

Die wissenschaftlichen
Grundlagen der Elektrotechnik

von

G. Benischke

Vierte Auflage

Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik

Von

Prof. Dr. Gustav Benischke

Vierte, vermehrte Auflage

Mit 592 Abbildungen im Text



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1918

**Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1918.
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1918.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1918
ISBN 978-3-662-42217-5 ISBN 978-3-662-42486-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42486-5

Aus dem Vorwort zur 3. Auflage.

Bei der Behandlung der Wechselströme habe ich auch in dieser Auflage nicht die symbolische, sondern die natürliche Rechnungsweise angewendet. Da aber jener Methode Vorzüge zugeschrieben werden, habe ich den Versuch gemacht, und einen Teil dieses Buches in die symbolische Methode umgeschrieben. Dabei habe ich mich von neuem überzeugt, daß die angeblichen Vorzüge nicht vorhanden sind, wohl aber ein erheblicher Nachteil. Es wird behauptet, die symbolische Methode sei kürzer. Das Gegenteil ist der Fall. Sie scheint nur kürzer, wenn man darauf verzichtet, die Formeln vom Anfang an bis zur gebrauchsfertigen Form zu entwickeln. Da heißt es z. B.: „Der Widerstandsoperator ist . . .“, und nun wird einfach das von mir an anderer Stelle auf natürlichem Rechnungsweg gefundene Ergebnis über die Wirkungsweise des unvollkommenen Kondensators hingeschrieben. Die Schlußformel wird dann entweder in symbolischer, für die Zahlenausrechnung unbrauchbarer Form belassen, oder es wird unter Weglassung der langen Zwischenrechnung das reelle Endergebnis einfach hingeschrieben. Daß die Rechnung bis zur gebrauchsfertigen Formel langwierig ist, wird wohl nicht mehr bestritten werden können, nachdem schon eine Rechnungstafel erschienen ist, die die Ausrechnung der komplexen Formeln erleichtern soll. Dazu kommt, daß man sich besondere Rechnungsregeln einüben muß. Fast in allen Büchern, die die symbolische Methode anwenden, wird es für notwendig gehalten, ein besonderes Kapitel über die Rechnungsweise einzuschalten. Mit der Kürze ist es also nichts. Ein anderer angeblicher Vorteil soll darin bestehen, daß man die Gleichungen in effektiven Werten anschreiben kann. Sehen wir zu, was es mit diesem Vorteil für ein Bewandtnis hat. Ich entnehme folgende Grundgleichung des allgemeinen Transformators einem neueren Buche:

$$\dot{K}_1 = w_1 \dot{J}_1 + \dot{E}_{1g} + \dot{E}_{1n}.$$

Das sind effektive Werte. Wer diese aber entsprechend dem $+$ Zeichen addieren würde, würde ein falsches Ergebnis erhalten. Und damit man die angezeigte Addition auch gewiß nicht ausführt, muß ein Warnungszeichen in Form eines Punktes über die Buchstaben oder durch besondere Typen errichtet werden. Diese Unter-

scheidung ist besonders beim Schreiben auf der Tafel lästig. Nun stelle ich dieser symbolischen, in Wirklichkeit falschen Gleichung die gegenüber, die in § 147 dieses Buches auf natürlichem Wege für die Augenblickswerte entwickelt ist:

$$k_1 = w_1 i_1 + L_{1s} \frac{di_1}{dt} + L_{1f} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = w_1 i_1 + e_{1s} + e_{1f}$$

Diese Gleichung ist streng richtig und bedeutet eine wirkliche Addition. Außerdem hat diese Gleichung einen physikalischen Inhalt, denn die Differentialquotienten sagen, welche Phase jedes Glied hat. In der symbolischen Schreibweise wird die Phase dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man $\sqrt{-1}$ hinzufügt. Die symbolische Gleichung lehrt dieses Phasenverhältnis aber nicht, sondern man hat es ihr beigelegt, weil man es von den natürlichen Gleichungen her weiß. Daß die Ausrechnung der effektiven Werte bis zur brauchbaren Form nicht die geringsten Schwierigkeiten bereitet, ist aus §§ 133, 142, 149, 151, 152, 154, 174, 184, 186, 201 dieses Buches zu ersehen.

Daß in der symbolischen Schreibweise die graphische Darstellung enthalten sei, in der natürlichen Schreibweise aber nicht, ist unrichtig, denn auch die letztere Gleichung besagt durch die Differentialquotienten ohne weiteres, daß das zweite Glied auf der rechten Seite ein Spannungsvektor ist, der im positiven Sinne senkrecht auf dem Vektor des primären Stromes steht usw. bei den anderen Gliedern. Wie groß der effektive Wert jedes Gliedes in Abhängigkeit von der Stromstärke oder von der Kraftlinienmenge ist, ist aus dem Grundgesetz des einfachen Stromkreises bekannt. Die symbolische Methode weiß es auch nur von dort her.

Der Hauptgrund, warum ich die symbolische Methode ablehne, ist ihre physikalische Undurchsichtigkeit. Wer nicht nur formalistisch rechnen, sondern die Rechnungen mit physikalischen Vorstellungen begleiten will — und das ist unbedingt nötig, wenn man neue Erkenntnisse zutage fördern will — muß die natürliche Rechnungsweise anwenden. Wer meine Darstellung des allgemeinen Transformatorproblems, ausgehend vom Grundgesetz der Induktion bis zum Leerlauf und Kurzschluß und bis zur Ermittlung des Streufaktors mit einer symbolischen Darstellung desselben Themas vergleicht, wird sich davon überzeugen. Es gibt allerdings schon Bücher, wo die von mir auf natürliche Rechnungsart erhaltenen neuen Ergebnisse in symbolische Form umgesetzt sind. Gesagt wird das nicht, aber die Tatsache besteht, dass diese Ergebnisse in vorher erschienenen Büchern nicht enthalten sind. Sehr deutlich tritt die physikalische Überlegenheit der natürlichen Rechnungsart über die symbolische auch in dem Problem der Wechselstromfernleitungen zutage. In dem Buche von C. Breitfeld, wo beide Darstellungen enthalten sind, kann es jeder sehen. Die natürliche Darstellung zeigt die hin- und rücklaufenden Wellen der Spannung, des Stromes, des Spannungsabfalles usw.; die symbolische Darstellung nicht.

Über das elektrotechnische Kauderwelsch (Resistanz, Konduktanz, Reaktanz, Induktanz, Impedanz, Admitanz, Suszeptanz, Reluktanz, Kondensanz, Restriktanz, Koaktanz, Retardanz usw.) brauche ich in dieser Auflage nichts mehr zu sagen, es ist nun auch schon vom Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen abgelehnt worden.

Schließlich möchte ich noch begründen, warum ich in diesem Buche nicht „Dielektrikum“, sondern „Dielektrik“ schreibe. In früheren Zeiten, wo das Sprachgefühl noch nicht so abgestumpft war, sagte man einfach Technik statt Technikum, Plastik statt Plastika usw. Jetzt wird das Wort Dielektrikum, dessen lateinische Endung der Wortbiegung im Deutschen durchaus widersteht, in den unmöglichsten Formen angewendet. Folgende Wendungen habe ich gefunden: „In den Dielektrikas, welche . . .“, oder „in den Dielektrizis . . .“, oder „in den Dielektrikums . . .“, oder „Kraftwirkung in den flüssigen Dielektrika“. Das wollte ich nicht mitmachen und schrieb daher: Das Dielektrik, des Dielektriks, im Dielektrik, die Dielektriken, in den Dielektriken usw.

Vorwort zur 4. Auflage.

Die vorliegende Auflage hat keine wesentlichen Änderungen erfahren. Inhalt und Abbildungen sind in allen Teilen so weit vermehrt worden, als es erforderlich erschien, um den Fortschritten in den letzten vier Jahren Rechnung zu tragen.

Zehlendorf b. Berlin, im Oktober 1918.

Dr. G. Benischke.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundgesetze über Magnetismus und Elektrizität.

	Seite
1. Grundanschauungen über Magnetismus und Elektrizität	1
2. Das Coulombsche Gesetz	2
3. Kraftfeld, Kraftlinien	3
4. Bildliche Darstellung magnetischer und elektrischer Kraftfelder	4
5. Zu- und Abnahme der Kraft. Homogenes Feld	8
6. Anzahl der Kraftlinien	9
7. Zusammensetzung von Kraftfeldern	12
8. Magnetisches Moment	13
9. Das magnetische Feld der Erde	14
10. Feldstärke neben und zwischen Flächen, die gleichmäßig mit magnetischer oder elektrischer Masse bedeckt sind	15
11. Das Potential; seine mathematische und physikalische Bedeutung	17
12. Potential mehrerer Massen	19
13. Bewegungsrichtung und Potential	19
14. Die Niveauflächen und ihre Beziehung zu den Kraftlinien	20

Zweites Kapitel.

Grundgesetze der Elektrostatik.

15. Potential auf sich selbst	24
16. Elektrizitätserzeugung. Hypothesen der Elektrizität	24
17. Verteilung der Elektrizität auf Leitern und Isolatoren	27
18. Elektrostatische Schirmwirkung	29
19. Potential einer geladenen Kugel auf sich selbst und auf einen äußeren Punkt	30
20. Abhängigkeit der elektrischen Dichte vom Krümmungsradius. Spitzenwirkung	32
21. Kapazität	32
22. Potential und Kapazität der Erde	34
23. Elektroskop, Elektrometer	35
24. Oberflächenspannung einer elektrischen Ladung	36
25. Einfluß eines benachbarten mit der Erde verbundenen Leiters	37
26. Kondensatoren	38
27. Das Dielektrik	42
28. Kapazität bei mehr als zwei Leitern	45
29. Berechnung der elektrischen Kraft aus der Kapazität	50
30. Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung	52
31. Kondensatoren in Hintereinanderschaltung	53
32. Ladungsenergie	55

	Seite
33. Die Clausiussche Vorstellung über die Beschaffenheit des Dielektriks. Wahre und scheinbare Ladung	56
34. Elektrisierungszahl und Dielektrizitätskonstante	58
35. Innere Energie eines polarisierten Dielektriks	59
36. Anziehung und Abstoßung eines Nichtleiters in einem elektrischen Felde	60
37. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Nichtleiter	62
38. Rückstandsbildung im Dielektrik	65

Drittes Kapitel.

Grundgesetze der strömenden Elektrizität.

39. Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes	67
40. Stromquellen	68
41. Begriff der Stromstärke	68
42. Das Ohmsche Gesetz	69
43. Leitungswiderstand und Leitfähigkeit	70
44. Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur	72
45. Widerstand von Kohle und Selen	74
46. Weitere Bemerkungen zu dem Ohmschen Gesetze	75
47. Klemmenspannung	76
48. Mehrere elektromotorische Kräfte in einem Stromkreise	77
49. Ableitung zur Erde	77
50. Die Kirchhofschen Sätze über Stromverzweigung	78
51. Hintereinander- und Nebeneinanderschaltung	79
52. Arbeit und Leistung eines Stromes	81
53. Stromwärme. Joulesches Gesetz	81
54. Das Gesetz der kleinsten Stromwärme	82

Viertes Kapitel.

Die elektrolytischen Vorgänge.

55. Einteilung der Stoffe in bezug auf die Leitung der Elektrizität	83
56. Die Elektrolyse und ihre Benennungen	83
57. Sekundäre Prozesse	84
58. Wasserersetzung	86
59. Faradays Gesetze der Elektrolyse	86
60. Theorie der elektrolytischen Leitung	88
61. Dissoziierte Stoffe und Ionisatoren	91
62. Spezifischer Widerstand der Elektrolyte	92
63. Konzentrationsänderung durch elektrolytische Leitung. Beweglichkeit der Ionen	93
64. Elektrolyse geschmolzener Salze	95
65. Elektrolytische Leitung in festen Stoffen	96
66. Polarisation	97
67. Stromerzeugung durch chemische Vorgänge	100
68. Die wichtigsten konstanten Zellen	101
69. Lokalströme	102
70. Konzentrationsketten	102
71. Normalelemente	103
72. Trockenelemente	104
73. Berechnung der elektromotorischen Kraft aus der Verbindungswärme	105
74. Akkumulatoren	107
75. Elektrolytische Kataphorese (Mitführung)	111

Fünftes Kapitel.

Magnetische Wirkungen des Stromes.

76. Amperesche Regel. Das magnetische und elektrische Feld des Stromes	113
77. Elektromagnetische Bewegungsvorrichtungen	115
78. Die Kraft zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol . .	117
79. Die Kraft zwischen einem unendlich langen Strom und einem Magnetpol	118
80. Magnetische Feldstärke eines Stromes in seiner nächsten Umgebung	119
81. Magnetische Feldstärke einer geschlossenen Stromfigur	120
82. Die elektromagnetische Eigenwirkung eines Stromes	122
83. Ein geradliniger Strom in einem homogenen magnetischen Felde . .	124
84. Eine geschlossene Stromfigur in einem homogenen magnetischen Felde	125
85. Das magnetische Gebläse	127
86. Magnetische Platte	128
87. Potential einer geschlossenen Stromfigur	131
88. Magnetisches Feld einer Stromspule	134

Sechstes Kapitel.

Magnetische Induktion.

89. Magnetisierungsstärke	138
90. Magnetisierung durch Verteilung oder Induktion	138
91. Beziehung zwischen magnetisierender Kraft und Kraftliniendichte. Magnetisierungszahl und magnetische Durchlässigkeit	142
92. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe	144
93. Magnetische Sättigung	145
94. Magnetische Hysterese	147
95. Remanenter Magnetismus, Dauermagnetismus und Koerzitivkraft . .	150
96. Magnetische Verzögerung	154
97. Magnetische Arbeit	154
98. Arbeitsverlust bei einem magnetischen Kreisprozeß	156
99. Anziehung und Abstoßung in einem magnetischen Felde	158
100. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche magnetischer Stoffe .	160
101. Magnetische Schirmwirkung	162
102. Entmagnetisierende Kraft, Dauermagnete	165
103. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur	170
104. Das magnetische Altern des Eisens	172
105. Der magnetische Kreis	173
106. Magnetomotorische Kräfte und magnetische Widerstände in Hinter- einanderschaltung	175
107. Der magnetische Widerstand längerer Luftstrecken	178
108. Verzweigung eines Kraftlinienbündels. Magnetische Widerstände in Nebeneinanderschaltung	181
109. Magnetomotorische Kräfte von entgegengesetzter Richtung. Magne- tische Stauung	183
110. Magnetische Streuung	185
111. Magnetische Charakteristik	189
112. Praktische Anwendungen	192
113. Resultierende magnetische Felder im Eisen	194
114. Der magnetische Kreis bei Dauermagneten	195
115. Anziehung zweier paralleler Flächen. Tragkraft eines Magnetes . .	196
116. Die Arbeit bei magnetischer Anziehung	198

Siebentes Kapitel.

Elektrodynamik.

117. Die Kraftwirkung zweier Ströme	199
118. Arbeitswert zweier Ströme. Koeffizient der gegenseitigen Induktion	203

Inhaltsverzeichnis.

IX

	Seite
119. Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst; Koeffizient der Selbstinduktion	206
120. Spezielle Fälle	207
121. Verhältnis zwischen den Koeffizienten der gegenseitigen und der Selbstinduktion	209
122. Die gesamte magnetische Arbeit	210

Achtes Kapitel.

Elektrische Induktion.

123. Das Wesen der elektrischen Induktion	211
124. Größe der induzierten elektromotorischen Kraft	212
125. Die Richtung der induzierten EMK. Die Gesetze von Lenz und Fleming	214
126. Richtungswechsel der induzierten EMK. Wechselstrom- und Gleichstrommaschine	216
127. Unipolare Induktion	218

Neuntes Kapitel.

Der einfache Wechselstrom.

128. Die induzierte EMK als einfache periodische Funktion	220
129. Die Elektrizitätsmenge eines veränderlichen Stromes	223
130. Der arithmetische Mittelwert	224
131. Der quadratische Mittelwert	225
132. Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion	227
133. Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom	232
134. Arbeit und Leistung eines Wechselstromes. Leistungsfaktor	235
135. Das Spannungsdiagramm	237
136. Das Stromdiagramm. Wattstrom und wattloser Strom	239
137. Zusammenfassung der Ergebnisse	240
138. Drosselpulen	241
139. Graphische Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren	242
140. Scheinbarer Widerstand bei Hintereinanderschaltung	244
141. Die Verzweigung eines veränderlichen Stromes	246
142. Der scheinbare Widerstand einer Stromverzweigung	248
143. Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit Widerstand und Selbstinduktion	251

Zehntes Kapitel.

Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise.

144. Einleitung. Begriffsbestimmung	252
145. Die Augenblickswerte der magnetischen Felder und die magnetischen Widerstände	256
146. Die elektromotorischen Kräfte	258
147. Die Spannungsgleichungen	262
148. Der sekundäre Strom und seine Phasenverschiebungen	264
149. Die Scheitelwerte der magnetischen Felder. Das Felddiagramm	265
150. Kupplungsfaktor. Streufaktoren	270
151. Das Verhältnis zwischen primärem und sekundärem Strom	273
152. Der primäre Strom	275
153. Leerlauf und Kurzschluß	280
154. Das Verhältnis der Klemmenspannungen	283
155. Wirbelströme	284
156. Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung	289

	Seite
157. Der gesamte Eisenverlust	293
158. Der Magnetisierungsstrom	294
159. Die Verzerrung der Stromwelle durch magnetische Hysterese	297
160. Die Bestimmung des Kupplungsfaktors und Streufaktors	303
161. Elektrodynamische Schirmwirkung	305
162. Einfluß der Wirbelströme auf die Kraftlinienverteilung	309
163. Transformatoren in Hintereinanderschaltung	311
164. Selbstinduktion und gegenseitige Induktion in Hintereinanderschaltung. Wirksame Selbstinduktion	313
165. Induktionsfreie Stromkreise	315
166. Stromverzweigung bei gegenseitiger Induktion	317
167. Die magnetische Arbeit des Wechselstromes	318
168. Das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit	323
169. Ungleichmäßige Verteilung des Wechselstromes über den Leiterquerschnitt. Hautwirkung	325
170. Mittel gegen die ungleichmäßige Stromverteilung	334
171. Magnetische und elektrische Kräfte in einem Transformator	336

Elftes Kapitel.

Die Kapazitätserscheinungen.

172. Scheinbarer Widerstand eines Kondensators	340
173. Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Reihenschaltung	346
174. Stromresonanz	348
175. Spannungsresonanz	350
176. Stromverzweigung bei Selbstinduktion und Kapazität	352
177. Ein Kondensator im Nebenschluß zu Widerstand und Selbstinduktion	352
178. Mehrere Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung und Reihenschaltung	357
179. Ladungsarbeit eines Kondensators	358
180. Wärmearbeit, magnetische Arbeit, elektrische Arbeit	359
181. Arbeitsverlust im Dielektrik	361
182. Die Wirkungsweise eines unvollkommenen Kondensators	363
183. Ein unvollkommener Kondensator in Reihenschaltung	366
184. Ein unvollkommener Kondensator im Nebenschluß	369
185. Der Einfluß eines Eisenkernes im Falle der Stromresonanz	371
186. Transformator mit Kapazitätsbelastung (Resonanztransformator)	375

Zwölftes Kapitel.

Nichtstationäre Stromzustände.

187. Entstehen und Verschwinden eines Gleichstromes ohne Kapazität	381
188. Entstehen und Verschwinden eines Stromes bei gegenseitiger Induktion	385
189. Funkenbildung beim Unterbrechen eines Stromkreises. Überspannung	387
190. Die Wärmearbeit des Unterbrechungsfunkens	390
191. Kommutatorfunken und ihre Verminderung	392
192. Entstehen und Verschwinden eines Stromes in Spulen mit massivem Eisenkern	394
193. Entstehen und Verschwinden eines Wechselstromes ohne Kapazität	395
194. Das Entstehen des Kurzschlußstromes eines Stromerzeugers	402
195. Öffnen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion. Elektrische Schwingungen	404
196. Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion	413
197. Eigenschwingung und erzwungene Schwingung	415
198. Die Dämpfung einer elektrischen Schwingung	417

	Seite
199. Überspannung beim Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion	420
200. Ein- und Ausschalten von Kabelstrecken	421
201. Umformung elektrischer Schwingungen. Tesla-Transformator	423
202. Fortsetzung: Resonanz zwischen zwei gekuppelten schwingungsfähigen Stromkreisen	427
203. Allgemeine Betrachtung über die Schwingungen gekoppelter Systeme	434
204. Mittel zur Erzeugung elektrischer Schwingungen	437
205. Funkeninduktoren und ihre Unterbrecher	441
206. Elektrische Strom- und Spannungskupplung	445
207. Die Ausbreitung elektrischer Schwingungen in Leitungen. Fortschreitende und stehende Wellen	447
208. Elektromagnetische Wellen im Dielektrik	454
209. Wellenanzeiger und Wellenmesser	455
210. Das Wesen der drahtlosen Telegraphie	459

Dreizehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Wellenformen.

211. Die wichtigsten Wellenformen	463
212. Beziehung zwischen Spannungswellen und magnetischen Wellen	465
213. Scheitelwert, effektiver Wert und arithmetischer Mittelwert einer zusammengesetzten Wellenform	468
214. Formfaktor und Scheitelfaktor	470
215. Der Hystereseverlust im Eisen bei zusammengesetzten Wellenformen	472
216. Leistung, Leistungsfaktor, äquivalente Sinuswelle	474
217. Die Stromwelle bei Selbstinduktion und bei Kapazität	477
218. Die Wellenformen des allgemeinen Transformators	479
219. Resonanz bei zusammengesetzten Wellenformen	481
220. Die Gewinnung höherer Frequenzen	482
221. Formeln zur Ausrechnung einer zusammengesetzten Wellenform	484

Vierzehntes Kapitel.

Die mehrphasigen Wechselströme.

222. Das Prinzip der mehrphasigen Motoren	487
223. Verkettung beim Zweiphasenstrom	489
224. Verkettung beim Dreiphasenstrom	490
225. Verkettung zusammengesetzter Wellenformen	494
226. Die elektrische Leistung des Dreiphasenstromes	497
227. Das resultierende magnetische Feld einer mehrphasigen Spulenwicklung	498
228. Das resultierende magnetische Feld mehrphasiger Trommelwicklungen	501
229. Umwandlung von Zwei- in Dreiphasenstrom	504
230. Herstellung mehrphasiger Ströme aus einphasigem Wechselstrom	506
231. Motoren mit verschobenen magnetischen Feldern	508

Fünfzehntes Kapitel.

Der Durchgang der Elektrizität durch Nichtleiter.

232. Verschiedene Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas	509
233. Entladung in verdünnten Gasen	512
234. Spannungsgefälle in Entladungsröhren	514
235. Die Eigenschaften der Kathodenstrahlen	516
236. Röntgenstrahlen	518
237. Die Elektronentheorie	520

	Seite
238. Der elektrische Strom in metallischen Leitern als Strom freier Elektronen	522
239. Kathodenstrahlen als freie negative Elektronen. Kanalstrahlen als freie positive Elektronen	522
240. Radiumstrahlen	524
241. Elektrizitätsleitung in Gasen durch Ionisierung	525
242. Unselbständige und selbständige Elektrizitätsleitung in Gasen	526
243. Ursachen der unselbständigen Strömung	527
244. Elektrizitätszerstreuung	529
245. Ursache der selbständigen Strömung	531
246. Dunkle Entladung, Glimmlicht, Büschellicht	533
247. Äußeres Bild der Funkenentladung. Vorentladungen. Intermittierende Entladungen	535
248. Die Schlagweite der Funkenentladung in Luft	538
249. Beeinflussung der Funkenentladung durch Entladeverzögerung und Überspannung. Einfluß der Kapazität	543
250. Entladungen aus zylindrischen Elektroden (Drähten)	545
251. Elektrizitätsdurchgang durch feste und flüssige Isolatoren	549
252. Durchschlagsfestigkeit	551
253. Durchschlagsfestigkeit hintereinandergeschalteter Isolierstoffe	555
254. Oberflächenleitung, gleitende Entladungen	561
255. Zerstörung der Isolierstoffe durch Entladungen	563
256. Isolierung im Freien	566
257. Äußeres Bild des Lichtbogens	568
258. Lichtbogen Spannung und Existenzbedingungen des Lichtbogens	570
259. Das Wesen des Lichtbogens	572
260. Der Quecksilberlichtbogen	573
261. Der Wechselstromlichtbogen	575
262. Elektrische Ventile. Gleichrichter	576
263. Der Lichtbogen als Schwingungserzeuger	582
264. Ozonisierung und Stickstoffbindung	584

Sechzehntes Kapitel.

Die Grundlagen der Meßtechnik.

265. Allgemeines über Meßinstrumente	586
Strom- und Spannungsmessung.	
266. Voltmeter	589
267. Instrumente mit Dauermagneten	590
268. Dynamometer	592
269. Stromwagen	596
270. Hitzdraht-Instrumente	596
271. Induktionsinstrumente	598
272. Elektromagnetische Instrumente	600
273. Elektrostatische Spannungsmesser	602
274. Statische Spannungsmesser für hohe Spannungen	604
275. Galvanometrische Spannungsmesser	605
276. Indirekte Spannungsmessung (Kompensationsapparat)	605
277. Indirekte Strommessung	607
278. Messung eines Stromstoßes oder einer Elektrizitätsmenge	608
Leistungsmessung.	
279. Dynamometrische Leistungsmesser	609
280. Induktions-Leistungsmesser	611
281. Schaltung der Leistungsmesser bei Ein- und Mehrphasenströmen	613
282. Messung des Leistungsfaktors und des wattlosen Stromes	614
283. Stromwandler	615

	Seite
Widerstandsmessungen.	
284. Widerstandsmessung durch Vergleichung. Thomsonsche Brücke . . .	619
285. Die Wheatstonesche Brücke	620
286. Widerstandsmessung von elektrolytischen Leitern und Zellen . . .	621
Die Messung der charakteristischen Wechselstrom- größen.	
287. Die Messung des wirksamen, des Induktions- und des Kapazitäts- Widerstandes	622
288. Die Wheatstonesche Brücke bei Wechselstrom	625
289. Bestimmung der Periodenzahl	626
290. Die Aufnahme von Wellenformen	627
Magnetische Messungen.	
291. Bestimmung der Kraftliniendichte und Kraftlinienmenge	629
292. Bestimmung des Hystereseverlustes	634
293. Die Bestimmung der magnetischen Durchlässigkeit	636

Siebzehntes Kapitel.

Das absolute und praktische Maßsystem.

294. Die Grundeinheiten	638
295. Geometrische Einheiten	638
296. Mechanische Einheiten	639
297. Das elektrostatische Maßsystem	640
298. Das elektromagnetische Maßsystem	642
299. Die praktischen Einheiten	643
300. Beziehungen zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem	646
301. Verwendung der Dimensionen zur Rechnungskontrolle	647
Arbeiten des Verfassers aus dem Gebiete der Elektrotechnik	
Schlagwörterverzeichnis	651

Verzeichnis der Zahlentafeln und Schaulinien.

	Seite
Kapazitätsformeln	40, 46
Dielektrizitätskonstanten der wichtigsten Stoffe	45
Formeln über die elektrische Kraft	50, 556
Spezifische Widerstände und Temperaturkoeffizienten	71, 73
Elektrochemische Äquivalente	88
Spezifischer Widerstand und Temperaturkoeffizient verdünnter Schwefel- säure	92
Spezifische Widerstände und Temperaturkoeffizienten wässriger Lösungen	93
Magnetische Durchlässigkeit — Kraftliniendichte	144
Magnetisierungsstärke — magnetisierende Kraft	146
Kraftliniendichte — magnetisierende Kraft	146, 147
Remanenz und Koerzitivkraft	151
Entmagnetisierungsfaktor von Stäben	167
Magnetischer Widerstand von Luftstrecken	179
Kraftliniendichte — Amperewindungen	193
Koeffizienten der Selbstinduktion	207, 327
Magnetische Durchlässigkeit stromdurchflossener Eisendrähte	208
Wirbelstromverlust	288
Hystereseverlust	290
Eisenverluste (Hystereseverlust + Wirbelstromverlust) von gewöhnlichem Eisen	292
Eisenverlust (Hystereseverlust + Wirbelstromverlust) von legiertem Eisen	293
Ungleichmäßige Verteilung der Kraftlinien	309, 310
Widerstandszunahme durch Hautwirkung	327, 330
Formeln zur Ausrechnung zusammengesetzter Wellenformen	484
Glimmentladung aus Drähten bei verschiedener Spannung	546
Funkenschlagweite in Luft	539, 540, 547
Verluste durch Glimmentladung	548
Durchschlagsspannung von Harzöl, Mineralöl	552
„ „ „ Glimmer, Gummi, Porzellan	552
Lichtbogencharakteristik	571
Dimensionen der wichtigsten Größen	548

Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen.

a, A	= Arbeit.
a	= senkrechter Abstand.
α	= Atomgewicht.
α	= Spezifischer elektrischer Widerstand.
\mathfrak{B}	= Kraftliniendichte.
β	= Wirbelstromkoeffizient.
C	= Kapazität.
c	= Proportionalitätsfaktor.
D	= Drehmoment.
δ	= Streufaktor nach Behn-Eschenburg (S. 271).
e	= Elektromotorische Kraft, Augenblickswert.
E	= " " effektiver Wert.
\mathfrak{E}	= " " Scheitelwert.
E_{mt}	= " " arithmetischer Mittelwert.
ε	= Elektrizierungszahl.
ε	= Ladung eines Elektrons.
η	= Hysteresekoeffizient.
f	= Magnetomotorische Kraft, Augenblickswert.
\mathfrak{F}	= " " Scheitelwert.
f, F	= Kraft.
f	= Formfaktor.
γ	= Temperaturkoeffizient.
\mathfrak{G}	= Feldstärke, Potentialgefälle, elektrisierende Kraft, magnetisierende Kraft.
i	= Stromstärke, Augenblickswert.
J	= " effektiver Wert.
\mathfrak{J}	= " Scheitelwert.
J_{mt}	= " arithmetischer Mittelwert.
i_0, J_0	= Leerlaufstrom.
i_m, J_m	= reiner Magnetisierungsstrom.
i_μ, J_μ	= Magnetisierungsstrom mit Hysterese.
k	= Klemmenspannung, Augenblickswert.
K	= " effektiver Wert.
\mathfrak{K}	= " Scheitelwert.
κ	= magnetisches Aufnahmevermögen.
κ	= Kupplungsfaktor (S. 270).
l	= Länge.

L	= Koeffizient der Selbstinduktion.
λ	= Koeffizient der äquivalenten Selbstinduktion.
m	= magnetische und elektrische Masse (Polstärke).
\mathfrak{M}	= magnetisches Moment.
M	= Koeffizient der gegenseitigen Induktion.
μ	= magnetische Durchlässigkeit.
μ	= Masse eines Elektrons.
n	= Windungszahl einer Längeneinheit.
N	= Windungszahl, gesamt.
ν	= Schwingungszahl, Periodenzahl.
p, P	= Leistung.
q, Q, Ω	= Elektrizitätsmenge.
r	= Radius.
ρ	= äquivalenter Widerstand.
S	= Fläche, Querschnitt.
σ	= Flächendichte (elektrische oder magnetische).
σ	= Scheitelfaktor.
t	= Zeit.
T	= Trägheit.
τ	= Streufaktor (nach Heyland S. 186, 272).
ϑ	= Dielektrizitätskonstante.
U	= Potential.
\ddot{u}	= Übersetzungsverhältnis.
v	= Streufaktor (nach Hopkinson S. 186, 272).
v	= Rauminhalt.
V	= Eisenverlust.
w, W	= elektrischer Widerstand.
w	= magnetischer Widerstand.
\mathfrak{z}	= Kraftlinienmenge, Augenblickswert.
\mathfrak{z}	= " Scheitelwert.
ω	= Wechselgeschwindigkeit (= $2\pi\nu$).
ω	= Gesichtswinkel.

Berichtigung.

Seite 136: In Gleichung 52 soll N statt n stehen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundgesetze über Magnetismus und Elektrizität.

1. Grundanschauungen über Magnetismus und Elektrizität.

Magnetismus und Elektrizität sind uns ihrem eigentlichen Wesen nach unbekannt, und zwar auch dann noch, wenn wir sie als schwingende Bewegungen des sogenannten Äthers betrachten, oder gemäß den ältesten und jüngsten Hypothesen als einen wirklichen Stoff mit Gleichgewichts- und Bewegungszuständen. Bekannt sind und werden uns nur die Wirkungen des Magnetismus und der Elektrizität, und diese sind wir auch imstande durch Versuche zu verfolgen und rechnerisch zu bestimmen.

Da wir wissen, daß sowohl Magnetismus als auch Elektrizität in zwei derartig verschiedenen Zuständen auftreten, daß sie sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben, so erklären wir sie uns durch die Annahme eines positiven und eines negativen Stoffes oder Fluidums; und je nachdem das eine oder das andere auf einem Körper im Überschuß vorhanden ist, nennen wir ihn positiv oder negativ magnetisch bzw. elektrisch.

Weiterhin zeigt sich aber schon ein Unterschied zwischen Magnetismus und Elektrizität. Denn während ein elektrisierter Körper in seiner ganzen Ausdehnung ausschließlich positiv oder ausschließlich negativ elektrisch sein kann, enthält ein magnetisierter Körper immer gleiche Mengen positiven und negativen Fluidums, die örtlich voneinander getrennt sind. Selbst wenn man einen Magnet zerbricht, so hat doch jeder der beiden Teile ein positives und ein negatives Ende. Die Elektrizität kann ferner von einem Körper auf einen anderen übergehen, der Magnetismus nicht; das elektrische Fluidum kann sich also auf seinem Träger fortbewegen, strömen, das magnetische ist immer an ihn gebunden. Aus einem unelektrischen Körper kann man durch Verteilung oder Influenz unbegrenzte Mengen Elektrizität erhalten; die Magnetisierung eines Körpers aber hat eine Grenze, die Sättigung (§ 93). Man muß daher die magnetische Masse in jedem Körper von vornherein als gegeben betrachten in der Form von „Molekularmagneten“, die beim unmagnetischen Zu-

stande so unregelmäßig gelagert sind, daß ihre Gesamtwirkung nach außen Null ist. Bei der Magnetisierung findet eine regelmäßige Lagerung statt, und zwar so, daß die positiven Enden der Molekularmagnete nach der einen, die negativen nach der anderen Seite gerichtet sind.

Je stärker die Magnetisierung, desto größer ist die Anzahl der geordneten Moleküle gegenüber den ungeordneten. Die „Sättigung“ ist erreicht, wenn alle gleich gerichtet sind. Die Gesamtwirkung eines Magnetes nach außen scheint von einem einzigen Punkte am Ende jeder Hälfte auszugehen, den wir den positiven oder negativen Pol nennen. In diesem Sinne können wir nun ebenso wie bei der Elektrizität punktförmige magnetische Massen betrachten.

2. Das Coulombsche Gesetz.

Zwei gleichnamige magnetische oder elektrische Massen m und m' , die sich in der Entfernung r voneinander befinden, stoßen sich mit einer Kraft ab, die proportional ist dem Produkte dieser Massen und verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung, also mit einer Kraft

$$F = c \frac{mm'}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

Haben wir ungleichnamige Massen $+m$ und $-m'$, so ist die Kraft, mit der sie aufeinander wirken $F = -c \frac{mm'}{r^2}$. Das negative Vorzeichen besagt, daß die Kraft jetzt entgegengesetzte Richtung hat wie vorhin, d. h., daß sich ungleichnamige Massen anziehen.

Dieses Gesetz lautet ebenso wie das Newtonsche Gravitationsgesetz und wurde von Coulomb mittels der von ihm erfundenen Drehwage festgestellt. Der Wert des Proportionalitätsfaktors c hängt ab von der Wahl des Maßsystems, nach dem m und m' gemessen werden, und von dem Medium, in dem sich diese Massen befinden. Das magnetische und elektrostatische Maßsystem (§ 297) sind so gewählt, daß für Luft $c = 1$ ist. Für diese Maßsysteme ist also

$$F = \frac{mm'}{r^2} \dots \dots \dots (2)$$

Daraus gewinnen wir den Begriff der magnetischen und der elektrischen Masseneinheit, indem wir festsetzen, daß jene magnetische bzw. elektrische Masse als Einheit gilt, die auf eine gleich große, 1 cm entfernte Masse die Krafteinheit¹⁾ ausübt. Dann ist

$$F = 1 = \frac{1^2}{1^2}.$$

¹⁾ Die absolute Krafteinheit (das Dyn) ist angenähert gleich dem Gewichte eines Milligramms (§ 296).

Sind die elektrischen oder magnetischen Massen mit ihren Trägern, den materiellen Massen fest verbunden, wie dies bei den magnetischen immer der Fall ist, und bei den elektrischen, wenn sie auf Nichtleitern (Isolatoren) sitzen, so wirkt diese Kraft auch zwischen den Trägern. Sitzen aber die elektrischen Massen auf Leitern, die eine freie Bewegung der Elektrizität zulassen, so unterliegen nur sie dem Coulombschen Gesetz, d. h. gleichnamige elektrische Massen müssen sich, soweit es der leitende Körper zuläßt, voneinander entfernen, ungleichnamige soweit als möglich nähern und schließlich gegenseitig aufheben.

3. Kraftfeld, Kraftlinien.

Würden wir um die Masse m mehrere andere Massen beliebig verteilen, so würde zwischen jeder von diesen und der Masse m eine Kraft F bestehen. Die Wirkung der Masse m erstreckt sich also über den ganzen umgebenden Raum, und diesen nennt man daher das Kraftfeld, und zwar entweder magnetisches oder elektrisches Kraftfeld. Genau genommen reicht das Kraftfeld jeder Masse bis ins Unendliche; praktisch genommen aber nur so weit, als noch eine meßbare Wirkung besteht. Die Abb. 2 bis 9 zeigen die Gestaltung verschiedener Kraftfelder.

Die magnetischen und elektrischen Kräfte sind ebenso wie die mechanischen durch zwei Stücke, Größe und Richtung, bestimmt. Es besitzt demnach auch das magnetische und elektrische Kraftfeld an jeder Stelle eine bestimmte Stärke und Richtung.

Die Stärke des Feldes an einer gewissen Stelle ist bestimmt durch die Größe der Kraft, welche die das Feld erzeugende Masse auf eine an dieser Stelle befindliche Masse Eins ausüben würde.

Demnach ist die Stärke \mathfrak{S} des Feldes einer punktförmigen Masse m in der Entfernung r

$$\mathfrak{S} = \frac{m}{r^2} \dots \dots \dots (3)$$

Die Masse 1 erzeugt also in der Entfernung 1 die Feldstärke 1. Damit ist die Einheit der Feldstärke im elektrostatischen Maßsystem definiert.

Befindet sich statt der Masse Eins an dieser Stelle die Masse m' , so ist die Kraft

$$F = \frac{mm'}{r^2} = \mathfrak{S} m', \dots \dots \dots (4)$$

d. h. die Kraft zwischen zwei Massen ist gleich der Stärke des von der einen Masse erzeugten Feldes multipliziert mit der zweiten Masse.

Die Richtung des Kraftfeldes an irgend einer Stelle ist bestimmt durch die Bewegungsrichtung, die eine positive Probe-

masse an jener Stelle einschlagen würde. Ist die das Feld erzeugende Masse positiv, so wird sich, wenn wir von jedem Bewegungshindernis absehen, jene Probemasse von dem Pole weg auf einer gewissen Bahn bis ins Unendliche oder bis zu irgend einer negativen Masse fortbewegen; das ist die positive Richtung des Feldes. Rührt das Feld von einer negativen Masse her, so würde sich jene Probemasse auf derselben Bahn bis in unmittelbare Nähe dieses Poles bewegen; das ist die negative Richtung des Feldes.

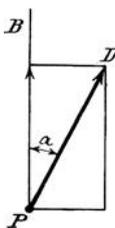


Abb. 1.

Man nennt diese Bahnen **Kraftlinien**¹⁾. Der Begriff aller Kraftlinien, deren man sich natürlich unendlich viele denken kann, ist das **Kraftfeld**. Durch die Form der Kraftlinien ist die Gestalt des Feldes bestimmt.

Es ist zu beachten, daß nach den vorstehenden Bestimmungen die Feldstärke; und die auf die Masseneinheit ausgeübte Kraft nur dann identisch sind, wenn die Kraft gemeint ist, welche in der Richtung der Kraftlinien wirkt, also auf eine frei bewegliche Masseneinheit. Kann sich die Masseneinheit aber nur in der Richtung *PB* (Abb. 1) bewegen, während *PD* die Richtung der durch *P* gehenden Kraftlinie ist, so ist die in der Richtung *PB* wirkende Kraft gleich der in diese Richtung fallenden Komponente von *PD*,

also gleich $\frac{m}{r^2} \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen *PB* und der Kraftlinienrichtung ist.

4. Bildliche Darstellung magnetischer und elektrischer Kraftfelder.

Die magnetischen Kraftlinien kann man leicht sichtbar machen, wenn man über den Magnet ein steifes Blatt Papier legt und Eisenfeilspäne gleichmäßig darüberstreut. Erschüttert man leise das Papier, so ordnen sich die Eisenfeilspäne in der Richtung der Kraftlinien, weil jedes Spänchen zu einem induzierten Magnet wird, der sich in die Richtung der Kraftlinien einstellt²⁾. Natürlich werden auf diese

¹⁾ Die Kraftlinien sind also nur gedachte oder gezeichnete Richtungen, nicht etwa Fäden, die an der Masse befestigt sind. Infolgedessen sind Untersuchungen darüber, ob sich die Kraftlinien mitdrehen oder nicht, wenn man die Masse (Magnet) dreht, von vornherein aussichtslos, indem dabei schon die Vorstellung unterlegt wird, als seien die Kraftlinien wirkliche Fäden. Die fortschreitende Änderung des Feldes; mehr kann darüber nicht ausgesagt werden, ohne daß man weitergehende willkürliche Vorstellungen hinzutut. Aber es ist sehr anschaulich und für die Darstellung der physikalischen Gesetze sehr nützlich, sich die Kraftlinien in bildlicher Weise als Fäden vorzustellen, die sich mitdrehen, wenn ein Magnet um seine Achse gedreht wird. Vgl. § 127

²⁾ Die Fixierung der Eisenfeilspäne auf dem Papier geschieht am besten dadurch, daß man mit einem Zerstäuber eine Lösung von Schellack in Alkohol darauf bläst. In unmittelbarer Nähe der Pole finden sich blanke Stellen; dort ist die Kraft so stark, daß die Eisenfeilspäne von dem Pol an sich gerissen werden.

Weise nur diejenigen Kraftlinien sichtbar, welche in die Ebene des Papiers fallen. Abb. 2 zeigt das auf solche Weise dargestellte Kraftfeld eines einzelnen magnetischen Poles. Ein Stabmagnet stand dabei senkrecht unter der Papierfläche.

Ist dieser Pol ein positiver, so gehen, nach der früheren Richtungsbestimmung, die Kraftlinien von ihm aus; ist er ein negativer, so laufen sie in ihm zusammen.

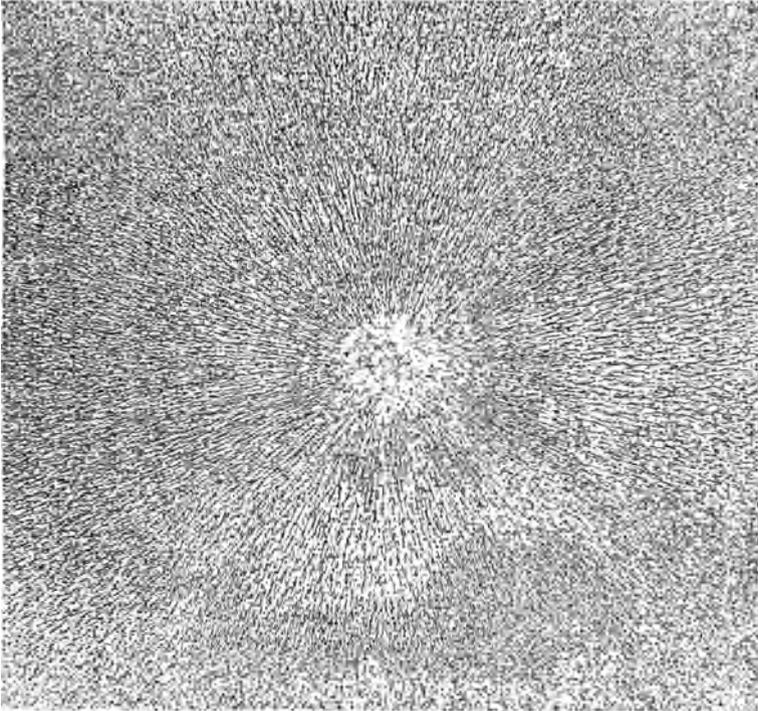


Abb. 2. Magnetisches Feld eines Poles.

Die elektrischen Kraftlinien lassen sich in so einfacher Weise nicht sichtbar machen. Klebt man jedoch dünne, leicht bewegliche Papierstreifen auf eine leitende Kugel und ladet diese mit einer hinreichenden Elektrizitätsmenge, so stellen sich dieselben strahlenförmig zur Kugel und geben ein Bild des räumlichen elektrischen Feldes.

Abb. 3 zeigt das Kraftfeld zweier ungleichnamigen, gleich großen Massen, wie man es erhält, wenn man ein mit Eisenfeilspänen bestreutes Papier über zwei aufrechtstehende, gleich starke Stabmagnete bringt. Man sieht, daß ein Teil der Kraftlinien von dem einen — nach der früheren Bestimmung dem positiven Pole —

ausgehen und auf dem negativen enden, während die übrigen im Unendlichen verlaufen. Eine positive Probemasse würde sich von

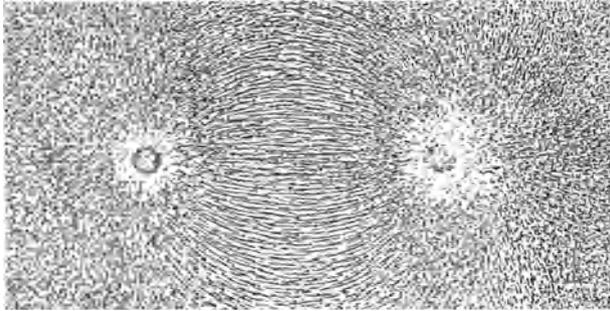


Abb. 3. Magnetisches Feld zweier ungleichnamigen Pole.

einem positiven Pole weg zum negativen hin oder in das Unendliche fortbewegen.

Abb. 4 zeigt dasselbe Feld, aber von zwei ungleichnamigen elektrischen Massen herrührend¹⁾.

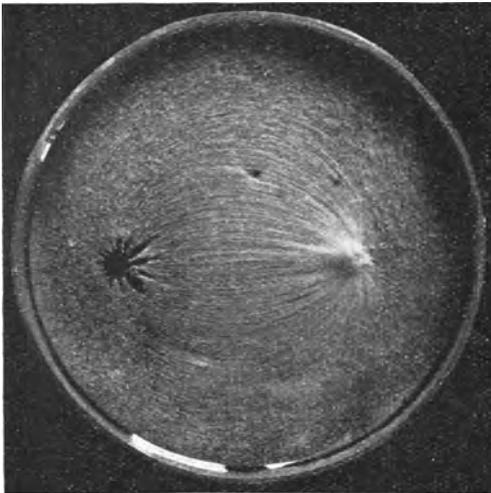


Abb. 4. Elektrisches Feld zweier ungleichnamigen Ladungen.

Abb. 5 zeigt das Kraftfeld zweier gleichnamigen, gleich großen Pole. Die Kraftlinien enden alle im Unendlichen, wenn sie nicht vorher auf eine andere ungleichnamige Masse stoßen. Sind die beiden Pole z. B. negativ, so würde sich eine positive Probemasse aus dem Unendlichen her zu einem der beiden Pole, aber niemals von einem zum andern bewegen. In der Mitte gibt es eine Stelle, wo sich die von beiden Polen herrührenden Kräfte das Gleichgewicht halten. Eine Probemasse, die an diese Stelle gebracht wird, bleibt

¹⁾ Dieses und das in Abb. 49 abgebildete elektrische Feld wurde von Seddig (Physik. Zeitschr. 5, 1904, S. 403) dadurch erhalten, daß Glyzin-Pulver in reines Terpentinöl geschüttet und diese Suspension in eine flache Schale gegossen wurde, in die 2 kleine Kugeln tauchten, die mit einer Elektrisiermaschine verbunden waren.

in Ruhe (labiles Gleichgewicht). Über diese Stelle gehen keine Kraftlinien, daher liegen die Eisenfeilspäne dort ungeordnet. Würde die Probemasse nur ein wenig seitlich verschoben, so würde sie sich, wenn sie ungleichnamig ist, bis zu einem der Pole oder, wenn sie gleichnamig ist, bis ins Unendliche weiter bewegen. Ganz gleich ist die Gestalt eines elektrischen Feldes bei derselben Anordnung zweier elektrischen Massen.

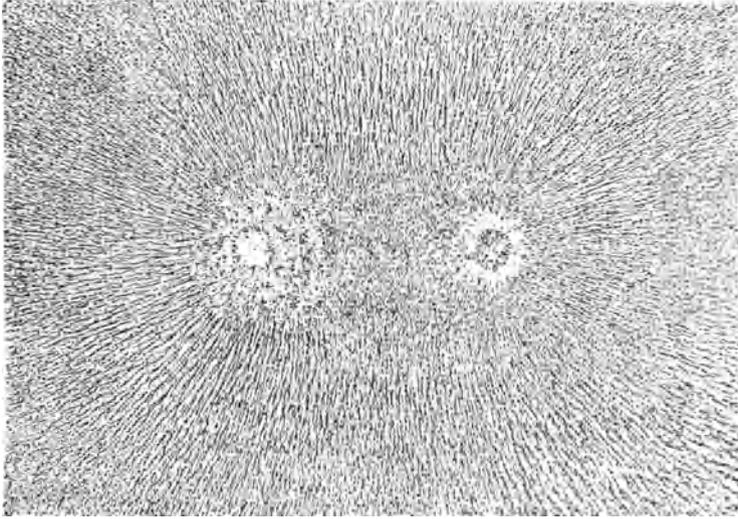


Abb. 5. Magnetisches Feld zweier gleichnamigen Pole.

Wie äußert sich Anziehung oder Abstoßung zweier Pole in den Kraftlinien? Den Kraftlinien kommt die Eigenschaft zu, daß sich jede einzelne wie ein elastischer Faden¹⁾ zu verkürzen strebt, während sie sich untereinander gegenseitig abstoßen. So erkennt man aus Abb. 3 und 4, daß sich die Pole anziehen, also ungleichnamig sind, und aus Abb. 5, daß sie sich abstoßen, also gleichnamig sind. Aber man erkennt nicht, welches positive und welches negative Pole sind. Um dies zu erfahren, muß man bei magnetischen Feldern eine kleine, frei bewegliche Magnetnadel in die Nähe bringen. Diese stellt sich in die Richtung der Kraftlinien ein und zeigt mit dem positiven Ende nach dem negativen Pole, mit dem negativen Ende nach dem positiven Pole. Bei elektrischen Feldern muß man eine leichte, z. B. mit positiver Elektrizität geladene Kugel (Holundermark an einem Seidenfaden hängend) in das Feld hereinbringen.

¹⁾ Das ist nur eine bildliche Ausdrucksweise; in Wirklichkeit sind es keine Fäden. Vgl. Anmerk. auf S. 4.

5. Zu- und Abnahme der Kraft. Homogenes Feld.

Aus den drei einfachsten Fällen von Kraftfeldern (Abb. 2 bis 5) lassen sich einige Sätze ableiten, die für die Beurteilung anderer Fälle wertvoll sind. Man sieht, daß die Kraftlinien, je weiter man sich von den Polen entfernt, d. h. in der Richtung der abnehmenden Kraft, auseinanderlaufen und umgekehrt. Man gewinnt daraus den Satz, daß in der Richtung der divergierenden Kraftlinien eine Abnahme, und in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien eine Zunahme der Kraft stattfindet. Was folgt daraus

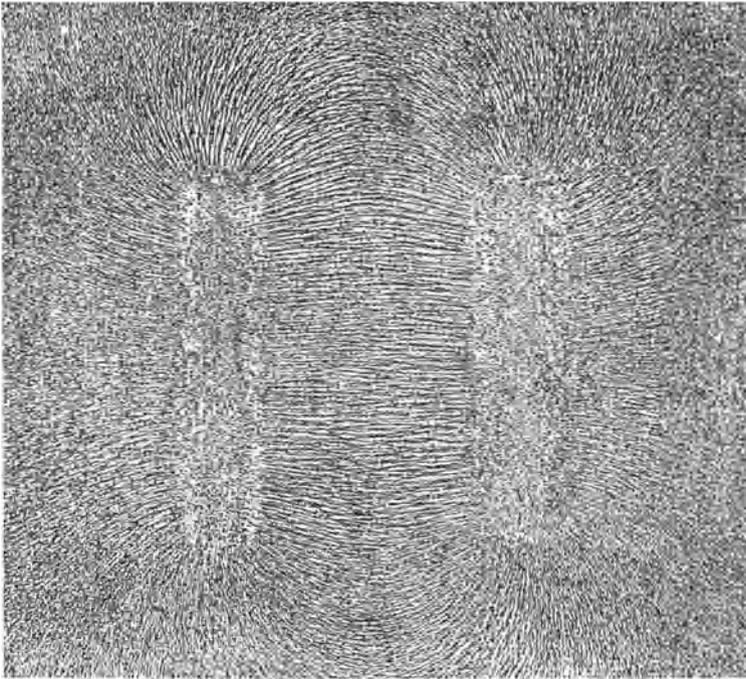


Abb. 6. Homogenes Feld.

für eine Fläche, auf der die Kraftlinien parallel verlaufen? Nichts anderes, als daß die Kraft an allen Punkten dieselbe, also in der ganzen Fläche konstant ist. Man nennt solche Felder homogene Kraftfelder. Abb. 6 zeigt ein solches, wie es zwischen zwei ungleichnamigen, in die Länge gezogenen (linearen) Polen entsteht. Zwischen zwei Polen, die aus parallelen Flächen bestehen, ist der ganze Raum bis in die Nähe des Randes ein homogenes Feld (vgl. Abb. 22). Homogene Felder von geringer Ausdehnung finden sich endlich in größerer Entfernung von jeder magnetischen oder

elektrischen Anordnung. Denn es gibt immer Stellen, wo die Kraftlinien innerhalb eines gewissen Raumes mit großer Annäherung als parallel betrachtet werden können. So ist auch das magnetische Feld der Erde für den Raum eines Laboratoriums ein homogenes, da die Ausdehnung eines solchen verschwindend klein ist gegenüber der Entfernung von den magnetischen Polen der Erde.

Da im Felde selbst keine neuen Kraftlinien entstehen, so ist ihre Dichte ein relatives Maß für die Stärke des Feldes an der betreffenden Stelle im Vergleiche zu einer anderen. Nach diesem Grundsatz kann man aus dem Bilde, das die Eisenfeilspäne von einem magnetischen Felde geben, leichter und schneller eine übersichtliche Beurteilung der gesamten Kraftverteilung einer magnetischen Anordnung gewinnen als durch Berechnung, die in den meisten Fällen gar nicht ausführbar ist.

6. Anzahl der Kraftlinien.

Wie schon in § 3 bemerkt wurde, kann man sich unendlich viele Kraftlinien bei jeder Anordnung denken. Bei der sichtbaren Darstellung derselben ist ihre Zahl allerdings durch die vorhandenen Eisenteilchen beschränkt, und darum ist ihre Dichte nur ein relatives Maß für die Stärke des Feldes an verschiedenen Stellen.

Es hat sich aber als zweckmäßig erwiesen, für die räumliche Dichte der Kraftlinien eine Bestimmung zu treffen und eine Einheit festzustellen. Diese Bestimmung lautet: Die Flächeneinheit einer Kugelschale von Radius Eins, in deren Mittelpunkt sich die Masse Eins befindet, wird von **einer** Kraftlinie getroffen¹⁾. Da die Kraftlinien einer punktförmigen Masse gleichmäßig im Raume verteilt sind, und die Oberfläche dieser Kugel 4π ist, so wird sie von 4π Kraftlinien getroffen²⁾. Da wir nur die Masse Eins voraussetzen, und in einem von anderen magnetischen oder elektrischen Massen freien Raume keine Kraftlinien entstehen und keine verschwinden können, so ist die Gesamtzahl der von einem Einheitspole ausgehenden Kraftlinien 4π . Befindet sich im Mittelpunkte dieser Kugelschale die Masse m , so treffen m Kraftlinien die Flächeneinheit, und die Gesamtzahl aller Kraftlinien oder die Kraftlinienmenge ist $4\pi m$.³⁾ Da die Fläche der Kugelschale

¹⁾ Demnach kann man einer Kraftlinie einen entsprechenden Querschnitt bzw. einen prismatischen oder röhrenförmigen Raum zuerkennen. Daher wird zuweilen von „Krafteröhren“ gesprochen. Ein Vorteil ergibt sich dabei aber nicht.

²⁾ Hierin liegt der Grund, warum in den folgenden Gesetzen mehrmals der Faktor π auftritt. Man könnte ihn beseitigen, wenn man im Coulombschen Gesetz (§ 2) den Faktor c nicht gleich 1 sondern gleich $\frac{1}{4\pi}$ setzen würde.

³⁾ Es ist ohne weiteres klar, daß die Kraftlinienmenge, die durch eine diese Kugel umhüllende aber sonst beliebig gestaltete Fläche hindurchtritt, auch gleich $4\pi m$ ist. Das gilt auch dann noch, wenn sich innerhalb der

$4\pi r^2$ ist, so wird die Flächeneinheit derselben von $\frac{4\pi m}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}$ Kraftlinien getroffen; und weil nach § 4 die Feldstärke in der Entfernung r von dieser Masse $\frac{m}{r^2}$ ist, so ist die Feldstärke \mathfrak{S} an irgend einer Stelle nichts anderes, als die Anzahl der Kraftlinien, die die **Flächeneinheit** einer die Kraftlinien an dieser Stelle senkrecht schneidenden Fläche treffen. Man bezeichnet diese Anzahl als Kraftliniendichte. Die Feldstärke ist also gleich der Kraftliniendichte. Das gilt aber, wie wir später (§ 27) sehen werden, nicht mehr, wenn sich die wirkenden Massen in einem andern Medium als Luft befinden.

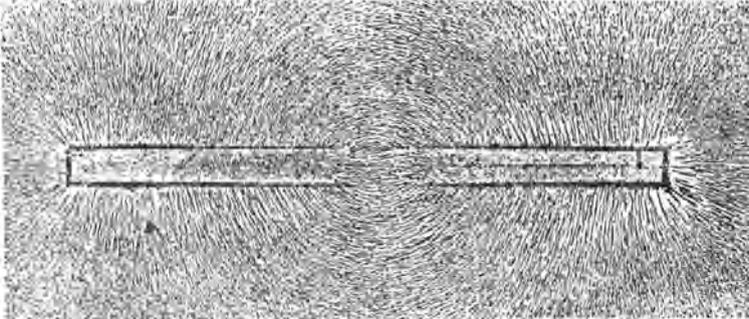


Abb. 7. Kraftfeld eines Stabmagnetes.

Die Einheit der Feldstärke hat demnach jenes Feld, wo eine Kraftlinie auf 1 cm^2 entfällt. Man nennt diese Einheit ein Gauß. Wenn also in einem Felde (in Luft) auf die magnetische oder elektrische Masse 1 eine Kraft von x Dyn ausgeübt wird, so hat dieses Feld die Stärke von x Kraftlinien oder x Gauß.

Aus der obigen Festsetzung über den Zahlenwert einer Kraftlinie folgt ferner, daß die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Magnet mit der Polstärke m ausgehen, gleich $4\pi m$ ist. Denn alle Kraftlinien eines Magnetes gehen von dem positiven Pole aus und treten beim negativen in den Magnet ein. Im Magnet selbst aber gehen sie vom negativen zum positiven Pole, wenn wir sie als geschlossene Kurven

geschlossenen Fläche mehrere Massen von gleicher oder entgegengesetzter Polarität befinden (Satz von Gauß). Befinden sich z. B. innerhalb der geschlossenen Fläche die Massen $+m_1$ und $-m_2$, so ist die Kraftlinienmenge, die durch diese Fläche hindurchtritt, gleich $4\pi(m_1 - m_2)$, während $4\pi m_2$ Kraftlinien innerhalb dieser Fläche von der Masse m_2 zur Masse m_1 verlaufen. Bringt man die Masse m_2 aus dieser Fläche heraus, so müssen die $4\pi m_2$ Kraftlinien durch diese Fläche hindurchgehen, so daß dann die Gesamtzahl der hindurchtretenden Kraftlinien wieder gleich $4\pi m_1$ ist.

betrachten. Daher gehen durch einen Querschnitt des Magnetes sämtliche $4\pi m$ Kraftlinien. In Wirklichkeit ist aber nicht die ganze magnetische Masse in den Polen konzentriert, sondern teilweise auch auf die Seiten verteilt. Daher gehen auch nicht alle Kraftlinien

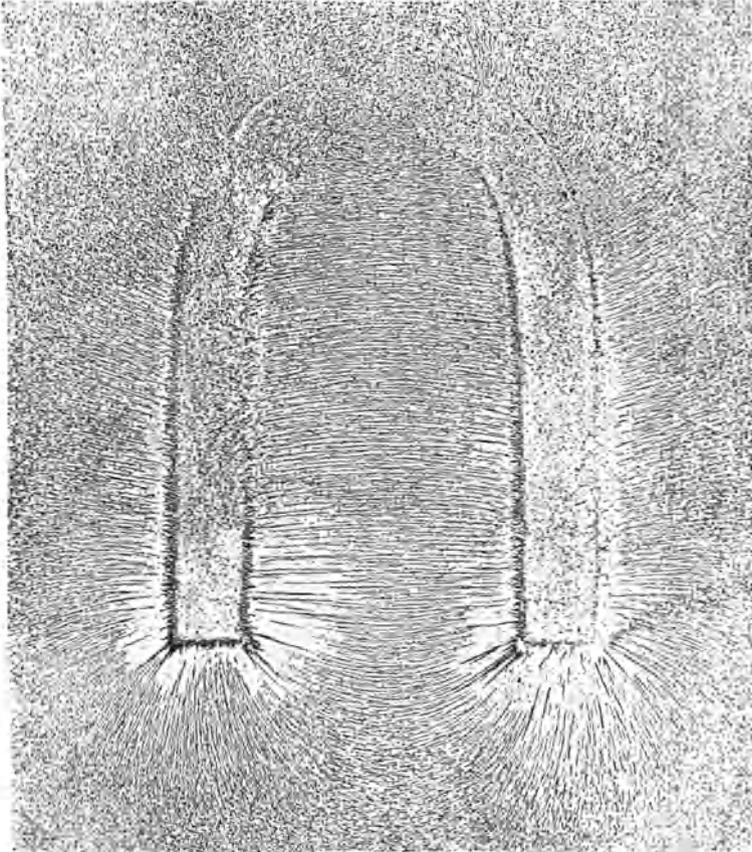


Abb. 8. Kraftfeld eines Hufeisenmagnetes.

von den Enden aus, wie uns die Betrachtung der Kraftfelder eines Stabmagnetes und eines Hufeisenmagnetes (Abb. 7 und 8) lehrt. Wir müssen dann sagen, daß von der einen Hälfte $4\pi m$ Kraftlinien ausgehen und auf der anderen Hälfte endigen. Dann gehen aber auch alle $4\pi m$ Kraftlinien nur durch den mittleren Querschnitt des Magnetes.

7. Zusammensetzung von Kraftfeldern.

Zwei oder mehrere Pole geben zusammen ein resultierendes Feld. Solche haben wir schon in den Abb. 3 bis 8 kennen gelernt. Die Zusammensetzung geht an jeder Stelle des Feldes nach denselben Gesetzen vor sich, wie die Zusammensetzung zweier Kräfte nach dem

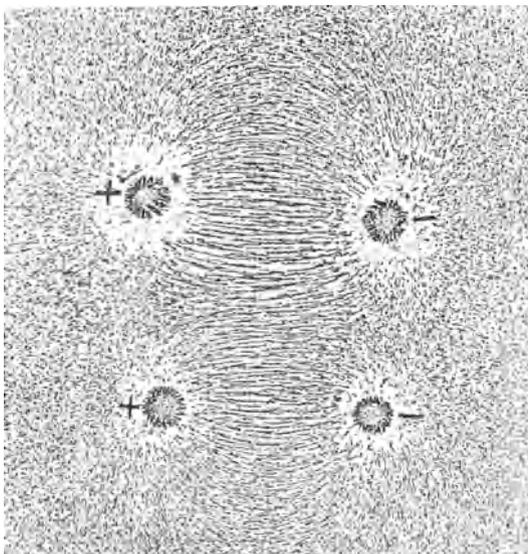


Abb. 9. Zusammengesetztes Feld von vier Polen.

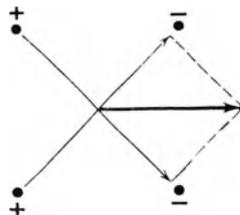


Abb. 10. Zusammensetzung zweier sich kreuzender Kraftlinien zu einer resultierenden.

Kräfteparallelogramm. Abb. 9 zeigt das resultierende Feld von 4 Polen, von denen je zwei gegenüberliegende ungleichnamig sind. Man kann sich daher dieses Feld auch entstanden denken durch kreuzweise Übereinanderlagerung zweier in Abb. 3 dargestellten Felder, wie man aus Abb. 10 erkennt.

Solche zusammengesetzte Felder kommen in allen elektrischen Maschinen vor¹⁾.

¹⁾ In den Fachzeitschriften ist öfter die Frage aufgeworfen worden, ob Kraftlinien sich kreuzen können. Kraftlinien eines wirklichen, d. h. resultierenden Feldes können sich nicht kreuzen, weil sie gemäß § 4 nichts anderes sind als Krafrichtungen. Könnten sich solche kreuzen, so würde das nichts anderes bedeuten, als daß die Kraft an der Kreuzungsstelle zweideutig ist; denn eine an diese Stelle gebrachte Probemasse könnte die eine oder die andere Richtung einschlagen. Das ist unmöglich, sondern es kann an jeder Stelle nur eine bestimmte Krafrichtung geben. Dagegen können sich Kraftlinien komponentaler Felder beliebig kreuzen, und umgekehrt kann eine Kraftlinie an jeder beliebigen Stelle in zwei oder mehrere Komponenten und daher das ganze Feld in zwei oder mehrere komponentale Felder zerlegt werden.

Die Zusammensetzung oder Zerlegung von Feldern kann aber nur dann nach dem Kräfteparallelogramm wie in Abb. 10 erfolgen, wenn die Kraftlinien-

8. Magnetisches Moment.

Wir haben bisher nur die Wirkung magnetischer Massen als einzelner Pole betrachtet. Da aber jeder Magnet zwei Pole besitzt, so ist für die Fernwirkung die Gesamtwirkung beider Pole maßgebend. Dann kommt aber nicht nur die Stärke jedes Poles, sondern auch ihr Abstand in Betracht. Befindet sich z. B. ein Magnet mit der Polstärke m und dem Polabstande l in einem homogenen Felde von der Stärke \mathfrak{H} , dessen Richtung durch die Pfeile (Abb. 11) bestimmt ist, so wirkt nach § 4 auf den einen Pol die Kraft $+m\mathfrak{H}$, auf den andern $-m\mathfrak{H}$. Jede sucht den Magnet in der Richtung des

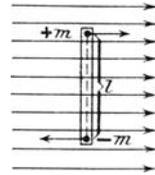


Abb. 11.

Feldes zu drehen mit einem Drehmomente $\frac{l}{2}m\mathfrak{H}$. Da beide den Magnet in demselben Sinne drehen, so ist das gesamte Drehmoment das doppelte, also gleich $lm\mathfrak{H}$. Es kommt also für die Kraft, mit der das homogene Feld \mathfrak{H} den Magnet zu drehen sucht, das Produkt aus der Polstärke und dem Polabstande in Betracht, und man nennt es das magnetische Moment \mathfrak{M} des Magnetes. Es ist also

$$\mathfrak{M} = ml \dots \dots \dots (5)$$

Dann ist das Drehmoment, das auf den Magnet wirkt, gleich $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Bildet der Magnet mit der Richtung der Kraftlinien einen Winkel α , so ist der senkrechte Abstand des Drehpunktes von der Kraft nicht $\frac{l}{2}$, sondern $\frac{l}{2} \sin \alpha$; daher auch das Drehmoment $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \sin \alpha$.

Für $\alpha = 0$ ist das Drehmoment null, d. h. die magnetische Achse stellt sich in die Richtung der Kraftlinien ein.

Nun ist in Wirklichkeit niemals die ganze magnetische Masse m in einem Punkte konzentriert, sondern, wie die Abb. 7 und 8 zeigen, auch auf die Seitenflächen verteilt. Es gibt aber — ebenso wie bei schweren Körpern einen Schwerpunkt — auch hier einen Punkt, in dem die ganze magnetische Kraft anzugreifen scheint, und diesen bezeichnet man als den Pol. Dieser liegt nicht ganz am Ende, so daß bei einem Stabmagnete der Polabstand nicht gleich der Länge des Magnetstabes, sondern etwa $\frac{5}{6}$ desselben ist. Die genaue Kenntnis der Lage der Pole und des Polabstandes hat übrigens gar kein praktisches Interesse, da für alle Wirkungen des Magnetes das magnetische Moment \mathfrak{M} in Betracht kommt und auch nur dieses der experimentellen Bestimmung zugänglich ist.

menge von der elektrisierenden bzw. magnetisierenden Kraft unabhängig, d. h. die Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Durchlässigkeit konstant ist. Bei Eisen ist das nicht der Fall (§ 92), so daß die Zusammensetzung und Zerlegung eines magnetischen Feldes im Eisen sehr verwickelt und der rechnerischen oder geometrischen Lösung unzugänglich ist (vgl. § 113).

Die Erklärung dafür, daß für das Drehmoment eines Magnetes nicht allein seine Polstärke m , sondern auch der Abstand der Pole maßgebend ist, ergibt sich aus folgender Überlegung. Würden die beiden Pole zusammenfallen, so ist klar, daß sie keinerlei Wirkung nach außen ausüben könnten, weil sie sich gegenseitig aufheben. Rücken sie auseinander, so heben sie sich teilweise auf, aber um so weniger, je weiter sie voneinander entfernt sind.

9. Das magnetische Feld der Erde.

Die Erde kann als ein Stabmagnet, jedoch von sehr ungleichmäßiger Magnetisierung, betrachtet werden. Da die Lage der Pole nur beiläufig bekannt ist, so kann man zur Bestimmung des Einflusses der Erde auf einen Magnet das Coulombsche Gesetz nicht anwenden, sondern man bestimmt für jeden Ort der Erde die Stärke \mathfrak{S} ihres magnetischen Feldes. Dann gelten für die Wirkungen der Erde auf einen Magnet die Gesetze der §§ 3 und 8. Die Erde hat natürlich wie jeder andere Magnet ihre Kraftlinien, die uns an jeder Stelle die Richtung des Feldes angeben (Abb. 12). Ihre Neigung zur horizontalen Ebene eines Ortes ist nichts anderes als der Inklinationswinkel, wie er von einer frei beweglichen Nadel angezeigt wird. Der Deklinationswinkel eines Ortes ist der Winkel zwischen der Richtung der Kraftlinien und dem geographischen Meridian dieses Ortes. Er wäre Null, wenn der magnetische und geographische Pol zusammenfielen. Da der magnetische Nordpol¹⁾ im Norden von Amerika liegt, so haben wir in Europa eine westliche Deklination.

Abb. 12. Magnetisches Feld der Erde.

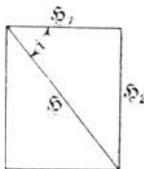


Abb. 13.

In den meisten Fällen haben wir es mit Magnetnadeln zu tun, die nur in einer horizontalen Ebene beweglich sind. Auf solche kann natürlich nur die in die horizontale Ebene fallende Komponente des Erdmagnetismus einwirken. Nach dem Vorigen ist der Inklinationswinkel i der Winkel zwischen der horizontalen Ebene des betreffenden Ortes und der Richtung der erdmagnetischen Kraft. Um also die horizontale Komponente des magnetischen Feldes der Erde zu finden, haben wir die Zerlegung nach einem Kräfteparallelogramm vorzunehmen, das den Winkel i enthält (Abb. 13). Dann ist die horizontale Komponente $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} \cos i$ und die vertikale Komponente $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} \sin i$. Die folgende Tabelle enthält die Größe der

¹⁾ Der magnetische Nordpol besitzt negativen Magnetismus, da sich ihm das positive Ende einer Magnetnadel zuwendet.

horizontalen Komponente für einige Orte oder die Anzahl der Kraftlinien, die nach den Bestimmungen des § 6 die Flächeneinheit einer zur horizontalen Ebene senkrechten Fläche treffen:

Berlin	0,187	Kiel	0,178	Petersburg	0,165
Darmstadt	0,195	London	0,183	Rom	0,235
Graz	0,212	München	0,205	Wien	0,207
Hamburg	0,181	Paris	0,197	Zürich	0,206

Diese Werte bleiben aber nicht konstant, sondern ändern sich im Laufe der Zeit.

Beispiel. Um in Wien eine um eine lotrechte Achse drehbare Magnetnadel von 24 cm Länge senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen und in dieser Stellung festzuhalten, so daß sie senkrecht zur wagrechten Komponente der Kraftlinien steht wie in Abb. 11, ist eine Kraft von 0,1 Grammgewicht erforderlich. Wie groß ist das magnetische Moment und die Polstärke der Magnetnadel (in absol. Einheiten)? Da ein Grammgewicht gleich 980 absol. Kräfteinheiten (Dyn, § 296) ist, ist das Drehmoment gleich $24 \cdot 98 = 2352$ absol. Einh. Dieses ist nach § 9 gleich dem Drehmoment, das von der Horizontal-komponente des Erdmagnetismus herrührt, nämlich $\mathfrak{M} \mathfrak{S}_1$. Da \mathfrak{S}_1 für Wien nach obiger Tabelle 0,207 ist, so ist $\mathfrak{M} = \frac{2352}{0,207} = 11362$. Nimmt man an, daß der Abstand der Pole der Nadel $\frac{5}{8}$ ihrer Länge, also 20 cm ist, so ist die Polstärke $m = \frac{11362}{20} = 568$ absol. Einh. Nach § 7 ist die Anzahl der von einem Pol ausgehenden Kraftlinien $4\pi m$, also hier $4 \cdot 3,14 \cdot 568 = 7134$.

10. Feldstärke neben und zwischen Flächen, die gleichmäßig mit magnetischer oder elektrischer Masse bedeckt sind.

Die Linie Ob (Abb. 14) sei ein Schnitt durch eine ebene Fläche, die gleichmäßig mit Masse belegt ist. Ist σ die Masse auf einer Flächeneinheit, so nennt man σ die Flächendichte. Wir wollen die Stärke des Feldes im Punkte D bestimmen, der sich im Abstände x von der Mitte O der Fläche befindet, und in dem wir uns die Masse Eins denken. Greifen wir ein kleines Stück s , dargestellt durch ab , aus der Fläche heraus, so befindet sich auf dieser die Masse σs . Ist diese Fläche sehr klein, so können wir die Masse darauf als punktförmig betrachten, und die Kraft, die von ihr auf den Punkt D ausgeübt wird, ist $\frac{\sigma s}{r^2}$. Die zur Ebene senkrechte

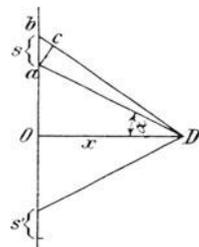


Abb. 14.

Komponente derselben ist $\frac{\sigma s}{r^2} \cos \alpha$. Vom Punkte D aus gesehen, erscheint die Fläche s als die Projektion ac auf die von D aus beschriebene Kugelfläche. Die Größe dieser Projektion ist $s \cos \alpha$. Dann ist $\frac{s \cos \alpha}{r^2}$ die Projektion der Fläche s auf eine Kugelschale vom

Radius Eins; das ist nichts anderes als der Gesichtswinkel, unter dem die Fläche s von D aus gesehen erscheint. Bezeichnen wir diesen mit ω , so ist die zur Fläche senkrechte Komponente der Kraft $\omega\sigma$. Die Kraft, die von der ganzen Fläche auf den Punkt D ausgeübt wird, erhalten wir, wenn wir die Wirkung aller dieser Flächenstücke summieren. Da vorausgesetzt wurde, daß die Senkrechte vom Punkt D in den Mittelpunkt der Fläche fällt, so entspricht jedem Flächenstück s ein ebensolches bei s' . Daher gibt es unter den in die Fläche fallenden Komponenten immer je zwei von entgegengesetzter Richtung, die sich gegenseitig aufheben. Es bleiben also für die Summierung nur die senkrechten Komponenten. Da diese aber nur von der Flächendichte und dem Gesichtswinkel abhängen, so ist die ganze von der Fläche auf den Punkt D wirkende Kraft gleich dem Produkte aus der Flächendichte und dem Gesichtswinkel, unter dem die Fläche von D aus erscheint.

Ist diese Fläche unendlich groß, so ist ihr Gesichtswinkel von jedem in endlicher Entfernung befindlichen Punkte aus eine halbe Kugelfläche vom Radius Eins, also gleich 2π . Die Kraft auf den Punkt D mit der Masse Eins oder die Feldstärke der Fläche im Punkte D ist also $2\pi\sigma$. Dasselbe gilt von einer endlichen Fläche, wenn die Entfernung des Punktes von der Fläche so klein ist, daß sie gegenüber dem Durchmesser der Fläche vernachlässigt werden kann. Denn dann ist der Gesichtswinkel auch 2π und daher auch die Feldstärke der Fläche in einem solchen Punkte: $\S = 2\pi\sigma$.

Befindet sich in D eine Masse m , so ist die zwischen ihr und der Fläche wirkende Kraft $F = \S m = 2\pi\sigma m$. Haben σ und m gleiche Vorzeichen, so wirkt die Kraft von der Fläche weg, also abstoßend, und umgekehrt, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Befindet sich die Masse m rechts von der Fläche, so ist die Kraft nach rechts gerichtet, befindet sie sich links, so ist die Kraft nach links gerichtet. Sie hat also zu beiden Seiten der Fläche entgegengesetzte Richtung. Bildet man die Differenz zwischen diesen Kräften, so ist

$$F_r - F_l = 2\pi\sigma m - (-2\pi\sigma m) = 4\pi\sigma m.$$

Geht man also durch eine solche Fläche von der einen Seite zur anderen, so findet man eine sprunghafte Änderung der Kraft um den Betrag $4\pi\sigma m$ oder der Feldstärke um den Betrag $4\pi\sigma$.



Haben wir nun zwei parallele Flächen (Abb. 15) mit gleich großen, gleichnamigen Flächendichten σ , so heben sich die Kräfte in allen zwischen ihnen liegenden Punkten D auf, wenn der Abstand der Flächen klein ist gegenüber ihrer Größe; die Feldstärke zwischen den Platten ist also Null. Haben die beiden Flächen ungleichnamige

Abb. 15. Flächendichten, so wirkt die eine abstoßend, die andere anziehend. Die Kräfte summieren sich also, und die Feldstärke zwischen den Platten ist

$$\S = 4\pi\sigma \quad (6)$$

Wir haben demnach ein homogenes Feld bis in die Nähe der Ränder (Abb. 6, 22).

Hat der Punkt zwischen den Flächen die Masse m , so ist die auf ihn wirkende Kraft: $F = 4\pi\sigma m$.

11. Das Potential; seine mathematische und physikalische Bedeutung.

Für die Lösung sehr vieler magnetischer und elektrischer Aufgaben ist es von Vorteil, statt der Kraftfunktion $\mathfrak{S} = \frac{m}{r^2}$, welche die von einer Masse m auf eine in der Entfernung r befindliche Masse Eins ausgeübte Kraft darstellt, die Potentialfunktion $U = \frac{m}{r}$ einzuführen. Zwischen beiden besteht eine einfache mathematische Beziehung.

Differenziert man nämlich die Potentialfunktion nach r , so erhält man

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{m}{r} \right) = - \frac{m}{r^2} = - \mathfrak{S}$$

oder
$$\mathfrak{S} = - \frac{dU}{dr} \dots \dots \dots (7)$$

Man findet also die von einer Masse m aus in irgend einer Richtung auf die Masseneinheit wirkende Kraft, oder die Feldstärke, wenn man das Potential nach dieser Richtung differenziert und negativ nimmt.

Aus Abb. 16, wo die unendlich kleinen Größen dU und dr als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt sind, ersieht man ohne weiteres, daß das Verhältnis $\frac{dU}{dr}$ nichts anderes ist als das Gefälle des Potentials. Das heißt, die in irgend einem Punkte herrschende Feldstärke ist gleich dem negativen Potentialgefälle an dieser Stelle in der Richtung der Kraft.

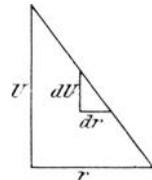


Abb. 16.

Das Potential $\frac{m}{r}$ hat aber auch eine wichtige physikalische Bedeutung, es stellt nämlich eine Arbeitsgröße vor. Nach den Gesetzen der Mechanik ist die Arbeit, die eine konstante Kraft F längs eines mit der Richtung der Kraft zusammenfallenden Weges l leistet, ausgedrückt durch $A = F \cdot l$. Um die Arbeit bei der Bewegung einer Masse 1 unter dem Einflusse einer Masse m zu bestimmen, hat man zu bedenken, daß die zwischen beiden wirkende Kraft \mathfrak{S} nicht konstant ist, sondern mit dem Quadrate der Ent-

fernung abnimmt. Man darf daher diese Definition der Arbeit nur auf ein unendlich kleines Wegstückchen dr , für das die Kraft als konstant angenommen werden kann, anwenden (Abb. 17). Die auf diesem Wegstückchen geleistete Arbeit ist dann

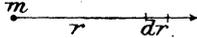


Abb. 17.

$$dA = \mathfrak{S} \cdot dr = \frac{m}{r^2} dr.$$

Will man die Arbeit bestimmen, die durch diese Kraft geleistet wird bei der Bewegung der Masse 1 von r bis in unendliche Entfernung, so hat man das Differential der Arbeit von r bis ∞ zu integrieren. Also

$$A = \int_r^{\infty} dA = \int_r^{\infty} \frac{m}{r^2} dr = - \left[\frac{m}{r} \right]_r^{\infty} = - \left(\frac{m}{\infty} - \frac{m}{r} \right) = \frac{m}{r} = U.$$

Das Potential der Masse m , bezogen auf einen Punkt in der Entfernung r , ist also gleich der Arbeit, die die von der Masse m ausgehende Kraft leistet, wenn sich eine gleichartige Masse 1 aus der Entfernung r bis ins Unendliche bewegt, oder jene Arbeit, die von äußeren Kräften aufgewendet werden muß, um eine gleichartige Masse 1 aus dem Unendlichen bis zum Abstand r von der Masse m heranzubringen. Dabei ist es gleichgültig, welchen Weg die Masse 1 einschlägt, ob den kürzesten oder mit Umwegen; es kommt nur auf den Anfangs- und Endpunkt an, wie man aus der Integration ersieht. Das Potential hat also ebenso wie die Arbeit keine Richtung (skalare Größe), während zum Begriffe der Kraft notwendig auch die Richtung derselben gehört (Vektor-Größe). Das ist der Hauptvorteil des Potentialausdruckes vor dem Kraftausdruck.

Hat man statt der Masse 1 eine Masse m' , so ist der Arbeitswert (potentielle Energie) zwischen den Massen m und m'

$$A = \frac{m m'}{r} = m' U \dots \dots \dots (8)$$

Oder wenn man von der Masse m' und ihrem Potential

$$U' = \frac{m'}{r}$$

ausgeht, so ist der Arbeitswert $A = m U'$.¹⁾

¹⁾ Es ist zu beachten, daß U nur den Arbeitswert zwischen den Massen m und 1 darstellt, also nicht die Dimension einer Arbeit hat, sondern erst nach Multiplikation mit einer Masse die Dimension einer Arbeit erhält, ebenso wie die Feldstärke erst nach Multiplikation mit einer Masse die Dimension einer Kraft erhält (vgl. § 297).

Da wir die Kraft und das Potential als positiv angenommen haben, so haben wir es nach § 2 mit abstoßenden Kräften, also mit gleichnamigen Massen zu tun. Die Bewegung einer frei beweglichen Masse 1 bis ins Unendliche erfolgt also von selbst, und die Arbeit U ist von der Kraft geleistet worden und erscheint daher positiv. Wären die Massen ungleichnamig, so wäre auch F und U und A negativ; wir hätten dann eine anziehende Kraft, und die Bewegung ins Unendliche hätte gegen die Kraft F von einer anderen äußeren Kraft geleistet, also Arbeit aufgewendet werden müssen.

Das Entfernen einer magnetischen oder elektrischen Masse bis ins Unendliche ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden oder der Vernichtung derselben. Ihr Heranbringen aus unendlicher Entfernung ist gleichbedeutend mit der Erzeugung derselben durch Induktion oder Influenz.

12. Potential mehrerer Massen.

Um das Potential mehrerer verschieden gelegener Massen auf eine Masse 1 zu finden, können wir die Potentiale der einzelnen Massen ohne weiteres addieren, da nach dem Vorigen das Potential keine Richtung besitzt.

Es ist also

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots$$

Um die gesamte Kraft aller dieser Massen auf die Masse 1 in irgend einer Richtung zu erhalten, hat man U nach dieser Richtung zu differenzieren und negativ zu nehmen. Die Kräfte dürfte man nicht ohne weiteres addieren, sondern nur die in die betreffende Richtung fallenden Komponenten. Man erkennt daraus den Vorteil des Potentials.

13. Bewegungsrichtung und Potential.

Der Potential- oder Arbeitswert zweier gleichnamigen Massen ist $\frac{mm'}{r}$. Sind sie beweglich, so stoßen sie sich ab; dabei wird r immer größer und der Potentialwert kleiner. Sind die Massen ungleichnamig, so ist der Potentialwert $-\frac{mm'}{r}$. Sind sie beweglich, so ziehen sie sich an; dabei wird r und damit auch der Potentialwert immer kleiner, da er jetzt negativ ist. Die Bewegung geht also wie bei jeder potentiellen Energie immer so vor sich, daß der Potentialwert kleiner wird. Jede Masse bewegt sich so, daß sie von Punkten höheren Potentials zu Punkten kleineren Potentials gelangt. Dabei wird von den Kräften selbst Arbeit geleistet. Eine umgekehrte Bewegung kann nur mit Hilfe anderer

Kräfte und Arbeitsaufwand durchgeführt werden. Zwischen zwei Punkten gleichen Potentials findet von selbst keine Bewegung statt. Erfolgt sie dennoch infolge anderer Umstände, so wird dabei weder Arbeit geleistet noch aufgewendet. Daß zwischen zwei Punkten gleichen Potentials von selbst keine Bewegung elektrischer oder magnetischer Massen eintreten kann, folgt mathematisch auch aus der Gleichung (7), denn zwischen zwei Punkten, deren Potential U denselben Wert hat, ist die Änderung $dU = 0$, also auch ξ und F gleich null. Wenn aber die Kraft Null ist, kann keine Bewegung eintreten.

14. Die Niveauflächen und ihre Beziehung zu den Kraftlinien.

Flächen, deren Punkte denselben Potentialwert haben, bezeichnet man als Flächen gleichen Potentials oder Niveauflächen.

Da das Potential einer punktförmigen Masse m gleich $\frac{m}{r}$ ist, so müssen ihre Niveauflächen konzentrische Kugelflächen sein, deren Mittelpunkt die Masse m bildet. Ist beispielsweise $m = 5$ Einheiten, so hat die Niveaufläche vom Radius 1 den Potentialwert 5, die Niveaufläche vom Radius $\frac{5}{4}$ den Wert 4, die Niveaufläche vom Radius $\frac{5}{3}$ den Wert 3 usw., die Niveaufläche vom Radius 5 den Wert 1 (Abb. 18). Die Abstände zwischen den einzelnen Niveauflächen, deren Werte sich um denselben Betrag unterscheiden, werden also immer größer, je weiter man sich von der Masse entfernt. Selbstverständlich kann man sich zwischen je zweien der in Abb. 18 angedeuteten Niveauflächen noch unendlich viele denken.

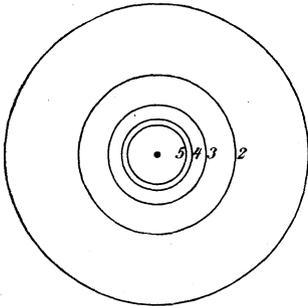


Abb. 18.

Die Kraftlinien, die von einer einzelnen punktförmigen Masse m ausgehen, müssen radial verlaufen (wie auch Abb. 2 zeigt), da kein Grund zu irgend einer Unsymmetrie vorliegt. Die Kraftlinien stehen also senkrecht zu den Niveauflächen. Das gilt aber nicht nur

für diesen besonderen Fall, sondern ganz allgemein. Denn wie auch ein Kraftfeld beschaffen sein mag, eine in dasselbe hineingebrachte frei bewegliche Probemasse wird sich immer auf dem kürzesten Wege von einer Niveaufläche zur unmittelbar benachbarten bewegen. Dieser kürzeste Weg ist die Senkrechte zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen.

Da die Feldstärke bestimmt ist durch die Kraft, die auf eine

Masse ausgeübt wird (§ 3), und diese Kraft, wie wir eben gesehen haben, senkrecht zu den Niveauflächen wirkt, so ist die Feldstärke ξ nach Gl. 7

$$\xi = - \frac{dU}{ds} \dots \dots \dots (9),$$

wenn mit s die an der betreffenden Stelle zur Niveaufläche senkrechte Richtung bezeichnet wird.

Die Feldstärke ist also auch definiert durch das negative Potentialgefälle senkrecht zu den Niveauflächen.

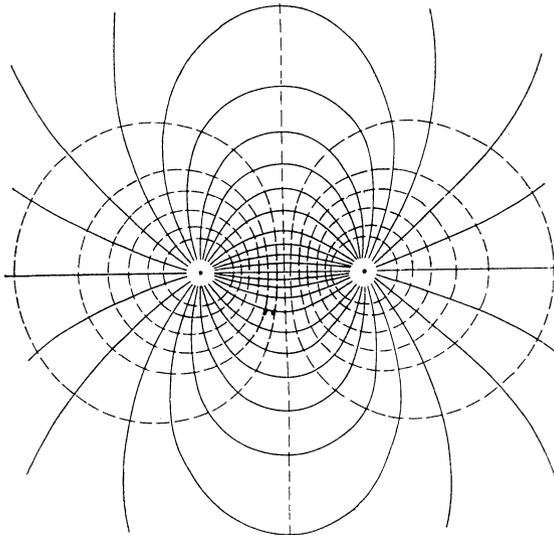


Abb. 19. Kraftlinien und Niveauflächen (gestrichelt) zweier ungleichnamigen Massen von gleicher Größe.

Kennt man die Niveauflächen irgend einer magnetischen oder elektrischen Anordnung, so kann man demnach die Gestalt der Kraftlinien oder die Richtung der Kraft in jedem beliebigen Punkte angeben, und umgekehrt: kennt man die Kraftlinien, so kann man die Niveauflächen einzeichnen. So ergeben sich z. B. die Niveauflächen in Abb. 19 (gestrichelte Linien) aus dem in Abb. 3 dargestellten Kraftlinienbild zweier ungleichnamigen punktförmigen Massen von gleicher Größe.

Abb. 20 zeigt die Kraftlinien und Niveauflächen zweier ungleichnamigen Massen von verschiedener Größe. Wie man sieht, ist die Gestalt der Niveauflächen und Kraftlinien in nächster Nähe jeder der beiden Massen so, als wenn jede allein vorhanden wäre. Dann kommt eine Niveaufläche, die sich in der Mitte zwischen den beiden Massen zu einem Punkte G vereinigt wie zwei mit der Spitze

zusammenstoßende Kegelflächen. Die folgenden Niveauflächen vereinigen sich bereits und umschließen beide Massen. In einer Entfernung, gegen welche der gegenseitige Abstand beider Massen verschwindend klein ist, werden die Niveauflächen zu Kugelflächen wie

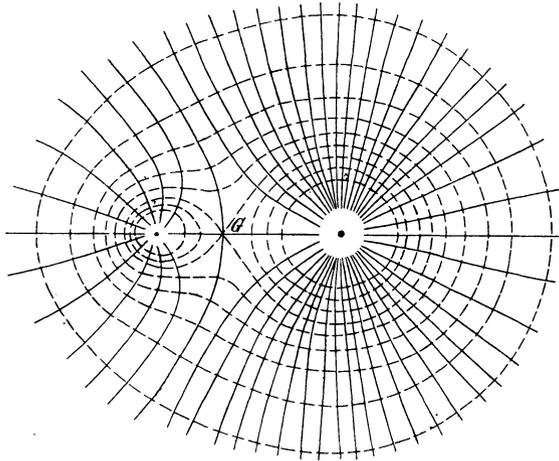


Abb. 20. Kraftlinien und Niveauflächen (gestrichelt) zweier gleichnamigen Massen von verschiedener Größe.

bei einer einzelnen Masse. Im Punkte G herrscht labiles Gleichgewicht. Eine Probemasse in diesem Punkte erfährt keine Kraft, da hier beide Massen gleich stark, aber in entgegengesetzter Richtung wirken.

Betrachten wir zwei Niveauflächen vom Werte U_1 und U_2 ; nach § 12 ist U_1 nichts anderes als die Arbeit bei der Bewegung der Masse 1 vom Unendlichen bis auf die Niveaufläche U_1 , und U_2 nichts anderes als die Arbeit bei der Bewegung der Masse 1 vom Unendlichen bis auf die Niveaufläche U_2 . Mithin ist die Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ nichts anderes als die Arbeit der Bewegung der Masse 1 von der Niveaufläche U_1 bis zur Niveaufläche U_2 . Betrachten wir nun ein Kraftfeld, dessen sämtliche Niveauflächen parallele Ebenen sind, und dessen ganzzahlige Niveauflächen (4, 3, 2, 1) gleichen Abstand l haben (Abb. 21 im Gegensatz zu Abb. 18—20, wo die Abstände der ganzzahligen Niveauflächen immer größer werden), so ist die

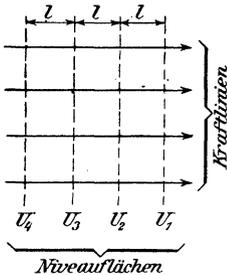


Abb. 21. Homogenes Feld.

Feldstärke zwischen zwei solchen Niveauflächen nach Gl. 9

$$\mathfrak{S} = - \frac{dU}{ds} = - \frac{U_2 - U_1}{l} = - \frac{U_3 - U_2}{l} = \dots$$

d. h., die Feldstärke ist im ganzen Bereich dieses Feldes konstant; mithin ist es (nach der Definition in § 5) ein homogenes Feld. Da nach dem Vorigen die Kraftlinien senkrecht zu den Niveauflächen verlaufen, so sieht man sofort, daß die Kraftlinien in Abb. 21 parallele Geraden sein müssen. Und weil die Kraftliniendichte gleich der Feldstärke ist, diese aber konstant ist, so ist die Kraftliniendichte in einem homogenen Felde konstant, d. h. die Kraftlinien haben gleiche Abstände.

Bei einem homogenen Felde, d. h. bei einem solchen, dessen Feldstärke an allen Stellen gleich ist, sind demnach nicht nur die Kraftlinien parallele Geraden und die Niveauflächen parallele Ebenen, sondern es sind sogar die Abstände der Kraftlinien und die Abstände der aufeinanderfolgenden Niveauflächen gleich¹⁾.

Homogene Felder treten nach § 10 zwischen 2 parallelen Flächen auf, die mit ungleichnamigen Massen von gleichmäßiger Dichte belegt sind. Abb. 22 zeigt die Niveauflächen und Kraftlinien eines solchen Feldes (Kondensatorfeld) entsprechend dem Feilspanbilde in Abb. 6. In der Nähe des Randes und außerhalb dessen ist das Feld nicht mehr homogen.

Gl. 9 kann man auch in der Form schreiben:

$$U = - \int \mathfrak{S} \cdot ds.$$

Man kann also auch sagen, das Potential ist gleich dem negativen Linienintegral der elektrischen bzw. magnetischen Kraft senkrecht zu den Niveauflächen oder in Richtung einer Kraftlinie. Und aus der vorletzten Gleichung folgt, daß eine Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ zwischen 2 Punkten gleich dem Linienintegral der elektrischen bzw. magnetischen Kraft zwischen diesen Punkten ist, oder allgemein

$$U_2 - U_1 = - \int_2^1 \mathfrak{S} \cdot ds.$$

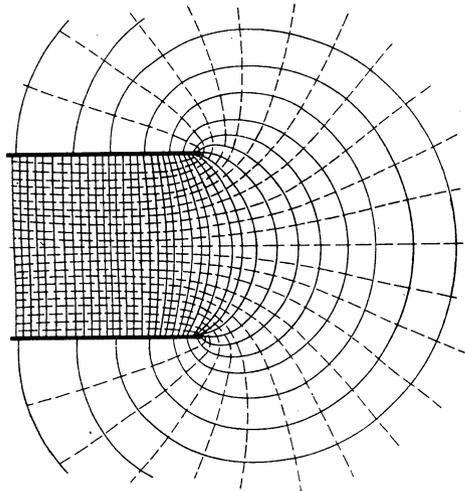


Abb. 22. Kraftlinien und Niveauflächen (gestrichelt) zweier paralleler Ebenen mit entgegengesetzter Ladung.

¹⁾ Kraftfelder, deren Niveauflächen parallele Ebenen mit verschiedenen gegenseitigen Abständen bilden, sind demnach physikalisch unmöglich. Niveauflächen, deren aufeinanderfolgende Abstände verschieden sind, können niemals Ebenen, sondern nur krumme Flächen sein.

Zweites Kapitel.

Grundgesetze der Elektrostatik.

15. Potential auf sich selbst.

Nach § 11 ist der Ausdruck $\frac{m}{r}$ das Potential einer Masse m auf eine in der Entfernung r befindliche Masse 1. Das Potential der gesamten elektrischen Ladung irgend eines Leiters in bezug auf eine der Einheit gleiche Masse von sich selbst nennt man das Potential der Ladung auf sich selbst, oder kurzweg das Potential des Leiters oder auch Selbst-Potential. Es ist dies jene Arbeit, die notwendig ist, um diese Einheit aus unendlicher Entfernung auf diesen Leiter zu bringen. Befindet sich die Ladung im Gleichgewicht, so muß das Selbst-Potential an allen Stellen des Leiters gleich sein; denn wäre dies nicht der Fall, so würde nach § 13 die Elektrizität von den Punkten höheren Potentials zu Punkten kleineren Potentials strömen, so lange, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Die Oberfläche jedes geladenen Leiters muß daher zugleich eine Niveaufläche sein. Da nach § 14 die Kraftlinien an jeder Stelle senkrecht zu den Niveauflächen sind, müssen sie auch senkrecht auf der Oberfläche des Leiters stehen. Beides gilt jedoch nur für elektrische, nicht aber für magnetische Massen, da sich die letzteren auf ihrem Träger nicht bewegen können.

16. Elektrizitätserzeugung. Hypothesen der Elektrizität.

Die einfachste Art der Elektrizitätserzeugung ist die, daß man zwei Körper aus verschiedenem Material miteinander reibt. Hat man auf diese Weise einen geladenen Körper erhalten, so kann man damit unbegrenzte Mengen Elektrizität erzeugen, indem man ihm einen anderen, gut leitenden Körper nähert. Auf der zugewendeten Seite zeigt sich dann eine jenem entgegengesetzte Elektrizitätsmenge, auf der abgewendeten Seite eine gleichnamige. Man nennt diesen Vorgang Elektrisierung durch Verteilung oder Influenz.

Verbindet man diesen influenzierten Leiter mit einem dritten, unelektrischen Leiter, so strömt die gleichnamige Elektrizität auf diesen ab, während die ungleichnamige vermöge der durch das Coulombsche Gesetz ausgedrückten Kraft festgehalten wird. Hebt man die Verbindung mit dem dritten Körper wieder auf und entfernt den influenzierten Körper von dem ersten, so verteilt sich die zurückgebliebene Ladung über den ganzen influenzierten Körper. Diese, sowie die entgegengesetzte Ladung auf dem dritten Körper kann man nun irgendwoandershin ableiten und dann denselben Vorgang mit dem zweiten und dritten Körper wiederholen. Auf diesem Vorgang beruhen alle Influenz-Elektrisiermaschinen. Da jeder der so erzeugten Ladungen eine gewisse Energie darstellt, so entsteht die Frage, wo das nach dem Gesetz von der Erhaltung der Arbeit notwendige Arbeitsäquivalent zu suchen ist. Es besteht in der bei der Entfernung des zweiten, influenzierten Körpers zur Überwindung der elektrischen Anziehungskraft nötigen Arbeit. Darum dreht sich eine Influenz-Maschine schwerer, wenn sie Elektrizität abgibt, als wenn sie leer gedreht wird.

Die Erscheinung der Influenz führt zu der ältesten Hypothese über das Wesen der Elektrizität, nach der man annimmt, daß jeder Körper unbegrenzte Mengen eines positiven und eines negativen Fluidums enthält (dualistische Hypothese). Im influenzierten Körper findet eine Trennung der beiden dadurch statt, daß entsprechend dem Coulombschen Gesetz das ungleichnamige Fluidum angezogen, das gleichnamige abgestoßen wird.

Eine andere Hypothese ist die, daß es nur ein Fluidum gibt, von dem eine gewisse Menge in jedem Körper steckt (unitarische Hypothese). Hat ein Körper mehr von diesem Fluidum als im gewöhnlichen Zustande, so ist er beispielsweise positiv elektrisch; hat er weniger, so ist er negativ elektrisch. Der Vorgang der Influenz erklärt sich nach dieser Hypothese in der Weise, daß ein Teil des im influenzierten Körper vorhandenen Fluidums nach der dem influenzierenden Körper zugewendeten Seite strömt und daher auf dieser Seite ein Überschuß, auf der entgegengesetzten Seite aber ein entsprechender Mangel auftritt.

In neuerer Zeit nimmt man an, daß die Elektrizität — ebenso wie die materiellen Stoffe aus Atomen — aus kleinsten Teilchen bestehe, die man Elektronen nennt, und die mit den Atomen in einer Art chemischer Verbindung stehen. Dabei schwankt man noch ebenso wie früher zwischen der Annahme, ob es zwei verschiedene Arten von Elektronen oder nur eine Art gibt (vgl. § 237).

Ist einer der beiden Körper, der influenzierende oder der influenzierte, leicht beweglich, z. B. an einem isolierenden Seidenfaden aufgehängt, so nähern sich die beiden, weil die ungleichnamige influenzierte Elektrizität näher an dem influenzierenden Körper liegt, als die gleichnamige. Infolgedessen überwiegt nach dem Coulombschen Gesetz die Anziehung über die Abstoßung. Ist kein Hindernis

vorhanden, so nähern sich die beiden Körper mit wachsender Kraft bis zur Berührung. In diesem Augenblick findet ein Ausgleich zwischen den ungleichnamigen Elektrizitäten beider Körper statt, so daß schließlich nur eine Art Elektrizität vorhanden ist. Sind beide Körper gute Leiter, so findet die Verteilung über beide nach dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Satz statt, nämlich so, daß das Potential beider Körper gleich wird. Da sie durch die Berührung gleichnamige Ladung erhalten haben, so tritt jetzt eine Abstoßung zwischen ihnen ein.

Abb. 23 zeigt die Kraftlinien und Niveauflächen, wenn eine leitende Kugel B in das Feld einer punktförmigen Masse m , wie es

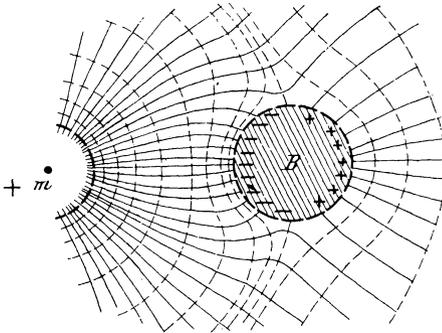


Abb. 23. Kraftlinien und Niveauflächen einer von m beeinflussten Kugel.

durch Abb. 2 dargestellt ist, gebracht wird. Da nach dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Satz die Oberfläche dieser Kugel eine Niveaufläche sein muß, so müssen alle vorher an der Stelle der Kugel vorhandenen Niveauflächen von dieser zurückweichen bis auf eine, die denselben Wert hat, wie die Oberfläche der Kugel, und die vorher durch jene Stelle des Raumes ging, wo sich jetzt der Mittelpunkt dieser Kugel befindet. Wo diese Niveaufläche die Oberfläche der Kugel trifft, befindet sich die Grenze zwischen der ungleichnamigen und gleichnamigen induzierten Elektrizität. Daher

Abb. 24 zeigt die Kraftlinien und Niveauflächen (gestrichelt) zweier ungleichnamigen Ladungen von verschiedener Größe.

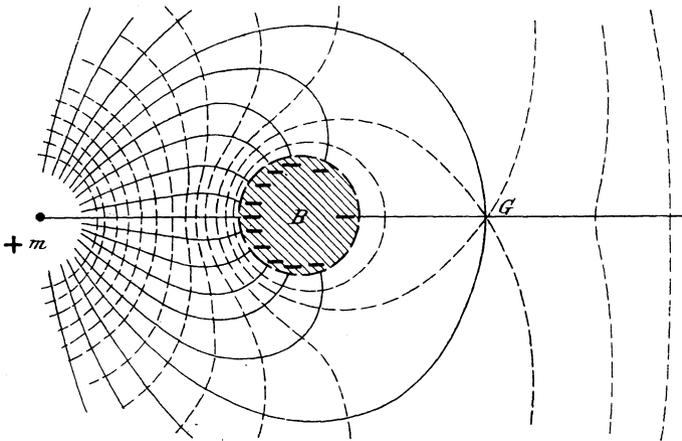


Abb. 24. Kraftlinien und Niveauflächen (gestrichelt) zweier ungleichnamigen Ladungen von verschiedener Größe.

endet ein Teil der von m ausgehenden Kraftlinien auf dem links von dieser Niveaufläche liegenden Teil der Kugeloberfläche, während von dem rechtsliegenden Teil, auf dem die mit m gleichnamige Elektrizität sitzt, neue Kraftlinien ausgehen. Wird nun diese Elektrizität abgeleitet, so daß nur die zu m entgegengesetzte Ladung zurückbleibt, so geht das Kraftfeld über in das durch Abb. 24 dargestellte Feld zweier verschieden großen, ungleichnamigen Ladungen. Es hat ähnlichen Charakter wie das in Abb. 19 dargestellte Feld. Bemerkenswert ist hierbei die Niveaufläche, die die Kugel B umschließt und sich jenseits derselben zum Punkt G zusammenzieht, der ein Punkt labilen Gleichgewichtes ist. Von hier aus bildet sie wieder eine geschlossene Fläche, die nun beide Ladungen umschließt. Auch alle folgenden Niveauflächen umschließen beide Ladungen, weil die induzierende Ladung m größer ist als die auf B induzierte und daher überwiegt. Nur wenn entgegengesetzte Ladungen genau gleich groß sind (Abb. 19), gibt es keine Niveauflächen, die beide umschließen, weil keine Ladung überwiegt.

17. Verteilung der Elektrizität auf Leitern und auf Isolatoren.

Befindet sich eine elektrische Ladung auf einem Leiter im Gleichgewicht, so muß ihre Verteilung eine solche sein, daß auf keinen Punkt im Innern des Leiters eine elektrische Kraft ausgeübt wird. Denn wäre eine solche Kraft an irgendeiner Stelle vorhanden, so würde hier Elektrizität durch Influenz erzeugt werden und eine Bewegung derselben so lange stattfinden, bis das Gleichgewicht hergestellt ist, d. h. bis diese Kraft wieder verschwunden ist. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob sich Elektrizität nur auf dem betreffenden Leiter selbst oder auch auf anderen benachbarten Leitern befindet.

Dasselbe ergibt sich aus dem in § 15 gewonnenen Satz, wonach das Potential eines Leiters in allen Punkten dasselbe ist. Da die elektrische Kraft gleich dem negativen Differentialquotienten des Potentials ist, und der Differentialquotient einer nach allen Richtungen konstanten Größe null ist, so ist auch die Kraft nach jeder beliebigen Richtung im Innern des Leiters null. Daraus folgt, daß die von einem geladenen Leiter ausgehende Kraft nur nach außen wirken kann. Ferner folgt daraus, daß sich keine Elektrizität im Innern eines Leiters, sondern nur in einer sehr dünnen Schicht auf der Oberfläche befinden kann. Denn gäbe es irgendwo im Innern elektrische Massen, so müßten zwischen diesen und den auf der Oberfläche befindlichen Kräfte auftreten.

Diese Sätze sind durch sorgfältige experimentelle Untersuchungen Faradays bestätigt worden. Der bemerkenswerteste dieser Versuche ist folgender. Führt man einen geladenen Leiter an einer isolierenden Handhabe in das Innere eines genügend tiefen, leitenden Hohlzylinders ein und berührt damit die innere Fläche, so gibt er seine

ganze Ladung an den Zylinder ab, und sie findet sich dann nur auf der äußeren Oberfläche des Zylinders vor, während auf der inneren keine Spur einer Ladung nachzuweisen ist. Hätte man den geladenen Leiter von außen mit dem Zylinder in Berührung gebracht, so hätte er nur einen Teil seiner Ladung abgegeben, nämlich nur so viel, um auf beiden Leitern gleiches Potential herzustellen.

Wenn es im Innern eines Leiters keine elektrische Kraft gibt, kann es da auch keine Kraftlinien geben. Sie beginnen oder endigen immer in der auf der Oberfläche des Leiters sitzenden Ladung. Und da schließlich alle elektrischen Kräfte von irgendwelchen Ladungen herrühren, so folgt, daß die elektrischen Kraftlinien überhaupt keine geschlossenen Linien sein können, sondern daß sie immer einen Anfang und ein Ende auf irgend zwei Ladungen haben¹⁾. Dabei ist es gleichgültig, ob die Ladungen ruhen oder sich bewegen, weil die elektrischen Kräfte unter allen Umständen bestehen. Elektrische Kraftlinien gehen also auch von den elektrischen Strömen aus. Sie beginnen auf einem positiven und endigen auf einem negativen Leitungsdraht (vgl. Abb. 276).

Für magnetische Kraftlinien gelten diese Schlüsse nicht, da die magnetischen Körper auch im Innern magnetische Massen haben. Desgleichen gelten sie nicht für solche Körper, auf denen sich die Elektrizität nicht frei bewegen kann, also für Isolierstoffe. Denn wenn sich die elektrischen Massen nicht bewegen können, so verbleiben sie an ihren Stellen auch dann, wenn Kräfte auf sie wirken. Aus demselben Grunde kann auf solchen Körpern auch keine freie Ladung influenziert werden. Infolgedessen ist das Potential im Innern eines Isolierstoffes nicht konstant, die Kraftlinien können auf einem solchen nicht anfangen oder enden, sondern gehen durch ihn hindurch. Nur infolge dieses Umstandes ist es möglich, die Kraftlinien in Luft oder in einer isolierenden Flüssigkeit sichtbar darzustellen, wie in Abb. 4. Darum nennt man einen isolierenden Stoff auch Diëlektrikum oder einfacher Diëlektrik. Streng genommen, gibt es allerdings keine vollkommenen Isolatoren, denn unter dem Einfluß sehr starker Kräfte tritt auch in den besten Isolatoren, wie Gummi, Glimmer, Glas, Porzellan, eine langsame Bewegung der Elektrizität auf. Infolgedessen erscheinen freie Ladungen im Innern und an der Oberfläche (Grenzfläche) solcher Stoffe. In diesen Ladungen beginnen oder endigen eine entsprechende Anzahl elektrischer Kraftlinien, während andere an ihnen vorbeigehen, um irgendwoanders (auf den influenzierenden Ladungen) zu endigen bzw. zu beginnen.

¹⁾ Das elektrische Feld ist also immer ein lamellares oder wirbelfreies. Tatsächlich ist es noch nie gelungen, elektrische Kraftlinien, die in sich geschlossen sind wie magnetische Kraftlinien, irgendwie nachzuweisen. Daher sind Behauptungen, daß es solche elektrische Kraftlinien geben müsse, nur Fiktionen, die mit der physikalischen Wirklichkeit in Widerspruch stehen (vgl. auch § 117 u. 171).

18. Elektrostatische Schirmwirkung.

Das im Vorigen gewonnene Gesetz, daß auf das Innere eines leitenden Körpers keine elektrische Kraft wirken kann, hat eine für die Praxis wichtige Folge. Bringt man in das Innere eines hohlen Leiters einen anderen, so kann auf diesen keine Elektrizität durch Influenz von außen her erzeugt werden, weil eben keine Kraft auf ihn wirkt, die die Verteilung der Elektrizität bewirken würde.

Die äußere Oberfläche eines Leiters wirkt auf den ganzen inneren Raum wie ein Schirm. Versuche haben gezeigt, daß dies auch dann noch gilt, wenn der schirmende Leiter nicht aus einer geschlossenen Fläche, sondern aus einem engmaschigen leitenden Gitter besteht. Der Grund liegt darin, daß die auf den Drähten des Gitters influenzierte Elektrizität die äußeren Kraftlinien an sich heranzieht, wie Abb. 25 zeigt, so daß keine übrig bleiben, die in das Innere gelangen könnten. Nur wenn die Maschen so weit sind, daß nicht alle Kraftlinien an die

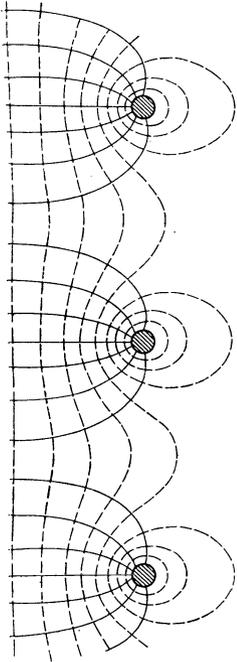


Abb. 25. Schirmwirkung eines Drahtgitters.

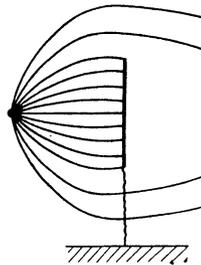


Abb. 26. Schirmwirkung einer zur Erde abgeleiteten Fläche.

Drähte des Gitters herangezogen werden, gelangen einzelne in das Innere. — Für die Schirmwirkung genügt auch schon eine zylindrische Fläche oder ein zylindrisches Gitter, wenn es so aufgestellt ist, daß alle Kraftlinien die Mantelfläche treffen und nicht durch die offenen Basisflächen in das Innere eintreten können. Solche Schirme werden angewendet, wenn man z. B. beim Experimentieren einen Körper vor elektrischen Kräften schützen will, sowie als Schutz gegen atmosphärische Entladungen¹⁾.

¹⁾ Solche Schutzgitter sind zuerst von der österreichischen technischen Militärverwaltung zum Schutz von Wachhäusern und Pulvertürmen in dem häufigen atmosphärischen Entladungen ausgesetzten Karstgebiete angewendet und vom Elektrotechnischen Vereine zum Schutze von Sprengstoffabriken und -Lagerhäusern empfohlen werden. ETZ 1904, S. 885; 1906, S. 576.

Eine Schirmwirkung nach einer Seite wird auch von einer vollen oder gegitterten leitenden Fläche ausgeübt, wenn sie zur Erde abgeleitet ist. Die Kraftlinien, die z. B. von einer positiven Ladung ausgehen und von links auf diese Fläche treffen (Abb. 26), induzieren auf ihrer linken Seite eine negative Ladung. In dieser finden die Kraftlinien ihr Ende. Der Raum rechts von der Fläche ist demnach frei von Kraftlinien. Wäre aber die Fläche nicht mit der Erde verbunden, so wäre eine gleichgroße positive Ladung auf der rechten Seite der Fläche vorhanden und würde Kraftlinien nach rechts aussenden.

19. Potential einer geladenen Kugel auf sich selbst und auf einen äußeren Punkt.

Befindet sich eine mit der Elektrizitätsmenge Q geladene¹⁾, leitende Kugel außerhalb des Bereiches aller anderen elektrischen Massen, so muß die Dichte der auf der Oberfläche sitzenden Elektrizität an allen Stellen dieselbe sein, weil eine Kugel ein nach allen Richtungen symmetrisches Gebilde ist. Da das Potential der Ladung auf alle Punkte der Kugel dasselbe ist, so muß dies auch vom Mittelpunkt gelten. Ist σ die Ladung auf der Flächeneinheit, also die Flächendichte, so ist das Potential derselben auf den Mittelpunkt $\frac{\sigma}{r}$ wenn r der Radius der Kugel ist. Da alle Teilchen der Ladung gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind, und die Potentiale mehrerer Massen ohne weiteres addiert werden können (§ 12), so ist das Potential U der gesamten Ladung Q auf den Mittelpunkt: $U = \frac{Q}{r}$, und das ist zugleich das Potential der Kugelladung auf sich selbst.

Infolge der allseitigen Symmetrie einer gleichmäßig geladenen Kugel ist nicht nur die Oberfläche, sondern auch jede andere die Kugel konzentrisch umschließende Kugelfläche eine Niveaufläche. Daran ändert sich nichts, wenn wir uns die Kugel mit ihrer Ladung zu einer kleineren Kugel zusammengeschrumpft denken. Die frühere Oberfläche ist jetzt auch eine Niveaufläche. Schließlich können wir uns die Kugel ganz in ihrem Mittelpunkt zusammengeschrumpft denken, wo nun die ganze Ladung Q sitzt. An den äußeren Niveauflächen der früheren Kugel ist dadurch nichts geändert worden und daher ist das Potential der geladenen Kugel auf einem äußeren Punkt so, als ob die Ladung im Mittelpunkt konzentriert wäre, also gleich $\frac{Q}{a}$, wenn a der Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkt ist.

¹⁾ In der Elektrostatik wird die auf einem Leiter sitzende elektrische Masse gewöhnlich „Ladung“ Q genannt. Es gilt dafür alles, was im 1. Kapitel über eine dem Coulombschen Gesetz unterworfenen Masse m gesagt wurde.

Die Feldstärke in diesem Punkte ist $\mathfrak{S} = -\frac{dU}{da} = \frac{Q}{a^2}$. Und weil nach obigem $Q = rU$, so ist $\mathfrak{S} = \frac{rU}{a^2}$.

Da die Oberfläche einer Kugel gleich $4\pi r^2$ ist, so ist die ganze Ladung derselben $Q = 4\pi r^2\sigma$, und $U = 4\pi r\sigma$. Mithin $\mathfrak{S} = \frac{4\pi r^2\sigma}{a^2}$. Für die Oberfläche oder ihre unmittelbare Nähe ist $a = r$, also $\mathfrak{S} = 4\pi\sigma$. Das steht in Übereinstimmung mit dem auf S. 16 erhaltenen Satz, daß sich beim Durchgang durch eine mit der Flächendichte σ versehene Fläche die Feldstärke um $4\pi\sigma$ ändert. Da die elektrische Feldstärke im Innern eines Leiters Null, außen aber $4\pi\sigma$ ist, so ist eben die Änderung gleich $4\pi\sigma$.

Da eine gleichmäßige Kugelladung so wirkt, als ob sie im Mittelpunkt vereinigt wäre, wirkt auch eine gleichmäßige Ladung eines Zylinders so, als ob sie in gleichmäßiger linearer Verteilung auf der Achse säße¹⁾.

Ist Q die Ladung, so gehen $4\pi Q$ Kraftlinien vom Zylinder aus (§ 6) und sind gleichmäßig verteilt, wenn keine störenden Einflüsse vorhanden sind. Denkt man sich eine diesen Zylinder konzentrisch umschließende Zylinderfläche mit dem Radius a , so ist ihr Flächeninhalt $2\pi al$, wenn l die Länge bedeutet. Mithin ist die Kraftliniendichte oder Feldstärke \mathfrak{S} im Abstände a von der Achse: $\mathfrak{S} = \frac{4\pi Q}{2\pi al} = \frac{2Q}{al}$. Ist U das Potential der Ladung, so ist (§ 14)

$\mathfrak{S} = -\frac{dU}{da}$. Mithin $U = -\int \frac{2Q}{al} da = -\frac{2Q}{l} \log \text{nat } a + c$, wobei c die Integrationskonstante ist. Zu ihrer Bestimmung nehmen wir an, daß U in genügend großer Entfernung Null ist. Diese Entfernung wird offenbar um so größer angenommen werden müssen, je länger der Zylinder ist. Im Abstände l wird das annähernd gelten²⁾. Dann ist $0 = -\frac{2Q}{l} \log \text{nat } l + c$. Somit ist

$$U = -\frac{2Q}{l} \log \text{nat } a + \frac{2Q}{l} \log \text{nat } l = \frac{2Q}{l} \log \text{nat } \frac{l}{a}.$$

Das Potential der Ladung auf sich selbst ist an allen Stellen des Zylinders gleich und ergibt sich aus $a = r$ zu:

$$U = \frac{2Q}{l} \log \text{nat } \frac{l}{r}.$$

¹⁾ Streng genommen gilt das nur, wenn man von der Ladung auf den Endflächen des Zylinders absieht, oder von einem im Verhältnis zum Durchmesser sehr langen Zylinder (Leitungsdraht). Es sei hier gleich bemerkt, daß auch ein elektrischer Strom in einem zylindrischen Leiter so nach außen wirkt, als wenn er in der Achse konzentriert wäre.

²⁾ In diesem Verfahren zur Bestimmung der Integrationskonstante c liegt eine gewisse Willkür. In praktischen Fällen endigen die vom Zylinder ausgehenden Kraftlinien entweder auf benachbarten Leitern oder auf der Erde. Im letzteren Falle gilt also die in Abb. 31 dargestellte Anordnung mit den entsprechenden Formeln auf S. 41 und 51.

20. Abhängigkeit der elektrischen Dichte vom Krümmungsradius. Spitzenwirkung.

Werden zwei geladene, leitende Kugeln durch einen dünnen Draht verbunden (Abb. 27), so stellt sich nach § 15 das elektrische Gleichgewicht derart her, daß das Potential beider Kugeln gleich ist. Ist Q die Elektrizitätsmenge auf der einen, Q' die auf der anderen Kugel, so ist demnach $U = \frac{Q}{r} = \frac{Q'}{r'}$;

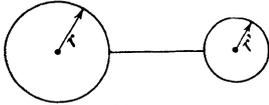


Abb. 27.

d. h. die Ladungen verteilen sich so zwischen den beiden Kugeln, daß die Elektrizitätsmengen sich so verhalten wie die Radien.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$Q = rU \quad \text{und} \quad Q' = r'U.$$

Da die Oberfläche der einen Kugel $4\pi r^2$, die der anderen $4\pi r'^2$ ist, so ist die Flächendichte der elektrischen Ladung auf der einen

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{r}{4\pi r} \quad \text{und auf der anderen} \quad \sigma' = \frac{Q'}{4\pi r'^2} = \frac{r'}{4\pi r'}.$$

Mithin

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{r'}{r}$$

d. h. die Dichten verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Daraus folgt, daß auf irgendeinem anders geformten Körper die elektrische Dichte dort am größten ist, wo der Krümmungsradius am kleinsten ist. Hat der Leiter eine Spitze, so muß demnach die Dichte am äußersten Ende der Spitze theoretisch unendlich groß, praktisch jedenfalls sehr groß sein.

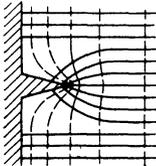


Abb. 28. Kraftlinien und Niveauflächen bei einer leitenden Spitze.

Da die Feldstärke in unmittelbarer Nähe einer geladenen Oberfläche nach § 10 gleich $2\pi\sigma$ und andererseits nach § 14 gleich dem negativen

Potentialgefälle $-\frac{dU}{ds}$ ist, so folgt, daß auch

das Potentialgefälle gegenüber einer Spitze am größten ist. d. h., daß die Niveauflächen hier am dichtesten an die Oberfläche herantreten, wie Abb. 28 zeigt. Daraus folgt weiter, daß in

der Spitze verhältnismäßig am meisten Kraftlinien zusammenlaufen und in ihrer Nähe am stärksten konvergieren müssen.

21. Kapazität.

Ebenso wie ein Gefäß ein bestimmtes Fassungsvermögen für irgendein Gas hat, so besitzt auch jeder Leiter ein bestimmtes

Fassungsvermögen für Elektrizität. Man nennt es die Kapazität des Körpers.

So wie die von einem Gefäß aufgenommene Gasmenge dem Druck, unter dem es steht, proportional ist, ist auch die auf einem Leiter befindliche Elektrizitätsmenge dem Potential proportional; also

$$Q = CU \dots \dots \dots (10)$$

Mithin ist C die Kapazität des Leiters. Setzt man $U = 1$, so ist $C = Q$. Das heißt: Die Kapazität eines Leiters ist ausgedrückt durch jene Elektrizitätsmenge, die nötig ist, um ihn auf das Potential Eins zu bringen.

Nach § 6 ist die von einer Elektrizitätsmenge ausgehende Kraftlinienmenge gleich dem 4π -fachen derselben. Mithin ist

$$4\pi Q = 4\pi CU = \mathfrak{Z},$$

wenn \mathfrak{Z} die gesamte von dem Leiter ausgehende Kraftlinienmenge bedeutet. Daraus folgt

$$C = \frac{\mathfrak{Z}}{4\pi U} \dots \dots \dots (11)$$

Die Kapazität eines Leiters ist also proportional der von ihm ausgehenden Kraftlinienmenge.

Die Kapazität ist abhängig von der Größe und Gestalt des Leiters. Für eine Kugel kann man sie leicht angeben, wenn man Gl. 10 mit der in § 19 ($Q = rU$) vergleicht. Man sieht, daß $C = r$ ist, d. h., die Kapazität einer Kugel ist gleich ihrem Radius. Drückt man den Radius in Zentimetern aus, so erhält man die Kapazität in absoluten elektrostatischen Einheiten. Die üblichen praktischen Einheiten der Elektrotechnik sind das Farad und das Mikrofarad. 1 Farad = $9 \cdot 10^{11}$ absoluten elektrostatischen Einheiten. 1 Mikrofarad = $9 \cdot 10^5$ absoluten elektrostatischen Einheiten (vgl. § 300).

Aus dem auf S. 31 berechneten Selbstpotential U eines Kreiszyinders, dessen Länge l groß ist gegenüber dem Radius r (Leitungsdraht), ergibt sich nach obiger Definition seine Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{l}{r}}$$

Bei den Rechnungen der drahtlosen Telegraphie wird für die Kapazität eines auf der Erde senkrecht stehenden Leiters die Formel

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{2l}{r}}$$

benutzt.

Die Kapazität einer kreisförmigen Scheibe vom Radius r , auf deren beiden Seiten Elektrizität sitzt, ist:

$$C = \frac{2r}{\pi} = \frac{r}{1,57}$$

Für Rotationsellipsoide gelten folgende Formeln, wenn die beiden Achsen mit a und b , die Exzentrizität $\frac{|a^2 - b^2|}{a^2}$ mit g bezeichnet wird. Es ist dann für ein Rotationsellipsoid, entstanden durch Rotation um die große Achse:

$$C = \frac{2ag}{\log \operatorname{nat} \frac{1+g}{1-g}}$$

und für das Rotationsellipsoid um die kleine Achse

$$C = \frac{ag}{\operatorname{arc} \sin g}.$$

Befinden sich diese Leiter nicht in Luft, sondern in einem Dielektrikum von der Konstante ϑ , so sind diese Formeln noch mit ϑ zu multiplizieren (vgl. § 27).

Über die Kapazität von Kondensatoren vgl. § 26.

22. Potential und Kapazität der Erde.

Die Kapazität der Erde, als leitende Kugel betrachtet, ist gleich ihrem Radius. Demnach ist ihre Kapazität gegenüber allen unseren Apparaten so groß, daß man sie ohne weiteres als unendlich groß annehmen kann. Wenn man eine elektrische Ladung, wie man sie im Laboratorium herstellt, der Erde zuführt, so ist dies ebenso, als würde man ein Glas Wasser ins Meer schütten.

Die Erde besitzt jedoch, wie unzweifelhaft nachgewiesen ist, ein gewisses Potential und daher auch eine Ladung¹⁾. Daß wir da-

¹⁾ Ist σ die Flächendichte der Erdladung, so ist diese $Q = 4\pi r^2 \sigma$, weil $4\pi r^2$ die Oberfläche einer Kugel ist. Die Feldstärke an der Oberfläche ist nach § 19 $\mathfrak{E} = 4\pi\sigma$. Infolge des riesigen Radius der Erde kann man in einer Ebene das Potentialgefälle bis zu 10 m über der Erde als konstant betrachten. Mißt man also die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten in senkrechtem Abstände mittels eines in Volt geeichten Elektrometers (Abb. 29 oder 30) und mittels Flammen- oder Tropfelektroden, so erhält man \mathfrak{E} . Dieses ist im Durchschnitt gleich 1 Volt = $\frac{1}{300}$ ESE (§ 300) für 1 cm. Mithin ist

$$\sigma = \frac{1}{300 \cdot 4\pi} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ ESE}.$$

Der Radius der Erde in Zentimetern ist rund $64 \cdot 10^7$. Daher ist die ganze Ladung der Erde

$$Q = 4\pi (64 \cdot 10^7)^2 2,6 \cdot 10^{-4} = 13 \cdot 10^{14} \text{ ESE} = 43 \cdot 10^4 \text{ Coulomb (§ 300)},$$

und das Potential

$$U = \frac{Q}{r} = \frac{13 \cdot 10^{14}}{64 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^6 \text{ ESE} = 6 \cdot 10^8 \text{ Volt}.$$

Die Erdladung hat sich als negativ erwiesen.

Die vorstehende Berechnung setzt allerdings voraus, daß die Flächendichte der Ladung gleichmäßig ist, was wegen der Unebenheiten und wegen der in höheren Schichten der Atmosphäre nachweisbaren positiven Ladungen nur angenähert zutrifft. Diese positiven Ladungen außerhalb der Erde legen den Schluß nahe, daß diese Ladungen und die negative Ladung der Erde

von nichts merken, kommt daher, daß wir uns in unmittelbarer Nähe der Erde befinden und daher dasselbe Potential haben wie sie. Eine Ladung wird aber nur dann bemerkbar, wenn ein Unterschied gegen eine andere Ladung, also eine Potentialdifferenz besteht.

Wir nehmen daher das Potential der Erde als den Nullwert des Potentials an und beziehen alle anderen darauf, ebenso wie wir die Meeresoberfläche als Nullpunkt für die Bodenerhebungen und den Gefrierpunkt als Nullpunkt für die Temperaturmessung annehmen. Die Definition des Potentials als Arbeitswert (§ 11, 15) ist jetzt dahin abzuändern, daß es jene Arbeit darstellt, die notwendig ist, um eine gleichnamige Masse 1 von der Erde aus an die betreffende Stelle oder auf den betreffenden Leiter zu bringen. Ein positives Potential hat dann jeder Körper, der ein größeres Potential besitzt als die Erde; wir sagen kurz: er ist positiv geladen. Ein negatives Potential besitzt jeder Körper, der ein kleineres Potential besitzt als die Erde; wir sagen kurz: er ist negativ geladen. Das Potential U eines Körpers ist nun also gleich der Potentialdifferenz gegen Erde.

Wird ein Leiter mit einem Pol einer Stromquelle, deren elektromotorische Kraft E ist, verbunden, während der andere Pol mit der Erde verbunden ist, so ist sein Potential $U - 0 = U = E$.

23. Elektroskop, Elektrometer.

Zur Vergleichung des Potentials (Messung der Potentialdifferenz) dient das Elektroskop, das aus zwei an einem Draht befestigten Streifen von Blatt-Gold oder Blatt-Aluminium besteht (Abb. 29), die zum Schutz gegen Luftzug in einem Glasgefäße eingeschlossen sind. Die durch den herausragenden Draht der beiden Blättchen zugeführte Ladung bringt eine Divergenz der Blättchen infolge gegenseitiger Abstoßung hervor, die um so größer ist, je größer die zugeführte Elektrizitätsmenge ist. Da die Kapazität der Blättchen konstant ist, so ist nach Gl. 10 diese Elektrizitätsmenge proportional dem Potential desjenigen Leiters, von dem die Blättchen ihre Ladung erhalten. Die Divergenz der Blättchen ist also ein Maß für das Potential des Leiters, mit dem man das Elektroskop in Berührung gebracht hat. Das gilt aber nur, wenn sich in der Nähe des Elektroskops keine Ladung befindet, die einen Einfluß auf die Blättchen ausüben kann. Insbesondere darf auf dem Glasgehäuse des Elektro-

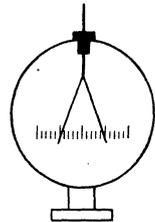


Abb. 29. Goldblattelektroskop.

dadurch entstanden sind, daß durch radioaktive Stoffe, ultraviolette Lichtstrahlen u. dgl. eine Ionisierung neutraler Atome (§ 242) und Auseinanderführung der $+$ und $-$ Ionen stattfindet. Ist auf solche Weise die Potentialdifferenz zwischen Erde und einer Atmosphärenschicht sehr groß geworden, so findet durch atmosphärische Entladungen ein Ausgleich statt.

skops keine Ladung sitzen. Da dies im allgemeinen schwer zu erreichen ist, macht man den Mantel des Gehäuses aus Metall und verbindet ihn mit der Erde. Die Divergenz der Blättchen hängt dann ab von ihrem Potential, bezogen auf das Nullpotential der Erde. Bringt man die Blättchen mit einem Körper vom Potential U_1 und das Gehäuse mit einem Potential U_2 in Verbindung, so hängt die Divergenz von der Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ ab. Potentialdifferenzen in einem bestimmten Maßsystem kann man leicht durch galvanische Zellen oder elektrische Maschinen herstellen; man ist dadurch in der Lage, ein Elektroskop empirisch zu eichen. Um die Divergenz der Blättchen ablesen zu können, bringt man auf der vorderen Glasplatte eine Skala an. Die Rückwand trägt zweckmäßigerweise einen Spiegel, um die Blättchen auf ihr Spiegelbild projizieren zu können und so eine schiefe Ablesung zu vermeiden.



Abb. 30. Elektrometer nach Braun.

Abg. 30 zeigt ein ähnliches Instrument, das Braunsche Elektrometer (ausgeführt von Günther & Tegetmeyer, Braunschweig), das sich für größere Potentialdifferenzen eignet. Es besteht aus einem doppelarmigen, um die Mitte drehbaren Aluminiumstreifen. Die untere Hälfte ist etwas schwerer als die obere, so daß sich der Streifen lotrecht einstellt. Die Achse des Streifens wird von dem durch die Mitte des Gehäuses gehenden, isolierten Metallstab getragen. Wird diesem von oben eine Ladung zugeführt, so teilt sie sich durch die Achse dem Streifen mit, dessen oberer und unterer Teil infolgedessen von dem Stabe abgestoßen wird. Der Streifen stellt sich mithin um so schräger ein, je größer das Potential der zugeführten Ladung, bzw. die Potentialdifferenz zwischen ihr und dem Gehäuse ist.

24. Oberflächenspannung einer elektrischen Ladung.

In § 11 haben wir gefunden, daß die Kraft, die zwischen der mit der Dichte σ geladenen Oberfläche eines Leiters und einer in unmittelbarer Nähe befindlichen elektrischen Masse m wirkt, $F = 2\pi\sigma m$ ist. Haben σ und m gleiches Vorzeichen, so wird m abgestoßen, Setzt man für m die Elektrizitätsmenge ein, die auf der Flächeneinheit des Leiters selbst sitzt, das ist die Flächendichte σ , so ist

$$F_{ol} = 2\pi\sigma^2 \dots \dots \dots (12)$$

Das ist also die Kraft, die von der Ladung eines Leiters auf jede Flächeneinheit dieser Ladung selbst ausgeübt wird. Da nach § 17 auf das Innere eines Leiters keinerlei Kraft wirken kann, so muß F_{ob} nach außen wirken, und zwar an jeder Stelle senkrecht zur Oberfläche, da nach § 14 die Oberfläche eines Leiters eine Niveauläche ist. Die Ladung eines Leiters wirkt mithin so, wie eine nach außen drückende Oberflächenspannung. Elektriziert man eine Seifenblase, so dehnt sie sich dementsprechend aus.

Ist die Flächendichte σ sehr groß, so kann diese abstoßende Kraft der Ladung auf ihre eigenen Elektrizitätsteilchen so stark werden, daß sie auf den umgebenden Isolierstoff (Luft) übergehen. Ist diese Erscheinung noch schwach, so nennt man sie Zerstreuung der Elektrizität, ist sie stark, so spricht man von Entladung. Besondere Umstände begünstigen das. (§ 244, 246.)

Zahlenbeispiel. Eine leitende Kugel von 5 cm Radius werde mit einer Elektrizitätsquelle von 3000 Volt Spannung gegen Erde verbunden. Da eine absolute Einheit gleich 300 Volt ist (§ 300), so sind dies 10 absolute Einheiten. Nach § 21 ist die Elektrizitätsmenge auf der Kugel $Q = rU = 5 \cdot 10 = 50$ absol. Einheiten. Die Oberfläche der Kugel ist $4\pi r^2 = 314 \text{ cm}^2$. Daher die elektrische Dichte auf der Kugel $\sigma = \frac{50}{314} = 0,16$. Wird die Kugel mit einer kurzen Spitze versehen, deren äußerster Krümmungsradius 0.001 cm ist, so ist nach § 20 die elektrische Dichte an der Spitze $\sigma = \sigma' \frac{r}{r'} = 0,16 \frac{5}{0,001} = 80$. Daher wäre die Oberflächenspannung an dieser Spitze $F_{ob} = 2 \cdot 3,14 \cdot 80^2 = 40000 \text{ Dyn}$ $= \frac{40000}{980} = 41$ Grammgewicht, wenn die Spitze eine Oberfläche von 1 cm² hätte. Da sie aber entsprechend dem angenommenen Radius nur ungefähr 0,000001 cm² Fläche hat, ist der Druck der Ladung nach außen ungefähr 0,000041 Grammgewicht.

25. Einfluß eines benachbarten mit der Erde verbundenen Leiters.

Nach § 15 ist das Potential eines geladenen Leiters jene Arbeit, die geleistet werden muß, wenn man die Elektrizitätsmenge 1 aus unendlicher Entfernung oder von der Erde aus auf diesen Leiter bringt.

Wir setzen den Fall, daß sich in der Nähe eines positiv geladenen Körpers ein anderer, negativ geladener befindet. Wenn wir nun eine positive Elektrizitätsmenge 1 von der Erde aus heranbringen, so wird uns dabei die von dem negativ geladenen Körper ausgehende Anziehung auf diese Elektrizitätsmenge unterstützen. Wir werden infolgedessen weniger Arbeit zu leisten haben; d. h. durch die Anwesenheit des negativen Körpers ist das Potential des positiven erniedrigt worden. Dasselbe gilt natürlich auch für den negativen Körper; auch sein Potential ist durch die Nachbarschaft des positiven erniedrigt worden.

Eine derartige Anordnung kann man am leichtesten dadurch herstellen, daß man in die Nähe eines geladenen Leiters einen anderen bringt, der zur Erde abgeleitet ist. In diesem wird eine entgegengesetzte Ladung induziert, während eine gleich große gleichnamige zur Erde abströmt. Wir haben also zwei entgegengesetzt geladene Körper, für die das oben Gesagte gilt. Die günstigste Anordnung wird natürlich die sein, wo die beiden Leiter möglichst nahe beieinander sind und möglichst große Oberflächen haben; also parallele Flächen wie z. B. 2 konzentrische Hohlkugeln, 2 konaxiale Zylinder, oder 2 ebene parallele Platten. Man nennt solche Anordnungen Kondensatoren, da jede der beiden Flächen jetzt mehr Elektrizität aufnehmen kann als für sich allein. Der Grund dafür liegt in der eben geschilderten Erniedrigung des Potenciales; denn nach § 21 ist die Kapazität einer der beiden Flächen $C = \frac{Q}{U}$.

Wird nun durch die Anwesenheit der zweiten Platte U kleiner, so ist bei gleicher Elektrizitätsmenge der Wert des Bruches größer. Die Kapazität ist also größer geworden, und man muß jetzt, um wieder das Potential U zu erreichen, mehr Elektrizität zuführen¹⁾.

Die Ladung der beiden Leiter mit entgegengesetzten Elektrizitäten kann natürlich auch dadurch geschehen, daß man sie mit den beiden Polen einer Stromquelle verbindet. Diese liefert dann so viel Elektrizität, als nötig ist, um jeden Leiter auf dasselbe Potential zu bringen wie die entsprechenden Pole der Stromquelle. Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten ist dann gleich der elektromotorischen Kraft der Stromquelle E .

Im allgemeinen ist jede Anordnung von zwei aufeinander einwirkenden Leitern, die sich auf verschiedenen Potentialen befinden, ein Kondensator.

26. Kondensatoren.

Die Kapazität eines Kondensators, der aus zwei gleich großen parallelen Platten besteht, läßt sich leicht berechnen, wenn ihre Innenflächen mit gleich großen, entgegengesetzten Ladungen

¹⁾ Die Abnahme des Potenciales bei gleichbleibender Elektrizitätsmenge kann man zeigen, wenn man eine Platte mit einem Elektroskop verbindet und entfernt von der anderen lädt. Nähert man nun die zweite zur Erde abgeleitete Platte, so wird der Ausschlag kleiner. Die Fähigkeit, bei konstantem Potential eine größere Elektrizitätsmenge aufzunehmen, also die Vergrößerung der Kapazität, kann man dadurch zeigen, daß man die eine Platte entfernt von der anderen mit einer Elektrizitätsquelle von bestimmtem Potentiale verbindet, also etwa mit einem Pole eines galvanischen Elementes, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Die Elektrizitätsmenge, die der Platte zuströmt, kann man an dem Ausschlag eines empfindlichen Galvanometers ersehen. Macht man nun denselben Versuch, nachdem die andere zur Erde abgeleitete Platte genähert wurde, so ist dieser Ausschlag größer.

versehen sind¹⁾, denn dann ist das Feld zwischen ihnen ein homogenes und die Flächendichte der Elektrizität auf beiden gleich groß. Sie ist auch an allen Stellen jeder Platte dieselbe, wenn wir von den Rändern absehen. Die Feldstärke zwischen den Platten ist also nach Gl. 6

$$\xi = 4\pi\sigma.$$

Andererseits ist die Feldstärke in einem homogenen Felde (§ 14)

$$\xi = \frac{U_2 - U_1}{a},$$

wenn U_2 das Potential der einen, U_1 das der anderen Platte und a ihr gegenseitiger Abstand ist. Mithin

$$\sigma = \frac{U_2 - U_1}{4\pi a} \dots \dots \dots (13)$$

Ist S die Fläche jeder der beiden Platten, so ist die Ladung auf der einen

$$Q = \sigma S = \frac{U_2 - U_1}{4\pi a} S,$$

auf der anderen

$$Q = -\sigma S = -\frac{U_2 - U_1}{4\pi a} S.$$

Das Verhältnis der Ladung Q auf einer der Platten zu der Potentialdifferenz zwischen beiden ($U_2 - U_1$) ist die Kapazität C des Kondensators.

Mithin ist

$$C = \frac{Q}{U_2 - U_1} = \frac{S}{4\pi a}.$$

Es ist zu beachten, daß hier nicht etwa $\frac{Q}{U_2}$ oder $\frac{Q}{U_1}$ wie bei einem einzelner Leiter als Kapazität gilt, denn die Kraftlinienmenge, die von U_1 ausgeht, ist dieselbe, welche auf U_2 endigt, und es ist gemäß § 21

$$C = \frac{3}{4\pi(U_2 - U_1)} \dots \dots \dots (14)$$

Setzt man die Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ gleich E (z. B. die elektromotorische Kraft einer Stromquelle, an deren Pole die Platten des Kondensators angeschlossen sind), so ist

$$Q = CE \dots \dots \dots (15)$$

¹⁾ Infolge der gegenseitigen Influenzierung ist das immer der Fall, wenn nicht andere Leiter in solcher Nähe sind, daß sie die Verteilung der Ladungen stören.

Stehen nicht nur zwei Leiter in gegenseitiger Wirkung, sondern drei oder mehrere, wie z. B. bei Drehstromleitungen (Abb. 34 und 35), so ist die Kapazität gemäß der Überlegung in § 25 und der vorstehenden Definition zu definieren durch jene Ladung, welche einer der Leiter hat, wenn zwischen ihm und allen anderen die Potentialdifferenz 1 besteht.

Die vorstehenden Formeln sind abgeleitet worden unter der Voraussetzung, daß das Feld zwischen den Platten bis zum Rand homogen ist, so daß alle Kraftlinien geradlinig zwischen den Platten verlaufen. Wie Abb. 22 zeigt, ist aber das Feld in der Nähe des Randes nicht homogen. Daher sind die obigen Formeln um so ungenauer, je größer der Abstand a ist. Genauere Werte gibt folgende Formel von Kirchhoff für kreisförmige Platten vom Radius r und der Dicke b

$$C = \frac{r^2}{4a} + \frac{r}{4\pi} \left[1 + \log \text{nat} \frac{16\pi(a+b)r}{a^2} + \frac{b}{a} \log \text{nat} \frac{a+b}{b} \right].$$

Nebst dem Plattenkondensator sind für die Elektrotechnik noch folgende Anordnungen von Wichtigkeit. Drückt man alle Größen in cm aus, so erhält man C in absoluten elektrischen Einheiten. Dividiert man durch $9 \cdot 10^{11}$, so erhält man C in Farad.

