и та, в период кризиса и связана была с Демокритом, основателем атомистики. Согласно теории Лурье, школа Демокрита висла понятие «геометрического атома». Предполагалось, что отрезок прямой, площадь, объем состоят из большого, но конечного числа неделимых «атомов». Вычисление объема тела было суммированием объемов всех «атомов», из которых состояло тело. Эта теория может показаться нелепой, если не вспомнить, что некоторые математики эпохи до Ньютона, особенно Виет и Кеплер, в сущности, пользовались такими же понятиями и считали окружность составленной из очень большого чистка крошечных отрезков. Нет никаких данных за то, что в древности на такой основе был развит строгий метод, но наши современные понятия предела дали возможность превратить эту «атомную» теорию в теорию столь же строгую, как и метод исчерпывания. Даже в наши дни мы обычно пользуемся таким понятием «атома» при постановке математических задач в теории упругости, в физике или в химии, оставляя строгую теорию с переходами к пределу профессиональным математикам').

Преимущество «атомного» метода перед методом исчерпывания в том, что первый облегчает нахождение новых результатов. Итак, у античности был выбор между строгим, но относительно бесплодным методом и методом с шатким обоснованием, но более плодотворным. Поучительно, что почти все классические авторы применяют первый метод. Это опять-таки может быть связано с тем, что математика стала коньком праздного класса, опиравшегося на рабство, равнодушного к изобретениям, с со

') «Таким образом, поскольку ограничиваются первыми дифференциалами, небольшой участок кривой вблизи какойлибо точки можно считать прямолинейным и лежащим в одной плоскости, в течение короткого промежутка времени частицу можно считать движущейся с постоянной скоростью, а любой физический процесс— происходящим в неизменном темпе» (Филипс Г. Дифференциальные уравнения.— 3е изд.— М.: Гостехиздат, 1950).

зерцательными интересами. Возможно и то, что в этом сказалась победа в области философии математики идеализма Платона над материализмом Демокрита.

6. В 334 г. до н. э. Александр Македонский начал завоевание Персии. В 323 г., когда он умер в Вапилоне, весь Ближний Восток был в руках греков. Полководцы Александра разделили между собой его завоевания, и со временем возникли три империи: Египет, под властью Птолемеев; Месопотамия и Сирия, под властью Селевкидов; Македония, под властью Антигона и его преемников. Даже в долине Инда были греческие князья. Началась эпоха эллинизма.

Прямым последствием походов Александра было то, что ускорилось проникновение греческой цивилизации в обширные районы восточного мира. Эллинизировались Египет, Месопотамия, часть Индии. Греки хлынули на Ближний Восток — торговцы, купцы, врачи, путешественники, наемники, искатели приключений. В городах — многие из них были недавно основаны, что было легко распознать по их эллинистическим названиям,— военное дело и администрация были в руках греков, население было смешанным, грековосточным. Но эллинизм был существенно городской цивилизацией. Село сохранило свое коренное население и свой традиционный жизненный уклад. В городах же старая культура Востока соприкасалась с импортированной цивилизацией греков и частично "мешалась с нею, хотя всегда оставалось в силе глубокое различие этих двух миров. Монархи эпохи эллинизма следовали восточным обычаям, решали восточные проблемы управления, попоощряли греческое искусство, греческую литературу и греческую науку.

Так и греческая математика была пересажена в новую среду. Она сохранила многие свои прежние особенности, но испытала влияние тех административных и астрономических запросов, которые выдвигал Восток. Такое тесное соприкосновение греческой науки с Востоком оказалось исключительно плодотворным, особенно в первые столетия. Фактически вся действительно творческая работа, которую мы называем «греческой математикой», была проделана за сравнительно короткий срок от 350 до 200 г. до н. э., от Евдокса до Аполлония, и даже достижения Евдокса известны нам только в том истолковании, в каком мы их находим у Евклида и Архимеда. Замечательно также, что наибольшего расцвета эта эллнниcтическая математика достигла в Египте Птолемеев, а не в Месопотамии, хотя в Вавилоне коренная математика была на более высоком уровне.

Возможно, что это было обусловлено центральным положением Египта той эпохи в средиземноморском мире. Его новая столица, Александрия, построенная на берегу моря, стала умственным и хозяйственным центром эллинистического мира. Вавилон же прозябал, как отдаленный центр караванных путей, да и вовсе сходил ее сцены — его сменил КтесифонСелевкия, новая столица империи Селевкидов. Насколько нам известно, ни один из великих греческих математиков не был когдалибо связан с Вавилоном. В Антиохии и Пергаме, тоже городах Селевкидской империи, но более близких к Средиземному морю, были важные школы греческой науки, Однако коренная вавилонская астрономия и математика как раз при Селевкидах достигли своей высшей точки, и мы только теперь начинаем лучше понимать, насколько существенно было их воздействие на греческую астрономию. Кроме Александрии, были и другие центры математической науки, прежде всего Афины и Сиракузы. Афины стали образовательным центром, а Сиракузы дали Архимеда, величайшего греческого математика.

7. В эту эпоху появился профессиональный ученый — человек, посвящающий свою жизнь развитию науки и получающий за это вознаграждение. Некоторые из наиболее выдающихся представителей такой группы людей жили в Александрии, где Птолемеи построили большой научный центр, так называемый Музей с его знаменитой библиотекой. Там сберегали и умножали научное и литературное наследие греков и добились при этом значительных успехов. Одним из первых связанных с Александрией ученых был Евклид, который является одним из наиболее влиятельных математиков всех времен.

О жизни Евклида мы не имеем никаких достоверных данных. Вероятно, он жил во времена первого Птолемея (306—283), которому, согласно преданию, он заявил, что к геометрии нет «царской дороги». Его наиболее знаменитое и наиболее выдающееся произведение — тринадцать книг его «Начал» (Stoicheia), но ему приписывают несколько других меньших трудов. Среди последних так называемые «Данные» (Data), содержащие то, что мы назвали бы приложениями алгебры к геометрии, но все это изложено строго геометрическим языком. Мы не знаем, какая часть этих трудов принадлежит самому Евклиду и какую часть составляют компиляции, но во мно гих местах проявляется поразительная проницательность. Это первые математические труды, которые дошли до нас от древних греков полностью. В истории Западного мира «Начала», после Библии, верояшо, наибольшее число раз изданная и более всего изучавшаяся книга. После изобретения книгопечатания появилось более тысячи изданий, а до того эта книга, преимущественно в рукописном виде, была основной при изучении геометрии. Большая часть нашей школьной геометрии заимствована часто буквально из первых шести книг «Начал», и традиция Евклида до сих пор тяготеет пад нашим элементарным обучением. Для профессионального математика эти книги все еще обладают неотразимым очарованием, а их логическое построение повлияло на научное мышление, пожалуй, больше, чем какое бы то ни было другое произведение.

Изложение Евклида построено в виде строго логических выводов теорем из системы определений, постулатов и аксиом. В первую четырех книгах рассматривается геометрия на плоскости. Исходя из наиболее простых свойств линий и углов, мы приходим здесь к равенству треугольников, равенству площадей, теореме Пифагора (I, 47), построению квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику, к золотому сечению, кругу и к правильным многоугольникам. В книге V изложена евдоксова теория несоизмеримых в ее чисто геометрической форме, в книге VI эта теория применена к подобию треугольников. Такое введение подобия — аа столь позднем этапе — составляет одно из наиболее существенных различий между изложением планиметрии у Евклида и современным. Приписать его следует тому значению, которое Евклид придавал новой евдоксовой теории несоизмеримых. Эти геометрические рассмотрения завершаются в десятой книге, которую многие считают наиболее трудной у Евклида. В ней дана геометрическая классификация квадратичных иррациональностей и корней квадратных из них, то есть тех чисел, которые мы представляем в виде $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. В последних трех книгах излагается геометрия в пространстве. От телесных углов, объемов параллелепипедов, призм и пирамид мы доходим здесь до шара и до того, что по замыслу должно, видимо, венчать весь труд: исследования пяти правильных («платоновых») тел и доказательства, что их существует только пять, Книги VII—IX посвящены теории чисел, но не технике вычислений, а таким «пифагорейским» вопросам, как делимость целых чисел, суммирование геометрических прогрессий, и некоторым свойствам простых чисел. Тут мы встречаем и «алгоритм Евклида» для определения наибольшего общего делителя заданной системы чисел, и «теорему Евклида», что простых чисел бесконечно много (IX, 20). Особый интерес представляет теорема VI, 27: в ней идет речь о первой из дошедших до нас задач на максимум и доказывается, что из прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. Пятый постулат книги I (неясно, в каком отношении находятся у Евклида «аксиомы» и «постулаты») эквивалентен так называемой «аксиоме параллельных», согласно которой через точку вне заданной прямой можно провести одну и только одну прямую, ей параллельную. Попытки сделать из этой аксиомы теорему заставили в девятнадцатом столетии полностью оценить мудрость Евклида: это утверждение было признано аксиомой, и в связи с этим были открыты другие, так называемые неевклидовы геометрии.

Алгебраические выводы у Евклида приводятся исключительно в геометрическом виде. Выражение вида $\sqrt{A}$ вводится как сторона квадрата с площадью A, произведение $a \cdot b$ — это площадь прямоугольника со сторонами a и b. Такой способ представления прежде всего был вызван теорией отношений Евдокса, в которой сознательно отвергались численные выражения для отрезков прямой и, таким образом, несоизмеримые рассматривались только геометрически: «числами» считались только целые числа или рациональные дроби.

Какую цель ставил себе Евклид, когда писал свои «Начала»? Мы можем с известной уверенностью полагать, что он хотел совместно изложить в одном труде три великих открытия недавнего прошлого: теорию отношений Евдокса, теорию иррациональных Теэтета и теорию пяти правильных тел, занимавших выдающееся место в космологии Платона. То были три типично «греческих» достижения.

8. Величайшим математиком эпохи эллинизма и всего древнего мира был Архимед (287—212), живший в Сиракузах, где он был советником царя Гиерона. Он — один из немногих ученых античности, которых мы знаем не только по имени: сохранились некоторые сведения о его жизни и личности. Мы знаем, что он был убит, когда

римляне взяли Сиракузы, при осаде которых техническое искусство Архимеда было использовано защитниками города. Подобная склонность к практическим применениям представляется нам весьма необычной, если учесть, с каким презрением к этому относились современники Архимеда из школы Платона. Однако объяснение нам дает много раз цитированное сообщение Плутарха (в жизнеописании Марцелла), а именно: «Хотя эти изобретения заслужили ему репутацию сверхчеловеческой проницательности, он не снизошел до того, чтобы оставить какое-либо писанное сочинение по таким вопросам, а, считая низким и недостойным делом механику и искусство любого рода, если оно имеет целью пользу и выгоду, все свои честолюбивые притязания он основывал на тех умозрениях, красота и тонкость которых не запятнаны какой-либо примесью обычных житейских нужд».

[4] Такая характеристика Архимеда как математика, считавшего практические применения науки стоящими вне науки, в лучшем случае — третьестепенным занятием для ученого, весьма распространена. Однако основана она, в сущности, только на том, что пишет об Архимеде Плутарх, автор сравнительно поздний (II в. н. э.), она не подтверждается более ранними авторами и не согласуется с теми, вообще слишком скудными, данными, которыми мы располагаем об Архимеде. Для историка Полибия (II в. до н. э.) Архимед обязан славой своей инженерной деятельности, для Цицерона (I в. до н. о.) Архимед прежде всего астроном, архитектор Витрувий (конец I в, до н. э.) относит Архимеда к числу тех немногих гениев, которые «сумели с помощью расчетов и знания тайн природы сделать большие открытия в механике и гномонике...». Первые работы Архимеда — работы по механике, в его более поздних работах по математике достаточно сильно выражено вычислительное направление. Нет оснований отрывать математическое творчество Архимеда от его несомненно разносторонней и систематической инженерной деятельности. А Архимеда-теоретика следует признать исключительно ярким представителем «математической физики» своей эпохи. Нам представляется вполне обоснованной та характеристика, которую дает И. Н. Веселовский: «Если придерживаться фактов, то Архимед и начал свою научную деятельность как механик, и закончил ее как механик, и в математических его произведениях механика является могучим средством для получения математических результатов, да и сами эти результаты не являются бесплодно висящими в воздухе, а применяются для обоснования механических теорий»[1]).

Наиболее важный вклад Архимеда в математику относится к той области, которую теперь мы называем интегральным исчислением: теоремы о площадях плоских фигур и об объемах тел. В «Измерении круга» он нашел

') См. вступительную статью И. Н. Веселовского в книге: Архимед. Сочинения.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 11.

приближенное выражение для окружности, пользуясь вписанными и описанными правильными многоугольниками. Дойдя в этом приближении до многоугольников с 96 сторонами, он нашел (в наших обозначениях), что

$$3\frac{10}{71}<3\frac{284\frac{1}{4}}{2018\frac{7}{40}}<3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}<\pi<3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}<3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}=3\frac{1}{7}$$

Обычно об этом сообщают, говоря, что π примерно равно 3 1/7. В книге Архимеда «О сфере и цилиндре» мы находим выражение для поверхности сферы (в таком виде: поверхность сферы в четыре раза больше площади большого круга) и для объема сферы (в таком виде: объем сферы равен 2/3 объема описанного цилиндра). В своей книге «Квадратура параболы» Архимед дал выражение для площади параболического сегмента (4/3 площади вписанного треугольника с основанием таким же, как у сегмента, и с вершиной в точке, в которой касательная параллельна основанию). В книге о «Спиралях» мы находим «спираль Архимеда» и вычисление площадей, а в книге «О коноидах и сфероидах»— объемы некоторых тел, образованных вращением кривых второго порядка.

Имя Архимеда связано также с его теоремой о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема находится в трактате по гидростатике «О плавающих телах».

Во всех этих трудах Архимеда поразительная оригинальность мысли сочетается с мастерской техникой вычислений и со строгостью доказательств. Характерны для этой строгости уже упомянутая «аксиома Архимеда» и постоянное использование метода исчерпывания при доказательстве его интеграционных результатов. Мы видели, что фактически он находил эти результаты более

') 3,1409 <*л*< 3,1429. Среднее арифметическое верхней и нижней границ дает π= 3,1419. Точнее, значение л = 3,14159.,, эвристическим путем («взвешивая» бесконечно малые), но затем он публиковал их, соблюдая самые жесткие требования строгости.

Обилие вычислений у Архимеда отличает его от большинства творческих математиков Греции. Это придает его трудам, при всех их типично греческих особенностях, восточный оттенок. Такой отпечаток заметен в его «Задаче о быках»— очень сложной задаче неопределенного анализа, которую можно истолковать как задачу, приводящую к уравнению

$$t^2 - 4\,729\,494\, u^2 = 1$$

типа «уравнения Пелля», которое решается в очень больших (целых) числах. Это лишь одно из многих указаний на то, что традиции Платона никогда безраздельно не господствовали в математике эллинизма, и на то же самое указывает эллинистическая астрономия.

9. С третьим великим математиком эллинизма, Аполлонием из Перги (ок. 260—ок. 170), мы снова целиком в русле геометрической традиции греков. Аполлоний, который, повидимому, вел обучение в Александрии и в Пергаме, написал трактат из восьми книг о конических сечениях («О кониках»). Семь книг сохранилось, три из них — только в арабском переводе. Это — трактат об эллипсе, параболе и гиперболе, определяемых как сечения кругового конуса, где изложение доведено до исследования эволют конического сечения. Мы называем эти кривые, следуя Аполлонию; эти названия выражают одно из свойств этих кривых, связанное с площадями и выражаемое, в наших обозначениях, уравнениями

$$y^2 = pr,\ y^2 = px \pm p/d \bullet x^2$$

(запись однородная, у Аполлония p и d — отрезки; знак «+» дает гиперболу, знак «—» дает эллипс). Парабола здесь значит «приложение», эллипс—«приложение с недостатком», гипербола—«приложение с избытком». Аполлоний не располагал нашим координатным методом, потому что он не располагал алгебраическими обозначениями (вероятно, он сознательно, под влиянием школы Евдокса, отвергал их). Однако многие его результаты можно сразу записать на языке координат, включая свойство эволют, совпадающее с тем, что выражается их уравне нием в декартовых координатах[1]). То же самое можно сказать о других книгах Аполлония, которые сохранились частично. Они содержат «алгебраическую» геометрию на геометрическом языке и поэтому в однородной записи. Здесь мы находим задачу Аполлония: построить окружность, касательную к трем заданным окружностям; окружности можно заменить прямыми или точками. У Аполлония мы впервые встречаем в явном виде требование, чтобы геометрические построения выполнялись только с помощью циркуля и линейки. Следовательно, это не было столь общим «греческим» требованием, как иной раз утверждают.

10. Математику в течение всей ее истории вплоть до современности нельзя отрывать от астрономии. Запросы ирригации и сельского хозяйства в целом, а в известной мере и мореплавания обеспечили астрономии первое место в науке Востока и эллинистической науке. Ход развития астрономии в немалой мере определял ход развития математики. Астрономия во многом определяла содержание вычислительной математики, а порой и математических понятий, равным образом прогресс астрономии зависел от того, насколько сильна была доступная математическая литература. Строение солнечной системы таково, что сравнительно простыми математическими методами можно получить далеко идущие результаты, но в то же время оно достаточно сложно для того, чтобы стимулировать совершенствование этих методов и самих астрономических теорий. На Востоке в эпоху, непосредственно предшествующую эллинистической, добились значительного продвижения в вычислительной астрономии, особенно в Месопотамии в позднеассирийскую и персидскую эпоху. Здесь систематически проводившиеся в течение длительного времени наблюдения дали возможность отлично разобраться во многих эфемеридах[2]). Движение Луны для математика было одной из самых трудных и увлекательных астрономических проблем как в древности, так и в восемнадцатом веке, и вавилонские

') «Итак, мой тезис состоит в том, что сущность аналитической геометрии состоит в изучении геометрических мест с помощью их уравнений и что это было известно грекам и служило основой их исследования конических сечений» (Coo1idge J. L. A History of Geometrical Methods.— Oxford, 1940.— P. 149). Впрочем, см. наши замечания относительно Декарта.

[2]) Эфемериды — координаты тел солнечной системы (в основном планет), вычисленные для различных значений времени и данные в виде таблицы.

(«халдейские») астрономы много сил положили на его исследование. Установление связей между греческой и вавилонской наукой в эпоху Селевкидов многое дало и в вычислительной, и в теоретической астрономии, и там, где наука Вавилона продолжала следовать древней календарной традиции, греческая наука смогла добиться некоторых из своих наиболее замечательных достижений. Самым древним из известных нам греческих достижений в теоретической астрономии является планетная теория Евдокса, уже знакомого нам в качестве вдохновителя Евклида. Это была попытка объяснить движение планет (вокруг Земли) с помощью четырех вращающихся концентрических сфер, каждая из которых имела особую ось вращения с концами, закрепленными в охватывающей сфере. Это было нечто новое и типично греческое, больше объяснение, чем регистрация небесных явлений. При всей своей внешней примитивности теория Евдокса заключала в себе основную идею всех планетных теорий вплоть до семнадцатого столетия — объяснение неправильностей видимого движения Луны и планет наложением круговых движений. Эта идея лежит в основе и вычислительной части современной динамической теории, поскольку мы вводим ряды Фурье.

За Евдоксом последовал Аристарх Самосский (ок. 280 г. до н. э.), «Коперник античности», которому Архимед приписывает гипотезу, что центром в движении планет является Солнце, а не Земля. У этой гипотезы в древности было мало приверженцев, хотя широко было распространено убеждение в том, что Земля вращается вокруг своей оси. Что гелиоцентрическая гипотеза имела мало успеха, объясняется преимущественно авторитетом Гиппарха, которого часто называют величайшим астрономом античности.

Гиппарх из Никеи вел наблюдения между 161 и 126 г. до н. э. Непосредственно от него до нас дошло немного — главным источником сведений о его достижениях является Птолемей, живший тремя столетиями позже. Многое в большом труде Птолемея, в «Альмагесте», может быть приписано Гиппарху, в частности применение эксцентрических кругов и эпициклов для объяснения движения Солнца, Луны и планет, а также открытые предварения равноденствий. Гиппарху приписывают также определение широты и долготы астрономическими средствами, по в древности ни разу не смогли так организовать научные работы, чтобы можно было в больших масштабах выполнить съемку местности. (Ученые в древности попадались редко как в пространстве, так и во времени.) Труды Гиппарха тесно связаны с достижениями вавилонской астрономии, которая в его время достигла больших высот. Можно считать эти труды наиболее важным научным плодом грековосточных связей в эпоху эллинизма'),

11. Третий и последний период античного общества — период господства Рима. Рим завоевал Сиракузы в 212, Карфаген — в 146, Грецию — в 146, Месопотамию — в 64, Египет — в 30 г. до н. э. Все, чем римляне овладели на Востоке, включая Грецию, было низведено до положения колонии, управляемой римскими администраторами. Римское правление не затрагивало экономической структуры восточных стран, пока в срок поступали тяжелые налоги и другие поборы. Римская империя естественным образом расщепилась на западную часть с экстенсивным сельским хозяйством, где применялись покупные рабы, и на восточную часть с интенсивным сельским хозяйством, где рабов использовали только для домашнего хозяйства и на общественных работах. Несмотря на рост некоторых городов и на торговлю, охватывавшую все известные страны Запада, основой экономического строя Римской империи оставалось земледелие. Расширение рабовладельческого хозяйства в таком обществе было роковым для всякой оригинальной науки. Рабовладельцы как класс редко бывают заинтересованы в технических открытиях, отчасти потому, что рабы все делают дешево, отчасти потому, что они боятся давать рабам такие орудия, которые могут способствовать умственному развитию. Многие из правящего класса слегка занимались искусствами и науками, но такие стремления были залогом скорее посредственности, чем творческого мышления. Когда вместе с упадком торговли рабами стала хиреть экономика Рима, немного было людей, которые могли развивать даже посредственную науку предыдущих столетий.

Пока Римская империя сохраняла известную устойчивость, восточная наука, своеобразная смесь эллинистических и восточных составных частей, продолжала про

') Neugebauer O. Exact Science in Antiquity // Studies in Civilization. Univ. of Pennsylvania Bicentennial Conf. Philadelphia, 1942.—P. 22—31 и Neugebauer 0. The Exact Sciences in Antiquity.— Providence, R. I., 1952. Имеется русский перевод — см. библиографию на с. 84.

цветать. Постепенно снижалась оригинальность, слабела движущая сила, но установленный римлянами на столетия мир (pax Romana) позволял без помех заниматься традиционными теориями. В течение нескольких столетий с «римским миром» сосуществовал «китайский мир»— pax Sinensis. Евразийский континент за всю свою историю не имел такого долгого мирного периода, как при Антонинах в Риме и при династии Хань в Китае. Это облегчало проникновение знаний по континенту из Рима и Афин в Месопотамию, Китай и Индию. Эллинистическая наука, как и прежде, проникала в Китай и Индию, испытывая в свою очередь влияние науки этих стран. Отблеск вавилонской астрономии и греческой математики падал на Италию, Испанию и Галлию — тому примером распространение в Римской империи деления угла и часа на шестьдесят частей. Существует теория Ф. Вёпке (F. Woepcke), по которой распространение в Европе так называемых индийско-арабских цифр связано с неопифагорейскими школами поздней Римской империи. Возможно, что это верно, но если эти цифры настолько стары, то более вероятно, что на их распространение повлияла торговля, а не философия.

Александрия оставалась центром античной математики. Велись оригинальные исследования, хотя компилирование и комментирование все более становилось основным видом научной деятельности. Многие результаты античных математиков и астрономов дошли до нас в трудах этих компиляторов, и порой очень трудно выделить то, что они передают и что они открыли сами. Пытаясь проследить постепенный упадок греческой математики, мы должны учитывать и ее техническую сторону: неуклюжий геометрический способ выражения при систематическом отказе от алгебраических обозначений, что делала почти невозможным какое-либо продвижение «за» конические сечения. Алгебру и вычисления оставляли презренным людям Востока, на чье учение был нанесен тонкий слой греческой цивилизации. Однако неверно утверждение, что александрийская математика была чисто греческой в традиционном понимании Евклида — Платона: вычислительной арифметикой и алгеброй египетско-вавилонского типа занимались бок о бок с абстрактными геометрическими рассуждениями. Достаточно вспомнить о Птолемее, Героне и Диофанте, чтобы в этом убедиться. Объединяло различные расы и школы только пользование греческим языком.

12. Одним из самых ранних александрийских математиков римского периода был Никомах из Герасы (ок. 100 г.), чье «Арифметическое введение»— наиболее полное из сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. Там рассматриваются большей частью те же вопросы, что и в арифметических книгах Евклида, но тогда, как у Евклида числа изображаются отрезками, Никомах пользуется арифметическими обозначениями и, если имеет дело с неопределенными числами, обычной речью. Полигональные и пирамидальные числа Никомаха оказали влияние на средневековую арифметику, главным образом через Боэция ').

Одно из крупнейших произведений этого второго александрийского периода — «Великое собрание» Птолемея, более известное под арабизированным названием «Алмагест» (ок. 150г.). «Алмагест» — астрономический труд высшего мастерства и весьма оригинальный, хотя многие из его идей идут от Гиппарха или от Кидинну и других вавилонских астрономов. В нем есть и тригонометрия с таблицей хорд для углов от 0° до 180°, соответствующая таблице синусов для углов от 0° до 90° через полградуса. Для синуса угла в 1° Птолемей нашел значение (1, 2, 50) = $1/60 + 2/60^2 + 5/60^3$ = 0,017268 (точное значение 0,017453...), для л его значение (3, 8, 30) = 377/120≈3,14166. В «Алмагесте» мы находим формулу для синуса и косинуса суммы и разности двух углов и зачатки сферической тригонометрии. Теоремы формулируются геометрически — наши современные тригонометрические обозначения идут лишь от Эйлера (восемнадцатый век). В «Алмагесте» мы находим и «теорему Птолемея» о четырехугольнике, вписанном в окружность, В «Планисферии» Птолемея рассматривается стереографическая проекция, а в его «Геометрии» положение на Земле определяется с помощью долготы и широты. Последние, таким образом, являются давним примером координат на сфере.

На стереографической проекции основана конструкция астролябии — прибора, который применяли для определения положения на Земле. Астролябия была известна в древности, и ею широко пользовались до введе

1) См. главу V

ния октанта, позже — секстанта, в восемнадцатом веке[1]).

Несколько старше Птолемея Менелай (ок. 100 г.). В его «Сферике» содержится геометрия сферы и рассматриваются сферические треугольники — предмет, которого нет у Евклида. Здесь мы находим «теорему Менелая» для треугольника в обобщенном для сферы виде. В астрономии Птолемея немало вычислений в шестидесятичных дробях, а трактат Менелая геометричен строго в духе евклидовой традиции.

К эпохе Менелая, возможно, относится и Герон, — во всяком случае мы знаем, что он точно описал лунное затмение 62 г.[2]). Герон был энциклопедистом, он писал на геометрические, вычислительные и механические темы, его произведения — любопытная смесь греческого и восточного. В своей «Метрике» он выводит «формулу Герона» для площади треугольника $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ чисто геометрическим образом; сам результат приписывается Архимеду. В той же «Метрике» мы находим типично египетские «основные» дроби, например в приближении для $\sqrt{63}$=(7+ ½ +1/4 +1/8+ 1/16). Формулу Герона для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием без труда можно свести к формуле, имеющейся в Московском папирусе. Напротив, определение объема пяти правильных многогранников у Герона — в духе Евклида.

13. Еще сильнее восточный колорит в «Арифметике» Диофанта (ок. 250 г.). Уцелели только шесть книг оригинала, общее их число — предмет догадок. Искусная трактовка в них неопределенных уравнений показывает, что древняя алгебра Вавилона или, быть может, Индии не только существовала под тонким слоем греческой цивилизации, но ее совершенствовали немногочисленные деятели эпохи. Как и когда это происходило, мы не знаем, как не знаем, кем был Диофант, — возможно, что он был эллинизированный вавилонянин. Его книга — один из наиболее увлекательных трактатов, сохранившихся от грекоримской древности.

') Michel H. Traite de 1'astrolabe.—Paris, 194 7. См. также Neugebauer 0. The Early History of the Astrolabe / Isis.— 1949.—V. 40.—P. 240—256.

[2]) Neugebauer O. Uber eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria — Rom bei Neron / Hist. fil. Medd. Danske Vid. Sels.— 1938.— V. 26, № 2.— P. 28 и след.

В собрание Диофанта входят весьма разнообразные задачи, а их решения часто в высшей степени остроумны. «Диофантов анализ» состоит в нахождении решений неопределенных уравнений вида $Ax^2 + Bx + C = y$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$ или систем таких уравнений. Типично для Диофанта то, что его интересуют только положительные рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получались искомые положительные рациональные решения.

Среди этих уравнений мы обнаруживаем такие, как $x^2 — 26y^2 = 1$ и $x^2 — 30y^2 = 1$, теперь известные как «уравнения Пелля». У Диофанта есть несколько теорем теории чисел, как, например, теорема (III, 19), что произведение двух целых чисел можно двумя способами представить как сумму двух квадратов, если каждый сомножитель — сумма двух квадратов. Есть и теоремы о разбивке числа на сумму трех и четырех квадратов. У Диофанта мы впервые встречаем систематическое использование алгебраических символов. У него есть особые знаки для неизвестного, для минуса, для обратной величины. Эти знаки все еще скорее сокращения, чем алгебраические символы в нашем смысле (они образуют так называемую реторическую алгебру); для каждой степени неизвестного был особый символ[1]). Нет сомнения, что здесь перед нами не только арифметические вопросы вполне алгебраического характера, как в Вавилоне, но и хорошо развитые алгебраические обозначения, которые весьма способствовали решению задач значительно более сложных, чем любые ранее поставленные.

14. Последний из больших александрийских математических трактатов написан Паппом (конец третьего столетия). Его «Собрание» («Synagoge»)— нечто вроде учебника для изучающих греческую геометрию, с историческими справками, с улучшением и видоизменением известных теорем и доказательств. Скорее всего, трактат надо было читать вместе с оригинальными трудами, а не самостоятельно.

') Папирус 620 Мичиганского университета, купленный в 1921 г., содержит много задач греческой алгебры, относящихся к периоду до Диофанта, может быть, к началу второго столетия. Некоторые символы, имеющиеся *у* Диофанта, встречаются в этой рукописи См Bobbins F. Б. / Classical Philology.— 1929.— V. 24.—P. 321329; Vogel К. / Classical Philology.—1930.— V. 25.— S. 373—375.

Многие результаты древних авторов известны только в той форме, в какой они сохранились у Паппа, например задачи о квадратуре круга, удвоении куба и трисекции угла. Интересна глава об изопериметрических фигурах с положением, что круг имеет большую площадь, чем любой правильный многоугольник того же периметра. Здесь есть и замечание, что пчелиные соты обладают некоторыми максимально-минимальными свойствами[1]). Полуправильные тела Архимеда тоже известны благодаря Паппу. Как и «Арифметика» Диофанта, «Собрание» Паппа — книга, которая будит мысль, и ее задачи вдохновляли многих исследователей более поздних времен.

Александрийская школа медленно умирала вместе с упадком античного общества. В целом она оставалась оплотом язычества против распространявшегося христианства, и некоторые из ее математиков отмечены и в истории античной философии. Прокл (410—485), чей «Комментарий к Первой книге Евклида»— один из наших главных источников по истории греческой математики, возглавлял школу неоплатоников в Афинах. В Александрии ту же школу представляла Гипатия, которая писала комментарии к классикам математики. Она была убита в 415 г. приверженцами св. Кирилла. Ее судьба сделала ее героиней романа Чарльза Кингсли (Charles Kingsley)[2]). Эти философские школы вместе со своими комментаторами в течение столетий то процветали, то хирели. Академия в Афинах была закрыта императором Юстинианом как языческая (529 г.), но к тому времени возникли школы в таких местах, как Константинополь и Джунди-Шапур (Jundishapur). В Константинополе сберегались многие старые своды рукописей и комментаторы продолжали на греческом языке закреплять память о греческой науке и философии. В 630 г. Александрию взяли арабы и верхний слой греческой цивилизации в Египте был заменен арабским слоем. Нет оснований утверждать, что знаменитую александрийскую библиотеку уничтожили арабы, потому что сомнительно, существовала ли еще она в то время. Фактически арабское завоевание не изменило существенным образом характера математических исследований в Египте. Мог иметь место

') Полное изложение этого вопроса см. Thompson, D'Arcy W. Growth and Form.— 2nd ed.— Cambridge, 1942.

[2]) См. также Voltaire. Dictiormaire Philosophique, статья Hypatie.— Oeuvres, 1819.—Т. 36.—P. 458; Маутнер Ф. Гинатия.— М,, 1924.

регресс, но когда мы вновь услышим о египетской математике, окажется, что она следует древней грековосточной традиции (например, Алхазен).

15. Мы закончим эту главу некоторыми замечаниями о греческой арифметике и логистике. Греческая математика отличала арифметику или науку о числах от логистики, то есть от практических вычислений. Термин «аритмос» обозначал только натуральное число, «количество, составленное из единиц» (Евклид, VII, определение 2; это значило также, что «один» не считалось числом[1])). Нашего понятия действительного числа не знали. Поэтому отрезок прямой не всегда имел длину. Вместо наших операций с действительными числами пользовались геометрическими рассуждениями. Когда Евклиду нужно сформулировать, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, он говорит, что она равна половине площади параллелограмма с тем же основанием и лежащего между теми же параллелями (Евклид I, 41). Теорема Пифагора была зависимостью между площадями трех квадратов, а не между длинами трех сторон. В «Началах» Евклида имеется теория квадратных уравнений, но она излагается с помощью «площадей», а так как корни представляют собой отрезки, определяемые известными построениями, то можно установить, что допускались только положительные корни. Все же в «Началах» не обязательно, чтобы каждому отрезку соответствовало числовое значение. Такие представления об отрезках и числах надо считать продуманной системой, результатом победы платоновского идеализма среди той части правящего класса Греции, которая интересовалась математикой. Ведь согласно восточным представлениям той же эпохи относительно зависимости между алгеброй и геометрией никакие ограничения на понятие числа не налагались. Есть все основания полагать, что для вавилонян теорема Пифагора была числовой зависимостью между длинами сторон, и именно с такой математикой ознакомились ионийские ученые.

Обычная вычислительная математика, известная как «логистика», оставалась жизнеспособной во все периоды греческой истории. Евклид ее отвергал, но Архимед и

') Еще Стевин в свой «Арифметике» (1585 г.) вынужден бороться за признание единицы числом.

Герон ею пользовались свободно, без угрызений совести. Ее основой была система счисления, которая со временем изменилась. Ранняя греческая система счисления была десятичной и аддитивной, как египетская и римская. В александрийскую эпоху, а может быть и раньше, появляется способ записи чисел, которым пятнадцать веков пользовались не только ученые, но и купцы и чиновники. Знаки греческого алфавита последовательно применялись для обозначения сначала наших символов 1,2,..., 9, затем десятков, от 10 кончая 90, и, наконец, сотен, от 100 кончая 900 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$ и т. д.). Три архаичные буквы были добавлены к 24 буквам греческого алфавита, чтобы получить необходимые 27 знаков. С помощью такой системы любое число меньше 1000 можно было записать не более чем тремя знаками, например 14 как $\iota\delta$, так как $\iota = 10$, $\delta = 4$; числа, большие 1000, можно было выразить с помощью простого расширения такой системы. Ею пользуются в сохранившихся рукописях работ Архимеда, Герона и всех других классических авторов. Имеются археологические данные о том, что этой системе обучали в школах. Это была десятичная непозиционная система: как $\iota\delta$, так и $\delta\iota$ могло значить только 14. Такое отсутствие позиционности и использование не менее чем 27 знаков иной раз рассматривались как доказательство несовершенства системы. Но то, как легко ею пользовались математики древности, и то, что греческие купцы применяли ее даже при очень сложных расчетах — в Восточной Римской империи вплоть до ее гибели в 1453 г.,— указывает, по-видимому, на наличие некоторых преимуществ. При известном опыте вычислений при такой системе мы действительно убеждаемся, что четыре основных действия можно выполнять достаточно легко, если твердо знать символы. Действия с дробями при подходягцих обозначениях тоже просты, но греки не были при этом последовательны, так как у них не было единой системы: они пользовались египетскими «основными» дробями, вавилонскими шестидесятичными дробями и записью дробей, напоминающей нашу. Десятичные дроби пе были введены, это великое усовершенствование в Европе появляется в эпоху позднего Ренессанса, когда вычислительный аппарат был развит значительно больше, чем когда бы то ни было в древности. Но даже в этих условиях десятичные дроби не были приняты во многих школах до восемнадцатого и девятнадцатого столетия.

Доказывали, что алфавитная система счисления губительно повлияла на развитие греческой алгебры, так как применение букв для определенных чисел мешало применять буквы для обозначения чисел вообще, как это делается в нашей алгебре. Надо отвергнуть такое формальное объяснение отсутствия алгебры у греков до Диофанта, даже если высоко оценивать значение подходящих обозначений. Если бы классические авторы интересовались алгеброй, они создали бы подходящую символику, что действительно начал делать Диофант.

Вопрос об алгебре у греков можно будет разъяснить только после дальнейшего изучения связей греческой математики и вавилонской алгебры в общей системе связей между Грецией и Востоком.

ЛИТЕРАТУРА

Классические греческие авторы имеются в превосходных изданиях, их главные труды переведены на европейские языки. В качестве наилучшего введения мы рекомендуем следующие книги:

Heafh T. L. A History of Greek Mathematics.—V. 1—2.— Cambridge, 1912.

Heath T. L. A Manual of Greek Mathematics.—Oxford, 1931.

Heath T. L. The Thirteen Books of Euklid's Elements.— V. 1— 3.—Cambridge, 1908, переиздание,—N. Y., 1955.

На русском языке см.

Начала Евклида/Перевод и комментарии Д. Д. МордухайБолтовского. Книги I—VI.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Книги VII—X,— М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Книги XI—XV.—М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Архимед. Сочинения/Перевод и примечания И. Н. Веселов

ского.— М.: Физматгиз, 1962.

Архимед. Исчисление песчинок (Псаммит)/Перевод, статья и примечания Г. Н. Попова.— М.; Л:. ГТТИ, 1932.

Гейберг И. А. Естествознание и математика в классической древности/С предисловием А. II Юшкевича.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Лурье С. Я Архимед.— М.; Л., 1945.

Башмакова И. Г. Дифференциальные методы в работах Архимеда / Историко-математические исследования, вып. VI.— М.: Гостехиздат, 1953.—С. 609—658.

Башмакова И Г. Лекция по истории математики в Древней Греции I/ Историко-математические исследования, вып. XI.— М.: Физматгиз, 1958.—С. 225—438.

К о л ь м а и Э. Я. История математики в древности.— М : Физматгиз, 1961.

В книгах: Историкоматематические исследования, вып. I.— М.: Гостехиздат, 1948; вып. II.— М.: Гостехиздат, 1949; вып. VIII.— М.: Гостехиздат, 1955, см. статьи о «Началах» Евклида: в книге М. Я. Выгодского (см. литературу к главе II) см. раздел III: Арифметика древних греков

Ver Eecke P. Oeuvres completes d'Archimede — Briissel, 1921,

Ver Eecke P. Pappus d'Alexandrie. La Collection mathematique.— Paris; Bruges, 1933.

Ver Eecke P. Proclus de Lycie, Les Commentaires sur le Premier Livre des Elements d'Euclide.— Bruges, 1948.

Loria G. Le scienze estatte neU'anlica Grecia,— 2od.— Milano,1914.

A 11 m a n G. J. Greek Geometry from Thales to Euclid.— Dublin,1889

G o w J. A Short History of Greek Mathematics.— Cambridge,1884.

Dijksterhuis E. J. Archimedes.— Copenhagen, 1956.

D a n t z i g T. The bequest of the Greek.— N. Y., 1955.

Blaschke W. Griechische und anschauliche Geomelrie.— Mimchen, 1953.

Becker O. Das mathematische Denken der Antike.— Gotlingen, 1957.

H a u s e r G. Geometric der Griecben von Thales bis Euklid.— Luzern, 1955.

Reidemeister K. Die Arithmetik der Griechen / Hamburger Math. Sem. (Einzelschriften).— 1939.— Bd 26.

Reidemeister K. Das exakte Denken der Griechen.— Hamburg, 1959.

Интересные работы А. Сабо, в которых оценка раннего периода древнегреческой математики основывается на анализе ее терминологии. См.

Szabo A. Anfange des Euklidischen Axiomensystems / Archiove for History of Exact Sciences,— I960,— V. 1, N 1.— P. 37—106.

Szabo A. Die fruhgilechische Proporlionlehre im Spiegel ihrer Terminologie / Archieve for History of Exact Sciences.—1965.— V. 2, N 3,— P. 197—270.

Параллельные греческие, латинские и английские тексты см. в книге:

Thomas J. Selections Illustrating the History of Greek Mathematics.— Cambridge (Mass.); London, 1939.

Дальнейшую критику текста см. в книге:

Tannery P. Pour 1'histoire de la science hellene.— 2ed.— Paris, 1930.

Tannery P. Memoirs scientifiques.— T.I—4.

V o g t H. Die Entdeckungsgeschichle des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4ten Jahrhunderts / Bibliotheca math,—1909—1910,—Bd (3) 10.—S. 97—105.

Sachs E. Die fiinf Platonischem Korper,—Berlin, 1917.

Frank E. Plato und die sogenannten Pythagoreer.— Halle. 1923.

Luria S. Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten / Quellen und Studien,— 1932,— Bd 2,— S. 106—185.

В связи с последней работой см. Лурье С. Я. Теория бесконечно чалых у древних атомистов.— М.:'Л., 1935.

Wussing H. Mathematik in der Antike.—Leipzig, 1965.

H e 11 e n S. Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreen / Abh. Deutsch. Akad. Wiss., Kl. f. Math. u. Phys. u. Techn.— 1958.— N 6.

Caiori F. The History of Zeno's Arguments on Motion / Amer. Math. Monthly.— 1915,— V. 22, 8 статей. См. также. Isis,— 1920.— 1921.

Хороший критический обзор и сравнение гипотез относительно греческой математики см. в книге:

Dijksterhuis E. De elementen van Euclides.— T. 1—2.— Groningen, 1930.

О парадоксах Зенона см. (кроме приводимой ниже книги ван дер Вердена, с. 50) указанную выше работу Кеджори (F. Cajori).

Об отношении греческой астрономии к восточной см.

Neugebauer O. The History of Ancient Astronomy, Problems and Methods / J. Near Eastern Studies.— 1945.—V. 4.— P. 1—38.

См. также:

Cohen M. R., Drabkin J. Б. A Source Book in Greek Science.— N. Y., 1948.

Heath T. L. Mathematics in Aristotle.—Oxford, 1949. Van der Warden B. L. Ontwakende Wetenschap.— Groningen, 1950.

Эта написанная по-голландски книга переведена на русский (Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции/Перевод и добавления И. Н. Веселовского.— М.: Физматгиз, 1959), английский и немецкий языки.

Neugebauer O. The Exact Sciences in Antiquity.— 2nd ed.— Providence (R. I.), 1957. (Нейгебауер О. Точные науки и древности/Перевод В. Е. Гохман под ред. и с предисловием А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1968.)

Избранные математические тексты с пояснением на голландском языке:

Bruins E. M. Fontes matheseos.— Leiden, 1953. Lorenzen P. Die Entstebung der exakten Wissenschaf ten.— Berlin, 1960.

V o g e 1 K. Beitrage zur griechischen Logistik, Teil 1.— Miinchen, 1936.

Глава IV

ВОСТОК ПОСЛЕ УПАДКА АНТИЧНОГО ОБЩЕСТВА

1. Древняя культура Ближнего Востока, несмотря на эллинистические влияния, никогда не исчезала. В александрийской науке явно проступает влияние как Востока, так и Греции; Константинополь и Индия тоже были важными пунктами соприкосновения Востока и Запада. В 395 г. н. э. Феодосии I основал Византийское государство; столица государства Константинополь была греческим городом, но она была административным центром обширных областей, где греки составляли только часть городского населения. В течение тысячи лет это государство, борясь против сил, наступавших с востока, севера и запада, выступало и как хранитель греческой культуры, и как связующее звено между Востоком и Западом. Месопотамия рано, во втором столетии н. э., перестала зависеть от римлян и греков, сперва под властью парфянских королей, позже (266г.) при чисто персидской династии Сасанидов. Области, прилегающие к Инду, в течение нескольких столетий управлялись греческими династиями, пока те не исчезли в первом столетии н. э. Сменившие их местные индийские королевства поддерживали культурные связи с Персией и Западом.

