Carl Seegers

Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen

Neu herausgegeben von

Paul Heylandt

Übersetzt von Friedrich Diestel

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1924

Carl Seegers

Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen

Neu herausgegeben von

Paul Heylandt

Übersetzt von Friedrich Diestel

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
1924

ISBN 978-3-663-03082-9 ISBN 978-3-663-04271-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-04271-6

Deutsche Übersetzung der lateinischen unter dem Titel: „De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium Gottingae 1864“ erschienenen Dissertation des Verfassers.

Zur 125 jährigen Gedenkfeier

der

Technischen Hochschule

Berlin-Charlottenburg

Vorwort.

Die Dissertation von Carl Seegers, De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium Gottingae 1864, ist auch heute noch von großem Interesse. Der Verfasser untersucht die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn man statt des Newtonschen Gravitationsgesetzes ein Anziehungsgesetz in der Form des Weberschen elektrodynamischen Gesetzes annimmt. Die Konstante c des Weberschen Gesetzes ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit welcher die anziehende Kraft sich im Raum fortpflanzt. Seegers leitet, bereits 1864, streng unter der gemachten Annahme eine Formel für die Perihelbewegung der Planeten ab, welche später von Tisserand, Mécanique céleste, T. 4, Paris 1896, für die Bestimmung der Perihelbewegung des Merkur und der Venus benutzt worden ist. Ein anderes bemerkenswertes Ergebnis betrifft die säkularen Störungen der Planeten. Es stellt sich heraus, daß auch unter Zugrundelegung des Weberschen Gesetzes die säkularen Störungen, abgesehen von Korrektionsgliedern, mit den Untersuchungen von Lagrange und Laplace übereinstimmen, bei welchen bekanntlich das Newtonsche Gravitationsgesetz zugrunde gelegt ist. Eine neue Herausgabe dieser Arbeit, aber in deutscher Sprache, erscheint zeitgemäß. Die Übersetzung ist von Herrn F. Diestel in Göttingen angefertigt.

Berlin-Mariendorf, im Juni 1924.

Paul Heylandt.

Bemerkungen zur Übersetzung.

Die von mir angefertigte Übersetzung der lateinisch geschriebenen Dissertation von Carl Seegers „Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen" schließt sich möglichst an das Original an. Der besseren Übersicht wegen sind in den einzelnen Paragraphen, wo es erforderlich war, die Gleichungen numeriert, was der Verfasser nur in ganz einzelnen Fällen tut. Die Darstellung ist sehr häufig eine recht knappe, und ich habe daher vielfach kurze Bemerkungen in eckigen Klammern zur Erläuterung hinzugefügt. Das gilt namentlich von den Paragraphen 3 und 4, wo die dort auftretenden elliptischen Integrale bei ihrer Reduktion auf elliptische Funktionen recht kurz behandelt werden.

§ 5 enthält die Anwendung auf die Bahnbestimmung und liefert das sehr wichtige Ergebnis:

> „Bei Zugrundelegung des Weberschen Gesetzes weicht die Bahn des Körpers von der elliptischen ab und das Perihel des angezogenen Körpers bewegt sich in einem Kreise um die Sonne. Nach einem Umlauf verschiebt sich das Perihel um
>
> $$\frac{2\pi\lambda}{c^2 A(1-e^2)}.\text{“}$$

Hier ist

λ die Gravitationskonstante,

c die Geschwindigkeit, mit welcher die anziehende Kraft sich fortpflanzt,

A die halbe große Achse der Bahn,

e die Exzentrizität der Bahn.

Das ist ein fundamentales Resultat.

§ 6 und § 7 enthalten Anwendungen auf die Störungstheorie. Die aus dem Weberschen Gesetz entstehende Bewegung kann als aus der elliptischen Bewegung nach dem Newtonschen Gesetz abgeleitet angesehen werden, wenn man an den Bahnelementen gewisse Korrektionen anbringt. Im übrigen werden nur die säkularen Störungen behandelt. Das führt zu dem interessanten Ergebnis, daß alles, was Lagrange und Laplace gefunden haben, seine Gültigkeit behält.

Eine Reihe von Literaturangaben, namentlich aus der Mécanique analytique von Lagrange, Werk Bd. 12, sind von mir als Anmerkungen beigefügt. Auch habe ich die einzelnen Paragraphen mit Überschriften versehen.

Göttingen, im Juni 1924.

Friedrich Diestel.

Inhaltsverzeichnis.

Das Webersche elektrodynamische Gesetz. Die Hamiltonsche Funktion H. Die Hamiltonschen Differentialgleichungen der Bewegung. Die Funktion V.

§ 1.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchung ist „die Bewegung und die Störungen der Planeten zu betrachten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen.“ Eine Lösung dieses Problems scheint aus verschiedenen Gründen nicht unzweckmäßig zu sein.

Wenn wir dieses Gesetz an Stelle des Newtonschen als das Fundamentalgesetz der Anziehung, was sehr wahrscheinlich ist, annehmen, so kann leicht bewiesen werden, daß auch in diesem Falle das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte seine Gültigkeit beibehält. Jenes gilt allgemein, wenn wir das virtuelle Moment der anziehenden Kräfte in eine totale Variation und einen Differentialquotienten genommen nach der Zeit zerlegen können. Bezeichnen

m, m_1 die Massen der sich gegenseitig anziehenden Körper,

λ die Gravitationskonstante[1]),

c eine andere Konstante, und zwar die Geschwindigkeit, mit welcher die anziehende Kraft sich im Raume ausbreitet,

r die Entfernung der Körper,

so erhält man in unserem Falle

1.
$$\begin{aligned} f\delta r &= -\frac{\lambda m m_1}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\delta r \\ &= \delta\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]-\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\delta r\right)^{2)} = \delta W-\frac{dU}{dt}, \end{aligned}$$

[1]) λ ist die sogenannte Gausssche Gravitationskonstante und sie hat den Wert $\lambda = k^2 = 0{,}017029805$. Vgl. C. F. Gauss' Werke, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, 7, 12. Gotha 1871. — [2]) Der Faktor $\lambda m m_1$ ist der Einfachheit halber weggelassen.

(wenn zur Abkürzung

2. $$W = \frac{1}{r} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2, \quad U = \frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\delta r$$

gesetzt wird). Setzt man nun in der Fundamentalgleichung der Dynamik

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0$$

3. $$T = \sum \frac{1}{2} m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$
$$\delta_2 S = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right),$$
$$\delta_3 V = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

so läßt sich dieselbe auch in der Form darstellen

$$\delta_3 V + \delta T - \frac{d(\delta_2 S)}{dt} = 0.$$

Nun ist aber [nach der oben gemachten Voraussetzung]

$$\delta_3 V = \delta W - \frac{dU}{dt}$$

und es ist somit

4. $$\delta W + \delta T - \frac{d(\delta_2 S)}{dt} - \frac{dU}{dt} = 0.$$

Wir setzen nun

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz.$$

[Dann ist nach der obigen Festsetzung

$$T = \sum \frac{1}{2} m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$
$$\delta_2 S = \sum m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} dt = 2T.dt,$$
$$\frac{d(\delta_2 S)}{dt} = \frac{d(2T.dt)}{dt} = 2\frac{dT}{dt}dt$$
$$\delta W = dW, \quad \delta T = dT.$$

Ferner ist

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\delta r\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\delta r + \frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\delta\frac{dr}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\delta r + \frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial t}\delta x + \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial t}\delta y + \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial t}\delta z\right\}.$$

Wird nun

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz$$

gesetzt, so wird

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right)\cdot\frac{dr}{dt}dt + \frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}dt = \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]dt$$

oder

5. $$dW + dT - 2\frac{dT}{dt}dt - \frac{dU}{dt}dt = 0,$$

$$\left.\frac{dW}{dt} - \frac{dT}{dt} - \frac{dU}{dt} = 0\right].$$

Integriert man diese Gleichung nach z, so erhält man

6. $$W - T - U = \text{const.}$$

Das ist das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Daß die Prinzipien von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes und der Erhaltung der Flächen ihre Gültigkeit beibehalten, ist an und für sich klar.

Das von uns zuerst zu lösende Problem besteht darin, daß wir die relative Bewegung zweier Körper bestimmen, welche nach dem elektrodynamischen Gesetz sich gegenseitig anziehen. Es ist wiederum gestattet, dieses Problem auf das einfachere zurückzuführen, wo wir den zweiten Körper als fest annehmen und wir setzen die Masse des zweiten gleich 1. Nachdem dieses Problem gelöst ist, haben wir die Lösung des andern, wenn wir für die Größe λ diese letztere Größe multipliziert mit der Masse der beiden Körper einsetzen. Das ist bereits seit Newtons Zeiten bekannt. [Unter dieser Voraussetzung ist

$$\left. f\delta r = -\frac{\lambda}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right].\right]$$

Nun gehen wir dazu über, die drei so festgelegten Integrationskonstanten zu ermitteln, damit aus ihnen die übrigen drei allein durch Quadraturen gefunden werden können. Denn zuerst hat Jacobi [1]) in einer berühmten Untersuchung bewiesen, daß nach Bestimmung der einen Hälfte der Konstanten eines mechanischen Problems, welche gewissen Bedingungsgleichungen genügen, die

[1]) Man vergleiche C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. 2. Ausg. Berlin 1884. Gesammelte Werke. Supplementband. Vorlesung 19 und folgende.

übrigen nicht nur ausschließlich durch Quadraturen gefunden, sondern auch mit ihrer Hilfe die Formeln für die gestörten Elemente in der einfachsten Form ausgedrückt werden können. Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ die unabhängigen Veränderlichen des mechanischen Problems und wir setzen

7. $$\frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_1'} = p_1, \quad \frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_2'} = p_2, \ldots, \quad \frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_n'} = p_n.$$

Hier ist

8. $$q_1' = \frac{dq_1}{dt}, \quad q_2' = \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \quad q_n' = \frac{dq_n}{dt}$$

und die Differentiation ϑ ist so auszuführen, daß $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $q_1', q_2', \ldots, q_n', t$ als unabhängige Veränderliche angesehen werden [1]. Setzt man nun

9. $$H = \sum p_i q_i' - W - T,$$

so sind die Differentialgleichungen der Bewegung in der Hamiltonschen Form die folgenden

10. $$-\frac{dp_i}{dt} = -p_i^{\mathrm{I}} = \frac{dH}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = q_i^{\mathrm{I}} = \frac{dH}{dp_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ [2]}.$$

Das Zeichen d wird hier und im folgenden immer angewandt, wo die Differentiation nach den unabhängigen Veränderlichen $t, p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ ausgeführt wird. Gefunden seien die Integrationskonstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$, und zwar seien dieselben so bestimmt, daß den $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen

11. $$0 = [a_h, a_k] = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{da_h}{dq_i}\frac{da_k}{dp_i} - \frac{da_h}{dp_i}\frac{da_k}{dq_i}\right) \quad h = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

Genüge geleistet wird. Aus diesem System von Gleichungen folgt aber

12. $$\frac{\delta p_h}{\delta q_k} = \frac{\delta p_k}{\delta q_h},$$

---

[1]) Man vergleiche E. Schering, Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maß von der Bewegung abhängt. Gesammelte Werke, Bd. 1. Berlin 1902. Abhandlung 14, 15, S. 185 bis 246. — [2]) Man vergleiche wegen des Folgenden z. B. C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Bd. 1, Leipzig 1902, S. 56 bis 58, 62 u. ff.

wo das Zeichen δ sich auf Differentiationen nach t, $q_1, \ldots, q_n$, $a_1, \ldots, a_n$ bezieht. Die Gleichung 12 läßt sich folgendermaßen beweisen. Wir haben

$$13.\quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\delta a_h}{\delta q_i} = \frac{d a_h}{d q_i} + \sum_i \frac{d a_h}{d p_l}\frac{\delta p_l}{\delta q_i}, \\ 0 &= \frac{\delta a_k}{\delta q_i} = \frac{d a_k}{d q_i} + \sum_i \frac{d a_k}{d p_l}\frac{\delta p_h}{\delta q_i} \end{aligned}$$

und daher

$$14.\quad \frac{d a_h}{d q_i}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d q_i} = -\sum_l \left(\frac{d a_h}{d p_l}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d p_l}\right)\frac{\delta p_l}{\delta q_i},$$

$$15.\quad 0 = -[a_h, a_k] = \sum_i \sum_l \left(\frac{d a_h}{d p_l}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d p_l}\right)\left(\frac{\delta p_l}{\delta q_i} - \frac{\delta p_i}{\delta q_l}\right),$$

wo die doppelte Summation nur auf alle Kombinationen der Zahlen i, l zu erstrecken ist. Bezeichnen weiter φ und ψ Funktionen von p und q, so wird

$$\frac{d\varphi}{d p_l} = \sum_k \frac{\delta \varphi}{\delta q_k}\frac{d q_k}{d p_l} + \sum_h \frac{\delta\varphi}{\delta \alpha_h}\frac{d a_h}{d p_l} = \sum_h \frac{\delta\varphi}{\delta\alpha_h}\frac{d a_h}{d p_l},$$

$$\frac{d\psi}{d p_i} = \sum_h \frac{\delta \psi}{\delta q_h}\frac{d q_h}{d p_i} + \sum_k \frac{\delta\psi}{\delta a_k}\frac{d a_k}{d p_i} = \sum_k \frac{\delta\psi}{\delta\alpha_k}\frac{d a_k}{d p_i},$$

da $\dfrac{dq}{dp} = 0$ ist. Hieraus folgt dann weiter

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d p_l}\frac{d\psi}{d p_i} - \frac{d\varphi}{d p_i}\frac{d\psi}{d p_l} &= \sum_{(h,k)} \frac{\delta\varphi}{\delta a_h}\frac{\delta\psi}{\delta a_k}\left(\frac{d a_h}{d p_l}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d p_l}\right) \\ &= \sum_{(h,k)} \left(\frac{\delta\varphi}{\delta a_h}\frac{\delta\psi}{\delta a_k} - \frac{\delta\varphi}{\delta a_k}\frac{\delta\psi}{\delta a_h}\right)\left(\frac{d a_h}{d p_l}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d p_l}\right). \end{aligned}$$

Die in Klammern eingesetzten Zahlen h, k zeigen an, daß die Summation auf alle Kombinationen von h, k zu erstrecken ist. Setzt man $\varphi = p_i$, $\psi = q_l$, so geht diese Gleichung über in

$$16.\quad -1 = \sum_{(h,k)} \left(\frac{\delta p_i}{\delta a_h}\frac{\delta p_l}{\delta a_k} - \frac{\delta p_i}{\delta a_k}\frac{\delta p_l}{\delta a_h}\right)\left(\frac{d a_h}{d p_l}\frac{d a_k}{d p_i} - \frac{d a_h}{d p_i}\frac{d a_k}{d p_l}\right).$$

Gibt man ψ und φ die Werte p_λ, p_μ, wo die Indizes λ, μ nicht gleichzeitig dieselben und nicht i und l sind, so müssen offenbar die Ausdrücke auf der linken Seite identisch verschwinden, so daß man hat

$$17.\quad 0 = \sum_{(h,k)} \left(\frac{\delta p_\lambda}{\delta a_h}\frac{\delta p_\mu}{\delta a_k} - \frac{\delta p_\lambda}{\delta a_k}\frac{\delta p_\mu}{\delta a_h}\right)\left(\frac{da_h}{dp_l}\frac{da_k}{dp_i} - \frac{da_h}{dp_i}\frac{da_k}{dp_l}\right).$$

Wenn wir nun die Gleichungen 15 einzeln mit dem geeigneten Faktor $\frac{\delta p_\lambda}{\delta a_h}\frac{\delta p_\mu}{\delta a_k} - \frac{\delta p_\lambda}{\delta a_k}\frac{\delta p_\mu}{\delta a_h}$ multiplizieren und die sämtlichen Produkte in eine Summe zusammenziehen, so verschwinden nach 17 die Faktoren der Größen $\frac{\delta p_l}{\delta q_i} - \frac{\delta p_i}{\delta q_l}$, mit Ausnahme des Faktors von $\frac{\delta p_\mu}{\delta q_\lambda} - \frac{\delta p_\lambda}{\delta q_\mu}$, welcher nach 16 gleich -1 ist. Daher wird allgemein

$$18.\quad \frac{\delta p_\mu}{\delta q_\lambda} - \frac{\delta p_\lambda}{\delta q_\mu} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Der Nachweis, daß die Determinante des Gleichungssystems 15 nicht verschwindet, dürfte nicht ohne Weitläufigkeit zu führen sein. Da nun weiter ist

$$\frac{dp_l}{dt} = \frac{\delta p_l}{\delta t} + \sum_i \frac{\delta p_l}{\delta q_i} q_i' = \frac{\delta p_l}{\delta t} + \sum_i \frac{\delta p_l}{\delta q_i}\frac{dH}{dp_i}$$
$$= \frac{\delta p_l}{\delta t} + \sum_i \frac{\delta p_i}{\delta q_l}\frac{dH}{dp_i} = \frac{\delta p_l}{\delta t} + \frac{\delta H}{\delta q_l} - \frac{dH}{dq_l}$$

und ebenso

$$\frac{dp_l}{dt} = -\frac{dH}{dq_l},$$

so wird

$$19.\quad \frac{\delta p_l}{\delta t} = -\frac{\delta H}{\delta q_l}.$$

Aus den Gleichungen 12 und 19 ersehen wir, daß der Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - H dt$$

ein vollständiges Differential ist, dessen Integral wir mit V bezeichnen. Daher wird

$$20.\quad \frac{\delta V}{\delta t} = -H, \quad \frac{\delta V}{\delta q_1} = p_1, \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta q_n} = p_n.$$

Wir haben auch

$$21. \qquad \frac{\delta V}{\delta a_1} = -b_1, \quad \frac{\delta V}{\delta a_2} = -b_2, \ldots, \quad \frac{\delta V}{\delta a_n} = -b_n,$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ neue Konstanten bezeichnen. Das wird so bewiesen. Es ist

$$22. \quad \begin{cases} \dfrac{d(-b_l)}{dt} = \dfrac{\delta^2 V}{\delta t \, \delta a_1} + \sum\limits_i \dfrac{\delta^2 V}{\delta q_i \, \delta a_2} q_i' = -\dfrac{\delta H}{\delta a_2} + \sum\limits_i \dfrac{\delta p_i}{\delta a_2} \dfrac{dH}{dp_i} \\ \qquad = -\dfrac{\delta H}{\delta a_l} + \dfrac{\delta H}{\delta a_2} = 0, \text{ w. z. b. w.} \end{cases}$$

Die Gleichungen 20 und 21 bilden ein vollständiges System von Integralgleichungen [1]). Sind daher $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gefunden, so ist das Problem auf Quadraturen zurückgeführt. Denn nachdem aus den Gleichungen

$$23. \qquad a_1 = const, \quad a_2 = const, \quad a_3 = const, \quad \ldots, \quad a_n = const$$

die Größen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ abgeleitet und in den Ausdruck dV eingesetzt sind, sehen wir, daß die übrigen Konstanten $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ des mechanischen Problems durch einfache Differentiationen gefunden werden können.