2) Zwei konzentrische Kreiszyylinder, deren Länge l groß ist gegenüber den Radien r_2 und r_1 . Auf S. 31 wurde das Potentialgefälle eines Zylinders in der Richtung der Kraftlinien berechnet. Demnach ist die Potentialdifferenz zwischen zwei Zylindern mit den Radien r_1, r_2 :

$$U_2 - U_1 = - \int_{a=r_1}^{a=r_2} \frac{2Q}{al} da = \frac{2Q}{l} \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}.$$

Hier ist also die in der Integrationskonstante liegende Unsicherheit des Potentials eines einzelnen Zylinders (S. 31) nicht vorhanden, weil durch den zweiten Zylinder die Enden der Kraftlinien und das dort herrschende Potential sicher gegeben ist. Mithin ist die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U_2 - U_1} = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

3) Zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien r_2, r_1

$$C = \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}.$$

4) Zwei parallele Zylinder (Drähte), mit den Radien r_1, r_2 , deren Achsen den Abstand a haben

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} (b + \sqrt{b^2 - 1})}, \text{ wobei } b = \frac{a^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Ist $r_1 = r_2 = r$, so ist

$$4a) \quad C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{a^2 - 2r^2 + a\sqrt{a^2 - 4r^2}}{2r^2}} = \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{a + \sqrt{a^2 - 4r^2}}{2r}}.$$

Sind r_1 und r_2 klein gegen a , so ist

$$4b) \quad C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{a^2}{r_1 r_2}}.$$

Ist ferner $r_1 = r_2 = r$, so ist

$$4c) \quad C = \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{a}{r}}.$$

5) Zylinder und Ebene (Abb. 31), r Radius des Zylinders, h Abstand seiner geometrischen Achse O von der Ebene¹⁾.

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{h - r + \sqrt{h^2 - r^2}}{r - h + \sqrt{h^2 - r^2}}}.$$

Ist h sehr groß gegen r (Drahtleitung in der Höhe h über dem Erdboden), so vereinfacht sich die Formel in

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{2h}{r}}.$$

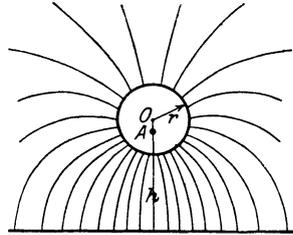


Abb. 31.

Es ist zu betonen, daß diese Formeln die gesamte Kapazität der betreffenden Anordnung angeben; es ist also nicht etwa die Kapazität des Drahtes für sich nach der in § 21 angegebenen Formel und dann noch dazu nach vorstehender Formel auszurechnen.

Für die in der Elektrotechnik vorkommenden Leiteranordnungen gelten folgende Näherungsformeln²⁾.

6) Zwei parallele Drähte vom Radius r , im Abstand a und in der Höhe h über dem Erdboden in der Luft (Abb. 32).

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{\left(\frac{2h}{r}\right)^2}{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}} = \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{2ah}{r\sqrt{a^2 + 4h^2}}}.$$

Ist a klein gegen $2h$, so geht dieser Ausdruck über in die Formel 4c für zwei parallele Zylinder ohne Berücksichtigung der Erde.

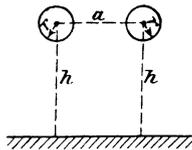


Abb. 32.

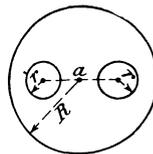


Abb. 33.

7) Kabel bestehend aus 2 exzentrischen Leitern mit leitender Hülle (Abb. 33)

$$C = \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{a(4R^2 - a^2)}{r(4R^2 + a^2)}}.$$

¹⁾ Die elektrische Achse A , d. h. jene Linie, in welcher man sich die Ladung des Zylinders vereinigt denken kann, liegt infolge der Influenz näher an der Ebene.

²⁾ Lichtenstein, ETZ 1904, S. 126.

Ist ϑ die Dielektrizitätskonstante des Isolierstoffes, durch welchen alle Kraftlinien verlaufen, so sind die vorstehenden Formeln mit ϑ zu multiplizieren (§ 27).

Für die vorstehenden Formeln ist die Ladung Q auf einem der Leiter (nach § 26) $Q = CE$, wobei $E = U_2 - U_1$ die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Leitern bedeutet. Ist $U_1 = -U_2 = U$, so ist $U = \frac{E}{2}$, wenn U das

Potential jedes Leiters gegen Erde (§ 22) bedeutet. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Isolation an allen Stellen gut ist. Ist die Isolation gegen Erde an einer Stelle mangelhaft, so ist hier das Potential Null.

Beispiel: Zwei Drähte von 1000 m Länge, Radius $r = 0,5$ cm; gegenseitiger Abstand $a = 80$ cm; Abstand von der Erde $h = 8$ m.

Nach Formel 6) ist

$$C = \frac{100000}{4 \log \text{nat} \frac{2 \cdot 80 \cdot 800}{0,5 \sqrt{80^2 + 4 \cdot 800^2}}} = 4930 \text{ absol. Einh.}$$

Nach Formel 4c) ist

$$C = \frac{100000}{4 \log \text{nat} \frac{80}{0,5}} = 4940 \text{ absol. Einh.}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten ist so klein, daß die letzte Formel genügt; umsomehr als die Kapazität der Porzellanisolatoren, die nur roh geschätzt werden kann, noch dazukommt. Werden diese beiden Drähte mit einer Stromquelle verbunden, deren Potentialdifferenz 10 absol. elektrost. Einh. (= 3000 Volt) ist, so erhält jeder eine Ladung von $Q = CE = 4940 \cdot 10 = 49400$ absol. elektrost. Einh. = $16470 \cdot 10^{-9}$ Coulomb (§ 300).

27. Das Dielektrik.

Alle bisherigen Betrachtungen gingen aus von dem Coulombschen Fernwirkungsgesetz (§ 2), nach welchem zwischen zwei Massen, die in keiner Verbindung miteinander stehen, eine direkte Kraftwirkung besteht, ohne daß der dazwischenliegende Isolierstoff eine Rolle spielt. Das entspricht aber nicht den Tatsachen, sondern die Versuche von Faraday haben gezeigt, daß das Zwischenmedium den absoluten Betrag der Kraft derart verändert, daß er mit einem Faktor $\frac{1}{\vartheta}$ multipliziert werden muß.

Das Coulombsche Gesetz lautet also in der allgemeinsten Form

$$F = \frac{1}{\vartheta} \frac{m m'}{r^2} \dots \dots \dots (16)$$

Dementsprechend ist auch das Potential einer elektrischen Masse m in der Entfernung r

$$U = \frac{1}{\vartheta} \frac{m}{r} \dots \dots \dots (17)$$

Ebenso geht die Feldstärke $\mathfrak{S} = -\frac{dU}{ds}$ über in

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{\vartheta} \frac{dU}{ds} \dots \dots \dots (18)$$

weil sie ja nichts anderes ist als die auf die Elektrizitätsmenge 1 wirkende Kraft.

Für den luftleeren Raum ist $\vartheta = 1$. Da aber für alle unsere Versuche die atmosphärische Luft das ursprüngliche Zwischenmedium ist, so setzen wir den Faktor ϑ für diese gleich 1 und beziehen alle anderen isolierenden Stoffe auf Luft. Da man ein isolierendes Zwischenmedium Dielektrikum oder einfacher Dielektrik nennt, so nennt man den ihm eigentümlichen konstanten Faktor ϑ die Dielektrizitätskonstante.

Wird in einem mit der Elektrizitätsmenge Q geladenen Kondensator die Luft durch einen anderen Stoff mit der Dielektrizitätskonstante ϑ ersetzt, ohne daß Q verändert wird, so steigt die Kapazität auf das ϑ -fache, weil das Potential um das ϑ -fache sinkt. Die Kapazität eines Plattenkondensators ist also

$$Q = \vartheta \frac{S}{4\pi a} \dots \dots \dots (19)$$

Wird hingegen die Potentialdifferenz eines Kondensators konstant gehalten (z. B. durch Verbindung seiner Platten mit einer Stromquelle von konstanter Spannung $E = U_2 - U_1$), so muß wegen der Vergrößerung der Kapazität auch die auf den Platten sitzende Ladung um das ϑ -fache wachsen.

Das gilt natürlich auch von der Kapazität eines einzelnen Leiters, wenn er sich in einem Dielektrik von solcher Ausdehnung befindet, daß seine Wirkung auf Punkte außerhalb des Dielektriks verschwindend klein ist. Bringt man also eine geladene Kugel in ein Dielektrik von der Konstanten ϑ , so ist ihre Kapazität nicht mehr r , sondern ϑr . Ist ihre Ladung konstant, so sinkt ihr Potential um das ϑ -fache. Wird hingegen das Potential konstant gehalten (indem sie z. B. mit einem Pol einer Batterie verbunden ist, deren anderer Pol an Erde liegt), so steigt ihre Ladung auf das ϑ -fache.

Da die gesamte Anzahl der Kraftlinien gleich der 4π -fachen Ladung ist (§ 6), so muß bei konstantem Potential auch die Kraftlinienmenge um das ϑ -fache wachsen. In demselben Verhältnis muß daher auch die Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit, das ist die Kraftliniendichte, wachsen. Die Gl. 6 geht also über in

$$\vartheta \xi = 4\pi\sigma.$$

Dasselbe folgt aus Gl. 18. Bezeichnen wir nun die Kraftliniendichte in Luft wie bisher mit ξ , und die Kraftliniendichte in einem anderen Dielektrik mit \mathfrak{B} , so ist

$$\mathfrak{B} = \vartheta \xi \dots \dots \dots (20)$$

und

$$\mathfrak{B} = 4\pi\sigma \dots \dots \dots (21)$$

Die vorletzte Gleichung besagt also, daß die Kraftliniendichte um das ϑ -fache wächst, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen

an Stelle der Luft ein Dielektrik mit der Konstanten ϑ tritt. Da ξ nach § 14 das Potentialgefälle und nach § 3 die Feldstärke bedeutet, so folgt, daß in einem Dielektrik die Kraftliniendichte nicht mehr gleich dem Potentialgefälle oder der Feldstärke ist, sondern dem ϑ -fachen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, ist es am besten, wenn man ξ in einem Dielektrik nicht als Feldstärke, sondern als elektrische oder elektrisierende Kraft bezeichnet, da sie das Dielektrik tatsächlich elektrisiert (vgl. § 33), so daß die Gl. 20 lautet: Die Kraftliniendichte ist gleich der ϑ -fachen elektrisierenden Kraft.

Wir wollen noch die Kraft berechnen, mit welcher sich die beiden Platten eines Plattenkondensators anziehen. Nach § 10 ist die Kraft zwischen einer mit der Flächendichte σ belegten Platte und einer in unmittelbarer Nähe befindlichen Ladung m in Luft gleich $2\pi\sigma m$. In einem Dielektrik mit der Konstanten ϑ ist diese Kraft gemäß Gl. 16:

$$F = \frac{2\pi\sigma m}{\vartheta}.$$

Hier in diesem Falle ist m nichts anderes als die Ladung der zweiten Platte von entgegengesetztem Vorzeichen; daher ist

$$m = -\sigma S.$$

Mithin

$$F = -\frac{2\pi\sigma^2 S}{\vartheta}.$$

Das negative Vorzeichen besagt, daß die beiden Platten sich anziehen.

Setzt man Gl. 21 ein, so ist

$$F = -\frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi\vartheta}, \dots \dots \dots (22)$$

und gemäß Gl. 20

$$F = -\frac{\vartheta S \xi^2}{8\pi} \dots \dots \dots (23)$$

Da aber ξ nichts anderes ist als das Potentialgefälle

$$\xi = \frac{U_2 - U_1}{a} = \frac{E}{a},$$

so ist

$$F = -\frac{\vartheta S E^2}{8\pi a^2} \dots \dots \dots (24)$$

Nach Einführung der Kapazitätsformel (Gl. 19) wird endlich

$$F = -\frac{C E^2}{2a} \dots \dots \dots (25)$$

Da die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{B} gleich dem Produkte aus

der Kraftliniendichte und der Fläche einer Platte ist ($\mathfrak{B} = S\mathfrak{B}$), so folgt aus Gl. 22

$$F = - \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\vartheta S}.$$

Die Dielektrizitätskonstanten der wichtigsten Stoffe.

Bezogen auf Luft bei gewöhnlichem atmosphärischem Druck.

Paraffin	1,9—2,3	Schellack	2,7—3,7	Eis (trocken) . . .	3
ParaffiniertesPa-		Schwefel ¹⁾	2,4	Petroleum	2,0—2,2
pier(inKabeln)	3—4	Glas	3—8	Terpentinöl	2,2—2,6
Hartgummi	2,0—3,2	Porzellan ¹⁾	5,3—5,7	Mineralöl(Maschi-	
Kautschuk rein	2,2	Marmor	6	nenschmieröl)	2,2—2,5
" vulkanisiert	2,5—3.	Glimmer	5,5—7	Rizinusöl	4,7—4,9
Guttapercha	3—4	Kunstglimmer ¹⁾		Alkohol	5—27
Kolophonium	2,5	(Mikanit)	5—6	Wasser (reinstes)	75—90

Luft bei einem Druck von weniger als 1 mm Quecksilbersäule: 0,99.

Die bei manchen Stoffen sehr großen Abweichungen erklären sich aus der verschiedenen Zusammensetzung (Hartgummi, Glas) oder Verunreinigungen (Glimmer, Alkohol). Der hohe Wert für Wasser ist sehr unwahrscheinlich, da es nicht gelingt, unbedingt reines Wasser herzustellen, und die geringste Leitfähigkeit Fehler bei der Messung verursacht²⁾.

28. Kapazität bei mehr als zwei Leitern.

In § 26 wurde die Kapazität eines Platten- und eines Zylinderkondensators unter der Voraussetzung abgeleitet, daß sämtliche Kraftlinien zwischen diesen Flächen verlaufen. Das ist umso weniger der Fall, je näher sich ein anderer Leiter oder die Erde befindet. Es kommen dann zwei oder mehrere Kraftlinienbündel in Betracht.

Wir untersuchen daher den allgemeineren Fall, daß drei Leiter mit den Potentialen u_1, u_2, u_3 von einer gemeinsamen Hülle mit dem Potential u_0 umgeben sind (Abb. 34). Durch diese Hülle ist jede weitere Kraftlinienstreuung ausgeschlossen. Im besonderen entspricht das einem Dreileiterkabel. Dabei gibt es 6 Kraftlinienbündel, die aus Abb. 34 zu ersehen sind. Jedem zwischen den Leitern x und y verlaufenden Bündel \mathfrak{B}_{xy} entspricht eine Teilkapazität c_{xy} : und es ist gemäß Gl. 14

$$\mathfrak{B}_{xy} = 4\pi c_{xy}(u_x - u_y).$$

Abb. 35 zeigt die Verbindung dieser Teilkapazitäten.

Die gesamte vom Leiter 1 ausgehende Kraftlinienmenge \mathfrak{B}_1 ist nach Abb. 34:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{01} + \mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{B}_{13} = 4\pi [c_{01}(u_1 - u_0) + c_{12}(u_1 - u_2) + c_{13}(u_1 - u_3)].$$

¹⁾ Nach Messungen des Verfassers.

²⁾ Eine Zusammenstellung zahlreicher Messungen an zahlreichen Stoffen findet sich in Winkelmann, Handbuch der Physik 4. Bd., 1905.

Die vom Leiter 2 ausgehende Kraftlinienmenge ist:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_{02} + \mathfrak{Z}_{12} + \mathfrak{Z}_{23} = 4\pi [c_{02}(u_2 - u_0) + c_{12}(u_2 - u_1) + c_{23}(u_2 - u_3)].$$

Hier muß $(u_2 - u_1)$ stehen im Gegensatz zu $(u_1 - u_2)$ in der ersten Gleichung, weil die Kraftlinien \mathfrak{Z}_{12} vom Leiter 1 ausgehen und auf den Leiter 2 endigen, die Kraftlinien \mathfrak{Z}_2 aber vom Leiter 2 ausgehen¹⁾.

Die vom Leiter 3 ausgehende Kraftlinienmenge ist:

$$\mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_{03} + \mathfrak{Z}_{13} + \mathfrak{Z}_{23} = 4\pi [c_{03}(u_3 - u_0) + c_{13}(u_3 - u_1) + c_{23}(u_3 - u_2)].$$

Wären 4 Leiter vorhanden, so käme noch eine vierte Gleichung hinzu, und jede hätte noch ein Glied mehr.

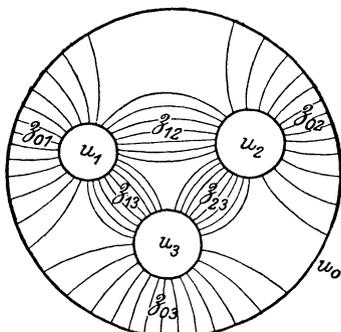


Abb. 34.

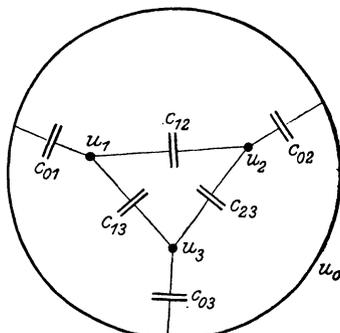


Abb. 35.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nun die jeweiligen Kombinations- oder Betriebskapazitäten unter Berücksichtigung der den Betriebsverhältnissen entsprechenden Schaltung der Teilkapazitäten²⁾.

Wir betrachten folgende für die Elektrotechnik wichtigen Fälle:

I. Kabel, bestehend aus zwei exzentrischen Leitern mit Blei- oder Eisenmantel oder Erdschüttung als Hülle (Abb. 33). Ferner zwei parallele Leiter über der Erde (Abb. 32), wobei die Erde dieselbe Rolle spielt wie die geerdete Hülle des Kabels. Jedenfalls ist $u_0 = 0$. Der Unterschied liegt nur

¹⁾ Geht man rein mathematisch formalistisch vor, so schreibt man wie Maxwell c_{21} gegen c_{12} in der ersten Gleichung. Physikalisch aber ist ohne weiteres klar, daß c_{12} und c_{21} gleichbedeutend sind, weil es sich um dieselben Kraftlinien handelt.

²⁾ Einen rein mathematischen, physikalisch undurchsichtigen Weg hat Maxwell bei dieser Aufgabe eingeschlagen. Diesen haben auch die „Vorschläge für die Definition der elektrischen Eigenschaften gestreckter Leiter“ des Elektrotechnischen Vereins (ETZ 1909 S. 1155) eingehalten, der aus dem genannten Grunde hier nicht benützt wird. Übersichtlicher ist schon die Ableitung aus dem Gaußschen Satz über die Symmetrie zweier elektrischer Systeme (vgl. Lang: Theoretische Physik, 2. Aufl. § 147). Am einfachsten ist es, von den Kraftlinien auszugehen, wie hier.

in den Werten der Teilkapazitäten. Da der dritte Leiter fehlt, sind \mathfrak{Z}_{03} , \mathfrak{Z}_{13} , \mathfrak{Z}_{23} und daher auch c_{03} , c_{13} , c_{23} null. Es bleibt nur

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= 4\pi [c_{01}u_1 + c_{12}(u_1 - u_2)] \\ \mathfrak{Z}_2 &= 4\pi [c_{02}u_2 + c_{12}(u_2 - u_1)] \end{aligned}$$

Sind die Betriebsverhältnisse derart, daß $\mathfrak{Z}_2 = -\mathfrak{Z}_1$, so muß

$$c_{01}u_1 = -c_{02}u_2$$

sein. Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich \mathfrak{Z}_1 auf die Form bringen:

$$\mathfrak{Z}_1 = 4\pi (u_1 - u_2) \left(\frac{c_{01} \cdot c_{02}}{c_{01} + c_{02}} + c_{12} \right).$$

Hieraus ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{Z}_1}{4\pi (u_1 - u_2)} = \frac{Q}{u_1 - u_2}$$

gemäß § 26 als Kapazität. Und weil \mathfrak{Z}_1 die gesamte Kraftlinienmenge jedes Leiters ist, so ist dies die gesamte Kombinations- oder Betriebskapazität C .

$$C = \frac{c_{01} \cdot c_{02}}{c_{01} + c_{02}} + c_{12} \dots \dots \dots \text{(Ia)}$$

Ist nebst der obigen Bedingung $\mathfrak{Z}_2 = -\mathfrak{Z}_1$ auch noch die Anordnung symmetrisch, d. h. sind die beiden Leiter und ihre Abstände von der Hülle bzw. Erde gleich, oder ist ein dritter geerdeter Leiter mit gleichen Abständen vorhanden, so ist $c_{02} = c_{01}$ und daher die Betriebskapazität in diesem Falle

$$C = \frac{c_{01}}{2} + c_{12} \dots \dots \dots \text{(Ib)}$$

Wäre die Hülle nicht vorhanden bzw. die Erde so weit entfernt, daß keine Kraftlinien zu ihr übergehen, so wäre \mathfrak{Z}_{01} und daher auch c_{01} gleich null. Dann ist $C = c_{12}$, also gleich der auf S. 40 angegebenen Formel für zwei parallele Zylinder ohne Berücksichtigung der Erde.

Für 2 parallele Drähte über der Erde ist c_{01} gleich den auf S. 41 unter 5) angegebenen Werten und c_{12} gleich dem auf S. 40 unter 4) angegebenen Werten.

II. Kabel, bestehend aus zwei konzentrischen Leitern und geerdeter Hülle (Abb. 36). Hier gibt es nur zwei Kraftlinienbündel, nämlich \mathfrak{Z}_{12} , das zwischen den beiden Leitern, und \mathfrak{Z}_{01} , das zwischen Außenleiter und Hülle verläuft. Mithin bestehen nur die entsprechenden Teilkapazitäten c_{12} und c_{01} ; alle anderen sind null. Die gesamte vom Innenleiter ausgehende Kraftlinienmenge \mathfrak{Z}_i ist daher

$$\mathfrak{Z}_i = \mathfrak{Z}_2 = 4\pi c_{12} (u_2 - u_1).$$

Mithin ist die Betriebskapazität C_i des Innenleiters gleich der eines Zylinderkondensators¹⁾ (S. 40, 2).

$$C_i = c_{12} = \frac{\vartheta_i l}{2 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}},$$

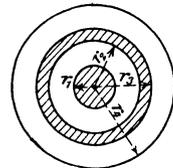


Abb. 36.

wenn ϑ_i die Dielektrizitätskonstante zwischen Innen- und Außenleiter bedeutet. Die Ladung des Innenleiters ist $Q_i = \frac{\mathfrak{Z}_i}{4\pi} = C_i (u_2 - u_1) = C_i E$.

¹⁾ Dabei ist es gleichgültig, ob der Mantel geerdet ist oder nicht, und ob der Außenleiter geerdet ist oder nicht, weil die vom Innenleiter ausgehenden Kraftlinien nur zum Außenleiter gehen können.

Die vom Außenleiter ausgehende Kraftlinienmenge \mathfrak{Z}_a ist

$$\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_{01} + \mathfrak{Z}_{12} = 4\pi [c_{01}(u_1 - u_0) + c_{12}(u_1 - u_2)].$$

Da hier zwei verschiedene Potentialdifferenzen vorkommen, so läßt sich die Betriebskapazität nur definieren, wenn sie gleich groß sind, also wenn

$$u_1 - u_0 = u_1 - u_2.$$

Das ist der Fall, wenn $u_2 = u_0$, d. h. wenn die Hülle mit dem Innenleiter verbunden ist (beide geerdet sind). Dann ist

$$\mathfrak{Z}_a = 4\pi (u_1 - u_0) (c_{01} + c_{12}).$$

Mithin ist die Betriebskapazität des Außenleiters

$$C_a = \frac{\mathfrak{Z}_a}{4\pi (u_1 - u_0)} = c_{01} + c_{12} \quad \dots \dots \dots \text{(II)}$$

$$C_a = \frac{\vartheta_i l}{2 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}} + \frac{\vartheta_a l}{2 \log \text{nat} \frac{r_4}{r_3}},$$

wenn ϑ_a die Dielektrizitätskonstante zwischen Außenleiter und Hülle bedeutet. Die Ladung des Außenleiters ist

$$Q_a = \frac{\mathfrak{Z}_a}{4\pi} = (c_{01} + c_{12}) (u_1 - u_0) = - (c_{01} + c_{12}) E.$$

Sind Innenleiter und Hülle nicht miteinander verbunden, so kann schon ein kleiner Isolationsfehler (kleiner Ableitungsstrom) zwischen Außenleiter und Hülle eine wesentlich andere Spannungsverteilung bewirken. Denn es ist dann $u_1 = u_0$ und daher $c_{01} = 0$. Mithin

$$C_a = c_{12} = C_l.$$

III. Drehstromkabel in symmetrischer Anordnung (Abb. 37) und symmetrischer Spannung. Letztere ist dann vorhanden, wenn die Spannungen zwischen den Leitern und der Hülle (Sternspannungen) gleich sind, und ihre Summe in jedem Augenblick null ist, also wenn

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_0) + (u_3 - u_0) = 0.$$

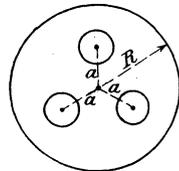


Abb. 37.

Die Hülle bildet dann den neutralen Punkt, d. h. es ist $u_0 = 0$, so daß $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ ist¹⁾. Damit diese Bedingung nicht durch einen kleinen Isolationsfehler verloren geht, muß die Hülle mit dem neutralen Punkt des Stromerzeugers verbunden, oder beide müssen geerdet sein. Dann sind folgende gleiche Teilkapazitäten vorhanden:

$$c_{01} = c_{02} = c_{03} = c_0$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_v$$

und die von einem Leiter ausgehende Kraftlinienmenge ist

$$\mathfrak{Z}_1 = 4\pi [c_0 u_1 + c_v (u_1 - u_2 + u_1 - u_3)],$$

weil aber nach obiger Spannungsgleichung $-u_2 - u_3 = u_1$ ist, so ist

$$\mathfrak{Z}_1 = 4\pi [c_0 u_1 + 3c_v u_1].$$

Mithin ist die Betriebskapazität jedes Leiters

$$C = \frac{\mathfrak{Z}_1}{4\pi u_1} = c_0 + 3c_v \quad \dots \dots \dots \text{(III)}$$

¹⁾ Das bezieht sich auf die Augenblickswerte (§ 128), weil nur für diese die allgemeinen Grundgesetze gelten.

Hieraus ergibt sich¹⁾

$$C = \frac{\partial l}{\log \operatorname{nat} \frac{3a^3(R^2 - a^2)^2}{r^2(R^4 + R^2a^2 + a^4)}} = \frac{\partial l}{\log \operatorname{nat} \frac{3a^2(R^2 - a^2)^3}{r^2(R^6 - a^6)}}$$

Die Ladung eines Leiters ist $Q = Cu_1$, wenn u_1 die Sternspannung bedeutet.

IV. Drehstromfreileitung in symmetrischer Anordnung. Macht man in der letzten Formel $R = 0$, so bedeutet das, daß die Hülle zu einer Linie in der Mitte der drei Leiter, also in den Punkt O der Abb. 38 zusammen-geschrunft ist, wo ebenfalls das Potential Null herrscht (neutraler Punkt). Man erhält so die Betriebskapazität für eine symmetrische Drehstromfreileitung ($\vartheta = 1$):

$$C = \frac{l}{\log \operatorname{nat} \frac{3a^2}{r^2}} = \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{a\sqrt{3}}{r}} = \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{d}{r}}$$

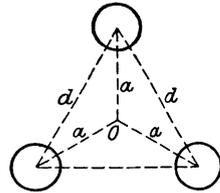


Abb. 38.

Der Abstand von der Erde, wie bei einer Doppelleitung (S. 41), kommt hier nicht in Betracht, weil die Anordnung als symmetrische Drehstromleitung vorausgesetzt wurde, so daß im Punkte O das Potential Null herrscht. Diese Symmetrie besteht so lange, als der Abstand a klein ist gegen den Abstand von der Erde.

Ist eine vierte, und zwar geerdete Leitung (Blitzschutzseil) vorhanden, so gilt auch dafür Gl. III, weil sie an Stelle der Kabelhülle getreten ist. Für c_0 und c_v gelten dann die Formeln auf S. 41 unter 6), wobei für a und h Mittelwerte einzusetzen sind. Näherungsweise ist

$$c_0 = c_v = \frac{l}{4 \log \operatorname{nat} \frac{a}{r}}, \quad \text{also} \quad C = 4c_v = \frac{l}{\log \operatorname{nat} \frac{a}{r}}$$

Von Wichtigkeit sind die Teilkapazitäten bei jenen experimentellen Bestimmungen, wo sich die Betriebskapazität nicht unmittelbar messen läßt. Für fertige Leitungen ist allerdings der Ladestrom (Leerlaufstrom) maßgeblich, der einfach durch ein Ampere-meter gemessen wird (bei Drehstrom in jeder Leitung). Wenn es sich aber um kürzere Leitungen handelt, wo die Messung nur mit einem empfindlichen Galvanometer möglich ist, müssen die Teilkapazitäten gemessen werden gemäß der Definition auf S. 40, daß nämlich die Kapazität jene Ladung ist, welche ein Leiter aufnimmt, wenn zwischen ihm und allen anderen Leitern die Potential-Differenz 1 besteht. Daher müssen alle anderen Leiter an denselben Pol der Stromquelle angeschlossen werden. So zeigt Abb. 39 die Schaltung für die Messung der Teilkapazität c_{01} einer Drehstromleitung mit neutralem Leiter oder Mantel²⁾. Stromquelle und Galvanometer sind in den

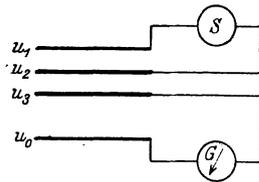


Abb. 39.

¹⁾ Lichtenstein, ETZ. 1904, S. 109.

²⁾ Sumec, Elektr. u. Maschinenbau 1915, Heft 27.

von den Leitern 1 und 0 gebildeten Stromkreis eingeschaltet, während die Leiter 2 und 3 an denselben Pol angeschlossen sind, wie der Leiter 0.

29. Berechnung der elektrischen Kraft aus der Kapazität.

Nach § 14 ist $\mathfrak{S} = -\frac{dU}{ds}$, wenn s die zur Niveaufläche senkrechte Richtung, also die Richtung einer Kraftlinie an der betreffenden Stelle bedeutet. Denkt man sich bei einem Kondensator mit der Potentialdifferenz $U_2 - U_1 = E$ einen der beiden Leiter mit der Erde verbunden ($U_1 = 0$), so ist $U_2 = E$. An dem Potentialgefälle, also an der elektrischen Kraft \mathfrak{S} ändert sich dadurch nichts; somit ist

$$\mathfrak{S} = -\frac{dE}{ds}.$$

Und weil (Gl. 14): $E = \frac{Q}{C}$, so ist

$$\mathfrak{S} = -Q \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{C} \right).$$

Hiernach kann man die elektrische Kraft — sie ist für die Beanspruchung des Isolierstoffes auf Durchschlag maßgebend (§ 252) — an jenen Stellen berechnen, wo eine in der betr. Kapazitätsformel vorkommende Größe mit der Kraftlinienrichtung zusammenfällt, wie folgende Beispiele zeigen.

1) Zwei konzentrische Zylinder mit den Radien r_1, r_2 (Kapazitätsformel 2 auf S. 40).

Die elektrische Kraft \mathfrak{S}_1 an der Zylinderfläche ist nach obigem:

$$\mathfrak{S}_1 = -Q \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{2Q}{\partial l} \frac{d}{dr_1} \left(\log \text{nat} \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{2Q}{\partial l r_1}.$$

Aus $Q = CE$ folgt weiter

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{E}{r_1 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Auf gleiche Weise findet man für die elektrische Kraft \mathfrak{S}_2 an der inneren Fläche des äußeren Zylinders

$$\mathfrak{S}_2 = -Q \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{2Q}{\partial l r_2} = -\frac{E}{r_2 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Da die Kraftlinien zwischen den beiden Zylindern wie die Radien verlaufen und gleichmäßig verteilt sind, so ist die Kraft an jedem Punkte im Abstände r von der Achse:

$$\mathfrak{S} = \frac{E}{r \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Das gilt natürlich auch für ein konzentrisches Kabel.

2) Zwei konzentrische Kugeln mit den Radien r_1, r_2 (Kapazitätsformel 3 auf S. 40). Die elektrische Kraft an der äußeren Fläche der inneren Kugel ist

$$\mathfrak{S}_1 = -Q \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q}{\vartheta} \frac{d}{dr_1} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) = \frac{Q}{\vartheta r_1^2}.$$

Aus $Q = CE$ folgt weiter

$$\mathfrak{S}_1 = E \frac{r_2}{r_1 (r_2 - r_1)}.$$

Die elektrische Kraft an der inneren Fläche der äußeren Kugel ist

$$\mathfrak{S}_2 = -Q \frac{d}{dr_2} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q}{\vartheta r_2^2} = E \frac{r_1}{r_2 (r_2 - r_1)}.$$

3) Zwei parallele Zylinder mit den Radien r_1, r_2 , deren Achsen den Abstand a haben (Kapazitätsformel 4 auf S. 40). Die elektrische Kraft an der Oberfläche des Zylinders r_1 in der Verbindungslinie der beiden Achsen ist

$$\mathfrak{S}_{r_1} = -Q \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{2Q}{l \sqrt{b^2 - 1}} \cdot \frac{db}{dr_1} = \frac{Q(a^2 + r_1^2 - r_2^2)}{lr_1^2 r_2 \sqrt{b^2 - 1}}.$$

Aus $Q = CE$ folgt weiter

$$\mathfrak{S}_{r_1} = E \frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2 r_2 \sqrt{b^2 - 1} \log \text{nat} (b + \sqrt{b^2 - 1})}.$$

Sind r_1 und r_2 klein gegen a , so ist

$$\mathfrak{S}_{r_1} = E \frac{1}{r_1 \log \text{nat} \frac{a^2}{r_1 r_2}}.$$

Für die el. Kraft \mathfrak{S}_{r_2} am andern Zylinder findet man die entsprechenden Ausdrücke nach Vertauschung der Indexe 1 und 2.

Ist ferner $r_1 = r_2 = r$, so ist¹⁾

$$\mathfrak{S}_r = E \frac{1}{2r \log \text{nat} \frac{a}{r}}.$$

Da a der Achsenabstand der beiden Drähte ist, so ist $\frac{a}{2}$ die Entfernung des Mittelpunktes der Verbindungslinie. In diesem Punkte ist die elektrische Kraft

$$\mathfrak{S}_m = \frac{E}{a \log \text{nat} \frac{a}{r}}.$$

4) Zylinder und Ebene (Abb. 31). Aus der Kapazitätsformel auf S. 41 ergibt sich die elektrische Kraft an der Oberfläche des Zylinders in der Richtung h

$$\mathfrak{S}_r = -Q \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{2Qh}{lr \sqrt{h^2 - r^2}} = \frac{Eh}{r \sqrt{h^2 - r^2} \log \text{nat} \frac{h - r + \sqrt{h^2 - r^2}}{r - h + \sqrt{h^2 - r^2}}}.$$

¹⁾ Die Formeln 4a und 4c auf S. 40, in denen schon $r_1 = r_2$ gemacht wurde, dürfen zur Ausrechnung von \mathfrak{S} nicht benützt werden, weil sich sonst die Differentiation auf beide Zylinder beziehen würde.

Ist h sehr groß gegen r , so ist

$$\mathfrak{S}_r = \frac{E}{r \log \text{nat} \frac{2h}{r}}.$$

Auf gleiche Weise kann man aus $\mathfrak{S}_h = -Q \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{C} \right)$ die el. Kraft an der Ebene gegenüber dem Zylinder berechnen.

5) Kabel bestehend aus 2 exzentrischen Leitern mit leitender Hülle (Abb. 33, S. 41 Formel 7). Differenziert man hier nach r , so erhält man die el. Kraft \mathfrak{S}_r an der Oberfläche des Leiters gegenüber der Hülle. Differenziert man nach R , so erhält man die el. Kraft an der Innenseite der Hülle gegenüber dem Leiter, weil hier die Kraftlinienrichtung mit r und R zusammenfällt. Dabei ist zu beachten, daß es zwei solche Stellen gibt. Daher erhält man die doppelte el. Kraft; man muß also durch 2 dividieren, um die einfache zu erhalten. Mithin ist

$$\mathfrak{S}_r = -\frac{Q}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{E}{2r \log \text{nat} \frac{a(4R^2 - a^2)}{r(4R^2 + a^2)}}$$

$$\mathfrak{S}_R = -\frac{Q}{2} \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{8ERa^2}{(16R^4 - a^4) \log \text{nat} \frac{a(4R^2 - a^2)}{r(4R^2 + a^2)}}.$$

Ist a^2 klein gegen $4R^2$, so ist

$$\mathfrak{S}_r = \frac{E}{2r \log \text{nat} \frac{a}{r}},$$

also wie bei 2 exzentrischen Zylindern ohne leitende Hülle.

$$\mathfrak{S}_R = -\frac{Ea^2}{2R^3 \log \text{nat} \frac{a}{r}}.$$

Ist $a = R$, so ist

$$\mathfrak{S}_R = -\frac{E}{2R \log \text{nat} \frac{a}{r}}.$$

Das neg. Vorzeichen bei \mathfrak{S}_R bringt zum Ausdruck, daß die el. Kraft an der Hülle nach innen gerichtet ist.

Werden in obigen Formeln die Spannungen E in Volt, die Längenmaße in cm eingesetzt, so erhält man die elektrische Kraft in Volt/cm, da sie nach § 14 gleich Potential dividiert durch Länge ist.

30. Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung.

Befinden sich mehrere Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1 , C_2 , C_3 in Nebeneinanderschaltung (Abb. 40), so gelten folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 (U_2 - U_1) \\ Q_2 &= C_2 (U_2 - U_1) \\ Q_3 &= C_3 (U_2 - U_1). \end{aligned}$$

weil alle an dieselben Potentialpunkte U_2 und U_1 angeschlossen sind, so daß auf alle drei dieselbe Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ wirkt. Bezeichnet man mit Q die gesamte Elektrizitätsmenge und mit C die gesamte Kapazität, so gilt

$$Q = C(U_2 - U_1).$$

Und da die gesamte Elektrizitätsmenge gleich sein muß der Summe der auf allen Kondensatoren sitzenden Ladungen, so ist

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1(U_2 - U_1) + C_2(U_2 - U_1) + C_3(U_2 - U_1) \\ &= (C_1 + C_2 + C_3)(U_2 - U_1), \end{aligned}$$

also ist

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

d. h. die gesamte Kapazität mehrerer parallelgeschalteter Kondensatoren ist gleich der Summe aller Kapazitäten.

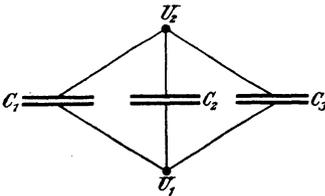


Abb. 40.

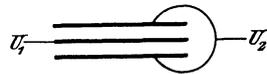


Abb. 41.

Hierher gehören auch Doppelkondensatoren wie Abb. 41. Solche verwendet man, wenn Kraftlinienstreuung von den Außenseiten der Platten zur Erde vermieden werden soll; man verbindet zu diesem Zweck U_2 mit der Erde, so daß die andere Platte gewissermaßen von Erde umschlossen, und die Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ gleich dem Potential gegen Erde ist¹⁾.

31. Kondensatoren in Hintereinanderschaltung.

Befinden sich mehrere Kondensatoren in Hintereinanderschaltung oder Kaskadenschaltung (Abb. 42), so entsteht die Frage, wie groß ist die Kapazität C der ganzen Anordnung, oder mit anderen Worten, welche Kapazität muß ein einziger Kondensator haben, wenn er diese Anordnung ersetzen soll. U_0, U_1, U_2, U_3 seien die Potentiale der aufeinanderfolgenden Klemmen. Nimmt die erste Kondensatorplatte die Ladung $+Q$ auf, so erhält die andere Platte desselben Kondensators die Ladung $-Q$, während eine Ladung $+Q$ auf die Platte des nächsten Kondensators abströmt. Hier spielt sich derselbe Vorgang ab; d. h. es findet sich schließlich auf jedem Kondensator dieselbe

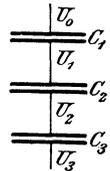


Abb. 42.

¹⁾ Grüneisen und Giebe, Verh. d. D. Physik. Gesellsch. 1912 S. 921.

Ladung Q vor. Es gelten also für die einzelnen Kondensatoren folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} U_3 - U_2 &= \frac{Q}{C_3} \\ U_2 - U_1 &= \frac{Q}{C_2} \\ U_1 - U_0 &= \frac{Q}{C_1}. \end{aligned}$$

Bedeutet C die Kapazität der ganzen Anordnung, so gilt

$$U_3 - U_0 = \frac{Q}{C}.$$

Addiert man die vorletzten drei Gleichungen, so ist

$$U_3 - U_0 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Aus den beiden Gleichungen folgt dann

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Für zwei hintereinandergeschaltete Kondensatoren folgt daraus

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ist $C_1 = C_2$, so ist $C = \frac{C_1}{2}$.

Haben diese hintereinandergeschalteten Kondensatoren gleiche Plattenfläche S , aber verschiedene Dielektriken mit den Schichtdicken a_1, a_2, a_3 und den Dielektrizitätskonstanten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, so ändert sich nichts, wenn man die mit einander verbundenen Platten zusammenfallen läßt, so daß aus Abb. 42 die Abb. 43 wird. Dann ist gemäß Gl. 19

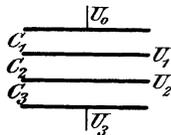


Abb. 43.

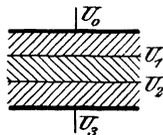


Abb. 44.

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi a_1}{\vartheta_1 S} + \frac{4\pi a_2}{\vartheta_2 S} + \frac{4\pi a_3}{\vartheta_3 S}$$

und daraus

$$C = \frac{S}{4\pi \left(\frac{a_1}{\vartheta_1} + \frac{a_2}{\vartheta_2} + \frac{a_3}{\vartheta_3} \right)}$$

Sind die Dielektriken von homogener Beschaffenheit, so daß ihre Grenzflächen den Niveaulächen parallel sind, so ändert sich nichts, wenn man die Zwischenplatten entfernt. Man erhält dann die aus Abb. 44 ersichtliche Anordnung, nämlich einen Kondensator mit drei dielektrischen Schichten in Hintereinanderschaltung. Von dieser Anordnung macht man Gebrauch bei Bestimmung der

Dielektrizitätskonstante ϑ eines Stoffes, der in Form einer Platte vorhanden ist. Man schiebt diese Platte in einen Luftkondensator ein, und es ist nun

$$C = \frac{S}{4\pi \left(\frac{a}{\vartheta} + a_2 \right)},$$

wenn a die Dicke der Platte und a_2 die Dicke der verbleibenden Luftschicht ist¹⁾. Über die Messung der Kapazität C vgl. § 287.

32. Ladungsenergie.

Unter Ladungsenergie eines elektrisch geladenen einfachen Leiters oder Kondensators versteht man jene potentielle Energie, die seiner Ladung (gemäß der in § 24 erläuterten Oberflächenspannung) innewohnt. Es ist jene Arbeit die aufgewendet werden muß, um die betreffende Ladung vom Unendlichen oder von der Erde aus auf den betreffenden Leiter zu bringen, oder sie auf dem betreffenden Leiter (z. B. durch Influenz) zu erzeugen. Sie entspricht — um ein Beispiel aus der Mechanik heranzuziehen — der potentiellen Energie einer gespannten Feder. Diese Arbeit wird frei und setzt sich teils in lebendige Kraft teils in Wärme um, sobald die Feder losgelassen bzw. der geladene Leiter entladen wird.

Die Ladungsenergie ist nicht identisch mit dem Potential einer Ladung auf sich selbst, das in § 15 als Energie einer Ladung in bezug auf eine der Einheit gleiche Masse von sich selbst definiert wurde, sondern die Ladungsenergie ist die Summe aller Energien, die zwischen der ganzen Ladung und jedem ihrer einzelnen Teilchen besteht.

Bezeichnet man die ganze auf dem Leiter sitzende Ladung mit Q , und ein unendlich kleines Teilchen derselben mit dQ , und ist U das Potential des Leiters oder Kondensators, auf dem die Ladung sitzt, so ist nach § 11 die unendlich kleine Arbeit dA , die geleistet werden muß, um dieses Teilchen vom Potential null auf das Potential U zu bringen

$$dA = dQ \cdot U.$$

Aus Gl. 10 folgt durch Differentiation (da C konstant ist)

$$dQ = C \cdot dU.$$

Mithin

$$dA = C \cdot U \cdot dU.$$

Durch Integration erhält man nun die gesamte Ladungsenergie A .

$$A = C \int U \cdot dU = \frac{CU^2}{2} \quad \dots \dots \quad (26)$$

¹⁾ Über die elektrische Kraft in diesen Schichten vgl. § 253.

Setzt man Gl. 10 ein, so erhält man zwei weitere Ausdrücke für die Ladungsenergie, nämlich

$$A = \frac{QU}{2} \dots \dots \dots (27)$$

und

$$A = \frac{Q^2}{2C} \dots \dots \dots (28)$$

Für einen Kondensator, dessen Platten die Potentiale $+U_2$ und $-U_1$ haben, ist die gesamte Ladungsenergie gleich der beider Platten, also

$$A = \frac{QU_2}{2} - \frac{QU_1}{2}.$$

Setzt man $U_2 - U_1 = E$, so ist

$$A = \frac{QE}{2} \dots \dots \dots (29)$$

oder

$$A = \frac{CE^2}{2} .^1)$$

33. Die Clausiussehe Vorstellung über die Beschaffenheit des Dielektriks. Wahre und scheinbare Ladung.

Über die Beschaffenheit des Dielektriks hat sich Clausius eine Vorstellung gebildet, die genügt, um alle Erscheinungen zu erklären. Demnach hat man sich das Dielektrik vorzustellen als einen Stoff, in dem sich sehr kleine leitende Teilchen (vielleicht von der Größe eines Moleküles) in großer Zahl eingestreut vorfinden. Wirkt auf einen so beschaffenen Stoff eine elektrische Kraft, indem er z. B. zwischen die Platten eines Kondensators gebracht wird, so findet in jedem Teilchen eine Elektrisierung durch Influenz statt, so daß auf der einen Seite positive, auf der entgegengesetzten Seite negative Pole auftreten (Abb. 45). Man sagt daher auch, das Dielektrik ist polarisiert. Die elektrische Kraft oder Feldstärke § bewirkt also

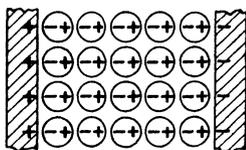


Abb. 45.

die Elektrisierung des Dielektriks, weshalb man sie auch (wie schon auf S. 44 bemerkt wurde) elektrisierende Kraft nennt.

Aus der Abb. 45 erklärt sich jetzt auch, warum die Kraftlinien wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen streben, und die sich gegenseitig abstoßen (§ 4). Denn die in der Kraftlinienrichtung nebeneinanderliegenden ungleichnamigen Pole der verschiedenen Teil-

¹⁾ Aus Gl. 25 erkennt man, daß diese Ladungsarbeit gleich jener Arbeit ist, welche geleistet werden muß, wenn die Platten unter Überwindung der anziehenden Kraft F vom Abstand Null auf den Abstand a gebracht werden.

chen ziehen sich an, während senkrecht zur Kraftlinienrichtung gleichnamige Pole nebeneinander liegen, so daß senkrecht zur Kraftlinienrichtung Abstoßung zwischen den einzelnen Teilchen herrscht.

Ferner ersieht man aus dieser Abbildung, daß sich hinsichtlich der Wirkung nach außen alle Pole der leitenden Teilchen im Innern gegenseitig aufheben, da immer zwei ungleichnamige nebeneinander liegen. Dagegen treten auf den an den Kondensatorplatten liegenden Endflächen des Dielektriks freie elektrische Ladungen auf, und zwar an der positiven Platte eine negative und umgekehrt. Man erkennt hieraus, warum infolge der Anwesenheit des Dielektriks die Kraft und das Potential nach Gl. 16 und 17 um das ϑ -fache sinkt, wenn die Ladung konstant ist. Denn durch die auf der linken Endfläche des Dielektriks auftretende freie negative Ladung wird ein Teil der positiven Ladung der linken Kondensatorplatte neutralisiert; ebenso auf der rechten Seite. Wird hingegen die Potentialdifferenz zwischen den Platten konstant gehalten, indem diese mit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Spannung verbunden werden, so strömt soviel Elektrizität auf die Platten nach, als durch die Endflächen des Dielektriks neutralisiert wurde, so daß die Ladung auf das ϑ -fache steigt.

Während die auf den Kondensatorplatten sitzenden Ladungen abgeleitet werden können (durch Verbindung mit der Erde), ist dies bei den auf den Endflächen des Dielektriks sitzenden Ladungen nicht möglich, da sie eben auf einem Nichtleiter sitzen. Da ferner die auf einem Leiter sitzende Ladung Anfang oder Ende von Kraftlinien darstellt, während durch das Dielektrik die Kraftlinien hindurchgehen, so bezeichnet man die Ladungen auf einem Leiter als wahre oder wirkliche Ladungen, und die auf den Endflächen eines Dielektriks infolge Polarisierung entstehenden als scheinbare. Beim Verschwinden der elektrisierenden Kraft verschwinden diese scheinbaren Ladungen dadurch, daß sich die getrennten Ladungen in jedem Teilchen der Abb. 45 wieder vereinigen und neutralisieren.

Greifen wir aus dem Dielektrik einen Würfel von 1 cm Seitenlänge heraus und zwar so, daß zwei gegenüberliegende Flächen parallel zu den Kondensatorplatten sind, so ist die auf diesen Flächen sitzende Ladung, das ist die Flächendichte σ_a , ein Maß für die Elektrisierung des Dielektriks¹⁾. Betrachten wir ein zylindrisches Stück des Dielektriks, dessen Endflächen S sind, so ist

$$\sigma_a = \frac{m_a}{S},$$

wenn m_a die ganze auf einer Endfläche sitzende Ladung bedeutet.

Es entsteht nun die Frage nach der Kraftlinienmenge, die durch dieses zylindrische Stück des Dielektriks geht. Wäre Luft an Stelle

¹⁾ Der Index d bei σ und m bedeutet, daß es sich um die Ladung des Dielektriks, nicht um die der Platten handelt.

des Dielektriks vorhanden, so wäre die Kraftlinienmenge gleich $\mathfrak{S}S$, weil \mathfrak{S} die Kraftliniendichte in Luft bedeutet (§ 6). Von der an den Endflächen des Zylinders sitzenden Ladung m_d kommen aber neue Kraftlinien hinzu, deren Anzahl nach § 6 gleich $4\pi m_d$ ist. Die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{Z} ist also

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}S + 4\pi m_d.$$

Daraus ergibt sich die Kraftliniendichte \mathfrak{B} , wenn man durch die Fläche S dividiert. Es ist also

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Z}}{S} = \mathfrak{S} + 4\pi \frac{m_d}{S},$$

und nach Einsetzung der obigen Gleichung:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S} + 4\pi\sigma_d \dots \dots \dots (30)$$

34. Elektrisierungszahl und Dielektrizitätskonstante.

Aus dem Vorstehenden läßt sich ohne weiteres die durch Messungen bestätigte Folgerung ziehen, daß die Stärke der Elektrisierung eines Dielektriks, d. h. die an den Endflächen einer Volumseinheit auftretende Ladung σ_d der elektrisierenden Kraft \mathfrak{S} proportional ist, weil eben in jedem Teilchen um so mehr Elektrizität durch Influenz erzeugt wird, je stärker die elektrisierende Kraft ist. Es ist also

$$\sigma_d = \varepsilon \mathfrak{S} \dots \dots \dots (31)$$

wobei ε ein Faktor ist, der nach den bisherigen Messungen für denselben Stoff als konstant betrachtet werden kann¹⁾. Für verschiedene Stoffe ist er verschieden, was sich nach der Faraday'schen Vorstellung erklären läßt, wenn man annimmt, daß die Anzahl der leitenden Teilchen in der Volumseinheit verschieden ist. Man nennt ε die Elektrisierungszahl des betreffenden Stoffes.

Aus der letzten und vorletzten Gleichung folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S} + 4\pi\varepsilon\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(1 + 4\pi\varepsilon).$$

Vergleicht man diese mit der Gl. 20, so erhält man

$$\vartheta = 1 + 4\pi\varepsilon \dots \dots \dots (32)$$

als Beziehung zwischen der Dielektrizitätskonstante und der Elektrisierungszahl²⁾.

¹⁾ Das gilt aber nur für homogene Stoffe. Bei Kristallen ist ε je nach der Richtung, in der die elektrische Kraft den Kristall durchsetzt, verschieden.

²⁾ Für die obige Größe $\sigma_d = \varepsilon\mathfrak{S}$ wird nach Maxwell auch der Ausdruck „elektrische Verschiebung“ angewendet. Es liegt kein Grund vor, den anschaulicheren Ausdruck „Flächendichte“, den Gauß eingeführt hat, aufzugeben.

35. Innere Energie eines polarisierten Dielektriks.

In § 33 haben wir gesehen, warum in der Richtung der Kraftlinien ein Zug, und senkrecht zu den Kraftlinien eine Abstoßung wirkt: die in den einzelnen Teilchen induzierten Ladungen wirken derart aufeinander. Das unter dem Einfluß einer elektrischen Kraft stehende Dielektrik befindet sich also in einem inneren Spannungszustand¹⁾. Diesem Spannungszustand muß wie bei einer gespannten Feder eine potentielle Energie entsprechen. Greifen wir einen Einheitswürfel aus dem Dielektrik heraus, so befindet sich entsprechend Abb. 45 auf seinen zu den Kraftlinien senkrechten Endflächen die Ladung σ_d . Nach Gl. 29 ist dann die Ladungsenergie dieses Einheitswürfels

$$A_{\text{einh}} = \frac{\sigma_d E}{2}.$$

wenn E die Potentialdifferenz zwischen den Endflächen bedeutet. Zufolge Gl. 21 ist dann

$$A_{\text{einh}} = \frac{\mathfrak{B} E}{8 \pi}.$$

Da $\mathfrak{S} = \frac{E}{a}$, und in dem angenommenen Einheitswürfel $a = 1$ ist.

so ist $\mathfrak{S} = E = \frac{\mathfrak{B}}{\vartheta}$. Mithin

$$A_{\text{einh}} = \frac{\mathfrak{B}^2}{8 \pi \vartheta} \dots \dots \dots (33)$$

oder

$$A_{\text{einh}} = \vartheta \frac{\mathfrak{S}^2}{8 \pi} \dots \dots \dots (34)$$

Für einen Kondensator mit den Flächen S und dem Abstand a erhält man die ganze innere Energie A , wenn man mit dem Rauminhalt $a S$ multipliziert, also

$$A = \vartheta \frac{a S \mathfrak{S}^2}{8 \pi}.$$

Weil $\mathfrak{S} = \frac{E}{a}$ und $C = \vartheta \frac{S}{4 \pi a}$ ist (§ 27), so folgt

$$A = \frac{C E^2}{2}.$$

Das ist dieselbe Formel, die wir in § 32, ausgehend von der wirklichen Ladung der Kondensatorplatten, erhalten haben. Die beiden müssen gleich groß sein, ebenso wie beim Spannen einer Feder die Kraft, welche spannt, und die Gegenkraft der Feder.

¹⁾ Dieser Spannungszustand äußert sich in Gestaltsveränderungen mancher Isolatoren, die man als Elektrostriktion bezeichnet.

36. Anziehung und Abstoßung eines Nichtleiters in einem elektrischen Felde.

Wir betrachten nun den Fall, daß sich zwei nichtleitende Stoffe mit den Dielektrizitätskonstanten ϑ und ϑ' nebeneinander in einem elektrischen Felde befinden, das von einer positiv geladenen Platte CD (Abb. 46) erzeugt wird. GH sei die Grenzfläche zwischen den beiden Stoffen, von der wir voraussetzen, daß sie senkrecht zu den Kraftlinien verläuft. Da Kraftlinien in einem Dielektrik nicht entstehen oder verschwinden können, so ist ihre Dichte \mathfrak{B} an allen Stellen dieselbe. Daher ist nach Gl. 20

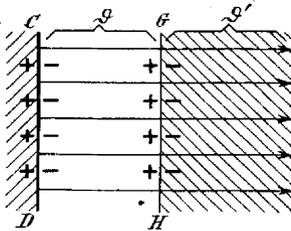


Abb. 46.

$$\mathfrak{B} = \vartheta \mathfrak{E} = \vartheta' \mathfrak{E}' \quad \dots \quad (35)$$

d. h. die elektrisierenden Kräfte in den beiden Stoffen verhalten sich umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstanten. Das steht in Übereinstimmung mit Gl. 16, wonach die in einem Dielektrik wirkende Kraft umgekehrt proportional der Dielektrizitätskonstante ist. Die Flächendichte der scheinbaren Ladung an der Endfläche des einen Stoffes ist nach Gl. 31

$$\sigma_a = \varepsilon \mathfrak{E}$$

und an der Endfläche des anderen Stoffes

$$\sigma'_a = \varepsilon' \mathfrak{E}'.$$

An der Grenzfläche GH sind diese Ladungen entgegengesetzt. Mithin ist die resultierende Flächendichte an der Grenzfläche

$$\sigma'_a - \sigma_a = \varepsilon' \mathfrak{E}' - \varepsilon \mathfrak{E}.$$

Zufolge Gl. 32 ist

$$\varepsilon' = \frac{\vartheta' - 1}{4\pi} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\vartheta - 1}{4\pi}.$$

Nach Einsetzung dieser Werte und des Wertes für \mathfrak{E}' aus Gl. 35 ergibt sich

$$\sigma'_a - \sigma_a = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta'} \right) \quad \dots \quad (36)$$

oder nach Einsetzung von Gl. 20

$$\sigma'_a - \sigma_a = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta'} \right) \quad \dots \quad (37)$$

Ist $\vartheta' > \vartheta$, so ist die rechte Seite der Gleichung positiv, und umgekehrt. D. h. in der resultierenden Flächendichte $\sigma'_a - \sigma_a$ überwiegt die Ladung jenes Stoffes, der die größere Dielektrizitäts-

konstante hat, und zwar ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Ladungen, das ja nur davon abhängt, ob die Platte CD positiv oder negativ geladen ist. Ist in Abb. 46 $\vartheta' > \vartheta$, so überwiegt die Ladung des rechts von GH gelegenen Stoffes und daher ist die resultierende Ladung an der Grenzfläche GH negativ, wird also von der positiven Platte CD angezogen. Ist hingegen $\vartheta' < \vartheta$, so ist die resultierende Ladung der Grenzfläche positiv und wird daher von der positiven Platte CD abgestoßen. Ist der zweite Stoff ein begrenzter Körper, z. B. $G H K L$ (Abb. 47), der in einem homogenen Felde von dem ersten Stoff allseitig umgeben ist, so wird die Grenzfläche GH , wie eben gezeigt, abgestoßen. — An der Grenzfläche KL überwiegt die negative Ladung; sie wird also von CD angezogen. Da nun in einem homogenen Felde die Kraft an allen Stellen des

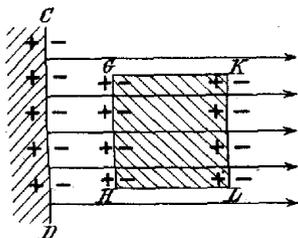


Abb. 47.

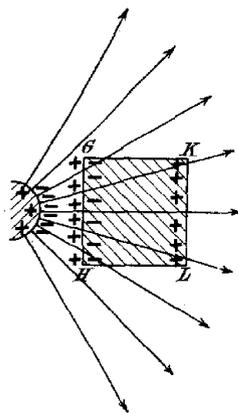


Abb. 48.

Feldes dieselbe ist, heben sich die Anziehung der Fläche KL und die Abstoßung der Fläche GH gegenseitig auf, und der Körper bleibt in Ruhe. Ist aber das Feld nicht homogen (Abb. 48), so ist die Kraft an der Fläche GH größer als an der Fläche KL , es überwiegt die Abstoßung der Fläche GH und daher wird der ganze Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien abgestoßen. Ist also ein nichtleitender, begrenzter Körper von einem anderen nichtleitenden Stoff umgeben, und ist das Feld homogen, so bleibt der Körper in Ruhe; ist aber das Feld nicht homogen, so sucht sich der Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien zu bewegen, wenn seine Dielektrizitätskonstante kleiner ist als die des umgebenden Stoffes, d. h. er wird abgestoßen. Dagegen bewegt er sich in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien (also in gleicher Weise wie ein leitender Körper), wenn seine Dielektrizitätskonstante größer ist als die des umgebenden Stoffes, d. h. er wird angezogen. Gegenüber den Nichtleitern verhält sich ein Leiter so wie ein Körper, dessen Dielektrizitätskonstante unendlich groß ist.

Auch aus der elektrischen Energie erkennt man, wie sich ein Körper in einem elektrischen Felde verhält. Nach einem allgemeinen

Naturgesetz bewegt sich ein Körper von selbst so, daß die potentielle Energie des ganzen Systems vermindert wird. Aus Gl. 33 ersieht man, daß diese Energie der Dielektrizitätskonstante ϑ verkehrt proportional ist. Bringt man einen Körper, dessen D.K. ϑ' kleiner ist als die D.K. ϑ des vorhandenen Feldes, in dieses hinein, so vergrößert sich die gesamte elektrische Energie. Die Vergrößerung ist gleich jener mechanischen Arbeit, die man aufwenden mußte, um den Körper in das Feld hineinzubringen. Kommt hingegen der Körper aus dem Felde heraus, so vermindert sich die gesamte elektrische Energie, d. h. der Körper bewegt sich von selbst aus dem Felde heraus. Die mechanische Arbeit, die er dabei leistet, ist gleich jenem Betrage, um den sich die potentielle Energie des Feldes vermindert. Das Entfernen aus dem Felde heraus ist gleichbedeutend mit einer Bewegung in der Richtung der divergierenden Kraftlinien.

Hat der Körper eine D.K., die größer ist als die des vorhandenen Feldes, so findet eine Verminderung der gesamten elektrischen Energie statt, wenn der Körper in das Feld hineinkommt, d. h. er wird von den elektrischen Kräften hineingezogen. Das Hineinkommen ist gleichbedeutend mit einer Bewegung in der Richtung, in der die Kraftlinien konvergieren.

Befindet sich der Körper in einem homogenen Felde, so kann von selbst keine Bewegung eintreten, denn die elektrische Energie bleibt unverändert, ob der Körper seine Lage ändert oder nicht.

37. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Nichtleiter.

Wir betrachten nun den Fall, wo eine elektrisierende Kraft schief durch die Grenzfläche GH zweier nichtleitender Stoffe hindurchgeht (Abb. 49). α und α' seien ihre Einfallswinkel in den beiden Stoffen.

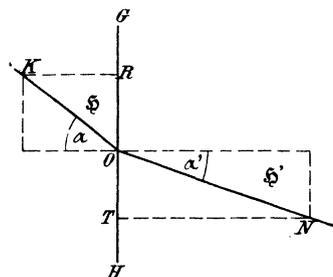


Abb. 49.

Die Größe der elektrisierenden Kraft \S im linken Stoff sei durch die Strecke OK , die der elektrisierenden Kraft \S' im rechten Stoff durch die Strecke ON dargestellt. Wir zerlegen beide in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche. Die parallelen Komponenten sind

$$OR = \S \sin \alpha$$

$$OT = \S' \sin \alpha'.$$

Da diese nach Voraussetzung parallel zur Grenzfläche sind, also nicht von einem Stoff in den andern übergehen, sondern beide nur in dem einen oder in dem anderen verlaufen, so müssen sie einander gleich sein und sich aufheben, weil auf denselben Punkt O nicht

zwei verschiedene Komponenten derselben Kraft wirken können¹⁾.
Es ist also

$$OR = OT$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (38)$$

d. h. die Sinus der Einfallswinkel zu beiden Seiten der Grenzfläche verhalten sich umgekehrt wie die elektrisierenden Kräfte in den beiden Stoffen.

Wie verhalten sich nun die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen? Aus Abb. 50, die ein durch die Kraftlinien *KON* und *PML* begrenztes Kraftlinienbündel darstellt, erkennt man schon, daß die Kraftliniendichte in dem Stoff mit dem kleineren Einfallswinkel (α') kleiner sein muß als in dem anderen, weil der Querschnitt des Kraftlinienbündels größer ist. Zieht man von *O* und *M* aus die Senkrechten *OC* und *MD*, so ist

$$MD = OM \cdot \cos \alpha$$

$$OC = OM \cdot \cos \alpha'.$$

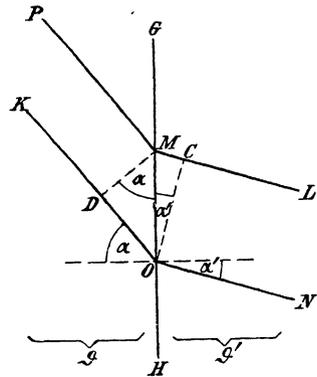


Abb. 50.

Die Kraftliniendichten \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' sind umgekehrt proportional den Strecken *MD* und *OC*, da ja bei derselben Anzahl der Kraftlinien ihre Dichte um so größer ist, je kleiner der Querschnitt des Bündels ist. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{OC}{MD}.$$

Mithin

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (39)$$

d. h. die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen verhalten sich umgekehrt wie die Cosinus der Einfallswinkel. Die Kraftliniendichte ist also um so größer, je größer der Einfallswinkel ist.

Dividiert man die letzte Gleichung durch Gl. 38, so ist

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} : \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} : \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}.$$

¹⁾ Es ist hier vorausgesetzt, daß es sich um eine und dieselbe elektrisierende Kraft mit der Richtung *KON* handelt, die in Komponenten zerlegt wurde. Bei verschiedenen Kräften könnten natürlich auch verschiedene Größen auf denselben Punkt wirken.

Zufolge der Gl. 20 wird daraus

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} \cdot \dots \dots \dots (40)$$

d. h. die trig. Tangenten der Einfallswinkel verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten. Das ist das Brechungsgesetz der Kraftlinien. Gehen z. B. die Kraftlinien von einem Stoffe (ϑ)

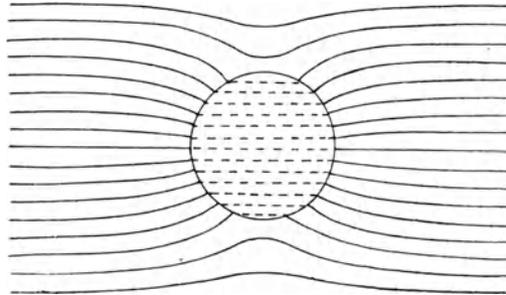


Abb. 51. Kraftlinienverlauf, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel größer ist als die der Umgebung.

über in einen Stoff, dessen Dielektrizitätskonstante $\vartheta' = \infty$ ist, so muß nach der letzten Gleichung $\operatorname{tg} \alpha' = \infty$, also $\alpha' = 90^\circ$ sein, selbst wenn α nahezu 90° ist. Nur wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, verliert die Formel ihre Bedeutung, denn dann laufen die Kraftlinien parallel zur Trennungsfäche. Leitende Körper kann man als Stoffe betrachten, deren $\vartheta = \infty$ ist. Dann müssen also alle Kraftlinien von der Oberfläche eines Leiters senkrecht ausgehen. Dasselbe hat sich in § 14 daraus ergeben, daß die Oberfläche eines Leiters eine Niveaufäche ist.

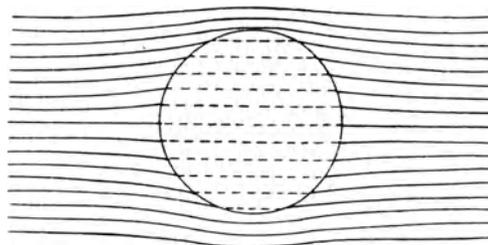


Abb. 52. Kraftlinienverlauf, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel kleiner ist als die der Umgebung.

Aus den Gl. 38, 39 und 40 läßt sich in jedem Fall der Verlauf der Kraftlinien konstruieren, wenn ihre Richtung in einem der nichtleitenden Stoffe gegeben ist. Abb. 51 zeigt den Verlauf, wenn in ein homogenes Feld eine nichtleitende Kugel gebracht wird, deren Dielektrizitätskonstante größer ist als die des umgebenden Stoffes.

Man sieht, die Kraftlinien werden von der Kugel an sich gezogen, wie von einem Leiter (vgl. Abb. 23). Je größer die Dielektrizitätskonstante der Kugel ist, desto mehr Kraftlinien zieht sie an sich. Abb. 52 zeigt den Verlauf der Kraftlinien, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel kleiner ist als die des umgebenden Stoffes. Abb. 53 zeigt dasselbe; es ist die photographische Aufnahme¹⁾ der durch suspendiertes Glyzinpulver in Öl sichtbar gemachten Kraftlinien eines elektrischen Feldes, in dem sich ein Hartgummiring befindet. Die Kraftlinien werden von dem Ring abgedrängt, weil seine Dielektrizitätskonstante kleiner ist als die des Öles. Infolgedessen ist die Kraftliniendichte innerhalb des Ringes kleiner als außerhalb.

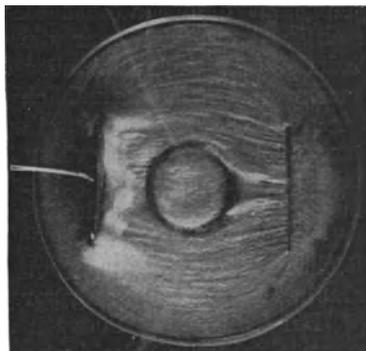


Abb. 53. Hartgummiring in Öl.

Es ist zu beachten, daß beim Durchgang der Kraftlinien durch irgendein anderes Dielektrikum keine unterbrochen oder vernichtet, sondern nur ihre Richtung verändert wird. Anfang und Ende elektrischer Kraftlinien befindet sich nur auf freien elektrischen Ladungen.

Über die Bezeichnung „Kraftlinien“ als \mathfrak{B} -Linien gegenüber den Richtungen elektrisierender Kräfte vgl. die Anm. auf S. 143.

38. Rückstandsbildung im Dielektrikum.

Wir haben im Vorhergehenden Stoffe vorausgesetzt, die vollkommene Nichtleiter (Isolatoren) sind, d. h. solche, die auch unter den stärksten elektrischen Kräften keine Leitung der Elektrizität, sondern nur Polarisierung (§ 33) zulassen. Die Elektrizität, die an den Endflächen eines solchen Stoffes durch die Wirkung der elektrisierenden Kraft entsteht und sich nicht ableiten läßt, wurde als scheinbare Ladung bezeichnet, im Gegensatz zu der Ladung eines Leiters, die sich ableiten läßt, und die wir als wahre oder wirkliche Ladung bezeichnet haben. Die scheinbare Ladung eines vollkommenen Isolators verschwindet, sobald die elektrisierende Kraft verschwindet, weil sich die in Abb. 45 eingezeichneten Ladungen der einzelnen Teilchen wieder gegenseitig ausgleichen. Die Erfahrung lehrt aber, daß dies bei keinem bekannten Stoff vollkommen zutrifft, sondern daß nach längerer Einwirkung der elektrisierenden Kraft immer eine gewisse Ladung zurückbleibt, die man als Rückstand bezeichnet. Sie entsteht dadurch, daß eine Bewegung der durch Influenz getrennten Elektrizitäten wie bei einem Leiter eintritt. Wegen

¹⁾ Von M. Seddig. Siehe die Fußnote auf S. 6.

des großen Leitungswiderstandes im Isolator geschieht dies nur allmählich; und aus demselben Grunde kann die Wiedervereinigung der durch Influenz getrennten Elektrizitäten nur langsam erfolgen. In der Regel kann der nach einer starken Elektrisierung an der Oberfläche verbleibende Rückstand nur dadurch beseitigt werden, daß man den betreffenden festen Isolator von einer Flamme oder wenigstens den Flammgasen bestreichen läßt (vgl. § 244). Aber auch dadurch wird nur die auf der Oberfläche zurückgebliebene Ladung beseitigt, nicht aber diejenige, die im Innern sitzt. Diese verschwindet nur allmählich¹⁾. Die geringste Rückstandsbildung zeigen jene Stoffe, die am reinsten erhalten werden können (Paraffin, Quarz, Glimmer). Je größer die Verunreinigung (oder Mischung mit anderen Stoffen), desto größer die Rückstandsbildung. Die Bildung eines solchen Ladungsrückstandes läßt sich mit der elastischen Nachwirkung bei elastischen Körpern und mechanischen Kräften vergleichen, weshalb man bei Rückstandsbildung auch von elektrischer Nachwirkung sprechen kann.

Bei festen und flüssigen Isolatoren, die mit geladenen Leitern in unmittelbarer Berührung (ohne Luftzwischen-schicht) stehen, können Ladungen natürlich auch von diesen auf jene übergehen.

Bei wechselnder Elektrisierung (Kondensator in einem Wechselstromkreis) verursacht die Rückstandsbildung einen Arbeitsverlust, weil sich die aufeinanderfolgenden, entgegengesetzten Ladungen unter Wärmebildung gegenseitig vernichten. Es ist dies der Hauptteil der dielektrischen Verluste (vgl. § 182).

¹⁾ Man erhält daher aus einem Kondensator, dessen Platten an einem festen Dielektrik anliegen, einen allmählich abnehmenden und erst nach längerer Zeit Null werdenden Strom (Greinacher, Ann. d. Phys., Bd. 17, 1905; Bd. 18, 1905).

Drittes Kapitel.

Grundgesetze der strömenden Elektrizität.

39. Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes.

In § 13 sind wir zu dem Ergebnis gekommen, daß bei allen magnetischen und elektrischen Anordnungen das Bestreben vorhanden ist, eine solche Bewegung einzuschlagen, daß dadurch der Potentialwert verkleinert wird. Bei den elektrischen Erscheinungen haben wir zu unterscheiden zwischen Bewegungen der Träger, d. h. jener Körper, auf denen die elektrischen Massen sitzen (ponderomotorisch), und zwischen Bewegungen der elektrischen Massen selbst auf ihren Trägern (elektromotorisch). Bei den magnetischen Erscheinungen gibt es nur die erste Art von Bewegung.

Wenn also auf einem leitenden Körper zwei Punkte mit verschiedenem Potentiale vorhanden sind, so findet eine Bewegung der Elektrizität vom höheren zum niederen Potentiale so lange statt, bis der Unterschied ausgeglichen ist. Gelingt es durch irgendwelche Vorrichtung, einen Potentialunterschied beständig aufrecht zu erhalten, so findet ein beständiges Strömen der Elektrizität statt, und man hat einen elektrischen Strom.

Da wir aus der Mechanik gewohnt sind, die Ursache einer Bewegung Kraft zu nennen, so nennen wir die Ursache eines elektrischen Stromes elektromotorische Kraft E und bezeichnen damit den Potentialunterschied $U_2 - U_1$ zwischen jenen Punkten¹⁾. Dann ist die elektromotorische Kraft auch gleich dem Linienintegral der elektrischen Kraft (§ 14).

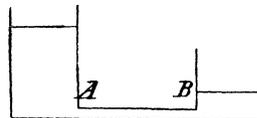


Abb. 54.

Der Ausdruck Strom ist daraus entstanden, daß die elektrischen Vorgänge dieselben Gesetze befolgen wie eine strömende Flüssigkeit. Verbindet man nämlich zwei mit einer

¹⁾ In dieser Gleichstellung der Begriffe Potentialunterschied und elektromotorische Kraft liegt eine unrichtige Ausdrucksweise, die sich leider nicht mehr wird beseitigen lassen. Denn nach § 11 ist Potential und daher auch Potentialunterschied ein Arbeitsbegriff und keine Kraft.

Flüssigkeit gefüllte Gefäße *A* und *B* (Abb. 54) durch eine Röhre, so strömt die Flüssigkeit von *A* nach *B* so lange, als das Niveau der Flüssigkeit in *A* höher steht als in *B*. Den analogen Fall für die Elektrizität stellt Abb. 55 dar, wo zwei leitende Kugeln durch einen Draht verbunden sind. Durch diesen strömt so lange Elektrizität, als die eine Kugel höheres Potential hat wie die andere.

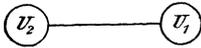


Abb. 55.

40. Stromquellen.

Einen beständigen Potentialunterschied kann man dadurch in einfacher Weise herstellen, daß man ein Metall in eine Flüssigkeit taucht, die auf dasselbe chemisch einwirkt. Es besitzt dann, solange eine chemische Reaktion stattfindet, die Flüssigkeit einen höheren Potentialwert als das Metall. Verbindet man das Metall *A* (Abb. 56) durch einen Leiter, der selbst nicht von der Flüssigkeit angegriffen wird (Kohle oder Platin), mit dieser, so findet ein Strömen der Elektrizität von der Flüssigkeit durch diesen Leiter zum Metalle statt. Es ist die einfachste Form eines galvanischen Elementes, nämlich das von Smee, wenn als wirksames Metall Zink und als Flüssigkeit verdünnte Schwefelsäure verwendet wird. Man bezeichnet dann die Kohle oder das Platin als den positiven, das Zink als den negativen Pol des Elementes.

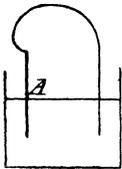


Abb. 56.

Die Vorgänge in der Flüssigkeit selbst zwingen zu der Annahme, daß der Strom auch durch diese und zwar vom Zink zur Kohle geht. Die Elektrizität vollführt also einen Kreislauf; die Strombahn ist eine geschlossene. Das gilt für alle wie immer erzeugten dauernden Ströme, so daß wir zu dem Grundsatz gelangen, es gibt überhaupt keine ungeschlossenen Ströme, und in einer Stromquelle wird bloß die Elektrizität in Bewegung gesetzt, nicht aber erzeugt. Die Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit besteht natürlich immer, auch wenn der Stromkreis nicht geschlossen ist.

41. Begriff der Stromstärke.

Die Stärke eines elektrischen Stromes oder kurz Stromstärke, die wir mit *J* bezeichnen, ist jene Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des betreffenden Leiters fließt.

Um daraus die während einer Zeit *t* durch den Leiter geflossene Elektrizitätsmenge *Q* zu erfahren, hat man mit der Zeit zu multiplizieren; es ist also

$$Q = J \cdot t.$$

Man erkennt sofort, daß diese Begriffsbestimmung den Gesetzen der strömenden Flüssigkeiten entnommen ist; sie ist allgemein gültig, ohne Rücksicht darauf, in welchen Maßeinheiten wir diese Größen messen.

42. Das Ohmsche Gesetz.

Allgemein nehmen wir Kraft und Bewegung proportional an. Wir setzen daher auch die Ursache eines elektrischen Stromes, die Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft, proportional der Stromstärke. Lehnen wir uns wieder an das Beispiel aus der Hydrodynamik (§ 39) an, so sieht man ein, daß auch dort die in der Zeiteinheit durch die Röhre strömende Flüssigkeitsmenge proportional ist der Niveaudifferenz in beiden Gefäßen. Man erkennt aber auch, daß an den Wänden der Röhre, eine Reibung stattfindet, die der Strömung einen Widerstand entgegensetzt, und daß die Strömung um so schwächer ist, je größer dieser Widerstand ist.

Ganz analog ist auch die elektrische Stromstärke proportional der Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ und verkehrt proportional dem elektrischen Leitungswiderstande W , so daß wir haben

$$J = k \frac{U_2 - U_1}{W}.$$

Dieses Gesetz gewinnt an Einfachheit, wenn man die Maßeinheiten, durch die die vorkommenden Größen ausgedrückt werden, so wählt, daß der Proportionalitätsfaktor $k = 1$ wird. Dann lautet das Gesetz

$$J = \frac{U_2 - U_1}{W},$$

oder wenn die Potentialdifferenz eine elektromotorische Kraft E bezeichnet,

$$J = \frac{E}{W} \quad \text{oder} \quad E = WJ.$$

Dieses Gesetz heißt nach seinem Entdecker das Ohmsche Gesetz.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten eines Stromkreises wird Spannung genannt; insbesondere Klemmenspannung, wenn die Potentialdifferenz zwischen den Anschlußklemmen eines Apparates oder einer Maschine gemeint ist (§ 47). Die Bezeichnung „Elektromotorische Kraft“¹⁾ wird auf jene Stellen beschränkt, wo die Ursache einer Stromerzeugung sitzt (galvanische Zellen, Dynamomaschinen, Transformatoren usw.).

¹⁾ Abgekürzt: EMK.

Die praktischen Einheiten, die der Bedingung $k = 1$ entsprechen, sind (nach dem Gesetz des Deutschen Reiches vom 1. VI. 1898): Für die Stromstärke das Ampere; das ist ein Strom, der aus einer Lösung von Silbernitrat in einer Sekunde 1,118 mg Silber ausscheidet. Für den Leitungswiderstand das Ohm. Diesen Widerstand besitzt eine Quecksilbersäule von 106,3 cm Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0° Celsius. Für die Potentialdifferenz und elektromotorische Kraft ist die Einheit das Volt. Diese besteht zwischen zwei Punkten eines Leiters, zwischen denen der Widerstand 1 Ohm beträgt, und der von einem Strom von 1 Ampere durchflossen wird. Denn nach der letzten Gleichung ist $E = 1$, wenn J und W gleich 1 sind (vgl. § 299).

Wird in irgendeinem Stromkreis $E = 0$ gemacht, d. h. die EMK ausgeschaltet, so ist (trotz geschlossenem Stromkreis) auch $WJ = 0$, also kein Strom vorhanden¹⁾.

43. Leitungswiderstand und Leitfähigkeit.

Der Widerstand eines Leiters ist um so größer, je größer seine Länge und je kleiner sein Querschnitt ist. Man sieht auch dies leicht ein, wenn man an die von einer Flüssigkeit durchströmte Röhre denkt. Man hat also

$$W = \alpha \frac{l}{q},$$

wobei α ein Proportionalitätsfaktor ist, dessen Bedeutung man erkennt, wenn man $l = 1$ und $q = 1$ setzt; dann ist $W = \alpha$, d. h. α ist der Widerstand eines Leiters von der Länge 1 und dem Querschnitt 1. Sind diese Einheiten cm , so heißt α der spezifische Leitungswiderstand. Dieser ist natürlich für verschiedene Stoffe verschieden und hängt außerdem auch noch vom physikalischen Zustande und der Temperatur ab.

Für die Praxis ist es bequemer, den Wert von α so anzugeben, daß man den Widerstand in Ohm erhält, wenn man die Länge in Metern und den Querschnitt in mm² mißt. Die folgende Tabelle enthält diese Werte von α bei 15° Celsius und den Temperaturkoeffizienten γ (vgl. § 44) für käuflich reine Metalle.

Den reziproken Wert des Widerstandes $\frac{1}{W}$ nennt man Leitwert; seine dem Ohm entsprechende praktische Einheit ist das Siemens²⁾ (S). Dementsprechend gibt es auch einen spezifischen Leitwert κ , der Leitfähigkeit heißt²⁾. Es ist dies der reziproke

¹⁾ Diese Selbstverständlichkeit wird in der mathematischen Physik sehr umständlich dadurch ausgedrückt, daß man sagt, das Linienintegral der elektrischen Kraft längs des geschlossenen Kreises ist null ($\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{l} = 0$).

²⁾ Nach Beschlüssen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen.

Wert des spezifischen Widerstandes, also $\kappa = \frac{1}{\alpha}$. Das elektrische Verhalten eines Stoffes ist durch diese Zahl ebenso gut charakterisiert wie durch den spezifischen Widerstand.

	Widerstand von 1 m Länge, 1 mm ² Querschnitt in Ohm bei 15°	Temperatur- koeffizient γ
Aluminium	0,029	0,0039
Blei (gepreßt)	0,21	0,0039
Eisen ¹⁾ (Draht und Blech) . .	0,12—0,14	0,0048
Gold	0,022	0,0037
Kupfer ²⁾	0,017—0,018	0,0043
Nickel (geglüht)	0,13	0,0038
Platin	0,094	0,0025
Quecksilber	0,954	0,0088
Silber (weich)	0,016	0,0039
Tantal	0,016	0,003
Zink ³⁾ (gepreßt)	0,06	0,0039
Zinn	0,14	0,0040
Messing (Cu, Zn)	0,07—0,085	0,0015
Nickelin (Cu, Ni)	0,35—0,44	0,0002
Neusilber (Cu, Ni, Zn)	0,2—0,4	0,0003
Rheotan (Cu, Ni, Zn)	0,47	0,00023
Konstantan (Cu, Ni)	0,46—0,5	0,00001—0,0003
Manganin (Cu, Mn)	0,4—0,45	— 0,00001
Achenrainer Draht 000	0,5	— 0,00002
Kruppin (Fe, Ni)	0,8	0,00065

Bei den Legierungen hängt der Widerstand natürlich sehr vom Mischungsverhältnis ab, weshalb die vorstehenden Werte nur als durchschnittliche zu betrachten sind.

Spezifische Widerstände (Würfel von 1 cm) von sehr schlechten Leitern⁴⁾ (Isolatoren) in Ohm bei Zimmertemperatur:

¹⁾ Über reines Eisen vgl. § 44, über den „Wechselstromwiderstand“ von Eisendrähten vgl. § 169.

²⁾ Von der internationalen elektrotechnischen Kommission wurden folgende Werte für „mustergültig geglühtes Kupfer“ angenommen: Widerstand bei 20° 0,01724, Temperaturkoeffizient 0,00428 („ETZ“ 1914 S. 747).

³⁾ Über Zink als Leitungsmaterial vgl. das „Merkblatt“ des Verb. deutscher Elektrot. „ETZ“ 1917 S. 569.

⁴⁾ Nach Koller, Ber. d. Wiener Akad., Bd. 98, 1889. Humann, „ETZ“ 1903 S. 1082.

Zement (trocken) . . .	$5 \cdot 10^3$	Paraffin	$10^{13} - 10^{23}$
Schiefer	$1 - 100 \cdot 10^5$	Wasser (reinstes) . . .	10^9
Marmor	$2 - 6 \cdot 10^8$	Alkohol	$2 \cdot 10^{10}$
Holzkohle	$2 \cdot 10^{11}$	Benzin	10^{14}
Glimmer	$2 \cdot 10^{12}$	Olivenöl	$10^{12} - 10^{15}$
Glas	$10^{12} - 10^{18}$	Rizinusöl	10^{15}
Gummi (rein)	$10^{14} - 10^{20}$	Schmieröl	10^{18}
Hartgummi	$10^{13} - 10^{22}$	Petroleum	10^{18}
Porzellan bei 10^0 . . .	10^{18}		
Porzellan bei 80^0 . . .	10^{15}		

Mit steigender Temperatur nimmt der Widerstand der Isolatoren stark ab. Bei hohen Spannungen hängt er auch von der Spannung ab, weil Entladungsvorgänge hinzutreten.

Über den Widerstand von Kohle und Selen siehe § 45, über den Widerstand elektrolytischer Leiter § 62.

Nach dieser Tabelle berechnet sich z. B. der Widerstand einer 1000 m langen Kupferleitung von 5 mm^2 Querschnitt bei 15^0 :

$$\frac{0,0175 \cdot 1000}{5} = 3,5 \text{ Ohm.}$$

44. Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur.

Der Widerstand aller Substanzen ändert sich mit der Temperatur, und zwar nimmt bei steigender Temperatur der Widerstand der Metalle zu, der der Kohle und elektrolytischen Leiter hingegen ab.

Bezeichnet man die Zunahme der Widerstandseinheit bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 Celsius mit γ , so ist die Zunahme des Widerstandes W bei einer Temperaturerhöhung um t Grade $Wt\gamma$. Daher ist der Widerstand bei t Graden

$$W_t = W + W\gamma t = W(1 + \gamma t). \quad \text{. (I)}$$

Der Wert von γ ist aber selbst wieder von der Temperatur abhängig, so daß die vorstehende Gleichung nur innerhalb enger Grenzen — mit den auf S. 71 angegebenen Werten von γ nur in der Nähe von 15^0 — genau ist. Für Temperaturen unter 15^0 ist zu setzen: $W_t = W(1 - \gamma t)$.

Für Flüssigkeiten, Kohle, Karborundum u. dgl. ist γ bei zunehmenden Temperaturen negativ.

Für Temperaturen über 100^0 ist der Widerstand durch folgende Formel darzustellen, wenn W_0 den Widerstand bei 0^0 bedeutet

$$W_t = W_0(1 + \beta t + \delta t^2). \quad \text{. (II)}$$

Für die Koeffizienten β und δ gelten folgende Werte:

	β	δ
Aluminium	0,00388	0,0000013
Kupfer	0,00364	0,0000006
Platin	0,00245	0,0000006
Silber	0,00397	0,0000007
Quecksilber	0,00088	0,0000011

Zur Berechnung der Temperatur t_2 einer Leitung aus dem bei dieser Temperatur gemessenen Widerstand w_2 und dem bei einer anderen Temperatur t_1 gemessenen Wert w_1 gilt:

$$w_2 = w_0 (1 + \gamma t_2)$$

$$w_1 = w_0 (1 + \gamma t_1)$$

Eliminiert man w_0 (Widerstand bei 0°), so erhält man

$$w_2 = w_1 \frac{1 + \gamma t_2}{1 + \gamma t_1} = w_1 \left[1 + \frac{\gamma}{1 + \gamma t_1} (t_2 - t_1) \right]$$

Hieraus kann also die Temperaturzunahme ($t_2 - t_1$) aus den gemessenen Widerständen w_2 und w_1 berechnet werden. Diese Formel genügt für alle elektrotechnischen Zwecke zwischen 0° und 100° mit den auf S. 71 angegebenen Werten von γ . Die in den „Maschinennormalien“ des Verbandes Deutscher Elektrot. angegebene Formel (Emde, ETZ 1903 S. 818):

$$t_2 - t_1 = (T + t_1) \frac{w_2 - w_1}{w_1}$$

wobei $T = 235$, gibt auch keine größere Genauigkeit, weil auch T nicht konstant, sondern von der Temperatur abhängig ist. Genau kann die Beziehung zwischen Widerstand und Temperatur überhaupt nicht durch eine einzige Konstante, sondern nur durch zwei (β und δ gemäß Gl. II) dargestellt werden.

Ein eigentümliches Verhalten zeigt chemisch reines Eisen. Der Temperaturkoeffizient γ ist unter 100° gleich 0,0048, nimmt dann zu und erreicht bei etwa 850° den Wert 0,018. Dann fällt er rasch wieder auf 0,0067. Abb. 57 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes

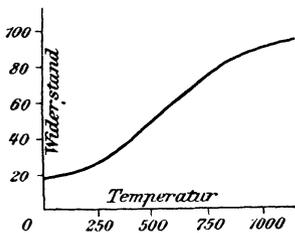


Abb. 57.

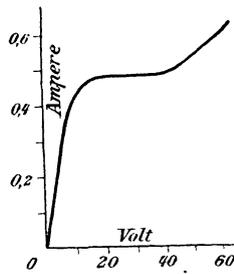


Abb. 58.

von der Temperatur eines chemisch reinen Eisendrahtes, der (in Wasserstoff) bis zur Weißglut durch einen Strom erhitzt wird. Von technischer Bedeutung ist es, daß der Widerstand zwischen 500° und 750° ungefähr proportional der Temperatur zunimmt. Infolge-

dessen bleibt die Stromstärke in einem solchen Draht über einen gewissen Bereich konstant, trotz zunehmender Spannung. Abb. 58 zeigt dies, die Stromstärke ist zwischen 20 und 35 Volt nahezu konstant¹⁾.

1. Beispiel: Ein dünner Platindraht von 500Ω Widerstand bei 15° nimmt bei einer Temperaturerhöhung von 1° um $500 \cdot 0,0024 = 1,2 \Omega$ zu. Das ist eine Größe, die noch sehr leicht meßbar ist. Man kann daher, wenn man eine solche Widerstandsänderung gemessen hat, daraus die Temperaturänderung berechnen. Man nennt eine solche Vorrichtung Bolometer.

2. Beispiel: Wie groß ist der Temperaturkoeffizient α eines Voltmeters, dessen Kupferdrahtwicklung einen Widerstand von $w_1 = 100 \text{ Ohm}$ und einen Temperaturkoeffizienten von $\gamma_1 = 0,004$ hat; dessen Vorschaltwiderstand $w_2 = 500$, $\gamma_2 = 0,00001$ ist. Der gesamte Widerstand ist also $W = 600$. Es gilt folgende Gleichung $W(1 + \alpha) = w_1(1 + \gamma_1) + w_2(1 + \gamma_2)$. Daraus

$$\alpha = \frac{w_1(1 + \gamma_1) + w_2(1 + \gamma_2)}{W} - 1 = \frac{100,4 + 500,005}{600} - 1 = 1,0007 - 1 = 0,0007.$$

Einen von der Temperatur sehr stark abhängigen Temperaturkoeffizienten haben die meisten Oxyde (wie z. B. Magnesia im Leuchtkörper der Nernstlampe, Karborundum, Porzellan u. a.), sowie die meisten Sulfide. Bei niedriger Temperatur ist ihr Widerstand so groß, daß sie als Isolatoren betrachtet werden können. Bei höheren Temperaturen wird ihr Widerstand sehr klein, so daß sie als gute Leiter betrachtet werden können. Man rechnet sie daher auch zu den elektrolytischen Leitern (vgl. § 65).

45. Widerstand von Kohle und Selen.

Kohlenstoff zeigt in seinen Modifikationen als Steinkohle, Koks, Retortenkohle, Graphit metallisches Leitungsvermögen. Der spezifische Widerstand (1 m Länge, 1 mm² Querschnitt) liegt zwischen 10 und 100 Ohm (Glühlampenfäden etwa 40, Graphit aus Bleistiften bis zu 800). Der Widerstand nimmt im Gegensatz zu den Metallen mit wachsender Temperatur ab. Der Koeffizient γ ist — 0,0003 bis — 0,0008.

Die Modifikationen Diamant und reine Holzkohle gehören zu den Isolatoren.

Der Widerstand des Selen nimmt plötzlich sehr stark ab, wenn es belichtet wird. Wird es wieder abgedunkelt, so nimmt der

¹⁾ Diese Eigenschaft wird bei den Nernstlampen und anderen Apparaten, wo eine gewisse Unabhängigkeit der Stromstärke von der Temperatur erstrebt wird, benützt. Da der Widerstand des Leuchtkörpers (Magnesiastäbchen) bei Weißglut sehr rasch abnimmt, wird ein solcher Eisendraht in einer mit Wasserstoff gefüllten Glasröhre vorgeschaltet und dadurch ein Ausgleich bewirkt, wenn die Betriebsspannung über den Sollwert steigt. Mit anderen Worten: während der Temperaturkoeffizient des Glühkörpers bei Weißglut abnimmt, nimmt der des vorgeschalteten Eisendrahtes in der oben angegebenen Weise bis 0,018 zu, d. h. die Stromstärke ist innerhalb dieses Bereiches von der Temperatur abhängig.

Widerstand wieder zu, und zwar anfangs schneller, dann langsamer. Den anfänglichen Wert erreicht es oft erst nach stundenlanger Verdunkelung. Der Einfluß des Lichtes von verschiedener Wellenlänge ist verschieden, geht aber weder der chemischen, noch der physiologischen Wirkung proportional, sondern die Wirkung des roten Lichtes ist am stärksten. Amorphes, grobkörniges Selen zeigt die größte Lichtempfindlichkeit. Im Dünkeln ist sein spezifischer Widerstand (ein Zentimeterprisma) $4 \cdot 10^9$ Ohm. Im diffusen Tageslicht vermindert er sich bis auf die Hälfte, im direkten Tageslicht selbst bis auf ein Zehntel.

46. Weitere Bemerkungen zu dem Ohmschen Gesetze.

Wie aus der Begründung in § 42 hervorgeht, läßt sich das Ohmsche Gesetz

$$J = \frac{E}{W} \quad \text{oder} \quad E = JW$$

nicht nur auf die EMK der Stromquelle und den ganzen Stromkreis, sondern auch auf jeden beliebigen Teil desselben anwenden.

Dann bedeutet E die Potentialdifferenz zwischen den Enden dieses Teiles und W seinen Widerstand. Das Verständnis dessen wird durch folgende Darstellung gefördert. In dem Dreiecke (Abb. 59) sei die Größe der EMK einer Stromquelle durch die eine Kathete und der Widerstand des ganzen Stromkreises W durch die andere Kathete dargestellt.

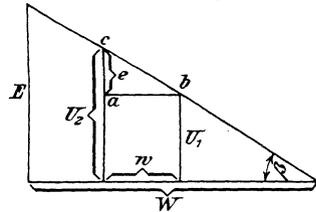


Abb. 59.

Dann gibt die Neigung der Hypotenuse einen Begriff von der Abnahme des Potentials längs des Stromkreises. Aus dem Ohmschen Gesetze $J = \frac{E}{W} = \text{tg } \beta$ folgt, daß die Stromstärke dargestellt ist durch die Tangente des der EMK gegenüberliegenden Winkels.

Greifen wir nun aus dem Stromkreise ein Stück mit dem Widerstande w heraus, so stellen die Linien U_2 und U_1 die Potentialwerte an den Endpunkten dieses Leiterstückes vor. Die Potentialdifferenz für dieses Stück ist $U_2 - U_1 = e$, und das kleine Dreieck abc stellt nun die Stromverhältnisse für dasselbe dar. Wir ersehen daraus, daß die Stromstärke in diesem Leiterstücke dieselbe ist wie im ganzen Stromkreise, da der Winkel β derselbe ist, und es gilt das Ohmsche Gesetz auch für dieses Stück allein:

$$J = \frac{e}{w}.$$

Daß die Stromstärke in allen Teilen des Stromkreises dieselbe sein muß, sieht man leicht ein, wenn man sich erinnert, daß die Stromstärke jene Elektrizitätsmenge ist, die in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchströmt. Es kann nämlich aus einem Leiterstück nicht mehr Elektrizität wegströmen, als von der anderen Seite zuströmt, und ebensowenig kann mehr zu- als wegströmen.

Die Potentialdifferenz e eines Leiterstückes nennt man auch den Potential- oder Spannungsabfall, und dieser ist für ein Leiterstück mit dem Widerstande w nach dem Ohmschen Gesetze $e = wJ$, also gleich dem Produkte aus Stromstärke und Widerstand. Den Spannungsabfall in jenem Teile eines Stromkreises, der nicht nutzbar gemacht werden kann (Zuleitungsdrähte, Fernleitungen), bezeichnet man häufig als Spannungsverlust.

47. Klemmenspannung.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß ein Spannungsabfall auch schon im Innern der Stromquelle stattfindet, da sie einen inneren Widerstand besitzt (bei galvanischen Zellen die Flüssigkeit zwischen den Elektroden, bei Dynamomaschinen die Ankerwicklung). Bezeichnet man diesen inneren Widerstand mit w_i und den des äußeren Schließungskreises mit w_a , so ist der gesamte Widerstand

$$W = w_i + w_a.$$

Nach dem vorigen entfällt daher auf das Innere der Stromquelle ein Spannungsabfall $w_i J$, und für den äußeren Stromkreis bleibt eine verfügbare Potentialdifferenz $w_a J = E'$. Dies ist die Potentialdifferenz zwischen jenen Punkten, wo der äußere Stromkreis an die Stromquelle angeschlossen ist, also zwischen den Polklemmen. Man nennt sie daher Klemmenspannung oder auch kurz Spannung des Stromes. Die Summe beider gibt die EMK der Stromquelle nach der Gleichung

$$E = WJ = (w_i + w_a)J.$$

Abb. 60 zeigt, wie sich der Abfall der Spannung längs des Stromkreises verteilt. Aus der Definition und der Figur folgt, daß die Klemmenspannung nichts anderes ist als $E' = E - w_i J$, das ist die Differenz zwischen der EMK und dem Spannungsabfall (Spannungsverlust) im Innern der Stromquelle. Man erkennt ferner, daß bei gegebener EMK E die Klemmenspannung um so größer ist (um so weniger verschieden von E), je größer der äußere Widerstand im Verhältnis zum inneren ist.

Beispiel: Die EMK eines Daniellschen Elementes ist 1,1 Volt. Der innere Widerstand sei $w_i = 0,3$, und der Widerstand des äußeren Schließungskreises $w_a = 0,7$. Dann ist $W = 1$, und daher die Stromstärke $J = 1,1$. Der

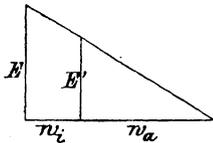


Abb. 60.

Spannungsverlust im Innern des Elementes ist dann 0,33 Volt, die Klemmenspannung 0,77 Volt. Ist aber der äußere Widerstand $w_a = 2$, so ist $W = 2,3$; daher die Stromstärke $J = 0,48$ und der Spannungsverlust im Innern $0,48 \cdot 0,3 = 0,144$ Volt, die Klemmenspannung aber $0,48 \cdot 2 = 0,96$ Volt.

48. Mehrere elektromotorische Kräfte in einem Stromkreise.

Treten mehrere EMKe: e_1, e_2, e_3 an verschiedenen Stellen des Stromkreises auf, so addieren sie sich, und die gesamte EMK ist $E = e_1 + e_2 + e_3$.

Abb. 61 stellt den Fall dar, wo e_2 und e_3 entgegengesetzte Richtung haben wie e_1 . Dann ist $E = e_1 - e_2 - e_3$. Die Stromstärke ist natürlich auch in diesem Falle an allen Stellen die gleiche:

$$J = \frac{E}{W}.$$

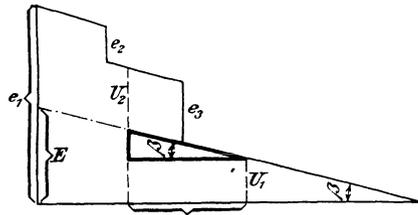


Abb. 61.

Will man das Ohmsche Gesetz auf ein Stück des Stromkreises mit dem Widerstand w anwenden, so muß man darauf achten, ob nicht innerhalb dieses Stückes eine EMK vorhanden ist. Z. B. gilt für das in der Figur abgegrenzte Stück w :

$$J = \frac{(U_2 - U_1) - e_3}{w}$$

das ist das stark gezeichnete Dreieck.

49. Ableitung zur Erde.

Für die Stromstärke ist nicht der Potentialwert (bezogen auf die Erde), sondern nur die Potentialdifferenz maßgebend. Wenn man einen Punkt des Stromkreises mit der Erde verbindet, so be-

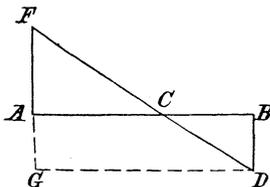


Abb. 62.

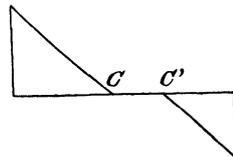


Abb. 63.

sitzt er ebenso wie die Erde den Potentialwert Null. Nichtsdestoweniger muß die Potentialdifferenz oder EMK der Stromquelle dieselbe bleiben, da ja an dieser nichts geändert wurde. Abb. 62 zeigt

die graphische Darstellung dieses Falles, wobei C der zur Erde abgeleitete Punkt des Stromkreises AB ist. Die EMK ist

$$AF - (-BD) = FG.$$

Werden zwei Punkte zur Erde abgeleitet, so ist die Potentialdifferenz zwischen beiden Null, und daher gibt es auch keinen Strom zwischen beiden. Abb. 63 stellt diesen Fall dar. Es ist dann so, als würden diese beiden Punkte C und C' in einen zusammenfallen.

50. Die Kirchhoffschen Sätze über Stromverzweigung.

Teilt sich ein Strom i in zwei Zweige i_1 und i_2 mit den Widerständen w_1 und w_2 (Abb. 64), so gilt zunächst

$$i = i_1 + i_2,$$

da die einem Verzweigungspunkte zuströmende Elektrizitätsmenge gleich sein muß der abströmenden. Schreibt man diese Gleichung in der Form $i - i_1 - i_2 = 0$, so gilt der Satz, daß die algebraische Summe aller Stromstärken an einem Verzweigungspunkte Null ist. Das ist der erste Kirchhoffsche Satz. Hat man z. B. drei Verzweigungen (Abb. 65), so gilt

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

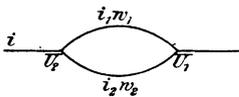


Abb. 64.

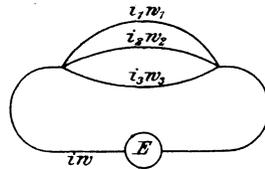


Abb. 65.

Der zweite Kirchhoffsche Satz folgt aus dem Grundsatz, daß die gesamte Potentialdifferenz oder die gesamte EMK in einem geschlossenen Kreise gleich ist der Summe der einzelnen Potentialdifferenzen. Enthält der Zweig i (Abb. 65) die EMK E und den Widerstand w , so gilt für den geschlossenen Kreis, der von i und i_1 gebildet wird,

$$E = iw + i_1 w_1;$$

ebenso gilt

$$E = iw + i_2 w_2,$$

$$E = iw + i_3 w_3.$$

Der geschlossene Kreis, der von i_1 und i_2 gebildet wird, enthält keine EMK; daher ist

$$0 = i_1 w_1 - i_2 w_2;$$

ebenso ist

$$0 = i_2 w_2 - i_3 w_3,$$

$$0 = i_1 w_1 - i_3 w_3.$$

Diese drei Gleichungen folgen auch aus den vorhergehenden. Hätte der Zweig i_1 auch eine EMK, etwa E_1 , so würde die erste Gleichung lauten

$$E + E_1 = iw + i_1 w_1,$$

und die erste der zweiten Gruppe

$$E_1 = i_1 w_1 + i_2 w_2.$$

Da man bei zwei oder mehreren EMKen nicht mehr übersehen kann, wie die Stromrichtung in den einzelnen Zweigen ist, so setzt man alle Glieder mit positiven Zeichen ein. Bei der Ausrechnung ergeben sich die Ströme mit ihrem richtigen Vorzeichen.

Wir gewinnen daraus den allgemeinen Satz: In jedem geschlossenen Stromkreise ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der Produkte aus Stromstärke und zugehörigem Widerstand. Dabei müssen die in gleichem Sinne wirkenden EMKe mit demselben Vorzeichen, entgegengesetzte mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden.

Aus diesen beiden von Kirchhoff aufgestellten Sätzen gewinnen wir genug Gleichungen, um aus den gegebenen EMKen und Widerständen die Stromstärken aller Zweige berechnen zu können.

Für den Fall zweier Zweige (Abb. 64) z. B. haben wir

$$i - i_1 - i_2 = 0$$

und

$$E = iw + i_1 w_1,$$

$$0 = i_1 w_1 - i_2 w_2.$$

Sind E , w , w_1 , w_2 bekannt, so erhalten wir daraus i , i_1 , i_2 . Um i_1 und i_2 durch i auszudrücken, genügt schon die erste und dritte Gleichung.

Die dritte Gleichung können wir auch in die Form bringen:

$$i_1 : i_2 = w_2 : w_1$$

oder

$$i_1 : i_2 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2}$$

d. h. die beiden Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände. Die letzte Form können wir auf beliebig viele Zweige anwenden, z. B.:

$$i_1 : i_2 : i_3 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2} : \frac{1}{w_3}.$$

51. Hintereinander- und Nebeneinanderschaltung.

Mehrere Widerstände oder Apparate, die in einem einfachen Stromkreise aufeinander folgen, nennt man hintereinander oder in Reihe geschaltet. Es ist ohne weiteres klar, daß der gesamte Widerstand gleich ist der Summe der Widerstände.

Teilt sich ein Strom in zwei oder mehrere Zweige (§ 50), so nennt man dies eine Nebeneinander- oder Parallelschaltung. Dabei entsteht nun die Frage, wie groß ist der gesamte Widerstand W aller Zweige zusammen, d. h. wie groß muß der Widerstand W eines einzigen Drahtes sein, wenn er die ganze Verzweigung ersetzen soll? Sind U_1 und U_2 (Abb. 64) die Potentiale an den Verzweigungspunkten, so ist nach dem Ohmschen Gesetze

$$i = \frac{U_2 - U_1}{W},$$

ferner
$$i_1 = \frac{U_2 - U_1}{w_1} \quad i_2 = \frac{U_2 - U_1}{w_2}$$

und nach dem vorigen

$$i = i_1 + i_2.$$

Daraus folgt

$$i_1 + i_2 = (U_2 - U_1) \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \right) = i.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten, so findet man

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}.$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung für beliebig viele Zweige erweitert werden kann:

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots$$

Nun sind nach § 43 die reziproken Werte der Widerstände nichts anderes, als die betreffenden Leitwerte, so daß man den Satz gewinnt: Der gesamte Leitwert einer Stromverzweigung ist gleich der Summe der Leitwerte der einzelnen Zweige.

Für den Fall zweier Zweige erhält man aus der obigen Gleichung

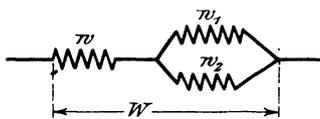


Abb. 66.

$$W = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

Ist $w_1 = w_2$, so ist

$$W = \frac{w_1}{2}.$$

Ist der Verzweigung ein Widerstand w vorgeschaltet (Abb. 66), so ist der gesamte Widerstand

$$W = w + \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

52. Arbeit und Leistung eines Stromes.

Nach § 11 ist das Potential an irgendeiner Stelle jene Arbeit, die geleistet wird, wenn sich die Elektrizitätsmenge 1 von dieser Stelle bis in unendliche Entfernung bewegt. Bewegt sich diese Masse 1 vom einem Punkte mit dem Potentiale U_2 zu einem anderen, U_1 , so ist die geleistete Arbeit $U_2 - U_1$. Haben wir eine Elektrizitätsmenge Q , so ist die Arbeit $(U_2 - U_1) Q$. Sind U_2 und U_1 die Enden eines Leiterstückes und setzen wir, wie schon früher, für $U_2 - U_1$ die EMK E , so ist die Stromarbeit

$$A = EQ.$$

Nun ist $Q = Jt$, wenn t die Zeit ist, während welcher der Strom J die Elektrizitätsmenge geliefert hat.

Daher

$$A = EJt.$$

Daraus folgt für die Leistung P , d. i. die Arbeit in einer Zeiteinheit (Sekunde¹)

$$P = EJ.$$

Diese Gesetze gelten ebenso wie das Ohmsche sowohl für einen ganzen Stromkreis, als auch für ein beliebiges Stück desselben. Im ersten Falle bedeutet E die EMK, im zweiten bedeutet E die Spannung zwischen den Enden des betreffenden Leiterstückes.

Sind E und J in den praktischen Einheiten: Volt, Ampere ausgedrückt, so erhält man die Leistung in Watt, die Arbeit in Joule (vgl. § 299).

53. Stromwärme. Joulesches Gesetz.

Die elektrische Arbeit setzt sich in verschiedene andere Arbeitsformen um, und zwar in chemische Arbeit bei den elektrolytischen Prozessen, in mechanische Arbeit bei den elektrischen Motoren, und endlich in Wärme in jedem Leiter mit Widerstand.

Besteht zwischen 2 Punkten eines Stromleiters mit der Potentialdifferenz (Spannung) E keine EMK, sondern nur der Widerstand W , so ist $E = WJ$. Dann ist die elektrische Arbeit zwischen diesen zwei Punkten

$$A = EJt = WJ^2 t \quad (\text{Joulesches Gesetz})$$

und die elektrische Leistung

$$P = wJ^2.$$

¹) Bei veränderlichen Strömen (Wechselströmen) kann natürlich nicht eine endliche Zeitdauer, wie die Sekunde zur Definierung der Leistung benützt werden, sondern nur eine unendlich kleine Zeit dt , so daß die Leistung allgemein zu definieren ist durch $\frac{dA}{dt}$.

Diese setzt sich nur in Wärme um. Werden E, J, W in praktischen Einheiten eingesetzt, so erhält man wie oben A in Joule, P in Watt. Um A in Wärmeeinheiten (Gramm-Kalorien) auszudrücken, muß man mit dem Faktor

$$\alpha = 0,24$$

multiplizieren ¹⁾).

Beispiel. Eine 16 kerzige Kohlenfaden-Glühlampe braucht bei 100 Volt Spannung etwa 0,5 Ampere Strom. Sie verbraucht daher eine elektrische Leistung von 50 Watt und entwickelt eine Wärmemenge in 1 Sekunde von $0,24 \times 50 = 12$ g Kal.

54. Das Gesetz der kleinsten Stromwärme.

Teilt sich ein Strom i in zwei Zweige i_1 und i_2 (Abb. 64), so ist die in Wärme umgesetzte Arbeit in den beiden Zweigen $w_1 i_1^2 t$ und $w_2 i_2^2 t$. Die gesamte Arbeit in beiden Zweigen ist also

$$A = (w_1 i_1^2 + w_2 i_2^2) t.$$

Es entsteht die Frage, bei welcher Stromverteilung die Arbeit am kleinsten ist. Man findet das Minimum, wenn man das Differential gleich null setzt; also

$$dA = (2i_1 di_1 w_1 + 2i_2 di_2 w_2) t = 0.$$

Aus dem ersten Kirchhoffschen Gesetz $i = i_1 + i_2$ ergibt sich durch Differenziation (weil i konstant ist)

$$di = di_1 + di_2 = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt nun

$$i_1 : i_2 = w_2 : w_1,$$

d. h. die Bedingung für die kleinste Stromwärme führt zum zweiten Kirchhoffschen Gesetz. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt dies auch für beliebig viele Zweige. D. h. also: die Verzweigung eines gleichgerichteten konstanten Stromes erfolgt so, daß die gesamte Stromwärme ein Minimum ist.

Dieses Gesetz gilt natürlich auch für die Verteilung eines Gleichstromes in einem Leiterstück von beliebiger Gestalt. Jeden Strom kann man sich in unendlich viele nebeneinander geschaltete Stromfäden oder Stromlinien zerlegt denken. In einem linearen Leiterstück von gleichmäßigem Querschnitt sind sie alle parallel zu seiner Achse; nur unter dieser Voraussetzung gilt das Gesetz in § 43 über den Widerstand eines Leiters. In einem Leiterstück von ungleichmäßigem Querschnitt sind die Stromfäden nicht mehr parallel zueinander, sondern sie verteilen sich so, daß der gesamte Widerstand ein Minimum ist, denn nur dann ist bei gegebener Stromstärke die Stromwärme ein Minimum.

¹⁾ Für genauere Berechnungen ist nach einem Beschlusse des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen $\alpha = 0,23865$.

Viertes Kapitel.

Die elektrolytischen Vorgänge.

55. Einteilung der Stoffe in bezug auf die Leitung der Elektrizität.

Alle Stoffe lassen sich hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber der Elektrizität in drei Gruppen einreihen, und zwar

- I. in solche, die die Elektrizität nicht leiten, sondern die Wirkung in die Ferne vermitteln (§ 28); das sind alle isolierenden Stoffe. Sie sind charakterisiert durch die Dielektrizitätskonstante,
- II. in solche, die den elektrischen Strom leiten, ohne von ihm verändert zu werden. Das sind alle Metalle, weshalb man diese Art der Leitung metallische Leitung nennt. Sie sind charakterisiert durch den spezifischen Widerstand oder durch den spezifischen Leitwert (§ 43),
- III. in solche, die den elektrischen Strom leiten und gleichzeitig chemische Veränderungen erleiden. Hierher gehören alle Säuren, Salze und Basen (gelöst oder geschmolzen). Sie heißen Elektrolyte, und die Art der Leitung elektrolytische Leitung. Ihr spezifischer Widerstand hängt ab von der Art des chemischen Prozesses, der eintritt, wenn ein elektrisches Feld auf sie einwirkt.

Im folgenden werden wir uns mit den elektrolytischen Leitern und den Vorgängen in ihnen näher beschäftigen.

Manche Stoffe, namentlich Mischungen haben zwei von den genannten Eigenschaften an sich. So gibt es Isolierstoffe, die eine gewisse metallische oder elektrolytische Leitfähigkeit zeigen (§ 43). Zu ihrer Charakterisierung gehört dann nebst der Dielektrizitätskonstante auch der Leitwert.

56.-Die Elektrolyse und ihre Benennungen.

Taucht man zwei Kohlenstäbe in eine Lösung von Chlorsilber AgCl und verbindet sie mit den Polen einer Stromquelle, so scheidet sich an dem einen Kohlenstabe Silber, an dem anderen Chlor aus.

Macht man den Versuch mit anderen Salzen oder Säuren oder Basen (gelöst oder geschmolzen), so findet man folgendes Gesetz: Der Wasserstoff und die Metalle oder metallischen Radikale wandern immer in der Richtung des (positiven) Stromes, werden also an jener Elektrode ausgeschieden, die mit dem negativen Pole der Stromquelle verbunden ist, der übrige nichtmetallische Rest wandert immer entgegen dem Strom, wird also an jener Elektrode ausgeschieden, die mit dem positiven Pole verbunden ist.

Faraday, der diese Wirkungen des Stromes zuerst untersuchte, hat folgende Benennung eingeführt: Jene Elektrode, bei der der Strom in die Flüssigkeit eintritt (also die mit dem positiven Pole verbundene), heißt Anode, jene, bei der er die Flüssigkeit verläßt (also die mit dem negativen Pole verbundene), heißt Kathode; der zu zersetzende Stoff heißt Elektrolyt, die Bestandteile, in die er zerlegt wird, heißen Ionen, und zwar der an der Anode auftretende Anion (Nichtmetalle), der an der Kathode auftretende Kation (Metalle und Wasserstoff). Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden nennt man Elektrodenspannung oder Klemmenspannung.

57. Sekundäre Prozesse.

Würde man bei der im vorigen beschriebenen Zersetzung von Chlorsilber Elektroden aus Metall statt aus Kohle verwenden, so würde wohl an der Kathode das Silber in gleicher Weise ausgeschieden, das Chlor aber würde mit dem Metalle der Anode eine Chlorverbindung eingehen. Dieser zweite Vorgang, der nicht unmittelbar durch den Strom bewirkt wird, sondern durch die starke chemische Verwandtschaft des Chlors zu den Metallen, heißt darum sekundärer Prozeß.

Ein anderes Beispiel eines sekundären Prozesses, wo auch das Lösungsmittel mitwirkt und die unmittelbaren Zersetzungsprodukte (Ionen) gar nicht auftreten, bietet eine Kochsalzlösung in Wasser ($\text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$) zwischen Metallelektroden. Der Strom zerlegt das Kochsalz, und das frei werdende Natrium geht mit dem Wasser sofort eine Verbindung zu Natriumhydroxyd ein nach der Formel $\text{Na} + \text{H}_2\text{O} = \text{NaHO} + \text{H}$, so daß an der Kathode Natriumhydroxyd und Wasserstoff frei werden. Das Chlor verbindet sich mit dem Metalle der Anode zu dem betreffenden Metallchlorid.

Ein weiteres Beispiel möge die Zersetzung einer Kupfervitriol-Lösung ($\text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$) bilden, und zwar einmal zwischen Platinelektroden und ein zweites Mal zwischen Kupferelektroden.

Abb. 67 stellt den ersten Fall dar.

Das Kupfer scheidet sich wie gewöhnlich an der Kathode aus; das Radikal SO_4 zerstört ein Wassermolekül und bildet Schwefelsäure, während der Sauerstoff des Wassers an der Anode frei wird.

Bestehen hingegen die Elektroden aus Kupfer (Abb. 68), so verbindet sich das Radikal SO_4 mit dem Kupfer der Anode wieder zu Kupfervitriol, das sofort in Lösung geht, und das Wasser bleibt unbehelligt. Der Grund dafür liegt darin, daß die chemische Verwandtschaft des Radikals SO_4 zu Kupfer größer ist als zu Wasserstoff. Das Resultat dieses ganzen Vorganges ist ein Verschwinden des Kupfers von der Anode in demselben Maße, als es an der Kathode abgeschieden wird. Es hat den Anschein, als würde das Kupfer durch den Strom von der Anode zur Kathode überführt.

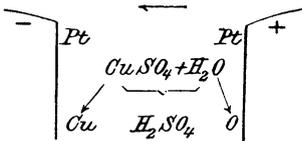


Abb. 67. Elektrolyse von Kupfervitriol-Lösung zwischen Platinelektroden.

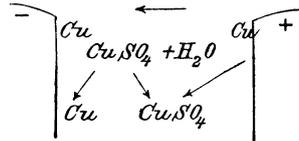


Abb. 68. Elektrolyse von Kupfervitriol-Lösung zwischen Kupferelektroden.

Der Vorgang bleibt derselbe, wenn als Kathode statt des Kupfers irgend ein anderes Metall, das mit dem Elektrolyten selbst keine chemische Reaktion gibt, also z. B. Eisen, Messing, Nickel oder auch Kohle verwendet wird. Diese erhalten so einen Überzug aus Kupfer, den man als galvanischen Niederschlag bezeichnet. Durch ähnliche Vorgänge lassen sich galvanische Niederschläge von Nickel, Silber, Kupfer, Eisen usw. erzeugen. Der in Abb. 68 dargestellte Vorgang findet ferner zur Reinigung des Kupfers Anwendung. Das unreine Kupfer wird als Anode eingehängt, an der Kathode wird reines Kupfer ausgeschieden. Das in der Elektrotechnik zu Leitungsdrähten verarbeitete Kupfer wird auf diese Weise gereinigt (raffiniert). Gold z. B. wird dadurch gewonnen, daß es zunächst in Zyankali gelöst wird, indem das goldhaltige Erz mit diesem vermischt wird. Aus der Lösung wird das Gold dann elektrolytisch ausgeschieden.

Bei Ammoniaksalzen, z. B. Salmiak (NH_4Cl), scheidet sich das metallische Radikal NH_4 an der Kathode aus und zerfällt sogleich in H und NH_3 (Ammoniak). Das an der Anode freiwerdende Chlor zersetzt hier die Salmiaklösung und bildet den explosiven Chlorstickstoff.

Da das Kation immer den metallischen (und Wasserstoff-) Bestandteil enthält, das Anion immer den Sauerstoff- oder Chlorbestandteil enthält, kann man sagen, daß bei der Elektrolyse an der Kathode Reduktion, an der Anode Oxydation eintritt.

58. Wasserzersetzung.

Die Zersetzung des Wassers beruht ebenfalls auf einem sekundären Prozesse. Absolut reines Wasser scheint ein Isolator zu sein. Gewißheit besteht darüber nicht, weil das im chemischen Sinne reine Wasser noch lange nicht absolut rein ist. Das ergibt sich daraus, daß destillierte Wässer verschiedener Herkunft, bei denen auf chemischem Wege keine Spur eines fremden Bestandteiles mehr nachgewiesen werden kann, sehr verschiedenen elektrischen Widerstand zeigen. Man weiß nur, daß der Widerstand um so höher ist, je reiner das Wasser ist. Das, was man gewöhnlich als Elektrolyse des Wassers bezeichnet, ist in Wirklichkeit eine Zersetzung der darin gelösten Salze oder Säuren.

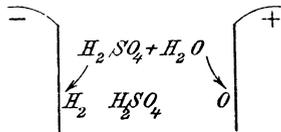


Abb. 69.

Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure.

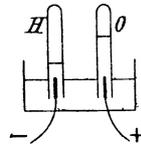


Abb. 70.

Zersetzungsapparat.

Abb. 69 erläutert den Vorgang, wenn eine Mischung von Wasser und Schwefelsäure zwischen Platinelektroden elektrisiert wird. In Wirklichkeit wird die Schwefelsäure zersetzt. Das Resultat aber ist so, als wäre das Wasser in seine Bestandteile: Wasserstoff und Sauerstoff zerlegt worden. Fängt man die beiden Gase gemischt auf, so erhält man das Knallgas. Man kann aber auch jedes für sich auffangen, wenn man über jede Elektrode eine mit Wasser gefüllte Glasröhre stülpt (Abb. 70). H und O sind dann schon äußerlich zu unterscheiden, da dem Volumen nach doppelt soviel Wasserstoff entwickelt wird als Sauerstoff (2 Atome Wasserstoff gegen 1 Atom Sauerstoff). Nach diesem Beispiele geht auch die Zersetzung des gewöhnlichen Wassers vor sich. Dasselbe enthält immer Salze und Säuren gelöst, und diese werden vom Strome zersetzt, während die Ausscheidung von Wasserstoff und Sauerstoff durch sekundäre Vorgänge erfolgt.

Manchmal treten aber auch noch kompliziertere sekundäre Vorgänge auf, indem sich Ozon (O_3), Wasserstoffsperoxyd (H_2O_2) und andere Schwefelverbindungen wie z. B. S_2O_7 bilden.

59. Faradays Gesetze der Elektrolyse.

1. Die Gewichtsmassen G der von einem Strome ausgeschiedenen Ionen sind der Stromstärke und der Zeit proportional; also

$$G = b J t,$$

oder wenn Q die während der Zeit t vom Strome J gelieferte Elektrizitätsmenge bedeutet,

$$G = bQ.$$

Sin J und t gleich eins, so sieht man, daß b die vom Strome 1 während der Zeit 1 ausgeschiedene Masse ist; man nennt es das elektrochemische Äquivalent. Es beträgt z. B. für Wasserstoff, bezogen auf Ampere und Sekunde (Coulomb), 0,0000104 g.

Das zweite Faradaysche Gesetz bezieht sich auf das Verhältnis der ausgeschiedenen Ionen untereinander und lautet:

2. Gleiche Stromstärken lösen in gleichen Zeiten gleiche chemische Valenzen aus. Dies wird durch folgenden Versuch erläutert: Man schickt einen Strom durch drei hintereinander geschaltete Zersetzungszellen (Abb. 71), die verdünnte Schwefelsäure, Kupfervitriollösung und verdünnte Salzsäure enthalten; dann werden gleichzeitig in der ersten Zelle 2 Atome H und 1 Atom O (zweiwertig), in der zweiten Zelle 1 Atom Cu (zweiwertig), in der dritten Zelle 2 Atome H und 2 Atome Cl ausgeschieden; überall also werden zwei Valenzen gleichzeitig gelöst. Fängt man die Gase in darüber gestülpten Glasröhren auf (Abb. 71), so erkennt man diese Verhältnisse an dem Volumen, da doppelt soviel H und Cl ausgeschieden wird als O. Vergleicht man die Gewichte, so erhält man gleichzeitig 1 g H und 8 g O, weil das Atomgewicht des Wasserstoffes 1, das des Sauerstoffes 16 ist, von ersterem aber doppelt soviel Atome ausgeschieden werden. In der zweiten Zelle werden gleichzeitig 31,6 g Cu ausgeschieden, da Cu das Atomgewicht 63,2 hat und zweiwertig ist. Oder mit anderen Worten: während von einem Strome 0,0000104 g H ausgeschieden werden, werden von demselben Strome 0,0000104 · 8 g O und 0,0000104 · 31,6 g Cu ausgeschieden. Daraus folgt allgemein für das elektrochemische Äquivalent eines Elementes

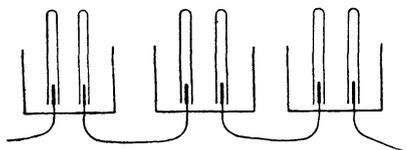


Abb. 71.

$$b = 0,0000104 \frac{a}{y},$$

wobei a das Atomgewicht und y die Wertigkeit (Valenz) des betreffenden Elementes bedeuten.

Setzt man dies in das erste Gesetz ein, so erhält man als Vereinigung beider für das Gewicht eines von J Ampere während t Sekunden ausgeschiedenen Elementes

$$G = 0,0000104 \frac{a}{y} Jt.$$

Die folgende Tabelle enthält das elektrochemische Äquivalent einiger Stoffe, bezogen auf Gramm und Ampere-Sekunde (Coulomb).

	Atom- gewicht <i>a</i>	Wertig- keit <i>y</i>	Elekt. Äquiv. <i>b</i>	Chem. (Ver- bindungs-) Äquivalent
Wasserstoff	1	1	0,0000104	1
Sauerstoff	16	2	0,0000832	8
Chlor	35,4	1	0,000367	35,4
Schwefel	32	2	0,000166	16
Zink	65	2	0,000338	32,5
Silber	107,7	1	0,00112	107,7
Kupfer (Oxydul)	63,2	1	0,000656	63,2
„ (Oxyd)	63,2	2	0,000328	31,6

Häufig scheinen die Faradayschen Gesetze nicht erfüllt zu sein. Das ist aber immer nur auf Störungen zurückzuführen, indem z. B. bereits abgeschiedene Teile von der Elektrode wieder abfallen, oder indem Gase von der Flüssigkeit absorbiert werden. Das letztere tritt fast immer, auch bei der Wasserzersetzung, ein.

60. Theorie der elektrolytischen Leitung.

Da jede Molekel eines elektrolytischen Stoffes bei der Elektrolyse in zwei Teile, und zwar nur in zwei Teile — Kation und Anion — gespalten wird, von denen sich das Kation in der Richtung des Stromes, also in der Richtung der positiven Elektrizität, das Anion aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, so denkt man sich das Kation mit einer gewissen positiven, und das Anion mit einer gleich großen negativen Elektrizitätsmenge (Elementarquantum) geladen¹⁾. Die Summe aller Ladungen eines Elektrolyten ist also null.

Nach der älteren Hypothese dachte man sich jede Molekel als eine feste Verbindung des betreffenden Kations und Anions, die erst durch den elektrischen Strom gelöst wird. Da aber zur Auflösung einer Verbindung eine gewisse Arbeit erforderlich ist, so würde daraus folgen, daß eine Zersetzung erst bei einer gewissen Stromstärke auftreten kann, und das würde dem Faradayschen Gesetze widersprechen, nach welchem die zersetzten Mengen der Stromstärke proportional sind. Dagegen läßt sich dieses Gesetz aus der neueren Dissoziations-Hypothese über die Beschaffenheit der Lösungen (Clausius, Hittorf, Arrhenius) erklären, nach welcher in jeder

¹⁾ Während aber Faraday unter Ionen nur die betreffenden chemischen Massen verstand, versteht man heute darunter die chemischen Massen samt ihren zugehörigen Ladungen. Bei Chlorsilber besteht also das Kation aus einer gewissen Masse Silber und einer gewissen positiven Ladung, das Anion aus einer äquivalenten Masse Chlor und einer negativen Ladung von gleicher Größe wie die positive des Kations. Will man besonders hervorheben, wenn man es mit Ionen zu tun hat, so versieht man die chemischen Zeichen mit dem + oder

— Zeichen; also z. B. Silber-Kation: Ag⁺, Chlor-Anion: Cl⁻.

Lösung ein Teil der Molekeln in Kation und Anion getrennt (dissoziiert) ist, und der übrige Teil aus geschlossenen Molekeln besteht. Und zwar sind es nicht bestimmte Molekeln, die geschlossen oder getrennt sind, sondern es findet fortwährend ein Zerfall geschlossener Molekeln und eine Wiedervereinigung der Teile mit solchen anderer Molekeln zu neuen Molekeln statt.

Der Zerfall der Molekeln erfolgt durch eine nicht näher bekannte Einwirkung des Lösungsmittels (Wasser, Alkohol usw.) auf den gelösten Stoff und durch die der Temperatur entsprechende Eigenbewegung¹⁾ der Molekeln. Man bezeichnet sie in ihrer Gesamtheit als dissoziierende Kraft. Der Zerfall einer Molekel kann natürlich erst eintreten, wenn die dissoziierende Kraft stärker ist als die Kraft, die die Ionen im Molekül zusammenhält. Diese zusammenhaltende Kraft besteht aus der Anziehung zwischen der positiven und negativen Ladung der Ionen. Nach erfolgter Trennung hat jedes Ion eine gewisse selbständige Bewegung. Kommen sich dabei entgegengesetzte Ionen so nahe, daß die Anziehungskraft ihrer Ladungen stark genug ist, so vereinigen sie sich zu einer neuen Molekel, die elektrisch neutral ist.

Das Verhältnis der Anzahl der dissoziierten Molekeln zur Gesamtzahl der Molekeln wird als Dissoziationsgrad bezeichnet. Er hängt von der Temperatur und von der Konzentration der Lösung ab, und zwar ist er um so größer, je höher die Temperatur und je geringer die Konzentration ist. Das erstere erklärt sich nach obiger Annahme aus der mit der Temperatur zunehmenden Eigenbewegung der Molekeln, das letztere aus der Einwirkung des Lösungsmittels, die um so stärker ist, je mehr von dem Lösungsmittel gegenüber dem gelösten Stoff vorhanden ist. Bei sehr geringer Konzentration sind fast alle vorhandenen Molekeln dissoziiert.

Wird nun in der Lösung ein elektrisches Feld erzeugt durch Einsetzung zweier Elektroden, zwischen denen durch irgendeine äußere Stromquelle eine Potentialdifferenz (Elektrodenspannung) hervorgerufen wird, so werden die positiv geladenen Kationen von der Kathode (Abb. 72) und die negativ geladenen Anionen von der Anode

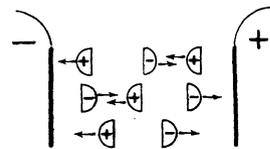


Abb. 72.

angezogen, während die jeweils geschlossenen Molekeln unberührt bleiben, weil sie neutral sind. Die elektrische Kraft hat also nicht erst die Molekeln zu spalten, sondern die schon vorhandenen Ionen nur an die Elektroden zu führen. Da freie Ionen in der ganzen Lösung, also auch in nächster Nähe der Elektroden vorhanden sind, tritt ein Strom sofort nach Entstehung des elektrischen Feldes auf.

¹⁾ Man kann sich vorstellen, daß diese Eigenbewegung eine rotierend ist. Bei einer gewissen Geschwindigkeit fliegen die beiden Ionen einer Molekel infolge der Zentrifugalkraft auseinander, nachdem schon die zusammenhaltende Kraft durch eine Wirkung des Lösungsmittels gelockert wurde.

Tritt kein sekundärer Prozeß ein, so treten Kationen und Anionen an den Elektroden als freie Gase oder feste Niederschläge auf. Ihre Anzahl hängt bei gleicher Konzentration und Temperatur von der Stärke des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden, also von der Elektrodenspannung ab. Der elektrische Strom, der durch den Elektrolyten geht, ist demnach nichts anderes als die Summe der in einer Zeiteinheit von den Kationen zur Kathode und der in derselben Zeit von den Anionen zur Anode mitgeführten Ladungen. Hier, an den Elektroden, werden diese fortgesetzt zuströmenden Ladungen neutralisiert durch jene Elektrizitätsmenge, die aus der äußeren Stromquelle, an welche die Elektroden angeschlossen sind, zufließt, so daß das Ergebnis derart ist, als wenn die äußere Stromquelle einen Strom durch den Elektrolyten wie durch einen metallischen Leiter hindurchschicken würde.

Dadurch erklärt sich ohne weiteres das erste Faradaysche Gesetz, wonach die ausgeschiedenen Ionen der Stromstärke und der Zeit proportional sind, weil eben der im Elektrolyten vorhandene Strom in Wirklichkeit nichts anderes ist als die von den Ionen mitgeführten Ladungen.

Die elektrische Ladung einer aus gleichen Ionen bestehenden Masseneinheit läßt sich leicht berechnen. Ist N die Anzahl der in einer Sekunde an einer Elektrode ausgeschiedenen Ionen (Kationen oder Anionen) und M die Gewichtsmasse eines Ions, so ist die in einer Sekunde an einer Elektrode ausgeschiedene Masse $G = MN$. Ist ferner ε die elektrische Ladung eines Ions, so ist die in einer Sekunde an einer Elektrode auftretende Elektrizitätsmenge $Q = \varepsilon N$.

Daraus folgt durch Division

$$\frac{Q}{G} = \frac{\varepsilon}{M}$$

$\frac{\varepsilon}{M}$ ist nichts anderes als die elektrische Ladung pro Masseneinheit eines Ions, und $\frac{Q}{G}$ ist nach § 59 nichts anderes als der reziproke Wert des elektrochemischen Äquivalentes. Für Wasserstoff ist also die Ladung einer Masseneinheit gleich $\frac{1}{0,0000104} = 96\,500$ Coulomb, für Sauerstoff gleich $\frac{1}{0,0000832} = 12\,060$ Coulomb, für Cu aus Kupfervitriol gleich $\frac{1}{0,000328} = 3\,050$ Coulomb. Daraus erkennt man, daß 8 g des Sauerstoffes oder 31,6 g des Kupfers dieselbe Ladung wie 1 g Wasserstoff, nämlich 96 500 Coulomb mit sich führen, d. h. daß jede Masse eines beliebigen Ions, die der Masseneinheit des Wasserstoffes äquivalent ist, das ist das sogenannte Grammäquivalent, eine Elektrizitätsmenge von 96 500 Coulomb

als Ladung mit sich führt. Da nach der kinetischen Gastheorie in einem Gramm Wasserstoff $77 \cdot 10^{22}$ Atome enthalten sind, so ist die auf ein Atom entfallende Elektrizitätsmenge, d. h. die Ladung eines Ions gleich $1,3 \cdot 10^{-19}$ Coulomb.

Über die Dissoziation der Gase und die dadurch bewirkte Stromleitung vgl. § 241.

61. Dissoziierte Stoffe und Ionisatoren.

Nach dem vorstehenden besitzen nur jene Flüssigkeiten elektrisches Leitungsvermögen, die irgendeinen Stoff dissoziiert enthalten. Von einer Zuckermolekül-Lösung muß man aus anderen physikalischen und chemischen Gründen annehmen, daß die Zuckermoleküle nicht zerfallen, sondern alle geschlossen sind. Tatsächlich vermag eine Zuckermolekül-Lösung, wenn sie nicht andere elektrolytische Stoffe enthält, den Strom nicht zu leiten. Chlorwasserstoffgas läßt sich durch Kälte und Druck verflüssigen. Diese Flüssigkeit leitet aber nicht, weil sie nur aus geschlossenen HCl-Molekülen besteht. Leitet man aber diese Flüssigkeit oder das Gas in Wasser, so tritt sofort Dissoziation ein, d. h. ein Teil der Moleküle zerfällt in Kation und Anion nach

der Gleichung $\text{HCl} = \overset{+}{\text{H}} + \overset{-}{\text{Cl}}$. Aus diesen Beispielen ersieht man, daß die Dissoziation sowohl von dem gelösten Stoff als auch dem Lösungsmittel abhängt. Dissoziieren lassen sich alle Säuren, Basen und Salze. Das Lösungsmittel, das die Dissoziation bewirkt, nennt man Ionisator. Der wichtigste und stärkste Ionisator ist Wasser. Ionisatoren von ähnlicher Stärke sind: alle Alkohole, insbesondere Methylalkohol, Ameisensäure, verflüssigtes Ammoniak (NH_3), Azeton u. a. Schwächere Ionisatoren sind: Salpetersäure, Schwefelsäure, Aldehyde, Ketone u. a.

Gar nicht dissoziierend wirken alle Kohlenwasserstoffe sowohl fette als aromatische. Daher eignen sich die Öle besonders für Isolierzwecke. Denn wenn auch kleine Verunreinigungen in sie hineinkommen, verursachen sie noch kein Leitungsvermögen. während kleine Verunreinigungen der Alkohole ein Leitungsvermögen zur Folge haben.

Die genannten Ionisatoren — auch Wasser — für sich allein und im reinsten Zustande, haben kein elektrolytisches Leitungsvermögen, da sie nicht dissoziiert sind. Einige (z. B. Wasser, Schwefelsäure, Salpetersäure) zeigen zwar ein gewisses Leitungsvermögen, das ist aber nicht elektrolytischer, sondern metallischer Art, wie bei Quecksilber. Dagegen können Ionisatoren, die in einem anderen, stärkeren Ionisator gelöst sind, z. B. Schwefelsäure oder Salpetersäure in Wasser ein starkes elektrolytisches Leitungsvermögen haben. Andererseits haben die Ionisatoren im reinsten Zustande als Nichtleiter eine Dielektrizitätskonstante, und es scheint, daß diese zur Stärke des Ionisators in Beziehung steht, denn die stärksten Ionisatoren (Wasser, Alkohol) haben die größte Dielektrizitätskonstante (80 bzw. 25).

62. Spezifischer Widerstand der Elektrolyte.

Das Ohmsche Gesetz $J = \frac{E}{W}$ hat zur Voraussetzung, daß der Widerstand W oder sein reziproker Wert, die Leitfähigkeit, von der Stromstärke und der Spannung unabhängig sind. Das ist, wie die Messungen gezeigt haben, nicht nur bei den metallischen, sondern auch bei den elektrolytischen Leitern der Fall, und man kann daher auch für sie einen spezifischen Widerstand angeben. Da der Strom in einem Elektrolyten aus den Ladungen der zu den Elektroden wandernden Ionen besteht, so muß bei gleicher Elektrodenspannung der durch eine Querschnittseinheit des Elektrolyten fließende Strom um so stärker sein, der Widerstand also um so kleiner sein, je mehr freie Ionen in der Raumeinheit des Elektrolyten vorhanden sind, und je schneller sie wandern, d. h. je geringer der Bewegungswiderstand ist. Der spezifische Widerstand ändert sich also mit der Konzentration und der Temperatur des Elektrolyten. Die meisten Ionen in der Raumeinheit sind aber nicht bei der größten Konzentration vorhanden, weil der Dissoziationsgrad um so kleiner ist, je konzentrierter die Lösung ist. Der spezifische Widerstand geht also weder mit der Konzentration noch mit dem Dissoziationsgrad proportional; häufig hat er ein Minimum. Die Abb. 73 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Konzentration bei Schwefelsäure und Wasser durch eine Schaulinie, und die folgende Zahlentafel gibt für einige andere Lösungen die spezifischen Widerstände α für

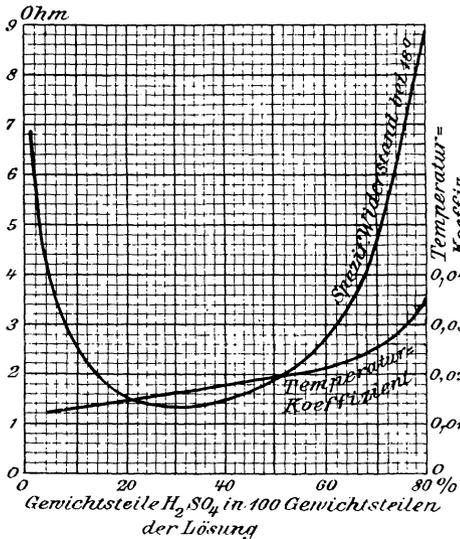


Abb. 73.

verschiedene Konzentrationen und in der letzten Zeile jene Konzentration, bei der der spezifische Widerstand am kleinsten ist.

Da die Dissoziation mit der Temperatur zunimmt, der Bewegungswiderstand abnimmt, so folgt aus beiden Gründen eine Abnahme des spezifischen Widerstands. Der Temperaturkoeffizient ist also im Gegensatz zu den Metallen negativ und seinem Werte nach erheblich größer als bei diesen.

Mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Genauigkeit läßt sich der Widerstand bei der Temperatur t darstellen durch

$$W_t = W_{18} (1 + \gamma t),$$

Der spezifische Widerstand ändert sich also mit der Konzentration und der Temperatur des Elektrolyten. Die meisten Ionen in der Raumeinheit sind aber nicht bei der größten Konzentration vorhanden, weil der Dissoziationsgrad um so kleiner ist, je konzentrierter die Lösung ist. Der spezifische Widerstand geht also weder mit der Konzentration noch mit dem Dissoziationsgrad proportional; häufig hat er ein Minimum. Die Abb. 73 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Konzentration bei Schwefelsäure und Wasser durch eine Schaulinie, und die folgende Zahlentafel gibt für einige andere Lösungen die spezifischen Widerstände α für

wenn W_{18} die in der Zahlentafel enthaltenen Werte bei 18° und γ den Temperaturkoeffizienten bedeutet.

Spezifischer Widerstand (Zentimeterprisma) in Ohm und Temperaturkoeffizient einiger wässriger Lösungen bei 18° .

Prozent- gehalt	Sal- peter- säure HNO ₃	Salz- säure HCl	Soda Na ₂ CO ₃	Zink- sulfat ZnSO ₄	Kupfer- sulfat CuSO ₄	Koch- salz NaCl	Silber- nitrat AgNO ₃	Kali- lauge KOH
1	—	9,2	75	—	—	57		
5	3,9	2,5	22	53	53	16	42	5,8
10	2,2	1,6	14	31	31	8,9	23	3,2
15	1,63	1,34	12	24	24	6,5	16	2,4
20	1,4	1,3		21		5,5	12,3	2,0
25	1,3	1,4		21		5	10,1	1,85
30	1,28	1,5		23			8,6	1,85
35	1,3	1,7					7,6	2,0
40	1,37	1,95					6,8	2,2
50	1,6						5,8	
60	1,95						5,1	
70	2,5							
80	3,7							
Minimum bei	1,27 29,7 ⁰ / ₀	1,3 18,3 ⁰ / ₀		20,8 23,5 ⁰ / ₀				1,84 28 ⁰ / ₀
Tem- peratur- koeffiz. γ	-0,014	-0,016	-0,026	-0,024	-0,022	-0,022	-0,022	-0,02

**63. Konzentrationsänderung durch elektrolytische Leitung.
Beweglichkeit der Ionen.**

Geht ein Strom durch einen Elektrolyten, so muß infolge der Ausscheidung der Ionen an den Elektroden eine Verminderung der Konzentration der elektrolytischen Lösung eintreten. Auffallend dabei ist, daß diese Konzentration an verschiedenen Stellen verschieden ist. Teilt man eine elektrolytische Zelle (Abb. 74) durch zwei durch lässige Wände (Diaphragmen) in drei Abteilungen, und untersucht nach dem Stromdurchgang die Konzentration, so findet man, daß sie in der mittleren Abteilung unverändert geblieben, in den beiden äußeren Abteilungen aber vermindert ist und zwar in der einen mehr als in der anderen¹⁾. Diese Erscheinung läßt sich nur dadurch



Abb. 74.