Политическое господство греков над ближним Востоком почти полностью сошло на нет после внезапного возникновения ислама. После 622г., года хиджры, арабы с поразительной стремительностью овладели значительной частью Западной Азии (с такой же стремительностью, с какой позже завоевали Америку испанцы), и до конца седьмого столетия они стали обладателями части западноримского государства — в Сицилии, Северной Африке и в Испании. Везде, куда они проникали, они пытались заменить грекоримскую культуру культурой ислама. Государственным языком стал арабский, заменивший греческий или латинский, изза нового языка научных документов легко можно упустить из виду, что и при господстве арабов сохранялась замечательная преемственность культуры. Прежние местные культуры в это время получили даже больше возможностей сохраниться, чем при господстве чужеземцевгреков. Например, Персия, несмотря на переход власти к арабам, в значительной мере оставалась прежней страной Сасанидов. Заодно продолжалось соревнование различных традиций, только теперь в новом виде. В течение всего времени господства ислама непрерывно существовала греческая традиция, сохранившая свой особый характер в отличие от различных местных культур.

2. Мы видели, что самые замечательные математические результаты в ходе борьбы и объединения восточной и греческой культур во время расцвета Римской империи были достигнуты в Египте. С упадком Римской империи центр математических исследований постепенно перемещался в Индиго, а позже — в обратном направлении, в Месопотамию. Первые хорошо сохранившиеся индийские тексты в области точных наук — это «Сиддханты», часть которых, «Сурья», дошла до нас, вероятно, в достаточно точно соответствующей оригиналу (примерно между 300 и 400 годами и. э.) форме. В этих книгах содержится в основном астрономия, мы находим там эпициклы и шестидесятичные дроби. Такие факты позволяют предположить наличие влияния греческой астрономии, относящегося, быть может, к эпохе «Алмагеста». Возможно, что они указывают на непосредственный контакт с вавилонской астрономией. Но, кроме этого, в «Сиддхантах» мы находим многочисленные типично индийские особенности. «Сурья Сиддханта» содержит таблицу значений синуса (джия), а не хорд.

Результаты, изложенные в «Сиддхантах», систематически разъяснялись и развивались в индийских математических школах, укоренившихся преимущественна в Удджайне (Центральная Индия) и в Майсоре (Южная Индия). До нас дошли имена и книги отдельных индийских математиков, начиная с пятого столетия н. э.; некоторые книги доступны нам в английских переводах.

Наиболее известными математиками Индии были Ариабхата (прозванный «первым», около 500 г.) и Брахмагупта (около 625г.). Насколько они были знакомы с результатами греков, вавилонян и китайцев, мы можем только строить предположения, но, во всяком случае, они проявляют значительную оригинальность. Для их работ характерны арифметическо-алгебраические разделы. В их склонности к неопределенным уравнениям проявляется некоторое родство с Диофантом.

Современником Брахмагупты был Бхаскара I, автор комментария к трактату Ариабхаты и астрономического сочинения «Маха-Бхаскария», содержащего математические разделы (неопределенные линейные уравнения, элементы тригонометрии и пр.). За этими учеными в ближайшие столетия последовали другие, работавшие в тех же областях; в трудах последних представлено астрономическое, частично арифметическоалгебраическое направление, они занимались также измерениями и тригонометрией. Ариабхата I имел для π значение 3,1416. Любимым предметом было нахождение рациональных треугольников и четырехугольников. Особенно успешно над этим работал Магавира из Майсорской школы (около 850 г.). До нас дошли также трактаты Шридхары (IX— X вв.). Ариабхаты II (около 950 г.), Шрипати (XI в.) и др. Около 1150г. в Удджайне, где работал Брахмагупта, мы находим другого выдающегося математика, Бхаскару II. Первое общее решение неопределенного уравнения первой степени $ax + by = c$ (a, b, c — целые числа) встречается у Брахмагупты. Поэтому, строго говоря, нет оснований называть неопределенные линейные уравнения диофантовыми. Диофант допускал еще и дробные решения, индийские математики интересовались только целочисленными. Они пошли дальше Диофанта и в том отношении, что допускали отрицательные корни уравнений, хотя это в свою очередь, должно быть, соответствует более древней практике, сложившейся под влиянием вавилонской астрономии. Например, для уравнения $x^2 — 45x = 250$ Бхаскара II находил решения $x = = 50$ и $x = —5$, но относительно приемлемости отрицательного корня он высказывал известный скептицизм. Его «Лилавати» в течение столетий оставалась на Востоке образцовой книгой по арифметике и искусству измерений; император Акбар перевел ее на персидский язык (1587г.), в 1816 г. она была издана в Калькутте[1]) и после этого многократно переиздавалась как учебник математики для религиозных школ.

[1]) Брахмагупта заявляет в одном из мест своей книги, что некоторые его задачи предложены «просто для удовольствия». Это подтверждает то, что математика Востока уже давпо освободилась от своей чисто утилитарной роли. Спутся сто пятьдесят лет на западе Алкуин составил свои «Задачи для оттачивания ума юно

Можно сказать с уверенностью, что в древней Индии было найдено много ценнейших математических результатов; например, недавно стало известно, что ряды Грегори — Лейбница для $\pi/4$ были найдены уже при Нилаканте (ок. 1500 г.)').

3, Наиболее известным достижением индийской математики является наша современная десятичная позиционная система. Десятичная система — давнего происхождения, тоже относится к позиционной системе, но сочетание их, повидимому, произошло в Индии, причем постепенно была вытеснена более древняя непозиционная система. Первое известное нам применение десятичной позиционной системы относится к 595г.— сохранилась плита, на которой число лет 346 записано в такой системе. Но еще задолго до этого индийцы располагали системой для словесного выражения больших чисел, причем использовался принцип позиционности. Имеются тексты более раннего периода, в которых вполне определенным образом применяется слово «сунья», которое обозначает нуль[2]). Интересна так называемая Бахшалийская рукопись — семьдесят полос из березовой коры, неизвестной даты и неизвестного происхождения,— ее относят и к третьему, и к двенадцатому столетию. Опа содержит традиционный индийский материал о неопределенных и о квадратных уравнениях, а также о приближениях, и в ней для обозначения нуля применяется точка. Самый древний письменный документ со значком для нуля относится к девятому столетию. Все это значительно более позднего происхождения, чем знак для нуля в вавилонских текстах. Быть может, знак 0 для нуля возник под греческим влиянием («ouden»—греческое слово, означающее ничто); в то время как вавилонскую точку писали только между цифрами, индийский нуль появляется так

шей», где он преследует подобные же, не чисто утилитарные цели. Математика в виде головоломок часто существенным образом способствовала развитию науки, открывая для нее новые области. Некоторые такие задачи еще дожидаются того, чтобы их включили в основные области математики.

') R a j а к о p a \ C. T., *V в* d a m u r t h i A i y a г T. V. / Scripta math.—1951—V. 17.—P. 65—74; 1952.—V. 18.—P. 25—30; см. также J. Roy. Asiatic Soc. Bengali.—1949.—V. 15, N 2.— P. 113.

[2]) Это можно сопоставить с применением понятия «пустого» (kenos) в «Физике» Аристотеля (Аристотель. Физика.— М, 1038, Ь. 86). См. Boyer С. В. Zero: the symbol, the concept, the number / Nat. Math. Mag.— 1944.— V. 18 — P. 323—330. 88

же на последнем месте, и таким образом 0, 1, 2, ..., 9 становятся равноправными цифрами[1]).

Десятичная позиционная система проникла по караванным путям в многие области Ближнего Востока и постепенно заняла место наряду с другими системами. Ее продвижение в Персию, может быть, также и в Египет, вполне могло произойти в эпоху Сасанидов (224—641), когда Персия, Египет и Индия были в тесном общении. В те времена в Двуречье еще могло сохраняться воспоминание о древней вавилонской позиционной системе. Самое древнее определенное упоминание индийской позиционной системы вне Индии мы находим в написанной в 662 г. книге Севера Себохта, сирийского епископа. Научный мир ислама смог познакомиться с так называемой индийской системой, когда ал-Фазари перевел на арабский язык «Сиддханты» (около 773 г.). Постепенно эту систему все шире стали применять в арабском мире и далее, хотя одновременно оставались в ходу и греческая, и другие местные системы. Могли иметь определенное значение и общественные факторы — восточной традиции десятичная позиционная система была ближе, чем греческая. Весьма разнообразны знаки, которые применялись для записи цифр позиционной системы, но имеются два главных типа: индийские обозначения, которые применялись восточными арабами, и так называемые цифры «гобар» (или «губар»), которые применялись западными арабами в Испании. Знаки первого типа и сейчас еще применяются в арабском мире, но наша современная система, повидимому, произошла из системы «гобар». Существует (уже упомянутая) теория Вёпке, согласно которой знаки «гобар» применялись в Испании, когда туда вторглись арабы, а проникли эти знаки на запад гораздо раньше (ок. 450 г.) из Александрии через неопифагорейцев [2]).

4. Месопотамия, которая при греческих и римских правителях стала форпостом Римской империи, при Са

') Ср. Freudenthal H. 5000 jaren Internationale wetenschap.— Groningen, 1946.

[2]) Ср. G a n d z S. The Origin of the Ghubar Numerals / Isis.— 1931.— V. 16.— P. 393—424. Существует также теория Н. Бубнова (Бубнов Н. М. Происхождение и история наших цифр.— Киев, 1908), согласно которой знаки «гобар» произошли из данных римскогреческих символов, которые применялись в абаках. См. также примечание к книге C a j o r i F. History of Mathematics.— N. Y., 1938.— P. 90, и указанную на с. 99 книгу Смита и Карпинского, с. 71.

санидах вернула себе положение центра торговых путей. Сасаниды управляли страной как коренная династия персидских королей, в духе Кира и Ксеркса. Нам мало что известно об этом периоде персидской истории и совсем мало — о состоянии науки в то время, но дошедшие до нас предания в том виде, в каком мы их находим у Омара Хайяма, Фирдоуси и в «Тысяче и одной ночи», подтверждают скудные исторические сведения о том, что период Сасанидов был эпохой культурного расцвета. Персия Сасанидов, находясь между Константинополем, Александрией, Индией и Китаем, была страной, в которой сошлись многие культуры. Вавилон исчез, но его сменил Ктесифон-Селевкия, который в свою очередь после арабского завоевания в 641 г. уступил место Багдаду. При этом завоевании многое в старой Персии осталось нетронутым, хотя пехлевийский язык был заменен арабским в качестве официального. Даже ислам был воспринят лишь в видоизмененной форме (шиизм); христиане, евреи и приверженцы Заратустры, как и прежде, вносили свой вклад в культурную жизнь багдадского халифата.

В математике периода ислама мы видим такое смешение различных влияний, какое мы уже встречали в Александрии и в Индии'). Халифы Аббасицы, особенно алМапсур (754—775), ХаруналРашид (786—809) и алМамун (813—833), покровительствовали астрономии и математике; алМамун даже соорудил в Багдаде «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. Исламские работы в области точных наук, которые начались с перевода «Сиддхант» ал-Фазари, достигли своей первой вершины в деятельности уроженца Хивы Мухаммеда ибн Муса ал-Хорезми, творчество которого приходится на время около 825 г. Мухаммед написал много книг по математике и астрономии. В своей арифметике он разъясняет индийскую систему записи чисел. Арабский оригинал этой работы потерян, но имеется латинский перевод двенадцатого столетия. Эта книга была одним из источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с десятичной позиционной системой. Заглавие перевода: «Об индийском числе, сочинение Алгоризми» (А1

') Изучению истории средневековой восточной математики долгое время мешало то, что только малая часть источников имелась в переводах. Постепенно положение улучшается, хотя многие важные работы пока доступны только на русском языке.

gorizmi de numero Indozum). В других рукописях автор именовался Algorismus и Algorithm us, что ввело в наш математический язык термин «алгоритм»— латинизированное имя автора. Нечто подобное произошло с алгеброй Мухаммеда, которая была озаглавлена «Хисаб алджабр валмукабала» (буквально: «Исчисление восполнения и противопоставления»), что, вероятно, означало «науку об уравнениях». Эта алгебра, арабский текст которой сохранился, стала известной на Западе в латинском переводе, и слово «ал-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая действительно до середины девятнадцатого столетия была не чем иным, как наукой об уравнениях.

В этой «алгебре» рассматривались линейные и квадратные уравнения, но без какого бы то ни было алгебраического формализма. Не было и «риторического» алгоритма, какой имелся у Диофанта. Среди этих уравнений мы находим такие три типа:

$$x^2 +10x = 39, x^2 + 21 = 10x, 3x + 4 = x^2$$

которые надо было рассматривать отдельно, поскольку допускались только положительные коэффициенты. Эти три типа в последующих текстах часто повторяются — так, «уравнение $x^2 +10x = 39$ как золотая нить проходит в течение нескольких столетий через алгебраические книги», пишет профессор Карпинский. Многие рассуждения носят геометрический характер. Астрономические и тригонометрические таблицы Мухаммеда (со значениями синуса и тангенса) тоже в числе арабских книг, которые позже были переведены на латинский. Его геометрия представляет собой простое перечисление правил измерения. Она имеет известное значение, потому что ее можно непосредственно связать с одним еврейским текстом 150 г. В ней явно сказывается пренебрежение традициями Евклида. Астрономия ал-Хорезми является извлечением из «Сиддхант», и поэтому в ней можно обнаружить определенное греческое влияние, воспринятое посредством санскритского текста. Вообще работы ал-Хорезми больше выявляют восточное, чем греческое влияние[1]), и это следует отнести за счет вполне обдуманных намерений автора.

Труды ал-Хорезми в целом сыграли важную роль в истории математики как один из главных источников,

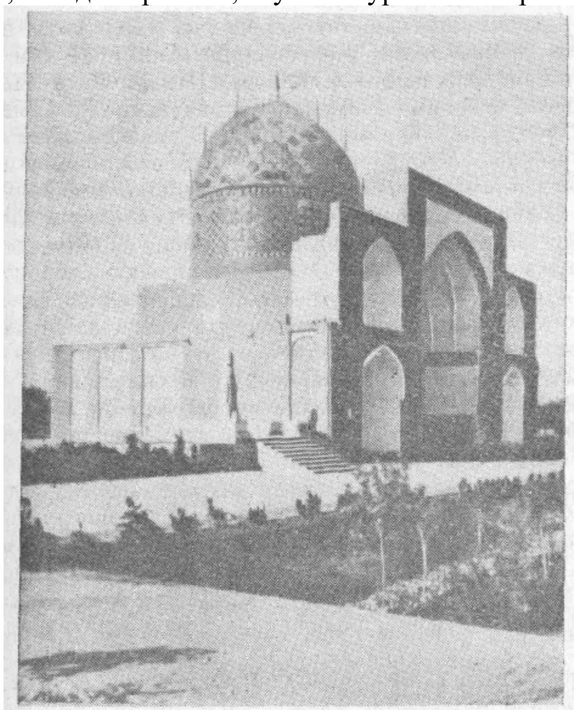
') Gandz S. The Sources of AlKhwarizmi's Algebra // Osiris.— 1936.— V. 1.— P. 263—277, с помощью которых Западная Европа познакомилась с индийскими цифрами и с арабской алгеброй. До середины девятнадцатого столетия в алгебре сказывалось ее восточное происхождение — ей не хватало аксиоматического обоснования, и этим она резко отличалась от геометрии Евклида. В наших школьных учебниках алгебры и геометрии до сих пор сохранились эти признаки их различного происхождения.

5. Греческую традицию продолжала хранить школа ученых, добросовестно переводивших на арабский язык Аполлония, Архимеда, Евклида, Птолемея и другпх. Ставшее всеобщим применением названия «Алмагест» для «Большого собрания» Птолемея указывает на влияние арабских переводов на Запад. Благодаря этим воспроизведениям и переводам до нас дошли многие греческие классики, которые иначе оказались бы потерянными. При этом проявлялась естественная склонность подчеркивать вычислительную и практическую сторону греческой математики за счет ее теоретической части. Арабская астрономия[2]) особенно интересовалась тригонометрией — слово «синус» является латинским переводом арабского написания санскритского слова «джива». Значения синуса соответствовали полухорде двойного угла (Птолемей применял полную хорду) и рассматривались как отрезки, а не как числа. Значительная часть тригонометрии содержится в работах ал-Баттани (Альбатений, Albategnius, до 858—921), одного из великих арабских астрономов, который располагал также таблицей значений котангенса для каждого градуса («umbra extensa» — «развернутая тень») и умел решать задачи, сводившиеся к применению теоремы косинусов для сферических треугольников.

Труды ал-Баттани показывают, что арабы были не только переписчиками, овладев как греческими, так и восточными методами, они вносили новое. Абу-л-Вафа (940—997/8) вывел теорему синусов сферической тригонометрии, вычислил таблицу синусов с интервалом в 15',

[2]) Когда мы говорим «арабская паука», «арабские ученые», мы не имеем в виду только арабов Напротив, многие арабские ученые были персами, таджиками, египтянами, евреями, маврами и т д Точно так же мы называем много европейских авторов от Боэция до Гаусса «латинскими», так как они писали по латыни Арабский язык был мея?дународным языком исламского мира, как латинский — западного, а греческий — восточного христианского мира.

значения в которой точны до восьмого десятичного знака, ввел отрезки, соответствующие секансу и косекансу, и выполнил много различных геометрических построений, применяя циркуль постоянного раствора. Он продолжал также, вслед за греками, изучение уравнений треть



Могила Омара Хайяма в Нишапуре

ей и четвертой степени. Ал-Кархи (начало одиннадцатого столетия), написавший алгебру «для подготовленных», причем он следовал Диофанту, располагал интересными результатами относительно иррациональных чисел, как, например, формулами $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$, $54^{1/3} - 2^{1/3} = 16^{1/3}$. Он проявлял определенную склонность к грекам, его «пренебрежение индийской матема

93

тикой было столь явным, что должно было иметь систематический характер»[1]).

6. Нам нет необходимости прослеживать многочисленные политические и этнологические изменения в мире ислама. Они вызывали подъемы и падения в развитии астрономии и математики; одни центры исчезали, другие в течение некоторого времени процветали, но по сути общий характер исламской науки оставался без изменений. Мы укажем здесь лишь на некоторые высшие точки.

Около 1000 г. н. э. в Северной Персии появились новые правители, турки-сельджуки, государство которых процветало в районе, прилегающем к центру оросительной системы Мерву. Здесь жил Омар Хайям (ок. 1038/48—1123/24), который стал известен на Западе как автор «Рубайят» (в переводе Фицджеральда, 1859 г.). Он был астрономом и философом:

(LIX)

Я рассчитал — твердит людей молва —
Весь ход времен. Но дней ведь только два
Изъял навек я из календаря:
Тот, что не знаем — завтра, не вернем — вчера.

Повидимому, Омар имеет здесь в виду свою*) реформу старого персидского календаря, после чего календарь давал ошибку в один день за 5000 лет (1540 или 3770 лет по другим интерпретациям), тогда как наш нынешний григорианский календарь дает ошибку в один день за 3330 лет. Его реформа была осуществлена в 1079 г., по позже его календарь был заменен мусульманским лунным календарем. Омар написал «Алгебру» (полное название: «Трактат о доказательствах алгебры и алмукабалы»)— выдающееся достижение, так как в ней содержится систематическое исследование уравнений третьей степени. Применяя метод, которым иной раз пользовались греки, он определял корни этих уравнений как общие точки двух конических сечений. Он не искал числовых решений и различал — тоже в стиле греков — «геометрические» и «арифметические» решения, причем по

') Sarton G. Introduction to the History of Science, I, p. 719.

*) Или подготовленную им.

следние рассматривались как существующие лишь тогда, когда значения корней оказывались положительными рациональными числами. Таким образом, этот метод полностью отличался от метода болонских математиков шестнадцатого века, которые применяли чисто алгебраические приемы. В другой книге, в которой рассматриваются трудности у Евклида, Омар заменил аксиому параллельных целым рядом других допущений. Здесь он строил фигуры, которые можно связать с «гипотезами тупого, острого и прямого угла», как они сейчас используются в неевклидовой геометрии. Он заменил также евклидову теорию пропорций числовой теорией, причем он пришел к численному приближению иррациональностей и к общему понятию действительного числа.

После того как в 1256 г. монголы разграбили Багдад, неподалеку возник новый центр учености в виде Марагинской обсерватории, которая была построена монгольским правителем Хулагу для «нисбу'» атТуси' (в европейской литературе чаще Насирэ(д)дин Туей, 1201— 1274). Здесь опять возникло учреждение, в котором сосредоточилась вся наука Востока и которое можно было сравнивать с научными центрами Греции. Ат-Туси отделил от астрономии тригонометрию как самостоятельную науку. Его попытки доказать аксиому о параллельных Евклида, причем он следовал ходу мыслей Омара Хайяма, показывают, что он ценил теоретический метод греков. Влияние ат-Туси ощутимо в Европе эпохи Возрождения, и еще в 1651 и 1663 гг. Джон Валлис пользовался работой ат-Туси о постулате Евклида.

Ат-Туси был продолжателем традиций Омара и в своей теории пропорций, и в новых численных приближениях иррациональных чисел.

Другой персидский математик, ал-Каши (первая половина пятнадцатого столетия) проявляет большое искусство при выполнении вычислений, вполне сравнимое с тем, чего достигли европейцы в конце шестнадцатого века. Он решал уравнения третьей степени с помощью итерации и тригонометрическим методом, знал тот метод решения общих алгебраических уравнений высших степеней, который теперь носит имя схемы Горнера и обобщает метод извлечения корней более высокого порядка из обычных чисел (тут вероятно китайское влияние), В его трудах мы находим формулу бинома для любых положительных целых показателей. Наряду с шестидесятичными дробями он применяет десятичные дроби с запятой (например, 25,07, помноженное на 14,3, записывается как 358,501), а число л было известно Каши с 16 десятичными знаками.

В Египте выдающейся личностью был Ион алХайсам (Алхазен, ок. 965—1039), крупнейший мусульманский физик, «Оптика» которого имела большое влияние на Западе. Он решил «Задачу Алхазена», в которой требуется из двух точек на площади круга провести прямые так, чтобы они встретились в точке окружности и в этой точке образовали равные углы с нормалью. Эта задача приводит к уравнению четвертой степени, она была решена в греческом духе с помощью пересечения гиперболы с окружностью. Алхазен применял также метод исчерпывания для вычисления объемов тел, которые получаются при вращении параболы вокруг каколибо ее диаметра или ординаты. За сто лет до Алхазена в Египте жил алгебраист Абу Камил, который продолжал труды алХорезми. Он оказал влияние не только на ал-Кархи, но и на Леонардо Пизанского.

Другой центр учености существовал в Испании. В Кордове жил один из самых выдающихся астрономов ал-Заркали (Арзахел, ок. 1029 г.— до примерно 1087г.), наилучший наблюдатель своего времени и составитель так называемых Толедских планетных таблиц. Тригонометрические таблицы этого труда, который был переведен на латинский язык, оказали определенное влияние на развитие тригонометрии в эпоху Возрождения.

Хотя как почти вся математика Дальнего Востока, так и значительная часть исламской математики создавались в традиционном алгоритмическо-алгебраическом духе, они представляли собой существенное продвижение по отношению к античным методам. Лишь к концу шестнадцатого столетия Западная Европа достигла того же уровня.

7. Начиная с двенадцатого столетия, мы располагаем сведениями о японской математике. Многое здесь находится под китайским влиянием.

В семнадцатом столетии развиваются новые формы, отчасти на основе контактов с Европой. С этого периода на Западе наступает расцвет новых и более высоких форм математики[1]). Относительно китайской математи

') С западной математикой и астрономией Китай познакомил патеп Маттео Риччи, который находился в Пекине с 1583 г. до своей смерти в 1610 г См Bosnians H. L'oeuvre scienlifique de Mathieu Ricci. // S. J., Revue des Questions Scient.— 1921, Janvier, ки остается еще указать, что ее нельзя рассматривать как изолированное явление, подобно, скажем, математике майя.

По крайней мере начиная с эпохи династии Хань (которая существовала примерно одновременно с Римской империей), всегда были значительные торговые и культурные связи с другими частями Азии и даже с Европой. Индийская, а позже арабская наука влияли на науку Китая, и такое влияние могло быть взаимным. Мы имеем в виду, например, десятичную позиционную систему и отрицательные числа, что, весьма возможно, пропутешествовало из Китая в Индию.

Влияние Индии на Китай могло быть обусловлено проникновением в Китай буддизма (первое столетне н. э.). Напротив, греческое влияние, несмотря на некоторое сходство в развитии, мало заметно или вовсе незаметно.

Поэтому, вероятно, исследования об отношении длины окружности к диаметру круга, типичные для периода после династии Хань, велись независимо от Архимода. Лю Хуэй, составитель дошедшего до нас комментария к «Девяти книгам» (263 г. н. э.), с помощью вписанных и описанных правильных многоугольников нашел, что $3{,}1401 < \pi < 3{,}1427$, а двумя столетиями позже Цзу Чунчжи (430—501) и его сын указали не только значение π с семью десятичными знаками, но и значения $\pi=22/7$, $\pi=355/113$[1])

Во времена династии Тан (618—907) при государственных экзаменах чиновников пользовались собранием важнейших математических текстов. В этот период было изобретено книгопечатание, но первые известные нам напечатанные математические произведения относятся к

') Последнее значение для л могло быть получено из значений $355/113= (377 — 22)/(120 –7)$ Птолемея и Архимеда. Это значение, которое является подходящей дробью при разложении πв цепную дробь, часто называют «числом Меция» по имени бургомистра Алкмара, Адриана Антонины (1584 г.), родом из Меца, чьи сыновья присвоили себе имя Меция.

1084 г. и более поздним. В 1115 г. появилось печатное издание «Девяти книг».

Уже в книге, составленной Ван Сяотуном около 625 г., мы находим кубическое уравнение более сложное, чем уравнение $x^z = a$ из «Девяти книг». Но период расцвета древнекитайской математики наступил только во времена династии Сун (960—1279) и первого периода владычества монголов при Юане («Большом хане» из описания путешествия Марко Поло). Из числа ведущих математиков мы упомянем Цинь Цзюшао, который развивал тогда уже давнюю теорию неопределенных уравнений (его книга датирована 1247г.). Один из его примеров можно записать следующим образом:

$x = 32 \ (mod\ 83) = 70 \ (mod\ 110) = 30 (mod\ 135)$

Цинь занимался также численным решением уравнений высших степеней, например

$x^4 + 763\ 200x^2 — 40\ 642\ 560\ 000 = 0.$

Свои уравнения он решал методом, являющимся обобщением метода последовательных приближений, который применялся уже в «Девяти книгах» для вычисления квадратных и кубических корней. В этом методе мы узнаем прием, который в наших учебниках носит имя Горнера, опубликовавшего его в 1819 г., повидимому, не зная, что он обнаружил метод, имеющий давность около тысячи лет.

Другим математиком периода Сун был Ян Хуэй. Он работал с помощью десятичных дробей и записывал их в виде, напоминающем нашу современную запись (его книга относится к 1261 г.). Одна из его задач приводит к равенству

$24{,}68 \times 36{,}56 = 902{,}3008.$

У Ян Хуэя мы находим самые давние из дошедших до нас изображений треугольника Паскаля, который мы снова встречаем в книге Чжу Шицзе, написанной в 1303 г. Чжу, которого считают самым выдающимся из математиков этого периода, дает в своих книгах наиболее полное изложение китайских арифметико-алгебраических методов вычисления. Он даже переносит «матричное» решение системы линейных алгебраических уравнений па уравнения высших степеней с несколькими неизвестными, применяя методы, напоминающие Сильвестра.

В эпоху после династии Сун математическая деятельность хотя и продолжалась, но уже более не достигла такого расцвета. Вообще мы можем сказать, что в сложных арифметических и алгебраических вопросах математики различных стран Ближнего и Дальнего Востока вполне могут быть сравниваемы друг с другом.

Например, метод Горнера и десятичные дроби мы находим позже в книгах ал-Каши из Самарканда (около 1420 г.).

ЛИТЕРАТУРА

S u t e г H. Die Mathematikor und Astronornen der Araber und ihre Werke,— Leipzig, 1900; Nachtrage.— 1902.

СМ. Renaud H. P. J. / Isis.— 1932.— V. 18.—P. 106—183.

К a sir D. S. The Algebra of Omar Khayam.—N. Y., 1931

D a 11 a R. The Science of the Sulba, A Study in Early Hindu Geometry.— Calcutta, 1932. 2nd ed.— Bombay, 1962.

К a g e G. R. The Bakhschali Manuscript. A Study in Medieval Mathematics.—V. 1—3.—Calcutta, 1927—1933.

Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara/Transl. by H. T. Collebrooke.— London, 1817. Reprinted with Sanscrit text by Haren Chandra Banerji.— Calcutta, 1927.

Datta B., Singh A. N. History of Hindu Mathematics. V. 1.— Lahore, 1935. V. 2.— Lahore, 1938.

Smith D. E., Karpinski L. C. The HinduArabic Numerals.— Boston, 1911.

Karpinski L. C. Robert of Chesters Latin Translation of the Algebra of AlKhwarizmi.— N. Y., 1915.

Hayashi T. A. Brief History of the Japanese Mathematics / Nieuw Archief Wiskunde (2).— 1904—1905.— V. 6.—P. 296—301.

Smith D. E. Unsettled Questions Concerning the Mathematics of China / Scient. Monthly— 1931.— V. 33.— P. 224—250.

R o s e n F. The Algebra of Mohammed ben Musa.— London, 1831.

СМ. G a n d z S. / Quellen und Studien.— 1932.— V. 2A.— P. 6185.

Clark W. E. The Aryabhatya of Aryabhata.—Chicago, 1930.

Luckey P. Die Ausziehung den nten Wurzel und binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik // Math. Ann.—1947—• 1949.— Bd 120.— S. 217—274.

Luckey P. Die Rechenkunst bei Gamsīd b. Mas'ud alKasi.— Wiesbaden, 1951.

См. также литературу к главе II.

На русском языке изданы:

Омар Хайям. Математические трактаты/Перевод с арабского Б. А. Розенфельда, примечания Б. А. Розенфельда и А. П Юшкевича / Историкоматематяческие исследования, вып. VI.—М.: Гостехиздат, 1953.—С 11—172.

То же в отдельном издании с параллельным арабским текстом: Омар Хайям. Трактаты,— М., 1962.

Мухаммед Насиреддин Туей. Трактаты о полном четырехстороннике/Перевод с арабского под ред. и с предисловием Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфелъда.— Баку, 1952.

Д ж е м ш и д Гиясэддин Каши. Ключ к арифметике. Трактат об окружности/ Перевод с арабского Б. А. Розенфельда, примечания Б. А Розенфельда и А. П. Юшкевича.— М., 1956 (с параллельным арабским текстом оригинала); без последнего — в кн.: Историке-математические исследования, вып VII.— М.: Гостехиздат, 1954.—С. 11—49.

Насир адДин атТуси. Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий/Перевод Б. А. Розенфельда, вступительная статья Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича / Историко-математические исследования, вып XII.— М.: Физматгиз, 1960 — С. 475—532.

КазиЗаде арРуми. Трактат об определении синуса одною градуса/Перевод Б. А. Розенфельда, вступительная статья и примечания Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича // Историко-математические исследования, вып XIII.— М.: Физматгиз, 1960 — С. 533—556.

Сабит ибн Корра алХарраеи. Книга о доказательстве известного постулата Евклида // Историко-математические исследования, вып. XIV.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 593—597.

Шам садДин Мухаммед ибн Ашраф алХусайни асСамаркапди. Основные предложения (отрывок) / Историко-математические исследования, вып. XIV.— М.: Физматгиз, 1961.— С. 598—602.

Хасап ибн алХайсам. Книга комментариев к введениям книги Евклида «Начал» (отрывок); Лев Герсонид. Комментарии к введениям книги Евклида (отрывок)/Перевод, вступительная статья и комментарии Б. А. Розенфельда / Историко-математпческие исследования, вып XI.— М.: Физматгиз, 1958 — С. 733—782.

Мухаммед алХасан, АхМад бану Муса. Книга измерения фигур (полное название: Измерения плоских и шаровых фшур)/Перевод и примечания Дж. адДаббаха / Историко-математические исследования, вьш XVI.— М.: Наука 1965 — С. 389—426.

Сабит ибн Корра. Книга о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся/Перевод и примечания Б. А. Розенфельда / Историко-математические исследования, вып. XV.—М.: Физматгиз, 1963,—С. 363—380.

Сабит ибн Корра. Книга о составных отношениях/Перевод, примечания и статья о нем Б. А. Розепфельда и Л. М. Карповой.—Физико-матем. науки в странах Востока.—1966,—Вып 1.— С. 541.

Ибрахим ибн Синан ибн Сабит ибн Корра. Книга о построении трех конических сечений/Перевод С. А. Красновой и Дж. адДаббаха, примечания С. А. Красновой // Историко-математические исследования, вып. XVI.—М.: Наука, 1965.—С. 427—446.

АлХорезми. Математические трактаты/ Перевод Б, А. Розенфельда и Ю. Х. Копелевич.— Ташкент, 1964.

АбурРайхан алБируни. Трактат об определении хорд в круге с помощью ломаной линии, вписанной в него/Перевод и примечания С. А. Красновой и Л. М. Карповой.— Из истории науки и техники в странах Востока, 1963, вып. 3, с. 93—147.

АбурРайхан алБируни. Книга об индийских ращиках/Поревод и примечания Б. А. Розонфельда.— Из истории науки и техники в странах Востока, 1963, вып. 3, с. 148—167.

АбулВафа азБузджани. Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений/Статья, перевод и примечания С. А. Красновой.— Физикоматем. науки в странах Востока, вып. I, с. 42—140.

АбулХасан анНасави. Достаточное об индийской арифметике/Перевод и примечания М. И. Медового.— В кн.: Историкоматематические исследования, вып XV, М.: Физматгиз, 1963, с. 381—430.

Насир адДин атТуси. Сборник по арифметике с помощью доски и пыли/Перевод А. С. Ахмедова и Б. А. Розенфельда, примечания С. А. Ахмедова.— В кн.: Историкоматематические исследования, вып. XV. М.: Физматгиз, 1963, с. 431—444.

Омар Хайям. Первый алгебраический трактат/Перевод и примечания С. А. Красновой и Б. А. Розенфельда.— В кн.: Историкоматематические исследования, вып. XV, М.: Физматгиз, 1963, с. 445472.

ИбнСина. Математические главы «Книги Знания»/Перевод Б. А Розенфельда и Н, А. Садовского.— Душанбе, 1967.

См. также:

Юсупов II. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке.— Казань. 1933.

Юшкевич А. П. Омар Хайям и его «Алгебра.— Тр. Инта истории естествознания, 1948, 2, с. 449—534*

Юшкевич А. П. Математический трактат Мухаммеда БенМуса алХорезми.— Тр. Инта истории естествознания и техники, 1954. 1, с. 85—127.

Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX — XV веках.— В кн.: Историкоматематическив исследования, вып. IV. М.: Гостехиздат, 1951, с. 455—488.

Юшкевич А. П. История математики в средние века.— М.: Физматгиз, 1951.

Розенфельд Б. А. О математических работах Насирэддина Туей — В кн.: Историкоматематические исследования, вып. IV. М.: Гостехиздат, 1951, с. 489—512.

Касумханов Ф. А. Теория непрерывных величин и учение о числе в работах Мухаммеда Насирэддина Туей.— Тр. инта истории естествознания и техники, 1954, 1, с. 128—145.

Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Математика Ближнего и Средиего Востока в средние века.— Советское востоковедение, 1958, № 3, с. 101—108; 1958; № 6, с. 66—76.

Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии IX — XV веков.— Ташкент, 1962.

Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке.— Ташкент, 1967.

КарыНиязов Т Н Астрономическая школа Улугбека.— М.; Л. 1950.

Выгодский М. Я. Происхождение «Правила двух ложных положений».— В кн: Историкоматематические исследования, вып. XIII. М.: Физматгиз, 1960, с. 231—252.

Медовой М. И. Об арифметическом трактате АбулВафы.— В кн.: Историкоматематические исследования, вып. XIII. М.: Физматгиз, 1960, с. 253—324.

Сунь Цзы. Математические трактаты / Перевод и комментарии Э.И.Березкиной.- Из истории науки и техники в странах Востока, 1963, вып.3., с.5-70

Шридхара, Патиганита / Перевод с санкрита О.Ф.Волковой и А.И.Володарского, вступительная статья и примечания А.И.Володарского. – Физико-матем. Наука в странах Востока, 1966, вып.1, с.141-146.

Бахмутская Э.Я. Степенные ряды для $\sin\theta$ *и* $\cos\theta$ *в работах индийских математиков XV-XVIIIвв. // Историко-математические исследования, вып. XIII. – М.: Физматгиз, 1960.*

Бахмутская Э.Я. Бесконечные ряды в работах математиков Южной Индии // Из истории науки и техники в странах Востока. – 1961. – вып.2.

Глава V

ЗАПАДНАЯ ЕВРОПА. НАЧАЛО

1. Наиболее развитой частью Римской империи как экономически, так и культурно всегда был Восток. Земледелие Запада было экстенсивным, никогда не имело в своей основе орошения, и это не содействовало астрономическим исследованиям. Действительно, Запад очень хорошо обходился минимумом астрономии, известным объемом практической арифметики и некоторыми приемами измерения для целей торговли и землемерия, стимулы же для развития этих наук шли с Востока. Когда Восток и Запад оказались политически разобщенными, такие стимулы почти полностью исчезли. Малоподвижная цивилизация Западной Римской империи сохранялась в течение ряда столетии лишь с незначительными изменениями или разрывами. Средиземноморское единство античной цивилизации тоже оставалось нетронутым, даже варварские вторжения не очень сказались на нем. Во всех германских королевствах, за исключением, пожалуй, британского, экономические условия, общественные установления и интеллектуальная жизнь в основном сохранялись такими, какими они были во время упадка Римской империи. Основой хозяйственной жизни было земледелие, причем рабы постепенно заменялись свободными земледельцами и арендаторами, но, кроме того, существовали процветавшие города и широко развитая торговля на основе денежного обращения. Главным авторитетом в грекоримском мире после падения Западной империи в 476 г. были на равных правах константинопольские императоры и римские папы. Католическая церковь Запада своими учреждениями и своим языком продолжала в меру своих возможностей культурные традиции Римской империи в германских государствах. Монастыри и образованные миряне в известной мере сберегали грекоримскую цивилизацию. Один из таких мирян,

дипломат и философ Аниций Манилий Северин Боэций (Boethius), был автором математических произведений, чей авторитет сохранялся в западном мире в течение более чем тысячи лет. На этих работах сказалось общее состояние культуры — они бедны содержанием, и то, что они сохранились, быть может, объясняется убеждением, что их автор в 524 г. погиб как мученик за католическую веру. Его «Основы арифметики» (Institutio arithmetica) — поверхностный перевод Никомаха, содержащий частично теорию чисел пифагорейцев, что вошло в средневековую науку как часть старинного тривиума и квадривиума: арифметика, геометрия, астрономия и музыка.

Трудно указать то время, когда на Западе экономика древней Римской империи исчезла и уступила место новому феодальному порядку. В какой-то мере этот вопрос разъясняется, если принять гипотезу Пиренна[1]), а именно, что конец древнего западного мира наступил с экспансией ислама. Арабы лишили Византийскую империю всех ее провинций на восточных и южных берегах Средиземного моря и превратили восточную часть Средиземного моря в закрытое мусульманское озеро. На несколько столетий они чрезвычайно затруднили торговые связи между Ближним Востоком и христианским Западом. Пути интеллектуального общения между арабским миром и северными частями бывшей Римской империи в течение столетий были загромождены, хотя никогда не были перекрыты полностью.

В эту эпоху во франкской Галлии и в других бывших частях Римской империи хозяйственная деятельность широкого масштаба постепенно сворачивается, города приходят в упадок, доходы от налогов становятся незначительными. Денежное обращение вытесняется обменом, преобладает местная торговля. Западная Европа приходит в полуварварское состояние, С упадком торговли возрастает значение земельной аристократии, и крупные североафриканские землевладельцы, возглавляемые Каролингами, становятся решающей силой в стране франков. Экономические и культурные центры перемещаются к северу, в северную Францию и в Британию. Отделение Запада от Востока настолько ограничивает реальную власть пап, что папство объединяется с Каролингами, символом чего было коронование Карла Великого в 800 г. как императора Священной Римской империи. Западное

') Pirenne H. Mahomet et Charlemagne.—Paris, 1937, общество стало феодальным и церковным, его ориентация была северной и германской.

2. В течение первых столетий западного феодализма даже в монастырях не очень высоко ставят математику. В земледельческом обществе этого периода, вновь ставшем примитивным, почти что отсутствовали факторы, которые содействовали бы развитию математики даже непосредственно практического характера. Математика в монастырях сводилась всего лишь к скромной арифметике церковного назначения, которой пользовались главным образом для вычисления пасхалий (так называемый «компутус»[1]). Боэций был высшим авторитетом. Известное значение среди этих математиков-церковников приобрел уроженец Британии Алкуин, связанный с двором Карла Великого. Его написанные по-латыни «Задачи для оттачивания ума юношей» (см. с. 87) содержат подборку задач, имевшую влияние на составителей учебников в течение ряда столетий. Многие из этих задач восходят еще к древнему Востоку. Например:

«Собака гонится за кроликом, который находится впереди нее в 150 футах, и при каждом прыжке делает 9 футов, в то время как кролик прыгает на 7 футов. За сколько прыжков собака нагонит кролика?»

«Через реку надо перевезти троих: волка, козу и кочан капусты; на лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не могла съесть капусту, а волк не мог съесть козу?»

Другим математиком-церковником был Герберт, французский монах, который в 999 г. стал папой, приняв имя Сильвестра II. Под влиянием Боэция он написал несколько трактатов, но его значение как математика обусловлено в основном тем, что он был одним из первых западных ученых, ездивших в Испанию и изучавших математику арабского мира.

3. В развитии западного, восточного и раннего греческого феодализма имеются существенные различия. Экстенсивный характер западного земледелия делал излишней обширную систему бюрократической администрации, так что это не могло послужить основой для деспотизма восточного типа. На Западе не было возможности в широкой мере обеспечить пополнение рабов. Когда села Западной Европы вырастали в города, эти города превра

[1]) Computus (лат) — расчет, вычисления.

щались в самоуправляющиеся единицы и горожане не могли вести праздную жизнь, используя труд рабов. Это одна из основных причин, в силу которых греческие полисы и западные города, на начальных стадиях имеющие много общего, в дальнейшем становятся резко отличными друг от друга. Население средневековых городов должно было полагаться на свою собственную изобретательность в деле улучшения условий своей жизни. В двенадцатом, тринадцатом и четырнадцатом столетиях города выходят победителями в ожесточенной борьбе прошв феодалов-землевладельцев, сочетавшейся с гражданскими войнами. Основа их успехов — не только быстрое развитие торговли и денежного хозяйства, но и по степенное усовершенствование техники. Феодальные князья часто поддерживали города в их борьбе с более мелкими феодалами и при возможности устанавливали свою власть над городами. В конечном счете это повело к возникновению в Западной Европе первых национальных государств.

Города начали устанавливать коммерческие связи с Востоком, который все еще был центром цивилизации. Такие связи устанавливались иногда мирными средствами, иногда насильственным путем, как во времена крестовых походов. Первыми наладили торговые связи итальянские города, за ними последовали города Франции и Центральной Европы. За купцом и за солдатом следовали ученые, а иногда они были первыми. Испания и Сицилия были самыми близкими пунктами соприкосновения между Западом и Востоком, именно здесь западные купцы п студенты познакомились с цивилизацией стран ислама. Когда в 1085 г. Толедо был отвоеван христианами у мавров, студенты западных стран толпами устремились в этот город, чтобы изучать науку арабов. Они часто пользовались услугами переводчиковевреев, а в двенадцатом столетии мы видим в Испании Платона из Тиволи, Герардо из Кремоны, Аделарда из Вата и Роберта из Честера — все они переводят на латинский язык арабские математические рукописи. Именно так, через посредство арабов, Европа познакомилась с греческими классиками, а к этому времени Западная Европа была достаточно развита, чтобы оценить это знания.