Ableitung der drei Integralgleichungen

$$\frac{\delta V}{\delta a_1} = -b_1, \qquad \frac{\delta V}{\delta a_2} = -b_2, \qquad \frac{\delta V}{\delta a_3} = -b_3.$$

§ 2.

Es seien F_1, F_2, F_3 die Flächenintegrale, H das Integral der lebendigen Kräfte. Dann beweisen wir:

Die Ausdrücke

$$1. \qquad F_1 = a_2, \quad \varphi = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = a_3, \quad H = a_1$$

genügen den Gleichungen

$$2. \qquad [a_1, a_2] = 0, \quad [a_2, a_3] = 0, \quad [a_3, a_1] = 0.$$

---

[1]) Man vergleiche wegen dieser Definitionen C. G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. 2. Ausgabe. Gesammelte Werke, Supplementband, S. 3. Berlin 1884.

Bezeichnen

$$r\, sin\, \eta\, cos\, \xi, \quad r\, sin\, \eta\, sin\, \xi, \quad r\, cos\, \eta$$

die orthogonalen Koordinaten des bewegten Körpers, dessen Masse gleich Eins angesetzt ist, so erhält man für die lebendige Kraft den Ausdruck

$$3. \qquad T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + r^2 sin^2 \eta \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right].$$

Wenn wir an die Stelle von q_1, q_2, q_3 die unabhängigen Veränderlichen r, η, ξ einführen, so wird

$$4. \qquad p_1 = q_1' + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1} q_1', \quad p_2 = q_1^2 q_2', \quad p_3 = q_1^2 q_3' sin^2 q_2.$$

[Diese drei Gleichungen ergeben sich folgendermaßen. Es ist[1])

$$W = \lambda\left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{q_1} q'^2\right), \quad T = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 sin^2 q_2)$$

und folglich

$$p_1 = \frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_1'} = q_1' + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2q_1'}{q_1}, \quad p_2 = \frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_2'} = q_1^2 q_2',$$

$$p_3 = \frac{\vartheta(W+T)}{\vartheta q_3'} = q_1^2 q_3' sin^2 q_2.$$

Die drei Flächenintegrale sind

$$F_1 = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}, \quad F_2 = z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}, \quad F_3 = x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}.$$

Nun war

$$x = q_1 sin\, q_2 cos\, q_3, \quad y = q_1 sin\, q_2 sin\, q_3, \quad z = q_1 cos\, q_2$$

und folglich

$$\frac{dx}{dt} = q_1' sin\, q_2 cos\, q_3 + q_1 q_2' cos\, q_2 cos\, q_3 - q_1 q_3' sin\, q_2 sin\, q_3,$$

$$\frac{dy}{dt} = q_1' sin\, q_2 sin\, q_3 + q_1 q_2' cos\, q_2 sin\, q_3 + q_1 q_3' sin\, q_2 cos\, q_3,$$

$$\frac{dz}{dt} = q_1' cos\, q_2 - q_1 q_2' sin\, q_2.$$

---

[1]) Die Größen W und U des § 1 haben jetzt den Faktor λ.

Dann nehmen die drei Flächenintegrale die folgende Gestalt an:

$$F_1 = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = q_1^2 q_3^{\mathrm{I}} \sin^2 q_2,$$

$$F_2 = z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = q_1^2 q_2^{\mathrm{I}} \sin q_3 + q_1^2 q_3' \sin q_2 \cos q_2 \cos q_3,$$

$$F_3 = x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = -q_1^2 q_2' \cos q_3 + q_1^2 q_3' \sin q_2 \cos q_2 \sin q_3.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = q_1^2 \sqrt{q_2'^2 + q_3'^2 \sin^2 q_2}.$$

Ferner war

$$\begin{aligned} H &= p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' - W - T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + p_3 q_3' \\ &\quad - \frac{\lambda}{q_1} - \frac{\lambda}{c^2}\frac{q_1'^2}{q_1} - \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 \sin^2 q_2) \\ &= q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 \sin^2 q_2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{q_1} + \frac{\lambda}{c^2}\frac{q_1'^2}{q_1} - \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 \sin^2 q_2) \\ &= \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 \sin^2 q_2) - \frac{\lambda}{q_1} + \frac{\lambda}{c^2}\frac{q_1'^2}{q_1}\Big]. \end{aligned}$$

Die Integrale

$$5. \quad \begin{cases} H = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 q_3'^2 \sin^2 q_2) - \frac{\lambda}{q_1} + \frac{\lambda}{c^2}\frac{q_1'^2}{q_1} = a_1, \\ F_1 = q_1^2 q_3' \sin^2 q_2 = a_2, \\ \varphi = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = q_1^2 \sqrt{q_2'^2 + q_3'^2 \sin^2 q_2} = a_3 \end{cases}$$

gehen mit Hilfe der für p_1, p_2, p_3 erhaltenen Ausdrücke über in

$$6. \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{q_1^2}\left(p_2^2 + \frac{\sin^2 q_2}{p_3^2}\right) - \frac{\lambda}{q_1}, \\ a_2 = p_3, \\ a_3 = \sqrt{p_2^2 + \frac{\sin^2 q_2}{p_3^2}}. \end{cases}$$

Es läßt sich sehr leicht beweisen, daß diese drei Größen den Gleichungen genügen

$$7. \qquad [a_1, a_2] = 0, \qquad [a_2, a_3] = 0, \qquad [a_3, a_1] = 0.$$

[Denn es ist

$$\frac{da_1}{dp_1} = \frac{p_1}{1+\frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}, \qquad \frac{da_1}{dp_2} = \frac{p_2}{q_1^2}, \qquad \frac{da_1}{dp_3} = \frac{p_3}{q_1^2 \sin^2 q_2},$$

$$\frac{da_2}{dp_1} = 0, \qquad \frac{da_2}{dp_2} = 0, \qquad \frac{da_2}{dp_3} = 1,$$

$$\frac{da_3}{dp_1} = 0, \quad \frac{da_3}{dp_2} = \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2 q_2}}}, \quad \frac{da_3}{dp_3} = \frac{p_3}{\sin^2 q_2}\frac{1}{\sqrt{p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2 q_2}}},$$

$$\frac{da_1}{dq_1} = \frac{2\lambda}{c_2 q_1^2}\frac{p_1^2}{\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}\right)^2} - \frac{1}{q_1^3}\left(p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2 q_2}\right) + \frac{\lambda}{q_1^2},$$

$$\frac{da_1}{dq_2} = -\frac{p_3^2 \cos q_2}{q_1^2 \sin^3 q^2}, \qquad \frac{da_1}{dq_3} = 0,$$

$$\frac{da_2}{dq_1} = 0, \qquad \frac{da_2}{dq_2} = 0, \qquad \frac{da_2}{dq_3} = 0,$$

$$\frac{da_3}{dq_2} = 0, \qquad \frac{da_3}{dq_2} = -\frac{p_3^2 \cos q_2}{\sin^3 q_2}\frac{1}{\sqrt{p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2 q_2}}}, \qquad \frac{da_3}{dq_3} = 0.]$$

Aus den Gleichungen 6 folgt

$$8. \quad \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\left\{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_3^2}{q_1^2}\right\}\left\{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}\right\}}, \\ p_2 &= \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}, \qquad p_3 = a_2. \end{aligned}$$

[Nun ist

$$\begin{aligned} dV &= p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3 - H dt \\ &= p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + a_2 dq_3 - a_1 dt.] \end{aligned}$$

Durch Integration finden wir daher

$$9. \quad \left\{ \begin{aligned} V = &\int \sqrt{\left\{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_1^2}{q_1^2}\right\}\left\{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}\right\}}\, dq_1 \\ &+ \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}\, dq_2 + a_2 q_3 - a_2 t. \end{aligned} \right.$$

Da die Veränderlichen in diesem Ausdruck getrennt sind, so ist derselbe in der Tat integrierbar. Hieraus folgt

$$10. \begin{cases} \dfrac{\delta V}{\delta a_1} = -b_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\cdot\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_2}\right)-\frac{a_3^2}{q_1^2}}}\,dq_1 - t, \\[2ex] \dfrac{\delta V}{\delta a_2} = -b_2 = -\displaystyle\int \frac{a_2\,dq_2}{\sqrt{a_3^2-\frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}}\,\frac{1}{\sin^2 q_2} + q_3, \\[2ex] \dfrac{\delta V}{\delta a_3} = -b_3 = -\displaystyle\int \frac{a_3\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\,\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_1}\right)-\frac{a_3^2}{q_1^2}}}\,\frac{dq_1}{q_1^2} + \displaystyle\int \frac{a_3\,dq_2}{\sqrt{a_3^2-\frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}}. \end{cases}$$

Ableitung einer Gleichung zwischen der Zeit und dem Radiusvektor.

§ 3.

Die Gleichung

$$1. \qquad t - b_1 = \int \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\,\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_1}\right)-\frac{a_3^2}{q_1^2}}}\,dq_1$$

liefert eine Relation zwischen der Zeit und dem Radiusvektor. Sie zeigt uns, daß die Veränderliche q_1 zwischen den Werten $-\frac{\lambda}{2a_1}+\frac{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}{2a_1}$ und $-\frac{\lambda}{2a_1}-\frac{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}{2a_1}$ enthalten ist und daß daher $-\frac{\lambda}{2a_1}$ die mittlere Entfernung von der Sonne ergibt.

Nun betrachten wir eingehender das elliptische Integral

$$2.\quad \int \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_1}\right)-\frac{a_3^2}{q_1^2}}}\,dq_1=\sqrt{-2a_1}\int\frac{\sqrt{q_1\left(q_1+\frac{2\lambda}{c^2}\right)}\,dq_1}{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2-(\lambda+2a_1q_1)^2}}=J.$$

Setzt man nun

$$\lambda + 2a_1q_1 = -\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}\,y,$$

so geht dasselbe über in

$$J=-\frac{\lambda^2+2a_1a_3^2}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{\sqrt{\left(y+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}\right)\left(y-\frac{4\lambda a_1-c^2\lambda}{c^2\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}\right)}}{i\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

Infolge der Ungleichung

$$-\frac{\lambda}{2a_1}+\frac{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}{2a_1}<q_1<-\frac{\lambda}{2a_1}-\frac{\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}{2a_1},$$

liegt die Veränderliche y zwischen den Grenzen -1 und $+1$. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+2a_2a_3^2}}=\gamma,\qquad -\frac{4\lambda a_1-c^2\lambda}{c^2\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}=\delta,\qquad -\frac{\lambda^2+2a_1a_3^2}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}}=B,$$

so können wir wegen der Ungleichung

$$1>-1>-\gamma>-\delta$$

zur Reduktion des Integrals

$$J=B\int\frac{(y+\gamma)(y+\delta)}{i\sqrt{(y^2-1)(y+\gamma)(y+\delta)}}\,dy$$

auf die kanonische Form der elliptischen Integrale die Formel B II Seite 15 der Fundamenta nova[1]) anwenden.

Nach der dort angewandten Bezeichnung setzen wir

$$m=\sqrt[4]{(\gamma+1)(\delta-1)(\delta+1)(\gamma-1)},$$
$$n=\frac{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)}+\sqrt{(\delta+1)(\gamma-1)}}{2}=\frac{m}{k^1},$$

[1]) C. G. J. Jakobi, Gesammelte Werke, Bd. 1, Seite 68. Berlin 1881.

$$k = \sqrt{1 - k^{\text{I}2}} = \frac{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)} - \sqrt{(\delta+1)(\gamma-1)}}{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)} + \sqrt{(\delta+1)(\gamma-1)}},$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{(\gamma+1)(\delta+1)}{(\gamma-1)(\delta+1)}},$$

$$tang\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right) = M\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Dann ist

$$\frac{dy}{i\sqrt{(y^2-1)(y+\gamma)(y+\delta)}} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{\sqrt{m^2 \sin^2 amv + n^2 \cos^2 amv}}$$
$$= \frac{k^{\text{I}}}{m}\frac{d\,amv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 amv}} = \frac{k^{\text{I}}}{m}dv.$$

[Diese Gleichung ergibt sich folgendermaßen. Es ist

$$-\frac{M^2 - tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{M^2 + tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)} = y,$$

$$dy = +\frac{2M^2 tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}\frac{d\,amv}{\left[M^2 + tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)\right]^2},$$

$$y + \gamma = -\frac{M^2(1-\gamma) - (1+\gamma)\,tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{M^2 + tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)},$$

$$y + \delta = -\frac{M^2(1-\delta) - (1+\delta)\,tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{M^2 + tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)},$$

$$y^2 - 1 = -\frac{4M^2 tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)}{\left[M^2 + tang^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + amv\right)\right]^2},$$

$$\frac{dy}{i\sqrt{(y^2-1)(y+\gamma)(y+\delta)}}$$

$$= M\frac{d\,am\,v}{\sqrt{\left\{M^2(1-\gamma)\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+am\,v\right)-(1+\gamma)\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+am\,v\right)\right\}\left\{M^2(1-\delta)\cos^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+am\,v\right)-(1+\delta)\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+am\,v\right)\right\}}}$$

$$= M\frac{d\,am\,v}{\sqrt{\left\{\frac{M^2(1-\gamma)}{2}(1-\sin am\,v)-\frac{(1+\gamma)(1+\sin am\,v)}{2}\right\}\left\{\frac{M^2(1-\delta)}{2}(1-\sin am\,v)-\frac{(1+\delta)(1+\sin am\,v)}{2}\right\}}}$$

$$= M\frac{d\,am\,v}{\sqrt{\begin{array}{l}\frac{M^4(1-\gamma)(1-\delta)+(\gamma+1)(\delta+1)}{4}+\frac{M^4(1-\gamma)(1-\delta)+(\gamma+1)(\delta+1)}{4}\sin^2 am\,v\\ +\frac{M^2\{(1-\gamma)(1+\delta)+(1-\delta)(1+\gamma)\}}{4}\cos^2 am\,v-\frac{1}{2}[M^4(1-\gamma)(1-\delta)-(\gamma+1)(\delta+1)]\sin am\,v.\end{array}}}$$