¹⁾ Diese der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit entsprechenden Konzentrationsänderungen bestehen natürlich nur, wenn nicht durch sekundäre

erklären, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der Kationen verschieden ist von der der Anionen auf ihren Wegen nach den Elektroden. Der obere Teil der Abb. 75 soll schematisch den Zustand des

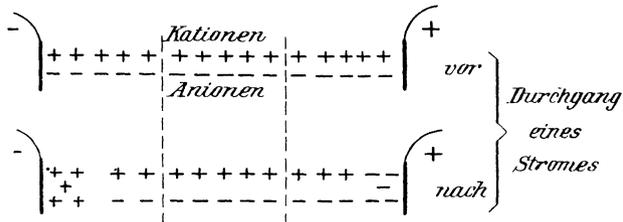


Abb. 75.

Elektrolyten vor dem Durchgang eines Stromes darstellen, indem durch $+$ und $-$ die durch Zerfall der Moleküle entstandenen freien Ionen bezeichnet sind. In Wirklichkeit liegen sie natürlich nicht so regelmäßig nebeneinander, sondern vermischt; hier kommt es uns aber nur auf ihre Anzahl an. Ist nun die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes verschieden, so daß z. B. die Kationen in einer Sekunde um zwei Einheiten nach links fortschreiten, während die Anionen um drei Einheiten nach rechts fortschreiten, so zeigt der untere Teil der Abb. 75 den Zustand, nachdem der Strom eine Sekunde lang hindurchgegangen ist. Man sieht, daß in der mittleren Abteilung die Konzentration dieselbe geblieben ist, während in der rechten Abteilung nur mehr drei Ionenpaare, in der linken gar nur zwei vorhanden sind. Trotzdem ist die Anzahl der ausgeschiedenen Ionen an beiden Elektroden die gleiche, nämlich fünf. Da alle Ionen Ladungen von gleicher Größe ϵ haben, so ist die von der Stromquelle den Elektroden zum Zwecke der Neutralisierung zugeflossene Elektrizitätsmenge 5ϵ . Die Stromstärke ist also gleich der Elektrizitätsmenge, die einer der beiden Elektroden (Kathode oder Anode) in einer Sekunde zugeflossen ist, und diese ist gleich der Summe der nach beiden Seiten während einer Sekunde gewanderten Ionen (in unserem Beispiel $2 + 3 = 5$). Daraus kann man folgern, daß die Wanderung der einen Ionengattung unabhängig ist von der anderen Ionengattung, und daß die elektrischen Eigenschaften eines Elektrolyten sich aus der Summe der entsprechenden Eigenschaften beider Ionengattungen ergeben (Kohlrausch). Insbesondere gilt dies von den spezifischen Widerständen, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt.

Die Weglänge, die ein Kation in einer Sekunde zurücklegt, wenn zwischen den um 1 cm voneinander abstehenden Elektroden (homogenes Feld vorausgesetzt) 1 Volt Spannung herrscht, nennt man

Prozesse Störungen eintreten. Es können dadurch sogar Vergrößerungen der Konzentration vorkommen.

„Beweglichkeit“ c_k der Kationen; in gleicher Weise bedeutet c_a die Beweglichkeit der Anionen. Setzt man Proportionalität voraus, so ist bei einer Spannung von E -Volt der zurückgelegte Weg in einer Sekunde oder die Wanderungsgeschwindigkeit für die Kationen

$$v_k = c_k E,$$

für die Anionen

$$v_a = c_a E.$$

Ist n die Anzahl der Kationen bzw. die der Anionen in einem Zentimeterprisma, so ist nach obigem die in einer Sekunde durch eine Querschnittseinheit fließende Elektrizitätsmenge, also die Stromstärke

$$i = n\epsilon v_k + n\epsilon v_a = (n\epsilon c_k + n\epsilon c_a) E.$$

Alle Größen innerhalb der Klammer sind von E unabhängig. Vergleichen wir diese Gleichung mit dem Ohmschen Gesetz, so sehen wir, daß der Klammerausdruck gleich dem spezifischen Leitungsvermögen ist, und daß dieses gleich der Summe aus dem spezifischen Leitungsvermögen $n\epsilon c_k$ des Kations und dem spezifischen Leitungsvermögen $n\epsilon c_a$ des Anions ist.

Wären die Wanderungsgeschwindigkeiten v_k und v_a nicht proportional mit E , also c_k und c_a von E nicht unabhängig, so wäre auch der Klammerausdruck nicht unabhängig von E , d. h. für die elektrolytische Leitung könnte das Ohmsche Gesetz nicht gelten. Tatsächlich könnte man nach den Gesetzen der Mechanik nicht ohne weiteres annehmen, daß die Geschwindigkeiten der Ionen gleichförmige seien, denn die elektrische Kraft wirkt während ihrer ganzen Bewegung auf sie ein, so daß ihre Bewegung eine beschleunigte sein müßte. Nur wenn der Reibungswiderstand während der Bewegung sehr groß ist, wird die beschleunigte Bewegung zu einer gleichförmigen (fallende Schneeflocken). Da nun die Messungen zeigen, daß für die elektrolytische Leitung wirklich das Ohmsche Gesetz gilt, so müssen v_k und v_a gleichförmige Geschwindigkeiten sein, was sich aus dem großen Reibungswiderstand, den die Ionen in der Flüssigkeit finden, erklärt.

64. Elektrolyse geschmolzener Salze.

Nach dem vorstehenden ist zu einer elektrolytischen Leitung erforderlich: erstens, daß Molekeln in dissoziiertem Zustande vorhanden sind, zweitens, daß sich die Ionen nach den Elektroden hin bewegen können. Beide Bedingungen sind nicht nur bei gelösten, sondern auch geschmolzenen Salzen erfüllt. Die Elektrolyse geschmolzener Salze zeichnet sich dadurch aus, daß in der Regel das reine Metall auftritt, während es bei gelösten Salzen häufig durch sekundäre Prozesse wieder in andere Verbindungen übergeführt wird. Das wichtigste Beispiel ist die Gewinnung des Aluminiums aus dem geschmolzenen Oxyd Al_2O_3 (Tonerde). Ein mit diesem Oxyd und

mit $\text{Al}_3\text{F}_6, 6\text{NaF}$ (Kryolith) gefülltes Gefäß bildet die Kathode, ein Bündel von Kohlenstäben die Anode. Durch Herstellung eines Lichtbogens zwischen den Kohlenstäben und der Füllung wird zunächst der Kryolith geschmolzen und zersetzt. Das Fluor entnimmt der Tonerde das Aluminium und verbindet sich mit ihr, wird aber durch Elektrolyse wieder zersetzt. Das Aluminium wird also aus der Tonerde gewonnen, die nachgefüllt werden muß, während von dem Kryolith nur die unvermeidlichen Verluste ersetzt werden müssen. Das Aluminium sammelt sich in geschmolzenem Zustand am Boden des Gefäßes und kann von hier abgelassen werden.

Auch die Alkalimetalle (K, Na, Li) werden aus geschmolzenen Salzen (an Kohle- oder Eisenelektroden) gewonnen, und nicht aus Lösungen, weil sich bei diesen nach Abscheidung des Metalles sofort das betreffende Hydroxyd bildet.

65. Elektrolytische Leitung in festen Stoffen.

Auch im festen Zustande zeigen die meisten Salze ein Leitungsvermögen, wenn auch sehr viel kleiner als im gelösten oder geschmolzenen Zustande, weil im festen Zustande sowohl die Anzahl der dissoziierten Molekeln, als auch ihre Beweglichkeit sehr viel geringer ist. Bei manchen ist es zweifelhaft, ob ihre Leitung elektrolytischer oder metallischer Art ist. Ein deutliches elektrolytisches Leitungsvermögen zeigen die durch Zusammenschmelzen, Zusammenbacken (Sintern) hergestellten festen Körper aus Oxyden des Magnesiums, Calciums und Bariums, wie sie von Jablockhoff und Nernst zur Herstellung elektrischer Leuchtkörper verwendet wurden. An der Kathode kommt unzweifelhaft das betreffende Metall zur Ausscheidung, wird aber durch Sauerstoffaufnahme aus der Luft sofort wieder in Oxyd verwandelt. Daher muß die Nernstlampe unter Luftzutritt brennen und wird nicht in eine Glasbirne eingeschlossen wie die anderen Glühlampen. Bei den Sulfiden der Metalle (z. B. PbS , Ag_2S , HgS), und bei den verschiedenen Silikaten, die die wesentlichen Bestandteile von Glas, Porzellan und Ton bilden, ist die elektrolytische Leitung nur bei sehr hohen Temperaturen erkennbar. Sie haben alle die auffallende Eigenschaft, daß sie unterhalb einer gewissen, für jeden Stoff charakteristischen Temperatur einen sehr hohen spezifischen Widerstand haben, so daß sie zum Teil, wie z. B. Porzellan und Glas, zu den besten Isolatoren gehören. Oberhalb einer gewissen Temperatur aber ist ihr spezifischer Widerstand so klein, daß sie den guten Leitern nahe kommen. So ist beispielsweise der Leuchtkörper der Nernstlampe unter 200° ein Isolator und muß daher erst durch andere Hilfsmittel angewärmt werden. Hat er die Grenze überschritten, so geht ein schwacher Strom hindurch und erwärmt ihn noch mehr, so daß der Widerstand sehr rasch sinkt. Da gleichzeitig sein negativer Temperaturkoeffizient wächst, muß ein Widerstand aus reinem Eisen (§ 44),

der zwischen 500° und 800° einen wachsenden positiven Temperaturkoeffizienten hat, vorgeschaltet werden, um dem weiteren Sinken des Widerstandes und dem daraus folgenden Steigen des Stromes eine Grenze zu setzen. Ähnlich verhält sich das Porzellan. Glas zeigt bei einer Zunahme der Temperatur von 18° auf 200° , dann auf 350° eine Abnahme des spezifischen Widerstandes von 10^{20} auf 10^{16} , auf 10^{13} . Nach Ansicht des Verfassers ist das sehr geringe Leitungsvermögen, das unterhalb der charakteristischen Temperatur nachgewiesen werden kann, metallischer Art, während bei steigender Temperatur elektrolytische Leitung eintritt, weil da erst die Dissoziation der Moleküle beginnt. Die rasche Abnahme des Widerstandes, die erst bei höherer Temperatur beginnt und die bei Metallen nicht vorhanden ist, erklärt sich daraus, daß mit der Temperatur sowohl die Zahl des dissoziierten Molekeln, als auch ihre Beweglichkeit wächst.

Im Gegensatz zu diesen Körpern haben die Verbindungen einiger sehr gut leitender Metalle, z. B. PbO_2 , Cu_2S , CdO metallisches Leitungsvermögen, denn sie zeigen schon bei gewöhnlicher Temperatur einen geringen Widerstand (das für Akkumulatoren wichtige PbO_2 hat nur den zwei- bis dreifachen Widerstand des Quecksilbers) und einen positiven Temperaturkoeffizienten. Streintz¹⁾ hat gefunden, daß nur jene Metallverbindungen ein gutes Leitungsvermögen zeigen, die dunkelfarbig sind und sich im pulverisierten Zustande ohne Bindemittel in Stäbchen oder Platten von metallischem Glanz pressen lassen, wie die letztgenannten. Das läßt ebenfalls auf metallische Leitung schließen.

Über die spezifischen Widerstände der sehr schlechten Leiter vgl. die Zusammenstellung in § 43.

66. Polarisation.

Nach dem Faradayschen Gesetz sind die bei der Elektrolyse ausgeschiedenen Ionen der Stromstärke proportional, d. h. es tritt auch schon bei der kleinsten Stromstärke eine Zersetzung ein. Legt man an einen Wasserzersetzungsgesetz, wie er in Abb. 70 dargestellt ist, eine Spannung von 1 Volt an, so geht ein Strom durch, der sich aus dieser Spannung und dem Widerstand des Elektrolyten zwischen den beiden Elektroden ergibt. Dementsprechend müßte eine Ausscheidung von H und O stattfinden. Es ist aber keine zu beobachten; erst wenn die Spannung über 1,48 Volt gesteigert wird, tritt sie ein. Das scheint also dem Faradayschen Gesetze zu widersprechen. Der Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer, denn bei genauer Untersuchung zeigt sich, daß sofort nach Anlegung der Spannung eine Zersetzung stattfindet, daß aber nach ganz kurzer Zeit der Strom und damit auch die Zersetzung aufhört.

Daß man die Zersetzungsprodukte H und O nicht bemerkt, hat

¹⁾ Annal. d. Phys. 1902, Bd. 9, S. 854.

seinen Grund darin, daß sie von dem Wasser und den Elektroden (Platin absorbiert Gase) absorbiert werden. Daß der Strom nach ganz kurzer Zeit wieder verschwindet, hat seinen Grund darin, daß die eben erst entwickelten und absorbierten Gase sich wieder chemisch zu verbinden streben, und indem sie dies tun, eine EMK erzeugen, die an die Elektroden angelegten Spannung (aufgedrückte Spannung) entgegen gerichtet und mindestens ebenso groß ist. Man kann sich davon überzeugen, wenn man die Spannung wieder wegnimmt, und an die Elektroden ein Elektrometer anschließt. Es zeigt sich dann, daß diese gegenelektromotorische Kraft nahezu gleich der vorher angelegten Spannung ist. Man nennt diese Gegen-EMK auch EMK der Polarisation, weil der Elektrolyt bestimmte Pole wie eine Stromquelle erhalten hat. Dies gilt, so lange die aufgedrückte Spannung unter 1,48 Volt liegt. Ist sie höher, so zeigt das Elektrometer nach Abschaltung der aufgedrückten Spannung stets nur 1,48 Volt, wie hoch auch die aufgedrückte Spannung gewesen sein mag. Läßt man auf den in Abb. 70 dargestellten Wasserzersetzungsgesetzapparat, wo H und O getrennt aufgefangen werden, längere Zeit eine Spannung von mehr als 1,48 Volt wirken, so daß in den beiden Glasröhren eine gewisse Menge der Gase sich ansammelt, und schließt dann die Elektroden nach Abschaltung der aufgedrückten Spannung über einen Strommesser, so zeigt er einen Strom an. Gleichzeitig verschwinden die in den Glasröhren angesammelten Gase allmählich. Sind sie ganz verschwunden, so hört auch der Strom auf. Dieser Versuch zeigt, daß die beiden Gase, trotzdem sie bereits räumlich getrennt sind, durch Diffusion in die Flüssigkeit zurückkehren, sich hier wieder zu Wasser vereinigen und während dieser Zeit eine chemische Stromquelle (galvanische Zelle) darstellen.

Die EMK der Polarisation verhält sich also zur aufgedrückten Spannung so wie die Elastizität einer Feder zu der Kraft, die sie zu biegen strebt. Die kleinste Kraft, die sie zu biegen sucht, ruft die elastische Gegenkraft hervor. Ebenso ruft die kleinste aufgedrückte Spannung eine Gegen-EMK hervor. Eine dauernde Biegung der Feder kann nur eintreten, wenn die äußere Kraft größer ist als die elastische Kraft der Feder; läßt jene nach, so kommt diese zur Wirkung. Ebenso kann eine dauernde Zersetzung nur eintreten, wenn die aufgedrückte Spannung die dem chemischen Prozeß eigentümliche Gegen-EMK überwiegt. Hört jene auf, so tritt diese in Wirkung.

Dieses Gleichnis aus der Mechanik gilt jedoch nur dann, wenn der bei der Elektrolyse stattgefundenen chemischen Vorgang umkehrbar ist. Wenn aber bei der Wasserzersetzung dafür gesorgt wird, daß der an der Kathode auftretende Wasserstoff durch Zuführung von Sauerstoff oxydiert, oder der an der Anode auftretende Sauerstoff durch Zuführung von Wasserstoff reduziert wird, so kann eben keine Zurückbildung zu Wasser stattfinden, und daher auch keine Polarisation auftreten. Dies kann man in vielen Fällen schon durch geeignete Wahl der Elektroden erreichen. Betrachten wir z. B. die

durch Abb. 67 dargestellte Zersetzung von CuSO_4 zwischen Platin-
elektroden, so tritt hier eine Polarisierung auf, die der Zurückbildung
der ausgeschiedenen Ionen Cu und O zu CuSO_4 unter Zuhilfenahme
des vorher gebildeten H_2SO_4 entspricht. Ersetzt man aber die Platin-
elektroden durch Kupferelektroden, so sieht man aus dem durch
Abb. 68 dargestellten Vorgang, daß eine Zurückbildung deshalb nicht
eintreten kann, weil das ausgeschiedene SO_4 -Ion mit dem Kupfer
der Anode sogleich eine neue Molekel CuSO_4 bildet. An der Kathode
tritt keinerlei chemischer Vorgang auf, weil sich hier Cu auf Cu
niederschlägt. Infolgedessen tritt in der ganzen Zelle keine Polari-
sation auf, und es ist eine dauernde Zersetzung schon durch die
kleinste aufgedrückte Spannung möglich. Das ist bei allen elektro-
lytischen Vorgängen der Fall, bei denen die Elektroden aus dem-
selben Metall wie das gelöste Salz bestehen, also z. B. bei der Elektro-
lyse von Zinksulfat zwischen Zinkelektroden, oder bei der Elektro-
lyse von Silbernitrat zwischen Silberelektroden. Man nennt solche
Mittel, die die Polarisierung verhindern, depolarisierende Mittel.

Bei jedem elektrolytischen Vorgang tritt also eine Polarisierung
auf, wenn sie nicht durch depolarisierende Mittel verhindert wird.
Aber selbst da kann nach längerem Stromdurchgang noch eine
Polarisierung aus anderer Ursache eintreten. Wie wir aus § 63 wissen,
tritt im Elektrolyten eine Konzentrationsänderung infolge der ver-
schiedenen Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen ein. Dadurch allein
entsteht aber schon eine EMK, selbst wenn die Elektroden aus
demselben Metall bestehen wie das gelöste Salz, und zwar ist diese
EMK von entgegengesetzter Richtung wie der Strom, der die Kon-
zentrationsänderung verursacht hat. Doch ist diese Konzentrations-
Polarisierung erheblich kleiner, als die Polarisierung bei chemischer
Verschiedenheit. (Vgl. § 70.)

Ist E die Spannung, die an eine elektrolytische Zelle angelegt
wird, W der Widerstand des Elektrolyten zwischen den beiden Elek-
troden, so ist die Stromstärke in dem Augenblick, wo die Spannung
angelegt wird

$$i = \frac{E}{W}.$$

Sowie aber dieser Strom auftritt, tritt sogleich auch eine Gegen-
EMK der Polarisierung e ein, so daß nur noch die Differenz der
beiden Spannungen $E - e$ wirkt. Die Stromstärke ist dann

$$i = \frac{E - e}{W}.$$

Ist die angelegte Spannung E gleich oder kleiner als die dem
chemischen Vorgang entsprechende EMK der Polarisierung e , so wird
der Zähler und daher auch i in ganz kurzer Zeit nach dem Anlegen
der Spannung Null. Die Abnahme des Stromes erfolgt also nicht
durch Vergrößerung des Widerstandes der Zelle, sondern durch das

Auftreten der Gegen-EMK. Es kann aber auch eine Vergrößerung des Widerstandes eintreten, wenn Gase ausgeschieden werden, die Bläschen an die Elektroden ansetzen. Dadurch wird die wirksame Oberfläche der Elektroden verkleinert. Dasselbe tritt ein, wenn der Elektrolyt Verunreinigungen enthält, die sich als Schlamm an den Elektroden ansetzen. Durch Umrühren oder Bewegen des Elektroden kann das verhindert werden.

Der im vorstehenden geschilderte Stromverlauf beim Anlegen einer Spannung, die kleiner ist als die Polarisationsspannung, wonach der Strom in kurzer Zeit auf Null sinkt, gleicht dem Laden eines Kondensators, wenn eine Spannung an ihn angelegt wird. Auch da geht zuerst ein Strom von voller Stärke durch die Anschlußleitung, der rasch abnimmt und Null wird, sobald die Platten des Kondensators die der Kapazität entsprechende Ladung aufgenommen haben. Man spricht daher von einer Polarisationskapazität einer elektrolytischen Zelle, die eine Rolle spielt, wenn Wechselstrom durch die Zelle gesandt wird.

67. Stromerzeugung durch chemische Vorgänge.

Wir wissen schon aus dem vorhergehenden, daß die chemische Zersetzung durch den elektrischen Strom ein umkehrbarer Prozeß ist, d. h. daß durch einen chemischen Prozeß ein Strom erzeugt werden kann. Dazu eignet sich am besten die Verbindung eines Metalles mit einer Säure zu einem Salze. Es tritt dabei eine Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit auf, die von der Art des chemischen Vorganges abhängt. Wird der Stromkreis geschlossen, so entsteht ein Strom nach dem Ohmschen Gesetze, der im äußeren Schließungsdrahte von der Flüssigkeit zum Metall, in der Zelle selbst aber vom Metall zur Flüssigkeit geht. In dieser wirkt er wie in einer Zersetzungszelle, d. h. die Mengen der zur chemischen Wirkung gelangenden Stoffe sind proportional der Stromstärke und der Zeit (§ 59). An der Austrittsstelle des Stromes (das ist der positive Pol) scheiden sich der Wasserstoff und die Metalle aus, und an der Eintrittsstelle (das ist der negative Pol) die nicht metallischen Bestandteile.

Ebenso kann wie in einer elektrolytischen Zelle eine Gegen-EMK durch Polarisation auftreten, welche die dem ursprünglichen chemischen Vorgange entsprechende EMK vermindert. Sie wird hier in den meisten Fällen durch den an der positiven Elektrode auftretenden Wasserstoff verursacht. Außerdem erhöht der Wasserstoff durch Bläschenbildung noch den Widerstand, wie schon am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnt. Man nennt daher Zellen, bei denen diese Wirkung eintritt, inkonstante, wie z. B. die schon in § 40 erwähnte Smeesche, dann die Voltasche Zelle, bestehend aus Zink und Kupfer in verdünnter Schwefelsäure. Zink in einer Säure ist die häufigste Art der Stromerzeugung in galvanischen Zellen.

Zur Unschädlichmachung des Wasserstoffes, also als depolari-

sierende Mittel, dienen am besten sauerstoffreiche Verbindungen, wie Mangansuperoxyd (Braunstein), Bleisuperoxyd, Salpetersäure, Chromsäure usw. Diese Stoffe müssen den positiven Pol umgeben, da hier der Wasserstoff frei wird. Von der wirksamen Säure, die die negative Elektrode umgibt, werden sie durch poröse Scheidewände (Tonzellen, Häute) getrennt. Die Chromsäure wird aber auch manchmal damit vermischt. Sowie nun Wasserstoff frei wird, entzieht er diesen Verbindungen Sauerstoff und bildet Wasser. Solche Zellen weisen eine nahezu konstante EMK auf; man nennt sie daher konstante Zellen.

68. Die wichtigsten konstanten Zellen.

Die Daniellsche Zelle besteht aus Zink in verdünnter Schwefelsäure (1:12) und, davon durch eine poröse Tonzelle getrennt, Kupfer in einer gesättigten Lösung von Kupfervitriol. Der chemische Vorgang ist aus Abb. 76 ersichtlich. Hier wird also der Wasserstoff dadurch unschädlich gemacht, daß er mit dem Kupfervitriol Schwefelsäure bildet und dafür metallisches Kupfer frei macht. Die EMK dieser Zelle ist etwa 1 Volt. Statt Schwefelsäure kann auch Zinkvitriollösung verwendet werden. Es ist dann die in § 66 erwähnte Bedingung zur Vermeidung der Polarisation erfüllt, wonach die Elektrode aus demselben Metall besteht, wie die Lösung, in die sie eintaucht.

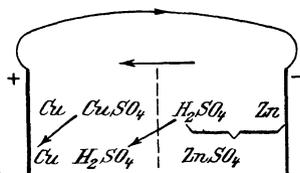


Abb. 76. Daniellsche Zelle.

Die Bunsensche Zelle besteht aus Zink in verdünnter Schwefelsäure und, davon durch eine Tonzelle getrennt, Kohle in konzentrierter Salpetersäure. Der Wasserstoff wird dadurch unschädlich gemacht, daß er mit dem Sauerstoff der Salpetersäure Wasser bildet. Der Rest sind Stickoxyde (NO_2 und N_2O_2), die als braunrote, den Atmungsorganen schädliche Dämpfe entweichen. Eine Abänderung ist die Grovesche Zelle, die statt der Kohle ein Platinblech enthält. Statt der Salpetersäure kann auch Chromsäure verwendet werden. Die EMK ist 1,9 bis 2 Volt.

Die Chromsäure-Tauchzelle hat nur eine Flüssigkeit, Zink und Kohle tauchen in eine Chromsäurelösung; da diese aber teuer ist, ersetzt man sie häufig durch eine Lösung von 1 Teil doppeltchromsaurem Natrium in 2 Teilen Schwefelsäure und 12 Teilen Wasser. Der frei werdende Wasserstoff entzieht der Chromsäure Sauerstoff und bildet Wasser. Die EMK ist etwa 2 Volt. Um den Verbrauch von Zink und Säure einzuschränken, sind diese Zellen so eingerichtet, daß die Elektroden erst im Moment des Gebrauches in die Flüssigkeit eingetaucht werden.

Die Zelle von Leclanché. Zink taucht in Salmiaklösung, und in einer Tonzelle befindet sich ein Kohlenstab, umgeben von

einem Gemenge aus Kohle und Braunstein. Der Wasserstoff reduziert den Braunstein (Mangansuperoxyd) zu Manganoxyd. Die EMK ist etwa 1,4 Volt, der innere Widerstand aber wegen des trockenen Gemenges in der Tonzelle bedeutend. Sie eignet sich besonders zu Haustelegraphen und Telephonen.

69. Lokalströme.

Taucht man chemisch reines Zink in verdünnte Schwefelsäure, so wird es von dieser nicht angegriffen. Taucht man aber noch ein Kupferstück hinein und verbindet Zink und Kupfer durch einen leitenden Draht, so findet eine Auflösung des Zinkes zu Zinkvitriol statt; man hat jetzt eine Voltasche Zelle. Dasselbe tritt — wenn auch in schwächerem Maße — ein, wenn der Verbindungsdraht nicht vorhanden ist. Der Stromkreis schließt sich dann durch die Säure selbst. Dasselbe tritt ein, wenn sich Kupfer oder ein anderes Metall auf dem Zink selbst befindet. Man nennt solche im Metall und in der Säure selbst verlaufende Ströme Lokalströme.

Auf diese Weise erklärt es sich, warum gewöhnliches Zink, das immer mehr oder weniger verunreinigt ist, von verdünnter Schwefelsäure angegriffen wird; das ist natürlich auch dann der Fall, wenn gewöhnliches Zink als Elektrode in einer der in § 68 beschriebenen Zellen angewendet wird. Es findet eine Auflösung des Zinkes auch dann statt, wenn der Zelle kein Strom entnommen wird. Da chemisch reines Zink für solche Zwecke zu teuer ist, so hilft man sich dadurch, daß man das Zink mit Quecksilber amalgamiert. Es kommt dann nur das im Amalgam enthaltene Zink mit der Säure in Berührung, während die Verunreinigungen, die sich mit Quecksilber nicht amalgamieren, unter diesem liegen bleiben¹⁾.

Auf elektrolytischer Ausscheidung von Kupfer durch Lokalströme beruht auch die bekannte Erscheinung, daß sich Eisen mit Kupfer überzieht, wenn es in einer Lösung von Kupfervitriol liegt.

70. Konzentrationsketten.

Eine galvanische Zelle erhält man auch dann, wenn Elektroden von demselben Metall in dieselbe Lösung aber von verschiedener Konzentration eintauchen. z. B. Kupferelektroden in Kupfervitriollösung, oder Silberelektroden in Silbernitratlösung. Die verschiedene Konzentration an den beiden Elektroden kann durch eine poröse Zwischenwand (Tonzelle) aufrecht erhalten werden (Abb. 84). Die Richtung des Konzentrationsstromes in der Zelle geht in der Regel von der kleineren zur größeren Konzentration. In einer elektro-

¹⁾ Das Amalgamieren geschieht am einfachsten in der Weise, daß man das Zink in verdünnte Schwefelsäure taucht und Quecksilber mit einer Bürste oder einem Lappen aufreibt, oder dem geschmolzenen Zink 4% Quecksilber zufügt.

lytischen Zelle. durch die zum Zwecke der Zersetzung Strom hindurch geschickt wird, wie z. B. die Kupferzersetzungszelle in Abb. 68, entsteht die Verschiedenheit der Konzentration durch die Zersetzung. Denn wie man sieht, verschwindet an der Kathode eine Molekel CuSO_4 ; während an der Anode eine neu entsteht. Die Folge davon ist eine Gegen-EMK der Konzentrationspolarisation. Sie ist erheblich kleiner und entsteht nicht sofort wie die auf chemischer Verschiedenheit beruhende Polarisation, weil eben die Konzentrationsverschiedenheit erst merklich ist, wenn der Strom schon eine Weile gedauert hat.

71. Normalelemente.

Einzelne galvanische Elemente zeichnen sich durch solche Konstanz ihrer EMK aus, daß sie als Normalien für Spannungsmessungen benützt werden können.

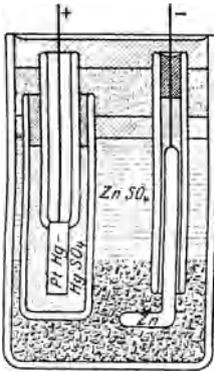


Abb. 77. Clark-Normalelement.

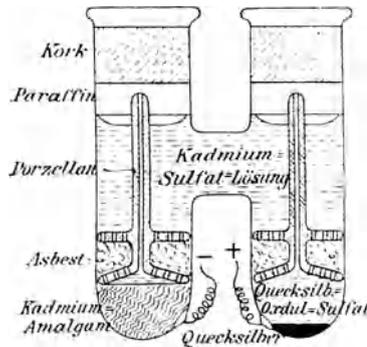


Abb. 78. Weston-Normalelement.

Die größte Konstanz haben die nach den Vorschriften der physikalisch-technischen Reichsanstalt ausgeführten Clark-Elemente (Abb. 77). Als positive Elektrode dient ein mit Quecksilber amalgamiertes Platinblech, das von einer Pasta aus Quecksilberoxydulsulfat (Hg_2SO_4), Zinksulfat und Quecksilber umgeben und in eine Tonzelle eingeschlossen ist. Diese sowie der unten umgebogene Zinkstab tauchen in Zinksulfatkristalle ($\text{ZnSO}_4 + 7 \text{H}_2\text{O}$). Der übrige Raum des gut verschlossenen Gefäßes ist mit Zinksulfatlösung ausgefüllt. Die EMK eines solchen Elementes bei der Temperatur t ist

$$E = 1,433 - 0,0012(t - 15).$$

Das Weston-Element (Abb. 78) ist in bezug auf seine Konstanz nicht so zuverlässig wie das Clark-Element. hat aber den Vorteil von der Temperatur nahezu unabhängig zu sein. An der positiven Elektrode befindet sich dieselbe Pasta als Depolarisator wie

beim Clark-Element, an der negativen aber 12,5⁰/₀ Cadmiumamalgam. Die Flüssigkeit besteht aus Cadmiumsulfatlösung mit einem Bodensatz von festem Cadmiumsulfat. Die EMK ist 1,0183 Volt¹⁾. Der Temperaturkoeffizient ist innerhalb der in Laboratoriums-räumen vorkommenden Temperaturgrenzen kleiner als 0,00005, also verschwindend klein gegenüber dem des Clark-Elementes.

Natürlich darf solchen Normalelementen nur ein sehr schwacher Strom entnommen werden, da sie sonst nicht unverändert bleiben. Insbesondere müssen nach einem unzulässigen Stromdurchgang diese Elemente längere Zeit ruhen.

72. Trockenelemente.

Sehr bequem sind in vielen Fällen wegen ihrer leichten Transportfähigkeit die sogenannten Trockenelemente. Die Elektroden sind von porösen Massen (Sägespäne, Gips, Infusorienerde, Fließpapier, Gelatine u. dgl.) umgeben, die mit den betreffenden Flüssigkeiten getränkt oder verkocht sind. Um das Austrocknen zu verhüten, sind sie durch eine Schicht von Wachs oder Asphalt abgeschlossen, und es bleibt nur eine kleine Öffnung zum Abzug der frei werdenden Gase.

Solche Zellen enthalten nur eine gewisse Elektrizitätsmenge, entsprechend den vorhandenen wirksamen Stoffen. Sie sind daher um so früher verbraucht, je stärkere Ströme man ihnen entnimmt.

Zu Meßzwecken bedarf man häufig großer, konstant bleibender Potentialdifferenzen. Solche erhält man durch Zambonische Säulen, die aus runden Scheiben von sogenanntem Gold- und Silberpapier bestehen, die abwechselnd übereinander gelegt sind. Die metallischen Schichten bilden die Elektroden, die durch das Papier, das immer eine gewisse Feuchtigkeit enthält, voneinander getrennt sind. Solcher kann man viele hundert aufeinanderschichten, und erhält so, trotz der geringen EMK eines einzelnen Elementes, beliebig hohe Potentialdifferenzen an den Enden der Säule. Zur Stromabgabe sind sie natürlich nicht verwendbar; sie würden in kurzer Zeit unbrauchbar sein. Man muß sie daher vor einem Kurzschluß hüten.

Zur Herstellung kleiner Potentialdifferenzen verwendet man häufig sogenannte Wasserelemente. Es sind kleine, mit Wasser gefüllte Gläschen, in welche je ein Zink- und ein Platindraht tauchen. Das gewöhnliche Wasser enthält genug gelöste Salze, um eine chemische Reaktion am Zink hervorzurufen. Zur Stromabgabe sind sie natürlich auch nicht geeignet.

¹⁾ Nach einer internationalen Vereinbarung (ETZ 1910, S. 1303).

73. Berechnung der elektromotorischen Kraft aus der Verbindungswärme.

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Arbeit kann keinerlei Arbeit aus Nichts gewonnen werden, sondern jede in irgendwelcher Form auftretende Arbeit kann nur aus einer anderen Arbeitsform gewonnen werden. Es handelt sich also immer nur um Umwandlungsvorgänge, bei denen zwar nicht alles für den gewünschten Zweck nutzbar gemacht, aber nichts verloren gehen kann. Ist E die EMK einer galvanischen Zelle, J der von ihr gelieferte Strom so ist die während einer Zeiteinheit geleistete Arbeit gleich EJ . Diese kann nur aus der chemischen Arbeit der Zelle gewonnen worden sein, da keine andere Arbeitsquelle vorhanden ist. Betrachten wir z. B. die in § 66 besprochene Rückbildung der in dem Wasserzersetzungsgesetz (Abb. 70) angesammelten Gase H und O, wobei der Apparat als galvanische Zelle arbeitet, so muß die elektrische Arbeit gleich jener Wärmearbeit sein, welche aufgetreten wäre, wenn dieselbe Menge H und O außerhalb der Zelle durch Verbrennung in Wasser umgewandelt worden wäre, also gleich der chemischen Verbindungswärme. Man kann demnach aus dieser die EMK des elektrolytischen Vorganges berechnen.

Nach § 59 ist die von einem Strome J in einer Sekunde ausgeschiedene Menge Wasserstoff $0,0000104 J$ Gramm. Verbindet sich dieser mit der äquivalenten Menge Sauerstoff wieder zu Wasser, so entsteht eine Wärmemenge von $0,0000104 Js$ Gramm-Kalorien, wenn s die bei der Vereinigung von 1 g Wasserstoff frei werdende Wärmemenge ist. Multipliziert man mit $42 \cdot 10^6$, so erhält man diese Wärmemenge in absoluten Arbeitseinheiten (Erg). Drückt man auch die Stromstärke J in absoluten Einheiten (§ 299) statt in Ampere aus, so hat man noch mit 10 zu multiplizieren. Das sind also $0,0000104 J \cdot s \cdot 42 \cdot 10^7$ absolute Einheiten. Diese Arbeit muß gleich sein der Arbeit jenes Stromes J , welcher diese Gewichtsmassen ausgeschieden hat, oder zu dessen Erzeugung diese Gewichtsmassen notwendig waren. Ist E die Spannung dieses Stromes in absoluten Einheiten, so ist seine Arbeit in der Zeiteinheit EJ .

Wir haben also die Gleichung

$$EJ = 0,0000104 \cdot J \cdot s \cdot 42 \cdot 10^7.$$

Und weil 10^8 absolute Einheiten gleich 1 Volt sind, so ist

$$E = 0,0000104 \cdot s \cdot 4,2 \text{ Volt.}$$

Für die Verbindung von H und O zu Wasser ist

$$s = 34200 \text{ Gramm-Kalorien.}$$

Also ist die dabei entstehende EMK, bzw. die zur Wasserzersetzung mindestens nötige Spannung

$$E = 1,48 \text{ Volt.}$$

wozu noch der Spannungsabfall in der Zelle kommt. so daß man in der Regel 2 Volt braucht.

Für einen anderen Stoff gilt, wenn b sein elektrochemisches Äquivalent ist.

$$E = 4,2 \cdot b \cdot s \text{ Volt.}$$

Oder mit Benützung von § 59

$$E = 4,2 \cdot 0,0000104 \frac{as}{y}$$

$$E = 0,0000436 \frac{R}{y},$$

wobei $R = as$ die Wärmetönung der betreffenden Verbindung genannt wird, die für die meisten Verbindungen bereits bekannt ist¹⁾.

Man kann also auf diese Weise leicht die EMK einer Zelle oder die Gegenkraft der Polarisation berechnen, wenn man die chemischen Vorgänge genau kennt. Für R ist immer die algebraische Summe aller Wärmetönungen, auch jener, die bei der Lösung der Ionen auftreten, einzusetzen. Die chemischen Vorgänge sind allerdings in den seltensten Fällen so genau bekannt, daß eine genügende Übereinstimmung mit der gemessenen EMK besteht.

Beispiel: Berechnung der EMK eine Daniellschen Zelle. Bei der Auflösung von 1 g Zink entsteht eine Wärmemenge von $s = 1635$ Kal. Das elektrochemische Äquivalent ist $b = 0,000338$ (§ 59). Daher ist die dabei auftretende EMK: $4,2 \cdot 0,000338 \cdot 1635 = 2,3$ Volt. Außerdem wird aber Kupfer aus dem Kupfervitriol ausgeschieden. Dabei wird Wärme verbraucht; d. h. diese EMK wirkt der des Zinkes entgegen. Dabei ist $b = 0,00033$, $s = 881$. Also die EMK = $4,2 \cdot 0,00033 \cdot 881 = 1,2$. Die EMK der Zelle ist also $2,3 - 1,2 = 1,1$.

Die letzte Gleichung genügt jedoch nur dann zur Berechnung der EMK einer elektrolytischen Zelle, wenn ihre EMK von der Temperatur unabhängig ist. In einem aus verschiedenen Leitern zusammengesetzten Stromkreis tritt eine EMK auf, wenn die Berührungsstellen verschiedene Temperatur haben. Hier wird also Wärme unmittelbar in Elektrizität umgesetzt. Tritt dies in einer elektrolytischen Zelle ein, so addiert oder subtrahiert sich diese EMK von der durch den chemischen Vorgang erzeugten EMK. Die Größe dieser EMK ist ausgedrückt durch $T \frac{dE}{dT}$, wenn T die absolute Temperatur (von -270^0 an gerechnet) bedeutet. Der Differentialquotient $\frac{dE}{dT}$ gibt die Änderung dE der EMK an, wenn sich die Temperatur um dT ändert, das ist also der Temperaturkoeffizient der Zelle hinsichtlich der EMK (nicht hinsichtlich des Widerstandes der Lösung). Für das Clark-Element (§ 71) ist er z. B. 0,001. Diese EMK kommt zu der chemischen hinzu und daher lautet dann die vollständige Gleichung

¹⁾ Naumanns Lehr- und Handbuch der Thermochemie.

$$E = 0,0000436 \frac{R}{y} + T \frac{dE}{dT}.$$

Das ist die Gleichung von Helmholtz. v an t Hoff und Nernst sind auf anderen Wegen zu anderen Gleichungen für die EMK einer elektrolytischen Zelle gekommen. Darauf einzugehen, würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Es muß daher auf die Lehrbücher der Elektrochemie verwiesen werden.

74. Akkumulatoren.

Die Akkumulatoren beruhen auf der Umkehrbarkeit der chemischen und elektrischen Erscheinungen oder, was auf dasselbe herauskommt, auf der Nutzbarmachung der Polarisation, wobei mit Einrechnung der unvermeidlichen Verluste das Gesetz von der Erhaltung der Arbeit gilt. Der Wasserzersetzungsapparat (Abb. 70), bei dem die Gase getrennt aufgefangen werden, ist das älteste Beispiel dieser Art. Denn wie in § 66 ausgeführt wurde, vereinigen sich die ausgeschiedenen Gase wieder zu Wasser, wenn die Elektroden durch einen Leiter geschlossen werden. Man nennt diesen Strom Entladestrom, während derjenige, welcher vorher die Zersetzung bewirkt hat, Ladestrom genannt wird. Da die EMK der Polarisation der aufgedrückten Spannung entgegengerichtet ist, hat auch der Entladestrom entgegengesetzte Richtung wie der Ladestrom.

Viel besser eignen sich zu diesem umkehrbaren Prozesse Bleiplatten in verdünnter Schwefelsäure. Wird ein Strom durchgeschickt, so oxydiert der frei werdende Sauerstoff die Anode zu Bleisuperoxyd PbO_2 , während der Wasserstoff die oberflächliche, natürliche Oxydschicht der Kathode zu metallischem Blei reduziert. Verbindet man dann die beiden Platten nach Ausschaltung der Stromquelle, so entsteht ein Strom entgegengesetzter Richtung (Entladung), wobei jetzt der Wasserstoff an der früheren Anode auftritt, und das Bleisuperoxyd mit Hilfe der Schwefelsäure zu Bleisulfat reduziert wird (Abb. 79), während das Blei der anderen Platte zu Bleisulfat oxydiert wird gemäß der Gleichung

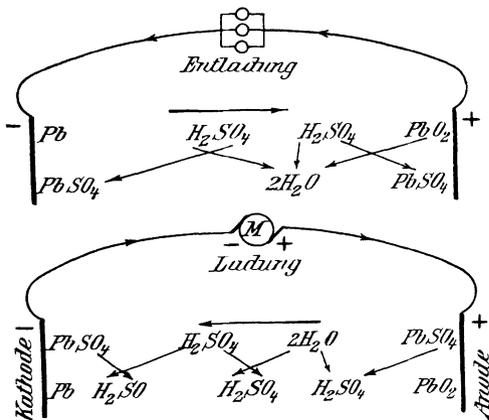
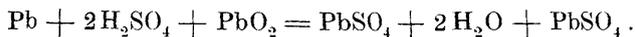


Abb. 79. Entladungs- und Ladungsvorgang beim Bleiakkumulator.

Der Strom hört auf, wenn beide Platten gleich sind. Dies ist der ideale, chemische Vorgang; in Wirklichkeit werden neben Bleisulphat und -superoxyd noch andere Oxyde (PbO und Pb_2O_3) gebildet, während H und O frei werden und in Form von Bläschen aufsteigen.

Da der Akkumulator abwechselnd als Zersetzungszelle und als galvanische Zelle arbeitet, bezeichnet man, um Verwechslungen zu vermeiden, die Platten nach ihrer Polarität als positive und negative. Denn wie aus Abb. 79 hervorgeht, bleibt die Polarität bei der Ladung und Entladung ungeändert, nur die Stromrichtung ist jedesmal eine andere. Der Wasserstoff des Elektrolyten wandert nach § 56 immer in der Richtung des Stromes, das SO_4 -Radikal gegen diese Richtung. Die in Abb. 79 eingezeichnete Maschine *M* arbeitet als Stromerzeuger (Lademaschine), wenn ihre EMK höher ist als die EMK des Akkumulators; dagegen als Stromverbraucher (Motor), wenn sie kleiner ist als die des Akkumulators.

Bei neuen Bleiplatten haben die anfänglichen Bleioxyd- und Bleisulfatschichten nur geringe Dicke. Bei wiederholten Ladungen und Entladungen werden sie immer dicker, und man erhält schließlich Platten mit dicken, porösen Schichten (aktive Masse). Solche brauchen bei gleicher Stromstärke längere Zeit zur Ladung und liefern dafür bei der Entladung längere Zeit Strom. Es steigert sich also ihre Aufnahmefähigkeit, oder, wie man auch sagt, ihre Kapazität. Das Wort Kapazität hat hier nicht dieselbe Bedeutung wie bei einem Kondensator, denn nicht die Elektrizität wird hier angesammelt, wie auf den Platten eines Kondensators, sondern die Arbeit, indem die zugeführte elektrische Arbeit in chemische Arbeit umgewandelt wird, und hier verbleibt, solange nicht ein Entladestromkreis geschlossen und dadurch Gelegenheit zur Rückverwandlung in elektrische Arbeit gegeben wird.

Das abwechselnde Laden und Entladen in der Absicht, die wirksamen Schichten der Platten dicker zu machen, nennt man das Formieren des Akkumulators (Plantè). Um diesen Vorgang abzukürzen, bedeckte Faure die Bleiplatten mit einer Schicht von Mennige (Pb_3O_4). Diese wird beim ersten Laden einerseits in metallisches Blei, andererseits in Superoxyd verwandelt. Da diese Schichten leicht abfallen, verwendet man heute Bleigitter, in die ein dicker Teig aus Mennige und Bleiglätte hineingepreßt wird. Wie aus Abb. 79 ersichtlich ist, erfolgt die Umwandlung der negativen Platte von metallischem Blei in Sulfat und umgekehrt, während die Umwandlung der positiven Platte von Superoxyd in Sulfat und umgekehrt stattfindet. Infolgedessen wird diese lockerer als jene und zerfällt schließlich, während jene noch brauchbar ist. Um ihr daher größere Festigkeit zu geben, wird jetzt die positive Platte meist aus metallischem Blei hergestellt. Da aber das vollständige Formieren derselben zu lange dauern würde, versieht man die Oberfläche mit feinen Rippen und streicht in diese eine dünne

Schicht von Oxyd ein (Tudorsches Verfahren). Dieses fällt während des Betriebes allmählich heraus, während sich das metallische Blei in immer tieferen Schichten zu aktiver Masse formiert. In neuester Zeit fabriziert man die + Platten wieder ganz aus metallischem Blei und wendet ein Schnellformierungs-Verfahren an.

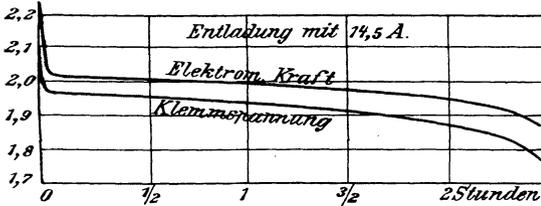


Abb. 80.

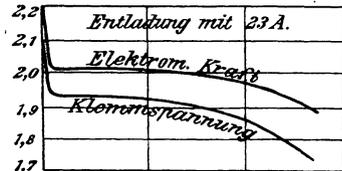


Abb. 81.

Die EMK des Bleiakкумуляtors hängt von der Konzentration der Säure ab. Sie beträgt nach Streintz bei einer Konzentration von 86 g Schwefelsäure in einem Liter Flüssigkeit 1,9 Volt, bei 300 g in einem Liter 2,02 Volt, und bei 685 g 2,24 Volt. Nach Strasser läßt sich die EMK innerhalb praktischer Grenzen darstellen durch $e = d + 0,85$ Volt, wenn d die Säuredichte zwischen 1,1 und 1,3 bedeutet. Daraus erklärt es sich, warum bei der Ladung die EMK steigt, bei der Entladung aber sinkt (Abb. 80 bis 82). selbst

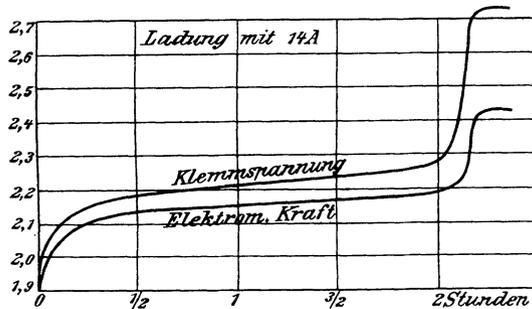


Abb. 82.

wenn die chemische Umwandlung noch nicht vollständig stattgefunden hat. Denn aus der Abb. 79 ersieht man, daß bei der Ladung eine Zunahme der Konzentration stattfindet, weil neue H_2SO_4 -Molekeln entstehen während Wassermolekeln verschwinden, daß hingegen bei der Entladung eine Verminderung der Konzentration stattfindet, weil H_2SO_4 -Molekeln verschwinden, während Wassermolekeln neu entstehen. Würde die Entladung bis zur vollständigen chemischen Umwandlung fortgesetzt werden, so würde die EMK natürlich auf Null sinken, was aber im Interesse der Haltbarkeit der Platten nicht stattfinden darf.

Bei der Ladung muß die angelegte Spannung (Klemmenspannung) um den Betrag des Spannungsabfalles JW im Elektrolyten größer sein als die EMK. Umgekehrt ist bei der Entladung die Klemmenspannung um den Spannungsabfall kleiner als die EMK. Abb. 80 und 81¹⁾ zeigt die Abnahme der EMK und der Klemmenspannung mit der Zeit für zwei verschiedene Stromstärken. Abb. 82 zeigt die Zunahme der EMK und Klemmenspannung desselben Akkumulators bei der Ladung. Der senkrechte Abstand zwischen den zusammengehörigen Schaulinien ist der Spannungsabfall im Akkumulator. Abb. 83 zeigt die Abnahme der Klemmenspannung bei

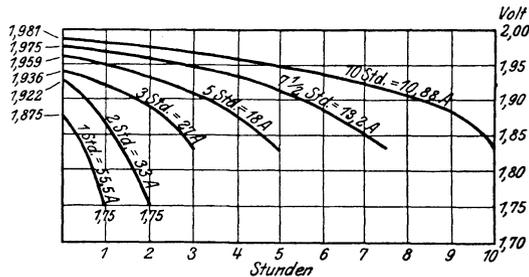


Abb. 83.

verschiedenen Entladestromstärken²⁾. Im Interesse der Haltbarkeit der Platten soll die Entladung nicht unter 1,95 Volt sinken. Die Abnahme der EMK bei der Entladung erfolgt anfangs sehr rasch, dann langsamer und schließlich wieder rascher. Die Zunahme der EMK bei Ladung erfolgt anfangs rasch, dann langsamer; schließlich steigt sie plötzlich auf 2,4 bis 2,45 und bleibt auf diesem Wert, selbst wenn die Ladung noch so lange fortgesetzt wird. Das ganze Bleisulfat ist umgewandelt und daher findet jetzt nur eine Zersetzung der Schwefelsäure unter Abscheidung von $2H$ und O (Knallgas) nach dem in Abb. 69 dargestellten Vorgang statt. Wichtig ist, daß die Ladung bis zur Umwandlung des ganzen Sulfates fortgesetzt wird, da sich sonst feste Krusten in kristallinischer statt schwammiger Form daraus bilden (Sulfatation), die sich nur schwer umwandeln.

Mißt man die EMK gleich nach einer Unterbrechung der Entladung und eine Weile später, so bemerkt man eine kleine Zunahme; man sagt, der Akkumulator erholt sich. Der Grund liegt in einer während der Entladung aufgetretenen Konzentrationspolarisation (§ 70). Denn wie aus Abb. 79 zu ersehen ist, findet die Umwandlung der Schwefelsäure in Wasser, also die Abnahme der Konzentration hauptsächlich an der positiven Platte statt. Infolge-

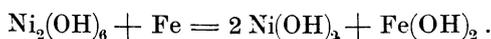
¹⁾ Abb. 80 bis 82 nach einem Prospekt der Kölner Akkumulatorenwerke Gottfried Hagen.

²⁾ Nach Büttner, aus dem Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik.

dessen tritt während der Entladung eine Gegen-EMK auf. Nach Unterbrechung der Entladung findet aber durch Diffusion und durch Konzentrationsströme (§ 70) im Inneren der Zelle ein Ausgleich der verschiedenen Konzentration statt und dadurch verschwindet diese Gegen-EMK. Die wirkliche EMK eines Akkumulators kann man also erst messen, nachdem er eine Weile stromlos war. Diese Gegen-EMK ist auch die Ursache, daß die gesamte (resultierende) EMK der Zelle nach einer gewissen Stromentnahme sehr rasch zu sinken beginnt (Abb. 80, 81), und zwar lange bevor das ganze Blei und Bleisuperoxyd in Bleisulfat umgewandelt ist.

Die Aufnahmefähigkeit eines Akkumulators ist bestimmt durch jene elektrische Arbeit, die er bei der Entladung abgeben kann. Der Wirkungsgrad ist gleich dem Verhältnis der abgegebenen zur aufgenommenen Arbeit. Er liegt zwischen 75⁰/₁₀ und 85⁰/₁₀. Für praktische Anwendung kann man aber nur mit 70 bis 75⁰/₁₀ rechnen. Die Fabrikanten der Akkumulatoren pflegen Aufnahmefähigkeit und Wirkungsgrad in Amperestunden anzugeben. Dieser Wirkungsgrad ist viel höher als der richtige, auf die Arbeit bezogene, weil die Klemmenspannung bei der Entladung kleiner ist als bei der Ladung, was bei den Angaben in Amperestunden außer Betracht bleibt. Der größte Teil des Verlustes besteht in der dem inneren Widerstande entsprechenden Stromwärme, der kleinere aus chemischen Verlusten (Verlust an aktiver Masse, Knallgasbildung durch Wasserzersetzung).

Nebst dem sauren Blei-Akkumulator gibt es noch den von Jungner angegebenen und von Edison etwas abgeänderten alkalischen Eisen-Nickel-Akkumulator. Die negative Elektrode enthält feinverteiltes Eisen, die positive Nickeloxydhydrat: $\text{Ni}_2(\text{OH})_6$. Die Flüssigkeit besteht aus 24⁰/₁₀ Kalilauge. Der chemische Vorgang bei der Ladung ist:



Bei der Entladung findet derselbe Vorgang rückwärts statt. Die EMK. beträgt 1,36 bis 1,4. Die Klemmenspannung steigt bei der Ladung bis auf 1,8 Volt. Bei der Entladung beginnt sie mit 1,35 und sinkt bis 1 Volt. Unter diese Spannung soll die Entladung nicht fortgesetzt werden. Der innere Widerstand ist unter gleichen Verhältnissen größer als beim Blei-Akkumulator. Praktische Wichtigkeit hat dieser Akkumulator bisher nicht erlangt¹⁾.

75. Elektrische Kataphorese (Mitführung).

Wird in eine U-förmig gebogene Kapillarröhre Wasser gebracht, und werden von beiden Enden Platindrähte als Elektroden eingetaucht, so findet bei Anlegung einer hohen Spannung eine Ver-

¹⁾ Näheres bei: Kammerhoff, „Der Edison-Akkumulator“. Berlin 1910. Strasser, ETZ 1916 S. 326.

schiebung des Wassers in der Richtung des Stromes statt, so daß das Niveau an der negativen Elektrode höher steht, als an der positiven. Teilt man ein Gefäß (Abb. 84) durch eine poröse Wand in 2 Abteilungen und schickt Strom hindurch, so wird das Wasser durch die poröse Wand von der positiven Abteilung nach der negativen überführt. Die Menge des überführten Wassers ist der Stromstärke ungefähr proportional. Auch andere Flüssigkeiten, wie Alkohol, Kupfervitriol, werden in gleicher Weise überführt; verdünnte Schwefelsäure nicht; einige Flüssigkeiten werden auch in' entgegengesetzter Richtung überführt. Treibt man umgekehrt eine solche Flüssigkeit durch eine poröse

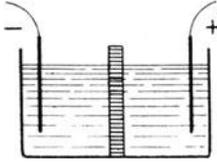


Abb. 84.

Wand, so entsteht ein Strom, den man als Strömungsstrom bezeichnet. Der Grund der Erscheinung liegt in der Reibung der Flüssigkeit an der Wand. Da die berührte Wandfläche bei einer porösen Wand am größten ist, ist hier die Wirkung am stärksten. Die elektrische Mitführung ist nichts anderes, als die Umkehrung dieser Erscheinung. Die elektrische Mitführung hat eine gewisse technische Bedeutung zur Austrocknung von Stoffen, wie z. B. Torf, da die Wirkung um etwa 50⁰/₀ stärker ist, als wenn die gleiche Arbeit in Form von Wärme zur Austrocknung benützt wird; ferner zur Wasserentziehung aus Emulsionen (Milch, Blut).

Fünftes Kapitel.

Magnetische Wirkungen des Stromes.

76. Amperesche Regel. Das magnetische und elektrische Feld des Stromes.

Ein zu einer Magnetnadel paralleler Strom lenkt diese ab, indem er sie senkrecht zum Stromleiter zu stellen sucht. Die Amperesche Regel bestimmt die Richtung der Ablenkung: sie lautet in etwas abgeänderter Form: Man lege die rechte Hand so an den Stromleiter, daß die Fingerspitzen in der Richtung des Stromes zeigen, und die innere Handfläche dem Magnete zugekehrt ist; dann wird der Nordpol des Magnetes in der Richtung des weggespreizten Daumens (also nach links) abgelenkt. Oder: Wenn ein Bohrer so gehalten wird, daß seine vordringende Spitze in die Richtung des Stromes zeigt, so wird ein Nordpol im Sinne der Drehrichtung des Bohrers bewegt. Noch einfacher ist die Regel von Sumec: Ein Strom in der Richtung des ausgestreckten Daumens der rechten Hand erzeugt um sich ein Feld in der Richtung der gekrümmten Finger.

Aus der Ablenkung eines Magnetes durch den Strom folgt, daß dieser ein magnetisches Feld besitzt; man kann es wie in § 4 sichtbar machen, wenn man Eisenfeilspäne auf ein steifes Papier streut und den Stromleiter senkrecht durchsteckt (Abb. 85). Die magnetischen Kraftlinien sind konzentrische Kreise, deren Ebenen senkrecht zum Stromleiter sind. In räumlicher Darstellung umgeben sie natürlich den Leiter auf seiner ganzen Länge (Abb. 86). In diesen Figuren sind nur die innersten Kraftlinien sichtbar; in Wirklichkeit aber erstrecken sie sich, immer weniger werdend, bis ins Unendliche, wo ihre Dichte Null ist. Die Pfeilrichtung der Kraftlinien ist die Drehrichtung des erwähnten Bohrers.

Da die Niveaulächen nach § 14 an jeder Stelle senkrecht zu den Kraftlinien stehen, so folgt aus den Fig. 85 und 86, daß die magnetischen Niveaulächen eines geradlinigen Stromes ebene Flächen sind, die in der Richtung der Radien der Kraftlinien verlaufen und sich sämtlich in der Achse des Stromleiters schneiden.

Daß die magnetischen Kraftlinien Kreise sind, gilt natürlich

nur für kreisrunde Leiter, und wenn keine anderen Felder in der Nähe sind. Andernfalls entsteht ein resultierendes Feld, dessen Kraftlinien verschieden gestaltete, aber immer geschlossene Kurven sind, wie die Abbildungen für zwei parallele Ströme zeigen, im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien, die niemals geschlossene Kurven sind, sondern auf einer positiven Ladung den Anfang und auf einer negativen das Ende haben.

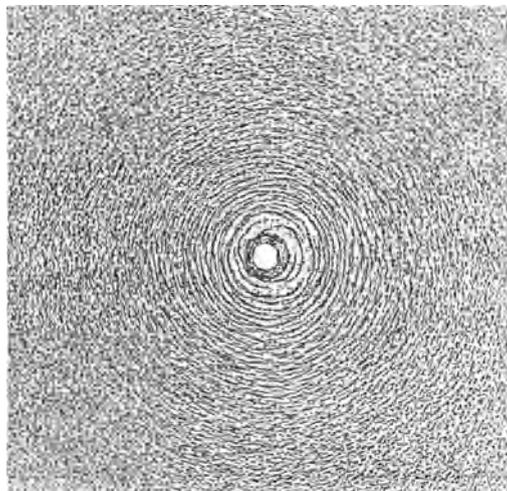


Abb. 85. Magnetisches Feld eines Stromes.

Auch im Innern des Stromleiters gibt es magnetische Kraftlinien, die sich der Querschnittform des Leiters anpassen. Ihre Dichte ist um so kleiner, je näher man der elektrischen Achse des Leiters kommt. In dieser ist die Feldstärke Null. Man erkennt dies, wenn man den Leiter in Stromfäden zerlegt. Jeder hat ein komponentales Feld wie Abb. 85. Verfolgt man den Kraftlinien-

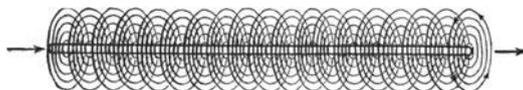


Abb. 86. Magnetisches Feld eines Stromes (perspektivisch).

verlauf zweier gegenüber liegender Stromfäden, so sieht man, daß in der Mitte gleich starke aber entgegengesetzte Kräfte zusammenreffen und sich daher gegenseitig aufheben (vgl. Abb. 178 mit den resultierenden Kraftlinien zweier Ströme von gleicher Richtung. Die Mitte ist frei von Kraftlinien). Als resultierendes Feld aller Stromfäden ergeben sich sowohl außerhalb wie innerhalb des Leiters geschlossene Kraftlinien, die sich der Oberfläche anschmiegen und

hier am dichtesten sind. Je weiter man von der Oberfläche weggeht, desto geringer wird ihre Dichte, und desto mehr nähern sie sich der Kreisform. Daß es eine Linie im Innern des Leiters gibt, wo die Feldstärke Null ist, folgt auch daraus, daß sich die Niveauflächen im Innern des Leiters schneiden. Man muß daher die elektrische Achse des Leiters als jene Linie definieren, wo sich die Niveauflächen schneiden und die elektrische Feldstärke Null ist¹⁾.

Ist der Stromleiter ein Rohr, so folgt aus der gleichen Überlegung, daß die Feldstärke im ganzen Innenraum Null ist.

Da von jeder Elektrizitätsmenge elektrische Kraftlinien ausgehen, so müssen solche auch von jedem stromführenden Leiter ausgehen. Ihr Ende finden sie entweder auf einem Stromleiter von entgegengesetzter Polarität oder einem anderen leitenden Körper (wozu auch die Erde gehört), auf dem sie eine entgegengesetzte Elektrizitätsmenge induzieren. Nach § 15 müssen die elektrischen Kraftlinien senkrecht von der Leiteroberfläche ausgehen. Sind keine anderen, störenden Felder vorhanden, so verlaufen sie radial; und immer sind sie senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. Außer dem magnetischen hat also jeder stromführende Leiter auch noch ein elektrisches Feld. Die elektrisierende Kraft \mathfrak{S}_e dieses Feldes ist gemäß § 11 gleich dem Potentialgefälle, das senkrecht zur Oberfläche des Leiters herrscht. Zwischen zwei parallelen schienenförmigen Leitern von entgegengesetzter Polarität besteht ein homogenes elektrisches Feld, dessen \mathfrak{S}_e nach § 14 gleich der Potentialdifferenz, dividiert durch den Abstand ist. Die elektrische Kraftliniendichte ist gemäß § 27: $\mathfrak{B}_e = \vartheta \mathfrak{S}_e$. Daher ist diese Kraftliniendichte bei einem Strome von niedriger Spannung sehr klein; so klein, daß man das elektrische Feld eines solchen Stromes neben seinem magnetischen gar nicht beachtet. Anders ist es bei Strömen von hoher Spannung, wo das elektrische Feld für die Isolation maßgebend ist (§ 252). Über das magnetische und elektrische Feld zwischen zwei Stromleitern vgl. § 117.

77. Elektromagnetische Bewegungsvorrichtungen.

Nach der in § 3 gegebenen Definition der magnetischen Kraftlinien müßte ein magnetischer Nordpol einen Stromleiter beständig in der durch die Amperesche Regel bestimmten Richtung umkreisen. Da aber ein einzelner Pol unmöglich ist, und der Südpol gleichzeitig die entgegengesetzte Richtung einschlagen will, so ist keine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine Drehung des Magneten möglich mit dem Bestreben, sich senkrecht zum Strome zu stellen. Es gelingt nur dann eine beständige Bewegung, wenn der eine Pol

¹⁾ Dabei ist vorausgesetzt, daß der Strom gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters verteilt ist (Stromdichte konstant). Ist dies nicht der Fall (Hautwirkung bei Wechselströmen § 169), so kann die Feldstärke fast im ganzen Innern des Leiters Null sein.

der Einwirkung des Stromes entzogen wird, wie es z. B. bei dem in Abb. 87 abgebildeten Apparate der Fall ist. Zwei festverbundene Stabmagnete ns schweben mittels einer Spitze auf einem Quecksilbernapfchen, das von der Stütze S getragen wird. Von der Mitte des Verbindungsstückes reicht ein Metallarm A in eine Quecksilberrinne. Der Strom geht durch die Stütze S und durch A in die Quecksilberrinne und von da durch den Draht D zurück. Die beiden Nordpole befinden sich also im Felde des durch S fließenden Stromes und werden daher von diesem im Sinne der Ampèreschen Regel um S gedreht¹⁾.

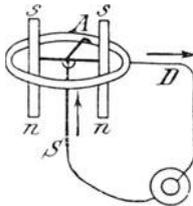


Abb. 87. Drehung eines Magnetes um einen Strom.



Abb. 88. Magnetisches Feld eines Stromes und eines Magnetpols.

Abb. 88 zeigt das resultierende magnetische Feld eines Stromes und eines Magnetpols (Ende einer magnetisierten Stricknadel). Man erkennt auch hieraus, daß der Pol den Strom zu umkreisen sucht. Bemerkenswert ist dabei, daß es zwar in nächster Nähe des Stromleiters geschlossene Kraftlinien gibt, daß hingegen die folgenden durch den Einfluß des Poles aufgelöst sind und sich mit dessen Kraftlinien zu resultierenden vereinigt haben, welche vom Nordpol ausgehen und auf dem Südpol der Stricknadel endigen, was natürlich in einer Ebene nicht sichtbar gemacht werden kann.

Man kann bei dem in Abb. 87 dargestellten Motor natürlich auch mehr als zwei Magnete anwenden. Denkt man sich viele zu einem zylindrischen Magnet mit den Polen nn , ss vereinigt (Abb. 89), so dreht sich dieser um seine Achse, wenn ein Strom über den in einem Quecksilbernapfchen L stehenden Lagerzapfen und den Schleifkontakt K durch den Magnet geleitet wird, weil sich die Pole nn neben diesem Stromweg befinden. Über die Umkehrung dieser Vorrichtung zur Stromerzeugung (unipolare Induktion) vgl. § 127.

Steht umgekehrt ein Magnet fest, während der Stromleiter beweglich ist, so wird letzterer natürlich in entgegengesetzter Richtung

¹⁾ Das entgegengesetzte Drehmoment der Südpole s ist wegen ihres großen Abstandes von S nur schwach. Zur vollständigen Ermittlung des Drehmomentes müssen aber die Wirkungen aller 4 Pole auf alle Teile des geschlossenen Stromkreises berücksichtigt werden.

abgelenkt. Eine solche Vorrichtung zeigt Abb. 90. Ein Draht BCB schwebt mittels einer Spitze auf einem Quecksilbernäpfchen, das von dem Magnete ns getragen wird. Die Enden reichen in eine Quecksilberrinne, die an die Stromquelle angeschlossen ist. Bei Stromdurchgang werden die beiden senkrechten Leiterstücke entgegen der durch die Amperesche Regel bestimmten Richtung um

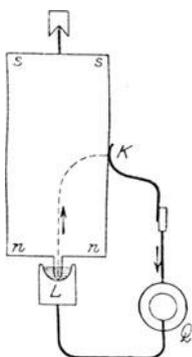


Abb. 89. Drehung eines zylindrischen Magnetes um seine Achse.

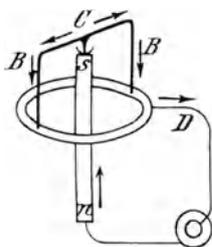


Abb. 90. Drehung eines Stromleiters um einen Magnet.

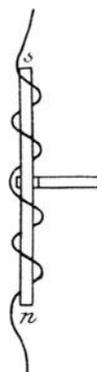


Abb. 91. Selbsttätige Aufwicklung eines Stromleiters auf einen Magnet.

den festen Magnetpol s gedreht. Ein noch schöneres Beispiel ist der rotierende Lichtbogen (Abb. 450) und der auf einen Stabmagnet sich aufwickelnde Leiter (Abb. 91). Lässt man nämlich neben einem Stabmagnet ns ein sehr dünnes Kupferband (oder Kupferlitze) herabhängen und schießt plötzlich einen Strom hindurch, so wird es vom Nordpol in dem einen, vom Südpol im anderen Sinne abgelenkt und wickelt sich daher spiralförmig um den Magnetstab.

78. Die Kraft zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol.

Nach einem von Laplace aufgestellten Elementargesetz besteht zwischen einem kurzen Stück dl eines Stromleiters mit der Stromstärke i und einem Magnetpol m eine Kraft dF (mit Beziehung auf Abb. 92):

$$dF = \frac{i \cdot m \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2} (41)$$

Führt man für $\frac{m}{r^2}$ die Feldstärke des Poles m ein, die wir jetzt zum Unterschied von der Feldstärke des Stromes mit \mathfrak{S}_m bezeichnen, so ist

$$dF = \mathfrak{S}_m \cdot i \cdot dl \cdot \sin \alpha (42)$$

Die Richtung dieser Kraft ist (abweichend von der zwischen zwei elektrischen oder zwischen zwei magnetischen Massen wirkenden Kraft) nicht die Verbindungslinie zwischen m und dl , sondern die Senkrechte zu der durch m und dl gelegten Ebene und wird durch die Amperesche Regel bestimmt.

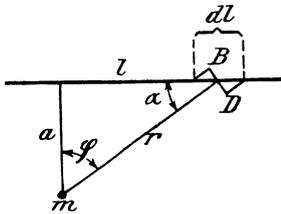


Abb. 92.

Ist $\alpha = 0$, so ist auch $dF = 0$; d. h. zwischen einem in der Verlängerung des Stromleiterstückes dl liegenden Pol und diesem besteht keine Kraft.

Zerlegt man das Stromelement dl in zwei Komponenten, eine senkrecht zu r und eine in der Richtung von r (Abb. 92), so ist $dl \cdot \sin \alpha = BD$ und daher $dF = \mathfrak{S}_m \cdot i \cdot BD$. d. h. die Kraft geht nur von der auf r senkrechten Komponente des Leiterstückes aus¹⁾.

79. Die Kraft zwischen einem unendlich langen Strom und einem Magnetpol.

Aus dem vorstehenden Grundgesetz erhält man die Kraft F zwischen einem unendlich langen geradlinigen Strom von der Stärke i und einem Magnetpol m , wenn man die Wirkungen der unendlich vielen Elemente dl summiert. Dies geschieht durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$.

$$F = \int dF = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{im \sin \alpha}{r^2} dl.$$

Der leichteren Integration wegen wollen wir α durch φ und r durch a (d. i. der senkrechte Abstand der Masse m vom Stromleiter) ausdrücken.

¹⁾ Laplace hat obige Formel aus der von Biot und Savart experimentell festgestellten Kraft zwischen einem langen geradlinigen Stromleiter und einem Magnetpol m (die im folgenden § 79 berechnet ist) abgeleitet. Die Formel 41 wird daher auch als Biot-Savartsches Gesetz bezeichnet. Über die Bedeutung dieses Gesetzes herrscht vielfach Unklarheit. Man wirft ihm vor, daß man beliebige konstante Glieder zu ihm hinzuaddieren könne, ohne daß sich bei der Integration über einen geschlossenen Stromkreis etwas ändert, weil eben jedes konstante Glied bei der Integration über einen geschlossenen Weg verschwindet. Dazu ist zu bemerken, daß das B.-S. Gesetz kein Naturgesetz sein soll, wie z. B. das Coloumbsche Gesetz. Eine solche Auffassung hätte schon deswegen keinen Sinn, weil in einzelnen, abgetrennten Leiterstücken kein Strom möglich ist. Das B.-S. Gesetz ist nichts anderes, als eine zum Zwecke der Ausrechnung der magnetischen Kräfte eines geschlossenen Stromes aufgestellte mathematische Hilfsformel, deren Berechtigung ganz einfach darin liegt, daß sie in jedem Falle eines wirklichen Stromes zum richtigen Ergebnis führt. Zu diesem Zwecke denkt man sich den Stromleiter in Längenelemente dl zerlegt, auf die sich das B.-S. Gesetz nun bezieht.

Es ist nämlich (Abb. 92)

$$\alpha = 90 - \varphi \quad \text{also} \quad \sin \alpha = \cos \varphi,$$

$$r = \frac{a}{\cos \varphi}$$

$$l = a \operatorname{tg} \varphi \quad \text{also} \quad dl = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Dann ist

$$F = \frac{im}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Die Grenzen des Integrals sind jetzt $\frac{\pi}{2}$, weil der Winkel φ veränderlich ist; und dieser ist für den einen Grenzfall, wo dl rechts im Unendlichen liegt, $+90^\circ$, für den anderen, wo dl links im Unendlichen liegt, -90° . Führt man die Integration aus, so ist

$$F = \frac{im}{a} \left| \sin \varphi \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{im}{a} (1 + 1) = \frac{2im}{a}. \quad \dots (43)$$

Dies gilt angenähert auch für ein endliches, geradliniges Leiterstück, wenn der Abstand a klein ist gegenüber der Länge des Leiterstückes.

Aus der letzten Gleichung erhält man die Arbeit, die vom Strom geleistet wird, wenn sich ein einzelner Pol einmal um den Stromleiter herumbewegt, indem man die Kraft mit dem Weg multipliziert. Da dieser Weg ein Kreis vom Radius a ist, so ist die Arbeit

$$A = F 2 \pi a = 4 \pi im,$$

und das Potential (potentieller Arbeitswert) an einer Stelle mit der magnetischen Masse 1 ist

$$U = 4 \pi i.$$

80. Magnetische Feldstärke eines Stromes in seiner nächsten Umgebung.

Nach § 3 ist die magnetische Feldstärke nichts anderes als die auf eine magnetische Masseneinheit in der Richtung der Kraftlinien wirkende Kraft. Wir finden daher die magnetische Feldstärke des Stromelementes dl aus Gl. 41 wenn wir eine Masseneinheit in einem Punkte O (Abb. 93) annehmen, der in senkrechter Entfernung a von dl liegt. Durch diesen Punkt geht die von dem Stromelement

dl herrührende kreisförmige Kraftlinie, deren Radius a ist. Da jetzt $\alpha = 90^\circ$ ist, so folgt aus Gl. 41 für die Feldstärke \mathfrak{H}_i des Stromelementes dl

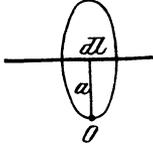


Abb. 93.

$$\mathfrak{H}_i = \frac{i \cdot dl}{a^2},$$

und für die Feldstärke \mathfrak{S}_i eines im Vergleiche zu a langen Leiters aus Gl. 43

$$\mathfrak{S}_i = \frac{2i}{a},$$

und für die Kraft F zwischen diesem Leiter und einem Magnetpol m

$$F = m\mathfrak{S}_i.$$

Diese Formel ist gleichlautend mit der Gl. 4 (§ 3) für die Kraft, die auf einen Pol m in einem magnetischen Felde \mathfrak{S} ausgeübt wird. Das war auch nicht anders zu erwarten, denn für den Pol m ist es gleichgültig, ob das magnetische Feld, in dem er sich befindet, von einem Strom oder von einem anderen magnetischen Pol herrührt.

Es ist zu beachten, daß in den Formeln für die Feldstärke und die Kraft eines Leiterstückes die Länge desselben nicht vorkommt. Sie gelten eben strenge genommen nur für solche Punkte, deren Abstand a vom Stromleiter gegen die Länge des Leiterstückes verschwindend klein ist. Für Punkte größeren Abstandes gelten diese Formeln nur näherungsweise.

Beispiel: Um die Feldstärke \mathfrak{S}_i in absoluten elektromagnetischen Einheiten, d. h. in Kraftlinien pro cm^2 zu erhalten, müssen alle Größen, also auch die Stromstärke i in absoluten Einheiten ausgedrückt werden. Da 1 Ampere = 0,1 absol. Einh. (§ 299) ist, so ist die Feldstärke eines Stromes von 1 Ampere in 0,5 cm Abstand von der Achse des Leitungsdrahtes

$$\mathfrak{S}_i = \frac{2 \cdot 0,1}{0,5} = 0,4.$$

Befindet sich an dieser Stelle ein Magnetpol $m = 1000$, so ist die Kraft, die ihn um den Leiter heranzutreiben sucht,

$$F = m\mathfrak{S}_i = 1000 \cdot 0,4 = 400 \text{ Dyn} = \frac{400}{980} \text{ Grammgewicht} = 0,4 \text{ Grammgewicht}.$$

81. Magnetische Feldstärke einer geschlossenen Stromfigur.

Abb. 94 zeigt das räumliche magnetische Feld eines zu einer geschlossenen Figur gebogenen Stromes (Stromfläche) andeutungsweise. Es ergibt sich ohne weiteres aus Abb. 86, wenn man sich den dort bezeichneten Stromleiter zusammengebogen denkt. In der Horizontalebene ist es ausführlicher gezeichnet und man erkennt daraus, daß es in der Mitte nahezu homogen ist, weil auf ein kurzes Stück die Kraftlinien parallel sind. Bringt man in diese Ebene

ein mit Eisenfeilspänen bestreutes Kartonpapier, so erhält man das in Abb. 179 abgebildete Kraftlinienbild zweier Ströme von entgegengesetzter Richtung. Man erkennt ferner, daß das Feld einer geschlossenen Stromfigur identisch ist mit dem einer gleich großen magnetischen Platte oder Schale, d. h. mit einer Eisenplatte, die auf der einen Seite mit positivem, auf der anderen mit negativem Magnetismus gleichmäßig belegt ist; denn die Kraftlinien der Stromfläche gehen ebenfalls von einer Seitenfläche aus und kehren im Bogen zur anderen zurück. Die Bedingungen, unter denen eine Stromfläche durch eine magnetische Platte auch quantitativ ersetzt werden kann, werden wir später (§ 86) kennen lernen. Welche Seite positiv und welche negativ magnetisch zu denken ist, lehrt die Amperesche Regel, wenn man die Hand so an den Stromleiter legt, daß die innere Handfläche dem Mittelpunkt der Stromfläche zugekehrt ist. Auf der Daumenseite befindet sich die positive Seite der Stromfläche. Steht sie dem Südpol eines Magnetes gegenüber, so wird die Stromfigur von ihm angezogen, steht sie einem Nordpol gegenüber, so wird sie abgestoßen.

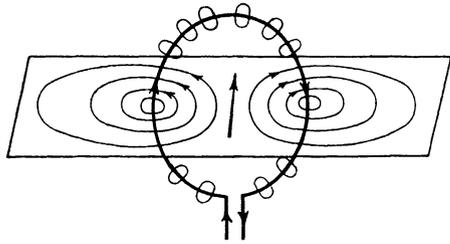


Abb. 94.

Da parallel oder nahezu parallel verlaufende Kraftlinien sich gegenseitig abstoßen (§ 4), so folgt aus Abb. 94, daß auf einen vom Strom durchflossenen Leiter, der eine geschlossene Figur oder einen Bogen bildet, eine Kraft ausgeübt wird, welche die Figur oder den Bogen zu erweitern strebt.

Ist die Stromfigur ein Kreis, so ist die auf einen im Mittelpunkt befindlichen Magnetpol m ausgeübte Kraft und die Feldstärke im Mittelpunkt leicht zu berechnen. Man hat die Summe aller dF zu bilden, die von allen Stromelementen dl , aus denen der Kreis besteht, ausgeübt werden. Da in diesem Falle für alle Teile des Stromes $\alpha = 90$, also $\sin \alpha = 1$ und r gleich dem Radius des Kreises ist, also keine veränderliche Größe vorkommt, so ist die Summe aller dl gleich dem Umfange des Kreises $2\pi r$ und wir haben

$$F = \sum dF = \sum \frac{im dl}{r^2} = \frac{im 2\pi}{r}.$$

Daraus folgt für die Feldstärke in der Mitte des Kreises

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{r}.$$

Dieser Ausdruck gilt strenge genommen nur für den Mittelpunkt; angenähert aber auch für einen gewissen Raum um den

Mittelpunkt, und zwar um so mehr, je größer der Radius des Kreises ist.

Besteht der Kreis statt aus einer aus N Windungen, und liegen diese so nahe beisammen, daß die Dicke und Breite des so gebildeten Ringes klein ist gegenüber dem mittleren Radius, so ist

$$F = \frac{2\pi imN}{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \frac{2\pi iN}{r}.$$

Über die Feldstärke seitwärts vom Mittelpunkt s. S. 132.

Beispiel: Die Feldstärke eines Kreisstromes vom Radius 1,5 cm, der eine Stromstärke von 1 Ampere führt, ist demnach im Mittelpunkt

$$\mathfrak{H} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,1}{1,5} = 0,42 \text{ absol. elektromgn. Einh.,}$$

also ungefähr ebenso groß wie nach dem Beispiel im vorigen Paragraphen bei einem geraden Stromleiter im Abstand von 0,5 cm.

Für die Feldstärke im Mittelpunkte eines Stromrechteckes mit den Seiten $2b$ und $2d$ ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \frac{4i \sqrt{b^2 + d^2}}{bd}.$$

82. Die elektromagnetische Eigenwirkung eines Stromes.

Es ist schon im vorhergehenden darauf hingewiesen worden, daß infolge des Bestrebens der Kraftlinien, sich gegenseitig abzu stoßen, eine geschlossene Stromfigur so auf sich selbst wirkt, daß sie sich zu erweitern strebt. Macht man also einen Teil der Strombahn beweglich, indem man z. B. wie in Abb. 95 über zwei feste,

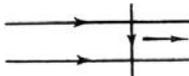


Abb. 95.

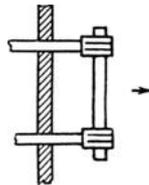


Abb. 96.



Abb. 97.

blanke Leiter einen dritten legt, und schickt einen genügend starken Strom durch die so gebildete Schleife, so wird der dritte Leiter in der Richtung des Pfeiles fortgetrieben, vorausgesetzt, daß nicht an den Berührungsstellen der drei Leiter ein Zusammenschweißen durch die Stromwärme stattfindet. In elektrischen Anlagen sind Fälle beobachtet worden, wo Schmelzsicherungen von der in Abb. 96 abgebildeten Art, die nur durch die Reibung zwischen den Messerkontakten festgehalten werden, beim plötzlichen Auftreten großer

Stromstärken infolge eines Kurzschlusses, in der Richtung des Pfeiles weggeschleudert wurden¹⁾.

Stellt man zwei Kohlenstäbe so nahe nebeneinander, daß sich ein Lichtbogen zwischen ihnen bilden läßt, so wandert er bei genügender Stärke des von oben zugeführten Stromes nach unten bis an die Spitzen der Kohlen (Abb. 97), trotzdem die warme Luft, die er selbst erzeugt, ihn nach oben zu treiben versucht. Davon macht

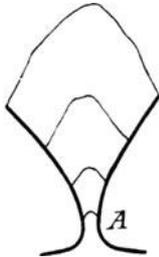


Abb. 98. Auftrieb eines Lichtbogens an Hörnern.

man bei solchen Bogenlampen Anwendung, die ihr Licht hauptsächlich nach unten aussenden sollen.

Auf der Erweiterung einer vom Strom gebildeten Schleife durch elektromagnetische Eigenwirkung beruhen die Hörnerblitzschutzvorrichtungen (Abb. 98). Tritt an der engsten Stelle (bei A) ein Lichtbogen auf, so wird er teils durch elektromagnetische Eigenwirkung, teils durch die von ihm aus aufsteigende heiße Luft nach oben getrieben, wobei er infolge des immer größer werdenden Abstandes zwischen den Hörnern und infolge seiner bogenförmigen Ausbildung schließlich so lang wird, bis die Spannung der Stromquelle nicht mehr ausreicht, um ihn aufrecht zu erhalten, so daß er verlöscht. Abb. 99 zeigt einen solchen Lichtbogen kurz vor dem Erlöschen.

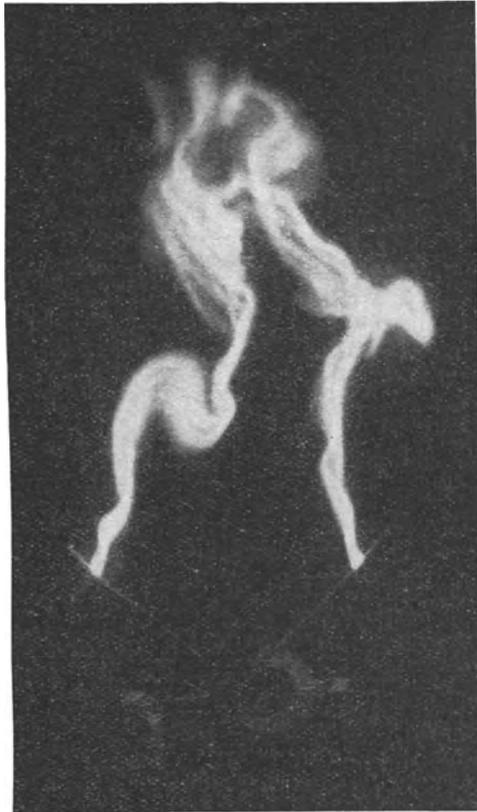


Abb. 99. Lichtbogen einer Hörnerblitzschutzvorrichtung kurz vor dem Verlöschen.

¹⁾ Die elektromagnetische Kraft wirkt sofort beim Eintritt des Stromes, während zum Schmelzen des Schmelzstreifens eine gewisse Zeit erforderlich ist.

Die elektromagnetische Eigenwirkung ist auch dann schon vorhanden, wenn der Strom einen Winkel bildet (Abb. 100). Man sieht, daß die Kraftlinien auf der Innenseite des Winkels einen kleineren gegenseitigen Abstand haben, als auf der äußeren. Infolgedessen überwiegt ihre gegenseitige Abstoßung auf der Innenseite, und der Stromleiter sucht sich zu strecken, bis er geradlinig geworden ist, in welchem Zustande dann die Abstände der Kraftlinien allseits gleich sind.

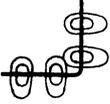


Abb. 100.

83. Ein geradliniger Strom in einem homogenen magnetischen Felde.

Die Kraft F , die zwischen einem geradlinigen Leiterstück von der Länge l mit der Stromstärke i und einem homogenen magnetischem Felde \mathfrak{H}_m besteht (Abb. 101), ergibt sich aus Gl. 42 durch Summierung aller dF , die auf sämtliche Stromelemente dl ausgeübt werden. Es ist also

$$F = \sum dF = \mathfrak{H}_m i \sin \alpha \cdot \sum dl = \mathfrak{H}_m i l \sin \alpha.$$

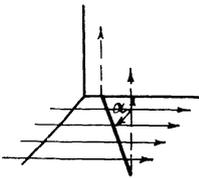


Abb. 101.

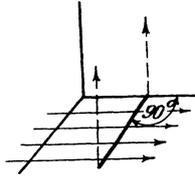


Abb. 102.

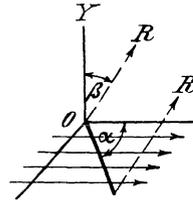


Abb. 103.

Die Richtung der Kraft ist wiederum senkrecht zu der durch den Leiter und die Kraftlinien des Feldes \mathfrak{H}_m gelegten Ebene und wird durch die Amperesche Regel bestimmt, indem man die innere Handfläche jenen positiven magnetischen Massen zukehrt, von denen die Kraftlinien des homogenen Feldes ausgehen, so daß also die Kraftlinien, wenn man sie mit Pfeilen bezeichnet, auf die innere Handfläche auftreffen. Dann würden also, wenn der Leiter feststeht, die positiven magnetischen Massen bzw. die Kraftlinien in der Richtung des Daumens bewegt werden. Steht aber das Feld fest, während der Leiter frei beweglich ist, so bewegt er sich parallel zu sich selbst in entgegengesetzter Richtung als der Daumen anzeigt.

Liegt der Leiter so, daß er die Kraftlinien senkrecht kreuzt (Abb. 102), so ist $\sin \alpha = 1$ und daher

$$F = \mathfrak{H}_m i l.$$

Es ist aber der Fall möglich, daß der Leiter durch irgendeine Führung seiner freien Beweglichkeit beraubt ist und nur den in

Abb. 103 durch R bezeichneten Weg einschlagen kann, so daß also die Bewegungsrichtung mit der zu den Kraftlinien senkrechten Richtung Y den Winkel β einschließt. Dann geht obige Gleichung über in

$$F = \sum_m il \sin \alpha \cos \beta \dots \dots \dots (44)$$

weil bei dieser Bewegungsrichtung von der in der Richtung Y wirkenden Kraft nur jene Komponente zur Geltung kommt, die in die Richtung R fällt.

Zur Erklärung der Erscheinungen und zur Aufstellung ihrer mathematischen Gesetze haben wir bisher das Feld des Stromes und das auf ihn wirkende äußere Feld auseinander gehalten, als ob jedes für sich allein bestände, ebenso wie man in der Mechanik jede Kraft für sich betrachtet, auch wenn mehrere auf denselben Körper einwirken und eine Resultierende bilden. In Wirklichkeit setzen sich beide Felder (nach § 7) zu einem resultierenden zusammen.



Abb. 104.

Abb. 104 zeigt das resultierende Feld in einer zum Stromleiter senkrechten Ebene. Da die Kraftlinien nach § 4 wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen streben, so folgt auch aus der Betrachtung dieses Bildes, daß sich der Leiter in der Richtung des Pfeiles, also senkrecht zu den Kraftlinien des homogenen Feldes bewegen muß.

84. Eine geschlossene Stromfigur in einem homogenen magnetischen Felde.

Befindet sich ein zu einer geschlossenen Figur gebogener Stromleiter, z. B. ein Rechteck in einem homogenen magnetischen Felde, — ein Fall, der in der Elektrotechnik häufig vorkommt —, so ist die Kraft verschieden je nach der Stellung des Rechteckes.

In Abb. 105 steht das um die Y -Achse drehbare Stromrechteck parallel zu den Kraftlinien. Die in den Stromleiter eingezeichneten Pfeile geben die Stromrichtung an. Dann wird nach der im vorigen Paragraph angegebenen Regel die linke Seite des Rechteckes nach rückwärts, die rechte Seite nach vorn bewegt. Infolgedessen muß eine Drehung im Sinne der Pfeile eintreten. Auf die obere und untere Seite des Rechteckes wird bei dieser Stellung keine Kraft ausgeübt, da sie parallel zu den Kraftlinien sind.

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man die durch Abb. 104 erläuterte Wirkung der Kraftlinien darauf anwendet, wie das untere Bild der Abb. 105 zeigt, das einen Schnitt in horizontaler Richtung darstellt. Da die Kraftlinien wie elastische Fäden wirken, bewegen sie die Seiten des Rechteckes in der Richtung der Pfeile.

Die Kraft, die das Rechteck zu drehen sucht, ist nach Gl. 44

$$F = 2 \sum_m il \cos \beta.$$

wenn l eine der Seitenlängen bezeichnet. Bei der in Abb. 105 gezeichneten Stellung ist $\beta = 0$, also $\cos \beta = 1$. Während der Drehung wächst β , und daher nimmt F ab. Ist das Rechteck in die Stellung Abb. 106, also senkrecht zu den Kraftlinien gekommen, so ist $\beta = 90^\circ$, und daher $F = 0$. Dagegen wirkt jetzt nach der Ampèreschen Regel eine Kraft auf alle 4 Seiten nach außen in der Richtung der kleinen Pfeile, und sucht das Rechteck zu vergrößern. Das untere Bild dieser Figur zeigt wiederum einen Schnitt in horizontaler Richtung, und man erkennt auch daraus den Druck nach außen.

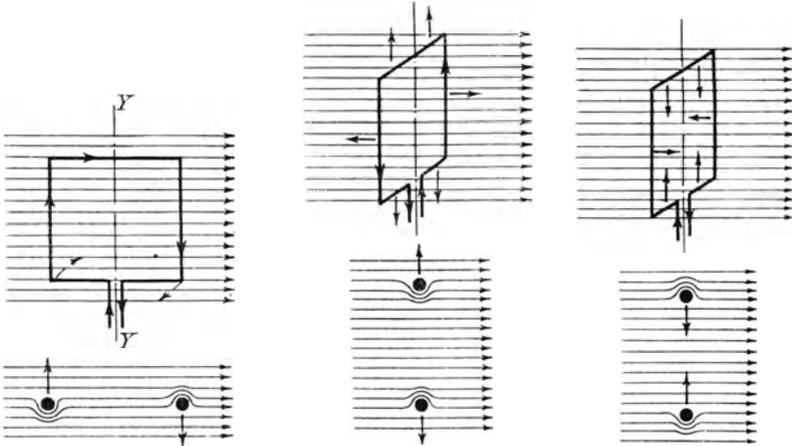


Abb. 105.

Abb. 106.

Abb. 107.

Stromrechteck im magnetischen Felde bei verschiedener Stellung.

Außerdem gibt es noch eine charakteristische Stellung, das ist die in Abb. 107 dargestellte, wo das Stromrechteck gegen Abb. 106 um 180° verdreht erscheint, oder was dasselbe ist, der Strom entgegengesetzte Richtung hat. Das Rechteck erfährt jetzt ebenfalls keine Drehung, weil die ganze auf seine

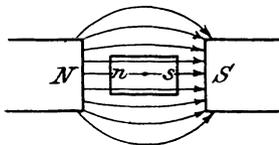


Abb. 108.

Seiten wirkende Kraft nach innen gerichtet ist. Das ergibt sich auch aus dem unteren Teil dieser Abbildung, der wieder den horizontalen Schnitt darstellt. Denkt man sich das Stromrechteck und das magnetische Feld durch entsprechende Magnete ersetzt, so erhält man Abb. 108. Auf den mittleren Magnet ns wirken von beiden Seiten abstoßende Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, da gleichnamige Pole einander gegenüberstehen. Der Magnet befindet sich also im Gleichgewicht, aber nicht im stabilen, sondern im labilen, denn bei der geringsten Verschiebung in der einen oder anderen Richtung dreht er sich um 180° . Dasselbe ist bei dem Stromrechteck Abb. 107 der Fall. Bei der ge-

ringsten Abweichung aus dieser Stellung dreht es sich, und kommt zunächst in die Stellung Abb. 105 und schließlich in die Stellung Abb. 106, wo das stabile Gleichgewicht erreicht ist.

Wir gewinnen aus dem Vorstehenden den Satz, daß eine drehbare, geschlossene Stromfigur in einem magnetischen Felde dann im Gleichgewicht ist, wenn sie möglichst viel Kraftlinien umschließt. Treffen die Kraftlinien auf die positive Seite der Stromfläche, so ist das Gleichgewicht ein labiles; treffen sie auf die negative Seite, so ist das Gleichgewicht ein stabiles. Eine Stromfigur sucht sich also in einem magnetischen Felde so zu stellen, daß möglichst viel Kraftlinien auf die negative Fläche treffen.

Ist r der Abstand der Seiten des Stromrechteckes von der Achse Y (Drehungsradius), so ist das Drehmoment gleich

$$rF = 2r\zeta_m il \cos\beta.$$

Nun ist aber $2rl \cos\beta \zeta_m = \zeta$ nichts anderes als die Anzahl der Kraftlinien, welche das Stromrechteck bei der Stellung unter dem Winkel β umschließt, so daß das Drehmoment gleich $i\zeta$ ist. Besteht das Stromrechteck aus N Windungen, so ist das Drehmoment gleich $iN\zeta$. Das Produkt iN bezeichnet man als Amperewindungen, so daß das Drehmoment gleich dem Produkte aus den Amperewindungen und der von den Windungen umschlossenen Kraftlinienmenge ist.

Solche Stromrechtecke kommen bei Motoren, Drehspulenzustromen usw. vor, nur mit dem Unterschied, daß die das Feld erzeugenden Pole in der Regel so geformt sind, daß die Kraftlinien nahezu während der ganzen Drehung senkrecht zu den Seiten des Rechteckes verlaufen, wenigstens bis in die Nähe der Ränder, so daß fast während der ganzen Drehung $\beta = 0$ und $F = 2\zeta_m il$ ist.

85. Das magnetische Gebläse.

Bringt man in die Nähe eines Lichtbogens einen Magnet derart, daß seine Kraftlinien den Lichtbogen kreuzen, so wird dieser abgelenkt. Nach § 78 erfolgt die Ablenkung in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene, und zwar in dem durch die Ampèresche Regel angegebenen Sinne. Demnach wird in Abb. 109, wo die Elektroden des Lichtbogens lotrecht stehen, und die Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, der Lichtbogen nach der Seite gedrückt. Da ein entsprechender Luftstrom die gleiche Wirkung auf den Lichtbogen ausübt, so bezeichnet man die Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen Lichtbogen als magnetisches Gebläse. Wird die Richtung des Stromes oder die Richtung des Feldes umgekehrt, so wird der Lichtbogen

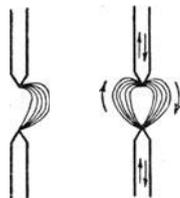


Abb. 109. Abb. 110.

nach der entgegengesetzten Seite gedrückt. Wird die Richtung des Stromes und des Feldes gleichzeitig umgekehrt, so wird der Lichtbogen immer nach derselben Seite gedrückt. Ein Wechselstromlichtbogen im Felde eines Wechselstromelektromagnetes, der in demselben Stromkreis liegt wie der Lichtbogen, wird mithin in derselben Weise abgelenkt, als wenn Gleichstrom durch diesen Stromkreis ginge¹⁾.

Wird der Lichtbogen von einem Wechselstrom erzeugt (d. h. von einem Strom, der abwechselnd hin und her geht), während das magnetische Feld immer gleiche Richtung hat, so muß der Lichtbogen bei hingehendem Strom nach der einen, bei hergehendem Strom nach der entgegengesetzten Richtung abgelegt werden. Folgen die Stromwechsel so rasch aufeinander, wie es bei den in der Elektrotechnik üblichen Wechselströmen der Fall ist, so folgen die Lichteindrücke so rasch aufeinander, daß sie in der Sinneswahrnehmung zusammenfließen, und der Lichtbogen so aussieht, als ob er in zwei Hälften zerteilt würde (Fig. 110; vgl. auch § 262, VI). Dasselbe ist der Fall, wenn der Lichtbogen von einem Gleichstrom herrührt, das magnetische Feld aber von einem Wechselstrom erzeugt wird.

Das magnetische Gebläse wird in der Elektrotechnik häufig angewendet; so z. B. zum sofortigen Auslösen der Lichtbögen bei automatischen Ausschaltern, Blitzschutzvorrichtungen, Funkenstrecken und dergleichen.

86. Magnetische Platte.

Aus den §§ 81 und 84 ging schon hervor, daß man die Wirkung einer Stromwindung (Stromfigur) durch die Wirkung eines Magnetes ersetzen kann. Wir wollen nun die Bedingungen, unter denen die Gleichheit der Wirkung besteht, mathematisch ausdrücken.

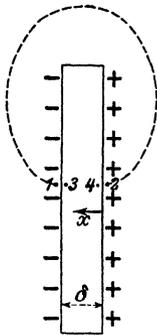


Abb. 111.

Das Naheliegendste ist, daß man sich die Stromfigur (Abb. 94 oder 105) ersetzt denkt durch einen Magnet von demselben Querschnitt wie die Fläche der Stromfigur und sehr geringer Länge, also durch eine magnetische Platte oder Schale (Abb. 111), die aus zwei parallelen Flächen besteht, von denen die eine mit positiver, die andere mit negativer magnetischer Masse gleichmäßig belegt ist. Die auf einer Flächeneinheit sitzende Masse wird als magnetische Flächendichte σ , der Abstand der beiden Flächen mit δ , ihre Größe mit S bezeichnet. Dann ist (nach § 8) das magnetische Moment der Platte

$$\mathfrak{M} = \delta \sigma S.$$

¹⁾ Davon ist Anwendung gemacht bei der vom Verfasser angegebenen Hörnerblitzschutzvorrichtung mit magnetischer Funkenlöschung

Das Produkt $\delta\sigma$ nennt man gewöhnlich magnetische Stärke der Platte und bezeichnet es mit Φ .

Es sei U_1 das Potential der rechten (positiven) Seitenfläche der magnetischen Platte. $\frac{dU_1}{dx}$ ist die differentielle Änderung des Potentials U_1 in senkrechter Richtung (Abb. 14, S. 15). Auf der Strecke δ ändert sich also das Potential um den Betrag $\frac{dU_1}{dx}\delta$. Daher ist das Potential U_2 der um δ entfernten negativen Seitenfläche:

$$-U_2 = U_1 + \frac{dU_1}{dx}\delta.$$

Das gesamte Potential U der ganzen Platte ist gleich der Summe der Potentiale beider Flächen; also $U = U_1 + U_2 = -\frac{dU_1}{dx}\delta$. Nun ist aber $-\frac{dU_1}{dx}$ nichts anderes als die Feldstärke (§ 14). Diese ist nach § 10 gleich $\sigma\omega$, wenn ω der räumliche Winkel (Gesichtswinkel) ist, unter dem die Platte von dem betreffenden Punkte aus gesehen erscheint. Mithin ist

$$U = \delta\sigma\omega = \Phi\omega. (45)$$

Befindet sich in diesem Punkte ein Magnetpol m , so ist der Arbeitswert (potentielle Energie; Gl. 8)

$$A = \Phi\omega m.$$

Bemerkenswert ist, daß es nur auf das Produkt $\sigma\delta$ und den räumlichen Gesichtswinkel ω , d. h. auf die Umrandung der Platte, aber nicht auf ihre Gestalt ankommt, so daß sie auch beliebig krumm sein kann.

Befindet sich der Pol $+m$ unmittelbar links neben der Platte (bei 1 in Abb. 111), so daß der räumliche Winkel, unter dem die Platte von da aus gesehen wird, gleich 2π ist, so ist der Arbeitswert $A_1 = -2\pi\sigma\delta m$ und das Potential $U_1 = -2\pi\sigma\delta$. Befindet sich der Pol $+m$ unmittelbar rechts neben der Platte (bei 2), so ist der Arbeitswert $A_2 = +2\pi\sigma\delta m$ und das Potential $U_2 = +2\pi\sigma\delta$. Wird m auf dem gestrichelten Wege von 1 nach 2 gebracht, so ist die dabei geleistete Arbeit

$$A_a = A_2 - A_1 = 4\pi\sigma\delta m$$

und die Potentialdifferenz zwischen diesen 2 Punkten

$$U_2 - U_1 = 4\pi\sigma\delta.$$

der A. E. G., um ein rascheres Verlöschen des Lichtbogens zu bewirken, als es nur durch die elektromagnetische Eigenwirkung und durch den Auftrieb der erwärmten Luft geschieht. ETZ 1901, S. 569.

Es kommt also nur auf die Endpunkte dieses Weges an; wie er zwischen diesen verläuft, ist gleichgültig.

Wäre es möglich, einen Pol m in das Innere der Platte hineinzubringen, so wäre hier die Kraft nach links gerichtet, also entgegengesetzt wie außerhalb der Platte. Daher ist die Potentialdifferenz zwischen den Punkten 3 und 4, die innen, unmittelbar neben den Seitenflächen liegen,

$$U_4 - U_3 = -4\pi\sigma\delta.$$

Wäre es möglich einen Pol durch die Platte hindurchzuführen, also auf geschlossenem Wege vom Punkt 1 wieder auf diesen zurückzubringen, so wäre die Potentialdifferenz und die geleistete Arbeit gleich Null¹⁾. Das gilt auch von jedem beliebig geformten Magnet, wenn σ die Flächendichte des freien Magnetismus an jener Stelle der Oberfläche ist, welche sich unmittelbar neben den betrachteten Punkten 1 und 2 befindet.

Wenn die magnetischen Kraftlinien wie hier und wie in den Abb. 2 bis 9 von magnetischen Massen ausgehen, so bezeichnet man diese als „Quellen“ des Feldes²⁾, und das Feld als Quellenfeld oder lamellares Feld oder „wirbelfreies Feld“ zum Unterschiede von dem Felde eines Stromes (Abb. 85, 86), das als quellenfreies oder solenoidales oder Wirbelfeld bezeichnet wird.

Da die Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ nichts anderes ist als das Linienintegral der Feldstärke (S. 23) zwischen der $+$ und $-$ Seite der Platte oder eines beliebigen Magnetes, so kann man auch sagen: Das Linienintegral in einem Quellenfelde ist gleich $4\pi\sigma\delta$, und zwar sowohl außerhalb des Magnetes wie auch innerhalb desselben.

Da δ der senkrechte Abstand zwischen den Seitenflächen ist (Abb. 111), und die Feldstärke oder magnetische Kraft \mathfrak{S} gleich dem negativen Differentialquotienten des Potentials ist, so ist

$$\mathfrak{S} = -\frac{dU}{d\delta} = \pm 2\pi\sigma,$$

wobei das $-$ Zeichen für die linke, das $+$ Zeichen für die rechte Seite gilt. Das stimmt mit dem in § 10 erhaltenen Ergebnis überein.

¹⁾ Dieser Satz hat nur theoretische Bedeutung, da es in Wirklichkeit unmöglich ist, durch eine Platte hindurchzudringen. Würde man ein Loch durch sie bohren, so hätte man keine Platte mehr, sondern einen Ring mit anderen Eigenschaften. Dieser Satz hat nur Bedeutung als Gegenstück gegenüber dem Arbeitswert einer geschlossenen Stromfigur (§ 87).

²⁾ Manchmal wird unterschieden zwischen dem positiven Magnetismus als „Quelle“ und dem negativen Magnetismus als „Senke“ des Feldes, weil nach der Festsetzung in § 3 die Kraftlinien von jenem ausgehen und auf diesem enden.

87. Magnetisches Potential einer geschlossenen Stromfigur.

Ampère hat gezeigt, daß ein zu einer geschlossenen Figur gebogener Stromkreis mit der Stromstärke i auf alle Punkte außerhalb des Leiters selbst eine solche magnetische Wirkung ausübt wie eine gleich große magnetische Platte mit dem magnetischen Moment

$$\mathfrak{M} = iS,$$

das heißt mit der magnetischen Stärke

$$\Phi = \sigma\delta = i \dots \dots \dots (46)$$

In einem Punkte, von dem aus gesehen die Stromfigur unter dem räumlichen Gesichtswinkel ω erscheint, ist also das magnetische Potential der Stromfigur zufolge Gl. 45:

$$U = \omega i \dots \dots \dots (47)$$

Befindet sich in diesem Punkte ein Magnetpol m , so ist der Arbeitswert (potentielle Energie)

$$A = \omega im \dots \dots \dots (48)$$

Auch hier kommt es, wie bei einer magnetischen Platte nicht auf die Gestalt, sondern nur auf die Größe der Stromfigur an. Die Dicke der Ersatzplatte ist beliebig, weil es nur darauf ankommt, daß das Produkt $\sigma\delta$ gleich der Stromstärke ist.

Die Gleichheit der magnetischen Platte und der Stromfigur gilt jedoch nicht für Punkte der Platte selbst, denn in einem solchen Punkt herrscht gemäß § 10 die Feldstärke $4\pi\sigma$. Hingegen ist gemäß § 81 die Feldstärke in der Mitte einer kreisförmigen Stromfigur gleich $2\pi i/r$, und ändert ihre Richtung nicht wie beim Durchgang durch eine magnetische Platte (§ 86), sondern hat die in Abb. 94 angedeutete Richtung. Die Kraftlinien eines Stromes umschlingen den Leiter; sie bilden einen Wirbel um ihn (vgl. Abb. 85 und 86), weshalb man das magnetische Feld eines Stromes als Wirbelfeld oder mit Hinblick auf Abb. 115 als solenoidales Feld, oder wegen des Fehlens von Anfang und Ende als quellenfreies Feld bezeichnet.

Geht man auf geschlossenem Wege durch eine Stromfigur hindurch, oder was dasselbe ist, um einen Stromleiter herum, so ändert sich der räumliche Gesichtswinkel ω , unter dem die Stromfigur von diesem Wege aus gesehen wird, um den Betrag 4π . Daher ist das Linienintegral der Feldstärke \oint über einen geschlossenen Weg l , also das Potential der Stromfigur

$$U = \int \oint \xi \cdot dl = 4\pi i, \dots \dots \dots (49)$$

was mit dem in § 79 erhaltenen Wert übereinstimmt¹⁾. Hingegen

¹⁾ Durch viele Bücher schleppt sich die Behauptung durch, daß das Potential eines Stromes nicht eindeutig sei. Das wird damit begründet, daß man

ist bei einer magnetischen Platte das Linienintegral über einen geschlossenen Weg gleich Null (§ 86). Ist der Strom i Null, so ist natürlich auch das Linienintegral Null; ein magnetischer Wirbel ist überhaupt nicht vorhanden. Es ergibt sich daher der allgemeine Satz: Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über einen geschlossenen Weg, der nicht einen Strom umschlingt, ist Null, gleichgültig ob der Weg durch einen Magnet oder magnetisierten Körper oder nur durch Luft verläuft.

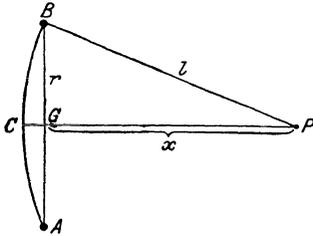


Abb. 112.

Als Beispiel für die Anwendung des Strompotentials berechnen wir die Feldstärke eines in A und B von der Zeichenebene geschnittenen Kreisstromes (Abb. 112) im Punkte P . Der räumliche Gesichtswinkel ω , unter dem der Kreisstrom von P aus gesehen wird, verhält sich zu 4π , wie die Oberfläche des Kugelsegmentes ACB , also wie $2\pi l \cdot CG = 2\pi l(l-x)$ zur ganzen Kugeloberfläche $4\pi l^2$.

Also

$$\omega : 4\pi = 2\pi l(l-x) : 4\pi l^2.$$

Mithin

$$\omega = \frac{2\pi(l-x)}{l} = 2\pi - \frac{2\pi x}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Nun ist die Feldstärke gleich dem negativen Potentialgefälle in der Richtung der Kraftlinie, also in der Richtung x :

$$\mathfrak{H} = -\frac{dU}{dx} = -i \frac{d\omega}{dx} = i \frac{2\pi r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = i \frac{2\pi r^2}{r^3}.$$

Rückt P nach G , so ist $x = 0$ und $l = r$; dann ist $\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{r}$, was mit § 81 übereinstimmt.

Aus Gl. 45 oder 47 ergibt sich sofort die Gestalt der Niveaulinien einer magnetischen Platte oder einer geschlossenen Strom-

beim Herumführen eines Poles m um einen Strom i die Arbeit $4\pi im$ gewinnt oder (bei entgegengesetzter Richtung) aufwenden muß, so daß sich also die gesamte Arbeit bei jedem Umgang um diesen Betrag vermehrt oder vermindert. Daraus wurde weiterhin der Schluß gezogen, daß die Feldstärke nicht gleich dem Potentialgefälle sei und sogar, daß ein Strom überhaupt kein Potential habe. Dazu ist zu bemerken, daß das Potential kein Ausdruck für die gesamte Arbeit ist, sondern ein Ausdruck für die potentielle Energie der jeweiligen Lage zwischen Stromkreis und Pol. Daß zwischen diesen an jeder Stelle nur eine einzige Kraft von bestimmter Größe und Richtung besteht, ist nicht zweifelhaft. Also ist auch das Potential eindeutig. Der Potentialausdruck soll auch kein Naturgesetz über die gesamte Arbeit sein, sondern ein Rechnungsbehelf, der, wie das obige Beispiel zeigt, zum richtigen Wert der Feldstärke führt.

figur. Es sind jene Flächen, die alle Punkte enthalten, von denen aus die Platte oder Stromfigur unter demselben Gesichtswinkel erscheint. Die Schnitte der Zeichenebene mit den Niveauflächen müssen Kreise sein (in Abb. 113 gestrichelt gezeichnet), deren gemeinsame Sehne durch den Schnitt der Stromfläche mit der Zeichenebene gebildet wird, weil alle über derselben Sehne aufstehenden Peripheriewinkel gleich groß sind. Hat man die Niveauflächen, so ergeben sich leicht die Kraftlinien, weil sie auf jenen senkrecht stehen müssen (in Abb. 113 die voll ausgezogenen Linien). Man sieht, sie verlaufen so wie in der perspektivischen Darstellung in Abb. 94.

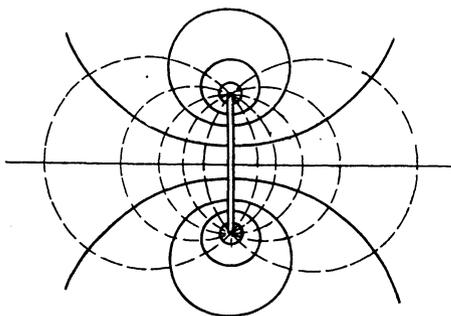


Abb. 113. Kraftlinien und Niveauflächen einer magnetischen Platte oder einer geschlossenen Stromfigur.

In Gl. 48 kann man auch die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Pole m ausgehend die Stromfläche treffen, einführen, wenn man bedenkt, daß im ganzen $4\pi m$ Kraftlinien von ihm ausgehen (§ 6). Diese gehen, wenn keine störenden Einflüsse vorhanden sind, in gleichmäßiger Verteilung, strahlenförmig von m aus. Da 4π der ganze räumliche Gesichtswinkel ist, so enthält der Gesichtswinkel von der Größe Eins m Kraftlinien und der Gesichtswinkel ω , $m\omega$ Kraftlinien; bezeichnen wir diese mit ζ , so ist

$$A = i\zeta.$$

Der magnetische Arbeitswert (potentielle Energie) eines geschlossenen Stromes ist also gleich dem Produkte aus der Stromstärke und der Anzahl der Kraftlinien, die die Stromfläche treffen.

Besteht die geschlossene Figur nicht aus einer, sondern aus N Windungen, so ist

$$A = iN\zeta. \dots \dots \dots (50)$$

Das ist derselbe Ausdruck wie auf S. 127 für das Drehmoment einer Stromfigur, was nicht überraschen kann, da Arbeitswert und Drehmoment gleich sind. Daher ergibt sich auch aus dem Arbeitswert dasselbe Gesetz wie auf S. 127 für die Stellung einer Stromfigur in einem magnetischen Felde. Nehmen wir an, die Fläche der Figur stände so, daß sie von der größtmöglichen positiven Kraftlinienzahl auf der positiven Seite getroffen wird, so ist der Arbeitswert A am größten. Nach § 13 bewegt sich nun die Stromfigur so, daß der Arbeitswert am kleinsten wird. Sie wird sich daher zunächst so drehen, daß ζ Null wird, d. h. bis die Fläche parallel zu

den Kraftlinien ist; von da wird sie sich so weiter drehen, daß die Kraftlinien von der negativen Seite auftreffen, also A negativ wird. Den kleinsten Wert erreicht A , wenn die Fläche auf ihrer negativen Seite von der größtmöglichen positiven Kraftlinienzahl getroffen wird, denn dann ist $A = -iN_3$.

Daß man hinsichtlich der magnetischen Wirkung jede einzelne Stromwindung durch eine magnetische Platte und jede stromführende Spule durch einen Stabmagnet ersetzen kann, ist wertvoll für die Beziehung zwischen einem Strom und einem Dauermagnet, weil man dann Beziehungen zwischen magnetischen Massen und magnetischen Momenten erhält, wie sie in § 2 bis 9 behandelt worden sind. Jedes Eisenstück, das magnetisiert wurde, behält nach Aufhebung der Magnetisierung einen gewissen Dauermagnetismus zurück. Die Beziehungen zwischen diesem und dem von neuem auftretenden Strom oder irgend einem anderen Strom ergibt sich dann am einfachsten, wenn man sich den betreffenden Stromkreis durch eine magnetische Platte oder einen Stabmagnet ersetzt denkt.

88. Magnetisches Feld einer Stromspule.

Einen in Form von Schraubenwindungen gewickelten Stromleiter (Abb. 114) nennt man Stromspule (Solenoid); es ist also nichts

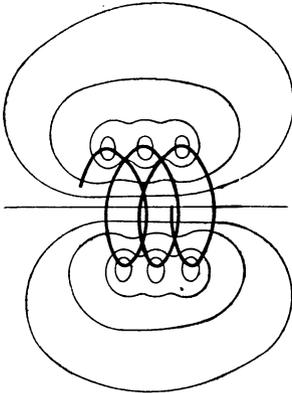


Abb. 114. Kraftlinien eines Solenoides.

anderes als eine Nebeneinanderreihung von Stromfiguren, der in § 81 beschriebenen Art, die alle von demselben Strom durchflossen werden. Die Kraftlinien gehen in einander über, mit Ausnahme jener, die noch in dem Zwischenraum zwischen zwei Windungen Platz finden. (Vgl. Abb. 182, welche das Kraftlinienbild zweier Windungen mit großem Zwischenraum zeigt.) Die Abb. 115 zeigt das magnetische Feld eines Solenoides, dessen Windungen dicht aneinander liegen, in einer durch die Achse gelegten Ebene. Man erkennt daraus die Ähnlichkeit mit dem Felde eines Stabmagnetes von gleicher Gestalt und sieht hier auch den Verlauf der Kraftlinien im Innern der Spule. Welches Ende

dem $+$ und dem $-$ Pole entspricht, lehrt die Ampèresche Regel, wenn man die innere Handfläche dem Inneren des Solenoides zukehrt.

Die Ähnlichkeit mit einem Stabmagnet erklärt sich daraus, daß jede Windung durch eine magnetische Platte ersetzt werden kann. Die ganze Spule kann demnach als eine Nebeneinanderreihung ebensovieler gleich magnetisierter Platten betrachtet werden, als Windungen vorhanden sind (Abb. 116).

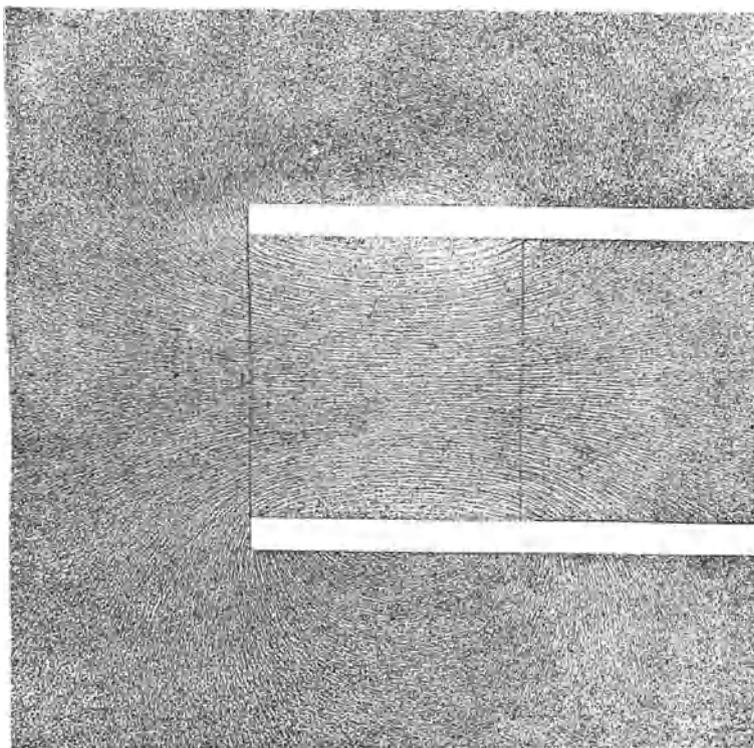


Abb. 115. Magnetisches Feld eines Solenoides.

Hat die Spule n Windungen auf der Längeneinheit, so ist die Dicke δ der magnetischen Platten, durch die man sich die Windungen ersetzt denken kann:

$$\delta = \frac{1}{n}.$$

Aus Gl. 46 folgt für die magnetische Flächendichte dieser Platten

$$\sigma = \frac{i}{\delta} = in.$$

Befindet sich im Innern der Spule ein Magnetpol m , so können wir die Kraft, die vom magnetischen Felde der Spule auf ihn ausgeübt wird, aus der Wirkung aller magnetischen Platten erhalten. Aus Abb. 116 erkennt man, daß sich alle zusammenstoßenden, mit entgegengesetztem Magnetismus versehenen Flächen gegenseitig aufheben, bis auf die beiden zu m benachbarten und bis auf die beiden Endflächen. Setzt man voraus, daß die Spule so lang

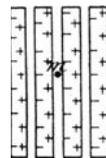


Abb. 116.

ist, daß die Wirkung der Endflächen infolge des großen Abstandes vom m vernachlässigt werden kann, so ist die gesamte Wirkung der Spule auf m gleich der der beiden benachbarten Flächen. also nach § 10 gleich

$$F = 4\pi\sigma m = 4\pi in m.$$

Demnach ist das magnetische Feld \mathfrak{H} in einem Punkte innerhalb der Spule, der so weit von beiden Endflächen entfernt ist, daß ihre Wirkung vernachlässigt werden kann:

$$\mathfrak{H} = 4\pi in.$$

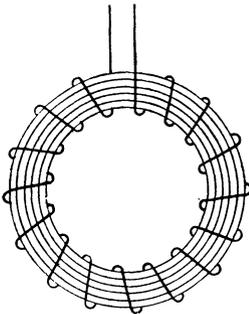


Abb. 117. Kraftlinien einer ringförmigen Spule.

Genau gelten die beiden Formeln, wenn das Solenoid überhaupt keine Endflächen hat, also für ein ringförmiges. Bei einem solchen verlaufen die Kraftlinien innerhalb der Stromwindungen als geschlossene Linien, wie Abb. 117 zeigt.

Ist der Umfang eines solchen Ringes groß gegenüber dem Durchmesser der Windungen in radialer Richtung und liegen die Windungen gleichmäßig dicht nebeneinander, so ist sein magnetisches Feld nahezu homogen. Um die Feldstärke in absoluten Einheiten, d. h. in Kraftlinien pro 1 cm² zu erhalten, muß auch die Stromstärke i in absoluten Einheiten ausgedrückt werden. Da 1 Ampere \equiv 0,1 absoluten Einheiten ist, so ist

$$\mathfrak{H} = 0,4\pi in = 1,257 in. \quad \dots \quad (51)$$

Das Produkt in faßt man gewöhnlich zusammen und nennt es **Amperewindungen pro Längeneinheit**. Die Feldstärke im Innern eines im Vergleich zum Durchmesser langen Solenoides ist mithin gleich den 0,4 π -fachen Amperewindungen pro Längeneinheit¹⁾.

Man kann auch die gesamte Windungszahl N und die Länge l der Spule einführen, denn es ist $n = \frac{N}{l}$
also

$$\mathfrak{H} = \frac{0,4\pi in}{l} \dots \dots \dots (52)$$

Ist die Spule nicht so lang, daß der Einfluß der Enden auf einen Punkt in der Mitte vernachlässigt werden kann. so erkennt

¹⁾ Da die Feldstärke nach Kraftlinien oder Gauß gemessen wird (§ 6), so erzeugt eine Windung pro Längeneinheit, die von 1 Ampere durchflossen wird, 0,4 π Kraftlinien oder Gauß, oder zu einer Kraftlinie sind $\frac{1}{0,4\pi}$ Amperewindungen pro Längeneinheit erforderlich.

man aus Abb. 116, daß die Endflächen auf \mathfrak{H} verkleinernd wirken, weil jede der beiden Endflächen entgegengesetztes Zeichen hat, wie die unmittelbar an m liegenden Flächen¹⁾. Für diesen Fall ist die Feldstärke im Mittelpunkte' O (Abb. 118)

$$\mathfrak{H} = \frac{0,2\pi i N}{d}.$$

Ist das Solenoid sehr lang, so ist $d = \frac{l}{2}$, und die letzte Gleichung geht in die vorhergehende über.

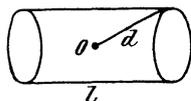


Abb. 118.



Abb. 119.

Die Feldstärke eines Solenoides in einem auf der Achse liegenden Punkte T (Abb. 119), dessen Abstand vom Mittelpunkt x ist, und wobei b die halbe Länge des Solenoides bedeutet, ist

$$\mathfrak{H} = 0,1 \frac{\pi i N}{b} \left[\frac{x+b}{\sqrt{r^2 + (x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2 + (x-b)^2}} \right].$$

Das gilt auch dann, wenn der Punkt T innerhalb des Solenoides liegt. Für den Mittelpunkt ($x=0$) geht diese Formel in die vorhergehende über, weil $\sqrt{r^2 + b^2} = d$ ist.

¹⁾ Vgl. § 102 über die entmagnetisierende Wirkung der freien Pole eines Magnetes.

Sechstes Kapitel.

Magnetische Induktion.

89. Magnetisierungsstärke.

Setzen wir einen gleichmäßig magnetisierten Stabmagnet voraus, so ist sein magnetisches Verhalten, durch das magnetische Moment (§ 8)

$$\mathfrak{M} = ml$$

bestimmt. Danach ist m die Menge des freien Magnetismus auf den Endflächen und l ihr Abstand. Dieser Fall ist allerdings nur ein idealer, dient aber zur genauen Bestimmung der Begriffe.

Ist σ die magnetische Masse auf der Flächeneinheit (Flächendichte) und S die Größe der Endflächen, so ist $m = \sigma S$.

Der Versuch lehrt, daß man einen Magnet durch Zerteilung in beliebig viele kleinere Magnete zerlegen kann. Setzt man diese Teilung fort, bis man lauter Einheitswürfel erhält, so besitzen diese ein gewisses magnetisches Moment \mathfrak{J} , durch das die Magnetisierung des ganzen Stückes bestimmt ist, und das man daher als Magnetisierungsstärke oder Magnetisierung kurzweg bezeichnet¹⁾. Ist V der Rauminhalt des Magnetes, so ist also

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{M}}{V}.$$

Man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{J} = \sigma$ sein muß, weil die Polstärke der Volumseinheit gleich σ , und die Länge der magnetischen Achse gleich 1 ist.

90. Magnetisierung durch Verteilung oder Induktion.

Bringt man in die Nähe eines Magnetes ein Eisenstück, so wird dieses magnetisiert, und zwar so, daß die zugewendeten Enden ungleichnamige Pole (freien Magnetismus) aufweisen; d. h. der Nord-

¹⁾ Manchmal findet man dafür auch den Ausdruck „spezifische Magnetisierung“. Andererseits aber wird dieser Ausdruck auch auf das Verhältnis des magnetischen Momentes zur Gewichtsmasse des Magnetes angewendet.

pol des Magnetes induziert im Eisen einen Südpol und umgekehrt; das Eisenstück wird polarisiert. Ganz allgemein kann man sagen, daß ein Eisenstück in einem magnetischen Felde selbst zu einem Magnete wird. Natürlich wird dadurch das Feld sowohl der Gestalt als auch der Stärke nach verändert, denn es setzt sich jetzt aus zweien zusammen: aus dem ursprünglichen, induzierenden oder magnetisierenden Felde und aus dem des neu entstandenen Magnetes. Abb. 120 zeigt ein solches resultierendes Feld; *N* ist der induzierende, *ns* der induzierte Magnet. Es unterscheidet sich nicht von dem resultierenden Felde zweier permanenter Magnete von derselben Stärke und Lage. Abb. 121 zeigt die magnetische Induktion eines runden Eisenstückes, wenn

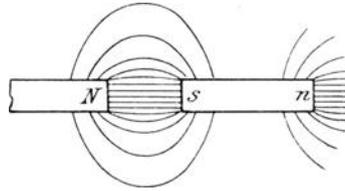


Abb. 120.

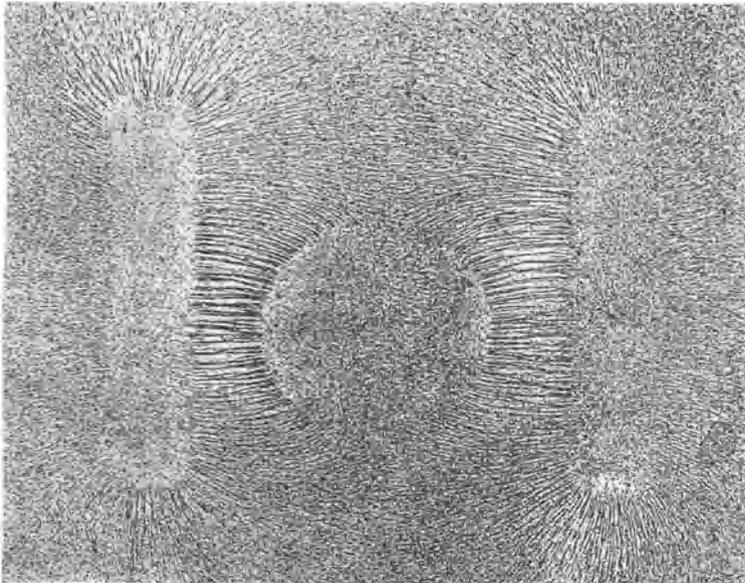


Abb. 121. Induktion eines kreisrunden Eisenstückes in einem homogenen Felde.

es in das durch Abb. 6 dargestellte homogene Feld gebracht wird. Abb. 122 zeigt die Induktion eines prismatischen Eisenstückes, wenn es in das Innere der durch Abb. 115 dargestellten Spule gebracht wird.

Aus diesen Abbildungen gewinnt man den Eindruck, als ob die Kraftlinien vom Eisen angesaugt würden. Das kommt daher,

daß das Eisen (und in ähnlicher Weise Nickel und Kobalt) eine weit größere Magnetisierungsfähigkeit hat als die umgebende Luft oder irgend ein anderer Stoff. Infolgedessen ist der in ihm induzierte Magnetismus so stark, daß er in der Nähe des Eisenstückes über das magnetisierende Feld das Übergewicht hat. Das resultierende Feld sieht daher in der Nähe induzierter Eisenstücke so aus, als ob sie selbständige Magnete mit ausgeprägten Polen wären. In einiger Entfernung von den Eisenstücken hingegen überwiegt das magnetisierende Feld, so daß es nahezu unverändert erscheint, wie man aus dem Vergleich mit den Abb. 6 und 115 ersieht.

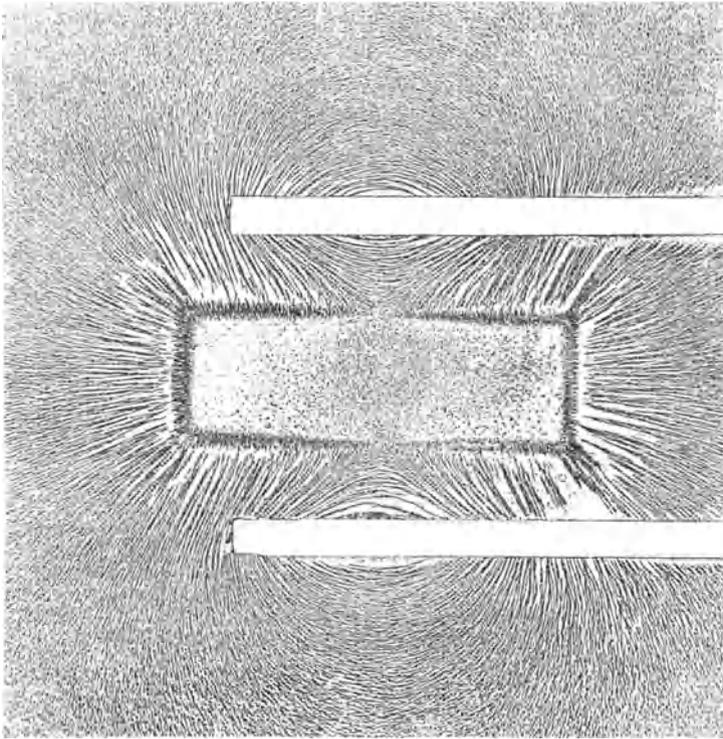


Abb. 122. Induktion eines prismatischen Eisenstückes im Felde einer Spule.

Insöfern als in dem der Magnetisierung unterworfenen Eisenstück an einem Ende freier positiver, am andern Ende freier negativer Magnetismus auftritt, gleicht dieser Vorgang dem der elektrischen Influenz eines leitenden Körpers. Jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den influenzierten elektrischen und induzierten magnetischen Massen. Denn während die eine der beiden Elektrizitäten von dem Leiter, auf dem sie influenziert wurde, abgeleitet

werden kann, so daß nur die andere zurückbleibt, ist dies beim Magnetismus unmöglich, da er sich auf seinem Träger überhaupt nicht bewegen kann. Infolgedessen gelten alle für elektrische Leiter in § 17 gezogenen Schlüsse für magnetische Körper nicht, sondern: Das Potential eines magnetisierten Körpers ist nicht konstant. Der Magnetismus sitzt nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Innern des Körpers, und infolgedessen wirken Kräfte auch auf sein Inneres. Die Kraftlinien enden und beginnen nicht auf dem magnetisierten Körper, sondern gehen durch ihn hindurch. Sie sind, wie wir schon aus § 76 wissen, geschlossene Kurven im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien, die irgendwo Anfang und Ende haben. Die Oberfläche eines magnetisierten Körpers ist keine Niveaufläche, sondern die Niveauflächen schneiden die Oberfläche. Infolgedessen müssen die Kraftlinien nicht senkrecht zur Oberfläche stehen wie die elektrischen Kraftlinien, sondern können jeden beliebigen Winkel mit ihr bilden.

Aus diesen Sätzen erkennt man, daß sich die magnetisierbaren Körper in einem magnetischen Felde in gleicher Weise verhalten wie nichtleitende Körper in einem elektrischen Felde. Nur in quantitativer Hinsicht bestehen Unterschiede; insbesondere der, daß die Magnetisierung nicht beliebig gesteigert werden kann, sondern eine von dem betreffenden Stoffe abhängige Grenze hat, die auch durch Anwendung der stärksten magnetisierenden Kraft nicht überschritten werden kann, während die Elektrisierung immer proportional der elektrisierenden Kraft wächst. Praktisch besteht allerdings auch da eine Grenze, weil bei fortgesetzter Steigerung der elektrisierenden Kraft schließlich der Körper zerstört wird.

Dieser Umstand, sowie der, daß es keinen Körper gibt, auf dem sich der Magnetismus bewegen kann, haben zu folgender Vorstellung über die Natur eines magnetisierbaren Stoffes geführt. Man nimmt an, daß kleine (Molekular-) Magnete in ihm enthalten sind, die im unmagnetischen Zustande regellos durcheinanderliegen, so daß ihre Gesamtwirkung nach außen null ist. Wirkt aber eine magnetische Kraft ein, so werden die Molekular-Magnete wie kleine Magnetnadeln gedreht, so daß die positiven Pole vorzugsweise nach der einen, die negativen vorzugsweise nach der anderen Seite gerichtet sind. Die Wirkung nach außen ist dann so, als ob auf der einen Seite freier positiver, auf der anderen freier negativer Magnetismus (Pole) vorhanden wäre. Im vorigen Paragraph haben wir bereits gesehen, daß das magnetische Moment eines Einheitswürfels, oder die Magnetisierungsstärke gleich ist der Flächendichte σ des Magnetismus, d. h. der Polstärke aller Molekularmagnete eines Einheitswürfels, die nach derselben Seite gerichtet sind. Sind sämtliche vorhandenen Molekularmagnete gerichtet, so ist eine weitere Steigerung von σ unmöglich, d. h. die magnetische Sättigung des betreffenden Stoffes ist erreicht.

In § 33 haben wir zwischen wirklichen (oder wahren) und

scheinbaren elektrischen Ladungen unterschieden je nachdem, ob sie auf einem Leiter sitzen und daher bewegt werden können, oder unbeweglich auf Nichtleitern. Da sich der Magnetismus auf keinem seiner Träger bewegen kann, so gibt es im Sinne dieser Unterscheidung überhaupt nur scheinbaren Magnetismus und daher auch keinen Anfang und kein Ende der magnetischen Kraftlinien, wie schon mehrfach erwähnt.

91. Beziehung zwischen magnetisierender Kraft und Kraftliniendichte. Magnetisierungszahl und magnetische Durchlässigkeit.

Nach § 6 ist in Luft die Feldstärke gleich der Kraftliniendichte; für andere Stoffe gilt dies nicht mehr, wie sich aus folgendem ergibt.

Wenn ein prismatisches Eisenstück in ein homogenes Feld von der Stärke \mathfrak{H} gebracht wird, und zwar so, daß die Endflächen senkrecht zur Kraftlinienrichtung sind, so tritt an den Endflächen freier Magnetismus auf, dessen Flächendichte σ ist. Ist S die Größe der Endflächen, so ist der gesamte freie Magnetismus auf einer Endfläche

$$m = \sigma S.$$

Wäre das Eisenstück nicht vorhanden, so wäre die Kraftlinienmenge, die durch die Fläche S geht, gleich $\mathfrak{H}S$. Von dem an den Enden des Eisenstückes sitzenden freien Magnetismus m kommen neue Kraftlinien hinzu, deren Menge nach § 6 gleich $4\pi m$ ist. Die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{J} ist also

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{H}S + 4\pi m.$$

Bezeichnet man die Kraftlinienmenge, die durch die Flächeneinheit geht, d. h. die Kraftliniendichte mit \mathfrak{B} , so ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{J}}{S} \dots \dots \dots (53)$$

Dann geht die vorletzte Gleichung über in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \frac{m}{S} \dots \dots \dots (54)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \sigma \dots \dots \dots (55)$$

Da der Magnetismus in dem Eisenstück von dem Felde, in dem es sich befindet, induziert wurde, so setzt man die Flächendichte σ dieses Magnetismus der Feldstärke \mathfrak{H} proportional

$$\sigma = \kappa \mathfrak{H} \dots \dots \dots (56)$$

Der Proportionalitätsfaktor κ ist also ein Faktor, der das Eisen oder einen anderen Stoff in bezug auf seine Magnetisierungsfähigkeit charakterisiert. Je größer κ ist, desto größer ist bei gleichem \mathfrak{H} der in dem betreffenden Stoff induzierte Magnetismus. Man nennt da-

her κ die Magnetisierungszahl oder das magnetische Aufnahmevermögen¹⁾, auch Suszeptibilität²⁾.

Aus der letzten und vorletzten Gleichung folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\kappa\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(1 + 4\pi\kappa).$$

$$\begin{array}{l} \text{Setzt man} \quad 1 + 4\pi\kappa = \mu \quad \dots \dots \dots (57) \\ \text{so ist} \quad \mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \quad \dots \dots \dots (58) \end{array}$$

Diese Gleichung besagt, daß bei konstanter magnetisierender Kraft die Kraftliniendichte um das μ fache wächst; das ist z. B. der Fall, wenn in einer Spule die Stromstärke konstant gehalten wird, an Stelle der Luft aber ein anderer Stoff tritt, dessen magnetische Konstante μ ist. Den Faktor μ nennt man daher die magnetische Durchlässigkeit oder magnetische Permeabilität des betreffenden Stoffes. Da \mathfrak{H} die Feldstärke bedeutet, so sieht man, daß in einem Körper, dessen magnetische Durchlässigkeit μ von 1 verschieden ist, die Kraftliniendichte nicht der Feldstärke gleich ist, sondern dem μ fachen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, bezeichnet man \mathfrak{H} am besten als magnetisierende Kraft und merkt sich, daß diese nur in Luft gleich der Kraftliniendichte ist. Aus der letzten Gleichung folgt dann noch, daß bei Konstanthaltung der Kraftliniendichte \mathfrak{B} die magnetisierende Kraft in einem Stoff von der Durchlässigkeit μ um das μ fache abnimmt³⁾.

Wenn man das Vorstehende mit dem vergleicht, was auf S. 41 und 52 über die Elektrisierung eines Dielektriks abgeleitet wurde, so sieht man, daß hier genau dasselbe gilt, wenn man die Dielektrizitätskonstante ϑ durch die magnetische Durchlässigkeit μ und die Elektrisierungszahl ε durch die Magnetisierungszahl κ ersetzt.

¹⁾ Nach Fr. Neumann, der diese Konstante eingeführt hat.

²⁾ Nach W. Thomson, der damit den von Neumann eingeführten Ausdruck ins Englische übertragen hat.

³⁾ Wir verstehen unter „Kraftlinien“ in Übereinstimmung mit Faraday und mit dem ausschließlichen Gebrauche in der Elektrotechnik nur die durch Eisenfeilspäne im magnetischen Felde oder durch leitende Teilchen im elektrischen Felde eines Gases oder einer Flüssigkeit (Abb. 2 bis 9, 121, 122) darstellbaren Linien, deren Anzahl von der magnetischen Durchlässigkeit (bzw. Dielektrizitätskonstante) unabhängig ist. In einzelnen physikalischen Lehrbüchern werden die Kraftlinien als Induktionslinien und die Richtungen der magnetisierenden bzw. elektrisierenden Kräfte \mathfrak{H} als Kraftlinien bezeichnet. Dadurch wird ein Unterschied hergestellt, der physikalisch nicht besteht. Denn welche Mittel man auch anwenden mag, um das magnetische Feld sichtbar zu machen, oder zu messen (Eisenfeilbilder, Messung durch die induzierte EMK), es ergeben sich immer die gesamten \mathfrak{B} -Linien (Gl. 55). Es ist unmöglich, die \mathfrak{H} -Linien von den $4\pi\sigma$ -Linien zu unterscheiden. Da sich \mathfrak{H} an der Grenzfläche zweier Stoffe von verschiedener magnetischer Durchlässigkeit sprunghaft ändert, so muß man von diesen Linien annehmen, daß sie teils durch die Grenzflächen hindurchgehen, teils an dieser Grenzfläche aufhören. Es liegt auf der Hand, daß diese Darstellung leicht zu Verwirrungen führen kann. Wir wenden daher die Bezeichnung Kraftlinien nur auf die \mathfrak{B} -Linien an. Die Anzahl der \mathfrak{B} -Linien, die eine Flächeneinheit senkrecht treffen, heißt darum Kraftliniendichte \mathfrak{B} . Die Anzahl der \mathfrak{B} -Linien, die eine Fläche von beliebiger Größe treffen, heißt Kraftlinienmenge \mathfrak{B} .

92. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe.

Die Magnetisierungszahl κ und die magnetische Durchlässigkeit μ

sind Materialkonstanten. Man setzt daher für den absoluten leeren Raum $\kappa = 0$ und daher $\mu = 1$. In der Praxis wird gewöhnlich die Durchlässigkeit der Luft bei Atmosphärendruck gleich 1 gesetzt, da sie von der des luftleeren Raumes nur sehr wenig verschieden ist. Es gibt aber eine Reihe von Stoffen, deren Durchlässigkeit μ kleiner als 1 ist, oder deren Magnetisierungszahl κ negativ ist (zufolge Gl. 57); man bezeichnet sie als diamagnetische Stoffe, während man die, deren Durchlässigkeit μ größer als 1 ist (κ positiv), als paramagnetische bezeichnet.

Die auffälligste Eigenschaft der diamagnetischen Stoffe ist die, daß sie in Luft von einem kräftigen magnetischen Pol nicht angezogen, sondern abgestoßen werden (vgl. § 99). Ihre wichtigsten Repräsentanten sind Wismut und Antimon.

Unter den paramagnetischen Stoffen sind drei, die sich von den übrigen durch große Magnetisierungsstärke und dementsprechend große magnetische Durchlässig-

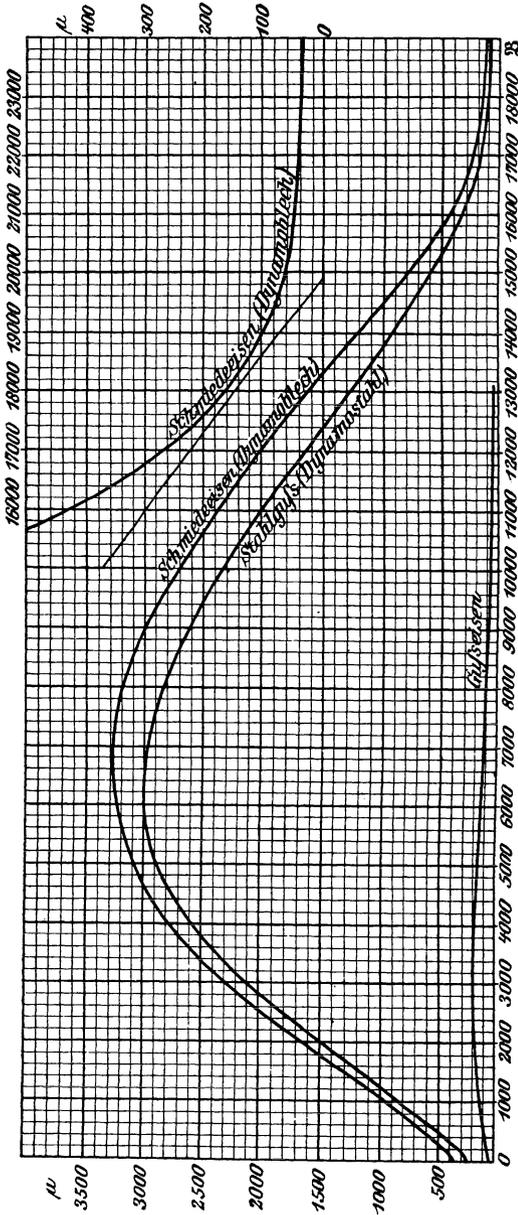


Abb. 123. Abhängigkeit der magnetischen Durchlässigkeit μ von der Kraftindichte H .

sigkeit auszeichnen. Es sind dies Eisen, Kobalt und Nickel; man faßt sie nach dem ersten unter dem Namen ferromagnetische Stoffe zusammen. Ihre größte magnetische Durchlässigkeit liegt über 500, während die aller anderen paramagnetischen Stoffe zwischen 1,01 und 1 liegt, die aller diamagnetischen Stoffe zwischen 1 und 0,99. Alle drei ferromagnetischen Stoffe haben die Eigentümlichkeit, daß κ und daher auch μ von der Stärke der Magnetisierung abhängt, und daß sich die Art der Abhängigkeit durch keine Gesetzmäßigkeit feststellen läßt, sondern nur auf Grund von Messungen durch Schaulinien wie in Abb. 123, die μ in Abhängigkeit von der Kraftliniendichte \mathfrak{H} darstellen. Diese Schaulinien gelten aber nicht für beste, sondern für Eisensorten mittlerer magnetischer Güte. Bei allen ferromagnetischen Stoffen hat μ einen Höchstwert; bei sehr gutem Schmiedeeisen ist er etwa 6000¹⁾, bei sehr gutem Dynamostahl 4000. Bei sehr schwacher Magnetisierung des Eisens (\mathfrak{H} kleiner als 10) nähert sich μ einem konstanten Wert, der zwischen 100 und 400 liegt²⁾.