4. Как мы уже сказали, первые могущественные коммерческие города возникли в Италии. Здесь в течение двенадцатого и тринадцатого столетий Генуя, Пиза, Венеция, Милан и Флоренция вели обширную торговлю

с арабским миром и с Севером. Итальянские купцы дали Восток и знакомились с его цивилизацией. Путешествия Марко Поло доказывают бесстрашие этих искателей приключений. Как ионийские купцы почти за две тысячи лет до этого, они стремятся познакомиться с наукой и искусствами более древней цивилизации не только для того, чтобы повторять их, но и для того, чтобы использовать их в своей собственной новой системе. А в двенадцатом и тринадцатом столетиях мы видим уже рост банковского дела и зачатки капиталистической формы производства.

Первым из этих купцов, чьи математические работы выявляют известную зрелость, был Леонардо из Пизы, Леонардо, которого называли также Фибоначчи (сын Боначчо»), путешествовал по Востоку как купец. Вернувшись, он написал свою «Книгу абака»[1]) (Liber abaci , 1202 гг.), заполненную арифметическими и алгебраическими сведениями, собранными им во время путешествий. В книге «Практика геометрии» (Practica geometriae , 1220 г.) Леонардо подобным же образом рассказывает о том, что он открыл в области геометрии и тригонометрии. Возможно, что он был к тому же оригинальным исследователем, так как в его книгах есть немало примеров, по-видимому, не имеющих точных соответствий в арабской литературе[2]). Впрочем, он цитирует ал-Хорезми, например, при рассмотрении уравнения $x^2+10x=39$. Задача же, которая приводит к «ряду Фибоначчи»: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., каждый член которого есть сумма двух ему предшествующих,— по-видимому, является новой. Должно быть, новым является и его замечательное доказательство того, что корни уравнения $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ нельзя выразить с помощью евклидовых иррациональностей вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ (следовательно, их нельзя построить с помощью только циркуля и линейки). Леонардо доказал это, проверяя каждый из пятнадцати случаев Евклида, а затем приближенно определил положителъный корень этого уравнения, вычислив шесть шестидесятичных знаков.

') Абак — счетная доска.

[2]) Карпинский (Кагpinski L.C.// Amer. Math Monthly.—1914 —V. *21* —*V*. 37—48), основываясь на парижской рукописи, содержащей алгебру Абу Камиля, утверждает, что Леонардо в целом ряде задач следует Абу Камилю.

Ряд Фибоначчи получается при решении следующей задачи:

Сколько пар кроликов может произойти от одной пары в течение года, если а) каждая пара каждый месяц порождает новую пару, которая со второго месяца становится производителем, и б) кролики не дохнут?

«Книга абака» была одним из источников для про никповения индийскоарабской системы нумерации в Западную Европу. Отдельные случаи применения этой нумерации имели место за столетия до Леонардо — из Испании и с Востока ее привозили купцы, посланники, ученые, паломники и солдаты. Самый древний европейский манускрипт, содержащий числовые знаки этой системы,— это «Вигиланский кодекс» (Codex Vigilanus), написанный в Испании в 976 г. Однако эти десять знаков медленно проникали в Западную Европу, и самая ранняя французская рукопись, в которой мы их находим, относится к 1275 г. Греческая система нумерации оставалась общепринятой на побережье Адриатики в течение столетий. Вычисления часто производили на старинном абаке, доске со счетными жетонами или камушками (часто это сводилось к прямым линиям, проведенным на песке), в основном сходном со счетными досками, которыми все еще пользуются русские, китайцы, японцы. Для записи результатов вычисления на абаке в ходу были римские цифры. В течение средних веков и даже позже мы находим римские цифры в торговых книгах, и это указывает на то, что в конторах использовали абак. Против введения индийско-арабских знаков выступали и широкие круги, так как использование этих обозначений затрудняло чтение торговых книг. В установлениях «Искусства обмена» (Arte del Cambio, 1299 г) флорентийским банкирам запрещалось пользоваться арабскими цифрами. Лишь в четырнадцатом столетии итальянские купцы начали применять некоторые арабские цифры в своих счетных книгах ').

') В счетных книгах Медичи (датируемых с 1406 г.) в коллекции Селфиджа, хранящейся в Гарвардской высшей торговой школе, индийско-арабские цифры часто встречаются в так называемом описательном столбце. Начиная с 1439 г., цифры эти вытесняют римские цифры в так называемом денежном столбце книг первичной записи: журналах, расходных и др, но лишь после 1482 г они вытесняют римские цифры в денежных столбцах конторских книг всех купцов, имеющих дело с Медичи, за исключением одного.

5. Вместе с расширением торговли постепенно интерес к математике стал распространяться и на северные города. Поначалу это был практический интерес, и в течение нескольких столетий арифметику и алгебру вне университетов преподавали профессиональные мастера счета, которые обычно не знали классиков, но зато обучали бухгалтерии и навигации. В течение долгого времени математика такого рода хранила явные следы своего арабского происхождения, о чем свидетельствуют такие слова, как алгебра и алгоритм.

Теоретическая математика не исчезла целиком в Средние века, но ею занимались не люди дела, а философы-схоласты. У схоластов изучение Платона и Аристотеля, в сочетании с размышлениями о природе божества, приводило к тонким рассуждениям относительно сущности движения, сущности континуума и бесконечности. Ориген, следуя Аристотелю, отрицал существование актуально бесконечного, но святой Августин в своем «Граде божьем» принимал всю последовательность целых чисел как актуальную бесконечность. Он говорит об этом так, что, по замечанию Георга Кантора, нельзя более энергично стремиться к трансфинитному и нельзя его лучше определить и обосновать, чем святой Августин[1]). Писатели-схоласты средневековья, в частности Фома Аквинский, принимали аристотелевское «нет актуально бесконечного» (infinitum actu non datur) и каждый континуум рассматривали как потенциально делимый до бесконечности. Таким образом, не было наименьшего отрезка, ибо каждая часть отрезка обладала свойствами отрезка. Поэтому точка не была частью линии, поскольку точка неделима: «из неделимых нельзя составить какоголибо континуума» (ex indivisibilis non potest compari aliquod continuum). Точка могла образовать линию с помощью движения. Подобные рассуждения оказали влияние на изобретателей исчисления бесконечно малых в семнадцатом веке и на философов, занимавшихся трансфинит

Начиная с 1494 г. во всех счетных книгах Медичи пользовались только пндийскоарабскими цифрами. (Данные из письма Флоренс Эдлер де Рувер.) См. также E d 1 e r F. Glossary of Medieval Terms of Business.— Cambridge, Mass., 1934.— P. 389.

[1]) Письмо Кантора к Эйленбергу (Eulenberg), 1886; см. Can'tor G. Ges. Abhandlungen.—Berlin, 1932.—S. 400—402. Кантор цитирует восемнадцатую главу двенадцатой книги «Града божьем», отрывок, озаглавленный «Против тех, что говорят, будто бесконечные предметы превышают знание божье».

ным, в девятнадцатом веке; Кавальери, Такке, Больцано и Кантор знали авторов-схоластов и размышляли о значении их идей.

[5] Ученые средневековья, о которых идет здесь речь, рассматривали понятия разрывного и непрерывного, конечного и бесконечного преимущественно в связи с философскими и физическими (анализ процесса движения) проблемами. Но физика еще не стала экспериментальной наукой, математика не располагала достаточно удобным языком алгебраических обозначений, так что в логическом анализе понятий непрерывности и бесконечности схоласты четырнадцатого века оперировали, в сущности, тем же материалом, который был в распоряжении античной науки, и наталкивались на те же трудности. Поэтому в ближайшие столетия интерес к такой проблематике ослабевает. Новое обращение к ней в семнадцатом веке связано с успехами новой физики и механики. Галилей нигде не упоминает своих схоластических предшественников. Кавальери фактически не опирается на них. Вообще преодоление (в том или ином смысле, включая и отбрасывание) парадоксов бесконечного» и других «парадоксов» всякий раз происходило в силу возникновения новых проблем и формирования или вторжения новых понятий Обращение же к прошлому (у тех, кто его знал) позволяло оценить меру продвижения, иной раз — использовать авторитет предшественников').

Эти духовные лица иной раз получали результаты, которые имели непосредственное математическое значение. Томас Брадвардин, который стал архиепископом Кентерберийским, изучив Боэция, занимался исследованием звездчатых многоугольников. Наиболее значительным среди этих средневековых математиков из духовенства был Николай Орезм, епископ города Лизье в Нормандии, применявший дробные степени. Так как $4^3 = 64 = 8^2$, он записывал 8 как $[1^P$ ½]4 или как [p*1/(1*2)], что обозначало 4^(1½). Он написал также трактат под названием «О размерах форм» (De latitudinibus formarum, ок. 1360 г.), в котором он графически сопоставляет значение зависимого переменного (latitude) и независимого переменного (longitudo). Эго нечто вроде перехода от координат на земной или небесной сфере, известных в античности, к современной координатной геометрии. Этот трактат несколько раз был напечатан между 1482 и 1515 гг., и возможно, что он оказал влияние как на математиков Ренессанса, так и на Декарта.

') См., например, Pogrebysski J. Sur la prehi«!oire de la flicorie des ensembles / Melanges, A. Koyre.— Pans, 1964. 110

6. Математика развивалась главным образом в растущих торговых городах, под непосредственным влиянием торговли, навигации, астрономии и землемерия. Горожан интересовал счет, арифметика, вычисления. Зомбарт окрестил эту заинтересованность бюргерства пятнадцатого и шестнадцатого столетий немецким словом Rechenhaftigkeit[1]). Ведущими представителями этой приверженности к практической математике были мастера счета, и только изредка к ним присоединялся ктолибо из университетских людей, понявший благодаря изучению астрономии важность улучшения вычислительных методов. Центрами новой жизни были итальянские города и такие города Центральной Европы, как Нюрнберг, Вена и Прага. После падения Константинополя в 1453г., когда Византийская империя перестала существовать, многие ученые греки переселились в города Запада. Возрос интерес к оригинальным греческим произведениям, и стало легче удовлетворять этот интерес. Профессора университетов и образованные миряне изучали греческие тексты, а честолюбивые мастера счета не оставались в стороне и старались понять эту новую науку на свой манер.

Типичен для этого периода Иоганн Мюллер из Кенигсберга, иначе Региомонтанус, ведущая математическая фигура пятнадцатого столетия. В деятельности этого замечательного вычислителя, мастера инструментов, печатника и ученого выявились те достижения европейской математики, которые были сделаны в течение двух столетий после Леонардо Пизанского. Региомонтанус усердно переводил и публиковал доступные ему математические рукописи классиков. Еще его учитель, венский астроном Георгий Пейрбах (Peurbach), автор астрономических и тригонометрических таблиц, начал переводить с греческого языка астрономию Птолемея. Региомонтанус закончил этот перевод и, кроме того, перевел Аполлония, Герона и наиболее трудного из всех — Архимеда. Его главное оригинальное произведение — книга «О различных треугольниках» (Dp triangulis omnimodus libri qninkue, 1464 г., напечатана лишь в 1533 г.), полное введе

[1]) Sombart W. Der Bourgeois,— Miinchen; Leipzig, 1913.— S. 164. Есть русский перевод: Зомбарт В. Буржуа. — М., 1924. Rechenhaftigkeit — «расчетолюбие». Это слово должно указывать на готовность вычислять, на убеждение в полезности занятий арифметикой.

ние в тригонометрию, отличающееся от наших нынешних учебников главным образом отсутствием современных удобных обозначений. Здесь содержится теорема синусов для сферического треугольника. Все теоремы все еще формулируются словесно. Отныне тригонометрия становится наукой, не зависящей от астрономии. Нечто подобное было сделано Насир-ад-Дином в тринадцатом столетии, но существенно то, что его труды не получили значительного дальнейшего развития, тогда как книга Региомонтануса оказала глубокое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии и на ее применение к астрономии и алгебре. Много труда положил Региомонтанус и на вычисление тригонометрических таблиц. Он составил таблицу синусов с интервалом в одну минуту, принимая радиус окружности равным 60 000 (опубликована в 1490 г.).

Значения синуса рассматривались как отрезки, представляющие полухорды соответствующих углов в круге, поэтому они зависели от длины радиуса. При большем радиусе достигалась большая точность и не надо было применять шестидесятичные (или десятичные) дроби. Систематическое применение радиуса, равного 1, и тем самым определение синуса, тангенса и т. д. как отношений (чисел) идет от Эйлера (1748 г.).

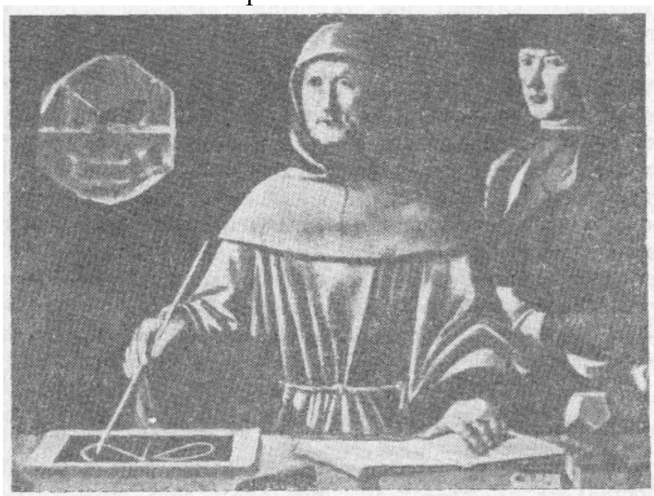
7. До сих пор прежние достижения греков и арабов не были заметным образом превзойдены. Классики оставались nес plus ultra [1]) науки. Поэтому, когда итальянские математики в начале шестнадцатого века на деле показали, что можно развить новую математическую теорию, которой не было у древних и у арабов, это было большой и вдохновляющей неожиданностью. Такая теория, которая привела к общему алгебраическому решению кубических уравнений, была открыта Сципионом дель Ферро и его учениками в Болонском университете.

В итальянских городах и после эпохи Леонардо математика занимала второе место. В пятнадцатом столетии мастера счета в Италии владели арифметическими операциями, включая действия с иррациональностями (без каких-либо угрызений математической совести), а итальянские художники были хорошими геометрами. Вазари [2]) в своих «Жизнеописаниях» подчеркивает, что художники

[1]) То, чего нет выше (лат)

[2]) Вазари Д Жизнеописания ., Т. I — М , 1956 Т П.—М, 1963 (издание продолжается).

пятнадцатого века проявили большой интерес к геометрии пространства. Одним из их достижений была разработка теории перспективы такими людьми, как Альберти и Пьеро делла Франческа; последний написал также киигу о правильных телах. Мастера счета нашли свое



Лука Пачоли (1450—1520) с юным герцогом из Урбине справа

го истолкователя в лице францисканского монаха Луки Пачоли (Pacioli), чья книга «Сумма арифметики», одна из первых печатных математических книг, появилась в 1494 г.[1]). Написанная на итальянском языке, притом на не слишком изящном, она содержала все, что тогда знали по арифметике, алгебре и тригонометрии. Отныне пользование индийскоарабскими цифрами стало общепринятым, а арифметические обозначения в этой книге не слишком отличаются от наших. Пачоли закончил свою книгу замечанием, что решение уравнений $x^3 + mx = n$, $x^3 + n — mx$ столь же невозможно при современном ему состоянии науки, как и квадратура круга.

Это стало отправной точкой для математиков Болонского университета. Болонский университет в конце пятнадцатого столетия был одним из самых больших и са

') Первыми печатными математическими книгами были коммерческая арифметика (Тревизо, 1478г.) и латинское издание «Начал» Евклида (Венеция, 1482) мых известных в Европе. Было время, когда только его астрономический факультет насчитывал шестнадцать лекторов. Студенты толпами устремлялись из всех частей Европы, чтобы слушать здесь лекции, а также на публичные диспуты, которые привлекали многих спортивно настроенных слушателей. В разные времена студентами этого университета были Пачоли, Альбрехт Дюрер и Коперник. Для новой эпохи характерным было стремление не только усвоить науку классиков, но и создать новое, перешагнуть через границы, указанные классиками. Искусство книгопечатания и открытие Америки указывали на наличие таких возможностей. Но можно ли создать новую математику? Древние греки и восточные народы испытывали свою изобретательность на решении уравнений третьей степени, но они только численно решили несколько частных случаев. Теперь же болонские математики пытались найти общее решение.

Эти уравнения третьей степени можно было свести к трем типам:

$X^3 + px = q,\ x^3 = px + q,\ x^3 + q = px,$

где p и q — положительные числа. Они были тщательно исследованы профессором Сципионом дель Ферро, который умер в 1526 г. Можно сослаться на авторитет Бортолотти, утверждающего, что дель Ферро действительно решил все типы. Он никогда не публиковал своих решений и рассказал о них лишь немногим друзьям. Но об этом открытии стало известно, и после смерти Сципиона венецианский мастер счета, по прозвищу Тарталья (заика), переоткрыл его приемы (1535 г.). Он публично продемонстрировал свои результаты, но по-прежнему держал втайне тот метод, с помощью которого он получил их. Наконец, он раскрыл свои соображения ученому доктору из Милана, Иерониму Кардано, который поклялся, что будет хранить их втайне. Однако, когда Кардано в 1545 г. опубликовал свою внушительную книгу по алгебре «Великое искусство» (Ars magna), Тарталья с возмущением обнаружил, что в ней полностью раскрыт его метод, с должным признанием заслуг автора открытия, но тем не менее уворованный. Завязалась ожесточенная полемика, с обеих сторон сыпались оскорбления. Защитником Кардано был молодой ученый из дворян Людовико Феррари. Эта перепалка породила несколько интересных документов, среди них «Вопросы» (Quaesiti)

Тартальи (1546 г.) и «Вызовы» (Cartelli) Феррари (1547—1548 гг.), которые довели до всеобщего сведения всю историю этого замечательного открытия.

Полученное решение теперь известно как формула Кардано, и в случае уравнения $x^3 + px = q$ оно имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$$

Мы видим, что это решение вводит выражения вида

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$$

отличные от евклидовых.

«Великое искусство» Кардано содержало и другое блестящее открытие: метод Феррари сведения решения общего уравнения четвертой степени к решению кубического уравнения. Уравнение Феррари имело вид $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, он его сводил к уравнению $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. Кардано рассматривал и отрицательные числа, называя их «вымышленными», но он не был в состоянии что-либо сделать в так называемом «неприводимом случае» уравнения третьей степени, когда налицо три действительных корня, но они получаются в виде суммы или разности чисел, называемых теперь мнимыми. Эта трудность была преодолена последним из больших болонских математиков шестнадцатого века, Рафаэлем Бомбелли, чья «Алгебра» появилась в 1572 г. В этой книге и в «Геометрии», написанной около 1550 г. и оставшейся в рукописи, он вводит последовательную теорию мнимых и комплексных чисел. Он записывает $3i$ как √0—9 (буквально так: R[0*m*,9], где R обозначает корень (radix), а *m* обозначает meno, т. е. меньше, минус). Это позволило Бомбелли разрешить неприводимый случай, показав, например, что

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0 - 2209}} = 4 + \sqrt{0 - 1}$$

Книгу Бомбеллп читали многие: Лейбниц изучал по ней кубические уравнения, Эйлер цитирует Бомбелли в своей «Алгебре», в главе об уравнениях четвертой степени. Отныне комплексные числа потеряли кое-что из сверхъестественности, хотя полное их признание произошло только в девятнадцатом столетии.

Любопытен тот факт, что впервые мнимости были введены в теории кубических уравнений в том случае, когда было ясно, что действительное решение существует, хотя и в нераспознаваемом виде, а не в теории квадратных уравнений, в которой они появляются в наших современных учебниках.

8. Алгебра и арифметика в течение многих десятилетий оставались у математиков любимым объектом исследований. Это стимулировалось не только Rechenhaftigkeit торговой буржуазии, но также и запросами землемерия и мореплавания, которые выдвигались правительствами новых национальных государств. Инженеры были нужны для возведения публичных зданий и военных сооружений. Астрономия, как и в предыдущие периоды, оставалась важной областью математических исследований. Это было время великих астрономических теорий Коперника, Тихо Браге и Кеплера. Возникло новое представление о вселенной.

Философская мысль отражала тенденции научного мышления, и Платон с его преклонением перед количественным и математическим рассуждением начал брать верх над Аристотелем. В частности, влияние Платона очевидно в работах Кеплера. Появлялись все более точные тригонометрические и астрономические таблицы, прежде всего в Германии. Таблицы Ретика (G. J. Rha'ticus), законченные в 1596 г. его учеником Валентином Ото (Otho), содержали значения всех шести тригонометрических величин через каждые десять секунд с десятью знаками. Таблицы Питискуса (Pitiscus, 1613 г.) были доведены до пятнадцатого знака. Совершенствовалась техника решения уравнений, углублялось понимание природы их корней. Для этой эпохи характерен публичный вызов, сделанный в 1593 г. бельгийским математиком Адриеном ван Роменом (Roomen), решить уравнение сорок пятой степени

$x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{38}+...-3795x^3+45x=A$.

Ван Ромен указал некоторые частные случаи, например:

$A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, что дает

$X=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$

эти случаи подсказаны рассмотрением правильных многоугольников. Франсуа Виет, французский юрист, состо явший при дворе Генриха IV, решил задачу ван Ромена, заметив, что левая часть уравнения соответствует выражению sinφ через sin(φ/45). Поэтому решение можно найти с помощью таблиц. Виет нашел двадцать три решения вида $\sin(\varphi/45+n\bullet 8^0)$ отбрасывая отрицательные корни. Он также свел решение Кардано кубического уравнения к тригонометрическому, и при этом неприводимый случай перестал быть устрашающим, так как дело обошлось без введения выражений вида $\sqrt{0-a}$. Это решение можно теперь найти в учебниках высшей алгебры.

Франсуа Виет
(1540—1603)

Главное достижение Виета состоит в усовершенствовании теории уравнений (например, в работе «Введение в аналитическое искусство», In artem analyticam isagoge, 1591 г.). Он был одним из первых, кто числа изображал буквами. Использование численных коэффициентов, даже в «риторической» алгебре школы Диофанта, препятствовало общему рассмотрению алгебраических задач. Работы алгебраистов шестнадцатого века («коссистов», от итальянского слова cosa—«вещь», «нечто»,— которым обозиачали неизвестное) написаны с помощью очень сложных обозначений. Но «видовая логистика» Виета означала появление (наконец-то) общей символики, в которой буквы были использованы для выражения численных коэффициентов, знаки «+» и « —» применялись в нашем современном смысле, а вместо A^2 писали: *«A* квадратное». Эта алгебра все еще отличалась от нашей из-за того, чго Виет придерживался греческого принципа однородности, согласно которому произведение двух отрезков обязательно рассматривалось как площадь и в соответствии с этим отрезки можно было складывать только с отрезками, площади с площадями, объемы с объемами. Даже сом невались в том, имеют ли смысл уравнения степени выше третьей, так как они могли быть истолкованы лишь в четырех измерениях, а это едва ли можно было понять в те времена.

В описываемый период вычислительная техника достигла новых высот. Виет улучшил результат Архимеда и нашел π с девятью десятичными знаками. Вскоре после того π было вычислено с тридцатью пятью десятичными знаками Лудольфом ван Цепленом (Ludoif van Ceulen) из Дельфта, использовавшим описанные и вписанные правильные многоугольники со все большим и большим числом сторон. Виет нашел также выражение π в виде бесконечного произведения (1593г.); в наших обозначениях:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cos\frac{\pi}{32} \cdot \ldots$$

Усовершенствование техники было результатом усовершенствования обозначений. А новые результаты показывают, что было бы неверным заявлять, будто люди, подобные Виету, «всего лишь» усовершенствовали обозначение. Подобные заявления пренебрегают глубокой зависимостью между содержанием и формой. Новые результаты часто становятся возможным лишь благодаря новому способу записи. Одним из примеров этого является введение индийско-арабских цифр, другим примером может быть символика Лейбница в анализе. Подходящее обозначение лучше отображает действительность, чем неудачное, и оно оказывается как бы наделенным собственной жизненной силой, которая в свою очередь порождает новое. За усовершенствованием обозначений Виета поколение спустя последовало применение алгебры к геометрии у Декарта.

9. В новых торговых государствах, особенно во Франции, Англии и Голландии, был большой спрос на инженеров и «арифметиков». Астрономия процветала во всей Европе. После открытия морского пути в Индию итальянские города уже не были на магистральной дороге, ведущей на Восток, хотя они еще оставались важными центрами. Вот в связи с этим мы среди великих математиков и вычислителей начала семнадцатого века видим инженера Симона Стевива, астронома Иоганна Кеплера, землемеров Адриана Бланка и Езекииля де Деккера.

Стевин, бухгалтер из Брюгге, стал инженером в армии принца Морица Оранского, оценившего в нем сочетание здравого смысла, оригинальности и теоретического мыш ления. В работе «Десятая» (La disme, 1585 г.) он ввел десятичные дроби, что было составной частью проекта унификации всей системы мер на десятичной основе. Это было одним из больших усовершенствований, которые стали возможными благодаря всеобщему принятию индийскоарабской системы счисления.

Джон Непер (1550—1817)

Другим большим усовершенствованием вычислительной техники было изобретение логарифмов. Некоторые математики шестнадцатого столетия в известной мере занимались сопоставлением арифметической и геометрической прогрессий, главным образом с целью облегчить работу со сложными тригонометрическими таблицами. Важным достижением на этом пути мы обязаны шотландскому лорду Джону Неперу (Neper или Napier), который в 1914 г. напечатал свое «Описание удивительного канона логарифмов» (Mirifici logarithmorum canoriis descriptio). Основной идеей Непера было построение двух последовательностей чисел, связанных таким образом, что когда одна из них возрастает в арифметической прогрессии, другая убывает в геометрической. При этом произведение двух чисел второй последовательности находится в простой зависимости от суммы соотетствующих чисел первой последовательности и умножение можно свести к сложению. С помощью такой системы Непер мог значительно облегчить вычислительную работу с синусами. Первоначальный способ Непера был в достаточной мере неуклюжим, так как его две последовательности соответствовали, в современных обозначениях, формуле

$y = ae^{-x/a}$ (или x = Nep log y), где $a = 10^7$ [1]).

') Следовательно, Nep log $y = 10^7$ (ln 10^7 — ln y) = 161180957– 10^7 ln y и Nep log 1 = 161 180 957; здесь ln x обозначает наш натуральный логарифм

Когда $x=x_1+x_2$, мы получаем не $y = y_1y_2$, а $y = y_1y_2/a$.

Такая система не удовлетворяла и самого Непера, как он сообщил своему почитателю Генри Бриггсу, профессору одного из лондонских колледжей. Они решили выбрать функцию $y=10^x$, при которой $x=x_1+x_2$ действительно дает $y = y_1y_2$.

После смерти Непера Бриггс осуществил это предложение и в 1624 г. опубликовал свою «Логарифмическую арифметику», содержавшую «бригговы» логарифмы с четырнадцатью знаками для целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000.

Пробел от 20 000 до 90 000 был заполнен Езекиилем де Деккером, голландским землемером, который с помощью Бланка опубликовал в 1627 г. полную таблицу логарифмов.

Новое изобретение сразу же приветствовали математики и астрономы, в частности Кеплер, который до этого приобрел большой и нелегкий опыт в деле обширных вычислений.

Данное здесь истолкование логарифмов с помощью показательной функции исторически в известной мере ложно, так как понятие показательной функции восходит только к концу семнадцатого века. У Непера не было понятия основания логарифмов.

Натуральные логарифмы, связанные с функцией $y =e^x$, появились почти одновременно с бригговыми, по их фундаментальное значение было понято лишь тогда, когда стали лучше понимать исчисление бесконечно малых ').

[6] В кратком изложении истории математики в средние века имеются существенные пробелы Одним из них является то, что совершенно нет сведений о математике у славянских народов и в Закавказье. В связи с этим мы отсылаем читателя к книге История отечественной математики/Под редакцией И. 3. Штопало. Т. I: От древнейших времен до конца XVIII в.— Киев, 1966.

См также:

Петросяп Г. В. История математики в Армепии/На армянском языке, русск. и английск. резюме.— Ереван, 1960.

') Некоторые натуральные логарифмы вычислили Райт (E. Wright, 1618 г.) и Спейдель (J. Speidel, 1619 г.); но после этого никакие таблицы этих логарифмов не появлялись до 1770 г. См C a j o r i F. History of the Exponential and Logarithmic Concepts *II* Amer. Math. Monthly.— 1913.— V. 20, Ц х а к а я Д. Г. История математических наук в Грузии с ввнейших времен до начала XX века.— Тбилиси, 1959 Кирик Новгородец. Учение им же ведати человеку числа всех лет/Примечания В. П. Зубова / Историко-математические исследования, вып. VI. М.: Гостехиздат, 1953.

Зубов В. П. Кирик Новгородец и древнерусские деления часа *II* Историкоматематические исследования, вып. VI.— М.: Гостехиздат, 1953.

Феттер Г. Краткий обзор развития математики в чешских землях до Белогорской битвы // Историко-математические исследования, вып. XI.— М.: Физматгиз, 1958.

В изложении автора не затронут и такой, правда, мало исследованный вопрос, как роль Византии в сохранении и передаче научного наследия античности. См. в связи с этим

Vogel К. Der Anteil von Bizanz an Krhanltung und Weiterbildung der griechischen Mathernatik.— Miscellanea Mediaevalia. T. I, 1962.

ЛИТЕРАТУРА

О распространении индийскоарабских цифр в Европе см.:

Smith D. E., К а г p i n s k i L. C. The HinduArabic Numerals.— Boston, London, 1911.

О теоретической математике средневековья см.:

Boyeг C. B. The Concepts of the Calculus, ch. III.—N. Y., 1939. 2nd ed.— N. Y., 1958.

Oresm N. Quastiones super geometriam Euclidis.— Leiden, 1961 (с английским переводом).

Vera F. Historia de la mathematica en Espana. T. 1: Tiempos primitives hasta el siglo XIII.— Madrid, 1929. Steinschneider M. Die Malhematik der Juden.— Bibliotheca mathem., Neue Folge, 1893—1899,—Bd 7—13.

Итальянская математика шестнадцатого и семнадцатого веков была предметом ряда работ Бортолотти (E. Bortolotti), написанных в 1922—1928 гг., например, Periodico di malhemalica.— 1925.— V. 5.— P. 147—184; 1926 — V. 6.— P. 217—230; 1928.—V. 8,— P. 19— 59; Sciontia.— 1923.— P. 385—394; см. также: B o r t o 1 o 11 i E. I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola mathematica bolognese alia teoria algebrica della equazione cubica.— Imola, 1926 и Bortolotti E. La storia delle malhemaliche nella Universita di Bologna.— Bologna, 1947.

Автобиография Кардапо издана в переводе на русский (Кардано Дж. О моей жизни.— М., 1933) и на английский язык (Cardano H. My Life.— N. Y., 1930).

О нем см. Ore O. Cardano, The Gambling Scholar.—Princeton, 1953. 2nd ed.— Princeton, 1965.

Обширные сведения о математиках шестнадцатого и семнадцатого веков и об их трудах содержатся в работах Босманса (H. Bosmans), болыпинство которых появилось в Annales de la Sociele Scientifique Bruwllcs за годы 1905—1927. Полный список этих работ см. Rome A. / Isis.— 1929.— V. 12. p.68. Кроме того, см.:

Treutlein P. Das Rechnen im 16 Jahrhundert // Abh. zup Geschichte der Math.— 1877.— Bd 1.— S. 1 — 100.

Steck M. Diirers Gestaltlehre der Mathematik und der bildeiifQ Kunste.— Halle, 1948.

C a r s 1 a w II. S. The Discovery of Logarithms by Napier // Math. Gaz —1915—1916.—P. 76—84, 115—119.

Zinner E. Leben und Werken des Johannes Miiller von Konigsberg gennannt Regiomontanus.— Munchen, 1958.

Bond J. D. The Development of Trigonometric Methods do\\ n to the Close of the Fifteenth Century // Isis.— 1921—1922 — V. 4 — P. 295—323.

Y e 1 d h a m F. A. The Story of Reckoning in the Middle Ages — London, 1926.

Blaschko W., Schoppe G. Regiomontanus, Commensurator.—Berlin, 1956.

G e y e r B. Die mathematischen Schrif ten des Albertus Magnus II Angelicus.— 1958.— Bd 35.— S. 159—175.

Thomas of Brad war dine. Tractatus de Proportionibu./ Ed. H. L. Crosby.—Madison (Wis.), 1955.

S art on G. Simon Stevin of Bruges.—Isis.—1931.—V. 21 — P. 241—303.

Dijksterliuis E. J. Simon Stevin.— S'Gravenhaye, 1943.

S lev in, Simon. Coll. Works.—Y. 1—4.— 1955—1964.

Nicolaus von Cues. Math. Schriflen/Obersetzt und Ногаич gegeben von ,1. und J. E Hofmann.— Hamburg, 1952. . ..

Thorndike L. The Sphere of Sacrobosco— Chicago, 194')

T ay lor E. G. R. The mathematical praclioners of Tudor and Stuart England.— Cambridge, 1954

Clagett M. The science of mechanics in the Middle Ages — Madison (Wis); London, 195'J.

На русском языке см :

Орезм Н. Трактат о конфигурации качеств/Перевод, вступи тельная статья и примечания В. П. Зубкова / Историко-математп ческие исследования, вып. XI.— М.: Физматгиз, 1958.— С. 601—73S Зубков В. П. Трактат Брадвардина «О континууме» / Историко-математичоские исследования, вып. XIII.— М.: Физматгиз, I960.—С. 385—440.

Гариг Г. 3. Спор Таргальи и Кардано о кубических; уравнениях и его общественные основы // Архив истории науки и техники.— 1935.—Т. 7.—С. 67—104.

Успенский Я. В. Очерк истории логарифмов — Пг., 1923

Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов.— Харьков. 1952.

Таппсрп П. Исторический очерк развития естесгвознания в Европе (с 1300 г. и по 1900 г.).—М; Л.: ГТТИ, 1934 (также ,. следующим главам).

О л ьш к и Л. История научной литературы па новых языках Т. I: Литературы техники и прикладных наук от средних веков и эпохи Возрождения.— М ; Л: ГТТИ. 1933. Т. II: Образование и наука в эпоху ренессанса в Италии.— М ; Л : ГТТИ, 1934 Т III Галилей и его время.— М ; Л : ГТТИ, 1933.

Глава VI

СЕМНАДЦАТОЕ СТОЛЕТИЕ

1. Стремительное развитие математики в эпоху Возрождения было обусловлено не только «счетным уклоном» (Rechenhaftigkeit) купеческого класса, но и эффективным «использованием и дальнейшим усовершенствованием ма'шин. Восток и классическая древность пользовались машинами, машинами вдохновлялся гений Архимеда. Однако существование рабства и отсутствие экономически прогрессивного городского уклада жизни сводили на нет пользу от машин в этих более древних общественных формациях. На это указывают труды Герона, в которых есть описание машин, но только предназначенных для развлечения или мистификации.

Во времена позднего средневековья машины вошли в употребление в небольших мануфактурах, на общественных стройках и в горном деле. Все это были предприятия, организованные городскими купцами или владетельными князьями прибыли ради; часто это происходило в борьбе с городскими гильдиями. Военное дело и навигация также побуждали совершенствовать орудия труда и в дальнейшем заменять их машинами.

Уже в начале четырнадцатого столетия в Лукке и в Венеции существовала хорошо организованная шелковая промышленность. Она основывалась на разделении труда и на использовании энергии воды. В пятнадцатом столетии в Центральной Европе горное дело развилось в капиталистическую промышленность, технической основой которой было использование насосов и подъемных машин, что позволяло вести бурение до все более глубоких пластов. Изобретение огнестрельного оружия и книгопечатания, строительство ветряных мельниц и каналов, постройка судов для океанского плавания требовали инженерного искусства и заставляли задумываться над техническими проблемами. Благодаря усовершенствованию часов, которыми пользовались астрономы и мореплаватели и которычасто устанавливались в общественных местах, замечательные произведения механического искусства стали доступны общему обозрению. Правильность движения часои и те возможности, которые они давали для точного указания времени, производили глубокое впечатление па философски настроенные умы. В эпоху Возрождения и даже в течение последующих столетий часы рассматривали как модель вселенной. Это оказало существенное влияние на развитие механистической концепции мира.

От машин путь вел к теоретической механике и к научному изучению движения и изменения вообще. Античность уже дала трактаты по статике, и исследования по теоретической механике нового времени, естественно, опирались на статику классических авторов. Задолго до изобретения книгопечатания появлялись книги о машинах сначала эмпирические описания (Киезер (Kyeser), начало пятнадцатого века), затем более теоретические, как книга Леона Баттисты Альберти об архитектуре (ок. 1450 г.) и рукописи Леонардо да Винчи (ок. 1500 г.). В рукописях Леонардо в зародыше содержалась вполне механистическая теория природы. Тарталья в своей «Новой науке» (1537 г.) рассматривал конструкцию часов и траектории снарядов, но он еще не обнаружил параболической орбиты, впервые открытой Галилеем. Опубликование латинских изданий Герона и Архимеда способствовало такого рода исследованиям. Особое значение имело издание Архимеда, выполненное Ф. Коммандино, которое появилось в 1558 г. и сделало доступным математиком античный интеграционный метод. Сам Коммандино применил эти методы для вычисления центров тяжести (1565г.), хотя с меньшей строгостью, чем его учитель.

Вычисление центров тяжести стало любимым предметом у изучавших Архимеда, так как они старались применить статику, чтобы овладеть методами, в которых мы сейчас узнаем зародыши анализа.

Среди последователей Архимеда выдающееся месте занимают Симон Стевин, который написал работы о центрах тяжести и по гидравлике (1586 г.), Лука Валерио, давший работы о центрах тяжести (1604 г.) и о квадратуре параболы (1606 г.), и Пауль Гульдин, в сочинении которого «Центробарика» (1641 г.) мы находим так называемую теорему Гульдина о телах вращения, которую в свое время разъяснял Папп. Вслед за этими пионерами появились великие творения Кеплера, Кавальери и Торричелли, развивавшие те методы, которые в конечном счете привели к созданию анализа.

2. Для этих авторов типичной была их склонность пренебрегать архимедовой строгостью ради соображений, которые часто исходили из нестрогих, иной раз атомистических допущений. Вероятно, они не знали, что Архимед в своем письме к Эратосфену тоже пользовался такими методами благодаря их эвристической ценности. Вызвало это было отчасти неудовлетворенностью схоластикой некоторых, хотя и не всех авторов; среди этих пионеров были католические священники, натренированные в схоластических тонкостях. Основной причиной было стремление получать результаты, чего при греческом методе нельзя было быстро добиться.

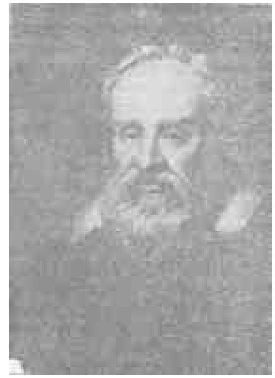
Революция в астрономии, связанная с именами Коперника, Тихо Браге и Кеплера, позволила совершенно по-новому взглянуть на место человека во вселенной и на возможности человека рациональным образом объяснить астрономические явления. То, что небесная механика давала возможность пополнить земную механику, придавало смелости людям науки. Стимулирующее влияние новой астрономии в проблемах, связанных с большими вычислениями, а также с инфинитезимальными соображениями, особенно хорошо видно в трудах Иоганна Кеплера. Кеплер даже отважился на вычисление объемов ради самого этого вычисления, а в своей «Стереометрии винных бочек» (1615 г.) он вычислял объемы тел, получающихся при вращении конических сечений вокруг оси, лежащей с ними в одной плоскости. Кеплер отказался от архимедовой строгости; у него площадь круга состоит из бесконечно „большого числа треугольников с общей вершиной в центре, а его сфера состоит из бесконечно большого числа утончающихся пирамид. Кеплер говорил о доказательствах Архимеда, что они абсолютно строги, «абсолютны и во всех отношениях совершенны», но он оставлял их для людей, склонных увлекаться точными доказательствами. Каждый последующий автор был волен ввести строгость па свой лад пли пренебречь ею. Галилео Галилей дал нам новую механику свободно падающих тел, был основателем теории упругости и вдохновенным защитником системы Коперника. Но прежде всего мы обязаны Галилею, более чем какому-либо другому деятелю этого периода, духом современной науки, основанной на гармонии эксперимента и теории. В своих

Иоганн Кеплер (1571—1630)

«Беседах» (1638 г.) Галилей пришел к математическому изучению движения, к зависимости между расстоянием, скоростью и ускорением. Он ни разу не изложил систематически свои идеи относительно анализа, предоставив это своим ученикам Торричелли и Кавальери. А идеи Галилея в вопросах чистой математики были весьма оригинальны, как видно из его замечания, что «число квадратов не меньше, чем множество всех чисел, и последнее не больше, чем первое». Такая защита актуально бесконечного (со стороны Сальвиати в «Беседах») сознательно направлена против учения Аристотеля и схоластов (которое представляет Симпличо). «Беседы» содержаг также параболическую орбиту снаряда, таблицы для высоты и дальности в зависимости от угла возвышения и заданной начальной скорости. Сальвиати указывает, что цепная линия сходна с параболой, но не дает точного описания этой кривой.

[7] Сказанное о Галилее требует дополнения Не будучи собственно математиком, Галилей занимает видное место в истории математики. Уже в начале своей научной деятельности он глубоко изучил доступные ему произведения Архимеда и, состоя много лет профессором университетов (в Пизе и Падуе), содействовал распространению методов великого греческого математика. Вообще Галилей всячески пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы и дал превосходные образцы такого применения. В подзаголовке к собранию своих сочинений он хотел написать, что «здесь на множестве примеров разъясняется, насколько полезна математика для всех выводов, касающихся природы, и насколько невозможно вести успешно рассуждения без помощи геометрии». Но Галилей не только применял то готовое, что нашел в математике. Он искал новые математические методы, необходимые ему для развития его новых физических тоорпй, и его деятельность в этом направлении, только отчасти отразившаяся в законченных и напечатанных произведениях Галилея, оказала большое влияние на его непосредственных и косвенных учеников, к которым надо отнести всех виднейших итальянских математиков семнадцатого столетия. Исследуя уско

ренное движение, Галилей пришел к представлению о мгновенной скорости как сумме всех приращений скорости тела, полученных последним с начала движения. При этом Галилей описывал этот процесс как происходящий непрерывно во времени и устанавливал соответствие между двумя континуумами: континуумом значений времени и континуумом значений скорости, проходящей через все свои «степени и моменты». Это часть того пути, который вел к общему понятию функциональной зависимости и к флюэнтам и флюксиям Ньютона (заметим, что Ньютон уже в молодости изучал труды Галилея, а старший современник Ньютона Барроу был в общении с итальянскими математиками — учениками и последователями Галилея). Но Галилей пользовался и атомистическими представлениями о строении материи, и в своем творчестве он снова должен был обратиться к формально противоречивым соотношениям разрывного и непрерывного и к свойствам бесконечно большого и бесконечно малого. Но теперь успехи, достигнутые в изучении движения (установление законов падения), побуждали продвигаться вперед, не смущаясь противоречиями и имея основание надеяться на их разрешение. В частности, Галилей, указав на парадоксальное соотношение между множеством квадратов и множеством всех чисел, сделал отсюда важный вывод, что нельзя безоговорочно переносить на бесконечные соотношения, верные для конечных величин. Свои собственные выводы и представления Галилей не считал окончательными, он привлекал других ученых к проблемам, которые тогда были основными для развития математических методов, в которых нуждалось новое естествознание. Один из собеседников в знаменитых «Беседах» Галилея, Сальвиати, выражающий мысли автора, заканчивает там обсуждение так. «Если это вам нравится, то примите мои выводы; если же нет, то считайте их ложными так же, как и мои рассуждения, и поищите других объяснений, более удовлетворительных. Я только напоминаю вам при этом два слова: мы находимся в области бесконечных и неделимых»[1]).