Legt man nun M den oben angegebenen Wert bei, so verschwindet das Glied mit $\sin am\,v$ und man erhält nach einer leicht zu übersehenden Reduktion

$$\frac{dy}{i\sqrt{(y^2-1)(y+\gamma)(y+\delta)}}=\frac{d\,am\,v}{\sqrt{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)(\delta+1)(\gamma-1)}\sin^2 am\,v+\frac{\left(\sqrt{(\gamma-1)(\delta+1)}+\sqrt{(\delta-1)(\gamma+1)}\right)^2}{4}\cos^2 am\,v}}$$

$$=\frac{d\,am\,v}{\sqrt{m^2\sin^2 am\,v+n^2\cos^2 am\,v}}=\frac{k^{\mathrm{I}}}{m}dv.]$$

Nach weiteren Reduktionen erhalten wir

$$(y+\gamma)(y+\delta)=\sqrt{(\gamma^2-1)(\delta^2-1)}\left\{\frac{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta+1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}\right\}^2 \frac{\Delta^2 am\, v}{\left\{1+\frac{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}-\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}\, sin\, am\, v\right\}^2}$$

und daher

$$3. \qquad J = 2B\,\frac{\sqrt{(\gamma^2-1)(\delta^2-1)}\left\{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta+1)}\right\}}{\left\{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}\right\}^2}\int\frac{\Delta^2 am\, v\, dv}{\left\{1+\frac{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}-\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}\, sin\, am\, v\right\}^2}$$

Dieses Integral reduzieren wir auf die gebräuchliche Form der elliptischen Integrale dritter Art, indem wir einen neuen Parameter h durch die Gleichung

$$\frac{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}-\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}} = k\, sin\, am\, h$$

einführen. Hieraus erhält man

$$sin\, am\, h = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}+\sqrt{\delta^2-1}}{\sqrt{\gamma^2-1}-\sqrt{\delta^2-1}}, \qquad \Delta\, am\, h = \sqrt{1-k^2 sin^2 am\, h} = \frac{2\sqrt[4]{(\gamma^2-1)(\delta^2-1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}}.$$

Aus den Ausdrücken für $k\, sin\, am\, h$ und $sin\, am\, h$ leiten wir auch die folgenden ab

$$\gamma-1 = \frac{1-k}{k}\,\frac{1+k\, sin\, am\, h}{1-sin\, am\, h}, \qquad \gamma+1 = \frac{k+1}{k}\,\frac{1-k\, sin\, am\, h}{1-sin\, am\, h},$$

$$\delta-1 = -\frac{1+k}{k}\,\frac{1+k\, sin\, am\, h}{1+sin\, am\, h}, \qquad \delta+1 = -\frac{1-k}{k}\,\frac{1-k\, sin\, am\, h}{1+sin\, am\, h}$$

und hieraus auch

$$\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta+1)}=-\frac{2i}{k}\frac{\varDelta\,am\,h}{\cos am\,h}.$$

Nachdem nun so der konstante Faktor des Integrals umgeformt ist, nimmt das Integral 3 die besser zu behandelnde Form an

$$4. \qquad J=-B\int\frac{i\varDelta^3 am\,h}{k\cos am\,h}\left\{\frac{\varDelta\,am\,v}{1+k\sin am\,h\sin am\,v}\right\}^2 dv.$$

Um dieses Integral auf die Funktion Θ zurückzuführen, stellen wir folgende Überlegung an. Setzt man

$$5. \qquad Q=\int\frac{\varDelta^2 am\,v}{\sin am\,\alpha+\sin am\,v}\,dv,$$

so wird

$$\frac{dQ}{d\alpha}=-\int\frac{\cos am\,\alpha\,\varDelta\,am\,\alpha\,\varDelta^2 am\,v}{(\sin am\,\alpha+\sin am\,v)^2}\,dv.$$

Es sei nun

$$6. \qquad \begin{cases} \alpha=h+iK^{\mathrm{I}}, \\ K^{\mathrm{I}}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{\sqrt{1-k^{\mathrm{I}2}\sin^2 v}}. \end{cases}$$

Dann haben wir

$$\frac{dQ}{dh}=\int\frac{k\varDelta\,am\,h\cos am\,h\,\varDelta^2 am\,v}{(1+k\sin am\,h\sin am\,v)^2}\,do$$

und

$$7. \qquad J=-\frac{Bi}{k^2}\frac{\varDelta^2 am\,h}{\cos^2 am\,h}\frac{dQ}{dh}.$$

[Man erhält den Ausdruck für $\frac{dQ}{dh}$ mit Hilfe der aus der Jacobischen Theorie der elliptischen Funktionen herrührenden Formeln

$$\sin am(h+iK^{\mathrm{I}})=\frac{1}{k\sin am\,h},$$

$$\cos am(h+iK^{\mathrm{I}})=-\frac{i\varDelta\,am\,h}{k\sin am\,h},$$

$$\varDelta\,am(h+iK^{\mathrm{I}})=-i\frac{\cos am\,h}{\sin am\,h}\Big].$$

Das Problem ist daher auf die Bestimmung des Integrals Q zurückgeführt. Es ist aber

8. $$\begin{cases} Q = \int \frac{\Delta^2 am v\, dv}{\sin am \alpha + \sin am v} = \int \frac{\sin am \alpha\, \Delta^2 am v\, dv}{\sin^2 am \alpha - \sin^2 am v} \\ \qquad - \int \frac{\sin am v \,.\, \Delta^2 am v}{\sin^2 am \alpha - \sin^2 am v} dv. \end{cases}$$

Nach dem berühmten Fundamentaltheorem von Jacobi[1]) über die elliptischen Integrale dritter Art ist

9. $$\begin{cases} \int_0^v \frac{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha\, \Delta am \alpha \sin^2 am v\, dv}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am v} \\ \qquad = v \frac{d \log \Theta(\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(v - \alpha)}{\Theta(v + \alpha)}, \end{cases}$$

wo

$$\Theta \frac{2Kv}{\pi} = 1 - 2q^2 \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^3 \cos 6v + \cdots,$$

$$\log q = - \frac{\pi K'}{K}, \quad am K = \frac{1}{2}\pi, \quad am(K, k^{\mathrm{I}}) = \frac{1}{2}\pi.$$

Daraus folgt sofort, wenn man v und α beziehlich durch $v + K + K^{\mathrm{I}} i$ und $\alpha + K$ ersetzt:

10. $$\begin{cases} \int \frac{\sin am \alpha \,.\, \Delta^2 am v}{\sin^2 am \alpha - \sin^2 am v} dv = \frac{\Delta am \alpha}{\cos am \alpha} \Big\{ - v \frac{d \log \Theta(\alpha + K)}{d\alpha} \\ \qquad + \frac{1}{2} \log \frac{H(\alpha + v)}{H(\alpha - v)} \Big\}. \end{cases}$$

Hier ist

$$H\left(\frac{2Kv}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q} \sin v - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 5v - \cdots$$

[Dieser Ausdruck ergibt sich folgendermaßen. Differentiiert man die Gleichung 9 nach v, so ergibt sich

$$\frac{k^2 \sin am \alpha \cos am \alpha\, \Delta am \alpha \sin^2 am v}{1 - k^2 \sin^2 am \alpha \sin^2 am v} = \frac{d \log \Theta(\alpha)}{d\alpha}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \log \frac{\Theta(v - \alpha)}{\Theta(v + \alpha)}.$$

[1]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke **1**, 204 bis 206. Berlin 1881.

Ersetzt man v durch $v + K + K^{\mathrm{I}} i$ und α durch $\alpha + K$ und berücksichtigt die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin am(v+K) &= \frac{\cos am v}{\Delta am v},\\
\cos am(v+K) &= -\frac{k^{\mathrm{I}} \sin am v}{\Delta am v},\\
\Delta am(v+K) &= \frac{k^{\mathrm{I}}}{\Delta am v},\\
\sin am(v+K+K^{\mathrm{I}} i) &= \frac{\Delta am v}{k \cos am v},\\
\cos am(v+K+K^{\mathrm{I}} i) &= -\frac{i k^{\mathrm{I}}}{k \cos am v},\\
\Delta am(v+K+K^{\mathrm{I}} i) &= +i k^{\mathrm{I}} \operatorname{tang} am,
\end{aligned}$$

so erhält man mit Übergehung einiger Zwischenrechnungen

$$11. \quad \begin{cases} -\dfrac{\sin am\alpha \cos am\alpha}{\Delta am\alpha} \dfrac{\Delta^2 am v}{\sin^2 am\alpha - \sin^2 am v} \\ = \dfrac{d \log \Theta(\alpha + K)}{d\alpha} + \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dv} \log \dfrac{\Theta(v + K^{\mathrm{I}} i - \alpha)}{\Theta(v + 2K + K^{\mathrm{I}} i + \alpha)}, \end{cases}$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
&1 - k^2 \sin^2 am(\alpha + K) \sin^2 am(v + K + K^{\mathrm{I}} i)\\
&\quad = (1-k^2) \frac{\sin^2 am\alpha - \sin^2 am v}{\Delta^2 am\alpha \Delta^2 am v}.
\end{aligned}$$

Nach der Jacobischen Definition der Funktion $H(v)$ ist aber

$$H(v) = \frac{\sqrt[4]{q}}{i} e^{\frac{\pi i v}{2K}} \Theta(v + K^{\mathrm{I}} i)\ ^{1)}.$$

Nun ist weiter

$$\Theta(v + 2K) = \Theta(v).$$

Die Gleichung 11 geht daher über in

$$12. \quad \begin{cases} -\dfrac{\sin am\alpha . \cos am\alpha}{\Delta am\alpha} \dfrac{\Delta^2 am v}{\sin^2 am\alpha - \sin^2 am v} \\ = \dfrac{d \log \Theta(\alpha + K)}{d\alpha} + \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dv} \log \dfrac{H(v-\alpha)}{H(v+\alpha)} \\ = \dfrac{d \log \Theta(\alpha + K)}{d\alpha} + \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dv} \log \dfrac{H(\alpha - v)}{H(\alpha + v)} \end{cases}$$

---

[1]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke **1**, 224 u. 226. Berlin 1881.

und hieraus durch Integration von $v = 0$ bis $v = v$

$$13.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_s^v \frac{\sin am\alpha \,.\, \Delta^2 amv}{\sin^2 am\alpha - \sin^2 amv} dv \\ \displaystyle = \frac{\Delta am\alpha}{\cos am\alpha}\left\{ -v\frac{d\log\Theta(v+K)}{d\alpha} + \frac{1}{2}\log\frac{H(\alpha+v)}{H(\alpha-v)}\right\} \Big]. \end{cases}$$

Das andere auf der rechten Seite der Gleichung 8 vorkommende Integral

$$\int \frac{\sin amv\, \Delta^2 amv}{\sin^2 am\alpha - \sin^2 amv} dv$$

geht durch die Substitution

$$t = \sin^2 \alpha mv$$

über in einen Ausdruck, welcher nur die Wurzel aus einem Polynom zweiten Grades enthält und man findet dasselbe nach naheliegenden Reduktionen

$$= -\frac{1}{2}\frac{\Delta am\alpha}{\cos am\alpha}\log\left\{\frac{\sin coamv - \sin coam\alpha}{\sin coamv + \sin coam\alpha}\right\} + \frac{k}{2}\log\left\{\frac{k\sin coamv - 1}{k\sin coamv + 1}\right\}.$$

[Durch die genannte Substitution geht das Integral über in

$$\frac{1}{2}\int\frac{1-k^2t}{(\sin^2 am\alpha - t)\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\Delta^2 am\alpha}{\sin^2 am\alpha - t} + k^2\right\}\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}}$$
$$= \frac{1}{2}\Delta^2 am\alpha\int\frac{1}{\sin^2 am\alpha - t}\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}} + \frac{1}{2}k^2\int\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\Delta^2 am\alpha}{\sin^2 am\alpha - t} = \frac{\Delta am\alpha}{\cos am\alpha}\frac{d}{dt}\log\frac{\sqrt{\frac{1-t}{1-k^2t}} - \frac{\cos am\alpha}{\Delta am\alpha}}{\sqrt{\frac{1-t}{1-k^2t}} + \frac{\cos am\alpha}{\Delta am\alpha}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}} = \frac{d}{dt}\log\frac{\sqrt{\frac{1-t}{1-k^2t}} - 1}{\sqrt{\frac{1-t}{1-k^2t}} + 1}.$$

Ferner ist nach der Jacobischen Theorie

$$coam u = am(K - u), \quad sin\,coam u = \frac{cos\,am u}{\varDelta am u},$$

$$cos\,coam u = \frac{k^{\mathrm{I}}\,sin\,am u}{\varDelta am u}, \quad \varDelta coam u = \frac{k^{\mathrm{I}}}{\varDelta am u}.$$

Benutzt man diese Gleichungen und führt die Integrationen aus, so erhält man unmittelbar die obige Gleichung.]

Für Q erhält man daher

$$14.\left\{\begin{aligned} Q &= \int \frac{\varDelta^2 am v}{sin\,am\alpha + sin\,am v}\,dv \\ &= \frac{\varDelta am\alpha}{cos\,am\alpha}\left\{-v\frac{\Theta^{\mathrm{I}}(\alpha+K)}{\Theta\,(\alpha+K)} + \frac{1}{2}\log\frac{H(\alpha+v)}{H(\alpha-v)}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\log\frac{sin\,coam v - sin\,coam\alpha}{sin\,coam v + sin\,coam\alpha}\right\} - \frac{k}{2}\log\left\{\frac{k\,sin\,coam v - 1}{k\,sin\,coam v + 1}\right\}. \end{aligned}\right.$$

In diesem Ausdruck setze man nach Ausführung der Differentiation nach α statt α nunmehr $h + iK^{\mathrm{I}}$. Mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Theta(v + iK^{\mathrm{I}}) = H(v+K)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2v + iK^{\mathrm{I}})},$$

$$H(v + iK^{\mathrm{I}}) = i\Theta_{(v)}\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2v + iK^{\mathrm{I}})}$$

erhält man

$$15.\left\{\begin{aligned} \frac{dQ}{dh} &= -\frac{kk^{\mathrm{I}\,2}\,sin\,am h}{\varDelta^2 am h}\left\{-v\frac{H'(h+K)}{H\,(h+K)}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(h+v)}{\Theta(h-v)}\,\frac{k\,sin\,coam h\,sin\,coam v - 1}{k\,sin\,coam h\,sin\,coam v - 1}\right\} \\ &+ \frac{k\,cos\,am h}{\varDelta am h}\left\{-v\frac{d^2\log H(h+K)}{dh^2} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'(h+v)}{\Theta\,(h+v)}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\frac{\Theta'(h-v)}{\Theta\,(h-v)} - \frac{kk^{\mathrm{I}\,2}\,sin\,am h\,sin\,coam v - 1}{(k^2\,sin^2\,coam h\,sin^2\,coam - 1)\varDelta^2 am h}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Da nun

$$16. \qquad J = -\frac{Bi\,\varDelta^2 am h\,dQ}{k^2\,cos^2 am h\,dh}$$

ist, so erhält man schließlich

$$17.\quad \left\{\begin{aligned} & J = B\frac{ik'^2}{k}\frac{\sin am h}{\cos^2 am h}\Big\{-v\frac{H'(h+K)}{H(h+K)} \\ & +\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(h+v)}{\Theta(h-v)}\;\frac{k \sin coam h \sin coam v - 1}{k \sin coam h \sin coam v + 1}\Big\} \\ & -\frac{Bi}{k}\frac{\Delta am h}{\cos am h}\Big\{-v\frac{d^2 \log H(h+K)}{dh^2}+\frac{1}{2}\frac{\Theta'(h+v)}{\Theta(h+v)} \\ & +\frac{1}{2}\frac{\Theta'(h-v)}{\Theta(h-v)} \\ & -\frac{kk'^2}{\Delta^2 am h}\;\frac{\sin am h \sin coam v + 1}{k^2 \sin^2 coam h \sin^2 coam v - 1}\Big\} = t - b_1. \end{aligned}\right.$$

Bestimmung der Konstanten b_2 und b_3. Die Funktion V.

§ 4.