Im Jahre 1901 ist es Heusler³⁾ gelungen, aus Kupfer, Mangan und Aluminium Legierungen herzustellen, die ausgeprägte ferromagnetische Eigenschaften aufweisen. Und zwar beträgt die Magnetisierbarkeit etwa ein Drittel von der eines guten Eisens. Daraus geht hervor, daß die Magnetisierbarkeit nicht an die chemischen Stoffe gebunden ist, sondern von einer eigenartigen, noch unbekanntem molekularen Struktur der betreffenden Stoffe abhängt.

93. Magnetische Sättigung.

Der eigentümliche Verlauf von μ in Abhängigkeit von \mathfrak{H} (Abb. 123), wonach μ nach Überschreitung eines Höchstwertes rasch abnimmt, erklärt sich daraus, daß die Magnetisierungsstärke σ einen gewissen Wert — die magnetische Sättigung — nicht übersteigen kann. Man erkennt dies aus den Schaulinien in Abb. 124, die schließlich in wagerechte, gerade Linien übergehen.

Die magnetische Sättigung ist eine besondere Eigenschaft jeder Eisensorte, die von der molekularen Beschaffenheit in bisher noch unbekannter Weise abhängt. Für weiches Eisen beträgt der Sättigungswert von σ rund 1700 abs. Einh. und wird bei einer magnetisierenden Kraft von $\mathfrak{H} = 500$ abs. Einh. sicher erreicht; in den meisten Fällen aber schon erheblich früher. Die Kurven in Abb. 124 zeigen, daß man der Sättigung des Schmiedeeisens schon bei $\mathfrak{H} = 30$ und des gehärteten Stahles schon bei $\mathfrak{H} = 60$ nahe kommt. Bei der

¹⁾ Bei reinem, auf elektrolytischem Wege gewonnenen und im Vakuum ausgeglühten Eisen fanden Gumlich und Steinhaus (ETZ 1915, S. 693) einen Höchstwert von 14000, Yensen (ETZ 1915, S. 591) sogar von 24000.

²⁾ Gumlich und Rogowski, Ann. d. Phys. 1911, Bd. 34, S. 235.

³⁾ Heusler, Stark und Haupt, Marburg, Elwertsche Buchhandlung. 1904. Heusler und Take, Physik. Zeitschr. 1912, Bd. 13, S. 897.

Steigerung des \mathfrak{H} von 60 bis 500 ergibt sich nur mehr eine kleine Zunahme der Magnetisierungsstärke.

Nach der in § 90 besprochenen Vorstellung über das Wesen eines magnetisierbaren Stoffes wird die Sättigung dann erreicht, wenn

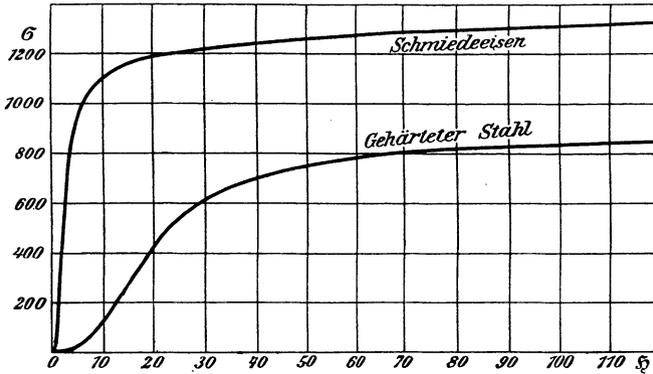


Abb. 124. Abhängigkeit der Magnetisierungsstärke σ von der magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} .

die Achsen aller Molekularmagnete so weit gedreht sind, daß sie in die Richtung der magnetisierenden Kraft fallen. Wenn also bei immer weiter wachsendem \mathfrak{H} schließlich σ nicht mehr zunimmt, so muß

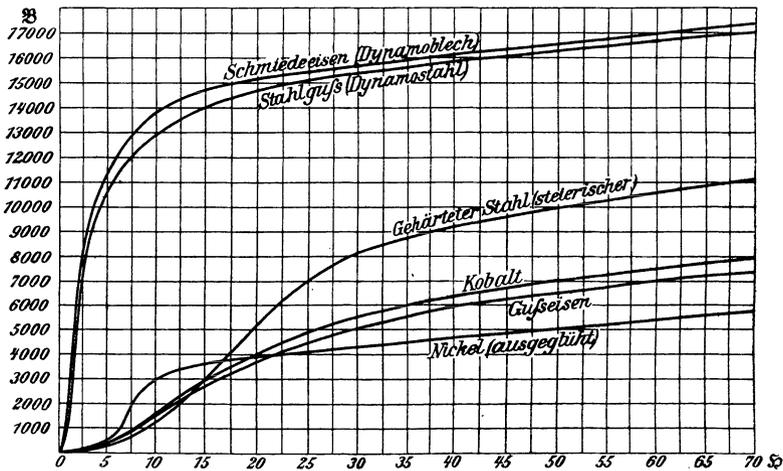


Abb. 125. Abhängigkeit der Kraftliniendichte \mathfrak{H} von der magnetisierenden Kraft.

sich nach Gl. 56 μ immer mehr dem Werte Null nähern, ohne ihn aber jemals zu erreichen. Dann muß sich aber nach Gl. 57 μ immer mehr dem Werte 1. nähern. Der kleinste Wert für μ , der bisher

(bei einer Kraftliniendichte von $\mathfrak{B} = 74200$) erhalten wurde, ist 1,44. Aus Gl. 55 folgt dann weiter, daß die Kraftliniendichte schließlich nur mehr um so viel zunimmt, als die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} zunimmt, oder mit anderen Worten: die \mathfrak{B} -Kurve in Abhängigkeit von \mathfrak{H} geht schließlich in eine gerade Linie über, wie Abb. 125 zeigt.

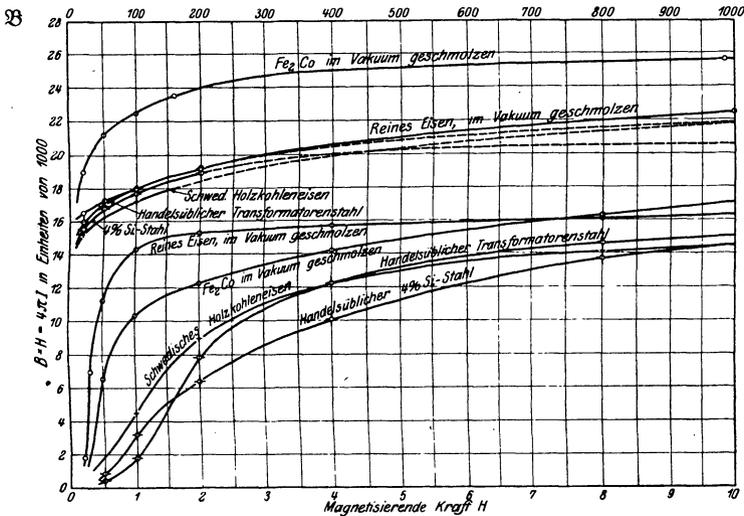


Abb. 126. Weitere \mathfrak{B} -Kurven für verschiedene Eisenarten. Die untere Zahlenreihe gilt für die unteren Kurven, die obere für die oberen.

Für praktische Zwecke sind diese Kurven geeigneter, als die σ -Kurven (Abb. 124), da es in der Praxis auf die Kraftliniendichte ankommt. Die Schaulinien für die magnetische Durchlässigkeit μ (Abb. 123) ergeben sich daraus ohne weiteres als Verhältnis der Ordinaten zu den Abszissen.

Abb. 126 zeigt noch weitere \mathfrak{B} -Kurven für verschiedene Eisenarten.

94. Magnetische Hysterese.

Außer der Eigentümlichkeit, daß die magnetische Durchlässigkeit von der magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} oder von der Kraftliniendichte \mathfrak{B} abhängt, haben die ferromagnetischen Stoffe noch eine Eigentümlichkeit, die darin besteht, daß bei einer Änderung der magnetisierenden Kraft der jeweils erreichte magnetische Zustand auch von dem magnetischen Zustande abhängt, der vorher geherrscht hat. Unterzieht man z. B. ein gänzlich unmagnetisches Eisenstück einer Magnetisierung in der Art, daß man die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} von Null bis zu einem Werte C (Abb. 127) wachsen läßt, so ändert sich die Kraftliniendichte von Null bis D in der Weise.

wie wir sie schon aus Abb. 125 kennen. Man kann eine beliebig veränderliche magnetisierende Kraft am einfachsten dadurch herstellen, daß man einen Eisenring mit Stromwindungen wie in Abb. 117 umwickelt und die Stromstärke nach Wunsch ändert. Läßt man die magnetisierende Kraft wieder von C bis Null abnehmen, so ändert sich die Kraftliniendichte nicht in gleicher Weise wie beim Anstieg, sondern von D bis F . Im Eisen ist also ein Magnetismus OF verblieben, trotzdem die magnetisierende Kraft Null geworden ist. Man

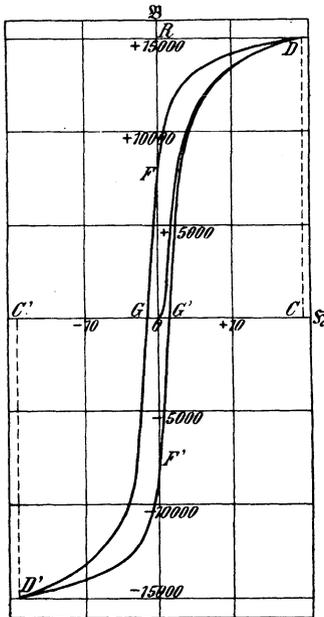


Abb. 127. Hystereseschleife von Schmiedeeisen.

nennt ihn daher remanenten Magnetismus. Läßt man jetzt die magnetisierende Kraft negativ werden (durch Umkehrung der Stromrichtung in der Wicklung), so muß man die magnetisierende Kraft OG (Koerzitivkraft) anwenden, um B auf Null zu bringen. Geht man weiter bis zu demselben negativen Werte C' wie vorher im positiven Sinne, so ändert sich die Kraftliniendichte von G bis D' . Läßt man nun die negative magnetisierende Kraft wieder von C' bis Null abnehmen, so ändert sich die Kraftliniendichte von D' bis F' . Es verbleibt jetzt ein negativer remanenter Magnetismus OF' von gleicher Größe wie vorher auf der positiven Seite. Läßt man nun die magnetisierende Kraft wieder von Null bis zum Werte C ansteigen, so ändert sich die Kraftliniendichte von F' über G' bis D . Der jeweilige Wert von B hängt also von den vorhergegangenen Werten ab, in dem Sinne, daß der vorhergehende Zustand sich zu erhalten sucht. Während die magnetisierende Kraft von C bis C' und von da wieder zurück bis C

geändert wurde, hat die Kraftliniendichte B eine geschlossene Figur $DGD'G'$ beschrieben. Innerhalb dieser Figur liegt die Kurve OD , die bei der ersten Magnetisierung dieses Eisens erhalten wurde, und die man als jungfräuliche Kurve bezeichnet, weil sie vom unmagnetischen Zustand ausgeht.

Man bezeichnet die eben beschriebene Erscheinung als Hysterese, die von den B -Werten gebildete geschlossene Figur als Hystereseschleife und den Vorgang, durch den sie erzeugt wird, nämlich die Änderung der Magnetisierung zwischen zwei gleich großen Werten — einem positiven und einem negativen — als symmetrischen Kreisprozeß.

So wie die Werte von μ , hängt auch die Gestalt der Hystereseschleife von der physikalisch-chemischen Beschaffenheit der Eisensorte

ab; Abb. 127 gilt für Schmiedeeisen (Dynamoblech), Abb. 128 für gehärteten Stahl. Im allgemeinen ist die Schleife um so breiter, je größer der Kohlenstoffgehalt und die Härte ist.

Führt man mehrere Kreisprozesse mit verschiedenen Höchstwerten von \mathfrak{H} aus, so erhält man ineinander liegende Hystereseschleifen (Abb. 128). Verbindet man die Spitzen durch eine Linie, so fällt diese mit der jungfräulichen Kurve nahezu zusammen.

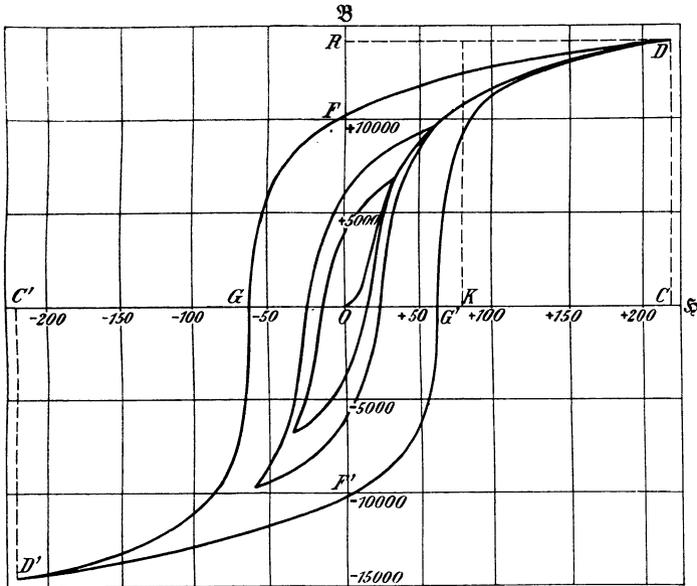


Abb. 128. Hystereseschleifen verschiedener Größe von Stahl.

Aus diesen Abbildungen erkennt man, daß zu einem bestimmten Werte von \mathfrak{H} (z. B. OK in Abb. 128) nicht auch ein bestimmter Wert von \mathfrak{B} gehört, sondern unendlich viele Werte von \mathfrak{B} , nämlich sämtliche zwischen dem aufsteigenden und dem absteigenden Ast der größten Hystereseschleife liegenden. Welcher von diesen Werten jeweils vorhanden ist, das hängt von der „magnetischen Vorgeschichte“ des betreffenden Körpers ab. Da die Durchlässigkeit μ nichts anderes ist als das Verhältnis von \mathfrak{B} zu \mathfrak{H} , so gilt dies auch von μ . Zu einem bestimmten \mathfrak{H} oder \mathfrak{B} können je nach der magnetischen Vorgeschichte verschiedene Werte von μ innerhalb gewisser Grenzen gehören.

Das Charakteristische der Hystereseschleife liegt darin, daß sie scharfe Spitzen hat, weil beim größten Wert der magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} auch der größte Wert der Kraftliniendichte \mathfrak{B} eintritt. Dadurch unterscheidet sich die Hystereseschleife von anderen, einen

Arbeitsverlust darstellenden Figuren, wie z. B. dem Wirbelstromverlust oder dem Verlust in einem unvollkommenen Dielektrik, die abgerundete Verlustschleifen haben (vgl. Abb. 240 und 297).

Ist der Kreisprozeß ein unsymmetrischer, d. h. ein solcher, der sich nicht zwischen gleich großen positiven und negativen Werten abspielt, sondern zwischen verschiedenen Werten von \mathfrak{H} (\mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2

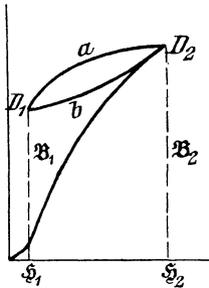


Abb. 129.

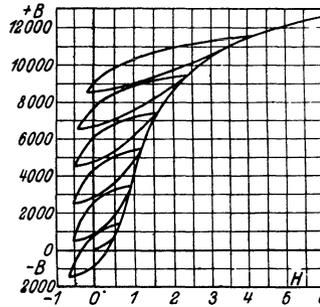


Abb. 130.

in Abb. 129), so machen die \mathfrak{B} -Werte die Schleife $D_1 b D_2 a$. Bei genauer Messung findet man, daß der Anfangswert \mathfrak{B}_1 und der Endwert \mathfrak{B}_2 nicht genau zusammenfallen, d. h. daß der Endpunkt D_2 der unsymmetrischen Schleife unsicher ist. Wiederholt man den Kreisprozeß zwischen denselben Werten \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 , so verschieben sich die unsymmetrischen Schleifen; es hängt dann die ganze Schleife von den früheren magnetischen Vorgängen ab. Abb. 130 zeigt unsymmetrische Schleifen zwischen verschiedenen magnetisierenden Kräften, jedoch so, daß der Unterschied zwischen der Kraftliniendichte \mathfrak{B} immer 3000 beträgt.

95. Remanenter Magnetismus, Dauermagnetismus, Koerzitivkraft.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß der Magnetismus nicht verschwindet, wenn die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} auf null sinkt, sondern daß ein remanenter Magnetismus zurückbleibt, dessen Kraftliniendichte durch den Abschnitt OF bzw. OF' (Abb. 127) auf der Ordinatenachse der Hystereseschleife bestimmt ist. Wie man aus dem Vergleich der Abb. 127 und 128 sieht, ist er bei Stahl größer als bei weichem Eisen. Ferner ersieht man aus Abb. 128, daß er bei demselben Körper um so größer ist, je größer der beim Kreisprozeß erreichte Höchstwert der Magnetisierung ist. Der Magnetismus der Dauermagnete oder permanenten Magnete ist nichts anderes als ein Teil dieses, nach dem Verschwinden der magnetisierenden Kraft zurückgebliebenen remanenten Magnetismus (vgl.

§ 102). Als Ursache dieser Erscheinung kann man sich vorstellen, daß ein Teil der beim Magnetisieren gedrehten Molekularmagnete nicht mehr ganz in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. Die Kraft, die sie in der beim Magnetisieren erhaltenen Lage zurückzuhalten sucht, nennt man Koerzitivkraft. Genauer definiert wird sie durch jene entgegengesetzte magnetisierende Kraft, die notwendig ist, um den remanenten Magnetismus wieder zu vernichten. Wie man aus Abb. 127 und 128 sieht, ist dazu die magnetisierende Kraft OG bzw. OG' erforderlich, denn erst bei diesem Werte geht die \mathfrak{B} -Linie durch Null. Aus dem Vergleich dieser beiden Abbildungen erkennt man auch, daß Remanenz und Koerzitivkraft keineswegs proportional sind, sondern daß letztere bei Schmiedeeisen bedeutend kleiner ist als bei hartem Stahl. Noch deutlicher sieht man dies aus folgender Zahlentafel¹⁾.

	\mathfrak{B}	Remanenz	Koerzitivkraft	μ_{max}	Koeff. η der Hysterese
Walzeisen ²⁾ . . .	18000	8000	0,7	6000	0,0008
Dynamoblech . . .	18300	10000	1,2	4500	0,001
Stahlguß	18200	10000	2,4	2800	0,003
Gußeisen	10000	5000	12	200	0,013
Harter Stahl . . .	18000	11000	15—60	300	0,018—0,03
Nickel	10000	3400	7	300	—
Kobalt	9000	3000	12	175	—

Die Koerzitivkraft scheint dem Kohlenstoffgehalt proportional zu sein und hängt bei demselben Eisen von der Behandlung ab. Durch Härten nimmt sie zu, durch Ausglühen ab. Koerzitivkraft \mathfrak{H}_k und remanenter Magnetismus \mathfrak{B}_r sind Eigenschaften des Materiales. Je kleiner erstere und je größer letzterer, desto steiler ist im allgemeinen die Hystereseschleife und desto kleiner der Hystereseverlust (vgl. Abb. 127 und 128). Ferner scheint folgende Beziehung zur größten Durchlässigkeit μ_{max} zu bestehen¹⁾:

$$\mu_{max} = \frac{\mathfrak{B}_r}{c \mathfrak{H}_k},$$

wobei c eine Konstante (etwa 2) ist.

Der durch die Koerzitivkraft bedingte remanente Magnetismus macht sich in der Technik auf verschiedene Art bemerkbar. So z. B. in unangenehmer Weise bei den elektromagnetischen Meßinstrumenten (§ 272).

¹⁾ Durchschnittliche Werte nach Messungen von Gumlich und Schmidt, ETZ 1901, S. 691. — Über den Einfluß von Kohlenstoff und Silizium auf die magnetischen Eigenschaften des Eisens vgl. Gumlich in „Ferrum“ 1912, Bd. 10, Heft 2.

²⁾ Sehr weiches, reines Material von hoher magnetischer Güte.

Günstig wirkt der remanente Magnetismus z. B. bei Synchronmotoren. Durch ihn ist es möglich, einen solchen Motor ohne Gleichstromerregung zu betreiben. Abb. 131 zeigt den Kraftlinienpfad bei leerlaufendem, Abb. 132 bei belastetem Motor. Wenn die Gleichstromerregung des Läufers fehlt, besteht nur das vom Ständerstrom erzeugte Feld. Bei Leerlauf (Drehmoment null) stehen die Ständerpole NS und die von ihnen induzierten Läuferpole sn

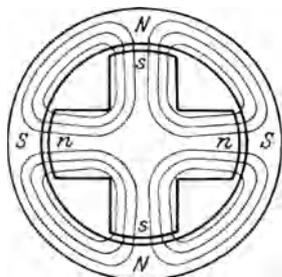


Abb. 131.

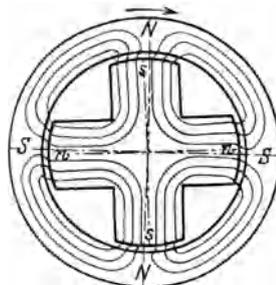


Abb. 132.

genau gegenüber¹⁾, so daß die Zugkraft keine tangentielle Komponente hat, sondern genau durch die Achse geht. Bei Belastung bleibt der Läufer etwas zurück, und es tritt eine so große seitliche Verschiebung zwischen den Ständer- und Läuferpolen mit entsprechender Verzerrung der Kraftlinien ein (Abb. 132), daß die an den Läuferpolen angreifende tangentielle Zugkraft die Belastung überwindet. Das ist nur möglich, weil das Eisen des Läufers vermöge seiner Koerzitivkraft die Pole sn festzuhalten sucht. Gäbe es keine Koerzitivkraft, so würde keine seitliche Verschiebung der Läuferpole eintreten, und es könnte dann keine tangentielle Zugkraft geben. Da es also auf die Koerzitivkraft ankommt, so ist die tangentielle Zugkraft bei gewöhnlichem Eisen (Dynamostahl, Blech) klein gegenüber der bei normalem Betrieb mit Gleichstromerregung des Läufers, welche die Läuferpole sn unabhängig vom Ständerfeld erzeugt. Besteht aber der Läufer aus hartem Stahl mit großer Koerzitivkraft, so erhält man ein für manche Zwecke ausreichendes Drehmoment ohne Gleichstromerregung²⁾.

Da die Koerzitivkraft an jeder Stelle eines magnetisierten Körpers den magnetischen Zustand aufrecht zu erhalten sucht, indem sie remanenten Magnetismus festhält, macht sich eine Verzerrung

¹⁾ Da der Ständerstrom Wechselstrom ist, gelten die eingezeichneten Pole N, S, s, n natürlich nur während einer halben Periode. Während der nächsten Halbperiode sind sie alle entgegengesetzt.

²⁾ Vgl. Benischke: „Drehfeld-Synchronmotoren ohne Gleichstromerregung“. Elektr. u. Maschinenb., Wien 1912, S. 177, 321, 491. Ein Drehmoment infolge von Wirbelströmen kommt hier nicht in Betracht, weil bei synchronem Gang Wirbelströme mit tangentialer Zugkraft überhaupt nicht entstehen.

des Feldes auch dann bemerkbar, wenn ein glatter Eisen-Zylinder oder -Ring in einem magnetischen Felde gedreht wird. Abb. 133 zeigt das. Die bei stillstehendem Ring den induzierenden Polen NS genau gegenüberstehenden induzierten Pole sn (vgl. Abb. 141 auf S. 163) sind bei rotierendem Ring im Sinne der Drehung verschoben und die Kraftlinien entsprechend verzerrt¹⁾.

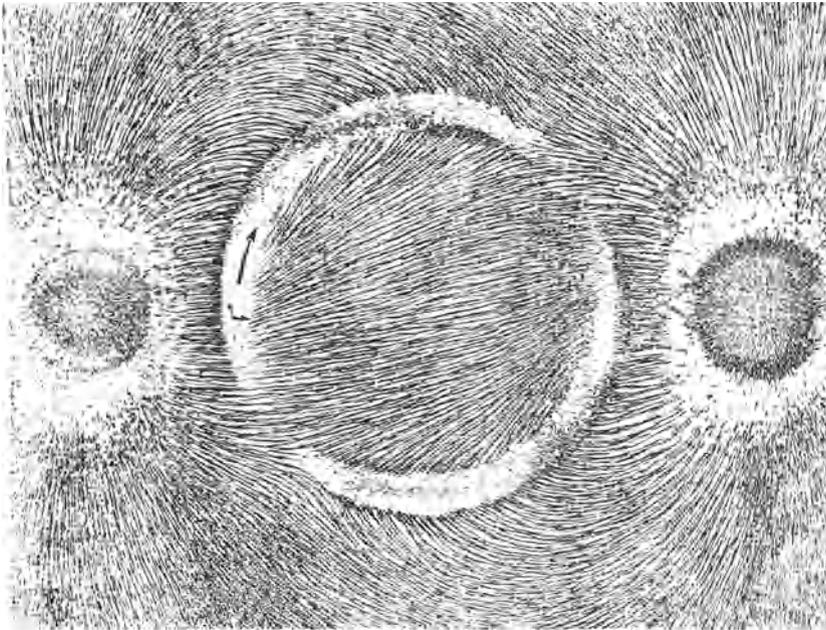


Abb. 133. Verschiebung der in einem Eisenring induzierten Pole, wenn der Ring gedreht wird.

Befindet sich ein Eisen-Zylinder oder -Ring in einem rotierenden magnetischen Felde (Drehfeld), so bewirkt die Koerzitivkraft, daß die Kraftlinienrichtung um einen gewissen Winkel hinter der Richtung der magnetisierenden Kraft zurückbleibt, so daß auch da ein kleines Drehmoment entsteht. Bei asynchronen Drehfeldmotoren, wo der Läufer aus gutem Eisenblech besteht, ist es sehr klein, kann aber doch — zusammen mit dem von den Wirbelströmen

¹⁾ Das hat nichts zu tun mit der erheblich größeren Verschiebung der resultierenden Pole in einer unkompenzierten Gleichstrommaschine, wenn die Läuferwicklung Strom führt. Denn dann erzeugt dieser Strom Pole (vgl. Abb. 160 und 162), welche räumlich zwischen den Ständerpolen liegen. Aus diesem Läuferfeld und dem Ständerfeld (vgl. Abb. 141) entsteht ein resultierendes Feld, dessen Pole bei einem Stromerzeuger im Sinne der Drehung, bei einem Motor aber im entgegengesetzten Sinne verschoben sind.

herrührenden Drehmoment — bewirken, daß ein leerlaufender Motor trotz geöffneter Läuferwicklung von selbst nicht zum Stillstand kommt, sondern mit kleiner (der Reibung entsprechender) Schlüpfung im Gang bleibt¹⁾.

96. Magnetische Verzögerung.

Zu den eigentümlichen Erscheinungen, die bei der Magnetisierung auftreten, gehört auch die, daß nach Herstellung der magnetisierenden Kraft die Kraftliniendichte nicht sofort den ihr zukommenden Wert erhält, sondern erst nach einiger, allerdings sehr kurzer Zeit. Diese Zeit ist so kurz, daß die (von Wirbelströmen freien) Hystereseschleifen (Abb. 127, 128) scharfe Spitzen haben.

Die magnetische Verzögerung hat wahrscheinlich, ebenso wie die Hysterese, ihren Grund in gewissen, noch unbekanntem mechanischen Vorgängen (molekulare Reibung).

Die magnetische Verzögerung darf nicht mit der magnetischen Hysterese verwechselt werden. Jene besteht in einer Abhängigkeit des jeweiligen Wertes \mathfrak{B} von den vorhergehenden Werten, diese in einer Abhängigkeit von der Zeit. Ferner darf die magnetische Verzögerung nicht verwechselt werden mit der Verzögerung der magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} , die dadurch entsteht, daß Wirbelströme in dem zu magnetisierenden Eisenkörper auftreten, die der magnetisierenden Kraft entgegenwirken. Vgl. § 192.

Bei elektrischen Schwingungen von sehr hoher Frequenz macht sich die magnetische Verzögerung dadurch bemerkbar, daß das Eisen in den einzelnen Halbwellen nicht den vollen Magnetismus erreicht, Zahlenmäßig äußert sich das darin, daß die magnetische Durchlässigkeit kleiner erscheint als bei langsamen Schwingungen und gewöhnlichen Wechselströmen²⁾.

97. Magnetische Arbeit.

Wie wir in § 91 gesehen haben, erfolgt die Magnetisierung irgendeines Stoffes nach denselben Gesetzen wie die Elektrisierung

¹⁾ Dieses Drehmoment hat aber nichts zu tun, mit dem Leistungssprung, der sich an einem in den Ständerstrom eingeschalteten Wattmeter zeigt, wenn eine solche asynchrone Maschine mit Hilfe eines besonderen Antriebsmotors vom Untersynchronismus zum Übersynchronismus gebracht wird, und dadurch zum Stromerzeuger wird. Beim Durchgang durch den Synchronismus, wo die Motorwirkung aufhört und die Stromerzeugung beginnt, muß nämlich der Leerlaufverlust, der bis dahin vom Leerlaufstrom gedeckt wurde, vom Antriebsmotor übernommen werden, was sich in einem sprunghaften Rückgang des Wattmeters um einen entsprechenden Betrag bemerkbar macht. Ein Drehmoment gibt es beim Durchgang durch den Synchronismus nicht, weil sich in diesem Augenblick Ständerfeld und Läufer in demselben Verhältnis befinden, wie in Abb. 131. Vgl. Benischke ETZ 1910, S. 238, 497, 522, 625.

²⁾ Messungen über magn. Verzögerung: Otto, Berichte d. deutsch. physik. Gesellsch. 1910, Heft 5. — Luthe, ebenda 1913, Heft 11.

eines Nichtleiters, nur ist an Stelle der Dielektrizitätskonstante ϑ die magnetische Durchlässigkeit μ zu setzen. Wir können daher für die Arbeit, die notwendig ist, um eine Volumseinheit durch die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} zu magnetisieren, den in § 35 erhaltenen Ausdruck (Gl. 34) übernehmen. Demnach ist die in einer Volumseinheit eines Stoffes mit der magnetischen Durchlässigkeit μ enthaltene potentielle magnetische Energie:

$$A_{\text{einh}} = \mu \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \dots \dots \dots (59)$$

oder, wenn die Kraftliniendichte \mathfrak{B} eingeführt wird

$$A_{\text{einh}} = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu} \dots \dots \dots (60)$$

Daraus ergibt sich die Änderung der Arbeit dA , wenn sich \mathfrak{H} um $d\mathfrak{H}$ ändert:

$$dA_{\text{einh}} = \frac{1}{4\pi\mu} \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{B}.$$

führt man die Gl. 58 ein, so ist

$$dA_{\text{einh}} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}.$$

Mithin ist die magnetische Arbeit für eine Raumeinheit, wenn sich die Kraftliniendichte von \mathfrak{B}_1 bis \mathfrak{B}_2 ändert,

$$A_{\text{einh}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} \dots \dots \dots (61)$$

Das Produkt $\mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}$ ist nichts anderes als die Fläche des von \mathfrak{H} und $d\mathfrak{B}$ gebildeten unendlich schmalen Rechteckes, das in Abb. 134 schraffiert ist. Daher

ist $\int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B}$ die zwischen den Ordinaten \mathfrak{B}_1

und \mathfrak{B}_2 liegende Fläche $\mathfrak{B}_1 P_1 P_2 \mathfrak{B}_2$. Ist $\mathfrak{B}_2 > \mathfrak{B}_1$, d. h. nimmt die Magnetisierung zu, so ist A_{einh} positiv, d. h. das $\frac{1}{4\pi}$ -fache dieser Fläche ist gleich

der Arbeit, die von der magnetisierenden Ursache aufgewendet werden muß. Wenn also z. B. die magnetisierende Kraft von einem Strom erzeugt wird, so muß diese Arbeit von der Stromquelle geleistet werden und wird in dem magnetisierten Stoff als potentielle Energie aufgespeichert. Ist aber $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}_1$, so ist A_{einh} negativ, d. h. die aufgespeicherte Energie wird an die Stromquelle

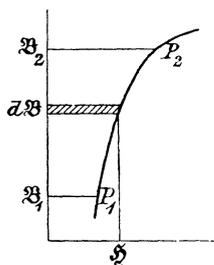


Abb. 134.

zurückgeliefert, soweit nicht ein Verlust durch Umsatz in Wärme eintritt. Es ist wie bei einer elastischen Feder; wird sie gespannt, so nimmt sie Arbeit auf. Hört die spannende Kraft auf, so gibt die Feder die Arbeit zurück, bis auf einen Verlust durch Umsatz in Wärme.

Erfolgt die Magnetisierung eines Körpers dadurch, daß er in ein vorhandenes magnetisches Feld gebracht wird, so entsteht seine magnetische Energie auf Kosten der magnetischen Energie des vorhandenen Feldes, wenn dabei keinerlei andere Arbeit auftritt. Wird aber der Körper von den magnetischen Kräften selbst in das Feld hineingezogen (Anziehung), so leistet das Feld mechanische Arbeit auf Kosten seiner potentiellen Energie. Das ist dann der Fall, wenn der Körper eine größere magnetische Durchlässigkeit μ hat, als der vorher an dieser Stelle befindliche Stoff (Luft). Denn die magnetische Energie ist gemäß Gl. 60 kleiner geworden, wenn die Kraftlinienmenge konstant geblieben ist. Muß hingegen der betreffende Körper durch Anwendung einer äußeren Kraft in das magnetische Feld hineingebracht werden (Überwindung der Abstoßung eines paramagnetischen Körpers § 99), so wird die mechanische Arbeit in magnetische Energie umgesetzt. Das ist dann der Fall, wenn der Körper ein kleineres μ hat als der vorhin an dieser Stelle befindliche Stoff, und wenn die gesamte Kraftlinienmenge konstant bleibt. Die gesamte magnetische Energie ist also um den Betrag der aufgewendeten mechanischen Arbeit vergrößert worden.

98. Arbeitsverlust bei einem magnetischen Kreisprozeß.

Läßt man die auf einen Körper wirkende magnetisierende Kraft von Null bis ξ wachsen, z. B. durch Schließen des Stromkreises einer Spule wie in Abb. 117, so wächst die Kraftliniendichte von Null bis D (Abb. 135). Die dabei aufgewendete Arbeit ist nach dem vorigen gleich der

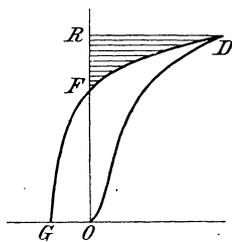


Abb. 135.

$\frac{1}{4\pi}$ -fachen Fläche ODR zwischen der \mathfrak{B} -Kurve und der Ordinatenachse. Läßt man ξ wieder bis Null sinken, indem man den Strom ausschaltet, so nimmt die \mathfrak{B} -Kurve, wie wir aus § 94 wissen, nicht denselben Weg zurück, sondern den Weg DF , wobei der remanente Magnetismus FO bestehen bleibt. Die an die Stromquelle zurückgegebene Arbeit ist gleich der $\frac{1}{4\pi}$ -fachen schraffierten Fläche DRF . Es ist also ein Arbeitsbetrag

gleich der $\frac{1}{4\pi}$ -fachen Fläche ODF nicht zurückgewonnen worden. Die Erfahrung lehrt, daß dieser Betrag innerhalb des magnetisierten Körpers in Wärme umgewandelt wird. Will man den verbliebenen Magne-

tismus OF vernichten, so muß eine entgegengerichtete magnetisierende Kraft OG , und die entsprechende Arbeit gleich der $\frac{1}{4\pi}$ -fachen Fläche FOG aufgewendet werden.

Wird ein vollständiger magnetischer Kreisprozeß zwischen den Werten $+D$ und $-D'$ (Abb. 127) ausgeführt, so ist der in Wärme umgesetzte Arbeitsverlust gleich der $\frac{1}{4\pi}$ -fachen, von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche $DGD'G'$. Man kann sich vorstellen, daß dieser Arbeitsverlust durch die bei der Ummagnetisierung auftretende Reibung der Molekularmagnete verursacht wird, und bezeichnet ihn daher auch als Ummagnetisierungsarbeit, oder, weil er durch die Hystereseschleife dargestellt ist, als Hystereseverlust.

Die magnetische Arbeit (Gl. 61) besteht aus zwei Teilen, die man erkennt, wenn man für \mathfrak{H} die Gl. 55 einsetzt.

Es ist dann

$$\begin{aligned} A_{\text{einh}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H} \cdot d(\mathfrak{H} + 4\pi\sigma) = \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{H} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathfrak{H} \cdot d\sigma \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{H}_2^2 - \mathfrak{H}_1^2) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathfrak{H} \cdot d\sigma. \end{aligned}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite bedeutet die auf die Erzeugung oder Änderung der magnetisierenden Kraft entfallende Arbeit, das zweite Glied die zur Erzeugung der Flächendichte σ (§ 89) erforderliche Arbeit.

Für einen vollständigen Kreisprozeß ist $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1$ und daher das erste Glied auf der rechten Seite Null. Das heißt, für einen vollständigen Kreisprozeß ist der gesamte Arbeitsverlust nur gleich der durch die Flächendichte σ (entsprechend Abb. 124) dargestellten Hystereseschleife¹⁾.

Um also den Arbeitsverlust zahlenmäßig angeben zu können, ist in jedem Falle die Kenntnis der Hystereseschleife für \mathfrak{H} oder σ erforderlich. Für praktische Zwecke genügt eine von Steinmetz aufgestellte empirische Formel, wonach der Verlust in 1 cm³ Eisen für einen zwischen den Grenzen $+\mathfrak{H}$ und $-\mathfrak{H}$ verlaufenden Kreisprozeß gleich

$$\eta \mathfrak{H}^{1,6} \cdot 10^{-7} \text{ Watt.}$$

Für Schmiedeeisen (Dynamoblech) ist η gleich 0,0013—0,002,

¹⁾ Es sei hier gleich bemerkt, daß der bei einer Ummagnetisierung auftretende Hystereseverlust nicht der einzige Arbeitsverlust ist, der sich in Wärme umsetzt, sondern daß hierzu noch die Stromwärme der Wirbelströme kommt, die bei einer Änderung der Magnetisierung erzeugt werden (vgl. § 155).

für Stahlguß (Dynamostahl) 0,002—0,008, Gußeisen 0,01—0,02, harten Stahl 0,01—0,03.

Aus den vorstehenden Zahlen und der Zahlentafel auf S. 151 erkennt man, daß η um so größer ist, je größer die Koerzitivkraft des betreffenden Materiales ist. Ja es besteht sogar (bei gleichen \mathfrak{B}) nahezu Proportionalität¹⁾. Dagegen kann der remanente Magnetismus sehr verschieden sein (vgl. auch § 102).

Die obige Formel gilt aber nur näherungsweise. Rechnet man nämlich η aus verschieden großen Hystereseschleifen aus, so findet man, daß es mit dem Grenzwerte \mathfrak{B} wächst. Behält man aber einen konstanten mittleren Wert für η bei und berechnet den Potenzexponenten von \mathfrak{B} , so findet man, daß er von 1,5 bis 2 wächst. Der Hystereseverlust läßt sich also überhaupt nicht durch eine einzige Konstante darstellen, sondern man muß entweder die für empirische Formeln übliche Potenzreihe $p_h = \alpha \mathfrak{B} + \beta \mathfrak{B}^2$ mit den Konstanten α , β , oder die Formel von Armagnat $p_h = \gamma 10^{\delta \mathfrak{B}}$ mit den Konstanten γ und δ benutzen.

99. Anziehung und Abstoßung im magnetischen Felde.

Da (wie schon auf S. 141 betont wurde) die Magnetisierung nach denselben Gesetzen vor sich geht wie die Elektrizierung eines Nichtleiters, wobei die magnetische Durchlässigkeit μ dieselbe Rolle spielt, wie die Dielektrizitätskonstante ϑ , so können wir das mathematische Ergebnis aus § 36 auch auf die Grenzfläche zweier magnetisierter Stoffe anwenden. Ist σ die magnetische Flächendichte des einen Stoffes an der Grenzfläche GH (Abb. 136), σ' die des andern, so ist die resultierende Flächendichte

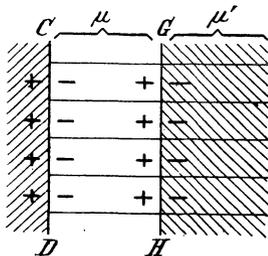


Abb. 136.

$$\sigma' - \sigma = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'} \right).$$

Ist $\mu' > \mu$, so ist die rechte Seite der Gleichung positiv und umgekehrt. Das heißt, in der resultierenden Flächendichte $\sigma' - \sigma$ überwiegt die Ladung jenes Stoffes, der die größere Durchlässigkeit besitzt, und zwar ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Ladungen, das ja nur davon abhängt, wie die Richtung der magnetisierenden Kraft ist, d. h. ob CD positiv oder negativ ist.

Bringt man also in ein magnetisches Feld einen Körper von anderer magnetischer Durchlässigkeit, so tritt an den Stellen, wo

¹⁾ Hierauf beruht die Möglichkeit, mit dem sog. Eisenprüfer von Ewing die Hystereseverluste verschiedener Eisenproben miteinander vergleichen zu können. Vgl. § 292.

Bei reinem, im Vakuum geglühten Eisen ist die Koerzitivkraft und der Hystereseverlust sehr klein. ETZ 1915, S. 675.

die Kraftlinien ein- und austreten, freier Magnetismus auf. In Abb. 136 sei CD das positive Ende eines Magnetes, von dem das durch die wagerechten Linien angedeutete magnetische Feld herrührt. GH sei eine Endfläche eines prismatischen Körpers mit der Durchlässigkeit μ' , während der Raum zwischen CD und GH durch ein Gas oder eine Flüssigkeit von der Durchlässigkeit μ erfüllt sei. An der Grenzfläche GH tritt freier Magnetismus zu beiden Seiten auf, weil ja beide Stoffe magnetisiert werden. Ist $\mu' > \mu$, so überwiegt der freie Magnetismus des rechten Stoffes und die Grenzfläche erscheint in diesem Falle mit negativem Magnetismus versehen, wird also von CD angezogen. Ist aber $\mu' < \mu$, so überwiegt an der Grenzfläche der positive Magnetismus des linken Stoffes, und daher wird sie von CD abgestoßen.

Ist der zweite Stoff ein begrenzter Körper, z. B. $GHKL$ (Abb. 137), der in einem homogenen Felde von dem ersten Stoff allseitig umgeben ist, so überwiegt an der jenseitigen Grenzfläche KL die negative Ladung; sie wird also von CD angezogen. Da nun in einem homogenen Felde die Kraft an allen Stellen des Feldes dieselbe ist, so heben sich die Anziehung der Fläche KL und die Abstoßung der Fläche GH gegenseitig auf, und der Körper bleibt in Ruhe. Ist aber das Feld nicht homogen (Abb. 138), so ist die Kraft an der Fläche GH größer als an der Fläche KL , es überwiegt die Abstoßung der Fläche GH , und daher wird der ganze Körper

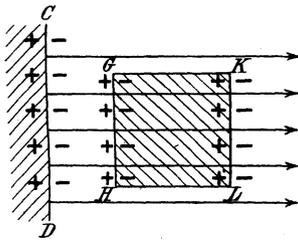


Abb. 137.

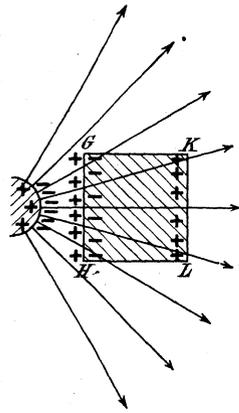


Abb. 138.

in der Richtung der divergierenden Kraftlinien abgestoßen. Damit ist die in § 92 erwähnte Abstoßung diamagnetischer Körper, d. h. solcher, deren Durchlässigkeit kleiner als die der Luft ist, wie z. B. Wismut, erklärt. Gäbe es aber ein Gas oder eine Flüssigkeit, deren Durchlässigkeit noch kleiner als die des Wismuts wäre, so würde in einem solchen Wismut angezogen. Ganz allgemein gilt folgendes: Befindet sich ein magnetisierter Körper in einem homogenen Felde, so bleibt er in Ruhe; ist aber das Feld nicht homogen, so sucht sich der Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien zu bewegen, wenn seine magne-

tische Durchlässigkeit kleiner ist als die des umgebenden Stoffes, hingegen in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien, wenn seine Durchlässigkeit größer ist als die des umgebenden Stoffes.

Was auf S. 62 über die potentielle elektrische Energie und den Zusammenhang mit Abstoßung und Anziehung gesagt wurde, gilt natürlich auch hier für die potentielle magnetische Energie, wenn man ϑ durch μ ersetzt.

100. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche magnetischer Stoffe.

Wenn die Kraftlinien nicht senkrecht auf die Grenzfläche GH zweier magnetischer Körper auftreffen, sondern wie in Abb. 49 (S. 62) unter einem schiefen Winkel, so gelten hier dieselben Gesetze wie für den Durchgang elektrischer Kraftlinien durch die Grenzfläche zweier Nichtleiter. Es verhalten sich also die magnetisierenden Kräfte in den beiden aneinander grenzenden Stoffen umgekehrt wie die Sinus der Einfallswinkel (Abb. 49).

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cdot \dots \dots \dots (62)$$

Ferner verhalten sich die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen umgekehrt wie die Cosinus der Einfallswinkel (Abb. 50).

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \cdot \dots \dots \dots (63)$$

Aus beiden folgt, daß sich die trigonometrischen Tangenten des Einfallswinkel so verhalten wie die magnetischen Durchlässigkeiten der beiden Stoffe:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \dots \dots \dots (64)$$

Diese Gleichung wird als Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien bezeichnet.

Die beiden letzten Gleichungen besagen, daß in dem Stoff mit der größeren Durchlässigkeit der Einfallswinkel und die Kraftliniendichte den größeren Wert hat. Das ist für den Übergang der Kraftlinien vom Eisen zur Luft in elektrischen Maschinen und Apparaten von Wichtigkeit. In der folgenden Zahlentafel sind die Einfallswinkel in Luft (α) und die Einfallswinkel in Eisen (α') bei den Durchlässigkeiten 3000 und 300 zusammengestellt. Da für Luft $\mu = 1$ ist, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu'} \operatorname{tg} \alpha'.$$

bei $\mu' = 3000$		bei $\mu' = 300$	
Einfallswinkel in Eisen α'	Einfallswinkel in Luft α	Einfallswinkel in Eisen α'	Einfallswinkel in Luft α
0^0	0^0	0^0	0^0
10^0	$0^0 0' 1''$	10^0	$0^0 2'$
30^0	$0^0 0' 40''$	30^0	$0^0 7'$
50^0	$0^0 1' 30''$	50^0	$0^0 14'$
70^0	$0^0 3'$	70^0	$0^0 32'$
80^0	$0^0 6'$	80^0	$1^0 5'$
85^0	$0^0 13'$	85^0	$2^0 11'$
89^0	$1^0 5'$	89^0	$10^0 45'$
$89^0 50'$	$6^0 30'$	$89^0 50'$	$48^0 45'$
90^0	90^0	90^0	90^0

Aus diesen Zahlen ersieht man, daß Kraftlinien in der Luft fast immer senkrecht zur Eisenoberfläche stehen, selbst wenn sie im Eisen sehr schräg auf die Oberfläche auftreten. Das Kraftlinienbild in Abb. 121 läßt dies deutlich erkennen. Abb. 51 (S. 64) gilt auch für ein Eisenstück in einem magnetischen Felde; hier ist auch der Verlauf der Kraftlinien durch das Eisen gezeichnet; ebenso in Abb. 139. Aus diesen drei Abbildungen erkennt man auch die aus Gl. 63 folgende Verdichtung der Kraftlinien (Zunahme von \mathfrak{B}'). Diese Brechung und Verdichtung der Kraftlinien ist es, die den in § 90 erwähnten Eindruck des Ansaugens der Kraftlinien durch einen Körper von größerer Durchlässigkeit hervorruft. Abb. 52 (S. 64) stellt den Fall dar, wo eine Kugel kleinere Durchlässigkeit hat als ihre Umgebung (z. B. Wismut in Luft). In einem solchen Körper ist die Kraftliniendichte geringer. Es sieht aus, als ob die Kraftlinien von einem solchen Körper weggedrängt würden.

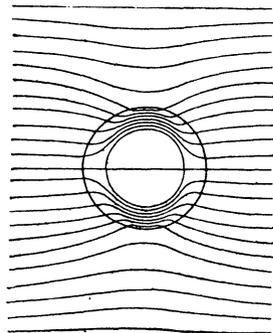


Abb. 139. Eiserner Hohlzylinder in einem homogenen Felde.

Es sei besonders betont, daß die Verdichtung der Kraftlinien nur bei schrägem Auftreten auf die Oberfläche stattfindet. Bei senkrechtem Auftreten bleibt die Kraftliniendichte, wie aus Abb. 136 hervorgeht, unverändert. Es können ja auch keine neuen Kraftlinien an der Grenzfläche GH entstehen, da die magnetischen Kraftlinien nur als geschlossene Kurven existieren. Die Gl. 58 widerspricht dem nicht, denn diese besagt nur, daß die Kraftliniendichte sich um das μ -fache vermehrt, wenn an Stelle eines Stoffes mit der Durchlässigkeit 1 ein Stoff von der Durchlässigkeit μ tritt.

101. Magnetische Schirmwirkung.

Abb. 139 zeigt, wie sich aus der Verdichtung der Kraftlinien in einem Eisenring, die mit einer Ansaugwirkung verglichen werden kann, eine Schirmwirkung auf den Innenraum ergibt, der bei genügender Dicke des Eisens frei von Kraftlinien bleibt. Abb. 140

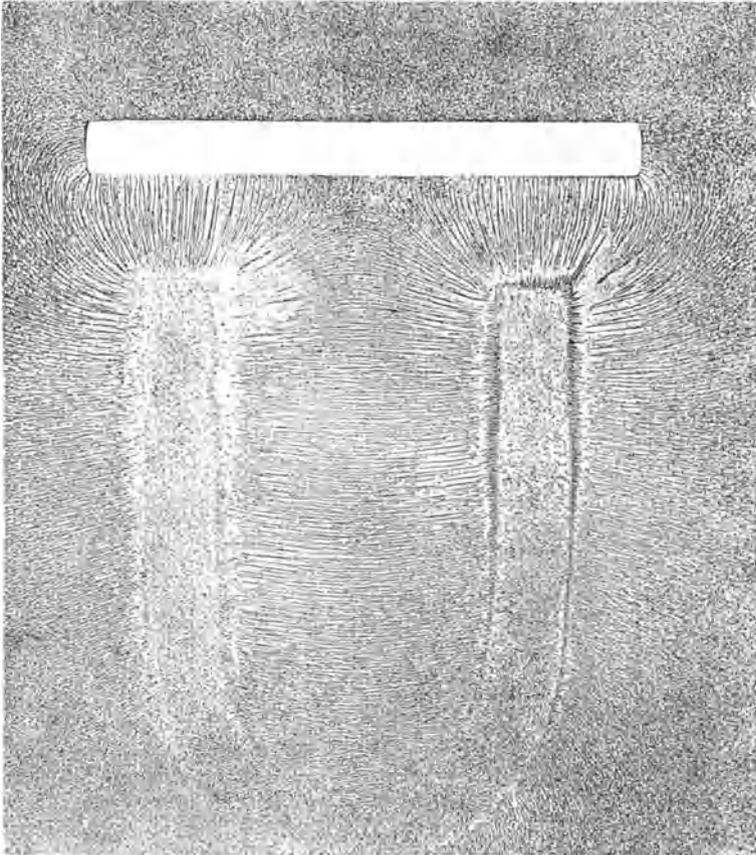


Abb. 140. Magnetische Schirmwirkung einer Eisenplatte.

zeigt die Ansaugung der Kraftlinien eines Hufeisenmagnetes durch eine davorstehende Eisenplatte. Hinter dieser liegen die Eisenfeilspäne ungeordnet; ein Zeichen, daß hier das magnetische Feld verschwindend klein ist.

Die magnetische Schirmwirkung ist ähnlich wie die Schirmwirkung einer zur Erde abgeleiteten leitenden Platte oder eines Hohlzylinders gegen elektrische Felder (§ 18). Während aber die

elektrische Schirmwirkung eine vollkommene ist, so daß selbst hinter der dünnsten Platte die elektrische Kraft null ist, ist die magnetische Schirmwirkung eine unvollkommene; sie hängt von der Dicke der Platte und ihrer magnetischen Durchlässigkeit ab. Nur hinter einer unendlich dicken Platte oder hinter einer, deren Durchlässigkeit unendlich groß ist, wäre die magnetische Kraft null. So erkennt man aus Abb. 141, daß innerhalb des Eisenringes noch Kraftlinien vorhanden sind. Sie gehen von Polen aus, die an der Innen-

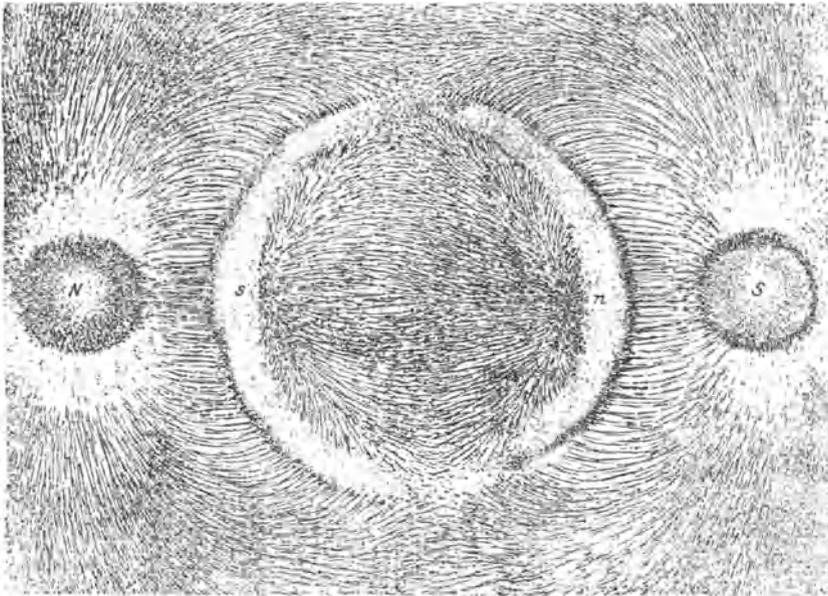


Abb. 141. Unvollkommene Schirmwirkung eines eisenen Ringes.

fläche des Ringes gegenüber den induzierenden Polen sitzen und entgegengesetztes Vorzeichen haben wie diese. Das induzierende Feld ist hier zu stark, oder der Eisenring zu dünn, als daß er alle Kraftlinien ansaugen könnte, wie es in Abb. 139 und 140 der Fall ist.

Die Schirmwirkung ist stärker, wenn mehrere durch Zwischenräume getrennte Platten statt einer einzigen von gleicher gesamter Dicke angewendet werden.

Die Schirmwirkung besteht aber nicht nur gegen Kraftlinien, die quer zu einem Ring oder einer Platte verlaufen, sondern sie besteht auch in einem gewissen Bereich zwischen zwei Eisenplatten, die parallel zu den Kraftlinien stehen (Abb. 142), weil eben die Kraftlinien angesaugt werden. Das gilt natürlich auch von einem Eisenrohr.

Eine bei elektrischen Maschinen sehr wichtige Schirmwirkung üben die Zähne eines Zahnankers auf den Nutenraum zwischen den

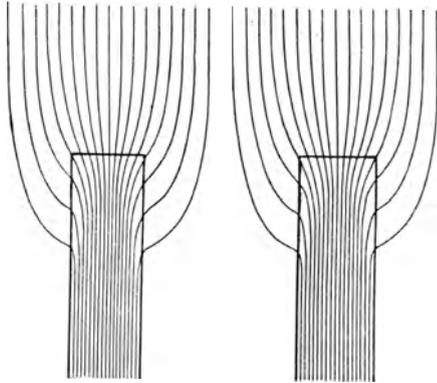


Abb. 142. Magnetische Schirmwirkung zweier Eisenplatten.

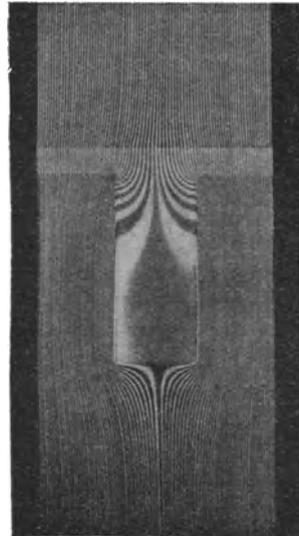


Abb. 143. Magnetische Schirmwirkung der Zähne auf die Nut bei einer elektrischen Maschine.

Zähnen aus, wie aus den Abb. 143 und 144 zu ersehen ist. Sie zeigen die vom Feldmagnet zum Anker verlaufenden Kraftlinien (helle Linien). In den Zähnen sind sie sehr dicht, werden, während in den Nuten nur

weil sie vom Eisen angesaugt werden (helle Linien) (Abb. 143). Bei der Drehung des Ankers werden die Kraftlinien von den Zähnen ein Stück weit mitgezogen und schnellen dann mit großer Geschwindigkeit von einem Zahn zum nächsten, so daß auch während der Drehung der große Unterschied zwischen der Kraftliniendichte in den Zähnen und Nuten besteht²⁾.

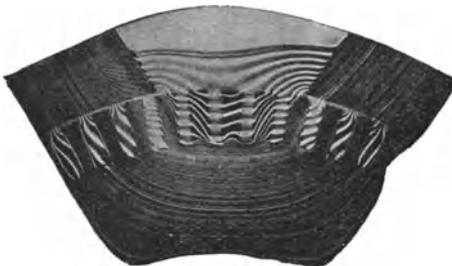


Abb. 144. Erregerfeld einer elektr. Maschine.

¹⁾ Sie erscheinen in den Nuten verbreitert, weil es Strömungslinien einer gefärbten Flüssigkeit in einer ungefärbten sind, denn durch Eisenfeilspäne können die Kraftlinien im Eisen nicht sichtbar gemacht werden. Die Luft Räume sind durch größeren Reibungswiderstand für die gefärbte Flüssigkeit zwischen zwei Glasplatten nachgeahmt. Vgl. Hele Shaw, Hay und Powell, Journ. of the Instit. of the Electr. Engin. London 1915, Bd. 34, S. 21.

²⁾ Das hat Anlaß zu wiederholten Erörterungen gegeben, ob die Zugkraft in den Drähten oder Zähnen des Ankers angreift. Nach § 83 ist die Kraft,

102. Entmagnetisierende Kraft. Dauermagnete.

Verlaufen die magnetischen Kraftlinien in ihrer ganzen Länge in demselben Stoff, wie z. B. in der ringförmigen Spule, Abb. 117, so ist der magnetische Zustand durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ vollständig bestimmt. Anders ist es bei einem ungeschlossenen Eisenkörper wie in Abb. 122, in welchem freier Magnetismus auftritt. Dann kommen zu den Kraftlinien des ursprünglichen magnetisierenden Feldes, die in Abb. 145 durch ausgezogene Linien dargestellt sind, noch diejenigen hinzu, welche von dem freien Magnetismus auf den Endflächen (Polen) ausgehen. Dieser ist dort, wo die Kraftlinien des magnetisierenden Feldes auftreffen, negativ, und dort,

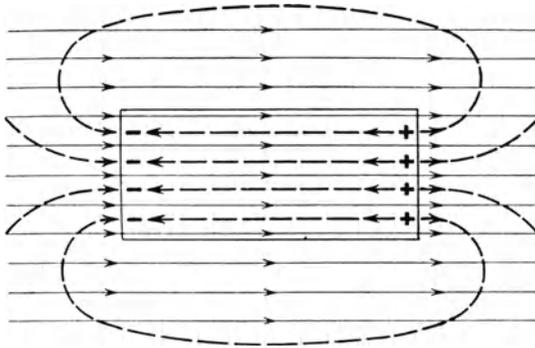


Abb. 145.

wo sie das Eisen verlassen, positiv (vgl. Abb. 120). Vom positiven Magnetismus gehen nun die gestrichelten Kraftlinien (Abb. 145) aus und wenden sich einerseits durch das Eisen, andererseits durch die umgebende Luft dem negativen Ende des Körpers zu, so daß sich

welche in einem magnetischen Felde auf einen stromdurchflossenen Leiter ausgeübt wird, der Feldstärke proportional. Somit ist die auf die Ankerdrähte einer elektrischen Maschine (Motor oder Stromerzeuger) wirkende Zugkraft bei einem Zahnanker vielmals kleiner als bei einem glatten Anker, bei dem die Drähte auf der Oberfläche liegen. Die übrige, dem Drehmoment entsprechende Zugkraft wirkt auf das Eisen der Zähne, während bei einem glatten Anker die gesamte Zugkraft in den Drähten angreift. Daher können größere Maschinen nicht mit glattem Anker ausgeführt werden. Die Größe der induzierten EMK wird nicht beeinflusst, denn nach Gl. 92 (S. 214) kommt es nur auf die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{z} an, die von einer Stromschleife umschlossen wird. Benützt man aber die Gl. 90 für einen einzelnen Draht, so kommt es auf das Produkt $\mathfrak{H}v$, also auf Kraftliniendichte mal Geschwindigkeit des Scheidens der Kraftlinien an. Da die Kraftlinien während der Drehung mit großer Geschwindigkeit von einem Zahn zum nächsten schnellen, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher sie die Drähte in den Nuten schneiden, entsprechend groß und zwar so groß, daß das Produkt $\mathfrak{H}v$ gleich demselben Produkt bei einem glatten Anker ist.

die eingezeichneten Pfeilrichtungen ergeben. Man sieht, daß sie im Innern des Eisens dem ursprünglichen magnetischen Felde entgegenwirken, so daß man sagen kann, der freie Magnetismus wirkt schwächend oder entmagnetisierend. Außerhalb des Körpers wirken die gestrichelten Kraftlinien teils verstärkend (vor den Polflächen), teils schwächend. Wo sie sich mit den ursprünglichen Kraftlinien kreuzen, bilden sie an jeder Stelle eine Resultierende, so daß sich schließlich ein resultierendes Feld ergibt, dessen Gestalt in Abb. 121 für ein rundes, in Abb. 122 für ein prismatisches Eisenstück zu sehen ist. Ist \mathfrak{H}_u die ursprüngliche, \mathfrak{H} die wirklich vorhandene magnetisierende Kraft an irgend einer Stelle des Eisenkörpers, so ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_u - \varepsilon \sigma,$$

wenn σ die Flächendichte (Magnetisierungsstärke, § 89) und ε ein Entmagnetisierungsfaktor ist. Dieser Faktor ist nur bei Kugeln und Ellipsoiden an allen Stellen gleich, und daher besteht nur in solchen an allen Stellen gleiche Magnetisierung, wenn das ursprüngliche Feld ein homogenes ist. Daher läßt sich ε nur für diese Körper berechnen, für andere nur näherungsweise experimentell bestimmen¹⁾.

Hat der Eisenkörper keine Stellen, aus welchen Kraftlinien austreten (z. B. ein Ring, auf den ein magnetisierender Strom wie in Abb. 117 aufgewickelt ist), so gibt es keinen freien Magnetismus und daher auch keine entmagnetisierende Wirkung. Hier ist also die vom Strom erzeugte magnetisierende Kraft $4\pi in$ im ganzen Ring wirklich vorhanden.

Beseitigt man die äußere magnetisierende Kraft, so gibt die Hystereseschleife (Abb. 127, 128) weiteren Aufschluß, denn daraus ersieht man, daß der remanente Magnetismus OF bestehen bleibt, jedoch nur dann in voller Stärke, wenn keine entmagnetisierende Wirkung besteht, also nur bei einem geschlossenen Körper. Sind aber Enden mit freiem Magnetismus vorhanden, so wirkt die entmagnetisierende Kraft der Koerzitivkraft OG , welche den remanenten Magnetismus aufrecht zu erhalten sucht, entgegen, so daß nur ein Teil des remanenten Magnetismus als dauernder oder permanenter Magnetismus bestehen bleibt. Man hat dann einen Dauermagnet oder permanenten Magnet, der nun als Ursache eines selbständigen magnetischen Quellenfeldes (S. 130) so lange besteht, bis sein Magnetismus durch irgendwelche Einflüsse vernichtet wird. Nachdem $\mathfrak{H}_u = 0$ gemacht wurde, geht die obige Gleichung über in

$$\mathfrak{H} = -\varepsilon \sigma,$$

und die entsprechenden Gleichungen des § 91 gehen über in

$$\mathfrak{B} = 4\pi \sigma$$

$$\mathfrak{H} = 4\pi m$$

¹⁾ Ch. R. Mann, Inauguraldissertation, Berlin 1895 (Mayer & Müller). H. du Bois, Magnetische Kreise usw. Berlin, S.45.

Das sind die drei Gleichungen eines Dauermagnetes. Die letzte stimmt überein mit § 6.

Für den dauernd verbleibenden Magnetismus ist weniger der remanente Magnetismus OF , sondern hauptsächlich die Koerzitivkraft OG maßgebend, denn diese stellt jene entgegenwirkende magnetisierende Kraft dar, die notwendig wäre, um den remanenten Magnetismus zu vernichten. Wäre die entmagnetisierende Kraft der Pole gerade gleich OG , so verbliebe vom remanenten Magnetismus kein dauernder Rest. Daraus erklärt sich die bekannte Tatsache, daß der Dauermagnetismus bei Schmiedeeisen viel kleiner ist als bei hartem Stahl, obwohl der remanente Magnetismus bei gleicher Magnetisierung wenig verschieden ist, wie die Zahlentafel auf S. 151 zeigt. Dagegen ist die Koerzitivkraft bei Schmiedeeisen beträchtlich kleiner als bei Stahl, und daher genügt bei ersterem die entmagnetisierende Wirkung der Pole, um den remanenten Magnetismus fast ganz zu vernichten, während sie bei letzterem nur einem Teil der Koerzitivkraft gleichkommt. Es verbleibt daher ein großer Teil des remanenten Magnetismus als Dauermagnetismus. Die Stärke eines Dauermagnetes mit freien Polen hängt also in erster Linie von seiner Koerzitivkraft, in zweiter Linie von seiner Gestalt ab.

Aus Abb. 145 folgt, daß bei gleicher Polstärke die entmagnetisierende Kraft um so größer ist, je kürzer das Stück ist, weil nach § 3 die magnetische Kraft mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Daher muß man bei Eisenkernen für elektromagnetische Meßinstrumente und ähnliche Apparate, wo es auf möglichst wenig Dauermagnetismus ankommt, die Gestalt so wählen, daß die Länge im Vergleich zur Dicke möglichst klein ist. Umgekehrt muß man die Dauermagnete, die möglichst viel Dauermagnetismus haben sollen, wie z. B. Feldmagnete für Drehspulenzinstrumente (§ 267) und Dämpfungsmagnete möglichst lang wählen. Bei zylindrischen Stäben bestehen nach Ch. R. Mann¹⁾ folgende Werte.

Länge Durchmesser	Entmagnetisierungs- faktor ϵ
5	0,6800
10	0,2550
20	0,0900
100	0,0052
300	0,0008

Da bei geschlossenen Eisenkörpern die entmagnetisierende Kraft Null ist, so muß bei gleicher Länge und Dicke jene Form die kleinste entmagnetisierende Kraft und daher den größten Dauermagnetismus haben, die der ganz geschlossenen Form am nächsten kommt. Mißt man bei den in Abb. 146 dargestellten Formen A bis F den Dauermagnetismus, so findet man, daß er tatsächlich bei A am größten,

¹⁾ Anmerk. auf S. 166.

bei F am kleinsten ist. Die Dauermagnetismen dieser Formen verhalten sich ungefähr wie folgt:

$$A : B : C : D : E : F = 2,6 : 2,5 : 2,1 : 1,7 : 1,3 : 1.$$

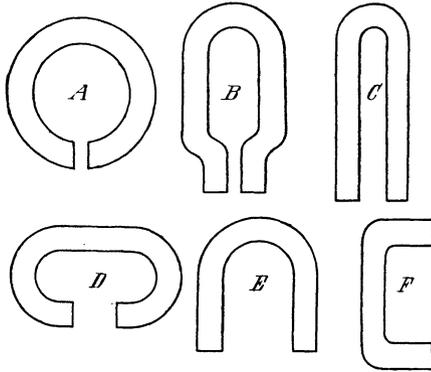


Abb. 146.

Daher eignen sich die Formen A und B am besten zu Dauermagneten für Drehspulensinstrumente, Elektrizitätszähler und zu Dämpfungsmagneten.

Bei demselben Eisenstück ist der Dauermagnetismus um so größer, je größer der Höchstwert von \mathfrak{B} ist, bis zu dem die Magnetisierung getrieben wurde. Denn wie aus Abb. 128 hervorgeht, ist sowohl der remanente Magnetismus als auch die Koerzitivkraft um so größer, je größer der Höchstwert von \mathfrak{B} ist.

Der Dauermagnetismus ist aber auch von äußeren Einflüssen abhängig. Durch Erwärmung, Erschütterungen nimmt er ab, jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze¹⁾. Dagegen kann er durch Erhitzung bis zur Rotglut ganz vernichtet werden.

Hat man die magnetisierende Kraft, d. h. die ausgezogenen Kraftlinien in Abb. 145 beseitigt, so bleiben nur die vom Dauermagnetismus ausgehenden gestrichelten Kraftlinien übrig. Verfolgt man den geschlossenen Weg einer solchen, so sieht man, daß die Richtung im Eisen und außerhalb des Eisens entgegengesetzt ist. Die Richtungsänderung tritt beim Durchgang durch die Oberfläche ein, wo man sich den Sitz des freien Magnetismus denkt. Hier findet der auf S. 16 berechnete Kräftsprung um den Betrag $4\pi\sigma m$ statt. Und weil dieser Sprung im Wege einer geschlossenen Kraftlinie zweimal im entgegengesetzten Sinne erfolgt, so ist die Arbeit eines Poles m auf dem ganzen geschlossenen Wege Null, wie das schon auf S. 130 bei der magnetischen Platte erörtert wurde. Die magnetische Platte, die wir dort betrachtet haben, ist ja nichts anders als ein Dauermagnet von kleiner Länge²⁾.

¹⁾ Diese Grenze muß bei Dauermagneten für Meßinstrumente erreicht werden, bevor diese geeicht werden können. Das geschieht durch Erwärmung auf 100° – 130° und Schütteln in Trommeln od. dgl. Stahlsorten mit einem kleinen Zusatz von Mangan oder Wolfram oder Chrom zeigen nach solcher Behandlung größere Konstanz als gewöhnlicher Stahl.

²⁾ Wegen dieser geringen Länge ist es unmöglich, einen Dauermagnet in solcher Form wirklich herzustellen. Wir haben ja gesehen, daß die entmagnetisierende Wirkung des freien Magnetismus um so größer ist, je kleiner der Abstand der Endflächen ist. Daher ist sie bei einer dünnen Platte so groß, daß

Betrachtet man einen ungeschlossenen Eisenkörper während seiner Magnetisierung durch irgend ein Feld (ausgezogene Linien in Abb. 145) und nach Beseitigung dieses Feldes, so ergibt sich, daß die Kraftlinien im Eisen bei diesen zwei Zuständen entgegengesetzte Richtung haben, während sie außerhalb des Eisens dieselbe Richtung haben, abgesehen von der bedeutenden Formveränderung der Kraftlinien. Hingegen ist bei einem geschlossenen Eisenring (Abb. 117) die Kraftlinienrichtung während der Magnetisierung und nach Beseitigung des magnetisierenden Feldes dieselbe, weil eben kein freier Magnetismus vorhanden ist, obwohl der gesamte remanente Magnetismus weiterbesteht. Dies, sowie die entmagnetisierende Wirkung der freien Pole zeigt sich sehr auffällig bei einem Elektromagnet mit geschlossenem Eisenkern (z. B. Abb. 156 S. 180), wenn sein Anker gut an den Kern anschließt, so daß kein merklicher Luftzwischenraum besteht. Hat man, während der Strom wirkt, soviel Gewicht angehängt als der Anker eben noch tragen kann, so hält er das auch nach Ausschaltung des Stromes fest. Ist aber der Anker einmal entfernt worden, so vermag der Magnet dann nur mehr einen kleinen Teil des früheren Gewichtes festzuhalten. Durch den freien Magnetismus, der bei Entfernung des Ankers aufgetreten ist, ist ein großer Teil des remanenten Magnetismus infolge der entmagnetisierenden Wirkung vernichtet worden¹⁾.

Nach dem Entfernen eines Eisenstückes aus einem magnetischen Felde oder nach Unterbrechung des Stromes, der das magnetische Feld erzeugt, bleibt immer ein gewisser Dauermagnetismus zurück. Will man das vermeiden, so muß man schon vor dem Unterbrechen des Stromes den remanenten Magnetismus Null machen; d. h. man muß nach positiver Magnetisierung eine magnetisierende Kraft OG (Abb. 127, 128), nach negativer Magnetisierung eine magnetisierende Kraft OG' herstellen, denn bei diesen Werten wird die Kraftliniendichte \mathfrak{B} null. Ohne besondere Hilfsmittel kann man aber diese Werte nicht genau einstellen. Daher ist es am einfachsten, wenn man magnetische Kreisprozesse durch Wechselstrommagnetisierung herstellt. Läßt man die aufeinanderfolgenden Kreisprozesse immer kleiner werden, indem man das Eisenstück allmählich aus dem Wechselfelde entfernt, oder indem man den Wechselstrom allmählich Null werden läßt, so wird auch der remanente Magnetismus OF all-

nach Aufhebung des magnetisierenden Feldes fast der ganze remanente Magnetismus wieder vernichtet wird. Der Rest verschiebt sich derart, daß er an den zwei am weitesten auseinanderliegenden Punkten auftritt, so daß aus der magnetischen Platte ein schwacher Dauermagnet wird mit Polen, die an den Enden eines Durchmessers sitzen.

¹⁾ Daher muß man bei Elektromagneten, die nach Ausschaltung des Stromes den Anker loslassen sollen (d. h. um das „Klebenbleiben“ des Ankers zu verhüten), von vornherein einen gewissen Luftzwischenraum herstellen, indem man ein Messingplättchen oder dgl. an die Stoßfläche des Ankers oder des Kernes anbringt.

mählich Null. Es ist dies das einzige Mittel, Dauermagnetismus ohne Ausglühen des Eisenstückes zu vernichten.

Die zur Charakterisierung der magnetischen Eigenschaft eines Stoffes dienende Magnetisierungskurve (Abb. 125) muß natürlich die Beziehung zur wirklich vorhandenen magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} , nicht zur ursprünglichen \mathfrak{H}_u geben. Daher eignet sich zur unmittelbaren Messung nur ein geschlossener Körper (Abb. 117) ohne entmagnetisierende Wirkung, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_u = \frac{0,4 \pi i N}{l}$

ist. Andere Formen sind nur geeignet, wenn ihr Entmagnetisierungsfaktor ε bekannt ist. Da er nur für Ellipsoide genau berechnet werden kann, benützt man am besten nur solche Formen, wo er möglichst klein ist, die also einem geschlossenen homogenen Körper möglichst nahe kommen. Das ist der Fall bei einem Stab, der in ein Eisenjoch von vielmal größerem Querschnitt und sehr großer Übergangsfläche eingespannt ist (Magnetisierungsapparat § 293). Hierbei ergibt sich folgende Beziehung zum Ersatz der Flächendichte σ durch die Kraftliniendichte \mathfrak{B} im Eisenstab. Nach Gl. 55 ist

$$\sigma = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4 \pi}$$

also
$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_u - \varepsilon \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4 \pi}.$$

Bei einer solchen Anordnung mit enger Stoßfuge ist \mathfrak{H} verschwindend klein gegen \mathfrak{B} , so daß mit großer Annäherung gilt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_u - \frac{\varepsilon}{4 \pi} \mathfrak{B}.$$

Wenn also der Entmagnetisierungsfaktor ε bekannt ist, erhält man hiernach die Beziehung zwischen der wirklich vorhandenen magnetisierenden Kraft \mathfrak{H} und der Kraftliniendichte \mathfrak{B} aus der ursprünglichen Kraft \mathfrak{H}_u , die sich aus den Amperewindungen und der Länge des Kraftlinienpfades gemäß Gl. 52 ergibt: Die Umrechnung einer experimentell ermittelten $\mathfrak{B} - \mathfrak{H}_u$ -Kurve auf die $\mathfrak{B} - \mathfrak{H}$ -Kurve gemäß obiger Gleichung bezeichnet man als Scherung der Kurve. Statt dieses alten physikalischen Verfahrens zur Berücksichtigung des freien Magnetismus benützt man in der Elektrotechnik jetzt ausschließlich die Darstellung der ganzen Kraftlinienmenge durch magnetomotorische Kraft und magnetischen Widerstand. Tatsächlich kommt die in Abb. 174 dargestellte Beziehung darauf hinaus, daß eine experimentell ermittelte Kurve III durch Scherung mittels der Kurve II in die für das Eisen allein geltende Magnetisierungskurve I übergeführt wird. Es sind dort nur andere, aber proportionale Abszissen und Ordinaten vorhanden, und der Vorgang ist umgekehrt, indem dort III aus I und II ermittelt wurde (vgl. S. 176 und Anmerk. 1 auf S. 190).

103. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur.

Erst bei hohen Temperaturen ist ein stärkerer Einfluß auf die Magnetisierung zu bemerken. Eine einfache Gesetzmäßigkeit läßt sich nicht feststellen, so daß man den Temperatureinfluß nicht durch Koeffizienten, wie beim Temperatureinfluß auf den elektrischen Leitungswiderstand angeben kann.

Im allgemeinen läßt sich der Temperatureinfluß für alle ferromagnetischen Stoffe in folgender Weise charakterisieren: Bei kleinen magnetisierenden Kräften nimmt der Magnetismus mit wachsender

Temperatur bis zu einem (schwach ausgeprägten) Maximum zu und dann rasch bis nahezu Null ab; bei großen magnetisierenden Kräften nimmt er von vornherein erst langsam, dann rasch bis nahezu Null ab. Abb. 147 zeigt dieses Verhalten für Eisen; und zwar ist als Maß der Magnetisierung die Flächendichte (oder Magnetisierungsstärke § 89) σ in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Die verschiedenen Kurven gelten für verschiedene magnetisierende Kräfte, die den Kurven beigeschrieben sind. Stahl und Nickel zeigen einen ähnlichen Verlauf. Jene Temperatur, wo die Magnetisierung ziemlich plötzlich auf sehr kleine Werte abzufallen beginnt, nennt man die kritische Temperatur oder Wandlungstemperatur. Sie liegt bei weichem Eisen zwischen 700° und 900° , bei Stahl zwischen 600° und 700° , bei Nickel zwischen 250° und 300° .

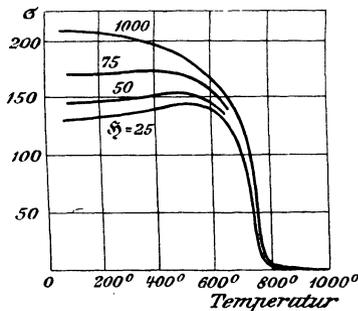


Abb. 147. Abhängigkeit der Magnetisierung des Eisens von der Temperatur.

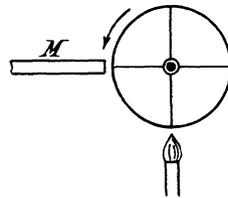


Abb. 148. Thermomagnetischer Motor.

Hierauf beruht der thermomagnetische Motor von Stefan. Ein Rad aus Nickelblech (Abb. 148) wird durch eine Flamme von unten erhitzt, so daß sein unterer Teil schwächer magnetisch ist als sein oberer. Infolgedessen wird der obere Teil von dem Magnet M stärker angezogen als der untere, und das Rad dreht sich in der Richtung des Pfeiles. Hier wird Wärme unmittelbar ohne Hilfe erhitzter Dämpfe wie bei den Dampfmaschinen und Gasmotoren in mechanische Arbeit umgesetzt. Der Wirkungsgrad ist aber sehr klein.

Infolge Erwärmung nimmt auch der Magnetismus der Dauermagnete ab, kehrt aber bei Abkühlung zum Teil wieder zurück, wenn die Erwärmung nicht über Rotglut gesteigert wurde. Bei Erhitzung bis zur Weißglut verschwindet der Dauermagnetismus gänzlich. Man hat also darin ein Mittel, um Eisen- oder Stahlstücke unmagnetisch zu machen.

Wenn die Magnetisierung abnimmt, muß auch der Hystereseverlust mit wachsender Temperatur abnehmen. Abb. 149 zeigt Hystereseschleifen von Transformatorblech bei 6 verschiedenen Temperaturen von 25° bis 745° . Bei letzterer ist die kritische Temperatur

schon überschritten; die Magnetisierung ist klein und die Schleife fällt zu einer Linie zusammen¹⁾.

Hiervon zu unterscheiden ist die dauernde Veränderung der magnetischen Eigenschaften durch wiederholte mäßige Erhitzung und Abkühlung (magnetisches Altern).

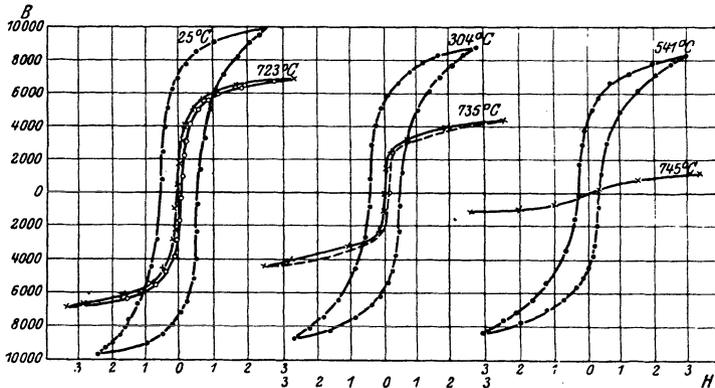


Abb. 149. Hystereseschleifen derselben Eisenorte bei verschiedenen Temperaturen.

Ein eigentümliches Verhalten zeigen Eisen-Nickel-Legierungen. Während Eisen und schwache Nickel-Legierungen nur eine kritische Temperatur haben, indem bei Abkühlung die starke Magnetisierbarkeit an derselben Stelle zurückkehrt, wo sie bei steigender Temperatur verschwand, haben Legierungen mit etwa 25% Nickel zwei kritische Temperaturen. Die Magnetisierbarkeit verschwindet bei etwa 700°, kehrt aber erst wieder zurück, wenn die Temperatur unter 30° gesunken ist. Es gibt sogar Legierungen, welche die Magnetisierbarkeit erst unter 100° Kälte wieder erreichen, so daß sie also für gewöhnlich unmagnetisierbar sind. Sind sie aber durch solche Abkühlung wieder magnetisierbar geworden, so bleiben sie es, solange sie nicht auf 700° erhitzt werden. Dasselbe Stück kann also magnetisierbar oder unmagnetisierbar sein, je nach der vorhergegangenen Behandlung (ETZ 1918, S. 189).

104. Das magnetische Altern des Eisens.

Messungen an Transformatoren haben gezeigt, daß sich ihr Eisenkern nach längerem Betrieb insofern verschlechtert hat, als der Verlust durch Hysterese in einzelnen Fällen auf das Doppelte gestiegen ist. Außerdem zeigte sich eine Verminderung der magne-

¹⁾ Maclaren, Proceed. Americ. Instit. of. Electr. Eng. 1912, Bd. 31, S. 1895.

tischen Durchlässigkeit. Besondere Untersuchungen¹⁾ haben ergeben, daß diese als magnetische Alterung bezeichneten Verschlechterungen auf die während des Betriebs stattfindende Erwärmung zurückzuführen sind. Bei schlechten Eisensorten zeigt sich eine Zunahme des Hystereseverlustes nach längerer Zeit schon infolge des Wechsels zwischen Tag- und Nachttemperatur. Dagegen zeigen gute Eisenbleche, wie sie jetzt für Transformatoren verwendet werden, selbst nach längerer und wiederholter Erwärmung bis 150° nur eine geringe Zunahme.

Im allgemeinen zeigen auch gute Bleche unmittelbar nach ihrer Herstellung (Walzen und Ausglühen) eine bei gewöhnlicher Temperatur von selbst eintretende kleine Verschlechterung, die aber nach einigen Wochen nachläßt, und es tritt auch dann bei höherer Temperatur keine weitere Verschlechterung ein. Neuerdings haben Versuche in der Physik.-techn. Reichsanstalt²⁾ gezeigt, daß Eisenbleche durch längeres Schütteln in rotierenden Trommeln etwas verschlechtert werden.

Durch Ausglühen der Bleche kann man die eingetretene Alterung nicht wieder rückgängig machen.

105. Der magnetische Kreis.

Verlaufen die magnetischen Kraftlinien, die immer geschlossene Kurven bilden, in ihrer ganzen Länge durch einen ringförmig geschlossenen Körper von gleichmäßigem Querschnitt wie in Abb. 117, so ist nach § 91 die Kraftliniendichte

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}.$$

Die magnetisierende Kraft für diesen Fall kennen wir aus § 88, nämlich

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi i N}{l},$$

wenn N die gesamte Anzahl der Windungen, l die mittlere Länge der Kraftlinien (des Kraftlinienpfades) und i die durch die Windungen fließende Stromstärke in absol. Einh. bedeutet oder

$$\mathfrak{H} = \frac{0,4\pi i N}{l},$$

wenn i die Stromstärke in Ampere bedeutet.

Ferner ist

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu \frac{0,4\pi i N}{l}.$$

¹⁾ ETZ 1898, S. 189; G. Stern, ebenda 1903, S. 407. Epstein, Stern, Soschinski, ebenda 1904, S. 497.

²⁾ Gumlich und Steinhaus, ETZ 1913, S. 1022.

Daraus erhält man die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{z} , wenn man mit dem Querschnitt S des Kraftlinienbündels multipliziert, also

$$\mathfrak{z} = \mu S \frac{0,4 \pi i N}{l}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\mathfrak{z} = \frac{0,4 \pi i N}{\frac{l}{\mu S}} \dots \dots \dots (65)$$

so sieht man, daß sie gleiche Form mit dem Ohmschen Gesetze für einen elektrischen Stromkreis hat. Bezeichnet man den Zähler als magnetomotorische Kraft \mathfrak{F}

$$\mathfrak{F} = 0,4 \pi i N = 1,257 i N \dots \dots \dots (66)$$

und den Nenner als magnetischen Widerstand w

$$w = \frac{l}{\mu S} \dots \dots \dots (67)$$

so ist

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{F}}{w} \dots \dots \dots (68)$$

d. h. die Kraftlinienmenge eines Kraftlinienbündels ist gleich der magnetomotorischen Kraft dividiert durch den magnetischen Widerstand.

Der obige Ausdruck für den magnetischen Widerstand (Gl. 67) hat zur Voraussetzung, daß das Kraftlinienbündel auf seiner ganzen Länge denselben Querschnitt S und dieselbe magnetische Durchlässigkeit μ hat. Ist das nicht der Fall, so ist der magnetische Widerstand für jedes Stück, wo S oder μ einen anderen Wert hat, besonders zu bilden, und alle diese sind zu summieren. (Vergleiche folgenden §.)

Aus dem Vergleiche des magnetischen Widerstandes mit dem elektrischen Widerstande (§ 43) erkennt man, daß $\frac{1}{\mu}$ im magnetischen Kreis dieselbe Bedeutung hat wie der spezifische Widerstand in einem elektrischen Stromkreis. Daher kann man $\frac{1}{\mu}$ auch als spezifischen magnetischen Widerstand und μ als spezifische magnetische Leitfähigkeit bezeichnen. Der reziproke Wert $\frac{1}{w}$ ist mithin als magnetischer Leitwert zu bezeichnen¹⁾.

¹⁾ Bei dieser Analogie mit dem elektrischen Stromkreis darf man aber nicht vergessen, daß der elektrische Strom eine wirkliche Strömung, die Magnetisierung aber nur ein Zustand ist.

Am häufigsten wird das vorstehende Gesetz in der Form

$$\mathfrak{B} = \frac{0,4\pi iN}{w} \dots \dots \dots (69)$$

angewendet.

Das Produkt iN nennt man die Amperewindungen. Mithin ist die MMK¹⁾ gleich den $0,4\pi$ fachen Amperewindungen.

Vergleicht man \mathfrak{F} mit \mathfrak{H} , so sieht man, daß

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}l \dots \dots \dots (70)$$

Ist die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} nicht auf der ganzen Länge l des geschlossenen Kraftlinienpfades konstant, so ist dieser in unendlich kurze Stücke dl zu zerlegen, für jedes das Produkt mit dem an dieser Stelle herrschenden \mathfrak{H} zu bilden und alle diese Produkte sind zu addieren; also $\mathfrak{F} = \sum \mathfrak{H} \cdot dl$ oder analytisch angeschrieben:

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{H} \cdot dl$$

Die MMK ist also gleich dem geschlossenen Linienintegral der magnetisierenden Kraft, und ihre Richtung ist an jeder Stelle dieselbe, wie die Richtung der magnetisierenden Kraft²⁾.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich ohne weiteres, daß dieses Linienintegral gleich null ist, wenn der Strom null ist, oder wenn der Integrationsweg keinen Stromleiter umschlingt. Dabei ist es gleichgültig, ob andere Ströme oder magnetische Felder in der Nähe sind. Nur für denjenigen geschlossenen Weg, der einen Strom umschlingt, besteht ein von Null verschiedener Wert des Linienintegrals.

Rührt das magnetische Feld nicht von einem elektrischen Strom her, sondern von einem Dauermagnet (Abb. 7 oder 8), so hat das Linienintegral dann einen von Null verschiedenen Wert, wenn die Integration durch diejenigen Endflächen des Dauermagnetes hindurchgeht, die man als Sitz der freien magnetischen Massen betrachtet (vgl. § 114).

106. Magnetomotorische Kräfte und magnetische Widerstände in Hintereinanderschaltung.

Wirken zwei magnetomotorische Kräfte \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 (zwei Stromspulen) in demselben Kraftlinienpfad, so ist die gesamte MMK \mathfrak{F} gleich der Summe beider

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

wenn sie im gleichen Sinne wirken, oder gleich der Differenz

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2,$$

¹⁾ Mit MMK wird die „magnetomotorische Kraft“ abgekürzt bezeichnet.

²⁾ Vgl. damit die Definition der elektromotorischen Kraft als Linienintegral der elektrischen Kraft (§ 39).

wenn sie im entgegengesetzten Sinne wirken, und die Kraftlinien sich nicht stauen (§ 109), sondern denselben Weg einhalten.

Besteht der magnetische Kreis aus zwei Teilen von der Länge l_1 und l_2 , den Querschnitten S_1, S_2 und verschiedener Durchlässigkeit μ_1 und μ_2 , so sind die magnetischen Widerstände

$$w_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1}, \quad w_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2}.$$

Werden beide Teile von denselben Kraftlinien durchsetzt, so sind die magnetischen Widerstände hintereinander geschaltet und der gesamte magnetische Widerstand w ist gleich der Summe der einzelnen Widerstände wie bei einem elektrischen Stromkreise:

$$w = w_1 + w_2.$$

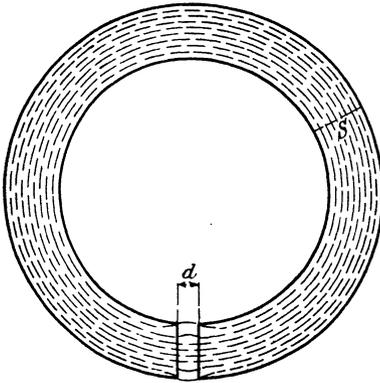


Abb. 150.

Wird ein geschlossener Eisenring aufgeschnitten (Abb. 150), so daß ein Luftzwischenraum von der Länge d entsteht, so setzt sich der gesamte Widerstand zusammen aus dem in Eisen w_1 und dem in Luft w_2 . Ist der Zwischenraum d sehr klein im Verhältnis zum Querschnitt, so breiten sich die Kraftlinien nicht weiter aus, und man kann den Querschnitt des Kraftlinienbündels

in Luft gleich den Endflächen (Polflächen) des Eisens setzen. Da für Luft $\mu = 1$ ist, so ist

$$w_1 = \frac{l}{\mu S}, \quad w_2 = \frac{d}{S}.$$

Daher der gesamte Widerstand

$$w = \frac{l}{\mu S} + \frac{d}{S}$$

und

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{F}}{w} = \frac{\mathfrak{F}}{\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{S}}.$$

Dividiert man durch den Querschnitt, so ergibt sich die Kraftliniendichte \mathfrak{H} . Man erhält so den richtigen magnetischen Zustand ohne die entmagnetisierende Kraft (§ 102) der an den Enden vorhandenen freien magnetischen Massen berücksichtigen zu müssen. Statt durch die entmagnetisierende Kraft kommt hier die Verminderung der Magnetisierung dadurch zum Ausdruck, daß im Nenner

der letzten Gleichung der magnetische Widerstand der Luft hinzugekommen ist. Je größer der Luftzwischenraum, desto größer die entmagnetisierende Kraft, desto größer aber auch der magnetische Widerstand. Beide Methoden müssen bei richtiger Berechnung der entmagnetisierenden Kraft und des magnetischen Widerstandes zu demselben Ergebnis führen.

In den meisten Fällen ist die Berechnung des magnetischen Widerstandes nur näherungsweise möglich, weil die Kraftlinien meist nicht gleiche Länge haben, und der Querschnitt eines Kraftlinienbündels wegen der verschiedenen Kraftliniendichte an verschiedenen Stellen nicht genau definiert werden kann.

Auch in einem geschlossenen Kreisring von Eisen ist die Länge der äußeren Kraftlinien größer als die der inneren. Ist die Dicke des Ringes nicht zu groß gegenüber dem inneren Radius, so ist die mittlere Länge l des Kraftlinienpfades gleich dem arithmetischen Mittel aus dem inneren und äußeren Umfang (l_i bzw. l_a).

$$l = \frac{l_i + l_a}{2}.$$

Ist aber der Ring sehr dick, so muß man setzen

$$l = \frac{l_a - l_i}{\log \text{nat} \frac{l_a}{l_i}}.$$

1. Beispiel. Ein Ring aus Schmiedeeisen von 8 cm² Querschnitt, 24 cm innerem, 26 cm äußerem Umfang ist mit 100 Windungen bewickelt, durch die 1 Ampere Strom geschickt wird. Wie groß ist die Kraftlinienmenge \mathfrak{B} ? Die mittlere Länge des Kraftlinienpfades ist $\frac{24 + 26}{2} = 25$.

Nach Gl. 52 ist die magnetisierende Kraft

$$\mathfrak{H} = \frac{0,4 \pi i N}{l} = \frac{1,25 \cdot 1 \cdot 100}{25} = 5.$$

Dazu findet man aus Abb. 125 $\mathfrak{B} = 11300$ und daher

$$\mathfrak{B} = 8 \cdot 11300 = 90400.$$

2. Beispiel. Hat derselbe Ring einen Luftzwischenraum von 0,1 cm Länge, so entsteht die Frage, welcher Strom ist notwendig, um dieselbe Kraftlinienmenge zu erzeugen? Nach obigem ist

$$\mathfrak{B} = \frac{0,4 \pi i N}{w_1 + w_2},$$

also

$$i = \frac{1}{0,4 \pi N} (w_1 + w_2) \mathfrak{B}.$$

Für die Durchlässigkeit des Schmiedeeisens bei $\mathfrak{B} = 11300$ findet man (aus Abb. 123) $\mu = 2250$.

Daher

$$w_1 = \frac{25}{225 \cdot 0,8} = 0,0014.$$

Für den Luftzwischenraum ist

$$w_2 = \frac{0,1}{8} = 0,0125.$$

Also

$$i = \frac{1}{1,25 \cdot 100} (0,0014 + 0,0125) 90400 = 10,3 \text{ A.}$$

Man erkennt daraus den großen Einfluß eines selbst kurzen Luftzwischenraumes, denn ohne diesen genügte 1 A für die gleiche Magnetisierung.

3. Beispiel. Die umgekehrte Aufgabe, aus der Stromstärke die Kraftliniendichte \mathfrak{B} oder die Kraftlinienmenge \mathfrak{J} zu berechnen, ist auf direktem Wege unlösbar, weil man, um die Größe von μ zu erfahren, die Kraftliniendichte kennen muß, die aber erst berechnet werden soll. Um einen Näherungswert zu erhalten, vernachlässigt man den magnetischen Widerstand im Eisen und berücksichtigt nur den in der Luft; dann ist

$$w_2 = \frac{0,1}{8} = 0,0125$$

$$\mathfrak{J} = \frac{0,4 \pi i N}{w_2} = \frac{1,25 \cdot 10,3 \cdot 100}{0,0125} = 103000.$$

In Wirklichkeit ist dieser Wert zu hoch; wir können aber eine Korrektur anbringen, denn wir erfahren jetzt wenigstens den ungefähren Wert von \mathfrak{B} , wenn wir durch den Querschnitt dividieren, also

$$\mathfrak{B} = \frac{103000}{8} = 12900.$$

Dazu finden wir aus Abb. 123: $\mu = 1650$, und berechnen nun damit den magnetischen Widerstand im Eisen

$$w_1 = \frac{25}{1650 \cdot 8} = 0,0019.$$

$$\text{Nun ist} \quad \mathfrak{J} = \frac{0,4 \pi i N}{w_1 + w_2} = \frac{1,25 \cdot 10,3 \cdot 100}{0,0144} = 90000.$$

Man sieht, dieser zweite Näherungswert kommt dem wirklichen Wert, den wir aus dem 2. Beispiel kennen, schon beträchtlich näher. Wünscht man noch größere Annäherung, so kann man in gleicher Weise einen dritten Näherungswert berechnen. Um zu genaueren Werten zu kommen, muß man die magnetische Charakteristik aufstellen (§ 111) und den betreffenden Wert daraus entnehmen.

Wäre der Luftzwischenraum 0,5 cm oder mehr, so wäre der magnetische Widerstand des Eisens gegen den der Luft schon verschwindend klein.

107. Der magnetische Widerstand längerer Luftstrecken.

Ist die Länge d einer Luftstrecke zwischen zwei gleich großen Polflächen nicht sehr klein gegen das Ausmaß dieser Flächen, so kann der Querschnitt des Kraftlinienbündels nicht gleich dem der Polfläche gesetzt werden. Eine genaue Berechnung des magnetischen Widerstandes solcher Luftstrecken ist daher nicht möglich.

Abb. 151 stellt den experimentell ermittelten magnetischen Widerstand solcher Luftstrecken zwischen quadratischen, annähernd quadratischen oder runden Polflächen von der Größe s und für

Längen d bis zu 10 cm dar, nach Messungen des Verfassers¹⁾. Berechnet man daraus nach der Gleichung $w = \frac{d}{S}$ den äquivalenten

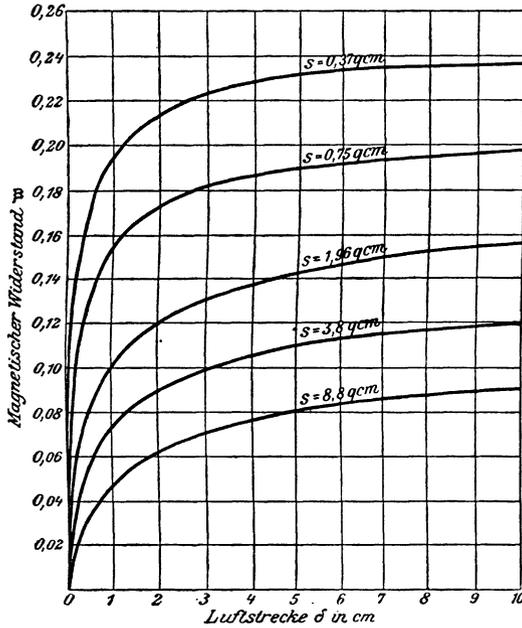


Abb. 151.

Querschnitt S des Kraftlinienbündels in der Luft, d. h. jenen Querschnitt, den das Kraftlinienbündel haben müßte, wenn es in parallelen Linien und mit gleichmäßiger Dichte den Luftraum erfüllen würde, so kann man ihn durch die lineare Gleichung

$$S = s + kd \quad (71)$$

darstellen, wobei s die Polfläche und k einen Faktor bedeutet, dessen Abhängigkeit von der Polfläche durch Abb. 152 dargestellt ist. Man kann also damit die magnetischen Widerstände auch für solche Polflächen berechnen, die in

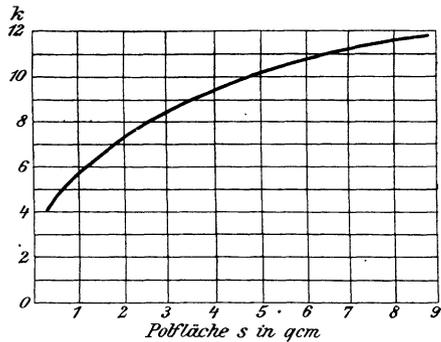


Abb. 152.

¹⁾ Benischke, ETZ 1904, S. 810. Weitere Messungen von Hellmann (Dissert. „Der magnet. Widerstand von Lufträumen“), Aachen 1910.

Abb. 151 nicht enthalten sind, und zwar bis zu Längen von 10 cm.

Stehen sich verschieden große Polflächen gegenüber (Abb. 153) und ist die Länge d klein gegenüber der kleineren der beiden Flächen, so kann der Querschnitt des Kraftlinienbündels S gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Polflächen s_1 und s_2 gesetzt werden, also

$$w = \frac{d}{\frac{s_1 + s_2}{2}} = \frac{2d}{s_1 + s_2}.$$

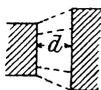


Abb. 153.

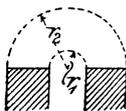


Abb. 154.

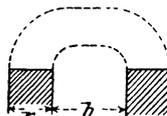


Abb. 155.

Für zwei nahe nebeneinander in derselben Ebene liegende Polflächen (Abb. 154), deren Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene a ist, ist der magnetische Widerstand

$$w = \frac{\pi}{a \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Liegen die Polflächen so weit auseinander, daß die Kraftlinien nicht mehr als Halbkreise betrachtet werden können (Abb. 155), so ist

$$w = \frac{\pi}{a \log \text{nat} \left(1 + \frac{\pi r}{b} \right)}.$$

Beispiel. Bei einem Elektromagnet aus Schmiedeeisen (Abb. 156) von 8 cm^2 Eisenquerschnitt und 50 cm gesamter Eisenlänge (Schenkel + Anker) und bei einem Luftzwischenraum von 1 cm sei eine Kraftliniendichte von $\mathfrak{B} = 3000$ erforderlich, um eine gewisse Zugkraft zu erhalten; wieviel Amperewindungen (iN) sind erforderlich, um diese Magnetisierung herzustellen? Ist w_1 der magnetische Widerstand im ganzen Eisen, w_2 der eines Luftzwischenraumes, so ist nach Gl. 69

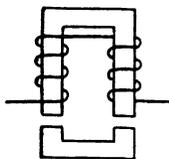


Abb. 156.

$$iN = \frac{\mathfrak{B}}{0,4\pi} (w_1 + 2w_2).$$

Nun ist $\mathfrak{B} = 8 \cdot 3000 = 24000$; μ finden wir aus Abb. 123 gleich 2300. Daher

$$w_1 = \frac{50}{2300 \cdot 8} = 0,0027.$$

Für einen Luftzwischenraum ist $w_2 = \frac{d}{S}$; S finden wir aus Gl. 71, nachdem wir für k aus Abb. 152 den Wert 11,8 entnommen haben:

$$S = 8 + 11,8 \cdot 1 = 19,8; \quad w_2 = \frac{1}{19,8} = 0,05;$$

also

$$iN = \frac{24000}{1,25} (0,0027 + 2 \cdot 0,05) = 19200 \cdot 0,103 = 1980.$$

Hätte man den magnetischen Widerstand im Eisen gegen den des Luftzwischenraumes vernachlässigt, so hätte der Fehler nur 3% betragen.

108. Verzweigung eines Kraftlinienbündels. Magnetische Widerstände in Nebeneinanderschaltung.

Teilt sich ein Kraftlinienbündel mit der Kraftlinienmenge \mathfrak{z} in zwei Zweige (Abb. 157) mit den Kraftlinienmengen \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 , und wirkt auf die ganze Verzweigung eine gemeinsame MMK, so sieht man sofort ein, daß

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \quad \dots \quad (72)$$

ist, weil in den Zweigen weder Kraftlinien entstehen, noch verschwinden können. Das ist das erste Kirchhoffsche Gesetz in Anwendung auf den magnetischen Kreis.

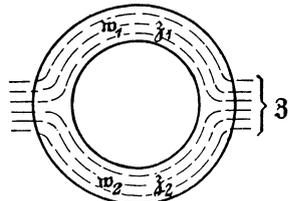


Abb. 157.

Ist \mathfrak{W} der magnetische Widerstand der ganzen Verzweigung, w_1 der des einen, w_2 der des anderen Zweiges, so ist

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{W}}, \quad \mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{F}}{w_1}, \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{F}}{w_2}.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2} \quad \dots \quad (73)$$

d. h. die Kraftlinienmengen verhalten sich umgekehrt wie die magnetischen Widerstände.

Zufolge der Gl. 72 ist

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{F}}{w_1} + \frac{\mathfrak{F}}{w_2} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{W}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}$$

oder

$$\mathfrak{W} = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2} \quad \dots \quad (74)$$

Wie vorauszusehen war, gilt auch da dasselbe Gesetz, wie für eine Stromverzweigung.

Für drei oder mehr Zweige (Abb. 158) gilt

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 + \dots$$

$$\frac{1}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots$$

Zieht man den ganzen Weg der geschlossenen Kraftlinien in Betracht, so ist der magnetische Widerstand w des gemeinsamen Weges dem der Verzweigung vorgeschaltet. Mithin ist der gesamte magnetische Widerstand

$$\mathfrak{W}_g = w + \mathfrak{W} \dots \dots (75)$$

Für die Kraftlinienmengen in den einzelnen Bündeln ergeben sich folgende Beziehungen. Da man das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis in der Form

$$\mathfrak{F} = w \mathfrak{J} \dots \dots (76)$$

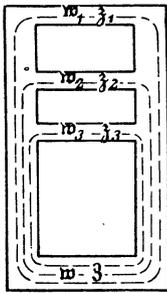


Abb. 158.

schreiben kann, so gilt für jeden geschlossenen Kreis, der in der Verzweigung enthalten ist, das zweite Kirchhoffsche Gesetz, wonach die gesamte MMK gleich ist der Summe aus den Produkten von magnetischem Widerstand und Kraftlinienmenge. So ist für den geschlossenen Kreis, der den ersten Zweig enthält

für den zweiten
und für den dritten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= w \mathfrak{J} + w_1 \mathfrak{J}_1 \\ \mathfrak{F} &= w \mathfrak{J} + w_2 \mathfrak{J}_2 \\ \mathfrak{F} &= w \mathfrak{J} + w_3 \mathfrak{J}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (77)$$

In dem von \mathfrak{J}_1 und \mathfrak{J}_2 gebildeten magnetischen Kreis wirkt keine MMK. Es ist also

In gleicher Weise gilt

$$\left. \begin{aligned} 0 &= w_1 \mathfrak{J}_1 - w_2 \mathfrak{J}_2 \\ 0 &= w_1 \mathfrak{J}_1 - w_3 \mathfrak{J}_3 \\ 0 &= w_2 \mathfrak{J}_2 - w_3 \mathfrak{J}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (78)$$

Die letzten drei Gleichungen kann man auch in folgende Form bringen

$$\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{J}_2 : \mathfrak{J}_3 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2} : \frac{1}{w_3}$$

Enthält auch noch einer der Zweige eine MMK. z. B. \mathfrak{F}_3 , so gelten folgende Gleichungen

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_3 = w \mathfrak{J} + w_3 \mathfrak{J}_3$$

$$\mathfrak{F}_3 = w_1 \mathfrak{J}_1 - w_3 \mathfrak{J}_3 \quad \text{usw.}$$

Nach diesen Gleichungen kann man die MMK aus den Kraftlinienmengen ohne weiteres berechnen, da man aus Abb. 123 die entsprechenden Werte von μ entnehmen kann. Das umgekehrte Problem, aus den MMKen die Kraftlinienmengen zu berechnen, kann unmittelbar nicht gelöst werden, da man eben \mathfrak{J} und \mathfrak{B} nicht kennt. Man kann dann μ , soweit es sich um ferromagnetische Körper handelt, nur schätzen, oder man stellt die magnetische Charakteristik für einen genügenden Bereich auf (vgl. § 111).

109. Magnetomotorische Kräfte von entgegengesetzter Richtung. Magnetische Stauung.

Wirken in einem aus guten Leitern gebildeten, gegen außen isolierten elektrischen Stromkreis zwei gleich große EMKe von entgegengesetzter Richtung, so ist die Stromstärke Null, weil der Strom wegen der Isolation nicht aus den guten Leitern heraus-treten kann. Würde man aber den Stromkreis ohne Isolation in eine leitende Flüssigkeit eintauchen (Abb. 159), so würde aus jeder der beiden EMKe ein Strom entstehen, der durch die Flüssigkeit von einem Pol zum anderen geht; die leitende Flüssigkeit bildet einen elektrischen Nebenschluß zum eigentlichen Stromkreis. Die mit Pfeilen versehenen Linien in Abb. 159 deuten den Stromverlauf an.

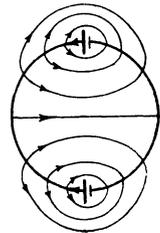


Abb. 159.

Wirken in einem geschlossenen Eisenkörper, wie z. B. in dem durch Abb. 160 (a und b) dargestellten Ring, zwei gleich große MMKe von entgegengesetzter Richtung, so würde die Magnetisierung im Ring Null sein, wenn die Kraftlinien nicht aus dem Ring in die Luft übertreten würden. Das ist aber tatsächlich immer der Fall, weil der magnetische Widerstand der Luft nicht unendlich groß ist gegenüber dem des Eisens. Infolgedessen bilden sich magnetische Nebenschlüsse durch die Luft, wie diese Abbildungen zeigen. An den Stellen, wo die Kraftlinien in Luft übertreten — und das ist hauptsächlich an den Enden der Wicklung der Fall — treten freie magnetische Massen n , s auf. Ihr Vorzeichen, und darnach die Richtung der Kraftlinien erkennt man aus der Ampereschen Regel. Dasselbe ist der Fall, auch wenn das Eisen wie in Abb. 161 keinen geschlossenen Körper bildet. Man bezeichnet diese an den Seitenflächen auftretenden freien magnetischen Massen n , s als magnetische Folgepole. Das Kraftlinienbild gewährt den Eindruck, als ob sich die Kraftlinien gegenseitig stauen würden, wie zwei Flüssigkeitsstrahlen, die aufeinander treffen und seitwärts abfließen. Daher wurde vom Verfasser für diese Erscheinung die Bezeichnung „magnetische Stauung“ angewendet¹⁾.

¹⁾ Benischke, „Grundgesetze d. Wechselstromtechnik“, 1. Aufl. 1902, § 26.

Die in den letzten Abbildungen dargestellten Fälle sind von praktischer Wichtigkeit. Abb. 160 entspricht dem Ringanker einer elektrischen Maschine. Ein solcher besitzt eine fortlaufende, in sich geschlossene Wicklung, der an zwei Stellen (bei mehrpoligen Maschinen an mehr Stellen) Strom durch Bürsten zu- oder abgeleitet wird (Abb. 162). Dadurch erscheint

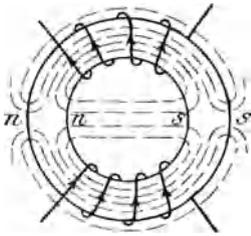


Abb. 160 a. Magnetische Stauung in einem Ring mit zwei Spulen von entgegengesetzter Richtung.

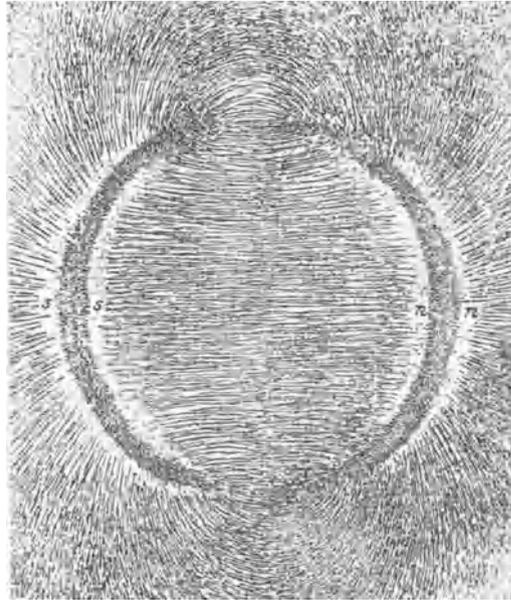


Abb. 160 b. Magnetische Stauung in einem Ringanker einer Gleichstrommaschine, dem durch die Bürsten bei s und n Strom zugeführt wird.

die geschlossene Wicklung in zwei Teile von entgegengesetzter Stromrichtung zerlegt, und an den Stromzuführungsstellen entstehen Außen- oder Folgepole. Würde die Luft magnetisch isolieren, so könnten keine Kraftlinien in die Luft übertreten, und dann wäre eine elektrische Maschine mit Ringwicklung unmöglich.

Magnetische Felder, die durch Ströme entgegengesetzter Richtung erzeugt werden, treten ferner bei Transformatoren und Induktionsmotoren auf, wenn

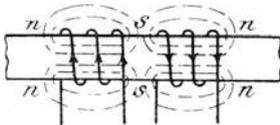


Abb. 161. Magnetische Stauung zweier nebeneinander liegender Spulen.

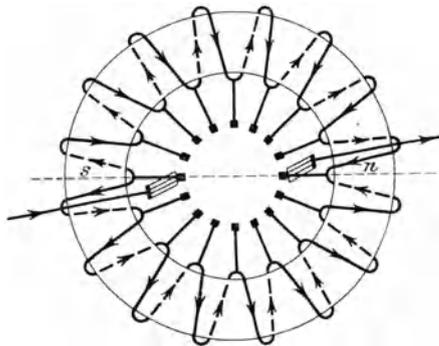


Abb. 162. Geschlossene Ringwicklung mit Stromzuleitung an zwei gegenüberliegenden Stellen.

die Phasenverschiebung zwischen primärem und sekundärem Strom 180° beträgt, denn dann sind diese beiden Ströme in jedem Augenblick einander entgegengerichtet. Die Abb. 161 entspricht insbesondere einem Transformator, dessen primäre und sekundäre Wicklung in Abteilungen nebeneinander liegen (vgl. die Abb. 218). Ist die Phasenverschiebung kleiner als 180° , so ist die Stauung entsprechend kleiner.

Wie groß die Anzahl der aus dem Eisen in Luft übertretenden Kraftlinien ist, hängt vom magnetischen Widerstand in Eisen und Luft ab.

Bei gleichen magnetischen Widerständen ist die Stauung natürlich um so größer, je größer die MMKe sind.

Sind zwei MMKe zwar entgegengesetzt gerichtet, aber nicht gleich groß, so entsteht im Eisenkörper eine Kraftlinienmenge entsprechend dem Unterschied beider MMKe; außerdem gehen aber auch Kraftlinien durch die Luft, jedoch weniger, als wenn die MMKe gleich groß sind.

110. Magnetische Streuung.

Wird ein geschlossener Eisenkörper (Abb. 163) durch eine Stromspule magnetisiert, so verläuft der größte Teil der Kraftlinien in ihm. Einige aber treten an den Enden der Spule aus dem Eisenkörper heraus und schließen sich durch die Luft um die Spule herum. Nur wenn die Spule den größten Teil des Ringes bedeckt.

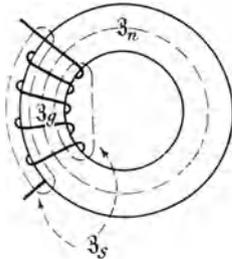


Abb. 163.

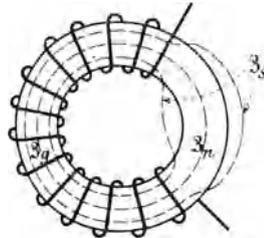


Abb. 164.

verlaufen die meisten Streulinien nach Abb. 164 in derselben Richtung durch die Luft wie im Eisen. Bei einer zweipoligen Gleichstrommaschine (Abb. 165) tritt nur ein Teil der gesamten, von der Magnetwicklung erzeugten Kraftlinienmenge in den Anker ein und durchsetzt seinen Querschnitt CD . Der übrige Teil geht seitwärts durch die Luft, kann also im Anker nicht nutzbar gemacht werden.

Dieses Heraustreten aus dem gewünschten oder beabsichtigten Wege nennt man Kraftlinienstreuung oder magnetische Streuung.

Diese Verhältnisse sind ganz ähnlich wie bei einem Stromleiter, den man in die Erde verlegt (stromleitende Bahnschienen). Aus diesem treten überall Ströme heraus

und gehen durch die Erde zum anderen Pol, weil der elektrische Widerstand der Erde nicht unendlich groß ist gegenüber dem der Schienen. Während es aber für elektrische Ströme isolierende Stoffe gibt, deren Widerstand unendlich groß ist gegenüber dem der Metalle, und daher eine vollständige elektrische Isolation möglich ist, gibt es für den Magnetismus keinen Stoff, der eine magnetische Isolation möglich machen würde.

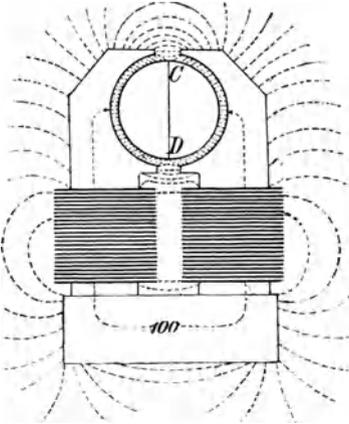


Abb. 165. Magnetische Streuung bei einer zweipoligen Gleichstrommaschine.

Als Streukoeffizient oder Streufaktor bezeichnet man entweder das Verhältnis der Streulinien \mathfrak{B}_s zu den nützlichen Kraftlinien \mathfrak{B}_n (Heyland'scher Streufaktor τ):

$$\tau = \frac{\mathfrak{B}_s}{\mathfrak{B}_n} \quad \dots \quad (79)$$

oder das Verhältnis der gesamten Kraftlinien \mathfrak{B}_g zu den nützlichen Kraftlinien \mathfrak{B}_n (Hopkinsonscher Streufaktor v):

$$v = \frac{\mathfrak{B}_g}{\mathfrak{B}_n} \quad \dots \quad (80)$$

Beide Streufaktoren sind um so größer, je größer die Anzahl der Streulinien im Verhältnis zu den anderen ist.

Da die gesamten Kraftlinien \mathfrak{B}_g aus der Summe der nützlichen und der Streulinien bestehen (Abb. 163), so ergibt sich folgende Beziehung zwischen den beiden Streufaktoren τ und v :

$$\mathfrak{B}_g = \mathfrak{B}_n + \mathfrak{B}_s = \mathfrak{B}_n + \tau \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n (1 + \tau)$$

also
$$1 + \tau = \frac{\mathfrak{B}_g}{\mathfrak{B}_n} = v \quad \dots \quad (81)$$

Ist \mathfrak{F} die MMK, w_n der magnetische Widerstand der nützlichen Kraftlinien, w_s der der streuenden und w_g der der gesamten, so ist

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mathfrak{F}}{w_n}, \quad \mathfrak{B}_s = \frac{\mathfrak{F}}{w_s}, \quad \mathfrak{B}_g = \frac{\mathfrak{F}}{w_g}.$$

Daraus folgt
$$\tau = \frac{w_n}{w_s} \quad \dots \quad (82)$$

$$v = \frac{w_n}{w_g} \quad \dots \quad (83)$$

Da $\mathfrak{Z}_g = \mathfrak{Z}_n + \mathfrak{Z}_s$ ist, so ist

$$\frac{1}{w_g} = \frac{1}{w_n} + \frac{1}{w_s}$$

oder

$$w_g = \frac{w_n w_s}{w_n + w_s}$$

was auch ohne weiteres aus § 108 folgt, da die Kraftlinienbündel \mathfrak{Z}_n und \mathfrak{Z}_s parallel geschaltet sind.

Aus den obigen Gleichungen folgt, daß die Anzahl der streuenden Kraftlinien im Verhältnis zu den nützlichen, also die Streuung schlechtweg, um so größer ist, je größer der magnetische Widerstand der nützlichen Kraftlinien gegenüber dem der streuenden ist. Da der magnetische Widerstand verkehrt proportional der magnetischen Durchlässigkeit ist, so ist die Streuung bei einem geschlossenen Eisenkörper, wo die nützlichen Kraftlinien alle im Eisen und die streuenden hauptsächlich in der Luft verlaufen, ungefähr proportional dem Verhältnis der magnetischen Durchlässigkeit der Luft zu Eisen: $1/\mu$ oder umgekehrt proportional der magnetischen Durchlässigkeit μ . Da in Eisen μ veränderlich ist und nach Abb. 123 für Schmiedeeisen und Stahlguß bei einer Kraftliniendichte von 5000—8000 am größten ist, so ist hierbei die Streuung am kleinsten.

Noch mehr als von der magnetischen Durchlässigkeit ist die Streuung von der Gestalt des Eisenkernes und der Wicklung abhängig. Vergleicht man die Abb. 166 und 167, die denselben Eisenkern haben, wo aber in dem einen Falle die Spule auf dem langen Joch, in dem anderen auf dem kurzen Joch sitzt, so erkennt man sofort, daß im letzteren Falle die Streuung größer sein muß, weil

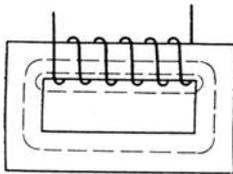


Abb. 166.

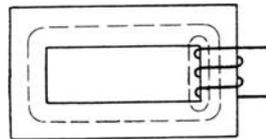


Abb. 167.

der Kraftlinienweg des Streufeldes in der Luft viel kürzer ist als im ersten Falle. Von großem Einfluß sind auch die Stoßfugen, weil ihr magnetischer Widerstand beträchtlich ist. Infolgedessen ist die Streuung bei den Abb. 168 und 169 größer als bei den Abb. 166 und 167, und bei Abb. 169 wiederum größer als bei Abb. 168. Am größten ist sie bei Abb. 170, weil hier die Stoßfugen nur im Wege der nützlichen Kraftlinien liegen und nicht gleichzeitig auch im Wege der streuenden.

Ist der Durchmesser der Wicklung wesentlich größer als der Kern (Abb. 171), so ist die Streuung größer, als wenn sie den Kern knapp umgibt.

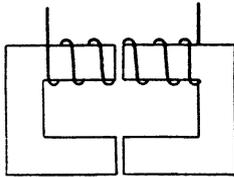


Abb. 168.

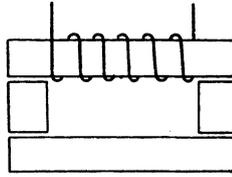


Abb. 169.

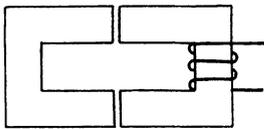


Abb. 170.

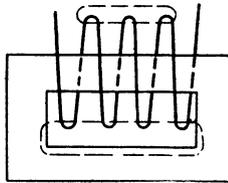


Abb. 171.

Aber auch dann ist schon eine Streuung vorhanden, wenn auf einem geschlossenen Eisenkörper die Wicklung ungleich verteilt ist (Abb. 172). Sitzen zwei Spulen, deren MMKe in gleicher Richtung wirken, auf einem Eisenkern (Abb. 173), so entstehen zwei Streufelder, die aber um so mehr zusammenfließen, je kleiner der Zwischenraum zwischen den Spulen ist (vgl. damit Abb. 160 mit zwei Spulen von entgegengesetzter Richtung).

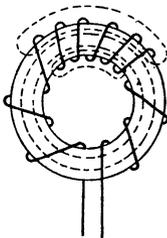


Abb. 172. Magnetische Streuung bei ungleich verteilter Wicklung.

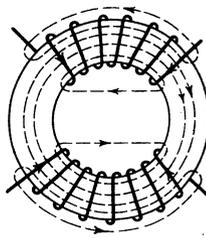


Abb. 173. Magnetische Streuung bei zwei Spulen von gleicher Richtung.

Unter sonst gleichen Verhältnissen hängt demnach die magnetische Streuung lediglich von der geometrischen Form des Eisenkörpers und von der Lage der Wicklung ab.

Anders ist es, wenn sich auf dem Eisenkern zwei stromführende Wicklungen befinden, deren MMKe einander entgegenwirken. Dann tritt zu der eben besprochenen Streuung jeder der beiden Wicklungen noch die

im vorigen Paragraph besprochene magnetische Stauung hinzu. In solchen Fällen besteht also die gesamte magnetische Streuung aus zwei Teilen, nämlich aus der magnetischen Streuung im engeren Sinne, die nur von dem Strom in der eigenen Wicklung abhängig, von dem der anderen Wicklung aber unabhängig ist,

und aus der magnetischen Stauung, die von der Lage und Größe der entgegengerichteten MMKe, also von den Stromstärken in den beiden Spulen und ihrer gegenseitigen Lage, sowie (bei Wechselströmen) von der Phasenverschiebung zwischen den beiden Strömen abhängt. Das ist besonders bei Transformatoren und Induktionsmotoren von Wichtigkeit.

Gewöhnlich wird die magnetische Streuung im engeren Sinne und die magnetische Stauung zusammen als magnetische Streuung schlechtweg bezeichnet.

111. Magnetische Charakteristik.

Die Schaulinien in Abb. 125 stellen die Abhängigkeit der Kraftliniendichte von der magnetisierenden Kraft bei ferromagnetischen Körpern dar und zwar unabhängig von der Gestalt des magnetisierten Körpers. Herrscht an irgend einer Stelle desselben die magnetisierende Kraft \mathfrak{H} , so ist die Kraftliniendichte \mathfrak{B} an der betreffenden Stelle durch die dazu gehörige Ordinate der Abb. 125 dargestellt. Herrscht im ganzen Körper dieselbe magnetisierende Kraft und dieselbe Durchlässigkeit μ , so ist auch die Kraftliniendichte \mathfrak{B} im ganzen Körper dieselbe. Multipliziert man \mathfrak{B} mit dem Querschnitt S des Kraftlinienbündels, so erhält man die Kraftlinienmenge \mathfrak{Z} . Ist der magnetisierte Körper ein geschlossener, so daß der ganze Kraftlinienpfad in ihm verläuft, so darf man \mathfrak{H} mit der Länge l des Kraftlinienpfades multiplizieren und erhält nach Gl. 70 die MMK \mathfrak{F} . Die Kurve, die die Kraftlinienmenge \mathfrak{Z} in Abhängigkeit von \mathfrak{F} darstellt, unterscheidet sich also von den Kurven in Abb. 125 nur durch die Maßstäbe der Abszissen und Ordinaten.

Ist der magnetisierte Körper kein geschlossener, sondern hat er einen Luftzwischenraum (Abb. 150), so kann die Kraftlinienmenge nach § 106 aus dem Ohmschen Gesetze für magnetische Kreise berechnet werden. Ist w_1 der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades im Eisen und w_2 der im Luftzwischenraum, so ist

$$\mathfrak{F} = w_1 \mathfrak{Z} + w_2 \mathfrak{Z}.$$

$w_1 \mathfrak{Z}$ stellt also denjenigen Teil der MMK dar, der auf den Weg im Eisen, und $w_2 \mathfrak{Z}$ denjenigen, der auf den Weg im Luftzwischenraum entfällt. Entsprechend dem Spannungsabfall in einem elektrischen Stromkreis kann man $w_1 \mathfrak{Z}$ als Abfall der MMK im Eisen und $w_2 \mathfrak{Z}$ als Abfall der MMK im Luftzwischenraum oder als magnetische Spannung zwischen den betreffenden Stellen bezeichnen¹⁾. Berechnet

¹⁾ Zwischen MMK und magnetischer Spannung besteht also dasselbe Verhältnis, wie zwischen EMK und elektrischer Spannung eines elektrischen Stromkreises. So wie die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten eines Stromleiters durch einen in Volt geeichten Strommesser mit hohem Widerstand (§ 275) gemessen werden kann, so kann die magnetische Spannung zwischen zwei Stellen eines magnetischen Kreises gemessen werden, wenn man die

man für jeden Teil die Abhängigkeit der Kraftlinienmenge von der MMK, so erhält man für den Eisenkörper die Kurve *I* in Abb. 174, für den Luftzwischenraum die Kurve *II*. Da sich nach der letzten Gleichung die Abszissen addieren, so stellt die Kurve *III* die Beziehung zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} für den betreffenden Körper dar. Für jeden beliebigen Punkt ist die Abszisse der Kurve *III* gleich der Summe der Abszissen *I* und *II*:

$$MP_3 = MP_1 + MP_2.$$

Verändert man den Abszissenmaßstab im Verhältnis von $0,4\pi S$, so stellen die Abszissen die Amperewindungen iN dar. Die Kurve *III* bezeichnet man als magnetische Charakteristik des betreffenden Körpers. Sie unterscheidet sich von den Magnetisierungskurven in Abb. 123 bis 125 dadurch, daß jene unabhängig von der Gestalt des magnetisierenden Körpers für irgend eine Stelle desselben gelten, während diese für einen magnetisierten Körper von bestimmter Gestalt gilt. Die magnetische Charakteristik bildet den Übergang zur Leerlaufcharakteristik einer Gleichstrommaschine oder einer synchronen Wechselstrommaschine, denn die MMK ist proportional dem Erregerstrom und die EMK der Maschine ist proportional der Kraftlinienmenge, welche aus den Magnetpolen in den Anker übertritt.

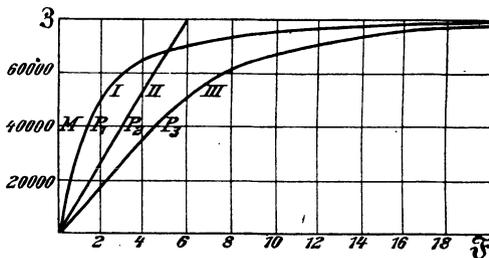


Abb. 174.

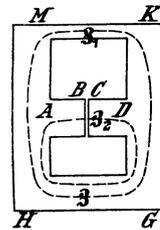


Abb. 175.

Die den Abfall der MMK in einem Luftzwischenraum darstellende Kurve ist immer eine Gerade, wie *II* in Abb. 174, weil die magnetische Durchlässigkeit μ der Luft konstant und gleich 1 ist.

Aus Abb. 174 erkennt man auch, daß die magnetische Charakteristik um so geradliniger und um so horizontaler verläuft, je horizontaler die Luftlinie *II* verläuft, d. h. je größer der Luftzwischenraum ist¹⁾. Das gilt natürlich auch für die ganze Hystereseschleife.

Enden einer auf eine biegsame Röhre aufgewickelten und entsprechend geeichten Maßspule an die betreffenden Stellen anlegt (vgl. § 291).

¹⁾ Das der Abbildung 174 entsprechende, aber umgekehrte Verfahren, nämlich mit Hilfe der Luftkurve *II* aus der gemessenen magnetischen Charakteristik *III* die Kurve *I* für das Eisen allein zu erhalten, nennt man die Scherung der Kurve *III*. Es ist nichts anderes als die Berücksichtigung der entmagnetisierenden Wirkung des freien Magnetismus auf den Polflächen *BC*

Sie wird um so schräger und schmaler, je größer der Luftzwischenraum ist.

Liegt bei einem ferromagnetischen Körper ein Luftzwischenraum im Nebenschluß (Abb. 175), so ergibt sich die magnetische Charakteristik auf folgende Weise. Sind \mathfrak{z}_1 und \mathfrak{z}_2 die Kraftlinienmengen der beiden Zweige, so ist die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{z} :

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2.$$

Ist \mathfrak{F} die MMK zwischen den Verzweigungspunkten A und D , ist w_1 der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades $AMKD$, und w_2 der des Kraftlinienpfades AD , so ist

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{F}}{w_1}, \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{F}}{w_2}.$$

Diese beiden Beziehungen sind in Abb. 176 durch die Kurven I und II dargestellt. Die letzte ist eine gerade Linie, wenn der magnetische Widerstand der Eisenwege AB und CD verschwindend klein ist gegenüber dem des Luftzwischenraumes BC . Daraus erhält man nun die Kurve III für die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{z} , wenn man gemäß der obigen Gleichung die zu demselben Abszissenwerte \mathfrak{F} gehörigen Ordinaten addiert. Wie man daraus ersieht, wird die magnetische Charakteristik durch einen im Nebenschluß liegenden Luftzwischenraum ebenso verflacht wie in Abb. 174 durch einen in Hintereinanderschaltung liegenden Luftzwischenraum. Dagegen wird sie steiler als jene, da die gesamte Kraftlinienmenge durch den Nebenschluß vermehrt wird.

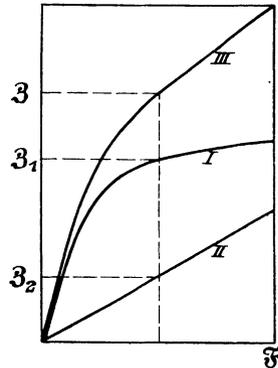


Abb. 176.

Ist der magnetische Widerstand der Eisenwege AB und CD nicht verschwindend klein gegenüber dem des Luftzwischenraumes BC , so ist die Kurve II keine gerade Linie, sondern gekrümmt und muß so wie die Kurve III in Abb. 174 ermittelt werden.

Ist der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades $AHG D$ vor der Verzweigungsstelle nicht vernachlässigbar, so ist das Verfahren zur Ermittlung der magnetischen Charakteristik nicht mehr so einfach, weil dann die Gl. 75 in Anwendung kommen muß.

Die Aufstellung der magnetischen Charakteristik ist von Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, die zu einer bestimmten MMK oder einer bestimmten Stromstärke gehörige Kraftlinienmenge oder Kraftliniendichte zu ermitteln. Direkt und für einen bestimmten Wert ist diese Aufgabe, wie wir schon in § 106 (3. Beispiel) ge-

des Luftzwischenraumes (§ 102). Nach der jetzigen Auffassung erscheint die Sheerung einfach als Verminderung des magnetischen Widerstandes des ganzen Kraftlinienbündels um den magnetischen Widerstand des Luftzwischenraumes.

sehen haben, unlösbar, weil man die Durchlässigkeit μ aus Abb. 123 nur dann entnehmen kann, wenn man die Kraftliniendichte bereits kennt. Man bestimmt daher die zu verschiedenen, beliebig gewählten Kraftliniendichten gehörigen Werte von \mathfrak{B} und trägt sie wie in Abb. 174 oder 176 in Abhängigkeit von der MMK \mathfrak{F} oder von den Amperewindungen iN oder von der Stromstärke i auf. Daraus entnimmt man dann die zu einem bestimmten Werte von \mathfrak{F} , iN oder i gehörige Ordinate \mathfrak{B} .

112. Praktische Anwendungen.

Wir haben bereits in § 106 (2, Beispiel) und in § 107 die Aufgabe gelöst, den zu einer gewissen Magnetisierung erforderlichen Strom zu berechnen. Diese Aufgabe spielt in der Praxis eine große Rolle, denn man erhält aus ihr die Größe des erforderlichen Erregerstromes bei Maschinen, Elektromagneten usw. Infolge der Häufigkeit dieser Aufgabe fertigt man sich Kurven an, welche die Beziehung zwischen Kraftliniendichte \mathfrak{B} und Amperewindungen für eine Längeneinheit in unmittelbar zu entnehmen gestatten. Abb. 177 enthält solche Kurven. Besteht z. B. der magnetische Kreis aus Stücken von verschiedener Abmessung ($l_1 S_1, l_2 S_2, l_3 S_3 \dots$), so ist nach § 106

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{F}}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} \\ &= \frac{1,257 iN}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} + \dots} \end{aligned}$$

Dann ist die gesamte Amperewindungszahl

$$iN = \frac{1}{1,257} \left(\frac{l_1 \mathfrak{B}}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2 \mathfrak{B}}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3 \mathfrak{B}}{\mu_3 S_3} + \dots \right).$$

Weil

$$\frac{\mathfrak{B}}{S_1} = \mathfrak{B}_1, \quad \frac{\mathfrak{B}}{S_2} = \mathfrak{B}_2 \text{ usw.},$$

so ist

$$iN = 0,8 \left(\frac{\mathfrak{B}_1 l_1}{\mu_1} + \frac{\mathfrak{B}_2 l_2}{\mu_2} + \frac{\mathfrak{B}_3 l_3}{\mu_3} + \dots \right). \quad \dots \quad (84)$$

Diese Gleichung kann zur Ausrechnung von iN benutzt werden, indem man die zu $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots$ gehörigen Werte $\mu_1, \mu_2 \dots$ aus Abb. 123 entnimmt.

Schneller kommt man mit Hilfe der Kurven in Abb. 177 zum Ziele. Denn es ist (nach Gl. 58)

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mu_1} = \mathfrak{H}_1, \quad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mu_2} = \mathfrak{H}_2 \text{ usw.}$$

und nach Gl. 51

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{1,257} = (in)_1, \quad \frac{\mathfrak{B}_2}{1,257} = (in)_2 \text{ usw.},$$

wobei in die auf eine Längeneinheit des betreffenden Stückes entfallenden Amperewindungen bedeutet. Der Index zeigt an, zu welchem Stück sie gehören.

Es ist also

$$iN = l_1 (in)_1 + l_2 (in)_2 + l_3 (in)_3 + \dots$$

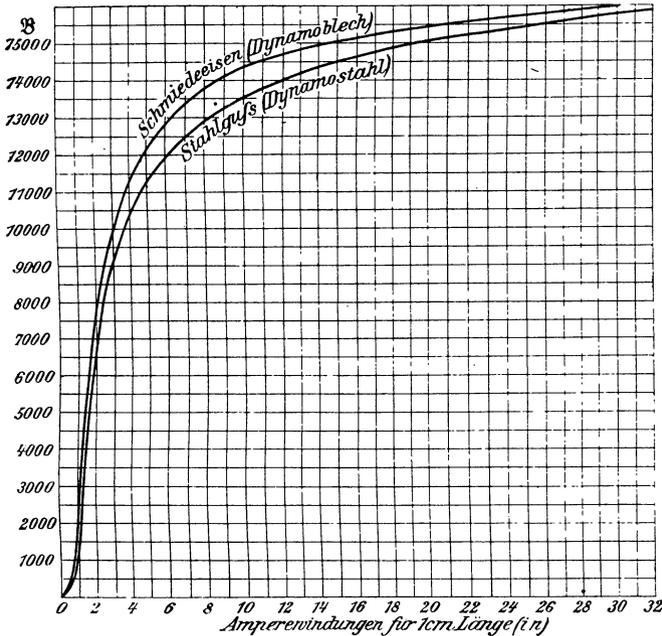


Abb. 177.

Diese Gleichung besagt, daß die gesamten Amperewindungen gleich sind der Summe der Produkte aus den Amperewindungen pro Längeneinheit und der Länge der betreffenden Stücke.

Man hat also bei Benutzung der Kurven in Abb. 177 folgendermaßen zu verfahren. Man bestimmt die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3 \dots$ für die einzelnen Stücke des magnetischen Kreises und entnimmt nun den Kurven die dazu gehörigen Amperewindungen pro Längeneinheit. Diese sind mit den Längen der betreffenden Stücke $l_1, l_2, l_3 \dots$ zu multiplizieren, so daß man die zur Magnetisierung jedes Stückes aufzuwendenden Amperewindungen erhält. Ihre Summe gibt die gesamten Amperewindungen.

Für Luft ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}$; daher nach Gl. 51

$$\mathfrak{B} = 1,26 \text{ in} \quad \text{oder} \\ \text{in} = 0,8 \mathfrak{B} \quad \dots \dots \dots (85)$$

Beispiel: Im Anker einer Gleichstrommaschine (Abb. 165) seien 5400000 Kraftlinien zur Erzeugung einer gewissen Spannung notwendig. Wieviel Amperewindungen müssen die Schenkel des Feldmagnetes erhalten? Beim Übergange der Kraftlinien vom Feldmagnet zum Anker findet eine Streuung statt, deren Koeffizient $v = 1,2$ sei. Es müssen also in dem Feldmagneten $5400000 \cdot 1,2 = 6480000$ Kraftlinien erzeugt werden. Die mittlere Länge der Kraftlinien im Feldmagnet sei $l_1 = 100$, sein Querschnitt $S_1 = 600 \text{ cm}^2$. Die Länge eines Luftzwischenraumes sei 1 cm; beide zusammen also: $l_2 = 2$; ihr Querschnitt $S_2 = 1200 \text{ cm}^2$. Die mittlere Länge der Kraftlinien im Anker sei $l_3 = 15 \text{ cm}$, der von den Kraftlinien durchsetzte Querschnitt $S_3 = 450 \text{ cm}^2$. Dann ist

$$\mathfrak{B}_1 = 6480000 : 600 = 10800 \\ \mathfrak{B}_2 = 5400000 : 1200 = 4500 \\ \mathfrak{B}_3 = 5400000 : 450 = 12000.$$

Nun haben wir aus den Kurven (Abb. 177), die zu diesen Kraftliniendichten gehörigen Amperewindungen pro Längeneinheit zu suchen und finden (Magnete aus Stahlguß, Anker aus Dynamoblech)

$$(in)_1 = 4,5 \quad (in)_3 = 4,8.$$

Für den Luftzwischenraum ist $(in)_2 = 0,8 \cdot 4500 = 3600$.

Wenn wir mit den dazu gehörenden Längen multiplizieren, erhalten wir die für die einzelnen Stücke gehörenden Längen Amperewindungen. Ihre Summe gibt die gesuchten Amperewindungen, mit denen der Feldmagnet zu versehen ist. Zur besseren Übersicht folgen die Zahlen in Zusammenstellung:

	l	S	\mathfrak{B}	(in)	$l(in)$
Feldmagnet	100	600	10800	4,5	450
Luftschicht	2	1200	4500	3600	7200
Anker	15	450	12000	4,8	72
					<hr/> 7722

Der Feldmagnet ist also mit rund 7720 Amperewindungen zu versehen. In welcher Weise man diese herstellt, durch 7720 Windungen mit 1 A Strom, oder durch 772 Windungen mit 10 A Strom, oder durch eine andere Kombination, die dasselbe Produkt gibt, dafür sind andere Erwägungen maßgebend; insbesondere die Spannung und die größte zulässige Temperaturerhöhung.

113. Resultierende magnetische Felder im Eisen.

Da die magnetische Durchlässigkeit μ im Eisen und in den übrigen ferromagnetischen Stoffen nicht konstant ist, ergibt sich das aus zwei Feldern resultierende Feld nicht mehr durch einfache Addition bei gleicher Richtung, oder durch Bildung des Kräfteparallelogrammes bei sich kreuzenden Richtungen wie in § 7. Wirken z. B. zwei MMKe von je 6 Amperewindungen für 1 cm, so ergibt jede für sich eine Kraftliniendichte von 12000 (Abb. 177, Stahlguß). Wirken beide zusammen in gleicher Richtung, so ist die resultierende MMK gleich 12 Amperewindungen für 1 cm, was nach Abb. 177 eine Kraftliniendichte von 14700, also bedeutend weniger

als das Doppelte ergibt. Es gilt zwar immer die Gleichung des magnetischen Kreises

$$3 = \frac{\mathfrak{F}}{w},$$

aber w ändert seinen Wert, weil es die von der Kraftliniendichte abhängige magnetische Durchlässigkeit μ enthält¹⁾. Kreuzen sich zwei Felder, so kann man in vielen Fällen auch nicht mehr den Wert der resultierenden magnetisierenden Kraft oder der resultierenden MMK angeben. So verläuft z. B. die magnetisierende Kraft einer einzelnen Spule (Abb. 163) im wesentlichen durch den Eisenring in Richtung der Mittellinie. Kommt eine zweite Spule von entgegengesetzter Richtung hinzu wie in Abb. 160, so weichen infolge der Stauung auch die magnetisierenden Kräfte seitwärts ab und verlaufen durch die Luft. Wirken aber beide im gleichen Sinne (Abb. 173), so verlaufen sie beide durch den Eisenring und die resultierende magnetisierende Kraft ist sehr angenähert gleich der Summe beider. In einfachen Fällen wie in Abb. 160 bis 172, wo man den Kraftlinienverlauf durch Feilspanbilder kennen gelernt hat, kann man den ungefähren Verlauf der magnetisierenden Kraft angeben und dann die erzeugte Kraftliniendichte mit Hilfe der Kurven in Abb. 123 oder 177 berechnen. Bei verwickeltem Kraftlinienverlauf in Eisen und Luft, wie z. B. bei elektrischen Maschinen mit Wendepolen, ist es unmöglich.