Галилео Галилей
(1564—1642)

Наступило время для первого систематического изложения результатов, достигнутых в той области, которую мы сейчас называем анализом. Такое изложение было дано в «Геометрии» Бонавентуры Кавальери (1635 г.), про

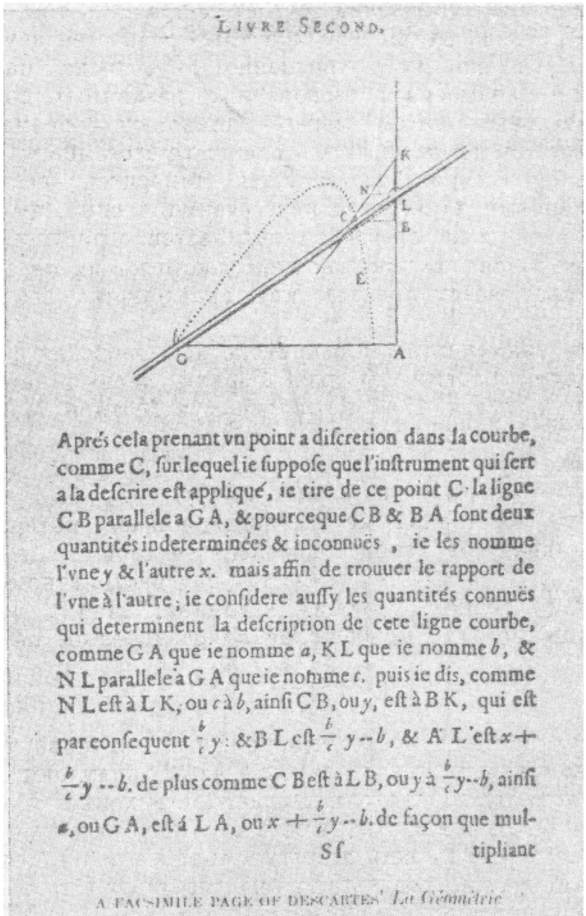
') См. Галилей, Галилео Соч , т I — М ; Л : ГТТИ 1934 — С. 127.

фессора Болонского университета. Кавальери построил упрощенную разновидность исчисления бесконечно малых, основанную на схоластическом представлении о неделимых [1]), так, что точка порождает при движении линию, а линия — плоскость. Таким образом у Кавальери не было бесконечно малых или атомов. Он получал свои результаты с помощью «принципа Кавальери», согласи которому два тела одинаковой высоты имеют один и гот же объем, если плоские сечения этих тел на одинаковом уровне имеют одинаковые площади Это позволило ему выполнить вычисление, равносильное интегрирование многочленов.

Сначала, чтобы получить площадь, он складывал от резки, но когда Торричелли показал, что таким способом можно доказать, что любой треугольник делится высотой на две равновеликие части, Кавальери заменил «отрезки» «нитями», то есть он превратил отрезки в площади весьма малой ширины.

3. Это постепенное развитие анализа получило мощиый импульс, когда была опубликована «Геометрия» (1637 г) Декарта, которая включила в алгебру всю область классической геометрии. Эта книга первоначально была опубликована в качестве приложения к «Рассуждению о методе», рассуждению, в котором автор излагает свой рационалистический подход к изучению природы. Рене Декарт был родом из Турени (Франция), вел жизнь дворянина, некоторое время служил в армии Морица Оранского, в течение многих лет жил в Голландии и умер в Стокгольме, куда он был приглашен шведской королевой. Вместе с многими другими великими мыслителями семнадцатого века Декарт искал общий метод мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. Так как единственной наукой о природе, обладавшей в известной мере систематическим строением, была тогда механика, а ключ к пониманию механики давала математика, то математика стала наиболее важным средством для понимания вселенной. Более того, математика со своими убедительными утверждениями сама была блестящим примером того, что в науке

') Cajori F. Indivisibles and «Ghosts of departed quantities» // History of Mathematics Scientia 1925 P 301-306; Hoppe E. Zur Geschichte der Inf'initesimalrechnung bei Leibniz und Newton // Janresb Deufsch Math Verem — 1928 — Bd 37 — S 148—187 Относитсльно некоторых утверждений Хоппе см указанную на с 121 книгу Бойера (С В Воуег), с 192, 206, 209 можно найти истину. Таким образом, механистическая философия этого периода приводила к выводу, сходному с тем, к которому пришли платоники, но исходя из других соображений. И платоники, верившие в авторитет,


LIVRE SECOND.

Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne CB parallele a GA, & pourceque CB & BA ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme GA que ie nomme a, KL que ie nomme b, & NL parallele a GA que ie nomme c. puis ie dis, comme NL eſt à LK, ou c à b, ainſi CB, ou y, eſt à BK, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & BL eſt $\frac{b}{c}y - b$, & AL eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme CB eſt à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou GA, eſt á LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sſ tipliant

A FACSIMILE PAGE OF DESCARTES' *La Géométrie*

Факсимиле страницы из «Геометрии» Декарта

и картезианцы, верившие в разум, считали математику царицей наук.

Декарт опубликовал свою «Геометрию» в качество применения своего общего метода объединения, в данном случае объединения алгебры и геометрии. Согласно общепринятой точке зрения заслуга книги Декарта состоит главным образом в создании так называемой аналитической геометрии. Верно то, что эта ветвь математики развивалась под влиянием книги Декарта, но «Геометрия» сама по себе вряд ли может рассматриваться как первый трактат по этому предмету. Там нет «декартовых осей», там не выведены уравнения прямой линии и конических сечений, хотя одно частное уравнение второго порядка истолковывается как определяющее собой коническое сечение. Более того, значительная часть книги представляет собой теорию алгебраических уравнений, там содержится «правило Декарта» для определения числа положительных и отрицательных корней.

Нам следует иметь в виду, что Аполлоний определил конические сечения с помощью того, что мы сейчас, следуя Лейбницу, называем координатами, хотя числовых значений они не имели. Широта и долгота в «Географии» Птолемея были уже числовыми координатами. Папп в свое «Собрание» включил «Сокровищницу анализа» (Analyomenos), где нам надо только модернизировать обозначения, чтобы получить последовательное применение алгебры к геометрии. Даже графическое представление встречается до Декарта (Орезм). Заслуга Декарта прежде всего состоит в том, что он последовательно применил хорошо развитую алгебру начала семнадцатого века к геометрическому анализу древних и таким образом в огромной мере расширил область ее применимости. Затем заслугой Декарта является то, что он окончательно отбросил ограничение однородности его предшественников, что было недостатком и «видовой логистики» у Виета. Теперь x^2, x^3, xy рассматривались как отрезки. Алгебраическое уравнение стало соотношением между числами — новый шаг вперед по пути математической абстракции, необходимый для общей трактовки алгебраических кривых, и это можно рассматривать как окончательное принятие Западом алгоритмической алгебраической традиции Востока. В обозначениях Декарта многое уже является современным: мы находим в его книге выражения вида

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

которые отличаются от наших собственно только тем, что Декарт еще пишет *aa* вместо a^2 (что мы еще встречаем даже у Гаусса), хотя он пишет a^3 вместо aaa, a^4 вместо *аааа* и т. д. В его книге разобраться нетрудно, но не следует там искать нашей современной аналитической геометрии.

Несколько ближе к такой аналитической геометрии подошел Пьер Ферма, юрист из Тулузы, который написал небольшую работу по геометрии, вероятно, до издания книги Декарта, но эта работа была опубликована только в 1679 г. Во «Введении» (Isagoge) Ферма мы находим уравнения

$y = mx, xy=k^2$

$x^2 + y^2 = a^2, x^2 \pm a^2y^2 = b^2$

для прямых линий и конических сечений относительно некоторой системы (обычно перпендикулярных) осей. Впрочем, эта работа выглядит более архаичной, чем «Геометрия» Декарта, так как она написана в обозначениях Виета, а к тому времени, когда было напечатано «Введение» Ферма, уже появились другие работы, в которых алгебра была применена к результатам Аполлония, — прежде всего «Трактат о конических сечениях» (Tractatus de Seclionibus conicis, 1655 г.) Джона Валлиса и, частично, «Основы кривых линий» (Eleraenta curvarum linearum, 1659 г.), написанные Иоганном де Виттом, великим пенсиооарием Голландии. Оба труда создавались под прямым влиянием Декарта. Однако прогресс шел очень медленно, и даже в книге Лопиталя «Аналитический трактат о ко нических сечениях» (Traite analytique des Sections co niques, 1707 г.) мы находим немногим больше, чем перевод Аполлония на язык алгебры. Все эти авторы не решались допускать отрицательные значения для координат, Первым, кто смело обращался с алгебраическими уравнениями, был Ньютон в своем исследовании кривых третьего порядка (1703г.), а первую аналитическую геометрию конических сечений, вполне освободившуюся от Аполлония, мы находим только во «Введении» Эйлера (1748г.). 4. Появление книги Кавальери побудило многих математиков различных стран заняться задачами, в которых применялись бесконечно малые. К основным проблемам стали подходить более абстрактным образом и при таком подходе выигрывали в общности. Задача о касательных, состоявшая в отыскании метода для проведения касательной к заданной кривой в заданной точке, все более и более выдвигалась на первый план наряду со старыми проблемами определения объемов и центров тяжести. В этой

Рене Декарт (1597-1650)

задаче выявились два направления, геометрическое и алгебраическое. Последователи Кавальери, особенно Торричелли и Исаак Барроу, пользовались греческим методом геометрического рассуждения, не слишком заботясь о его строгости. Христиан Гюйгенс тоже явным образом тяготел к греческой геометрии. Но были другие, в частности Ферма, Декарт и Джон Валлис, у которых проявлялась противоположная тенденция— они применяли новую алгебру. Практически все авторы, писавшие в 1630—1660гг. ограничивались вопросами, касавшимися алгебраических кривых, в частности кривых с уравнением $a^m y^n = b^n x^m$. Они находили, каждый своим способом, формулы, равносильные формуле $\int_0^a x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ сначала для целого положительного *m,* затем для *m* целого отрицательного и дробного. Иной раз появлялась неалгебраическая кривая такая, как циклоида (рулетта), исследованная Декартом и Блезом Паскалем. «Общий трактат о рулетте» (Traite general de la roulette, 1658 г.) Паскаля (часть небольшой книги, опубликованной под именем А. Деттонвиля) оказал большое влияние на молодого Лейбница [1]).

В этот период начали обозначаться некоторые характерные черты анализа. В 1638г. Ферма открыл метод нахождения максимумов и минимумов с помощью незначительного изменения переменного в простом алгебраиче

') Bosnians H. Sur 1'oeuvre mathematique de Blaise Pascal Revue des Questions Scientifiques.— 1929, ском уравнении с последующим обращением этого изменения в нуль. Этот метод был перенесен на более общие алгебраические кривые Иоганном Гудде, бургомистром Амстердама, в 1658г. Проводили касательные, вычисляли объемы и центры тяжести, но по-настоящему еще не уловили связи между интегрированием и дифференцированием как обратными операциями, пока это не было показано (1670 г.) Барроу, но в тяжеловесной геометрической форме. Паскаль при случае пользовался выражениями, куда входили малые количества и в которых он опускал члены более высокого порядка малости, предвосхищая спорное допущение Ньютона, что $(x+dx)*(y+dy) — xy = xdy+ydx$. Паскаль защищал свой прием, ссылаясь на интуицию больше, чем на логику, чем предвосхитил критику Ньютона со стороны епископа Беркли [1]).

При этих поисках нового метода схоластические представления применялись не только Кавальери, но и в трудах бельгийского иезуита Григория Сен Венсана и его учеников и помощников Пауля Гульдина и Андре Такке, Эти люди вдохновлялись и духом своей эпохи, и средневековыми схоластическими писаниями о природе континуума и о протяженности форм. В их работах впервые появляется термин «исчерпывание» для обозначения метода Архимеда. Книга Такке «О цилиндрах и кольцах» (1651 г.) оказала влияние на Паскаля.

В эпоху, когда не существовало научных журналов, такая лихорадочная активность математиков находила свое выражение в оживленной переписке ученых и в деятельности дискуссионных кружков. Основной заслугой иных ученых было то, что они являлись как бы центрами научных связей. Более всего известен в этом отношении Марен Мерсенн, чье имя как математика сохранилось в термине «числа Мерсенна». В переписке с ним состояли Декарт, Ферма, Дезарг, Паскаль и многие другие ученые[2]). Из дискуссионных кружков ученых вырастали академии. Они возникали в некотором роде как оппозиция университетам. Университеты развивались в период схоластики (за некоторыми исключениями, как Лейденский университет) и оставались покровителями средневекового подхода, требовавшего изложения науки в застывших

') Pascal B. Oeuvres.—Paris, 1908—1914.— T. 12.—P. 9; T. 13 —P. 141—155.

[2]) «Сообщить Мерсепну о каком-либо открытии означало опубликовать его для всей Европы»,— пишет Босманс (см. сноску на с. 132).

формах. Новые академии, напротив, были проникнуты новым духом исследований. Они типичны «для этого времени, опъяпенного обилием новых знаний, занятого искоренением изживших себя суеверий, порывающего с традициями прошлого, лелеющего самые неумеренные надежды на будущее. Тогда отдельный ученый научился быть довольным и гордым тем, что он добавил бесконечно малую частицу к общей сумме знаний; короче говоря, тогда возник современный ученый»[3]). Первая академия была основана в Неаполе (1560г.), за ней последовала Accademia del Lincei («Академия рысьих») в Риме (1603 г.). Лондонское королевское общество существует с 1662 г., Французская академия — с 1666 г. Валлис был членом-учредителем королевского общества; в первом составе членов Французской академии был Гюйгенс.

5. Наряду с книгой Кавальери одним из наиболее важных произведений этого «периода предтеч» была «Арифметика бесконечных» (Arithmelica infinitorum, 1655 г.) Валлиса. Ее автор с 1643 г. до своей смерти в 1703 г. был профессором геометрии в Оксфорде. Уже название книги показывает, что Валлис хотел пойти дальше, чем Кавальери с его «Геометрией неделимых»: Валлис хотел применить не геометрию древних, а новую «арифметику» (алгебру). Валлнс был первым математиком, у которого алгебра по-настоящему переросла в анализ. Методы обращения с бесконечными процессами, которыми пользовался Валлис, часто были примитивны, но он получал новые результаты: он вводил бесконечные ряды и бесконечные произведения и весьма смело обращался с мнимыми выражениями, с отрицательными и дробными показателями.

Он писал ∞ вместо 1/0 (и утверждал, что $-1>\infty$). Характерным для него результатом является разложение

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots}$$

Валлис был только одним из целого ряда блестящих представителей этого периода, обогащавших математику одним открытием за другим. Движущей силой в этом расцвете творческой науки, не имевшем себе равного со времен величия Греции, было не только то, что новой техникой можно было легко пользоваться. Многие крупные мыслители искали большего — «общего метода», который иной раз понимали в ограниченном смысле, как метод

[1]) Ornstein M. The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century.—Chicago, 1913.

Христиан Гюйгенс (1629—1695)

математики, иной раз понимали шире — как метод познания природы и создания новых изобретений. Это было причиной того, что в рассматриваемую эпоху все выдающиеся философы были математиками и все выдающиеся математики были философами. В поисках новых изобретений иногда непосредственно приходили к математическим открытиям. Знаменитым примером является работа «Маятниковые часы» (Horologium Oscillalorium, 1673г.) Христиана Гюйгенса. В ней в поисках лучшего способа измерения времени рассмотрены не только маятниковые часы, но изучаются также эволюты и эвольвенты плоской кривой.

Гюйгенс был голландцем, человеком зажиточным и в течение ряда лет жил в Париже. Он был столь же выдающимся физиком, как и астрономом, создал волновую теорию света и выяснил, что у Сатурна есть кольцо. Его книга о маятниковых часах оказала влияние на Ньютона (см. Principia). Для периода до Ньютона и Лейбница наряду с «Арифметикой» Валлиса эта книга представляет анализ в его наиболее развитой форме. Письма и книги Валлиса и Гюйгенса изобилуют новыми открытиями: спрямлениями кривых, квадратурами, построением обверток. Гюйгенс исследовал трактрису, логарифмическую кривую, цепную линию и установил, что циклоида — таутохронная кривая. Несмотря на это обилие результатов, многие из которых были получены уже после того, как Лейбниц опубликовал свое исчисление, Гюйгенс целиком принадлежит к периоду предтеч. Он признавался Лейбницу, что никогда не был в состоянии освоиться с его методом. Подобно этому Валлис никогда не чувствовал себя в своей тарелке, пользуясь обозначениями Ньютона. Надо сказать еще, что Гюйгенс был одним из немногих среди больших математиков семнадцатого века, кто заботился о строгости: его методы всегда были вполне архимедовыми.

6. Работы математиков этого периода охватывали много областей, новых и старых. Они обогатили оригинальными результатами классические разделы, пролили новый свет на прежние области и создавали даже совершенно новые области математических исследований. Примером первого рода может служить то, как Ферма изучал Диофанта. Примером второго рода является новая интерпретация геометрии Дезарга. Вполне новым творением была математическая теория вероятностей.

Диофант стал доступным для читающих на латинском языке в 1621 г.[1]). В своем экземпляре этого перевода Ферма сделал свои знаменитые заметки на полях (опубликованы сыном Ферма в 1670г.). Среди них мы находим «великую» теорему Ферма о том, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ невозможно при целых положительных значениях *x, y, z,* если $n>2$,— в 1847г. это привело Куммера к его теории идеальных чисел. Доказательства, пригодного для всех *n,* до сих пор нет, хотя теорема несомненно верна для большого числа значений n[2]). // считается, что она доказана в 1995 Эндрю Уалльзом- Matigor

Ферма написал на полях против 8-й задачи II книги Диофанта «Разделить квадратное число на два других квадратных числа» следующие слова: «Разделить куб на два других куба, четвертую степень или вообще какую-либо степень выше второй на две степени с тем же обозначением невозможно, и я нашел воистину замечательное доказательство этого, однако поля слишком узки, чтобы поместить его». Если Ферма имел такое замечательное доказательство, то за последующие три столетия напряженных исследований такое доказательство не удалось получить. Надежнее допустить, что даже великий Ферма иногда ошибался.

В другой заметке на полях Ферма утверждает, что простое число вида 4n+1 может быть одним и только одним образом представлено как сумма двух квадратов. Эту теорему позже доказал Эйлер. Еще одна «теорема Ферма», которая утверждает, что $a^{p-1}-1$ делится на *p,* когда *p* — простое число и *a* не делится на *p,* высказана в письме от 1640 г.; эту теорему можно доказать элемен

') Первые издания латинских переводов: Евклид—1482; Птолемей — 1515; Архимед — 1558; Аполлоний I—IV — 1566, V—VII — 1661; Папп — 1589; Диофант — 1621

[2]) См. Vandiver H. S. // Amer. Math. Monthly.— 1946.— V 53.— P. 555—578.

тарными средствами. Ферма был также первым, кто утверждал, что уравнение $x^2–Ay^2=1$ — целое и не квадрат) имеет сколько угодно целых решений.

Ферма и Паскаль стали основателями математической теории вероятностей. Постепенное формирование интереса к задачам, связанным с вероятностями, происходило прежде всего под влиянием развития страхового дела, но те частные вопросы, которые побудили больших математиков поразмыслить над этим предметом, были поставлены в связи с играми в кости и в карты. Как выразился Пуассон, «задача, относившаяся к азартным играм и поставленная перед суровым янсенистом светским человеком, была источником теории вероятностей»[1]). Этим светским человеком был кавалер де Мере, который обратился к Паскалю с вопросом по поводу так называемой «задачи об очках». Паскаль завязал переписку с Ферма по поводу этой задачи и родственных вопросов, и они вдвоем установили некоторые из основных положений теории вероятностей (1654г.). Когда Гюйгенс приехал в Париж, он узнал об этой переписке и попытался дать свое собственное решение, в результате чего появилась его книга «О расчетах при азартных играх» (De raliociniis in hido aleae, 1657г.), первый трактат по теории вероятностей. Следующие шаги были сделаны де Виттом и Галлеем, которые составили таблицы смертности (1671, 1693 гг.).

[8] «Суровый янсепист» (то есть последователь Корнелия Янсена (1585—1636), голландского богослова)— это Блез Паскаль. Надо сказать, что приведенное заявление Пуассона о возникновении теории вероятностей грешит против истины в нескольких пунктах. «Светский человек», де Мере, отнюдь не был азартным игроком, он серьезно интересовался наукой, и не случайно его обращение к Паскалю. Вопросы, связанные с вычислением вероятности результата при различных играх, не раз ставились в средневековой литературе за столетия до того, как Мере обратился к Паскалю, и решались иной раз верно, иной раз неверно. В частности, среди ближайших предшественников Паскаля и Форма — Тарталья и Галилей. Но решение таких вопросов могло стать поводом для создания особой теории, затем целой математической дисциплины только под влиянием серьезных запросов практики. Кроме указанного в тексте влияния запросов страхового дела (первые страховые общества появляются в четырнадцатом веке в Италии, Фландрии, Нидерландах, в шестнадцатом — семнадцатом веках страхование судов и от пожара распространено почти во всех странах Западной Европы), задачи на вычисление вероятностей ставили статистика народонаселения и теория методов обработки наблюдения. Все это связано с возникновением новых экономических

') P o i s s o n S. D. Recherches sur la probabilite des jugements,— Pans, 1837,— P. 1,

Блез Паскаль (1623—1662)

отношений и с новыми научными проблемами. Только благодаря этому решение вопросов, относящихся к азартным играм, представляющим удобную и до сих пор используемую модель для анализа ряда понятий теории вероятностей, могло систематически привлекать внимание математиков и стать поводом для развития новой науки. Это подтверждается и словами Гюйгенса в его книге «О расчетах в азартной игре», указанной в тексте: « .при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории глубокой и весьма интересной». См. в связи с отим книгу: Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк.— М : 1967.

Блез Паскаль был сыном Этьена Паскаля, корреспондента Мерсенна; кривая «улитка Паскаля» названа в честь Этьена. Блез быстро развивался под присмотром своего отца, и уже в шестнадцатилетнем возрасте он открыл «теорему Паскаля» о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Эта теорема была опубликована в 1641 г. на одном листе бумаги и повлияла на Дезарга. Через несколько лет Паскаль изобрел счетную машину. Когда ему было двадцать пять лет, он решил поселиться как янсенист в монастыре Пор-Рояль и вести жизнь аскета, но продолжал при этом уделять время науке и литературе. Его трактат об «арифметическом треугольнике», образованном биномиальными коэффициентами и имеющем применение в теории вероятностей, появился посмертно в 1664 г. Мы уже упоминали о его работах по интегрированию и о его идеях относительно бесконечного и бесконечно малого, которые оказали влияние на Лейбница. Паскаль первый придал удовлетворительную форму принципу полной индукции [1]).

Жерар Дезарг был архитектором в Лионе. Он автор книги о перспективе (1636г.). Его брошюра с любопытным названием «Первоначальный набросок попытки ра

') Freudenthal H. / Archives intern. des Sciences.— 1953.— V. 22,— P. 17—37.

зобраться в том, что получается при встрече конуса с плоскостью»[1]) (1639 г.) содержит некоторые из основных понятий синтетической геометрии такие, как точки на бесконечности, инволюции, полярные соотношения,— все это на курьезном ботаническом языке. Свою «теорему Дезарга» о перспективном отображении треугольников он обнародовал в 1648 г. Плодотворность этих идей в полной мере раскрылась лишь в девятнадцатом столетии.

Исаак Ньютон (1642—1727)

7. Общий метод дифференцирования и интегрирования, построенный с полным пониманием того, что один процесс является обратным по отношению к другому, мог быть открыт только такими людьми, которые овладели как геометрическим методом греков и Кавальери, так и алгебраическим методом Декарта и Виллиса. Такие люди могли появиться лишь после 1660 г., и они действительно появились в лице Ньютона и Лейбница. Очень много написано по вопросу о приоритете этого открытия, но теперь установлено, что оба они открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон первым открыл анализ (в 1665— 1666 гг.), Лейбниц в 1673—1676гг., но Лейбниц первый выступил с этим в печати (Лейбниц в 1684—1686гг., Ньютон в 1704—1736гг. (посмертно)). Школа Лейбница была гораздо более блестящей, чем школа Ньютона.

Исаак Ньютон был сыном землевладельца в Линкольншире. Он учился в Кембридже, возможно, что у Исаака Барроу, который в 1669 г. передал ему свою профессорскую кафедру (примечательное явление в академической жизни), так как Барроу открыто признал превосходство Ньютона. Ньютон оставался в Кембридже до 1696 г.,

') «Brouillon projet d'une atteinte aux evenements des rencontres d'un cone avec un plan».

когда он занял пост инспектора, а позже начальника монетного двора. Его исключительный авторитет в первую очередь основан на его «Математических принципах натуральной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687 г.), огромном томе, содержащем аксиоматическое построение механики и закон тяготения — закон, управляющий падением яблока на землю и движением Луны вокруг Земли. Ньютон строго математически вывел эмпирически установленные законы Кеплера движения планет из закона тяготения обратно пропорционально квадрату расстояния и дал динамическое объяснение приливов и многих явлений при движении небесных тел. Он решил задачу двух тел для сфер и заложил основы теории движения Луны. Решив задачу о притяжении сфер, он тем самым заложил основы и теории потенциала. Его аксиоматическая трактовка требовала абсолютности пространства и абсолютности времени.

Трудно разглядеть за геометрической формой его доказательств, что их автор полностью владел анализом, который он называл теорией флюксий. Ньютон открыл свой общий метод в течение 1665—1666 гг., когда он находился на своей родине, в деревне, спасаясь от чумы, поразившей Кембридж. К этому времени относятся его основные идеи о всемирном тяготении, а также о сложном составе света. «В истории науки нет равного примера таких достижений, как достижения Ньютона в течение этих двух золотых лет»,— заметил профессор Мор [1]).

Открытие Ньютоном флюксий стоит в тесной связи с его изучением бесконечных рядов по «Арифметике» Валлиса. При этом Ньютон обобщил биномиальную теорему на случаи дробных и отрицательных показателей и таким образом открыл биномиальный ряд. Это в свою очередь значительно облегчило ему распространение его теории флюксий на «все» функции, будь они алгебраическими или трансцендентными. «Флюксия», которая обозначалась точкой, помещенной над буквой, была конечной величиной, скоростью, а буквы без точки обозначали «флюэпты». Мы приведем здесь пример того, как Ньютон разъяснял свой метод (из «Метода флюксий», 1736 г.). Переменные, являющиеся флюэнтами, обозначены через *v, x, y, z,* «а скорости, с которыми каждая

') More L. T. Isaac Newton, A Biography.—N. Y.; London, 1934.— P. 41.

флюэнта увеличивается в силу порождающего движения (которые я могу назвать флюксиями или попросту скоростями или быстростями), я буду изображать теми же буквами с точкой, а именно v^*, x^*, y^*, z^*. Бесконечно малые у Ньютона именуются «моментами флюксий» и обозначаются через $v'o$, $x'o$, $y'o$, $z'o$, где o — «бесконечно малое количество». Ньютон продолжает:

«Итак, пусть дано уравнение $x^3 - ax^2 + axy - y = 0$, подставим $x + xo$ вместо x, $y + y\,o$ вместо y, тогда мы получим

$x^3 + 3x^2xo + 3xxoxo + x^3o^3 - ax^2 - 2axxo - axoxo + axy + ayxo + axoyo + axyo - y^3 - 3y^2yo - 3yyoyo - y^3o^3 = 0$.

Но согласно допущению $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, и, после исключения этого уравнения и деления остающихся членов на о, у нас останется

$3x^2x - 2axx + ayx + axy - 3y^2y + 3xxo - axxo + axyo - 3yyyo + x^3oo - y^3oo = 0$.

Но поскольку нуль мы считаем бесконечно малым, так что он может представлять моменты количеств, то члены, которые умножены на него, суть ничто по сравнению с остальными; поэтому я отбрасываю их, и у нас остается

$3x^2x^* - 2axx^* + ayx^* + axy^* - 3y^2y^* = 0$».

Этот пример показывает, что Ньютон первоначально считал свои производные скоростями, но он показывает также, что способ выражения Ньютона не был вполне определенным. Являются ли символы «о» нулями? или бесконечно малыми? или это конечные числа? Ньютон пытался разъяснить свою точку зрения с помощью теории «первых и последних отношений», которую он ввел в своих «Началах» и которая включала в себя понятие предела, но в таком виде, что применять его было трудно.

«Эти последние отношения исчезающих количеств не являются в точности отношениями последних количеств, а пределами, к которым постоянно приближаются отношения беспредельно убывающих количеств и к которым они приближаются более чем на любую заданную разность, но никогда не переходят через них и в действи тельности не достигают их ранее, чем эти количества не уменьшатся до бесконечности» («Начала», книга I, отдел I, последняя схолия).

«Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно приближаются к равенству н до истечения этого времени подходят одно к другому ближе, чем па любую заданную разность, становятся в конце концов равными» («Начала», книга I, отдел I, лемма I).

Это далеко не ясно, трудности, связанные с пониманием ньютоновой теории флюксий, повлекли за собой много недоразумений и вызвали суровую критику епископа Беркли в 1734 г. Эти недоразумения были устранены лишь после четкого установления современного понятия предела.

Ньютон писал также о конических сечениях и о плоских кривых третьего порядка. В «Перечислении линий третьего порядка» (Enumeratio linearum tertii ordinis, 1704 г.) он дал классификацию плоских кривых третьей степени на 72 вида, исходя из своей теоремы о том, что каждую кубическую кривую можно получить из «расходящейся параболы» $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ при центральном проектировании одной плоскости на другую. Это было первым важным новым результатом, полученным путем применения алгебры к геометрии, так как все предыдущие работы были просто переводом Аполлония на алгебраический язык. Ньютону принадлежит также метод получения приближенных значений корней численных уравнений, который он разъяснил на примере уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$, получив $x \approx 2{,}09455147$.

Трудно оценить влияние Ньютона на его современников из-за того, что оп постоянно колебался, публиковать ли ему свои открытия. Впервые он проверил закон всемирного тяготения в 1665—1666гг., но сообщил об этом лишь тогда, когда представил в рукописи большую часть своих «Начал» (1686г.). Его «Всеобщая арифметика» (Arithmetica universalis), составленная из лекций по алгебре, прочитанных между 1673 и 1683 гг., была напечатана в 1707г. Его работа о рядах, восходящая к 1669г., была предметом письма к Ольденбергу в 1676г., а появилась в печати в 1711г. Его работа о квадратуре кривых (1671 г.) была напечатана только в 1704 г., и тогда впервые миру стала известна теория флюксий. «Метод флюксий» появился только после смерти Ньютона, в 1736 г.

8. Готфрид Вильгельм Лейбниц родился в Лейпциге, а большую часть жизни провел при ганноверском дворе, на службе у герцогов, один из которых стал английским королем под именем Георга I. Лейбниц был еще более правоверным христианином, чем другие мыслители его столетия. Кроме философии, он занимался историей, теологией, лингвистикой, биологией, геологией, математикой, дипломатией и «искусством изобретения». Одним из первых после Паскаля он изобрел счетную машину, пришел к идее парового двигателя, интересовался китайской философией и старался содействовать объединению Германии. Основной движущей пружиной его жизни были поиски всеобщего метода для овладения наукой, создания изобретений и понимания сущности единства вселенной. «Общая наука» (Scicntia universalis), которую он пытался построить, имела много аспектов, и некоторые из них привели Лейбница к математическим открытиям. Его поиски «всеобщей характеристики» привели его к занятиям перестановками, сочетаниями и к символической логике; поиски «всеобщего языка», в котором все ошибки мысли выявлялись бы как ошибки вычислений, привели его не только к символической логике, но и к многим новшествам в математических обозначениях. Лейбниц — один из самых плодовитых изобретателей математических символов. Немногие так хорошо понимали единство формы и содержания. На этом философском фоне можно понять, как он изобрел анализ: это было результатом его поисков «универсального языка», в частности языка, выражающего изменение и движение.

Готфрид Вильгельм Лейбниц
(1646-1716)

Лейбниц нашел свое новое исчисление между 1673 и 1676 гг. под личным влиянием Гюйгенса и в ходе изучения Декарта и Паскаля. Его подстегивало то, что он знал, что Ньютон обладал подобным методом. Подход Ньютона был в основном кинематическим; подход Лейбница был геометрическим: он мыслил в терминах «характеристического треугольника» *(dx, dy,* ds), который уже появлялся в нескольких других работах, а именно у Паскаля[1]) и в «Геометрических лекциях» (Geometrical Lectures, 1670г.) Барроу. Впервые анализ в форме Лейбница был изложен им в печати в 1684 г. в шестистраничной статье в Ada Eruditorum, математическом журнале, который был основан при его содействии в 1682 г.

Характерно название этой статьи: «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». Изложение было трудным и неясным, но статья содержала наши символы dx, dy и правила дифференцирования, включая $d(uv)=udv + vdu$ и дифференцирование дроби, а также условие $dy = 0$ для экстремальных значений и $d^2y = 0$ для точек перегиба. За этой статьей последовала в 1686 г. другая статья с правилами интегрального исчисления и с символом $\int$ (она была написана в форме рецензии). Уравнение циклоиды было дано в виде

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

С появлением этих статей начался исключительно плодотворный период математической деятельности. После 1687г. к Лейбницу присоединились братья Бернулли, которые с жадностью осваивали его методы. Еще до 1700г. они втроем открыли значительную часть нашего основного курса анализа и несколько важных разделов в более сложных областях, включая решение некоторых задач вариационного исчисления. В 1696 г. появился первый учебник по анализу. Он был написан маркизом Лопиталем, учеником Иоганна Бернулли, опубликовавшим лекции своего учителя по дифференциальному исчислению в книге «Анализ бесконечно малых» (Analyse des infmiment petits). В этой книге мы находим так называемое

') Термин «характеристический треугольник», повидимому, впервые был применен Лейбницем, который нашел его при чтении работы Паскаля «Трактат о синусах четверти круга», составляющей часть писем к Деттопвилю (1658 г.) Он встречается уже у Спеллиуса в Tiphys Batavus.— 1624,— P. 22—25.

«правило Лопиталя» для нахождения предельного значения дроби, оба члена которой стремятся к нулю[1]).

Нашими обозначениями в анализе мы обязаны Лейбницу, ему принадлежат и названия «дифференциальное исчисление» и «интегральное исчисление»[2]). Благодаря его влиянию стали пользоваться знаком « = » для равенства и знаком «•» для умножения. Лейбницу принадлежат термины «функция» и «координаты», а также забавный термин «оскулирующий» (целующий). Ряды

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

носят имя Лейбница, хотя не он первый их открыл. (По-видимому, это сделал Джеймс Грегори, шотландский математик, который пытался также доказать невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки.)

Разъяснения Лейбница относительно оснований анализа страдали той же неопределенностью, как и разъяснения Ньютона. Иногда его *dx, dy* были конечными величинами, иногда же величинами меньше любого определенного количества и все-таки не нули. Не имея строгих определений, он прибегал к аналогиям, скажем, с соотношением между радиусом Земли и расстоянием до неподвижных звезд. В вопросах, касающихся бесконечного, он менял свою точку зрения; в одном из своих писем (к Фуше, 1693 г.) он принимал существование актуальной бесконечности, чтобы преодолеть трудности, указанные Зеноном, и хвалил Григория де Сен Венсана, который вычислил то место, где Ахиллес нагонит черепаху. Неясности у Ньютона вызвали критику Беркли, неясности у Лейбница вызвали выступление Бернарда Ньювентейта, бургомистра небольшого города вблизи Амстердама (1694 г.). Как критика Беркли, так и критика Ньювентейта имела свои основания, но и та и другая были целиком негативны. Их авторы не были в состоянии

') Это правило сообщил Лопиталю Иоганн Бернулли в письме, которое лишь недавно было опубликовано: Bernoulli J. Briefwecbsel — Bd 1.— Basel, 1955.

[2]) Лейбниц сначала предложил название «сумматорное исчисление», но в 1696г. Лейбниц и Иоганн Вернулли пришли к соглашению относительно термина «интегральное исчисление». Современный анализ вернулся к первопачальной терминологии Лейбница. См. также Cajori F. Leibniz, the Master Builder of Mathematical Notations // Isis.— 1925.—V. 7.—P. 412—429.

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z — y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z-y+w+x}$ seu dv aequ. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro — z scribi — dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

LEIBNIZ'S FIRST PAPER ON THE CALCULUS (As reprinted by C. I. Gerhardt, 1858)

Первая страница первой работы Лейбница по анализу бесконечно малых (по изданию 1858 г.)

строго обосновать анализ, но все-таки такая критика побудила к дальнейшей конструктивной работе. Это особенно относится к остроумным замечаниям Беркли.

ЛИТЕРАТУРА

Собрания сочинений (на языке оригинала) Декарта, Паскаля, Гюйгенса, Галилея, Торричелли и Ферма имеются в новых изданиях. Сочинения Лейбница были изданы (неполностью) в середине девятнадцатого века. Ньютона — еще раньше и также неполностью. В старых изданиях имеются собрания сочинений братьев Бернулли. Осуществляется повое издание сочинений Лейбница, Берпулли, начато издание архива Ньютона. «Королевское общество» взяло на себя задачу издать письма Ньютона. Четыре тома уже вышли в свет — Correspondence of Isaac Newton/Ed. H. W. Turubull.— Cambridge, 1959—1965. Об открытии дифференциального и интегрального исчисления см. В о у е г С. В. The Concepts of the Calculus — N Y., 1939. 2nd ed — N. Y., 1959, особенно главы IV и V. Там же большая библиография.

Об историкотехническом фоне см.: G г о s s т а п H. Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophic und die Mamifaktur // Z. f. Sozialforschung.— 1935,Bd 4.S. 161231. M е г t о п R. K. Science, Technology and Society in the Seventeenth Century / Osiris.— 1938.— V. 4.

О ведущих математиках см.:

Scott J. F. The Mathematical Wors of John Wallis D. D., F. R. S.— London, 1938.

Prag A. John Wallis. Zur Ideengeschichte der Mathematik im 17 Jahrhundert Ц Quellen und Studien B[1].— 1930.— S 381—424. См. также Num T. P. / Math. Gaz.— 1910/1911.—V. 5. К р а м а р Ф. Д. Вопросы обоснования анализа в трудах Валлиса и Ньютона If Историкоматематические исследования, вып III.—М.: Гостехиздат, 1950.—С. 486—508; Крамар Ф. Д. Интеграционные методы Джона Валлиса // Историкоматематические исследования, вып. XIV.— М.: Физматгпз, 1961.— С. 11—100. Barrow I. Geometrical Lectures/Англ, перевод и редакция Чайдла (J. M. Child).—Chicago, 1916.

Bell A. E. Christiaan Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century.— London, 1948.

More L. T. Isaac Newton, A Biography.—N. Y.; London, 1934.

В а в п л о в С. И. Исаак Ньютон.— 2е изд.— М.; Л., 1945. «Principia» Пыотопа переведены па ряд языков. Русский перевод, с примечаниями п пояснениями, выполнен А. Н. Крыловым и более доступен во втором издании, в качестве т. VII собрания трудов А. Н. Крылова (М.; Л., 1936). Кроме того, на русском языке изданы:

Ньютон И. Математические работы/Перевод с лат., вступительная статья и комментарии Д. Д. МордухайБолтовского.— М.; Л.: ОНТИ. 1937.

Ньютон И. Всеобщая арифметика/Перевод, вступительная статья и комментарии А. П. Юшкевича.— М.; Л., 1948.

Сборники работ Ньютона были изданы обществами History of Science Soc. (Baltimore, 1928), Math. Assoc. (London, 1927), Roy. Soc. (Cambridge, 1947).

На русском языке вышли:

Исаак Ньютон (1643—1727)/Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения.— М.; Л., 1943.

Московский университет — памяти Исаака Ньютона.— М., 1946.

См. также

Turn bull H. W. The Mathematical Discoveries of Newton.— Glasgow, 1945.

Первая статья Лейбница по анализу 1684 г. и извлечения из других его математических работ в русском переводе А. П. Юшкевича см. в УМН.—1948.—Т. 3, № 1(23).—С. 165—205; Юшкевич А. П. Лейбниц и основание анализа бесконечно малых // УМН.— 1948.—Т. 3, № 1(23).—С. 150—165.

Child J. M. The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz; переводы с лат.— Chicago, 1920. H o f m a n n J. E. Die Enlwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik.— Munchen, 1949.

Другие работы того же автора о математиках семнадцатого столетия приведены в обширной библиографии его книги (см. с. 15).

Milhaud G. Descartes savant.— Paris, 1921. Ta ton R.—L'oeuvre mathematique de G. Desargues.— Paris, 1951.

Turnbull H. W. (изд.).—James Gregory tercentenary memorial volume.—London, 1939: см. Dehn M., Hellinger E. D. / Amer. Math. Monthly.— 1943.— Bd 50 — S. 149—163.

Haas K. Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde / Centaurus.— 1956.— Bd 4.— S. 235—284. Whiteside D. T. Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century // Archive for history of exact sciences.— 1961,—V. 1.—P. 179—388.

T o e p 1 i t z 0. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, I.— Berlin, 1949.

Босманс (H. Bosnians) опубликовал работы о Такке (Isis, 1927— 1928.—V. 9.—P. 66—83); Стевине (Mathesis.—1923.—V. 37; Ann. Soc. Sci. Bruxelles.—1913.—V. 37.— P. 171—199; Biographie national de Belgique); Делла Фае (Mathesis.—1927.—V. 41.— S. 5—11), Сен Венсане (Mathesis.— 1924.—V. 38.—P. 250—256),

См. Также Tannery, Paul. Nations historiques / Tannery J. Notions de Mathematiques. Paris, 1903, с. 324—348. Hofmann J. E. Franz van Schooten der Jtinhere,— Wiesbaden, 1962. J. James Gregorys frtihe Schriften zur Infinites!.— Mitt, aus dem math. Seminar Giessen.— 1957,—

S c r i b a C. malrechnung // Bd 55.— P. 80.

Montel P. Pascal mathematicien.—Paris, 1951.

S t r u i k D. J. Het laud van Stevin en Huygens.— Amsterdam, 1958.

Галилео Галилей (1564—1642): Сборник к трехсотлетию со дня смерти.— М.; Л., 1943.

Кузнецов Б. Г. Галилей.— М., 1964.

Асмус В.Ф. Декарт.— М., 1956.

Франкфурт У. И., Френк А.М. Гюйгенс.— М, 1962. В е с е л о в с к и и И. И. Гюйгенс.— М., 1956.

Юшкевич А. П. Блез Паскаль как ученый // Вопросы истоестествознания и рии техники.— 1959.— Т. 7.— С. 75—85.

На русском языке см. также

Кеплер, Иоганн. Новая стереометрия винных бочек/Со статьей М. Я. Выгодского.— М.; Л., ОНТИ, 1935.

Галилей, Галилео. Беседы.../Предисловио и примечания А И Долгова.М ; Л.: ГТТИ 1934.

Галилей, Галилео. Изоранные труды, тт. 1—П.—М., iyt>i.

Ковальери, Бопавентура. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного/Вступительная статья и комментарии С. Я. Лурье.— М.; Л.: Гостехиздат 1940.

Декарт Р. Геометрия/Под ред. и со статьей А П. Юшкевича «Декарт и математика».— М ; Л.: ГОНТП, 1938

В этой же книге перевод работы Ферма «Введение в изучение геометрических мест на плоскости и в пространстве».

Декарт Р. Рассуждение о методе (с приложениями: Метеоры, Геометрия)/Редакция и комментарий Г. Г. Слюсарева и А П Юшкевича,— М.; Л., 1953.

Г ю и г ен с Х. Три мемуара по механике/Редакция и примечания К. К. Баумгарта — М.; Л., 1951.

Лопиталь Г. Анализ бесконечно малых/Редакция и вступительная статья А. П. Юшкевича.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.

Глава VII

ВОСЕМНАДЦАТОЕ СТОЛЕТИЕ

1. В восемнадцатом веке деятельность математиков сосредоточивалась в области анализа и его приложений к механике. Самые крупные фигуры можно расположить как бы в виде генеалогического древа, указывающего на их интеллектуальное родство:

Лейбниц (1646—1716)

Братья Бернулли: Якоб (1654—1705), Иоганн (1667—1748)

Эйлер (1707–1783)

Лагранж (1736—1813)

Лаплас (1749—1827)

С трудами этих ученых тесно связана деятельность группы французских математиков, прежде всего Клеро, Даламбера и Мопертюи, которые в свою очередь были связаны с философами эпохи Просвещения. К ним надо добавить швейцарских математиков Ламберта и Даниила Бернулли. Научная деятельность в основном была сосредоточена в академиях, среди которых выдающееся место занимали Парижская, Берлинская и Петербургская. Преподавание в университетах имело меньшее значение, а то и никакого. Это был период, когда некоторые из ведущих европейских стран управлялись теми, кого, смягчая выражения, называют просвещенными деспотами: это Фридрих II, Екатерина II, пожалуй, и Людовики XV и XVI. Притязания этих деспотов на славу частично основаны на том, что они любили окружать себя учеными людьми. Такая любовь была чем-то вроде интеллектуального снобизма, но он умерялся в известной мере пониманием значения естествознания и прикладной математики в деле улучшения мануфактур и повышения боеспособности вооруженных сил. Например, говорят, что отличные качества французского флота связаны с тем, что при кон струировании фрегатов и линейных кораблей кораблестроители частично основывались на математической теории. Работы Эйлера изобилуют применениями к вопросам, имеющим значение для армии и флота. Астрономия продолжала играть свою выдающуюся роль в качестве приемной матери математических исследований, пользуясь покровительством королей и императоров.