Weiter haben wir

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} q_3 + b_2 &= \int \frac{a_2}{\sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}}\frac{dq_2}{\sin^2 q_2} \\ &= -\int \frac{a_2\, d \operatorname{cotang} q_2}{\sqrt{a_3^2 - a_2^2 - a_2^2 \operatorname{cotang}^2 q_2}} \\ &= \arccos\left(\sqrt{\frac{a_2^2}{a_3^2 - a_2^2}} \operatorname{cotang} q_2\right). \end{aligned}\right.$$

Es bleibt noch übrig, daß wir die durch die folgende Gleichung definierte dritte Konstante

$$2.\quad \left\{ b_3 = \int \frac{a_3\sqrt{1+\frac{\lambda}{c_2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_1}\right)-\frac{a_3^2}{q_1^2}}}\frac{dq_1}{q_1^2} - a_3\int\frac{dq_2}{\sqrt{a_3^2-\frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}}\right.$$

ermitteln. Zuerst ist

$$\begin{aligned} \int\frac{a_3\, dq_2}{\sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}} &= -\int\frac{a_3\, d\cos q_2}{\sqrt{a_3^2 - a_2^2 - a_3^2\cos^2 q_2}} \\ &= \arccos\left(\sqrt{\frac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2}}\cos q_2\right). \end{aligned}$$

Ferner geht das Integral

$$3.\quad \begin{cases} a_3 \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1+\frac{\lambda}{q_1}\right)-\frac{a_3}{q_1^2}}}\frac{dq_1}{q_1^2} \\ = a_3^2 \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{\lambda^2-2a_1a_3^2-\left(\lambda-\frac{a_3^2}{q_1}\right)^2}}\frac{dq_1}{q_1^2} \end{cases}$$

durch die Substitution

$$\lambda - \frac{a_3^2}{q_1} = \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}\,.\,x,$$

wenn der Kürze halber

$$A = \sqrt{\frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}{ca_2}}, \quad \varrho = \frac{c^2a_3^2+2\lambda^2}{2\lambda\sqrt{\lambda^2+2a_1a_3^2}}$$

gesetzt wird, über in

$$4.\quad A\int\frac{x-\varrho}{\sqrt{x-\varrho)(x^2-1)}}\,dx = J_1.$$

Da x zwischen den Grenzen $+1$ und -1 enthalten und $\varrho > 1$ ist, so können wir die Formeln A I auf S. 16 der Fundamenta nova[1]) anwenden. Wir setzen nun

$$m = \sqrt[4]{\varrho^2-1}, \quad n = \frac{\sqrt{\varrho-1}+\sqrt{\varrho+1}}{2} = \frac{m}{\mu^{\mathrm{I}}}, \quad \mu^2 = 1-\mu^{\mathrm{I}\,2},$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{\varrho-1}{\varrho+1}}, \quad tang\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+am\,u\right) = M\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Dann ist

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\varrho)(x^2-1)}} = \frac{\mu^{\mathrm{I}}}{m}\,du$$

und nach einigen Reduktionen

$$x-\varrho = -\sqrt{\varrho^2-1}\left\{\frac{1-\mu\,sin\,am\,u}{1+\mu\,sin\,am\,u}\right\},$$

1) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke **1**, 68. Berlin 1881.

so daß man hat

5. $$J_1 = -A \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{1 - \mu \sin am u}{1 + \mu \sin am u} du.$$

[Es ist

$$\mu = \frac{\sqrt{\varrho + 1} - \sqrt{\varrho - 1}}{\sqrt{\varrho + 1} + \sqrt{\varrho - 1}}, \quad x = -\frac{M^2 - tang^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + am u\right)}{M^2 + tang^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + am u\right)},$$

$$dx = \frac{2 M^2 tang \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + am u\right)}{\left[M^2 + tang^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + am u\right)\right]^2} \frac{\varDelta am u}{cos^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + am u\right)} du$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(x - \varrho)(x^2 - 1)}}$$

$$= \frac{\mu'}{m} du, \quad x - \varrho = -\sqrt{\varrho^2 - 1} \frac{1 - \mu \sin am u}{1 + \mu \sin am u}\Bigg].$$

Das Integral $\int \frac{1 - \mu \sin am u}{1 + \mu \sin am u} du$ hängt ab von den Werten der Integrale $\int \frac{\sin am u}{1 - \mu^2 \sin^2 am u} du$ und $\int \frac{du}{1 - \mu^2 \sin^2 am u}$. Das erste Integral läßt sich sofort ausführen und man erhält

$$\int \frac{\sin am u}{1 - \mu^2 \sin^2 am u} du = -\frac{1}{\mu'^2} \frac{\cos am u}{\varDelta am u} = -\frac{1}{\mu'^2} \sin coam u.$$

Dagegen erfordert das zweite Integral $\int \frac{du}{1 - \mu^2 \sin^2 am u}$ eine höhere Untersuchung. Der Ausdruck

6. $$\frac{d^2 \log \Theta(u + M)}{du^2} = \frac{\Theta(u + M)\Theta''(u + M) - \Theta'^2(u + M)}{\Theta^2(u + M)},$$

wo

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 u}}$$

gesetzt ist, ist eine monodrome doppeltperiodische Funktion mit den Perioden $2M$ und $2M'i$. Hier ist

$$M' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \mu'^2 \sin^2 u}}.$$

Die zweite logarithmische Ableitung der Funktion Θ wird unendlich, wo Θ den Wert Null annimmt und ist doppeltperiodisch. Die Funktion $\frac{1}{\Delta^2 am\, u}$ hat dieselben Perioden und verschwindet für dieselben Werte wie $\frac{d^2 \log \Theta(v+M)}{du^2}$. Nach der Theorie der komplexen Funktionen kann daher die eine durch die andere ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke setzen wir

7. $$\frac{d^2 \log \Theta(u+M)}{du^2} = \frac{A}{\Delta^2 am\, u} + B\,^{1)},$$

wo die Konstanten A und B noch zu bestimmen sind. Setzt man nacheinander $u = 0$, $u = M$, so erhalten wir

8. $$\begin{cases} \dfrac{\Theta''(M)}{\Theta(M)} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2M}}\,\Theta''(M) = A + B, \\[2ex] \dfrac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\mu' M}}\,\Theta''(o) = \dfrac{A}{\mu'^2} + B. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

9. $$\begin{cases} A\,\dfrac{\mu^2}{\mu'^2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2M}}\left\{\dfrac{\Theta''(o)}{\sqrt{\mu'}} - \Theta''(M)\right\}, \\[2ex] -B\mu^2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2M}}\left\{\Theta''(o)\mu'^{\frac{3}{2}} - \Theta''(M)\right\}. \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, differentiieren wir zweimal die Gleichung

$$\sqrt{\mu'}\,\Theta(u+M) = \Theta(u)\,\Delta\, am\, u$$

und setzen $u = 0$. Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$\Theta(o) = \sqrt{\frac{2\mu' M}{\pi}}$$

erhält man

$$\Theta''(M) = \frac{1}{\sqrt{\mu'}}\left\{\Theta''(o) - \mu^2\sqrt{\frac{2\mu' M}{\pi}}\right\}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in den Ausdruck für A wird einfach

10. $$A = \mu'^2.$$

---

[1]) Daß die Größen A und B Konstanten sein müssen, folgt sehr einfach aus der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen, da es ganze transzendente doppeltperiodische Funktionen nicht gibt.

Ferner differentiieren wir zweimal die Gleichung

11. $$H(u) = \sqrt{\mu}\,\Theta(u) \sin am u$$

und setzen nach Ausführung der Differentiation $u = M$. So findet man

$$H''(M) = -\mu^{12} \sqrt{\frac{2\mu M}{\pi}} + \sqrt{\mu}.\Theta''(M).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalten wir

$$\Theta''(M) - \sqrt{\mu^{13}}\,\Theta''(o) = \sqrt{\mu^3}.H''(M)$$

und

12. $$B = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu M}}\,H''(M).$$

Schließlich erhalten wir

13. $$\frac{d^2 \log \Theta(u+M)}{du^2} = \frac{\mu^{12}}{\Delta^2 am u} + \sqrt{\frac{\pi}{2\mu M}}\,H''(M)$$

und daher

14. $$\int \frac{du}{\Delta^2 am u} = -\frac{u}{\mu^{12}} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu M}}\,H''(M) + \frac{1}{\mu^{12}} \frac{d \log \Theta(u+M)}{du}.$$

Nachdem nun die einzelnen Integrale ermittelt sind, erhalten wir

15. $$\left\{\begin{aligned} \int \frac{1-\mu \sin am u}{1+\mu \sin am u}\,du &= -\frac{2u}{\mu^{12}} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu M}}\,H''(M) - u \\ &\quad + \frac{2\mu}{\mu^{12}} \frac{\cos am u}{\Delta am u} + \frac{2}{\mu^{12}} \frac{d \log \Theta(u+M)}{du}, \end{aligned}\right.$$

ferner

16. $$\left\{\begin{aligned} J_1 = A \Bigg\{ &\frac{u}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{M}}\,H''(M) + \frac{\mu^{12}}{\sqrt{2\mu}}\,u - \frac{\sqrt{2\mu} \cos am u}{\Delta am u} \\ &- \sqrt{\frac{2}{\mu}} \frac{d \log \Theta(u+M)}{du} \Bigg\}, \end{aligned}\right.$$

und endlich

17. $$b_3 = J_1 - arc \cos\left(\sqrt{\frac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2}} \cos q_2\right).$$

Die Funktion V.

Zur Vervollständigung ist noch der von uns für die Funktion V gefundene Ausdruck zu untersuchen. Es war

$$
18. \quad \left\{ \begin{aligned} V = & \int \sqrt{\left\{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_3^2}{q_1}\right\}\left\{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}\right\}}\, d q_1 \\ & + \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{\sin^2 q_2}}\, d q_2 + a_2 q_3 - a_1 t. \end{aligned} \right.
$$

Das erste Integral geht durch dieselben im Anfang von § 3 angewandten Substitutionen über in

$$
\sqrt{-2 a_1} \int \frac{(1 - y^2)(y + \delta)}{y + \gamma} \, \frac{d y}{i \sqrt{(y^2 - 1)(y + \gamma)(1 + \delta)}},
$$

wo γ, δ die ihnen dort gegebene Bezeichnung beibehalten. Wir setzen nun weiter

$$
\begin{aligned}
k^{\mathrm{I}} &= \frac{2 \sqrt[4]{(\gamma^2 - 1)(\delta^2 - 1)}}{\sqrt{(\gamma + 1)(\delta - 1)} + \sqrt{(\delta + 1)(\gamma - 1)}}, \\
k &= \sqrt{1 - k^{\mathrm{I}2}}, \\
&= \frac{\sqrt{(\gamma + 1)(\delta - 1)} - \sqrt{(\delta + 1)(\gamma - 1)}}{\sqrt{(\gamma + 1)(\delta - 1)} + \sqrt{(\delta + 1)(\gamma - 1)}}, \\
M &= \sqrt[4]{\frac{(\gamma + 1)(\delta + 1)}{(\gamma - 1)(\delta - 1)}}, \quad t\,ang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} am\, v\right) = M \sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}}, \\
m &= \sqrt[4]{(\gamma^2 - 1)(\delta^2 - 1)}.
\end{aligned}
$$

Dann erhalten wir

$$
\frac{d y}{i \sqrt{(y^2 - 1)(y + \gamma)(y + \delta)}} = \frac{k^{\mathrm{I}}}{m}\, d v,
$$

$$
1 - y^2 = \frac{4 M^2}{(1 + M^2)^2} \frac{\cos^2 am\, v}{\left\{1 + \left[\frac{\sqrt{(\gamma - 1)(\delta - 1)} - \sqrt{(\gamma + 1)(\delta + 1)}}{\sqrt{(\gamma - 1)(\delta - 1)} + \sqrt{(\gamma + 1)(\delta + 1)}}\right] \sin am\, v\right\}^2}
$$

$$
\frac{y + \delta}{y + \gamma} = \frac{\sqrt{\delta^2 - 1}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \cdot \frac{1 - k \sin am\, v}{1 + k \sin am\, v}.
$$

Führt man nun den Parameter h durch die Gleichung

$$
k \sin am\, h = \frac{\sqrt{(\gamma - 1)(\delta - 1)} - \sqrt{(\delta + 1)(\gamma + 1)}}{\sqrt{(\gamma - 1)(\delta - 1)} + \sqrt{(\delta + 1)(\gamma + 1)}}
$$

ein, so wird

$$19.\ \frac{k^{\mathrm{I}}}{m}\frac{4M^2}{(1+M^2)^2}\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\sqrt{\gamma^2-1}} = ik\cos am h\, \varDelta am h\frac{\sin am h - 1}{\sin am h + 2} = G.$$

[Bei der Bestimmung dieser Gleichung muß man die oben auf S. 15 gegebenen Ausdrücke

$$\sin am h = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}+\sqrt{\delta^2-1}}{\sqrt{\gamma^2-1}-\sqrt{\delta^2-1}},$$

$$\varDelta am h = \frac{2\sqrt[4]{(\delta^2-1)(\gamma^2-1)}}{\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}},$$

$$\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)} = -\frac{2i}{k}\frac{\varDelta am h}{\cos am h}.$$

berücksichtigen. Man erhält dann

$$\frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\sqrt{\gamma^2-1}} = \frac{\sin am h - 1}{\sin am h + 1}\cdot\frac{k^{\mathrm{I}}}{m}\frac{4M^2}{(1+M^2)^2}$$

$$= \frac{k^{\mathrm{I}}\, 4\sqrt[4]{(\delta^2-1)(\gamma^2-1)}}{\left(\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}\right)^2}$$

$$= \frac{2k^{\mathrm{I}}\varDelta am h}{\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}}$$

$$= \frac{4\sqrt[4]{(\delta^2-1)(\gamma^2-1)}}{\sqrt{(\gamma+1)(\delta-1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta+1)}}\,\frac{1}{\sqrt{(\gamma+1)(\delta+1)}+\sqrt{(\gamma-1)(\delta-1)}}\,\varDelta am h$$

$$= ik\cos am h\,\varDelta am h$$

und hieraus die obige Gleichung.] Dann reduziert sich das Integral auf das folgende

$$\sqrt{-2a_1G}\int\frac{\cos^2 am v}{(1+k\sin am h\sin am v)^2}\,\frac{1-k\sin am v}{1+k\sin am v}dv$$

$$= \sqrt{-2a_1}\,.\,G\,.\sum,$$

welches auf elliptische Funktionen zurückgeführt werden kann. Es ist aber

$$20.\ \left\{\begin{aligned}&\frac{\cos^2 am v(1-k\sin am v)}{(1+k\sin am h\sin am v)^2(1+k\sin am v)}\\&=\frac{A}{(1+k\sin am h\sin am v)^2}+\frac{B}{1+k\sin am h\sin am v}\\&+\frac{C}{1+k\sin am v}+D.\end{aligned}\right.$$

Hier ist

$$21. \begin{cases} A = -\dfrac{\Delta^2 am h}{k^2 \sin^2 am h} \dfrac{\sin am h + 1}{\sin am h - 1}, \\ C = -\dfrac{k'^2 (k+1)}{k^3} \dfrac{1}{(\sin am h - 1)^2}, \\ 1 = A + B + C + D, \\ 0 = 1 - \dfrac{\sin am h}{1 + \sin am h} A + \sin am h . D + \dfrac{\sin am h - 1}{2} C. \end{cases}$$

[Die letzte Gleichung erhält man durch die Substitution $\sin am v = \frac{1}{k}$].