114. Der magnetische Kreis bei Dauermagneten.

Bei der Magnetisierung eines Körpers durch eine Stromspule oder durch ein äußeres magnetisches Feld kann die magnetisierende Kraft leicht berechnet oder experimentell ermittelt werden. Wie ist es aber bei einem Dauermagnet? Hier sitzt die magnetisierende Kraft im Magnet selbst: sie besteht aus der Koerzitivkraft, d. h. aus jenem Teil der äußeren magnetisierenden Kraft, die nach dem Verschwinden ihrer Ursache (elektrischer Strom oder fremdes magnetisches Feld) in dem Eisen zurückgeblieben ist. Die MMK ist dann (nach § 105) gleich dem Linienintegral der Koerzitivkraft über die Länge des Magneten. Die MMK ist also bei einem Dauermagnet konstant, solange nicht eben Veränderungen der Koerzitivkraft stattfinden wie z. B. durch Erhitzen oder durch Erschütterungen oder durch andere magnetische Felder. Ist der Magnet ein geschlossener Körper, so ist auch die Kraftlinienmenge konstant; ist er aber offen wie z. B. der Stabmagnet in Abb. 7 oder der Hufeisenmagnet in Abb. 8, so hängt die Kraftlinienmenge vom gesamten magnetischen

¹⁾ Auch bei elektrischen Stromkreisen gilt die Addition zweier Ströme ($i = i_1 + i_2$) nur unter der Voraussetzung, daß der Widerstand konstant ist, wie es in metallischen Leitern der Fall ist. Sie gilt nicht mehr beim Stromdurchgang durch gasförmige Leiter, wo der Widerstand von der Ionisierung und dadurch von der Stromstärke abhängt (§ 241).

Widerstand des Kraftlinienpfades ab. Wird also z. B. dem Hufeisenmagnet ein Eisenstück (Anker) genähert (Abb. 140), so wird die Kraftlinienmenge um so größer, je kleiner der Luftzwischenraum zwischen den Polen des Magnetes und dem Anker ist. Insbesondere nimmt die von den Polen ausgehende Kraftlinienmenge bedeutend zu (nach Messungen von Sahulka¹⁾ beispielsweise von 1060 auf 4100, wenn der Anker ganz anliegt), während die gesamte, vom ganzen Magnet ausgehende Kraftlinienmenge bedeutend weniger zunimmt (von 4700 auf 5550). Der Grund liegt darin, daß ein Teil der Kraftlinien, die bei offenem Magnet zwischen den Schenkeln verlaufen, beim Anlegen des Ankers durch diesen verlaufen, weil sie hier einen kleineren magnetischen Widerstand finden oder mit anderen Worten, weil die magnetische Streuung erheblich geringer ist, wenn der magnetische Kreis ganz aus Eisen besteht, als wenn er offen ist. Daß die gesamte Kraftlinienmenge beim Anlegen eines Ankers nur wenig (im obigen Beispiel um 18⁰/₀) zunimmt²⁾, hat seinen Grund darin, daß die an der Oberfläche auftretenden freien magnetischen Massen den Kraftlinien proportional sind (§ 6). Da nun der freie Magnetismus eine entmagnetisierende Kraft ausübt (§ 102), so hat die Zunahme der Kraftlinien eine Verminderung der MMK zur Folge. Daraus erklärt sich, warum durch öfteres Anziehen und Abreißen des Ankers eine bleibende Schwächung der Koerzitivkraft des Dauermagnetes bewirkt wird.

115. Anziehung zweier paralleler Flächen. Tragkraft eines Magnetes.

Für die mechanische Kraft F , die zwischen zwei parallelen, gleichmäßig mit magnetischer Masse von entgegengesetztem Vorzeichen belegten Flächen wirkt, gilt genau dasselbe, wie für zwei elektrisch geladene Flächen. Ist der Abstand der Flächen klein gegenüber dem kleinsten Ausmaß der Flächen, so ist das Feld bis in die Nähe der Ränder homogen. Unter dieser Voraussetzung gilt dieselbe Gleichung wie in § 27, nur daß an Stelle der Dielektrizitätskonstante die magnetische Durchlässigkeit μ einzusetzen ist. Da sich diese hier aber nicht auf den Eisenkern sondern auf den Luftraum zwischen den Polflächen bezieht, so ist hier $\mu = 1$. Mithin

$$F = \frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi} \text{ Dyn} = \frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi \cdot 980} \text{ Grammgewicht},$$

wobei S die Größe einer Endfläche bedeutet. Es ist zu beachten, daß in diesem Ausdruck der Abstand der beiden Flächen nicht

¹⁾ Sahulka, ETZ 1805, S. 118.

²⁾ Diese verhältnismäßig geringe Zunahme hat zu der irrthümlichen Meinung (z. B. S. Thompson: „Der Elektromagnet“, Halle 1894, S. 184) Anlaß gegeben, als sei nicht die Koerzitivkraft und daher auch die MMK, sondern die Kraftlinienmenge dasjenige, was bei einem Dauermagnet konstant ist.

vorkommt, sondern nur die Kraftliniendichte \mathfrak{B} . Diese ist aber bei gegebener magnetisierender Kraft von dem Abstand abhängig.

Bei einem Elektromagnet ist es zweckmäßig, die MMK oder die Stromstärke einzuführen. Weil

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{J}}{S} = \frac{\mathfrak{F}}{S w},$$

so ist
$$F = \frac{\mathfrak{F}^2}{24\,600 w^2 S} \text{ Grammgewicht.}$$

Ist N die gesamte Windungszahl der Bewicklung mit der Stromstärke i , so ist (nach § 105)

$$\mathfrak{F} = 1,26 i N$$

also

$$\mathfrak{F} = 0,0000642 \frac{(iN)^2}{w^2 S} \text{ Grammgewicht.}$$

Kann der magnetische Widerstand im Eisen gegenüber dem im Luftzwischenraum vernachlässigt werden, und ist der Luftzwischenraum d zwischen beiden Flächen klein gegenüber dem kleinsten Ausmaß derselben, so ist

$$w = \frac{d}{S}$$

und daher

$$F = 0,0000642 \frac{S}{d^2} (iN)^2 \text{ Grammgewicht.}$$

In diesem einfachen Falle ist also die Tragkraft proportional der Polfläche und dem Quadrate der Amperewindungen, aber verkehrt proportional dem Quadrate des Abstandes.

Sind die gegenüberstehenden Flächen nicht gleich groß, so kann näherungsweise für S das arithmetische Mittel eingesetzt werden.

Beispiel: Ein Elektromagnet von der Form wie in Abb. 156 sei mit 1000 Windungen bewickelt, die 2 Amp. Strom führen. Die Endflächen seien 8 cm², ihr Abstand 0,3 cm. Da zwei Anziehungsstellen vorhanden sind, so ist nach der letzten Gleichung

$$F = 2 \cdot 0,0000642 \frac{8}{0,3^2} 2000^2 = 47\,700 \text{ g} = 45,7 \text{ kg.}$$

Ist bei denselben Polflächen der Abstand 2 cm, so kann diese Formel nicht mehr zur Anwendung kommen, sondern nur die vorhergehende, und der magnetische Widerstand muß nach § 107 berechnet werden, wonach sich der äquivalente Querschnitt S des Kraftlinienbündels aus $S = s + kd$ ergibt. Hierin bedeutet s die Polfläche und für k findet man aus Abb. 152 den Wert 11,6. Also

$$S = 8 + 11,6 \cdot 2 = 31,2; \quad w = \frac{2}{31,3} = 0,064.$$

Mithin (angenähert)

$$F = 2 \cdot 0,0000642 \frac{2000^2}{0,064^2 \cdot 31,2} = 4000 \text{ g} = 4 \text{ kg.}$$

116. Die Arbeit bei magnetischer Anziehung.

Wird von einem Dauermagnet, z. B. dem Hufeisenmagnet in Abb. 140, ein Anker angezogen, so wird eine mechanische Arbeit geleistet, die für jedes Wegstückchen gleich dem Produkte aus dem Wegstückchen und der Kraft F an dieser Stelle ist. Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit kann diese nicht aus Nichts entstehen, sondern muß irgendwo herkommen. Da aber eine äußere Arbeitsquelle nicht vorhanden ist, muß sie aus dem magnetischen System selbst kommen. Nach § 97 ist die magnetische Arbeit in jeder Raumeinheit eines magnetisierten Stoffes gleich $\frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}$.

Ist die Durchlässigkeit μ im Eisen beispielsweise gleich 1000, so ist die in einer solchen Raumeinheit aufgespeicherte magnetische Arbeit 1000 mal kleiner als in einer Raumeinheit Luft. Treten also während der Anziehung des Ankers Kraftlinien in diesem ein, die früher durch die Luft verlaufen sind, so nimmt die gesamte magnetische Arbeit, die im magnetischen Felde aufgespeichert ist, um ein Beträchtliches ab, und zwar um so viel als während der Anziehung des Ankers mechanische Arbeit geleistet wird. Mit anderen Worten: während einer magnetischen Anziehung findet eine Umwandlung der im Luftfeld aufgespeicherten potentiellen magnetischen Arbeit in mechanische Arbeit (lebendige Kraft) statt. Wird der Anker wieder losgerissen und entfernt, so ist dazu eine mechanische Arbeit erforderlich, die zur neuerlichen Magnetisierung des Luftfeldes verwendet wird, sobald die Kraftlinien aus dem Eisen in Luft übertreten.

Diese Umwandlung findet aber wie alle Arbeitsumwandlungen nicht ohne Verlust durch Wärmeentwicklung statt. Und zwar findet bei der Magnetisierung des Ankers eine Wärmeumwandlung statt infolge der Hysterese und infolge der Wirbelströme, die im Eisen durch die ein- oder austretenden Kraftlinien induziert werden.

Bei einem Elektromagnet liegen die Verhältnisse ebenso, denn die Anziehung des Ankers findet erst statt, nachdem das magnetische Feld bereits vorhanden ist. Die magnetische Energie des ganzen Feldes im Eisen und in der Luft muß natürlich von der Stromquelle im Augenblick des Stromschlusses geleistet werden. Wird der Anker angezogen, so gilt dasselbe wie oben. Daneben wird aber infolge der in § 114 erwähnten Veränderung der gesamten Kraftlinienmenge ein vorübergehender Strom in der Wicklung induziert. Bei der Anziehung wirkt dieser Strom dem von der Stromquelle gelieferten entgegen; beim Abreißen des Ankers wirkt er im gleichen Sinne (Lenzsches Gesetz § 125). Beim Anziehen oder Abreißen eines Ankers bleibt also weder die Stromstärke noch die Kraftlinienmenge konstant. Da der Strom in seinem Leiter Stromwärme entwickelt, so kommt auch diese Arbeit noch in Betracht. Beim Abreißen vergrößert sie die gesamte Stromwärme, beim Anziehen vermindert sie sie.

Siebentes Kapitel.

Elektrodynamik.

117. Magnetische und elektrische Kraft zwischen zwei Strömen.

Der Versuch lehrt, daß elektrische Ströme magnetische Kräfte aufeinander ausüben. Parallele Stücke zweier Stromkreise ziehen sich an, wenn die Ströme gleiche Richtung haben, und stoßen sich ab, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Man erkennt diese

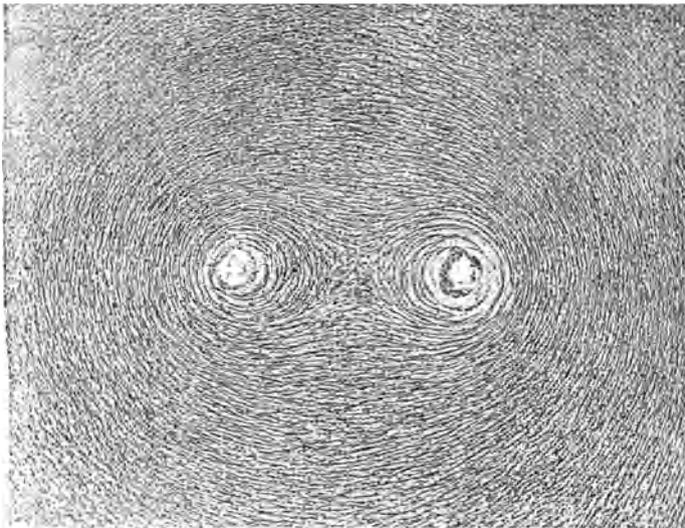


Abb. 178. Magnetisches Feld zweier linearer Ströme von gleicher Richtung.

Erfahrungstatsache auch aus der Gestalt des magnetischen Feldes, das man erhält, wenn man die beiden Leiter durch ein steifes Papier steckt und Eisenfeilspäne darauf streut. In nächster Nähe jedes Leiters sind die Kraftlinien in beiden Fällen nahezu Kreise, so wie bei einem einzelnen Leiter. Bei gleichgerichteten Strömen (Abb. 178)

schließen sich die entfernteren zu einer lemniskatenförmigen Figur und umfassen beide Leiter. Da die Kraftlinien (§ 4) wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen suchen, so erkennt man daraus das Bestreben der beiden Leiter, sich einander zu nähern. Man sieht ferner, daß es in der Mitte zwischen beiden Leitern eine Stelle gibt, wo die Feldstärke null ist, weil hier Kräfte von entgegengesetzter Richtung zusammentreffen. Haben aber die Ströme entgegengesetzte

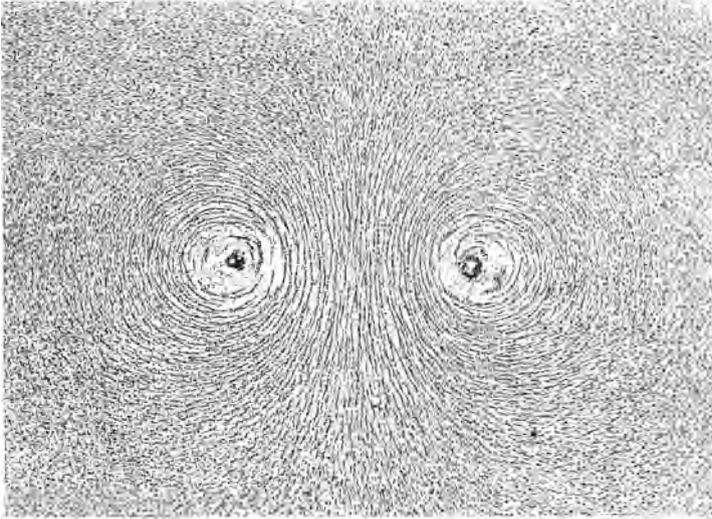


Abb. 179. Magnetisches Feld zweier linearer Ströme von entgegengesetzter Richtung.

Richtung (Abb. 179), so bestehen alle magnetischen Kraftlinien jedes Leiters für sich. Da sich die Kraftlinien untereinander abstoßen, so folgt daraus eine Abstoßung zwischen den beiden Leitern. In der Mitte ist die Feldstärke am größten, weil hier Kräfte von entgegengesetzter Richtung zusammentreffen.



Abb. 180.

Sind zwei Ströme gekreuzt, so suchen sie sich parallel zu stellen, und zwar so, daß sie gleiche Richtung haben; sie vollführen also die in Abb. 180 angedeutete Drehung.

Da jeder stromführende Leiter ein Stück eines geschlossenen Stromes ist, so folgt die magnetische Wirkung auch aus dem Satze, daß ein geschlossener Strom durch eine magnetische Platte von gleichem Umfang ersetzt werden kann (§ 81). Die Ampèresche Regel lehrt dann, daß parallele Stromkreise mit gleicher Stromrichtung die ungleichnamigen Flächen einander zuehren, also sich anziehen,

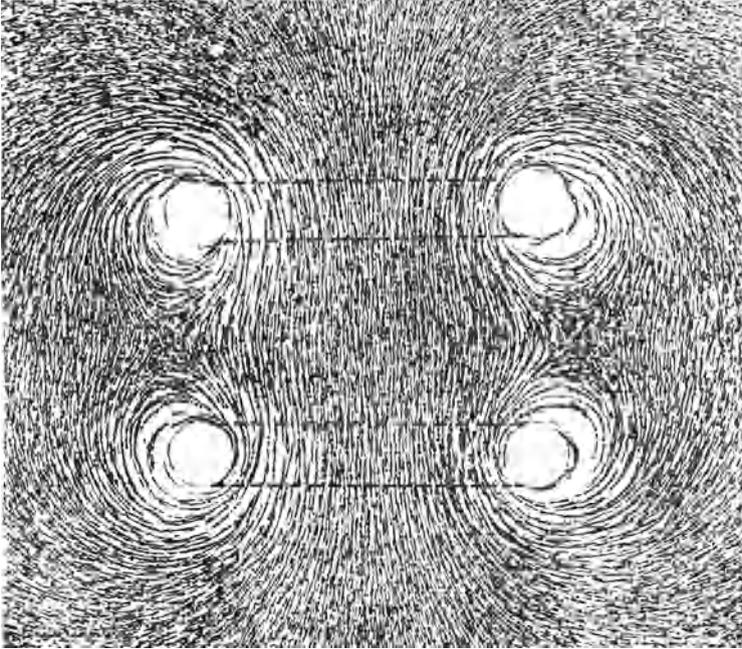


Abb. 181. Zwei Windungen mit gleicher Stromrichtung (Anziehung).

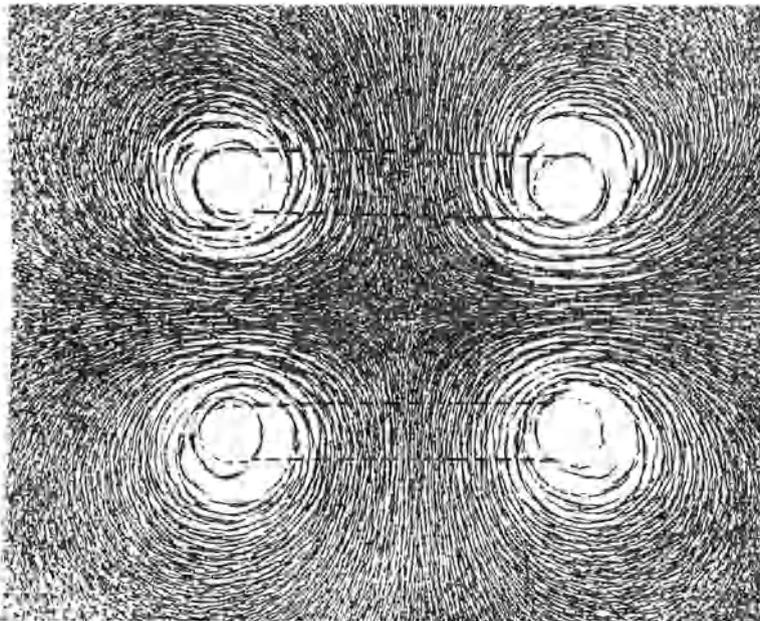


Abb. 182. Zwei Windungen mit entgegengesetzter Stromrichtung (Abstoßung).

und daß solche mit entgegengesetzter Stromrichtung sich abstoßen. Abb. 181 zeigt das magnetische Feld zweier Stromwindungen mit gleicher Stromrichtung, Abb. 182 mit entgegengesetzter Stromrichtung.

Die Kraft, mit der diese magnetische Anziehung oder Abstoßung stattfindet, ist bei sonst gleichen Verhältnissen proportional dem Produkte der beiden Stromstärken.

Außer dieser auf der Strömung der Elektrizität beruhenden magnetischen Kraft zwischen zwei stromführenden Leitern gibt es noch eine elektrische Kraft, wie immer zwischen zwei Körpern, die Elektrizität enthalten. Durch folgenden Versuch von Nicolajew kann man beide Kräfte zur Erscheinung bringen. An einem Blatt Pappe (Abb. 183) sind mittels vier dünnen Drähten zwei U-förmige, aus Stanniol ausgeschnittene Bügel leicht beweglich aufgehängt und in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise mit einer Stromquelle verbunden. In dem Stromkreis befindet sich noch ein Schalter S und ein Regulierwiderstand R . Ist der Schalter S offen, so besteht nur elektrische Anziehung zwischen den beiden Bügeln, weil sie entgegengesetzte Ladung haben, aber kein Strom fließt. Wird der Schalter geschlossen, so geht ein Strom durch die Bügel. Da seine Richtung in den beiden Bügeln entgegengesetzt ist, so muß eine abstoßende magnetische Kraft auftreten. Wird der Strom mittels des Regulierwiderstandes sehr schwach eingestellt, so bemerkt man immer noch eine Anziehung zwischen den beiden Bügeln, weil die elektrische Anziehung über die magnetische Abstoßung überwiegt. Wird der Strom allmählich verstärkt, so kommt man zu einem Wert, wo weder Anziehung noch Abstoßung bemerkbar ist, weil sich beide Kräfte das Gleichgewicht halten. Bei weiterer Verstärkung des Stromes überwiegt die magnetische Abstoßung über die elektrische Anziehung.

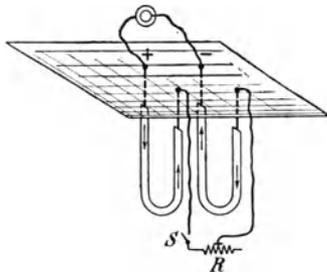


Abb. 183.

Außer den magnetischen Kraftlinien, die einen stromführenden Leiter umschließen, gibt es also noch elektrische Kraftlinien, die strahlenförmig vom Leiter ausgehen und auf einem anderen, zumeist dem entgegengesetzten Pol desselben Stromkreises enden. Die elektrischen Kraftlinien eines einzelnen linearen Leiters von kreisförmigem Querschnitt gehen radial symmetrisch von ihm aus, während die magnetischen Kraftlinien gemäß

Abb. 86 konzentrische Kreise sind. Die elektrischen und magnetischen Kraftlinien schneiden sich also senkrecht. Das gilt ganz allgemein für jede beliebige Anordnung. Die zu Abb. 179 gehörigen elektrischen Kraftlinien verlaufen so wie in Abb. 4. Die zu Abb. 178 gehörigen elektrischen Kraftlinien verlaufen ähnlich wie die magneti-

schen Kraftlinien in Abb. 5. Mit anderen Worten, die elektrischen Kraftlinien verlaufen in den magnetischen Niveauflächen, die magnetischen Kraftlinien verlaufen in den elektrischen Niveauflächen und zwar immer so, daß sich die elektrischen und magnetischen Kraftlinien senkrecht schneiden. Die gesamte magnetische und elektrische Kraft zwischen zwei Strömen bezeichnet man als elektromagnetische oder elektrodynamische Kraft und die Gesamtheit der magnetischen oder elektrischen Kraftlinien als elektromagnetisches Feld.

Bei starken Strömen niederer Spannung macht sich nur das magnetische Feld bemerkbar. In den folgenden Paragraphen dieses Kapitels wird nur dieses behandelt. Bei Strömen von höherer Spannung macht sich auch das elektrische Feld bemerkbar, indem es Entladungen und allenfalls Zerstörungen im Dielektrik (Isolierung) verursacht. Diesen Wirkungen ist das 15. Kapitel gewidmet.

118. Arbeitswert zweier Ströme. Koeffizient der gegenseitigen Induktion.

Aus dem Vorigen folgt, daß zwischen zwei geschlossenen Stromkreisen ein gewisser potentieller Arbeitswert¹⁾ bestehen muß, der dem Potential entspricht; d. h. ein Ausdruck, der die magnetische Kraft in irgend einer Richtung ergibt, wenn man den negativen Differentialquotienten nach dieser Richtung bildet.

Bedeutet dl_1 ein unendlich kleines Stückchen des einen Stromkreises mit der Stromstärke i_1 , dl_2 ein ebensolches des anderen mit der Stromstärke i_2 , r die Entfernung dieser beiden und γ ihren Neigungswinkel gegeneinander, so ist der Arbeitswert dA zwischen diesen beiden Stromelementen nach Ampère:

$$dA = -i_1 i_2 \frac{\cos \gamma}{r} dl_1 \cdot dl_2.$$

Daraus ergibt sich der Arbeitswert A zwischen den beiden ganzen, geschlossenen Stromkreisen durch Integration über beide Stromkreise, also

$$A = -i_1 i_2 \iint \frac{\cos \gamma}{r} dl_1 \cdot dl_2.$$

Setzt man
$$\iint \frac{\cos \gamma}{r} dl_1 \cdot dl_2 = M,$$

so ist

$$A = -i_1 i_2 M \dots \dots \dots (86)$$

¹⁾ Der Ausdruck Potential schlechtweg wäre in diesem Falle nicht ganz passend, da nach § 11 das Potential den Arbeitswert in bezug auf eine magnetische oder elektrische Masse Eins bedeutet. Hier handelt es sich aber um zwei Ströme und die magnetische Kraft zwischen ihnen. Die magnetische Kraft eines Stromes auf einen Punkt der Umgebung, der keinem Stromkreis angehört, wurde in § 78—88 behandelt.

Man nennt M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion oder gegenseitige Induktion schlechtweg, da er für die Induktion elektrischer Ströme (§ 146) maßgebend ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Arbeitswert zwischen einem geschlossenen Strome und einer magnetischen Masse m (§ 87), nämlich mit

$$A = oim = i_3,$$

so sieht man, daß $i_2 M$ die Anzahl der Kraftlinien ist, die von einem Stromkreise i_2 ausgehen und den anderen Stromkreis treffen. Umgekehrt ist $i_1 M$ die Anzahl der Kraftlinien, die von dem Stromkreis i_1 ausgehen und den anderen treffen. Also ist M die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Stromkreise mit der Stromstärke Eins ausgehen und mit einem anderen verkettet sind. Oder: Der Koeffizient M der gegenseitigen Induktion eines Stromkreises auf einen anderen ist gleich dem Verhältnis seiner mit dem anderen Stromkreis verketteten Kraftlinienmenge zu seiner Stromstärke.

Bestehen die beiden Stromkreise nicht aus je einer Windung, sondern aus N_1 bzw. N_2 Windungen, von denen jede sämtliche Kraftlinien umschließt, so ist (nach Gl. 50)

$$A = i_1 N_1 \delta = i_2 N_2 \delta = i_1 i_2 M$$

also

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} M &= \delta \frac{N_1}{i_2} \\ M &= \delta \frac{N_2}{i_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (87)$$

Wird aber die gesamte Kraftlinienmenge nicht von sämtlichen Windungen beider Spulen umschlossen, so kann nicht einfach mit der Windungszahl multipliziert werden, sondern die gegenseitige Induktion ist dann gleich der Summe der für jede einzelne Windung nach der obigen Definition berechneten Werte.

Die Kraftlinien entstehen gleichzeitig mit den Strömen i_1, i_2 und bleiben so lange unverändert bestehen, solange die Stromkreise und die Stromstärken unverändert bleiben. Dasselbe gilt für den Arbeitswert A . Er ist also nichts anderes als die magnetische Arbeit, die zur Erzeugung der beiden Stromkreisen gemeinsamen Kraftlinien, also zur Herstellung des gemeinsamen magnetischen Feldes notwendig ist; und er besteht so lange als potentielle Energie, solange alles unverändert bleibt. Verschwindet einer der Ströme, so verschwindet auch das gemeinsame magnetische Feld, und seine Energie setzt sich in elektrische Arbeit um, da beim Verschwinden eines Stromes ein Induktionsstrom entsteht.

Der Arbeitswert zweier Ströme, bzw. der Koeffizient der gegenseitigen Induktion läßt sich nur für einige einfache Fälle berechnen; meistens muß er experimentell bestimmt werden.

a) Die beiden Stromkreise bestehen aus übereinander oder nebeneinander sitzenden Spulen mit den Windungszahlen N_1 bzw. N_2 , zwischen denen keine magnetische Streuung besteht, d. h. sämtliche Windungen beider Spulen umschließen sämtliche Kraftlinien. Nach § 105 ist die Kraftlinienmenge der einen Spule bei der Stromstärke 1 (abs. Einh.) gleich $\frac{4\pi N_1}{w}$, wobei w den magnetischen Widerstand des ganzen Kraftlinienbündels bedeutet. Da die andere Spule N_2 Windungen hat, so ist nach dem obigen¹⁾

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2}{w}.$$

Ist l die Länge, S der Querschnitt des Kraftlinienbündels und μ die magnetische Durchlässigkeit des Mediums, so ist

$$w = \frac{l}{\mu S}$$

und daher

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2 \mu S}{l}.$$

b) Für zwei parallele Stromleiter, deren Länge l groß ist gegenüber ihrem Abstände a , ist näherungsweise:

$$M = 2l \left(\log \text{nat} \frac{2l}{a} - 1 \right) \approx 2l \log \text{nat} \frac{2l}{a};$$

dann ist nach § 11 die magnetische Kraft, die zwischen ihnen wirkt, näherungsweise:

$$F = - \frac{dM}{da} = + i_1 i_2 \frac{dM}{da} = - 2 i_1 i_2 \frac{l}{a}.$$

Haben i_1 und i_2 gleiche Richtung, so ist F negativ, die Kraft also eine anziehende; haben sie entgegengesetzte Richtung, so ist F positiv, also abstoßend.

Beispiel: Eine Fernleitung aus zwei parallelen Drähten von 1000 m Länge im gegenseitigen Abstand von 1 cm (zweiadriges Kabel)

$$M = 200\,000 \left(\log \text{nat} \frac{200\,000}{1} - 1 \right) = 200\,000 (12,2 - 1) = 2\,240\,000 \text{ abs. Einh.}$$

Da 10^9 abs. Einh. gleich 1 Henry sind (§ 299), so ist $M = 0,00224$ Henry.

Gehen 100 Ampere (= 10 abs. Einh.) in einem Draht hin, im anderen zurück, so ist die Kraft, mit der sich die Drähte anziehen,

$$F = 2 \cdot 10 \cdot 10 \frac{100\,000}{1} = 20\,000\,000 \text{ abs. Einh.}$$

¹⁾ Vgl. auch § 146, wo sich derselbe Ausdruck ergibt.

Da 980 abs, Einh. gleich einem Grammgewicht sind, so ist $F = 20400$ Grammgewicht auf der ganzen Länge; also für 1 m gleich 20,4 Grammgewicht.

c) Zwei kreisförmige Drähte mit den Krümmungsradien R und r in parallelen Ebenen, deren Abstand a ist (näherungsweise)

$$M = 4 \pi r \left[\log \text{nat} \frac{8r}{\sqrt{a^2 + (R-r)^2}} - 2 \right]$$

Weitere Formeln sind in Heydweiller „Elektrische Messungen“ (Leipzig 1892) zu finden.

119. Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst; Koeffizient der Selbstinduktion.

Da jeder Stromleiter eine gewisse Dicke besitzt, so kann man ihn als ein Bündel unendlich vieler, leitender Fäden betrachten, wovon jeder einen gewissen Bruchteil des ganzen Stromes führt. Es wirkt also unter ihnen eine anziehende Kraft, die den ganzen Leiter dünner zu machen sucht. Daher besteht auch ein Arbeitswert zwischen jedem dieser Stromfäden und allen übrigen. Dies ist der Arbeitswert des Stromes in bezug auf sich selbst. Er ist das Analogon bei der strömenden Elektrizität zu dem Selbstpotential bei der ruhenden Elektrizität (§ 16).

Ist der Draht nicht geradlinig, sondern etwa zu einer Spule gewickelt, so besteht außer der Kraftwirkung der Stromfäden untereinander noch eine solche zwischen jeder Windung und allen übrigen, und zwar ebenfalls eine anziehende, da die Stromrichtung in allen dieselbe ist. Die Windungen eines Solenoides suchen sich näher zu kommen.

Aus dem Gesagten erkennt man, daß zwischen diesem Arbeitswerte eines Stromkreises und dem gesamten zweier Stromkreise (§ 118) kein wesentlicher Unterschied besteht, und daß letzterer in ersteren übergeht, wenn man die zwei Stromkreise in einen zusammenfallen läßt. Doch muß man jetzt durch 2 dividieren, da aus zwei Stromkreisen einer geworden ist. Das Produkt $i_1 i_2$ geht über in i^2 . Wir erhalten also aus Gl. 86 für den Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst:

$$A = \frac{i^2 L}{2} \dots \dots \dots (88)$$

wenn wir jetzt statt M entsprechend der anderen Bedeutung L setzen und dieses den Koeffizienten der Selbstinduktion oder Selbstinduktion schlechtweg nennen. iL ist dann die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Strome i ausgehen. Mithin ist L die Anzahl der Kraftlinien, die von einem gestreckten Stromleiter oder einer einzelnen Windung mit der Stromstärke 1 ausgehen, oder: das Verhältnis seiner Kraftlinienmenge zu seiner Stromstärke.

Besteht der Stromkreis aus N Windungen, von denen jede sämtliche Kraftlinien umschließt, so folgt aus Gl. 87

$$L = \frac{N^2}{i} \dots \dots \dots (89)$$

Die Kraftlinien entstehen gleichzeitig mit dem Strome i und bleiben solange unverändert bestehen, als der Stromkreis und die Stromstärke unverändert bleiben. Dasselbe gilt für den Arbeitswert in bezug auf sich selbst. Er ist also nichts anderes als die magnetische Arbeit, die zur Erzeugung der eigenen Kraftlinien, also zur Herstellung des eigenen magnetischen Feldes notwendig ist. Er besteht so lange als potentielle Energie, solange alles unverändert bleibt. Verschwindet der Strom, so verschwindet auch sein magnetisches Feld, und die magnetische Arbeit A setzt sich in elektrische Arbeit um, da beim Verschwinden des Stromes ein Induktionsstrom im eigenen Kreise (Extrastrom § 187) entsteht.

120. Spezielle Fälle.

Nach dem Vorhergehenden erhalten wir offenbar die Koeffizienten der Selbstinduktion aus denen der gegenseitigen, wenn wir die beiden Stromkreise in einen zusammenfallen lassen.

a) Wir erhalten also aus § 118, a) für den Koeffizienten der Selbstinduktion einer Spule, deren sämtliche Kraftlinien von sämtlichen N Windungen umschlossen werden¹⁾

$$L = \frac{4 \pi N^2}{w} = \frac{4 \pi N^2 \mu S}{l}$$

b) Für einen geradlinigen Leiter in Luft, dessen Länge l sehr groß ist gegenüber seinem Radius r , und dessen Material die magnetische Durchlässigkeit μ hat, ist

$$L = 2 l \left(\log \text{nat} \frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4} \right).$$

Besteht der Leiter aus einem unmagnetischen Metall ($\mu = 1$), so ist

$$L = 2 l \left(\log \text{nat} \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right).$$

c) Zwei parallele Drähte im Abstände a , jeder von der Länge l und dem Radius r . Geht der Strom in einem derselben hin, im

¹⁾ Näherungsformeln für eisenlose Spulen, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, in *ETZ* 1917, S. 521 (Korndörfer).

anderen zurück (Stromschleife), so ist die Selbstinduktion jedes der beiden (vgl. § 164 und 165)

$$L = 2l \left(\log \text{nat} \frac{a}{r} + \frac{\mu}{4} \right) \cdot *$$

Die Selbstinduktion beider zusammen, also der Stromschleife, ist dann gleich dem Doppelten, also

$$L = 4l \left(\log \text{nat} \frac{a}{r} + \frac{\mu}{4} \right).$$

d) Konzentrisches Kabel (Abb. 36, S. 47). Gesamte Selbstinduktion der aus Außen- und Innenleiter bestehenden Stromschleife, wenn l die Länge des Kabels bedeutet:

$$L = l \left[2 \log \text{nat} \frac{r_3}{r_1} + 2 \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \log \text{nat} \frac{r_3}{r_2} - \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \right].$$

e) Ein kreisförmig gebogener Draht mit der Länge l , dem Krümmungsradius R und dem Durchmesser $2r$

$$L = 2l \left(0,58 + \log \text{nat} \frac{l}{2r\pi} - \frac{2r}{R} - \frac{r^3}{24R^2} - \dots \right).$$

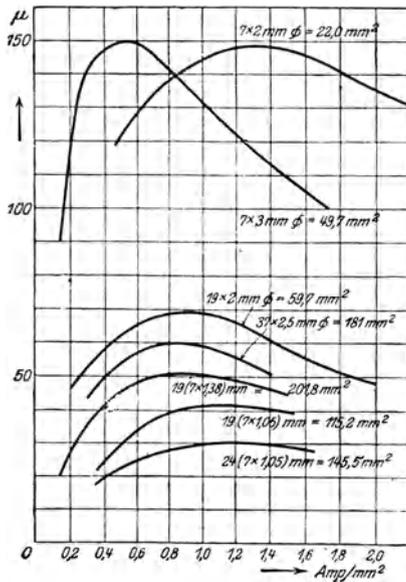


Abb. 184.

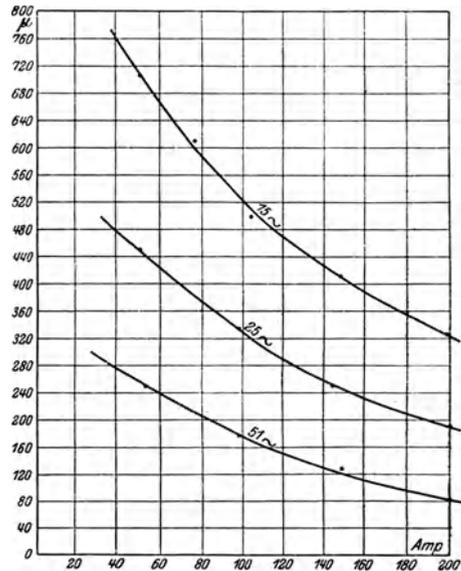


Abb. 185.

*) Dieselbe Formel gilt für jeden Draht eines symmetrischen Mehrphasensystems, wenn die übrigen Drähte zusammen die gemeinsame Rückleitung bilden. Über die Anwendung dieser Grundformel auf mehr als zwei Leiter, sowie auf unsymmetrische Drehstromleitungen vgl. J. Fischer-Hinnen, Elektr. und Maschinenb. 1918, S. 314.

Weitere Formeln sind in Heydweiller „Elektrische Messungen“ (Leipzig 1892) zu finden. Über den Einfluß der Hautwirkung vgl. § 169.

Werden alle Größen in cm eingesetzt, so erhält man L in absol. elektromagnetischen Einheiten. Dividiert man durch 10^9 , so erhält man Henry (§ 299).

Bei Drähten aus unmagnetischem Stoff ist $\mu = 1$. Bei Eisendrähten hängt μ von der Stärke und der Periodenzahl des Stromes ab, und diese Abhängigkeit läßt sich theoretisch nicht angeben. Abb. 184 zeigt die Werte von μ in Abhängigkeit von der Stromdichte für verschiedene Eisendrahtseile auf Grund von Messungen bei 50 Perioden¹⁾. Abb. 185 zeigt die Abhängigkeit des μ von der Stromstärke bei den Periodenzahlen 15, 25 und 51, woraus man sieht, daß μ stark abnimmt, wenn \sim wächst²⁾.

121. Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der gegenseitigen und der Selbstinduktion.

Aus der Grundgleichung für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zweier Spulen (§ 118) folgt, daß er um so größer ist, je kleiner der Abstand der beiden Stromkreise ist. Er erreicht also ein Maximum, wenn die beiden Stromkreise zusammenfallen, dann ist

$$M^2 = L_1 L_2 \dots \dots \dots (90)$$

Man sieht dies ohne weiteres bestätigt bei Spulen ohne magnetische Streuung, für die

$$L_1 = \frac{4 \pi N_1^2}{w}, \quad L_2 = \frac{4 \pi N_2^2}{w} \text{ ist.}$$

Ferner ist in diesem Falle

$$\frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{und} \quad \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Wenn diese Beziehung gelten soll, so müssen sämtliche Kraftlinien des einen Stromkreises alle Windungen des anderen durchsetzen. Man kann dies ziemlich angenähert verwirklichen, wenn die Windungen beider Stromkreise auf einen geschlossenen Eisenkern unmittelbar über- oder nebeneinander aufgewickelt sind. Die Kraftlinien beider Stromkreise verlaufen dann fast alle im Eisen. Sobald aber eine Streuung der Kraftlinien vorhanden ist, gilt diese Beziehung nicht mehr, sondern es ist dann $M^2 < L_1 L_2$. (Vgl. § 150.)

¹⁾ Die eingeschriebenen Zahlen bedeuten z. B.: $7 \times 2 = 7$ Drähte von 2 mm Durchmesser. $24 (7 \times 1,05) = 24$ Litzen, jede aus 7 Drähten von 1,05 Durchm. Man ersieht daraus, wie sehr μ abnimmt, wenn die Anzahl der Drähte zunimmt. ETZ 1915 S. 45.

²⁾ ETZ 1915 S. 186.

Beispiel. Ein Eisenring (Dynamoblech) von 100 cm Länge und 2 cm^2 Querschnitt ist mit 1000 Windungen bewickelt, die von $0,46 \text{ A}$ Strom durchflossen werden. Daher, sind die Amperewindungen auf der Längeneinheit 4,6. Dazu findet man aus Abb. 177 eine Kraftliniendichte von etwa 12000 und dazu aus Abb. 123 $\mu = 2000$.

Also ist die Selbstinduktion:

$$L = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1000^2 \cdot 2000 \cdot 2}{100} = 500\,000\,000 \text{ absolute Einheiten.}$$

Und da eine praktische Einheit (Henry) gleich 10^9 absolute Einheiten ist, so ist $L = 0,5$ Henry.

Wickelt man nun auf denselben Kern eine zweite Wicklung mit 100 Windungen, so ist unter der Voraussetzung, daß die magnetische Durchlässigkeit dieselbe geblieben ist,

$$L_2 = 0,005 \text{ Henry.}$$

Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion ist

$$M = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 2000 \cdot 2}{100} = 0,05 \text{ Henry.}$$

oder

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{0,5 \cdot 0,005} = 0,05 \text{ Henry.}$$

122. Die gesamte magnetische Arbeit zweier Stromkreise.

Haben wir zwei Stromkreise mit den Stromstärken i_1 und i_2 , mit den Selbstinduktionen L_1 bzw. L_2 und der gegenseitigen Induktion M , so repräsentiert zunächst jeder eine magnetische Arbeit entsprechend Gl. 88, und beide zusammen eine magnetische Arbeit entsprechend Gl. 86. Die gesamte magnetische Arbeit A , d. h. diejenige, die zur Herstellung des gesamten magnetischen Feldes beider Stromkreise nötig ist, ist also

$$A = \frac{i_1^2 L_1}{2} + \frac{i_2^2 L_2}{2} + i_1 i_2 M.$$

Das gilt unter allen Umständen, wie groß auch die magnetische Streuung ist, denn diese kommt in dem Werte für M zum Ausdruck. Je größer die Streuung ist, d. h. je kleiner die Anzahl der beiden Stromkreisen gemeinsamen Kraftlinien ist, desto kleiner ist M und desto kleiner die gesamte magnetische Arbeit. Besteht gar keine Wirkung zwischen beiden, d. h. ist die Streuung unendlich groß, so ist $M = 0$ und das dritte Glied in der obigen Summe verschwindet¹⁾.

¹⁾ Vgl. auch § 167.

Achtes Kapitel.

Elektrische Induktion.

123. Das Wesen der elektrischen Induktion.

Die Erzeugung einer Potentialdifferenz in irgendeinem Leiter durch Induktion findet immer dann statt, wenn dieser Leiter magnetische Kraftlinien schneidet¹⁾. Ist der Leiter geschlossen, so ist diese Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft die Ursache eines Stromes.

Dieses Gesetz gilt ohne jede Einschränkung; d. h. es ist gleichgültig, ob das Schneiden der Kraftlinien durch Bewegung des Leiters in einem ruhenden magnetischen Felde, oder durch Bewegung der Kraftlinien gegen einen ruhenden Leiter geschieht, und es ist ferner gleichgültig, ob die Kraftlinien von Magneten oder Strömen herrühren.

Es entsteht demnach eine Potentialdifferenz in folgenden Fällen:

1. Bei jeder Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Felde, wenn dabei Kraftlinien geschnitten werden (Dynamomaschinen).

2. Beim Entstehen oder Verschwinden eines magnetischen Feldes in der Nähe eines Leiters. Beim Entstehen desselben schießen die Kraftlinien gewissermaßen aus dem Magnete oder dem Stromleiter hinaus und erfüllen den umgebenden Raum. Dabei müssen sie die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter schneiden. Beim Verschwinden des magnetischen Feldes schlüpfen die Kraftlinien gewissermaßen wieder in das Eisen oder den Stromleiter zurück und schneiden dabei wieder die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter. (Transformatoren, Funkeninduktoren).

3. Bei jeder Änderung der Stärke eines magnetischen Feldes. Denn bei jeder Zunahme in der Stärke entstehen neue Kraftlinien, und bei der Abnahme verschwinden welche in der eben geschilderten Weise und schneiden dabei die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter.

¹⁾ Wie auf S. 4 betont wurde, sind die Kraftlinien nicht etwa wirkliche Fäden, sondern Krafrichtungen. Daher ist die Ausdrucksweise vom „Schneiden der Kraftlinien“ nur eine bildliche, aber wegen ihrer Anschaulichkeit sehr nützliche.

Aus all dem folgt, daß die elektromotorische Kraft, bzw. der induzierte Strom nur solange dauert, als die Bewegung oder Veränderung dauert.

124. Größe der induzierten elektromotorischen Kraft.

Wir wissen aus § 76 u. f., daß zwischen einem Stromleiter, der einen Strom J führt, und einem Magnet Kräfte bestehen, die eine Bewegung des einen oder des anderen verursachen können. Findet eine solche Bewegung wirklich statt, wie bei den in § 77 gegebenen Beispielen, so wird dabei auch Arbeit (mindestens zur Überwindung der Reibung) geleistet. Diese kann unmöglich aus nichts entstehen, sondern muß auf Kosten einer anderen Arbeitsform geleistet werden. Das ist in diesem Falle der elektrische Strom, dessen sekundliche Arbeit (Leistung EJ , wenn E die EMK der Stromquelle bedeutet) um einen ebenso großen Betrag vermindert wird, als die mechanische Arbeit der Bewegung beträgt. Diese Verminderung erscheint als Schwächung des Stromes gegenüber dem bei Stillstand¹⁾ durch einen während der Bewegung induzierten Strom von entgegengesetzter Richtung. Natürlich muß die gesamte Arbeit von der Stromquelle hergegeben werden.

Ist ursprünglich kein Strom vorhanden, und wird dieselbe Bewegung durch äußere mechanische Kräfte durchgeführt, so wird ein Strom induziert, dessen Arbeit gleich der mechanischen Arbeit der Bewegung ist.

Hat der induzierte Strom während eines Zeitelementes dt die EMK e und die Stromstärke i , so ist seine elektrische Arbeit $e \cdot i \cdot dt$. Die mechanische Arbeit, die zur Durchführung der Bewegung während derselben Zeit notwendig war, ist $\oint \cdot i \cdot dl \cdot ds$, weil $\oint \cdot i \cdot dl$ die Kraft zwischen dem Felde \oint und dem Stromelemente dl ist (wenn die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien erfolgt; § 78), und wenn ds das Wegstückchen ist, das während der Zeit dt zurückgelegt wurde.

Diese Arbeiten sind nach dem Satze von der Erhaltung der Arbeit einander gleich; also $e \cdot i \cdot dt = \oint \cdot i \cdot dl \cdot ds$.

Demnach ist die induzierte elektromotorische Kraft

$$e = \oint \cdot dl \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Oder da $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit der Bewegung ist, so folgt

$$e = \oint \cdot v \cdot dl \dots \dots \dots (90)$$

¹⁾ Gegenüber dem sogenannten „Kurzschlußstrom“ bei Stillstand. In der Elektrotechnik pflegt man nicht unmittelbar die Verminderung des Stromes zu betrachten, sondern die infolge der Drehung induzierte gegen elektromotorische Kraft, welche der EMK E der Stromquelle entgegengesetzt ist, so daß die gesamte EMK gleich $E - e$ ist, woraus eine entsprechende Verminderung des Stromes folgt.

d. h. die induzierte EMK ist gleich dem Produkte aus der Feldstärke, der Geschwindigkeit und der Länge des Leiters, wenn die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien erfolgt.

Schließt das Leiterstückchen dl mit der Richtung der Kraftlinien einen Winkel α ein (Abb. 103), und erfolgt die Bewegung nicht senkrecht zur Richtung der Kraftlinien, sondern in einer um den Winkel β abweichenden Richtung OR , so ist

$$e = \S \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot dl \dots \dots \dots (91)$$

Dieser Wert ist am größten, wenn $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$ ist, also wenn das Leiterelement senkrecht zur Richtung der Kraftlinien ist und auch senkrecht zu ihnen bewegt wird. Das ist der zuerst angenommene Fall.

Ist aber $\alpha = 0^\circ$, oder $\beta = 90^\circ$, so ist $e = 0$; d. h. es findet keine Induktion statt, wenn das Leiterstückchen ds in der Richtung der Kraftlinien liegt, oder wenn die Bewegung in der Richtung der Kraftlinien geschieht.

Beispiel: Für den Raum eines Laboratoriums ist das magnetische Feld der Erde homogen. Im mittleren Europa ist die Feldstärke $\S = 0,45$ abs. Einh. (ungefähr), d. h. soviel Kraftlinien treffen auf die zu ihrer Richtung senkrechte Flächeneinheit. Wird ein 100 cm langer geradliniger Draht in 1 Sekunde 100 cm weit bewegt, und zwar so, daß er die Kraftlinien senkrecht schneidet, so erhalten die Enden des Drahtes nach Gl. 90 eine Potentialdifferenz $e = 0,45 \cdot 100 \cdot 100 = 4500$ abs. Einh., und weil 10^9 abs. Einh. = 1 Volt sind, so ist $e = 0,000045$ Volt.

Man kann das Induktionsgesetz auch in andere Formen bringen. Da $ds \cdot dl$ die von dem Elemente ds während der Fortbewegung um das Stück dl bestrichene Fläche ist, und weil ferner \S die Anzahl der Kraftlinien ist, die auf eine zur Richtung der Kraftlinien senkrechte Flächeneinheit treffen (§ 6), so ist

$$\S \cdot ds \cdot dl = d\zeta$$

beziehungsweise

$$\S \cdot ds \cdot dl \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta = d\zeta,$$

wobei $d\zeta$ die Anzahl der Kraftlinien bedeutet, die während dieser Bewegung von dem Elemente ds geschnitten wurden. Also

$$e = \frac{d\zeta}{dt},$$

das heißt: die induzierte EMK ist gleich den in der Zeiteinheit von dem Leiter senkrecht geschnittenen Kraftlinien.

Handelt es sich um einen Leiter, der eine geschlossene Figur bildet, was man in der Elektrotechnik als eine Windung bezeichnet, so läßt sich dieses Gesetz noch in anderer Weise aussprechen. Ist ζ die Kraftlinienmenge, die von der Windung umschlossen wird, und wird ein Stück dl derselben irgendwie bewegt, so nimmt ζ um ebensoviel Kraftlinien zu oder ab, als dieses Leiterstück bei

der Bewegung schneidet, also nach dem vorigen um $d\mathfrak{z}$. Mithin ist $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ nichts anderes als die Änderung der Kraftlinienmenge während der Zeit dt . Demnach kann die letzte Gleichung so ausgedrückt werden: die induzierte EMK ist gleich der Änderung der von einer Windung umschlossenen Kraftlinienmenge.

Wird die Kraftlinienmenge \mathfrak{z} nicht von einer, sondern von N hintereinandergeschalteten Windungen umschlossen, so ist die induzierte EMK

$$e = N \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

125. Die Richtung der induzierten EMK. Die Gesetze von Lenz und Fleming.

Im vorigen Paragraph wurde schon darauf hingewiesen, daß bei einer durch elektromagnetische Kräfte eingeleiteten Bewegung die induzierte EMK eine solche Richtung hat, daß sie den Strom schwächt. Wenn aber durch äußere Kräfte eine Bewegung gegen die elektromagnetischen Kräfte durchgeführt wird, so leisten jene eine Arbeit, die der des bestehenden Stromes zugute kommt; d. h. die induzierte EMK hat jetzt dieselbe Richtung wie der Strom. In beiden Fällen sucht die induzierte EMK, bzw. der induzierte Strom die Bewegung, durch die er zustande kommt, zu hindern. Wir müssen daher, wenn es nicht bloß auf den absoluten Wert der induzierten EMK, sondern auch auf ihre Richtung in bezug auf einen schon bestehenden Strom oder auf die Richtung des induzierenden Feldes ankommt, den mathematischen Ausdruck für die induzierte EMK mit negativem Vorzeichen versehen. Die letzte Gleichung lautet dann

$$e = - N \frac{d\mathfrak{z}}{dt}. \quad \dots \dots \dots (92)$$

Dieses Gesetz muß natürlich auch auf die Wechselwirkung zweier Ströme anwendbar sein. Haben wir z. B. zwei parallele gleichgerichtete Ströme, so ziehen sie sich an. Geschieht diese Bewegung wirklich, so werden Ströme induziert, die sie zu hindern suchen, also Ströme von entgegengesetzter Richtung wie die bestehenden. Entfernt man sie aber voneinander, so muß man die anziehende Kraft überwinden; dabei werden Ströme von derselben Richtung wie die bestehenden induziert, weil dadurch die zu überwindende Anziehung verstärkt wird.

Entfernt man zwei geschlossene Stromkreise, von denen nur einer Strom führt, voneinander, so wird in dem vorher stromlosen ein gleichgerichteter Strom induziert; nähert man sie, so hat der induzierte Strom entgegengesetzte Richtung wie der bestehende.

Dieses Gesetz, wonach die induzierte EMK immer eine solche

Richtung hat, daß sie die Bewegung oder Veränderung, durch die sie zustande kommt, zu hindern sucht, wurde von Lenz aufgestellt und führt daher seinen Namen. Dabei entspricht das Verschwinden eines magnetischen Feldes oder das Unterbrechen eines Stromes einem Entfernen bis ins Unendliche, das Entstehen hingegen einer Annäherung aus dem Unendlichen.

Fleming hat eine Regel angegeben, die aus der Richtung der Kraftlinien und der Bewegung die Richtung der induzierten EMK zu bestimmen gestattet. Sie lautet:

Hält man die drei ersten Finger der rechten Hand (Abb. 186) so, daß sie drei zueinander senkrechte Richtungen andeuten, und zeigt der Daumen in die Richtung der Bewegung v , und der Zeigefinger in die Richtung der Kraftlinien Z , so hat die induzierte EMK die Richtung des Mittelfingers.

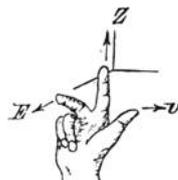


Abb. 186.

Bequemer ist folgende Fassung dieser Regel:

Man halte die flache rechte Hand so, daß die Kraftlinien auf die innere Handfläche senkrecht auftreffen, und der Daumen in der Bewegungsrichtung zeigt, dann zeigen die Fingerspitzen die Richtung der induzierten EMK an.

Das Gesetz von Lenz läßt sich natürlich auch auf die Induktion im eigenen Stromkreise anwenden. Wird ein Strom vermindert oder ganz unterbrochen, so entsteht in demselben Stromkreise ein anderer Strom (Extrastrom § 187), der die Verminderung oder Unterbrechung zu hindern sucht, also gleiche Richtung hat. Wird der Strom geschlossen oder ein schon bestehender verstärkt, so hat der Extrastrom entgegengesetzte Richtung, weil er das Zustandekommen des Stromes oder seine Verstärkung zu verhindern sucht.

Das muß natürlich auch mit dem mathematischen Grundgesetz (Gl. 92) in Übereinstimmung stehen, wovon man sich durch folgende Überlegung leicht überzeugt. Wenn z. B. ein Strom zunimmt, so wächst auch sein magnetisches Feld, daher ist seine Änderung $\frac{d\mathfrak{H}}{dt}$ positiv. Da aber die Gl. 92 ein negatives Vorzeichen hat, so ist e negativ, d. h. beim Zunehmen eines Stromes wird eine EMK induziert, die ihm entgegenwirkt. Nimmt ein Strom ab, so ist die Änderung seines Feldes $\frac{d\mathfrak{H}}{dt}$ negativ und e positiv, d. h. die induzierte EMK hat dieselbe Richtung wie der Strom.

Bei der Bestimmung der Größe der induzierten EMK sind wir ausgegangen von dem Fall, wo in dem Stromkreise schon eine EMK E und ein Strom J vorhanden war (§ 124). Bezeichnen wir die induzierte EMK mit e , so kommt diese mit zu E hinzu. Es ergibt sich dann auch eine andere Stromstärke, die wir mit i bezeichnen. Nach dem Ohmschen Gesetze ist

$$i = \frac{E + e}{w}$$

oder

$$E = wi - e. \quad \dots \quad (98)$$

Setzt man Gl. 92 ein, so ist

$$E = wi + N \frac{d\delta}{dt}. \quad \dots \quad (94)$$

Das ist die Spannungsgleichung für irgend einen geschlossenen Stromkreis, in dem nebst einer ursprünglichen EMK E eine induzierte EMK e auftritt.

126. Richtungswechsel der induzierten EMK. Wechselstrom- und Gleichstrommaschine.

Aus Gl. 90 geht hervor, daß die Richtung der induzierten EMK von der Richtung der Kraftlinien und von der Bewegungsrichtung abhängt. Wenn daher eine von diesen beiden sich ändert, geht die Richtung der induzierten EMK in die entgegengesetzte über; wenn aber beide gleichzeitig sich ändern, findet kein Richtungswechsel statt.

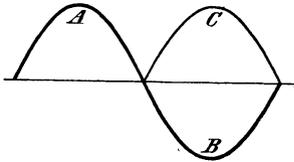


Abb. 187.

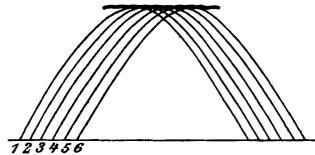


Abb. 188.

Man erkennt daraus, daß durch Drehung einer Spule ohne weitere Hilfsmittel nur Wechselstrom erzeugt werden kann (Wechselstrommaschine). Soll daraus ein gleichgerichteter Strom gemacht werden, so müssen die Enden der Spule zu einem Kommutator geführt werden, durch den die Richtung des Stromes im äußeren Teile des Stromkreises gerade in dem Augenblick umgekehrt wird, wo die induzierte EMK durch Null geht. Während also in der rotierenden Spule ein Wechselstrom AB (Abb. 187) besteht, verläuft im äußeren Teile des Stromkreises ein gleichgerichteter, pulsierender Strom AC . Wie man sieht, ist dieser Strom nicht gleichartig mit dem Strom, der durch eine galvanische Zelle oder durch einen Akkumulator erzeugt wird. Um einen solchen zu erhalten, muß man möglichst viele Spulen anwenden, die auf einen rotierenden Körper radial angeordnet werden, so daß in kurzen Zeiträumen aufeinanderfolgende Wechselströme (1, 2, 3 . . . in Abb. 188) erzeugt werden. Der Kommutator ist so einzurichten, daß von jedem

dieser Wechselströme nur der mittelste Teil (Scheitelwert) in den äußeren Stromkreis geleitet wird. In diesem verläuft dann ein Strom, der durch die starkgezeichnete Linie in Abb. 188 dargestellt ist. Der von einer Gleichstrommaschine gelieferte Strom ist also streng genommen kein konstanter, sondern ein schwach pulsierender. Betrachten wir z. B. ein Drahtrechteck (eine Windung), das um seine Achse O (Abb. 189) in dem von den Polen NS herrührenden magnetischen Felde mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wird. Die wagrechten Linien mit den Pfeilen geben die Richtung der Kraftlinien an. Wenden wir darauf das Grundgesetz (§ 124) an, so erkennen wir, daß Induktion nur in den beiden Längsseiten des Rechteckes stattfindet, da die kurzen Seiten während der Drehung von den Kraftlinien nicht geschnitten werden. Aus dem Gesetz von Fleming erkennen wir, daß bei einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers in den beiden Längsseiten entgegengesetzt gerichtete EMKe (in bezug auf den Raum) induziert werden, die aber in bezug auf

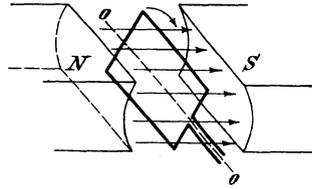


Abb. 189.

das geschlossene Rechteck in demselben Sinne wirken, also sich addieren. Diese Richtung bleibt während einer halben Drehung bestehen. Während der nächsten halben Drehung aber bewegt sich jene Seite, die vorher von oben nach unten ging, von unten nach oben. Da die Richtung der Kraftlinien ungeändert geblieben ist, muß die induzierte EMK während dieses Überganges ihre Richtung ändern.

Geht man von der anderen Form des Induktionsgesetzes aus (Gl. 92), wonach die EMK gleich ist der Änderung der Kraftlinien, die von der Windung umschlossen werden, so muß ein Richtungswechsel dort eintreten, wo die Änderung der Kraftlinienzahl $\frac{d\lambda}{dt}$ von positiven zu negativen Werten übergeht, also Null ist. Das ist der Fall, wenn die Windung die größtmögliche Kraftlinienmenge umschließt, d. h. wenn sie senkrecht zur Kraftlinienrichtung steht.

Man erhält also durch Drehung einer Windung oder einer Spule eine EMK, die ihre Richtung während einer ganzen Umdrehung zweimal ändert, und zwar gerade in jenen Augenblicken, wo die Windung die größtmögliche Kraftlinienmenge umschließt. Dagegen ist die EMK in jenen Augenblicken am größten, wo die Windung keine Kraftlinien umschließt, weil da die Änderung der Kraftlinienmenge am größten ist, oder von jeder Längsseite der Windung die meisten Kraftlinien in der Zeiteinheit geschnitten werden. Es entsteht also an den Enden der Windung eine Wechselspannung, und wenn der Stromkreis geschlossen wird, ein Wechselstrom.

127. Unipolare Induktion.

Die Induzierung einer EMK bzw. eines Stromes (bei geschlossenem Stromkreis) ist die umgekehrte Erscheinung wie die Bewegung eines Stromleiters oder Magnetes durch magnetische Kraft. Sie tritt immer ein, wenn ein Stromleiter oder Magnet entgegen jener Richtung bewegt wird, welche ihm durch die magnetische Kraft gewiesen wird. So wird bei der in Abb. 89 dargestellten Vorrichtung ein Strom induziert, wenn der zylindrische Magnet ns entgegen der Richtung gedreht wird, in welcher er von dem durch Pfeile bezeichneten Strom angetrieben wird. Da hier nur ein Pol des Magnetes innerhalb der Stromschleife LKQ wirken darf (wenn beide wirken, heben sich die induzierten EMKe gegenseitig auf), so bezeichnet man diese Induktion als unipolare. Da die induzierte EMK sehr klein ist, so kann der aus ihr entstehende Strom nur festgestellt werden, wenn die Stromquelle Q durch ein Galvanometer ersetzt wird.

Hält man das in § 123 ausgesprochene Grundgesetz fest, daß Induktion stattfindet, wenn Kraftlinien von einem Leiter geschnitten werden, so muß man annehmen, daß sich die vom Magnet ausgehenden Kraftlinien mit dem Magnet mitdrehen¹⁾.

Hierher gehört auch die als Faradaysche Scheibe bekannte Vorrichtung, die aus einer Kupferscheibe und einem Magnet besteht, dessen Kraftlinien die Scheibe durchsetzen. Wird die Scheibe gedreht, so dreht sich der Magnet in gleicher Richtung mit, weil seine Kraftlinien die Ränder der Scheibe schneiden. Hält man den Magnet fest, während die Scheibe gedreht wird, so kann man einen Strom zwischen Achse und Rand der Scheibe abnehmen.

Wird der Strom nicht abgeleitet, so entstehen in der Scheibe in sich geschlossene Ströme, welche radial bis zum Rand der Scheibe und seitwärts wieder zur Achse zurück verlaufen (vgl. Abb. 258; die Induzierung durch einen Wechselstrommagnet in einer ruhenden Scheibe findet in ähnlicher Weise statt). Da sich der induzierte Strom ganz in Wärme umsetzt, wird diese Vorrichtung zur Dämpfung von Schwingungen in Meßinstrumenten (§ 265; 2) und als gegenwirkende Kraft in Elektrizitätszählern benützt.

Wird die Scheibe oder der Magnet gedreht, während der andere Teil frei ist, so daß er sich mitdrehen kann, so hat man eine elektromagnetische Kupplung, wobei die Kupplung aus den

¹⁾ Dieser Apparat ist die Hauptstütze für die Annahme, daß die Kraftlinien nicht im Raume feststehen, sondern sich mitdrehen (vgl. die Anmerkung auf S. 4 und 143). Zwar kann man die Drehung des Magnetes durch den Strom, und umgekehrt die Induzierung eines Stromes durch Drehung des Magnetes auch unter der Annahme feststehender Kraftlinien erklären (S. Valentin „Die elektromagnetische Rotation und unipolare Induktion“; Karlsruhe 1904 bei G. Braun), aber nur unter recht gezwungenen Annahmen, denen gegenüber die Annahme, daß sich die Kraftlinien mitdrehen, erheblich einfacher ist.

Kraftlinien besteht, welche die Scheibe durchsetzen. Wird die Bewegung dieser Kraftlinien nicht durch Drehung eines Magnetes bewirkt, sondern durch geeignete Anordnung feststehender Spulen, die von Wechselströmen verschiedener Phase durchflossen werden, so erhält man einen Drehfeldmotor (§ 222).

Die unipolare Induktion hat den Vorteil, daß ein konstanter gleichgerichteter Strom entsteht, während bei der Drehung einer Schleife oder Spule in einem magnetischen Felde ein Wechselstrom entsteht (§ 126), der nur mit Hilfe eines Kommutators in einen gleichgerichteten Strom umgewandelt werden kann. Trotz diesem Vorteil ist die unipolare Induktion für elektrische Maschinen ungeeignet, weil die Hintereinanderschaltung mehrerer Leiter (Windungen) nicht ausführbar ist.

Neuntes Kapitel.

Der einfache Wechselstrom.

128. Die induzierte EMK als einfache periodische Funktion.

Wir haben in § 126 gesehen, daß bei der Drehung eines Drahtrechteckes in einem homogenen Felde eine EMK induziert wird, die während jeder ganzen Umdrehung zweimal das Vorzeichen wechselt. Ist der Stromkreis geschlossen, so muß auch der entstehende Strom zweimal sein Vorzeichen wechseln. Es ist nun unsere Aufgabe, die Gesetze eines solchen Wechselstromes aufzustellen. Wir gehen dabei von dem einfachsten Fall aus, wo nämlich in dem Stromkreise keine andere als die induzierte EMK vorhanden ist.

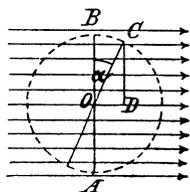


Abb. 190.

Abb. 190 stellt einen Querschnitt durch Abb. 189 senkrecht zur Drehungsachse O dar. AB ist der Querschnitt der um diese Achse gedrehten Stromfläche. Die wagrechten Linien mit den Pfeilen bedeuten die Kraftlinien des homogenen Feldes. Bei der Stellung AB umschließt der rechteckige Stromleiter die größte Kraft-

linienmenge, die wir mit \mathfrak{z} bezeichnen. Ist das Rechteck um den Winkel α gedreht, so daß es die Stellung OC hat, so ist die Kraftlinienmenge, die jetzt von ihm umschlossen wird:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cos \alpha.$$

Das gilt für jeden beliebigen Wert des Winkels α .

Die bei der Drehung induzierte EMK ist nach Gl. 92

$$e = -N \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -N \frac{d(\mathfrak{z} \cos \alpha)}{dt} = N \mathfrak{z} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

Geschieht die Drehung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, so ist α proportional der Zeit t , also

$$\alpha = \omega t.$$

Daraus folgt $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$.

Mithin ist ω die Winkelgeschwindigkeit. Und es ergibt sich weiter

$$e = \omega N \mathfrak{z} \sin \alpha \dots \dots \dots (95)$$

Setzt man

$$\omega N \mathfrak{z} = \mathfrak{E} \dots \dots \dots (96)$$

so ist

$$e = \mathfrak{E} \sin \alpha = \mathfrak{E} \sin \omega t$$

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ oder für } t = \frac{\pi}{2\omega} \text{ ist } e = \mathfrak{E};$$

\mathfrak{E} ist also der größte Wert, den die EMK erreichen kann. Man bezeichnet ihn als Scheitelwert der EMK, weil er dem Scheitelpunkt der als Kurve aufgezeichneten EMK entspricht. Macht man den Radius OC des Kreises in Abb. 190 gleich \mathfrak{E} , so ist

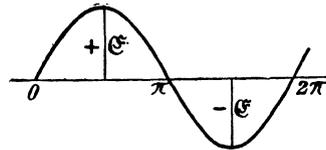


Abb. 191.

$$OD = \mathfrak{E} \sin \alpha = e.$$

Die Strecke OD stellt also den jeweiligen Wert von e vor, während DC den dazugehörigen Wert von \mathfrak{z} darstellt. Läßt man OB eine ganze Umdrehung ausführen und trägt die Größe des Drehungswinkels auf der Abszissenachse, die entsprechenden Werte $OD = e$ als Ordinaten (Abb. 191) auf, so erhält man eine Sinuslinie als graphische Darstellung der EMK während einer ganzen Umdrehung, entsprechend der Gl. 95. Dabei wird zweimal

$e = 0$, nämlich für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $e = \mathfrak{E}$; für

$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ist $e = -\mathfrak{E}$.

Ist eine ganze Drehung um $\alpha = 2\pi$ vollendet, und setzt man sie dann noch weiter fort, so wiederholt sich alles. Zwischen 0 und 2π liegt also eine ganze Periode. Die Zeit, die dazu notwendig ist, erhält man aus $2\pi = \omega t$. Man nennt sie die Dauer einer Periode oder Schwingungsdauer und bezeichnet sie mit τ ; es ist also:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \dots \dots \dots (97)$$

Setzt man

$$\frac{1}{\tau} = \nu,$$

so ist ν die Anzahl der Perioden in der Zeiteinheit, und man nennt sie Periodenzahl oder Schwingungszahl oder Frequenz.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\omega = 2\pi\nu \dots \dots \dots (98)$$

Da ν die Periodenzahl in 1 Sekunde bedeutet, so ist ω die Periodenzahl in 2π Sekunden.

Setzt man diese Werte für ω ein, so kann man auch schreiben:

$$e = \mathfrak{E} \sin \frac{2\pi}{\tau} t = \mathfrak{E} \sin 2\pi \nu t.$$

Die Abszissen der Abb. 191 kann man im Zeitmaß ausdrücken, wenn man sie um das ω -fache verkleinert, weil $t = \frac{\alpha}{\omega}$ ist.

Aus der Kurve oder der Gleichung für e erkennt man, daß e von 0 bis π positive, von π bis 2π negative Werte hat; d. h. die EMK wechselt bei $\alpha = \pi$ und $\alpha = 2\pi$, also zweimal während einer Periode und 2ν mal während einer Zeiteinheit (Sekunde) ihre Richtung.

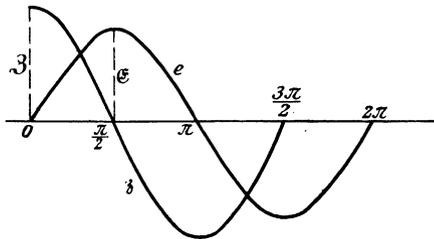


Abb. 192.

Ebenso oft geht das Drahtrechteck (Abb. 189) an den Magnetpolen, die das Feld erzeugen, vorüber; man nennt daher 2ν die Polwechselzahl.

Wollen wir den Verlauf der von dem Drahtrechteck AB (Abb. 190) umschlossenen Kraftlinienmenge z durch eine Kurve darstellen, und zwar über derselben Abszissenachse wie e in Abb. 191, so haben

wir die zu den einzelnen Werten von α gehörigen Werte von DC als Ordinaten aufzutragen, und erhalten so die Abb. 192. Man ersieht aus ihr, daß z denselben Verlauf nimmt wie e , nur mit dem Unterschied, daß es mit dem Scheitelwerte 3 beginnt, während e mit Null beginnt. Den Scheitelwert \mathfrak{E} erreicht die EMK erst bei $\frac{\pi}{2}$, also um eine Viertelperiode später als z . Die induzierte EMK ist also um eine Viertelperiode oder 90° verspätet oder verzögert gegenüber den sie erzeugenden Kraftlinien.

Man erkennt dies auch aus den obigen Gleichungen für z und e , wenn man e durch dieselbe Funktion ausdrückt wie z , also in den \cos verwandelt:

$$e = \mathfrak{E} \sin \alpha = \mathfrak{E} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Vergleicht man damit die Gleichung für die Kraftlinienmenge

$$z = 3 \cos \alpha,$$

so ersieht man unmittelbar die Phasenverspätung um $\frac{\pi}{2}$.¹⁾

¹⁾ Es folgt dies auch unmittelbar aus den Induktionsgesetzen; wir fanden, daß die induzierte EMK gleich ist der Änderung der Kraftlinienmenge, die

Man erkennt aus der vorstehenden Erörterung, daß in den mathematischen Ausdrücken für e und \mathfrak{z} der Faktor vor der trigonometrischen Funktion immer den größten Wert oder Scheitelwert, und der Faktor ω immer die 2π fache Periodenzahl darstellt, und daß jede einfache periodische Funktion, gleichgültig ob sie als \sin oder \cos dargestellt ist, durch diese beiden Faktoren vollständig bestimmt ist. Demnach bedeutet auch bei einem Wechselstrom, dessen Verlauf durch $i = \mathfrak{I} \sin \omega t$ gegeben ist, \mathfrak{I} den größten Wert oder Scheitelwert der Stromstärke.

Die Scheitelwerte werden im folgenden immer mit großen deutschen Buchstaben (\mathfrak{E} , \mathfrak{I} , \mathfrak{S}), die veränderlichen Augenblickswerte mit kleinen Buchstaben (e , \mathfrak{z} , i) bezeichnet.

Wir sind zu den einfachen periodischen Funktionen dadurch gekommen, daß wir das Feld, in dem das Drahtrechteck gedreht wird (Abb. 190), als homogen vorausgesetzt haben. Ist das nicht der Fall, so lassen sich e und \mathfrak{z} nur durch zusammengesetzte periodische Funktionen darstellen. Im folgenden setzen wir aber, solange nichts anderes bestimmt wird, nur einfache (einwellige) periodische Funktionen voraus.

129. Die Elektrizitätsmenge eines veränderlichen Stromes.

Die von einem konstanten Strome J während der Zeit t gelieferte Elektrizitätsmenge ist $Q = Jt$. Diese Grundgleichung darf bei einem veränderlichen Strome nur für ein unendlich kleines Zeitteilchen dt , innerhalb dessen die Stromstärke i als konstant angesehen werden kann, angewendet werden. Die während dieser Zeit dt vom Strome gelieferte Elektrizitätsmenge dQ ist also

$$dQ = i \cdot dt \dots \dots \dots (99)$$

Dann ist die während einer Zeit t gelieferte Menge Q gleich der Summe aller dieser, also

$$Q = \sum dQ = \sum i \cdot dt;$$

von dem Drahtrechteck umschlossen wird, nämlich $e = -N \frac{d\mathfrak{z}}{dt}$. Wo diese Änderung am größten ist, dort ist also auch e am größten. Das ist dort der Fall, wo die Kurve für \mathfrak{z} am steilsten ist, also bei $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$; immer, wo sie durch Null geht. An diesen Stellen muß also die induzierte EMK ihren Scheitelwert \mathfrak{E} erreichen. Und zwar den positiven Scheitelwert, wenn \mathfrak{z} abnimmt, das ist bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Hingegen den negativen Scheitelwert, wenn \mathfrak{z} zunimmt; das ist bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Dort aber, wo die Änderung von \mathfrak{z} Null ist, muß auch e Null sein; das ist bei jenen Abszissenwerten der Fall, wo \mathfrak{z} den größten Wert erreicht, denn hier ist \mathfrak{z} während einer unendlich kleinen Zeit konstant.

oder wenn man die Summierung durch eine Integration ersetzt

$$Q = \int_0^t i \cdot dt \dots \dots \dots (100)$$

Ist i ein Wechselstrom von der Form $i = \Im \sin \omega t$ und durch die Abb. 193 dargestellt, wobei die Zeiten als Abszissen aufgetragen sind, so ist $i \cdot dt$ der Flächeninhalt des schmalen schraffierten Rechteckes mit der Höhe i und der Grundlinie dt . Die während einer halben Periode gelieferte Elektrizitätsmenge ist demnach durch die von der halben Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche dargestellt. Ihr Betrag ist

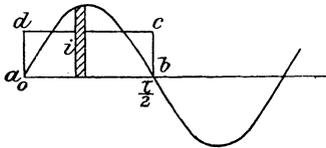


Abb. 193.

$$Q = \int_0^{\frac{\tau}{2}} i dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \Im \sin \omega t dt.$$

Führen wir für ω die Gl. 97 ein, so ist

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} \Im \sin \frac{2\pi}{\tau} t dt = -\Im \frac{\tau}{2\pi} \left[\cos \frac{2\pi}{\tau} t \right]_0^{\frac{\tau}{2}} \\ &= -\Im \frac{\tau}{2\pi} [-1 - 1] = \Im \frac{\tau}{\pi} \dots \dots \dots (101) \end{aligned}$$

Die während der nächsten halben Periode gelieferte Menge ist natürlich ebenso groß, aber negativ, also $Q = -\Im \frac{\tau}{\pi}$.

Die gesamte, während einer ganzen Periode gelieferte Elektrizitätsmenge ist demnach Null.

130. Der arithmetische Mittelwert.

Durch den Scheitelwert \Im wird zwar ein Wechselstrom seiner Größe nach charakterisiert, aber man kann auf ihn nicht die für einen konstanten Strom geltenden Gesetze anwenden, weil er nur einen Augenblick lang besteht. Man braucht einen Mittelwert, für den die in § 41 festgesetzte Grundgleichung $Q = Jt$ gilt, also einen Mittelwert, der mit der Dauer einer halben Periode multipliziert, die während dieser Zeit gelieferte Elektrizitätsmenge Q gibt. Bezeichnet man diesen Mittelwert mit J_{mi} , so ist zu setzen:

$$Q = \frac{\tau}{2} J_{mi} \dots \dots \dots (102)$$

Da nach dem vorigen $Q = \frac{\tau}{\pi} \mathfrak{S}$ ist, so folgt

$$J_{mi} = \frac{2}{\pi} \mathfrak{S} = 0,637 \mathfrak{S} \dots \dots \dots (103)$$

Hat das Rechteck $abcd$ (Abb. 193) denselben Flächeninhalt wie die von der halben Sinuswelle und der Achse eingeschlossene Fläche, so ist J_{mi} nichts anderes als die Höhe ad dieses Rechteckes. J_{mi} ist also der arithmetische Mittelwert eines Wechselstromes.

Dasselbe gilt natürlich auch für eine EMK von der Form $e = \mathfrak{E} \sin \omega t$. Nämlich $E_{mi} = \frac{2}{\pi} \mathfrak{E}$.

Für eine auf der negativen Seite liegende halbe Periode ergibt sich natürlich derselbe Mittelwert, aber mit negativem Vorzeichen. Würde man also diesen Mittelwert für eine ganze Periode bilden, so würde man Null erhalten.

Ist der Strom oder die EMK durch eine Cosinus-Funktion dargestellt, z. B. $i = \mathfrak{I} \cos \omega t$, so muß der Mittelwert J_{mi} zwischen den Grenzen $\frac{\tau}{4}$ und $\frac{3\tau}{4}$ gebildet werden. Würde man zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\tau}{2}$ integrieren, wie bei einer Sinus-Funktion, so würde man Null erhalten, weil der Strom in der ersten und in der zweiten Viertelperiode entgegengesetztes Vorzeichen hat. Der arithmetische Mittelwert muß überhaupt immer zwischen zwei Hauptnullpunkten gebildet werden, wie auch immer die Wellenform beschaffen sein mag.

131. Der quadratische Mittelwert.

Der im vorstehenden Kapitel bestimmte arithmetische Mittelwert hat für die Elektrotechnik so gut wie gar keine Wichtigkeit; denn die gelieferte Elektrizitätsmenge hat nur für elektrolytische Prozesse Bedeutung. Für alle praktischen Anwendungen der Wechselströme kommt vielmehr der Mittelwert aus der Summe der Quadrate in Betracht.

So ist z. B. die während einer unendlich kleinen Zeit dt entwickelte, in Wärme umgesetzte Arbeit $i^2 w \cdot dt$ und die während einer halben Periode entwickelte Wärmearbeit A :

$$A = w \int_0^{\frac{\tau}{2}} i^2 \cdot dt \dots \dots \dots (104)$$

Auch die Meßinstrumente für Wechselstrom können nur quadratische Mittelwerte angeben. Denn jene Meßinstrumente, die von dem einfachen Werte des Stromes abhängen, müßten bei jedem Richtungswechsel des Stromes nach entgegengesetzten Seiten ausschlagen. Der Zeiger würde also beständig zwischen positiven und

negativen Ausschlägen hin und her schwanken, wenn er überhaupt so rasch nachfolgen könnte. Da er dies nicht kann, so gibt ein solches Instrument bei Wechselstrom überhaupt keinen Ausschlag. Bei jenen Instrumenten aber, die vom Richtungswechsel des Stromes unabhängig sind, und nur solche können aus dem angeführten Grunde bei Wechselströmen verwendet werden, müssen die Angaben proportional dem Quadrate des Stromes oder der Spannung sein, weil nur die im Quadrate vorkommenden Werte immer positiv sind, gleichgültig, ob die Größe selbst positiv oder negativ ist.

Berechnen wir nun die obige Arbeit unter der Annahme, daß der Strom $i = \Im \sin \omega t$ ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A &= w \Im^2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin^2 \omega t = \frac{w \Im^2}{2} \int_0^{\frac{\tau}{2}} (1 - \cos 2 \omega t) dt \\
 &= \frac{w \Im^2}{2} \left| t - \frac{\sin 2 \omega t}{2 \omega} \right|_0^{\frac{\tau}{2}}.
 \end{aligned}$$

Und weil $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ (nach Gl. 97) ist, so ergibt sich:

$$A = \frac{w \Im^2 \tau}{2}.$$

Um daraus die mittlere Wärme-Arbeit während einer Zeiteinheit, das ist die Wärme-Leistung P , zu finden, hat man durch die Zeit $\frac{\tau}{2}$ zu dividieren. Es ist also:

$$P = \frac{w \Im^2}{2} \dots \dots \dots (105)$$

Die Wärme-Arbeit während irgend einer Zeit t ist dann:

$$A = \frac{w \Im^2}{2} t.$$

Setzt man $\frac{\Im^2}{2} = J^2$, so gilt dasselbe Gesetz wie für einen konstanten Gleichstrom (§ 52).

Dann ist:

$$P = w J^2 \quad \text{und} \quad A = w J^2 t.$$

Dieser Wert:

$$J = \frac{\Im}{\sqrt{2}} = \frac{\Im}{1,414}$$

ist also nichts anderes als der quadratische Mittelwert, nämlich

$$J = \sqrt{\frac{1}{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{r}{2}} i^2 dt.}$$

Da er für die Leistung (Effekt) eines Wechselstromes maßgebend ist, wird er gewöhnlich als effektiver Wert bezeichnet.

Dasselbe gilt natürlich auch für eine EMK oder Spannung von der Form $e = \mathfrak{E} \sin \omega t$:

$$E = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{2}}.$$

Wir werden im folgenden immer die effektiven oder quadratischen Mittelwerte mit großen lateinischen Buchstaben (J , E) zum Unterschied von den veränderlichen Augenblickswerten (i , e), von den Scheitелwerten (\mathfrak{J} , \mathfrak{E}) und den arithmetischen Mittelwerten (J_{mi} , E_{mi}) bezeichnen¹⁾.

Der Faktor $\sqrt{2}$ gilt gemäß obiger Ableitung nur für Sinuswellen. Für andere Wellenformen gilt die Beziehung $E = \frac{E}{\sigma}$, wobei σ den vom Verfasser eingeführten Scheitelfaktor bedeutet (vgl. § 214).

132. Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion.

Das allgemeine Gesetz für die Induzierung einer EMK gilt natürlich auch dann, wenn die Kraftlinien nicht von einem fremden System, sondern von dem Strome i des eigenen Stromkreises herühren. Schickt man z. B. einen Strom i durch eine Spule von N Windungen (Abb. 194), so erzeugt er ein magnetisches Feld, dessen

¹⁾ Man halte sich beständig vor Augen, daß die effektiven Werte (J , E) nur Hilfswerte sind, um die Messung und Berechnung von Wechselströmen zu erleichtern, die aber von den Augenblickswerten (i , e) scharf zu unterscheiden sind. Darum verwende ich besondere Buchstaben. Die nicht genügende Unterscheidung hat vielfach zu falschen Darstellungen geführt, indem manchmal das, was nur für die Augenblickswerte gilt, auf die effektiven Werte übertragen wurde, und manchmal das, was nur für die effektiven Werte gilt, auch auf Augenblickswerte bezogen wurde. So findet man häufig die falsche Ansicht, daß der in § 11—19 behandelte, und in § 39, 87 und 117 auf den elektrischen Strom angewendete Potentialbegriff zwar auf Gleichstrom, aber nicht auf Wechselstrom anwendbar sei (Em d e, Elektr. u. Maschinenbau, Wien 1911, S. 151, 868, 1084. Rüdénberg, ebenda S. 1060). Es wurde schon vom Verf. (ebenda 1912, S. 135, 260) und dann von Lenz (Archiv f. Elektrot. 1913, S. 383) betont, daß dies zwar für die effektiven Werte, aber nicht für die Augenblickswerte gilt. Für die Augenblickswerte eines Wechselstromes gilt alles das, was für einen Gleichstrom gilt, der dieselbe Stärke hat wie der Wechselstrom in dem betreffenden Augenblick. Dagegen gelten für die effektiven Werte besondere Gesetze, die in den folgenden Paragraphen abgeleitet werden. Als Ausgangspunkt dient immer das betreffende Gleichstrom-Gesetz, angewendet auf die Augenblickswerte des Wechselstroms.

Kraftlinienmenge \mathfrak{z} in jedem Augenblick (nach § 105) bestimmt ist durch

$$\mathfrak{z} = \frac{4 \pi i N}{w},$$

wenn i in absoluten Einheiten ausgedrückt wird.

Ändert sich die Stromstärke, so ändert sich die Kraftlinienmenge, und daher entsteht nach dem Grundgesetz (Gl. 92) eine EMK:

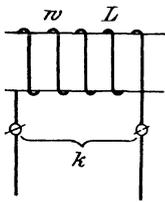


Abb. 194.

$$e = -N \frac{d \mathfrak{z}}{d t} = -\frac{4 \pi N^2 d i}{w d t}.$$

Setzt man wie in § 120

$$\frac{4 \pi N^2}{w} = L,$$

so ist

$$e = -L \frac{d i}{d t} \dots \dots \dots (106)$$

Da diese EMK vom Strome i selbst in seinem eigenen Stromkreis induziert wird, so nennt man sie EMK der Selbstinduktion oder induktive Spannung oder Induktionsspannung. Man erkennt jetzt auch, warum L als Koeffizient der Selbstinduktion bezeichnet wird¹⁾.

Aus Gl. 92 und 106 folgt

$$L = N \frac{d \mathfrak{z}}{d i}.$$

Es ist dies die allgemeinste Definition für den Koeffizienten der Selbstinduktion.

¹⁾ Die letzte Gleichung folgt auch aus § 119, wo wir gesehen haben, daß $i L$ die vom Strome i erzeugte Kraftlinienmenge bedeutet. Da die induzierte EMK gleich der Änderung der Kraftlinienmenge (negativ genommen) ist, so folgt ganz allgemein

$$e = -\frac{d(i L)}{d t}.$$

Ist i konstant, L aber veränderlich (indem z. B. die Gestalt des Stromkreises oder die magnetische Durchlässigkeit des Mediums geändert wird), so ist

$$e = -i \frac{d L}{d t}.$$

Ist L konstant, i aber veränderlich, so ist

$$e = -L \frac{d i}{d t}.$$

Sind beide veränderlich, so ist

$$e = -i \frac{d L}{d t} - L \frac{d i}{d t}.$$

Im folgenden setzen wir L immer als konstant voraus.

Betrachtet man nicht den ganzen geschlossenen Stromkreis, sondern nur den Teil, der die Spule (Abb. 194) bildet, und bezeichnet mit k die zwischen den Enden der Spule herrschende Klemmenspannung, so geht die Spannungsgleichung (§ 126) über in

$$k = iw - e \dots \dots \dots (107)$$

und nach Einsetzung der letzten Gleichung

$$k = wi + L \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (108)$$

Diese Gleichung besagt folgendes: Wird ein konstanter Strom (Gleichstrom) i durch eine Spule mit dem Widerstande w geschickt, so entsteht an den Enden der Spule eine Spannung $h = iw$. Wird aber ein Wechselstrom von derselben Stärke durch dieselbe Spule geschickt, so ist die Klemmenspannung k um $L \frac{di}{dt}$ größer. Oder: Um einen konstanten Strom von der Stärke i durch diese Spule hindurchzuschicken, ist eine Klemmenspannung $k = iw$ erforderlich. Um einen Wechselstrom von derselben Stärke durch dieselbe Spule hindurchzuschicken, ist eine um $L \frac{di}{dt}$ größere Klemmenspannung erforderlich.

Häufig wird wi als (Ohmscher) Spannungsabfall bezeichnet; dann muß $L \frac{di}{dt}$ als induktiver Spannungsabfall bezeichnet werden.

In § 128 (Gl. 96) haben wir bereits die wichtige Beziehung zwischen Kraftlinienmenge und EMK abgeleitet. Setzt man die Definition von ω (Gl. 98) ein, so ist

$$\mathcal{E} = 2 \pi \nu N \mathfrak{z}.$$

Dividieren wir beide Seiten dieser Gleichung durch den Scheitelwert der Sinuslinie $\sqrt{2}$, so gehen die Scheitelwerte über in die effektiven Werte

$$E = 2 \pi \nu N Z.$$

In dieser Form ist die Gleichung wenig gebräuchlich, weil es sich in der Elektrotechnik fast immer um Spulen mit Eisenkern handelt, und die darin auftretenden Verluste durch Hysterese von Wichtigkeit sind. Für diese ist aber nicht der quadratische Mittelwert Z , sondern (nach § 94) die größte Kraftlinienmenge, das ist der Scheitelwert \mathfrak{z} , maßgebend. Man drückt daher nur die EMK durch den effektiven Wert $E = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}$ aus und behält für das magnetische Feld den Scheitelwert bei. Dann ist:

$$E = \frac{2 \pi}{\sqrt{2}} \nu N \mathfrak{z} = 4,44 \nu N \mathfrak{z}.$$

Dabei gelten E und \mathfrak{J} in absoluten Einheiten. In der Praxis drückt man aber E in Volt aus, während das magnetische Feld in absoluten Einheiten (Kraftlinien) ausgedrückt wird. Da 1 Volt gleich 10^8 absoluten Einheiten ist, so geht die Gleichung über in

$$E \cdot 10^8 = 4,44 \nu N \mathfrak{J} \dots \dots \dots (109)$$

Im vorhergehenden haben wir die Abhängigkeit der EMK von dem magnetischen Felde festgestellt. Wir brauchen nun noch die Abhängigkeit der EMK von dem Strome $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$. Aus der Grundgleichung ergibt sich:

$$e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} (\mathfrak{J} \sin \omega t) = -\omega L \mathfrak{J} \cos \omega t.$$

Da der Faktor von der periodischen Funktion den Scheitelwert \mathfrak{E} dieser Funktion darstellt, so ist

$$\omega L \mathfrak{J} = \mathfrak{E} \dots \dots \dots (110)$$

Dividiert man beiderseits durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle, so erhält man die effektiven Werte, also

$$E = \omega L J = 2 \pi \nu L J \dots \dots \dots (110a)$$

Nun ist

$$e = -\mathfrak{E} \cos \omega t = \mathfrak{E} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right),$$

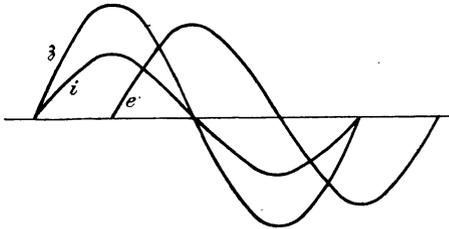


Abb. 195.

d. h. die EMK der Selbstinduktion ist gegen den Strom um eine Viertelperiode oder 90° verspätet (Abb. 195).

Da nach § 128 diese EMK auch gegenüber dem magnetischen Felde um 90° verspätet ist, so folgt, daß Strom und Feld in der

Phase übereinstimmen müssen (Abb. 195), was ohne weiteres aus dem Grundgesetz $\mathfrak{z} = \frac{4 \pi i N}{w}$ folgt, weil dieses außer \mathfrak{z} und i kein von der Zeit abhängiges Glied enthält.

Handelt es sich nicht um eine Spule, sondern um einen linearen (geradlinigen oder krummlinigen) Leiter, so gilt alles Vorstehende so wie für eine einzige Windung. \mathfrak{z} bedeutet dann die Anzahl der in sich geschlossenen Kraftlinien, die den Leiter umgeben (Abb. 86), und zwar zwischen jenen zwei Punkten, zwischen denen die EMK der Selbstinduktion den Wert \mathfrak{E} hat, oder zwischen denen die Selbstinduktion den Wert L hat. An der Anzahl der Kraftlinien ändert sich nichts, wenn dieses Leiterstück zu einer Windung zusammengeboten, oder wenn eine Windung zu einem geradlinigen Leiterstück

auseinandergebogen, und dabei die EMK \mathcal{E} konstant gehalten wird. Wohl aber ändert sich dabei L und daher auch die Stromstärke \mathfrak{I} . Wird \mathfrak{I} konstant gehalten, so ändert sich w und L und infolgedessen \mathfrak{I} .

Aus Gl. 92 und 106 folgt $L \cdot di = N \cdot d\mathfrak{I}$. Diese Gleichung kann ohne weiteres integriert werden, wenn L und N konstant sind, und man erhält so

$$L = N \frac{\mathfrak{I}}{i}.$$

\mathfrak{I} und i sind die zusammengehörigen Augenblickswerte¹⁾. Solche sind auch die Scheitelwerte $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}$. Mithin ist auch $L = N \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}}$; oder anders geschrieben

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I} \frac{L}{N} \quad , \quad \dots \quad (111)$$

Will man \mathfrak{I} in absoluten Einheiten, L und \mathfrak{I} aber in praktischen Einheiten (Henry und Ampere) ausdrücken, so ist

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I} \frac{L}{N} \cdot 10^8,$$

weil 1 Henry = 10^9 abs. Einh. und 1 Ampere = 10^{-1} abs. Einh. ist.

Soll die Stromstärke durch den effektiven Wert $J = \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}$ ausgedrückt werden, so ist

$$\mathfrak{I} = \sqrt{2} J \frac{L}{N} \cdot 10^8 \quad \dots \quad (112)$$

Auch die elektromagnetische Grundgleichung $\mathfrak{I} = \frac{4\pi i}{w}$ gilt ohne weiteres für die zusammengehörigen Scheitelwerte, also

$$\mathfrak{I} = \frac{4\pi \mathfrak{I}}{w} \quad \dots \quad (113)$$

wenn \mathfrak{I} in absoluten Einheiten, oder

$$\mathfrak{I} = \frac{0,4\pi \mathfrak{I}}{w} \quad \dots \quad (113a)$$

wenn \mathfrak{I} in Ampere ausgedrückt wird. Soll die Stromstärke im effektiven Wert J ausgedrückt werden, so ist.

$$\mathfrak{I} = \frac{0,4\sqrt{2}\pi J}{w}.$$

¹⁾ Diese Gleichung wurde schon auf S. 207 aus dem allgemeinen Arbeitswert erhalten.

133. Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom.

Im vorhergehenden haben wir die Beziehung zwischen EMK¹⁾, Kraftlinienmenge und Strom festgestellt. Wir wollen nun die Beziehung zwischen Klemmenspannung und Stromstärke für einen Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion (Abb. 194) ableiten. Nach Gl. 108 ist

$$k = iw + L \frac{di}{dt}.$$

Wir setzen voraus, daß Klemmenspannung und Strom sinusförmig verlaufen, also

$$k = \mathfrak{R} \sin \omega t.$$

Vom Strome i können wir nicht voraussetzen, daß er mit der Klemmenspannung in gleicher Phase ist, weil das letzte Glied der vorletzten Gleichung um 90° dem Strome voreilt. Der Strom muß also gegen die Klemmenspannung um einen Winkel φ in der Phase verschoben sein, der zwischen 0° und 90° liegt, also

$$i = \mathfrak{I} \sin(\omega t - \varphi).$$

Setzt man die letzten Ausdrücke in die Gleichung für k ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{R} \sin \omega t = w \mathfrak{I} \sin(\omega t - \varphi) + \omega L \mathfrak{I} \cos(\omega t - \varphi).$$

Diese Gleichung muß zu jeder beliebigen Zeit gelten, also auch zur Zeit $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

Setzt man zunächst $\omega t = 0$, so ergibt sich:

$$0 = -w \mathfrak{I} \sin \varphi + \omega L \mathfrak{I} \cos \varphi.$$

Setzt man $\omega t = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{R} = w \mathfrak{I} \cos \varphi - \omega L \mathfrak{I} \sin \varphi.$$

Quadriert man die beiden letzten Gleichungen und addiert sie dann, so ergibt sich:

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{I}^2 [w^2 + (\omega L)^2].$$

Mithin ist

$$i = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \dots \quad (114)$$

Dividiert man die vorletzte Gleichung durch das Quadrat des Scheitelfaktors, $(\sqrt{2})^2$, so erhält man dieselbe Gleichung für die effektiven Werte:

¹⁾ Wir werden im folgenden statt EMK der Selbstinduktion oder induzierter EMK einfach EMK sagen.

$$K^2 = J^2 [(w^2 + (\omega L)^2)]$$

oder:
$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \dots \dots \dots (115)$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung, die wir aus $\omega t = 0$ erhalten haben, folgt sofort:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{w} \dots \dots \dots (116)$$

wodurch die Phasenverschiebung φ bestimmt ist.

Trägt man k und i als Sinuslinien auf, so erhält man Abb. 196. Der Strom ist gegenüber der Spannung um den Winkel φ in der Phase verspätet (er eilt der Spannung nach), denn für $\omega t = 0$ ist auch $k = 0$. Dagegen ist i erst bei $\omega t = \varphi$ Null; um ebensoviel später erreicht der Strom seinen Scheitelwert \mathfrak{S} als die Spannung ihren Scheitelwert \mathfrak{R} .

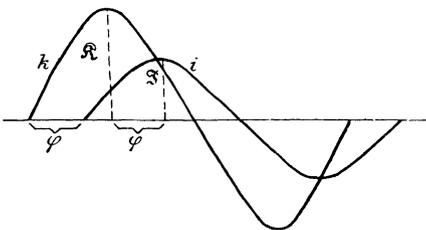


Abb. 196.

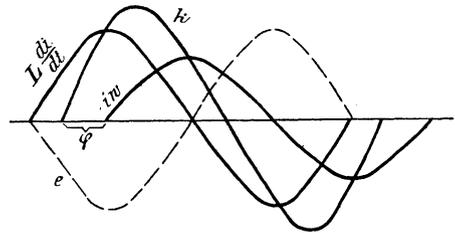


Abb. 197.

Gemäß Gl. 108 ist k die Summe aus iw und $L \frac{di}{dt}$. Abb. 197 bringt das zum Ausdruck: Jede Ordinate der Welle k ist die algebraische Summe aus den zugehörigen Ordinaten der Wellen iw und $L \frac{di}{dt}$. Die Welle von $L \frac{di}{dt}$ ist aber gemäß Gl. 106 nichts anderes als die negative Welle e . Diese eilt gemäß Abb. 195 der i -Welle, also auch der iw -Welle um eine Viertelperiode nach. Dementsprechend ist sie in Abb. 197 eingezeichnet, und entgegengesetzt dazu die Welle $L \frac{di}{dt}$.

Ist $L = 0$, d. h. verläuft der Wechselstrom in einem Stromkreis, der keine Selbstinduktion hat, so ist $\varphi = 0$. Es besteht also keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Dieser Fall ist praktisch unmöglich, weil jeder Strom auch in einem geraden Leiter ein magnetisches Feld und daher auch eine gewisse Selbstinduktion hat. Am nächsten kommt dieser Bedingung ein bifilar gespannter oder gewickelter Draht (§ 165), dessen Leitungswiderstand groß ist. Die Selbstinduktion verursacht aber nicht nur eine Phasenver-

schiebung, sondern auch eine Verkleinerung der Stromstärke, wie aus Gl. 115 hervorgeht. Ist ω oder L Null, so ist $J = \frac{K}{w}$. Das ist das Ohmsche Gesetz, wie es für Gleichströme gilt (§ 42). Überhaupt hat die Gl. 115 dieselbe Form wie das Ohmsche Gesetz, nur daß an Stelle von w der kompliziertere Ausdruck $\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$ getreten ist. Man bezeichnet daher diesen Ausdruck als scheinbaren Widerstand oder Scheinwiderstand. Er ist — graphisch dargestellt — die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb. 198), dessen

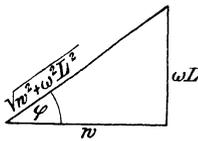


Abb. 198.

Katheten w und ωL sind. Das Produkt ωL hat dieselben physikalischen und mathematischen Eigenschaften (dieselbe Dimension) wie w . Man bezeichnet es daher als induktiven Widerstand. Demnach ist die Tangente des Phasenverschiebungswinkels φ gleich dem Verhältnis des induktiven zum Ohmschen Widerstande, und der scheinbare Widerstand ist die geometrische Summe aus beiden.

Je größer der induktive Widerstand gegenüber dem Ohmschen ist, desto größer ist die Phasenverschiebung; ist er unendlich groß gegenüber dem Ohmschen, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty, \text{ also } \varphi = 90^\circ \text{ und } J = \frac{K}{\omega L}.$$

Dieser Fall ist praktisch ebensowenig möglich wie der, daß $L = 0$ ist. Man kann ihm aber sehr nahe kommen, wenn sowohl die Periodenzahl ν (mithin auch ω), als auch L sehr groß ist.

Aus dem Widerstandsdreieck (Abb. 198) ergibt sich sofort

$$w = \cos \varphi \sqrt{w^2 + (\omega L)^2}.$$

Führt man dies in Gl. 115 ein, so erhält man:

$$J = \frac{K \cos \varphi}{w} \dots \dots \dots (117)$$

Beispiel. Eine Spule, deren Ohmscher Widerstand $w = 20$ und deren Selbstinduktion $L = 0,5$ Henry ist, sei an eine Wechselstromquelle von 100 V. und 48 Perioden (ν) angeschlossen. Dann ist $\omega = 2\pi 48 = 300$; der induktive Widerstand ist $\omega L = 150$; der scheinbare Widerstand ist

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} + \sqrt{400 + 22500} = 151.$$

Der scheinbare Widerstand unterscheidet sich also in diesem Falle nur sehr wenig vom induktiven, weil das Quadrat des Ohmschen Widerstandes klein ist gegen das des induktiven: Die Stromstärke ist $J = \frac{100}{151} = 0,66$ A. Die

Phasenverschiebung ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{150}{20} = 7,5$; $\varphi = 82^\circ 25'$. Würde die Spule an Gleichstrom von derselben Spannung angeschlossen, so wäre der Strom

$$J = \frac{K}{w} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A.}$$

134. Arbeit und Leistung eines Wechselstromes. Leistungsfaktor.

Ist $k = \Re \sin \omega t$ die Klemmenspannung irgend eines Wechselstromkreises, so ist nach dem Vorstehenden der Strom darzustellen durch $i = \Im \sin (\omega t - \varphi)$. Die in diesem Stromkreise während des unendlich kleinen Zeitraumes dt geleistete elektrische Arbeit dA ist nach § 52

$$dA = k \cdot i \cdot dt.$$

Um die Arbeit während einer halben Periode zu finden, haben wir die obigen Ausdrücke für k und i einzusetzen und von 0 bis $\frac{\tau}{2}$ zu integrieren; also

$$A = \int_0^{\frac{\tau}{2}} k i dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \Re \sin \omega t \cdot \Im \sin (\omega t - \varphi) dt.$$

Durch Anwendung einer bekannten trigonometrischen Formel¹⁾ ergibt sich

$$A = \Re \Im \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2} \cos \varphi dt - \Re \Im \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2} \cos (2 \omega t - \varphi) dt.$$

Das ist

$$A = \frac{\Re \Im}{2} \cos \varphi \left[t \right]_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{\Re \Im}{2 \cdot 2 \omega} \left[\sin (2 \omega t - \varphi) \right]_0^{\frac{\tau}{2}}.$$

Das letzte Glied geht nach Einsetzung der Grenzen über in: $\sin (2\pi - \varphi) - \sin (-\varphi) = 0$. Mithin ist

$$A = \frac{\Re \Im}{2} \cos \varphi \cdot \frac{\tau}{2}.$$

Daraus ergibt sich die mittlere Arbeit in einer Zeiteinheit, das ist die mittlere Leistung P , wenn man durch $\frac{\tau}{2}$ dividiert.

Also
$$P = \frac{\Re \Im}{2} \cos \varphi. \quad \dots \dots \dots (118)$$

Dividiert man \Re und \Im , jedes durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle $\sqrt{2}$, so erhält man die effektiven Werte K und J (§ 131) und es ist

$$P = KJ \cos \varphi. \quad \dots \dots \dots (119)$$

¹⁾ $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$.

Die Arbeit während einer Zeit t ist

$$A = KJt \cos \varphi,$$

wenn t ein Vielfaches einer halben Periode ist, weil in der obigen Ableitung das zweite Glied nur für eine halbe Periode null wird.

Gegenüber der Leistung und Arbeit eines konstanten, gleichgerichteten Stromes (§ 52) kommt also bei Wechselstrom noch der Faktor $\cos \varphi$ hinzu. Man bezeichnet daher $\cos \varphi$ als Leistungsfaktor. Die Leistung und Arbeit ist um so kleiner, je größer die Phasenverschiebung φ ist, weil $\cos \varphi$ mit zunehmendem φ abnimmt. Die folgenden Abbildungen werden dies erläutern. Die erste (Abb. 199)

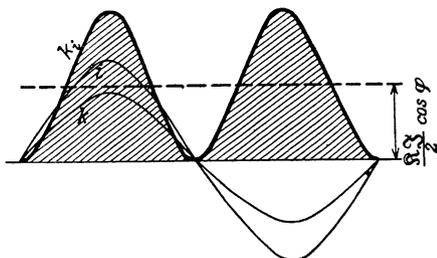


Abb. 199.

stellt einen Wechselstrom ohne Phasenverschiebung dar. Da die Arbeit in jedem Augenblick gleich $ki \cdot dt$ ist, so ist die ganze Arbeit während einer Periode gleich der schraffierten Fläche.

Betrachten wir nun einen Strom, der gegenüber seiner Spannung um 45° verzögert ist (Abb. 200). Man sieht, daß das Produkt ki , wenn

es positiv ist, durch die schraffierten Flächen über der Abszissenachse, und wenn es negativ ist, durch die schraffierten Flächen unter derselben dargestellt wird. Im ersten Falle ist die Arbeit positiv, im zweiten negativ. Die gesamte Arbeit ist gleich der algebraischen Summe, also kleiner wie im vorigen Falle.

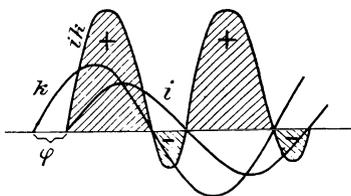


Abb. 200.

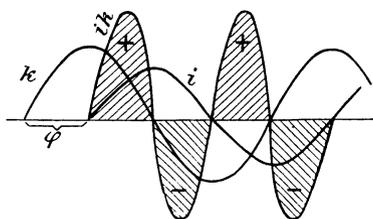


Abb. 201.

Nehmen wir nun an, ein Strom wäre um 90° gegenüber der Spannung verzögert (Abb. 201). Dieser Fall ist zwar nicht möglich, aber man kann ihm sehr nahe kommen, wenn ωL sehr groß gegen w ist. In diesem Falle sind die positiven und negativen Flächen gleich groß, also ist die Arbeit während einer halben Periode gleich null¹⁾.

¹⁾ Positive und negative Arbeit ist nicht wie bei Kräften als Richtung zu verstehen, da die Arbeit keine Richtung hat, sondern positive Arbeit ist die von den Kräften des Systems geleistete, negative Arbeit hingegen die

Für den Leistungsfaktor, den wir mit g bezeichnen wollen, ergibt sich aus Gl. 119 folgende Definition

$$g = \cos \varphi = \frac{P}{KJ},$$

d. h. der Leistungsfaktor ist gleich dem Verhältnis der Leistung zu dem Produkte aus Spannung und Strom (Voltampere).¹⁾ Daß der Leistungsfaktor gleich dem \cos des Phasenverschiebungswinkels ist, gilt nur für den Fall, daß Spannung und Strom sinusförmig verlaufen wie hier. Hat die Spannung oder der Strom eine andere Wellenform, so kann nur die Definition $g = \frac{P}{KJ}$ angewendet werden (§ 216).

Besteht die von einem Wechselstrom geleistete Arbeit nur aus Stromwärme, d. h. sind keine sekundären Ströme und keine magnetischen Verluste (Hysterese) vorhanden, so folgt Gl. 119 auch aus dem in § 131 für die Wärmeleistung erhaltenen Ausdruck, nämlich aus $P = wJ^2$, wenn man J^2 in $J \cdot J$ zerlegt und für ein J die Gl. 117 einführt. Es ist dann $P = KJ \cos \varphi$. Für diesen Fall folgt aus der vorletzten Gleichung

$$w = \frac{P}{J^2},$$

d. h. man kann den Ohmschen Widerstand aus einer Messung der Leistung und der Stromstärke ermitteln, aber nicht wie bei Gleichstrom aus einer Messung der Spannung und Stromstärke, denn das Verhältnis dieser ist gleich dem scheinbaren Widerstand $\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$.

135. Das Spannungsdiagramm.

In § 133 haben wir zwei Formen für das auf effektive Werte bezogene Ohmsche Gesetz bei Wechselstrom gefunden, nämlich

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}$$

oder

$$J = \frac{K \cos \varphi}{w}.$$

gegen die Kräfte des Systems geleistete. Bei einem Motor z. B. äußert sich dies darin, daß er, solange das Produkt $k\dot{i}$ negativ ist, nicht als Motor, sondern als Dynamo wirkt und auf Kosten der vorher erhaltenen Bewegungsenergie Strom erzeugt.

In Abb. 200 und 201 stellen die $+$ Flächen jene Arbeit dar, die vom Stromerzeuger abgegeben wird. Diese Arbeit dient teilweise zur Herstellung des magnetischen Feldes, das die Ursache der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ist. Die $-$ Fläche ist jene Arbeit, die vom verschwindenden magnetischen Felde an den Stromerzeuger zurückgegeben wird. Was von der $+$ Fläche nach Abzug der $-$ Fläche übrig bleibt, ist mechanische oder thermische oder elektrolytische Arbeit des Stromes.

¹⁾ Man bezeichnet dieses Produkt auch als „scheinbare Leistung“.

Die letzte Form des Ausdruckes für J bringt den physikalischen Vorgang besser zum Ausdruck als die andere, die den scheinbaren Widerstand enthält. Denn in Wahrheit erleidet der Widerstand keine Veränderung, und auch das Ohmsche Gesetz muß in jedem Augenblicke für gleichzeitige Werte Geltung haben. Der Einfluß der Selbstinduktion ist vielmehr der, daß sie eine EMK verursacht, die der Klemmenspannung entgegenwirkt, sie also schwächt. Dies kommt zum sichtbaren Ausdruck, wenn man die Spannungsgleichung (108) in der Form

$$iw = k - L \frac{di}{dt}$$

schreibt. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die resultierende Spannung dar, auf die das Ohmsche Gesetz in seiner wirklichen Form anzuwenden ist. Der effektive Wert, auf den das Ohmsche Gesetz zur Anwendung kommt, ist also eigentlich nicht K , sondern $K \cos \varphi$, wie die obige Gleichung zeigt.

Quadriert man die erste der obigen Gleichungen, so erhält man

$$K^2 = (\omega J)^2 + (\omega LJ)^2$$

als Beziehung zwischen den effektiven Werten der Spannungen, denn ωJ ist der dem Ohmschen Widerstand entsprechende Spannungsabfall, den wir mit E_w bezeichnen wollen, und ωLJ ist nach § 132 die EMK der Selbstinduktion E oder der induktive Spannungsabfall¹⁾. Man hat also

$$K^2 = E_w^2 + E^2.$$

Demnach ist K die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten E_w und E sind (Abb. 202). Der Winkel zwischen K und E_w ist der Phasenverschiebungswinkel φ , der auch im Widerstandsdreieck (Abb. 198) vorkommt. Multipliziert man jede Seite des letzteren mit J , so geht es in das Spannungsdreieck (Abb. 202) über. Aus dem letzteren ergibt sich

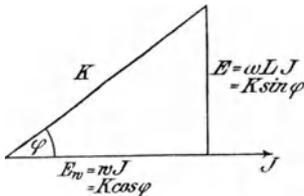


Abb. 202.

$$E = K \sin \varphi$$

$$E_w = K \cos \varphi.$$

Im vorigen Paragraphen haben wir für die Leistung eines Wechselstromes den Ausdruck

$$P = JK \cos \varphi$$

erhalten. Führen wir E_w ein, so ist

$$P = JE_w.$$

¹⁾ Und zwar ist ωLJ der effektive Wert des induktiven Spannungsabfalles. Sein Augenblickswert lautet aber nicht ωLi , sondern $L \frac{di}{dt}$, wie wir auf S. 229 gesehen haben.

Demnach ist an der Leistung und Arbeit eines Wechselstromes nur die Komponente E_w der Spannung beteiligt, weshalb sie als elektromotorische Nutzkraft oder Leistungsspannung bezeichnet wird, während die andere Komponente F keinen Anteil an der Leistung hat. Da sie im Diagramm senkrecht auf J und E_w steht, wird sie als Querspannung bezeichnet.

Will man den Strom J in das Spannungsdiagramm einzeichnen, so muß er mit E_w in der Richtung zusammenfallen, weil die Phasenverschiebung φ zwischen K und J dieselbe ist, wie zwischen K und E_w . Man kommt so zu der Regel, daß das Produkt der in gleicher Phase liegenden Größen gleich der Leistung ist, während die Größen, die eine Phasenverschiebung von 90° gegeneinander haben, wie hier J und $K \sin \varphi$, keine Leistung geben.

136. Das Stromdiagramm. Wattstrom und wattloser Strom.

Zerlegt man den Strom J in zwei zueinander senkrechte Komponenten nach dem Phasenwinkel φ (Abb. 203), so ist die eine $J \sin \varphi$, die andere $J \cos \varphi$. Dann erscheint die Leistung $KJ \cos \varphi$ als Produkt der Klemmenspannung und der dem Winkel φ anliegenden Stromkomponente $J \cos \varphi$. Da die Leistung nach dem praktischen Maßsystem in Watt gemessen wird, so bezeichnet man diese Komponente als Wattkomponente oder Wattstrom oder Leistungsstrom. Dagegen hat die andere Komponente $J \sin \varphi$ keinen Anteil an der Leistung, weshalb man sie als wattlose Komponente oder wattlosen Strom oder Querstrom bezeichnet.

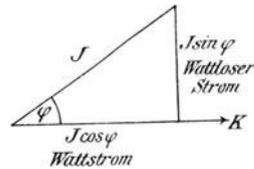


Abb. 203.

Aus der Gleichung $P = KJ \cos \varphi$ folgt, daß der Wattstrom definiert ist durch P/K , also durch das Verhältnis von Leistung und Spannung. Aus Abb. 203 folgt, daß der wattlose Strom bestimmt ist durch

$$\sqrt{J^2 - \left(\frac{P}{K}\right)^2}.$$

Will man die Klemmenspannung in dieses Stromdiagramm einzeichnen, so muß sie mit der Wattkomponente in der Richtung zusammenfallen, weil die Phasenverschiebung zwischen K und J gleich φ ist. Man kommt so wieder zu derselben Regel wie im vorigen Paragraph, daß das Produkt der in gleicher Phase liegenden Größen gleich der Leistung ist, während die Größen, die eine Phasenverschiebung von 90° gegeneinander haben, wie hier K und $J \sin \varphi$, keine Leistung geben¹⁾.

¹⁾ Der wattlose Strom wird häufig als Magnetisierungsstrom bezeichnet. Das ist irreführend; denn nicht diese Komponente, sondern der gesamte Strom

137. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es ist zu beachten, daß die beiden letzten Paragraphen gegenüber den vorhergehenden keine neuen Tatsachen enthalten, sondern nur zwei andere Arten, den Einfluß der Selbstinduktion darzustellen. Wir haben also drei Arten der Darstellung:

Erstens: Strom und Spannung werden als effektive Werte, wie sie von Wechselstrommeßinstrumenten angegeben werden, betrachtet. Dann lautet das Ohmsche Gesetz für sie

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}$$

und die Leistung ist gleich dem Produkt aus Strom, Spannung und Leistungsfaktor ($P = JK \cos \varphi$).

Zweitens: Die Spannung wird in zwei Komponenten, nämlich die Querspannung $E = K \sin \varphi$ und die Leistungsspannung $E_w = K \cos \varphi$ zerlegt, während der Strom unverändert bleibt. Dann lautet das Ohmsche Gesetz

$$J = \frac{K \cos \varphi}{w}$$

und die Leistung ist gleich dem Produkt aus Strom und Leistungsspannung.

Drittens: Der Strom wird in zwei Komponenten zerlegt, nämlich den wattlosen Strom $J \sin \varphi$ und den Wattstrom $J \cos \varphi$, während die Spannung unverändert bleibt. Dann ist die Leistung gleich dem Produkt aus Spannung und Wattstrom.

Falsch wäre es, die Leistungsspannung und den Wattstrom gleichzeitig zur Darstellung der Erscheinungen zu verwenden.

Beispiel. Eine Spule, deren Ohmscher Widerstand $w = 30$ ist, wird an eine Klemmenspannung von 75 V. angeschlossen, und dabei wurde ein Strom von 1,5 A. gemessen. Dann ist der scheinbare Widerstand der Spule

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} = \frac{K}{J} = \frac{75}{1,5} = 50 \text{ Ohm.}$$

Mithin ist der induktive Widerstand

$$\omega L = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40.$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L}{w} = \frac{40}{30} = 1,33. \\ \varphi &= 53^{\circ}07', \end{aligned}$$

also ist der Leistungsfaktor $\cos \varphi = 0,6$.

erzeugt die magnetischen Kraftlinien gemäß Gl. 113. Nur wenn ein sekundärer Strom oder allgemeiner gesprochen ein sekundärer Verlust vorhanden ist, besteht ein Unterschied zwischen dem gesamten Strom und dem Magnetisierungsstrom. Aber auch da ist der Magnetisierungsstrom nicht gleich dem wattlosen Strom (vgl. § 158).

Ist die Periodenzahl $\nu = 48$, so ist $\omega = 300$ und der Koeffizient der Selbstinduktion

$$L = \frac{40}{300} = 0,133 \text{ Henry.}$$

Die Leistung des Stromes ist

$$P = KJ \cos \varphi = 75 \cdot 1,5 \cdot 0,6 = 67,5 \text{ Watt.}$$

Da in diesem Stromkreis nur Wärmearbeit geleistet wird, so muß sie sich auch ergeben aus

$$wJ^2 = 30 \cdot 1,5^2 = 30 \cdot 2,25 = 67,5 \text{ Watt.}$$

Besteht der Stromkreis aus einer Spule, deren Windungszahl $N = 500$ ist, so kann ihre Kraftlinienmenge aus der EMK berechnet werden. Diese ist gleich dem Produkt aus induktivem Widerstand und Stromstärke (Gl. 110)

$$E = \omega LJ = 40 \cdot 1,5 = 60$$

und daraus (nach Gl. 109)

$$\mathfrak{B} = \frac{E \cdot 10^8}{4,44 \cdot \nu N} = \frac{60 \cdot 10^8}{4,44 \cdot 48 \cdot 500} = 56300.$$

Will man nicht erst den induktiven Widerstand ausrechnen, so ergibt sich die EMK ohne weiteres aus $K^2 = E_n^2 + E^2$. Da $E_n = wJ = 30 \cdot 1,5 = 45$ ist, so ist

$$E = \sqrt{K^2 - E_n^2} = \sqrt{75^2 - 45^2} = \sqrt{5625 - 2025} = \sqrt{3600} = 60.$$

Der Wert \mathfrak{B} ergibt sich auch aus Gl. 112, nämlich

$$\mathfrak{B} = \sqrt{2} \frac{L}{N} J \cdot 10^8 = 1,41 \frac{0,133}{500} 1,5 \cdot 10^8 = 56300.$$

Die Wattkomponente des Stromes ist

$$J \cos \varphi = 1,5 \cdot 0,6 = 0,9 \text{ A.}$$

und die wattlose Komponente

$$J \sin \varphi = 1,5 \cdot 0,8 = 1,2 \text{ A.}$$

138. Drosselspulen.

Spulen (Solenoiden) mit oder ohne Eisenkern, deren induktiver Widerstand neben dem Ohmschen nicht vernachlässigt werden kann, bezeichnet man als Drosselspulen. Der Name ist vom Drosselventil hergenommen, weil der induktive Widerstand den Widerstand des Stromkreises vergrößert, ohne den Verlust durch Stromwärme zu vergrößern, also den Strom drosselt. Während man also bei Gleichstrom einen gewissen Spannungsabfall wJ nur dadurch erzeugen kann, daß man durch Einschaltung eines Widerstandes w auch die entsprechende Stromwärme wJ^2 mit in Kauf nimmt, ist man bei Wechselstrom in der Lage, einen beliebigen Spannungsabfall $J\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$ zu erzielen, ohne eine größere Stromwärme als wJ^2 in Kauf nehmen zu müssen.

Bei den in der Praxis angewendeten Drosselspulen liegt der Fall fast immer so, daß der Ohmsche Widerstand klein ist gegenüber dem induktiven. Es ist von Wichtigkeit, sich für diesen Fall

das unterschiedliche Verhalten bei Gleichstrom und Wechselstrom klar zu machen. Für Gleichstrom haben wir nur ein Grundgesetz, aus dem wir die Kraftlinienmenge erhalten können, nämlich

$$\mathfrak{J} = \frac{0,4\pi\mathfrak{J}N}{w} \cdot 10^8.$$

Setzen wir konstante Klemmenspannung an der Spule voraus, so nimmt unter sonst gleichen Verhältnissen, also insbesondere bei konstantem Ohmschen Widerstand (so daß auch \mathfrak{J} konstant bleibt), die Kraftlinienmenge mit der Windungszahl N zu. Bei Wechselstrom haben wir außerdem noch folgende Beziehung

$$\mathfrak{J} = \frac{E}{4,44\nu N} \cdot 10^8,$$

wenn E die EMK der Selbstinduktion bedeutet. Da wir vorausgesetzt haben, daß der Ohmsche Widerstand klein ist gegenüber dem induktiven, so können wir näherungsweise die Klemmenspannung statt der EMK setzen. Es folgt dann aus dieser Gleichung, daß die Kraftlinienmenge mit zunehmender Windungszahl abnimmt; also entgegengesetzt wie bei Gleichstrom. Andererseits muß aber auch das erste Grundgesetz für jeden Augenblick gelten. Der anscheinende Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß durch die Vermehrung der Windungen trotz konstantem Ohmschen Widerstand der induktive Widerstand ωL wächst, und daher die Stromstärke abnimmt. Um die Stromstärke konstant zu halten wie bei Gleichstrom, müßte die Klemmenspannung entsprechend der Vergrößerung des induktiven Widerstandes vergrößert werden, weil sie bei Wechselstrom nicht nur den Ohmschen, sondern auch den induktiven Spannungsabfall decken muß.

Hat die Drosselspule im Bereich ihres magnetischen Feldes einen ferromagnetischen Körper (z. B. einen Eisenkern), bei dessen wechselnder Magnetisierung Verluste eintreten (Wirbelströme und Hysterese), so gelten dafür die Gesetze eines einzelnen Wechselstromes nur näherungsweise. Strenge genommen gelten dann die Gesetze der gegenseitigen Induktion (vgl. § 153).

139. Graphische Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren.

Alle in der Physik vorkommenden Größen lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Die der einen Gruppe sind durch die zahlenmäßige Angabe ihrer Größe vollständig bestimmt und können daher bedingungslos algebraisch addiert oder subtrahiert werden; hierher gehören alle Arbeitsgrößen. Treten z. B. in demselben Körper zwei verschiedene Wärmequellen auf (z. B. Wirbelströme und Hysterese in einem Eisenkern), so ist die gesamte Wärme gleich ihrer Summe. Die der anderen Gruppe haben außer ihrer Größe auch noch eine

gewisse Richtung, und sie sind daher nur dann vollständig bestimmt, wenn Größe und Richtung angegeben sind. Man nennt sie daher Vektorgrößen oder Vektoren. Hierher gehören z. B. alle Kräfte. Bei den Vektorgrößen kann eine algebraische Addition oder Subtraktion nur stattfinden, wenn sie gleiche Richtung haben. Ist dies nicht der Fall, so ist ihre gesamte Wirkung eine resultierende, die gleich der Diagonale R (Abb. 204) des aus beiden Größen F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ist. Die Richtung der beiden Größen ist durch den Neigungswinkel α_1 bzw. α_2 gegen eine feste Gerade X gegeben. Durch den entsprechenden Winkel β ist dann die Richtung der Resultierenden bestimmt. Zur Konstruktion des Parallelogramms braucht man natürlich nur den Winkel zwischen den beiden Größen $\alpha_2 - \alpha_1$.

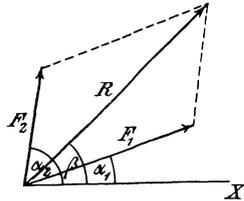


Abb. 204.

Genau dasselbe gilt für die Scheitelwerte und die effektiven Werte der Wechselstromgrößen (Strom, Spannung, Kraftlinienmenge), wenn man an Stelle der Richtungswinkel die Phasenwinkel setzt. Wir haben zwei solche Fälle im Spannungsdiagramm und im Stromdiagramm gehabt.

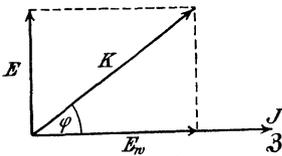


Abb. 205.

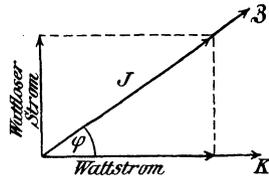


Abb. 206.

Im ersten (Abb. 202) ist die Klemmenspannung nichts anderes als die Resultierende von E_w und E , wie Abb. 205 zeigt. Jene Figur ist die Hälfte von dieser. Sollen Stromstärke J und magnetisches Feld \mathfrak{B} in dieses Diagramm eingezeichnet werden, so ergibt sich ihre Lage daraus, daß Strom und Feld mit dem Ohmschen Spannungsabfall E_w in der Phase zusammenfallen.

Ebenso ist das Stromdreieck Abb. 203 nichts anderes als die Hälfte der Abb. 206, wonach der gesamte Strom J die Resultierende aus dem Wattstrom und dem wattlosen Strom ist. Will man die Klemmenspannung K und das Feld \mathfrak{B} einzeichnen, so ergibt sich ihre Lage daraus, daß die Klemmenspannung mit dem Wattstrom und das magnetische Feld mit dem Strom J zusammenfällt.

Wirken in einem Stromkreis drei

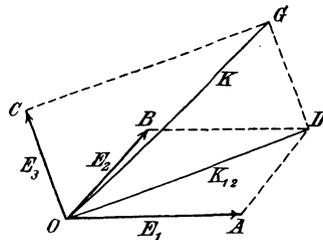


Abb. 207.

Spannungen E_1, E_2, E_3 von verschiedener Phase (Abb. 207), so ergibt sich die resultierende Spannung K in derselben Weise, wie die Resultierende von drei Kräften. Man hat zunächst die Resultierende $K_{1,2}$ von zweien zu bilden und dann die Resultierende K aus dieser und der dritten Spannung.

Betrachtet man die geschlossene Figur $OADG$, so sieht man, daß ihre Seiten aus den drei Spannungen und ihrer Resultierenden bestehen. Man kann also bei der Konstruktion auch so verfahren, daß man alle Komponenten der Lage und Größe nach derart aneinanderrührt, daß der Anfang eines Vektors an das Ende des vorhergehenden stößt. Die Linie, welche die Figur schließt, ist dann die Resultierende.

Das Vorstehende gilt natürlich, wie schon bemerkt, nur für Scheitelwerte und effektive Werte der Wechselstromgrößen. Für Augenblickswerte gilt, daß die gleichzeitig auftretenden Werte algebraisch zu addieren sind.

140. Scheinbarer Widerstand bei Hintereinanderschaltung.

Zwei Leiterstücke mit den Widerständen w_1, w_2 , und den Selbstinduktionen L_1, L_2 befinden sich in Hintereinanderschaltung (Abb. 208). Dann ist der gesamte Widerstand $w_1 + w_2 = w$ und die

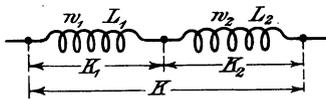


Abb. 208.

gesamte Selbstinduktion $L_1 + L_2 = L$; k_1, k_2, k seien die Augenblickswerte der Klemmenspannungen, K_1, K_2, K die entsprechenden effektiven Werte. Dann gilt für erstere wie bei Gleichstrom

$$k = k_1 + k_2.$$

Für die effektiven Werte gilt das nicht, wenn sie verschiedene Phasen haben.

Da die Stromstärke überall dieselbe ist, so ist nach Gl. 115:

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} = \frac{K}{\sqrt{(w_1 + w_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2}}. \quad (120)$$

Die Phasenverschiebung zwischen J und K ist

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{w} = \frac{\omega (L_1 + L_2)}{w_1 + w_2} \dots \dots \dots (121)$$

Betrachtet man aber die beiden Leiterstücke für sich, so gilt für das eine:

$$J = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

und für das andere:

$$J = \frac{K_2}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen J und K_1 ist

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

und zwischen J und K_2

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Vergleicht man die vorstehenden drei Ausdrücke für J untereinander, so sieht man, daß der gesamte scheinbare Widerstand nicht gleich ist der Summe aus den scheinbaren Widerständen beider Leiterstücke, sondern daß er aus der Summe der Ohmschen Widerstände und der Summe der Selbstinduktionskoeffizienten so gebildet wird, wie bei einem einzelnen Leiterstück. Graphisch ist dieser Fall durch das Widerstandsdreieck (Abb. 209) dargestellt.

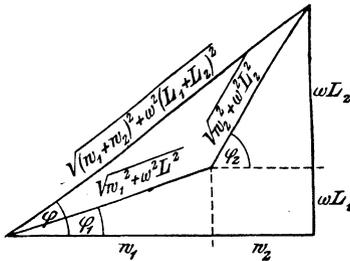


Abb. 209.

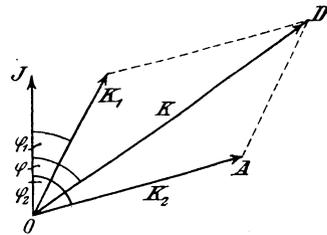


Abb. 210.

Aus der Vergleichung der Phasenverschiebungen ersieht man, daß zwischen dem Strome und den drei Klemmspannungen K , K_1 , K_2 verschiedene Phasenverschiebungen bestehen. Da aber die Stromstärke überall dieselbe ist, so folgt daraus, daß die Summe der effektiven Klemmspannungen $K_1 + K_2$ nicht gleich K sein kann, obgleich für die Augenblickswerte die Bedingung $k_1 + k_2 = k$ gilt. Die graphische Darstellung dieser Verhältnisse zeigt Abb. 210. Ist J der Vektor des Stromes, so ist K_1 unter dem Winkel φ_1 in der Richtung des Uhrzeigers einzutragen, weil die Spannung dem Strome voreilt. In gleicher Weise ist K_2 mit dem Winkel φ_2 einzutragen. Die Resultierende aus beiden gibt Größe und Phasenverschiebung der ganzen Klemmspannung.

Auch hier sieht man, daß die drei Spannungen K_1 , K_2 und K eine geschlossene Figur OAD bilden.

Nur in einem Falle ist $K = K_1 + K_2$, nämlich dann, wenn diese Vektoren gleiche Richtung haben. Das ist der Fall, wenn

$$\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2},$$

denn dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi^1$). Ebenso wenn $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$, denn dann sind alle Phasenverschiebungen null wie bei Gleichstrom.

Aus Abb. 210 läßt sich eine der Spannungen berechnen, wenn die beiden anderen und ihre Phasenverschiebungen bekannt sind. So ist z. B.

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit, muß sich die gesamte Leistung $KJ \cos \varphi$ aus der Summe der Leistungen in den beiden Teilen ergeben, also

$$KJ \cos \varphi = K_1 J \cos \varphi_1 + K_2 J \cos \varphi_2.$$

Daraus folgt $K \cos \varphi = K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2$.

Diese Gleichung dient zur Berechnung eines Phasenverschiebungswinkels aus den beiden anderen und den Spannungen.

141. Die Verzweigung eines veränderlichen Stromes.

Teilt sich ein veränderlicher Strom in zwei Zweigströme (Abb. 211) mit den Augenblickswerten i_1 und i_2 bzw. den effektiven Werten J_1 und J_2 , so ist die Verteilung der letzteren eine andere, als die der ersteren.

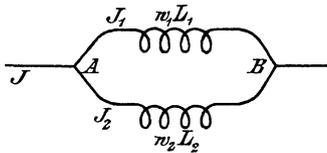


Abb. 211.

Bezeichnet man die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den Verteilungspunkten AB mit k bzw. K , so ist

$$J_1 = \frac{K}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

$$J_2 = \frac{K}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Daraus folgt:

$$J_1 : J_2 = \sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2} : \sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2} \quad \dots \quad (122)$$

d. h. die effektiven Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die scheinbaren Widerstände.

Der Phasenverschiebungswinkel β zwischen den beiden Zweigströmen ist

$$\beta = \varphi_1 - \varphi_2$$

oder:

$$\text{tg } \beta = \text{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \varphi_2}{1 + \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2} = \omega \frac{w_2 L_1 - w_1 L_2}{w_1 w_2 + \omega^2 L_1 L_2} \quad (123)$$

¹⁾ Dieser Fall liegt insbesondere dann vor, wenn gleiche Stromkreise (z. B. Bogenlampen oder Transformatoren) hintereinandergeschaltet sind. Die gesamte Spannung ist dann gleich der Summe aller Teilspannungen.

Da φ_1 und φ_2 Phasenverspätungen bedeuten, so ist β dann auch eine Phasenverspätung, wenn φ_1 größer ist als φ_2 . Dann ist also J_1 gegen J_2 verspätet. Ist aber β negativ, so ist J_2 gegen J_1 verspätet. Ist $\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2}$, so ist $\varphi_1 = \varphi_2$; d. h. die Phasenverschiebungen in beiden Zweigen sind einander gleich, und daher auch $\beta = 0$.

Anders lautet dies Verhältnis für die Augenblickswerte. Nach § 132 müssen für die Zweige folgende Gleichungen gelten:

$$k = i_1 w_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t}$$

$$k = i_2 w_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t},$$

daraus folgt:

$$i_1 w_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} = i_2 w_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} \quad (124)$$

als Bedingungsgleichung für das Verhältnis der beiden Zweigströme in jedem Augenblick. Außerdem muß in jedem Augenblick das erste Kirchhoffsche Gesetz $i = i_1 + i_2$ gelten, weil an den Verzweigungspunkten AB weder ein Verlust noch eine Anhäufung von Elektrizität eintreten kann.

Sind die beiden Zweige ohne Selbstinduktion, also $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, so lautet die erste Bedingungsgleichung $i_1 w_1 = i_2 w_2$, also wie bei Gleichstrom.

Die graphische Darstellung der Stromverhältnisse zeigt Abb. 212. Ist K der Vektor der Spannung zwischen den Verzweigungspunkten AB , so ist J_1 unter dem Winkel φ_1 und J_2 unter dem Winkel φ_2 einzutragen. Die Resultierende J aus diesen beiden gibt Größe und Phasenverschiebung des gesamten Stromes. Dieses Stromdiagramm hat gleiche Form wie das Spannungsdiagramm bei Hintereinanderschaltung (Abb. 210). Das kommt daher, weil sich bei diesem Ströme einer gemeinsamen Spannung, bei jenem aber Spannungen eines gemeinsamen Stromes zusammensetzen. Und wie dort die drei Spannungen, so bilden hier die Zweigströme und der gesamte Strom eine geschlossene Figur $O A D$.

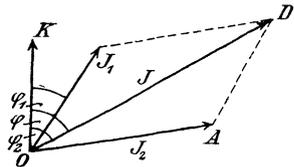


Abb. 212.

Aus Abb. 212 läßt sich einer der Ströme berechnen, wenn die beiden anderen und ihre Phasenverschiebung bekannt sind. So ist z. B.

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + 2 J_1 J_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Aus Abb. 212 ersieht man auch, daß im allgemeinen der gesamte Strom J kleiner ist als die Summe der Zweigströme $J_1 + J_2$.

Nur wenn diese Ströme gleiche Phase haben, d. h. wenn $\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2}$ ist, ist auch $J = J_1 + J_2$ wie bei Gleichstrom.

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit muß die gesamte Leistung aus der Summe der Leistungen in beiden Zweigen bestehen, d. h. es ist

$$KJ \cos \varphi = KJ_1 \cos \varphi_1 + KJ_2 \cos \varphi_2.$$

Daraus folgt

$$J \cos \varphi = J_1 \cos \varphi_1 + J_2 \cos \varphi_2,$$

woraus man eine Phasenverschiebung aus den beiden anderen und aus den Stromstärken berechnen kann¹⁾.

Integriert man die Gl. 124 von 0 bis t :

$$w_1 \int_0^t i_1 dt + L_1 \int_0^t \frac{di_1}{dt} dt = w_2 \int_0^t i_2 dt + L_2 \int_0^t \frac{di_2}{dt} dt$$

und sind die während dieser Zeit durch die Zweigströme gelieferten Elektrizitätsmengen Q_1 und Q_2 (Gl. 100), so ist

$$w_1 Q_1 + [L_1 i_1]_0^t = w_2 Q_2 + [L_2 i_2]_0^t.$$

Bezieht sich diese Gleichung auf eine oszillatorische Entladung (§ 195), so ist die gesamte Ladung $Q = Q_1 + Q_2$. Ist zur Zeit t schon die ganze Entladung vorüber, so ist jetzt ebenso wie zur Zeit Null die Stromstärke in beiden Zweigen Null, und die Gleichung geht über in $w_1 Q_1 = w_2 Q_2$.

142. Der scheinbare Widerstand einer Stromverzweigung.

Der gesamte Strom, der von einer zwischen den Punkten AB (Abb. 211) herrschenden Spannung $k = \mathfrak{R} \sin \omega t$ durch eine Stromverzweigung getrieben wird, ist

$$i = \frac{\mathfrak{R}}{W_s} \sin (\omega t - \varphi),$$

wenn W_s den scheinbaren Widerstand der gesamten Verzweigung bedeutet. Es ist dies jener scheinbare Widerstand, den ein einfacher Stromleiter haben müßte, wenn er die beiden Zweige ersetzen soll. φ ist die Phasenverschiebung des gesamten Stromes \mathfrak{I} gegen die Spannung \mathfrak{R} .

Es gelten nach dem vorigen Paragraphen folgende Gleichungen:

$$k = i_1 w_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \dots \dots \dots (I)$$

¹⁾ Vergleicht man die obigen Formeln mit denen in § 140, sowie Abb. 212 und 210, so sieht man, daß sie dieselbe Form haben, nur daß J an Stelle von K steht. Eine besondere Bedeutung hat das nicht; es ergibt sich einfach daraus, daß sich hier die Ströme, dort die Spannungen geometrisch addieren.

$$k = i_2 w_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

$$i = i_1 + i_2 \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Daraus haben wir eine Gleichung zu bilden, die bloß i enthält.

Differenziert man die letzte nach t , so ist

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

Setzt man III und IV in II ein, so wird

$$k = i w_2 - i_1 w_2 + L_2 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di_1}{dt} \dots \dots \text{(V)}$$

Eliminiert man aus dieser und I zuerst i_1 und dann $\frac{di_1}{dt}$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{di_1}{dt} (w_1 L_2 - w_2 L_1) = -k (w_1 + w_2) + w_1 w_2 i + w_1 L_2 \frac{di}{dt},$$

$$i_1 (w_1 L_2 - w_2 L_1) = k (L_1 + L_2) - w_2 L_1 i - L_1 L_2 \frac{di}{dt}.$$

Differenziert man die letzte nach t , so folgt aus dieser und der vorletzten:

$$L_1 L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + (w_1 L_2 + w_2 L_1) \frac{di}{dt} + w_1 w_2 i = (w_1 + w_2) k + (L_1 + L_2) \frac{dk}{dt}.$$

Setzt man in diese die Funktionen i und k und ihre Differentialquotienten ein, so erhält man eine Gleichung, mit der man so verfährt wie in § 133, indem man einmal $\omega t = 0$ und einmal $\omega t = \frac{\pi}{2}$ setzt. So erhält man zwei Gleichungen, aus welchen sich ergibt:

$$W_s = \sqrt{\frac{(w_1^2 + \omega^2 L_1^2)(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)}{(w_1 + w_2)^2 + (\omega L_1 + \omega L_2)^2}} \dots \dots \text{(VI)}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + \omega L_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)}{w_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + w_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)} \dots \text{(VII)}$$

Die effektive Stromstärke ist also

$$J = \frac{K}{\sqrt{(w_1^2 + \omega^2 L_1^2)(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)} \dots \dots \text{(125)}} \dots \dots$$

Diese Ausdrücke kann man in dieselbe Form bringen, wie für einen einfachen Leiter, nämlich:

$$W_s = \sqrt{R^2 + \omega^2 O^2} \quad \dots \quad \text{(VIII)}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega O}{R} \quad \dots \quad \text{(IX)}$$

Dabei bedeutet also R den Ohmschen Widerstand und O den Koeffizienten der Selbstinduktion, den ein einfacher Leiter haben muß, wenn er die Stromverzweigung ersetzen soll.

Und zwar ist

$$R = \frac{A}{A^2 + \omega^2 B^2}, \quad O = \frac{B}{A^2 + \omega^2 B^2} \quad \dots \quad \text{(X)}$$

Dabei ist

$$A = \frac{w_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{w_2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2},$$

$$B = \frac{L_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{L_2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}.$$

Wie man aus den Gl. VIII—X ersieht, lassen sich W_s und, $\text{tg } \varphi$ auch in folgende, für die Berechnung einfachere Form bringen:

$$W_s = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \omega^2 B^2}} \quad \dots \quad \text{(126)}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega B}{A} \quad \dots \quad \text{(127)}$$

Sind die beiden Zweige gleich ($w_1 = w_2 = w$, $L_1 = L_2 = L$) so ist

$$R = \frac{w}{2}, \quad O = \frac{L}{2},$$

$$W_s = \frac{1}{2} \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{w}.$$

Abb. 213 zeigt das Spannungsdiagramm einer Stromverzweigung. $AB = K$ ist die beiden Zweigen gemeinsame Spannung, also die Hypotenuse des für jeden Zweig aus dem Spannungsabfall $E_w = wJ$ und der EMK der Selbstinduktion $E = \omega LJ$ gebildeten rechtwinkligen Dreieckes. Die rechten Winkel derselben müssen Peripheriewinkel des über AB beschriebenen Halbkreises sein. Die Ströme J_1 und J_2 müssen natürlich mit den entsprechenden Katheten E_w zusammenfallen. Konstruiert man daraus die gesamte Stromstärke J , so muß ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis ein recht-

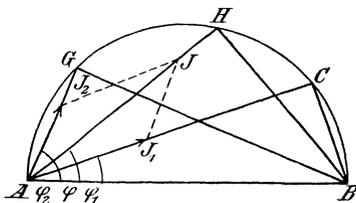


Abb. 213.

winkliches Dreieck bezeichnen, dessen Katheten $AH = RJ$ und $BH = \omega OJ$ sind.

Die Gleichungen VIII bis X gelten ohne weiteres auch für beliebig viele Stromzweige. Die Ausdrücke für A und B sind dann aus der Summe aller Stromzweige zu bilden, nämlich:

$$A = \sum \frac{w}{w^2 + \omega^2 L^2} \qquad B = \sum \frac{L}{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

143. Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit Widerstand und Selbstinduktion.

Befindet sich eine Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit einem Stromleiterstück vom Widerstande w und der Selbstinduktion L (Abb. 214), so besteht der gesamte Ohmsche Widerstand aus w und dem hintereinander geschalteten Ersatzwiderstand R der Verzweigung (Gl. X auf S. 250), und die gesamte Selbstinduktion aus der Hintereinanderschaltung von L und O . Dann ist der gesamte scheinbare Widerstand W_s :

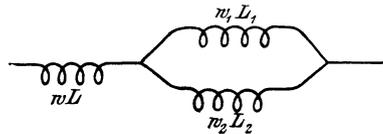


Abb. 214.

$$W_s = \sqrt{(w + R)^2 + \omega^2 (L + O)^2} \dots \dots (128)$$

und die Phasenverschiebung φ des Stromes J gegen die äußere Spannung:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega (L + O)}{w + R} \dots \dots \dots (129)$$

Mit Hilfe dieser und der Gleichungen in den beiden vorhergehenden Paragraphen lassen sich dann die beiden Zweigströme, ihre Phasenverschiebung gegeneinander, gegen den Gesamtstrom, gegen die Klemmenspannung, sowie gegen die Spannung zwischen den beiden Verzweigungspunkten berechnen.

Zehntes Kapitel.

Gegenseitige Induktion.