2. В Швейцарии Базель, свободный имперский город с 1263 г., уже долгое время был средоточием науки. Еще во времена Эразма его университет был важным центром. Науки и искусства процветали в Базеле, как и в голландских городах, под управлением купеческого патрициата. К этому базельскому патрициату принадлежала купеческая семья Бернулли, которая в предыдущем столетии переехала туда из Антверпена, когда этот город был захвачен испанцами. С конца семнадцатого столетия до настоящего времени эта семья в каждом поколении давала ученых. Воистину во всей истории науки трудно найти семью, поставившую более внушительный рекорд. Родоначальниками этой династии были два математика, Якоб и Иоганн Бернулли. Якоб изучал теологию, Иоганн изучал медицину, но когда в лейпцигских Acta Eruditorum появились статьи Лейбница, оба они решили стать математиками. Они стали первыми выдающимися учениками Лейбница. В 1687 г. Якоб занял кафедру математики в Базельском университете, где он преподавал до своей смерти в 1705 г. Иоганн в 1697 г. стал профессором в Гронингене (Голландия), а после смерти брата перешел на его кафедру в Базеле, где преподавал сорок три года. Якоб начал переписываться с Лейбницем в 1687 г. Затем, постоянно обмениваясь мыслями с Лейбницем и между собой, не раз вступая в ожесточенное соперничество друг с другом, оба брата начали открывать те сокровища, которые содержались в путепролагающем достижении Лейбница. Список их результатов длинен и содержит не только многое из того, что сейчас входит в ваши элементарные учебники дифференциального и интегрального исчисления, но и интегрирование ряда обыкновенных дифференциальных уравнений. Якобу принадлежит применение полярных координат, исследование цепной линии (уже рассмотренной Гюйгенсом и другими), лемнискаты (1694г.) и логарифмической спирали. В 1690г. он нашел так называемую изохрону, которую Лейбниц в 1687 г. определил как кривую, вдоль которой тело падает с постоянной скоростью,— оказалось, что это

полукубическая парабола. Якоб также исследовал изопериметрические фигуры (1701 г.), что привело его к задаче из вариационного исчисления. Логарифмическая спираль, которая обладает свойством воспроизводиться при различных преобразованиях (ее эволюта — тоже логарифмическая спираль, и они обе по отношению к полюсу являются подошвенной кривой и каустикой), настолько обрадовала Якоба, что он пожелал, чтобы эту кривую вырезали на его могильном камне с надписью: eadem mutata resurgo[1]).

Якоб Бернулли был также одним из первых исследователей в теории вероятностей, и по этому предмету он написал «Искусство предположения» (Ars conjectandi) — книгу, опубликованную посмертно, в 1713 г. В ее первой части перепечатан трактат Гюйгенса об азартных играх, в остальных частях рассматриваются перестановки и сочетания, а главным результатом является «теорема Бернулли» о биномиальных распределениях. При рассмотрении треугольника Паскаля в этой книге появляются «числа Бернулли».

3. Работы Иоганна Бернулли тесно связаны с работами его старшего брата, и не всегда легко различить их результаты. Иоганна часто рассматривают как изобретателя вариационного исчисления вследствие его вклада в задачу о брахистохроне. Это — кривая быстрейшего спуска для материальной точки, которая движется в поле тяготения от заданной начальной к заданной конечной точке, кривая, которую исследовали Лейбниц и оба Бернулли в 1697 и в последующие годы. В это время они открыли уравнение геодезических линий на поверхности[2]). Решением задачи о брахистохроне является циклоида. Эта кривая решает также задачу о таутохроне — кривой, вдоль которой материальная точка в гравитационном поле достигает наинизшей точки за время, которое не зависит от исходной точки движения. Гюйгенс открыл это свойство циклоиды я использовал его для построения таутохронных часов с маятником (1673 г.), период колебания которого не зависит от амплитуды.

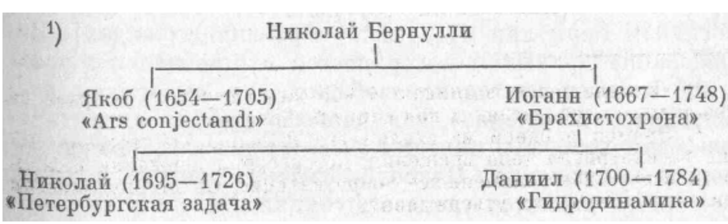
[1]) «Изменявшись, возникаю такой же». Впрочем, спираль на могильном камне выглядит как спираль Архимеда.

[2]) Ньютон в одной из схолий ею Principle (II, теорема 35) уже рассматривал тело вращения, которое при движении в жидкости испытывает наименьшее сопротивление. Он не опубликовал доказательства своих утверждений.

Леонард Эйлер (1707—1783)

В числе других Бернулли, повлиявших на развитие математики, есть два сына Иоганна: Николай и, особенно, Даниил'). Николай, как и Даниил, был приглашен в Петербург, незадолго до того основанный Петром Великим; там он пробыл не долго. Задача по теории вероятностей, которую он предложил, находясь в этом городе, известна как Петербургская задача (или, более выразительно, Петербургский парадокс). Этот сын Иоганна умер молодым, но другой сын, Даниил, дожил до глубокой старости. До 1777 г. он был профессором Базельского университета. Его плодовитая деятельность посвящена главным образом астрономии, физике и гидродинамике. Его «Гидродинамика» появилась в 1738 г., и одна из теорем этой книги, о гидравлическом давлении, носит его имя. В том же году он заложил основы кинетической теории газов; вместе с Даламбером и Эйлером он изучал теорию колебаний струн. Его отец и дядя развивали теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, Даниил же был пионером в области уравнений в частных производных.

4. Из Базеля вышел также самый плодовитый математик восемнадцатого столетия, если только не всех времен,— Леонард Эйлер. Его отец изучал математику под руководством Якоба Бернулли, а Леонард — под руковод



ством Иоганна. Когда в 1725 г. сын Иоганна Николай уехал в Петербург, молодой Эйлер последовал за ним и оставался в Петербургской академии до 1741 г. С 1741 по 1766 г. Эйлер находился в Берлинской академии под особым покровительством Фридриха II, а с 1766 до 1783 г. он снова в Петербурге, теперь уже под эгидой императрицы Екатерины. Он был дважды женат и имел тринадцать детей. Жизнь этого академика восемнадцатого столетия была почти целиком посвящена работе в различных областях чистой и прикладной математики. Хотя он потерял в 1735г. один глаз, а в 1766г.— второй, ничто не могло ослабить его огромную продуктивность. Слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. В течение его жизни увидели свет 530 его книг и статей; умирая, он оставил много рукописей, которые Петербургская академия публиковала в течение последующих 47 лет. Это довело число его работ до 771, но Густав Энестрем дополнил этот список до 886.

Эйлеру принадлежат заметные результаты во всех областях математики, существовавших в его время. Он публиковал свои открытия не только в статьях различного объема, но и во многих обширных руководствах, где упорядочен и кодифицирован материал, который собирали поколения. В некоторых областях изложение Эйлера было почти что окончательным. Например, наша нынешняя тригонометрия с ее определением тригонометрических величин как отношений и с принятыми в ней обозначениями восходит к «Введению в анализ бесконечных» (Introductio in analysin infinitorum, 1748 г.) Эйлера. Колоссальный авторитет его руководств привел к упрочению ряда его обозначений в алгебре и в анализе; Лагранж, Лаплас и Гаусс знали Эйлера и следовали за ним во всей своей деятельности.

«Введение» 1748 г. в своих двух томах охватывает немалое разнообразие вопросов. В нем содержится изложение бесконечных рядов, в том числе рядов для e^x, $\sin x$, $\cos x$ и соотношение $e^x = \cos x + i \sin x$ (уже открытое Иоганном Бернулли и другими, в различных видах). Исследование кривых и поверхностей с помощью их уравнений ведется настолько свободно, что мы можем рассматривать «Введение» как первый учебник аналитической геометрии. Мы находим здесь также алгебраическую теорию исключения. Наиболее увлекательными частями этой книги является глава о функции дзета и о ее связи с теорией простых чисел, равно как и глава о partitio numerorum (разбиении чисел на слагаемые) [1]).

Другим большим и богатым по содержанию руководством Эйлера было «Дифференциальное исчисление» (Institutions calculi differentiate, 1755 г.), за которым последовали три тома «Интегрального исчисления» (1nstitutiones calculi integralis, 17681774 г.). Здесь мы находим не только наше элементарное дифференциальное и интегральное исчисление, но также теорию дифференциальных уравнений, теорему Тейлора со многими приложениями, формулу суммирования Эйлера и эйлеровы интегралы В и Г. Раздел о дифференциальных уравнениях с его разграничением «линейных», «точных» и «однородных» уравнений все еще является образцом для наших элементарных учебников по этому предмету. «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736г.) Эйлера была первым учебником, в котором ньютоновская динамика материальной точки была развита аналитическими методами. За ней последовала «теория движения твердых тел» (1765 г.), в которой таким же образом трактуется механика твердых тел. Этот трактат содержит эйлеровы уравнения для тела, вращающегося вокруг точки. «Полное введение в алгебру» (1770г), написанное по-немецки и продиктованное слуге, стало образцом для многих позднейших учебников по алгеоре. В ней изложение доведено до теории уравнении третьей и четвертой степени.

В 1744 г появилось сочинение Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimivi proprietate gaudentes). Это было первое изложение вариационного исчисления, оно содержало эйлеровы уравнения и многие приложения, включая открытие того, что катеноид и прямой геликоид являются минимальными поверхностями. Многие другие результаты Эйлера вошли в его работы меньшего объема, содержащие немало драгоценностей, ныне мало известных. В числе более известных его открытий теорема связывающая число вершин *(V),* граней *(F)* и ребер *(E)* замкнутого многогранника $(V + F - E = 2)$[2]*),* эйлерова прямая в тре

[1]) См предисловие А Шпайзера к «Введению» в собрании сочинений Эйлера Opera Omnia I, t. 9 (1945). Имеется в русском переводе: Эйлер Л. Введение, т. I.— М 1960

[2]) Известная уже Декарту.

угольнике, кривые постоянной ширины (Эйлер называл их кривыми orbiformi) и эйлерова постоянная

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0.577216$$

Несколько статей посвящены занимательной математике (семь кёнигсбергских мостов, задача о шахматном коне), Одни лишь результаты Эйлера в области теории чисел (к его открытиям в эгой области принадлежит закон квадратичной взаимности) дали бы ему место в пантеоне славы.

Деятельность Эйлера в значительной мере была посвящена астрономии, причем особое внимание он уделял теории движения Луны, этому важному разделу задачи трех тел. Его «Теория движения планет и комет» (Theoria motus planetarum et cometarum, 1774г.) является трактатом по небесной механике. С этим трудом Эйлера связаны его исследования о притяжении эллипсоидов (1768 г.).

У Эйлера есть книги по гидравлике, по кораблестроению, по артиллерии. В 1769—1771 гг. появились три тома его «Диоптрики» (Dioptrica) с теорией преломления лучей в системе линз. В 1739 г. появилась его новая теория музыки, о которой говорили, что она слишком музыкальна для математиков и слишком математичка для музыкантов. Философское изложение Эйлера наиболее важных проблем естествознания в его «Письмах к одной немецкой принцессе» (написаны в 1760—1761гг.) остается образцом популяризации.

Огромная продуктивность Эйлера была и остается поводом для изумления и восхищения каждого, кто пытался изучать его труды,— задача не столь трудная, как это кажется, так как латынь Эйлера очень проста и его обозначения почти современны,— пожалуй, было бы лучше сказать, что наши обозначения почти эйлеровы! Можно составить длинный список известных открытий, приоритет в которых принадлежит Эйлеру, и перечень его идей, которые еще заслуживают разработки. Большие математики всегда признавали, что они обязаны Эйлеру многим. «Читайте Эйлера,— обычно говорил молодым математикам Лаплас,— читайте Эйлера, это наш общий учитель». А Гаусс выразился еще более определенно: «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить». Римап хорошо знал труды Эйлера, и неко торые из наиболее глубоких его произведений обнаруживают влияние Эйлера. Самым лучшим делом было бы издать переводы некоторых трудов Эйлера с современными комментариями.

5. Поучительно указать не только на то, что Эйлер внес в науку, но и на некоторые его слабости. В восемнадцатом столетии еще достаточно беззаботно обращались с бесконечными процессами и многое в трудах ведущих математиков этого периода производит на нас впечатление безудержного и восторженного экспериментирования. Экспериментировали с бесконечными рядами, с бесконечными произведениями, с интегрированием, с использованием таких символов, как 0, °°, √—1. Если многие из выводов Эйлера можно принять сегодня, то есть другие результаты, относительно которых надо делать оговорки. Например, мы принимаем утверждение Эйлера, что ln *n* имеет бесконечно много значений, которые все являются комплексными числами, за исключением того случая, когда *n* > 0, тогда одно из значений действительно. Эйлер пришел к этому выводу в письме к Даламберу (1747 г.), который утверждал, что ln(—1) = 0. Но мы не можем согласиться с Эйлером, когда он пишет, что 1 — 3 + 5 — 7 + ... = 0, или когда он из того, что

$n+n^2+\ldots=n/(1-n)$

и

$1+1/n+1/n^2+\ldots=n/(n-1)$

заключает, что

$\ldots+1/n^2+1/n+1+n+n^2+\ldots=0.$

Все же нам надо соблюдать осторожность и не критиковать слишком поспешно Эйлера за его обращение с расходящимися рядами: он попросту не всегда пользовался некоторыми из наших нынешних признаков сходимости или расходимости как критериями законности своих рядов. Многое в его считавшихся необоснованных работах о рядах было строго истолковано современными математиками.

[9] Есть достаточно оснований пойти дальше к «реабилитации» работ Эйлера, относящихся к теории рядов. Эйлер, как правило, исходил из принципа: «Сумма всякого (бесконечного) ряда есть значение того (конечного) выражения, из развертывания ко

торого возникает этот ряд». Этот принцип вызывал возражения и у современников Эйлера. Так, сохранилась переписка одного из оппонентов, Николая Бернулли, с Эйлером (1743 г.), в которой этот принцип обсуждается. Не приводя примеров, Н. Бернулли утверждал, что один и тот же ряд может получиться при развертывании различных выражений, следовательно, согласно принципу Эйлера, ему пришлось бы, вообще говоря, одновременно приписывать различные значения. Эйлер остался при убеждении, что «никогда один и тот же ряд не может возникнуть из разложения двух действительно различных конечных выражений» (письмо к Гольдбаху, 1745 г.), и Эйлер прав, потому что он имел в виду только степенные ряды, а его «конечные выражения» — аналитические функции. В понимании же того, что такое сумма ряда, Эйлер ближе к более широкому подходу математики двадцатого века, чем к ригоризму математиков эпохи Коши — Вейерштрасса. Эйлер полагал, что «каждый ряд должен обладать определенным значением. Однако, чтобы справиться со всеми возникающий здесь трудностями, следовало бы это значение не именовать суммой, поскольку с этим словом обычно связывают такие понятия, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места...». Приведя эти слова Эйлера, Г. Хэрди замечает: «Это — почти тот язык, которым мог бы пользоваться Чезаро или Борель»[1]). Больше того, Эйлер в вопросе о расходящихся рядах стоял на вполне современной точке зрения, когда писал в «Дифференциальном исчислении»: «И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии сумма. Действительно, если под суммой ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складываются. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают.... вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложение всех членов.

Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избегнем, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд... При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова «сумма» совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового определения не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений».

Вообще развитие учения о расходящихся рядах — весьма поучительный раздел истории математики, особенно в ее «понячийном» аспекте, п для первого ознакомления можпо рекомендовать цитированную выше книгу Г. Харди, содержащую, особенно во Введении и первой главе, много интересного исторического материала.

[1]) Харди Г. Расходящиеся ряды.М.: ИЛ, 1951.С.

Однако мы не можем восторгаться тем способом, которым Эйлер обосновывает анализ, вводя нули различных порядков. Бесконечно малая величина, писал Эйлер в «Дифференциальном исчислении» (1755 г.),— это действительно нуль,

$a \pm ndx = a$ [1]), $dx \pm (dx)^{n+1} = dx$,

$a\sqrt{dx} + C\,dx = a\sqrt{dx}$.

«Стало быть, существует бесконечно много порядков бесконечно малых величин, и хотя все эти величины равны нулю, следует четко отличать их друг от друга, если мы обращаемся к их взаимозависимости, выражающейся геометрическим отношением».

В целом вопрос об основании анализа оставался предметом обсуждения, равно как и все вопросы, относившиеся к бесконечным процессам. «Мистический период» в обосновании анализа (мы пользуемся термином, предложенным Карлом Марксом) в свою очередь порождал мистицизм, заходивший гораздо дальше того, что мы находим у основателей анализа. Гвидо Гранди, монах и профессор в Пизе, известный своим исследованием лепестковых кривых и других кривых, напоминающих цветки, рассматривал формулу

$1-1+1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1$

$1-1+1-1+1-1+\ldots =(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0$

Следовательно, 1 — 1 + 1 — 1+1 — ...= 1/2, как символ творения из ничего. Он получил результат 1/2, применив такое истолкование: отец завещает драгоценный камень двум своим сыновьям с тем, что каждый может пользоваться драгоценностью поочередно один год; следовательно, камень принадлежит каждому сыну наполовину.

Пусть эйлерово обоснование анализа имело свои слабые стороны, но свою точку зрения Эйлер во всяком случае высказал вполне определенно. Даламбер в некоторых статьях «Энциклопедии» пытался дать такое обоснование другими средствами. Ньютон пользовался выражением «первое и последнее отношение» для «флюксии»,

') Эта формула напоминает утверждение, которое Симплиций приписывает Зенону: «То, что при добавлении к другому пе делает его больше, а при отнятии от другого не делает его меньше, есть ничто».

имея в виду первое или последнее отношения двух только что возникших величин. Даламбер заменил это понятием предела. Он называет одну величину пределом другой, если вторая, приближаясь к первой, отличается от нее менее чем на любую заданную величину. «Дифференцирование уравнений состоит попросту в том, что находят пределы отношения конечных разностей двух переменных, входящих в уравнение». Это было, наряду с идеями Даламбера о бесконечных различных порядков, значительным шагом вперед. Однако его современников было не так легко убедить в важности этого шага, и когда Даламбер говорил, что секущая становится касательной при слиянии двух точек пересечения в одну, чувствовалось, что он не преодолел трудностей, присущих парадоксам Зенона. В конце концов, достигает ли переменная величина своего предела, или она никогда его не достигает?

Мы уже упоминали о критике ньютоновских флюксий епископом Беркли. Джордж Беркли, первый настоятель в Дерри, после 1734 г. — епископ в Южной Ирландии, а с 1729 до 1731 г. пребывавший в Ньюпорте, штат Род Айленд, прежде всего известен как крайний идеалист («быть — значит восприниматься»)[1]). Он был огорчен тем, что ньютонова наука поддерживает материализм, и он напал на теорию флюксий в своем «Аналисте» (Analyst, 1734 г.). Он издевался над бесконечно малыми как над «тенями усопших величин»; если x получает приращение o, то приращение x^n, разделенное на o, есть

$$nx^{n-1}+n(n-1)/2 \cdot x^{n-2}o+\ldots$$

Это получается в предположении, что о отлично от нуля. Однако флюксию от x^n, то есть nx^{n-1} получают, считая o равным нулю, что сразу изменяет исходное предположение об отличии o от нуля. Это было «явным софизмом», который Беркли открыл в анализе, и он был убежден, что верные результаты анализа получаются за счет компенсации ошибок. Логически флюксии нельзя принимать во внимание. «Но тот, кто может переварить вторую или третью флюксию, вторую или третью разность, — восклицал Беркли, обращаясь к неверующему математику (Галлею), — не должен, как мне кажется, придираться к чемулибо в богословии». Это не единственный случай,

') Esse est percipi.

когда серьезные трудности в науке использовались, чтобы поддержать идеалистическую философию.

Джон Ланден, английский математик-самоучка, чье имя осталось в теории эллиптических интегралов, пытался найти свой метод для преодоления основных затруднений анализа. В своем «Анализе остатков» (Residual analysis, 1764 г.) он ответил на критику Беркли тем, что полностью избегал бесконечно малых; например, производную от x^3 он находил, заменяя x на x_1, после чего $(x^3-x_1^3)/(x-x_1)=x^2+xx_1+x_1^2$ становится равным $3x^2$, когда $x_1=x$. Так как этот метод приводит при более сложных функциях к бесконечным рядам, он находится в известном родстве с более поздним алгебраическим методом Лагранжа.

6. Хотя Эйлер неоспоримо был ведущим математиком этого периода, во Франции попрежнему появлялись вполне оригинальные работы. Здесь более чем в какойлибо другой стране математику рассматривали как науку, которая должна была довести теорию Ньютона до большего совершенства. Теория всемирного тяготения обладала большой привлекательностью в глазах философов Просвещения, которые пользовались ею как оружием в своей борьбе против остатков феодализма. Католическая церковь включила труды Декарта в индекс запрещенных книг 1664 г., но около 1700 г. его теории стали модными даже в консервативных кругах. Проблема: ньютонианство или картезианство — стала на некоторое время наиболее интересной темой не только для ученых, по и в салонах. «Письма об англичанах» (1734 г.) Вольтера много сделали для знакомства французских читателей с идеями Ньютона; подруга Вольтера мадам Дю Шатле даже перевела «Начала» на французский язык (1759г.). Существенно спорным вопросом для обеих школ был вопрос о форме Земли.

Согласно космогонии, которую поддерживали картезиапцы, Земля у полюсов была удлинена, а по теории Ньютона она должна была там быть сплющена. Картезианские астрономы Кассини (отец Жан Доминик и сын Жак; отец известен в геометрии благодаря овалам Кассини, 1680г.) промерили дугу меридиана во Франции между 1700 и 1720 гг. и отстаивали картезианский вывод. Возник спор, в котором приняли участие многие математики.

В 1735 г. в Перу послали экспедицию, за которой в 1736—1737 гг. последовала другая экспедиция в Лапландию, под руководством Пьера Мопертюи, с целью промерить градус долготы. В результате обеих экспедиций восторжествовала теория Ньютона, это было как ее триумфом, так и триумфом самого Мопертюи. Отныне знаменитый «Великий сплющиватель» стал президентом Берлинской академии и много лет купался в лучах своей славы при дворе Фридриха 11. Это продолжалось до 1750г., когда он вступил в горячий спор со швейцарским математиком Самуилом Кёнигом относительно принципа наименьшего действия в механике, указанного, быть может, уже Лейбницем. Мопертюи, как Ферма до него и Эйнштейн после него, искал какой-то общий принцип, который мог бы объединить законы вселенной. Формулировка Мопертюи не была отчетливой, он определял свое «действие» как величину mvs (m—масса, v—скорость, s — расстояние). У него это сочеталось с доказательством существования бога. Этот спор особенно обострился тогда, когда Вольтер высмеял неудачливого президента в своей «Диатрибе доктора Акакия, врача папы» (1752 г.). Ни поддержка короля, ни защита Эйлера не могли уже вернуть Мопертюи присутствие духа, и павший духом математик вскоре скончался в Базеле, в доме Бернулли.

Эйлер вновь выдвинул принцип наименьшего действия в формулировке, что должен быть минимумом $\int mvds$, и, кроме того, он не вдавался в метафизику Мопертюи. Таким образом этот принцип был поставлен на твердую почву, и им пользовался Лагранж[1]), позже— Гамильтон. Значение «гамильтониана» в современной математической физике показывает, насколько существенным было то, что внес Эйлер в спор между Мопертюи и Кёнигом.

Среди математиков, побывавших вместе с Мопертюи в Лапландии, был Алексис Клод Клеро. Клеро восемнадцати лет от роду опубликовал «Изыскания о кривых двоякой кривизны» (Recherches sur les courbes a double courbure), первый опыт в области аналитической и дифференциальной геометрии пространственных кривых. По возвращении из Лапландии Клеро опубликовал свою «Теорию фигуры Земли» (Theorie de la figure de la Terre,

')См. Мах Э. Механика.—СПб., 1909; Dugas R. Histoire de la Mecanique.—Neufchatel 1950; Brunei P. Etude historique sur le principe de la rnoindre action.—Paris, 1950; По лак Л С. Вариационные принципы в механике и физике.— М., 1961.

1743г.), образцовое произведение по гидростатике и протяжению эллипсоидов вращения. Лаплас мог его улучшить лишь в незначительных деталях. В числе главных результатов этой работы — условие полноты дифференциала $Mdx + Ndy$. За этой книгой последовала «Теория Луны» (Theorie de la lune, 1752г.), содержавшая дополнения к эйлеровой теории движения Луны и к общей задаче трех тел. Клеро принадлежат также результаты в теории криволинейных интегралов и дифференциальных уравнений. Один из типов рассмотренных им дифференциальных уравнений известен под его именем, и с этим связан один из первых примеров особых решений.

7. Интеллектуальная оппозиция старому режиму после 1750г. имела своим центром знаменитую «Энциклопедию» (1751—1772 г., 28 томов). Ее редактором был Дени Дидро, под чьим руководством «Энциклопедия» стала подробным изложением философии века Просвещения. Дидро не обладал большими познаниями в математике[1]), ведущим математиком энциклопедистов был Жан ле Рон Даламбер, внебрачный сын аристократической дамы, оставленный как подкидыш вблизи церкви святого Жана ле Рона в Париже. Его ранние и блестящие успехи облегчили его карьеру. В 1754г. он стал «непременным секретарем» Французской академии и в качестве такового наиболее влиятельным ученым Франции. В 1743г. появился его «Трактат по динамике» (Traite de la dynamique), который содержит метод сведения динамики твердых тел

') В ходу не раз приводимая история о Дидро и Эйлере, согласно которой Эйлер во время публичной дискуссии в Петербурге ошеломил вольнодумца Дидро утверждением, что он обладает алгебраическим доказательством существования бога: «Сударь, $(a+b^n)/n= x$, следовательно, бог существует: отвечайте же!» Это хороший пример плохого исторического анекдота, так как значение анекдота относительно исторической личности зависит от того, насколько он характеризует определенные черты ее характера, а этот анекдот может послужить лишь к тому, чтобы исказить как характер Дидро, так и характер Эйлера. Дидро знал математику своего времени, он писал об инволютах и теории вероятностей, и нет оснований думать, что рассудительный Эйлер мог вести себя столь нелепым образом. Весь этот рассказ, повидимому, придуман английским математиком де Морганом (1806—1873). См. Кrakeur L. G., Krueger B. L. / Isis.—1940.—V. 31.—P. 431—432 и 1941. —V. 31.— P. 219—231.

Верно то, что в восемнадцатом столетии иной раз говорили о возможности алгебраического доказательства существования бога; Мопертюи увлекался этой идеей, см. «Диатрибу...» Вольтера; см. также Brown B. / Amer. Math. Monthly.—1944.— V. 49.

Жан ле Рон Даламбер (1717—1783)

к статике, известный как «принцип Даламбера». Он продолжал писать по многим прикладным вопросам, в частности по гидродинамике, аэродинамике и задаче трех тел. В 1747г. он опубликовал теорию колебания струн, что делает его, вместе с Даниилом Бернулли, основателем теории уравнений в частных производных. Тогда как Даламбер и Эйлер нашли решение уравнения $z''_{tt} = k^2 z''_{xx}$ в виде $z = f(x+ kt)+f(x - kt)$, Бернулли решил это уравнение при помощи тригонометрических рядов. Возникли серьезные сомнения относительно характера этого решения: Даламбер считал, что начальная форма струны может быть задана только одним единственным аналитическим выражением, в то время как Эйлер полагал, что допустима любая непрерывная кривая. Бернулли утверждал, вопреки Эйлеру, что его решение в виде ряда является вполне общим. Полного разъяснения этого вопроса пришлось ждать до 1824 г., когда Фурье устранил сомнения относительно законности представления «любой» функции тригонометрическим рядом. Даламберу не составляло труда писать по многим вопросам, включая даже вопросы обоснования математики. Мы упоминали о том, что он ввел понятие предела. «Основную теорему алгебры» иной раз называют теоремой Даламбера, так как он пытался ее доказать (1746 г.), а «парадокс Даламбера» в теории вероятностей показывает, что он, хотя и не очень успешно, размышлял об основах этой теории.

Теория вероятностей быстро развивалась в течение этого периода главным образом благодаря дальнейшей разработке идей Форма, Паскаля и Гюйгепса. За «Ars conjectandi» последовали другие книги, среди них «Учение о случае» (The Doctrine of Chance, 1716г.), написанная Авраамом де Муавром, французским гугенотом, который поселился в Лондоне после отмены Нантского эдикта (1685 г.) и зарабатывал там на жизнь частными уроками. Имя де Муавра связано с тригонометрической теоремой, которая в ее современной форме $(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi$ впервые появляется во «Введении» Эйлера. В 1733 г. Муавр вывел функцию нормального распределения как аппроксимацию биномиального закона и 'дал формулу, равносильную формуле Стирлинга. Джеймс Стирлинг, английский математик школы Ньютона, опубликовал свой ряд в 1730 г.

Многочисленные лотереи и страховые компании, которые организовались в течение этого периода, вызвали у многих математиков, включая Эйлера, интерес к теории вероятностей. Это повело к попыткам применить учение о вероятностях в новых областях. Бюффон, известный как автор «Естественной истории» (36 увлекательно написанных томов) и знаменитого рассуждения о стило (1753 г.; «стиль — это человек»), в 1777 г. дал первый пример геометрической вероятности. Это была так называемая задача об игле, которая занимала многих, так как она давала возможность экспериментально определить число π, бросая иголку на плоскость, покрытую параллельными и равноудаленными прямыми, и подсчитывая число пересечений иголки с этими прямыми.

К этому периоду относятся также попытки применить теорию вероятностей к суждениям человека; например, подсчитывали шансы на то, что какой-либо трибунал сможет вынести правильный приговор, если для каждого из свидетелей можно указать число, выражающее вероятность того, что он будет говорить правду. Эта забавная «вероятность суждений», которая отдает философией века Просвещения, занимает видное место в трудах маркиза Кондорсе; она появляется еще у Лапласа и даже у Пуассоиа (1837 г.).

8. Де Муавр, Стирлинг и Ланден — добротные представители английской математики восемнадцатого века. Но мы должны сказать и о некоторых других англичанах, хотя никто из них не мог равняться со своими коллегами на континенте. Над английской наукой тяготела традиция почитания Ньютона, и его обозначения, неуклюжие по сравнению с обозначениями Лейбница, затрудняли прогресс. Были и глубокие общественные причины, в силу

которых английские математики не освобождались от флюксионных методов Ньютона. В Англии, которая вела непрерывную торговую войну с Францией, развивалось чувство интеллектуального превосходства, которое поддерживалось не только победами, военными и торговыми, но тем восхищением, которое вызывала у континентальных философов английская политическая система. Англия стала жертвой своего воображаемого совершенства. Есть сходство между английской математикой восемнадцатого века и античной математикой позднеалександрийской эпохи. В обоих случаях неподходящие обозначения технически затрудняли прогресс, а причины того, что математики ими удовлетворялись, были более глубокого общественного характера.

Ведущим английским, вернее пользовавшимся английским языком, математиком этого периода был Колин Маклорен, профессор Эдинбургского университета, последователь Ньютона, с которым он был лично знаком. Его исследования и обобщения флюксионного метода, работы по кривым второго и более высокого порядка и по притяжению эллипсоидов шли параллельно с исследованиями Клеро и Эйлера. Некоторые из теорем Маклорена вошли в нашу теорию плоских кривых и в нашу проективную геометрию. В его «Органической геометрии» (Geometria organica, 1720 г.) мы находим замечание, известное как парадокс Крамера: кривая *n-го* порядка не всегда определяется $n(n+3)/2$ точками, так что девять точек могут не определять однозначно кривую третьего порядка, тогда как может оказаться, что десяти точек слишком много. Здесь же мы находим кинематические методы для описания плоских кривых различных порядков. «Трактат о флюксиях» Маклорена (Treatise of fluxions, 2 тома, 1742г.), написанный в защиту Ньютона против Беркли, читать трудно из-за его архаичного геометрического языка, что находится в резком контрасте с доступностью работ Эйлера. Маклорен обычно стремился к строгости Архимеда. В книге содержатся исследования Маклорена о притяжении эллипсоидов вращения и его теорема, что два таких конфокальных эллипсоида притягивают частицу на оси или на экваторе силами, пропорциональными их объемам. В этом трактате Маклорен оперирует также со знаменитым «рядом Маклорена».

Впрочем, этот ряд не был новым открытием, так как он появился в «Методе приращений» (Methodus incrementorum, 1715г.), написанном Бруком Тейлором, в то время секретарем Королевского общества, а еще раньше был открыт И.Бернулли и по сути был известен Лейбницу. Маклорен признает то, что он полностью обязан Тейлору. Ряд Тейлора теперь всегда приводят в обозначениях Лагранжа:

$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2/2!*f''(x)+\ldots$

Тейлор явно приводит этот ряд для x=0, что многие учебники еще упорно называют рядом Маклорена В выводе Тейлора нет соображений относительно сходимости ряда, но Маклорен положил начало таким исследованиям и даже владел так называемым интегральным признаком сходимости бесконечных рядов. Полностью важность ряда Тейлора была признана лишь после того, как Эйлер использовал его в своем «Дифференциальном исчислении» (1755г.). Лагранж добавил к нему остаточный член и положил его в основу своей теории функций. Сам Тейлор использовал свои ряд для интегрирования некоторых дифференциальных уравнений. Он начал исследование колебаний струны, что затем было предметом работ Даламбера и др. (см. с. 164).

9. Жозеф Луи Лагранж родился в Турине в итало-французской семье. Девятнадцати лет от роду он стал профессором математики артиллерийской школы в Турине (1755г). В 1766г. Эйлер уехал из Берлина в Петербург, Фридрих II пригласил Лагранжа в Берлин и в этом скромном приглашении было сказано что «необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». Лагранж оставался в Берлине до смерти Фридриха (1786г.), после чего он переехал в Париж. Во время революции он участвовал в реформе мер и весов, а позже стал профессором сначала Нормальной школы (1795 г.), а затем Политехнической школы (1797г.).

Исследования по вариационному исчислению относятся к раннему периоду деятельности Лагранжа. Мемуар Эйлера по этому вопросу появился в 1755г. Лагранж заметил, что метод Эйлера не обладает «всей той простотой, которая желательна в вопросе чистого анализа» В результате появилось чисто аналитическое вариационное исчисление Лагранжа (1760-1761 гг.), в котором не только много оригинальных открытий, но и отлично упорядочен и переработан накопленный исторический материал — то, что характерно для всего творчества Лагранжа. Лагранж

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

сразу применил свою теорию к задачам динамики, причем он полностью использовал эйлерову формулировку принципа наименьшего действия — результат плачевного эпизода с «Акакием». Многие из основных идей «Аналитической механики» (Mëcanique analytique, 1788 г.) восходят к туринскому периоду жизни Лагранжа. Он принял участие также в разработке одной из основных проблем своего времени, теории движения Лупы. Он дал первые частные решения задачи трех тел. Теорема Лагранжа утверждает, что можно найти такое начальное положение трех тел, при котором их орбитами будут подобные эллипсы, описываемые за одно и то же время (1772г.). В 1767г. появился его мемуар «О решении численных уравнений» (Sur la resolution des equations numeriques), в котором он изложил методы отделения вещественных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления с помощью непрерывных дробей. За этим в 1770г. последовали «Размышления об алгебраическом решении уравнений» (Reflexions sur la resolution algebrique des equations), в которых рассматривается основной вопрос, почему те методы, которые позволяют решать уравнения не выше четвертой степени, ничего не дают для степени, большей четырех. Это привело Лагранжа к рациональным функциям от корней и к исследованию их поведения при перестановках корней. Такой метод не только был стимулом для Руффини и Абеля в их работах относительно случая $n > 4$, по он привел Галуа к его теории групп. Лагранж также продвинул теорию чисел, в которой он исследовал квадратичные вычеты, и среди ряда других теорем доказал то, что каждое целое число есть сумма четырех или меньшего числа квадратов

Вторую часть своей жизни Лагранж посвятил созданию больших трудов: «Аналитической механики» (1788 г.), «Теории аналитических функций» (Theorie des fonctions analytiques, 1797 г.) и ее продолжения—«Лекций по исчислению функций» (Lecons sur le calcul des fonctions, 1801 г.). Обе книги по теории функций являются попыткой подвести надежный фундамент под анализ, сведя его к алгебре. Лагранж отбросил теорию пределов в том виде, как она была указана Ньютоном и сформулирована Даламбером. Он не мог как следует уяснить себе, что происходит, когда $\Delta y/\Delta x$ достигает своего предела. Говоря словами Лазаря Карно, «организатора победы» во времена французской революции, который также был недоволен ньютоновским методом бесконечно малых: «Этот метод имеет тот большой недостаток, что количества рассматриваются в состоянии, когда они, так сказать, перестают быть количествами; ибо хотя мы всегда хорошо представляем себе отношение двух количеств, пока они остаются конечными, с этим отношением наш ум не связывает ясного и точного представления, как только его члены, оба в одно и то же время, становятся ничем»[1]). Метод Лагранжа отличается от метода его предшественников. Он начинает с ряда Тейлора, который выводится вместе с остаточным членом, доказывая несколько наивным способом, что *«произвольная»* функция $f(x)$ может быть разложена в такой ряд с помощью чисто алгебраического процесса. Затем производные $f'(x)$, $f''(x)$,... определяются как коэффициенты при h, h^2,... в разложении Тейлора $f(x + h)$ по степеням h. (Обозначения $f'(x)$, $f''(x)$,... принадлежат Лагранжу.)

Хотя этот алгебраический метод обоснования анализа оказался неудовлетворительным, и хотя Лагранж не уделил достаточного внимания сходимости рядов, такая абстрактная трактовка функций была значительным шагом вперед. Здесь впервые выступает на сцену теория функций вещественного переменного с применениями к разнообразным задачам алгебры и геометрии.

«Аналитическая механика» Лагранжа — это, может быть, наиболее ценный его труд, который все еще заслуживает тщательного изучения. В этой книге, которая по

') Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых — М 1936 См также Cajori F. / Amer. Math. Monthly. 1915. *V. 22.* P. 148.

явилась через сто лет после «Начал» Ньютона, вся мошь усовершенствованного анализа использована в механике точек и твердых тел. Результаты Эйлера, Даламбера и других математиков восемнадцатого столетия здесь обработаны и развиты с единой точки зрения. Благодаря полному использованию вариационного исчисления самого Лагранжа оказалось возможным объединить различные принципы статики и динамики, в статике — путем использования принципа виртуальных скоростей, в динамике — принципа Даламбера. Это естественным образом привело к обобщенным координатам и к уравнениям движения в их лагранжевой форме:

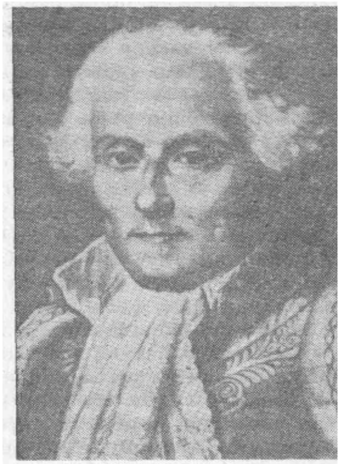
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=F_i$$

Теперь уже был полностью отброшен геометрический подход Ньютона; книга Лагранжа была триумфом чистого анализа, и ее автор зашел настолько далеко, что подчеркивал в предисловии: «В этой работе вовсе нет чертежей, в ней только алгебраические операции»[1]). Это характеризует Лагранжа как первого чистого аналитика.

10. Мы переходим к Пьеру Симону Лапласу, последнему из ведущих математиков восемнадцатого века. Сын скромного землевладельца в Нормандии, он учился в Бомоне и Кане, с помощью Даламбера стал профессором математики военной школы в Париже. Он занимал и несколько других преподавательских и административных должностей, во время революции принимал участие в организации как Нормальной, так и Политехнической школы. Наполеон удостоил его многих почестей, но то же делал и Людовик XVIII. В противоположность Монжу и Карно Лаплас легко менял свои политические привязанности, и при всем том в нем было кое-что от сноба. Впрочем, такая неустойчивость позволила ему продолжать свою чисто математическую деятельность при всех политических изменениях во Франции.

Двумя большими трудами Лапласа, в которых дана сводка не только его исследований, но и всех предыдущих работ в соответствующих областях, являются «Аналитическая теория вероятностей» (Theorie analytique des probabilites, 1812 г.) и «Небесная механика» (Mecanique celeste, 1799—1825гг., в 5 томах). Обоим монументальным произведениям сопутствовали развернутые популярные из

[1]) Характерно слово «алгебраический» вместо «аналитический».



Пьер Симон Лаплас
(1749—1827)

ложения «Философский опыт относительно вероятностей» (Essai philosophique sur les probabilifes, 1814 г.) и Изложение системы мира» (Exposition du systeme du monde, 1796г.). Это «Изложение» содержит гипотезу о происхождении солнечной системы из туманности, предложенную до того Кантом в 1755г. (и даже раньше Канта Сведенборгом в 1734г.). «Небесная механика» является завершением трудов Ньютона, Клеро, Даламбера, Эйлера, Лаграижа и Лапласа по теории фигуры Земли, теории Луны, по задаче трех тел и теории возмущений планет, включая основную проблему об устойчивости солнечной системы. Термин «уравнение Лапласа» напоминает нам о том, что одной из частей «Небесной механики» является теория потенциала.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

(Само это уравнение было найдено Эйлером в 1752г. при выводе некоторых основных уравнений гидродинамики.) С этими пятью томами связано немало анекдотов. Хорошо известен предполагаемый ответ Лапласа Наполеону, который попытался упрекнуть его, заявив, что в его книге нет упоминаний о боге: «Государь, я не нуждался в этой гипотезе». А Натаниел Боудич из Бостона, который перевел четыре тома труда Лапласа на английский язык, как-то сказал: «Всегда, когда я встречал у Лапласа заявление „Итак, легко видеть...", я был уверен, что мне потребуются часы напряженной работы, пока я заполню пробел, догадаюсь и покажу, как это легко видеть». Математическая карьера Гамильтона началась с того, что он нашел ошибку в «Небесной механике» Лапласа. Грин пришел к мысли о математической теории электричества при чтении Лапласа.

«Философский опыт относительно вероятностей»— это легко читающееся введение в теорию вероятностей. Оно содержит лапласово «отрицательное» определение вероятности с помощью «равновероятных событий»:

«Теория вероятностей состоит в сведении всех событий одного и того же рода к некоторому числу равновероятных случаев, т. е. случаев, относительно существования которых мы в равной мере не осведомлены, и в определении числа тех случаев, которые благоприятны для события, вероятность которого мы ищем».

Вопросы, касающиеся вероятностей, согласно Лапласу возникают потому, что мы частично осведомлены, частично нет. Это привело Лапласа к его знаменитому утверждению, в котором воплощено то, как восемнадцатое столетие понимало механистический материализм:

«Ум, который знал бы все действующие в данный момент силы природы, а также относительное положение всех составляющих ее частиц и который был бы достаточно обширен, чтобы все эти данные подвергнуть математическому анализу, смог бы охватить единой формулой движение как величайших тол вселенной, так и ее легчайших атомов; для него не было бы ничего неопределенного, он одинаково ясно видел бы и будущее, и прошлое. То совершенство, какое человеческий разум был в состоянии придать астрономии, дает лишь слабое представление о таком уме».

Трактат «Аналитическая теория вероятностей» настолько богат содержанием, что многие позднейшие открытия теории вероятностей можно обнаружить у Лапласа[1]). В этом внушительном томе подробно рассмотрены азартные игры, геометрические вероятности, теорема Берпулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов, изобретенная Лежапдром. Руководящей мыслью является применение «производящих функций»; Лаплас показал значение этого метода для решения разностных уравнений. Здесь вводится «преобразование Лапласа», которые позже стало основой операционного исчисления Хевисайда. Лаплас также спас от забвенья и заново сформулировал ту теорию, набросок которой дал Томас Байес, мало известный английский священник, работы которого были опубликованы посмертно

') M o 1 i n a E. C. The Theory of Probability: some commenis on Laplace's «Theorie analytique» / Bull. Araer. Malh. Soo.— 1,130.— V. 36.