Nachdem so die Größen A, B, C, D bestimmt sind, erhalten wir

$$22. \begin{cases} \sum = A \displaystyle\int \frac{dv}{(1 + k \sin am k \sin am v)^2} \\ \quad + B \displaystyle\int \frac{dv}{1 + k \sin am h \sin am v} \\ \quad + C \displaystyle\int \frac{dv}{1 + k \sin am v} + Dv \\ \quad = A \sum' + B \sum'' + C \sum''' + Dv. \end{cases}$$

Nun behandeln wir jedes Integral getrennt und wir machen den Anfang mit $\sum^{\mathrm{I}}$. Wenn wir nun

$$23. \qquad P = \int \frac{k \sin am h}{1 + k \sin am h \sin am v} dv$$

setzen, so erhalten wir durch Differentiation nach h

$$\frac{dP}{dh} = \int \frac{k \cos am h . \Delta am h}{(1 + k \sin am h \sin am v)^2} dv = k \cos am h . \Delta am h . \sum^{\mathrm{I}}$$

und weiter

$$24. \qquad \sum^{\mathrm{I}} = \frac{1}{k \cos am h . \Delta am h} \frac{dP}{dh}.$$

Für P erhält man aber mit einer leichten Umformung

$$25. \begin{cases} P = k \sin am h \displaystyle\int \frac{dv}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v} \\ \quad = k^2 \sin^2 am h \displaystyle\int \frac{\sin am v . dv}{1 - k^2 \sin^2 am h . \sin^2 am v} \end{cases}$$

Der Wert des Integrals

$$\int \frac{dv}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v}$$

folgt aus dem schon oben zum Gebrauch verwandten berühmten Fundamentaltheorem von Jacobi, indem man v und h durch $v + iK^{\text{I}}$, $h + iK^{\text{I}}$ ersetzt. So erhält man

$$26. \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dv}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v} \\ \displaystyle= \frac{1}{\varDelta am h \, cotang \, am h} \left\{ v \frac{H'(h)}{H(h)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(v-h)}{\Theta(v+h)} \right\}. \end{cases}$$

[Diese Darstellung ergibt sich folgendermaßen. Wenn man auf S. 17 in der Gleichung 9 α durch $h + K'i$ ersetzt und dann dieselbe nach v differentiiert, so erhält man

$$\frac{k^2 \sin am (h + K'i) \cos am (h + K'i) \varDelta am (h + K'i) \sin^2 am v}{1 - k^2 \sin^2 am (h + K'i) \sin^2 am v}$$
$$= \frac{d \log \Theta (h + iK')}{dh} + \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \log \frac{\Theta (v - h - iK')}{\Theta (v + h + iK')}.$$

Ersetzt man nun v durch $v + iK^{\text{I}}$, so erhält man

$$\frac{k^2 \sin am (h + K'i) \cos am (h + K'i) \varDelta am (h + K'i) \sin^2 am (v + K'i)}{1 - k^2 \sin^2 am (h + K'i) \sin^2 am (v + K'i)}$$
$$= \frac{d \log \Theta (h + iK^{\text{I}}}{dh} + \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \log \frac{\Theta (v - k)}{\Theta (v + h + 2 iK^{\text{I}})}$$
$$= \frac{\varDelta am h \, cotang \, am h}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v}$$

und mit Berücksichtigung bekannter Formeln aus der Theorie der Thetafunktionen

$$\frac{1}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v}$$
$$= \frac{1}{\varDelta am h \, cotang \, am h} \left\{ \frac{H'(h)}{H(h)} + \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \log \frac{\Theta(v-h)}{\Theta(v+h)} \right\}.$$

Durch Integration nach v erhält man sofort den obigen Ausdruck.]
Weiter ist

$$27. \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\sin am v}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am v} dv \\ \displaystyle= \frac{1}{2 \varDelta am h \cos am h} \int \{ \sin am (v + h) + \sin am (v - h) \} dv \\ \displaystyle= \frac{1}{2 \varDelta am h \cos am h} \log \frac{\varDelta am (v + h) - k \cos am (v + h)}{\varDelta am (v - h) + k \cos am (v - h)}, \end{cases}$$

da

28. $$\int \sin am v\, dv = \frac{1}{k} \log [\varDelta am v - k \cos am v]$$

ist. [Nach dem Additionstheorem der elliptischen Funktionen ist bekanntlich

$$\sin am (u \pm h)$$
$$= \frac{\sin am u \cos am h \varDelta am k \pm \sin am h \cos am u \varDelta am u}{1 - k^2 \sin^2 am h \sin^2 am u}.\Big]$$

Nach Ausführung dieser Substitutionen erhalten wir

29. $$\begin{cases} P = \dfrac{k \sin^2 am h}{\varDelta am h \cos am h} \Big\{ v \dfrac{H'(h)}{H(h)} \\ \quad + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\Theta(v-h)}{\Theta(v+h)} \dfrac{\varDelta am (v-h) - k \cos am (v-h)}{\varDelta am (v+h) + k \cos am (v+h)} \Big\} \end{cases}$$

und hieraus endlich

30. $$\sum{}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{k \cos am h \varDelta am h} \frac{dP}{dh}.$$

Die Ausführung dieser Differentiation können wir übergehen.

Der Wert von $\sum^{\mathrm{II}}$ ist in dem Vorhergehenden enthalten. Denn man hat

31. $$\sum{}^{\mathrm{II}} = \int \frac{dv}{1 + k \sin am h \sin am v} = \frac{1}{k \sin am h} P.$$

Endlich ist

32. $$\sum{}^{\mathrm{III}} = \int \frac{dv}{1 + k \sin am v} = \int \frac{dv}{\varDelta^2 am v} - \int \frac{k \sin am v}{\varDelta^2 am v} dv.$$

Wie nun oben bewiesen worden ist, hat man

33. $$\int \frac{dv}{\varDelta^2 am v} = - \frac{v}{k'^2} \sqrt{\frac{\pi}{2kK}} H''(K) + \frac{1}{k'^2} \frac{d \log \Theta (v + K)}{dv}$$

und

34. $$\int \frac{k \sin am v}{\varDelta^2 am v} dv = - \frac{k}{k'^2} \sin co am v.$$

Infolgedessen besteht die Gleichung

35. $$\begin{cases} \sum{}^{\mathrm{III}} = - \dfrac{v}{k'^2} \sqrt{\dfrac{\pi}{2kK}} H''(K) + \dfrac{1}{k'^2} \dfrac{d \log \Theta (v + K)}{dv} \\ \qquad + \dfrac{k}{k'^2} \sin co am v. \end{cases}$$

Nachdem nun die Integrale $\sum'$, $\sum''$, $\sum'''$ einzeln bestimmt sind, hat man

36. $$\sum = A\sum' + B\sum'' + C\sum''' + Dv.$$

Das zweite in V noch vorkommende Integral

37. $$S = \int \sqrt{a_3^2 - \frac{a_2^2}{sin^2 q^2}}\, dq^2$$

findet man ohne Schwierigkeit in der Form

38. $$\begin{cases} S = a_3 \, arc\, cos\left(\sqrt{\dfrac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2}}\, cos\, \varphi\right) \\ \quad - a_2 \, arc\, cos\left(\sqrt{\dfrac{a_2^2}{a_3^2 - a_2^2}}\, cotang\, q_2\right). \end{cases}$$

Endlich ist

39. $$V = \sqrt{2a_1}, \quad G\sum + S + \alpha_2 q_2 - a_1 t,$$

w. z. b. w.

Anwendung des Vorigen auf die Astronomie. Abweichung von der elliptischen Bewegung. Kreisbahn des Perihels des angezogenen Körpers um die Sonne.

§ 5.

Die astronomische Bedeutung jener Integrationskonstanten, soweit sie sich auf die Zeit und die Lage der von dem Körper beschriebenen Bahn beziehen, ist ohne Schwierigkeit einzusehen. Aus der Gleichung 1, § 4, S. 21

1. $$cos\,(q_3 + b_2) = \sqrt{\frac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2}}\, cotang\, q_2$$

folgt, wenn man $\frac{a_2}{a_3} = cos\, i$ setzt,

2. $$cos\,(q_3 + b_2) = cotang\, i\, cotang\, q_2.$$

Hieraus ersehen wir, daß die Bahn des Körpers einfach gekrümmt ist, daß i die Neigung der Bahn und $-b_2$ die Länge des aufsteigenden Knotens bezeichnet. Wir haben schon oben gesehen, daß durch $-\frac{\lambda}{2a_1}$ die mittlere Entfernung von der Sonne ausgedrückt wird, welche man zweckmäßigerweise ebenfalls als Bahnelement einführt. Die Gleichungen zwischen der Zeit und dem Radiusvektor und der wahren Anomalie und dem Radiusvektor, durch welche die Bewegung des Körpers festgelegt wird, sind in den Ausdrücken für die Konstanten enthalten. Ebenso beschaffen ist die Gleichung

3. $$t - b_1 = J,$$

wo augenscheinlich b_1 für die Zeit des Periheldurchganges angenommen werden kann. Bezeichnet man mit φ die wahre Anomalie, so hat man weiter

4. $$d\varphi = \frac{a_3}{q_1^2}\, dt$$

oder

5. $$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{a_3 \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_2}\right) - \frac{a_3^2}{q_1^2}}} \frac{dq_1}{q_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2a_1 a_3^2}}}{c a_3} \left\{\frac{u}{\mu}\sqrt{\frac{\pi}{M}}\, H''(M) \right. \\ &\left. + \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}}\, u - \frac{\sqrt{2\mu}\, cos\, am u}{\Delta\, am u} - \sqrt{\frac{2}{\mu}} \frac{d \log \Theta(u + M)}{du}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dieses ist die Gleichung der von dem Körper beschriebenen Bahn.

Das Integral J_1 aus dem vorhergehenden Paragraphen ist daher nichts anderes als die wahre Anomalie φ. Hieraus erhalten wir

6. $$cos(\varphi - b_3) = \frac{cos\, q_2}{sin\, i} = sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - b_3\right).$$

$\frac{\pi}{2} - b_3$ ist die Periheldistanz vom aufsteigenden Knoten, wie einleuchtet, wenn wir den Winkel φ von dem Perihel zählen. Wenn wir endlich a_3 oder a_2, welche durch die Relation

7. $$a_2 = a_3\, cos\, i$$

voneinander abhängen, als einen die Bewegung des Körpers bestimmenden Parameter ansehen, so sind alle sechs Integrationskonstanten geometrisch interpretiert. Jene Bewegung weicht hauptsächlich durch den Umstand von der elliptischen Bewegung ab, daß das Perihel des angezogenen Körpers nicht denselben Platz im Raume beibehält, sondern sich in einem Kreise um die Sonne bewegt. Denn setzt man in der Gleichung

8. $$\begin{cases} \varphi + \varphi_0 = \dfrac{\sqrt{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}}{ca_3}\left\{\dfrac{u}{\mu}\sqrt{\dfrac{\pi}{M}}H''(M)\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}}u - \sqrt{2\mu}\dfrac{\cos am u}{\Delta am u} - \sqrt{\dfrac{2}{\mu}}\dfrac{d\log\Theta(u+M)}{du}\right\}, \end{cases}$$

$\varphi = 0$ und $q_1 = -\dfrac{\lambda}{2a_1} + \dfrac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{2a_1} = Q_2$, welches der kleinste Wert von q_1 ist, so haben wir mit Berücksichtigung der Gleichungen

9. $$\alpha m u = -\frac{\pi}{2}, \qquad u = -M,$$

10. $$\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}}{ca_3}\left\{\sqrt{\frac{M\pi}{\mu}}H''(M) + \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}}M\right\}.$$

Nachdem dann q_1 seinem Maximalwerte

$$\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{2a_1} = Q_2$$

gleichgesetzt ist, möge

$$\varphi = \varphi_1$$

werden. Da weiter

11. $$\alpha m u = +\frac{\pi}{2}, \qquad u = +M$$

ist, so erhält man

12. $$\varphi_1 + \varphi_0 = \frac{\sqrt{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}}{ca_3}\left\{\frac{\sqrt{\pi M}}{\mu}H''(M) + \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}}M\right\},$$

und daher

13. $$\varphi_1 = \frac{2\sqrt{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}}{ca_3}\left\{\frac{\sqrt{\pi M}}{\mu}H''(M) + \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}}M\right\}.$$

Dieser Wert ist von π verschieden. Um aber festzustellen, wieviel derselbe von π abweicht, muß der Ausdruck in eine Reihe entwickelt werden. Zu diesem Zwecke gehen wir von der ursprünglichen Integralgleichung aus

14. $$\varphi + \varphi_0 = \int \frac{a_3\sqrt{1 + \dfrac{\lambda}{c_2}\dfrac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1 + \dfrac{\lambda}{q_2}\right) - \dfrac{a_3^2}{q_1^2}}}\frac{dq_1}{q_1^2}$$

und setzen

$$\frac{a_3^2}{q_1} - \lambda = \sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2} \cos\vartheta.$$

Dann ist

$$15. \quad \begin{cases} \varphi + \varphi_0 = \sqrt{1 + \dfrac{2\lambda^2}{c^2 a_3^2}} \displaystyle\int \sqrt{\left\{1 + \frac{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2}}{c^2 a_3^2 + 2\lambda^2} \cos\vartheta\right\}} d\vartheta \\ \qquad = \sqrt{1 + \dfrac{2\lambda^2}{c^2 a_3^2}} \displaystyle\int \left\{1 + \frac{1}{2\varrho}\cos\vartheta - \frac{1}{8\varrho^2}\cos^2\vartheta \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{16\vartheta^3}\cos^3\vartheta - \dfrac{5}{128\varrho^4}\cos^4\vartheta + \cdots \right\} d\vartheta, \end{cases}$$

wo

$$16. \qquad \varrho = \frac{c^2 a_3^2 + 2\lambda^2}{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2}}$$

gesetzt ist.

Da den Werten Q_2 und Q_1 von q_1 bzw. $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ entsprechen, so erhalten wir den Wert von φ_1, welcher die Winkeldistanz des Perihels vom Aphel angibt, wenn wir das Integral zwischen den Grenzen 0 und π nehmen. So wird mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,dx = 0, \qquad \int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = \frac{1, 3, 5 \ldots (2n-1)}{2, 4, 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2},$$

$$17. \quad \varphi_1 = \pi \sqrt{1 + \frac{2\lambda^2}{c^2 a_3^2}} \left\{1 - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1, 3, 5, \ldots (2n-3)}{(2^n, 2, 4, 6 \ldots 2n)^2} \frac{1}{\varrho^{2n}}\right\}.$$

Wenn wir nun die Potenzen $\frac{1}{c^4}$ und die höheren wegen der Größe der Quantität c vernachlässigen, so haben wir

$$18. \qquad \varphi_1 = \pi\left(1 + \frac{\lambda^2}{c^2 a_3^2}\right)$$

und daher ist die Distanz von zwei sich folgenden Perihelen

$$19. \qquad \Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\lambda^2}{c^2 a_3^2}.$$

Vergleicht man die durch die Gleichungen 13 und 17 gelieferten Werte von φ_1 miteinander, da

$$20. \qquad \varrho = \frac{1 + \mu^2}{2\mu}$$

ist, so erhalten wir noch die elegante Relation

$$21. \quad \begin{cases} 1 - \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1, 3, 5 \ldots 4n-3}{(2^n, 2, 4, 6 \ldots 2n)^2} \left(\frac{2\mu}{1+\mu^2}\right)^{2n} \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2\mu}{1+\mu^2}} \left\{ H''(M) \frac{\sqrt{\pi M}}{\mu} + \frac{\mu'^2}{\sqrt{2\mu}} M \right\}. \end{cases}$$

* * *

[Setzt man nach S. 39

$$22. \quad \frac{\lambda}{-2a_1} = A, \quad \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha_1 \alpha_3^2}}{\lambda} = c,$$

wo A die halbe große Achse und c die Exzentrizität der Bahn bedeutet, so geht der Ausdruck für $\varDelta \varphi_1$ über in

$$23. \quad \varDelta \varphi_1 = \frac{2\pi\lambda}{c^2 A (1 - c^2)} \Big].$$

Die Störungstheorie bei Anwendung des Weberschen Gesetzes. Die Funktion Ω. Die säkularen Störungen.

§ 6.

Nachdem das einfache Problem von der Relativbewegung zweier Körper in dem Vorhergehenden gelöst ist, wollen wir zu der Betrachtung der Störungen übergehen, welche von der Anziehung anderer Massen herrühren. Es sei Ω die störende Funktion, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ein System von kanonischen Elementen, welche den in § 1 entwickelten Bedingungen genügen. Dann sind nach einem berühmten Theorem von Jacobi[1]) die Störungsformeln wieder von derselben Form wie die Differentialgleichungen der Bewegung. Denn es ist

$$1. \quad \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = -\frac{d\Omega}{db_1}, & \frac{da_2}{dt} = -\frac{d\Omega}{db_2}, & \frac{da_3}{dt} = -\frac{d\Omega}{db_3}, \\ \frac{db_1}{dt} = \frac{d\Omega}{da_1}, & \frac{db_2}{dt} = \frac{d\Omega}{da_2}, & \frac{db_3}{dt} = \frac{d\Omega}{da_3}, \end{cases}$$

[1]) G. J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. 2. Ausgabe. Gesammelte Werke, Supplementband, Berlin 1884. 36. Vorlesung, S. 273.

wo Ω als Funktion der Elemente a, b angesehen wird. Bezeichnet m den Körper, dessen Relativbewegung um M wir untersucht haben, bezeichnen ferner

m', m'', m''' usw. die störenden Massen,
r, r_1, r_2 ... die Entfernungen der Massen m, m', m'' ... von M,
r_0', r_0'', r_0''' ... „ „ „ „ m', m'', m''' ... „ m,
r_1'', r_1''' ... „ „ „ „ m'', m''' ... „ m'
. . . .

und so fort, so daß r_k^i die Entfernung des Körpers $m^{(i)}$ von $m^{(k)}$ bedeutet. Dann nimmt die störende Funktion Ω die folgende Form an

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} \Omega = {} & \lambda m' \left(\frac{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - r_0^{\mathrm{I}2}}{2 r^{\mathrm{I}3}}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr'^2}{dt}\right) + \frac{2}{c^2} r' \frac{d^2 r'}{dt^2}\right) \\ & + \lambda m'' \left(\frac{r^2 + r^{\mathrm{II}2} - r_0^{\mathrm{II}2}}{2 r^{\mathrm{II}3}}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr''^2}{dt}\right) + \frac{2}{c^2} r'' \frac{d^2 r''}{dt^2}\right) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - \frac{\Pi}{m}. \end{aligned}\right.$$

Hier ist

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{mm'\lambda}{r_0^{\mathrm{I}}}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr_0^{\mathrm{I}}}{dt}\right) + \frac{mm''}{r_0^{\mathrm{II}}}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr_0^{\mathrm{II}}}{dt}\right) \\ & + \frac{m'm''}{r_1''}\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dr_1''}{dt}\right) + \cdots \end{aligned}\right.$$

Hier betrachten wir nur die säkularen Störungen, welche aus den nicht periodischen Termen der Funktion Ω entstehen, sowohl wegen der Größe derselben, als auch weil mit ihrer Hilfe wahrscheinlich die Konstante c bestimmt werden kann.