144. Einleitung. Begriffsbestimmung.

Es wurde schon im § 123 betont, daß in jedem Falle, wo die Kraftlinien eines sich ändernden magnetischen Feldes einen Leiter schneiden, in diesem eine EMK induziert wird. Fließt Wechselstrom durch einen Leiter, so erhält man ein periodisch wechselndes magnetisches Feld. Bringt man in seine Nähe einen zweiten Leiter derart, daß er von den Kraftlinien geschnitten wird, so wird in ihm eine EMK nach demselben Grundgesetz induziert, wie im stromdurchflossenen Leiter selbst (§ 132). Bedingung ist nur, daß die beiden Stromleiter wenigstens zum Teil oder mit einer Komponente parallel liegen. Kreuzen sich die Stromleiter oder die von ihnen eingeschlossenen Flächen senkrecht, so wird im anderen Leiter keine EMK induziert.

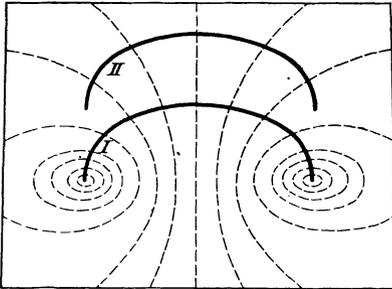


Abb. 215.

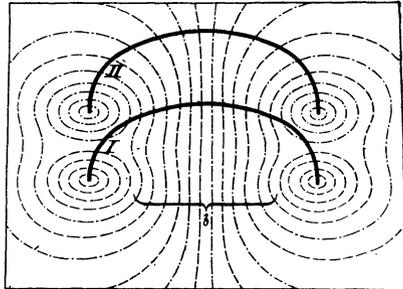


Abb. 216.

Bildet der andere Leiter einen geschlossenen Stromkreis, so verkehrt in diesem nun auch ein Wechselstrom, den man sekundären Strom nennt, während man den ursprünglich vorhandenen als primären bezeichnet. Dementsprechend bezeichnet man die Stromkreise oder Windungen, sowie die entsprechenden EMKe und Klemmenspannungen als primäre bzw sekundäre.

Da der sekundäre Strom wie jeder Strom auch ein magnetisches Feld erzeugt, so induziert nun dieser wieder eine EMK im primären Stromkreis. Daher wird diese Erscheinung als gegenseitige oder wechselseitige Induktion bezeichnet. Technisch näherliegend und auch vielsagender ist es, diesen Vorgang als elektromagnetische Kupplung zu bezeichnen, denn die beiden Ströme hängen durch das aus den beiden Einzelfeldern entstehende gemeinsame magnetische Feld zusammen. Geht dieser Zusammenhang irgendwie, z. B. durch genügende Entfernung der beiden Stromkreise voneinander verloren, so gibt es keinen sekundären Strom.

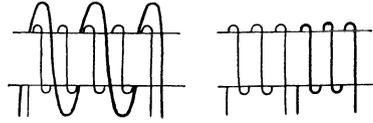


Abb. 217 a.

Abb. 217 b.

Am einfachsten ist die elektromagnetische Kupplung schon dann verwirklicht, wenn zwei Leiterstücke oder zwei ganze Windungen (Abb. 215) parallel liegen. Am stärksten ist die Kupplung, wenn die beiden Stromkreise dicht aneinander auf einem gemeinsamen Eisenkern sitzen, und zwar entweder übereinander (Abb. 217a) oder nebeneinander (Abb. 217b). Dies ist die Anordnung bei den technischen Transformatoren, Funkeninduktoren usw. Schwächer ist die Kupplung, wenn primärer und sekundärer Stromkreis auf Eisenkernen sitzen, die durch einen Luftzwischenraum getrennt sind, wie bei den Induktionsmotoren. Sehr schwach oder lose ist die Kupplung zwischen dem primären (Sender-) und sekundären (Empfänger-) Stromkreis bei der Funkentelegraphie. Gegenseitige Induktion besteht aber auch im Eisenkern oder in sonstigen Metallteilen einer einzelnen Wechselstromspule; denn es entstehen Wirbelströme (§ 155), die nichts anderes sind als sekundäre Ströme. Endlich besteht gegenseitige Induktion bei einem einadrigen Kabel (Abb. 218) zwischen Leiter und Hülle (Bleimantel, leitendes Erdreich). Der Leiter bildet den primären, die Hülle den sekundären Stromkreis. Die magnetische Kupplung besteht dabei aus jenen kreisförmigen Kraftlinien (Abb. 86), welche Leiter und Hülle konzentrisch umschließen. Sind die Hüllen einer Hin- und Rückleitung voneinander isoliert, so ist der sekundäre Stromkreis offen; sind sie durch Verbindungsleitungen ac und bd oder durch nasses Erdreich miteinander verbunden, so ist der sekundäre Stromkreis geschlossen¹⁾. Da bei allen diesen Anordnungen die grundlegende Erscheinung dieselbe ist wie beim Transformator, so faßt man sie alle unter dem Begriff des

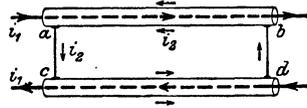


Abb. 218.

¹⁾ Mehradrige Kabel, bei welchen die gesamte Hin- und Rückleitung von der Hülle umschlossen wird, bilden keinen Transformator, weil sich die Induktionswirkungen in der Hülle gegenseitig aufheben.

allgemeinen Transformators zusammen und meint damit alles, wo gegenseitige Induktion besteht.

Wird durch den Stromkreis *I* (Abb. 215) ein Wechselstrom geschickt, während der Stromkreis *II* offen ist, so erzeugt er das durch gestrichelte Kraftlinien angedeutete magnetische Feld. Jene Kraftlinien, die den zweiten Stromkreis durchsetzen, induzieren in diesem die erwähnte EMK, und wenn er geschlossen ist, den sekundären Strom. Dieser erzeugt nun das magnetische Feld, das in Abb. 216 durch strichpunktierte Linien dargestellt ist¹⁾. Von diesen Kraftlinien durchsetzt ein Teil den primären Stromkreis und bewirkt in diesem die Induzierung einer EMK, so daß also der sekundäre Strom auf den primären zurückwirkt. Die beiden Stromkreise sind nun also durch das gemeinsame magnetische Feld, das in Abb. 216 mit \mathfrak{z} bezeichnet ist, miteinander verkettet oder gekuppelt. Jene Kraftlinien

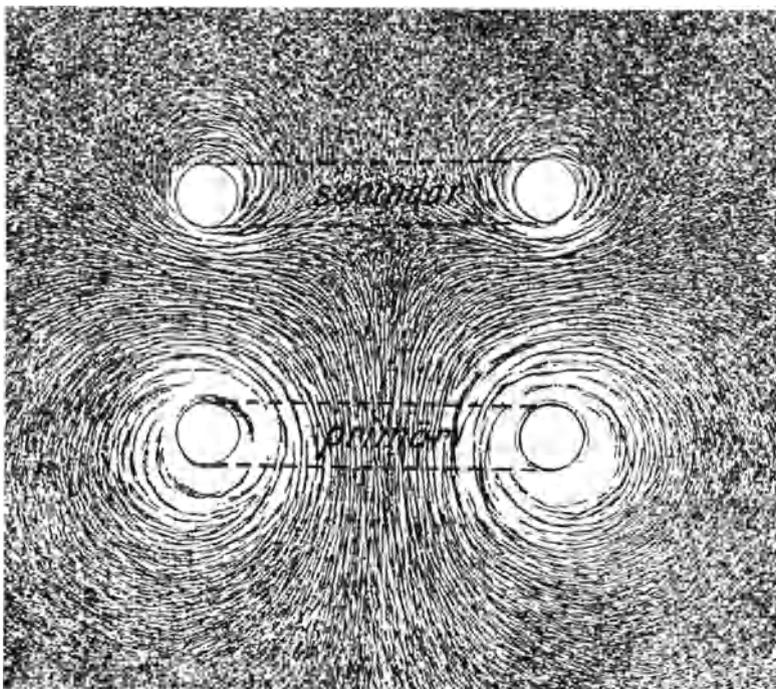


Abb. 219. Kraftlinienstauung zwischen einer primären und einer sekundären (kurzgeschlossenen) Windung ohne Eisenkern.

¹⁾ Der Unterschied zwischen gestrichelten und strichpunktierten Kraftlinien in Abb. 216 ist nur des leichteren Verständnisses wegen gemacht; in Wirklichkeit besteht keinerlei Unterschied zwischen primären und sekundären Kraftlinien, sondern sie geben zusammen ein resultierendes magnetisches Feld, wie es in Abb. 219 durch Eisenfeilspäne dargestellt wurde.

die nur den primären oder nur den sekundären Leiter umschließen, sind an der magnetischen Kupplung unbeteiligt. Man bezeichnet sie als Streufelder, und zwar bilden diejenigen Kraftlinien, die nur den primären Leiter umschließen, das primäre Streufeld, jene, die nur den sekundären Leiter umschließen, das sekundäre Streufeld. Da jedes Streufeld eben nur von seinem Strome erzeugt wird,

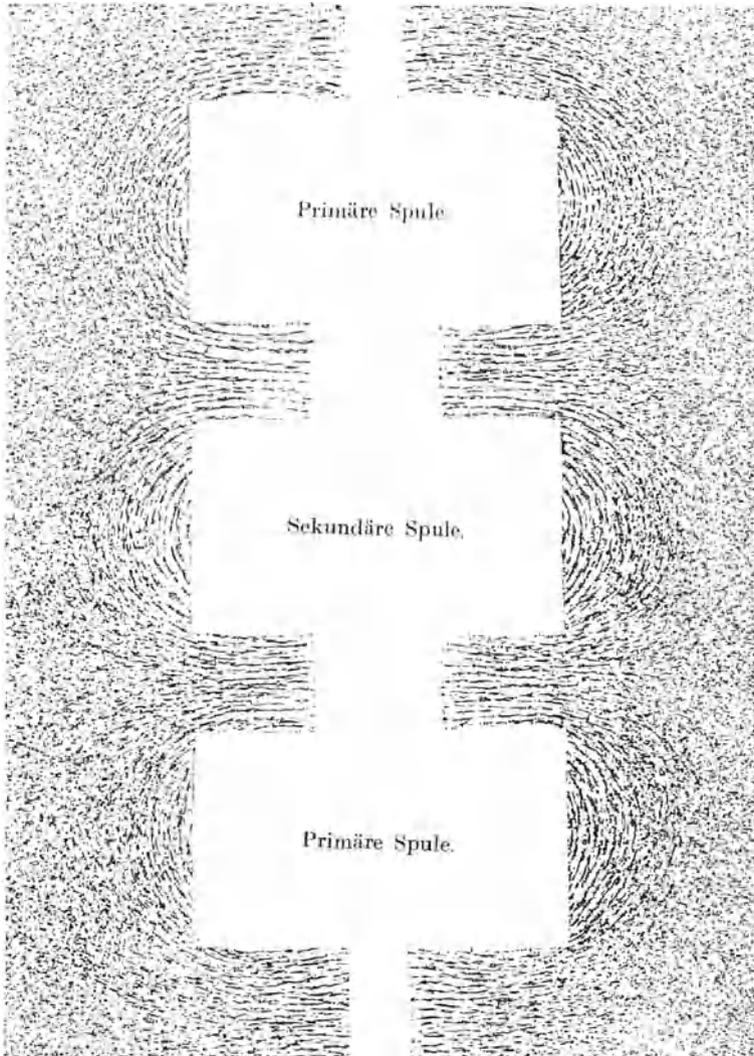


Abb. 220. Kraftlinienstauung zwischen primären und sekundären Spulen mit durchgehendem Eisenkern.

muß es in jedem Augenblick der Stromstärke und Windungszahl, also der MMK des betreffenden Stromkreises proportional seien.

In Abb. 219 sind die primären und sekundären Streulinien und das gemeinsame Feld eines Transformators ohne Eisenkern gemäß Abb. 216 zu sehen¹⁾. Abb. 220 zeigt die Streulinien zweier primären und einer sekundären Spule, die über einen Eisenkern geschoben sind. In diesem verläuft das gemeinsame Feld, so daß es hier nicht zu sehen ist.

Die induzierte EMK und der daraus entstehende sekundäre Strom ist um so größer, je mehr Kraftlinien den sekundären Stromkreis durchsetzen, d. h. einen je größeren Teil des gesamten magnetischen Feldes das gemeinsame Feld bildet (je stärker die magnetische Kuppelung ist), oder je kleiner die Streufelder im Vergleich zum gemeinsamen Felde sind. Die günstigste Anordnung der beiden Stromkreise ist mithin die, wenn sie parallel zueinander sind und den kleinstmöglichen Abstand haben, also sich berühren. Dennoch können die Streufelder niemals gleich Null werden, weil ja Kraftlinien auch innerhalb der Stromleiter selbst, parallel zur Oberfläche und senkrecht zu den Stromfäden verlaufen.

145. Die Augenblickswerte der magnetischen Felder und die magnetischen Widerstände.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß mehrere Kraftlinienbündel oder magnetische Felder hinsichtlich ihres Verlaufes zu unterscheiden sind. Wir wollen nun ihre gegenseitigen Beziehungen

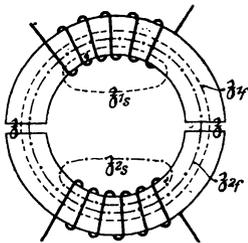


Abb. 221. Schematische Darstellung der Augenblickswerte der Feldkomponenten.

näher untersuchen, und zwar für den allgemeinen Fall, daß der sekundäre Stromkreis geschlossen ist, also auch Strom führt. Wir benutzen dazu die schematische Darstellung der Augenblickswerte in Abb. 221. Der besseren Übersicht wegen ist jedes Kraftlinienbündel (Komponente) nur durch eine Linie dargestellt, und zwar die primären gestrichelt, die sekundären strichpunktiert.

Von den gesamten Kraftlinien, die der primäre Strom erzeugt, durchsetzt in jedem Augenblick ein Teil, wir bezeichnen ihn mit β_{1f} , die sekundäre Wicklung, der übrige Teil

¹⁾ Das gemeinsame Feld ist hier nur schwach ausgebildet. Der sekundäre Stromkreis besteht nämlich aus einer dicken, verlöteten Windung. Dieser Fall entspricht also einem kurzgeschlossenen Transformator, wo das gemeinsame Feld schwach ist (§ 153). In Abb. 219 und 220 erkennt man deutlich die vom sekundären Strom herrührende Stauung der Kraftlinien (§ 109). Wäre der sekundäre Teil stromlos, oder hätte sein Strom gleiche Richtung wie der primäre, so würden die Kraftlinien anders verlaufen.

nicht. Der letztere ist also das primäre Streufeld; wir bezeichnen es mit δ_{1s} . Von den Kraftlinien, die der sekundäre Strom erzeugt, durchsetzt ein Teil δ_{2f} die primäre Wicklung, während der Rest das sekundäre Streufeld δ_{2s} bildet.

Die Komponenten δ_{1f} und δ_{2f} , die beide Stromkreise durchsetzen, bilden ein resultierendes Feld δ , das wir schon auf S. 253 als gemeinsames Feld bezeichnet haben. Es ist also in jedem Augenblick

$$\delta = \delta_{1f} + \delta_{2f} \dots \dots \dots (130)$$

Da die Komponenten δ_{1f} und δ_{2f} niemals als selbständige Felder vorkommen, bezeichnet man sie auch als fiktive Felder; daher der Index f .

In dem von der primären Wicklung umschlossenen Teile des Eisenkernes lagern sich, wie Abb. 221 zeigt, drei Kraftlinienbündel übereinander, nämlich δ_{1f} , δ_{2f} , δ_{1s} und bilden hier ein resultierendes Feld, das wir als primäres Feld δ_1 bezeichnen, weil es von der primären Wicklung umschlossen wird¹⁾. Es ist also:

$$\delta_1 = \delta_{1s} + \delta_{1f} + \delta_{2f} = \delta_{1s} + \delta \dots \dots (131)$$

Das von der sekundären Wicklung umschlossene Feld bezeichnen wir als sekundäres Feld δ_2 und es ist:

$$\delta_2 = \delta_{2s} + \delta_{1f} + \delta_{2f} = \delta_{2s} + \delta \dots \dots (132)$$

Nach dem in § 105 entwickelten Grundgesetze ist die Kraftlinienmenge irgendeines Kraftlinienbündels (Feldes) gleich der MMK, dividiert durch den magnetischen Widerstand. Die MMK des primären Stromkreises ist in jedem Augenblick $4\pi i_1 N_1$, die des sekundären Stromkreises $4\pi i_2 N_2$. Ist w_{1s} der magnetische Widerstand des primären Streufeldes, w_{2s} der des sekundären, so ist

$$\delta_{1s} = \frac{4\pi i_1 N_1}{w_{1s}} \quad \delta_{2s} = \frac{4\pi i_2 N_2}{w_{2s}} \dots \dots (133)$$

Die beiden, das gemeinsame Feld bildenden Komponenten δ_{1f} , δ_{2f} haben denselben magnetischen Widerstand w , da sie denselben Weg durchlaufen, mithin ist:

$$\delta_{1f} = \frac{4\pi i_1 N_1}{w} \quad \delta_{2f} = \frac{4\pi i_2 N_2}{w} \dots \dots (134)$$

und nach Gl. (130):
$$\delta = \frac{4\pi i_1 N_1}{w} + \frac{4\pi i_2 N_2}{w} \dots \dots (135)$$

Das primäre Feld δ_1 besteht nach Gl. (131) aus den beiden

¹⁾ Daß ein Feld von einer Wicklung umschlossen wird, ist nicht gleichbedeutend damit, daß es von dieser Wicklung erzeugt wird. So wird z. B. das primäre Feld δ_1 von der primären Wicklung umschlossen, enthält aber auch den von der sekundären Wicklung erzeugten Teil δ_{2f} .

Zweigen δ_{1s} und δ . Mithin gilt für den magnetischen Widerstand w_1 des Feldes δ_1 laut § 108 die Beziehung:

$$\frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_{1s}} + \frac{1}{w} \dots \dots \dots (136)$$

In gleicher Weise gilt für den magnetischen Widerstand w_2 des sekundären Feldes δ_2 die Beziehung:

$$\frac{1}{w_2} = \frac{1}{w_{2s}} + \frac{1}{w} \dots \dots \dots (137)$$

Beim einadrigen Kabel (Abb. 218) besteht das gemeinsame magnetische Feld δ aus jenen Kraftlinien des Leiters und der stromführenden Hülle, welche Leiter und Hülle umschließen, also außerhalb der Hülle liegen. Das primäre Streufeld δ_{1s} besteht aus jenen Kraftlinien des Leiters, welche zwischen ihm und Hülle liegen. Je größer der Abstand zwischen Leiter und Hülle (Isolation), desto größer ist die Streuung. Das sekundäre Streufeld δ_{2s} ist null, denn ein vom Strom durchflossenes Rohr enthält im Innenraum keine Kraftlinien. Hier ist also $\delta_2 = \delta = \delta_{1f} + \delta_{2f}$.

146. Die elektromotorischen Kräfte.

Die primäre Wicklung, die aus N_1 Windungen besteht, umschließt das primäre Feld δ_1 . Mithin ist die primäre EMK e_1 :

$$e_1 = -N_1 \frac{d\delta_1}{dt}.$$

Die sekundäre Wicklung, die aus N_2 Windungen besteht, umschließt das sekundäre Feld δ_2 . Mithin ist die sekundäre EMK e_2 :

$$e_2 = -N_2 \frac{d\delta_2}{dt}.$$

Mach Einführung der Gl. (131) bzw. (132) ergibt sich;

$$e_1 = -N_1 \frac{d\delta_{1s}}{dt} - N_1 \frac{d\delta}{dt} \dots \dots \dots (138)$$

$$e_2 = -N_2 \frac{d\delta_{2s}}{dt} - N_2 \frac{d\delta}{dt} \dots \dots \dots (139)$$

Es besteht also jede dieser EMKe aus zwei Komponenten: aus einer vom primären bzw. sekundären Streufelde induzierten EMK, die wir EMK der Streuung oder Streuspannung e_{1s} bzw. e_{2s} nennen und aus einer vom gemeinsamen Felde δ induzierten EMK, die wir mit $e_{1\delta}$ bzw. $e_{2\delta}$ bezeichnen; jede hat negatives Vorzeichen. Somit ist

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_{1s} + e_{1\delta} \\ e_2 &= e_{2s} + e_{2\delta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (140)$$

Setzen wir wie immer voraus, daß sich die magnetischen Felder sinusförmig ändern, so ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} \sin \omega t.$$

Dann ist

$$e_{1\mathfrak{z}} = -N_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\omega N_1 \mathfrak{Z} \cos \omega t = \mathfrak{E}_{2\mathfrak{z}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$e_{2\mathfrak{z}} = -N_2 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\omega N_2 \mathfrak{Z} \cos \omega t = \mathfrak{E}_{2\mathfrak{z}} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Daraus folgt:

$$\frac{e_{2\mathfrak{z}}}{e_{1\mathfrak{z}}} = \frac{\mathfrak{E}_{2\mathfrak{z}}}{\mathfrak{E}_{1\mathfrak{z}}} = \frac{E_{2\mathfrak{z}}}{E_{1\mathfrak{z}}} = \frac{N_2}{N_1} = \ddot{u} (141)$$

wobei $\mathfrak{E}_{1\mathfrak{z}}$, $\mathfrak{E}_{2\mathfrak{z}}$ die Scheitelwerte, $E_{1\mathfrak{z}}$, $E_{2\mathfrak{z}}$ die effektiven Werte dieser EMKe bedeuten. Die vom gemeinsamen Felde induzierten EMKe verhalten sich also wie die Windungszahlen. Dieses Verhältnis bezeichnet man als Übersetzungsverhältnis \ddot{u} . Aus den Gl. (140) ersieht man, daß dies für die primäre und sekundäre EMK e_1 , e_2 nicht gilt, oder nur für den besonderen Fall, daß die Streuspannungen e_{1s} , e_{2s} Null sind (streuungsloser Transformator), weil dann $e_1 = e_{1\mathfrak{z}}$ und $e_2 = e_{2\mathfrak{z}}$ ist. Einen völlig streuungslosen Transformator gibt es allerdings nicht, aber viele Transformatoren kann man angenähert als streuungslos betrachten. Induktionsmotoren haben immer eine beträchtliche Streuung, weil primärer und sekundärer Eisenkörper durch einen Luftzwischenraum getrennt sind.

Ferner ersieht man aus den obigen Gleichungen, daß die EMKe $e_{1\mathfrak{z}}$ und $e_{2\mathfrak{z}}$ dem gemeinsamen Felde \mathfrak{z} , von dem sie induziert werden, um $\frac{\pi}{2}$ oder 90° in der Phase nacheilen, wie bei einem einzelnen Wechselstrom und seinem magnetischen Felde (§ 128).

Wendet man die Grundgleichung $e_1 = -N_1 \frac{d\mathfrak{z}_1}{dt}$ auf Gl. (131) an, so erhält man

$$e_1 = -N_1 \frac{d\mathfrak{z}_{1s}}{dt} - N_1 \frac{d\mathfrak{z}_{1f}}{dt} - N_1 \frac{d\mathfrak{z}_{2f}}{dt}.$$

Ebenso erhält man aus $e_2 = -N_2 \frac{d\mathfrak{z}_2}{dt}$ und Gl. (132):

$$e_2 = -N_2 \frac{d\mathfrak{z}_{2s}}{dt} - N_2 \frac{d\mathfrak{z}_{2f}}{dt} - N_2 \frac{d\mathfrak{z}_{1f}}{dt}.$$

Aus Gl. (133) und (134) folgt dann weiter:

$$e_1 = -\frac{4\pi N_1^2}{w_{1s}} \frac{di_1}{dt} - \frac{4\pi N_1^2}{w} \frac{d\dot{i}_1}{dt} - \frac{4\pi N_1 N_2}{w} \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -\frac{4\pi N_2^2}{w_{2s}} \frac{di_2}{dt} - \frac{4\pi N_2^2}{w} \frac{d\dot{i}_2}{dt} - \frac{4\pi N_1 N_2}{w} \frac{di_1}{dt}.$$

In diesen Gleichungen haben die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite Faktoren von gleicher Art wie jener, den wir bei einem einzelnen Stromkreis (S. 228) als Koeffizient der Selbstinduktion bezeichnet haben. Setzen wir

$$\frac{4\pi N_1^2}{w_{1s}} = L_{1s} \quad \frac{4\pi N_2^2}{w_{2s}} = L_{2s} \dots \dots (142)$$

so sind das die den beiden Streufeldern entsprechenden Koeffizienten der Selbstinduktion¹⁾.

Setzen wir

$$\frac{4\pi N_1^2}{w} = L_{1f} \quad \frac{4\pi N_2^2}{w} = L_{2f} \dots \dots (143)$$

so sind das die den Komponenten δ_{1f} , δ_{2f} des gemeinsamen Feldes entsprechenden Koeffizienten der Selbstinduktion.

Der Faktor

$$\frac{4\pi N_1 N_2}{w} = M \dots \dots (144)$$

kommt in beiden Gleichungen vor.

Setzen wir diese Faktoren ein, so ist

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -L_{1s} \frac{di_1}{dt} - L_{1f} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= -L_{2s} \frac{di_2}{dt} - L_{2f} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (145)$$

Vergleicht man diese mit Gl. (140), so findet man für die Streuspannungen:

$$\left. \begin{aligned} e_{1s} &= -L_{1s} \frac{di_1}{dt} \\ e_{2s} &= -L_{2s} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (146)$$

und für die vom gemeinsamen Felde induzierten EMKe:

$$\left. \begin{aligned} e_{1f} &= -L_{1f} \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_{2f} &= -L_{2f} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (147)$$

¹⁾ Die durch Gl. (142) definierten Selbstinduktionen gelten strenge nur für den Fall, daß sämtliche primären Streulinien sämtliche primären Windungen, und sämtliche sekundären Streulinien sämtliche sekundären Windungen durchsetzen. Das braucht aber nicht der Fall zu sein, sondern es gibt primäre Streulinien, die nur einen Teil der primären Windungen, und sekundäre, die nur einen Teil der sekundären Windungen durchsetzen. Dann treten an Stelle der obigen Ausdrücke für L_{1s} , L_{2s} kompliziertere, die von der Gestalt der Spulen abhängen. Qualitativ ändert sich aber dadurch an der ganzen Darstellung nichts. Die allgemeine Definition der Induktionskoeffizienten siehe in § 118, 119.

Demnach besteht die vom gemeinsamen Felde in der primären Wicklung induzierte EMK e_{1s} aus einem vom primären Strom und einem vom sekundären Strom herrührenden Teil; ebenso die vom gemeinsamen Felde in der sekundären Wicklung induzierte EMK e_{2s} . Beide, vom anderen Strom herrührenden Teile sind proportional M , weshalb man M als Koeffizient der gegenseitigen Induktion bezeichnet; er bringt die in § 144 betonte Rückwirkung des einen Stromes auf den anderen zum Ausdruck.

In jeder der beiden Gleichungen kann man die zwei ersten Glieder auf der rechten Seite zusammenziehen und erhält so

$$e_1 = -(L_{1s} + L_{1f}) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -(L_{2s} + L_{2f}) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Aus den Definitionsgleichungen (142), (143) und (136), (137) folgt:

$$\left. \begin{aligned} L_{1s} + L_{1f} &= 4\pi N_1^2 \left(\frac{1}{w_{1s}} + \frac{1}{w} \right) = \frac{4\pi N_1^2}{w_1} = L_1 \\ L_{2s} + L_{2f} &= 4\pi N_2^2 \left(\frac{1}{w_{2s}} + \frac{1}{w} \right) = \frac{4\pi N_2^2}{w_2} = L_{2i} \end{aligned} \right\} \cdot (148)$$

Das sind also die dem gesamten primären und sekundären Felde (gemäß den magnetischen Widerständen w_1 , w_2) entsprechenden Selbstinduktionskoeffizienten. Wir haben bei L_{2i} noch den Index i hinzugesetzt, weil sich dieser Koeffizient nur auf die Wicklung, also nur auf den inneren Teil des sekundären Stromkreises bezieht. Dieser muß unterschieden werden von dem später in Betracht kommenden Koeffizienten L_{2a} , der sich auf den äußeren Teil des sekundären Stromkreises bezieht (vgl. Abb. 222).

Man ersieht aus den letzten Gleichungen, daß sich in jeder Wicklung die Selbstinduktionskoeffizienten der Streufelder und des gemeinsamen Feldes ohne weiteres addieren und die gesamte Selbstinduktion der betreffenden Wicklung ergeben.

Die Gleichungen (145) gehen nun über in

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= -L_{2i} \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (149)$$

¹⁾ Da $e_1 = -N_1 \frac{d\delta_1}{dt}$, so folgt daraus auch

$$\delta_1 = \frac{L_1}{N_1} i_1 + \frac{M}{N_1} i_2 = \delta_{1s} + \delta_{1f} + \delta_{2f}.$$

Weil aber $L_1 = L_{1s} + L_{1f}$, so besteht das erste Glied von δ_1 aus δ_{1s} und δ_{1f} ; das sind die in Abb. 221 durch gestrichelte Linien angedeuteten Kraftlinien-

Sind die Ströme i_1 und i_2 Sinuswellen, so ergeben sich aus den Gl. (146) in gleicher Weise wie auf S. 230 folgende Ausdrücke für die effektiven Werte der Streuspannungen:

$$E_{1s} = \omega L_{1s} J_1, \quad E_{2s} = \omega L_{2s} J_2.$$

Für die EMKe E_{13} , E_{23} , E_1 , E_2 gibt es keine ähnlichen Ausdrücke, weil sie gemäß obigen Gleichungen von beiden Strömen abhängen. Wohl aber gelten folgende, wie auf S. 230 gebildeten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} E_{1s} &= 4,44 \nu N_1 \mathfrak{B}_{1s} 10^{-8} & E_{2s} &= 4,44 \nu N_2 \mathfrak{B}_{2s} 10^{-8} \\ E_{13} &= 4,44 \nu N_1 \mathfrak{B} 10^{-8} & E_{23} &= 4,44 \nu N_2 \mathfrak{B} 10^{-8} \\ E_1 &= 4,44 \nu N_1 \mathfrak{B}_1 10^{-8} & E_2 &= 4,44 \nu N_2 \mathfrak{B}_2 10^{-8} \end{aligned} \right\} (150)$$

weil die Felder \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 ebenso wie \mathfrak{B}_{1s} und \mathfrak{B}_{2s} selbständig bestehen. Jede EMK hat 90° Phasenverschiebung gegen die zu ihr gehörige Kraftlinienmenge.

147. Die Spannungsgleichungen.

Für das folgende gibt Abb. 222 eine Übersicht über die in Betracht kommenden Größen: K_1 ist die den primären Klemmen aufgedrückte, von einer äußeren Stromquelle zugeführte Klemmenspannung.

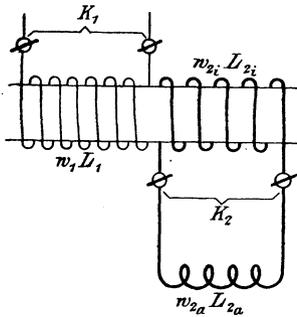


Abb. 222.

w_1 ist der Widerstand, L_1 die Selbstinduktion der primären Wicklung. Der sekundäre Stromkreis wird durch seine Klemmen, zwischen denen die Spannung K_2 besteht, in zwei Teile geteilt. Der innere besteht aus der sekundären Wicklung mit dem Widerstande w_{2i} und der Selbstinduktion L_{2i} . Der äußere Teil des sekundären Stromkreises besteht aus dem, was an die sekundären Klemmen angeschlossen ist und enthält den äußeren Widerstand w_{2a} und die äußere

Selbstinduktion L_{2a} . Die zusammengehörigen Größen addieren sich. Daher ist der gesamte Ohmsche Widerstand des ganzen sekundären Stromkreises

$$w_2 = w_{2i} + w_{2a} \dots \dots \dots (151)$$

bündel, die vom primären Strom erzeugt werden. Hingegen ist das zweite Glied das vom sekundären Strom erzeugte und mit den primären Windungen N_1 verkettete Kraftlinienbündel \mathfrak{B}_{2f} . Ebenso ergibt sich

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{L_{2f}}{N_2} + \frac{M}{N_2} i_1,$$

dessen Teile entsprechend zu deuten sind (vgl. § 118, 119, 167).

und die gesamte Selbstinduktion des ganzen sekundären Stromkreises ist

$$L_2 = L_{2i} + L_{2a} \dots \dots \dots (152)$$

Um die Beziehungen für die effektiven Werte aufstellen zu können, müssen zunächst die Spannungsgleichungen in Augenblickswerten aufgestellt werden.

Um von den KMKen e_1, e_2 zu den Klemmenspannungen k_1, k_2 zu gelangen, ist der Ohmsche Spannungsabfall $w_1 i_1$ bzw. $w_{2i} i_2$ zu berücksichtigen. Gemäß Gl. (107) ist

$$k_1 = w_1 i_1 - e_1 \dots \dots \dots (153)$$

und nach Einführung der Gl. (145):

$$k_1 = w_1 i_1 + L_{1s} \frac{di_1}{dt} + L_{1f} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \dots \dots (154)$$

oder gemäß Gl. (148):

$$k_1 = w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \dots \dots \dots (155)$$

Für die sekundäre Wicklung ist:

$$k_2 = w_{2i} i_2 - e \dots \dots \dots (156)$$

$$k_2 = w_{2i} i_2 + L_{2s} \frac{di_2}{dt} + L_{2f} \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \dots \dots (157)$$

$$k_2 = w_{2i} i_2 + L_{2i} \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \dots \dots \dots (158)$$

Setzt man die Gl. (147) in (154) bzw. (157) ein, so ist:

$$k_1 = w_1 i_1 + L_{1s} \frac{di_1}{dt} - e_{1i}$$

$$k_2 = w_{2i} i_2 + L_{2s} \frac{di_2}{dt} - e_{2i},$$

d. h. die Klemmenspannung jeder Wicklung besteht aus der vom gemeinsamen magnetischen Felde induzierten EMK, dem Ohmschen Spannungsabfall und dem induktiven Spannungsabfall. Letzterer ist gleich der negativen Streuspannung.

Betrachten wir den äußeren Teil des sekundären Stromkreises mit dem Widerstande w_{2a} und der Selbstinduktion L_{2a} , so gilt wie in § 132

$$-k_2 = w_{2a} i_2 + L_{2a} \frac{di_2}{dt} \dots \dots \dots (159)$$

Hier muß k_2 negatives Vorzeichen erhalten (im Gegensatz zu Gl. 156 u. f.), weil hier die Spannung dem w_{2a} und L_{2a} von außen auf-

gedrückt wird, während Gl. 158 diejenigen Glieder enthält, aus denen k_2 in der sekundären Wicklung entsteht.

Addiert man Gl. (158) und (159), so ist

$$0 = (w_{2i} + w_{2a})i_2 + (L_{2i} + L_{2a})\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

oder

$$0 = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \dots \dots \dots (160)$$

Daß die linke Seite null ist, bedeutet, daß in diesem geschlossenen Stromkreis keine andere Spannung vorkommt, als die auf der rechten Seite stehenden.

148. Der sekundäre Strom und seine Phasenverschiebungen.

Für den sekundären Strom J_2 und seine Beziehungen zur sekundären Klemmenspannung K_2 gilt natürlich dieselbe Beziehung wie für einen einzelnen Stromkreis, da der äußere Teil des sekundären Kreises von den Vorgängen im Inneren des Transformators nicht berührt wird. Es ist also wie in § 133:

$$J_2 = \frac{K_2}{\sqrt{w_{2a}^2 + (\omega L_{2a})^2}} \dots \dots \dots (161)$$

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{\omega L_{2a}}{w_{2a}} \dots \dots \dots (162)$$

wenn φ_2 die Phasenverschiebung zwischen dem sekundären Strom und seiner Klemmenspannung bedeutet.

Derselbe Strom kann aber auch durch die EMK E_2 dargestellt werden. Da diese nur aus den drei letzten Gliedern der Gl. (157) besteht, so arbeitet E_2 nicht nur auf den äußeren Stromkreis, sondern auch auf den Widerstand w_{2i} , im ganzen also auf den Ohmschen Widerstand $w_{2i} + w_{2a} = w_2$ und auf den induktiven Widerstand ωL_{2a} . Es ist also

$$J_2 = \frac{E_2}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_{2a})^2}}$$

und die Phasenverschiebung β dieses Stromes gegen diese EMK ist

$$\text{tg } \beta = \frac{\omega L_{2a}}{w_2}.$$

Der Strom J_2 kann auch in Abhängigkeit von der EMK $E_{2\beta}$, die vom gemeinsamen Felde β induziert wird, dargestellt werden. Da diese nur aus den zwei letzten Gliedern der Gl. 157 besteht, so arbeitet sie nicht nur auf den äußeren Stromkreis, sondern auch auf w_{2i} und ωL_{2s} , d. h. auf den gesamten Ohmschen Widerstand w_2 und auf den induktiven Widerstand $\omega L_{2s} + \omega L_{2a}$. Mithin ist:

$$J_2 = \frac{E_{2i}}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_{2s} + \omega L_{2a})^2}}$$

und die Phasenverschiebung ξ gegen diese EMK ist:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\omega L_{2s} + \omega L_{2a}}{w_2}.$$

Ist der Transformator streuungslos, d. h. ist $L_{2s} = 0$, so ist $\beta = \xi$ und $\xi < \varphi_2$. Im anderen extremen Falle, d. h. wenn $w_{2i} = 0$, ist $w_2 = w_{2a}$ und daher $\xi > \varphi_2$; zugleich ist $\beta = \varphi_2$. Alle wirklich vorkommenden Fälle liegen zwischen diesen äußersten Grenzen.

Ist der Transformator induktionslos belastet, d. h. enthält der äußere Stromkreis keine Selbstinduktion: $L_{2a} = 0$, so ist $\varphi_2 = \beta = 0$. Es liegen also K_2 und E_2 in gleicher Richtung wie der Strom J_2 und der Ohmsche Spannungsabfall $w_{2i} J_2$. Mithin ist $K_2 = E_2 - w_{2i} J_2$.

Die Phasenverschiebungswinkel sind in Abb. 228 übersichtlich zusammengestellt.

149. Die Scheitelwerte der magnetischen Felder. Das Felddiagramm.

Da die Streufelder \mathfrak{z}_{1s} , \mathfrak{z}_{2s} und die fiktiven Felder \mathfrak{z}_{1f} , \mathfrak{z}_{2f} nur von den betreffenden Stromkreisen, zu denen sie gehören, erzeugt werden, so gelten die Gl. 133 und 134 auch für die Scheitelwerte.

Es ist also

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{1s} &= \frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w_{1s}}, & \mathfrak{z}_{2s} &= \frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w_{2s}} \\ \mathfrak{z}_{1f} &= \frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w}, & \mathfrak{z}_{2f} &= \frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w}. \end{aligned}$$

Für das gemeinsame Feld \mathfrak{z} , das primäre Feld \mathfrak{z}_1 und das sekundäre Feld \mathfrak{z}_2 gelten solche einfache Beziehungen nicht, weil jedes einen primären und einen sekundären Bestandteil (gemäß Gl. 131, 132, 135) enthält. Diese Scheitelwerte müssen daher besonders ermittelt werden. Für diesen Zweck müssen wir annehmen, daß alle Größen sinusförmig verlaufen. Wir setzen

$$\begin{aligned} i_2 &= \mathfrak{S}_2 \sin \omega t \\ i_1 &= \mathfrak{S}_1 \sin(\omega t + \chi) \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{z} \sin(\omega t + \gamma). \end{aligned}$$

Hier bedeutet χ die vorläufig noch unbekanntes Phasenverschiebung zwischen i_1 und i_2 , und γ die ebenfalls noch unbekanntes Phasenverschiebung zwischen \mathfrak{z} und i_2 . Setzt man diese Funktionen in Gl. 135 ein, so erhält man (nach Voranstellung des primären Wertes):

$$\frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w} \sin(\omega t + \chi) = \mathfrak{z} \sin(\omega t + \gamma) - \frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w} \sin \omega t.$$

Da diese Gleichung zu jeder beliebigen Zeit gelten muß, also auch für $\omega t = 0$ und $\omega t = 90^\circ$, so erhält man durch Einsetzen dieser Werte wie auf S. 232 die beiden folgenden Gleichungen

$$\frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w} \sin \chi = \mathfrak{J} \sin \gamma,$$

$$\frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w} \cos \chi = \mathfrak{J} \cos \gamma - \frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w}.$$

Quadriert man diese und addiert sie dann, so ergibt sich

$$\left(\frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w}\right)^2 = \mathfrak{J}^2 - 2\mathfrak{J} \frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w} \cos \gamma + \left(\frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w}\right)^2. \quad (163)$$

Diese Gleichung stellt ein Dreieck dar (Abb. 223), wo $\frac{4\pi \mathfrak{S}_1 N_1}{w}$ die dem Winkel γ gegenüberliegende Seite, \mathfrak{J} und $\frac{4\pi \mathfrak{S}_2 N_2}{w}$ die beiden anderen Seiten sind¹⁾. Zeichnet man das Diagramm so, daß \mathfrak{J} als Resultierende der beiden fiktiven Felder erscheint, wie es tatsächlich den physikalischen Verhältnissen entspricht, so erhält man Abb. 224, in der auch die entsprechenden Phasenwinkel eingezeichnet sind.

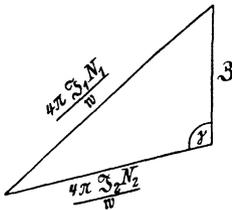


Abb. 223.

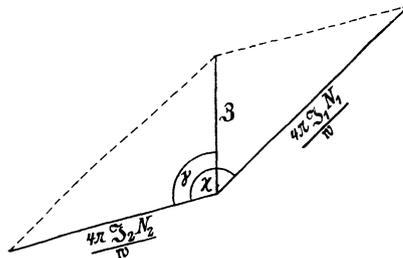


Abb. 224.

Wird die EMK $E_{1\mathfrak{J}}$ konstant gehalten, so muß auch $E_{2\mathfrak{J}}$ und das gemeinsame magnetische Feld \mathfrak{J} konstant bleiben, weil die Gleichungen 141 und 150 unter allen Umständen gelten, wie groß auch der primäre und sekundäre Strom sein mag. Das erklärt sich daraus, daß die Phasenverschiebung χ um so größer ist, je größer die Ströme sind, und zwar so, daß die Diagonale \mathfrak{J} immer dieselbe bleibt, wie groß auch die Seiten des Parallelogramms werden mögen.

Wird nicht die EMK, sondern die Klemmenspannung konstant gehalten, so kann das Feld \mathfrak{J} bei wachsender Stromstärke nicht konstant bleiben, weil mit der Stromstärke der Spannungsabfall zu-

¹⁾ Der Winkel γ ist hier als stumpfer gezeichnet, weil dies der gewöhnliche Fall ist. Im folgenden ergibt sich, wann er ein rechter oder ein spitzer ist.

nimmt, und die EMK $E_{1\beta}$ infolgedessen abnimmt. Das Feld \mathfrak{B} hängt aber von dieser, nicht von der Klemmenspannung ab.

Ist der Transformator streuungslos ($L_{2s} = 0$), und seine Belastung induktionslos ($\omega L_{2a} = 0$), so ist $\varphi_2 = \beta = \xi = 0$ (§ 148). Das heißt die Vektoren $J_2, K_2, E_2, E_{2\beta}$ liegen in gleicher Richtung; und weil zwischen $E_{2\beta}$ und \mathfrak{B} eine Phasenverschiebung von 90° besteht, so ist $\gamma = 90^\circ$, und das Diagramm geht über in Abb. 225.

Nach § 145 ist der Augenblickswert des gesamten von der primären Wicklung umschlossenen Feldes $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{1s} + \mathfrak{B}$. Den Scheitelwert \mathfrak{B}_1 findet man entweder rechnerisch, indem man für \mathfrak{B}_{1s} und \mathfrak{B} die Sinusfunktionen mit ihren Phasenverschiebungen gegen \mathfrak{B} einführt, oder indem man die Addition geometrisch ausführt. Wenn man dies tut, braucht man das Diagramm Abb. 224 nur durch die Streufelder zu ergänzen. Da sich das fiktive Feld \mathfrak{B}_{1f} und das Streufeld \mathfrak{B}_{1s} von dem Strome \mathfrak{I}_1 nur durch konstante Faktoren unterscheiden, so haben sie gleiche Phase. Mithin muß \mathfrak{B}_{1s} in gleicher Lage wie \mathfrak{I}_1 eingezeichnet werden (Abb. 226), und die Resultierende OD aus \mathfrak{B}_{1s} und \mathfrak{B} ist der Scheitelwert des primären Feldes \mathfrak{B}_1 . Auf gleiche Weise findet man das sekundäre Feld $\mathfrak{B}_2 = OF$ als Resultierende aus \mathfrak{B}_{2s} und \mathfrak{B} gemäß der auf S. 257 gefundenen Beziehung für die Augenblickswerte: $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_{2s} + \mathfrak{b}$.

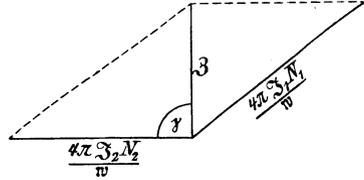


Abb. 225.

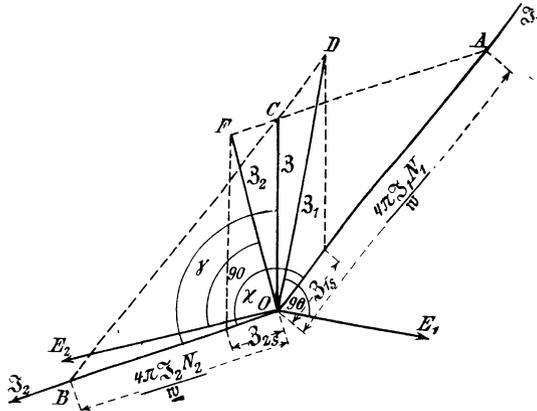


Abb. 226.

Das primäre Feld \mathfrak{B}_1 erzeugt die primäre EMK E_1 mit 90° Phasenverschiebung (§ 128), und das sekundäre Feld \mathfrak{B}_2 erzeugt die sekundäre EMK E_2 mit 90° Phasenverschiebung. Dementsprechend sind sie in Abb. 226 eingezeichnet.

Zieht man von D aus eine Parallele zu CA (Abb. 227), so ist

$$AG = CD = \mathfrak{Z}_{1s}$$

und

$$OG = GA + AO = \mathfrak{Z}_{1s} + \mathfrak{Z}_{1f}$$

Setzt man die Werte ein, so ist

$$OG = \frac{4\pi \mathfrak{Z}_1 N_1}{w_{1s}} + \frac{4\pi \mathfrak{Z}_1 N_1}{w} = 4\pi \mathfrak{Z}_1 N_1 \left(\frac{1}{w_{1s}} + \frac{1}{w} \right)$$

und infolge Gl. 136

$$OG = \frac{4\pi \mathfrak{Z}_1 N_1}{w_1}$$

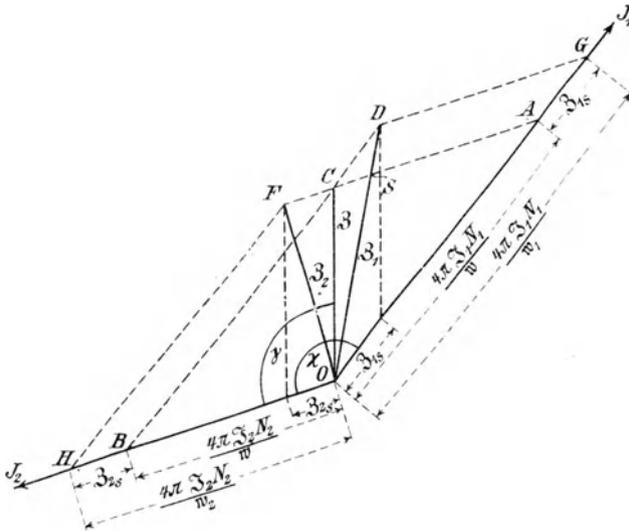


Abb. 227.

Zieht man von F aus eine Parallele zu CB , so findet man in gleicher Weise

$$OH = \frac{4\pi \mathfrak{Z}_2 N_2}{w_2}$$

Das primäre Feld \mathfrak{Z}_1 erscheint demnach entweder als Resultierende der wirklich vorhandenen Felder \mathfrak{Z}_{1s} und \mathfrak{Z} oder als Resultierende der fiktiven Felder OG und OB , wovon das erste vom primären, das zweite vom sekundären Strom erzeugt wird. Analog verhält es sich mit dem sekundären Felde \mathfrak{Z}_2 .

Stellt man magnetische Felder durch Eisenfeilspäne dar, so erhält man natürlich nur die wirklich vorhandenen Felder, wie in Abb. 219 und 220, nicht aber die Komponenten oder fiktiven Felder.

Ist w_2 oder ωL_2 unendlich groß, so daß der sekundäre Strom

$\mathfrak{J}_2 = 0$ ist (Leerlauf), so ist auch das sekundäre Streufeld \mathfrak{J}_{2s} und das sekundäre fiktive Feld \mathfrak{J}_{2f} null. Infolgedessen ist

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J} = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{w} = OA$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{1s} + \mathfrak{J} = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{w_{1s}} + \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{w} = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{w_1} = OG.$$

Das Diagramm (Abb. 227) fällt also jetzt in die Linie $OG = \mathfrak{J}_1$ zusammen. Wird die Stromstärke \mathfrak{J}_1 konstant gehalten (Reihenschaltung mehrerer Transformatoren bei konstanter Stromstärke), so kann \mathfrak{J}_1 bei Leerlauf vielmal größer sein als bei Belastung. Wird hingegen die primäre Klemmenspannung konstant gehalten (Parallelbetrieb), so bleibt das primäre Feld \mathfrak{J}_1 nahezu konstant. Damit dies auch bei wachsendem sekundärem Strom der Fall ist, muß gemäß dem Diagramm auch der primäre Strom wachsen und zwar ungefähr proportional dem sekundären.

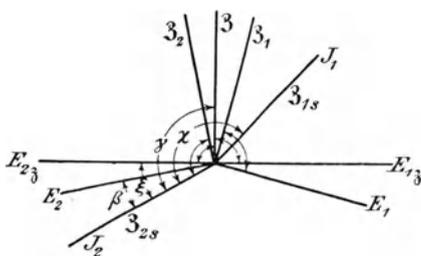


Abb. 228.

In Abb. 228 sind, um Übersicht zu gewinnen, die verschiedenen Vektoren des allgemeinen Transformators ihrer Richtung nach zusammengestellt und zwar für den Fall, daß beide Ströme ihren Spannungen nacheilen gemäß Abb. 226. Die nicht bezeichneten Winkelbögen bedeuten rechte Winkel. Es sind die Phasenverschiebungen zwischen den EMKs und ihren magnetischen Feldern. Nur die Vektoren der Klemmenspannungen K_1 und K_2 können hier nicht eingezeichnet werden. Denn wenn man die Ausdrücke für die Phasen-

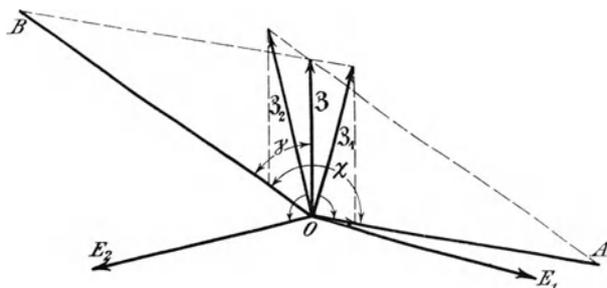


Abb. 229.

verschiebungen φ_2 und ξ in § 148 miteinander vergleicht, so sieht man, daß φ_2 größer oder kleiner als ξ sein kann, d. h. K_2 kann oberhalb oder unterhalb von E_{2s} liegen. Ebenso ist es mit dem Vektor K_1 auf der primären Seite.

Bisher wurde angenommen, daß der Winkel γ ein stumpfer sei; das entspricht dem gewöhnlichen Fall, wo primärer und sekundärer Strom ihren Spannungen nacheilen. Sie können aber auch ihren Spannungen voreilen. Das ist dann der Fall, wenn an einen Transformator ein Kondensator von genügender Größe oder ein genügend übererregter Synchronmotor angeschlossen ist. Dann liegt der Vektor J_2 oberhalb E_2 und K_2 (Abb. 229 im Gegensatz zu Abb. 226). Der Winkel γ ist infolgedessen ein spitzer, während er sonst ein stumpfer ist. In Abb. 226 ist $OA > OB$, mithin sind auch die primären Amperewindungen größer als die sekundären. Dagegen ist im Abb. 229 $OB > OA$, mithin sind jetzt die sekundären Amperewindungen größer als die primären. In allen Fällen aber wirken sie, bzw. die entsprechenden fiktiven Felder OA und OB einander entgegen, so daß das resultierende Feld β im allgemeinen kleiner ist, als jede Komponente.

150. Kupplungsfaktor. Streufaktoren.

Vergleicht man den Koeffizienten M der gegenseitigen Induktion und die Koeffizienten der Selbstinduktion (Gl. 143, 144, 148) miteinander, so sieht man, daß

$$M^2 = L_{1f} L_{2f} = (L_1 - L_{1s})(L_2 - L_{2s}) \dots \quad (164)$$

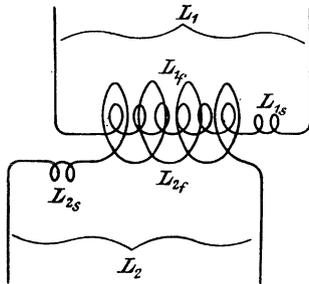


Abb. 230.

An der gegenseitigen Induktion sind also nur die dem gemeinsamen magnetischen Felde entsprechenden Koeffizienten L_{1f} und L_{2f} , aber nicht die von Streufeldern entsprechenden Koeffizienten L_{1s} und L_{2s} beteiligt. Das entspricht der schematischen Darstellung in Abb. 230. Demnach verhält sich jedes Streufeld so wie eine Drosselspule (L_{1s} bzw. L_{2s}), die der entsprechenden Wicklung eines streuungslosen Transformators mit den Koeffizienten L_{1f} , L_{2f} vorgeschaltet ist.

Nach der letzten Gleichung ist M^2 kleiner als das Produkt $L_1 L_2$. Das kann man mathematisch dadurch ausdrücken, daß man schreibt:

$$M^2 = \kappa^2 L_1 L_2 \dots \quad (165)$$

wobei κ eine Zahl ist, die kleiner ist als 1, aber größer als 0. κ heißt Kupplungsfaktor, weil er zum Ausdruck bringt, wieviel von den gesamten Selbstinduktionen L_1 , L_2 an der gegenseitigen Induktion M beteiligt ist, oder auf die Felder bezogen: wieviel vom primären und sekundären Felde am gemeinsamen Felde beteiligt ist. Und weil nur dieses von beiden Wicklungen umschlossen ist, so ist es jenes Mittel, durch das die beiden Stromkreise miteinander magnetisch

gekuppelt sind. Der Kupplungsfaktor bringt zahlenmäßig zum Ausdruck, wie stark diese Kupplung ist.

Die letzte Gleichung kann man auch so schreiben:

$$M^2 = L_1 L_{2i} - \delta L_1 L_{2i},$$

wobei δ eine Zahl ist, die kleiner ist als 1. Sie bringt zum Ausdruck, wieviel von dem Produkte $L_1 L_{2i}$ durch Streuung der gegenseitigen Induktion entzogen wird. Daher ist δ ein Streufaktor (Behn-Eschenburgscher Streufaktor).

Schreibt man $M^2 = (1 - \delta) L_1 L_{2i}$ (166)

so sieht man, daß $\kappa^2 = 1 - \delta$ }
 oder $\delta = 1 - \kappa^2$ } (167)

Wie man daraus erkennt, kommt κ um so näher an 1 heran, je kleiner die Streuung ist.

Ist $L_{1s} = 0$ und $L_{2s} = 0$, d. h. besteht keine Streuung, so ist (nach Gl. 164): $M^2 = L_1 L_{2i}$, also:

$$\kappa = 1, \quad \delta = 0.$$

Diesen Fall bezeichnet man wie in der Mechanik als starre Kupplung; er läßt sich elektrisch nicht genau verwirklichen, weil immer eine kleine Streuung vorhanden ist.

Ist $L_{1s} = L_1$ und $L_{2s} = L_{2i}$, d. h. besteht das ganze primäre und sekundäre Feld nur aus den entsprechenden Streufeldern, so ist:

$$\kappa = 0, \quad \delta = 1.$$

d. h. es gibt kein gemeinsames Feld und infolgedessen auch keine Kupplung. Die beiden Stromkreise bestehen unabhängig voneinander. Dieser Fall tritt ein, wenn bei Abb. 216 die beiden Stromkreise so weit voneinander entfernt werden, daß die Kraftlinien des einen Teiles den anderen nicht mehr erreichen.

Bei normalen Transformatoren liegt κ zwischen 0,99 und 1, also δ zwischen 0,02 und 0. Bei Drehstrominduktionsmotoren liegt κ zwischen 0,85 und 0,99, also δ zwischen 0,28 und 0,02. Bei der Funkentelegraphie kommen sehr verschiedene Kupplungen vor. Die Kupplung zwischen Sender und Empfänger entfernter Stationen liegt unter 0,0001.

Außer dem die ganze Streuung umfassenden Streufaktor δ , werden in der Elektrotechnik auch die auf S. 186 für einzelne Stromkreise definierten Streufaktoren τ und ν auf den allgemeinen Transformator angewendet, und zwar auf die primären bzw. sekundären Feldkomponenten, nicht auf die tatsächlich vorhandenen Felder.

Die Heylandschen Streufaktoren sind (mit Bezug auf die Abb. 227):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{GA}{AO} = \frac{\mathfrak{S}_{1s}}{\mathfrak{S}_{1f}} = \frac{\frac{4\pi\mathfrak{S}_1 N_1}{w_{1s}}}{\frac{4\pi\mathfrak{S}_1 N_1}{w}} = \frac{w}{w_{1s}} = \frac{L_{1s}}{L_{1f}} \\ \tau_2 &= \frac{HB}{BO} = \frac{\mathfrak{S}_{2s}}{\mathfrak{S}_{2f}} = \frac{\frac{4\pi\mathfrak{S}_2 N_2}{w_{2s}}}{\frac{4\pi\mathfrak{S}_2 N_2}{w}} = \frac{w}{w_{2s}} = \frac{L_{2s}}{L_{2f}} \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Die Hopkinsonschen Streufaktoren sind.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{GO}{AO} = \frac{w}{w_1} = \frac{L_1}{L_{1f}} \\ v_2 &= \frac{HO}{BO} = \frac{w}{w_2} = \frac{L_2}{L_{2f}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (169)$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Gl. 136 bzw. 137:

$$\begin{aligned} v_1 &= w \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w_{1s}} \right) = 1 + \frac{w}{w_{1s}} = 1 + \tau_1 \\ v_2 &= w \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w_{2s}} \right) = 1 + \frac{w}{w_{2s}} = 1 + \tau_2 \end{aligned}$$

Zwischen dem Kupplungsfaktor und den Streufaktoren ergeben sich folgende Beziehungen:

Aus Gl. 165, 144 und 148 folgt

$$\kappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_{2i}} = \frac{w_1 w_2}{w^2}.$$

Nach Gl. 168 ist

$$\frac{w^2}{w_1 w_2} = v_1 v_2.$$

Mithin:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2}} \\ \delta &= 1 - \frac{1}{v_1 v_2} = 1 - \frac{1}{1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2} \end{aligned}$$

Setzt man $\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 = \tau_g$ (gesamter Heylandscher Streufaktor), so ist $\tau_g = v_1 v_2 - 1$:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_g}}, \quad \delta = \frac{\tau_g}{1 + \tau_g}.$$

151. Das Verhältnis zwischen primärem und sekundärem Strom.

Gehen wir vom primären Strom

$$i_1 = \mathfrak{I}_2 \sin \omega t$$

aus und bezeichnen wir die Phasenverschiebung zwischen primärem und sekundärem Strom mit χ (wie schon in Abb. 224), so müssen wir den sekundären durch

$$i_2 = \mathfrak{I}_2 \sin(\omega t - \chi)$$

darstellen.

Setzt man diese Funktionen in Gl. 160 ein, so ist

$$0 = w_2 \mathfrak{I}_2 \sin(\omega t - \chi) + \omega L_2 \mathfrak{I}_2 \cos(\omega t - \chi) + \omega M \mathfrak{I}_1 \cos \omega t.$$

Diese Gleichung muß zu jeder beliebigen Zeit gelten, also auch für $\omega t = 0$ und für $\omega t = 90$. Setzt man zuerst $\omega t = 0$, so ergibt sich

$$\omega M \mathfrak{I}_1 = w_2 \mathfrak{I}_2 \sin \chi - \omega L_2 \mathfrak{I}_2 \cos \chi.$$

Setzt man $\omega t = 90$, so ergibt sich

$$0 = w_2 \mathfrak{I}_2 \cos \chi + \omega L_2 \mathfrak{I}_2 \sin \chi.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\omega^2 M^2 \mathfrak{I}_1^2 = \mathfrak{I}_2^2 [w_2^2 + (\omega L_2)^2]$$

und daraus

$$\frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1} = \frac{\omega M}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} = \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2} i}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}}.$$

Haben beide Ströme dieselbe Wellenform¹⁾, so kann man beide durch denselben Scheitelfaktor dividieren, und man erhält die effektiven Werte:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2} i}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} \dots \dots \dots (170)$$

Aus der zweiten der obigen Gleichungen erhält man sofort

$$\text{tg } \chi = - \frac{w_2}{\omega L_2}.$$

Man erkennt aus Gl. 170, daß bei konstantem Zähler, also bei konstanter Periodenzahl und gegebener Wicklung, für das Verhältnis der Stromstärken und für die Phasenverschiebung zwischen beiden nur w_2 und L_2 , also nur der sekundäre Strom maßgebend ist.

¹⁾ Bei Transformatoren mit geschlossenem Eisenkern ist das nicht der Fall, wenn der Magnetisierungsstrom einen wesentlichen Teil des primären Stromes bildet, d. h. wenn die Strombelastung klein ist (§ 159).

Den Ausdruck für die Phasenverschiebung kann man in andere Form bringen, ähnlich wie bei einem einzelnen Stromkreis. Setzt man nämlich

$$\frac{\omega L_2}{w_2} = \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (171)$$

so ist $\operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} (90 + \alpha)$.

Es ist also

$$\chi = 90 + \alpha \dots \dots \dots (172)$$

wobei die trig. Tangente von α bestimmt ist durch das Verhältnis des gesamten induktiven Widerstandes zum gesamten Ohmschen Widerstand. Der sekundäre Strom hat also gegen den primären eine Phasenverzögerung, deren Winkel stets größer als 90° , aber kleiner als 180° ist. Denn nur wenn $\omega L_2 = \infty$, oder $w_2 = 0$ ist, ist $\alpha = 90^\circ$ und $\chi = 180^\circ$. Dann ist nach der obigen Funktionsgleichung

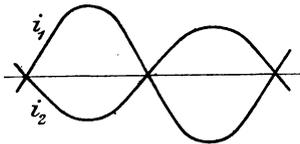


Abb. 231.

ist $i_2 = -\Im_2 \sin \omega t$, d. h. die beiden Ströme haben in jedem Augenblick entgegengesetzte Richtung (Abb. 231) und ihr Verhältnis (Gl. 170) geht über in

$$\frac{J_2}{J_1} = \kappa \frac{\sqrt{L_1 L_2 i}}{L_2}$$

Das Verhältnis der beiden Ströme ist also jetzt unabhängig von der Frequenz.

Ist außerdem noch der äußere induktive Widerstand ωL_{2a} verschwindend klein gegen den inneren induktiven Widerstand ωL_{2i} , so ist:

$$L_2 = L_{2i}$$

mithin

$$\frac{J_2}{J_1} = \kappa \sqrt{\frac{L_1}{L_{2i}}}$$

oder nach Einsetzung der Gl. 148:

$$\frac{J_2}{J_1} = \kappa \frac{N_1}{N_2} \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}$$

Sind die magnetischen Widerstände w_1 und w_2 gleich groß, wie das insbesondere bei allen normalen Transformatoren und Induktionsmotoren mit großer Annäherung zutrifft, so ist

$$J_2 N_2 = \kappa J_1 N_1 \dots \dots \dots (173)$$

Hat man einen streuungslosen Transformator ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \delta = 0, \kappa = 1$), so besteht nur das gemeinsame Feld β ; infolgedessen ist $w_1 = w_2$ und somit

$$J_2 N_2 = J_1 N_1$$

Wenn $i_2 = -\mathfrak{I}_2 \sin \omega t$ ist, wie in dem oben genannten Falle, so ist

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1} = -\frac{J_2}{J_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

oder

$$i_2 N_2 = -i_1 N_1.$$

Infolgedessen ist gemäß Gl. 135

$$\mathfrak{z} = 0.$$

Das gemeinsame magnetische Feld ist also Null, weil sich die primäre und die sekundäre MMK gegenseitig aufheben. Das Felddiagramm (Abb. 227) geht in eine gerade Linie GOH über. Da ein streuungsloser Transformator vorausgesetzt wurde, so gibt es in diesem Falle überhaupt kein magnetisches Feld, und daher auch keine Eisenverluste.

152. Der primäre Strom.

Wird der primären Wicklung eines Transformators (oder Induktionsmotors oder dgl.) eine Klemmenspannung

$$k_1 = \mathfrak{K}_1 \sin \omega t$$

zugeführt (aufgedrückt), so entsteht ein primärer Strom von der Form

$$i_1 = \mathfrak{I}_1 \sin(\omega t - \varphi_1).$$

φ_1 bedeutet also die Phasenverschiebung zwischen diesem Strom und der Klemmenspannung. Wir setzen vor φ_1 ein negatives Vorzeichen wie in § 133 bei einem einzelnen Stromkreis, weil auch im Transformator ein magnetisches Feld entsteht. Für den Scheitelwert des Stromes erhält man¹⁾

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\mathfrak{K}_1}{\sqrt{G^2 + (\omega \lambda)^2}} \dots \dots \dots (174)$$

¹⁾ Aus Gl. 155 und 160 folgt nach Eliminierung von $\frac{di_2}{dt}$:

$$L_2 k_1 = w_1 L_2 i_1 + (L_1 L_2 - M^2) \frac{di_1}{dt} - w_2 M i_2.$$

Wird diese Gleichung nach t differenziert und mit Hilfe der Gl. 155 wieder $\frac{di_2}{dt}$ eliminiert, so erhält man

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (w_1 L_2 + w_2 L_1) \frac{di_1}{dt} + w_1 w_2 i_1 = w_2 k_1 + L_2 \frac{dk_1}{dt}.$$

Setzt man für i_1 , k_1 und ihre Differentialquotienten die obigen Funktionen ein, so erhält man

$$[(w_1 w_2 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2) \sin(\omega t - \varphi_1) + (w_1 \omega L_2 + w_2 \omega L_1) \cos(\omega t - \varphi_1)] \mathfrak{I}_1 = (w_2 \sin \omega t + \omega L_2 \cos \omega t) \mathfrak{K}_1.$$

Diese Gleichung behandelt man wie auf S. 232, indem man einmal $\omega t = 0$ und

Haben Strom und Spannung gleiche Wellenform¹⁾, so kann man durch denselben Scheitelfaktor dividieren und man erhält die effektiven Werte:

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{\varrho^2 + (\omega \lambda)^2}} \dots \dots \dots (175)$$

Für die Phasenverschiebung erhält man:

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{\omega \lambda}{\varrho} \dots \dots \dots (176)$$

Hier bedeutet

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= w_1 + \frac{\omega^2 M^2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} w_2 \\ \lambda &= L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (177)$$

oder nach Einführung der Definitionsgleichung $M^2 = \kappa^2 L_1 L_2$ (S. 272):

$$\varrho = w_1 + \frac{\kappa^2 \omega^2 L_1 L_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} w_2 = w_1 + \vartheta w_2 \dots \dots (178)$$

$$\lambda = L_1 - \frac{\kappa^2 \omega^2 L_1 L_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} L_2 = L_1 - \vartheta L_2 \dots \dots (179)$$

wobei

$$\vartheta = \frac{\kappa^2 \omega^2 L_1 L_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} \text{ ist } ^2).$$

Vergleicht man die Ausdrücke für J_1 und φ_1 mit den Gl. 115 und 116 für einen einzelnen Stromkreis (Drosselspule), so sieht man, daß sie dieselbe Form haben. Das an Stelle von w stehende ϱ ist auch ein Ohmscher Widerstand, denn es besteht aus dem primären Widerstand w_1 und dem ϑ -fachen sekundären Widerstand w_2 . Das an Stelle von L_1 stehende λ ist auch eine Selbstinduktion, denn es besteht aus der primären Selbstinduktion L_1 vermindert um die ϑ -fache sekundäre Selbstinduktion L_2 . Daher bezeichnen wir ϱ als äquivalenten Widerstand und λ als äquivalente Selbst-

einmal $\omega t = 90^\circ$ setzt. Die so erhaltenen zwei Gleichungen werden quadriert und addiert und man erhält

$$[(w_1 w_2 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2)^2] \mathfrak{S}_1^2 + [(w_1 \omega L_2 + w_2 \omega L_1)^2] \mathfrak{S}_1^2 = [w_2^2 + \omega^2 L_2^2] \mathfrak{R}_1^2.$$

Nachdem man diese Gleichung mit $[w_2^2 + \omega^2 L_2^2]$ multipliziert hat, läßt sie sich in die Form bringen:

$$\begin{aligned} &[(w_1 w_2^2 + w_1 \omega^2 L_2^2 + \omega^2 M^2 w_2)^2 + \omega^2 (L_1 w_2^2 + L_1 \omega^2 L_2^2 - \omega^2 M^2 L_2)^2] \mathfrak{S}_1^2 \\ &= (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)^2 \mathfrak{R}_1^2, \end{aligned}$$

woraus man die obigen Gl. 174, 177 erhält.

¹⁾ Vgl. die Anmerkung auf S. 273.

²⁾ ϑ ist ein reiner Zahlenfaktor. (Dimension 1), weil Zähler und Nenner des obigen Ausdruckes dieselbe Dimension haben.

induktion und dementsprechend den Ausdruck $\omega\lambda$ als äquivalenten induktiven Widerstand und den Ausdruck $\sqrt{\varrho^2 + (\omega\lambda)^2}$ als äquivalenten scheinbaren Widerstand.

Den letzteren kann man ebenso wie in § 133 als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ϱ und $\omega\lambda$ (Abb. 232) darstellen. Ferner kann man ebenso wie in Abb. 203 den Strom J_1 als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel φ_1 darstellen (Abb. 233), dessen eine Kathete der wattlose Strom $J_1 \sin \varphi_1$ und dessen andere Kathete der wattlose Strom $J_1 \cos \varphi_1$ ist.

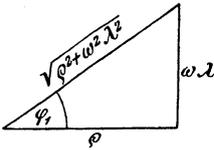


Abb. 232.

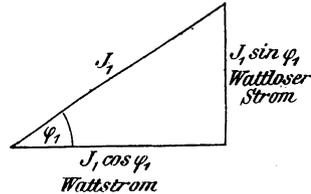


Abb. 233.

Betrachten wir die Ausdrücke für ϱ und λ näher, so sehen wir zunächst, daß ϱ größer ist als w_1 und λ kleiner als L_1 . Der sekundäre Strom wirkt also auf den Widerstand scheinbar vergrößernd und auf die Selbstinduktion scheinbar verkleinernd. Setzen wir Apparate (Transformatoren, Induktionsmotoren u. dgl.) mit gegebener Wicklung voraus, die an eine Spannung von konstanter Frequenz angeschlossen sind, so ist w_1 , ω ($= 2\pi\nu$), κ , L_1 und L_2 konstant. Die wirksamen Größen ϱ und λ sind dann nur vom sekundären Widerstand w_2 und der sekundären Selbstinduktion L_2 , also nur von der sekundären Stromstärke abhängig. Dasselbe erkennt man, wenn man für ϑ die Gl. 170 einsetzt. Dann ist

$$\varrho = w_1 + \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2 w_2$$

$$\lambda = L_1 - \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2 L_2$$

Ein Transformator (oder Induktionsmotor oder dgl.) stellt sich mithin dar wie ein einfacher Stromkreis (Drosselspule) mit veränderlichen, von der Belastung abhängigen Widerständen ϱ und $\omega\lambda^1$.

¹⁾ Der primäre Strom J_1 besteht aus dem bei gegebener Wicklung und Periodenzahl konstanten Magnetisierungsstrom und einem von J_2 abhängigen Teil. Bei einadrigen Kabeln mit geschlossenen Hüllen (Abb. 218) ist J_1 nicht der Arbeitsstrom, der den Verbrauchstellen zufließt, sondern nur jener Teil, welcher gemäß obigen Gleichungen durch den in den geschlossenen Hüllen fließenden Strom J_2 verursacht wird.

Die folgende Zahlentafel zeigt die Abhängigkeit des ρ und λ vom sekundären Stromkreis und dementsprechend die Abhängigkeit des äquivalenten scheinbaren Widerstandes $\sqrt{\rho_2 + (\omega\lambda)^2}$, des primären Stromes J_1 und seiner Phasenverschiebung φ_1 vom sekundären Strom J_2 und seiner Phasenverschiebung φ_2 . Der Transformator habe keine magnetische Hysterese und seine Wicklungswerte seien:

$$\begin{array}{lll} w_1 = 8 & L_2 = 4 & \kappa = 1 \\ w_{2i} = 0,02 & L_{2i} = 0,01 & \omega = 2\pi\nu = 300 \end{array}$$

Die primäre Klemmenspannung sei $K_1 = 2200$ Volt. Die sekundäre Stromstärke ist mittels Gl. 161, ihre Phasenverschiebung φ_2 mittels Gl. 162 berechnet.

	w_{2a}	L_{2a}	w_2	L_2	ρ	λ	$\sqrt{\rho^2 + \omega^2\lambda^2}$	J_1	φ_1	J_2	φ_2
	des äußeren sekundären Kreises		des ganzen sekundären Kreises								
I	∞	0	∞	0,01	8,4		1200	1,83	$89^{\circ}40'$	0	0
II	100	0	100,02	0,01	44	3,99	1200	1,83	88°	1,1	0
III	20	0	20,02	0,01	184	3,9	1187	1,85	81°	5,5	0
IV	5	0	5,02	0,01	508	3,0	1033	2,13	60°	22	0
V	2	0	2,02	0,01	558	1,25	676	3,3	34°	55	0
VI	1	0	1,02	0,01	374	0,42	395	5,57	18°	106	0
VII	0,2	0	0,22	0,01	96	0,02	96	23	$3^{\circ}30'$	459	0
VIII	0,1	0	0,12	0,01	56	0,005	56	39	$1^{\circ}30'$	780	0
IX	0	0	0,02	0,01	16	0	16	137	0°	2740	0
X	1	3	1,02	3,01	8,4		1200	1,83	$89^{\circ}40'$	0,12	$89^{\circ}56'$
XI	1	0,1	1,02	0,11	12	3,56	1130	1,9	$89^{\circ}20'$	3,45	88°
XII	1	0,01	1,02	0,02	108	2,1	640	3,4	80°	34	$71^{\circ}30'$
XIII	1	0,001	1,02	0,001	316	0,7	380	5,79	33°	101	16°
XIV	1	0,0001	1,02	0,0101	368	0,45	390	5,64	20°	106	$1^{\circ}44'$
XV	1	0	1,02	0,01	374	0,42	395	5,57	19°	106	0

Aus den Werten I bis IX erkennt man, daß die äquivalente Selbstinduktion λ mit abnehmendem w_2 beständig abnimmt bis 0, während ρ ein Maximum hat. Das erkennt man schon aus Gl. 178, wonach $\rho = w_1$ ist, sowohl wenn $w_2 = \infty$ als auch, wenn $w_2 = 0$ wird.

Ist w_2 oder ωL_2 unendlich groß, d. h. ist der sekundäre Stromkreis unterbrochen (Leerlauf), und ist auch sonst kein sekundärer Verlust (kein Wirbelstrom und kein Hystereseverlust) vorhanden, so gehen Gl. 178 und 179 über in $\rho = w_1$ und $\lambda = L_2$. Dann ist

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}} \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1},$$

wie wenn der primäre Stromkreis allein da ist.

In der Tat ist der sekundäre Stromkreis in elektrischer Hinsicht nicht vorhanden, wenn er keinen Strom führt. Ist aber ein sekundärer Strom vorhanden (auch wenn es nur Wirbelströme sind), so tritt ϱ an Stelle von w_1 und λ an Stelle von L_1 .

Da ϱ größer als w_1 und λ kleiner als L_1 ist, so folgt aus Gl. 176, daß die primäre Phasenverschiebung φ_1 bei Strombelastung kleiner ist als bei Leerlauf und zwar um so kleiner, je größer die Belastung ist.

Mittels der Gl. 178, 179 kann man J_1 und φ_1 aus den Widerständen berechnen (wie es in obiger Zahlentafel geschehen ist), wenn kein Eisenkern vorhanden ist. Ist aber ein solcher vorhanden, so stellen die Wirbelstrom- und Hystereseverluste eine gewisse sekundäre Belastung dar. Von dieser Belastung wissen wir nicht, welche Werte von w_2 und L_2 ihr entsprechen. Daher müssen ϱ und $\omega\lambda$ auf experimentellem Wege ermittelt werden. Dazu gelangt man auf folgende Weise.

Setzt man Gl. 176 in 175 ein, so ist

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \frac{K_1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}.$$

Da der zweite Bruch nach einer bekannten trigonometrischen Formel gleich dem Cosinus ist, so ist

$$J_1 = \frac{K_1 \cos \varphi_1}{\varrho}.$$

Das ist dieselbe Gleichung wie Gl. 117 für einen einzelnen Wechselstromkreis, nur daß der äquivalente Widerstand ϱ an Stelle des Ohmschen Widerstandes steht.

Multipliziert man diese Gleichung mit J_1 , so ist

$$J_1^2 = \frac{J_1 K_1 \cos \varphi_1}{\varrho}.$$

Der Zähler ist aber nichts anderes als die gesamte, dem Transformator zufließende und durch ein Wattmeter meßbare Leistung P_1 . Mithin ist

$$\varrho = \frac{P_1}{J_1^2} \dots \dots \dots (180)$$

Aus Gl. 175 ergibt sich dann der äquivalente induktive Widerstand:

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{K_1}{J_1}\right)^2 - \varrho^2} \dots \dots \dots (181)$$

Hierzu ist also auch noch die Kenntnis der Klemmenspannung K_1 erforderlich.

Beispiel: Bei einer gewissen Belastung sind auf der primären Seite eines Transformators folgende Werte gemessen worden

$$K_1 = 1000 \quad J_1 = 4 \quad P_1 = 3200$$

mithin
$$\varrho = \frac{3200}{16} = 200$$

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{1000}{4}\right)^2 - 200^2} = \sqrt{62500 - 40000} = 150.$$

Bei einer Periodenzahl $\nu = 50$ ist $\omega = 314$, also $\lambda = 0,48$ Henry.

Der Ohmsche Spannungsabfall in der primären Wicklung ist natürlich $w_1 J_1$, nicht ϱJ_1 . Denn ϱ umfaßt nicht nur w_1 , sondern auch w_2 und, wenn es nach Gl. 180 bestimmt wird, überhaupt alles, was Leistung ist, auch die mechanische Leistung eines etwa vom Transformator gespeisten Motors¹⁾. Der induktive Spannungsabfall in der primären Wicklung ist $\omega L_{11} J_1$, nicht $\omega\lambda J_1$. Der Leistungsverlust durch Stromwärme in der primären Wicklung ist $w_1 J_1^2$, in der sekundären Wicklung $w_2 J_2^2$.

Betrachten wir noch den Einfluß der Streuung, so erkennt man aus den Gl. 178 und 179 folgendes: Je größer die Streuung, d. h. je kleiner der Kupplungsfaktor κ ist, desto weniger unterscheidet sich ϱ von w_1 und λ von L_{11} , desto mehr nähert sich der primäre Strom und seine Phasenverschiebung denjenigen Werten, die eintreten, wenn der primäre Stromkreis für sich allein besteht. Für $\kappa = 0$ ($\delta = 1$) trifft dies vollständig zu, denn dann besteht zwischen primärem und sekundärem Stromkreis keine Kupplung mehr.

153. Leerlauf und Kurzschluß.

Die äußersten Fälle, die im Betriebe eines Apparates mit sekundärem Stromkreis (Transformator, Induktionsmaschine) möglich sind, bezeichnet man als Leerlauf bzw. Kurzschluß.

Leerlauf besteht, wenn der sekundäre Stromkreis unterbrochen ist, d. h. wenn w_{2a} oder L_{2a} unendlich groß ist, so daß der sekundäre Strom und die sekundäre Leistung Null ist. Hat der Apparat einen Eisenkern, so läßt sich dieser Zustand nicht genau herstellen, denn im Eisen entstehen durch die periodische Magnetisierung Wirbelströme (§ 155), die nichts anderes sind als sekundäre Ströme, deren gesamte Leistung sich in Wärme umsetzt. Dazu kommt noch der Hystereseverlust (§ 156), sowie bei sehr hoher sekundärer Spannung etwaige dielektrische Verluste in der Isolation (§ 181) und Ausstrahlungsverluste (§ 246). Alles das sind sekundäre Verluste, die nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit eine Vergrößerung des primären Stromes zur Folge haben. Gemäß § 152 kann nun der primäre Strom nicht mehr durch w_1 und L_{11} dargestellt werden, sondern durch die äquivalenten Werte ϱ_0 und λ_0 ,

¹⁾ Bei Anwendung der obigen Gleichungen auf einen Motor drückt sich in ϱ auch die mechanische Leistung gemäß Gl. 180 aus.

Der Index 0 soll diese Werte als Leerlaufwerte bezeichnen. Mithin gilt für den primären Strom

$$J_0 = \frac{K_1}{\sqrt{\varrho_0^2 + (\omega\lambda_0)^2}} \dots \dots \dots (182)$$

Das ist der meßbare, also praktische Leerlaufstrom, der eine den gesamten sekundären Verlusten entsprechende Wattkomponente enthält. Die Phasenverschiebung zwischen K_1 und J_0 ist bestimmt durch $\text{tg}\varphi_0 = \frac{\omega\lambda_0}{\varrho_0}$. Die Widerstandsgrößen ergeben sich wie auf Seite 279 aus dem Wattverbrauch P_0 bei Leerlauf. Es ist also

$$\varrho_0 = \frac{P_0}{J_0^2}, \quad \omega\lambda_0 = \sqrt{\left(\frac{K_1}{J_0}\right)^2 - \varrho_0^2}.$$

Sind solche Verluste nicht vorhanden, so dient der Strom nur zur Herstellung des magnetischen Feldes wie bei einer Drosselspule ohne sekundäre Verluste. Es kommen für ihn nur die reinen Werte w_1 und L_1 in Betracht. Daher betrachten wir ihn als theoretischen Leerlaufstrom oder reinen Magnetisierungsstrom J_m und es ist:

$$J_m = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}}, \quad \text{tg}\varphi_m = \frac{\omega L_1}{w_1} \dots (183)$$

Dieser Strom enthält auch noch eine Wattkomponente, weil er in der primären Wicklung Stromwärme erzeugt. Diese entsteht ja auch dann, wenn die Spule vom Gleichstrom durchflossen wird und ein gleichgerichtetes Feld erzeugt. Im übrigen gilt das, was in § 138 über Drosselspulen gesagt wurde.

Der andere äußerste Betriebsfall, der Kurzschluß, besteht dann, wenn die sekundären Klemmen durch einen guten Leiter (Kupferdraht von genügender Dicke oder Meßinstrument mit kleinem Widerstand) miteinander verbunden werden, so daß

$$w_{2a} = 0 \quad \text{und} \quad L_{2a} = 0$$

gesetzt werden kann. Wir haben jetzt die größtmögliche Stromstärke im Transformator¹⁾, denn der ganze Stromkreis besteht jetzt nur aus der sekundären Wicklung, so daß

$$w_2 = w_{2i}, \quad L_2 = L_{2i}$$

ist. Für das Verhältnis der beiden Stromstärken gilt also beim Kurzschluß insbesondere das, was auf S. 274 abgeleitet wurde. Und weil bei normalen Transformatoren w_2^2 verschwindend klein ist gegen

¹⁾ Bei einem Induktionsmotor kommt noch dazu, daß der Läufer stillstehen muß; denn wenn der kurzgeschlossene Läufer rotiert, so leistet er Arbeit und diese entspricht einer induktionslosen Belastung.

$(\omega L_2)^2$, so geht der äquivalente Widerstand ϱ und die äquivalente Selbstinduktion λ (Gl. 178, 179) jetzt über in

$$\varrho_k = w_1 + \kappa^2 \frac{L_1}{L_{2i}} w_{2i}$$

$$\lambda_k = L_1 - \kappa^2 L_1 = (1 - \kappa^2) L_1 = \delta L_1.$$

Der Index k bedeutet, daß sich die betreffenden Größen auf den Fall des Kurzschlusses beziehen.

Ist der Transformator streuungslos ($\delta = 0$, $\kappa = 1$), so ist immer auch $w_1 = w_2$ (S. 274). Infolgedessen geht das Verhältnis $\frac{L_1}{L_{2i}}$ über in $\frac{N_1^2}{N_2^2}$ (Gl. 148), so daß

$$\varrho_k = w_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 w_{2i}$$

$$\lambda_k = 0.$$

Infolgedessen ist der primäre Kurzschlußstrom:

$$J_{k1} = \frac{K_1}{w_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 w_{2i}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = 0, \quad \varphi_k = 0 \quad \cos \varphi_k = 1.$$

In Worten heißt das: Ein kurzgeschlossener streuungsloser Transformator ist gleichbedeutend einem Ohmschen Widerstand vom Werte $w_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 w_{2i}$. Der Leistungsfaktor ist 1, der Strom reiner Wattstrom. Von S. 274 wissen wir, daß für diesen Fall $\chi = 180^\circ$, also die beiden Ströme genau entgegengesetzte Richtung haben, und die primären und sekundären Amperewindungen gleich groß sind.

Aus vorstehenden Gleichungen folgt

$$K_1 = w_1 J_{k1} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 w_{2i} J_{k1} = \varrho_k J_{k1},$$

und weil $J_{k1} N_1 = J_{k2} N_2$, so ist

$$K_1 = w_1 J_{k1} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 w_{2i} J_{k2}$$

d. h. die gesamte Klemmenspannung eines kurzgeschlossenen streuungslosen Transformators besteht nur aus dem Ohmschen Spannungsabfall in der primären Wicklung ($w_1 J_{k1}$) und aus dem (im Verhältnis der Windungen) auf die primäre Wicklung reduzierten sekundären Spannungsabfall.

154. Das Verhältnis der Klemmenspannungen.

Dividiert man die Gl. (161) und (175) durcheinander, so erhält man:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{J_2 \sqrt{w_{2a}^2 + (\omega L_{2a})^2}}{J_1 \sqrt{\varrho^2 + (\omega \lambda)^2}}.$$

Setzt man Gl. (170) ein, so ist:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_{2i}} \cdot \sqrt{w_{2a}^2 + (\omega L_{2a})^2}}{\sqrt{\varrho^2 + (\omega \lambda)^2} \cdot \sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} \dots (184)$$

Ist der sekundäre Stromkreis unterbrochen (Leerlauf), d. h. ist $w_{2a} = w_2 = \infty$, so wird der letzte Quotient in der letzten Gleichung gleich 1, und gemäß § 152 wird $\varrho = w_1$. $\lambda = L_1$. Mithin geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{K_{02}}{K_1} = \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_{2i}}}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}} \dots (185)$$

wenn wir mit K_{02} die sekundäre Klemmenspannung bei Leerlauf bezeichnen. Ist w_1^2 verschwindend klein gegen $(\omega L_1)^2$, wie dies bei allen normalen Transformatoren und Induktionsmotoren der Fall ist¹⁾. so geht der letzte Ausdruck über in $\kappa \sqrt{\frac{L_{2i}}{L_1}}$. Da bei Leerlauf ($i_2 = 0$) Klemmenspannung und EMK (gemäß Gl. 156) identisch sind und auf der primären Seite der Ohmsche Spannungsabfall $w_1 J_0$ sehr klein ist, so kann $K_1 = E_1$ gesetzt werden. Dann ist

$$\frac{K_{02}}{K_1} = \frac{E_2}{E_1} = \kappa \sqrt{\frac{L_{2i}}{L_1}}.$$

Sind die magnetischen Widerstände w_1 und w_2 einander gleich wie bei allen normalen Transformatoren, so ist nach Gl. (148):

$$\frac{K_{02}}{K_1} = \frac{E_2}{E_1} = \kappa \frac{N_2}{N_1} = \kappa \ddot{u} \dots (186)$$

Während also das Verhältnis der vom gemeinsamen Felde induzierten EMKe E_{23} und E_{13} genau gleich \ddot{u} ist (S. 259), ist das Verhältnis der Klemmenspannungen bei Leerlauf und das Verhältnis der EMKe E_2 und E_1 gleich $\kappa \ddot{u}$.

Den Unterschied zwischen der sekundären Klemmenspannung bei Leerlauf und bei Belastung (unter konstanter primärer Spannung) bezeichnet man als Spannungsänderung D .

¹⁾ Auch wenn die Eisenverluste groß sind, so daß bei Leerlauf (gemäß § 153) ϱ_0 und λ_0 eingesetzt werden müssen, kann mit hinreichender Genauigkeit $\sqrt{\varrho_0^2 + (\omega \lambda_0)^2}$ gleich ωL_1 gesetzt werden.

Es ist also

$$D = K_{02} - K_2 \\ = K_1 \kappa \omega \sqrt{L_1 L_2} \left[\frac{1}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}} - \frac{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2} \sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} \right]$$

Über die graphische Darstellung der Spannungen durch Diagramme, über die Messung des Spannungsabfalles usw. vgl. das Buch des Verfassers: „Die Transformatoren“, Bd. 15 der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen“.

Bei einem einadrigen Kabel mit leitender Hülle, das einen aus zwei parallelen Leitungen bestehenden Transformator darstellt, ist $\ddot{u} = 1$. Als primäre Spannung K_1 kommt dabei aber nicht die Klemmenspannung des Stromerzeugers oder Stromverbrauchers, sondern nur die Spannung zwischen Anfang und Ende des Leiters, also der Spannungsabfall in Betracht. Die zwischen den Enden der Hülle bestehende Spannung ist also fast ebenso groß, da κ nur wenig von 1 verschieden ist. Liegen zwei solche Kabel von großer Länge nebeneinander, so kann zwischen ihren Hüllen eine nicht unbedeutende Spannung bestehen. Diese verschwindet, wenn man die Hüllen leitend miteinander verbindet wie in Abb. 218. Das hat aber einen nicht unbedeutenden Strom in der Hülle mit entsprechendem Stromwärmeverlust zur Folge. Man macht daher die Verbindungen ac und bd nicht aus Kupfer, sondern aus Widerstandsdraht, um so zwar einen Ausgleich der Spannungen, aber keinen erheblichen Strom zu erhalten.

155. Wirbelströme.

Eine Induktion sekundärer Ströme findet nicht nur in linearen, geschlossenen Leitern statt, sondern auch in jeder beliebig gestalteten leitenden Masse, wenn sie von Kraftlinien eines wechselnden magnetischen Feldes getroffen wird, weil eine leitende Masse immer die Gelegenheit zur Ausbildung von in sich geschlossenen Strömen bietet. Da die stärkste elektrische Induktion dann stattfindet, wenn die Stromfläche senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien steht, so werden die Stromflächen der sich ausbildenden Ströme senkrecht zu den Kraftlinien stehen, falls die Gestalt der leitenden Masse dies zuläßt. Sie werden daher Wirbelströme genannt.

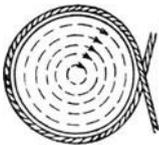


Abb. 234.

Besonders stark treten diese Ströme in einem massiven Eisenkern auf, der in eine von Wechselstrom durchflossene Spule geschoben wird. Ihre Stromflächen liegen parallel zu den Windungen der Spule, wie in Abb. 234 durch die gestrichelten Linien angedeutet ist, weil die Kraftlinien senkrecht zu diesen verlaufen.

Da der Ohmsche Widerstand der Strombahnen, namentlich in Kupfer- und Eisenmassen, meist sehr klein ist, so sind die Wirbel-

ströme dem induzierenden Strome nahezu entgegengesetzt gerichtet (§ 151) und vermindern dementsprechend das magnetische Feld, wenn die Stromstärke in der Spule konstant gehalten wird, oder sie bewirken eine Vergrößerung des Stromes in der Spule, wenn die Spannung konstant gehalten wird. Auf den Stromkreis der Spule können nicht mehr die Gesetze des einfachen Wechselstromkreises angewendet werden, sondern die in § 152 abgeleiteten Gesetze für einen primären Stromkreis unter dem Einfluß eines sekundären Stromes; das heißt statt des wahren Ohmschen Widerstandes w kommt der äquivalente ρ , statt der wahren Selbstinduktion L die äquivalente Selbstinduktion λ und statt des scheinbaren Widerstandes $\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$ der äquivalente $\sqrt{\rho^2 + (\omega \lambda)^2}$ in Betracht.

Die Wirbelströme entwickeln nach dem Jouleschen Gesetze eine dem Quadrate ihrer Stromstärke und dem Widerstande ihrer Strombahn proportionale Wärmemenge, deren Äquivalent in Form von elektrischer Leistung von der Stromquelle geliefert werden muß, was sich bei konstanter Spannung durch eine Vergrößerung der Stromstärke und eine Verkleinerung der Phasenverschiebung bemerkbar macht. Diese in Verlust gehende Leistung und die unter Umständen schädliche Temperaturerhöhung sind natürlich höchst unerwünscht, und man sucht daher die Wirbelströme möglichst zu unterdrücken. Dies wird dadurch erreicht, daß man den Weg der Wirbelströme möglichst oft durchschneidet. Bei Eisenkernen geschieht dies dadurch, daß man sie aus Blechen oder Drähten zusammensetzt. Diese müssen mit ihrer Längenausdehnung parallel zu den Kraftlinien liegen, weil, wie oben erwähnt, die Stromflächen der Wirbelströme senkrecht zu den Kraftlinien liegen. Eine Unterteilung der Eisenkerne senkrecht zu den Kraftlinien wäre zwecklos, weil sie dem Verlauf der Wechselströme in keiner Weise hinderlich wäre. Für die weitaus größte Zahl aller Wechselstromapparate werden zur Herstellung der Eisenkerne Bleche von 0,2—0,5 mm Dicke, seltener solche von 0,7 mm (bei Wechselstrom-Erzeugermaschinen), noch seltener solche von 1 mm verwendet.

Zwischen den Blechen darf natürlich keine gut leitende Berührung bestehen. Sie werden daher lackiert oder es wird dünnes Papier zwischengelegt, das in der Regel schon vor der Bearbeitung auf eine Seitenfläche der Blechtafeln aufgeklebt wird. Bei kleinen Kernen oder geringer Kraftliniendichte genügt schon die vom Ausglühen der Bleche herrührende Oxydschichte (Zunderschichte). Bei ausgeglühten Drähten genügt sie immer.

Um stärkere Wechselströme zu vermeiden, müssen bei Wechselstromapparaten auch alle anderen gut leitenden Metallmassen oder geschlossenen Stromkreise im Bereiche der Kraftlinien vermieden werden. Spulenträger aus Metall schneidet man daher durch einen Schnitt parallel zur Kraftlinienrichtung auf, oder man verfertigt sie aus schlecht leitenden Metallen wie Konstantan oder Manganin, oder

man verwendet dazu nicht leitende Stoffe, wie Pappe, Preßspan, Holz, Stabilit, Hartgummi usw. Klammern zum Zusammenhalten der Eisenbleche oder -drähte dürfen aus diesem Grunde auch nicht aus gut leitendem Metall hergestellt werden. Werden die Bleche, wie dies gewöhnlich geschieht, durch Niete oder Schrauben zusammengepreßt, so dürfen die Niete mit den Blechen keine geschlossenen Stromkreise bilden, deren Flächen von den Kraftlinien durchsetzt werden, wie in Abb. 235, sondern nur

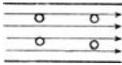


Abb. 235.

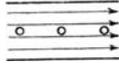


Abb. 236.

solche, die parallel zu den Kraftlinien sind, wie Abb. 236 zeigt, oder die Niete müssen aus schlecht leitendem Metall bestehen oder durch nicht leitende Hülsen vom Eisen isoliert werden.

Wegen der Wirbelströme müssen auch große Kupferquerschnitte in elektrischen Maschinen, Transformatoren u. dgl. vermieden werden. Man verwendet daher entweder Drahtseile oder flache Bänder aus Kupfer, oder die Wicklung wird in mehreren parallelen Stromkreisen ausgeführt. Starke Wicklungsstäbe, die sich nicht mehr unterteilen lassen, macht man lieber flach und breit als kreisrund. Bei Schalttafeln mit großen Stromstärken muß man in der Nähe der Kupferschienen Eisenteile vermeiden. (Vgl. § 169, 170.)

Die Abhängigkeit des Leistungsverlustes durch Wirbelströme p_w von den Bestimmungsgrößen ergibt sich aus folgender Ableitung. Nach dem Jouleschen Gesetz ist die Wärmeleistung

$$p_w = w_2 J_2^2,$$

wenn J_2 die Stromstärke der Wirbelströme in einem Eisenkern, w_2 den Widerstand ihrer Strombahn bedeutet. Nach § 151 ist

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\omega M \mathfrak{J}_1}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}},$$

wobei L_2 die Selbstinduktion der Strombahn der Wirbelströme und \mathfrak{J}_1 den primären Strom, das ist in diesem Falle der Strom in der Magnetisierungsspule, bedeutet.

Da $J_2 = \frac{\mathfrak{J}_2}{\sigma_i}$ ist, wenn σ_i den Scheitelfaktor der Wirbelströme bedeutet (§ 131) und $\omega = 2\pi\nu$, so ist

$$J_2 = \frac{2\pi\nu M \mathfrak{J}_1}{\sigma_i \sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}}.$$

Nach Gl. 111 ist

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{N_1 \mathfrak{J}}{L_1} = \frac{N_1 S \mathfrak{B}}{L_1},$$

wobei N_1 die Windungszahl, L_1 die Selbstinduktion der Spule und S den Querschnitt des Eisenbleches oder Drahtes, aus dem der Eisenkern zusammengesetzt ist, bedeutet.

Mithin ist

$$J_2^2 = \left(\frac{2\pi MN_1 S}{\sigma_i L_1} \right)^2 \frac{\nu^2 \mathfrak{B}^2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2}.$$

Der Ausdruck $\left(\frac{2\pi MN_1 S}{\sigma_i L_1} \right)^2$ ist für eine bestimmte Draht- oder Blechstärke konstant, weil sämtliche Faktoren konstant sind mit Ausnahme von M und L_1 , welche von der magnetischen Durchlässigkeit μ abhängen, die für Eisen je nach der Kraftliniendichte verschieden ist. Da aber M im Zähler und L_1 im Nenner steht, so fällt μ aus diesem Ausdruck heraus, der nun bloß von den geometrischen Verhältnissen des Eisens, von der Wicklung und vom Scheitelfaktor abhängt. Setzen wir diesen Ausdruck gleich c , so ist

$$J_2^2 = c \frac{\nu^2 \mathfrak{B}^2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2}$$

und demnach

$$p_w = c w_2 \frac{\nu^2 \mathfrak{B}^2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2} \dots \dots \dots (187)$$

Für Eisenbleche oder Drähte von 0,5 mm Dicke oder weniger ist der Ohmsche Widerstand der Wirbelstrombahnen so groß, daß $(\omega L_2)^2$ gegen w_2^2 vernachlässigt werden kann¹⁾. Dann geht die letzte Gleichung über in

$$p_w = \frac{c}{w_2} \nu^2 \mathfrak{B}^2 \text{ absol. Einh.}$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist also der Wirbelstromverlust in einem Eisenkern proportional dem Quadrate der Periodenzahl und Kraftliniendichte und verkehrt proportional dem spezifischen Widerstand des Eisens oder proportional der Leitfähigkeit.

Setzt man $\frac{c}{w_2} = \beta,$

so ist $p_w = \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2 \text{ absol. Einh.}$

¹⁾ Obige vom Verfasser abgeleitete Formel (ETZ 1901, S. 53) steht in einem gewissen Gegensatz zu folgender Formel, wie sie in den meisten Lehrbüchern aus älterer Zeit weiter geführt wird: $p_w = c f^2 \nu^2 \mathfrak{B}^2$, worin f den Formfaktor des Stromes in der betreffenden Spule bedeutet. Diese Formel ist aus zwei Gründen falsch: Erstens ist bei der Ableitung dieser Formel nicht die EMK der Wirbelströme, sondern die EMK einer Windung der Stromspule eingesetzt. Daher erscheint hier der Formfaktor f des magnetisierenden (primären) Stromes, der mit den Wirbelströmen nichts zu tun hat. Wegen des verzerrenden Einflusses der Hysterese auf den Magnetisierungsstrom (vgl. § 159) ist seine Wellenform sehr verschieden von der der Wirbelströme, die als sekundäre kurzgeschlossene Ströme gleiche oder ähnliche Wellenform wie die EMK haben. Zweitens ist der induktive Widerstand ωL_2 der Wirbelstrombahnen vernachlässigt, was bei Eisen wegen des hohen Wertes der magnetischen Durchlässigkeit μ im allgemeinen unzulässig ist. Nur bei sehr dünnen Blechen ist diese Vernachlässigung näherungsweise zulässig.

oder da 10^{-7} absol. Einh. gleich ein Watt sind (§ 299)

$$p_w = \beta v^2 \mathfrak{B}^2 \cdot 10^{-7} \text{ Watt} \dots \dots (188)$$

Den Faktor $\beta = \frac{c}{w_2} = \left(\frac{2\pi MN_1}{\sigma_i L_1}\right)^2 \cdot \frac{S^2}{w_2}$ bezeichnet man als Wirbelstromkoeffizient. Wie man sieht, ist er unter sonst gleichen Verhältnissen proportional dem Quadrate des Blech- oder Drahtquerschnittes, also auch proportional dem Quadrate der Blechdicke d , und verkehrt proportional dem Widerstand w_2 , also auch verkehrt proportional dem spezifischen Widerstand des Eisens. Da dieser mit der Temperatur zunimmt, so nimmt der Wirbelstromverlust mit der Temperatur ab. In der Konstanten c ist der Scheitelfaktor der Wirbelstromwellen σ_i enthalten. Da man diesen weder theoretisch noch experimentell bestimmen kann, kann man ihn aus der Konstanten nicht herausnehmen.

Messungen haben ergeben, daß die Konstante c innerhalb gewisser Grenzen mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit dem Scheitelfaktor σ_e der Spannungswelle in der Magnetisierungsspuhle proportional ist. Demnach kann der Wirbelstromkoeffizient β dargestellt werden durch

$$\beta = \delta d^2 \sigma_e (1 - \gamma t),$$

wobei d die Blech- oder Drahtdicke, t die Temperatur und γ den Temperaturkoeffizienten des Eisens bedeutet. δ ist dann eine von der Blech- oder Drahtdicke, der Spannungswelle und der Temperatur unabhängige Konstante. Für gewöhnliche Eisenbleche bis zu 1 mm Dicke hat sich aus Messungen des Verfassers¹⁾

$$\delta = 15,4 \cdot 10^{-7}$$

ergeben. Demnach ist z. B., wenn $\gamma = 0,0046$ angenommen wird, für Bleche von 0,5 mm Dicke, bei 20° C und für 1 cm³

$$\beta = 5 \cdot 10^{-7};$$

bei 70° C aber $\beta = 3,6 \cdot 10^{-7}$.

Abb. 237 enthält Kurven, welche den Wirbelstromver-

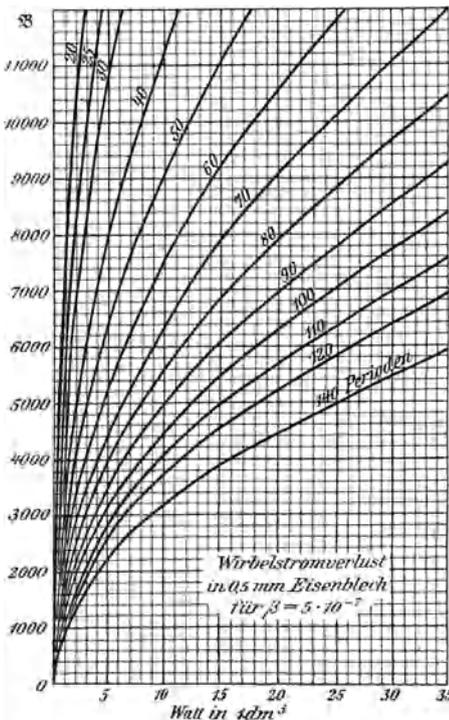


Abb. 237.

¹⁾ ETZ 1901, S. 57.

lust in Watt für verschiedene Kraftliniendichten und Frequenzen und für $\beta = 5 \cdot 10^{-7}$ pro 1 cm^3 sofort abzulesen gestatten, jedoch nicht für 1 cm^3 , sondern den praktischen Rechnungen entsprechender für 1 dm^3 .

Die Konstante δ enthält den spezifischen Widerstand des Eisens; sie ist also je nach der Herkunft des Eisens verschieden. In neuerer Zeit ist es gelungen, durch Legierung mit Silizium Eisenbleche herzustellen, deren spezifischer Widerstand verhältnismäßig groß, δ und β also verhältnismäßig klein ist. So ergab sich für derartige von Capito & Klein (Benrath) hergestellte Bleche von 0,5 mm Dicke bei 20° C $\beta = 1,5 \cdot 10^{-7}$. Bei hochlegierten Blechen von 0,35 mm Dicke ist es gelungen, β bis $1 \cdot 10^{-7}$ herabzudrücken. Dabei ist der Verlust durch Hysterese (vgl. folgenden Paragraph) noch kleiner als bei gewöhnlichem Eisen. Die Durchlässigkeit μ dieses legierten Eisens ist bei kleiner Kraftliniendichte größer, bei großer Kraftliniendichte kleiner als bei gewöhnlichem Eisen¹⁾.

156. Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung.

Im Eisenkern irgendeines Wechselstromapparates tritt außer dem Verlust durch Wirbelströme auch noch ein Arbeitsverlust durch magnetische Hysterese auf, der (nach § 98) für einen magnetischen Kreisprozeß, also für eine Periode eines Wechselstromes näherungsweise bestimmt ist durch $\eta \mathfrak{B}^{1,6}$, wobei \mathfrak{B} den Scheitelwert der Kraftliniendichte und η den Hysteresekoeffizienten bedeutet. Hat der Wechselstrom ν Perioden in einer Sekunde, so ist der Arbeitsverlust in einer Sekunde, also der Verlust an nutzbarer Leistung p_h

$$p_h = \eta \nu \mathfrak{B}^{1,6} \cdot 10^{-7} \text{ Watt,}$$

wobei η für 1 cm^3 gewöhnlichen Eisenbleches (Dynamoblech) zwischen 0,0013 und 0,002 liegt. Abb. 238 enthält Kurven, welche den Hystereseverlust in Watt für $\eta = 0,0018$ sofort abzulesen gestatten, jedoch nicht für 1 cm^3 , sondern den praktischen Rechnungen entsprechender für 1 dm^3 . Bei den neueren legierten Eisensorten ist η sogar nur 0,0008—0,001.

Es ist zu beachten, daß \mathfrak{B} den Scheitelwert der magnetischen Welle bedeutet. Da nun im allgemeinen bei gleichen effektiven Werten der Scheitelwert um so größer ist, je spitzer die Wellenform ist (§ 214), so ist unter sonst gleichen Verhältnissen der Hystereseverlust um so größer, je spitzer die magnetische Welle ist. Und da einer spitzen magnetischen Welle im allgemeinen eine stumpfe Spannungswelle entspricht (§ 212), so ist bei gleicher effektiver Spannung der Scheitelwert \mathfrak{B} und daher der Hystereseverlust um so

¹⁾ Über den Einfluß des Siliziumgehaltes siehe Otto, Ber. d. deutsch. physik. Gesellsch. 1910, Heft 5. Guggenheim, Elektr. Kraftbetriebe und Bahnen 1910, Heft 27.

größer, je stumpfer die Spannungswelle, d. h. je kleiner der Scheitelfaktor der Spannungswelle ist.

Aber auch der Hysteresekoeffizient η selbst hängt nach Untersuchungen des Verfassers¹⁾ von der Wellenform ab, und zwar ist er um so größer, je stumpfer die magnetische Welle oder je spitzer die entsprechende Spannungswelle ist. Doch ist dieser Einfluß nur gering und braucht daher für praktische Zwecke nicht berücksichtigt werden. Es ergibt sich aber eine theoretische Folgerung daraus.

Da bei einer stumpfen magnetischen Welle die Magnetisierung durch längere Zeit auf einem hohen Wert bleibt als bei einer spitzen, und der Hystereseverlust trotz gleichem \mathfrak{B} bei jener größer ist als bei dieser, so muß man annehmen, daß bei jener die Magnetisierung gründlicher oder durchdringender erfolgt als bei dieser, das heißt, zur Herstellung des größten Magnetisierungswertes ist eine gewisse Zeit erforderlich, was man als magnetische Verzögerung bezeichnet. Das steht also in Übereinstimmung mit § 96.

Da der Hystereseverlust der von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche proportional ist, so wäre wegen der magnetischen Verzögerung die Möglichkeit vorhanden, daß diese Fläche verschieden groß ist, je nachdem, ob der magnetische Kreisprozeß mit großer oder

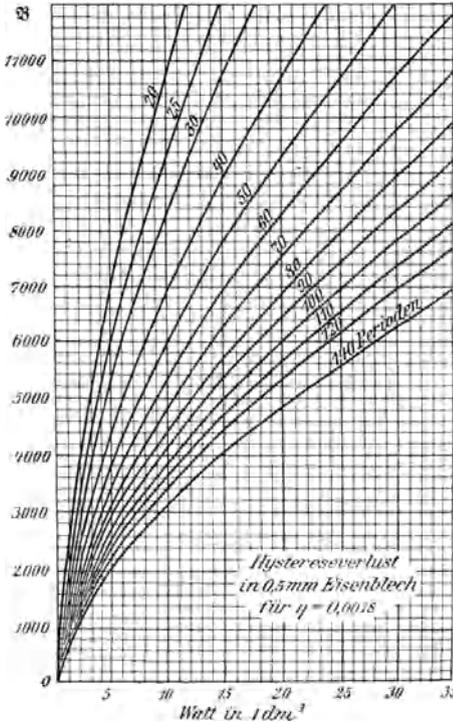


Abb. 238.

kleiner Geschwindigkeit durchlaufen wird. Ein schnell verlaufender Kreisprozeß ist jener, welcher durch die technischen Wechselströme oder durch elektrische Schwingungen während jeder Periode ausgeführt wird. Man bezeichnet letzteren häufig als dynamische Magnetisierung, während ein Kreisprozeß bei langsamer Änderung der magnetisierenden Kraft als statische Magnetisierung bezeich-

¹⁾ ETZ 1901, S. 52; 1906, S. 9. Zu demselben Ergebnis gelangte Sahulka (ETZ 1907, S. 986 und Lloyd „Bulletin of the Bureau of standards“, Vol. 5, Nr. 3, Washington 1909).

net wird. Ein tieferer Grund zu dieser Unterscheidung liegt nicht vor, da eben nur die Geschwindigkeit, mit der sich die Magnetisierung ändert, verschieden ist. Bisher konnte ein merklicher Unterschied im reinen Hystereseverlust bei langsamen und schnellen Kreisprozessen nicht festgestellt werden. Zwar liegen einige Untersuchungen vor, welche eine Zunahme gezeigt haben, aber auch ebenso viele, welche keine Zunahme, und ebenso viele, welche eine Abnahme gezeigt haben, so daß man sagen kann, eine merkliche Abhängigkeit des Hystereseverlustes von der Geschwindigkeit des Kreisprozesses besteht nicht.

Anders ist es, wenn die Versuche nicht die reine Hysterese-schleife, sondern die durch merkliche Wirbelströme beeinflusste Schleife ergeben. Aus § 149 wissen wir, daß das von einem sekundären Strom herrührende magnetische Feld dem vom primären Strom herrührenden entgegenwirkt, so daß das resultierende Feld kleiner ist, als das vom primären Strom herrührende. Da die Wirbelströme nichts anderes sind als sekundäre Ströme, so haben sie dieselbe Wirkung. Die Folge ist, daß bei konstanter magnetisierender Kraft (konstanter Magnetisierungsstrom) die Kraftlinienmenge \mathfrak{z} und daher auch die Kraftliniendichte \mathfrak{B} kleiner ist, als wenn keine Wirbelströme vorhanden sind. Da die Wirbelströme nach Gl. 188 mit dem Quadrate der Periodenzahl zunehmen, so ist \mathfrak{z} und \mathfrak{B} um so kleiner, je größer diese ist. Abb. 239 zeigt die Hystereseschleifen bei verschiedener Periodenzahl¹⁾, wobei $\nu = 0$ einen sehr langsam verlaufenden Kreisprozeß bedeutet. Man sieht, daß trotz gleicher magnetisierender Kraft \mathfrak{z} die Kraftliniendichte \mathfrak{B} um so kleiner ist, je höher die Periodenzahl ist. Die Hysterese-schleife zeigt infolgedessen auch abgerundete Ecken, und die ganze Figur ist um so mehr gegen die Horizontale geneigt, je höher die Periodenzahl ist.

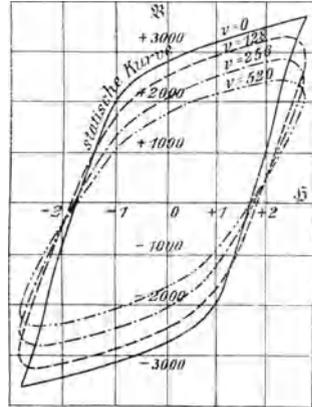


Abb. 239.

Auch der Flächeninhalt der Schleifen wird trotz zunehmender Wirbelstromverluste kleiner, weil die Kraftliniendichte kleiner wird.

Wird hingegen die Kraftliniendichte konstant gehalten, indem man die EMK in der magnetisierenden Spule konstant hält, so kommt die Zunahme des äquivalenten Widerstandes ρ an Stelle von w gemäß § 152 zur Geltung. Infolgedessen wächst die Stromstärke, während die Phasenverschiebung abnimmt. Das hat weiter zur Folge, daß nicht nur die Spitzen der Schleifen abgerundet sind, sondern

¹⁾ Nach M. Wien. Annal. d. Phys. 1898. Bd. 66.

daß auch ihr Flächeninhalt mit wachsender Frequenz zunimmt, was durch die vergleichenden Versuche an einem massiven Eisenstab und an einem Drahtbündel bestätigt wird (Abb. 240). Beim Drahtbündel zeigt sich kein Einfluß der Frequenz, weil da die Wirbelströme bei 10 und 30 Perioden noch verschwindend klein sind. Dagegen zeigt sich beim massiven Eisenstab ein starker Einfluß schon bei 10 Perioden, weil sich da die Wirbelströme in voller Stärke ausbilden können. Bei 30 Perioden überwiegt schon stark der Einfluß der Wirbelströme über die Hysterese. Die von Wirbelströmen nicht beeinflussten Schleifen in Abb. 240 haben scharfe Spitzen wie in Abb. 127 und 128. Diese scharfen Spitzen sind charakteristisch für die magnetische Hysterese, weil trotz dem remanenten

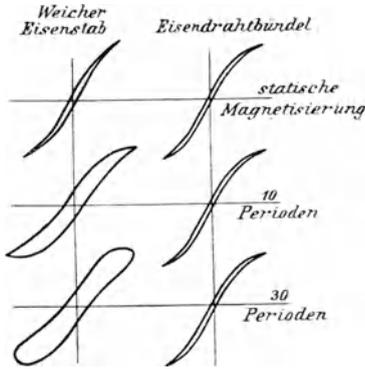


Abb. 240.

Spitzen wie in Abb. 127 und 128. Diese scharfen Spitzen sind charakteristisch für die magnetische Hysterese, weil trotz dem remanenten

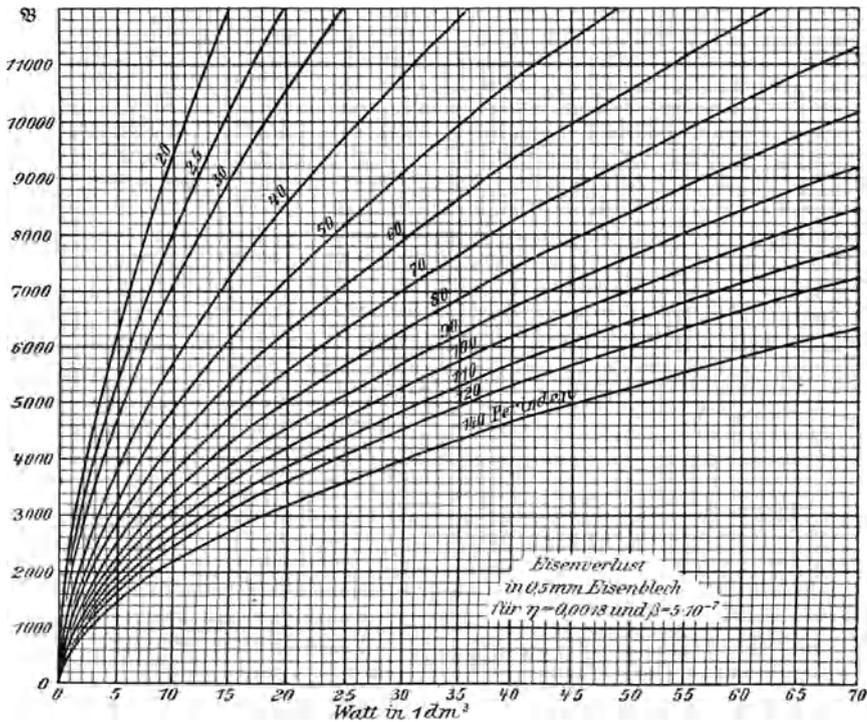


Abb. 241.

Magnetismus der Scheitelwert der erzeugten Kraftlinien gleichzeitig mit dem Scheitelwert der magnetisierenden Kraft eintritt. Je stärker aber die Wirbelströme werden, desto mehr ist der Eintritt des Scheitelwertes der Kraftlinienmenge hinter dem Scheitelwert der magnetisierenden Kraft verzögert, und desto mehr sind die Spitzen abgerundet¹⁾.

Ein anderer Einfluß der Wirbelströme auf den Hystereseverlust besteht als Folge der Erscheinung, daß bei hohen Frequenzen die Kraftliniendichte über den Querschnitt des Eisens ungleichmäßig verteilt ist (vgl. § 162).

157. Der gesamte Eisenverlust.

Der bei periodischer Magnetisierung auftretende Hystereseverlust setzt sich ebenso wie der durch Wirbelströme in Wärme um. Der gesamte im Eisenkern irgendeines Wechselstromapparates in Wärme umgesetzte Verlust V an nutzbarer Leistung ist demnach für 1 cm^3

$$V = p_h + p_w = (\eta \nu \mathfrak{B}^{1,6} + \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2) \cdot 10^{-7} \text{ Watt} \quad (189)$$

Man bezeichnet diesen gesamten im Eisen auftretenden Verlust als Eisenverlust zum Unterschiede von der in der Wicklung auftretenden Stromwärme, die man (in Watt ausgedrückt) als Kupferverlust bezeichnet. Die Kurven in Abb. 241 gestatten den gesamten Eisenverlust in Blechen von 0,5 mm Dicke und gewöhnlicher Güte für 1 dm^3 sofort abzulesen. Diese Kurven sind die Summen aus denen in Abb. 237 und 238. Abb. 242 enthält dieselben Kurven für legiertes Eisen (vgl. S. 289) von 0,35 mm Dicke. Über die Messung und Trennung der Eisenverluste siehe § 292.

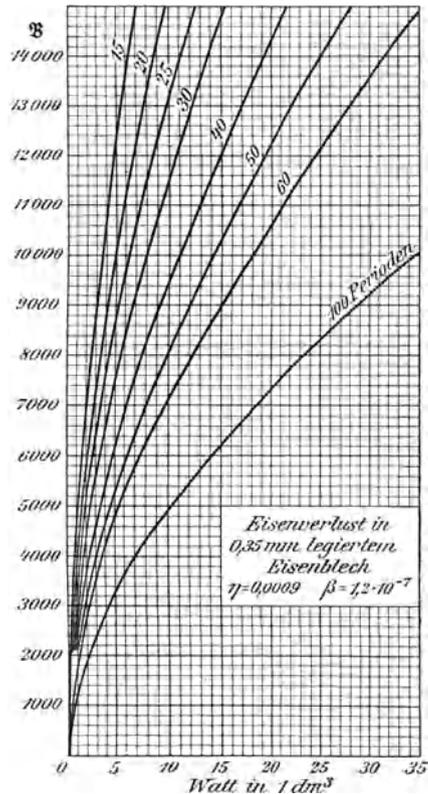


Abb. 242.

¹⁾ Solche Arbeitsschleifen mit abgerundeten Ecken erhält man auch, wenn man Ladung und Spannung eines Kondensators mit unvollkommenem Dielektrik

158. Der Magnetisierungsstrom.

Es wurde schon auf S. 285 betont, daß auch ein einzelner Stromkreis streng genommen unter die Theorie des allgemeinen Transformators fällt, wenn seine Kraftlinien durch Eisen oder andere gute Leiter verlaufen und hier merkliche Wirbelströme erzeugen, weil diese nichts anderes sind als sekundäre Ströme. Das gilt also insbesondere von jeder Wechselstromspule mit Eisenkern (Drosselspule, Elektromagnet, leerlaufender Transformator oder Motor u. dgl.). Die im Eisenkern entstehenden Wirbelstrom- und Hystereseverluste gehen auf Kosten der vom Strome J (bzw. J_1) zugeführten elektrischen Leistung. Mithin verursachen nicht nur die Wirbelströme, sondern die gesamten Eisenverluste Veränderungen in den Widerstandsgrößen gemäß § 152. Es tritt also an Stelle des wahren Widerstandes w der äquivalente ϱ , der größer ist als w , und an Stelle der wahren Selbstinduktion L tritt die äquivalente Selbstinduktion λ , die kleiner ist als L .¹⁾ An Stelle des für einen einzelnen Stromkreis geltenden Widerstandsdreieckes ABC (Abb. 243) tritt demnach das Dreieck AGH . An Stelle des scheinbaren Widerstandes $BC = \sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$ tritt der äquivalente scheinbare Widerstand $GH = \sqrt{\varrho^2 + (\omega \lambda)^2}$.

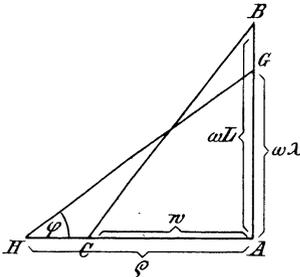


Abb. 243.

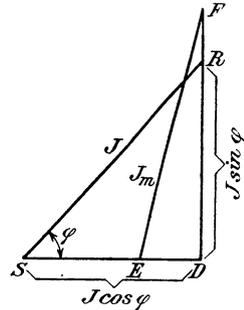


Abb. 244.

Aus der Vergrößerung des Widerstandes von w auf ϱ folgt bei konstanter Klemmenspannung eine Vergrößerung der Wattkomponente von DE auf DS (Abb. 244). Aus der Verminderung der Selbstinduktion von L auf λ folgt eine Abnahme der wattlosen Kompo-

(Leitungsvermögen, Rückstandsbildung § 181) oder Strom und Spannung eines Wechselstromlichtbogens (§ 261) in gleicher Weise aufzeichnet. Eine der magnetischen Hysterese ähnliche Erscheinung wird aber dadurch nicht bewiesen, nur ein entsprechender Arbeitsverbrauch. Hysterese ist nur dort vorhanden, wo die Enden der Schleife scharfe Spitzen haben und wo es eine Koerzitivkraft gibt.

¹⁾ Da alles, was den Magnetisierungs- und Leerlaufstrom betrifft, nicht nur für den Transformator, sondern für jede Wechselstromspule gilt, ist hier und in § 159 der Index 1 weggelassen.

nente von DF auf DR . Der gesamte Strom ist infolgedessen nicht J_m wie bei einem eisenfreien Stromkreis, sondern J . Dieses J ist bei einem Transformator oder Motor der Leerlaufstrom. Der zu J_m gehörige Scheitelwert \mathfrak{J}_m ist jener Wert, der nötig wäre, wenn man in demselben Stromkreis dieselbe Kraftlinienmenge \mathfrak{J} mittels Gleichstrom erzeugen würde. Es ist also $\mathfrak{J} = \frac{0,4\pi \mathfrak{J}_m}{w}$. Daher ist \mathfrak{J}_m der reine Magnetisierungsstrom. Dieser ist nicht identisch mit der wattlosen Komponente, sondern er enthält auch die dem Stromwärmeverlust in der Wicklung (primärer Verlust) entsprechende Wattkomponente ED . Gemäß § 136 ist $ED = \frac{V_k}{K}$, wenn V_k den genannten Stromwärmeverlust und K die Klemmenspannung bedeutet. Der gesamte, mittels eines Wattmeters meßbare Verlust P besteht aus diesem und dem Eisenverlust V_e , so daß

$$P = V_k + V_e.$$

Die gesamte Wattkomponente ist

$$DS = \frac{P}{K} = \frac{V_k}{K} + \frac{V_e}{K} = DE + ES,$$

mithin ist $ES = \frac{V_e}{K}$ die dem Eisenverluste entsprechende Wattkomponente.

Gemäß Gl. 178 besteht der äquivalente Widerstand ϱ aus dem Ohmschen Widerstand des primären Stromkreises w , vermehrt um einen Betrag, den wir jetzt mit dem Buchstaben w_e bezeichnen, so daß $\varrho = w + w_e$ ist.

Gemäß Gl. 180 ist

$$\varrho = \frac{P}{J^2} = \frac{V_k}{J^2} + \frac{V_e}{J^2}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist nichts anderes als der wahre Ohmsche Widerstand w , weil nach dem Jouleschen Gesetz $V_k = wJ^2$ ist.

Somit ist $\frac{V_e}{J^2} = w_e$,

und wir bezeichnen diesen Wert als Eisenverlustwiderstand, weil er sich aus dem Eisenverlust nach Division mit J^2 ergibt.¹⁾ In Abb. 243 ist $\varrho = AH$ und $w = AC$. Mithin ist $CH = w_e$. Die Lage des Punktes C in Abb. 243 und des Punktes E in Abb. 244 kann

¹⁾ Aus $\varrho = w + w_e$ erkennt man auch, daß der gesamte Eisenverlust die Phasenverschiebung des Stromes verkleinert wie jeder wirkliche Widerstand und jede Wattkomponente. Daher ist es falsch, dem Eisen eine „hysteretische Phasenvoreilung“ zuzuschreiben. Eine solche Wirkung hat nur ein Kondensator oder eine übererregte Maschine.

nach Vorstehendem aus Strom, Spannung und Wattverbrauch ohne weiteres bestimmt werden. Dagegen kann die Lage des Punktes F und daher auch der reine Magnetisierungsstrom J_m nicht direkt bestimmt werden. Aus den gemessenen Werten erhält man nur die Strecke DR als wattlose Komponente des Stromes J , und aus Gl. 181 erhält man nur den äquivalenten Induktionswiderstand $\omega\lambda = AG$. Der wahre Induktionswiderstand $\omega L = AB$ kann nur auf indirektem Wege ermittelt werden. Aus Gl. 179 ersieht man, daß

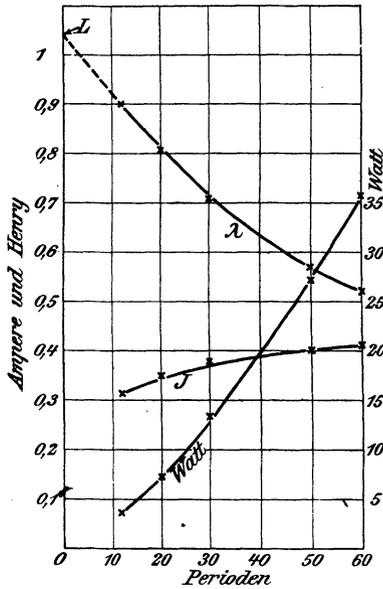


Abb. 245.

für den Grenzfall $\omega = 0$ ($\nu = 0$) die äquivalente Selbstinduktion λ in die wahre Selbstinduktion L übergeht. Bestimmen wir also $\omega\lambda$ nach Gl. 181 bei verschiedenen Periodenzahlen und berechnen daraus λ , indem wir durch $\omega = 2\pi\nu$ dividieren, so erhalten wir die in Abb. 245 eingetragene Kurve λ in Abhängigkeit von der Periodenzahl. Hat man genügend viele Punkte bis herab zu den kleinsten Periodenzahlen, wo man noch sicher messen kann, so läßt sich die λ -Kurve bis zur Ordinatenachse verlängern. Die dadurch bezeichnete Ordinate ist die wahre Selbstinduktion L . Sie ist in diesem Beispiele 1,04 Henry. Hieraus ergibt sich der wahre Induktionswiderstand ωL für beliebige Periodenzahlen. Bei 50 Perioden ist z. B. $\omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 1,04 = 327$ Ohm.

Man kann nun auch den effektiven Wert J_m des reinen Magnetisierungsstromes ausrechnen, denn es ist $J_m = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}$. Der wahre Ohmsche Widerstand w kann mittels Gleichstrom gemessen werden.

Handelt es sich nur um den Magnetisierungsstrom J_m , so kann man ihn auf ähnliche Weise, aber auf kürzerem Wege erhalten, denn für $\nu = 0$ ist der reine Magnetisierungsstrom J_m gleich dem Gesamtstrom J , weil das Dreieck DRS (Abb. 244) bei der Periodenzahl Null in das Dreieck DFE übergeht. Trägt man also bei konstanter Kraftlinienmenge, aber abnehmender Periodenzahl die gemessenen Stromstärken J in ein Kurvenblatt auf, wie in Abb. 245 und verlängert diese Kurve bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse, so erhält man hier den reinen Magnetisierungsstrom J_m . Auf beiden Wegen muß man zu demselben Wert gelangen. Die Verlängerung

der J -Kurve bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse ist aber manchmal unsicher, weil diese Kurve gerade bei kleinen Periodenzahlen eine stärkere Krümmung zeigt.

Wenn eine dieser beiden Methoden nicht angewendet werden kann, so ist es unmöglich, das Dreieck $D F E$ zu bestimmen. Man muß sich dann mit einer näherungsweisen Darstellung begnügen, indem man den Punkt F auf den Punkt R fallen läßt wie in Abb. 246 und 247. Ist die dem Eisenverlust entsprechende Strecke ES bedeutend größer als die dem Stromwärmeverlust entsprechende Strecke DE , so zeigt Abb. 246, daß man näherungsweise den Magnetisierungsstrom J_m gleich der wattlosen Komponente DE setzen kann. Ist hingegen der Eisenverlust mehrmals kleiner als der Stromwärmeverlust, so zeigt Abb. 247, daß man näherungsweise den Magnetisierungsstrom J_m gleich dem Gesamtstrom J setzen kann.

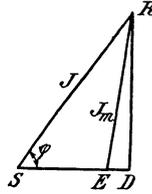


Abb. 246.

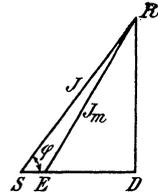


Abb. 247.

Wie alle graphischen Darstellungen sind auch alle vorstehenden nur dann streng richtig, wenn alle Wellen sinusförmig sind. Ist beträchtliche Hysterese vorhanden, so erleidet der Magnetisierungsstrom eine beträchtliche Verzerrung, die im folgenden behandelt wird.

159. Die Verzerrung der Stromwelle durch magnetische Hysterese.

Im vorhergehenden haben wir wie bisher vorausgesetzt, daß Spannung und Strom sinusförmig verlaufen. Das trifft aber gerade dann nicht mehr zu, wenn magnetische Hysterese auftritt. Diese bewirkt eine unsymmetrische Verzerrung der Stromwelle, die sich konstruieren läßt, wenn man auf die Augenblickswerte zurückgeht.

Das magnetische Feld ist (nach § 105) in jedem Augenblick bestimmt durch

$$\delta = \frac{0,4 \pi i_{\mu} N}{w},$$

wenn N die Windungszahl, i_{μ} den Augenblickswert des Magnetisierungsstromes in Ampere und w den magnetischen Widerstand des Kraftlinienbündels bedeutet. Dieser ist

$$w = \frac{l}{\mu S},$$

wobei l die Länge, S den Querschnitt und μ die magnetische Durchlässigkeit bedeutet. Es ist also

$$\delta = \frac{0,4 \pi i_{\mu} N}{l} \mu S.$$

Wäre μ eine Konstante, wie die übrigen Faktoren, so müßte der Strom denselben Verlauf nehmen wie \mathfrak{z} . Nun ist aber μ eine Funktion der Kraftliniendichte \mathfrak{B} (Abb. 123) und daher auch von \mathfrak{z} . Infolgedessen ist der Strom auch abhängig von μ , und er wurde daher mit dem Index μ bezeichnet. In Abb. 128 ist die Beziehung zwischen \mathfrak{H} und \mathfrak{B} für verschiedene magnetische Kreisprozesse dargestellt. Als Abszissen sind die magnetisierenden Kräfte $\mathfrak{H} = \frac{0,4\pi i_\mu N}{l}$,

als Ordinaten die Kraftliniendichten $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{z}}{S}$ aufgetragen. Dividiert

man den Abszissenmaßstab durch $\frac{0,4\pi N}{l}$ und multipliziert den Ordinatenmaßstab mit S , so erhält man die Abb. 248, die für den betreffenden Fall die Beziehung zwischen i_μ und \mathfrak{z} darstellt. Man

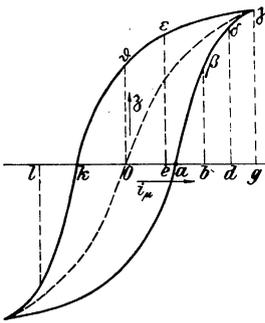


Abb. 248.

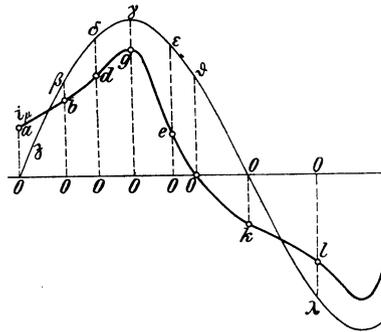


Abb. 249.

zeichnet nun die Wellenform von \mathfrak{z} , die wir hier als sinusförmige voraussetzen, so auf (Abb. 249), daß ihr Scheitelwert \mathfrak{z} gleich der größten Ordinate $g\gamma$ in Abb. 248 ist. Dann sucht man zu beliebigen Ordinaten von \mathfrak{z} in Abb. 249 die gleich großen Ordinaten in Abb. 248 und mißt hier die dazugehörigen Abszissen ab. So findet man z. B., daß zur Ordinate $O\beta$ die Abszisse Ob (Abb. 248) gehört; diese trägt man als Ordinate in Abb. 249 ein und erhält so den Punkt b . Auf gleiche Weise erhält man beliebige Punkte $a, b, d \dots$ der Stromwelle i_μ . Es ist das der Magnetisierungsstrom mit Berücksichtigung der Hysterese, weil die Hystereseschleife zu seiner Konstruktion benützt wurde. Infolgedessen enthält sie auch schon den Hystereseverlust als Wattkomponente. Hätten wir zur Konstruktion dieser Stromwelle nicht die Schleife, sondern die Mittellinie $O\gamma$ (die sogenannte jungfräuliche Magnetisierungskurve) benützt, so hätten wir die im vorigen § als reinen Magnetisierungsstrom bezeichnete Stromwelle i_m ohne unsymmetrische Verzerrung erhalten.

Da also der Magnetisierungsstrom i_μ schon den Hystereseverlust enthält, unterscheidet er sich vom gesamten Strom i (Leerlaufstrom

bei einem Transformator oder Motor) nur durch eine Wattkomponente i_w , die vom Wirbelstromverlust herrührt. Diese Wattkomponente erhält man, indem man diesen Verlust durch die Spannung dividiert. Als Wattkomponente hat sie gleiche Form und gleiche Phase wie die Klemmenspannung k . Wird sie zu i_μ addiert, so erhält man den Gesamtstrom i . In Abb. 250 ist das durchgeführt. Zunächst wird die \mathfrak{z} - und i -Welle aus Abb. 249 aufgezeichnet. Vernachlässigt man den Ohmschen Spannungsabfall wi , was hinsichtlich der Wellenform meist zulässig ist¹⁾, so ist gemäß § 132: $k = -e$. Demnach ist die k -Welle als negative e -Welle entsprechend der Abb. 197 hier eingezeichnet. In gleicher Phase ist die Wattkomponente i_w eingezeichnet. Aus der Summe von i_μ und i_w ergibt sich nun der gesamte Strom i .

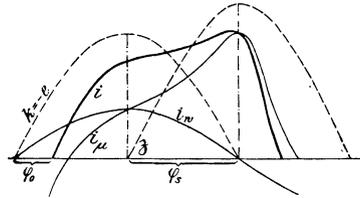


Abb. 250.

Wie man sieht, ist die i_μ - und die i -Welle unsymmetrisch verzerrt. Während ihre Scheitelwerte mit dem Scheitelwert der \mathfrak{z} -Welle zusammenfallen, sind die Nullwerte verschoben; und diese Verschiebung ist, wie aus der Konstruktion hervorgeht, um so größer, je größer der remanente Magnetismus $O\vartheta$ ist (Abb. 248). Von einem Phasenverschiebungswinkel der Stromwelle gegen die Spannungswelle k oder gegen die magnetische Welle \mathfrak{z} kann also jetzt nicht mehr gesprochen werden, sondern jeder Augenblickswert des Stromes hat eine andere Phasenverschiebung gegen den entsprechenden Augenblickswert der Spannung oder der Magnetisierung²⁾.

Die Hystereseschleife in Abb. 248 entspricht einer Magnetisierung bis etwa 7000 Kraftlinien. Bei stärkerer Magnetisierung ist die Hystereseschleife schlanker und spitzer, und dann ist auch die Wellenform des Magnetisierungsstromes i_μ und des Gesamtstromes i spitzer, wie Abb. 252 für $\mathfrak{B} = 10000$ Kraftlinien zeigt. Die Abweichung zwischen den Nullwerten der \mathfrak{z} -Welle und der i_μ -Welle ist gleich Ok (Abb. 248), also proportional der Koerzitivkraft.

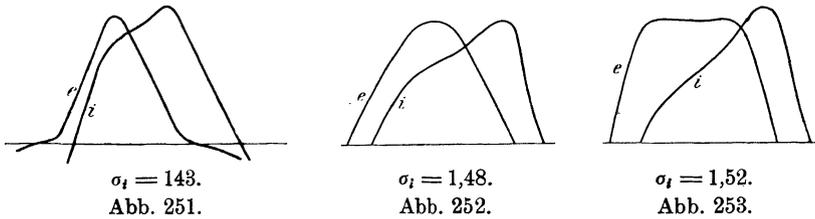
Die Wellenformen i_μ und i hängen von der magnetischen Welle \mathfrak{z} ab; und zwar sind sie um so spitzer, je spitzer diese ist. Da nun die magnetische Welle um so spitzer ist, je stumpfer die Spannungswelle ist (§ 212), so ist auch die Stromwelle um so spitzer, je

¹⁾ Ist das nicht zulässig, so muß k aus e und wi wie in Abb. 197 konstruiert werden.

²⁾ Es ist daher unsachlich und irreführend, wenn man von einem Hysteresephasenverschiebungswinkel oder magnetischen Verzögerungswinkel spricht. Es ist geradezu ein Charakteristikum der Hysteresis, daß sie die Darstellung der Phasenverschiebung durch einen Winkel unmöglich macht. Man kann nur sagen, daß sie die Phasenverschiebung verkleinert und den Leistungsfaktor vergrößert. Vgl. auch Anmerk. auf S. 295.

stumpfer die Spannungswelle ist, was durch die experimentell aufgenommenen Wellen in Abb. 251 bis 253 bestätigt wird.

Enthält der Eisenkern einen Luftzwischenraum, so ist die in Abb. 248 dargestellte Hystereseschleife um so schmaler und nähert sich um so mehr einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie, je größer der magnetische Widerstand im Luftzwischenraum gegenüber dem im Eisen ist (§ 111). Um so mehr nähert sich auch die Welle des Magnetisierungsstromes der der Spannung.



Wie schon oben erwähnt wurde, enthält der Magnetisierungsstrom i_μ den Hystereseverlust als Wattkomponente. Will man ihn davon befreien, um den im vorigen § benützten reinen Magnetisierungsstrom i_m zu halten, so muß man die dem Hystereseverlust entsprechende Wattkomponente i_h zeichnen und von i_μ abziehen, wie es in Abb. 254 durchgeführt ist. Als Wattkomponente hat i_h

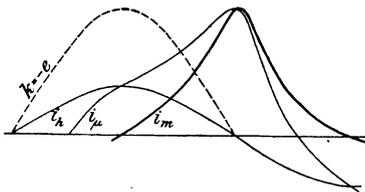


Abb. 254.

gleiche Form und gleiche Phase wie k . Die i_m -Welle ist symmetrisch zum Scheitelwert, und ihr Nullpunkt fällt mit dem Nullpunkt der β -Welle zusammen. Wie schon oben erwähnt, hätte man diese i_m -Welle auch dadurch erhalten, daß man der in Abb. 249 durchgeführten Konstruktion nicht die Hystereseschleife, sondern die jungfräuliche Magnetisierungskurve zugrunde gelegt hätte.

Wie aus den Abb. 250 und 254 hervorgeht, haben die i_μ -, i_m - und i -Welle denselben Scheitelwert, wenn der Scheitelwert der Wattkomponenten i_w und i_h zusammen nicht größer ist als der von i_m . In diesem Falle, der bei allen Induktionsmotoren und den meisten Drosselpulen und Transformatoren zutrifft, ist also

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\mu = \mathfrak{I}_m.$$

Dagegen können die effektiven Werte infolge Verschiedenheit der Wellenformen, also Verschiedenheit der Scheitelfaktoren, verschieden sein. Für sie gilt die graphische Darstellung in Abb. 244 oder näherungsweise Abb. 246 und 247. Da der Hystereseverlust vom Scheitelwert β der Kraftlinienmenge abhängt, so kommt es nur

auf diesen an. Daher wurde auch die Grundgleichung 109 in der Form dargestellt, daß man aus dem effektiven Werte E den Scheitelwert \mathfrak{J} erhält. Infolgedessen braucht man auch nur den Scheitelwert des Magnetisierungsstromes. Er ergibt sich aus

$$\mathfrak{J}_m = \frac{w \mathfrak{J}}{0,4 \pi N};$$

und da dieser in den meisten Fällen identisch ist mit dem Scheitelwert des Gesamtstromes \mathfrak{J} , so braucht man in solchen Fällen die übliche, nur näherungsweise gültige Darstellung, wie sie Abb. 246 und 247 zeigt, nicht. Vom Scheitelwert \mathfrak{J} gelangt man zum effektiven Wert J , wenn man durch den Scheitelfaktor σ_i der i -Welle dividiert. Kennt man die Wellenform von i , so kann man diesen Scheitelfaktor gemäß § 214, 215 berechnen. Kennt man die Wellenform nicht, so benützt man einen der in Abb. 251 bis 253 angegebenen Scheitelfaktoren, je nachdem die Spannungswelle spitz, sinusförmig oder stumpf ist. Weiß man darüber nichts, so benützt man den mittleren Scheitelfaktor $\sigma_i = 1,48$.

Je stärker die Wirbelströme im Eisen oder in anderen Metallmassen sind, desto größer ist i_w und desto mehr nähert sich der Gesamtstrom i der Sinusform, wenn die Spannungswelle sinusförmig ist.

Beispiel. Ein aus 0,5 mm Eisenblech zusammengesetzter Ring von $l = 100$ cm mittlerem Umfang (Länge des Kraftlinienpfades) und $S = 34$ cm² Querschnitt, werde mit 200 Windungen (N) Kupferdraht bewickelt und soll an 110 Volt Spannung bei 50 Perioden angeschlossen werden.