Жан Этьен Монтюкла
(1725—1799)

в 1763—1764гг. Эта теория стала известна как теория вероятностей a posteriori.

11. Любопытно то обстоятельство, что к концу века некоторые ведущие математики высказывались в том смысле, что область математических исследований как бы истощена. Труды и усилия Эйлера, Лагранжа, Даламбера и других уже дали наиболее важные теоремы, эти результаты в должном оформлении изложены или в скором времени будут изложены в классических трактатах, и немногочисленные математики следующего поколения должны будут решать только задачи меньшего значения. «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку,— писал Лагранж Даламберу в 1772 г., — ее поддерживаете только Вы и Эйлер»[1]). Лагранж даже на некоторое время прекратил занятия математикой. Даламбер в ответ мало чем мог обнадежить. Араго в своей «Похвальной речи о Лапласе» (1842г.) позже высказал мысль, которая поможет нам понять эти чувства:

«Пять геометров, Клеро, Эйлер, Даламбер, Лагранж и Лаплас, разделили между собою тот мир, существование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец,— в этом их вечная слава — они охватили с помощью одного принципа, одного единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих столетий только подтвердит во всех подробностях заключения науки».

') Под геометрией в восемнадцатом веке во Франции поимали математику вообще, Красноречивый Араго указывает на основной источник пессимизма конца века, именно, на тенденцию отождествлять прогресс математики с прогрессом механики и астрономии. Со времен древнего Вавилона до времен Эйлера и Лапласа астрономия была руководящей и вдохновляющей силой самых замечательных математических открытий, и теперь казалось, что этот процесс достиг своей кульминации. Однако новое поколение, вдохновленное новыми перспективами, открытыми французской революцией и расцветом естествознания, должно было показать, насколько необоснован этот пессимизм. Новый мощный импульс лишь частично был дан во Франции; как часто бывало в истории цивилизации, он шел также и с периферии политических и экономических центров, в данном случае из Гёттингена, от Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

Полные собрания сочинений Лагранжа и Лапласа изданы во второй половине девятнадцатого века, издание полного собрания сочинений Эйлера близится к завершению. Ряд томов Эйлера вышел с обширными введениями. Собрание сочинений Якоба Бернулли (1844 г., в двух томах) и Иоганна Бернулли (1742 г., в четырех томах) не переиздавались. На русском языке изданы следующие произведения классиков восемнадцатого столетия:

Б е р н у л л и. Иогапи. Избранные сочинения по механике/Под ред. и с примечаниями В. П. Егоршина.— М.; Л.: ОНТИ, 1937. Б е р н у л л п, Якоб. Четвертая часть Ars conjeclaudi/Перевод Я. В. Успенского.— СПб., 1913. К л е р о А. Теория фигуры Земли/Ред., комментарии и статья Н, И. Идельсопа.—Ы.; Л., 1947. Д а л а м б е р Ж. Динамика/Примечания В. П. Егоршина.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. I.—Изд. 1е/ Под ред., с примечаниями ц вступительной статьей С. Я. Лурье.— М.; Л.: ОНТИ, 1936. Изд. 2е/Под ред. И. Б. Погребысского, вступительная статья А. Шпайзера,— М.: Физматгиз, 1961. Т. П/Ред., примечания п вступительная статья И. Б. Погребысского.—М: Физмапиз, 1961.

Эйлер Л. Дифференциальное исчисление/Примечания и вступительная статья М. Я. Выгодского.—М.; Л.: Гостохиздат, 1949.

Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. I/Ред., предисловие и примечания М, Я. Выгодского.— М.: Гостехпздат, 1956. Т. П/Продисловпе и примечания И. Б. Погребысского.— М.: Гостехиздат, 1957. Т. III/Комментарип Ф. И. Фрппкля.— М.: Физматгиз. 1958.

Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума.— Ред. и вступительная статья Н. С. Кошлякова.— М.; Л.: ГТТИ, 1934.

В книгу: Эйлер Л. Основы динамики точки/Ред., предисловие и примечания В. П. Егоршипа.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938, вошли главы из «Механики» и «Теории движения твердых тел» Л. Эйлера.

«Полное введение в алгебру» Л. Эйлера впервые было издано на русском языке, в переводе И. Иноходцева и И. Юдина,'под названием «Универсальная арифметика» (изд. 1е, т. I.— СПб., 1768; т. П.—СПб., 1769).

«Письма к немецкой принцессе» тоже имеются в русском переводе восемнадцатого века (ученика Эйлера, астронома С. Я. Румовского), изд. 1е, тт. I—III.—СПб., 1768—1774.

Эйлер Л. Избранные картографические статьи/Ред. и вступительная статья Г. В. Багратуни.— М.; Л., 1958.

Эйлер Л. Работа по баллистике.— М., 1959.

Эйлер И. Исследования по баллистике/Ред. и предисловие Б. Н. Окунева.— М.: Физматгиз, 1961.

Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. I/Под ред. и с примечаниями Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. П/Под ред. и с примечаниями Г. Н. Дубинина.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Работы Лапласа «Изложение системы мира» и «Опыт философии теории вероятностей» имеются в старых переводах (1861 г. и 1908 г. соответственно).

К а р н о Л. Размышления о метафизике вычисления бесконечно малых/Ред. и вступительная статья А. П. Юшкевича.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Bernoulli, Johann. Briefwechsel, I.— Basel, 1955.

Lambert J. H. Opera matliematica, I/Предисловие А. Шпайзера.— Zurich, 1946.

Cajori F. A History of the Conception of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse.—Chicago, 1931.

Jourdain P. E. B. The Principle of Least Action.— Chicago, 1913.

Du Pasquier L. G. Leonard Euler et ses amis.— Paris, 1927.

Andoyer H. L'oeuvre scientifique de Laplace.— Paris, 1922.

L o r i a G. Nel secondo centenario della nascita di G. L. Lagran

f 3 II Isis.— 1938.— V. 28,— P. 366—375 (с обширной библиограией).

A u c h t e r H. Brook Taylor, der Mathematiker und Philosoph.— Marburg, 1937.

В этой книге, на основании рукописей Лейбница, указывается что ряд Тейлора был известен Лейбницу с 1694 г.

Green H. G., Winter H. J. J. John Landen, F. R. S. (1719— 1790), Mathematician / Isis.— 1944.—V. 35.— P. 6—10.

B a y e s Th. Facsimile of two papers/With commentaires by E. C. Molina and W. E. Deming.—Washington (D. C.), 1940.

Pearson K. Laplace / Biometrica.—1929.—V. 21.—P. 202— 216.

Truesdell C. Notes on the history of the general equations of hydrodynamics / Amer. Math. Monthly.— 1953.— V. 60.— P. 445— 448.

Vollgraf J. A. (ed.). Les oeuvres de Nicolas Struyck (1687— 1759) qui se rapportent au calcul des chances.—Amsterdam, 1912.

Об Эйлере имеется обширная новая литература. См.:

Леонард Эйлер (1707—1783): Сборник статей и материалов к 150летию со дня смерти,— М.: Л., 1935.

Леонард Эйлер: Сборник статей в честь 250летия со дня рождения.— М., 1958.

Leonard Euler: Sammelband.— Berlin, 1959.

Глава VIII
ДЕВЯТНАДЦАТОЕ СТОЛЕТИЕ

1. Французская революция и наполеоновская эпоха создали исключительно благоприятные условия для дальнейшего развития математики. На континенте Европы был открыт путь для промышленной революции. Она побуждала к занятиям физическими науками, создала новые общественные классы с новыми взглядами на жизнь, заинтересованные в науке и в техническом образовании. В академическую жизнь ворвались демократические идеи, устаревшие формы мышления вызывали критику, школы и университеты были преобразованы и обновлены.

Первоначальногоновая и разнообразная математическая деятельность была вызвана не техническими проблемами, поставленными новой промышленностью. Англия, колыбель промышленной революции, в течение нескольких десятилетий оставалась математически бесплодной. Более всего математика развивалась во Франции и несколько позже в Германии ,в странах, где более резко ощущался идеологический разрыв с прошлым и где произошли или должны были произойти радикальные преобразования, подготовившие почву для нового экономического и политического строя – капиталистического. Новые математические направления постепенно освобождались от прежней тенденции видеть конечную цель точных наук в механике и астрономии. Занятия наукой в целом становились более далекими от требований экономики или военного дела. Сформировался специалист, заинтересованный в науке ради нее самой. Связь с практикой никогда не обрывалась, но часто она оказывалась в тени. Рост специализации сопровождался разделением на чистую и прикладную математику [1]).

[1]Это различие в подходе нашло свое классическое выражение в замечании Якоби относительно мнения Фурье, который был еще представителем утилитарного подхода восемнадцатого века: «Вер-

В девятнадцатом столетии мы уже не находим математиков при королевских дворах или аристократических салонах. Быть членами ученых академий уже не составляет их главное занятие – обычно они работают в университетах или технических школах и являются преподавателями столько же, сколько и исследователями. Бернулли, Лагранж и Лаплас преподавали лишь от случая к случаю. Теперь же ответственность преподавателя возрастает, профессора математики становятся воспитателями и экзаменаторами молодежи. Упрочение связей между учеными в пределах нации приводит к подрыву интернационализма предыдущих столетий, хотя международный обмен мыслями продолжается. Латинский язык науки постепенно заменяется национальными языки. Математики начинают работать в обособленных областях, и тогда как Лейбница, Эйлера, Даламбера можно охарактеризовать как «математиков» (или геометров, в том смысле, в каком это слово применяли в восемнадцатом столетии), о Коши мы говорим как об аналитике, о Кели – как об алгебраисте, о Штейнере – как о геометре (даже как о чистом геометре), а о Канторе – как об основоположнике теории множеств. Наступило время специалистов по математической физике, за которыми последовали ученые в области математической статистики или математической логики. Только самая высокая степень одаренности позволяла преодолеть специализацию, и наиболее мощное воздействие на математиков девятнадцатого столетия оказали труды Гаусса, Римана, Клейна, Пуанкаре.

2. На линии раздела между математикой восемнадцатого и девятнадцатого столетий высится величественная фигура Карла Фридриха Гаусса. Он родился в 1777г. в немецком городе Брауншвейге, был сыном поденщика. Брауншвейгский герцог соизволил обратить внимание на молодого Гаусса-вундеркинда и позаботился об его обу-

но, что господин Фурье был того мнения, что конечной целью математики является общественная польза и объяснение явлений природы; но такой философ, как он, должен был бы знать, что единственной целью науки является возвеличить человеческий ум, и при таком подходе вопрос о числах столь же значителен, как и вопрос о системе мира». В письме к Лежандру (1830г.; см. Werke. – Bd 1. – S.454) Гаусс высказался за синтез обоих мнений; он широко применял математику к астрономии, к физике, к геодезии, вместе с тем он считал математику царицей наук, а теорию чисел – царицей математики.

чении. В 1795—1798 гг. юный гений учился в Гёттингене, и в 1799 г. в Хельмштедте он получил степень доктора. С 1807 г. до своей смерти в 1855г. он без тревог и забот спокойно работал в качестве директора астрономической обсерватории и профессора его родного университета. Его относительная обособленность, владение в равной мере прикладной и чистой математикой, занятия астрономией, многократное использование латинского языка — на всем этом отпечаток восемнадцатого столетия, но в его трудах ощущается дух новой эпохи. Как и его современники Кант, Гёте, Бетховен и Гегель, он стоял в стороне от больших политических битв, разыгрывавшихся в других странах, но в своей области он самым энергичным образом выразил новые идеи своего века.

Дневники Гаусса показывают, что уже на семнадцатом году жизни он начал делать поразительные открытия. Например, в 1795г. он независимо от Эйлера нашел закон квадратичной взаимности теории чисел. Некоторые из его ранних открытий изложены в его Хельмштедтской диссертации 1799г. и в его внушительных «Арифметических исследованиях» (Disquisitiones arithmeticae, 1801 г.). В диссертации дано первое строгое доказательство так называемой «основной теоремы алгебры», теоремы о том, что каждое алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один корень и, следовательно, столько корней, сколько единиц в показателе его степени. Сама эта теорема восходит к Альберу Жирару, издателю трудов Стевина [«Новое открытие в алгебре» (Invention nouvelle en algebre, 1692 г.)]. Даламбер пытался дать ее доказательство в 1746 г. Гауссу нравилась эта теорема и позже он дал еще два доказательства, а в 1846 г. снова вернулся к своему первому доказательству. В третьем доказательстве (1816г.) используются комплексные интегралы, и это показывает, как рано Гаусс овладел теорией комплексных чисел.

В «Арифметических исследованиях» собраны все достижения предшественников Гаусса в области теории чисел, и вместе с тем теория чисел настолько обогащена, что опубликование этой книги иной раз считают началом современной теории чисел. Центральное место в книге занимает теория квадратичных форм, вычетов и сравнений второй степени; высшим достижением является закон квадратичной взаимности, «золотая теорема» (theorema aurura), первое полное доказательство которой дал Гаусс. Гаусс был увлечен этой теоремой не менее, чем основной теоремой алгебры, и позже опубликовал еще пять доказательств, и еще одно было найдено после смерти Гаусса в его бумагах. В «Арифметических исследованиях» содержатся также результаты Гаусса о делении круга, иными словами, о корнях уравнения $x^n = 1$. Там получена замечательная теорема, что с помощью только циркуля и лпнейкп можно построить правильный семнадцатиуголъннк (более общим образом, правильный тгуголъник при $n = 2^P + 1$, $p = 2^k$, где n — простое число, $k = 0$, 1, 2, 3,....),— удивительное геометрическое обобщение в греческом духе.

Гаусс заинтересовался астрономией после того, как в первый день нового столетия, 1 января 1801 г., Пиацци в Палермо открыл первую малую планету, названную Церерой. Так как удалось провести только немного наблюдений новой планеты, то возникла проблема расчета орбиты планеты по малому числу наблюдений. Гаусс полностью решил эту проблему; при этом получилось уравнение восьмой степени. Когда в 1802 г. был открыт второй астероид, Паллада, Гаусс заинтересовался проблемой вековых возмущений планет. Отсюда его «Теория движения небесных тел» (Theoria motus corporum coelestium, 1809г.), его работа о протяжении произвольных эллипсоидов (1813г.), его исследования о механических квадратурах (1814г.) и о вековых возмущениях (1818г.). В 1812г. появилась также статья Гаусса о гипергеометрических рядах, которая дала возможность с единой точки зрения рассмотреть большое число функций. Это было первое систематическое исследование сходимости рядов.

3. После 1820г. Гаусс начал живо интересоваться геодезией. Здесь он вел и теоретические исследования, и обширную работу по триангуляции. Одним из результатов было его изложение метода наименьших квадратов (1821, 1823гг.), который был уже предметом исследований Лежандра (1806г.) и Лапласа. Но, может быть, самым важным достижением этого периода жизни Гаусса была теория поверхностей в «Общих исследованиях относительно кривых поверхностей» (Disquisitiones generales circa superficies curves, 1827 г.), где подход к вопросу резко отличается от подхода Монжа. Здесь снова практические соображения, на этот раз из области высшей геодезии, тесно связаны с тонким теоретическим анализом. В этой работе появилась так называемая внутренняя геометрия поверхности, причем криволинейные координаты используются, чтобы выразить линейные элементы ds

с помощью квадратичной дифференциальной формы: $ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2$. И здесь есть кульминационная точка, «превосходная теорема» (theorema egregium), которая утверждает, что полная кривизна поверхности зависит только от E,F,G и их производных, следовательно, инвариантна при изгибании. Но Гаусс не забывал свою первую любовь, «царицу математики», даже в период сосредоточения усилий на геодезических проблемах, ибо в 1825 и 1831гг. появились его работы по биквадратичным вычетам. Это было продолжением его теории квадратичных вычетов в «Арифметических исследованиях», но с использованием нового метода — теории комплексных чисел. В работе 1831 г. дана не только алгебра комплексных чисел, но и их арифметика. Здесь появляется новая теория простых чисел, в которой 3 остается простым числом, но 5 =(1 + 2i) (1 — 2i) уже не является простым числом. Эта новая теория комплексных чисел разъяснила многие неясности в арифметике, так что квадратичный закон взаимности получился здесь проще, чем для действительных чисел. В этой работе Гаусс навсегда изгнал ту таинственность, которая окружала комплексные числа, введя их представление с помощью точек плоскости[1]).

Карл Фридрих Гаусс
(1777—1855)

Статуя в Гёттингене изображает Гаусса и его младшего коллегу, физика Вильгельма Вебера, работающими над изобретением электрического телеграфа. Это относится к 1833—1834гг., когда Гаусс начал интересоваться фи

') Ср. Bell E. T. Gauss and The Early Development of Algebraic Numbers.—Nat. Math. Mag.—1944.—V. 18.—P. 188, 219. А. Шпаизер заметил, что уже Эйлер и другие математики после 1760г пользовались сходными средствами, когда обращались к комплексным числам,— см. его введение в томе I, 28 «Opera Omnia» Эйлера (Zurich, 1955.—P. XXXVII). Вполне разработанную геометрическую интерпретацию комплексных чисел до Гаусса дали К Вессель (1799 г.) и Ж. Арган (1806 г.).

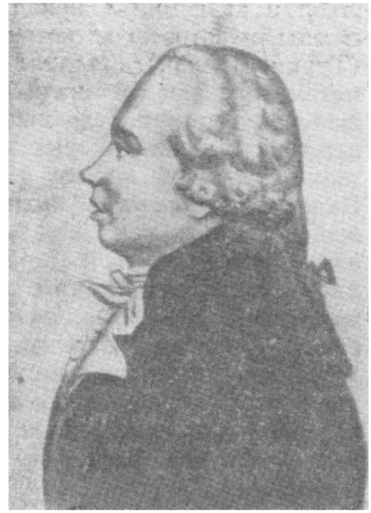
зикой. В этот период он выполнил большую экспериментальную работу по земному магнетизму. Но у него нашлось время и для теоретического исследования первостепенной важности— «Общих теорем (Allgemiene Lehrsatze...) о силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1839, 1840 гг.). Это было началом теории потенциала как отдельной ветви математики (работа Грина 1828г. практически не была известна в это время) с использованием интегралов по объему, причем были введены некоторые минимальные принципы, в которых мы можем распознать «принцип Дирихле». Для Гаусса существование минимума было очевидным; позже это стало предметом дискуссии, а окончательное решение было дано Гильбертом.

Деятельность Гаусса не ослабела до его смерти в 1855г. В последние годы жизни он все больше и больше отдавал силы прикладной математике. Впрочем, его публикации не дают полной картины всего его величия. Когда были напечатаны его дневники и, частично, письма, выяснилось, что некоторыми из наиболее глубоких своих мыслей он не поделился. Теперь мы знаем, что Гаусс уже в 1800г. открыл эллиптические функции и около 1816г. он уже овладел неевклидовой геометрией. По этим вопросам он никогда ничего не публиковал, и только в некоторых письмах к друзьям он изложил свое критическое отношение к попыткам доказать аксиомы Евклида о параллельных. По-видимому, Гауссу не хотелось публично затрагивать какой-либо спорный вопрос. В письмах он говорит об осах, которые могут в него впиться, и о «криках беотийцев», которые раздадутся, если раскрыть его тайны. Про себя Гаусс сомневался в справедливости распространенной кантовской доктрины, что наше понятие пространства априорно и евклидово,— для него реальная геометрия пространства была физическим явлением, которое надо было открыть с помощью эксперимента.

4. В своей истории математики девятнадцатого века Феликс Клейн сравнивает Гаусса и французского математика Адриеиа Мари Лежандра, который был старше Гаусса на двадцать лет. Быть может, не вполне уместно сравнивать Гаусса с каким-либо математиком, за исключением самых великих, однако именно это сравнение показывает, что идеи Гаусса как бы носились в воздухе, потому что Лежандр, идя своими путями, работал над многими вопросами, которыми занимался Гаусс. С 1775 по 1780 г. Лежандр преподавал в военной школе в Па

рижe, а позже занимал различные официальные должности: профессора Нормальной школы, экзаменатора Политехнической школы и инспектора геодезических работ.

Как и Гауссу, ему принадлежат фундаментальные работы по теории чисел [«Опыт теории чисел» (Essai sur les nombres, 1798 г.), «Теория чисел» (Theorie des nombres, 1830 г.)], в которых он сформулировал закон квадратичной взаимности. Он дал важные работы по геодезии и теоретической астрономии. Он был столь же усердным вычислителем таблиц, как и Гаусс;



Адриен Мари Лежандр
(1752—1833)

в 1806 г. он изложил метод наименьших квадратов; он изучал притяжение эллипсоидов, даже таких, которые не являются поверхностями вращения, причем им введены «функции Лежандра». Как и Гаусс, он интересовался эллиптическими и эйлеровыми интегралами, равно как и основами и методами евклидовой геометрии.

Хотя Гаусс глубже проник в сущность всех этих различных областей математики, Лежандру принадлежат важные и выдающиеся работы. Его обширные руководства в течение долгого времени были в большом почете, особенно его «Упражнения по интегральному исчислению» (Exercices du calcul integral, в трех томах, 1811—1819 гг.) и «Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (Traite des fonctions elliptiques et des integrates euleriennes, 1827—1832 гг.), и поныне остающийся образцовым произведением. В своих «Основах геометрии» (Elements de geometric, 1794 г.) on отошел от платоновских идеалов Евклида и дал учебник элементарной геометрии, исходя из требований современной педагогики. Эта книга выдержала много изданий и была переведена на ряд языков, ее влияние было длительным

5. Началом нового периода в истории французской математики можно, пожалуй, считать учреждение военных

школ и академий в конце восемнадцатого века. Такие школы, некоторые из которых появились и вне Франции (Турин, Вулвич), отводили значительное место обучении математике как составной части подготовки военных инженеров. Карьера Лагранжа началась в Туринской артиллерийской школе, Лежандр и Лаплас были преподавателями военной школы в Париже, Монж — в Мезьере. Карно был капитаном инженерных войск. Интерес Наполеона к математике зародился в годы учебы в военных академиях Бриенна и Парижа. Когда во Францию вторглись роялистские армии, необходимость централизовать подготовку военных инженеров стала очевидной. Поэтому была основана Парижская политехническая школа (1794г.), школа, которая вскоре выросла в будущее учебное заведение вообще для инженеров и со временем стала образцом для всех технических и военных школ начала девятнадцатого века, включая Вестпойнтскую школу в США.

Важной составной частью учебного плана было преподавание теоретической и прикладной математики. Внимание уделялось как преподаванию, так и исследовательской работе. Лучшие ученые Франции были приглашены, чтобы помочь этой школе. Многие крупные французские математики были студентами, профессорами или экзаменаторами Политехнической школы[1]).

Для обучения в этом учреждении, как и в других технических школах, потребовался новый тип учебников. Кроме ученых трактатов для подготовленных читателей, что так типично для периода Эйлера, потребовались руководства для высшей школы. Некоторые из лучших учебников начала девятнадцатого столетия были подготовлены для студентов Политехнической школы и подобных учреждений. Влияние этих учебников можно проследить до наших дней. Хорошим примером такого руководства является «Трактат дифференциального исчисления и интегрального исчисления» (Traite du calcul differentiel et du calcul integral, в трех томах 1797—1802 гг.) Сильвестра Франсуа Лакруа, по которому целые поколения изучали анализ. Мы уже упоминали книги Лежандра. Еще одним примером является руководство Монжа по начертательной геометрии, которому все еще следуют многие современные книги по этому предмету.

') Ср. Jacobi C. G J, Werke,— Bd 7.— S. 355 (лекция, прочитанная в 1835 г).

6. Гаспар Монж, директор Политехнической школы, был научным руководителем группы математиков, связанной с этим учреждением. Его карьера началась в военной академии в Мезьере (1768—1789гг.), где на лекциях по фортификации он имел озможность развивать начертательную геометрию, особую область геометрии. Он опубликовал свои лекции в книге «Начертательная геометрия» (Geometrie descriptive, 1795—1799 гг.). В Мезьере он начал также приме нять анализ к исследованию пространственных кривых и поверхностей, и его работы позже были опубликованы в «Приложеи анализа к геометрии» (Application de I'analyse a la ometrie, 1809 г.). Это — первая книга по дифференциальной геометрии, хотя еще не вполне современная по форме изложения. Монж — один из первых математиков нового времени, кого мы считаем специалистом: он геометр, и даже его подход к уравнениям в частных производных носит отчетливо выраженный геометрический Характер.

Гаспар Монж (1746—1818)

Геометрия начала процветать в Политехнической школе благодаря влиянию Монжа. В начертательной геометрии Монжа содержался зародыш проективной геометрии, а ею мастерство в применении алгебраических и аналитических методов в теории кривых и поверхностей во многом содействовало развитию аналитической и дифференциальной геометрии. Жан Ашетт и Жан Батист Био развивали аналитическую геометрию конических сечений и поверхностей второго порядка. В «Опыте аналитической геометрии» (Essai de geometiie aoalytique, 1802г.) Био мы, наконец, можем распознать наш современный учебник аналитической геометрии. Ученик Монжа Шарль Дюпен, во времена Наполеона молодой инженер-кораблестроитель, применял методы своего учителя в теории по верхностей, где он нашел асимптотические и сопряженные линии. Дюпен стал профессором геометрии в Париже. За свою долгую жизнь он достиг видного положения и в области политики, и в области промышленности. «Индикатриса Дюпена» и «циклиды Дюпена» напоминают нам о его ранних интересах. В его книгах «Развитие геометрии» (Developpements de geometrie, 1813 г.) и «Применеиия геометрии» (Applications de geometrie, 1825 г.) много интересных соображений.

Самым своеобразным учеником Мошжа был Виктор Понсоле. Он получил возможность размышлять над методами своего учителя в 1813 г., когда жил в России, как военнопленный, после поражения «великой армии» Наполеона. Понселе привлекала чисто синтетическая сторона геометрии Монжа, и это привело его к той системе представлений, которую на два столетия раньше создавал Дезарг. Понселе стал основателем проективной геометрии «Трактат о проективных свойствах фигур» (Traite des proprietes projectives des figures) Понселе появился в 1822 г. Этот объемистый том содержит все существенные понятия, относящиеся к этой новой ветви геометрии, как гармоническое отношение, перспективность, проективность, инволюцию и даже циклические точки на бесконечности. Понселе знал, что фокусы конического сечения можно рассматривать как пересечение касательных к этому сечению из циклических точек. «Трактат» содержит также теорию многоугольников, вписанных в одно коническое сечение и описанных около другого конического сечения (так называемая «проблема замыкания» Понселе). Хотя эта книга была лишь первым полным трактатом по проективной геометрии, эта дисциплина в течение ближайших десятилетий достигла той степени совершенства, которая делает ее классическим примером законченной математической конструкции.

Хотя Монж был человеком твердых демократических убеждений, он относился лояльно к Наполеону, в котором он видел осуществителя идеалов революции. В 1815г., когда вернулись Бурбопы, Монж был устранен со своего поста и вскоре после этого умер. Все же Политехническая школа продолжала развиваться в духе Монжа. По самому характеру обучения было трудно отделить друг от друга чистую и прикладную математику. Много внимания уделялось механике, а математическая физика начала, наконец, освобождаться от «катоптрик» и «диоптрик» античных ученых.

Этьен Малюс открыл поляризацию света (1810г.), а Огюстен Френель возродил волновую теорию света Гюйгенса (1821г.). Андре Мари Ампер, которому принадлежат выдающиеся работы по уравнениям в частных производных, после 1820г. стал пионером в области электромагнетизма. Эти исследователи много дали математике, непосредственно и опосредствованно. Одним из примеров является усовершенствованная Дюпеном геометрия световых лучей Малюса, что способствовало модернизации геометрической оптики и явилось вкладом в геометрию прямолинейных конгруэнции.

«Аналитическая механика» Лагранжа была предметом тщательного изучения, ее методы проверялись и применялись. В статике, в силу ее геометрического характера, опирались на Монжа и на его учеников, и в течение этик лет появились несколько трактатов по статике, включая и принадлежащий самому Монжу (1788г., ряд изданий). В полной силе геометрическое направление в статике утвердил Луи Пуансо, в течение многих лет член французского Высшего совета народного образования. Его «Начала статики» (Elements de statique, 1804 г.) и «Новая теория вращения тел» (Theorie nouvelle de la rotation des corps, 1834 г.) добавили к представлению о силе представление о вращающем моменте (пара); теория Эйлера моментов инерции была дополнена эллипсоидом инерции, и было исследовано движение этого эллипсоида при движении твердого тела в пространстве и при вращении вокруг неподвижной точки. Понселе и Кориолис придали геометрический характер лагранжевой аналитической механике. Оба они, равно как и Пуансо, выделяли применение механики к теории машин. «Кориолисово ускорение», которое появляется, когда тело движется относительно ускоряемой системы координат,— один из примеров геометрической интерпретации результатов Лагранжа (1835 г.).

[10] Сказанное об отношении Пуансо, Понселе и Кориолиса к аналитической механике Лагранжа требует уточнения. Пуансо был решительным сторонником геометрических методов в механике в силу того, что он стремился к наглядному представлению всех обстоятельств движения и различных величин, характеризующих движение. Согласно Пуансо, мало вывести описывающие движение формулы, рассчитать движение, надо еще представить результат таким образом, чтобы можно было по данному решению как бы увидеть процесс движения. Понселе, который занялся механикой уже после своих капитальных исследовании по проективной геометрии, стремился применять теоретические результаты и методы

к задачам прикладного характера, в теории машин и механизмов. Заодно он ставил себе целью довести теорию до практиков, дать шложеппе методов и результатов, доступное пе только инженерам, но и техникам, мастерам, ремослишшкам.

Не отвергая аналитических методов, Попселе и примыкавшие к нему Кориолис и другие механики ставили и решали задачи, связанные с техническими запросами (первый вывод общей формулы для ускорения в относительном движении, данный Кориолнсом,— чисто аналитический): они учитывали трение (чего совсем нет у Лагранжа), пользуясь эмпирическими коэффициентами; следуя призыву Ампера, развивали кинематику механизмов; четко определили понятие работы и применяли закон живых сил в динамике машин оценивая потерю работы (энергии) вследствие наличия трущихся поверхностен и т. п. В механике Пуансо — представитель «наглядного направления», но он остается механикомтеоретиком, Понселе и Кориолис — представители «индустриального направления», и они объединяют воедино и в своих курсах, и в своей исследовательской работе теоретическую механику с новыми формирующимися дисциплинами: динамикой машин и кинематикой механизмов.

Наиболее выдающимися математиками, связанными с Политехнической школой в ее раннем периоде, были — кроме Лагранжа и Монжа — Симеон Пуассон, Жозеф Фурье и Огюстен Коши. Все трое глубоко интересовались применениями математики к механике и к физике и все трое благодаря таким интересам пришли к открытиям в чистой математике. На продуктивность Пуассона указывает частое упоминание его имени в наших учебниках: скобки Пуассона в теории дифференциальных уравнений, постоянная Пуассона в теории упругости, интеграл Пуассона и уравнение Пуассона в теории потенциала. Это «уравнение Пуассона», $\Delta v=4\pi\rho$, было результатом открытия Пуассона (1812 г.), что уравнение Лапласа $\Delta v=0$ имеет силу только вне масс, а строгое доказательство для масс переменной плотности было дано лишь Гауссом в его «Общих теоремах» (1839—1840гг.). «Трактат по механике» (Traite de mecanique, 1811 г.) Пуассона написан в духе Лагранжа и Лапласа, но содержит много новшеств, как, например, явное использование импульсов $p_i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, что позже сказалось на работах Гамильтона и Якоби. Изданная им в 1837 г. книга содержит «закон Пуассона» в теории вероятностей.

О Фурье мы прежде всего вспоминаем как об авторе «Аналитической теории теплоты» (Theorie analytique de la chaleur, 1822г.). Это — математическая теория теплопроводности и, стало быть, в основном исследование уравнения $\Delta v=k*\partial v/\partial t$. В силу общности метода эта книга стала источником всех современных методов математической физики, относящихся к интегрированию уравнений в частных производных при заданных граничных условиях. Методом Фурье было применение тригонометрических рядов, что уже было предметом дискуссии между Эйлеров Даламбером и Даниилом Бернулли. Фурье полностью разъяснил положение вещей. Он установил тот факт, что «произвольную» функцию (функцию, которую можно изобразить дугой непрерывной кривой или сочетанием таких дуг) можно представить тригонометрическим рядом вида $\Sigma(A_n\cos nax + B_n sin nax)$. Несмотря на все то, что было указано Эйлером и Бернулли, эта идея была настолько нова и ошеломляюща во времени Фурье, что, согласно преданию, когда он впервые в 1807г. высказал свои соображения, он встретил энергичную оппозицию со стороны не кого иного, как Лагранжа. Ряды Фурье теперь стали хорошо разработанным средством в теории уравнений в частных производных при решении граничных задач. Они и сами по себе привлекают внимание благодаря присущим им свойствам. Исследование этих рядов, проведенное Фурье, отчетливо поставило вопрос о том, что следует понимать под функцией. Это было одной из причин того, что математики девятнадцатого столетия сочли необходимым более тщательно рассмотреть вопросы о строгости математических доказательств и об общих основах математических понятий[1]). За эту задачу» в частном случае рядов Фурье, взялись Дирихле и Риман.

7. Достижения Коши в работах, по математическому анализу отодвинули в тень его многочисленные труды по оптике и механике, но мы не должны забывать, что он, вместе с Навье, принадлежит к основателям математической теории упругости. Больше всего славы принесли ему теория функций комплексного переменного и то, что он настаивал на строгости математического анализа

') Jourdain F. P. B. Note on Fourier's Influence on the Conceptions of Mathematics / Proc. Intern. Congress Math Cambridge, 1912.— V. 2.— P. 526, 527, Функции комплексного переменного былнг введены еще раньше, в частности Даламбером, который в одной из работ о сопротивлении жидкостей (1752 г.) получил даже то, что мы теперь называем уравнениями Коши — Римана, Но в руках Коши теория функций комплексного переменного превратилась из полезного для гидродинамики и аэродинамики орудия в новую и самостоятельную область математических исследований. Работы Коши в этой области, начиная с 1814 г., появляются непрерывно. Одной из наиболее важных является его «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (Memoire sur les integrales definies, prises enlre des limites imaginaires, 1825 г.). В этой работе мы находим интегральную теорему Коши, в связи с чем вводятся вычеты. Теорема о том, что всякую регулярную функцию f(z) можно разложить вблизи любой точки $z = z_0$ в ряд, сходящийся в круге, проходящем через особую точку, ближайшую к $z = z_0$, была опубликована в 1831 г., в том самом году, когда Гаусс опубликовал свою арифметическую теорию комплексных чисел. Обобщение теоремы Коши о рядах, данное Лораном, было опубликовано в 1843г., когда его знал также и Вейерштрасс. Эти факты показывают, что теории Коши не довелось встретиться с сопротивлением специалистов: с самого начала теория функций комплексного переменного была признана полностью.

Коши, вместе со своими современниками — Гауссом, Абелем и Больцано, принадлежит к пионерам в деле внедрения в математику повышенной строгости. Восемнадцатое столетие было в основном периодом экспериментирования, когда новые результаты сыпались в изобилии. Математики того времени не слишком заботились об обосновании своих исследований — о Даламбере рассказывают, что он заявил: «Шагайте вперед, и вера к вам придет». Когда они занимались обоснованием, как иной раз Эйлер и Лагранж, их аргументы не всегда были убедительными. Теперь же наступило время для точного выяснения смысла полученных результатов. Что является «функцией» вещественного переменного, которая настолько различно ведет себя в случае ряда Фурье и в случае степенного ряда? В каком отношении она находится к совершенно отличной «функции» комплексного переменного? Такие вопросы подняли все неразрешенные проблемы относительно обоснования анализа и существования потенциальной и актуальной бесконечности и выдвинули их на передний план[1]). То, что делал Евдокс во времена, последовавшие за падением афинской демократии, Коши и его скрупулезные современники начали завершать во времена промышленного капитализма. Разница в общественных условиях привела к различным результатам: успех Евдокса вел к замиранию продуктивности, успех реформаторов нового времени в высокой мере стимулировал математическую деятельность. За Коши и Гауссом последовали Вейерштрасс и Кантор.

Коши дал то обоснование анализа, которое сейчас является общепринятым в наших учебниках. Это можно найти в его «Курсе анализа» (Cours d'analyse, 1821г.) и в его «Резюме лекций, прочитанных в Королевской политехнической школе» I (Resume des legons donnees a 1'ecole royale polytechnique, 1823г.). Коши использовал даламберово понятие предела, чтобы определить производную от функции и, таким образом, более прочно обосновать это понятие, чем были в состоянии сделать его предшественники.

Исходя из определения предела, Коши дает примеры такие, как предел $\sin\alpha/\alpha$ при $\alpha=0$. Затем он определяет «бесконечно малое переменное» как переменное число, предел которого есть нуль, и далее постулирует, что Δy и Δx «будут бесконечно малыми количествами». Затем он пишет $\Delta y/\Delta x=(f(x+i)-f(x))/i$ и называет предел при $i\to 0$ «производной функцией y' или $f(x)$». Он полагает затем $i = \alpha h$, где α — «бесконечно малое», а h— «конечное количество»:

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h$$

называет h «дифференциалом функции $y = f(x)$. Далее, $dy=df(x)=hf'(x)$; $dx= h$ [2]).

Коши пользовался и обозначениями Лагранжа, и многими его результатами в теории вещественных функций, ничего не заимствуя из алгебраического обоснования по Лагранжу. Теорема о среднем значении и остаточный

[1]) Jour da in P. E. B. The Origin of Cauchy's Conception of a Definite Integral and of the Continuity of a Function // Isis.— 1913.— V. 1P 661703, см также: Bibl. Math. 1905 V. 6. P. 190— 207.

[2]) Resume I (1823). Calcul differentiel 13—27. Точный анализ такого приема см : P a s h M. Mathematik am Ursprung.— Leipzig. 1927 S. 4773.

Эварист Галуа (1811—1832)

член ряда Тейлора вводились так, как их вывел Лагранж, но на этот раз исследование ряда велось с должным учетом его сходимости. Несколько признаков сходимости в теории бесконечных рядов носят имя Коши. В его книгах вполне определенно намечается та арифметизация анализа, которая позже стала сутью исследований Вейерштрасса. Коши дал также первое доказательство существования решения дифференциального уравнения и системы таких уравнений (1836г.). Таким образом, Коши, наконец, заложил основы для ответа на тот ряд проблем и парадоксов, которые были бичом математиков со времен Зенона, и он сделал это, не отрицая и не игнорируя их, а создав математическую технику, которая дала возможность их учесть. Коши, как и его современник Бальзак, с которым его сближает почти неограниченная продуктивность, был легитимистом и роялистом. Но оба они были настолько глубоки в своих оценках, что, несмотря на их реакционные идеалы, многое в их произведениях сохраняет основополагающее значение. После революции 1830 г. Коши оставил свою кафедру в Политехнической школе и провел несколько лет в Турине и Праге; он вернулся в Париж в 1838 г. После 1848г. ему было разрешено остаться во Франции и преподавать, не принося присяги новому правительству. Его продуктивность была настолько велика, что Парижская академия должна была ограничить объем всех статей, публикуемых в ее «Comptes Rendus» (отчетах), для того чтобы справиться с продукцией Коши. Рассказывают, что он так взволновал Лапласа, когда прочел свою первую работу о сходимости рядов в Парижской академии, что этот великий ученый поспешил домой, для того чтобы проверить ряды в своей «Небесной механике». Кажется, он установил, что там нет грубых ошибок.

8. Парижская среда с ее напряженной математической деятельностью породила, около 1830 г., гения первой величины, который подобно комете исчез также внезапно, как и появился. Эварист Галуа, сын мэра маленького городка вблизи Парижа, дважды не был принят в Политехническую школу и лишь затем он поступил в Нормальную школу, но был оттуда уволен. Он старался просуществовать, обучая математике и одновременно стараясь какнибудь совместить свою страстную любовь к науке и приверженность к демократическим идеям. Галуа как республиканец участвовал в революции 1830 г., несколько месяцев провел в тюрьме и вскоре после этого, двадцати одного года от роду, был убит на дуэли. Две статьи, которые он послал в печать, пропали в редакторских ящиках, несколько других статей были напечатаны спустя много лет после его смерти. Накануне дуэли он написал одному из друзей резюме своих открытий в теории уравнений. Этот драматический документ, в котором он просит своего друга сообщить о его открытиях ведущим математикам, заканчивался такими словами:

«Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать всю эту галиматью».

Эта галиматья («ce gachis») содержала ни много ни мало теорию групп, ключ к современной алгебре и к современной геометрии. В известной мере эти идеи были предвосхищены Лагранжем и итальянцем Руффини, но Галуа имел уже полное представление о теории групп. Он нашел основные свойства группы преобразований, связанной с корнями алгебраического уравнения, и показал, что область рациональности этих корней определяется такой группой. Галуа указал на то центральное положение, которое занимают инвариантные подгруппы. В теории Галуа нашли свое естественное место старые проблемы такие, как трисекция угла, удвоение куба, решение кубических и биквадратных уравнений, равно как решение алгебраического уравнения любой степени. Насколько нам известно, письмо Галуа не попало ни к Гауссу, ни к Якоби. Математическая общественность не знала об этом письме до того, как Лиувилль напечатал большую часть работ Галуа в своем журнале в 1846 г., когда Коши уже начал печатать свои работы по теории групп (1844—1846гг.). Лишь тогда некоторые математики заинтересовались теориями Галуа. Полное понимание значения

Галуа было достигнуто лишь благодаря «Трактату о подстановках» (Traite des substitutions, 1870 г.) Камилла Жордана и последовавшим за этим работам Клейна и Ли. Теперь объединяющий подход Галуа признается одним из самых выдающихся достижений математики девятнадцатого столетия[1]).

У Галуа были новые идеи и относительно интегралов от алгебраических функций одного переменного, которые мы сейчас называем абелевыми интегралами. Таким образом, ход его мыслей близок к ходу мыслей Римаш. Можно, конечно, лишь в порядке предположения сказать, что, проживи Галуа дольше, современная математика вдохновлялась бы больше всего Парижем и школой Лагранжа, а не Гёттингеном и школой Гаусса.

9. В двадцатые годы появился другой молодой гений, Нильс Генрик Абель, сын сельского священника в Норвегии. Короткая жизнь Абеля почти столь же трагична, как жизнь Галуа. Будучи студентом в Христиании, он некоторое время думал, что решил уравнение пятой степени, но он сам поправил себя в брошюре, опубликованной в 1824г. Это — та знаменитая работа, в которой Абель доказал невозможность решения общего уравнения пятой степени в радикалах,— задача, которая занимала математиков со времен Бомбелли и Виета (доказательство, данное в 1799г. итальянцем Паоло Руффини, Пуассон и другие математики считали слишком неопределенным). Тогда Абель получил стипендию, что позволило ему совершить поездку в Берлин, Италию и Францию. Мучимый бедностью и чахоткой, робкий и сдержанный молодой математик завязал лишь немного знакомств. Он умер вскоре после возвращения на родину (1829г.). Во время своего путешествия Абель написал несколько работ, в которых изложены его исследования о сходимости рядов, по «абелевым» интегралам и по эллиптические функциям. Теоремы Абеля в теории бесконечных рядопоказывают, что он мог подвести под эту теорию прочный фундамент. «Можешь ли ты вообразить нечто более ужасное, чем утверждение, что $0 = 1^n — 2^n + 3^n — 4^n + \ldots$, где *n* — положительное целое число?»— писал он одному и друзей и продолжал:

') См. Miller G A. History of the Theory of Groups to 1900 /, Coll. Works, v. 1.— 1935.—P. 427—467, «В математике вряд ли есть хоть один бесконечный ряд, сумма которого была бы строго определена» (письмо кХолмбое, 1826 г.).

Исследования Абеля по эллиптическим функциям велись в непродолжительном, но увлекательном соревновании с Якоби. Гаусс в своих личных заметках уже уста|ювил, что обращение эллиптических интегралов приводиг к однозначным двоякопериодическим функциям, но он никогда не публиковал своих соображений. Лежандр, который положил столько усилий на эллиптические интегралы, полностью упустил это обстоятельство, и открытия Абеля, с которыми он познакомился уже стариком, произвели на него глубокое впечатление. Абелю повезло в том отношении, что новое периодическое издание охотно печатало его статьи: первый том «Журнала чистой и прикладной математики», издаваемого Креллем[1]), содержал ни много ни мало пять статей Абеля. Во втором томе (1827 г.) появилась первая часть «Исследований об эллиптических функциях» Абеля, с чего начинается теория двоякопериодических функций.