Es sind nun r', ... r_0' ... als Funktionen der Zeit und der Konstanten a_1 ... b_3 auszudrücken und in Ω zu substituieren. Zu diesem Zwecke können wir die oben entwickelten Ausdrücke wegen der nicht zu bewältigenden Komplikation der Rechnung nicht anwenden. Es müssen Reihenentwicklungen von uns angewandt werden, in welchen die dritten und höheren Potenzen von c vernachlässigt werden.

Bezeichnet φ die Länge des Körpers in der Bahn, so war

4. $$\begin{cases} \varphi + \varphi_0 = \displaystyle\int \frac{a_3 \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{q_1}}}{\sqrt{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_3^2}{q_1^2}}} \frac{d q_1}{q_1^2} \\ \quad = a_3 \displaystyle\int \frac{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{1}{q_1^2}}{\sqrt{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_3^2}{q_1^2}}} \frac{d q_1}{q_1^2}. \end{cases}$$

Wenn wir nun den Winkel u durch die Gleichung

5. $$\frac{a_3^2}{r} - \lambda = \sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2 \cos u}$$

einführen und für q_1 die Größe r setzen, so geht dieses Integral über in

6. $$\begin{cases} \varphi + \varphi_0 = u\left(1 + \frac{\lambda^2}{c^2 a_3^2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{c^4}\frac{1}{a_3^4} - \frac{1}{4}\frac{\lambda^2(\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2)}{c_4 a_3^4}\right) \\ \quad + \left(\frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2}}{c^2 a_3^2} - \frac{\lambda^3 \sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2}}{c^4 a_3^4}\right) \sin u \\ \quad - \frac{1}{8}\frac{\lambda^2 (\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2)}{c^4 a_3^4} \sin 2u. \end{cases}$$

[Bei der Berechnung muß man die beiden Gleichungen berücksichtigen

$$2\left(a_1 + \frac{\lambda}{q_1}\right) - \frac{a_3^2}{q_1^2} = -\frac{1}{a_3^2}\left(\frac{a_3^2}{q_1} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2}{a_3^2} + \frac{2 a_1 a_3^2}{a_3^2}\right)$$
$$= \frac{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2}{a_3^2} \sin^2 u,$$
$$\frac{d q_1}{q_1^2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2 a_1 a_3^2} \sin u \, d u}{a_3^2}\Big].$$

Es ist zweckmäßig, den Winkel φ von dem Perihel zu zählen. Dann wird

7. $$\varphi_0 = 0.$$

Weiter war

8. $$t - b_1 = \int \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{r}}}{\sqrt{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{r}\right) - \frac{a_3^2}{r^2}}} dr = \int \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{1}{r^2}\right)}{\sqrt{2\left(a_1 + \frac{\lambda}{r}\right) - \frac{a_3^2}{r^2}}} dr$$

Setzen wir nun

9. $$\lambda + 2a_1 r = \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}\cos E,$$

so wird

10. $$\begin{cases} t - b_1 = \left[\dfrac{\lambda}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\lambda}{(-2a_1)^{\frac{1}{2}}}\right]E - \dfrac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}}\sin E \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^4}{c^4}\dfrac{1}{a_3}\arccos\dfrac{\lambda\cos E - \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}\cos E}. \end{cases}$$

[Diese Darstellung findet man folgendermaßen. Es ist

$$2\left(a_1 + \frac{\lambda}{r}\right) - \frac{a_3^2}{r^2} = \frac{-2a_1a_3^2 + 4a_1^2r^2 + 4\lambda r a_1}{2a_1r^2}$$

$$= -\frac{2a_1a_3^2 + \lambda^2 - (\lambda + 2a_1r)^2}{2a_1r^2} = -\frac{(\lambda_1^2 + 2a_1a_3^2)}{2a_1r^2}\sin^2 E,$$

$$dr = -\frac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{2a_1}\sin E\,dE,$$

und somit

$$\frac{1 + \dfrac{\lambda}{c^2}\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^2}{c^4}\dfrac{1}{r^2}}{\sqrt{2\left(a_1 + \dfrac{\lambda}{r}\right) - \dfrac{a_3^2}{r^2}}}dr = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{-2a_1}}\left\{r^2 + \frac{\lambda}{c^2}r - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c^4}\right\}dE.$$

Hieraus ergibt sich dann mit Übergehung einiger Zwischenrechnungen die obige Darstellung.] Mit Berücksichtigung der zwischen den Winkeln u und E bestehenden Gleichung

11. $$\cos u = \frac{\lambda\cos E - \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}\cos E}$$

erhält man weiter

12. $$\begin{cases} t - b_1 = \left(\dfrac{\lambda}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\lambda}{(-2a_1)^{\frac{1}{2}}}\right)E - \dfrac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}}\sin E \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^2}{c^4}\dfrac{u}{a_3}. \end{cases}$$

Setzt man nun $c = +\infty$, so gehen die für t und φ entwickelten Formeln in die bekannten Formeln der elliptischen Bewegung über, wenn wir für $\dfrac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{\lambda}$ die Exzentrizität e der Ellipse und für $(t - b_1)\dfrac{(-2a_1)^{\frac{3}{2}}}{\lambda}$ die mittlere Anomalie ϑ schreiben. Daß von dem Ausdruck $\frac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{\lambda}$ auch in unserem Problem der elliptische Charakter der Kurve abhängt, ist klar, und deshalb wollen wir für denselben die Bezeichnung e beibehalten. Es ist durchaus zweckmäßig, bei dieser Näherungsrechnung zur Erklärung dieser Dinge für a_1, a_2, a_3 die elliptischen Elemente beizubehalten. Daher bezeichnet

13.
$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\lambda}{-2a_1} \cdots & \text{die halbe große Achse } A \text{ oder vielmehr in unserem Falle die mittlere Entfernung von der Sonne,} \\ \frac{a_2}{\sqrt{\lambda}} \cdots & \text{die Quadratwurzel des Semiparameters } p \text{ multipliziert mit dem Kosinus der Neigung } i, \\ \frac{a_3}{\sqrt{\lambda}} \cdots & \text{die Quadratwurzel des Semiparameters } p, \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + 2a_1a_3^2}}{\lambda^2} \cdots & \text{die Exzentrizität } e. \end{array}\right.$$

Schreiben wir nun für $1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{1}{p^2}$ den Ausdruck $\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{p}}$, welcher sich von ihm nur um Größen dritter Ordnung unterscheidet, so erhalten wir das folgende System von Formeln

14.
$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= u\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{2}{p}} - \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{e^2}{p^2}\right) + \left(\frac{\lambda}{c^2}\frac{e}{p} - \frac{\lambda^2}{c^4}\frac{e}{p^2}\right)\sin u \\ &\qquad - \frac{1}{8}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{e^2}{p^2}\sin 2u, \\ \vartheta &= \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{A}\right)E - e\sin E - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{c^4}\frac{1}{\sqrt{p}A^{\frac{3}{2}}}u, \\ r &= \frac{p}{1 + e\cos u} = A(1 - e\cos E), \\ \cos u &= \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \quad \operatorname{tang}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{E}{2}. \end{aligned}\right.$$

[Die dem Grenzfalle $c = +\infty$, der Keplerschen Bewegung, entsprechenden Formeln füge ich der Übersicht wegen hinzu

$$
15.\ \left\{\begin{array}{ll}
\varphi = u, & \varphi \text{ die wahre Anomalie,} \\
\vartheta = E - e \sin E, & \text{die sogenannte Keplersche Gleichung, } \vartheta \text{ die mittlere Anomalie, } E \text{ die exzentrische Anomalie,} \\
\cos\varphi = \dfrac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, & \left[\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\dfrac{E}{2}\right].
\end{array}\right.
$$

Die aus dem Weberschen Gesetze entstehende Bewegung kann daher als aus der elliptischen Bewegung abgeleitet angesehen werden, wenn wir einige durch die Formeln 14 ausgedrückte Korrektionen anbringen.

Aber auch in den Störungsformeln ist es zweckmäßig, die Größen A und e oder $p = A(1 - e^2)$ beizubehalten, da von den Veränderungen derselben am meisten die Stabilität des Weltsystems abhängt. Wenn wir daher mit ω die Länge des aufsteigenden Knotens, mit π die Periheldistanz von ihm, mit t_0 die Zeit des Periheldurchgangs bezeichnen, so hat man

$$
16.\ \left\{\begin{array}{ll}
\lambda\dfrac{dA}{dt} = 2A^2\dfrac{d\Omega}{dt_0}, & \lambda\dfrac{dt_0}{dt} = -2A^2\dfrac{d\Omega}{dA}, \\
\sqrt{\lambda}\dfrac{d\pi}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\sqrt{p}}, & \sqrt{\lambda}\dfrac{d\sqrt{p}}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\pi}, \\
\sqrt{\lambda}\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\Omega}{d\sqrt{p}\cos i}, & \sqrt{\lambda}\dfrac{d\sqrt{p}\cos i}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{d\omega}.
\end{array}\right.
$$

In diese Formeln sind für r und φ ihre Ausdrücke in t und den anderen Konstanten einzusetzen. Bei dieser Berechnung betrachten wir e und i als sehr kleine Größen erster Ordnung, was in unserem Planetensystem mit vollem Recht erlaubt ist, und wir vernachlässigen die dritten und höheren Dimensionen dieser Größen. Vernachlässigt man $\left(\frac{1}{c^2}\right)^3$, so ist $\frac{1}{c^2}$ als eine sehr kleine Größe erster Ordnung anzusehen, und die Produkte dieser Größe mit e und i sind als Größen von mehr als zwei Dimensionen durchaus zu vernachlässigen. Bekanntlich kann u durch E mit Hilfe der folgenden Reihe ausgedrückt werden

17. $$u = E + 2\left(\mu \sin E + \frac{\mu^2}{2} \sin 2E + \frac{\mu^3}{3} \sin 3E + \cdots, \cdots\right)$$ [1],

wo

18. $$\mu^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p \, . \, e^{p+2}}{2^{p+2}} + \frac{p(p+3)}{2, 2^{p+4}} e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2, 3, 2^{p+6}} e^{p+6} + \cdots$$

Hieraus ersehen wir, daß in ϑ für u einfach E zu schreiben ist. Wenn wir nun wieder

$$1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{1}{A} - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{c^4} \frac{1}{A^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}} = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{A}}$$

setzen, so ist offenbar

19. $$\vartheta = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{A}}\, E - e \sin E.$$

Man setze nun

20. $$\Theta = \frac{\vartheta}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{A}}}, \qquad \frac{e}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{A}}} = \varepsilon.$$

[Dann wird

21. $$\Theta = E - \varepsilon \sin E,$$

und wir erhalten wieder die Keplersche Gleichung der gewöhnlichen elliptischen Bewegung.] Weiter wird

22. $$\left\{\begin{aligned} E &= \Theta + \varepsilon \sin \Theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\Theta + \frac{\varepsilon^3}{2^3}(3 \sin 3\Theta - \sin \Theta) + \cdots \text{ [2]} \\ \sin E &= \sin \Theta + \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\Theta + \frac{\varepsilon^2}{2^3}(3 \sin 3\Theta - \sin \Theta) + \cdots \\ \sin 2E &= \sin 2\Theta + \varepsilon(\sin 3\Theta - \sin \Theta) + \varepsilon^2(\sin 4\Theta - \sin 2\Theta) + \cdots \\ &\text{usw.} \\ \cos E &= \cos \Theta + \frac{\varepsilon}{2}(\cos 2\Theta - 1) + \frac{\varepsilon^2}{8}(3 \cos 3\Theta - 3 \cos \Theta) + \cdots \end{aligned}\right.$$

---

[1] Laplace, Oeuvres, T. 1, Mécanique céleste, T. 1, p. 199. Paris 1878. Laplace setzt ν statt u und u statt ε.

[2] Laplace, Oeuvres, T. 1, Mécanique céleste, T. 1, p. 196—197. Paris 1878.

Nachdem diese Ausdrücke in die Gleichung 17 eingeführt sind, wird mit Fortlassung der zu vernachlässigenden Größen

23.
$$\begin{cases} u = \Theta + (e + \varepsilon)\, sin\, \Theta + \frac{5}{4} e^2\, sin\, 2\, \Theta \\ = \vartheta + (e + \varepsilon)\, sin\, \vartheta + \frac{5}{4} e^2\, sin\, 2\, \vartheta. \end{cases}$$

Auf diese Weise erhalten wir aus der ersten der Gleichungen 14

24.
$$\varphi = u \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{p}} + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{p}\, sin\, u.$$

Da nun nach 23 für $sin\, u$ jetzt $sin\, \vartheta$, und ebenso ϑ für $\Theta \sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{p}} = \vartheta \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{p}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{2}{A}}}$ geschrieben werden kann, so wird

25.
$$\varphi = \vartheta + 2\, e \left(1 + \frac{\lambda}{c^2} \frac{1}{p}\right) sin\, \vartheta - \frac{2 \lambda}{c^2} \frac{e}{A} cos\, \vartheta + \frac{5}{4} e^2\, sin\, 2\, \vartheta.$$

Endlich findet man für r den Ausdruck

26.
$$r = A(1 - e\, cos\, E) = A \left[1 - e\left(cos\, \vartheta + \frac{\lambda}{c^2} \frac{1}{A} sin\, \vartheta\right) - \frac{e^2}{2}(cos\, 2\, \vartheta - 1)\right].$$

Entwicklung der Störungsfunktion Ω für das Webersche Gesetz. Übereinstimmung der säkularen Störungen mit den Theorien von Lagrange und Laplace.

§ 7.

Nach genügender Vorbereitung wollen wir zur Entwicklung der Funktion Ω weitergehen, und zwar wollen wir zuerst den Teil

1.
$$\Omega^{\mathrm{I}} = \lambda m^{\mathrm{I}} \frac{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - r_0^{\mathrm{I}2}}{2\, r^{\mathrm{I}3}} \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\, r'^2}{dt}\right) + \frac{2}{c^2} r' \frac{d^2 r'}{dt^2}\right] - \frac{\lambda\, m'}{r'_0}\left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d r_0^{\mathrm{I}}}{dt}\right)$$

betrachten. Es seien x, y, z, x_1, y_1, z_1 die Orthogonalkoordinaten der Körper m und m'. Dann wird

$$2.\quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, & r^{\mathrm{I}\,2} = x^{\mathrm{I}\,2} + y^{\mathrm{I}\,2} + z^{\mathrm{I}\,2}, \\ r_0^{\mathrm{I}\,2} = (x - x^{\mathrm{I}\,2}) + (y - y^{\mathrm{I}\,2}) + (z - z^{\mathrm{I}\,2}). \end{cases}$$

Nach den in der berühmten Mécanique analytique von Lagrange[1]) entwickelten Formeln haben wir

$$3.\quad \begin{cases} x = r(\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi), \\ y = r(\alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi), \\ z = r(\alpha_{,,} \cos\varphi + \beta_{,,} \sin\varphi), \end{cases}$$

wo

$$4.\quad \begin{cases} \alpha = \cos\pi \cos\omega - \sin\pi \sin\omega \cos i, \\ \beta = -\sin\pi \cos\omega - \cos\pi \sin\omega \cos i, \\ \alpha_{,} = \cos\pi \sin\omega + \sin\pi \cos\omega \cos i, \\ \beta_{,} = -\sin\pi \sin\omega + \cos\pi \cos\omega \cos i, \\ \alpha_{,,} = \sin\pi \sin i, \\ \beta_{,,} = \cos\pi \sin i. \end{cases}$$

Die auf den Körper m' sich beziehenden Größen sollen mit dem Zeichen $'$ bezeichnet werden. So erhält man

$$5.\quad \begin{cases} r_0^{\mathrm{I}\,2} = r^2 + r^{\mathrm{I}\,2} - (A + B_1) r r' \cos(\varphi - \varphi') - (A - B_1) r r' \cos(\varphi + \varphi') \\ \qquad - (A_1 - B) r r' \sin(\varphi - \varphi') - (A_1 + B) r r' \sin(\varphi + \varphi'), \end{cases}$$

wo

$$6.\quad \begin{cases} A = \alpha\alpha' + \alpha'_{,}\alpha_{,} + \alpha_{,,}\alpha'_{,,}, \\ B = \alpha\beta' + \alpha_{,}\beta'_{,} + \alpha_{,,}\beta'_{,,}, \\ A_1 = \alpha'\beta + \alpha'_{,}\beta_1 + \alpha'_{,,}\beta_{,,}, \\ B_1 = \beta\beta' + \beta_1\beta'_1 + \beta_{,,}\beta'_{,,}. \end{cases}$$