Da sich bei so großer Selbstinduktion die EMK sehr wenig von der Klemmenspannung unterscheidet, so ergibt sich die Kraftlinienmenge aus Gl. 109:

$$\mathfrak{J} = \frac{E \cdot 10^8}{4,44 \nu N} = \frac{110 \cdot 10^8}{4,44 \cdot 50 \cdot 200} = 248000.$$

$$\text{Daher die Kraftliniendichte } \mathfrak{B} = \frac{248000}{34} = 7300.$$

Dazu findet man aus Abb. 123 eine Durchlässigkeit $\mu = 3200$. Mithin ist der magnetische Widerstand

$$w = \frac{l}{\mu S} = \frac{100}{3200 \cdot 34} = 0,00092.$$

Der Scheitelwert \mathfrak{J}_m des Magnetisierungsstromes ist

$$\mathfrak{J}_m = \frac{w \mathfrak{J}}{0,4 \pi N} = \frac{0,00092 \cdot 248000}{0,4 \cdot 3,14 \cdot 200} = 0,91 \text{ A.}$$

Zur Berechnung des effektiven Wertes nehmen wir den Scheitelfaktor der Abb. 252, nämlich 1,48. Dann ist

$$J_m = \frac{\mathfrak{J}_m}{\sigma_i} = \frac{0,91}{1,48} = 0,61 \text{ A.}$$

Bei $\mathfrak{B} = 7300$ findet man aus Abb. 241 einen Eisenverlust von 20 Watt für 1 dm³. Der Rauminhalt des Eisenringes ist $100 \cdot 34 = 3400$ cm³ = 3,4 dm³. Mithin der ganze Eisenverlust $20 \cdot 3,4 = 68$ Watt. Daraus ergibt sich die dem Eisenverluste entsprechende Wattkomponente $ES = \frac{68}{110} = 0,62$. Die Watt-

komponente des Eisenverlustes ist also von gleicher Größenordnung wie der Magnetisierungsstrom. Daher ist auf die S. 300 erwähnte Gleichsetzung von \mathfrak{J} und \mathfrak{J}_m nicht zulässig, sondern man muß Abb. 246 benutzen und J_m gleich DR setzen. Dann ist der gesamte Strom

$$J = \sqrt{DR^2 + ES^2} = \sqrt{0,61^2 + 0,62^2} = 0,87.$$

Nun nehmen wir an, dieser Eisenring habe einen Luftspalt von 0,1 cm. Dann ist der magnetische Widerstand gemäß § 106

$$w = \frac{100}{3200 \cdot 34} + \frac{0,1}{34} = 0,00092 + 0,00294 = 0,00386.$$

Mithin

$$\mathfrak{J}_m = \frac{0,00386 \cdot 248000}{0,4 \cdot 3,14 \cdot 280} = 3,82 \text{ A.}$$

Die Wattkomponente des Eisenverlustes ist wie vorhin 0,62, also bedeutend kleiner als der Magnetisierungsstrom. Infolgedessen ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_m$. Dann ist

$$J = \frac{\mathfrak{J}_m}{\sigma_i} = \frac{3,82}{1,48} = 2,6 \text{ A.}$$

Dieser Wert ist sogar genauer, als wenn dasselbe Verfahren wie vorhin auf Grund des nur näherungsweise richtigen Diagrammes Abb. 246 angewendet worden wäre; man würde dadurch einen zu großen Wert für J erhalten.

Die umgekehrte Aufgabe liegt vor, wenn man von einer Eisenblechsorte die Amperewindungskurve oder die μ -Kurve bestimmen will. Man fertigt aus den Blechen einen Eisenring und versieht ihn mit einer gleichmäßigen Wicklung von so dickem Kupferdraht, daß der Ohmsche Spannungsabfall vernachlässigt werden kann. Dann mißt man Spannung, Strom und Leistung. Aus der Spannung¹⁾ erhält man die Kraftlinienmenge \mathfrak{J} und daraus die Kraftliniendichte \mathfrak{B} . Aus der Leistung erhält man die Wattkomponente des Eisenverlustes. Diese ist vom gemessenen Strom J geometrisch zu subtrahieren, und man erhält J_m . Hat man die Wellenform des Stromes aufgenommen, so kann man den Scheitelfaktor σ_i berechnen. Diesen kann man auch als Scheitelfaktor des Magnetisierungsstromes betrachten. Dann ist $\mathfrak{J}_m = \sigma_i J_m$. Das Produkt $\mathfrak{J}_m N$ gibt die gesamten Amperewindungen. Dividiert man durch die Länge l des Kraftlinienpfades, so erhält man die Amperewindungen für 1 cm bei der betreffenden Kraftliniendichte \mathfrak{B} . Um die Durchlässigkeit μ zu finden, berechnet man zunächst den magnetischen Widerstand $w = \frac{0,4\pi \mathfrak{J}_m N}{\mathfrak{J}}$, und daraus $\mu = \frac{l}{wS}$. Auf diese Weise

ist die Amperewindungskurve in Abb. 177 und die Durchlässigkeitskurve in Abb. 123 für Dynamoblech ermittelt worden.

Ist der Eisenverlust klein, wie bei legierten Blechen, so braucht man die Wattkomponente des Eisenverlustes nicht, sondern kann aus dem oben angegebenen Grunde $\mathfrak{J}_m = \mathfrak{J}$ setzen, nachdem man \mathfrak{J} aus $\mathfrak{J} = \sigma_i J$ berechnet hat.

¹⁾ Ist der Ohmsche Widerstand zu groß, so muß man den Spannungsabfall wJ berücksichtigen und die EMK ausrechnen (§ 135).

160. Die Bestimmung des Kupplungsfaktors und Streufaktors.

Zur experimentellen Bestimmung des den Betriebsverhältnissen entsprechenden Kupplungsfaktors gibt es nur folgende drei Methoden¹⁾.

I. Für einen kurzgeschlossenen Transformator oder dgl. gilt mit großer Genauigkeit Gl. 173. Danach ist

$$\kappa = \frac{J_{k2} N_2}{J_{k1} N_1}$$

Hieraus ergibt sich der Streufaktor δ gemäß der auf S. 271 erhaltenen Gleichung $\delta = 1 - \kappa^2$. Die Messung der beiden Kurzschlußströme muß mit großer Genauigkeit geschehen. Diese ist nur dann zu erreichen, wenn man die beiden Amperemeter miteinander vergleichen kann, so daß die Eichfehler beseitigt werden.

II. Diese Vergleichung ist aber nicht möglich, wenn die beiden Ströme sehr verschieden sind, wie es meistens der Fall ist. Dann empfiehlt es sich, zwei gleiche Transformatoren mit den gleichen Wicklungen aufeinander arbeiten zu lassen, und den zweiten Transformator (den tertiären Strom J_3) kurz zu schließen. Der Kupplungsfaktor ergibt sich dann aus²⁾

$$\kappa = \sqrt{\frac{J_3 \cdot \omega L_{2i} + \omega \lambda}{J_1 \cdot \omega L_{2i}}}$$

J_1 und J_2 sind direkt zu messen; und da sie von gleicher Größenordnung sind, können die Amperemeter miteinander verglichen werden. ωL_{2i} und $\omega \lambda$ ergeben sich aus den Leerlauf- und Kurzschlußwerten eines einzelnen Transformators.

III. In jenen Fällen, wo die Messung des sekundären Stromes Schwierigkeiten macht oder überhaupt unmöglich ist, bietet sich folgender Weg: Der primäre Kurzschlußstrom ist

$$J_{k1} = \frac{K_1}{\sqrt{Q_k^2 + (\omega \lambda_k)^2}}$$

Nach Gl. 180 ist

$$Q_k = \frac{P_k}{J_{k1}^2}$$

wenn P_k die beim Kurzschluß gemessene elektrische Leistung (also

¹⁾ Alle drei Methoden sind vom Verf. angegeben worden, und zwar: I. in ETZ 1908, S. 73, II. in „Elektr. Kraftbetriebe und Bahnen“, Bd. 6, S. 688, 1908; ferner „Die Transformatoren“, Braunschweig 1909, S. 189; III. in „Elektr. Kraftbetriebe u. Bahnen“, Bd. 10, S. 83, 1912. Es ist vorgeschlagen worden, den Streufaktor dadurch zu bestimmen, daß man primäre und sekundäre Wicklung gegeneinanderschaltet und Gleichstrom durchschickt. Das gibt aber nicht den richtigen Wert, weil da Streuung und Stauung anders ist als bei Wechselstrombetrieb.

²⁾ Siehe die unter II. angegebene Literatur.

der gesamte Verlust) ist. Und weil bei Kurzschluß $\lambda_k = \delta L_1$ ist (§ 153), so ist

$$J_{k1} = \frac{K_1}{\sqrt{\left(\frac{P_k}{J_{k1}^2}\right)^2 + \delta^2(\omega L_1)^2}}$$

Der induktive Widerstand ωL_1 kann aus dem Magnetisierungsstrom (Gl. 183) ermittelt werden. Bei normalen Transformatoren und Induktionsmotoren ist w_1^2 verschwindend klein gegen $(\omega L_1)^2$. Dann ist

$$\omega L_1 = \frac{K_1}{J_m}$$

Nachdem man dies eingesetzt hat, ergibt sich

$$\delta = (1 - \kappa^2) = \frac{J_m}{K_1 J_{k1}} \sqrt{K_1^2 - \left(\frac{P_k}{J_{k1}}\right)^2}$$

J_m ergibt sich aus dem bei derselben Spannung gemessenen Leerlaufstrom J_0 nach Abrechnung der den Eisenverlusten entsprechenden Wattkomponente (gemäß Abb. 246). Sind die Eisenverluste klein, so kann ohne weiteres J_0 für J_m eingesetzt werden.

Bei einem streuungslosen Transformator ($\delta=0$) ist nach § 153 der Leistungsfaktor bei Kurzschluß $\cos \varphi_k = 1$, also die aufgenommene Leistung gleich dem Produkte aus Strom und Spannung: $P_k = K_1 J_{k1}$. In der Tat wird für diesen Fall der obige Ausdruck gleich Null¹⁾.

Es wäre am naheliegendsten, den Kurzschlußversuch zur Messung von P_k und J_{k1} bei derselben Klemmenspannung K_1 zu machen, wie den Leerlaufversuch zur Bestimmung von J_m . Da aber die Streufelder proportional den Stromstärken sind, so erhält man bei Kurzschluß unter normaler Spannung Streufelder, die vielmal größer sind, als bei normalem Betrieb. Wegen des Eisenkernes ändert sich dadurch auch der Streufaktor oder mit anderen Worten, der Streufaktor bei Kurzschluß unter normaler Spannung hat einen anderen Wert als bei normaler Stromstärke. Es ist daher richtiger, den Kurzschlußversuch nicht bei normaler Spannung, sondern bei jener Spannung zu machen, die den normalen Strom (wie bei normaler Belastung) erzeugt. Bezeichnet man die bei diesem Versuch gemessene Spannung mit K_k (Kurzschlußspannung), so geht die letzte Gleichung über in

$$\delta = (1 - \kappa^2) = \frac{J_m}{K_1 J_{k1}} \sqrt{K_k^2 - \left(\frac{P_k}{J_{k1}}\right)^2}$$

¹⁾ Wäre der Wattverbrauch des Transformators bei Kurzschluß $P_k = 0$, so wäre $\delta = \frac{J_m}{J_{k1}}$. Das ist eine Formel, die man häufig findet, die aber von der Wirklichkeit weit entfernt ist.

Es beziehen sich also K_{k_1} , P_{k_1} , J_{k_1} auf den genannten Kurzschlußversuch, dagegen K_{k_1} , J_{k_1} auf den Leerlaufversuch.

161. Elektrodynamische Schirmwirkung.

Als ein Stromkreis von sehr kleinem Widerstand ist eine Kupferplatte zu betrachten. Wird eine solche vor einen Wechselstromelektromagnet senkrecht zu den Kraftlinien gestellt (Abb. 255), so stellt die Anordnung einen Transformator dar, dessen primärer Stromkreis die Wicklung des Elektromagnetes ist, und dessen kurzgeschlossener sekundärer Stromkreis die Kupferplatte ist. Nach S. 274 ist die Phasenverschiebung zwischen beiden Strömen nahezu 180° , so daß sie in jedem Augenblick einander entgegengesetzt sind. Da sich entgegengesetzte Ströme gegenseitig abstoßen (§ 117), so muß zwischen dem Elektromagnet und der Platte Abstoßung eintreten. Dasselbe ist der Fall, wenn statt der Platte ein geschlossener Kupfering verwendet wird.

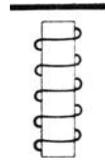


Abb. 255.

Untersucht man das magnetische Feld hinter einer solchen Platte von genügender Dicke, so findet man, daß es beinahe Null ist. Macht man das Feld durch Eisenfeilspäne sichtbar, so erhält man die Abb. 256. Man ersieht aus ihr, daß die Eisenfeilspäne hinter

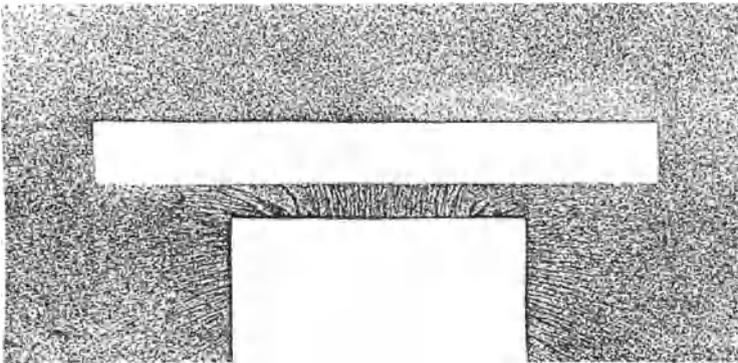


Abb. 256. Elektrodynamische Schirmwirkung einer Kupferplatte.

der Platte ungeordnet liegen, so wie sie hingestreut wurden, weil das magnetische Feld dort verschwindend klein ist. Die Platte übt also eine Schirmwirkung auf den hinter ihr befindlichen Raum gegen die vom Elektromagnet kommenden Kraftlinien aus. Da die Ursache in den in der Platte induzierten Strömen liegt, so bezeichnet man diese Schirmwirkung als elektrodynamische. Da die beiden Ströme um nahezu 180° verschoben sind, so ist das gemeinsame Feld \mathfrak{B} nahezu Null. Die Kraftlinien, die in Abb. 256 zu sehen sind,

stellen das primäre Feld \mathfrak{J} , dar. Das sekundäre Feld ist hier nicht zu erkennen, da es zu schwach ist. Aus dem Bilde erkennt man auch deutlich die eigenartige Stauung der Kraftlinien durch die Platte. Die Stauung ist um so größer, je größer die Stromstärke ist, und je näher die Phasenverschiebung an 180° kommt. Die elektrodynamische Schirmwirkung ist daher unter sonst gleichen Umständen um so stärker, je höher die Periodenzahl ist, weil dann die Phasenverschiebung um so näher an 180° kommt.

Die elektrodynamische Schirmwirkung unterscheidet sich von der magnetischen (§ 101) dadurch, daß das von dem Elektromagnete herführende Feld von dem des sekundären Stromes in der Platte zum Teil vernichtet wird, so daß das gemeinsame Feld nahezu Null ist. Das primäre Feld besteht fast nur aus dem primären Streufeld, das wegen der Stauung sehr groß ist. Hingegen besteht die magnetische Schirmwirkung einer Eisenplatte darin, daß die Kraftlinien von ihr angesaugt und dadurch von dem Raum hinter der Platte ferngehalten werden. Die elektrodynamische Schirmwirkung ist noch unvollkommener als die magnetische. Nur eine solche Platte, deren Widerstand Null ist, vermag bei den in der Technik üblichen Periodenzahlen das ganze Feld abzuschirmen. Während die magnetische Schirmwirkung in einem konstanten Felde keine Arbeit verbraucht, ist der Arbeitsverbrauch bei der elektrodynamischen Schirmwirkung um so größer, je vollkommener sie ist. Bei konstanter Spannung macht sich der Arbeitsverbrauch durch eine Zunahme der primären Stromstärke bemerkbar. Das ist noch mehr bei einer Eisenplatte der Fall, die zum Zwecke magnetischer Schirmwirkung in ein Wechselfeld gebracht wird, weil in der Eisenplatte starke Wirbelströme induziert werden. Da aber die elektrodynamische Schirmwirkung

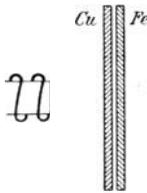


Abb. 257.

einer Kupferplatte eine zu unvollkommene ist, kombiniert man beide. Auf die Seite, von der die Kraftlinien kommen, stellt man die Kupferplatte (Abb. 257) und hinter ihr die Eisenplatte. Die Kupferplatte schirmt zunächst den größten Teil der Kraftlinien ab. Diejenigen, die noch hindurchgehen, werden von der Eisenplatte vollständig abgeschirmt. Da ihre Anzahl nicht mehr groß ist, treten auch keine starken Wirbelströme in ihr auf. Unter Umständen kann man mehrere Kupfer- und Eisenplatten abwechselnd anordnen.

Über den Zusammenhang der elektrodynamischen Schirmwirkung mit dem Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit vgl. § 169.

Auf der elektrodynamischen Schirmwirkung beruht der asynchrone Wechselstrommotor¹⁾ des Verfassers (Abb. 258). Eine um die Achse A drehbare Kupfer- (oder Aluminium-) Scheibe S befindet sich zwischen den Polen des Wechselstromelektromagnetes M . Vor den Polen sitzen die Kupferplatten T , die aber die Polflächen nur zum

¹⁾ D.R.P. Nr. 86553 vom 5. April 1895, ETZ 1895, S. 368; 1899, S. 82.

Teil bedecken. Das magnetische Feld zwischen den Polen induziert in den Platten und in der Scheibe geschlossene Ströme, die durch die gestrichelten Linien angedeutet sind. Gleichzeitig wird durch diese Platten jener Teil der Scheibe, der sich jeweils zwischen ihnen befindet, gegen das magnetische Feld abgeschirmt, so daß in diesem Teil keine oder nur schwache Ströme induziert werden. Im wesentlichen liegen also die in der Scheibe induzierten, geschlossenen Ströme links neben den Platten. Da diese und die Ströme in den schirmenden Platten von demselben magnetischen Felde induziert werden,

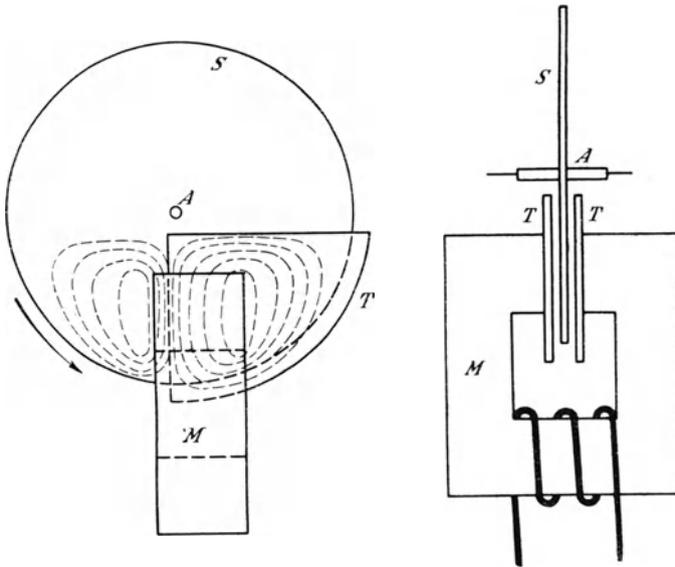


Abb. 258.

so haben sie gleichen und parallelen Verlauf und ziehen sich daher gegenseitig an (§ 117); die Scheibe *S* dreht sich also in der Richtung des Pfeiles gegen die Platten hin. Wären die schirmenden Platten nicht vorhanden, so könnte eine Drehung der Scheibe nicht eintreten, sondern sie würde wie in Abb. 256 von jedem Pole Abstoßungen in der Richtung der Kraftlinien erleiden, die sich gegenseitig aufheben.

Dieser Wechselstrommotor zeichnet sich dadurch aus, daß seine Umlaufgeschwindigkeit von der Periodenzahl des Wechselstromes unabhängig und daher absolut asynchron ist, und daß er von selbst anläuft. Der Wirkungsgrad ist aber wegen der großen Stromwärmeverluste in den Platten und in der Scheibe sehr klein, so daß dieses Prinzip nur für ganz kleine Motoren, wo der Wirkungsgrad keine Rolle spielt, angewendet werden kann, wie z. B. für den Reguliermechanismus von Wechselstrom-Bogenlampen (Abb. 259). Hier wirken

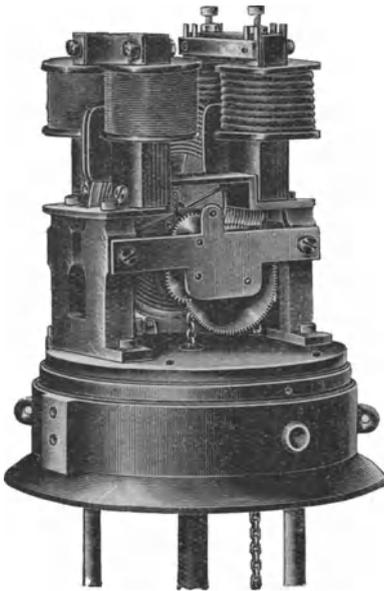


Abb. 259.

zwei Magnetsysteme auf eine Scheibe, da es eine Differentiallampe ist. Wird die Scheibe mit einer Feder als Gegenkraft versehen, die sie in eine bestimmte Ruhelage zurückbringt, so dient dieser Motor als Wechselstrommeßinstrument¹⁾ (vgl. § 271).

Statt der massiven Platten *T* können auch Kupferringe *R* (Abb. 260) verwendet werden²⁾, da ja die Schirmwirkung nicht von dem Material als solchem, wie bei der elektromagnetischen Schirmwirkung, sondern von den sekundären Strömen herrührt. Zwischen den Strömen in den Ringen und in der Scheibe besteht dieselbe Anziehung wie zwischen den Strömen in den Platten und in der Scheibe. — Über ein anderes Motorprinzip mit gleicher Anwendung vgl. § 231.

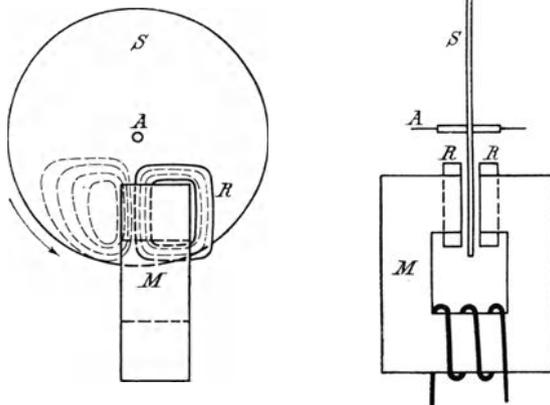


Abb. 260.

¹⁾ D.R.P. Nr. 84871 vom 5. Juli 1895, ETZ 1899, S. 82.

²⁾ D.R.G.M. Nr. 82371 vom 19. Juni 1897.

162. Einfluß der Wirbelströme auf die Kraftlinienverteilung.

Außer dem Arbeitsverluste durch Erwärmung haben die Wirbelströme in Eisenkernen (Abb. 234) auch noch eine unerwünschte magnetische Wirkung. Da sie als kurzgeschlossene sekundäre Ströme um nahezu 180° in der Phase verschoben sind gegenüber dem Strome in der Wicklung, so wirken sie während des größten Teiles einer Periode diesem entgegen; infolgedessen ist das wirklich vorhandene magnetische Feld schwächer, als wenn die Wirbelströme nicht vorhanden wären. Diese Schwächung ist aber nicht überall gleich, sondern in der Mitte des Querschnittes größer als in den oberflächlichen Schichten. Denn auf die Mitte wirken sämtliche Wirbelströme in dieser Weise. Weiter gegen die Oberfläche zu wird die Schwächung nur von jenen Wirbelströmen verursacht, welche die betreffende Schicht umschließen. In der Oberfläche selbst findet also keine Schwächung statt. Die Wirbelströme üben demnach eine Schirmwirkung auf die innerhalb ihrer geschlossenen Bahn liegenden Teile des Kernes aus. Um also bei Wechselstrom dieselbe Kraftliniendichte zu erzielen wie unter den gleichen Verhältnissen bei einem konstanten Strome, sind mehr Amperewindungen notwendig. Man sieht ein, daß dieser schädliche Einfluß um so stärker ist, je dicker das Eisen ist, und daß bei einer gewissen Dicke das Innere ganz unmagnetisch sein kann; ein Grund mehr, die Eisenkerne möglichst oft zu unterteilen.

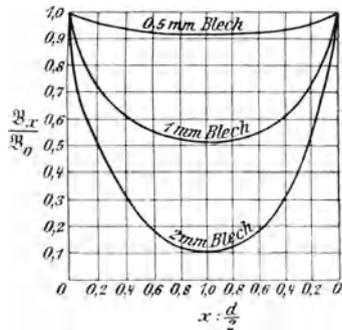


Abb. 261.

Abb. 261 läßt die ungleiche Verteilung der Kraftlinien über den Querschnitt einzelner Eisenbleche bei 100 Perioden erkennen. Die Ordinaten geben das Verhältnis $\frac{B_x}{B_0}$ an, wobei B_0 die Kraftliniendichte in der äußersten Oberflächenschicht und B_x die Kraftliniendichte in der Tiefe x der Platte bedeutet. Die Abszissen geben das Verhältnis der Tiefe x zur halben Plattendicke $\frac{d}{2}$, also das Verhältnis

$x : \frac{d}{2}$ an. Man ersieht aus diesen Kurven z. B., daß bei 2 mm Blechdicke die Induktion in der Mitte etwa ein Zehntel der in der Oberfläche ist, bei 1 mm Blechdicke etwa die Hälfte und bei 0,5 mm Blechdicke etwa das 0,92fache.

Ist die EMK \mathcal{E} der das Feld erzeugenden Wicklung konstant, so ist auch die Kraftlinienmenge \mathfrak{B} nach dem Grundgesetz $\mathcal{E} = \omega N \mathfrak{B}$ konstant. Infolge der ungleichmäßigen Verteilung der Kraftlinien

ist dann die Kraftliniendichte \mathfrak{B} an der Oberfläche größer, in der Mitte aber kleiner als bei gleichmäßiger Verteilung; die Kraftlinien werden gegen die Oberfläche hin gedrängt. Die Kraftliniendichte an der Oberfläche bei 100 Perioden (200 Wechsel) ist z. B.

bei 2 mm dicken Blechen das	1,37 fache	}	der Kraftliniendichte bei gleichmäßiger Verteilung.
„ 1,5 „ „ „ „	1,23 „		
„ 1,0 „ „ „ „	1,115 „		
„ 0,5 „ „ „ „	1,01 „		
„ 0,25 „ „ „ „	1,00 „		

Diese Zahlen gelten aber nur für einzelne Bleche. Bei Eisenkernen, die aus vielen übereinander geschichteten Blechen bestehen (Blechkpaket), muß die Verteilung über den Querschnitt des ganzen Kernes betrachtet werden. In Abb. 262 sind vier Bleche im Querschnitt gezeichnet. Die gestrichelten Linien deuten die Wirbelströme, die Pfeile ihre Richtung an. Daraus ersieht man, daß sich hinsichtlich der magnetischen Wirkung die nebeneinander liegenden Teile der Wirbelstrombahnen gegenseitig aufheben, weil sie entgegengesetzte Richtung haben. Es bleibt also für die magnetische Wirkung der Wirbelströme ein resultierender Strom, der sich dem äußeren Um-

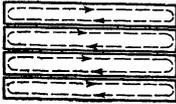


Abb. 262.

fang des ganzen Kernes anpaßt. Das Blechkpaket verhält sich in dieser Hinsicht so, wie ein gleichgestalteter massiver Körper, dessen elektrischer Leitungswiderstand aber je nach der Blechdicke oftmals größer ist als der wirkliche Leitungswiderstand des Eisens. Da diese magnetische Schirmwirkung der Wirbelströme auf das Innere des Kernes nicht nur von der Dicke der einzelnen Bleche, sondern auch von dem ganzen Querschnitt des Kernes abhängt, so läßt sich die Verteilung der Kraftliniendichte in solchen Eisenkernen nicht in Formeln bringen. Nach Messungen von Lodge¹⁾ beträgt der Unterschied der Kraftliniendichte zwischen der Mitte und den äußeren Teilen eines quadratischen Blechkpaketes von 220 cm² Querschnittfläche bei 100 Perioden 22% und bei 14,6 Perioden 3%.

Die ungleichmäßige Verteilung der Kraftliniendichte hat auch eine Änderung der Eisenverluste (Wirbelströme und Hysterese) zur Folge. Wird die EMK in der Wicklung konstant gehalten, so ist die gesamte Kraftlinienmenge \mathfrak{B} konstant. Daher ist die Kraftliniendichte \mathfrak{B} im Innern des Eisenkörpers kleiner und in den äußeren Teilen größer als bei gleichmäßiger Verteilung. Wären Wirbelstrom- und Hystereseverlust der ersten Potenz von \mathfrak{B} proportional, so würde sich die Verminderung dieser Verluste im Innern des Körpers und die Vergrößerung derselben in den äußeren Teilen aufheben. Da aber die Wirbelströme mit der 2. Potenz und die Hysterese mit der 1,6. Potenz wachsen, so ergibt sich eine Zunahme derselben, die um

¹⁾ The Electrician, 11. September 1908.

so größer ist, je ungleichmäßiger die Verteilung der Kraftliniendichte ist. Die Folge davon ist auch eine kleine Zunahme der Stromstärke. Wird hingegen die Stromstärke in der Wicklung konstant gehalten, so ist die Kraftliniendichte \mathfrak{B} in den äußeren Teilen des Kernes dieselbe, in den inneren Teilen aber kleiner als bei gleichmäßiger Verteilung. Infolgedessen sind die Eisenverluste kleiner als bei gleichmäßiger Verteilung.

Ob durch das Hinausdrängen der Kraftlinien gegen die Oberfläche hin eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes stattfindet oder nicht, hängt von zwei Umständen ab. Die nächste Folge ist immer eine Verkleinerung des Querschnittes des Kraftlinienbündels, was eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes bedeutet. Liegt die Kraftliniendichte \mathfrak{B} unter jenem Wert, bei dem die größte Durchlässigkeit μ besteht (nach Abb. 123 bei etwa 7000), also beispielsweise bei 3000, so hat die Vergrößerung von \mathfrak{B} eine Zunahme von μ , d. h. eine Verkleinerung des magnetischen Widerstandes zur Folge, wodurch die Verkleinerung des Querschnittes ausgeglichen werden kann. Liegt aber \mathfrak{B} beispielsweise bei 8000, so tritt eine Abnahme von μ und infolgedessen eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes aus doppelter Ursache ein.

Die ungleichmäßige Verteilung der Kraftliniendichte hat in jedem Falle zur Folge, daß die magnetische Durchlässigkeit μ nicht an allen Stellen des Querschnittes dieselbe ist, was eine weitere Ungleichförmigkeit in der Kraftliniendichte zur Folge hat. Müssen die Kraftlinien starke Krümmungen machen, wie bei allen Eisenkörpern, welche die Form eines viereckigen Rahmens haben (Abb. 166—171), so ist die Verteilung der Kraftliniendichte besonders verwickelt¹⁾.

163. Transformatoren in Hintereinanderschaltung.

Die Apparate mit gegenseitiger Induktion, sowohl Transformatoren wie Induktionsmotoren, werden in der Elektrotechnik zu meist so angewendet, daß sie an konstante Klemmenspannung angeschlossen, also untereinander parallel geschaltet sind. Dann ändert sich (nach Gl. 170) die primäre Stromstärke in gleichem Sinne, wie die sekundäre, wenn auch nicht proportional. Transformatoren und Drosselspulen werden manchmal auch in Hintereinanderschaltung mit gleichen oder anderen Apparaten angewendet. Dann hängt die pri-

¹⁾ Die hier erwähnten, die Kraftliniendichte und Eisenverluste beeinflussenden Umstände, werden bei elektrotechnischen Berechnungen meist nicht berücksichtigt. Überhaupt ist hier zu bemerken, daß drei Umstände, nämlich der Einfluß der Wirbelströme auf die Kraftlinienverteilung, die Abhängigkeit der magnetischen Durchlässigkeit von der ungleichmäßigen Verteilung der Kraftliniendichte und die magnetische Streuung eine genaue Vorausberechnung des Magnetisierungsstromes und der Eisenverluste in den meisten Fällen ganz unmöglich machen. Größere Genauigkeit läßt sich meist nur durch Umrechnung von Meßergebnissen auf ähnliche Objekte erreichen.

märe Stromstärke eines einzelnen Transformators nicht von der sekundären ab, sondern es kann eine beliebige Stromstärke durch die primäre Wicklung geschickt werden.

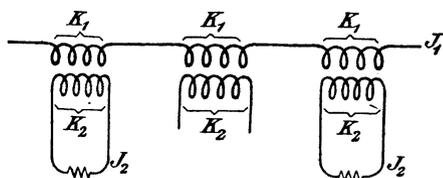


Abb. 263.

Die sekundäre Stromstärke hängt nun nach Gl. 170 von der primären ab sowie davon, was angeschlossen ist. Es gelten natürlich auch da alle in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Gesetze; es sind nur andere Betriebsbedingungen.

Zum Betriebe vieler Bogenlampen werden manchmal viele gleiche Transformatoren hintereinandergeschaltet (Abb. 263), wobei die Stromstärke in der primären Wicklung konstant gehalten wird. Nach Gl. 175 ist

$$K_1 = J_1 \sqrt{\rho^2 + (\omega\lambda)^2},$$

d. h. die primäre Klemmenspannung ist proportional dem äquivalenten scheinbaren Widerstand. Ist der sekundäre Stromkreis offen, so ist dieser äquivalente Widerstand gleich dem gewöhnlichen $\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}$, und der Transformator verhält sich so wie eine mit Strom beschickte Drosselspule. Wird der sekundäre Stromkreis geschlossen, so nimmt die primäre Klemmenspannung mit wachsendem sekundären Strom ab, weil der äquivalente scheinbare Widerstand abnimmt. Infolgedessen ist bei mehreren hintereinandergeschalteten Transformatoren die primäre Klemmenspannung verschieden je nach der sekundären Stromstärke; bei einem, dessen sekundärer Stromkreis offen ist (wie bei dem mittleren in Abb. 263), ist sie am größten. Da sich die Kraftlinienmenge in demselben Sinne ändert, wie die Klemmenspannung, so ist auch sie bei offenem Sekundärkreis am größten.

Man kann sich das Verhalten eines so geschalteten Transformators auch nach dem Diagramm (Abb. 224) zurechtlegen. Ist kein sekundärer Strom vorhanden, so ist das magnetische Feld \mathfrak{B} wie bei einer Drosselspule durch die MMK $0,4\pi \mathfrak{S}_1 N_1$ bestimmt, wächst also bei konstantem magnetischen Widerstand proportional der Stromstärke. Wird ein sekundärer Strom abgenommen, so ist das gemeinsame Feld \mathfrak{B} die Resultierende aus den fiktiven Feldern der primären und sekundären Wicklung. Da diese nahezu entgegengesetzt sind, so ist das Feld im allgemeinen um so kleiner, je größer der sekundäre Strom ist.

Über Stromwandler, die in Hintereinanderschaltung mit anderen Apparaten verwendet werden, vgl. § 283.

164. Selbstinduktion und gegenseitige Induktion in Hintereinanderschaltung. Wirksame Selbstinduktion.

Befinden sich zwei Spulen mit den Selbstinduktionen L_1, L_2 in Hintereinanderschaltung (Abb. 264 und 265), und üben sie eine gegenseitige Induktion aufeinander aus, deren Koeffizient M sei, so summieren sich in jeder Spule in jedem Augenblick die EMK der Selbstinduktion und die von der anderen Spule herrührende EMK der gegenseitigen Induktion. Bezeichnen wir diese Summe mit e_1 bzw. e_2 , so ist die Klemmenspannung an der einen Spule (nach Gl. 107)

$$k_1 = w_1 i - e_1$$

und an der anderen Spule

$$k_2 = w_2 i - e_2.$$

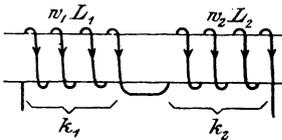


Abb. 264.

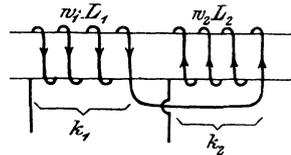


Abb. 265.

Für die Bestimmung von e_1 und e_2 sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die beiden Spulen im gleichen Sinne vom Strome durchflossen werden wie in Abb. 264, oder im entgegengesetzten Sinne wie in Abb. 265 (Gegenschaltung).

Im ersten Falle addieren sich in jeder Spule die EMK der Selbstinduktion $-L_1 \frac{di}{dt}$ (bzw. $-L_2 \frac{di}{dt}$) und die der gegenseitigen Induktion $-M \frac{di}{dt}$. Mithin ist

$$-e_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt}$$

$$-e_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_2 + M) \frac{di}{dt}.$$

Die Klemmenspannung an der ersten Spule ist also

$$k_1 = w_1 i + (L_1 + M) \frac{di}{dt}$$

und an der zweiten

$$k_2 = w_2 i + (L_2 + M) \frac{di}{dt}.$$

Jede dieser Gleichungen hat dieselbe Form wie für einen ein-

zelen Stromkreis (Gl. 108) nur mit dem Unterschied, daß an Stelle der für eine einzelne Spule geltenden Selbstinduktion der Wert

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{array}{l} L_1 + M = A_1 \\ L_2 + M = A_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (190)$$

getreten ist. Man bezeichnet daher A_1 und A_2 als wirksame Selbstinduktion, während L_1 , L_2 die Selbstinduktion für den Fall bedeuten, daß jede Spule für sich allein vorhanden ist. Wo L_1 , L_2 , M wie hier als Summanden einer wirksamen Selbstinduktion erscheinen, bezeichnet man sie als Teilinduktionen.

Für die gesamte EMK der beiden hintereinandergeschalteten Spulen gilt in jedem Augenblick die Summe aller 4 Teilinduktionen, so daß die gesamte Klemmenspannung k bestimmt ist durch

$$k = (w_1 + w_2)i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Diese Gleichung hat ebenfalls dieselbe Form wie für eine einzelne Spule, wenn man

$$L_1 + L_2 + 2M = A \dots \dots \dots (191)$$

wiederum als wirksame Selbstinduktion bezeichnet.

Umschließt jede Windung beider Spulen die gesamte Kraftlinienmenge, so muß sich derselbe Wert ergeben, wenn man beide Spulen als eine betrachtet, und ihre Selbstinduktion nach § 120 berechnet, oder wenn man sie als wirksame Selbstinduktion nach der letzten Gleichung aus der Summe der Teilinduktionen berechnet. Sind N_1 , N_2 die Windungszahlen der beiden Spulen, so ist nach § 120

$$L = \frac{4\pi(N_1 + N_2)^2}{w}.$$

Die Teilinduktionen sind

$$L_1 = \frac{4\pi N_1^2}{w}$$

$$L_2 = \frac{4\pi N_2^2}{w}$$

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2}{w}.$$

Dann ist nach Gl. 191

$$A = \frac{4\pi}{w} (N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2) = \frac{4\pi(N_1 + N_2)^2}{w}.$$

Es ist also tatsächlich $A = L$.

Werden hingegen die beiden Spulen im entgegengesetzten Sinn vom Strom durchflossen wie in Abb. 265 (Gegenschaltung), so ist die EMK in den beiden Spulen

$$-e_1 = (L_1 - M) \frac{di}{dt}$$

$$-e_2 = (L_2 - M) \frac{di}{dt}.$$

Daher ist die wirksame Selbstinduktion der einen Spule

$$\text{und in der anderen} \quad \left. \begin{aligned} A_1 &= L_1 - M \\ A_2 &= L_2 - M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (192)$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion beider Spulen ist

$$A = L_1 + L_2 - 2M \dots \dots \dots (193)$$

Wir gelangen also zu dem allgemeinen Satz, daß die wirksame Selbstinduktion eines aus mehreren Teilen bestehenden Stromleitersystems gleich der algebraischen Summe sämtlicher Teilinduktionen ist. Dabei sind die Teilinduktionen, welche eine im gleichen Sinne wie der Ohmsche Spannungsabfall *wi* wirkende EMK erzeugen mit positiven Vorzeichen, die im entgegengesetzten Sinne wirkenden mit negativen Vorzeichen einzusetzen.

Hat man mehr als zwei Spulen, z. B. drei, und sind L_1, L_2, L_3 ihre Selbstinduktionen, jede für sich allein betrachtet, ferner M_{12} die gegenseitige Induktion zwischen der 1. und 2. Spule, M_{13} die zwischen der 1. und 3. Spule, M_{23} die zwischen der 2. und 3., so ist die wirksame Selbstinduktion der ersten Spule

$$A_1 = L_1 + M_{12} + M_{13},$$

die der zweiten Spule

$$A_2 = L_2 + M_{12} + M_{23}.$$

die der dritten Spule

$$A_3 = L_3 + M_{13} + M_{23}.$$

Die wirksame Selbstinduktion aller drei Spulen zusammen, wenn sie hintereinander geschaltet sind, ist

$$A = L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} + 2M_{13} + 2M_{23}.$$

165. Induktionsfreie Stromkreise.

Haben bei der Gegenschaltung zweier Spulen (Abb. 265) beide dieselbe Windungszahl ($N_1 = N_2 = N$) und werden sämtliche Kraftlinien von sämtlichen Windungen umschlossen, so ist nach Gl. 193

$$A = \frac{4\pi N^2}{w} + \frac{4\pi N^2}{w} - 2 \frac{4\pi N^2}{w} = 0.$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion ist also null. Das wird benützt, um möglichst induktionsfreie Widerstandsspulen herzustellen. Zu diesem Zweck wickelt man den Draht in mehreren (eine gerade Zahl bildenden) Lagen übereinander und zwar so, daß jede folgende entgegengesetzte Stromrichtung hat wie die vorhergehende. Freilich besteht dann immer noch so viel Selbstinduktion, als der ganze Draht haben würde, wenn er als Schleife mit nebeneinander liegenden Hälften ausgespannt würde. Wieviel das ist, ergibt sich aus folgendem.

Sind zwei parallele Drähte von der Länge l , dem Radius r und dem gegenseitigen Abstand a so vom Strom durchflossen, daß er in dem einen hin, im anderen zurückgeht (Stromschleife), so ist die Selbstinduktion jedes einzelnen, für sich allein betrachtet, nach § 120

$$L_1 = L_2 = 2l \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4} \right)$$

und die gegenseitige Induktion nach § 118

$$M = 2l \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{a} - 1 \right).$$

Da der Strom in den beiden Drähten entgegengesetzte Richtung hat, so ist der letzte Wert negativ einzusetzen. Dann ist nach dem vorigen Paragraphen die wirksame Selbstinduktion jedes der beiden Drähte

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = L_1 - M &= 2l \left[\lg \text{nat} \frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4} - \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{a} - 1 \right) \right] \\ &= 2l \left(\lg \text{nat} \frac{a}{r} + \frac{\mu}{4} \right). \end{aligned}$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion beider Drähte in Hintereinanderschaltung ist dann gleich dem Doppelten eines Drahtes, also

$$A = 4l \left(\lg \text{nat} \frac{a}{r} + \frac{\mu}{4} \right).$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck gleich dem in § 120 unter c.

Aus den beiden letzten Formeln ergibt sich, daß die wirksame Selbstinduktion unter sonst gleichen Umständen um so kleiner ist, je kleiner der Abstand a ist. Da a von den beiden Achsen aus zu rechnen ist, so kann a praktisch nicht kleiner werden als der doppelte Radius $2r$. Dies eingesetzt gibt für den Fall, daß zwei unmagnetische Drähte nebeneinander liegen, für die wirksame Selbstinduktion jedes der beiden

$$A_1 = A_2 = 2l \left(\lg \text{nat} 2 + \frac{1}{4} \right) = 1,89 l.$$

und der ganzen Stromschleife

$$A = 3,78 l.$$

Man kann daher möglichst induktionsfreie Widerstandsspulen auch in der Weise herstellen, daß die Wicklung, wie Abb. 266 zeigt, aus einem doppelten (bifilaren) Draht hergestellt wird, wobei der Strom in dem einen hin, im anderen zurückgeht. Infolgedessen ist die Selbstinduktion sämtlicher Windungen ebenso klein, wie wenn die übereinander liegenden Lagen im entgegengesetzten Sinne gewickelt sind. Die letztere Wicklungsart hat aber den Vorteil,



Abb. 266.

daß Anfang und Ende nicht unmittelbar nebeneinander zu liegen kommen, wie bei der rein bifilaren Wicklung, so daß sie eine höhere Spannung aushalten kann.

Beispiel. Für einen derart aufgewickelten Widerstandsdraht von 0,01 cm Radius und 100 m gesamer Länge ist für die eine sowie für die andere Wicklungsart $l = 50$ m; also

$$A_1 = A_2 = 1,89 \cdot 5000 = 9450 \text{ abs. Einh.} = 9450 \cdot 10^{-9} \text{ Henry}$$

und

$$A = 18900 \cdot 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Wäre der ganze Draht gerade ausgespannt, so wäre die Selbstinduktion ($l = 100$ m):

$$L = 20000 \left(\lg \text{nat} \frac{20000}{0,01} - \frac{3}{4} \right) = 275000 \text{ abs. Einh.} = 275000 \cdot 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Für eine einzelne Kupferleitung von 1000 m Länge, 0,5 cm Radius ist

$$L_1 = 0,00243 \text{ Henry.}$$

Kommt eine zweite parallele Leitung in Abstand von 1 cm hinzu (zweidrignes Kabel), so ist (§ 118 Beispiel)

$$M = 0,00224 \text{ Henry.}$$

Daher ist die wirksame Selbstinduktion jeder der beiden Drähte

$$A_1 = A_2 = L_1 - M = 0,00019 \text{ Henry}$$

und die gesamte, bei Hintereinanderschaltung beider Drähte

$$A = 0,00038 \text{ Henry.}$$

166. Stromverzweigung bei gegenseitiger Induktion.

In § 141 wurden die Gesetze, nach welchen sich ein Wechselstrom zwischen zwei Zweigen mit Widerstand und Selbstinduktion verteilt, abgeleitet. Üben die beiden Zweige außerdem noch eine gegenseitige Induktion aufeinander aus (Abb. 267), so sind wie bei Hintereinanderschaltung zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die beiden Zweige in demselben Sinn oder im entgegengesetzten Sinn aufeinander wirken.



Abb. 267.

Im ersten Falle gelten für die beiden Stromzweige folgende Gleichungen, wenn k die Spannung zwischen den Verzweigungspunkten CD bedeutet

$$k = w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$k = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Daraus folgt als Bedingungsgleichung für die Stromverteilung in jedem Augenblick

$$w_1 i_1 + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = w_2 i_2 + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}.$$

Das ist dieselbe Form wie die Bedingungsgleichung 124. S. 247, nur mit dem Unterschied, daß an Stelle der einfachen Selbstinduktion der Wert

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} L_1 - M &= A_1 \\ L_2 - M &= A_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (194)$$

getreten ist.

Sind die beiden Spulen im entgegengesetzten Sinne geschaltet, so gilt dasselbe, nur ist M mit negativem Vorzeichen einzuführen, so daß also für diesen Fall die wirksamen Selbstinduktionen

$$\left. \begin{aligned} L_1 + M &= A_1 \\ L_2 + M &= A_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (195)$$

sind.

Es ist zu beachten, daß hier, bei der Parallelschaltung zweier Spulen mit gegenseitiger Induktion, das Umgekehrte gilt wie bei der Hintereinanderschaltung, daß nämlich bei gleichem Wicklungssinn M hier mit negativem Vorzeichen, dort aber mit positivem Vorzeichen einzuführen ist und umgekehrt.

Wir können nun die in § 141 und 142 erhaltenen Ergebnisse für die effektiven Werte und die Phasenverschiebungen bei einer Stromverzweigung ohne weiteres hier anwenden, wenn wir die einfachen Selbstinduktionen L_1, L_2 durch die wirksamen Selbstinduktionen A_1, A_2 ersetzen.

Beispiel. Wir nehmen dieselben zwei Kupferdrähte, wie im letzten Beispiel des vorigen Paragraphen, aber jetzt in Parallelschaltung. Dann ist nach dem Vorstehenden $A_1 = A_2 = L_1 - M = 0,00019$ Henry (abgerundet 0,0002). Der Ohmsche Widerstand jedes Drahtes (abgerundet) ist $w_1 = w_2 = 0,2$ Ohm. Daher ist (nach S. 250) der äquivalente Widerstand der ganzen Verzweigung $R = 0,1$ und die äquivalente Selbstinduktion $O = 0,0001$.

Ein einziger runder Draht mit demselben Ohmschen Widerstand wie die zwei parallelgeschalteten, also mit dem doppelten Querschnitt, würde einen Radius von ungefähr $r = 0,7$ cm haben müssen. Seine Selbstinduktion wäre nach § 120 $L = 0,00236$, also beträchtlich größer als die äquivalente Selbstinduktion O der beiden parallelgeschalteten Drähte.

Ein breites, dünnes Metallband kann man als eine große Anzahl von nebeneinander gereihten, parallelgeschalteten dünnen Drähten betrachten. Dann folgt aus dem Vorstehenden, daß die Selbstinduktion eines solchen Bandes kleiner sein muß als die eines runden Drahtes von gleichem Ohmschen Widerstand. Aus diesem Grunde werden genaue Meßwiderstände für große Stromstärken entweder aus parallelgeschalteten Drähten oder aus Blechen angefertigt.

167. Die magnetische Arbeit des Wechselstromes.

Multipliziert man die Spannungsgleichung

$$k = iw + L \frac{di}{dt}$$

eines einzelnen Wechselstromkreises (§ 133) mit $i dt$, so erhält man links $ki dt$, das ist die während der unendlich kleinen Zeit dt von dem Strome i geleistete Arbeit, die wir mit dA bezeichnen wollen. Es ist also

$$dA = wi^2 dt + Lidi$$

oder in anderer Form geschrieben

$$dA = wi^2 dt + d\left(\frac{Li^2}{2}\right).$$

Diese Gleichung gibt an, wie sich die vom Strom geleistete Arbeit dA in jedem Augenblick verteilt. Das erste Glied auf der rechten Seite stellt die zur Erwärmung des Stromleiters während der Zeit dt verwendete Arbeit dar. Das zweite Glied ist das Differential der magnetischen Arbeit, die zur Herstellung des dem Strome i zugehörigen magnetischen Feldes notwendig ist (§ 119); es stellt also die magnetische Arbeit während der Änderung der Stromstärke um den Betrag di dar.

Bei einem konstanten Gleichstrom J bleibt die einmal bei seiner Entstehung aufgewendete magnetische Arbeit $\frac{LJ^2}{2}$ dauernd als potentielle Energie bestehen im Gegensatz zur Wärmearbeit $wJ^2 t$, welche der Zeit t proportional ist, also dauernd von der Stromquelle hergegeben werden muß.

Bei einem Wechselstrom findet eine beständige Änderung der Stromstärke statt, infolgedessen auch eine beständige Änderung der magnetischen Arbeit. So lange der Strom zunimmt (di positiv), dient diese Arbeit zur Herstellung des magnetischen Feldes; wenn der Strom abnimmt (di negativ), ist auch die magnetische Arbeit negativ, d. h. das magnetische Feld gibt die früher aufgenommene Arbeit an den Stromkreis zurück. Abb. 268 sei die halbe Welle eines Wechselstromes. Der größte Wert (Scheitelwert) seines magnetischen Feldes wird gleichzeitig mit dem Scheitelwert \mathfrak{S} des Stromes, also zur Zeit C erreicht. Die dazu nötige Arbeit ist

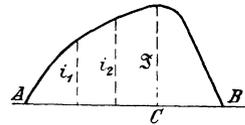


Abb. 268.

$$\int_0^{\mathfrak{S}} Lidi = \left| \frac{Li^2}{2} \right|_0^{\mathfrak{S}} = \frac{L\mathfrak{S}^2}{2}.$$

Im weiteren Verlauf nimmt der Strom und damit auch sein magnetisches Feld bis Null ab. Die magnetische Arbeit während dieser Zeit ist

$$\int_{\mathfrak{S}}^0 Lidi = \left| \frac{Li^2}{2} \right|_{\mathfrak{S}}^0 = 0 - \frac{L\mathfrak{S}^2}{2} = -\frac{L\mathfrak{S}^2}{2}.$$

Mithin ist die ganze magnetische Arbeit während einer halben Periode gleich

$$\frac{L\mathfrak{S}^2}{2} + \left(-\frac{L\mathfrak{S}^2}{2}\right) = 0.$$

Das gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß keine magnetische Hysteresis vorhanden ist. Besteht jedoch ein Teil des dem Stromkreis umgebenden Raumes aus einem ferromagnetischen Stoff, so wissen wir aus § 98, daß die beim Ansteigen des Stromes aufgewendete magnetische Arbeit beim Verschwinden des Stromes nicht ganz zurückgewonnen wird, sondern daß ein Teil wegen der magnetischen Reibung der Molekularmagnete in Wärme umgesetzt wird, der sich im Stromkreis als Hystereseverlust bemerkbar macht. In der Mechanik gibt es viele gleiche Erscheinungen: so z. B. eine elastische Feder, an der ein Gewicht hängt, und die in auf- und niedergehende Schwingungen versetzt wird. Die beim Hochgehen des Gewichtes von der Feder geleistete Arbeit wird beim Niedergehen wieder an die Feder zurückgegeben, die dadurch von neuem gespannt wird. Ein kleiner Teil aber geht bei jedem Auf- und Niedergang durch mechanische Reibung im Innern der Feder verloren und setzt sich in Wärme um.

Beispiel. Für einen Kupferdraht von 1000 m Länge, 5 mm Radius ist nach § 165 die Selbstinduktion $L = 0,00243$ Henry. Wird ein Strom von 10 Ampere (effektiv) durchgeschickt, so ist (§ 131) $\mathfrak{S} = \sigma 10$. Für eine sinusförmige Welle ist $\sigma = 1,41$, also $\mathfrak{S} = 14,1$. Mithin ist die während einer Viertelperiode vom Strom an das umgebende Medium abgegebene, oder beim Verschwinden des Stromes an diesen zurückgegebene magnetische Arbeit

$$\frac{L\mathfrak{S}^2}{2} = \frac{0,00243 \cdot 200}{2} = 0,243 \text{ Watt.}$$

Bei einem Wechselstrom findet also ein beständiges Hin- und Herwogen von Arbeit zwischen dem Stromleiter und dem umgebenden Medium statt, und zwar reicht die magnetische Arbeit bis ins Unendliche, wenn sie durch magnetische oder elektrodynamische Schirmwirkung irgendwo begrenzt wird. Allerdings nimmt ihre Stärke mit der Entfernung sehr rasch ab. Wie groß die magnetische Arbeit in einer Raumeinheit an irgendeiner Stelle des Raumes ist, wissen wir bereits aus § 97, nämlich $\frac{\mu \mathfrak{S}^2}{8\pi}$. Daraus erklären sich die durch nichtleitende Stoffe hindurch wirkenden elektrodynamischen Erscheinungen. Es sind keine Fernwirkungen, sondern Arbeitsübertragungen durch Magnetisierung des Zwischenmediums.

Wir betrachten nun den Fall, daß von einem Strome i_1 in einem benachbarten Stromkreise ein sekundärer Strom i_2 induziert wird. Dann ergibt sich die Arbeitsgleichung des primären Stromes wie oben durch Multiplikation der Gl. 155 mit $i_1 dt$; also

$$k_1 i_1 dt = w_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt wieder die Wärmearbeit, die beiden anderen die magnetische Arbeit dieses Stromkreises dar. Multipliziert man die sekundäre Spannungsgleichung (160) mit $i_2 dt$, so erhält man die sekundäre Arbeitsgleichung

$$0 = w_2 i_2^2 dt + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1,$$

wobei das erste Glied wiederum die Wärmearbeit des ganzen sekundären Stromkreises bedeutet oder deren mechanisches Äquivalent, wenn der sekundäre Strom auf Motoren arbeitet.

Da die gesamte im primären und sekundären Stromkreis auftretende Arbeit nur aus der Stromquelle kommt, an die jener angeschlossen ist, so ist die gesamte in einem Augenblick geleistete Arbeit dA gleich der Summe beider, also

$$dA = k_1 i_1 dt = (w_1 i_1^2 + w_2 i_2^2) dt + L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1)$$

oder

$$dA = (w_1 i_1^2 + w_2 i_2^2) dt + d\left(\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2\right).$$

Demnach ist

$$\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$$

der allgemeine Ausdruck für die magnetische Arbeit beider Stromkreise, der (wie vorhin für einen einzelnen Stromkreis) für jede halbe Periode null ist, wenn keine magnetische Hysterese besteht. Die gesamte von der Stromquelle während einer halben Periode geleistete Arbeit besteht also bloß aus der in beiden Stromkreisen entwickelten Wärme oder deren mechanischem Äquivalent, und wenn ferromagnetische Stoffe vorhanden sind, aus der Hysterese-Arbeit.

Wie man sieht, ist der letzte Ausdruck — das Integral der magnetischen Arbeit — nur von den drei Induktionskoeffizienten und den Stromstärken abhängig. Dagegen ist der Augenblickswert der vom primären auf den sekundären Kreis übertragenen magnetischen Arbeit $M i_1 di_1$, ebenso wie die vom primären Strom im sekundären Kreis induzierte EMK $M \frac{di_1}{dt}$ von der Änderung des Stromes abhängig. Ist z. B. $i_1 = \mathfrak{S}_1 \sin \omega t$, so ist

$$M \frac{di_1}{dt} = \omega M \mathfrak{S}_1 \cos \omega t = 2\pi \nu M \mathfrak{S}_1 \cos \omega t.$$

Die übertragene Wirkung ist also bei gleichem Induktionskoeffizienten und gleichen Stromstärken um so größer, je schneller sich der Strom ändert, d. h. je größer seine Periodenzahl ν ist. Daher lassen sich elektrodynamische Wirkungen auf größere Entfernungen nur mittels Wechselströmen hoher Periodenzahl übertragen (Versuche von Hertz und von Tesla; Funkentelegraphie).

Setzt man in den Ausdruck für die gesamte magnetische Arbeit beider Stromkreise die Definitionsgleichungen aus § 146

$$L_1 = L_{1f} + L_{1s}, \quad L_2 = L_{2f} + L_{2s}$$

$$M = \sqrt{L_{1f}L_{2f}}$$

ein, so geht er über in

$$\begin{aligned} & \frac{L_{1f}i_1^2}{2} + \frac{L_{1s}i_1^2}{2} + \frac{L_{2f}i_2^2}{2} + \frac{L_{2s}i_2^2}{2} + i_1i_2\sqrt{L_{1f}L_{2f}} \\ &= \frac{L_{1s}i_1^2}{2} + \frac{L_{2s}i_2^2}{2} + \left(\sqrt{\frac{L_{1f}i_1^2}{2}} + \sqrt{\frac{L_{2f}i_2^2}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Das heißt die gesamte magnetische Arbeit ist gleich der Summe der magnetischen Arbeiten des primären Streufeldes β_{1s} (Abb. 221), des sekundären Streufeldes β_{2s} und des gemeinsamen Feldes β . Da letzteres aus den Komponenten β_{1f} und β_{2f} besteht, so erkennt man aus dem letzten Glied folgende Regel: Die magnetische Arbeit eines Feldes, das in Komponenten zerlegt wird, ist nicht gleich der Summe der magnetischen Energien der Komponenten, sondern gleich dem Quadrate aus der Summe der Quadratwurzeln der magnetischen Arbeiten der Komponenten. Nur die magnetischen Arbeiten wirklicher, selbständig bestehender Felder dürfen als solche addiert werden.

Es ist zu beachten, daß vorstehende Beziehungen nur für die gleichzeitigen Augenblickswerte i_1, i_2 gelten, nicht aber für die zu verschiedenen Zeiten eintretenden Höchstwerte der magnetischen Arbeit, die den Scheitelwerten der Ströme entsprechen. Für diese ergibt sich folgende Beziehung, wenn man den Ausdruck für die äquivalente Selbstinduktion (S. 277), nämlich $\lambda = L_1 - \frac{\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{S}_1^2} L_2$ ¹⁾, mit $\frac{\mathfrak{S}_1^2}{2}$ multipliziert:

$$\frac{\lambda \mathfrak{S}_1^2}{2} = \frac{L_1 \mathfrak{S}_1^2}{2} - \frac{L_2 \mathfrak{S}_2^2}{2}.$$

Betrachtet man also den Transformator als veränderliche Drosselspule mit den äquivalenten Größen ϱ und λ , so ergibt sich, daß der Höchstwert seiner gesamten magnetischen Arbeit gleich der Differenz der Höchstwerte der magnetischen Arbeiten beider Ströme ist²⁾.

¹⁾ Dabei ist das Verhältnis der effektiven Werte $\frac{J_2^2}{J_1^2}$ wieder wie ursprünglich auf S. 273 durch das Verhältnis der Scheitelwerte $\frac{\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{S}_1^2}$ ersetzt worden.

²⁾ Dagegen ergibt sich aus dem Ausdruck für den äquivalenten Widerstand ϱ (S. 277) nach Multiplikation mit \mathfrak{S}_1^2 :

$$\varrho \mathfrak{S}_1^2 = w_1 \mathfrak{S}_1^2 + w_2 \mathfrak{S}_2^2,$$

d. h. die gesamte Wärmeleistung ist gleich der Summe der Wärmeleistungen

168. Das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit.

In § 54 haben wir gefunden, daß die Verzweigung eines Gleichstromes derart erfolgt, daß die gesamte Stromwärme ein Minimum ist. Das gilt auch für einen Wechselstrom, wenn der induktive Widerstand jedes Zweiges verschwindend klein ist gegenüber dem Ohmschen.

Betrachten wir den entgegengesetzten Fall, wo der Ohmsche Widerstand verschwindend klein ist gegenüber dem induktiven, so verteilt sich ein Wechselstrom derart, daß die gesamte magnetische Arbeit ein Minimum ist.

Für den allgemeinen Fall, wo zwischen den Zweigen auch noch gegenseitige Induktion M besteht, haben wir bereits in § 166 die Bedingungsgleichung für die Verteilung erhalten. Sie lautet für den hier angenommenen Fall, daß $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ ist

$$(L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied (d. h. sind es reine Wechselströme ohne überlagerten Gleichstrom), so kann diese Gleichung ohne weiteres integriert werden, und man erhält als Bedingungsgleichung für die Stromverzweigung

$$i_1 : i_2 = (L_2 - M) : (L_1 - M).$$

Das ist aber auch die Bedingung, unter der die gesamte magnetische Arbeit A beider Zweige

$$A = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$$

ein Minimum ist, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Man findet die Minimumsbedingung, wenn man das Differential gleich null setzt. Wir bilden also

$$dA = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M i_1 di_2 + M i_2 di_1 = 0.$$

Nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz ist

$$i = i_1 + i_2,$$

also ist auch das Differential dieser Gleichung gleich null zu setzen

$$di = di_1 + di_2 = 0.$$

beider Ströme. Dieser Unterschied in der Bildung der gesamten magnetischen Arbeit und der gesamten Wärmearbeit — dort Differenz, hier Summe — hat seinen physikalischen Grund darin, daß die magnetische Arbeit umkehrbar ist, d. h. vom Strom beim Anstieg aufgenommen, beim Abstieg wieder zurückgegeben wird, während die Wärmearbeit nicht umkehrbar ist, sondern vollständig in Wärme umgesetzt wird.

Dies in die vorige Bedingung eingesetzt, gibt

$$i_1(L_1 - M) = i_2(L_2 - M),$$

also tatsächlich dasselbe wie oben.

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt dasselbe Prinzip auch für beliebig viele Stromzweige mit oder ohne gegenseitige Induktion.

Dieses von Stefan aufgestellte Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit bei verschwindend kleinem Ohmschem Widerstand ermöglicht in vielen Fällen eine sehr rasche Orientierung. So gibt es z. B. ohne weiteres Aufschluß über die Verteilung der Stromdichte über den Leiterquerschnitt bei einzelnen Drähten und bei Spulen (§ 169).

Aber auch die Induktion eines sekundären Stromes findet bei verschwindend kleinem Ohmschen Widerstand derart statt, daß die magnetische Arbeit ein Minimum ist. Die sekundäre Spannungsgleichung (160) geht nämlich für den Fall, daß $w_2 i_2$ gegenüber den beiden anderen Gliedern vernachlässigt werden kann, über in

$$0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann diese Gleichung ohne weiteres integriert werden und man erhält

$$i_2 = -i_1 \frac{M}{L_2} = -i_1 \kappa \sqrt{\frac{L_1}{L_2}},$$

ein Ergebnis, das wir schon aus § 151 kennen.

Zu derselben Gleichung gelangen wir aus der Forderung, daß die magnetische Arbeit des sekundären Stromes $\frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$ ein Minimum sein muß, wie man sofort sieht, wenn man davon das Differential nach i_2 bildet und gleich null setzt.

Aus § 161 wissen wir, daß eine vollkommene elektrodynamische Schirmwirkung durch sekundäre Ströme nur dann eintritt, wenn der Ohmsche Widerstand null ist. Dieser Fall deckt sich also mit dem des Minimums der magnetischen Arbeit. Je größer der Ohmsche Widerstand ist, desto weniger ist das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit erfüllt, desto geringer ist die Schirmwirkung.

Außer der schirmenden Kupferplatte ist noch folgendes von Stefan erörterte Beispiel von Interesse. Durch einen Draht, der von einer konzentrischen Metallröhre umgeben ist (einadriges Kabel mit Bleimantel, der zu einem Stromkreis geschlossen ist, Abb. 218), wird ein Wechselstrom von so hoher Periodenzahl geschickt, daß der Ohmsche Widerstand gegenüber dem induktiven verschwindet. Das Minimum der magnetischen Arbeit wird bei folgender Anordnung der

Ströme erreicht. Der primäre Strom im Draht fließt in einer dünnen Schichte an der Oberfläche. Der von ihm induzierte sekundäre Strom fließt in einer dünnen Schichte an der inneren Fläche der Röhre und hat in jedem Augenblicke entgegengesetzte Richtung wie jener, wie man aus der obigen Gleichung ersieht. Dabei bestehen Kraftlinien nur in dem Raume zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Wandfläche der Röhre (Streufelder). Die Masse des Drahtes und der Röhre, sowie der ganze äußere Raum sind frei von jeder magnetischen Wirkung. Die Röhre übt also eine vollkommene Schirmwirkung auf den ganzen äußeren Raum, in dem das gemeinsame magnetische Feld (S. 253) verlaufen würde, aus.

169. Ungleichmäßige Verteilung des Wechselstromes über den Leiterquerschnitt. Hautwirkung.

Jeden Leiter muß man als ein Bündel unendlich dünner leitender Fäden mit Widerstand und Selbstinduktion betrachten. Zwischen jedem dieser und allen übrigen besteht eine gewisse gegenseitige Induktion. Die Gesamtheit der Selbstinduktion und gegenseitigen Induktion aller Fäden bildet die gesamte Selbstinduktion des Leiters. Nun ist aber die gegenseitige Induktion aller Fäden auf einen Faden in der Mitte größer als auf einen in der Oberfläche, weil ersterer ringsum Fäden in unmittelbarer Nähe hat, letzterer aber nur auf einer Seite. Es ist also die Selbstinduktion der Stromfäden in der Mitte am größten, nimmt von da an gegen die Oberfläche zu ab und ist hier am kleinsten. Die Folge davon ist, daß die Verteilung eines Wechselstromes über den Leiterquerschnitt (die Stromdichte) nicht gleichmäßig sein kann, sondern von innen nach außen hin zunimmt. Bei einem konstanten, gleichgerichteten Strome (Gleichstrom) hingegen ist die Stromdichte gleichmäßig, weil es da keine Induktion gibt.

Diese Verminderung der Stromdichte im Inneren und gleichzeitige Vergrößerung der Stromdichte an der Oberfläche¹⁾ hat zur Folge: erstens eine Vergrößerung des wirksamen Ohmschen Widerstandes, weil dem gesamten Strome jetzt ein geringerer Querschnitt zur Verfügung steht, zweitens eine Verminderung des wirksamen induktiven Widerstandes, weil nach dem eben Gesagten die Selbstinduktion der äußeren, an der Stromleitung hauptsächlich beteiligten Fäden kleiner ist als die der inneren. Man kann daher von vornherein nicht entscheiden, ob eine Vergrößerung oder Verkleinerung des gesamten scheinbaren Widerstandes, also eine Verminderung oder Vermehrung der Stromstärke (bei konstanter

¹⁾ Die Stromdichte an der Oberfläche kann aber selbst bei Wechselströmen höchster Frequenz niemals so groß werden wie bei einem Gleichstrom mit derselben Spannung, weil es bei diesem keine Selbstinduktion sondern nur Ohmschen Widerstand gibt. Das wird besonders deutlich, wenn man wie auf S. 331 von den Wirbelströmen ausgeht.

Spannung) stattfindet. Die Rechnung lehrt aber, daß bei Leitern aus unmagnetischem Metall der erste Einfluß größer ist als der zweite, der scheinbare Widerstand also größer ist. Bei Eisendrähten hingegen, deren Selbstinduktion (§ 120) bedeutend größer ist als bei unmagnetischen Drähten, wird bei hohen Periodenzahlen der zweite Einfluß stärker, der scheinbare Widerstand also kleiner. So berechnete Stefan¹⁾, daß in einem Eisendrahte von 4 mm Dicke, 300 km Länge bei 250 Perioden die Stromstärke 1,5 mal größer ist als bei gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt, und bei 500 Perioden 7,5 mal größer, während bei 125 Perioden die Stromstärke ungefähr dieselbe ist.

Würde der Verminderung der Stromdichte im Inneren nicht ein anderer Umstand entgegenwirken, so müßte der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schicht unter der Oberfläche strömen, weshalb man diese Erscheinung als Hautwirkung bezeichnet. Dieser Umstand ist der Leitungswiderstand. Infolge des Widerstandes strebt nämlich der Strom nach möglichst gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt, weil dann die gesamte Stromwärme am kleinsten ist (§ 54). Die wirklich vorhandene Verteilung ist ein Ausgleich zwischen der auf möglichstes Hinausdrängen des Stromes gerichteten Wirkung der Selbstinduktion und der auf möglichst gleichmäßige Verteilung gerichteten Wirkung des Widerstandes. Der Arbeitsverlust durch Joulesche Wärme ist dabei unter allen Umständen größer als bei gleichmäßiger Verteilung, da der wirksame Widerstand größer ist als der gewöhnliche.

Eine weitere Folge der verschiedenen Selbstinduktion in den verschiedenen Teilen des Drahtquerschnittes ist eine verschiedene Phasenverschiebung der einzelnen Stromfäden gegenüber der Spannung; und zwar nimmt sie von außen nach innen zu, weil die Selbstinduktion in derselben Richtung zunimmt, so daß der Fall eintreten kann, daß in einer gewissen Tiefe eine Stromkomponente besteht, die in entgegengesetzter Richtung fließt als in der Oberfläche²⁾.

Einen Einblick in die Größenverhältnisse gewähren folgende Zahlen von Stefan³⁾. In einem Eisendraht von 4 mm Dicke bei einer magnetischen Durchlässigkeit von $\mu = 150$ ist die Stromstärke an der Oberfläche bei 250 Perioden 2,52 mal so groß als in der Achse, bei 500 Perioden 5,8 mal, bei 1000 Perioden 20,6 mal so groß. Zwischen dem Strome an der Oberfläche und in der Achse

¹⁾ Stefan, Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 95 (II), S. 930, 1887.

²⁾ Wir haben hier einen ganz ähnlichen Fall wie bei der Wärmeleitung. Bringt man einen Körper in einen Raum von periodisch wechselnder Temperatur (die Erde unter dem Einfluß der täglichen Temperaturveränderungen), so werden die Änderungen immer weniger bemerkbar, je tiefer in das Innere man eindringt; außerdem tritt eine zeitliche Verschiebung in diesen Änderungen ein.

³⁾ Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 99 (IIa), S. 328, 1890.

bestehen bzw. die Phasenunterschiede 116° , $174^\circ 50'$, $215^\circ 38'$. Dieselben Verhältnisse bietet ein Kupferdraht von 20 mm Dicke. Bei dem Eisendrahte sind diese Verhältnisse darum stärker ausgeprägt (trotz dem größeren Widerstand), weil wegen des größeren μ die Selbstinduktion viel größer ist.

Bei einer Periodenzahl von 50 Millionen findet man in einem Eisendrahte die Stromstärke in 0,0085 mm Tiefe schon 100 mal kleiner als in der Oberfläche. In der Tiefe von 0,0058 beträgt die Phasenverschiebung gegenüber der Oberfläche gerade eine halbe Periode (180°); die Stromrichtungen sind also gerade entgegengesetzt. Für einen Kupferdraht sind die Tiefen mit den angeführten Eigenschaften 5 mal, für einen Neusilberdraht 18 mal größer als die für den Eisendraht angegebenen; der Ohmsche Widerstand wirkt eben der ungleichmäßigen Verteilung entgegen.

Diese Verhältnisse treten, wie man sieht, erst bei sehr hohen Periodenzahlen oder sehr dicken Leitern maßgebend auf. Sie sind daher von großer Wichtigkeit bei oszillatorischen Entladungen, Telephonie und Funkentelegraphie.

Schließt man einen gleichgerichteten elektrischen Strom, so breitet er sich, solange er noch nicht konstant geworden ist, infolge der eben geschilderten Verhältnisse zuerst an der Oberfläche aus, dringt dann immer tiefer ein und füllt endlich, wenn er konstant geworden, den ganzen Querschnitt gleichmäßig aus¹⁾.

Nach Stefan²⁾ läßt sich der wirksame Widerstand w' eines geraden oder schwach gekrümmten Drahtes ausdrücken durch

$$w' = w \left(1 + \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{180} + \frac{11 c^6}{26880} \pm \dots \right)$$

und die wirksame Selbstinduktion L' durch

$$L' = L - \mu l \left(\frac{c^2}{48} - \frac{13 c^4}{8640} \pm \dots \right),$$

wenn w den gewöhnlichen Widerstand und L die gewöhnliche Selbstinduktion bedeutet. Ferner ist

$$c = \frac{2\pi\nu s \mu}{\alpha},$$

wobei l die Länge, s den Querschnitt des Drahtes, μ die magnetische Durchlässigkeit und α den spezifischen Widerstand des Drahtmaterials bedeutet. Alle Größen gelten in absoluten Einheiten³⁾.

¹⁾ Hieraus erklärt es sich, daß auch solche Blitzentladungen, die nicht oszillatorisch sind, hauptsächlich an der Oberfläche metallischer Leiter verlaufen. Denn solche Entladungen haben einen sehr steilen Anstieg, und gleich darauf folgt ein ebenso steiler Abfall.

²⁾ Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 95 (II), 1887.

³⁾ α ist also der Widerstand von 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt in absol. Einh. Für Kupfer bei 15° C. ist (nach der Zahlentafel auf S. 71 und

Diese Formeln eignen sich aber wegen der geringen Konvergenz der Reihen zur Berechnung von w' und L' nur für niedrige Periodenzahlen (bis etwa 100). Für hohe Periodenzahlen eignen sich besser folgende ebenfalls von Stefan¹⁾ abgeleiteten Näherungsformeln, die aber für niedrige Periodenzahlen nicht gelten.

$$w' = w \left(\pi r \sqrt{\frac{\nu\mu}{\alpha}} + \frac{1}{4} \right) \approx w \pi r \sqrt{\frac{\nu\mu}{\alpha}}$$

$$L' = 2l \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{r} - 1 + \frac{1}{4\pi r} \sqrt{\frac{\mu\alpha}{\nu}} \right),$$

wobei r den Radius des Drahtes bedeutet²⁾.

Für sehr hohe Periodenzahlen, wo der Strom fast ganz an die Oberfläche gedrängt wird, nähert sich dieser Ausdruck dem Wert

$$L' = 2l \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{r} - 1 \right).$$

Wie man sieht, kommt μ darin nicht mehr vor, d. h. je mehr der Strom an die Oberfläche gedrängt wird, desto gleichgültiger wird es für die Selbstinduktion, ob der Draht aus einem stark oder schwach magnetischen Stoff besteht. Vergleicht man die obige Formel mit der für gleichmäßige Stromdichte bei einem unmagnetischen Draht (§ 120), nämlich mit

$$L = 2l \left(\lg \text{nat} \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right),$$

so sieht man, daß L' bei sehr hohen Periodenzahlen nicht viel kleiner als L ist, daß also ein Eisendraht fast dieselbe wirksame Selbstinduktion hat, wie ein Kupferdraht bei gleichmäßiger Stromdichte.

Nebenstehende Tabelle gibt einige Zahlen für die Widerstandszunahme von Kupferleitungen in Prozenten (nach der ersten Formel berechnet).

Bei Eisendrähnen ist eine sichere Berechnung von w' und L' nicht möglich, weil die magnetische Durchlässigkeit μ keine Konstante ist, sondern von der Kraftliniendichte (Abb. 123), also von der Strombelastung abhängt. Zur ungefähren Berechnung kann μ

§ 299) $\alpha = 0,017 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9 = 1700$. Mithin $c = 0,0037 \nu s$; für Aluminium ist $\alpha = 2900$, $c = 0,0022 \nu s$; für Eisen ist $\alpha = 13000$, $c = 0,00048 \nu s \mu$. Die je nach Drahtstärke und Stromstärke in Betracht kommenden Werte von μ können den Abb. 184 und 185 entnommen werden.

¹⁾ Sitzungsber. der Wiener Akad. Bd. 99 (IIa), 1890.

²⁾ Für hohe Periodenzahl hat Rayleigh die Formel $L' = L + l \sqrt{\frac{\mu\alpha}{\omega^2 r}}$ angegeben. Sie unterscheidet sich zwar wenig vom richtigen Wert, ist aber grundsätzlich falsch, denn danach wäre $L' > L$. Tatsächlich ist aber immer $L' < L$. Statt diese Formel zu benutzen, ist es richtiger, $L' = L$ zu setzen.

Periodenzahl n	Dicke des Drahtes in Millimetern	Zunahme des Widerstandes in Prozenten
50	10	0,19
	20	3
	30	15
100	10	0,75
	20	11
	30	60

aus den Abb. 184 und 185 entnommen werden¹⁾ Abb. 269 und 270 enthalten die prozentuale Zunahme Δ des wirksamen Widerstandes w'

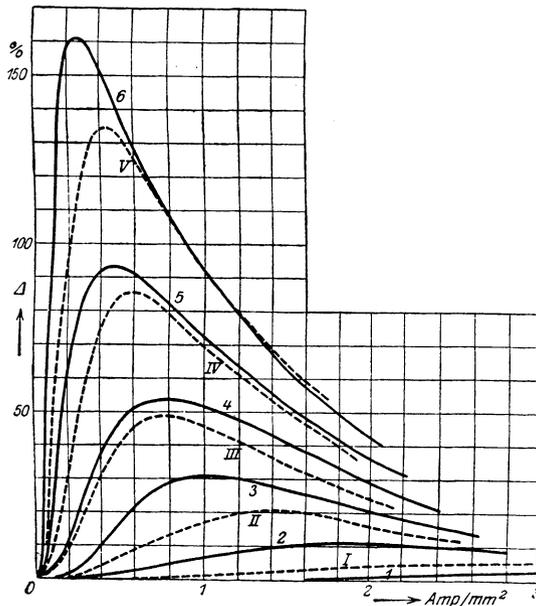


Abb. 269. Zunahme (Δ) des wirksamen Widerstandes, abhängig von der mittleren Strombelastung (Amp/mm²) bei 50 \sim . Die Kurven mit den Zahlen 1 bis 6 gelten für Eisendrähte von 1 bis 6 mm Durchm., die Zahlen I bis V für siebendrähtige Seile aus Drähten von 1 bis 5 mm Durchm.

verschiedener Drähte und Seile aus Eisen in Abhängigkeit von der Strombelastung²⁾. Abb. 271 zeigt die Abhängigkeit des gewöhnlichen

¹⁾ Andere Werte, auch für eiserne Schienen: W. Kummer, Schweizer Bauzeitung, Bd. 70, Heft 25, 1917. F. Niethammer, Elektr. u. Maschinenb. Wien 1918, S. 37.

²⁾ ETZ 1915 S. 44.

Widerstandes R_g (Gleichstrom) und des wirksamen Widerstandes R_w von der Temperatur¹⁾. Wie man sieht, tritt bei hoher Temperatur wieder eine Abnahme des wirksamen Widerstandes ein, weil die

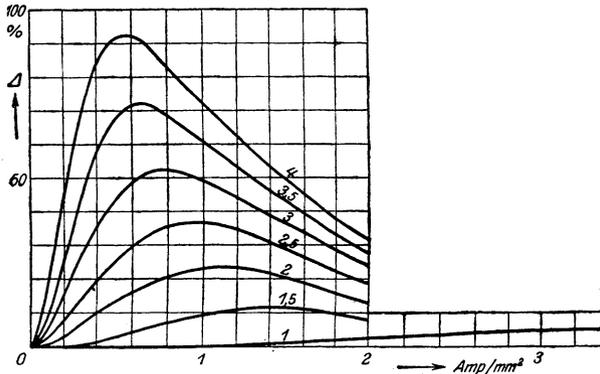


Abb. 270. Zunahme (Δ) des wirksamen Widerstandes in Prozenten, abhängig von der Strombelastung bei 50 \sim . Eisenseile von 19 Drähten. Die Zahlen an den Kurven bezeichnen den Durchmesser der einzelnen Drähte.

Stromdichte um so gleichmäßiger ist, je größer der spezifische Widerstand ist; dieser wächst aber mit der Temperatur. Die Kurven in

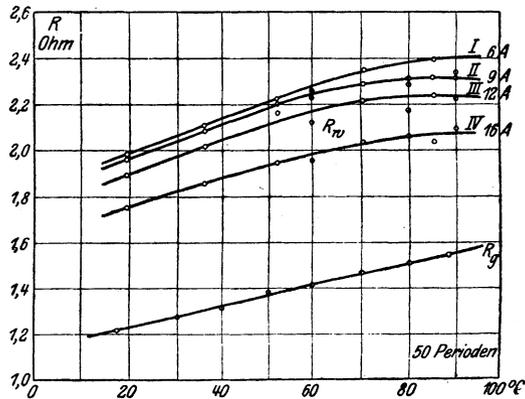


Abb. 271. Abhängigkeit des wirksamen Widerstandes R_w und des Gleichstromwiderstandes R_g von der Temperatur eines Eisendrahtes von 5 mm Durchm.

Abb. 272 zeigen Meßergebnisse²⁾ an einer Eisenschiene, deren gewöhnlicher Ohmscher Widerstand mit Gleichstrom gemessen 84 Mikrohms ist. Diese aus der gemessenen Leistung (Stromwärme) und

¹⁾ Peukert, ETZ 1915 S. 578.

²⁾ Villiers, Bull. Soc. Int. Electriciens, Bd. 1. 1911.

Stromstärke nach Gl. 180 ermittelten Werte des wirksamen Widerstandes enthalten außer dem der obigen Formel entsprechenden Betrag, der nur auf die Wirbelströme zurückzuführen ist, noch einen kleinen Anteil, welcher dem Hystereseverlust V_h gemäß der Gleichung $\frac{V_h}{J^2}$ (S. 295) entspricht. Der wirksame Widerstand muß daher allgemein definiert werden als Verhältnis der durch Stromwärme verbrauchten Leistung zum Quadrat der Stromstärke, und er kann auf keinem anderen Wege als durch Messung dieser Größen experimentell bestimmt werden.

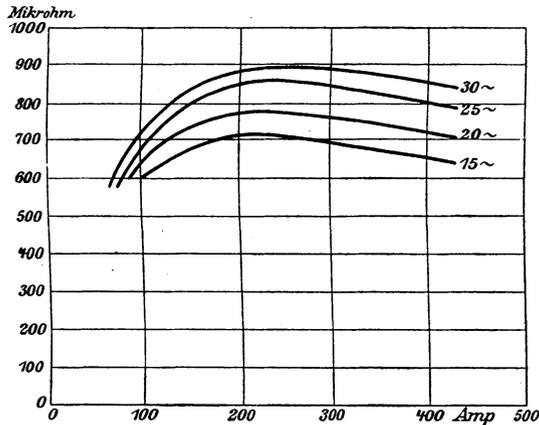


Abb. 272.

Wir sind bei diesen Betrachtungen ausgegangen von der verschiedenen Induktion, der die Stromfäden in verschiedener Tiefe des Leiters ausgesetzt sind. Wir kommen zu demselben Ergebnis, wenn wir von den Wirbelströmen ausgehen. Der durch den Leiter hindurchgeschickte Wechselstrom induziert Wechselströme, die parallel zu ihm verlaufen, denn die magnetischen Kraftlinien des Stromes sind konzentrische Kreise (Abb. 86). Wenn der Wechselstrom von Null bis zum Scheitelwert ansteigt, so wachsen diese Kraftlinien aus der Achse des Leiters heraus. Dabei schneiden sie den Leiter. Sinkt der Strom wieder auf Null, so schrumpfen die Kraftlinien wieder in die Achse zusammen. Die dabei induzierten sekundären oder Wirbelströme verlaufen also unter der Oberfläche des Leiters parallel zur Achse und nehmen durch die Achse ihren Rückweg. Hieraus ergibt sich, daß die Wirbelströme den hindurchgeschickten Strom unter der Oberfläche verstärken, in der Achse aber schwächen, so daß die oben besprochene ungleichmäßige Stromdichte des tatsächlich vorhandenen, resultierenden Stromes entsteht. Da es sich um sekundäre Ströme handelt, folgt schon aus § 152, daß der wirk-

same Widerstand größer, die wirksame Selbstinduktion aber kleiner sein muß als w bzw. L , denn sie entsprechen den äquivalenten Werten ρ bzw. λ des Transformators.

Auch aus dem Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit ergibt sich dasselbe, wenn man die Frage stellt: Wie muß sich der Strom verteilen, damit die magnetische Arbeit ein Minimum wird? Wie auch die Stromdichte von der Achse gegen die Oberfläche hin sich ändern mag, der Leiter wirkt nach außen magnetisch so, als ob der ganze Strom in der Achsenlinie konzentriert wäre. Es handelt sich also nur um die Magnetisierung des Leiters selbst, und diese ist ein Minimum, nämlich Null, wenn der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schichte an der Oberfläche strömt, weil eine solche Stromröhre im ganzen von ihr umschlossenen Raume keine magnetische Kraft ausübt, sondern nur außerhalb derselben. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so gibt es doch immer eine Verteilung des Stromes in der Oberfläche, für die seine magnetische Wirkung im Innern Null ist. „Diese Verteilung ist konform derjenigen, die eine elektrische Ladung annimmt, wenn sie sich auf dem Leiter im Zustande des Gleichgewichtes befindet.“ Nun ist aber der Widerstand eines Leiters niemals Null, und daher kommt auch das Prinzip des Minimums der Stromwärme zur Geltung. Dieses Prinzip verlangt, daß sich der Strom gleichmäßig über den Querschnitt verteilt. Die beiden Prinzipie widerstreiten sich also. Es tritt daher ein Kompromiß ein zwischen beiden derart, daß die Stromdichte in dem Leiter von innen nach außen zunimmt, und zwar um so rascher, je kleiner der Ohmsche Widerstand ist gegenüber dem induktiven.

Die obigen Formeln für w' und L' sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß das magnetische Feld um den Leiter herum symmetrisch nach allen Richtungen ist, so daß seine geometrische Achse mit der elektrischen zusammenfällt. In dieser herrscht dann auch die kleinste Stromdichte. Ist das magnetische Feld infolge anderer Einflüsse nicht so, so ist auch die Stromdichte anders verteilt, und läßt sich dann quantitativ nur in einfachen Fällen berechnen, qualitativ aber immer aus dem Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit beurteilen wie in folgenden Fällen.

Zwei parallele Leiter mit gleicher Stromrichtung haben ein magnetisches Feld wie Abb. 178. Bei einem solchen ist die magnetische Kraft und daher auch die magnetische Arbeit um so kleiner, je größer der Abstand der Ströme ist. Die Stromdichte ist daher an den einander zugewendeten Teilen der Leiter am kleinsten, an den abgewendeten Teilen am größten. Ist die Stromrichtung in den beiden Leitern entgegengesetzt (Kabel mit exzentrischen massiven Leitern¹⁾), so ist das magnetische Feld wie in Abb. 179.

¹⁾ Formeln darüber von G. Mie, Annal. d. Phys. Bd. 2, 1900. Kabel mit größerem Querschnitt werden aber nicht so ausgeführt, sondern nur mit Drahtseilen.

Bei einem solchen ist die magnetische Arbeit um so kleiner, je kleiner der Abstand der Ströme ist, denn wenn sich die Ströme bis zur Berührung nähern, so ist das magnetische Feld null. Die Stromdichte ist daher an den einander zugewendeten Teilen der Leiter am größten. Daraus folgt weiter, daß bei einem gekrümmten Stromleiter oder einer Windung (Schleife) die Stromdichte an der Innenseite des Leiters größer ist als an der Außenseite. Das gilt dann noch mehr bei einer Spule, weil da jede Windung auch noch einer Induktion von allen übrigen Windungen ausgesetzt ist. Nach einer Berechnung von M. Wien¹⁾ ist die Zunahme des wirksamen Widerstandes ($w' - w$) der 3. Potenz der Windungszahl proportional. Im übrigen wächst er wie bei einem geraden Leiter mit der 2. Potenz des Querschnittes und der Periodenzahl, und nimmt mit dem spezifischen Widerstand ab. Außerdem hängt er von der Form der Spule ab. Bei hohen Frequenzen wird die Abhängigkeit sehr verwickelt²⁾, während die Verminderung der wirksamen Selbstinduktion im allgemeinen so klein ist, daß sie vernachlässigt werden kann. Bei sehr hohen Frequenzen hat auch die Kapazität der Windungen gegeneinander³⁾, und schließlich sogar der dielektrische Verlust in der Isolation der Windungen einen erhöhenden Einfluß auf den wirksamen Widerstand.

Daß die Stromdichte an der Innenseite einer Windung oder Schleife größer ist als an der Außenseite gilt nur dann, wenn keine andersgerichteten Umstände vorhanden sind. Ist der Leiter nicht ringsherum von demselben magnetischen Stoff umgeben, wie z. B. die Wicklungsstäbe einer elektrischen Maschine mit offenen Nuten (Abb. 273), so gehen die magnetischen Kraftlinien des Stabes ein Stück ihres Weges durch Eisen und ein Stück durch Luft oder Kupfer, und zwar so, daß die Dichte der den Kupferstab durchquerenden Kraftlinien vom Grunde der Nut gegen die Öffnung hin zunimmt⁴⁾. Die Folge

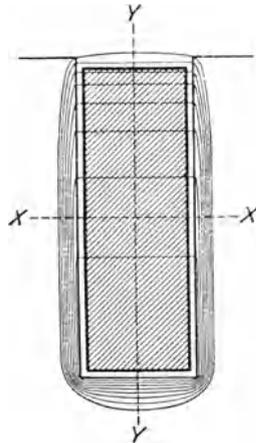


Abb. 273.

¹⁾ M. Wien, Annal. d. Phys. Bd. 14, 1904.

²⁾ Sommerfeld, Annal. d. Phys. Bd. 14, 1904; Bd. 15, 1905; Bd. 24, 1907. Black, ebenda Bd. 19, 1906. Esau, ebenda Bd. 34, 1911. Möller, ebenda Bd. 36, 1911. Lindemann, Ber. d. Deutsch. phys. Ges. 1909, Nr. 22. Lindemann u. Hüter, ebenda 1913, Nr. 7. Rogowski, Arch. f. Elektrot. Bd. 3, 1915.

³⁾ Lenz, Ann. d. Phys. Bd. 37, 1912.

⁴⁾ Es handelt sich zunächst nur um die Kraftlinien eines Stabes allein (Abb. 273), welche diesen senkrecht zu seinen Seitenflächen durchsetzen, so daß die Wirbelströme in seiner Längsrichtung verlaufen. Liegen mehrere Nuten nebeneinander, wie bei einem Läufer, so gehen die meisten Kraftlinien der nebeneinanderliegenden Nuten ineinander über und durchlaufen Nuten und Zähne zwischen zwei Bürsten ungefähr parallel zum Läuferumfang; sie bilden so das sogenannte Querfeld.

davon ist, daß die Stromdichte im Stab vom Grunde der Nut gegen die Öffnung zunimmt. Auch das erkennt man aus dem Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit, denn je weiter der Strom vom Grunde der Nut wegrückt, desto größer wird der magnetische Widerstand für seinen Kraftlinienpfad im Eisen, desto kleiner also die Kraftlinienmenge bei gegebener Stromstärke.

Aus allen Fällen ungleichmäßiger Stromverteilung in massiven Leitern kann man den Satz ableiten, daß die Stromdichte in jenen Teilen des Querschnittes am größten ist, welche der größten Kraftliniendichte am nächsten liegen.

Wegen der aus Abb. 273 ersichtlichen ungleichen Kraftliniendichte in einer Nut ist die Zunahme des wirksamen Widerstandes in zwei Stäben, die in derselben Nut übereinander liegen, verschieden. Sie dürfen daher nicht parallel, sondern nur hintereinander geschaltet werden.

Es ist leicht einzusehen, daß die Ungleichheit der Stromdichte und daher die Zunahme des wirksamen Widerstandes kleiner ist, wenn die Nut nicht ganz offen (Abb. 273), sondern halb geschlossen ist, und daß sie noch kleiner ist, wenn die Nut ganz geschlossen ist, d. h. wenn die Stäbe in Löchern liegen. Im letzteren Falle wird wohl meistens die elektrische Achse jedes Stabes mit der geometrischen zusammenfallen, so daß die obigen Formeln für gerade Leiter mit symmetrischem Felde gelten.

170. Mittel gegen die ungleichmäßige Stromverteilung.

Die ungleichmäßige Verteilung der Stromdichte ist in zweifacher Hinsicht unerwünscht: Erstens ist die Stromwärme größer. Die der Widerstandszunahme entsprechende Stromwärme $(w' - w)J^2$, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Stromwärme der Wirbelströme im Leiter, bezeichnet man als zusätzliche. Aber auch der gesamte (Ohmsche und induktive) Spannungsabfall ist größer, obwohl die Selbstinduktion und damit auch der induktive Spannungsabfall ωLJ kleiner ist, aber nicht um so viel, als der Ohmsche Spannungsabfall $w'J$ größer ist, wie bei gleichmäßiger Stromdichte. Zweitens wird Widerstand und Selbstinduktion von der Frequenz abhängig, was bei Apparaten und Drähten für Meßzwecke unzulässig ist.

Handelt es sich nur darum, letzteres zu verhindern, so muß statt eines massiven Leiters ein Seil oder eine Litze aus möglichst dünnen Drähten verwendet werden, und diese müssen durch einen isolierenden Oxyd-, Azetat- oder Email-Überzug voneinander so gut isoliert sein, daß kein Stromübergang von einem zum andern möglich ist. Bleiben dabei die inneren Drähte im ganzen Verlauf des Seiles innen, so besteht immer noch ungleiche Stromdichte und daher Abhängigkeit des Widerstandes von der Frequenz, weil die Induktion auf die inneren Stromfäden größer ist als auf die äußeren. Dies kann nur verhindert werden, wenn die einzelnen Drähte ihre

Stelle im Seil derart ändern, daß die inneren Drähte nach außen kommen und umgekehrt, d. h. wenn die Drähte so gedreht oder geflochten werden, daß jeder gleich oft an irgend eine Stelle des Seilquerschnittes kommt. Ist die Verwendung des Seiles oder der Litze derart, daß die elektrische Achse mit der geometrischen zusammenfällt (einzelne, gerade Leiter), so genügt Drehung nicht, sondern es ist Verflechtung notwendig. Fallen aber diese Achsen nicht zusammen (Spulen, Ankerwicklungen), so genügt Drehung. Die Verwendung solcher Seile oder Litzen ist beschränkt, weil sie teurer sind und nur eine unvollständige Ausnutzung des gegebenen Wicklungsraumes gestatten.

Bei elektrischen Maschinen und Transformatoren kommt es nicht auf die Unabhängigkeit des Widerstandes von der Frequenz, wohl aber auf möglichst Verminderung der zusätzlichen Stromwärme an, was durch genügende Unterteilung auch ohne Verflechtung oder Drehung erreicht werden kann. Die Raumauffüllung kann durch Pressung der Seile zu geeigneten Stabformen verbessert werden, obwohl dadurch leicht die natürliche Oberflächenisolation der Drähte verschlechtert wird¹⁾.

Wenn es sich darum handelt, möglichst kleine Stromwärme überhaupt zu erzielen, so lange die Wahl des Querschnittes noch frei steht, so muß man sich vor Augen halten, daß die Zunahme des wirksamen Widerstandes ($w' - w$) in erster Annäherung dem Quadrate des Querschnittes s proportional ist (S. 327), während der Widerstand w an und für sich nur mit der ersten Potenz von s abnimmt, so daß von einem gewissen Querschnitt ab die Zunahme infolge ungleicher Stromdichte größer ist als die Abnahme infolge Vergrößerung des Querschnittes. Mit anderen Worten: Der wirksame Widerstand erreicht bei wachsendem Querschnitt ein Minimum und nimmt dann wieder zu. Daraus folgt weiter, daß oberhalb eines gewissen, von der Frequenz abhängigen Gesamtquerschnittes eine Verminderung des wirksamen Widerstandes nur dann eintritt, wenn die Unterteilung des Querschnittes genügend fein ist. Geht man auf die Wirbelströme zurück, so erklärt sich das daraus, daß sie als sekundäre Ströme dem magnetischen Felde, das sie erzeugt, also auch der ungleichmäßigen Stromverteilung entgegenwirken (§ 149). Daher kann die Verminderung der Ungleichförmigkeit der Stromdichte durch Unterteilung des Querschnittes z. B. auf die Hälfte kleiner sein, als die Abnahme der genannten Gegenwirkung, so daß der endgültige wirksame Widerstand durch Unterteilung auf die Hälfte nicht kleiner, sondern größer wird. Nur dann, wenn die Querschnitte der Teile unter einer gewissen Grenze liegen, so daß die Gegenwirkung der Wirbelströme überhaupt nicht von Bedeutung ist, ergibt sich eine Abnahme des wirksamen Wider-

¹⁾ Vergleichsmessungen an solchen und massiven Stäben von Rikli, Elektrot. u. Maschinenb. Wien 1917, S. 249.

standes und dann natürlich um so mehr, je feiner die Unterteilung ist. Da die Zunahme des wirksamen Widerstandes auch vom Quadrate der Frequenz abhängt, so folgt aus dem Vorstehenden weiter, daß es bei einer gewissen Unterteilung eine gewisse Frequenz gibt, bei welcher der wirksame Widerstand ein Minimum ist. Und es kann oberhalb einer gewissen Frequenz ein massiver Leiter weniger wirksamen Widerstand haben als ein Seil von gleichem Querschnitt.

Ist das magnetische Feld eines Leiters unsymmetrisch wie bei Stäben in Eisennuten (Abb. 273), so ist die Richtung der Unterteilung von Wichtigkeit. Weil hier die Kraftlinien durch die Seitenflächen der Stäbe hindurchgehen, verlaufen die Wirbelströme in Ebenen, die parallel zur Y -Achse liegen. Daher wäre eine Unterteilung in dieser Richtung zwecklos; sie muß in der X -Achse erfolgen, d. h. die Stäbe müssen in der Nut übereinander, nicht nebeneinander angeordnet werden, oder es müssen Seile verwendet werden¹⁾.

Zur erschöpfenden mathematischen Behandlung des wirksamen Widerstandes und der zusätzlichen Stromwärmeverluste in Maschinen, die im Betriebe sind, genügt aber das in Abb. 273 dargestellte Eigenfeld eines in einer Nut liegenden Leiters nicht, sondern es kommt das wirklich vorhandene, d. h. das aus Läufer- und Ständerfeld resultierende Feld in Betracht. Letzteres geht aber auch durch einen Teil der Nuten und der in ihnen liegenden Stäbe hindurch (Abb. 144), so daß das resultierende Feld eine verwickelte, von Nut zu Nut wechselnde Form hat und daher in jedem Stab anders wirkt. Sichere Werte für Maschinen lassen sich daher nicht berechnen, sondern nur experimentell bestimmen²⁾.

171. Magnetische und elektrische Kräfte in einem Transformator.

Für Wechselstrom gelten, wie schon auf S. 227 betont wurde, dieselben Grundgesetze wie für Gleichströme, so lange man alles auf die Augenblickswerte bezieht. Von den Augenblickswerten gilt auch das Gesetz, daß gleichgerichtete Ströme sich anziehen und entgegengesetzte sich abstoßen, wenn die Leiter parallel oder wenigstens mit einer Komponente parallel liegen (§ 117). Infolgedessen ziehen sich die Windungen einer vom Wechselstrom durchflossenen Spirale (Abb. 274) gegenseitig an, und die Spirale sucht sich zusammenzuziehen, wie wenn sie von Gleichstrom durchflossen ist. Ferner wirken in einer

¹⁾ Weiterhin muß auf die letzte Literatur verwiesen werden: Rogowski, Arch. f. Elektr. Bd. 2, S. 81, 526; Bd. 4, S. 293. Hillebrand, ebenda Bd. 3, S. 111. Richter, ebenda Bd. 3, S. 175; Bd. 4, S. 1; Bd. 5, S. 335. Eine gute Übersicht gibt Fischer-Hinnen im Bulletin des Schweizer Elektr. Vereins 1917, Bd. 7, S. 101.

²⁾ Ottenstein, „Das Nutenfeld in Zahnarmaturen und die Wirbelstromverluste“. Stuttgart, F. Enke, 1903.

Stromschleife Kräfte in radialer Richtung nach außen, die die Schleife zu erweitern suchen (§ 82), also auch in jeder Spule.

Nach § 151 besteht zwischen primärem und sekundärem Strom eines Transformators eine Phasenverschiebung χ , die zwischen 90° und 180° liegt. Beim oberen Grenzwert ($\chi = 180^\circ$) haben die beiden Ströme in jedem Augenblick entgegengesetzte Richtung. Sie stoßen sich daher ab, wie Gleichströme von entgegengesetzter Richtung. Ist die Phasenverschiebung kleiner als 180° (Abb. 275), so gibt es Zeit-



Abb. 274.

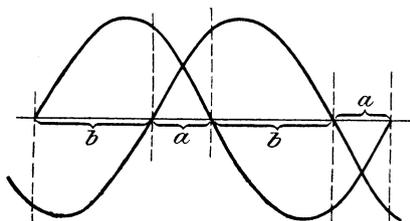


Abb. 275.

räume a , während der die Ströme gleiche Richtung haben, also sich anziehen, und Zeiträume b , in denen sie entgegengesetzte Richtung haben, also sich abstoßen. Die Abstoßung überwiegt, da χ größer als 90° ist. Bei 90° wären Anziehung und Abstoßung während jeder Periode gleich groß, so daß bei diesem Grenzwert die resultierende Kraft zwischen den beiden Stromkreisen null wäre. Besteht die Wicklung eines Transformators aus nebeneinander liegenden Scheibenspulen (Abb. 217b), so treten zwischen primären und sekundären Spulen seitlich abstoßende Kräfte auf. Bei sehr großen Stromstärken (Kurzschluß eines großen Transformators) sind sie so stark, daß die Endspulen verbogen werden, wenn sie nicht besonders gestützt sind. Bei konzentrischen Zylinderspulen (Abb. 217a) wirken diese abstoßenden Kräfte in radialer Richtung und können daher nicht schaden. Nur wenn eine Spule länger ist als die andere, wirken auch seitliche Kraftkomponenten auf die vorstehenden Windungen und können diese bei einem Kurzschluß verbiegen. Das sind magnetische Kräfte, die den beiden Stromstärken proportional sind. Die magnetischen Kraftlinienbilder (Abb. 219 und 220) geben Aufschluß über die räumliche Verteilung und Richtung dieser Kräfte, wenn man bedenkt, daß sich Kraftlinien wie elastische Fäden zusammenzuziehen und untereinander abzustoßen suchen.

Nebst diesen magnetischen Kräften gibt es noch elektrische Kräfte, wie bei dem auf S. 202 beschriebenen Gleichstromversuch. Diese sind auch dann vorhanden, wenn der sekundäre Stromkreis unterbrochen ist (Leerlauf). Denn die elektrische Induktion findet in jedem Leiter statt, der von magnetischen Kraftlinien geschnitten wird. Ist der Stromkreis offen, so äußert sich die elektrische In-

duktion darin, daß die eine Hälfte des sekundären Leiters mit positiver, und die andere mit negativer Elektrizität geladen wird. Abb. 276 zeigt einen aus 2 Windungen bestehenden Transformator in perspektivischer Darstellung. Die dünnen Linien zeigen den Verlauf der elektrischen Kraftlinien. In Abb. 276a sind nur die gezeichnet, die zwischen verschiedenen Teilen desselben Stromkreises verlaufen. Sie sind an den Enden am dichtesten und nehmen gegen die Mitte des Leiters zu ab. Mit jeder Halbwelle wechseln die Ladungen und dementsprechend die Richtungen der Kraftlinien, während ihre Gestalt dieselbe bleibt. Diese Kraftlinien haben denselben Verlauf wie die elektrisierenden Kräfte in dem Dielektrikum, das zur Isolierung dient. Die Isolation, die diesen elektrisierenden Kräften widerstehen muß, bezeichnet man als innere Isolation eines Stromkreises. Besteht ein Stromkreis aus mehreren Windungen, so ergibt sich ein verwickeltes Bild, da elektrische Kraftlinien zwischen jeder Windung und allen anderen derselben Wicklung verlaufen.

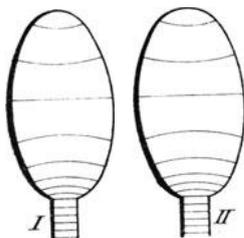


Abb. 276 a.

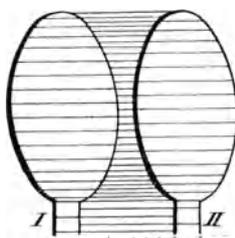


Abb. 276 b.

Zwischen der ersten und letzten Windung verlaufen die meisten Kraftlinien, zwischen zwei aufeinanderfolgenden die wenigsten. Darum muß bei der Herstellung der Spulen darauf Bedacht genommen werden, daß die ersten und letzten Windungen nicht nebeneinander zu liegen kommen. Kann dies nicht vermieden werden, so muß die Isolation zwischen ihnen entsprechend stark sein. Ist ein Eisenkern oder ein anderer Metallteil in der Nähe, so endigt ein Teil der Kraftlinien auf diesem, und es ist dann auch genügend Isolation zwischen diesem und der Spule anzubringen.

Zu diesen Kraftlinien kommen noch jene, die zwischen primärem und sekundärem Stromkreis verlaufen, und die der Deutlichkeit wegen in Abb. 276 b besonders dargestellt sind. Es entspricht dies zunächst dem Leerlauf, wo die von der Stromquelle den primären Klemmen zugeführte Spannung und die in der sekundären Wicklung induzierte Ladung nahezu 180° Phasenverschiebung haben. Ist der sekundäre Stromkreis geschlossen, so kann die Phasenverschiebung zwischen primärer und sekundärer Klemmenspannung andere Werte haben. Die Kraftlinien verlaufen dann nicht mehr zwischen den gleich gelegenen Stellen der beiden Stromkreise, sondern sind ver-

schohen. Immer aber verlaufen diese elektrischen Kraftlinien durch das zwischen den beiden Stromkreisen befindliche Dielektrik in ziemlich gleichmäßiger Dichte, so daß diese Isolation, die man als äußere bezeichnet, überall ziemlich gleich beansprucht wird.

Denkt man sich diese beiden Felder zu einem resultierenden vereinigt, so erhält man ein Bild von der Anordnung der elektrischen Kraftlinien eines Transformators mit zwei nebeneinanderliegenden Scheibenspulen und der daraus hervorgehenden Beanspruchung der Isolation. Bei einem Transformator mit konzentrischen Zylinder-spulen verlaufen die elektrischen Kraftlinien radial zwischen den Spulen¹⁾.

¹⁾ Aus einer Maxwellschen Hypothese hat man den Schluß gezogen, daß die elektrischen Kraftlinien periodisch veränderlicher Ströme in sich geschlossene Kurven seien, die das magnetische Wechselfeld, das als „magnetischer Strom“ betrachtet wird, umschließen. Da dieser „magnetische Strom“ die Stromflächen einer Spule senkrecht durchsetzt, so müßten die elektrischen Kraftlinien als in sich geschlossene Kurven parallel zur Stromrichtung verlaufen, was sicher nicht zutrifft. Die Erfahrung lehrt vielmehr, daß das einen Stromleiter umgebende isolierende Dielektrik bei zu hoher Spannung senkrecht zur Stromrichtung, aber nicht parallel zu ihr durchschlagen wird. Besteht die Isolierung zwischen primärer und sekundärer Wicklung eines Transformators aus Luft, so kann man bei geeigneter Spannung am Verlauf des Glimmlichtes und der ersten schwachen Funkenentladungen im Dunkeln die Richtung der elektrischen Kraftlinien entsprechend Abb. 276b deutlich sehen.

Zur Begründung der geschlossenen elektrischen Kraftlinien wurde der unrichtige Schluß gezogen: Weil die Induzierung einer EMK in einem Leiter senkrecht zur Richtung der induzierenden magnetischen Kraftlinien erfolgt, müßten auch die elektrischen Kraftlinien im Dielektrik denselben Verlauf nehmen. Es gibt keine Erscheinung in der Elektrizität, die das bestätigt. Im Gegenteil zeigt sich überall, daß die Richtung der in einen Leiter induzierten EMK senkrecht steht zur Richtung der elektrischen Kraftlinien im Dielektrik, das ihn umgibt. Alle Versuche, die zu dem Zweck angestellt wurden, in sich geschlossene elektrische Kraftlinien nachzuweisen, sind gescheitert. Auch die jüngsten Versuche von Henrich (Dissertation Marburg 1910) erbringen keinen solchen Beweis. Die dort erzielte Drehung eines Metallstäbchens und eines Glasstäbchens im Innern eines von Wechselstrom magnetisierten geschlossenen Eisenringes (Abb. 117) rührt nicht von in sich geschlossenen elektrischen Kraftlinien her, sondern von solchen, die von der einen Hälfte des stromführenden Leiters ausgehen und auf der anderen Hälfte endigen. Da der Leiter bei diesen Versuchen eine ringförmige Spule bildet, so entstehen u. a. auch solche Kraftlinien, die in der Richtung der Achse durch die Mitte des Ringes verlaufen. Sie haben aber Anfang und Ende auf dem Stromleiter. Wenn es in sich geschlossene elektrische Kraftlinien gäbe, müßten sie sich wie alle Grunderscheinungen, auch mittels Gleichstrom nachweisen lassen. Besondere Grundgesetze für Ströme, die ihre Richtung wechseln, gibt es nicht. Insbesondere läßt sich mit dem in Abb. 183 dargestellten Versuch zeigen, daß die elektrische Kraft bei Gleichstrom dieselbe Richtung hat.

H. Hertz hat zu seinen Anordnungen elektrischer Schwingungserzeuger (Oszillatoren) auch Kraftlinienbilder mit geschlossenen elektrischen Kraftlinien gezeichnet, aber keine Spur eines Beweises dafür erbracht.

Es ist überhaupt immer bei Annahmen und Analogien mit den geschlossenen magnetischen Kraftlinien eines elektrischen Stromes geblieben. Vgl. auch den Artikel des Verfassers: „Gibt es geschlossene elektrische Kraftlinien?“ Archiv f. Elektrot. Bd. 4, S. 366, 1916.

Elftes Kapitel.

Die Kapazitätserscheinungen.¹⁾

172. Scheinbarer Widerstand eines Kondensators.

In den Stromkreis einer Wechselstromquelle sei ein Kondensator mit der Kapazität C eingeschaltet (Abb. 277), und zwar setzen wir einen idealen Kondensator voraus, d. h. einen solchen, der keine elektrische Arbeit durch Umsatz in Wärme verbraucht. Dennoch kann in dem Stromkreise ein Wechselstrom verkehren. Einen solchen haben wir ja auch in den Zuleitungsdrähten eines Kondensators, dessen eine Platte mit der Erde verbunden ist und dessen andere abwechselnd positiv und negativ geladen wird (Abb. 278). Denn bei jeder Ladung der Platte I strömt eine gleichnamige und gleichgroße Elektrizitätsmenge von der Platte II zur Erde ab. Rein äußerlich betrachtet, ist es so, als ob die bei der Ladung zugeführte Elektrizitätsmenge durch das Dielektrik zur Erde strömen würde. In Wirklichkeit ist

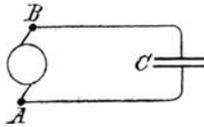


Abb. 277.

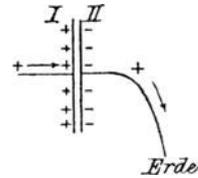


Abb. 278.

aber der Vorgang so, daß durch die zugeführte Elektrizitätsmenge eine gleichgroße ungleichnamige Menge auf der zweiten Platte induziert wird, und eine gleichnamige zur Erde abströmt. Die beiden Platten sind mithin in jedem Augenblick entgegengesetzt geladen. Dasselbe ist der Fall, wenn wir beide Platten mit den Klemmen A und B einer Wechselstromquelle verbinden. Da von diesen Klemmen in jedem Augenblick entgegengesetzte Elektrizität ausgeht, so wird die eine Platte positiv, die andere gleichzeitig negativ geladen. Wechselt die Richtung der Maschinenspannung, so wechselt auch die Ladung der Kondensatorplatten. Es besteht also in den Verbindungsleitungen zwischen Maschine und Kondensator ein Wechselstrom, obwohl sie durch das Dielektrik des Kondensators vollkommen von einander isoliert sind.

¹⁾ § 172 bis 178 nach G. Benischke: „Die Wirkungsweise der Kondensatoren im Wechselstromkreise.“ ETZ 1895, S. 612.

Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir uns vorstellen, daß eine entsprechende Elektrizitätsmenge im Dielektrik des Kondensators zwischen den beiden Platten hin und her geschoben wird, so daß diese in jedem Augenblick entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man bezeichnet diese im Dielektrik hin und her gehende Elektrizitätsmenge als Verschiebungsstrom. Er bildet gewissermaßen die Verbindung zwischen dem Strom in den Zuleitungen zu den Kondensatorplatten, so daß man auch da die Vorstellung von einem geschlossenen Stromkreis aufrecht erhalten kann.

Man darf aber dabei nicht vergessen, daß dieser Verschiebungsstrom kein wirklicher Strom ist, wie in einem Leiter, sondern ein fingierter, der keine magnetischen Kraftlinien hat wie ein wirklicher Strom¹⁾. Ein wirklicher Strom kann nur dann durch ein Dielektrik gehen, wenn dieses nebst seiner Dielektrizitätskonstante eine gewisse Leitfähigkeit besitzt. Dieser wirkliche Strom befindet sich im Nebenschluß zum fingierten Verschiebungsstrom. Davon sehen wir jetzt ab, da wir vorläufig einen idealen Kondensator voraussetzen.

Nach § 41 ist die von einem Strome i während der Zeit dt gelieferte Elektrizitätsmenge $dq = i \cdot dt$. Da es bei Wechselstrom nicht

¹⁾ Die Maxwellsche Hypothese, wonach der fingierte Verschiebungsstrom in einem Dielektrik von magnetischen Kraftlinien und das magnetische Feld eines Wechselstromes von in sich geschlossenen elektrischen Kraftlinien umschlossen sein soll, ist mir wohl bekannt, und in der zweiten Auflage dieses Buches habe ich ihr noch Rechnung getragen. Seither bin ich zu der Überzeugung gekommen, daß jene Hypothese unhaltbar ist. Sie beruht nicht, wie die sonstigen Arbeiten Maxwells auf dem sicheren Boden Faradayscher und älterer Versuche; und es ist auch nachträglich nicht gelungen, diese Hypothese zu bewahrheiten. Die Versuche, die darüber angestellt worden sind, haben entweder nichts gezeigt, oder sind nur im guten Glauben als beweisend betrachtet worden. So die Ablenkung einer Magnetnadel beim Drehen einer dielektrischen Scheibe zwischen den Platten eines geladenen Kondensators. Diese Ablenkung ist aus den elektrischen Kräften des Kondensators zu erklären, weil die Magnetnadel auch ein guter elektrischer Leiter ist. Der bekannte Versuch von Rowland, der zeigt, daß eine geladene Kugel, die im Kreise gedreht wird, magnetische Kräfte ausübt, beweist nichts für diese Maxwellsche Hypothese, sondern beweist vielmehr die Richtigkeit der Vor- und Nach-Maxwellschen Annahme, daß der elektrische Strom ein Transport von Elektrizität ist (§ 238).

Die Behauptung, daß die Hertzschen Versuche, die eine wellenförmige Fortpflanzung elektrischer Störungen gezeigt haben, zu ihrer Erklärung die oben erwähnte Maxwellsche Hypothese brauchen, ist unrichtig. Zu ihrer Erklärung braucht es nur elektrische Kräfte bei einer elektrischen Störung und magnetische Kräfte bei Leitungsströmen. Schon Stefan hat in seinen letzten Vorlesungen gezeigt, daß die Hertzschen Versuche sich restlos aus der Weberschen Anschauung über das Wesen der Elektrizität erklären lassen. Das kann auch nur derjenige bestreiten, der der falschen Meinung ist, daß Weber Fernkräfte ohne Mitwirkung des Zwischenmittels angenommen hätte. Es ist heute kein Zweifel mehr, daß Weber mit seiner Annahme eines atomistischen Elektrizitätsstoffes dem Wesen der Elektrizität näher gekommen ist als Maxwell mit seiner Energiehypothese. Vgl. auch das bemerkenswerte Vorwort von E. Rasch zu seinem Buche „Das elektrische Bogenlicht“, Braunschweig 1910.

Über die Annahme in sich geschlossener elektrischer Kraftlinien bei einem magnetischen Felde vgl. die Anmerkung auf S. 339.

nur auf die absoluten Werte, sondern auch auf die Phasenverhältnisse ankommt, so müssen wir auch auf das richtige Vorzeichen bedacht sein.

Liefert die Stromquelle, an der der Kondensator angeschlossen ist, eine periodisch veränderliche Spannung, so strömt offenbar dann die größte Elektrizitätsmenge durch die Verbindungsleitungen, wenn der Kondensator keine Ladung hat, weil er eben da die meiste Elektrizität aufnehmen kann. Hat aber seine Ladung den größten Wert q erreicht, der bei der vorhandenen Kapazität und Spannung möglich ist, so strömt keine Elektrizität mehr zu, und die Stromstärke in den Zuleitungen ist null. Infolgedessen müssen wir das negative Vorzeichen einführen; es ist also die auf dem Kondensator sitzende Ladung¹⁾:

$$dq = -i \cdot dt \dots \dots \dots (196)$$

Nach § 26 ist

$$q = e_c C \dots \dots \dots (197)$$

wenn e_c die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Kondensatorplatten bedeutet, die wir als Kapazitätsspannung bezeichnen. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$i = -C \frac{de_c}{dt} \dots \dots \dots (198)$$

oder

$$e_c = -\frac{1}{C} \int i \cdot dt.$$

Setzt man zunächst voraus, daß die Verbindungsleitungen zwischen Stromquelle und Kondensator widerstandslos sind, so ist die Spannung der Stromquelle mit der Kapazitätsspannung identisch. Sie sei gegeben durch

$$e_c = \mathfrak{E}_c \sin \omega t;$$

dann ist

$$i = -\omega C \mathfrak{E}_c \cos \omega t = \omega C \mathfrak{E}_c \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \dots (199)$$

Man ersieht daraus, daß der dem Kondensator zufließende Strom i um eine Viertelperiode gegenüber der Kapazitätsspannung

¹⁾ Welche Unklarheit zuweilen über die Grundgesetze noch besteht, zeigte sich in einer Besprechung dieses Buches, in welcher gesagt wird, dieses negative Vorzeichen hätte keine grundsätzliche Bedeutung, sondern sei einfach Sache der Definition. Man könnte also Gl. 196 und 198 auch mit + Vorzeichen „definieren“, täte man das, so würde sich in Gl. 205 ein + Vorzeichen, d. h. eine Nacheilung der Stromphase ergeben, was mit den experimentellen Tatsachen im Widerspruch stände. Nachdem einmal die allgemeine Grundgleichung $k = wi - e$ festgestellt ist, ist das negative Vorzeichen der Gl. 196 nicht mehr Sache der Definition sondern Notwendigkeit infolge des oben angegebenen Grundes.

verspätet ist, da er die entsprechenden Werte erst um $\frac{\pi}{2}$ später erreicht als e_c , oder umgekehrt; die Kapazitätsspannung eilt um eine Viertelperiode dem Strome voraus, wie auch aus Abb. 279 zu ersehen ist. Die Kondensatorspannung verhält sich also gerade entgegengesetzt wie die EMK der Selbstinduktion, die dem Strome um eine Viertelperiode nach eilt (§ 132).

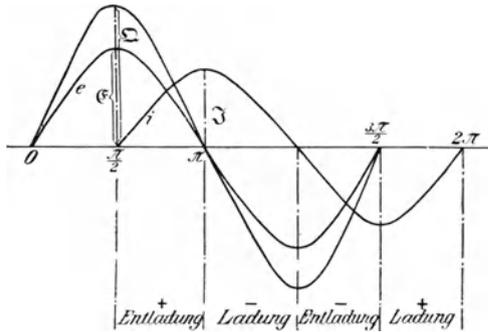


Abb. 279.

Aus Gl. 197 folgt, daß die Ladung q des Kondensators in gleicher Phase mit der Kapazitätsspannung ist, da C eine Konstante ist. Die Kurve der Ladung (Scheitelwert Ω) ist in Abb. 279 eingezeichnet.

Da der Faktor vor einer Sinus- oder Cosinusfunktion den Scheitelwert darstellt, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\Im = \omega C E_c \dots \dots \dots (200)$$

Dividiert man beiderseits durch den Scheitelfaktor (§ 131), so erhält man aus den Scheitelwerten die effektiven Werte; also

$$J = \omega C E_c = 2\pi\nu C E_c \dots \dots \dots (201)$$

als Beziehung zwischen Strom, Frequenz, Kapazität und Kapazitätsspannung.

Aus Gl. 199 ergibt sich

$$\frac{di}{dt} = \omega^2 C_c \sin \omega t = \omega^2 C e_c$$

oder

$$e_c = \frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (202)$$

Diese Gleichung, die die Abhängigkeit der Kapazitätsspannung von der Änderung des Stromes (bei konstanter Frequenz und Kapazität) darstellt, bildet das Seitenstück zur Gl. 106 (S. 228) für die Induktionsspannung und hat entgegengesetztes Vorzeichen wie jene.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Verbindungsleitungen zwischen Stromquelle und Kondensator keinen Widerstand haben. Setzen wir nun den Fall, daß sie einen Widerstand w haben, so kann die Kapazitätsspannung e_c mit der Klemmenspannung der Stromquelle nicht identisch sein. Bezeichnen wir die letztere mit k , so ist die gesamte in diesem Stromkreis wirkende Spannung $k + e_c$, und daher die Stromstärke $i = \frac{k + e_c}{w}$.

Daraus folgt $k = wi - e_c$
 $k = wi - \frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (203)$

Diese Gleichung bildet wiederum das Seitenstück zu Gl. 108. Setzen wir wie dort die Klemmenspannung von der Form

$$k = \mathfrak{K} \sin \omega t$$

voraus, so ist der Strom von der Form

$$i = \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi).$$

Dem weil nach dem Vorstehenden eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Kapazitätsspannung besteht, muß auch eine zwischen Strom und Klemmenspannung k bestehen. Abb. 280 zeigt, wie sich die k -Welle aus den Wellen iw und e_c zusammensetzt.

Da zwischen Gl. 203 und Gl. 108 nur der Unterschied besteht, daß hier $-\frac{1}{\omega^2 C}$ statt L steht, so können wir die in § 133 erhaltenen Resultate sofort aufnehmen und diesen Ausdruck für L einsetzen. Es ist also

$$J = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + \omega^2 \left(-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}} = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \dots (204)$$

und

$$\text{tg } \varphi = -\frac{1}{\omega \omega C} \dots \dots \dots (205)$$

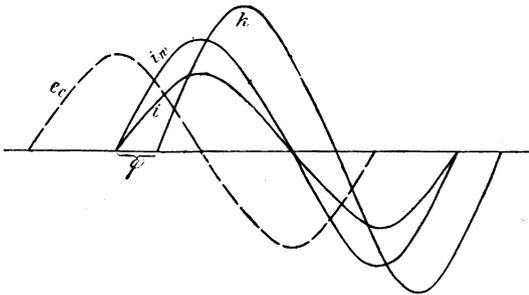


Abb. 280.

An Stelle des induktiven Widerstandes ωL steht also in diesen beiden Gleichungen der Ausdruck $-\frac{1}{\omega C}$, den man als Kapazitätswiderstand bezeichnet. Da der Winkel φ in der letzten Gleichung negativ geworden ist, so eilt der Strom der

Klemmenspannung k um den Winkel φ vor, wie auch Abb. 280 zeigt, im Gegensatz zu einem Stromkreis mit Selbstinduktion, wo der Strom der Klemmenspannung nacheilt (Abb. 196).

Schreibt man Gl. 204 in der Form

$$K^2 = (\omega J)^2 + \left(\frac{J}{\omega C}\right)^2 \dots \dots \dots (206)$$

so erscheint K als Resultierende aus dem Spannungsabfall ωJ und

der Kapazitätsspannung $-\frac{J}{\omega C}$, was durch Abb. 281 graphisch dargestellt ist. Da die Kapazitätsspannung gegenüber der Induktionsspannung negativ ist, ist sie hier nach abwärts gerichtet. (Vgl. Abb. 202.)

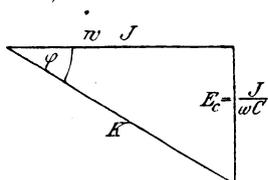


Abb. 281.

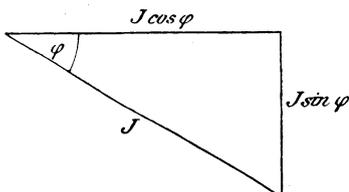


Abb. 282.

Die Leistung des Stromes ist $KJ \cos \varphi$. Zerlegt man den Strom in die Komponenten $J \cos \varphi$ und $J \sin \varphi$ (Abb. 282), so ist die erste der Wattstrom, die zweite der wattlose Strom oder Querstrom¹⁾. (Vgl. § 136.)

Beispiel. An eine Wechselfspannung von 100 Volt, 50 Perioden ($\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$) sei ein Luftkondensator von 1000 cm² Fläche und 0,2 cm Abstand mit einem Vorschaltwiderstand von 100 Ohm angeschlossen. Nach § 26 ist

$$C = \frac{1000}{4\pi \cdot 0,2} = 400 \text{ abs. Einh.}$$

$$= 400 \cdot \frac{10^{-11}}{9} = 44 \cdot 10^{-11} \text{ Farad (§ 299).}$$

Also

$$J = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \frac{1}{(314 \cdot 44 \cdot 10^{-11})^2}}} = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \frac{10^{22}}{(314 \cdot 44)^2}}}$$

$$= \frac{100}{10^{11}} = \frac{100 \cdot 13800}{10^{11}} = 138 \cdot 10^{-7} = 0,0000138 \text{ Ampere.}$$

$\frac{314 \cdot 44}{10^{11}}$

Eine mechanische Vorstellung von dem Wesen des Verschiebungsstromes im Dielektrik eines Kondensators und von dem Unterschiede zwischen diesem und dem Strom in einem Leiter, gibt folgende hydrodynamische Vorrichtung.

Die beiden Gefäße A und B (Abb. 283) sind durch Schläuche mit dem

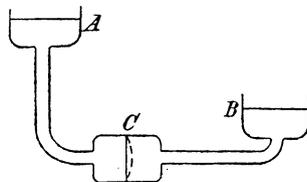


Abb. 283.

¹⁾ Diese Stromkomponente wird manchmal auch „Ladestrom“ genannt. Diese Bezeichnung ist ebenso unrichtig und irreführend wie der Name „Magnetisierungsstrom“ für die wattlose Komponente bei einer Drosselspule. (Vgl. die Anmerk. auf S. 239 und § 158.) Denn nicht nur der wattlose Strom, sondern der gesamte J ladet den Kondensator.

Gefäße C verbunden, das im Inneren eine elastische Membran enthält. Sind beide Gefäße gleich hoch gestellt, so wirkt auf beiden Seiten der gleiche Druck. Senkt man aber B , so wird jetzt die Membran durch den Überdruck auf der linken Seite nach rechts ausgedehnt, und in beiden Schläuchen strömt Flüssigkeit von links nach rechts, ohne daß ein wirkliches Übergehen der Flüssigkeit von A nach B stattfindet; es ist bloß ein Verschiebungsstrom. Hebt man nun B und senkt A , so findet das Umgekehrte statt, es geht ein Verschiebungsstrom von rechts nach links. Geschieht dies in periodischer Aufeinanderfolge, so haben wir ganz genau den Fall eines Kondensatorstromes.

Setzen wir die Zuleitung (in diesem Beispiel die Schläuche) widerstandslos voraus, so ist die Stromstärke des Verschiebungsstromes nach Gl. 201: $J = \omega C E_c$, d. h. in der Zeiteinheit wird um so mehr Elektrizität verschoben, je größer die Periodenzahl, die Kapazität und die Spannung ist. Ganz dasselbe erkennt man aus diesem Beispiel, wenn C die Größe der Membran und E_c den Niveauunterschied der beiden Gefäße bedeutet.

173. Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Reihenschaltung.

Enthält der an die Klemmenspannung k (zwischen AB , Abb. 284) angeschlossene Stromkreis außer dem Widerstand w , der Kapazität C , noch die Selbstinduktion L , so tritt in die Spannungsgleichung (203) auch noch die Induktionsspannung $L \frac{di}{dt}$ ein (§ 132). Mithin ist

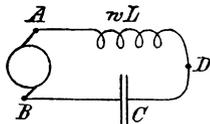


Abb. 284.

$$\begin{aligned}
 k &= wi + L \frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt} \\
 &= wi + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right) \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (207)
 \end{aligned}$$

Diese Spannungsgleichung hat dieselbe Form wie Gl. 108, nur daß an Stelle von L der Ausdruck $L - \frac{1}{\omega^2 C}$ getreten ist. Wir haben also in den scheinbaren Widerstand (Gl. 115) und in die Phasenverschiebung (Gl. 116) statt L diesen Ausdruck einzusetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)^2}}, \\
 \text{tg } \varphi &= \frac{\omega \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right)}{w},
 \end{aligned}$$

wenn der Strom von der Form $i = \Im \sin (\omega t - \varphi)$ ist; oder anders geschrieben:

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \dots \dots \dots (208)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{w} \dots \dots \dots (209)$$

In diesen beiden Formeln tritt also an Stelle des Induktionswiderstandes ωL die Summe aus Induktions- und Kapazitätswiderstand $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Man bezeichnet diese Summe als Querwiderstand, da er in jedem Falle als Vektor senkrecht auf w steht. Je nach dem Gliede, das überwiegt, kann der Querwiderstand induktiv (positiv) oder kapazitiv (negativ) sein. Aus sämtlichen vorstehenden Gleichungen ersieht man, daß Selbstinduktion und Kapazität einander entgegenwirken. Daher kann man nicht ohne weiteres sagen, ob der Strom der Klemmenspannung vor- oder nacheilt, denn der Winkel φ kann positiv und negativ sein. Ist der induktive Widerstand ωL größer als der Kapazitätswiderstand $\frac{1}{\omega C}$, so ist φ positiv, d. h. der Strom eilt der Klemmenspannung nach. Im umgekehrten Falle ist φ negativ, d. h. der Strom eilt der Klemmenspannung voraus, weil der Einfluß der Kapazität überwiegt.

Daß bei Hintereinanderschaltung von Selbstinduktion und Kapazität der Querwiderstand $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ an Stelle von ωL tritt, gilt ganz allgemein. Man erhält also alle Formeln, die bei Anwesenheit eines Kondensators gelten, wenn man in den Formeln der Kapitel 133—143 diesen Ersatz vornimmt.

Für Gl. 208 kann man auch schreiben

$$K^2 = (wJ)^2 + \left(\omega LJ - \frac{J}{\omega C}\right)^2.$$

Hier ist $wJ = E_w$ der Ohmsche Spannungsabfall, $\omega LJ = E_s$ die EMK der Selbstinduktion oder Induktionsspannung (§ 132) und $\frac{J}{\omega C} = E_c$ die Kapazitätsspannung (Gl. 200), so daß

$$K^2 = (wJ)^2 + (E_s - E_c)^2 \dots \dots \dots (210)$$

die Resultierende aus den drei genannten Spannungen ist. Abb. 285 zeigt das graphisch. In wagerechter Richtung ist der Spannungsabfall wJ aufgetragen. Da die induktive Spannung E_s dem Strom um 90° in der Phase nacheilt, so ist sie in der Richtung OB auf-

getragen. Da die Kapazitätsspannung E_c dem Strom um 90° voreilt, so ist sie in der entgegengesetzten Richtung gleich OG aufgetragen. Aus diesen drei Spannungen ist nun die Resultierende zu bilden. Aus wJ und E_s ist zunächst die Resultierende OH gebildet; das ist die Spannung zwischen den Klemmen AD der Drosselspule (Abb. 284). Aus dieser und der dritten Komponente ergibt sich die Resultierende K mit einer Phasenverschiebung φ gegen den Strom J . Man kann natürlich auch so verfahren, daß man erst $E_s - E_c$ herstellt, und dann mit E_w die Resultierende bildet.

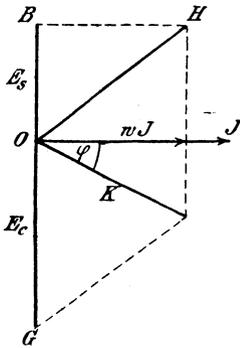


Abb. 285.

Entsprechend dem Querwiderstand bezeichnet man $(E_s - E_c)$ als Querspannung.

174. Stromresonanz.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo Induktions- und Kapazitätswiderstand einander gleich sind, also der Querwiderstand Null ist:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \dots \dots \dots (211)$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{K}{\omega} \\ \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (212)$$

Die Stromstärke ist also in diesem Falle so groß, als ob weder Selbstinduktion noch Kapazität, sondern bloß Widerstand vorhanden wäre, und es besteht keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

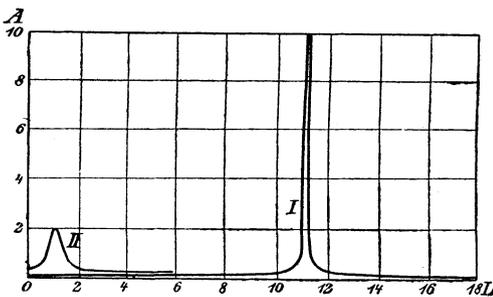


Abb. 286.

Stellt man den Verlauf der Stromstärke durch eine Schaulinie dar, wenn eine der Größen L, C oder $\omega = 2\pi\nu$ von Null an wächst, so sieht man, daß der Anstieg zu dem Maximum $J = \frac{K}{\omega}$ ziemlich

rasch erfolgt. Bei weiterem Wachsen nimmt J ebenso plötzlich wieder ab. Abb. 286 zeigt diesen Verlauf der Stromstärke bei wachsender Selbstinduktion; und zwar gilt die Kurve I für $K = 100$ Volt, $w = 10$ Ohm, $C = 0,000001$ Farad und $\nu = 48$ ($\omega = 300$).

Das plötzliche Ansteigen des Stromes bei einem bestimmten Werte von L , und das sofortige Abfallen nach Überschreitung dieses Wertes gleicht der Erscheinung der Resonanz in der Akustik; man nennt es daher elektrische Stromresonanz. Der Wert von L , bei dem sie eintritt, ergibt sich aus der obigen Bedingungsgleichung (211), nämlich:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{300^2 \cdot 0,000\,001} = 11,1 \text{ Henry.}$$

Dabei ist die Stromstärke $J = \frac{K}{w} = 10$ Ampere.

Die Kurve *II* in Abb. 286 gilt für dieselbe Spannung und Frequenz, aber für $w = 50$ und $C = 0,000\,01$ Farad. Infolge des größeren Widerstandes ist das Resonanzmaximum kleiner und infolge der größeren Kapazität tritt es schon bei einem kleineren Wert der Selbstinduktion ein.

In Abb. 287 stellen die Kurven *I* und *II* den Verlauf des Phasenverschiebungswinkels φ für dieselben Zahlenbeispiele dar. Wie man sieht, ist φ anfangs sehr groß — nahezu 90° — und positiv. Dann fällt es sehr rasch auf Null beim Resonanzwert $L = 11,1$. Mit weiter wachsendem L steigt es ebenso rasch zu großen negativen Werten an.

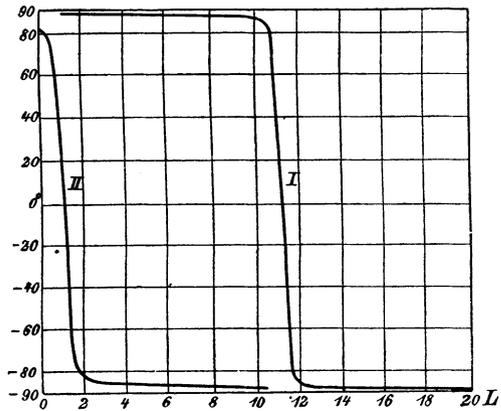


Abb. 287.

Dasselbe Verhalten zeigt sich zufolge der Gl. 211, wenn L konstant ist und C von Null an wächst, oder wenn L und C konstant sind, und die Periodenzahl ν bzw. ω von Null an wächst.

Die Bedingungsgleichung 211 kann man auch in der Form schreiben:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Sie besagt, welche Periodenzahl ein Wechselstrom haben muß, damit bei gegebener Selbstinduktion und Kapazität Resonanz eintritt.

Im Falle der Stromresonanz heben sich die beiden Spannungen E_s und E_c in Gl. 210 gegenseitig auf; jede für sich aber erreicht einen sehr hohen Wert, da J sehr groß ist. Für das obige Zahlenbeispiel ist die Induktionsspannung $E_s = \omega LJ = 300 \cdot 11,1 \cdot 10 = 33\,300$ Volt. Genau so groß ist die Kapazitätsspannung E_c . In

dem Diagramm Abb. 285 zeigt sich die Stromresonanz darin, daß $K = wJ$ und $\varphi = 0$ wird, wenn $E_s = E_c$ ist. Die Klemmenspannung zwischen den Punkten AD (Abb. 284), zwischen denen sowohl der Spannungsabfall wJ , als auch die Induktionsspannung E_s liegt, ist bei Resonanz gleich

$$\sqrt{(wJ)^2 + E_s^2} = \sqrt{100^2 + 33300^2} = 33301 \text{ Volt.}$$

Man erkennt daraus, wie gefährlich der Eintritt der Resonanz für die Isolation des Stromkreises und für das Dielektrikum des Kondensators sein kann, selbst wenn die zugeführte Klemmenspannung nur klein ist, wie in diesem Beispiel 100 Volt.

Das Charakteristische der Stromresonanz liegt in zwei Umständen. Die Stromstärke steigt auf einen hohen Wert an, und die Phasenverschiebung wird Null. Der physikalische Grund für beide Erscheinungen ist der, daß in diesem Falle die Induktions- und Kapazitätsspannung gleich groß sind und einander entgegenwirken, so daß sie sich gegenseitig aufheben.

Aus der Resonanzbedingung folgt auch

$$E_s = E_c = \omega L J = \frac{\omega L}{w} K = \frac{1}{w\omega C} K.$$

Ersetzt man in $E_s = \omega L J$ das ω durch die Resonanzbedingung, so ist

$$E_s = \frac{L}{\sqrt{LC}} J = J \sqrt{\frac{L}{C}} = E_c.$$

Über die Energieverhältnisse bei der Stromresonanz vgl. § 180.

175. Spannungsresonanz.

Die bei Resonanz des Stromes eintretenden Werte der Induktionsspannung E_s und der Kapazitätsspannung E_c sind aber nicht in allen Fällen die größten überhaupt vorkommenden. Diese und die Bedingungen, unter denen sie eintreten (Spannungsresonanzen), ergeben sich durch Aufsuchung des Maximums. Die Induktionsspannung ist

$$E_s = \omega L J = \frac{\omega L K}{\sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

und die Kapazitätsspannung

$$E_c = \frac{J}{\omega C} = \frac{K}{\omega C \sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Ist ω und C konstant, L veränderlich, so findet man die Be-

dingungen für das Maximum, indem man den Differentialquotienten nach L gleich Null setzt. Man findet so, daß E_s sein Maximum erreicht für $L = w^2 C + \frac{1}{\omega^2 C}$. Der Wert dieses Maximums ist

$$E_s = K \sqrt{1 + \frac{1}{w^2 \omega^2 C^2}}.$$

Da in dem Ausdruck für die Kapazitätsspannung E_c das L nur in einem Glied vorkommt, so sieht man ohne weiteres, daß ein Maximum für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, also unter gleicher Bedingung wie die Stromresonanz eintritt, und daß der Wert des Maximums $\frac{K}{w \omega C}$ ist, also identisch mit dem Werte bei Stromresonanz, weil $\frac{K}{w}$ die Stromstärke bei Stromresonanz ist.

Ist ω und L konstant, C veränderlich, so sieht man ohne weiteres, daß E_s ein Maximum hat bei $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, und daß der Wert dieses Maximums $\frac{\omega L K}{w}$ ist, also identisch mit dem Werte bei Stromresonanz. Das Maximum von E_c findet man durch Differentiation nach C . Es tritt ein für $C = \frac{L}{w^2 + (\omega L)^2}$ und sein Wert ist

$$E_c = \frac{K}{w} \sqrt{w^2 + (\omega L)^2} = K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{w}\right)^2}.$$

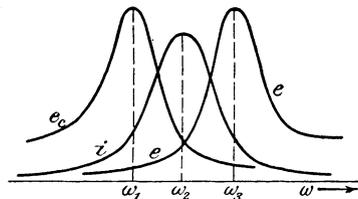
Ist L und C konstant, ω veränderlich, so ist die Maximumbedingung für E_s :

$$\omega^2 = \frac{2}{2LC - w^2 C^2}$$

und für E_c :

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{w^2}{2L^2}.$$

Abb. 288 zeigt den Eintritt der Stromresonanz und der Spannungsresonanzen, wenn ω veränderlich und die übrigen Größen konstant sind. Für w ist ein großer Wert angenommen worden, denn je kleiner w ist, desto näher rücken die Resonanzen aneinander. Für $w = 0$ treten alle drei bei derselben Bedingung $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein.



bei ω_1 : Resonanz der Kapazitätsspannung.
 „ ω_2 : „ des Stromes.
 „ ω_3 : „ der Induktionsspannung.

Abb. 288.

176. Stromverzweigung bei Selbstinduktion und Kapazität.

Wir betrachten den Fall, daß sich ein Strom in zwei Zweige teilt, von denen jeder Widerstand Selbstinduktion und Kapazität enthält (Abb. 289). Ist die Klemmenspannung zwischen den Verzweigungspunkten:

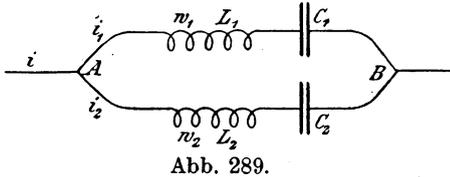


Abb. 289.

$$k = K \sin \omega t$$

und der gesamte Strom:

$$i = \Im \sin (\omega t - \varphi),$$

so sind die beiden Zweigströme von der Form:

$$i_1 = \Im_1 \sin (\omega t - \varphi_1), \quad i_2 = \Im_2 \sin (\omega t - \varphi_2).$$

Nach dem Ergebnis in § 173 erhält man sogleich die Ausdrücke für $J, J_1, J_2, \operatorname{tg} \varphi, \operatorname{tg} \varphi_1, \operatorname{tg} \varphi_2$ aus den entsprechenden Ausdrücken in § 141 und 142 bzw. 166, wenn man ωL_1 durch den Querwiderstand $(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1})$ und ωL_2 durch den Querwiderstand $(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})$ ersetzt.

Aus dem Ergebnis ist von Interesse die Tatsache, daß im Gegensatz zu einer Stromverzweigung ohne Kapazität (§ 141) der Gesamtstrom J größer oder kleiner sein kann, als die Summe der Zweigströme $J_1 + J_2$. Daraus folgt, daß auch $J = J_1 + J_2$ sein kann; das tritt ein, wenn $\frac{w_1}{w_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1}$ ist¹⁾.

Weitere Bedeutung hat nur der im folgenden behandelte Sonderfall, wo nur ein Zweig einen Kondensator enthält.

177. Ein Kondensator im Nebenschluß zu Widerstand und Selbstinduktion.

In der Stromverzweigung Abb. 290 seien die Zuleitungen zum Kondensator C frei von Widerstand und Selbstinduktion. Für den oberen Zweig ist

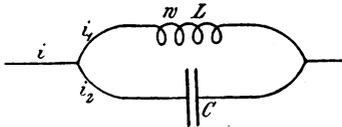


Abb. 290.

$$J_1 = \frac{K}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{w},$$

und für den anderen Zweig, wo der Widerstand null ist, nach § 172

$$J_2 = \omega CK, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \infty, \quad \varphi_2 = 90^\circ.$$

¹⁾ G. Ewreynow in einem Sonderdruck der Berg- und Hüttenhochschule Ekaterinoslaw.

Für den gesamten Strom J und seine Phasenverschiebung φ gegen die Klemmenspannung K ergeben sich aus Gl. 126 und 127, indem man statt ωL_2 den Wert $-\frac{1}{\omega C}$ einsetzt, folgende Ausdrücke

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2 + \omega^2 C^2 \left[w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}} \dots (213)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{w} \left[L - C(w^2 + \omega^2 L^2) \right] \dots (214)$$

Ist $L > C(w^2 + \omega^2 L^2)$, so ist φ positiv, d. h. der gesamte Strom eilt der Spannung nach. Im umgekehrten Falle ist φ negativ, d. h. der Strom eilt der Spannung voraus.

Abb. 291 zeigt die graphische Darstellung der Stromvektoren bei Nebeneinanderschaltung von Kapazität und Selbstinduktion. J_n ist die Wattkomponente und J_s die wattlose Komponente des Zweigstromes J_1 genau wie in Abb. 206. Dazu kommt jetzt noch der Zweigstrom J_2 . Da dieser reiner Kapazitätsstrom ist, so eilt er der Klemmenspannung, also auch der Wattkomponente um 90° vor. Die Resultierende aus J_1 und J_2 gibt nun den Gesamtstrom J , dessen Phasenverschiebung gegen die Klemmenspannung φ ist¹⁾. Man erkennt daraus, daß J ein Minimum und $\varphi = 0$ ist, wenn die beiden wattlosen Ströme J_s und J_2 gleich groß sind.