Мы говорим об интегральном уравнении Абеля и об абелевой теореме относительно суммы интегралов алгебраических функций, что приводит к абелевым функциям. Коммутативные группы носят название абелевых, что показывает, как тесно связаны идеи Галуа и Абеля.

10. В 1829 г., в год смерти Абеля, Карл Густав Якоб Цкоби опубликовал свои «Новые основы теории эллиптических функций» (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum). Автор был тогда молодым профессором Кёнигсбергского университета. Якоби, сын берлинского банкира, принадлежал к видной семье; его брат Мориц[2]) жил в Петербурге и был одним из первых русских ученых, занимавшихся экспериментальным исследованием .электрических явлений. После нескольких лет занятий в Берлине Якоби преподавал в Кенигсберге, с 1826 по 1843г. Затем он пробыл некоторое время в Италии, пытаясь восстановить свое здоровье, и закончил свой жизненный путь профессором Берлинского университета в 1851г., в возрасте сорока шести лет. Это был остроумный и либеральный мыслитель, вдохновляющий преподаватель

') Journal fur die reine und angewandte Mathematik, основанный (в Берлине) и в течении многих лет руководимый Креллем, издается и поныне.

[2]) Известный в нашей стране под именем Борис Семенович Якоби.— *Примеч. ред.*

и ученый огромной энергии, с большой ясностью мысли, что позволило ему затронуть почти все области математики.

Свою теорию эллиптических функций Якобп строил на основе четырех функций, так называемых тэта-функций, определенных бесконечными рядами. Двоякоперподические функции sn*u*, cn*u* и dn*u* и являются отношениями тэта-функций; они удовлетворяют некоторым тождествам и теоремам сложения, сходным с тождествами и теоремами для синуса и косинуса в обычной тригонометрии. Теоремы сложения эллиптических функции можно также рассматривать как частное применение теоремы Абеля о сумме интегралов алгебраических функций. В связи с этим возник вопрос, можно ли обратить гиперэллиптические интегралы так же, как удалось обратить эллиптические интегралы и получить эллиптические функции. Решение было найдено Якоби в 1832 г., когда он опубликовал свой результат, что такое обращение можно осуществить с помощью функций более чем одного переменного. Так родилась теория абелевых функций от p переменных, которая стала важной ветвью математики девятнадцатого столетия.

Сильвестр назвал якобианом известный функциональный определитель, чтобы воздать должное трудам Якоби по алгебре и по теории исключения. Самой известной из работ Якоби в этой области является статья «О построении и свойствах определителей» (De formatione et proprietatibus determinantium, 1841 г.), которая сделала теорию определителей общим достоянием математиков. Сама идея определителя значительно старше — она восходит в основном к Лейбницу (1693г.), щвейцарскому математику Габриэлю Крамеру (1750 г.) и Лагранжу (1770 г.), а название принадлежит Коши (1812г.). Миками указал, что японский математик Секи Кова пришел к идее определителя несколько ранее 1683 г.[1]).

С Якоби, быть может, лучше всего познакомиться по его прекрасным «Лекциям по динамике» (Vorlesungen uber Dynamik), опубликованным в 1866г. по записям 1842—1843гг. Они написаны в духе французской школы Лагранжа и Пуассона, но содержат множество новых мыслей. Мы находим здесь исследования Якоби по уравнениям в частных производных первого порядка и их

') M i k a m i I. On the Japanese Theory of Determinants // Isis.— 1914.— V. 2.— P. 9—36.

применению к дифференциальным уравнениям динамики. Интересную главу «Лекций по динамике» составляет определение геодезических линий на эллипсоиде; эта задача приводит к соотношению между двумя абелевыми интегралами.


Вильям Роуэн Гамильтон (1805—1865)

11. От «Лекций по динамике» Якоби естественно перейти к математику, чье имя часто связывается с именем Якоби,— Вильяму Роуэну Гамильтону (не следует путать его с его современником, единбургским философом Вильямом Гамильтоном). Всю свою жизнь он провел в Дублине, где он родился в ирландской семье. Он поступил в «Тринити колледж» (Trinity college — колледж троицы) в 1827 г., двадцати одного года от роду он стал королевским астрономом Ирландии и оставался в этой должности до своей смерти в 1865 г. Мальчиком он изучал континентальную математику, что было еще новостью в Великобритании, по работам Клеро и Лапласа и в своих исключительно оригинальных исследованиях по оптике и динамике показал, что он овладел новыми методами. Его теория световых лучей (1824г.) — это не только дифференциальная геометрия прямолинейных конгруэнции, это и теория оптических инструментов, что позволило Гамильтону предсказать коническую рефракцию в двуосных кристаллах. В этой работе появляется его «характеристическая функция», что стало руководящей идеей в «Об

щем методе динамики» (General Method In Dynamics), напечатанном в 1834—1835 гг. Замысел Гамильтона состоял в том, чтобы из одного общего принципа вывести как оптику, так и динамику. Эйлер, защищая Мопертюи, уже показал, что с этой целью можно использовать стационарность значения интеграла «действия». Следуя этому пути, Гамильтон сделал оптику и динамику двумя видами применения вариационного исчисления. Он ищет стационарное значение некоторого интеграла и рассматривает его как функцию пределов интегрирования. Это дает «характеристическую» или «главную» функцию, которая удовлетворяет двум уравнениям в частных производных. Одно из этих уравнений, которое обычно записывается в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = H(\frac{\partial s}{\partial q}, q)$$

Якоби особо выделил в своих лекциях по динамике, и теперь оно известно как уравнение Гамильтона — Якоби. Это затемнило значение характеристической функции Гамильтона, занимающей в его теории центральное место как средство объединения механики и математической физики. «Характеристическая функция» вновь была открыта Брунсом в 1895г. в геометрической оптике и под названием «эйконала» оказалась полезной в теории оптических инструментов.

Та часть работ Гамильтона но динамике, которая вошла в состав математики,– это прежде всего «каноническая форма, в которой он записал уравнения динамики: $q' = \partial H/\partial p$, $p' = -\partial H/\partial q$. Каноническая форма и дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби дали Ли возможность установить зависимость между динамикой и касательными преобразованиями. Другая воспринятая мысль Гамильтона — это вывод законов физики и механики из вариации некоторого интеграла. Современная теория относительности, равно как и квантовая механика, существенно использует «гампльтонову функцию».

1843г. был переломным в жизни Гамильтона. В этом году он открыл кватернионы, изучению которых он посвятил остальную часть своей жизни. Это открытие мы рассмотрим ниже.

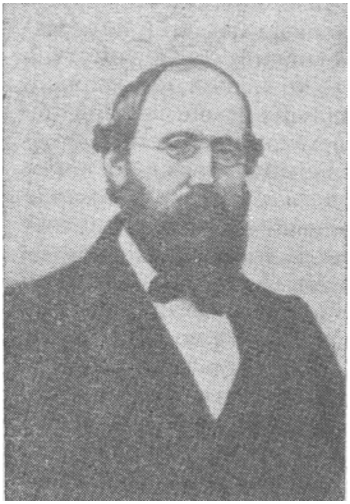
12. Петер Лежен Дирихле был тесно связан как с Гауссом и Якоби, так и с французскими математиками. 1822—1827 гг. Он жил в Париже как частный учитель

встречался с Фурье, чью книгу он изучил; он хорошо дознакомился также и с «Арифметическими исследованиями» Гаусса. Потом он преподавал в университете в Бреслау (ныне Вроцлав), а в 1855г. став преемником Гаусса в Гёттингене. Его личное знакомство как с французскими, так и с немецкими математиками и с математикой обеих стран позволило ему стать истолкователем Гаусса и вместе с тем подвергнуть глубокому анализу ряды Фурье. Его прекрасные «Лекции по теории чисел» (Vorlesungen iiber die Theorie der Zahleii, опубликованы в 1863 г.) все еще остаются одним из лучших введений в исследования Гаусса по теории чисел. Они содержат также много новых результатов. В работе 1840г. Дирихле показал, как использовать всю мощь теории аналитических функций в задачах теории чисел, и в этих исследованиях он ввел «ряды Дирихле». Ему принадлежит также обобщение понятия квадратичной иррациональности на общие алгебраические области рациональности (поля).

Дирихле дал первое строгое доказательство сходимости рядов Фурье, и этим он содействовал уточнению понятия функции. В вариационное исчисление он ввел так называемый принцип Дирихле, который утверждает существование функции (v), обращающей в минимум интеграл $\int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)dxdydz$ при заданных граничных условиях. Это было видоизменением принципа, введенного Гауссом в его теории потенциала 1839—1840 гг., а позже у Римана это оказалось мощным орудием при решении задач теории потенциала.

Мы уже упоминали о том, что Гильберт сумел строго обосновать этот принцип (с. 182).

13. Переходя к Бернгарду Риману, преемнику Дирихле в Гёттингене, мы встречаем человека, больше чем кто-либо другой повлиявшего на развитие современной математики. Риман был сыном деревенского священника, учился в Гёттингенском университете, где в 1851г. получил степень доктора. В том же университете в 1854 г. он стал приват-доцентом, а в 1859 г.— профессором. Болезненный, как и Абель, он провел последние месяцы жизни в Италии, где умер в 1866г. в сорокалетнем возрасте. За свою короткую жизнь он опубликовал сравнительно небольшое число работ, но каждая из них была и остается важной, а некоторые из них раскрыли совершенно новые и плодотворные области.



Георг Фридрих Бернгард Риман (1826-1866)

В 1851 г. появилась докторская диссертация Римана по теории функций комплексного переменного $u + iv = f(x+iy)$. Как и Даламбер и Коши, Риман исходил из гидродинамических соображений. Он конформно отображал плоскость (x,y) на плоскость (u,v) и устанавливал существование функции, преобразующей любую односвязную область одной плоскости на любую односвязную область другой плоскости. Это привело к понятию римановой поверхности, что ввело в анализ топологические представлления. В то время топология бьша еще почти незатронутым предметом, по которому была опубликована только одна работа Листинга в журнале «Gottinger Studien» за 1847 г. Риман показал существенное значение топологии для теории функций комплексного переменного. В этой диссертации разъясняется и риманово определение комплексной функции: ее действительная и мнимая части должны удовлетворять «уравнениям Коши — Римана», $u_x = v_v$, $u_y = — v_x$, в заданной области, а кроме того должны удовлетворять некоторым условиям па границе и в особых точках.

Риман применил свои идеи к гипергеометрическим и абелевым функциям (1857г.), широко пользуясь принципом Дирихле (это его же термин). Среди его результатов — открытие рода римановой поверхности как топологического инварианта и как средства классификации абелевых функций. В статье, опубликованной посмертно, эти идеи применяются к минимальным поверхностям (1867г.). К этому направлению деятельности Римана относится и его исследование по эллиптическим модулярным функциям и тэта-рядам с p независимыми переменными, а также работы по линейным дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами.

В 1854 г. Риман стал приват-доцентом, представив сразу две фундаментальные работы, одну по тригономет рическим рядам и по основам анализа, другую — по основам геометрии. В первой из этих работ рассмотрены условия Дирихле разложимости функций в ряд Фурье. Одним из этих условий было то, что функция должна быть интегрируемой. Но что это значит? Коши и Дирихле уже давали ответ на такой вопрос; Риман вместо их ответов дал свой, более содержательный. Он дал то определение, которое сейчас известно как интеграл Римана и которое было заменено лишь в двадцатом столетии интегралом Лебега. Риман показал, что функции, определенные рядами Фурье, могут обладать такими свойствами, как бесконечное число максимумов или минимумов, чего математики прежних времен не допустили бы, давая определение функции. Понятие функции стало по-настоящему высвобождаться от эйлерова представления о «любой кривой, произвольно начерченной от руки»[1]). В своих лекциях Риман приводил пример непрерывной функции, не имеющей производной; пример такой функции, данный Вейерштрассом, был опубликован в 1875г. Математики не хотели вполне серьезно относиться к этим функциям и называли их «патологическими», но современный анализ показал, насколько такие функции естественны. И здесь Риман опять-таки проник в существенную область математики.

Во второй работе 1854г. рассматриваются гипотезы, на которых основана геометрия. Пространство вводится как топологическое многообразие произвольного числа измерений, метрика в таком многообразии определяется с помощью квадратичной дифференциальной формы. В своем анализе Риман определял комплексную функцию по ее локальному поведению, здесь он таким же образом определяет характер пространства. Этот объединяющий принцип позволил Риману не только проклассифицировать все существовавшие виды геометрии, включая еще весьма неясную тогда неевклидову геометрию, но дал также возможность создать любое число новых типов пространства, многие из которых впоследствии с пользой были введены в геометрию и математическую физику. Риман опубликовал эту статью без какой-либо формульной техники, что затруднило понимание его мыслей. Позже некоторые формулы были приведены в премированной работе о распределении теплоты в твердом теле, которую Риман представил в Парижскую академию

') Эйлер Л. Интегральное исчисление, т. 3, § 301.

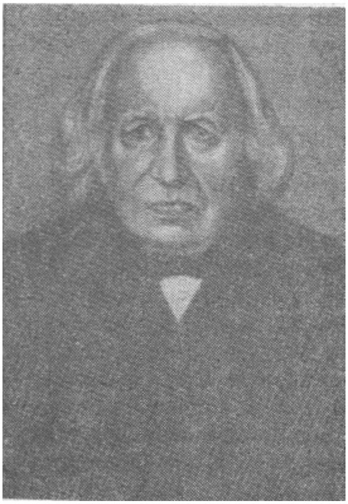
(l861 г.). Здесь мы имеем набросок теории преобразования квадратичных форм.

Наконец, мы должны упомянуть работу Римана в которой исследуется количество *F(x)* простых чисел меньших заданного числа *x* (1859 г.). Это было применением теории функций комплексного переменного к задаче о распределении простых чисел, и там анализируется догадка Гаусса о том, что *F(x)* аппроксимируется интегральным логарифмом $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$. Эта работа знаменита тем, что в ней содержится так называемая гипотеза Римана о дзета-функции Эйлера ζ(s) (это обозначение принадлежит Риману) для комплексных $s = x + iy$: все не действительные нули этой функции находятся на прямой $x = 1/2$. Эта гипотеза до сих пор и не доказана и не опровергнута[1]).

14. Часто сравнивают риманово определение функции комплексного переменного с аналогичным определением Вейерштрасса. Карл Вейерштрасс в течение многих лет был учителем одной из прусских гимназий, в 1856 г. он стал профессором математики Берлинского университета, где преподавал в течение тридцати лет. Слава его лекций, всегда тщательно подготовленных, все возрастала; главным образом благодаря этим лекциям идеи Вейерштрасса стали общим достоянием математиков.

За время работы в гимназии Вейерштрасс написал несколько статей о гиперболических интегралах, абелевы функциях и алгебраических дифференциальных уравнениях. Более всего известно его обоснование теории функций комплексного переменного с помощью степенных рядов. В некотором смысле это было возвращение к Лагранжу, с тем отличием, что Вейерштрасс оперировал в комплексной плоскости и вполне строго. Значения степенного ряда внутри его круга сходимости представляют «элемент функции», а затем, если это возможно, осуществляется расширение с помощью так называемоеаналитического продолжения. Вейерштрасс особо изучал целые функции и функции, определенные бесконечными произведениями. Его эллиптическая функция $\wp(u)$ столь

[1])Courant R. Bemhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre / Naturwissenschaften.—1926.— Bd 14.— S, 813-818.



Карл Вейерштрасс
(1815—1897)

же укоренилась, как и более ранние функции sn *u,* cn *u,* dn *u* Якоби.

Своей славой Вейерштрасс обязан исключительной тщательности рассуждений, «вейерштрассовой строгости», что проявилось не только в его теории функций, но и в его вариационном исчислении, Он разъяснил понятия минимума, функции, производной, и таким образом он устранил те неясности выражений, которые оставались в формулировке основных понятий анализа. Он был воплощением математической скрупулезности как методологически, так и логически. Другой пример скрупулезности его рассуждений дает нам его открытие равномерной сходимости. С Вейерштрасса начинается то сведение принципов математического анализа к простейшим арифметическим понятиям, которое мы называем арифметизациеи математики.

«В основном это заслуга научной деятельности Вейерштрасса, что теперь в анализе существуют полное согласие и уверенность относительно таких способов рассуждения, которые основаны на понятии иррационального числа и предела вообще, и ему мы обязаны тем, что существует единодушное относительно всех результатов, даже в наиболее сложных вопросах, касающихся теории дифференциальных и интегральных уравнений,— несмотря на самые дерзновенные и разнообразные сочетания при применении наложения, комбинации и перестановки пределов»[1]).

15. Эта арифметизация характерна для так называемой Берлинской школы и, в частности, для деятельности Леопольда Кронекера. К этой школе принадлежали та

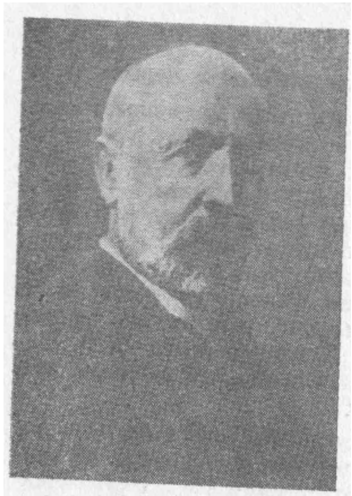
') H i l b e r t D. Uber das Unendliche / Math. Ann.— 1926.— Bd 95.—S. 161. На русском языке см. в книге: Гильберт Д. Основания геометрии.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948, Добавление VIII, О бесконечном, с. 338, 339.

кие выдающиеся, плодотворные в области алгебры и теории алгебраических чисел математики, как Кронекер, Куммер и Фробениус. К ним мы можем присоединить Дедекинда и Кантора. Эрнст Куммер был приглашен в Берлин в 1855г., чтобы заменить Дирихле. Он преподавал там до 1883г., когда сам решил прекратить математическую деятельность, так как почувствовал, что его творческая продуктивность падает. Куммер развивал дифференциальную геометрию конгруэнции, набросок которой дал Гамильтон, и при этих исследованиях он открыл поверхность четвертого порядка с шестнадцатью угловыми точками, названную его именем. Славу ему создало прежде всего то, что он ввел идеальные числа в теорию алгебраических областей рациональности (1846г.). Эта теория была создана отчасти в связи с попытками Куммера доказать великую теорему Ферма, отчасти в связи с теорией Гаусса биквадратичных вычетов, в которой понятие простых множителей перенесено в область комплексных чисел. Идеальные множители Куммера дают возможность единственным образом разлагать числа на простые множители в общей области рациональности. Это открытие сделало возможным значительное продвижение в арифметике алгебраических чисел; полученные здесь результаты мастерски резюмированы в отчете Давида Гильберта, представленном немецкому Математическому обществу в 1897 г. Теория Дедекинда и Вебера, в которой устанавливается зависимость между теорией алгебраических функций и теорией алгебраических чисел в некоторой области рациональности (1882 г.) — пример влияния теории Куммера на процесс арифметизацпи математики.

Леопольд Кронекер, человек зажиточный, поселился в Берлине в 1855 г., и там он в течение многих лет преподавал в университете, не занимая формально профессорской кафедры, которую он принял лишь после отставки Куммера в 1883 г. Главные результаты Кронекера относятся к теории эллиптических функций, к теории идеалов и к арифметике квадратичных форм. Опубликованные его лекции по теории чисел содержат тщательное изложение его собственных и более ранних открытий; в них ясно видна его уверенность в необходимости арифметизации математики. В основе этой уверенности было стремление к строгости: Кронекер полагал, что основой математики должно быть число, а основой всех чисел — натуральное число. Например, число π надо определять не обычным геометрическим путем, а рядом $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$, то есть в виде комбинации целых чисел; для той же цели могут служить некоторые непрерывные дроби для π. Стремление Кронекера вложить все математическое в рамки теории чисел показывает хорошо известное его заявление на съезде в Берлине в 1886 г.: «Целые числа сотворил господь бог, а все прочее — дело людских рук». Он допускал только такое определение математического понятия, для которого требовалось лишь конечное число шагов. Таким образом он преодолевал трудности актуально бесконечного, отказываясь принимать это понятие. В школе Кронекера лозунг Платона, что бог всегда «геометризует», был заменен лозунгом, что бог всегда «арифметизирует».

Учение Кронекера об актуальной бесконечности резко противоречило теориям Дедекинда и Кантора. Рихард Дедекинд, в течение тридцати одного года состоявший профессором Высшей технической школы в Брауншвейге, построил строгую теорию иррационального числа. В двух небольших книжках, «Непрерывность и иррациональные числа» (Stetigkeit und irrationale Zahleu, 1872 г.) и «Что такое числа и для чего они служат» (Was sind und was sollen die Zahlen, 1882 г.) он проделал для современной математики то, что сделал Евдокс для греческой. Существует большое сходство между дедекиндовым сечением, с помощью которого современные математики (исключая школу Кронекера) определяют иррациональные числа, и античной теорией Евдокса, как она изложена в пятой книге «Начал» Евклида. Кантор и Вейерштрасс дали арифметическое определение иррационального числа, несколько отличающееся от теориии Дедекинда, но основанное на сходных соображениях.

Однако в глазах Кронекера самым большим еретиком был Георг Кантор. Кантор, который преподавал в Галле с 1869 по 1905г., известен не только благодаря его теории иррационального числа, но и благодаря его теории множеств. Этой теорией Кантор создал совершенно новую область математических исследований, которая удовлетворяет самым суровым требованиям к строгости, если только принять ее исходные посылки. Публикации Кантора начались в 1870г. и продолжались ряд лет; в 1883 г. он напечатал свои «Основы общего учения о многообразиях» (Grundlagen einer allgememen Maimigfaltigkeitslehre). В этих работах Кантор построил теорию трансфинитных кардинальных чисел, основанную на систематическом использовании математически актуальной бесконечности. Низшее кардинальное число $\aleph_0$ он при писал счетному множеству, континууму он приписал более высокое трансфинитное число, и это дало возможность создать арифметику трансфинитных чисел, подобную обычной арифметике. Кантор так же дал определение порядковых трансфинитных чисел, показывающих, как упорядочены бесконечные множества.


Георг Кантор (1845—1918)

Эти открытия Кантора были продолжением давних схоластических спекуляций относительно природы бесконечного, и Кантор это хорошо осознавал. Он отстаивал полное признание актуальной бесконечности у святого Августина, но сам должен был защищаться против вощражений многих математиков, которые отказывались принять бесконечное иначе, как процесс, выражаемый значком ∞. Главным оппонентом Кантора был Кронекер – представитель совершенно противоположного направления в том же процессе арифметизации математики. Кантор в конце концов добился полного признания тогда, когда все более очевидным становилось огромное значение его теории для обоснования теории действительных функций и топологии, – особенно после того, как Лебег в 1901г. обогатил теорию множеств своей теорией меры. Но оставались логические трудности теории трансфинитных чисел и были выявлены парадоксы, как, например, парадокс Бурали-Форти и Рассела. Это опять повело к возникновению различных школ в области обоснования математики. Расхождения между формалистами и интуитивистами двадцатого века были продолжением на новом уровне спора между Кантором и Кронекером

16. Одновременно с этим замечательным развитием алгебры и анализа происходил столь же замечательный расцвет геометрии. Истоки этого можно проследить вплоть до преподавательской деятельности Монжа, в которой мы находим корни как «синтетического», так и «алгебраического» метода геометрии. Проективная геометрия как отдельная дисциплина начинается книгой Понселе 1822г. Возникали споры о приоритете, как это часто случается с фундаментальными открытиями, ибо Понселе имел соперника в лице Жозефа Жергонна, профессора в Монпелье. Жергонн опубликовал несколько важных работ по проективной геометрии, в которых он одновременно с Понселе выяснил значение двойственности в геометрии. Эти работы появились в Annales de mathematiques, первом чисто математическом периодическом издании. Жергонн был его редактором; этот журнал выходил с 1810 по 1832г. Типичным для способа мышления Понселе был другой принцип, принцип непрерывности, позволявший ему выводить свойства одной фигуры из свойств другой. Он формулировал этот принцип следующим образом: «Если одна фигура получается из другой непрерывным изменением и столь же обща, как и первая, тогда без дальнейших соображений можно отнести свойства, доказанные для первой фигуры, ко второй».

Это был принцип, с которым надо было обращаться весьма осторожно, потому что его формулировка далеко не точна. Только современная алгебра позволила более строго определить область его применимости. В руках Понселе и его школы этот принцип дал интересные новые и верные результаты, особенно тогда, когда он применялся при переходе от действительного к мнимому. Он позволил Понселе установить, что все окружности на плоскости имеют две общие мнимые точки на бесконечности, и это привело также к понятию так называемой бесконечно удаленной прямой плоскости. Харди заметил, что это означает безоговорочное принятие в проективной геометрии актуальной бесконечности[1]). У аналитиков не было общего мнения по этому вопросу.

Дальнейшее развитие идеи Понселе получили у немецких геометров. В 1826 г. появилась первая работа Штейнера, в 1827 г. — «Барицентрическое исчисление» (Der Barycentrische Calctil) Мёбиуса, в 1828 г. первый том

') H a r d y G. H. A Course of Pure Mathematics — 6th ed — Cambridge, 1933, IV дополнение. В русском переводе: Харди Г. Х. Курс чистой математики —М.: ИЛ, 1949 —С. 506, 507.

«Аналитико-геометрических изысканий» Плюккера (Analylischgeometrische Entwicklungen). В 1831г. появился второй том этого сочинения, за которым в 1832 г. последовало «Систематическое исследование взаимозависимости геометрических образов» (Systematische Entwicklung der Abhangigkeit geometrischen Gestalten voneinander) Штейнера. Последняя из больших основополагающих немецких работ по геометрии такого рода появилось і 1847 г. — это аксиоматическая «Геометрия положения {Geometric der Lage) фон Штаудта.

У немецких геометров был представлен как синтетический, так и алгебраический подход к геометрии. Типичным представлением синтетической (или «чистой») школы был Якоб Штейнер, сын швейцарского крестьянина, «пастушок», который увлекся геометрией, когда познакомился с идеями Песталоцци. Он решил учиться в Гейдельберге, потом преподавал в Берлине, где с 1834г. до своей смерти в 1863г. занимал университетскую кафедру, Штейнер был исключительно геометром, он настолько не терпел применения алгебры и анализа, что отвергал даже рисунки. По его мнению, лучше всего изучать геометрию, напряженно размышляя. Он говорил, что вычисление заменяет мышление, тогда как геометрия стимулирует его. Это, несомненно, было верно для самого Штейнера, методы которого обогатили геометрию большим количеством прекрасных теорем, нередко очень глубоких. Мы обязаны ему открытием поверхности Штейнера с двойной бесконечностью конических сечений на ней (ее называют также римской поверхностью). Он часто опускал доказательства своих теорем, что делает собрание сочинений Штеинера складом сокровищ для геометров, которые ищут требующих решения задач.

Штейнер строил свою проективную геометрию строго систематически, переходя от перспективности к проективности, а затем к коническим сечениям. Он решил также ряд пзопериметрических задач типичными для него геометрическими приемами. Его доказательство того, что круг — это фигура наибольшей площади из всех замкнутых кривых заданного периметра (1836 г.), основано на преобразовании каждой фигуры заданного периметра, которая не является кругом, в другую фигуру того же периметра, но большей площади. Но вывод Штеинера, что в силу этого круг соответствует максимуму, содержит одно упущение: он не доказал, что максимум действительно существует. Дирихле пытался указать на это

Якоб Штейнер (1798—1813)

Штейнеру, строгое же доказательство было позже дано Вейерштрассом[1]).

Все-таки Штейперу неходима была метрика, чтобы определить сложное отношение четырех точек или прямых. Этот недостаток теории был устранен Христианом фон Штаудтом, в течение многих лет состоявшим профессором университета в Эрлангене. Штаудт в своей «Геометрии положения» определяет «вурф» четырех точек на прямой линии чисто проективным путем, а затем показывает, что вурф совпадает со слож ным отношением. Для этого он использует конструкцию так называемой мёбиусовой сети, что при введении иррациональных значений проективных координат требует аксиоматических соображений, тесно связанных с работами Дедекпнда. В 1857г. Штаудт показал, что мнимые элементы можно строго ввести в геометрию как двойные элементы эллиптических инволюций.

В течение ближайших десятилетий синтетическая геометрия обогатилась многими результатами, сохраняя основы, заложенные Понселе, Штейнером и Штаудтом. Она была изложена в ряде отличных руководств; в качестве одного из наиболее известных укажем «Геометрию положения» (Geometric der Lage) Рейе (1868 г., 3е изд. 1886-1892 гг.)[2]).

17, Представителями алгебраической геометрии были в Германии Мёбиус и Плюккер, во Франции — Шаль, в Англии — Кели. Август Фердинанд Мёбиус, в течение

') Blaschke W. Kreis und Kugel— 2 AuflL— Berlin, 1956 [русский перевод: Бляшке В. Круг и шар.—М.: Наука, 1967]; на русском языке см. К р ы ж а н о в с к и и Д. А. Изопериметры.— 3е изд — М., 1959.

[2]) В английском переводе: R e y e P. T. Lectures on the Geometry of Position.— N. Y., 1898.

более чем пятидесяти лет наблюдатель, а потом директор Лейпцигской астрономической обсерватории, был разносторонним ученым. В книге «Барицентрическое исчисление» он первый ввел однородные координаты. Поместив, в вершинах фиксированного треугольника массы m_1, m_2 m_3, Мёбиус приписал центру тяжести (барицентру) этих масс координаты $m_1 : m_2 : m_3$ и показал, что такие координаты удобны для описания проективных и аффинных свойств на плоскости. С этого времени однородные координаты стали общепринятым средством при алгебраической трактовке проективной геометрии. Работая в спокойном уединении, подобно своему современнику Штаудту, Мёбиус сделал много других интересных открытий. Одним из примеров может быть нулевая система теории прямолинейных конгруэнции, которую ои ввел в своем руководстве по статике (1837г.). Лист Мёбиуса, первый пример неориентируемой поверхности, напоминает о том, что Мёбиус является также одним из основателей нашей современной топологии.

Юлиус Плюккер, который много лет преподавал в Бонне, был как геометром, так и физикомэкспериментатором. Ему принадлежит ряд открытий в области магнетизма кристаллов, электропроводности газов и спектроскопии. В ряде статей и книг, особенно в «Новой геометрии пространства» (Neue Geometrie des Raumes, 1868— 1869 гг.) он перестроил аналитическую геометрию, внеся в нее множество новых идей. Плюккер показал силу сокращенных обозначений, в которых, например, уравнение $C_1+\lambda C_2=0$ представляет связку конических сечений В упомянутой книге он вводит однородные координаты уже как проективные координаты, исходя из основного тетраэдра; он вводит здесь также то фундаментальное положение, что основным элементом в геометрии могут быть не только точки. Геометрия может основываться и на таких элементах, как прямые, плоскости, окружности, сферы. Эти плодотворные представления позволили по-новому осветить как синтетическую, так и алгебраическую геометрию и прийти к новым видам двойственности. Число измерений в геометрии того или другого вида теперь уже могло быть любым положительным целым числом, в зависимости от числа параметров, необходимых для того, чтобы определить «элемент». Плюккер опубликовал также общую теорию алгебраических кривых на плоскости, причем он вывел «плюккеровы зависимости» между числами особенностей различного рода (1834, 1839 гг.).

Мишель Шаль, в течение многих лет ведущий представитель геометрии во Франции, был студентом Политехнической школы в последние дни деятельности Монжа, а в 1841 г. он стал профессором этого учреждения. В 1846 г. он занял кафедру высшей геометрии в Сорбонне, специально для него учрежденную, и здесь он преподавал многие годы. Труды Шаля имеют много общего с работами Плюккера, в частности в том, с каким искусством он из своих уравнений извлекает максимум геометрических сведений. Идя по этому пути, он искусно пользовался изотропными прямыми и циклическими точками на бесконечности. Шаль был последователем Понселе в использовании «исчислптельных методов», которые в его руках развились в новую область геометрии, так называемую исчислительную («энумеративную») геометрию. В дальнейшем в этой области много работали Герман Шуберт [его «Исчислительная геометрия (Kalkiil der abzahlenden Geometrie) напечатана в 1879 г.] и Цейтен [его «Исчислительные методы» (Abzahlende Methoden) появились в 1914 г.]. В обеих книгах видны как сила, так и слабость этой разновидности алгебры на геометрическом языке. Первоначальные успехи этого направления вызвали реакцию, которую возглавил Штуди, подчеркивавший, что «точность геометрии не всегда следует рассматривать как нечто побочное»[1]).

Шаль был тонким ценителем истории математики, особенно истории геометрии. Его хорошо известный «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» (Apercu historique sur I'origine et le developpemenl des methodes en geometrie, 1837 г.) стоит у порога современной истории математики. Это — хорошо написанное изложение греческой и современной геометрии и хороший пример истории математики, написанной творческим деятелем науки.

18. В течение этих лет почти что лихорадочной продуктивности в новых областях проективной и алгебраической геометрии другой новый и даже более революционный вид геометрии, изложенный в немногих и трудных работах, оставался в забвении, и большинство ведущих математиков им пренебрегали. Вопрос о том, является ли

!) Study E. /I Verhandlungen des dritten Internationalen MathematikerKongresses in Heilelberg.—Leipzig, 1905.—S. 388— 395; van der Waerden B. L. Dissertation,— Leiden, 1926.

постулат о параллельных Евклида независимой аксиомой или же он может быть выведен из других аксиом, занимал математиков в течение двух тысяч лет. В древности найти ответ на этот вопрос пытался Птолемей, в средние века—Насир ад Дин, в восемнадцатом веке — Ламберг и Лежандр, Все они пытались доказать аксиому и потерпели неудачу, хотя в ходе своих исследований получили некоторые очень интересные результаты. Гаусс был первым человеком, который считал постулат о параллельных независимой аксиомой, откуда вытекало, что логически возможны другие геометрии, основанные на другом выборе аксиом. Гаусс никогда не публиковал своих соображений по этому вопросу. Первыми, кто открыто бросил вызов авторитету двух тысячелетий и построил неевклидову геометрию, были русский, Николай Иванович Лобачевский, и венгр, Янош Бояи. Сначала обнародовал свои идеи Лобачевский, профессор в Казани: в 1826 г, он выступил с докладом об аксиоме параллельных Евклида. Его первая книга появилась в 1829/30 г. и была написана по-русски. Узнали о ней лишь немногие. Даже более позднее немецкое издание под названием «Геометрические исследования по теории параллельных линий» не обратило на себя внимания, хотя им заинтересовался Гаусс. К тому времени Бояи тоже опубликовал свои мысли по этому вопросу.

Янош (Иоганн) Бояи был сыном учителя математики в провинциальном венгерском городе. Его отец, Фаркаш (Вольфганг) Бояи, учился в Гёттингенском университете в те же годы, что и Гаусс. Он и Гаусс изредка обменивались письмами. Фаркаш затратил много времени на попытки доказать пятый постулат Евклида (с. 69), но не пришел ни к каким определенным выводам. Его сын унаследовал его страсть и тоже начал работать над доказательством, несмотря на просьбы отца заниматься чем-либо другим;

«Ты должен отвергнуть это, подобно самой гнусной связи, это может лишить тебя всего твоего досуга, здоровья, покоя, всех радостей жизни. Это черная пропасть в состоянии, быть может, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон, на земле это никогда не прояснится...» (письмо от 1820 г.).

Япош Бояи поступил на военную службу и заслужил репутацию отличного офицера. В это время он стал рассматривать постулат Евклида как независимую аксиому и открыл, что можно построить геометрию, основанную на другой аксиоме, согласно которой через точку на плоскости можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую плоскости. Это была та самая идея, которая уже возникала у Гаусса и Лобачевского. Бояи изложил свои соображения, и они были напечатаны в 1832г. в виде приложения к книге его отца под названием «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве» (Appendix Sciontiam Spatil absolute veram exhibens). Озабоченный отец написал Гауссу, прося совета относительно неортодоксальных взглядов сына. Полученный из Гёттингена ответ содержал восторженное одобрение работы младшего Бояи. Вдобавок к этому Гаусс заметил, что он не может хвалить Бояи, так как это было бы самопохвалой, поскольку идеи «Приложения» являются его мыслями уже многие годы.

Молодой Янош был глубоко разочарован этим одобрительным письмом, которое возводило его в ранг большого ученого, но лишало приоритета. Его разочарование усилилось, когда в дальнейшем он не встретил признания. Еще более он был потрясен тогда, когда книга Лобачевского была опубликована на немецком языке (1840 г.), и он больше никогда ничего не напечатал по математике. В отличие от Бояи Лобачевский до конца боролся за признание своих идей и продолжал развивать свою новую геометрию, сочетая это с деятельностью и в других областях.

19. Имена Гамильтона и Кели показывают, что около 1840г. математики, пользовавшиеся английским языком, наконец, начали выходить на одну линию со своими коллегами на континенте. В течение нескольких первых десятилетий девятнадцатого века деканы Кембриджа и Оксфорда рассматривали любую попытку усовершенствовать теорию флюксий как нечестивый бунт против священной тени Ньютона. В итоге ньютонова школа в Англии и школа Лейбница на континенте настолько разошлись, что Эйлер в своем «Интегральном исчислении» (1768г.) рассматривал объединение обоих способов записи как бесполезное. Но эта преграда была сломлена в 1812г. группой молодых кембриджских математиков, которые образовали, вдохновляемые Робертом Вудхаузом, «Аналитическое общество» для пропаганды обозначений дифференциального исчисления. Лидерами были Джордж Пикок, Чарльз Бебедж и Джон Гершель. Они пытались, говоря словами Бебеджа, проповедовать «принципы чисто

го d-изма [1]) в противоположность университетскому «dotage»[2]). Это движение поначалу подверглось суровой критике, но она была опровергнута такими делами, как издание английского перевода книги Лакруа «Элементарный трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» (1816 г.). Новое поколение в Англии начало принимать участие в современной математике.

Впрочем, первые важные результаты были получены не кембриджской группой, а математиками, которые самостоятельно восприняли континенталъную пауку. Среди таких математиков наиболее выдающимися были Гамильтон и Джордж Грин. Интересно отметить, что они оба, равно как и Натаниел Боудич в Новой Англии, стали изучать «чистый *d*-изм», штудируя «Небесную механику) Лапласа. Грин, сын мельника из Нотингема и самоучка, весьма внимательно следил за новыми открытиями в области электричества. В то время (около 1825г.) почти что не было математической теории, учитывавшей электрические явления. Пуассон в 1812г. сделал только первые шаги. Грин читал Лапласа и, говоря его словами:

«Учитывая, насколько желательно подчинить расчету в той мере, в какой это возможно, силу столь универсального характера, как электричество, и размышляя о преимуществах, которые дает при решении многих трудных задач то, что мы можем сосредоточить свое внимание над одной особой функции, от дифференциалов которой зависят силы, действующие на различные тела системы, вместо того чтобы рассеивать свое внимание, исследуя каждую из этих сил в отдельности, я пришел к попытке, нельзя ли открыть какие-либо общие соотношения, существующие между этой функцией и между создающими ее количествами электричества в телах».

Результатом была книга Грина «Опыт применений математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism, 1828 г.), первая попытка создать математическую теорию электро

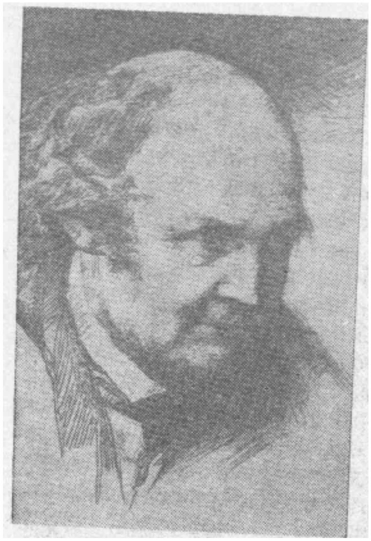
[1]) Игра слов: или применение обозначения «d» (по Лейбнийцу), или «деизм» — религия разума эпохи Просвещения

[2]) dot — точка (англ); dot с суффиксом age, соответствующие суффиксом «изм» или «ство», может обозначать «применение точек» (ньютонова символика) или «эпоха точек», если age (век) читать как отдельное слово, но dotage значит также старчески слабоумие...

магнетизма. Это стало началом современной математической физики в Англии, и вместе с работой Гаусса 1839г. дало теории потенциала положение независимой ветви математики. Гаусс не знал работы Грина, которая стала более широко известна лишь тогда, когда Вильям Томсон (впоследствии лорд Кельвин) перепечатал ее в журнале Крелля в 1846 г. Но Гаусс и Грин оказались настолько близки, что тогда как Грин выбрал термин «потенциальная функция», Гаусс выбрал почти такой же термин — «потенциал» для обозначения решения уравнения Лапласа. Два тесно связанных тождества между интегралами по поверхности и криволинейными носят название формулы Грина и формулы Гаусса. Термин «функция Грина» в теории дифференциальных уравнений тоже взят в честь сына мельника, изучавшего Лапласа в свои часы досуга.

Мы не располагаем местом для того, чтобы дать очерк дальнейшего развития математической физики в Англии или же в Германии. С этим связаны имена Стокса, Релея, Кельвина и Максвелла, Кирхгофа и Гельмгольца, Гиббса и многих других. Эти ученые столько сделали для решения уравнений в частных производных, что одно время математическая физика и теория линейных уравнений в частных производных второго порядка казались тождественными. Впрочем, математическая физика внесла плодотворные идеи и в другие области математики, в теорию вероятностей и теорию функций комплексного переменного, равно как в геометрию. Особенно важное значение имел «Трактат по электричеству и магнетизму» (Treatise on Electricity and Magnetism, 1873 г., в двух томах) Джемса Кларка Максвелла, где дано систематическое математическое изложение теории электромагнетизма, основанное на опытах Фарадея. Теория Максвелла стала господствующей математической теорией электричества, а позже она вдохновляла Лоренца в его теории электрона и Эйнштейна в теории относительности.

20. Чистая математика девятнадцатого века в Англии — это, прежде всего, алгебра с применениями преимущественно к геометрии, а ведущими в этой области были три человека: Кели, Сильвестр и Салмон. Артур Кели в молодости посвятил себя изучению права и практической деятельности юриста, но в 1863г. он принял предложение занять новую математическую кафедру в Кембридже, где он преподавал в течение тридцати лет. В сороковых годах, когда Кели работал юристом в Лондоне, он



Артур Кели (1821—1895)

познакомился с Сильвестром, в то время работником по страхованию. В те годы у Кели и Сильвестра зародился общий интерес к алгебре форм или квантик, как их называл Кели. Сотрудничество Кели и Сильвестра означало зарождение теории алгебраических инвариантов.

Эта теория как бы носилась в воздухе уже многие годы, особенно после того, как стали изучать определители. Ранние работы Кели и Сильвестра обходятся без определителей — это сознательная попытка дать систематическую теорию инвариантов алгебраических форм со своей собственной символикой и своими правилами операций. Эта была та теория, которую позже в Германии развивали Аронгольд и Клебш и которая является алгебраическим соответствием проективной геометрии Понселе. Многочисленные работы Кели посвящены самым разнообразным вопросам в области конечных групп, алгебраических кривых, определителей и инвариантов алгебраических форм. Одними из наиболее известных его работ являются девять «Мемуаров о квантиках» (1854—1878 гг.). Шестая работа в этой серии (1859 г.) содержит проективное определение метрики относительно конического сечения. Это открытие привело Кели к проективному определению евклидовой метрики, и таким путем он получил возможность ввести метрическую геометрию в систему проективной геометрии. Связь этой проективной метрики с неевклидовой геометрией ускользнула от внимания Кели и была открыта позже Феликсом Клейном.

Джемс Джозеф Сильвестр был не только математиком, но и поэтом, остряком и, наряду с Лейбницем, наиболее выдающимся создателем новых терминов за всю историю математики. С 1855 до 1869г. он преподавал в военной академии в Вулвиче. Он дважды был в Америке, в первый раз в качестве профессора университета в Виргинии (1841—42 гг.), второй раз как профессор университета в Балтиморе (1877—1883 гг.). Во время второго пребывания в США он вошел в число тех, кто заложил основы научной работы в области математики в американских университетах. Преподавательская деятельность Сильвестра была началом расцвета математики в Соединенных Штатах.

Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1897)

Из многочисленных результатов Сильвестра в алгебре два стали классическими: его теория элементарных делителей (1851 г.; вновь открыта Вейерштрассом в 1868 г.) и его закон инерции квадратичных форм (1852 г.; известен Якоби и Риману, но не опубликован ими). Мы обязаны Сильвестру и многими теперь общепринятыми терминами такими, как инвариант, ковариант, контравариантный, когредиентный и сизигия. С ним связано много анекдотов, некоторые из них — из разряда рассказов о рассеянных профессорах.