Wie Lagrange bewiesen hat, lassen sich diese Größen folgendermaßen ausdrücken

$$7.\quad \begin{cases} A = \cos\pi'_0 \cos\omega'_0 - \sin\pi'_0 \sin\omega'_0 \cos i'_0, \\ B = -\sin\pi'_0 \cos\omega'_0 - \cos\pi'_0 \sin\omega'_0 \cos i'_0, \\ A_1 = \cos\pi'_0 \sin\omega'_0 + \sin\pi'_0 \cos\omega'_0 \cos i'_0, \\ B_1 = -\sin\pi'_0 \sin\omega'_0 + \cos\pi'_0 \cos\omega'_0 \cos i'_0, \end{cases}$$

---

[1]) Man vgl. wegen dieses und des Folgenden Lagrange, Oeuvres, T. 12, Mécanique analytique 4. éd., T. 2, p. 123 ff. Paris 1889.

wo π_0', ω_0', i_0' beziehlich die Länge des Perihels, die Länge des aufsteigenden Knotens, die Neigung der von m' beschriebenen Bahn gegen die als Basis angenommene Bahnebene des Körpers m bezeichnen. Mit Hilfe dieser Ausdrücke erhält man

$$
8.\quad \left\{ \begin{aligned} r_0'^2 &= r^2 + r'^2 - 2\,rr' \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0') \cos^2 \frac{1}{2} i_0' \\ &\quad - 2\,rr' \cos(\varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0') \sin^2 \frac{1}{2} i_0', \end{aligned} \right.
$$

und hieraus

$$
9.\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{r^2 + r'^2 - r_0'^2}{2\,r'^3} = \frac{r \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')}{r'^2} \\ &+ r \frac{[\cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0') - \cos(\varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0')]}{r'^2} \sin^2 \frac{1}{2} i_0'. \end{aligned} \right.
$$

Weiter erhalten wir mit Vernachlässigung der dritten Potenzen von $\sin \frac{1}{2} i_0'$

$$
10.\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0'} = \frac{1}{\sqrt{[r^2 + r'^2 - 2\,rr' \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')]}} \\ &+ \frac{rr'[\cos(\varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0') - \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')]}{[r^2 + r'^2 - 2\,rr' \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')]^{\frac{3}{2}}} \sin^2 \frac{1}{2} i_0'. \end{aligned} \right.
$$

Die in dem Nenner dieses Ausdrucks auftretenden Wurzelgrößen können in Reihen, welche nach dem Kosinus des Vielfachen des Winkels $\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0'$ fortschreiten, entwickelt werden. Mit Beibehaltung der Bezeichnungen von Lagrange[1]), indem man

$$
11.\qquad \Phi = \varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0'
$$

setzt, ist dann

$$
12.\quad \left\{ \begin{aligned} &(r^2 + r'^2 - 2\,rr' \cos \Phi)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (r, r') + (r, r')_1 \cos \Phi + (r, r')_2 \cos 2\,\Phi + (r, r')_3 \cos 3\,\Phi + \cdots \\ &(r^2 + r'^2 - 2\,rr' \cos \Phi)^{-\frac{3}{2}} \\ &= [r, r'] + [r, r']_1 \cos \Phi + [r, r']_2 \cos 2\,\Phi + [r, r']_3 \cos 3\,\Phi + \cdots \end{aligned} \right.
$$

---

[1]) Lagrange, a. a. O., S. 128.

Daher haben wir

$$13. \begin{cases} \dfrac{1}{r_0^{\text{I}}} = (r, r') + (r, r')_1 \cos \Phi + (r, r')_2 \cos 2\,\Phi + \cdots \\ + r, r^{\text{I}}\{[r, r^{\text{I}}] + [r, r']_1 \cos \Phi + [r, r']_2 \cos 2\,\Phi + \cdots\}\{\cos \Psi - \cos \Phi\} \sin^2 \dfrac{1}{2} i_0^{\text{I}}, \end{cases}$$

wo

$$14. \qquad \Psi = \varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0'$$

gesetzt ist. In diesen Ausdruck sind nun die in § 6 ermittelten Werte von r, r', φ, φ' einzusetzen. Es war

$$15. \begin{cases} r = A\left[1 - e \cos \vartheta - \dfrac{\lambda}{c^2} \dfrac{e}{A} \sin \vartheta - \dfrac{e^2}{2}(\cos 2\,\vartheta - 1)\right], \\ r^{\text{I}} = A^{\text{I}}\left[1 - e' \cos \vartheta' - \dfrac{\lambda}{c^2} \dfrac{e'}{A'} \sin \vartheta' - \dfrac{e^{\text{I}2}}{2}(\cos 2\,\vartheta' - 1)\right], \\ \varphi = \vartheta + 2\,e \sin \vartheta + 2\dfrac{\lambda}{c^2} \dfrac{e}{p} \sin \vartheta - \dfrac{2\,\lambda}{c^2} \dfrac{e}{A} \cos \vartheta + \dfrac{5}{4} e^2 \sin 2\,\vartheta, \\ \varphi' = \vartheta' + 2\,e' \sin \vartheta' + \dfrac{2\,\lambda}{c^2} \dfrac{e'}{p'} \sin \vartheta' - \dfrac{2\,\lambda}{c^2} \dfrac{e'}{A'} \cos \vartheta' + \dfrac{5}{4} e^{\text{I}2} \sin 2\,\vartheta^{\text{I}}. \end{cases}$$

In der Funktion Ω^{I} tritt die Größe $\dfrac{1}{r_0^{\text{I}}}$ multipliziert mit $1 - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d r_0'}{dt}$ auf. In dem Ausdrucke $\dfrac{1}{c^2} \dfrac{d r_0^{\text{I}}}{dt}$ ist der $\sin^2 \dfrac{1}{2} i_0^{\text{I}}$ enthaltende Term fortzulassen. Deshalb erhalten wir

$$16. \quad \frac{1}{c^2} \frac{d r_0^{\text{I}}}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r_0^{\text{I}}} \left(r \frac{dr}{dt} + r' \frac{dr'}{dt} - r' \cos \Phi \frac{dr}{dt} - r \cos \Phi' \frac{dr'}{dt} - r r^{\text{I}} \sin \Phi \frac{d\Phi}{dt} \right).$$

[In dieser Fassung ist die rechte Seite der Gleichung 16 viel zu kompliziert, um eine Diskussion zu ermöglichen. Eine Vereinfachung dieser Gleichung erhält man durch folgende Betrachtung.]

Augenscheinlich sind in der Klammer nur die Größen erster Ordnung beizubehalten. Wir führen nun ein für

$$17.\quad \begin{cases} r\dfrac{dr}{dt}+r'\dfrac{dr'}{dt} \text{ den Ausdruck } e\sqrt{A\lambda}\,\sin\vartheta + e'\sqrt{A'\lambda}\,\sin\vartheta' \;{}^{1)}, \\[2ex] r'\dfrac{dr}{dt}+r\dfrac{dr'}{dt} \text{ den Ausdruck } \dfrac{A\sqrt{\lambda}}{\sqrt{A'}}\,e'\sin\vartheta' + \dfrac{A'\sqrt{\lambda}}{\sqrt{A}}\,e\sin\vartheta, \\[2ex] rr'\dfrac{d\Phi}{dt} \text{ den Ausdruck } \sqrt{\lambda}\left\{\left(\dfrac{A'}{\sqrt{A}}-\dfrac{A}{\sqrt{A'}}\right)(1-e\cos\vartheta-e'\cos\vartheta')+\dfrac{2A'e}{\sqrt{A}}\cos\vartheta-2\dfrac{Ae'}{\sqrt{A'}}\cos\vartheta'\right\} \end{cases}$$

und ebenso für $\cos\Phi$, dessen Wert wir genauer darstellen,

$$18.\quad \begin{cases} \cos\Phi = \cos(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0') \\ \qquad - \sin(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0') \end{cases} \begin{Bmatrix} 2e\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\dfrac{1}{p}\right)\sin\vartheta-\dfrac{2\lambda e}{c^2A}\cos\vartheta+\dfrac{5}{4}c^2\sin 2\vartheta \\[2ex] -2e'\left(1+\dfrac{\lambda}{c^2}\dfrac{1}{p}\right)\sin\vartheta'-\dfrac{2\lambda e'}{c^2A'}\cos\vartheta'+\dfrac{5}{4}e'^2\sin 2\vartheta' \end{Bmatrix}$$

$$-\cos(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0')\{e^2-e^2\cos 2\vartheta+e'^2-e'^2\cos 2\vartheta'-2ee'[\cos(\vartheta-\vartheta')-\cos(\vartheta+\vartheta')]\}\;{}^{2)}.$$

Dann finden wir

$$19.\quad \frac{1}{c^2}\frac{dr_0'}{dt}=\frac{\sqrt{\lambda}}{c^2}\frac{1}{r_0'}\begin{Bmatrix} e\sqrt{A}\sin\vartheta+e'\sqrt{A'}\sin\vartheta'-\left(\dfrac{A}{\sqrt{A'}}e'\sin\vartheta'+\dfrac{A'}{\sqrt{A}}e\sin\vartheta\right)\cos(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0') \\[2ex] -\left[\left(\dfrac{A'}{\sqrt{A}}-\dfrac{A}{\sqrt{A'}}\right)(1-e\cos\vartheta-e'\cos\vartheta')+\dfrac{2A'e}{\sqrt{A}}\cos\vartheta-\dfrac{2Ae'}{\sqrt{A'}}\cos\vartheta'\right]\sin(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0') \\[2ex] -2\left(\dfrac{A'}{\sqrt{A}}-\dfrac{A}{\sqrt{A'}}\right)e\sin\vartheta-e'\sin\vartheta')\cos(\vartheta-\vartheta'-\omega_0'-\pi_0'). \end{Bmatrix}$$

---

[1]) Man findet den Ausdruck von $\frac{d\vartheta}{dt}$ mit Hilfe des Ausdruckes für $t-b_1$ in Gleichung 12, S. 38 und des Ausdruckes $A=\frac{\lambda}{-2a_1}$. — [2]) Lagrange, a. a. O., S. 129.

In der Funktion Ω^{I} findet man den Ausdruck $\frac{1}{c^2}\frac{dr_0^{\mathrm{I}}}{dt}$ multipliziert mit $\frac{1}{r_0^{\mathrm{I}}}$. Der Ausdruck $\frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{r_0^{\mathrm{I}}}\frac{dr_0^{\mathrm{I}}}{dt}$ hat daher den Faktor $\frac{1}{r_0^{\mathrm{I}2}}$. Derselbe hat die Gestalt

$$20.\quad \frac{1}{r_0^{\mathrm{I}2}} = \frac{1}{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - 2rr^{\mathrm{I}}\cos\Phi} + \frac{2rr^{\mathrm{I}}(\cos\Psi - \cos\Phi)}{(r^2 + r^{\mathrm{I}2} - 2rr^{\mathrm{I}}\cos\Phi)^2}\sin^2\frac{1}{2}i_0^{\mathrm{I}},$$

von welchem man offenbar nur den ersten Teil beizubehalten braucht. Dieser läßt sich aber in folgender Weise in eine nach Vielfachen von Φ fortschreitende Reihe entwickeln.

Wir haben

$$21.\quad \frac{1}{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - 2rr^{\mathrm{I}}\cos\Phi} = \frac{1}{r - r^{\mathrm{I}}e^{\Phi i}}\cdot\frac{1}{r - r^{\mathrm{I}}e^{-\Phi i}},$$

wo e eine Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithmus den Wert Eins hat [1]. Dann ist

$$22.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r - r^{\mathrm{I}}e^{\Phi i}} = \dfrac{1}{r}\left\{1 + \dfrac{r'}{r}e^{\Phi i} + \dfrac{r'^2}{r^2}e^{2\Phi i} + \dfrac{r'^3}{r^3}e^{3\Phi i} + \cdots\right\}, \\ \dfrac{1}{r - r^{\mathrm{I}}e^{-\Phi i}} = \dfrac{1}{r}\left\{1 + \dfrac{r'}{r}e^{-\Phi i} + \dfrac{r'^2}{r^2}e^{-2\Phi i} + \dfrac{r'^3}{r^3}e^{-3\Phi i} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Diese Reihen konvergieren nur dann, wenn $r > r^{\mathrm{I}}$ ist. Da die Gleichung 21 bei Vertauschung von r mit r^{I} ungeändert bleibt, so braucht man nur r mit r^{I} zu vertauschen, falls das Gegenteil der Fall sein sollte. Nach Multiplikation dieser Reihen und Zurückführung der Exponentialausdrücke auf die Kosinus der Vielfachen von Φ erhalten wir

$$23.\quad \frac{1}{r^2 + r^{\mathrm{I}2} - 2rr^{\mathrm{I}}\cos\Phi} = \{r, r^{\mathrm{I}}\} + \{r, r^{\mathrm{I}}\}_1\cos\Phi + \{r, r^{\mathrm{I}}\}_2\cos 2\Phi + \cdots$$

Hier ist

$$24.\quad \begin{cases} \{r, r^{\mathrm{I}}\} = \dfrac{1}{r^2}\left(1 + \dfrac{r^{\mathrm{I}2}}{r^2} + \dfrac{r^{\mathrm{I}4}}{r^4} + \cdots\right) = \dfrac{1}{r^2 - r^{\mathrm{I}2}}, \\ \{r, r^{\mathrm{I}}\}_1 = \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{r^{\mathrm{I}}}{r} + \dfrac{r^{\mathrm{I}3}}{r^3} + \dfrac{r^{\mathrm{I}5}}{r^5} + \cdots\right) = 2\dfrac{r^{\mathrm{I}}}{r}\dfrac{1}{r^2 - r^{\mathrm{I}2}}, \\ \{r, r^{\mathrm{I}}\}_2 = \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{r^{\mathrm{I}2}}{r^2} + \dfrac{r^{\mathrm{I}4}}{r^4} + \dfrac{r^{\mathrm{I}6}}{r^6} + \cdots\right) = 2\dfrac{r^{\mathrm{I}2}}{r^2}\dfrac{1}{r^2 - r^{\mathrm{I}2}} \text{ usw.} \end{cases}$$

---

[1]) e ist bekanntlich die Basis der natürlichen Logarithmen.

Mit Berücksichtigung dieser Ergebnisse erhält man schließlich mit Fortlassung der zu vernachlässigenden Größen

$$
25.\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{1}{r_0^{\prime}}\frac{d r_0^{\prime}}{d t} = \frac{\sqrt{\lambda}}{c^2}\Bigg\{ & e\sqrt{A}\,sin\,\vartheta + e'\sqrt{A'}\,sin\,\vartheta' - \left[\frac{A}{\sqrt{A'}}e'sin\,\vartheta' + \frac{A'}{\sqrt{A}}e\,sin\,\vartheta + 2\left(\frac{A'}{\sqrt{A}} - \frac{A}{\sqrt{A'}}\right)(e\,sin\,\vartheta - e'sin\,\vartheta')\right] \\
& \qquad \times cos\,(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') \\
& + \left[\left(\frac{A'}{\sqrt{A}} - \frac{A}{\sqrt{A'}}\right)(e\,cos\,\vartheta - e'cos\,\vartheta') - \frac{2A'e}{\sqrt{A}}cos\,\vartheta - \frac{2Ae'}{\sqrt{A'}}cos\,\vartheta'\right] sin\,(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')\Bigg\} \\
& \times \left\{\{A, A'\} + \{A, A'\}_1\,cos\,(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') + \{A, A'\}_2\,cos\,2\,(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') + \cdots\right\} \\
& - \frac{\sqrt{\lambda}}{c^2}\left(\frac{A'}{\sqrt{A}} - \frac{A}{\sqrt{A'}}\right) sin\,(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')\left\{\{r, r'\} + \{r, r'\}_1\,cos\,\Phi + \{r, r'\}_2\,cos\,2\,\Phi + \cdots\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hier ist noch zu setzen

$$
26.\quad \left\{
\begin{aligned}
\{r, r'\} = \{A, A'\} & + \frac{d\,\{A, A'\}}{d\,A}\left\{- A\,e\,cos\,\vartheta - \frac{\lambda}{c^2}e\,sin\,\vartheta + \frac{A\,e^2}{2} - \frac{A\,e^2}{2}cos\,2\,\vartheta\right\}^{1)} \\
& \qquad + \frac{d^2\,\{A, A'\}}{2\,d\,A^2} \times \frac{A^2 e^2}{2}(1 + cos\,2\,\vartheta) \\
& + \frac{d\,\{A, A'\}}{d\,A'}\left\{- A'e'\,cos\,\vartheta' - \frac{\lambda}{c^2}e'\,sin\,\vartheta' + \frac{A'e'^2}{2} - \frac{A'e'^2}{2}cos\,2\,\vartheta'\right\} \\
& \qquad + \frac{d^2\,\{A, A'\}}{2\,d\,A'^2} \times \frac{A'^2 e'^2}{2}(1 + cos\,2\,\vartheta') \\
& + \frac{d^2\,\{A, A'\}}{d\,A\,d\,A'} \times \frac{A'^2\,e\,c'}{2}\{cos\,(\vartheta - \vartheta') + cos\,(\vartheta + \vartheta')\}
\end{aligned}
\right.
$$

1) Lagrange, a. a. O., S. 129.

und in ähnlicher Weise für $\{r, r'\}$ usw. Der Wert von $\cos\Phi$ ist schon oben ermittelt. Wegen des Faktors $\frac{\sqrt{\lambda}}{c^2}$ ist nur eine Berechnung der Größen erster Ordnung anzustellen. Die Funktion $\{r, r^{\mathrm{I}}\}$ habe ich deswegen genauer dargestellt, damit aus ihrem Ausdruck nur durch Änderung der Klammern die bald zur Verwendung kommenden Funktionen (r, r^{I}), $[r, r^{\mathrm{I}}]$ bestimmt werden können. Nach einer genaueren Prüfung des für $\frac{1}{c^2}\frac{1}{r_0^{\mathrm{I}}}\frac{d r_0^{\mathrm{I}}}{dt}$ gefundenen Ausdrucks werden wir finden, daß derselbe keinen nichtperiodischen Term enthält, so daß derselbe auf die säkularen Veränderungen der Planeten keinen Einfluß hat.

Nun gehen wir zur Untersuchung der Funktion $\frac{1}{r_0^{\mathrm{I}}}$ über. Es war

$$27.\quad \begin{cases} \frac{1}{r_0^{\mathrm{I}}} = (r, r^{\mathrm{I}}) + (r, r^{\mathrm{I}})_1 \cos\Phi + (r, r')_2 \cos 2\Phi + \cdots \\ \qquad + r r^{\mathrm{I}} \{[r, r^{\mathrm{I}}] + [r, r']_1 \cos\Phi + [r, r']_2 \cos 2\Phi + \cdots\} \\ \qquad \{\cos\Psi - \cos\Phi\} \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0^{\mathrm{I}}, \text{[1]} \end{cases}$$

wo

$$28.\quad \Phi = \varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0', \quad \Psi = \varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0'$$

gesetzt ist. Zu dem Terme, welcher $\sin^2 \frac{1}{2} i_0'$ enthält, sind nun die Größen erster Ordnung fortzulassen. Für r, r^{I} ist daher A, A', für Φ und Ψ bzw. $\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0'$, $\vartheta + \vartheta' - \omega_0' + \pi_0'$ zu schreiben. Da wir ferner nur die von ϑ und ϑ' unabhängigen Terme beibehalten, so bleibt hiervon nichts anderes übrig als

$$-\tfrac{1}{2} A A^{\mathrm{I}} [A, A']_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} i_0^{\mathrm{I}}.$$

[Denn es ist

$$\{[r, r'] + [r, r']_1 \cos\Phi + [r, r']_2 \cos 2\Phi + \cdots\} \{\cos\Psi - \cos\Phi\}$$
$$= \Big\{[r, r'](\cos\Psi - \cos\Phi) + [r, r']_1 \cos\Phi \cos\Psi - \frac{[r, r']_1}{2}$$
$$+ \Big\{[r, r']_2 \cos\Psi - \frac{[r, r]_1}{2}\Big\} \cos\Phi + \cdots\Big\} = -\tfrac{1}{2}[A, A']_1 \ldots].$$

Aus (r, r') erhalten wir den nicht periodischen Term

$$29.\quad \begin{cases} (A, A') + \left\{\frac{d(A, A')}{dA}\frac{A}{2} + \frac{d^2(A, A^{\mathrm{I}})}{dA^2}\frac{A^2}{4}\right\} e^2 + \left\{\frac{d(A, A')}{dA'}\frac{A'}{2}\right. \\ \qquad \left. + \frac{d^2(A, A')}{dA^{\mathrm{I}2}}\frac{A^{\mathrm{I}2}}{4}\right\} e^{\mathrm{I}2}. \end{cases}$$

---

[1]) Lagrange, a. a. O., S. 127.

Von $(r, r^{\mathrm{I}})_1 \cos\Phi$ bleibt nach Durchführung der Multiplikation nur über

30. $$\left\{(A, A')_2 + \frac{d(A, A')}{dA}\frac{A}{2} + \frac{d(A, A')}{dA'}\frac{A'}{2} + \frac{d^2(A, A')}{dA\,dA'}\frac{AA'}{4}\right\} e c^{\mathrm{I}} \cos(\omega_0' + \pi_0')\ ^{1)}.$$

[Denn aus den Gleichungen 18. und 26. erhält man für den Faktor von $e c^{\mathrm{I}}$ den Ausdruck

$$\left\{\frac{d^2(A, A')}{dA\,dA'}\frac{A, A^{\mathrm{I}}}{2} + 2(A, A')\right\} \times$$
$$\times [\cos(\vartheta - \vartheta') + \cos(\vartheta + \vartheta')] \cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$- 2\,A e c' \frac{d(A, A')}{dA} \cos\vartheta \sin\vartheta' \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$+ 2\,A' e c' \frac{d(A, A')}{dA'} \cos\vartheta' \sin\vartheta \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0').$$

Es ist aber

$$[\cos(\vartheta - \vartheta') + \cos(\vartheta + \vartheta')] \cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \cos^2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0') + \sin(\vartheta - \vartheta')\cos(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0')$$
$$+ \cos(\vartheta + \vartheta')\cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') + \tfrac{1}{2}\cos 2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin 2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' - \pi_0') + \cos(\vartheta + \vartheta')\cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') + \cdots$$
$$- 2\cos\vartheta \sin\vartheta' \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') = \{\sin(\vartheta - \vartheta')$$
$$- \sin(\vartheta + \vartheta')\} \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \sin^2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0') - \sin(\vartheta - \vartheta')\cos(\vartheta - \vartheta')\sin(\omega_0' + \pi_0')$$
$$- \sin(\vartheta + \vartheta')\sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') - \tfrac{1}{2}\cos^2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0')$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin^2(\vartheta - \vartheta')\sin(\omega_0' + \pi_0') - \sin(\vartheta + \vartheta')\sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') - \cdots$$
$$+ 2\sin\vartheta \cos\vartheta' \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') = \{\sin(\vartheta - \vartheta')$$
$$+ \sin(\vartheta + \vartheta')\} \sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \sin^2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0') - \sin(\vartheta - \vartheta')\cos(\vartheta - \vartheta')\sin(\omega_0' + \pi_0')$$
$$+ \sin(\vartheta + \vartheta')\sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') - \tfrac{1}{2}\cos^2(\vartheta - \vartheta')\cos(\omega_0' + \pi_0')$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin^2(\vartheta - \vartheta')\sin(\omega_0' + \pi_0') + \sin(\vartheta + \vartheta')\sin(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_0' + \pi_0') + \cdots$$

Damit ist der Ausdruck 30 abgeleitet.]

---

1) Lagrange, a. a. O., S. 130.

Die folgenden Ausdrücke $(r, r')_2 \cos 2\Phi$ usw. tragen nichts zu den säkularen Störungen bei. Die gefundenen Terme stimmen wieder mit denjenigen überein, welche Lagrange gefunden hat[1]).

Nun gehen wir zu dem zweiten Teile der Funktion Ω', zu dem Ausdruck

$$\lambda m' \frac{r^2 + r'^2 - r_0'^2}{2 r'^3}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2} r' \frac{d^2 r'}{dt^2}\right]$$

über. Man findet dann leicht, daß von der in den Klammern eingeschlossenen Größe nur der Ausdruck

$$1 + \frac{2\lambda}{c^2}\frac{e'^2}{A'}\cos\vartheta'$$

übrig bleibt. Weiter war

$$31. \left\{\begin{aligned} &\frac{r^2 + r'^2 - r_0'^2}{2 r'^3} = \frac{r \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')}{r'^2} \\ &+ r\frac{[\cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0') - \cos(\varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0')]}{r'^2}\sin^2\frac{1}{2}i_0'. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt weiter

$$32. \left\{\begin{aligned} &\frac{r^2 + r_0'^2 - r_0'^2}{2 r'^3}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 + \frac{2}{c^2} r' \frac{d^2 r'}{dt^2}\right] = \frac{r \cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')}{r'^2} \\ &+ r\frac{[\cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0') - \cos(\varphi + \varphi' - \omega_0' + \pi_0')]}{r'^2}\sin^2\frac{1}{2}i_0' \\ &+ \frac{2\lambda}{c^2}\frac{c'}{A'}\frac{r\cos(\varphi - \varphi' - \omega_0' - \pi_0')}{r'^2}\cos\vartheta'. \end{aligned}\right.$$

Die beiden letzten Terme gehen mit Vernachlässigung der Größen dritter Ordnung über in

$$\frac{A[\cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0') - \cos(\vartheta + \vartheta' - \omega_0' + \pi_0')]}{A'^2}\sin^2\frac{1}{2}i_0'$$
$$+ \frac{2\lambda}{c^2}\frac{e'}{A'^3}\cos(\vartheta - \vartheta' - \omega_0' - \pi_0')\cos\vartheta',$$

und offenbar entstehen aus ihnen keine konstanten Terme, denn nach Ausführung der Substitutionen für r und r' wird

$$33. \left\{\begin{aligned} &\frac{r}{r'^2} = \frac{A}{A'^2}\left\{1 - e\left(\cos\vartheta + \frac{\lambda}{c^2}\frac{1}{A}\sin\vartheta\right)\right. \\ &+ 2e'\left(\cos\vartheta' + \frac{\lambda}{e^2}\frac{1}{A'}\sin\vartheta'\right) + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2\vartheta) \\ &\left.+ \frac{e'^2}{2}(1 + 5\cos 2\vartheta) - ee'[\cos(\vartheta - \vartheta') + \cos(\vartheta + \vartheta')]\right\} \text{ [2]).} \end{aligned}\right.$$

[1]) **Lagrange**, a. a. O., S. 129—130. — [2]) **Derselbe**, S. 130.

Multipliziert man diesen Wert mit dem oben, Gleichung 18, gegebenen Werte von $\cos \Phi$, so sehen wir, daß die konstanten Terme, welche die dritte Ordnung nicht erreichen, sich gegenseitig zerstören, denn es wird

34. $$\frac{A}{A'}\left(-\frac{ee'}{2} - ee' + \frac{ee'}{2} + ee'\right)\cos(\omega_0' + \pi_0') = 0$$ [1].

Wenn wir mit $[\Omega^1]$ den konstanten Term von Ω^1 bezeichnen, so haben wir

35. $$\left\{\begin{aligned}
[\Omega^1] = \lambda m^1 \Big\{ & -\frac{1}{2} A A^1 [A, A^1]_1 \sin^2 \frac{1}{2} i_0^1 + (A, A_1) \\
& + \left(\frac{d(A,A')}{dA'}\frac{A}{2} + \frac{d^2(A,A')}{dA^2}\frac{A}{2}\right)e^2 \\
& + \left(\frac{d(A,A')}{dA'}\frac{A'}{2} + \frac{d^2(A,A')}{dA'^2}\frac{A'^2}{4}\right)e'^2 \\
& + \Big((A,A')_1 + \frac{d(A,A')}{dA}\frac{A}{2} + \frac{d(A,A')_1}{dA'}\frac{A'}{2} \\
& + \frac{d^2(A,A')_1}{dA\,dA}\frac{A A'}{4}\Big) ee' \cos(\omega_0' + \pi_0')\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von Lagrange[2]) abgeleiteten, so erhalten wir das sehr merkwürdige Resultat der völligen Übereinstimmung. Die Funktion

36. $$\Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega''' + \cdots,$$

wo Ω' die von der Masse m^1 ausgeübte störende Kraft bezeichnet, usw., wird daher

37. $$[\Omega] = [\Omega'] + [\Omega''] + [\Omega'''] + \cdots$$

Alles, was Lagrange über die säkularen Lösungen ermittelt hat, gilt auch hier. Aus der Gleichung

38. $$\lambda \frac{dA}{dt} = 2A^2 \frac{d[\Omega]}{dt_0}$$

folgt $dA = 0$, da t_0 in der Funktion $[\Omega]$ überhaupt nicht auftritt.

Die mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne werden durch die säkularen Veränderungen nicht beeinflußt, auch wenn das elektrodynamische Gesetz an die Stelle des Newtonschen tritt.

---

[1]) Lagrange, a. a. O., S. 130. — [2]) S. 131.

Nach L a g r a n g e[1]) ist einfacher

$$
39.\quad\left\{\begin{aligned}
[\Omega] = {} & \frac{1}{8}\lambda m' \{8(A,A') + A A' [A,A']_1 (e^2 + e^{I2}) \\
& \qquad - 2 A A' [A,A']_2\, e e' \cos(\omega_0' + \pi_0') \\
& - \frac{\lambda m'}{4} A A' [A,A^{I}] \sin^2 \frac{1}{2} i_0^{I}\} \\
& + \frac{1}{8}\lambda m'' \{8(A,A'') + A A'' [A,A'']_1 (e^2 + e^{II2}) \\
& \qquad - 2 A A'' [A,A'']_2\, e e'' \cos(\omega'' + \pi_0'')\} \\
& - \frac{\lambda m''}{4} A A'' [A,A''] \sin^2 \frac{1}{2} i_0^{II} + \cdots \text{ usw.}
\end{aligned}\right.
$$

$$
40.\quad\left\{\begin{aligned}
\cos i_0^{I} &= \cos i \cos^{I} + \cos(\omega - \omega') \sin i \sin i^{I}, \\
\cos i_0^{II} &= \cos i \cos^{II} + \cos(\omega - \omega^{II}) \sin i \sin i^{II}.
\end{aligned}\right.
$$

Wenn an Stelle von π_0' der Winkel χ eingeführt wird, durch welchen die Umdrehung des Perihels in der Ebene der Bahn bestimmt wird, so ist bekanntlich[2])

$$
41.\quad\left\{\begin{aligned}
&\omega_0' + \pi_0' = \chi' - \chi, \\
&\omega_0'' + \pi_0'' = \chi'' - \chi, \\
&d\chi = d\pi + \cos i\, d\omega
\end{aligned}\right.
$$

und die Störungsformeln, welche den Winkel π enthalten, gehen über in

$$
42.\quad \frac{dp}{dt} = -\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}}\frac{d[\Omega]}{d\chi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\lambda}}\frac{d[\Omega]}{dp}.
$$

Man hat auch

$$
43.\quad \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\lambda A}}\frac{d[\Omega]}{d\chi}.
$$

Sehr leicht sind die Formeln zu beweisen, durch welche die Veränderungen der Exzentrizitäten oder besser in unserem Problem der den elliptischen Charakter der Kurve bestimmenden Größe, ebenso die Winkelgeschwindigkeit der Perihele, ferner die Veränderungen der Neigungen innerhalb fester Grenzen eingeschränkt werden. Ich füge dieselben hinzu, und zwar bleibt alles, was von L a g r a n g e und L a p l a c e gefunden ist, auch hier gültig.

---

1) L a g r a n g e, a. a. O., S. 135 ff. — 2) S. 135.

$$
44.\left\{\begin{array}{l}
m\sqrt{A}\,.\,e^2 + m'\sqrt{A'}e^{\mathrm{I}\,2} + m''\sqrt{A''}\,e^{\mathrm{II}\,2} + \cdots = const,\\
m\sqrt{A}\,.\,e^2\dfrac{d\chi}{dt} + m'\sqrt{A'}\,e^{\mathrm{I}\,2}\dfrac{d\chi}{dt} + m''\sqrt{A''}\,e^{\mathrm{II}\,2}\dfrac{d\chi}{dt} + \cdots = \text{einem}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{endlichen Wert,}\\
m\sqrt{A}\,sin^2\dfrac{i}{2} + m'\sqrt{A'}\,sin^2\dfrac{i'}{2} + m''\sqrt{A''}\,sin^2\dfrac{i''}{2} + \cdots = const.
\end{array}\right.
$$

Es genügt, dieselben hinzugefügt zu haben.