Третьим английским алгебраистом-геометром был Джордж Салмон, который в течение своей долгой жизни был связан с родным для Гамильтона Тринити колледжем в Дублине, где он обучал и математике, и богословию. Его наибольшая заслуга — создание хорошо известных превосходных руководств, ясных и привлекательных. Несколько поколений студентов во многих странах изучали по этим книгам аналитическую геометрию и теорию инвариантов. Это «Конические сечения» (Conis Sections, 1848 г.), «Высшие плоские кривые» (Higher Plane Curves, 1852 г.), «Современная высшая алгебра» (Modern Higher Algebra, 1859 г.) и «Аналитическая геометрия трех измерений» (Analytic Geometry of Three Dimensions, 1862 г.).

Эти книги и сейчас вполне можно рекомендовать всем интересующимся геометрией.

21. Нам следует особо остановиться на двух творениях алгебраистов Соединенного королевства: кватернионах Гамильтона и бикватернионах Клиффорда. Гамильтон, королевский астроном Ирландии, завершив свои работы по механике и оптике, в 1835г. обратился к алгебре, В его «Теории алгебраических пар» (Theory of Algebraic Couples, 1835 г.) алгебра определяется как наука о чистом времени; здесь дано строгое построение алгебры комплексных чисел на основе представления комплексного числа как пары чисел. Это, вероятно, сделано независимо от Гаусса, который в своей теории биквадратичных вычетов (1831 г.) также дал строгое построение алгебры комплексных чисел, но на основе геометрии комплексной плоскости. Сейчас оба подхода в равной мере приняты. Впоследствии Гамильтон пытался проникнуть в алгебру числовых троек, числовых четверок и т. д. Озарение на него нашло (как охотно рассказывают его поклонники) в некий октябрьский день 1843 г., когда, проходя по мосту в Дублине, он открыл кватернионы. Его исследования по кватернионам изложены в двух больших книгах: «Лекции о кватернионах» (Lectures on Quaternions, 1853г.) и посмертные «Основы теории кватернионов» (Elements of Quaternions, 1866г.). Наиболее известной частью этого исчисления кватернионов является теория векторов (последний термин принадлежит Гамильтону), которая входит как часть и в теорию протяженности Грассмана. Главным образом в силу этого обстоятельства теперь часто ссылаются на алгебраические работы Гамильтона и Грассмаиа. Однако во времена Гамильтона и долгое время спустя кватернионы сами по себе были предметом чрезмерного восхищения. Некоторые британские математики видели в исчислении кватернионов нечто вроде «универсальной арифметики» Лейбница, что, конечно, вызвало оппозицию (Хевисайд против Тэта), и из-за этого слава кватернионов значительно потускнела. Теория гиперкомплексных чисел, разработанная Пирсом, Штуди, Фробениусом и Картавом, указала законное место кватернионов как простейшей ассоциативной системы чисел с более чем двумя единицами. Культ кватернионов во времена его апогея привел даже к созданию «Международной ассоциации для содействия изучению кватернионов и родственных математических систем», которая распалась, став одной из жертв первой мировой войны. В связи с кватернионами возник еще один конфликт — борьба между приверженцами Гамильтона и

Грассмана, когда благодаря усилиям Гиббса в Америке и Хейвисайда в Англии векторный анализ стал независимой ветвью математики. Эти яростные споры велись между 1890 г. и первой мировой войной и нашли свое окончательное разрешение благодаря теории групп, которая воздала каждому методу должное в соответствующей области применения ').

Вильям Кингдон Клиффорд, который умер в 1879г. на тридцать четвертом году жизни, преподавал в колледже Троицы (Тринити-колледж) в Кембридже и в Университетском колледже в Лондоне. Он был одним из первых англичан, понявших Римана и разделявших его глубокий интерес к происхождению наших пространственных представлений. Клиффорд разрабатывал геометрию движения, и для этих исследований он обобщил кватернионы Гамильтона, построив так называемые бикватернионы (1873—1876 гг.). Это были кватернионы с коэффициентами, взятыми из системы комплексных чисел $a+ b\varepsilon$, где ε^2 может быть +1, —1 или 0; их можно использовать и для изучения движения в неевклидовых пространствах. Книга Клиффорда «Здравый смысл в точных науках» (Common Sense in the Exact Sciences) и сейчас еще хороша; в ней видно родство его мышления и мышления Феликса Клейна. На это родство указывает и термин «пространства Клиффорда — Клейна», обозначающий некоторые замкнутые евклидовы многообразия в неевклидовой геометрии. Проживи Клиффорд дольше, идеи Римана могли бы оказать влияние на британских математиков на поколение раньше, чем это произошло в действительности.

В течение ряда десятилетий чистая математика в странах английского языка сохраняла явный уклон в формальную алгебру. Это повлияло на творчество Бенджамина Пирса из Гарвардского университета, ученика Натаниела Боудича. Ему принадлежат выдающиеся работы и в небесной механике. В 1872 г. он опубликовал свои «Линейные ассоциативные алгебры» (Linear Associative Algebras), одно из первых систематических исследований по гиперкомплексным числам. Этот формалистский уклон в английской математике, быть может, объясняет появление такого исследования, как «Законы мысли» (The Laws

') Klein F Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrdundert, II — Berlin, 1927.—S. 27—52; Schouten J. A. Grundlagen dcr Vector und Affmoranalysis,— Leipzig, 1914.

of Thought, 1854 г.) Джорджа Буля, работавшего в одном из дублинских колледжей. Здесь было показано, что законы формальной логики, кодифицированные Аристотелем и в течение столетий изучавшиеся в университетах, сами могут быть предметом исчисления. Тут заложены принципы, соответствующие идее Лейбница о «всеобщей характеристике». Эта «алгебра логики»— начало того направления, которое стремилось объединить логику и математику. Книга Готтлоба Фреге «Основы арифметики» (Die Grundlagen der Arithmetik, 1884г.) дала импульс этому направлению, так как там арифметические понятия выводятся из логики. Высшей точкой этих исследований в двадцатом столетии были «Основы математики» (Principle Mathematica) Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда (1910—1913 гг.), которые повлияли на позднейшие работы Гильберта по основам арифметики и по устранению парадоксов бесконечного[1]).

22. Работы Кели и Сильвестра по теории инвариантов обратили на себя внимание в Германии, где несколько математиков развили эту теорию в науку, основанную на законченном алгоритме. Здесь главные фигуры — Гессе, Аронгольд, Клебш и Гордан. Гессе, который был профессором в Кенигсберге, позже в Гейдельберге и Мюнхене, показал, как и Плюккер, силу метода сокращенных обозначений в аналитической геометрии. Он предпочитал пользоваться однородными координатами и определителями. Аронгольд, преподававший в Высшей технической школе в Берлине, в 1858г. написал работу, в которой он развивает последовательную символику теории инвариантов с помощью так называемых «идеальных» множителей (что не имеет отношения к идеальным множителям Куммера). Эта символика разрабатывалась в дальнейшем Клебшем (1861г.), в чьих руках «символика Клебша — Аропгольда» стала почти повсеместно принятым методом систематического исследования алгебраических инвариантов. Сейчас мы видим в этой символике, также как и в векторах Гамильтона, внешних произведениях Грассмана и диадах Гиббса, частный случай тензорной алгебры. Пауль Гордан из Эрлангенского университета обо

') См. в чтой связи: Hilbert D., Aekermann W.— Griuid ziige der theoretischen Logik.— Berlin, 1928; в русском переводе Гильберт Д., Аккерыан В. Основы теоретической логики Вступительная статья и комментарии С. А. Яновской.— М.: ИЛ, 1947.

гатил теорию инвариантов теоремой (1868—1869гг.), что каждая бинарная форма обладает конечной системой рациональных инвариантов и ковариантов, с помощью которых можно в рациональном виде представить все остальные рациональные инварианты и коварианты. В 1890 г. Гильберт распространил эту теорему Гордана, («теорему конечности») на алгебраические формы с любым числом переменных.

Альфред Клебш был профессором в Карлсруэ, Гиссене и Гёттингене. Он умер в возрасте тридцати девяти лет. Его жизнь — это сгусток замечательных достижений. В 1862 г. он опубликовал книгу по теории упругости, следуя за французскими учеными Ламе и Сен-Венаном. Он применил свою теорию инвариантов к проективной геометрии. Он был одним из первых, кто понял Римана, и он стал основателем той ветви алгебраической геометрии, в которой риманова теория функций и многосвязных поверхностей применяется к действительным алгебраическим кривым. «Теория абелевых функций» (Theorie der Abelschen Functionen, 1866г.) Клебша и Гордана дает широкое изложение этих идей. Клебш также основал «Математические анналы» (Mathematische Annalen), математический журнал, который был ведущим в течение более чем шестидесяти лет. Его лекции по геометрии, опубликованные Ф. Линдеманом, остаются образцовым курсом проективной геометрии.

23. К 1870 г. математика разрослась в огромное и хаотичное здание, состоявшее из большого числа частей, дорогу в которых могли найти только специалисты. Даже большие математики, как Эрмит, Вейерштрасс, Кели, Бельтрами, могли продуктивно работать самое большее лишь в немногих ее областях. Эта специализация все время росла, и сейчас она достигла устрашающих размеров. Но никогда не прекращалось противодействие ей, и некоторые из самых важных достижений за последние сто лет явились результатом синтеза различных областей математики.

В восемнадцатом столетии такой синтез был осуществлен в трудах Лагранжа и Лапласа по механике. Эти труды оставались основой для очень значительных работ различного характера. Девятнадцатое столетие добавило к этому новые объединяющие принципы, а именно теорию групп и риманово понятие функции и пространства. Значение этого лучше всего можно понять по трудам Клейна, Ли и Пуанкаре.


Феликс Клейн (1849—1925)

Феликс Клейн был ассистентом Плюккера в Бонне в конце шестидесятых годов, и там он изучил геометрию. В 1870 г., когда ему было двадцать два года, он побывал в Париже. Здесь он встретился с Софусом Ли, норвежцем, который был на шесть лет старше его, но заинтересовался математикой лишь незадолго до их встречи. Молодые люди встречались с французскими математиками, среди них с Камиллом Жорданом, работавшим в Политехнической школе, и изучали их труды. Как раз в 1870 г. Жордан написал «Трактат о подстановках»— книгу о группах подстановок и о теории уравнений Галуа. Клейн и Ли начали сознавать основное значение теории групп, и в последующем бни разбили математику примерно на две части: Клейн в основном сосредоточился на дискретных, а Ли — на непрерывных группах.

В 1872 г. Клейн стал профессором в Эрлангене. В своей вступительной лекции он разъяснял важность понятия группы для классификации различных областей математики. В этой лекции, которая стала известна под именем «Эрлангеиской программы», любая геометрия объявлялась теорией инвариантов особой группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. Евклидова геометрия изучает инварианты метрической группы, проективная геометрия — инварианты проективной группы. Классификация групп преобразований дает нам классификацию геометрий, а теория алгебраических и дифференциальных инвариантов каждой группы дает нам аналитическую структуру соответствующей геометрии. Проективное определение метрики по Кели позволяет рассматривать метрическую геометрию в рамках проективной геометрии. «Присоединение» инвариантного конического сечения к проективной геометрии на плоскости дает нам неевклидо вы геометрии. Даже сравнительно не изученная (тогда) топология нашла свое должное место как теория инвариантов непрерывных точечных преобразований.

За год до этого Клейн дал важный пример применения своего подхода, показав, что неевклидовы геометрии можно истолковать как проективные геометрии с метрикой Кели. Это, наконец, повело к полному признанию находившихся в пренебрежении теорий Бояи и Лобачевского. Теперь была установлена их логическая обоснованность. Если бы в неевклидовой геометрии были логические погрешности, то их можно было бы обнаружить в проективной геометрии, но лишь немногие математики были склонны допустить такую ересь. Позже эта идея отображения одной области математики на другую часто использовалась и сыграла важную роль в гильбертовой аксиоматике геометрии. Теория групп сделала возможным синтез геометрических и алгебраических трудов Монжа, Понселе, Гаусса, Кели, Клебша, Грассмана и Римана. Риманова теория пространства, которая дала так много для построения Эрлангенской программы, вдохновляла не только Клейна, но и Гельмгольца и Ли. Гельмгольц в 1868 и 1884гг. подверг изучению риманово понятие пространства, отчасти в поисках геометрического образа для его теории цветов, отчасти в поисках происхождения наших зрительных оценок расстояния. Это привело его к исследованию природы геометрических аксиом и, в частности, римановой квадратической метрики. Ли усовершенствовал рассуждения Гельмгольца относительно характера римановой метрики, проанализировав природу лежащих в основе этого групп преобразований (1890 г). Эта проблема пространства «Ли — Гельмгольца» оказалась имеющей значение не только для теории относительности и теории групп, но и для физиологии.

Клейн изложил риманову концепцию теории комплексных функций в своей книге «О римановой теории алгебраических функций» (Uber Riemanns Theorie der algebraischen Functionen, 1882 г.), в которой он подчеркивал, что физические соображения могут оказывать влияния даже на самые тонкие части математики. В «Лекциях об икосаэдре» (Vorlesungen uber das Ikosaeder, 1884 г.) он показал, что современная алгебра может научить многим новым и удивительным вещам и относительно древних платоновых тел. Этот труд является исследованием групп вращения правильных тел и их роли в качестве групп Галуа алгебраических уравнений.

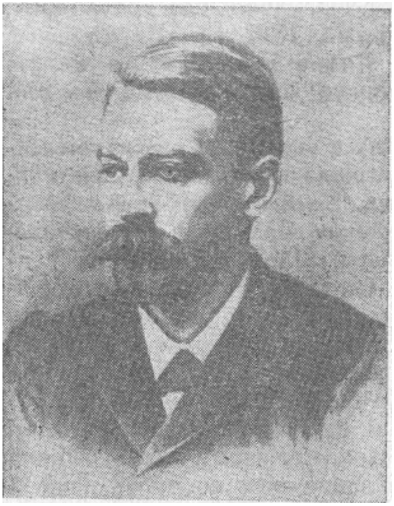
Мариус Софус Ли (1842—1899)

В обширных исследованиях, принадлежащих ему и его многочисленным ученикам, Клейн применил понятие группы к линейным дифференциальным уравнениям, к эллиптическим и модулярным функциям, к абелевым и новым «автоморфным» функциям, к последним — в интересном и дружеском соревновании с Пуанкаре. Под вдохновляющим руководством Клейна Гёттинген с его традициями Гаусса, Дирихле и Римана стал мировым центром математических исследований, куда молодые мужчины и женщины многих национальностей съезжались для изучения своих частных предметов в качестве неотъемлемой части математики в целом. Лекции Клейна воодушевляли слушателей, записи этих лекций, размноженные на стеклографе, были источником многих специальных сведений для целых поколений математиков и, прежде всего, они их вооружали пониманием единства их науки. После смерти Клейна в 1925 г. некоторые из курсов лекций появились в виде книг.

Тем временем в Париже Софус Ли открыл контактные преобразования и тем самым ключ ко всей гамильтоиовой динамике как части теории групп. После своего возвращения в Норвегию он стал профессором в Христиании (ныне Осло), позже, с 1886 по 1898 г., он преподавал в Лейпциге. Всю жизнь Ли посвятил систематическому изучению групп непрерывных преобразований и их инвариантов, выявляя их основное значение в качестве классификационного принципа в геометрич, механике, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнении в частных производных. Результаты этих трудов были сведены воедино в ряде томов, изданных с помощью учеников Ли, Шефферса и Энгеля («Группы преобразо ваний», 1888—1893 гг.; «Дифференциальные уравнения», 1891 г; «Непрерывные группы», 1893 г.; «Касательные преобразования», 1896 г.). Позже к трудам Ли многое было добавлено в работах французского математика Эли Картана.

24. Франция, лицом к лицу с огромным развитием математики в Германии, продолжала выдвигать замечательных ученых во всех областях. Интересно сравнить французских и немецких математиков, Эрмита с Вейерштрассом, Дарбу с Клейном, Адамара с Гильбертом, Поля Таннери с Морицом Кантором. От сороковых до шестидесятых годов ведущим математиком Франции был Жозеф Лиувилль, профессор Французского коллежа в Париже, хороший преподаватель, организатор и издатель в течение многих лет французского «Журнала чистой и прикладной математики» (Journal de Mathematiques pures et appliquees). Он подверг систематическому исследованию арифметическую теорию квадратичных форм от двух и более переменных, но «теорема Лиувилля» в статистической механике показывает, что он творчески работал в совсем иных областях. Он доказал существование трансцендентных чисел и в 1844 г. доказал, что ни e, ни e^2 не могут быть корнями квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Это было одним из звеньев цепи доказательств, ведущих от результата Ламберта в 1761г., что π иррационально, к доказательству Эрмита, что e трансцепдентно (1873 г.), и к окончательному результату Ф.Линдемана, ученика Вейерштрасса, что π — трансцендентное число (1882г.). Лиувилль и некоторые из связанных с ним математиков развивали дифференциальную геометрию кривых и поверхностей — формулы Френе — Серре (1847 г.) появились в кругу Лиувилля.

Шарль Эрмит, профессор Сорбонны и Политехнической школы, стал ведущим представителем анализа во Франции после смерти Коши в 1857 г. Работы Эрмита, равно как и работы Лиувилля, следуют традициям Гаусса и Якоби, но они родственны также направлению Римана и Вейерштрасса. Эллиптические функции, модулярные функции, тэта-функции, теория чисел и теория инвариантов были предметом его работ, о чем свидетельствуют термины «эрмитовы числа», «эрмитовы формы», «многочлены Эрмита». Его дружба с голландским математиком Стилтьесом была существенной поддержкой для того, кто открыл «интеграл Стилтьеса» и применил непрерывные дроби в теории моментов. Оба высоко ценили



Томас Иоаннес Стилтьес (1856—1894)

друг друга; Эрмит однажды писал своему другу: «Вы всегда правы, а я всегда ошибаюсь».

Четырехтомная «Переписка» (Correspondence, 1905 г.) Эрмита и Стилтьеса содержит богатый материал, преимущественно о функциях комплексного переменного.

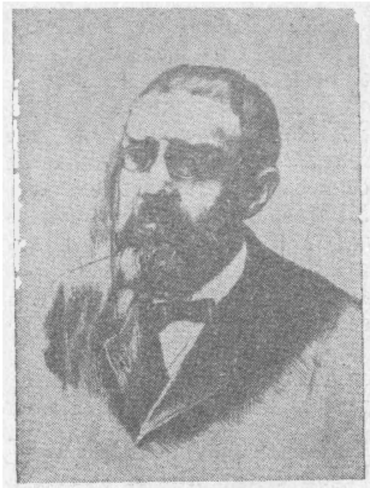
Французские геометрические традиции нашли блестящее продолжение в книгах и статьях Гастона Дарбу. Дарбу был геометром в духе Монжа, он подходил к геометрическим задачам, полностью владея теорией групп и теорией дифференциальных уравнений, а проблемы механики он исследовал, опираясь на живую пространственную интуицию. Дарбу был профессором Французского коллежа и в течение полувека активно участвовал в преподавании. Наибольшее влияние из его трудов оказали образцовые «Лекции по общей теории поверхностей» (Lecons sur la theorie generale des surfaces, в 4 томах, 1887—1896гг.), в которых изложены результаты исследований по дифференциальной геометрии кривых и поверхностей за сто лет. В руках Дарбу эта дифференциальная геометрия оказалась связанной различными нитями с дифференциальными уравнениями, обыкновенными и в частных производных, а также с механикой. Дарбу с его административным и педагогическим искусством, его тонкой геометрической интуицией, его мастерским владением аналитической техникой, его пониманием Римана занимал во Франции положение, в известной мере аналогичное тому, какое Клейн занимал в Германии.

Эта вторая часть девятнадцатого столетия была временем появления больших французских руководств по анализу и по его применениям, которые часто издавались под названием «Курс анализа» и создавались ведущими математиками. Наиболее известными являются «Курс анализа» (Cours d'analyse) Камилла Жордана (в 3 томах, 1882—1887 гг.) и «Трактат по анализу» (Traite d'analyse) Эмиля Пикара (в 3 томах, 1891—1896 гг.), и к ним надо еще добавить «Курс математического анализа» (Cours d'analyse mathematique) Эдуарда Гурса (в 3 томах, 1902—1905гг.).

25. Величайшим французским математиком второй половины девятнадцатого века был Анри Пуанкаре, профессор Сорбонны с 1881г. до своей смерти (1912 г.). Никто из математиков этого периода не владел таким количеством дисциплин и не был в состоянии их все обогатить. Каждый год он читал лекции по новому предмету. Эти лекции были изданы слушателями, они охватывают огромную область; теорию потенциала, оптику, электричество, теплопроводность, капиллярность, электромагнетизм, гидродинамику, небесную механику, термодинамику, теорию вероятностей. Каждый из этих курсов по-своему замечателен, а в своей совокупности они содержат мысли, которые принесли плоды в трудах других ученых, но многие из них еще ждут дальнейшей разработки. Сверх того, Пуанкаре написал ряд популярных и полупопулярных книг, которые помогали понять проблемы современной математики. Среди них имеем: «Ценность науки» (La valeur de la science, 1905 г.) и «Наука и гипотеза» (La science et 1'hypothese, 1906 г.)[1]). Кроме этих курсов, Пуанкаре опубликовал большое число работ по так называемым автоморфным и фуксовым функциям, по дифференциальным уравнениям, по топологии и по основаниям математики, исследуя с большим мастерством техники и с глубоким пониманием все соответствующие области чистой и прикладной математики. Никто из математиков девятнадцатого столетия, быть может, за исключением Римана, не может дать так много нашему поколению.

Возможно, что ключ к пониманию трудов Пуанкаре дают его идеи в небесной механике и, в частности, в проблеме трех тел [«Новые мегоды небесной механики» *(Les* methodes nouvelles de mecanique celeste), в 3-х томах, 1893 г]. Здесь видно его непосредственное родство с Лапласом и показано, чго даже в конце девятнадцатого столетия старые проблемы механики относительно строения вселенной остаются в плодотворном контакте с математи

') Идеалистическая точка зрения, которой Пуанкаре придерживается в этих книгах, была подвергнута критике В И. Лениным в его «Материализме и эмпириокритицизме» (1908 г.).



Анри Пуанкаре (1854—1912)

кой. Именно в связи с этими проблемами Пуанкаре исследовал расходящиеся ряды и построил свою теорию асимптотических разложений, разрабатывал теорию интегральных инвариантов, исследовал устойчивость орбит и форму небесных тел.

Его фундаментальные открытия, касающиеся поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений как вблизи особенностей, так и в целом, связаны с его работами но небесной механике. То же самое относится к его исследованию о сущности вероятности — еще одна область, где интересы совпали с интересами Лапласа. Пуанкаре подобен Эйлеру и Гауссу — всякий раз, когда мы обращаемся к нему, мы чувствуем обаяние оригинальности. Труды Пуанкаре существенно повлияли на наши современные представления в области космогонии, топологии, теории вероятностей, теории относительности.

26. Рисорджименто (Risorgimento), национальное возрождение Италии, означало также возрождение итальянской математики. Некоторые из основоположников современной математики в Италии участвовали в борьбе, которая повела к освобождению их страны от Австрии и к ее объединению, и позже они совмещали свою профессиональную деятельность с политической. Влияние Римана здесь сильно сказывалось, а Клейн, Клебш и Келн познакомили итальянских математиков с геометрией и с теорией инвариантов. Заодно здесь заинтересовались и теорией упругости с ее четко выраженным геометрическим характером.

В число основоположников новой итальянской математической школы входят Бриоски, Кремона и Бетти. В 1852 г. Франческо Бриоски стал профессором в Павии, в 1862 г. он организовал политехнический институт в Милане, где преподавал до своей смерти (1897 г.). Бриоски основал журнал «Анналы чистой и прикладной ма тематики» (Annali di matematica pura ed applicata, 1858 г.), название которого указывает на желание соревноваться с журналами Крелля и Лиувилля. В 1858 г. вместе с Бетти и Казорати он посетил ведущих математиков Франции и Германии. Вольтерра позже заявлял, что «научное существование Италии как нации» начинается с этого путешествия'). Бриоски был в Италии представителем школы исследователей алгебраических инвариантов в духе Кели и Клебша. Луиджи Кремона, с 1873 г. директор технической школы в Риме, исследовал названные его именем бирациональные преобразования плоскости и пространства (1863—1865 гг.). Он был также одним из создателей графостатики.

Эудженио Бельтрами был учеником Бриоски. Он занимал профессорские кафедры в Болонье, Пизе, Павии и Риме. Его главные работы по геометрии выполнены между 1860 и 1870 гг. Посредством своих дифференциальных параметров Бельтрами ввел в теорию поверхностей исчисление дифференциальных инвариантов. Другой результат этого периода — исследование так называемых псевдосферических поверхностей, являющихся поверхностями постоянной отрицательной гауссовой кривизны. На такой псевдосфере мы можем осуществить двумерную неевклидову геометрию Бояи — Лобачевского. Наряду с проективной интерпретацией Клейна это является методом, показывающим, что в неевклидовой геометрии нет внутренних противоречий, потому что такие противоречия должны были бы сказаться в обычной теории поверхностей.

Около 1870г. идеи Римана все более и более становились общим достоянием более молодых математиков. Его теория квадратичных дифференциальных форм стала предметом работ двух немецких математиков Э. Б. Кристоффеля и Р. Липшица (1870 г.). В первой из этих работ введены «символы Кристоффеля». Эти исследования в сочетании с теорией дифференциальных параметров Бельтрами позволили Г. Риччи-Курбастро в Падуе создать так называемое абсолютное дифференциальное исчисление (1884 г.). Это было новой инвариантной символикой, первоначально построенной для использования в теории преобразований уравнений в частных производных, но заодно это дало подходящую символику для те

') Volterra V. P. Bull. Amor Math Soc — 1900 — V. 7 —60—62, ории преобразований квадратичных дифференциальных форм.

В руках Риччи и некоторых из его учеников, особенно Туллио Леви-Чивита, абсолютное дифференциальное исчисление выросло в то, что мы теперь называем теорией тензоров. С помощью тензоров можно объединить многие инвариантные символики, и тензоры оказались весьма действенными при получении общих теорем теории упругости, теории относительности и гидродинамики. Название «тензор» происходит из теории упругости (В. Фогт, 1900г.).

Самым блестящим представителем дифференциальной геометрии в Италии был Луиджи Бианки. Его «Лекции по дифференциальной геометрии» (издано 3 тома, 1902— 1909 гг.) стоят в одном ряду с «Общей теорией поверхностей» Дарбу как классическое изложение дифференциальной геометрии девятнадцатого века.

27. В 1900г. на Международном конгрессе математиков в Париже гёттингенский профессор Давид Гильберт выдвинул в качестве предмета исследования двадцать три проблемы. К этому времени Гильберт уже получил признание за свои работы по алгебраическим формам и издал ставшую теперь знаменитой книгу «Основания геометрии» (Grundlagen der Geometric, 1899 г.). В этой книге он дал анализ аксиом, на которых основана евклидова геометрия, и разъяснил, как с помощью современных исследований по аксиоматике можно улучшить достижения греков.

В своем докладе 1900г. Гильберт старался уловить направленность математических исследований предыдущих десятилетий и наметить контуры творческой деятельности в будущем. Перечисление его проблем позволит нам лучше понять значение математики девятнадцатого столетия.

Прежде всего Гильберт предложил арифметически сформулировать понятие континуума, как оно дано в трудах Коши, Больцано и Кантора. Существует ли кардинальное число между числом, соответствующим счетному множеству, и числом, соответствующим континууму? И можно ли рассматривать континуум как вполне упорядоченное множество? Более того, что можно сказать относительно непротиворечивости аксиом арифметики?

Следующие проблемы касаются оснований геометрии, понятия непрерывной группы преобразований по Ли — необходима ли дифференцируемость? — и математической трактовки аксиом физики. Затем следует несколько частных проблем, сперва относящихся к арифметике и алгебре. Оставалась неизвестной иррациональность или трансцендентность некоторых чисел (например, α^β при алгебраическом α и иррациональном β). Не были известны также доказательство гипотезы Римана относительно нулей дзета-функции и формулировка наиболее общего закона взаимности в теории чисел. Другой проблемой в этой области было доказательство конечности некоторых полных систем функций, связанных с теорией инвариантов.

В пятнадцатой проблеме требовалось дать строгую формулировку исчислительной геометрии Шуберта, в шестнадцатой — изучить топологию алгебраических кривых и поверхностей. Еще одна проблема относится к заполнению пространства конгруэнтными многогранниками.

Остальные проблемы относятся к дифференциальным уравнениям и к вариационному исчислению. Всегда ли аналитичны решения регулярных задач в вариационном исчислении? Всякая ли регулярная вариационная задача имеет решение при заданных граничных условиях? Как униформизовать аналитические соотношения с помощью автоморфных функций? Гильберт закончил свое перечисление проблем призывом дальше развивать вариационное исчисление ').

Программа Гильберта показала жизненную силу математики конца девятнадцатого века, она находится в резком контрасте с теми пессимистическими взглядами, какие были в конце восемнадцатого столетия. Теперь некоторые из проблем Гильберта решены, другие все еще ждут окончательного решения. Развитие математики в годы после 1900г. не обмануло надежд, возникших к исходу девятнадцатого века. Все же даже гений Гильберта не мог предвидеть некоторые из поразительных достижений, которые имели место на деле и которые осуществляются теперь. Математика двадцатого столетия идет к славе своим собственным, новым путем.

') Спустя тридцать лет намеченные Гильбертом проблемы были обсуждены в статье: Bieberbach L. Uber den Einfluss von Hilberts Pariser Vortrag liber «Mathematische Probleme» auf die Entwickhmg der Mathematik in den letzen dreifiig Jahren.— Naturwissenschaften 1936, 18, с. 1101—1111. С тех пор были достигнуты новые успехи. О современном состоянии этих проблем см. книгу: Проблемы Гильберта.— М.: Наука. 1969,

ЛИТЕРАТУРА

Лучшей историей математики девятнадцатого столетия является книга: Klein F. Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert. Bd 1.—Berlin, 1926. Bd 2.—Berlin, 1927 (первая часть имеется в русском переводе: Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.— М.: Наука, 1989; изложение яркое, но во многом субъективное, отражает склонности и симпатии автора; русская математика вне его поля зрения).

Библиография ведущих математиков девятнадцатого столетия приведена в книге: S a r t o n G. The Study of the History of Mathematics.—Cambridge (Mass.), 1936.—P. 70—98.

Там содержится перечень биографий: Абеля, Адамса, Альфаиа, Аппеля, Аропгольда, Бахмана, Бебеджа, Беллавитиса, Бельтрами, Бертрана, Бесселя, Бетти, Болла, Больцмана, Борхарда, Бояи, Бриоски, Буля, Бэра, Вейрриштрасса, Галуа, Гаусса, Гёделя, Гиббса, Гордона, Грассмана, Грипа, Дарбу, Дгк. Дарвина, Дедеюшда, Джевопса, Дирихле, Жермен, Жордапа, Г. Кантора, Л. Карно, Келп, Кельвина, Кирхгофа, Клаузиуса, Клебша, Клейна, Клиффорда, Ковалевской, Коши, Кремоны, Кронекера, Куммера, Курно, Кутюра, Лагерра, Ламе, Лапласа, Леверье, Лежапдра, Лемуана, Ли, Лиувилля, Лобачевского, Лоренца. Маккаллоха, Максвелла, Мёбиуса, Мере, Минковского, Миттаг — Лёффлера, де Моргапа, Ф. Неймана, Э. Нётер, Ньюкома, Ольберса, Оппольцера, Пенлеве, Пикока, Б. Пирса, Плюккера, Понселе, Пуанкаре. Пуансо, Пуассона, Пфаффа, Рамануджаца, Релея, Ренвестра, Римана, Розенгайна, Руффини, СенВенана, Седова, Сильвестра, Смита, Стокса, Тэта, Фидлера, Фреге, Фредгольма, Френеля, Фукса, Фурье, Чебышева, Шаля, Шварца, Штаудта, Штейнера, Эджворта, Эйзенштейна, Эри, Энке.

Кроме того на русском языке имеются биографии Андреева, Буняковского, Вороного, Граве, Жуковского, Имшенецкого, Коркина, А. Н. Крылова, Ляпунова, Маркова, Млодзеевского, Остроградского, Петерсона, Чаплыгина, Чебышева; на немецком языке — Миндлинга.

Дополнительный библиографический материал см. в номерах журнала Scripta Mathematica (НьюЙорк, изд. с. 1932 г.).

Изданы собрания сочинений таких математиков: Абеля, Альфана, Бельтрами, Бетти, Биркгофа, Больцано, Борхардта, Бриоски, Вайдьянатасвамц, Вейерштрасса, Галуа, Гамильтона, Гаусса, Гиббса, Гильберта, Грассмана, Грина, Дедекинда, Дирихле, Г. Каптора, Кели, Клейна, Клиффорда, Коши, Кремоны, Кропекера, Лагерра, Э. Э. Леви, ЛевиЧивпта, Ли, Лобачевского, Лузина, Мандельштама, Мёбиуса, Дж. А. Миллера, Минковского, Пеано, Пирса, Плюккера, Помпешо, Пуанкаре, Рамавуджана, Римана, Руффиип, Сегре, Силова, Сильвестра, Скорца, Г. ДЖ. С. Смита, Тэта, Фукса, Фурье, Хаара, Хекке, Чебышева, Шварца, Шлефли, Штейнера, Эйзенштейна, Эрмита, Якоби.

Кроме того: А. А. Андронова, С. Н. Бернштейпа, X. Бора, Виноградова, Вороного, Диви, Долбни, Жуковского, Золотарева, Ковалевского, Коркина, А. Н. Крылова, Н. М. Крылова, Ляпунова, Маркова, Остроградского, Фр. Рисса, Сонина, Урысона, Чаплыгина, О. 10. Шмидта. О математических работах Маркса см.:

Гокиели А. П. Математические рукописи Маркса.— Тбилиси, 1947.

Struik D. .7. Marx and Mathematics // Science and Society.— 1948.—V. 12.—P. 181—196. Они собраны в томе:

Маркс К. Математические рукописи.— М.: Наука, 1968. См. также L a u n d a y L. de. Monge, Fondateur de 1'Ecole Polytechnique.— , Paris, 1934.

Taton R. Monge.—Paris, 1951.

Klein F. и др. Materialen fur eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.—Bd 1—8.—Leipzig, 1911—1920.

Dunnington G. W. Carl Friedrich Gauss; Titan of Science.— N. Y., 1956.

C. F. Gauss: Gedenkband anlasslicli des 100 Todestages/Herausgegeben von H. Reichardt,— Leipzig, 1957.

C. F. Gauss und die Landesvermessung in Niedersachsen.— Hannover, 1955.

Quaternion centenary celebration /f Proc. Roy. Irish Acad.— 1945.— V. A50.— P. 69—98; McConnell A. J. The Dublin Mathematical School in the First Half of the Nineteenth Century: Collection of Papers In Memorian of Sir William Rowan Hamilton.[21] N. Y.: Scripta mathematica Studies, 1945.

К 6 11 e r E. Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf v. Staudt // Jahresber. Deutsche Math. Ver.— 1901.— Bd 5.— S. 1—486.

Tribut H. Un grand savant — Le general J. V. Poncelet.—Paris, 1936.

Black M. The Nature of Mathematics.— N. Y., 1934 (содержит библиографию по символической логике).

Struik D. J. Outline of a History of Differential Geometrie // Isis.— 1933.—V. 19.—P. 92—120; 1934.—V. 20.—P. 161—191. В русском переводе: С т р о и к Д. Я. Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия).—М.; Л.: Гостехиздат, 1941. f Coolidge J. L. Six femal mathematicians.— Scripta math.—У1951.—V. 17.—P. 20—31 (О Гипатии, Аньези (M. G. Agnesi), дю Шатле (E. de Chatelet), Соммервилль (M. Sommerville), Жермен (S. Germain) и С. Ковалевской).

Wheeler L. P. Josiah Willard Gibbs.—New Haven, 1951.

К о 11 c o s L. Jakob Steiner, Elemente der Mathematik, Beiheft 7.— Basel, 1947.

M e r z J. T. A History of European Thought in the Nineteenth Century.— London, 1903—1914.

H a d a m a r d J. The Psychology of Invention in the Mathema. tical Field.— Princelon, 1945. Русский перевод: А д а м а р Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области матемаш, ки.— М.: Советское радио, 1970.

P r a s a d G. Some Great Mathematicians of the Nineteenth Cen tury: Their Lives and Their Works. V. 1.— Benares, 1933. V. 2.— Benares, 1934.

Winter E. B. Bolzano und sein Kreis.— Leipzig, 1933; Halle, '. 1949.

Dalma s Paris, 1958. A. Evariste Galois, Revolutionnaire et Geometre.— русском переводе: Д а л ь м а А. Эварист Галуа, революционер и математик.— М., Физматгиз, 1961. 2е изд.— М.: [Наука, 1984.

См. также:

T a t o n R. / Revue Hist. Sci. appl.— 1947. •V. l.P. 114-130.

Biermann, KurtR. J. P. G. Lejeune Dirichlet: Dokumente fur sein Leben und Werken.—Berlin, 1959 (Abh. Dt. Akad Wiss. Kl. f. Math., Phys. u. Tech.— 1959.— N 2).

Biermann, KurtR. Vorschlage zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie.— Berlin, 1960 (Abh. Dt. Akad. Wiss., Kl. f. Math., Phys. и Techn.— I960.— N 3).

Biermann K. R. Der Mathematiker Ferdinand Mindling und die Berliner Akademie / Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss.— 1961.— Bd 13.— S. 120—133.

На русском языке см.:

Гаусс, Карл Фридрих. Труды по теории чисел/Ред. и вступительная статья И. М. Виноградова, комментарий Б. Н. Делоне.— М., 1959 (сюда вошли «Арифметические исследования»).

Карл Фридрих Гаусс: Сборник статей к 100летию со дня смерти.—М., 1956.

М о и ж, Гаспар. Приложение анализа к геометрии/Ред., комментарий и статья М. Я. Выгодского.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

М о н ж, Гаспар. Начертательная геометрия.— Ред., комментарий и статья Д. И. Каргина.— М.; Л., 1947.

Гаспар Монж. К двухсотлетию со дня рождения: Сборник.— М., 1947.

Кольман Э. Я. Бернгард Больцано.—М., 1956. • П у а н с о Л. Начала статики/Под ред. А. Н. Долгова.— М ; Пг., 1920.

Есть переводы двух курсов Коши: К ош и О.—Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении.../ Перевод В. Я. Буняковского.— СПб., 1831; Коши О.—Л. Алгебраический анализ.— Лейпциг, 1864.

Оре О. Нильс Генрик Абель.—М.: Физматгиз, 1961.

Г а л у а Э. Сочииепия/Ред., примечания и статья Н. Г. Чеботарева.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Романизированная биография Галуа — в книге: Инфельд Л. Эварист Галуа. Избранник богов: пер. с англ.— М.: Молодая гвардия, 1958.

Я к о б и К. Лекции по динамике/Под ред. Н. С. Кошлякова.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

П о л а к Л. С. Уильям Роуан Гамильтон / Тр. инта истории естествознания и техники.— 1957.— Т. 15.— С. 206—276.

Об основаниях геометрии: Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей/Род, и вступительная статья А. П. Нордена — М., 1956 (содержит работы Гаусса, Бельтрами, Ф. Клейна, А. Пуанкаре и др.).

Вариационные принципы механики/Ред., послесловие и примечания Л. С. Полака.— М.: Физматгиз, 1959. В этом сборнике — работы Гамильтона, Остроградского и др.

Лежен -Дирихле П. Г. Лекции по теории чисел/В обработке и с дополнениями Р. Дедекинда, под ред. Б. И. Сегала.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.

Работы Лежена — Дирихле, Римана, Липшица помещены в книге: Разложение функций в тригонометрические ряды.—Харьков, 1914.

Листинг И. Б. Предварительные исследования по топологии/Ред. и предисловие Э. Я. Кольмана.—М.; Л.: ГТТИ, 1932.

Р и м а н Б. Сочинения/Ред. статья и примечания В. Л. Гончарова. М.; Л.: Гостехиздат, 1948, *Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа/Со статьей С. О. Шатуновского.— 4е изд.— Одесса, 1923.*

Сборник научнопопулярных статей Пуанкаре, Гельмгольца, Кронекера и др. по основаниям арифметики/Под ред. Парфентьева.— Казань, 1906, содержит и работу Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат».

Некоторые работы Г. Кантора вошли в сборник: Новые идеи в математике, вып. 6: Учение о множествах Георга Кантора/Под ред. Васильева.—СПб., 1914.

Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов, тт. I—II.— М., 1883.

Б о л ь а и, Янош. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную.../Статья и примечания В. Ф. Кагана.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Клиффорд В. К. Здравый смысл точных наук.— 2е изд.— Пг,, 1922.

Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях/Под ред. Н. И. Ахиезера.— Харьков: Киев, 1936.

Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями/Ред. и примечания А. А. Андронова.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.

Русские переводы работ А. Пуанкаре «Ценность науки» и «Наука и гипотеза» опубликованы в книге Пуанкаре А. О науке.— М.: Наука, 1989.

По истории математики в России в девятнадцатом столетии см.!

Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России.— М.; Л.: Гостехиздат, 1946.

Делоне Б. Н. Петербугская школа теории чисел.—М.; Л., 1947.

Каган В. Ф., Л о б а ч е в с кий.—2е изд.—М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

История отечественной математики/Под ред. И. 3. Штокало, т. II.— Киев, 1967.

Юшкевич А. П. История математики в России (до 1917 г.).— М.: Наука, 1968.

Г и е д е н к о Б. В., П о г р е б ы с с к и и И. В. Михаил Васильевич Остроградский.— М., 1963.

Научное наследие П. Л. Чебышева. Выпуск I: Математика. Выпуск II: Теория механизмов.— М.; Л., 1945.

Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского, \ 1826—1951,— М.; Л.: Гостехиздат, 1952. *Памяти Ковалевской: Сборник.— М., 1951.*

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

ОГЛАВЛЕНИЕ

СТРОЙК Дирк Ян
КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

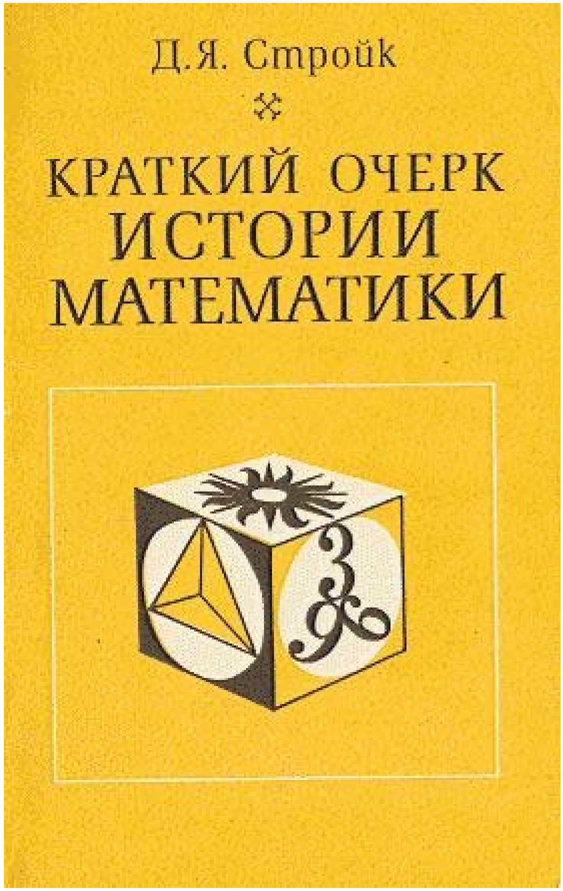
Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор В. *В. Данченко*
Художественный редактор *Т.* Я. *Колъченко*
Технический редактор *Е В Морозова*
Корректор *В. П. Сорокина*

ИБ № 41047

Сдано в набор 25 10 89 Подписано к печати 10.10 90. Формат 84X108/32. Бумага типографская № 2 Гарнитура обыкновенная Печать высокая Усл печ я 13,44 Уел кротт. 13,44. Уч.изд л 14,82 Тираж 66400 экз. Заказ № 948. Цена 2 р.

Издательскопроизводственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физикоматематической литературы 117071 Москва В71, Ленинский проспект, 15

4я типография издательства «Наука» 630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25


Д.Я. Стройк
КРАТКИЙ ОЧЕРК
ИСТОРИИ
МАТЕМАТИКИ