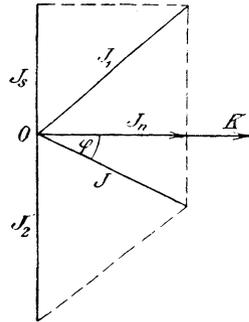


Abb. 291.

Die Zahlenwerte der Minimumsbedingung erhält man in bekannter Weise, wenn man den Ausdruck für J differenziert und gleich Null setzt.

Ist L und ω konstant, C veränderlich, so findet man, daß das Minimum eintritt für

$$C = \frac{L}{w^2 + (\omega L)^2} \dots (215)$$

Aus Gl. 214 erkennt man ohne weiteres, daß bei derselben Bedingung $\varphi = 0$ ist.

Den Wert des Minimums findet man, wenn man aus der letzten Bedingungs-gleichung den Wert von C in Gl. 213 einsetzt. Das gibt

$$J_{min} = \frac{wK}{w^2 + (\omega L)^2}$$

¹⁾ Aus dem Vergleich dieses Diagrammes mit dem in Abb. 285 erkennt man, daß hier die Zusammensetzung der Ströme so erfolgt, wie dort die Zusammensetzung der Spannungen; vgl. auch die Anmerkung auf S. 248.

Da $\varphi = 0$ ist, so ist $\cos \varphi = 1$ und die Leistung des Stromes ist $P = JK$. Es ist also im Gesamtstrom keine wattlose Komponente enthalten, obwohl in den Zweigströmen J_1 und J_2 eine solche enthalten ist. Man kann daher einen Apparat, der den Widerstand w und die Selbstinduktion L hat, ohne wattlosen Strom also mit dem kleinstmöglichen Strom betreiben, wenn man einen Kondensator parallel schaltet, dessen Kapazität die Gl. 215 erfüllt. Das wäre auch für die Starkstromtechnik sehr wichtig; aber eine allgemeine Anwendung scheidet daran, daß es bisher keine für große Stromstärken brauchbare Kondensatoren gibt.

Für ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} K &= 100 \text{ Volt} & w &= 10 \text{ Ohm} \\ \nu &= 48 \ (\omega = 300) & L &= 1 \text{ Henry} \end{aligned}$$

zeigt Abb. 292 den Verlauf des Gesamtstromes J und der Zweigströme J_1, J_2 , wenn die Kapazität von Null bis 40 Mikrofarad wächst. Das Minimum von J , wobei auch $\varphi = 0$ ist, liegt nach Gl. 215 bei

$$C = \frac{1}{10^2 + 300^2} = 0,0000111 \text{ Farad} = 11,1 \text{ Mikrofarad.}$$

Für dasselbe Zahlenbeispiel zeigt die Schaulinie I in Abb. 293 den Verlauf der Phasenverschiebung φ .

Da bei diesem, durch die Bedingungsgleichung 215 charakterisierten Fall der gesamte Strom J kleiner ist als jeder der beiden Zweigströme und die Phasenverschiebung φ Null ist, so spricht man auch hier zuweilen von Resonanz¹⁾.

Ist w verschwindend klein gegen ωL , so geht die Minimumbedingung (Gl. 215) über in $C = \frac{1}{\omega^2 L}$. Das Stromminimum ist dann $J_{\min} = 0$.

Von Interesse ist noch der Fall, wo der die Selbstinduktion enthaltende Zweigstrom ebenso groß ist wie der Gesamtstrom, d. h. wo das Verhältnis $J:J_1$ gleich 1 ist. Also:

$$\frac{J}{J_1} = \omega C \sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 1.$$

Diese Bedingungsgleichung ist erfüllt für

$$C = 0 \quad \text{und für} \quad C = \frac{2L}{w^2 + (\omega L)^2},$$

¹⁾ Nach der Bedeutung, die das Wort „Resonanz“ in der Physik hat, sollte man es niemals auf ein Minimum, sondern nur auf ein Maximum wie bei Hintereinanderschaltung (§ 174 und 175) anwenden. Häufig wird sogar dieses Minimum als „Stromresonanz“ und das Strommaximum (§ 175) als „Spannungsresonanz“ bezeichnet. Das ist ganz verfehlt, denn jener Fall ist eine Resonanz des Stromes, während die Spannungsmaxima im allgemeinen damit nicht verbunden sind, wie Abb. 288 zeigt.

also für den Fall, daß der Zweig mit der Kapazität gar nicht vorhanden ist oder für den Fall, daß die Kapazität doppelt so groß ist als für die Minimumsbedingung, wie man auch aus Abb. 292 erkennt.

Bei Hintereinanderschaltung von Kapazität und Selbstinduktion (§ 174) ist der Fall möglich, daß sich die Wirkung beider gegenseitig aufhebt, so daß die Stromstärke so ist, als wenn nur der Widerstand w vorhanden wäre; das fällt dort mit der Resonanz zusammen. Dieser Fall ist hinsichtlich des Gesamtstromes J auch bei Nebeneinanderschaltung möglich. Man findet die Bedingung dafür, wenn man den Ausdruck für J gleich $\frac{K}{w}$ setzt. Man erhält so

$$w^4 C^2 + \omega^2 w^2 C^2 L^2 - L^2 - 2w^2 LC = 0.$$

Für die Kapazität ergibt sich daraus die Bedingung

$$C = \frac{L}{w^2 + (\omega L)^2} \left(1 + \sqrt{2 + \frac{(\omega L)^2}{w^2}} \right).$$

Die Abb. 292 und die Kurve I in Abb. 293 stellen die Verhältnisse der Stromverzweigung für den Fall dar, daß ω , w und L konstant, aber C veränderlich ist.

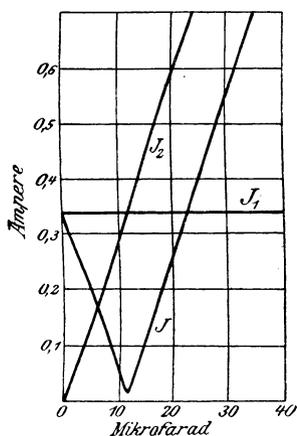


Abb. 292.

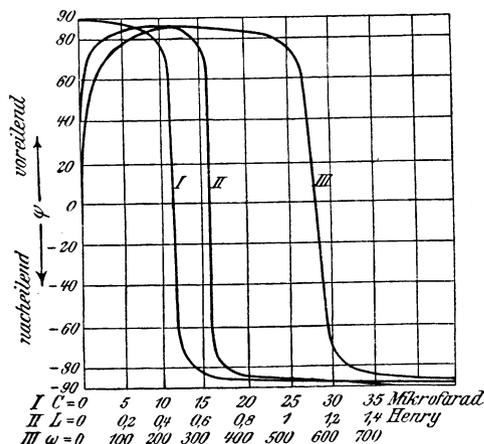


Abb. 293.

Wir betrachten nun den Fall, daß L veränderlich und die übrigen Größen konstant sind. Dann findet man ein Minimum des Gesamtstromes J aus Gl. 213 in bekannter Weise für

$$L = \frac{1}{2\omega^2 C} + \sqrt{\frac{1}{4\omega^4 C^2} + \frac{w^2}{\omega^2}}.$$

In Abb. 294 zeigt Kurve II den Verlauf von J für $K = 100$, $w = 10$, $\omega = 300$ und $C = 0,00001$ Farad. Das Minimum ist bei $A = 1,11$.

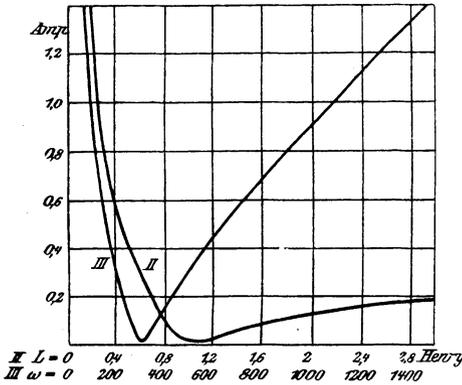


Abb. 294.

Während bei veränderlicher Kapazität ein Minimum oder Maximum für φ nicht existiert, findet man bei veränderlicher Selbstinduktion aus Gl. 214 ein

Maximum für φ bei $L = \frac{1}{2\omega^2 C}$, das ist in diesem Zahlenbeispiel bei $L = 0,555$.

Setzt man Gl. 214 gleich Null, so findet man, daß φ Null wird für

$$L = \frac{1}{2\omega^2 C} \pm \sqrt{\frac{1}{4\omega^4 C^2} - \frac{w^2}{\omega^2}}$$

also für zwei verschiedene Werte von L , wenn gleichzeitig die Bedingung $\frac{1}{2\omega C} > w$ erfüllt ist, da nur unter dieser Bedingung der Wurzelausdruck reell ist. In Abb. 293 zeigt Kurve II den Verlauf von φ für dasselbe Zahlenbeispiel. Die gegenseitige Vernichtung von Kapazität und Selbstinduktion ($J = \frac{K}{w}$) ergibt sich aus Gl. 213 für

$$L = \frac{w^2 C}{1 - \omega^2 w^2 C^2} \left(\pm \sqrt{2 - \omega^2 w^2 C^2} - 1 \right),$$

wenn gleichzeitig die Bedingung

$$2 > \omega^2 w^2 C^2$$

erfüllt ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist.

Wir betrachten schließlich noch den Fall, daß ω veränderlich ist, während die übrigen Größen konstant sind. Dann findet man ein Minimum des Gesamtstromes J aus Gl. 213 in bekannter Weise für

$$\omega = \frac{1}{L} \sqrt{-w^2 + \sqrt{\frac{L^2}{C^2} + 2w^2 \frac{L}{C}}}$$

wenn gleichzeitig die Bedingung $\frac{L^2}{C^2} + 2w^2 \frac{L}{C} > w^4$ erfüllt ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist. In Abb. 294 zeigt Kurve III den Verlauf von J für $K = 100$, $w = 10$, $L = 1$, $C = 0,00001$ Farad. Das Minimum ist bei $\omega = 316$, d. i. bei $\nu = 50,3$. Die Phasenverschiebung φ (Gl. 214) erreicht ein Maximum für

$$\omega = \sqrt{\frac{L - w^2 C}{3CL^2}},$$

und sie ist Null für $\omega = 0$ und für $\omega = \sqrt{\frac{L - w^2 C}{CL^2}}$, wenn gleichzeitig die Bedingung $L > w^2 C$ erfüllt ist, da nur dann der Wurzel Ausdruck reell ist. Die Kurve III in Abb. 293 stellt den Verlauf von φ dar. Das Maximum ist für dieses Zahlenbeispiel bei $\omega = 182,5$.

Die gegenseitige Vernichtung von Kapazität und Selbstinduktion ($J = \frac{K}{w}$) tritt ein für

$$\omega = \frac{1}{wLC} \sqrt{L^2 + 2w^2 LC - w^4 C^2},$$

wenn gleichzeitig $L^2 + 2w^2 LC > w^4 C^2$ ist, da nur dann der Wurzel Ausdruck reell ist.

Aus den vorstehenden Ergebnissen erhält man ohne weiteres die noch einfacheren Fälle; wenn nämlich in Zweig 1 entweder der Widerstand w oder die Selbstinduktion L verschwindend klein ist.

178. Mehrere Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung und in Reihenschaltung.

Befinden sich zwei (oder mehrere) Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung (Abb. 295) derart, daß Widerstand und Selbstinduktion der Verbindungsdrähte verschwindend klein sind, so ist in den vorhergehenden Gleichungen die Summe der Kapazitäten

$$C = C_1 + C_2$$

einzusetzen (§ 31).

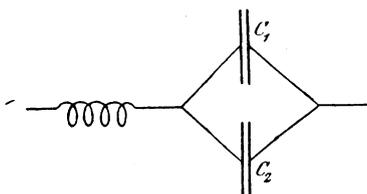


Abb. 295.

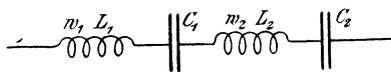


Abb. 296.

Befinden sich zwei (oder mehrere) Kondensatoren in Hintereinanderschaltung (Abb. 296), so ist die Spannungsgleichung dieses Stromkreises

$$\begin{aligned} k &= iw_1 + L_1 \frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C_1} \frac{di}{dt} + iw_2 + L_2 \frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C_2} \frac{di}{dt} \\ &= (w_1 + w_2) i + \left[(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right] \frac{di}{dt}, \end{aligned}$$

d. h. in einem solchen Stromkreis sind die Widerstände und die Selbstinduktionen für sich zu addieren und die gesamte Kapazität C ist bestimmt durch

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Diese letzte Beziehung kennen wir bereits aus § 31. Tatsächlich befinden sich ja auch hier die beiden Kondensatoren in **Kaskadenschaltung**.

Die gesamte effektive Klemmenspannung K ergibt sich natürlich auf gleiche Weise wie in § 140, wenn man bedenkt, daß nach § 173 der Kapazitätswiderstand $-\frac{1}{\omega C}$ zum Induktionswiderstand hinzukommt, bzw. an dessen Stelle tritt. Bei Hintereinanderschaltung mehrerer gleicher Kondensatoren ist die gesamte effektive Spannung gleich der Summe aller Kondensatorspannungen.

179. Ladungsarbeit eines Kondensators.

Multipliziert man die Spannungsgleichung eines Kondensators (Gl. 202) mit $i \cdot dt$, so erhält man die während der unendlich kleinen Zeit dt im Kondensator auftretende elektrische Arbeit dA . Also

$$dA = e_c i \cdot dt = \frac{i}{\omega^2 C} di$$

oder anders geschrieben

$$dA = \left(\frac{i^2}{2\omega^2 C} \right).$$

Mithin ist $\frac{i^2}{2\omega^2 C}$ der allgemeine Ausdruck für die elektrische Arbeit eines einfachen periodischen Stromes i in einem Kondensator von der Kapazität C .

Die gesamte elektrische Arbeit während einer halben Periode muß Null sein, ebenso wie die magnetische Arbeit (§ 167). Denn während der ersten Viertelperiode einer Stromwelle, also während der Zunahme des Stromes von Null bis zum Scheitelwert \mathfrak{I} ist die gesamte elektrische Arbeit gleich $\frac{\mathfrak{I}^2}{2\omega^2 C}$. Während der nächsten Viertelperiode, also während der Strom vom Scheitelwerte \mathfrak{I} bis Null sinkt, ist die elektrische Arbeit gleich $-\frac{\mathfrak{I}^2}{2\omega^2 C}$, also ebenso groß wie während der ersten Viertelperiode, aber negativ. Die gesamte elektrische Arbeit während einer halben Periode ist mithin Null.

Der obige aus der Spannungsgleichung erhaltene Ausdruck für die elektrische Arbeit eines einfachen periodischen Stromes, während er von Null bis zum Scheitelwert ansteigt, ist identisch mit dem in

§ 32 aus dem statischen Zustande eines Kondensators abgeleiteten Ausdruck für die Ladungsarbeit

$$A = \frac{\Omega^2}{2C} = \frac{C\mathfrak{E}_c^2}{2},$$

wenn Ω den Scheitelwert der Ladung und \mathfrak{E}_c die Kondensatorspannung bedeutet. Denn nach Gl. 200 ist $\mathfrak{S} = \omega C \mathfrak{E}_c$, und daher $\frac{\mathfrak{S}^2}{2\omega^2 C} = \frac{C\mathfrak{E}_c^2}{2}$. Die elektrische Arbeit der Stromquelle während des Stromanstieges von Null bis zum Scheitelwert ist also gleich jener Arbeit, die notwendig ist, um den Kondensator bis zur größten Ladung Ω zu laden, oder das Dielektrik bis zur Spannung \mathfrak{E}_c zu elektrisieren. Nimmt die Ladung vom Werte Ω bis Null ab, so verschwindet das elektrische Feld im Dielektrik, und die elektrische Arbeit wird wieder an die Stromquelle zurückgegeben.

Das Vorstehende gilt natürlich nicht nur für einen Kondensator, sondern auch für einen einzelnen Leiter, der eine eigene Kapazität hat (§ 21), also z. B. für eine an einen Wechselstromkreis angeschlossene leitende Kugel u. dgl. sowie für jeden Draht, der Wechselstrom führt.

Die elektrische Arbeit in einer Raumeinheit des den Leiter umgebenden Dielektriks ist (nach § 35) $A_{\text{einh}} = \vartheta \frac{\mathfrak{S}^2}{8\pi}$, wenn an der betreffenden Stelle die elektrisierende Kraft von Null bis \mathfrak{S} ansteigt.

180. Wärmearbeit, magnetische Arbeit, elektrische Arbeit.

Sind in einem Stromkreis Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität hintereinander geschaltet, so ergibt sich aus Gl. 207 die Arbeitsgleichung wiederum durch Multiplikation mit $i \cdot dt$.

Also

$$dA = ki \cdot dt = i^2 w \cdot dt + Li \cdot di - \frac{1}{\omega^2 C} i \cdot di.$$

Dabei stellt das erste Glied auf der rechten Seite die dem Ohmschen Widerstande entsprechende Wärmearbeit während der Zeit dt dar, das zweite Glied die magnetische Arbeit (§ 167), die nötig ist, um die mit dem Stromleiter verketteten magnetischen Kraftlinien zu erzeugen, und das dritte Glied die elektrische Arbeit, die nötig ist, um die elektrischen Kraftlinien im Kondensator zu erzeugen. Jede der beiden letzteren ist während einer halben Periode Null, wenn weder ein Verlust im magnetischen noch im dielektrischen Medium eintritt. Die gesamte Arbeit des Stromes während einer halben Periode besteht dann nur aus der Wärmearbeit und deren mechanischem und chemischem Äquivalent, wenn derartige Stromverbraucher vorhanden sind.

Aus der obigen Arbeitsgleichung ersieht man, daß die magnetische und elektrische Arbeit in jedem Augenblick einander entgegengesetzt sind. Das heißt, wenn bei zunehmendem Strom magnetische Arbeit von der Stromquelle geleistet wird, wird elektrische Arbeit aus dem Kondensator zurückgegeben und umgekehrt, wenn bei abnehmendem Strom magnetische Arbeit zurückgegeben wird, muß elektrische Arbeit zur Herstellung des elektrischen Feldes im Kondensator aufgewendet werden.

Für den Fall der Stromresonanz, also für

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

heben sich die beiden letzten Glieder der Arbeitsgleichung gegenseitig auf, und die gesamte Arbeit im ganzen Stromkreis besteht nicht bloß während einer halben Periode, sondern in jedem Augenblick nur aus Wärmearbeit $i^2 w dt$. In diesem Falle wird also der zur Herstellung des elektrischen Feldes notwendige Arbeitsaufwand von dem verschwindenden magnetischen Felde gedeckt und umgekehrt. Es findet ein fortwährendes Hin- und Herwogen des Arbeitsbetrages $\frac{C\mathfrak{E}_e}{2}$ oder $\frac{L\mathfrak{S}^2}{2}$ zwischen dem Kondensator und dem die Selbstinduktion enthaltenden Teil des Stromkreises statt.

Die Gleichheit dieser Arbeitsbeträge läßt sich aus der Resonanzbedingung ableiten, denn bei Stromresonanz (§ 174) ist:

$$\mathfrak{E}_c = \mathfrak{E}_s = \omega L \mathfrak{S} = \frac{1}{\omega C} \mathfrak{S},$$

quadriert man, so ist

$$\mathfrak{E}_c^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} \mathfrak{S}^2.$$

Setzt man nochmals die Resonanzbedingung $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ ein und dividiert die Gleichung durch 2, so ist

$$\frac{C\mathfrak{E}_c^2}{2} = \frac{L\mathfrak{S}^2}{2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt auch:

$$\mathfrak{E}_c = \mathfrak{E}_s = \mathfrak{S} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Tritt ein Arbeitsverbrauch durch magnetische Hysterese oder durch dielektrische Verluste ein, so vergrößert sich die in Wärme umgesetzte Arbeit um diesen Betrag, der natürlich von der Stromquelle gedeckt werden muß.

¹⁾ Dieser Gleichung (die schon auf S. 350 für die effektiven Werte gefunden wurde) wird fast überall allgemeine Bedeutung zugeschrieben, indem

181. Arbeitsverlust im Dielektrik.

Die beim Zunehmen des Stromes zur Herstellung des elektrischen Feldes aufgewendete Ladungsarbeit wird beim Abnehmen des Stromes nur dann vollständig an den Stromkreis zurückgegeben, wenn das Dielektrik ein vollkommenes ist, d. h. wenn kein Verlust in ihm stattfindet. Ein solcher Verlust tritt aber fast bei allen isolierenden Stoffen ein, und zwar aus folgenden vier Ursachen¹⁾:

1. Da kein Isolator einen unendlich großen Widerstand hat, so geht bei Anwendung dünner Schichten von sehr großem Querschnitt, wie es bei Kondensatoren der Fall ist, ein merklicher Strom hindurch, der im Dielektrik nach dem Jouleschen Gesetze Stromwärme erzeugt. Hier ist zu beachten, daß man bei höherer Spannung den Widerstand eines Isolierstoffes nicht danach beurteilen darf, wie er sich durch eine Messung mit niedriger Spannung darstellt. Die meisten Isolierstoffe zeigen bei hoher Spannung einen viel kleineren Widerstand als bei niedriger. Wird der Stoff warm, so wird der Widerstand noch erheblich kleiner. Solange aber die Leitfähigkeit als konstant gelten kann, ist dieser Verlust dem Quadrate der Spannung proportional.

2. Bei genügend hoher Spannung treten im Kondensator dunkle Entladungen oder sichtbare Büschelentladungen auf, ohne die Wirkung des Kondensators aufzuheben²⁾. Solche Entladungen treten besonders bei gasförmigen Dielektriken auf; aber auch bei flüssigen und festen, indem sie durch das Dielektrik hindurch (§ 251) oder um dasselbe herumgehen (Randentladungen). In jedem Falle bilden sie einen Nebenschluß zum Kondensator. Bei Entladungen kommt es auf den größten Wert der Spannung an. Bei Wechselstrom ist also dieser Verlust dem Scheitelwert der Spannung und der Anzahl der Perioden (Frequenz) proportional.

3. Jedes feste und flüssige Dielektrik zeigt mehr oder weniger Rückstandsbildung (§ 38), d. h. es dringt ein Teil der Ladung in den Stoff ein, wird hier eine Zeitlang festgehalten und verliert sich allmählich von selbst. Bei wechselnder Ladung durch Wechselstrom gleicht sich jeder Rückstand mit einem Teil des Rückstandes der nächsten Halbperiode aus, da dieser entgegengesetzte Ladung hat, wie der vorhergehende. Das bedeutet also einen Verlust von der in jeder Halbperiode zugeführten Elektrizitätsmenge, der sich als Wärme äußert. Daraus geht hervor, daß dieser Verlust der

behauptet wird, sie gebe an, welche Überspannung beim Unterbrechen eines Stromes § eintritt. Die obige Ableitung zeigt, daß sie nur bei Stromresonanz gilt. Vgl. auch § 195, wo dieselbe Gleichung bei der elektrischen Eigenschwingung auftritt-

¹⁾ Benischke, Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wiss. Bd. 702. IIa. S. 1346, 1893. Zeitschr. f. Elektrot., Wien 1895, Heft 16.

²⁾ Das tritt erst ein, wenn die Entladungen als Funken oder Lichtbögen einen völligen Stromübergang durch oder um das Dielektrik herstellen und dadurch den Kondensator kurzschließen.

Frequenz proportional ist. Da die Ladung von dem größten Werte der elektrisierenden Kraft abhängt, so ist dieser Verlust dem Scheitelwert der Spannung proportional.

4. Die Platten des Kondensators liegen manchmal nicht fest an dem Dielektrik an, so daß ein dem Zu- und Abnehmen der Ladung entsprechendes gegenseitiges Anziehen und Loslassen der Platten eintreten kann. Es sind dies jene Kondensatoren, die beim Wechselstrombetrieb brummen oder singen. Die dabei aufgewendete mechanische Arbeit ist ebenfalls ein Verlust, der sich in Wärme umsetzt. Er hat also seinen Grund nicht in der Beschaffenheit des Dielektriks, sondern in der Konstruktion, muß aber von der Stromquelle gedeckt werden, da die Anziehung auf der elektrischen Ladung beruht. Hieraus folgt, daß auch dieser Verlust der Frequenz und dem Scheitelwert der Spannung proportional ist.

Die genannten vier Verlustquellen lassen sich in den einzelnen Fällen nicht leicht trennen. Nach den Gesetzen, von denen sie abhängen, kann man aber sagen, daß bei festen Stoffen und kleinen elektrisierenden Kräften fast nur die Rückstandsbildung in Betracht kommt. Dann gilt mit ziemlicher Genauigkeit, daß der Verlust in einer Raumeinheit des gleichmäßig elektrisierten Stoffes (homogenes Feld) gleich $\gamma \nu \mathcal{E}^2$ ist, wenn γ eine experimentell zu bestimmende Materialkonstante, ν die Frequenz und \mathcal{E} den Scheitelwert der Spannung bedeutet. Verschiedene Messungen haben das bestätigt¹⁾. Ist aber die Elektrisierung so stark, daß merkliche Entladungen um oder durch das Dielektrik auftreten, so überwiegt diese Verlustquelle, und diese ist einer höheren als der 2. Potenz von \mathcal{E} proportional.

Das gilt insbesondere für flüssige Isolierstoffe bei großen elektrisierenden Kräften. Nach Messungen von Pungs²⁾ zeigen auch die in Transformatoren verwendeten besten Mineralöle Verluste, die von der Periodenzahl nahezu unabhängig sind und mit einer höheren als der zweiten Potenz der Spannung zunehmen. Daraus geht hervor, daß diese Verluste nicht nur auf Rückstandsbildung und Leitungsvermögen beruhen, sondern hauptsächlich aus den unter 2. erwähnten dunklen Entladungen bestehen, die durch den Stoff hindurchgehen und von den Versuchen mit Ölschaltern und Öltransformatoren her schon bekannt sind.

Je vollkommener das Dielektrik ist, desto kleiner sind die unter 1 bis 3 angegebenen Verluste. So sind sie z. B. bei reinem Glimmer und reinem Paraffin sehr klein. Dagegen sind sie bei paraffiniertem oder ähnlich behandeltem Papier, sowie bei dem durch Übereinander-

¹⁾ Steinmetz, ETZ 1892, S. 227. Apt und Mauritius, ETZ 1903, S. 879. Monasch, Dissertation 1906; ETZ 1907, S. 1200. Humann, Dissertation 1906; ETZ 1908, S. 435. Hier erscheint zwar überall der effektive Wert E^2 ; es ist aber kein Zweifel, daß es bei verschiedenen Wellenformen nicht auf den effektiven, sondern auf den Scheitelwert \mathcal{E}^2 ankommt.

²⁾ Archiv f. Elektrot., Bd. 1, S. 332, 1912.

kleben von Glimmerplättchen hergestellten Kunstglimmer (Mikanit) verhältnismäßig groß. Auch in den Hochspannungskabeln sind die dielektrischen Verluste nicht unbedeutend. Selbst bei guten Kabeln betragen sie (bei Betriebsspannung) 2 bis 4% der Voltampere, so daß der Leistungsfaktor nicht Null (wie bei einem verlustlosen Kondensator), sondern 0,02 bis 0,04 ist.

Alle dielektrischen Verluste machen sich als Vergrößerung des dem Kondensator zufließenden Stromes bemerkbar. Sie können deshalb durch einen dem vollkommenen Dielektrik nebengeschalteten, induktionslosen Widerstand w_n (Verlustwiderstand) dargestellt werden. Der diesem Widerstand entsprechende Wattstrom muß vom Ladestrom des Kondensators ebenso unterschieden werden, wie bei einer Drosselspule der dem Eisenverlust entsprechende Wattstrom vom Magnetisierungsstrom (§ 158).

Bei Wechselstrom besteht die Elektrisierung eines Dielektriks aus einem elektrischen Kreisprozeß in jeder Periode. Trägt man die elektrisierenden Kräfte als Abszissen, die Ladung als Ordinaten auf, so erhält man eine Schleife, wie in Abb. 297. Das hat vielfach zu der Annahme verleitet, daß es eine elektrische Hysterese wie die magnetische Hysterese gibt. Das ist nicht der Fall; denn diese Schleife, sowie auch alle anderen Vorgänge im Dielektrik erklären sich restlos aus der Rückstandsbildung und den anderen Verlusten¹⁾. Die elektrische Verlustschleife in Abb. 297 zeigt auch einen wesentlichen Unterschied gegenüber der magnetischen Hystereseschleife, deren Eigentümlichkeit darin besteht, daß sie scharfe Spitzen hat, weil beim Magnetismus die Scheitelwerte der magnetisierenden Kraft und der erzeugten Kraftlinien gleichzeitig eintreten (abgesehen von der sehr kleinen magnetischen Verzögerung, die sich in der Hystereseschleife gar nicht bemerkbar macht). Die elektrische Schleife hat dagegen abgerundete Enden, weil die Rückstandsbildung eine Verschiebung der Scheitelwerte der elektrisierenden Kraft und der Ladung um den Betrag ab verursacht (vgl. § 94 und die Anmerk. auf S. 293).

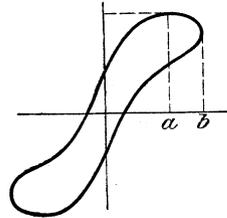


Abb. 297.

182. Wirkungsweise eines unvollkommenen Kondensators.

In § 172—178 wurden reine, d. h. verlustlose Kondensatoren vorausgesetzt. Treten die im vorhergehenden besprochenen Verluste auf, die einen dem wattlosen Ladestrom parallelgeschalteten Wattstrom hervorrufen, so ergibt sich eine veränderte Wirkungsweise, die zuerst vom Verfasser untersucht wurde²⁾.

¹⁾ Benischke, Sitzungsber. d. Wien. Akad. d. Wiss. Bd. 102, IIa, 1893. Zeitschr. f. Elektr. Heft 16, 1895. Schweidler, Ann. d. Phys., Bd. 24, 1907.

²⁾ ETZ, 1907, S. 693.

Nach Vorstehendem ergibt sich für einen unvollkommenen Kondensator das Schema Abb. 298, wo w_n den Verlustwiderstand und C die reine (verlustlose) Kapazität bedeutet. Darauf können die in § 142 entwickelten Gleichungen für eine Stromverzweigung angewendet werden, wenn man:

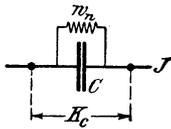


Abb. 298.

$$w_1 = w_n, \quad L_1 = 0,$$

$$w_2 = 0, \quad \omega L_2 = -\frac{1}{\omega C} \text{ (nach S. 344) setzt.}$$

Mithin ist:

$$A = \frac{1}{w_n}, \quad B = -C.$$

$$R = \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2}, \quad O = -\frac{w_n^2 C}{1 + (w_n \omega C)^2}.$$

Daher ist der dem unvollkommenen Kondensator zuffießende Strom:

$$J = \frac{K_c}{\sqrt{R^2 + (\omega O)^2}} = \frac{K_c}{\sqrt{\left[\frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2}\right]^2 + \left[\frac{w_n^2 \omega C}{1 + (w_n \omega C)^2}\right]^2}}$$

$$= \frac{K_c}{w_n} \sqrt{1 + (w_n \omega C)^2} \dots \dots \dots (216)$$

Demnach kann man den Ausdruck

$$\frac{w_n}{\sqrt{1 + (w_n \omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{w_n^2} + (\omega C)^2}}$$

als äquivalenten Kapazitätswiderstand des unvollkommenen Kondensators betrachten. Für $w_n = \infty$ geht er in den reinen Kapazitätswiderstand $\frac{1}{\omega C}$ über.

Die Phasenverschiebung des Stromes gegen die Spannung K_c ist bestimmt durch:

$$\text{tg } \varphi_c = \frac{\omega O}{R} = -w_n \omega C$$

oder

$$\cos \varphi_c = \frac{1}{\sqrt{1 + (w_n \omega C)^2}} \dots \dots \dots (217)$$

Der Phasenverschiebungswinkel ist also hier nicht gleich 90° (der Leistungsfaktor $\cos \varphi_c$ nicht gleich Null) wie beim vollkommenen Kondensator. Und wie eine Drosselspule oder ein Induktionsmotor durch die Angabe des Leistungsfaktors charakterisiert wird, so kann

das auch bei einem unvollkommenen Kondensator geschehen¹⁾. Ist V die vom Kondensator aufgenommene Leistung (Verlust), so ist der Leistungsfaktor (§ 134):

$$\cos \varphi_c = \frac{V}{K_c J} \dots \dots \dots (218)$$

Quadriert man die Gleichung 216, so ist:

$$K_c^2 = (RJ)^2 + (\omega OJ)^2 \\ = \left[\frac{w_n}{(1 + w_n \omega C)^2} J \right]^2 + \left[\frac{w_n^2 \omega C}{1 + (w_n \omega C)^2} J \right]^2.$$

Die Klemmenspannung eines unvollkommenen Kondensators ist also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes (Abb. 299), dessen wagrechte, dem Verluste V entsprechende Kathete (Verlustspannung) E_v dargestellt ist durch:

$$E_v = \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2} J = K_c \cos \varphi_c \dots \dots (I)$$

und dessen andere Kathete (Querspannung) E_q dargestellt ist durch:

$$E_q = \frac{w_n^2 \omega C}{1 + (w_n \omega C)^2} J = K_c \sin \varphi_c \dots \dots (II)$$

Je größer w_n , d. h. je kleiner der Verlust ist, desto mehr nähert sich E_v dem Werte Null und E_q dem Werte $\frac{1}{\omega C} J$ wie bei einem reinen Kondensator.

Multipliziert man die Verlustspannung E_v mit dem Strome J , so erhält man nach § 135 die elektrische Leistung, also in diesem Falle den Verlust V . Mithin ist:

$$V = J E_v = \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2} J^2 = w_n J^2 \cos^2 \varphi_c \dots (III)$$

Nun ist aber $J \cos \varphi_c$ nichts anders als die Wattkomponente des Stromes J ; bezeichnen wir sie mit J_v , so ist

$$J_v = J \cos \varphi_c = \sqrt{\frac{V}{w_n}} \dots \dots \dots (IV)$$

oder

$$V = w_n J_v^2 \dots \dots \dots (V)$$

Der Kondensatorverlust ergibt sich also nach dem Jouleschen Gesetze aus w_n und der Wattkomponente.

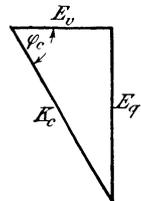


Abb. 299.

¹⁾ Geeigneter ist die Angabe des Verlustwiderstandes w_n , weil dieser von der Frequenz unabhängig ist.

Aus Gl. III und 218 folgt

$$w_n = \frac{K_c^2}{V} \dots \dots \dots \text{(VI)}$$

Hat man also Spannung und Wattverbrauch gemessen, so ergibt sich daraus der angenommene Nebenschlußwiderstand w_n .

Aus Gl. V und VI folgt

$$V = K_c J_v \dots \dots \dots \text{(VII)}$$

Aus Gl. VI und VII folgt

$$J_v = \frac{K_c}{w_n} \dots \dots \dots \text{(VIII)}$$

Die wattlose Komponente J_q rührt von der reinen Kapazität her. Daher ist (gemäß Gl. 201)

$$J_q = \omega C K_c \dots \dots \dots \text{(IX)}$$

Nach § 136 ist der Gesamtstrom $J = \sqrt{J_v^2 + J_q^2}$. Das führt zu demselben Ausdruck wie Gl. 216¹⁾.

Die obigen Gleichungen zeigen, daß w_n die geeignetste Größe ist, um die Unvollkommenheit (d. h. die Verluste) eines Kondensators zu charakterisieren, weil w_n unabhängig von der Frequenz ist. Wird von einem Kondensator w_n und C angegeben, so ist er vollständig bestimmt²⁾.

183. Ein unvollkommener Kondensator in Reihenschaltung.

Ist ein unvollkommener Kondensator und eine Drosselspule mit dem Widerstande w und der Selbstinduktion L hintereinandergeschaltet (Abb. 300), so ist die Stromstärke nach § 143

$$J = \frac{K}{\sqrt{(w + R)^2 + (\omega L + \omega O)^2}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{\left[w + \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2}\right]^2 + \left[\omega L - \frac{w_n^2 \omega C}{1 + (w_n \omega C)^2}\right]^2}}$$

¹⁾ Aus den Gleichungen V—IX erkennt man, wie die charakteristischen Größen w_n und C des unvollkommenen Kondensators ihre natürlichen Zahlenwerte beibehalten. Das ist nicht der Fall, wenn man den Verlust im Kondensator durch einen vorgeschalteten Widerstand ersetzt. Rein rechnermäßig geht das ja auch, weil man jeden Stromkreis mit voreilem Strome durch eine Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand ersetzen kann. Der so berechnete Vorschaltwiderstand erhält dann einen ganz unnatürlichen, vom wirklichen Verlustwiderstand des Kondensators weit abweichenden Wert. Auch der berechnete Ersatzkondensator hat einen anderen Wert.

²⁾ Das ist nicht der Fall, wenn man zur Charakterisierung der Unvollkommenheit den Phasenverschiebungswinkel φ_c oder den Winkel $\delta = 90 - \varphi_c$ benützt, wie vorgeschlagen wurde. Denn φ_c und δ sind von der Frequenz abhängig, so daß die Angabe von δ und C zur Charakterisierung eines unvollkommenen Kondensators nicht genügt.

und die Phasenverschiebung zwischen diesem Strom und der Gesamtspannung K :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L + \omega O}{w + R} = \frac{\omega L - \frac{w_n^2 \omega C}{1 + (w_n \omega C)^2}}{w + \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2}}$$

Quadriert man die vorletzte Gleichung, so erhält man:

$$K^2 = (E_w + E_v)^2 + (E_s - E_q)^2 \dots \dots (X)$$

Dabei ist:

$$E_w = wJ \text{ (Ohmscher Spannungsabfall in der Drosselspule)}$$

$$E_s = \omega LJ \text{ (Induktionsspannung in der Drosselspule),}$$

während E_v und E_q die durch Gl. I und II definierte Verlustspannung bzw. Querspannung bedeutet. Abb. 301 zeigt das Spannungsdiagramm dieser Schaltung. K ist nach der letzten

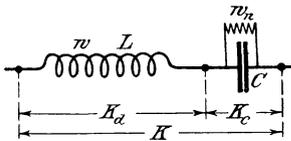


Abb. 300.

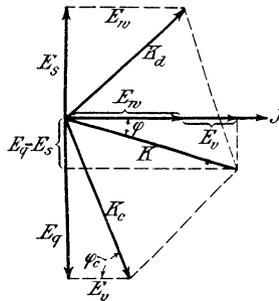


Abb. 301.

Gleichung die Hypotenuse zu den Katheten $(E_w + E_v)$ und $(E_q - E_s)$. Die Klemmenspannung K_d an der Drosselspule ist die Hypotenuse zu den Katheten E_w und E_s . Die Klemmenspannung K_c am Kondensator ist gemäß dem vorigen Paragraphen die Hypotenuse zu den Katheten E_v und E_q . Andererseits besteht K nach Abb. 210 aus K_d und K_c ; daher ist es in Abb. 301 auch die Diagonale des Parallelogrammes K_d, K_c . Man vergleiche damit Abb. 285 für dieselbe Schaltung mit einem verlustlosen Kondensator.

Da die Gleichung für J eine Differenz im Nenner enthält, ist zu erwarten, daß der Strom J ein Maximum hat. Ist L veränderlich, so sieht man ohne weiteres, daß der Strom das Maximum

$$J_{max} = \frac{K}{w + \frac{w_n}{1 + (w_n \omega C)^2}}$$

hat, und gleichzeitig $\varphi = 0$ wird, wenn

$$L = \frac{w_n^2 C}{1 + (w_n \omega C)^2} \dots \dots \dots (XI)$$

oder wenn

$$E_q = E_s = \omega LJ \text{ ist.}$$

Vergleicht man mit der Stromresonanz bei einem verlustlosen Kondensator, so erkennt man folgenden Einfluß des Verlustes im Kondensator: Das Resonanzmaximum wird verkleinert, und es tritt schon bei einem kleineren Werte von L ein. Zuzufolge der letzten Gleichungen ist dann $K = E_w + E_v$ und in Abb. 301 fällt K in die gleiche Richtung wie J . Die drei Klemmenspannungen K, K_a, K_c bilden aber immer noch ein schiefwinkliges Dreieck, während sie bei einem vollkommenen Kondensator ein rechtwinkliges bilden. Infolge der Resonanzbedingung geht Gl. (I) über in $E_v = \frac{L}{w_n C} J$. Mithin

$$K = E_w + E_v = \left(w + \frac{L}{w_n C} \right) J.$$

Die Spannung K_c an den Klemmen des Kondensators ist:

$$K_c = \sqrt{E_v^2 + E_q^2} = J \sqrt{\left(\frac{L}{w_n C} \right)^2 + (\omega L)^2} = J \sqrt{L \left(\frac{L}{w_n^2 C^2} + \omega^2 L \right)}.$$

Ersetzt man die L in der Klammer durch die Resonanzbedingung (XI), so findet man

$$K_c = J \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot ^1)$$

Ist $(w_n \omega C)^2$ so groß, daß 1 dagegen vernachlässigt werden kann, so geht die Resonanzbedingung über in $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, also wie bei einem vollkommenen Kondensator. Das Strommaximum wird.

$$J_{max} = \frac{K}{w + \frac{1}{w_n \omega^2 C^2}}.$$

Ist $(w_n \omega C)^2$ so klein, daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann, so geht die Resonanzbedingung über in $L = w_n^2 C$ und das Strommaximum wird

$$J = \frac{K}{w + w_n}.$$

Anders lauten die Resonanzbedingungen und die Strommaxima, wenn C oder ω veränderlich sind und die übrigen Größen konstant. Es ergeben sich dann verwickeltere Ausdrücke, die nichts Bemerkenswertes bieten.

Nehmen wir nun bei dem Zahlenbeispiel in § 173 ($K = 100$, $\omega = 300$, $w = 10$) einen Kondensator, der durch $w_n = 100\,000 = 10^5$ Ohm und $C = 10^{-6}$ Farad charakterisiert sei, so tritt Stromresonanz ein bei

¹⁾ Das ist derselbe Wert wie bei einem vollkommenen Kondensator. Die Kondensatorspannung wird also bei Resonanz durch den Verlust nicht verändert; nur ihre Phase wird verschoben.

$$L = \frac{10^{10} \cdot 10^{-8}}{1 + (300 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8})^2} = \frac{10000}{901} = 11,09 \text{ Henry.}$$

Dabei ist die Stromstärke

$$J = \frac{100}{10 + \frac{10^5}{901}} = \frac{100}{121} = 0,83 \text{ Amp.}$$

Dagegen erhielten wir in § 172 für die entsprechenden Werte bei einem vollkommenen Kondensator $L = 11,11$ Henry, $J = 10$ A. Man sieht daraus, daß durch den Verlust das Strommaximum bedeutend herabgesetzt, seine Lage hinsichtlich der Selbstinduktion aber wenig verändert wird. Bei $w_n = 10^8$ Ohm beträgt die Herabsetzung des Strommaximums noch 1%.

Bei höherer Frequenz übt selbst ein kleiner Verlust (großer Verlustwiderstand) einen bedeutenden Einfluß aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$K = 100 \quad w = 10 \quad \omega = 10^5 \\ C = 10^{-9} \quad w_n = 10^7$$

$$J = \frac{100}{10 + \frac{10^7}{1 + (10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9})^2}} = 5,$$

während für einen vollkommenen Kondensator $J = \frac{100}{10} = 10$ ist.

184. Ein unvollkommener Kondensator im Nebenschluß.

Ist ein unvollkommener Kondensator einer Drosselspule mit den Widerständen w , ωL parallel geschaltet, so ergibt sich das Schema Abb. 302. Der Zweigstrom J_2 ist gleich dem Strom J in Gl. 216. Den Gesamtstrom J findet man nach § 142, wenn man bedenkt, daß die Verbindungsleitungen zum Kondensator widerstandslos sind, so daß also drei Zweigströme, nämlich J_1 , J_2 , J_v parallel geschaltet sind.

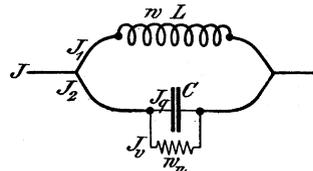


Abb. 302.

Daher ist

$$A = \frac{w_1}{w_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{w_2}{w_2^2 + (\omega L)^2} + \frac{w_3}{w_3^2 + (\omega L_3)^2},$$

$$B = \frac{L_1}{w_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{L_2}{w_2^2 + (\omega L)^2} + \frac{L_3}{w_3^2 + (\omega L_3)^2}.$$

Für diesen Fall ist nun:

$$w_1 = w, \quad L_1 = L, \\ w_2 = 0, \quad L_2 = -\frac{1}{\omega^2 C}, \\ w_3 = w_n, \quad L_3 = 0.$$

Dann ist nach Gl. 126:

$$J = K \sqrt{\left[\frac{w}{w^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{w_n} \right]^2 + \left[\frac{\omega L}{w^2 + (\omega L)^2} - \omega C \right]^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\omega L}{w^2 + (\omega L)^2} - \omega C}{\frac{w}{w^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{w_n}}$$

Da der Wurzelausdruck neben K eine Differenz enthält, so hat J ein Minimum.

Ist C veränderlich, während die übrigen Größen konstant sind, so tritt das Minimum ein für

$$C = \frac{L}{w^2 + (\omega L)^2},$$

also bei derselben Bedingung wie bei Parallelschaltung eines verlustlosen Kondensators (§ 177). Gleichzeitig wird auch $\varphi = 0$.

Abb. 303 zeigt das Stromdiagramm.

J_s ist die wattlose, J_w die Wattkomponente des Zweigstromes J_1 . Letztere liegt also in gleicher Richtung wie die Spannung K . Die wattlose Komponente des Zweigstromes J_2 ist laut Gl. IX: $J_q = \omega C K$. Die Wattkomponente von J_2 ist laut Gl. VIII:

$$J_v = \frac{K}{w_n}.$$

Sie liegt in gleicher Richtung wie K .
Mithin ist:

$$J = (J_w + J_v)^2 + (J_s - J_q)^2.$$

J ist aber auch die Resultierende aus J_1 und J_2 , also die Diagonale des von J_1 und J_2 gebildeten Parallelogramms.

Wenn $J_s = J_q$ ist, so haben wir Stromminimum und Phasenverschiebung $\varphi = 0$ wie oben. Dann fällt J in gleiche Richtung wie K , aber das von J_1, J_2 gebildete Dreieck ist immer noch ein schiefwinkliges¹⁾.

¹⁾ Vergleicht man Abb. 303 mit 301, so sieht man, daß J an Stelle von K steht. Es gilt also auch da, wie bei Hintereinander- und Parallelschaltung von Drosselspulen § 140, 141 und bei Hintereinander- und Parallelschaltung eines vollkommenen Kondensators § 173, 176, daß die entsprechenden Vektoren vertauscht sind.

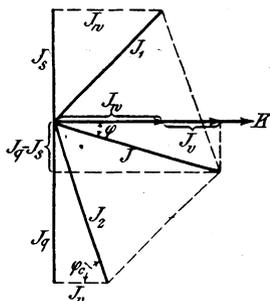


Abb. 303.

185. Der Einfluß eines Eisenkernes im Falle der Stromresonanz.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Selbstinduktion L , die dem Kondensator hinter- oder nebengeschaltet ist, konstant und rein ist, d. h. einer Drosselspule ohne sekundäre Verluste angehört. Entstehen aber in der Drosselspule Wirbelströme, deren Größe nicht verschwindend klein ist (sei es in der Wicklung selbst oder in metallischen Fassungsteilen oder in einem Eisenkern), so gelten für den Strom in der Spule dieselben Gesetze wie für den primären Strom eines Transformators, denn alle Wirbelströme sind sekundäre Ströme, und in energetischer Beziehung ist auch der Hystereseverlust dazuzurechnen; nur hinsichtlich des Einflusses auf die Wellenform macht sich dieser noch in besonderer Weise geltend (vgl. § 159, 219).

Dann tritt an Stelle der Abb. 284 (Reihenschaltung von reiner Kapazität und reiner Selbstinduktion) die Abb. 304, wobei w_2 und L_2 , die dem Wirbelstrom- und Hystereseverlust entsprechenden sekundären Widerstandsgrößen sind. Zur Gl. 207 kommt nun also noch das die gegenseitige Induktion darstellende Spannungsglied $M \frac{di_2}{dt}$ hinzu, wenn i_2 der den gesamten sekundären Verlusten entsprechende Strom ist. Dann lautet die Spannungsgleichung¹⁾

$$k = wi + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C} \right) \frac{di}{dt} + M \frac{di_2}{dt}.$$

Für den Strom i und seine Phasenverschiebung φ gelten also dieselben Gleichungen wie in § 152 für J_1 und φ_1 , wenn dort L_1 durch $L - \frac{1}{\omega^2 C}$ ersetzt wird. Mithin ist

$$J = \frac{K}{\sqrt{(w + \vartheta w_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \vartheta \omega L_2 \right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C} - \vartheta \omega L_2}{w + \vartheta w_2}$$

wobei wie dort $\vartheta = \frac{\kappa^2 \omega^2 L L_2}{w_2^2 + (\omega L_2)^2}$ ist²⁾.

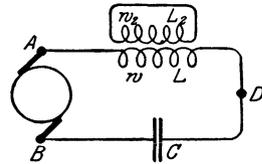


Abb. 304.

¹⁾ Benischke, Elektr. u. Maschinenb. Wien 1907 S. 633.
²⁾ Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man die Aufgabe auf folgende Weise in Angriff nimmt: ein Transformator und ein Kondensator sind

Ist C veränderlich, während die übrigen Größen konstant sind, so sieht man ohne weiteres (weil C nur an einer einzigen Stelle vorkommt), daß Resonanz eintritt, wenn

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L - \vartheta \omega L_2.$$

Der Wert des Strommaximums ist

$$J = \frac{K}{w + \vartheta w_2}.$$

Bei einer reinen Selbstinduktion ist die Resonanzbedingung

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L$$

und der Wert des Strommaximums

$$J = \frac{K}{w}.$$

Man ersieht daraus, daß durch die sekundären Verluste die Resonanz bei einem kleineren Kapazitätswiderstand also bei größerer Kapazität eintritt, und daß das Strommaximum kleiner ist. Auf beide Umstände ist der Einfluß der un reinen Selbstinduktion um so größer, je größer ϑ d. h. je größer die Periodenzahl, je stärker die magnetische Kupplung und je kleiner $w_2^2 + (\omega L_2)^2$, d. h. je größer die sekundären Verluste sind. Ist $w_2 = \infty$ oder $\omega L_2 = \infty$, d. h. sind keine solchen Verluste vorhanden, so gehen die obigen Gleichungen in die bei reiner Selbstinduktion über, wie nicht anders zu erwarten war. Das gleiche ist der Fall, wenn der Kupplungsfaktor $\kappa = 0$ ist.

Ist $w_2 = 0$ und $\kappa = 1$, d. h. erreichen die Wirbelströme ihren theoretisch größtmöglichen Wert (vollkommener sekundärer Kurzschluß), so geht die Resonanzbedingung über in $\frac{1}{\omega C} = \omega L - \omega L = 0$; die Resonanz tritt beim Kapazitätswiderstand null, also bei unendlich großer Kapazität ein, d. h. sie kommt überhaupt nicht zustande.

hintereinander geschaltet (Abb. 304). Ein Transformator kann als Drosselspule mit dem äquivalenten Widerstande ϱ und der äquivalenten Selbstinduktion λ betrachtet werden (§ 152). Mithin ist

$$J = \frac{K}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\omega \lambda - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \lambda - \frac{1}{\omega C}}{\varrho}.$$

Nach Einführung der Werte für ϱ und λ erhält man dasselbe Ergebnis wie oben.

Ist L oder ω veränderlich, so findet man die Resonanzbedingungen in bekannter Weise aus dem entsprechenden Differentialquotienten von J . Das führt aber zu unübersichtlichen Ausdrücken. Daß das Strommaximum auch in diesen Fällen kleiner sein muß als bei reiner Selbstinduktion, ist ohne weiteres klar, weil jeder Arbeitsverlust dämpfend wirkt. In welchem Sinne die Resonanzbedingung bei veränderlichem L verschoben wird, erkennt man sofort aus Gl. 179 für die äquivalente Selbstinduktion: $\lambda = L - \vartheta L_2$. Denn da λ kleiner ist als die reine Selbstinduktion L , so ist ein größerer Betrag nötig, um die zur Resonanz erforderliche Gleichheit des induktiven Widerstandes mit dem Kapazitätswiderstand herzustellen.

Ist in einem Stromkreise weder der Kondensator ein vollkommener, noch die Selbstinduktion eine reine, so erhält man die für diesen Fall gültigen Beziehungen, wenn man in § 183 w durch ϱ und L durch λ ersetzt. Für den Fall des unvollkommenen Kondensators hatte sich ergeben, daß das Strommaximum kleiner ist als bei vollkommenem Kondensator. Ist nun noch die Selbstinduktion eine unreine, so wirken beide Umstände vermindernd auf das Strommaximum. Bei veränderlicher Selbstinduktion hatte sich im Falle des unvollkommenen Kondensators ergeben, daß die Resonanz schon bei einem kleineren Werte eintritt. Da wir oben gesehen haben, daß bei unreiner Selbstinduktion die Resonanz erst bei einem größeren Werte eintritt, so können sich diese beiden Einflüsse gegenseitig aufheben.

Sehr verwickelt werden die Verhältnisse, wenn die Drosselspule einen geschlossenen oder nahezu geschlossenen Eisenkern hat, und das Maximum der magnetischen Durchlässigkeit überschritten wird.

Nach § 132 und 105 ist die Selbstinduktion $L = \frac{4\pi N^2}{w} = 4\pi N^2 \frac{\mu S}{l}$

der magnetischen Durchlässigkeit μ proportional. Da nun μ gemäß Abb. 123 ober- und unterhalb seines Maximums denselben Wert bei zwei verschiedenen Magnetisierungen hat, so gibt es zwei verschiedene Stromstärken in der Drosselspule, bei welchen L denselben Wert hat. Ändert sich die Stromstärke in Abhängigkeit von der Spannung allmählich und stetig, wie es der Fall ist, wenn der scheinbare Widerstand des Stromkreises nur aus Ohmschem und induktivem oder nur aus Ohmschem und Kapazitäts-Widerstand besteht, so gibt es zu jeder Spannung nur einen bestimmten Wert des Stromes. Enthält der Stromkreis aber Selbstinduktion und Kapazität, und kommt es zur Resonanz in der Weise, daß dabei das Maximum von μ überschritten wird, so kommen die beiden Stromstärken, zu welchen derselbe Wert von L gehört, je nach der vorausgegangenen Magnetisierung zur Geltung. So zeigt Abb. 305 den Verlauf des Stromes, wenn die Periodenzahl ν verändert wird¹⁾. Mit wachsendem ν steigt

¹⁾ Nach Messungen von Martienssen Physik. Zeitschr. 1910 Bd. 11, S. 448.

der Strom in der Richtung der Pfeile zu einem Resonanzmaximum an, von welchem er bei $\nu = 59$ plötzlich abfällt. Wird dann ν wieder verkleinert, so steigt der Strom nicht bei derselben Periodenzahl zu einem Maximum an sondern

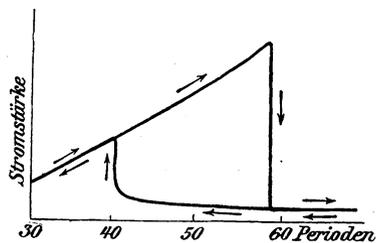


Abb. 305.

erst bei $\nu = 40$ und das Maximum hat eine andere Höhe als früher, weil die sekundären Verluste andere sind. Die Selbstinduktion hat eben zwei verschiedene Werte entsprechend der μ -Kurve je nach der vorher bestandenen Magnetisierungsstärke. Ähnlich ist der Verlauf des Stromes, wenn C bis zum Eintritt der Resonanz verändert wird.

Da L von der Stromstärke abhängt, so muß die Stromstärke selbst verschiedene Werte annehmen, wenn vor und nach Erreichung des Resonanzmaximums die Spannung denselben Wert hat. Abb. 306

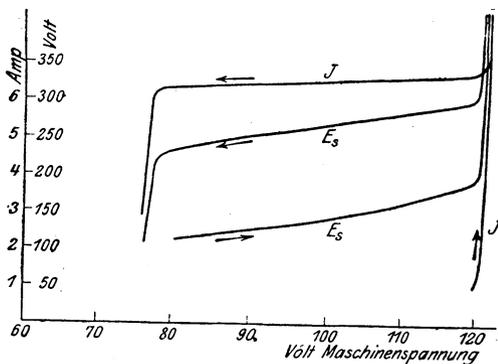


Abb. 306.

zeigt das¹⁾. Nach Einstellung der Kapazität auf Resonanz wurde die Maschinenspannung von 70 bis 121 V. gesteigert. Der Strom stieg dabei von sehr kleinen Werten zum Resonanzmaximum an. Wurde nun die Spannung wieder verkleinert, so war der Strom bis herab gegen 76 V. viel größer als vor Erreichung des Resonanzmaximums. In ähnlicher Weise ändert sich natürlich die

Spannung E_s an den Klemmen der Drosselspule.

Die Ableitung eines theoretischen Gesetzes, welches dieses Verhalten zu berechnen gestattet, ist unmöglich, weil der theoretische Zusammenhang zwischen μ und der Magnetisierungsstärke nicht bekannt ist. Dazu kommt noch die Veränderung der Wellenform des Stromes durch die Hysterese des Eisenkernes (§ 159, 219), sowie der Einfluß der dielektrischen Verluste im Kondensator (§ 182, 183).

¹⁾ Nach Messungen von Görge's ETZ 1918, S. 101.

186. Transformator mit Kapazitätsbelastung. Resonanztransformator¹⁾.

Wir betrachten den Fall, daß ein Kondensator in den sekundären Stromkreis eines Transformators eingeschaltet ist (Abb. 307), wobei Widerstand und Selbstinduktion der Verbindungsleitungen vernachlässigt werden können; also

$$\begin{aligned} w_{2a} &= 0, & L_{2a} &= 0, \\ \text{mithin} & & L_{2i} &= L_2. \end{aligned}$$

Diese Anordnung wird in der Funkentelegraphie an Stelle von Funkeninduktoren angewendet (Resonanztransformator) und gilt angenähert auch für den Fall, daß ein Transformator auf ein Kabel arbeitet²⁾. Es gelten dafür alle in § 152 abgeleiteten Beziehungen mit Berücksichtigung dessen, daß in den scheinbaren Widerständen statt ωL_{2a} der Kapazitätswiderstand

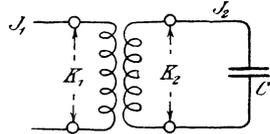


Abb. 307.

— $\frac{1}{\omega C}$ (§ 173) und infolgedessen statt ωL_2 der Ausdruck $\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}$ einzusetzen ist.

Dann gehen die Gleichungen 178, 179 über in

$$\rho = \frac{w_1(\omega^2 CL_2 - 1)^2 + \omega^2 C^2 w_2(w_1 w_2 + \kappa^2 \omega^2 L_1 L_2)}{\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 CL_2 - 1)^2} \quad (\text{I})$$

$$\lambda = L_1 \frac{(\omega^2 CL_2 - 1)[\omega^2 CL_2(1 - \kappa^2) - 1] + \omega^2 C^2 w_2^2}{\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 CL_2 - 1)^2} \quad (\text{II})$$

Diese Ausdrücke enthalten im Zähler und im Nenner Differenzen, so daß für J_1 ein Maximum und ein Minimum zu erwarten ist. Ihre Aufsuchung führt aber zu unlöslichen Gleichungen. Um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, vernachlässigen wir den Widerstand des sekundären Stromkreises. Das ist zulässig mit Ausnahme des besonderen Falles, wo sich die übrigen Widerstandsgrößen (ωL_2 und $\frac{1}{\omega C}$) gegenseitig aufheben, und der daher später besonders betrachtet wird.

¹⁾ Nach Benischke, ETZ 1907, S. 25.

²⁾ Allgemein ausgedrückt, handelt es sich hier um den Fall, daß ein zu Eigenschwingungen befähigter Stromkreis (der sekundäre) magnetisch gekoppelt ist mit einem Stromkreis (dem primären), welchem elektrische Schwingungen mit der Frequenz ν aufgezwungen werden.

Der Fall, daß beide Stromkreise Eigenschwingungen ausführen (Tesla-Transformator), wird in § 201 behandelt.

Zunächst setzen wir

$$w_2 = 0$$

und untersuchen zuerst die Phasenverschiebung φ_1 des primären Stromes

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega \lambda}{\rho} = \frac{\omega L_1 (\omega^2 CL_2 - 1) [\omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) - 1]}{w_1 (\omega^2 CL_2 - 1)^2}.$$

Der Nenner ist stets positiv, während der Zähler positiv und negativ sein kann. Der primäre Strom kann also nacheilen oder voreilen. Dafür ist lediglich der Zähler entscheidend. Dieser läßt sich durch Ausführung der Multiplikation auf folgende Form bringen, wobei der Faktor ωL_1 weggelassen ist, da er auf das Vorzeichen keinen Einfluß hat:

$$(\omega^2 CL_2 - 1) \omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) - (\omega^2 CL_2 - 1).$$

Ist dieser Ausdruck positiv, so ist φ_1 positiv, d. h. nach unseren Voraussetzungen in § 133 eilt der Strom nach; ist er negativ, so eilt der Strom voraus. Es handelt sich also darum, ob

$$(\omega^2 CL_2 - 1) \omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} (\omega^2 CL_2 - 1).$$

Da sind folgende 5 Fälle möglich:

1. Ist $\omega^2 CL_2 < 1$,
so ist φ_1 positiv, also der Strom nacheilend.
2. Ist $\omega^2 CL_2 = 1$,
so ist $\varphi_1 = 0$.
3. Ist $\omega^2 CL_2 > 1 > \omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2)$,
so ist φ_1 negativ, also der Strom voreilend¹⁾.
4. Ist $\omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) = 1$,
so ist $\varphi_1 = 0$.
5. Ist $\omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) > 1$,

so ist φ_1 positiv, also der Strom nacheilend.

Läßt man C von 0 bis ∞ wachsen, so zeigt Abb. 308 den Verlauf von φ_1 . Für $C=0$ (Leerlauf) ist $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$. Dann nimmt die Phasenverschiebung ab und wird gleich Null für

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_2} = Oa.$$

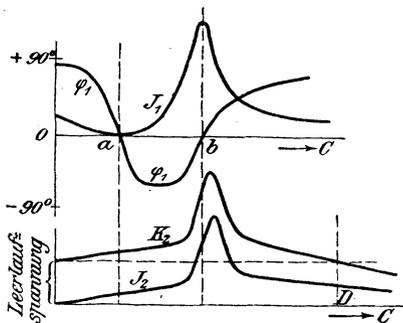


Abb. 308.

¹⁾ Man erinnere sich, daß κ nur zwischen 0 und 1 liegen kann (§ 150).

Von da an hat der Strom Voreilung bis zum Werte

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_2 (1 - \kappa^2)} = Ob,$$

wo φ_1 wieder Null wird, Für alle größeren Werte von C eilt der Strom wieder nach.

Die primäre Stromstärke ist $J_1^2 = \frac{K_1^2}{\rho^2 + (\omega \lambda)^2}$. Das gibt nach Einsetzung der Werte ρ und λ , und unter der Voraussetzung $w_2 = 0$:

$$J_1^2 = \frac{(\omega^2 CL_2 - 1)^2 K_1^2}{w_1^2 (\omega^2 CL_2 - 1)^2 + \omega^2 L_1^2 [\omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) - 1]^2} \quad \text{(III)}$$

Dieser Ausdruck ist ein Maximum, nämlich $J_1 = \frac{K_1}{w_1}$ für $\omega^2 CL_2 (1 - \kappa^2) = 1$ oder für

$$\omega^2 = \frac{1}{CL_2 (1 - \kappa^2)} \dots \dots \dots \quad \text{(IV)}$$

Würde der sekundäre Stromkreis für sich allein bestehen, so wäre seine Eigenschwingungszahl ν_e bestimmt durch

$$\omega_e^2 = (2\pi\nu_e)^2 = \frac{1}{CL_2} \quad (\S 195).$$

Das Strommaximum im primären Kreise hängt also von der Eigenschwingung im sekundären Kreise ab, wehalb man diesen Fall als Resonanz bezeichnet. Die Resonanzbedingung ist identisch mit der obigen Bedingung 4), bei welcher $\varphi_1 = 0$ ist. Das Strommaximum fällt also auf den Punkt b , jedoch nur unter der Voraussetzung, daß $w_2 = 0$ ist; sonst rückt das Maximum um so weiter vom Punkte b weg, je größer w_2 ist.

Aus Gleichung (III) ersieht man, daß J_1 gleich Null werden kann, und zwar für $\omega^2 CL_2 - 1 = 0$. Das ist dieselbe Bedingung, bei welcher φ_1 zum ersten Male Null wird¹⁾ (Punkt a in

Abb. 308). Für $C = 0$ (Leerlauf) ist $J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}}$.

Aus den obigen Bedingungsgleichungen erkennt man auch ohne weiteres den Einfluß der Streuung. Die Bedingung für das Nullwerden des Stromes und der Phasenverschiebung φ_1 (Punkt a) ist

¹⁾ Daß der primäre Strom theoretisch Null werden kann, erklärt sich physikalisch daraus, daß der sekundäre Stromkreis verlustlos vorausgesetzt wurde ($w_2 = 0$). Infolgedessen eilt der sekundäre Strom immer um 90° voraus. Da der sekundäre Strom auf den primären zurückwirkt, tritt auch hier eine voreilende Stromkomponente auf, welche der um 90° nacheilenden Komponente des Magnetisierungsstromes entgegenwirkt. Sind sie gleich groß, so heben sie sich gegenseitig auf und dann ist $J_1 = 0$. Ist aber w_2 nicht Null, oder sind dielektrische Verluste oder Eisenverluste vorhanden, so muß auch eine entsprechende Wattkomponente im primären Stromkreis auftreten. Praktisch ist es also unmöglich, daß der primäre Strom Null wird, wohl aber hat er ein Minimum, das jedoch nicht genau an die Bedingung $\omega^2 CL_2 - 1 = 0$ geknüpft ist, sondern um so weiter vom Punkte a wegrückt, je größer die Verluste sind.

unabhängig von der Streuung. Hingegen hat sie auf den Eintritt der Resonanz (Punkt b) großen Einfluß. Ist $\kappa = 0$, d. h. bestehen die beiden Stromkreise unabhängig voneinander, so wird die obige Bedingung 4) identisch mit 2), d. h. in Abb. 308 fällt b auf a . Je größer κ , d. h. je kleiner die Streuung ist, desto weiter weg rückt der Punkt b ; für $\kappa = 1$ (streuungsloser Transformator) rückt er in unendliche Entfernung. Je kleiner κ ist, desto mehr nähert sich die Resonanzbedingung dem Ausdruck für die Eigenschwingung des sekundären Stromkreises¹⁾.

Werden J_1 und φ_1 in Abhängigkeit von ω^2 dargestellt, so ergibt sich ein ähnlicher Verlauf wie in Abb. 308.

Von Wichtigkeit ist noch das Verhältnis der Klemmenspannungen, wofür wir auf S. 283 die Grundformel (184) erhalten haben. Um Übersicht zu gewinnen, setzen wir

$$w_{2a} = w_2 = 0 \quad \text{und} \quad w_1 = 0.$$

Da außerdem laut Voraussetzung $\omega L_{2a} = -\frac{1}{\omega C}$ ist, so geht die Grundformel nach Einsetzung der Gl. I und II über in

$$\frac{K_2}{K_1} = -\frac{1}{\omega^2 CL_2(1-\kappa^2)-1} \kappa \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

Bei Leerlauf ($C = \infty$) ist in Übereinstimmung mit § 154

$$\frac{K_{02}}{K_1} = \kappa \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

Mithin ist

$$K_2 = -\frac{1}{\omega^2 CL_2(1-\kappa^2)-1} K_{02}.$$

Die sekundäre Klemmenspannung bei Kondensatorbelastung ist also das $\frac{1}{\omega^2 CL_2(1-\kappa^2)-1}$ fache wie bei Leerlauf. Daraus folgt

für $\omega^2 CL(1-\kappa^2) = 0$,

ist sie gleich der Leerlaufspannung;

für $0 < \omega^2 CL_2(1-\kappa^2) < 2$,

ist sie größer als bei Leerlauf und bei

$\omega^2 CL_2(1-\kappa^2) = 1$ erreicht sie ein Maximum gleichzeitig mit den beiden Strömen und $\varphi_1 = 0$ (Punkt b in Abb. 308).

¹⁾ Dies ist ein für alle Schwingungen gekuppelter Systeme gültiger Satz. Auch der Transformator ist nichts anderes als zwei durch das gemeinsame magnetische Feld gekuppelte Systeme. Der streuungslose Transformator ($\kappa = 1$) entspricht dem Fall einer starren Kupplung; die Eigenschwingung ist nicht mehr möglich, daher liegt für diesen Fall der Punkt b in unendlicher Entfernung. Vgl. § 203.

für $\omega^2 CL_2(1 - \kappa^2) = 2$,
 ist sie ebenso groß wie bei Leerlauf;
 für $\omega^2 CL_2(1 - \kappa^2) > 2$,
 ist sie kleiner als bei Leerlauf.

Auch den Einfluß der Streuung erkennt man. Bei einem streuungslosen Transformator ($\kappa = 1$) ist die Spannung K_2 in allen Fällen gleich der Leerlaufspannung. Ohmscher Spannungsabfall ist nicht vorhanden, weil wir die Widerstände gleich Null gesetzt haben. Eine Erhöhung der Spannung bei Belastung kann also nur eintreten, wenn Kapazität vorhanden ist und Streuung besteht. Das eine ist ebenso notwendig wie das andere¹⁾.

Wir haben jetzt nicht nur w_2 , sondern auch w_1 gleich Null gesetzt und infolgedessen für J_2 und K_1 dieselbe Maximumbedingung erhalten wie für J_1 . Ist w_1 nicht Null, so fällt das Maximum von J_2 und K_2 nicht mit dem von J_1 zusammen.

Die Ohmschen Widerstände dürfen in jenem Falle nicht vernachlässigt werden, wo der induktive Widerstand und der Kapazitätswiderstand des sekundären Kreises sich gegenseitig aufheben, das heißt wo

$$\omega L_2 = \frac{1}{\omega C} \quad \text{oder} \quad \omega^2 CL_2 = 1.$$

Setzt man diesen Wert in die ursprünglichen Gleichungen (I, II) ein, so erhält man

$$J_1^2 = K_1^2 \frac{w_2^2}{(w_1 w_2 + \omega^2 \kappa^2 L_2 L_2)^2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 w_2}{(w_1 w_2 + \omega^2 \kappa^2 L_1 L_2)}$$

und aus Gl. 184

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 = \frac{\kappa^2 L_1 L_2}{C^2 [(w_1 w_2 + \omega^2 \kappa^2 L_1 L_2)^2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2]}.$$

Wie man sieht, ist in diesem Falle J_1 und φ_1 um so größer, je kleiner die Kupplung κ ist. Für K_2 hingegen, wo κ im Zähler und im Nenner vorkommt, findet man ein Maximum für

$$\kappa^4 = \frac{w_1^2 w_2^2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2}{\omega^4 L_1^2 L_2^2}.$$

Im vorstehenden haben wir angenommen, daß die Kapazität C in Form eines Kondensators außerhalb der Klemmen konzentriert ist, während die Wicklung selbst frei von Kapazität ist. Bei Transformatoren für sehr hohe sekundäre Spannung, wo also die

¹⁾ Wegen dieses Spannungsanstieges wird der Resonanztransformator zur Auslösung elektrischer Schwingungen in der Funkentelegraphie benützt (vgl. S. 440).

Windungszahl sehr groß ist, hat diese schon eine gewisse Kapazität, die über die ganze Wicklung gleichmäßig verteilt ist. Die strenge Behandlung dieses Falles ist sehr verwickelt. Näherungsweise kann man aber die oben erhaltenen Ergebnisse darauf anwenden. Zunächst folgt daraus, daß die sekundäre Wicklung selbst dann Strom enthält, wenn die Klemmen offen sind, d. h. bei Leerlauf. Es besteht nun also nicht nur ein primärer, sondern auch ein sekundärer Leerlaufstrom, der in der Mitte der Wicklung am stärksten, an den Enden aber Null ist, weil ja die Enden an den Klemmen isoliert sind. Es besteht also eine halbe stehende Stromwelle, die in der Mitte einen Bauch und an den Klemmen Knotenpunkte hat (vgl. Abb. 375). Die Kapazität der Wicklung kann man sich durch die Kapazität C_m eines äquivalenten Kondensators ersetzt denken, und dann kann man für den Leerlaufstrom in der Mitte J_{2m} Gleichung 201 anwenden, so daß $J_{2m} = \omega C_m E_2$ ist. Betrachtet man die Spannung zwischen irgend einem Punkte der sekundären Wicklung und ihrem Mittelpunkt, so ist dieser Wert für die isolierten Enden am größten, für die Mitte aber Null, so daß also die Spannung eine halbe stehende Welle bildet, die in der Mitte einen Knoten, an den beiden Enden aber Bäuche von entgegengesetzten Vorzeichen hat. Die Summe der beiden Bäuche ist gleich der Leerlaufspannung K_{02} .

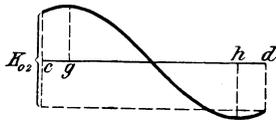


Abb. 309.

(Abb. 309). Das bedeutet, daß die größte Spannung nicht zwischen den Klemmen $c d$, sondern zwischen zwei anderen Punkten $g h$ der Wicklung liegt. In einem solchen Falle würde also selbst bei Leerlauf nicht mehr gelten, daß sich die primären und sekundären Klemmenspannungen wie die Windungszahlen verhalten¹⁾.

¹⁾ Näherungsweise mathematische Behandlung bei A. Dina. ETZ 1906, S. 191.

Zwölftes Kapitel.

Nichtstationäre Stromzustände.

187. Entstehen und Verschwinden eines Gleichstromes ohne Kapazität.

Wirkt in einem vorerst noch offenen Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion aber ohne Kapazität eine gleichgerichtete konstante EMK E , so erreicht die Stromstärke einige Zeit nach dem Schließen dieses Stromkreises den Wert

$$J = \frac{E}{w}$$

und behält diesen Wert so lange, als an dem Stromkreis keine Veränderung geschieht. Man sagt, der Strom hat seinen stationären Zustand erreicht. Alle bisherigen Untersuchungen haben sich nur auf den stationären Zustand bezogen¹⁾.

Vor dem Schließen des Stromkreises war die Stromstärke Null. Es entsteht nun die Frage, welchen Verlauf nimmt der Strom, bis zur Erreichung eines stationären Wertes J , und welchen Verlauf beim Öffnen des Stromkreises, bis er wieder auf Null gesunken ist.

Die experimentelle Untersuchung hat gezeigt, daß beim Schließen und Öffnen eines Stromkreises ein kurzdauernder Strom induziert wird (Extrastrom), der beim Schließen dem von der EMK E ausgehenden Strom entgegengerichtet ist, also sein Entstehen zu hindern sucht, und beim Öffnen gleiche Richtung hat, also das Verschwinden zu hindern sucht. Dies entspricht auch dem Lenzschen Gesetze (§ 125). Näheren Aufschluß gibt die mathematische Untersuchung.

Nach § 125 gilt die allgemeine Spannungsgleichung

$$E = wi + N \frac{d\delta}{dt},$$

¹⁾ Ein Wechselstrom ist stationär, wenn sein Scheitelwert dieselbe Größe beibehält. Ihn als „quasistationär“ zu bezeichnen, weil er im Gegensatz zu einem Gleichstrom veränderliche Augenblickswerte hat, ist eine überflüssige Vorsicht.

oder wenn die Selbstinduktion L des Stromkreises konstant ist

$$E = iw + L \frac{di}{dt}, \dots \dots \dots \text{(I)}$$

wobei i den veränderlichen Stromwert zwischen Null und J bedeutet.

Das letzte Glied ist die induzierte EMK, die den Extrastrom erzeugt, und die wir mit e_s bezeichnen wollen. Sie ist wie immer gleich der Änderung der Kraftlinienmenge Li , und besteht daher nur, wenn der Strom und dementsprechend sein magnetisches Feld sich ändert. Die Integration dieser Gleichung läßt sich ohne weiteres ausführen, wenn man sie in folgende Form bringt.

$$\frac{di}{E - iw} = \frac{dt}{L}.$$

Die Integration gibt

$$-\frac{1}{w} \lg \text{nat} (E - iw) = \frac{t}{L} + C,$$

wobei C die Integrationskonstante bedeutet. Da sie willkürlich ist, setzen wir sie gleich $\frac{1}{w} \lg \text{nat} D$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lg \text{nat} (E - iw) + \lg \text{nat} D &= -\frac{wt}{L} \\ \lg \text{nat} [(E - iw)D] &= -\frac{wt}{L}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(E - iw)D = \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Die Gleichung gilt für jeden Augenblick, gleichgültig ob der Strom zu- oder abnimmt.

Zur Bestimmung der Konstanten D muß unterschieden werden zwischen Entstehen und Verschwinden des Stromes.

A. Entstehen des Stromes.

Rechnen wir die Zeit t gerade von dem Augenblick an, wo der Stromkreis geschlossen wird, also der Strom noch nicht besteht, so ist für $t = 0$, $i = 0$. Für diesen Augenblick geht die letzte Gleichung über in

$$ED = 1,$$

also

$$D = \frac{1}{E}.$$

Dies eingesetzt gibt

$$i = \frac{E}{w} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \right) = \frac{E}{w} - \frac{E}{w} \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \dots \dots \text{(III)}$$

oder

$$i = J \left(1 - \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \right) = J - J \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \dots \dots \text{(IV)}$$

wobei $J = \frac{E}{w}$ die schließlich eintretende stationäre Stromstärke ist.

Der Strom besteht also aus zwei Teilen: einem dauernden J und einem schließlich (für $t = \infty$) nullwerdenden, also vorübergehenden, die einander entgegenwirken.

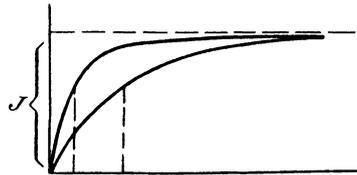


Abb. 310.

Abb. 310 zeigt den Verlauf des Stromes i in zwei Fällen vom Beginn des Stromschlusses an. Beide gelten für denselben Widerstand w ;

daher ist der endgültige Wert J derselbe. Die untere Kurve gilt aber für eine größere Selbstinduktion und steigt daher langsamer an als die obere.

Der Ausdruck $E \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ stellt die induzierte EMK e , und der Ausdruck $J \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ den entsprechenden Extrastrom i_s dar. Es ist also $i_s = \frac{e}{w}$ und $i = J - i_s$. Der Extrastrom und seine EMK werden erst für $t = \infty$ Null. Sie kommen aber dem Nullwert schon nach kurzer Zeit sehr nahe, und zwar um so rascher, je größer der Faktor $\frac{w}{L}$ ist. Man nennt daher diesen Faktor die Zeitkonstante.

Der Extrastrom fällt also um so rascher ab, je größer der Widerstand und je kleiner die Selbstinduktion ist. Ist $L = 0$ (induktionsloser Stromkreis), so steigt der Strom sofort von Null auf den Wert J .

Zur Zeit $t = \frac{L}{w}$ ist

$$i = J - \frac{1}{\varepsilon} J = J - 0,37 J = 0,63 J.$$

Zu dieser Zeit erreicht also der Strom etwa zwei Drittel seines endgültigen Wertes. Die gestrichelten Ordinaten in Abb. 310 stellen diesen Wert dar. Zur Zeit $t = 0$ hat die induzierte EMK und der Extrastrom den größten Wert, nämlich E bzw. J . Daher beginnt der Strom i beim Schließen des Stromkreises mit dem Werte Null.

B. Verschwinden des Stromes.

Um den ungestörten Verlauf des Stromes bei seinem Verschwinden feststellen zu können, müssen wir annehmen, daß der Widerstand des Stromkreises unverändert bleibt, d. h. daß das Verschwinden nicht dadurch erfolgt, daß der Stromkreis durch einen Ausschalter unterbrochen wird, sondern daß seine EMK plötzlich verschwindet¹⁾. Rechnen wir die Zeit t von diesem Augenblick an, so ist für $t=0$, $E=0$ und die Gl. II geht über in

$$-i w D = \varepsilon^{-\frac{w}{L} t}.$$

In demselben Augenblick ($t=0$) hat der Strom noch seinen vollen, stationären Wert nämlich $i = J$. Dies eingesetzt gibt $D = -\frac{1}{wJ}$, mithin

$$i = J \varepsilon^{-\frac{w}{L} t} = \frac{E}{w} \varepsilon^{-\frac{w}{L} t} = i_s \dots \dots \dots (V)$$

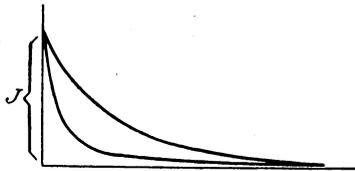


Abb. 311.

Das ist derselbe Extrastrom wie beim Schließen des Stromkreises, Abb. 311 zeigt seinen Verlauf in zwei Fällen mit gleichem Widerstand, aber verschiedener Selbstinduktion.

Die entsprechende EMK ist, wie man sieht:

$$e_s = E \varepsilon^{-\frac{w}{L} t} \dots \dots \dots (VI)$$

Beide sind gleich den entsprechenden Ausdrücken beim Schließen des Stromkreises und die Zeitkonstante ist hier ein Maß für die Raschheit des Verschwindens des Extrastromes; und weil dieser nach dem Aufhören der EMK mit dem im Stromkreis überhaupt noch vorhandenen Strom identisch ist, ein Maß für das Verschwinden des Stromes überhaupt.

Zur Zeit $t = \frac{L}{w}$ ist $i = 0,37 J$. Zu dieser Zeit ist also der Strom auf etwa ein Drittel seines ursprünglichen Wertes gesunken.

Aus dem vorhergehenden und dem Lenzschen Gesetze (§ 125) wissen wir, daß die Selbstinduktion jeder Veränderung des Stromes widerstrebt, indem sie beim Zunehmen des Stromes einen anderen Strom von entgegengesetzter Richtung induziert und beim Abnehmen einen von derselben Richtung. Sie sucht also ebenso wie die Trägheit oder das Beharrungsvermögen schwerer Körper den bestehenden

¹⁾ Das ist in der Praxis immer dann der Fall, wenn ein Kurzschluß zwischen zwei Leitungen von verschiedener Polarität eintritt.

Zustand aufrecht zu erhalten. Besonders auffallend ist dieser Vergleich beim Öffnen und Schließen eines Stromes. Beim Öffnen wird ein gleichgerichteter Strom (Öffnungsextrastrom) induziert, der für einen Augenblick so stark ist, daß er in Form eines Funkens die Luftstrecke durchschlägt; er sucht den Strom aufrecht zu erhalten. Beim Schließen eines Stromes wird ein Extrastrom von entgegengesetzter Richtung induziert, der sein plötzliches Anwachsen verhindert, ebenso wie ein schwerer Körper nur allmählich auf eine gewisse Geschwindigkeit gebracht werden kann.

Um ein Schwungrad in Drehung zu versetzen, ist eine gewisse Kraft und Zeit notwendig. Die Arbeit, die dabei zur Überwindung der Trägheit aufgewendet werden muß, entspricht beim Schließen eines Stromes jener Arbeit, die zur Herstellung des magnetischen Feldes aufgewendet werden muß. Ist eine konstante Geschwindigkeit erreicht, so bedarf es zu ihrer Aufrechterhaltung nur soviel Arbeit, als zur Überwindung des Reibungswiderstandes, beim Strome nur soviel, als zur Überwindung des Leitungswiderstandes notwendig ist. Hört die Bewegung des Rades auf, so gibt es dabei infolge seiner Trägheit soviel Arbeit ab, als beim Inbewegungsetzen aufgewendet wurde. Ebenso sucht das verschwindende magnetische Feld beim Öffnen des Stromes diesen aufrecht zu erhalten, und gibt dabei soviel Arbeit an den Stromkreis zurück, als beim Entstehen aufgewendet wurde¹⁾.

188. Entstehen und Verschwinden eines Stromes bei gegenseitiger Induktion.

Treffen die Kraftlinien eines entstehenden oder verschwindenden Stromes auf einen zweiten geschlossenen Stromkreis, so daß in diesem ein sekundärer Strom induziert wird, so erscheint ersterer als primärer Strom, und wir können, um einen Überblick in qualitativer Hinsicht zu gewinnen, darauf die Ergebnisse des § 152 anwenden. Demnach erscheint an Stelle des wahren Ohmschen Widerstandes w_1 der größere äquivalente Widerstand ρ und an Stelle der wahren Selbstinduktion L_1 die kleinere äquivalente Selbstinduktion λ . Da ersterer im Zähler, letztere im Nenner des negativen Potenzexponenten (der Zeitkonstante) von ε steht, so folgt daraus ein rascherer Verlauf des Extrastromes und der entsprechenden induzierten EMK,

¹⁾ Die Erzeugung eines periodischen Stromes entspricht dem Versuche, dem Rade eine pendelnde Bewegung zu geben. Dazu ist eine periodisch wechselnde Kraft notwendig. Ihr wirkt die Kraft des Pendels infolge seiner Trägheit entgegen. Diese ist am kleinsten bei der größten Ausweichung aus der Ruhelage und am größten, während es durch die Ruhelage geht; dieselbe Beziehung besteht zwischen der induzierten EMK und dem Strome. Ferner sieht man ein, daß die Geschwindigkeit des pendelnden Rades niemals so groß wird, als wenn der größte Wert der Kraft immer in derselben Richtung wirken würde. Die Trägheit scheint ebenso wie die Selbstinduktion den Widerstand zu vergrößern.

als wenn der sekundäre Stromkreis nicht vorhanden ist. Die stationäre Stromstärke $J = \frac{E}{w}$ bleibt unverändert, da sie sich auf jene Zeit bezieht, wo keine Änderung stattfindet.

Eine strenge Ableitung des Extrastromes bei Anwesenheit eines geschlossenen sekundären Stromkreises ergibt folgende Formeln¹⁾, wobei sich die Größen mit dem Index ₁ auf den in Betracht stehenden Stromkreis, die mit dem Index ₂ auf den sekundären Stromkreis beziehen und M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion bedeutet.

$$i_s = \frac{J}{2} \left[\left(1 + \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta} \right) \varepsilon^{\gamma t} + \left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta} \right) \varepsilon^{\gamma' t} \right] \quad (\text{VII})$$

Hierin bedeuten

$$\beta = \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 M^2}$$

$$\gamma = - \frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2 (L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\gamma' = - \frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2 (L_1 L_2 - M^2)}$$

Führt man die magnetische Streuung oder, was noch übersichtlicher ist, die magnetische Kupplung κ ein, die nach § 150 definiert ist durch

$$M^2 = \kappa^2 L_1 L_2,$$

$$\left. \begin{aligned} \text{so ist} \quad \beta &= \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 L_1 L_2 \kappa^2} \\ \gamma &= - \frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \kappa^2)} \\ \gamma' &= - \frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \kappa^2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (\text{VIII})$$

Der Einfluß, den die Stärke der magnetischen Kupplung und der sekundäre Widerstand auf i_s ausüben, läßt sich daraus nicht ohne weiteres übersehen. Wir betrachten daher diese Formeln zunächst hinsichtlich der Kupplung und dann hinsichtlich des sekundären Widerstandes.

Ist $\kappa = 0$, d. h. sind die beiden Stromkreise voneinander unabhängig, so ist

$$\beta = w_1 L_2 - w_2 L_1 \quad \gamma = - \frac{w_1}{L_1}$$

und die Gleichung VII geht über in Gl. V für einen einzelnen Stromkreis.

¹⁾ Benischke, „Elektrotechnik und Maschinenbau.“ Wien 1906, S. 923.

Ist $\kappa = 1$, d. h. ist die magnetische Kupplung eine vollständige (keine magnetische Streuung), so ist

$$\begin{aligned} \beta &= w_1 L_2 + w_2 L_1 \\ \gamma &= -\infty \\ i_s &= \frac{J}{2} \left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{w_1 L_2 + w_2 L_1} \right) \varepsilon^{\gamma' t} \dots \dots \dots \text{(IX)} \end{aligned}$$

Der stärkste Einfluß des sekundären Stromes ist dann vorhanden, wenn $w_2 = 0$. Dann ist $i_s = 0$. Der Strom erreicht also beim Schließen des Stromkreises sofort seinen endgültigen Wert J und wird beim Verschwinden der EMK sofort Null. Für alle zwischen diesen äußersten Fällen liegenden Werte der Kupplung ($1 > \kappa > 0$) erkennt man aus den Ausdrücken für γ und γ' , daß im Vergleich zu Gl. V eine verkleinerte Selbstinduktion steht, wie dies schon eingangs dieses Paragraphen aus den Ergebnissen des § 152 gefolgert wurde.

Betrachten wir den sekundären Widerstand, so ist für den Fall, daß $w_2 = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \beta &= w_1 L_2 \\ \gamma &= -\frac{w_1}{L_1(1-\kappa^2)}, \quad \gamma' = 0 \\ i_s &= J \varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\kappa^2)} t} \dots \dots \dots \text{(X)} \end{aligned}$$

Man erkennt daraus, daß der Extrastrom um so kleiner ist, je größer die magnetische Kupplung κ , d. h. je kleiner die Streuung ist. Für $\kappa = 1$ ist wie oben $i_s = 0$.

Der sekundäre Strom i_2 , der während des Verlaufes des Extrastromes im sekundären Stromkreis induziert wird, ist

$$i_2 = -w_1 J \kappa \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\beta} (\varepsilon^{\gamma' t} - \varepsilon^{\gamma t}) \dots \dots \dots \text{(XI)}$$

Dieser Ausdruck wird für $t = 0$ und $t = \infty$ Null. Dazwischen muß er also ein Maximum haben.

Für $w_2 = 0$ geht die letzte Gleichung über in

$$i_2 = -J \kappa \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left[\varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\kappa^2)} t} - 1 \right] \dots \dots \dots \text{(XII)}$$

189. Funkenbildung beim Unterbrechen eines Stromkreises. Überspannung.

Zur Aufstellung des Gesetzes, nach dem der Extrastrom beim Verschwinden eines Stromes verläuft, haben wir angenommen, daß die EMK plötzlich verschwindet, während der Widerstand unverändert bleibt. Das Unterbrechen eines Stromes geht aber in der Regel so vor sich, daß der Stromkreis mittels eines Ausschalters geöffnet wird,

während die EMK bestehen bleibt; d. h. in den Stromkreis wird zwischen den sich voneinander entfernenden Kontakten eine Luftstrecke eingeschaltet, deren Länge rasch zunimmt, und deren Widerstand dementsprechend sehr rasch von Null bis unendlich wächst.

Da nach § 187 beim Verschwinden des Stromes eine EMK e_s induziert wird, welche gleiche Richtung wie der verschwindende Strom und die EMK E der Stromquelle hat, so wirkt zwischen den außer Berührung kommenden Kontakten eine Spannung gleich $E + e_s$, die den Luftzwischenraum, solange er noch kurz ist, in Form eines Funkens zu überbrücken vermag. Der Funke verlöscht, wenn die Entfernung zwischen den Kontakten so groß geworden ist, daß ihr Widerstand von dieser Spannung nicht überwunden werden kann; damit ist auch der Strom Null geworden und seine Unterbrechung tatsächlich vollzogen¹⁾.

Die Unterbrechung eines Stromes J geht also so vor sich, daß zu dem Widerstande w des Stromkreises noch ein zweiter durch den Funken repräsentierter Widerstand w' hinzutritt. Dieser ist zwar nicht konstant, aber um rechnen zu können, nehmen wir an, daß er wenigstens für kurze Zeit konstant sei. Mithin sinkt der Strom vom Werte $J = \frac{E}{w}$ auf den Wert $J' = \frac{E}{w + w'}$. Die Abnahme des Stromes von dem Augenblick an, in dem der Widerstand w' plötzlich eingeschaltet wird, erfolgt nach dem Gesetz $i_s = J'' \varepsilon^{-\frac{w + w'}{L} t}$, wobei i_s und J'' die aus Abb. 312 ersichtliche Bedeutung haben. Der tatsächlich vorhandene Strom i in irgendeinem Augenblick ist demnach

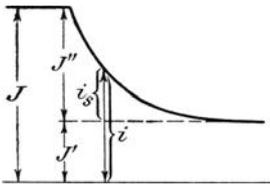


Abb. 312.

$$i = J' + i_s = J' + J'' \varepsilon^{-\frac{w + w'}{L} t}.$$

Nach § 132 ist die vom Strome i induzierte EMK:

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = (w + w') J'' \varepsilon^{-\frac{w + w'}{L} t}$$

und weil (nach Abb. 312)

$$J'' = J - J' = \frac{E}{w} - \frac{E}{w + w'},$$

so ist

$$e_s = E \left(\frac{w + w'}{w} - 1 \right) \varepsilon^{-\frac{w + w'}{L} t}.$$

¹⁾ Auch beim Schließen eines Stromkreises kann ein Funke zwischen den Kontakten des Schalters entstehen, wenn die Spannung so groß ist (etwa über 200 V.), daß sie den Luftzwischenraum zwischen den Kontakten, kurz bevor sie zur Berührung kommen, zu überbrücken vermag. Dieser Funke ist schwächer als ein Öffnungsfunke, weil die induzierte Spannung e_s der des Stromerzeugers entgegenwirkt (§ 187 A).

Die induzierte EMK addiert sich zur EMK der Stromquelle, so daß die gesamte Spannung (Überspannung) zu irgendeiner Zeit gleich ist:

$$E + e_s = E + E \left(\frac{w + w'}{w} - 1 \right) e^{-\frac{w + w'}{L} t} \quad \text{. . . (XIII)}$$

Zur Zeit $t = 0$, also in dem Augenblick, wo der Widerstand w' plötzlich eingeschaltet wird, hat diese Überspannung den Wert

$$E \frac{w + w'}{w} = J(w + w').$$

Sie ist also um so größer, je größer die ursprüngliche Stromstärke J , der Widerstand des Stromkreises w und der hinzutretende Ausschaltwiderstand w' ist. Wäre es möglich, einen unendlich großen Widerstand plötzlich einzuschalten, d. h. den Strom J plötzlich zu unterbrechen, so würde die Überspannung unendlich groß sein; sie würde aber nur unendlich kurze Zeit andauern, weil dann auch der Potenzexponent in Gl. XIII schon nach unendlich kurzer Zeit t unendlich groß wird. Auf den größtmöglichen Wert der Überspannung hat die Selbstinduktion L keinen Einfluß. Dagegen lehrt Gl. XIII, daß die Überspannung um so langsamer abnimmt, je größer L ist, denn dann muß die Zeit t um so größer sein, bis der Potenzexponent einen gewissen Wert erreicht.

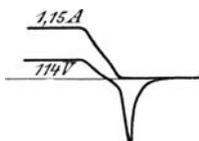


Abb. 313.

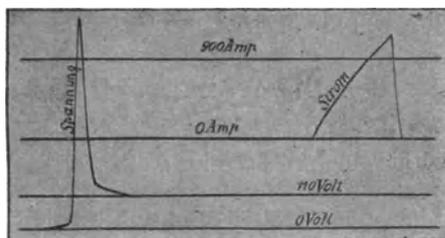


Abb. 314.

Das plötzliche Eintreten eines Ausschaltwiderstandes w' zwischen die Kontakte kann man aber nur dann annehmen, wenn beim Ausschalten kein Lichtbogen zwischen den Kontakten entsteht. Ein solcher tritt immer auf, wenn die EMK der Stromquelle einen gewissen vom Material der Kontakte abhängigen Wert übersteigt, und der Widerstand w des Stromkreises nicht zu groß ist. Bildet sich aber ein solcher Lichtbogen, so bedeutet dies die Einschaltung eines allmählich bis unendlich zunehmenden Widerstandes, so daß dadurch keine Überspannung entstehen kann, denn die obige Formel hat zur Voraussetzung, daß ein Widerstand w' plötzlich in den Stromkreis eintritt. Reißt der Lichtbogen nach genügender Ent-

fernung der Kontakte ab, so ist die Stromstärke J schon so klein geworden, daß auch die induzierte Spannung nur klein ist.

Abb. 313 zeigt die bei der Unterbrechung eines Stromes von 1,15 A. mittels eines gewöhnlichen Schalters auftretende Überspannung¹⁾. Abb. 314 zeigt die Überspannung, die eintritt, wenn eine Schmelzsicherung plötzlich durchschmilzt²⁾.

Ist ein sekundärer Stromkreis vorhanden, so ist die im primären Stromkreis induzierte EMK nach Gl. 149

$$e_s = - \left(L_1 \frac{di_s}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right).$$

Wir wollen die Ausrechnung nur für den Fall $w_2 = 0$, also mit den Gl. X und XII ausführen, da sie im allgemeinen Fall unübersichtlich wird. Setzt man $w_1 + w'$ statt w_1 ein, so erhält man schließlich

$$e_s = E \frac{w_1 + w'}{w_1} \varepsilon - \frac{w_1 + w'}{L(1 - \kappa^2)} t.$$

Der größtmögliche Wert $E \frac{w_1 + w'}{w_1}$ dieser EMK ist also theoretisch ebensogroß, wie wenn kein sekundärer Strom vorhanden ist; sie fällt aber um so schneller ab, je größer die magnetische Kupplung κ ist. Praktisch bewirkt der hier vernachlässigte Wert w_2 eine beträchtliche Verkleinerung. Für $\kappa = 1$, d. h. für vollständige magnetische Kupplung ist $e_s = 0$, welchen Wert auch w' haben mag.

190. Die Wärmearbeit des Unterbrecherfunken.

Der beim Unterbrechen eines Stromkreises auftretende Funken bewirkt eine Verbrennung der Kontakte, die namentlich bei den Kommutatoren der Maschinen möglichst vermieden werden soll. Es ist daher von großer Wichtigkeit, die Wärme des Funkens zu kennen.

Die Wärmearbeit des Extrastromes im Funken während der Zeit dt ist gleich $w' i_s^2 dt$.

Rechnen wir die Zeit t von dem Augenblick an, wo der Strom abzunehmen beginnt, so finden wir die ganze Arbeit A_f im Funkenwiderstand w' während des Verschwindens des Stromes, wenn wir von 0 bis ∞ integrieren, da nach unendlich langer Zeit der Strom jedenfalls Null geworden ist, selbst wenn sein Verschwinden noch so langsam vor sich geht. Es ist also

¹⁾ Nach Riefler und Paulus, ETZ 1910, S. 861.

²⁾ Nach Oelschläger, ETZ 1904, S. 764. Strom und Spannung sind hier verschoben, weil der Oszillograph nur eine Schleife hatte, so daß der Versuch zweimal gemacht wurde. Die mit 110 V. und 900 A. bezeichneten Linien geben den Maßstab an.

$$A_f = \int_0^{\infty} w' i_s^2 dt = \int_0^{\infty} w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L}t} dt = J^2 \frac{w' L}{2(w+w')}.$$

Hingegen ist die gesamte vom Extrastrom im Stromkreis und im Funken entwickelte Wärmearbeit

$$A_g = \int_0^{\infty} i_s^2 (w+w') dt = \int_0^{\infty} (w+w') J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L}t} dt = J^2 \frac{L}{2}.$$

Dieser Ausdruck ist (nach § 119) gleich der magnetischen Arbeit des Stromes J , also jener Arbeit, die beim Entstehen des Stromes von der Stromquelle aufgewendet werden mußte, um das magnetische Feld des Stromes herzustellen. Da beim Verschwinden des Stromes auch sein magnetisches Feld verschwindet, so setzt sich diese Arbeit in Wärme um. Deshalb kommt im letzten Ausdruck der Widerstand nicht vor. Ist w verschwindend klein gegen w' , so ist $A_f = A_g$, d. h. die gesamte Wärme des Extrastromes konzentriert sich im Funken.

Bei Gegenwart eines sekundären Stromkreises ergibt sich die Funkenwärme in gleicher Weise aus Gl. VII. Wir berechnen sie hier nur für den Fall $w_2 = 0$, also aus Gl. X und erhalten bei gleichzeitigem Ersatz von w_1 durch $w_1 + w'$

$$A = \int_0^{\infty} w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w_1+w')}{L(1-\kappa^2)}t} dt = J^2 \frac{w' L(1-\kappa^2)}{2(w_1+w')}.$$

Man sieht, die Funkenwärme wird gegenüber dem obigen Wert um so kleiner, je stärker die magnetische Kupplung ist. Für vollständige Kupplung ($\kappa = 1$) wird die Funkenwärme Null. Natürlich muß auch jetzt die gesamte magnetische Arbeit des Stromes J in Wärme umgesetzt werden. Aber nur der durch die letzte Formel angegebene Teil wird durch den Funken in Wärme umgesetzt, während der übrige Teil durch den Strom i_2 im sekundären Stromkreis in Wärme umgesetzt wird. Im äußersten Falle ($w_2 = 0$, $\kappa = 1$) wird die gesamte magnetische Arbeit, die bei der Stromunterbrechung frei wird, auf den sekundären Stromkreis übertragen und hier in Stromwärme umgesetzt.

Geht über den Funken außer dem Extrastrom auch noch ein Strom von der Stromquelle, so kommt zu den vorstehend berechneten Wärmearbeiten noch ein entsprechender Betrag hinzu. Aber auch dieser ist um so kleiner, je größer der Einfluß des sekundären Stromes ist, weil der Funken um so rascher verschwindet, und daher auch der Stromübergang um so kürzer dauert.

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so ergibt sich, daß beim Unterbrechen eines Stromkreises, der mit einem zweiten, geschlossenen Stromkreis magnetisch gekuppelt ist, der Extrastrom

und die von ihm erzeugte Überspannung um so schneller abfällt, und die Funkenwärme um so kleiner ist, je größer der sekundäre Strom und je stärker die magnetische Kupplung ist¹⁾.

Bildet die EMK der Stromquelle einen Lichtbogen zwischen den Kontakten, so gelten die vorstehenden Ableitungen natürlich nicht mehr, weil dann eben kein Funken, sondern ein Lichtbogen besteht.

Wie wir in § 158 gesehen haben, wirken die Verluste durch Wirbelströme und Hysterese in Stromkreisen mit Eisenkern (Drosselspulen) ebenso, als wenn ein sekundärer Stromkreis mit entsprechendem Widerstand vorhanden wäre. Es gilt daher auch für das Öffnen eines einzelnen Stromkreises mit Eisenkern, daß der Strom schneller Null wird, und die Wärme des Unterbrecherfunken kleiner ist, als in einer Spule ohne Eisenkern, aber gleicher Selbstinduktion. Das gilt jedoch nicht von massiven Eisenkernen, weil bei solchen eine elektrodynamische Schirmwirkung auftritt (vgl. § 192).

191. Kommutatorfunken und ihre Verminderung.

Im vorstehenden hat sich ergeben, daß die Funkenwärme und die daraus entstehende Verbrennung der Kontakte hauptsächlich von der Selbstinduktion abhängt, und zwar nicht von der reinen Selbstinduktion L des unterbrochenen Stromkreises, sondern von der durch einen sekundären Strom verminderten, wirksamen Selbstinduktion $L(1 - \kappa^2)$. Der Widerstand w (beziehungsweise w_1) hat keinen so großen Einfluß, weil er in der Summe $w + w'$ auftritt.

Die Vergrößerung von w hat man früher öfter angewendet, indem man die Verbindung zwischen Ankerspulen und Kommutatorsegmenten nicht aus Kupfer, sondern aus Messing oder gar Nickelin herstellte²⁾. Man darf aber w nicht zu sehr vergrößern, weil man dadurch auch den Wirkungsgrad vermindert und die Erwärmung des Ankers vergrößert. Viel weiter kommt man mit der Verminderung oder Vernichtung der wirksamen Selbstinduktion, und dazu gibt es zwei Mittel: erstens die Herstellung eines gegenwirkenden magnetischen Feldes, zweitens die im Vorhergehenden angegebene Wirkung eines sekundären Stromes (Verminderung der Selbstinduktion durch gegenseitige Induktion).

Das erste Mittel ergibt sich aus folgender Erwägung. Die Ankerspulen gehen nacheinander an den Bürsten vorbei, werden von diesen kurzgeschlossen und beim Abgleiten des Kommutatorsegmentes von der äußersten Bürstenkante wieder geöffnet. Der dabei ent-

¹⁾ Dieser Einfluß des sekundären Stromes auf die Verminderung der Funkenwärme zeigt sich deutlich bei Kommutatormotoren und bei Kommutatorzählern mit kurzgeschlossenen Stromkreisen. Entfernt oder öffnet man letztere, so werden die Kommutatoren durch die Funkenbildung viel stärker angegriffen (vgl. folg. §).

²⁾ Hierher gehört auch die Anwendung von Kohlen- statt Kupferbürsten.

stehende Öffnungsfunken ist es, der den Kommutator allmählich anfrißt und daher möglichst unterdrückt werden muß. Dazu ist in erster Linie erforderlich, daß sich die Ankerspulen, während sie an den Bürsten vorbeigehen, in einer Zone befinden, wo das magnetische Feld Null ist (neutrale Zone). Denn wo kein magnetisches Feld besteht, gibt es keine Selbstinduktion und daher auch keine Funkenbildung¹⁾. Diese Zone ist aber sehr schmal, erheblich schmaler als die Breite einer Ankerspule, so daß man durch richtige Stellung der Bürsten zwar ein Minimum, aber keine Beseitigung der Funkenbildung erreichen kann. Daher hat Menges Zwischenpole, sogenannte Wendepole, und Kompensationswicklungen eingeführt. Diese erzeugen mit demselben Strom, der durch den Anker fließt und das Ankerfeld erzeugt, ein Hilfsfeld, welches dem Ankerfeld mindestens an den Stellen entgegenwirkt, wo sich die kurzgeschlossenen Spulen befinden, so daß hier das wirklich vorhandene (resultierende) Feld im idealen Falle Null ist²⁾. Zur idealen Wirkung kann es aber nicht kommen, weil die Wendepole oder die Kompensationswicklungen durch den Luftspalt vom Anker getrennt sind, so daß eine verwickelte Form des Feldes entsteht. Daher gelingt es auch selten, neue Maschinentypen so zu entwerfen, daß man mit Sicherheit voraussagen könnte, es werde keine Funkenbildung auftreten. Es gelingt das nur bei solchen Maschinen, bei denen dieselben Verhältnisse eingehalten werden können, wie bei schon vorhandenen, funkenlosen Maschinen.³⁾

¹⁾ Die viel verbreitete Ansicht, daß die kleinste Funkenbildung nicht in der neutralen Zone eintrete, sondern daß die Bürsten ein Stück über die neutrale Zone hinaus in das magnetische Feld hinein verschoben werden müßten, damit dadurch eine „Wendespannung“ in den kurzgeschlossenen Ankerspulen induziert würde, ist physikalisch widersinnig. Wo die Funkenbildung am kleinsten ist, ist das Feld am schwächsten, und da ist die neutrale Zone. Diese einfache physikalische Tatsache hat Menges immer wieder verfechten müssen und sie scheint heute noch nicht überall erkannt worden zu sein. Menges, „Kommutierung, Kompensierung und Wendepole“, S. Gravenhage 1908; „ETZ“ 1907, S. 1058; „Elektrotechnik und Maschinenbau“, Wien, 1911 S. 529, 992; 1912 S. 299; 1015, S. 68, 990.

²⁾ D.R.P. 34465, 1884. Zwischen Wendepolen und Kompensationswicklungen besteht kein grundsätzlicher Unterschied, sondern nur ein Unterschied im Wirkungsbereich. Erstere erstrecken ihre Wirkung nur auf eine schmale Zone, während letztere über den größten Teil des Ankers wirken. Mit jenen erreicht man daher nur eine Verminderung der Funkenbildung, mit diesen auch noch eine Verminderung der Ankerrückwirkung, weil das Ankerfeld in einem breiten Raum ganz aufgehoben werden kann.

³⁾ Seit zwei Jahrzehnten sind verschiedene „Kommutierungstheorien“ aufgestellt worden, von denen jede unbedingt sicher sein sollte, bis neue Maschinentypen immer wieder bewiesen, daß keine eine sichere Vorausberechnung ermöglicht. In verschiedenen Auflagen der „Gleichstrommaschine“ von Arnold finden sich verschiedene Theorien, von denen jede richtig sein sollte! Man vergleiche ferner die vielen Artikel und ergebnislosen Erörterungen über die Kommutierungsberechnung in den Fachzeitschriften. Die Feldverteilung ist so verwickelt, und die Umstände, welche die Funkenbildung beeinflussen, sind so vielgestaltig, daß die Vorausberechnung ohne Grundlage einer ähnlichen „fun-

Auf das zweite Mittel und seine unbewußte Anwendung wurde vom Verfasser schon im Jahre 1903 hingewiesen¹⁾, und dann die in § 188 und 190 enthaltene Rechnung angestellt. Am stärksten ist dieses Mittel wirksam bei jenen Wechselstrom-Kommutatormotoren, wo durch ein kurzgeschlossenes Bürstenpaar zwei geschlossene Stromkreise im Anker hergestellt werden. Diese Bürsten sind so angeordnet, daß der Arbeitsstrom nicht durch sie geht. Die von den Arbeitsbürsten kurzgeschlossenen Ankerspulen, an denen die Funkenbildung stattfindet, bilden einen Teil der von den Hilfsbürsten geschlossenen Stromkreise, sind also mit ihnen eng gekuppelt, so daß die wirksame Selbstinduktion $L(1 - \kappa^2)$ klein ist.

Auch auf dem Ständer von Wechselstrom-Kommutatormotoron können kurzgeschlossene Wicklungen derart angebracht werden, daß sie dem aus dem Anker austretenden Felde gegenüber stehen, also mit den Ankerspulen magnetisch gekuppelt sind. Dieses Mittel ist aber nicht wirksam, weil der Luftspalt dazwischen liegt.

192. Entstehen und Verschwinden eines Stromes in Spulen mit massivem Eisenkern.

In § 188 haben wir gesehen, daß durch die Wirkung eines sekundären Stromes ein rascheres Entstehen und Verschwinden des Stromes bewirkt wird. Da Wirbelströme sekundäre Ströme sind, so müßte man erwarten, daß in einer Spule mit massivem Eisenkern, in dem die Wirbelströme besonders stark auftreten, das Entstehen des Stromes besonders rasch erfolgt. Es zeigt sich aber das Gegenteil. Wird der Erzeugerstromkreis einer großen elektrischen Maschine mit massiven Polen geschlossen, so steigt der Strom ganz langsam an, so daß es unter Umständen bis zu einer Minute lang dauert, ehe der Strom seinen endgültigen Wert E/w erreicht hat. Ferner zeigt sich beim Ausschalten des Erregerstromes, daß die Spannung der Maschine (bei konstanter Umlaufzahl) noch längere Zeit nach dem gänzlichen Verschwinden des Erregerstromes besteht und nur allmählich bis zu dem vom Dauermagnetismus herrührenden Spannungswert abfällt. Aus diesem Umstande muß man schließen, daß man es überhaupt nicht mit einer auf dem Verlauf des Extrastromes beruhenden Erscheinung, sondern mit einer magnetischen Erscheinung zu tun hat. Bei einem von Wechselstrom magnetisierten Eisenkern bleibt nämlich der innerste Teil infolge der Schirmwirkung der Wirbelströme nahezu unmagnetisch (§ 162). In unserem Falle, wo beim Schließen des Stromkreises, die Stromstärke (Gleichstrom) von Null an wächst, werden Wirbelströme induziert, welche entgegengesetzte Richtung haben und daher auf das Innere des

kenlosen“ Maschine nicht gelingt. Schließlich hat auch Arnold zugegeben, daß man der Kommutierung mit Theorie nicht beikommen kann.

¹⁾ ETZ 1903, S. 1041; 1904, S. 542.

Eisenkörpers eine Schirmwirkung ausüben, so daß anfangs nur die äußeren Schichten magnetisiert werden. In dem Maße wie die Änderung des Stromes abnimmt, werden die Wirbelströme schwächer und die Magnetisierung dringt tiefer ein. Hat der Strom seinen endgültigen, konstanten Wert erreicht, so gibt es keine Wirbelströme mehr und der ganze Eisenkörper ist gleichmäßig magnetisiert.

Umgekehrt ist der Vorgang beim Unterbrechen des Erregerstromes. Die Wirbelströme haben nach dem Lenzschen Gesetze einen solchen Verlauf, daß sie das Verschwinden des magnetischen Feldes zu hindern suchen. Sie verstärken also den Magnetismus im Innern des Eisenkörpers, während in der äußersten Schicht das Feld gleich nach dem Verschwinden des Erregerstromes verschwindet. Die Abnahme des Magnetismus verursacht aber wieder Wirbelströme, welche in den von ihnen umschlossenen Teilen den Magnetismus aufrecht erhalten. Der Magnetismus kann also nur allmählich abnehmen, und zwar von außen nach innen.

Besteht das magnetische Eisengestell einer Maschine aus unterteiltem Eisen (Blech), so können sich Wirbelströme nur innerhalb jedes Blechquerschnittes ausbilden, und daher nimmt der Magnetismus viel schneller zu und ab. Beim plötzlichen Kurzschluß eines Wechselstromerzeugers sind sie aber dennoch von großem Einfluß (§ 194).

193. Entstehen und Verschwinden eines Wechsestromes ohne Kapazität.

A. Das Entstehen.

Betrachten wir einen Wechselstromkreis, der nur reinen Widerstand w und reine, konstante Selbstinduktion L enthält, d. h. vernachlässigen wir vorerst etwaige Einflüsse der veränderlichen magnetischen Durchlässigkeit eines Eisenkernes und seiner Hysterese, so gilt für das Entstehen eines Wechselstromes dieselbe Grundgleichung I wie auf S. 382. Aber statt der konstanten Spannung E wirkt hier die periodisch veränderliche Spannung

$$k = \mathfrak{E} \sin(\omega t + \alpha). \quad 1)$$

Der aus k entstehende dauernde (stationäre) Wechselstrom ist daher (§ 133)

$$i_a = \mathfrak{I} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Im Augenblick des Stromschließens würde also der Augenblicks-

¹⁾ Wir müssen hier die Phasenverschiebung α hinzufügen, weil t jetzt die Zeit seit dem Schließen des Stromes, nicht seit einem Durchgang der Spannung durch Null (§ 133) bedeutet. Im Augenblick des Stromschließens ($t = 0$) besteht also der Augenblickswert $\mathfrak{E} \sin \alpha$.

wert $\Im \sin(\alpha - \varphi)$ bestehen, und dazu gehört nun ein vorübergehender (Extra-) Strom i_s , wie in § 187 A:

$$i_s = \Im \sin(\alpha - \varphi) \cdot \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}.$$

Dieser subtrahiert sich wie dort von dem dauernden Strom i_d , so daß der wirklich vorhandene Strom ist:

$$i = i_d - i_s = \Im \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \Im \sin(\alpha - \varphi) \cdot \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}.$$

Erfolgt der Stromschluß in dem Augenblick, wo der Augenblickswert $\Im \sin(\alpha - \varphi)$ des dauernden Stromes (wenn er schon vorhanden wäre) Null ist (also bei $\alpha = \varphi$), so gibt es natürlich keinen Extrastrom. Der Strom beginnt mit dem Werte Null und verläuft ohne jede Veränderung nach dem Gesetze $\Im \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$.

Dagegen hat der Extrastrom seinen größten Wert \Im , wenn $\alpha - \varphi = 90^\circ$ und $t = 0$ ist, d. h. wenn der Stromschluß in dem Augenblick erfolgt, wo der dauernde Wechselstrom, wenn er schon vorhanden

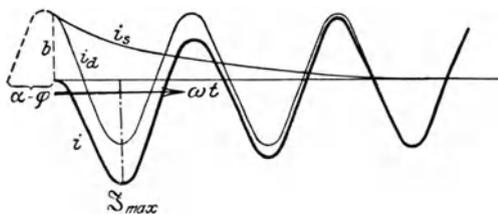


Abb. 315.

wäre, seinen Scheitelwert \Im hat. Der wirklich vorhandene Strom $i = i_d - i_s$ hat aber in diesem Augenblick nicht seinen größten Wert, da es ja auch auf den vorübergehenden Strom i_s ankommt. Abb. 315 zeigt den Verlauf des wirklich

vorhandenen Stromes i , wenn das Stromschließen beim Augenblickswert

$$b = \Im \sin(\alpha - \varphi)$$

geschieht¹⁾. i_s zeigt den Verlauf des dabei entstehenden, allmählich nullwerdenden Extrastromes. Anfangs (bis i_d zum ersten Mal durch Null geht) wirkt i_s dem i_d entgegen. Während der folgenden halben Periode addieren sie sich, und daher entsteht jetzt der größtmögliche Scheitelwert $-\Im_{max}$. Der theoretisch größte Wert, nämlich $-2\Im$ würde eintreten, wenn gleichzeitig $i_d = -\Im$ und $i_s = +\Im$ würde, was unmöglich ist, so daß der größte Wert, der tatsächlich vorkommen kann, kleiner als $2\Im$ ist.

Findet der Stromschluß in einem Augenblick statt, wo der dauernde Strom, wenn er schon vorhanden wäre, positiv ist, so ist der größte Scheitelwert \Im_{max} negativ und umgekehrt.

Von besonderem Interesse sind die magnetischen Verhältnisse beim Entstehen eines Wechselstromes; sie sind im allgemeinen

¹⁾ Dieser Augenblickswert b ist beim Stromschließen tatsächlich noch nicht vorhanden, wohl aber der dazugehörige Augenblickswert der Spannung.

sehr verschieden, wenn der Stromkreis kein Eisen umschlingt, wenn er jungfräuliches Eisen oder solches mit remanentem Magnetismus umschlingt. Im ersten Falle gilt von der entstehenden Kraftlinienmenge dasselbe wie vom Strom, weil sie diesem proportional ist. Und nur deswegen durften wir im Vorstehenden unmittelbar den Strom (wie bei Gleichstrom, § 187) betrachten, obwohl bei Wechselstrom nicht dieser, sondern die dem Grundgesetz $e = -N \frac{dz}{dt}$ entsprechende Kraftlinienmenge \mathfrak{z} das ursprüngliche Gegebene ist, und die Stromstärke erst danach sich einstellt; und zwar nicht mehr proportional sondern gemäß der Magnetisierungskurve Abb. 177, wenn ein Eisenkern vorhanden ist. Wir müssen daher diesen Fall besonders behandeln und zwar unter der Voraussetzung, daß der Ohmsche Spannungsabfall wi verschwindend klein ist gegenüber dem induktiven $L \frac{di}{dt}$, so daß die Spannungsgleichung (§ 132) lautet:

$$k = L \frac{di}{dt} = N \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \dots \dots \dots (I)$$

Ist die aufgedrückte Spannung sinusförmig, also

$$k = \mathfrak{K} \sin \omega t,$$

so ist

$$d\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{K}}{N} \sin \omega t \cdot dt$$

Die Integration ergibt

$$\mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{K}}{\omega N} \cos \omega t + C \dots \dots \dots (II)$$

Da der Ohmsche Widerstand gleich null angenommen wurde, so ist Klemmenspannung und EMK identisch; also ist (Gl. 96):

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E} = \omega N \mathfrak{z}$$

und daher

$$\mathfrak{z} = -\mathfrak{z} \cos \omega t + C \dots \dots \dots (III)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C dient die Tatsache, daß zur Zeit $t = 0$ auch die Magnetisierung \mathfrak{z} Null ist, so daß

$$0 = -\mathfrak{z} + C.$$

Mithin ist

$$\mathfrak{z} = -\mathfrak{z} \cos \omega t + \mathfrak{z}.$$

Man sieht sofort: der größte Wert, den dieser Ausdruck theoretisch annehmen kann, ist gleich $2 \mathfrak{z}$, wobei \mathfrak{z} der der EMK entsprechende Scheitelwert der Kraftlinienmenge ist. Ist der Ohmsche Spannungsabfall nicht verschwindend klein, so ist der größtmögliche Wert der Magnetisierung entsprechend kleiner, bis herab zu Null,

wenn der Stromkreis nur Ohmschen Widerstand enthält¹⁾. Welcher Wert im gegebenen Falle tatsächlich erreicht wird, hängt von dem Augenblick (Phase) ab, in dem das Schließen des Stromkreises stattfindet. Aus einer weiteren Überlegung erkennt man, daß der unter den gegebenen Verhältnissen größte Wert dann erreicht wird, wenn daß Schließen des Stromkreises beim Nullwert der EMK stattfindet²⁾, denn da hat die Magnetisierung eine Viertelperiode lang Zeit, in dem von der Spannung angegebenen Sinne anzusteigen, während in jedem anderen Falle schon vor Ablauf einer Viertelperiode die Spannung ihre Richtung ändert, so daß die Magnetisierung nicht weiter ansteigen kann.

Es wurde oben vorausgesetzt, daß zur Zeit des Stromschlusses die Magnetisierung Null ist. Ist das nicht der Fall, sondern besteht zur Zeit $t = 0$ ein remanenter Magnetismus \mathfrak{z}_r , von einer früheren Magnetisierung, so, folgt aus Gl. III.

$$\mathfrak{z}_r = -\mathfrak{z} + C \quad \text{oder} \quad C = \mathfrak{z} + \mathfrak{z}_r.$$

Mithin ist

$$\mathfrak{z} = -\mathfrak{z} \cos \omega t + \mathfrak{z} + \mathfrak{z}_r.$$

Folglich ist jetzt der größtmögliche Wert der Magnetisierung gleich $2\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_r$, wenn \mathfrak{z}_r dieselbe Richtung hat wie \mathfrak{z} , oder gleich $2\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_r$, wenn \mathfrak{z}_r entgegengesetzte Richtung hat.

Nachdem der größtmögliche Wert der Magnetisierung festgestellt ist, kann der größtmögliche Wert des Stromes ermittelt werden.

Wegen des Eisens besteht keine Proportionalität zwischen Strom und Magnetisierung, da die magnetische Durchlässigkeit μ veränderlich ist. Daraus folgt eine Verzerrung der Stromwelle und ein Anstieg der Stromstärke auf einen höheren Wert als das Doppelte des stationären Wertes. Beträgt z. B. die der EMK entsprechende Kraftliniendichte, die nach Erreichung des stationären Zustandes tatsächlich vorhanden ist, 8000, so gehören dazu bei einem geschlossenen Eisenkern gemäß Abb. 177 etwa 2 Ampere windungen für 1 cm. Beim Stromschließen könnte die Kraftliniendichte theoretisch den doppelten Wert erreichen. Tatsächlich wird dieser Wert, wie wir vorhin gesehen haben, nicht erreicht. Aber ein Wert von 14000 kann erreicht werden. Dazu gehören etwa 9 Ampere windungen, so daß also beim Einschalten der Strom die 4 bis 5 fache Stärke des stationären Wertes erreichen wird. Der Stromanstieg wird noch bedeutend größer,

¹⁾ Deshalb verwendet man zum Einschalten größerer Transformatoren, wo starke Stromstöße die Wicklung beschädigen können, Schalter mit einem Vorkontakt. Zwischen Vorkontakt und Hauptkontakt liegt ein Ohmscher Widerstand, so daß das Schließen des Stromkreises unter zeitweiliger Vorschaltung dieses Widerstandes erfolgt.

²⁾ Da der Ohmsche Spannungsabfall verschwindend klein angenommen wurde, besteht im selben Augenblick der Scheitelwert des Stromes, so daß dies übereinstimmt mit der vorhergehenden Betrachtung über den Verlauf des Stromes.

wenn das Eisen nicht jungfräulich ist, sondern ein gleichgerichteter remanenter Magnetismus \mathfrak{z} , vorhanden ist. Beträgt dieser z. B. 2000, so steigt in diesem Beispiel die Kraftliniendichte auf 16000. Dazu gehören 30 Amperewindungen, so daß also in diesem Falle der Strom das 15 fache des stationären Wertes erreicht. Das sind jene Stromstöße, die sich beim Einschalten größerer Transformatoren durch kurzes Brummen und sogar ruckweise Erschütterung des Transformators bemerkbar machen. Abb. 127 zeigt, daß

der remanente Magnetismus bei normaler Magnetisierung etwa die Hälfte des Scheitelwertes beträgt. Er ist noch größer, wenn die Magnetisierung stärker war. Der remanente Magnetismus verschwindet allmählich unter dem Einfluß der wechselnden periodischen Magnetisierung, und dementsprechend geht der Stromstoß allmählich in den stationären Strom über, aber langsamer als wenn kein remanenter Magnetismus vorhanden ist. Hat der remanente Magnetismus entgegengesetzte Richtung, so vermindert er natürlich die Magnetisierung und dadurch den Stromanstieg. Abb. 316 bis 319 zeigt oszilligraphische Aufnahmen¹⁾, wobei der Eisenkern mittelst eines Gleich-

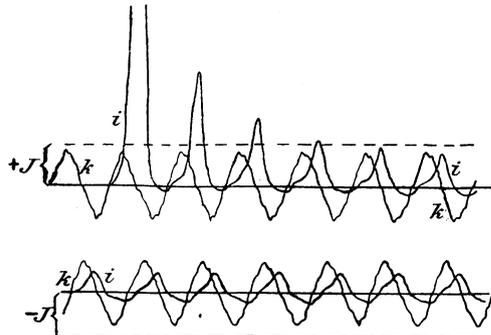


Abb. 316 und 317. Stromschluß beim Nullwert der Spannung.

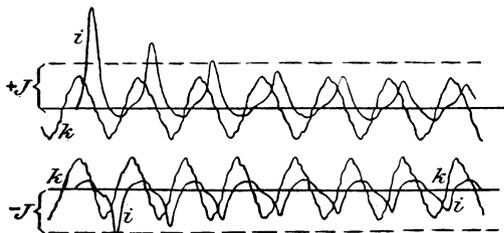


Abb. 318 und 319. Stromschluß beim Scheitelwert der Spannung.

stromes J vorher magnetisiert worden war, und zwar bei Abb. 316 und 318 im gleichen Sinne, bei Abb. 317 und 319 im entgegengesetzten Sinne wie die erste Magnetisierung bei Entstehung des Stromes. Man erkennt hieraus auch den Einfluß der Phase, bei der der Stromschluß beginnt, denn Abb. 316 und 317 zeigen das Stromschließen in dem Augenblick, wo die Spannungswelle durch Null geht, Abb. 318 und 319 dagegen im Scheitelwerte der Spannung.

Da fast nach jedem Ausschalten remanenter Magnetismus übrig bleibt, so kann man sagen, daß der in der Praxis beim Einschalten

¹⁾ Nach M. Johann, Bull. de la société internat. des Electr. 1905, S. 579.

vorkommende Stromstoß im wesentlichen nur vom remanenten Magnetismus abhängt.

Ist ein geschlossener sekundärer Stromkreis vorhanden, d. h. wird ein Transformator oder Induktionsmotor eingeschaltet, während der sekundäre Stromkreis geschlossen ist, so entsteht mit dem primären Strom gleichzeitig der sekundäre und übt denselben Einfluß aus, wie beim Einschalten eines Gleichstromes (§ 188): er vermindert den Stromstoß, und zwar um so mehr, je kleiner der scheinbare Widerstand des sekundären Kreises ist, während der stationäre Strom gemäß § 152 vergrößert wird.

B. Unterbrechen eines Wechselstromes. Ölschalter.

Das Verschwinden eines Wechselstromes ohne Unterbrechung des Stromkreises, also durch Nullwerdung der EMK (Ausschaltung der Erregung) erfolgt in der Weise, daß die Scheitelwerte allmählich bis Null abnehmen.

Wird der Stromkreis unterbrochen, so muß unterschieden werden, ob die Unterbrechung augenblicklich erfolgt, oder ob sie längere Zeit in Anspruch nimmt. Vollzieht sich die Unterbrechung in einem Zeitraum, der nur einen Bruchteil einer Halbwelle ausmacht, also z. B. in der Zeit t_0 bis t_1 (Abb. 320), so besteht kein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Unterbrechen eines konstanten Stromes von gleicher Stärke wie diese Augenblickswerte. Die kleine Zunahme des Stromes in der Zeit von t_0 bis t_1 ändert nichts Wesentliches. Es kann also bei so plötzlicher Unterbrechung eines Wechselstromes eine Überspannung von ähnlicher Größe, wie sie in § 189 ermittelt wurde, eintreten. Dieser Fall ist aber nur bei kleinen Stromstärken möglich, weil da kein merklicher Funken auftritt.

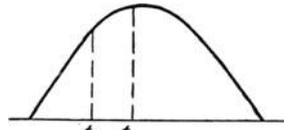


Abb. 320.

Entsteht ein starker Funke, der mehrere Halbwellen lang andauert, so bedeutet dies die Einschaltung eines Widerstandes, der von 0 bis ∞ wächst. Infolgedessen nehmen die Scheitelwerte dieser Halbwellen rasch ab. Der Strom hört dann bei einem Durchgang durch Null auf, weil die durch den Funkenwiderstand verminderte Spannung nicht mehr imstande ist, die Funkenstrecke zu überbrücken. Eine Überspannung kann dabei nicht eintreten. Auch wenn Spannung und Stromstärke so groß sind, daß ein Lichtbogen zwischen den sich öffnenden Kontakten des Schalters entsteht, werden zunächst die Scheitelwerte immer kleiner, bis bei einem Durchgang durch Null der Strom aufhört. Infolgedessen vollzieht sich die Unterbrechung eines Wechselstromes durch einen Schalter bedeutend schneller als die eines Gleichstromes von gleicher Stärke und Spannung. Das gilt insbesondere für Ölschalter.

Der Vorteil der Ölschalter besteht in folgendem: das Öl ver-

hindert erstens durch den Abschluß der Luft, daß das Material der Kontakte so stark verbrennt und verdampft wie in Luft, zweitens wirkt es abkühlend auf den entstehenden Lichtbogen und erschwert dadurch seine Ausbildung (§ 259), drittens wirkt der stärkere Druck, der unter der Flüssigkeit herrscht, einschnürend auf den Lichtbogen. Er reißt daher noch schneller ab, wenn der Druck im Ölkessel auf einige Atmosphären gesteigert wird, oder die Kontakte in einer Kammer eingeschlossen sind, in welcher gleich nach Entstehung des Lichtbogens durch Verdampfung von Öl ein höherer Druck von selbst entsteht¹⁾. Besonders rasch wird die Verlöschung des Lichtbogens

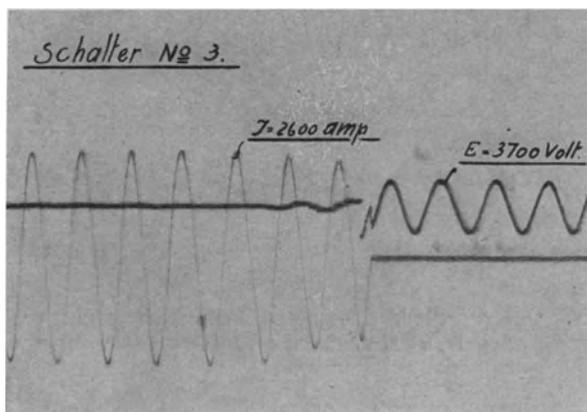


Abb. 321. Unterbrechung eines Kurzschlußstromes von 2600 A. durch einen Ölschalter.

bewirkt, wenn das Öl zwischen den Kontakten in Bewegung versetzt wird²⁾, weil auf diese Weise der Lichtbogen in ähnlicher Weise zerrissen wird wie in Luft durch Wind oder durch magnetisches Gebläse³⁾. Dieses Aufhören des Stromes bei einem Durchgang durch Null hat zur Folge, daß dabei niemals eine Überspannung auftreten kann, wie bei plötzlicher Unterbrechung während einer halben Welle. Folgende oszillographischen Aufnahmen zeigen das⁴⁾. Abb. 321 zeigt die Unterbrechung eines Kurzschlußstromes von 2600 A. An den abnehmenden Scheitelwerten des Stromes erkennt man, daß der

¹⁾ Stern und Biermanns, ETZ 1916, S. 637.

²⁾ Benischke, ETZ 1903, S. 613. D. R. P. 141961 und 150912.

³⁾ Es ist durch Versuche festgestellt worden, daß Ölschalter mit Messerkontakten besser wirken, als solche mit Berührungskontakten. Der Grund liegt darin, daß bei ersteren das Öl schneller zwischen die Kontakte treten kann, sobald sich ihre Räder voneinander trennen, als bei den Berührungskontakten, wo das Öl erst seine Wirkung äußern kann, sobald es die ganze Berührungsfläche bedeckt.

⁴⁾ Nach Marguerre, ETZ 1912, Heft 28 und 29.

Lichtbogen zwischen den Kontakten vier halbe Wellen lang gedauert hat. Man erkennt den Beginn des Ausschaltens auch daran, daß die Spannung, die während des Kurzschlusses Null ist und daher als gerade Linie erscheint, wellenförmig zu werden beginnt¹⁾. Abb. 322

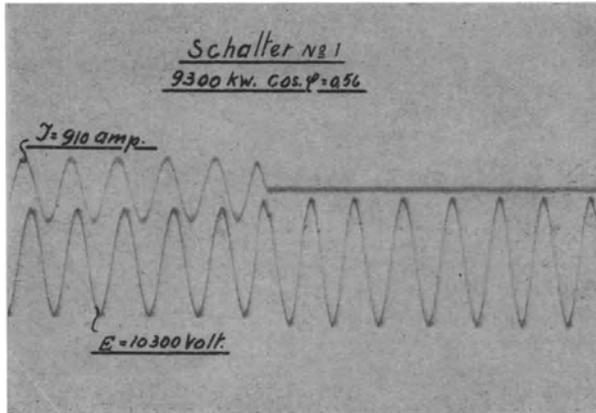


Abb. 322. Unterbrechung eines normalen Betriebsstromes von 910 A. bei 10300 V. durch einen Ölschalter.

zeigt die Unterbrechung eines normalen Belastungsstromes von 910 A. Hier vollzog sich der ganze Unterbrechungsvorgang während einer halben Welle. Die Spannung stieg dabei auf den Leerlaufwert des Stromerzeugers. Eine Überspannung tritt in keinem Falle auf.

194. Der Verlauf des Kurzschlußstromes eines Stromerzeugers.

Eine besondere Art Stromentstehung zeigt sich beim plötzlichen Kurzschluß eines erregten Wechselstromerzeugers. Oszillographische Aufnahmen wie Abb. 323 zeigen, daß der Kurzschlußstrom anfangs auf einen sehr hohen Wert ansteigt und erst nach kurzer Zeit denjenigen stationären Wert annimmt, den er bei allmählicher Erregung der Maschine erhält. Der erste Anstieg des Kurzschlußstromes ist um so höher, je größer die von der Ankerspule umschlossene Eisen-

¹⁾ Die Unterbrechung eines Kurzschlußstromes ist der schwierigste Fall einer Stromunterbrechung, weil der äußere Stromkreis fehlt, der bei normalem Betriebe immer einen scheinbaren Widerstand von mehreren Ohm darstellt. Ferner steigt beim Kurzschlußstrom die Spannung zwischen den Kontakten, während sie sich voneinander entfernen. Bei normalem Betriebe ist die Spannung zwischen den Kontakten nur ein Teil der hinter dem Schalter im äußeren Stromkreis liegenden Spannung.

masse ist. Man hat bei großen Turbomaschinen Werte vom 40fachen des stationären Kurzschlußstromes festgestellt¹⁾.

Die Ursache der Erscheinung wird erklärlich, wenn man die Scheitelwerte der Abb. 323 durch eine Kurve verbindet, wie es in Abb. 324 geschehen ist, und den Kurzschlußstrom einer gleichartigen Gleichstrommaschine einzeichnet. Man findet dann, daß der erste Stromanstieg (Höchstwert) \mathfrak{S}_{max} nicht größer ist als der stationäre Kurzschlußstrom J_g der Gleichstrommaschine, während der stationäre Kurzschlußstrom \mathfrak{S}_k der Wechselstrommaschine vielmals kleiner ist. Bei Wechselstrom ist der Scheitelwert bestimmt durch

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{w_i^2 + (\omega L_i)^2}}$$

während der Gleichstrom $J_g = \frac{\mathcal{E}}{w_i}$ ist.

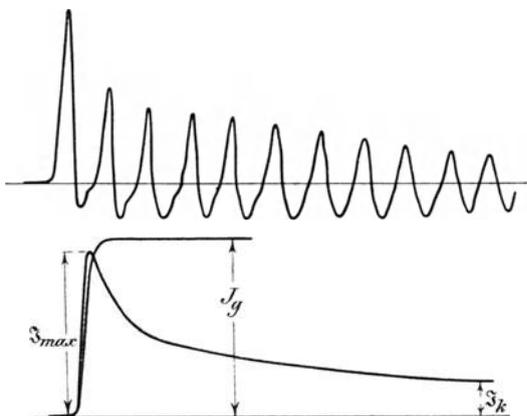


Abb. 323 und 324.

Hieraus erklärt sich, daß der stationäre Kurzschlußstrom \mathfrak{S}_k um so viel kleiner ist wie der Gleichstromkurzschluß J_g , als der Induktionswiderstand ωL_i den Nenner vergrößert. Ist ωL_i auch für den Wechselstrom Null, so ist unter sonst gleichen Verhältnissen der Wechselstromkurzschluß so groß wie der Gleichstromkurzschluß. In der Tat ist die Selbstinduktion L_i der Wechselstrommaschine im Augenblick des Kurzschlusses sehr klein, denn diese Selbstinduktion besteht aus dem Ankerstreufelde und dem Ankerrückwirkungsfelde. Beide Felder entstehen aber nicht plötzlich, sondern wegen der Wirbelströme im Eisen und ihrer magnetischen Schirmwirkung (§ 192) nur allmählich; und zwar dauert es um so länger, bis sie sich ausgebildet haben, je größer der Eisenquerschnitt ist. Natürlich handelt es sich da nur um Bruchteile von Sekunden. In dem Augenblick, wo der Kurzschluß eintritt, ist L_i noch fast Null, d. h. der Strom fast so groß, wie der Gleichstromkurzschluß. In dem Maße aber, wie das Ankerstreufeld und Ankerrückwirkungsfeld sich ausbildet, wächst L_i , und dementsprechend der induktive Widerstand ωL_i , bis sein stationärer Wert erreicht ist. Dann hat auch der Kurzschlußstrom

¹⁾ Das plötzliche Auftreten so starker Ströme hat starke mechanische Wirkungen auf die Spulenköpfe zur Folge, so daß diese zuweilen gänzlich verbogen wurden. Jetzt versieht man solche Maschinen mit besonderen Befestigungen der Spulenköpfe.

seinen stationären Wert \mathfrak{S}_k erreicht. Bei Gleichstrom kommt das alles nicht in Betracht, weil da $\omega = 0$, also auch $\omega L_i = 0$ ist, so daß nur der Ohmsche Widerstand maßgebend ist¹⁾.

Wird der Kurzschlußversuch so ausgeführt, daß die Maschine von vornherein kurzgeschlossen ist, und erst dann die Erregung allmählich gesteigert wird, so hat das Ankerfeld genügend Zeit, um sich entsprechend der Stromstärke auszubilden; dann ist auch der induktive Widerstand ωL_i in jedem Augenblick in entsprechender Größe vorhanden.

Da der Ankerstrom infolge der magnetischen Kupplung auf den Erregerstromkreis des Polrades zurückwirkt, wie bei einem Transformator der primäre Stromkreis auf den sekundären, so lagert sich der in Abb. 323 dargestellte Stromverlauf über den Gleichstrom und das ergibt einen ähnlichen Stromverlauf (pulsierenden Gleichstrom) in der Erregerwicklung.

Um den großen Stromanstieg zu vermindern, schaltet man der Maschine entweder einen Ohmschen Widerstand vor (Vergrößerung von w_i), was wegen der Verminderung des Wirkungsgrades nicht empfehlenswert ist, oder eine eisenfreie Drosselspule, damit ihr induktiver Widerstand durch Wirbelströme nicht beeinträchtigt wird, sondern in jedem Augenblick vorhanden ist.

195. Öffnen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion. Elektrische Schwingung.

Ist ein Kondensator mit einer seiner Potentialdifferenz \mathfrak{E}_0 und seiner Kapazität C entsprechenden Elektrizitätsmenge \mathfrak{Q}_0 auf irgend-

¹⁾ Die Frage, die zur Aufklärung dieser Erscheinung führen soll, ist also nicht so zu stellen, wie es bisher geschehen ist: Warum steigt der Kurzschlußstrom anfangs höher an?, sondern sie muß lauten: Warum sinkt der Kurzschlußstrom von seinem ursprünglichen Werte herab? Die Antwort lautet: weil der induktive Widerstand der Ankerwicklung nicht von vornherein vorhanden ist, sondern allmählich entsteht.

In der ETZ 1916, S. 579 hat Biermanns den Verlauf des Kurzschlusses mathematisch behandelt. Sein Ergebnis, wonach der Kurzschlußstrom gleich der Spannung dividiert durch den halben, der Anker- und Läuferstreuung entsprechenden induktiven Widerstand wäre, und der Ohmsche Widerstand nicht in Betracht käme, ist unrichtig. Das kommt daher, daß zur Vereinfachung der Rechnung eine unzulässige Voraussetzung gemacht wurde, indem für beide Wicklungen ein gleiches Verhältnis des Widerstandes zur Selbstinduktion angenommen wurde. Infolgedessen fehlt in der Lösung der Ohmsche Widerstand, und statt des induktiven Widerstandes der Ankerwicklung erscheint die Hälfte des induktiven Widerstandes von Anker- und Erregerwicklung. Es liegt hier einer der Fälle vor, wo die mathematische Behandlung trotz richtiger Rechnung zu einem unrichtigeren Ergebnis führt als die physikalische Überlegung, weil zwecks Ausführung der Rechnung Vernachlässigungen gemacht werden, die unzulässig sind. Der Ohmsche Widerstand darf hier nicht vernachlässigt werden, weil er gerade bei Beginn des Kurzschlusses, wo der induktive Widerstand noch sehr klein ist, größten Einfluß hat. Die Streuung der Erregerwicklung hat natürlich auch Einfluß auf den Kurzschlußstrom aber nur dadurch, daß sie die EMK verkleinert.

eine Weise geladen worden, und bringt man ihn durch die Funkenstrecke F (Abb. 325) über einen Stromkreis mit dem Widerstande w und der Selbstinduktion L zur Entladung, etwadurch, daß man die Elektroden der Funkenstrecke einander nähert, so sieht man einen Funken, der sich bei der Betrachtung mittels eines rotierenden Spiegels als aus mehreren Stromübergängen oder Teilfunken bestehend erweist¹⁾, die aber so rasch aufeinander folgen, daß sie bei direkter Betrachtung als ein einziger Funken erscheinen.

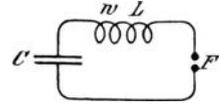


Abb. 325.

Abb. 326 zeigt eine oszillographische Aufnahme des Stromes²⁾. Man hat es also mit einer hin- und hergehenden Bewegung der Elektrizität zu tun, die man als oszillatorische oder periodische Entladung oder elektrische Schwingung bezeichnet, da die Ladung zwischen den beiden Kondensatorplatten durch die Verbindungsleitung und Funkenstrecke hin und herschwingt.

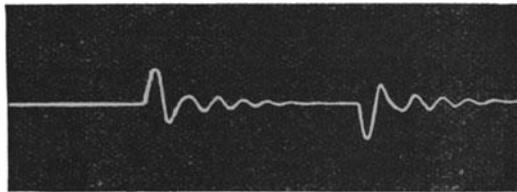


Abb. 326. Oszillographische Aufnahme des Stromes einer periodischen Entladung und darauffolgender Ladung.

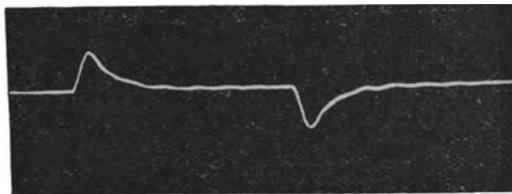


Abb. 327. Oszillographische Aufnahme des Stromes einer aperiodischen Entladung und darauffolgender Ladung.

Das erklärt sich daraus, daß durch die erste Entladung ein entgegengesetzter Strom (Extrastrom) induziert wird, so wie beim Beginn jedes Stromes (§ 187). Durch diesen findet nun eine neuerliche Ladung im entgegengesetzten Sinne statt. Diese Ladung ent-

¹⁾ Das wurde von W. Feddersen 1857 nachgewiesen. Neudruck seiner Arbeiten über Funkenentladungen in: Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 166.

²⁾ Wittmann, Annal. d. Phys. 12, S. 373, 1903.

Die wagrechte Linie ist natürlich kein Strom, sondern die Nulllinie.

ladet sich wieder (Rückzündung des Funkens), und so setzt sich das Spiel fort und würde nie aufhören, wenn nicht die Entladungsdrähte einen gewissen Widerstand besäßen. Dieser verursacht einen Umsatz der elektrischen Arbeit in Wärme, so daß in der Regel nur einige derartige wechselnde Entladungen zustande kommen. Ist der Widerstand sehr groß, so wird schon bei der ersten Entladung die ganze elektrische Arbeit in Wärme umgesetzt, und es kommt zu keiner oszillatorischen sondern aperiodischen Entladung (Abb. 327).



Abb. 328.

Der Vorgang ist genau so, wie bei einem Pendel oder einer Flüssigkeit in einer U-förmigen Röhre (Abb. 328) oder einer elastischen Feder. Die Trägheit (von der wir schon in § 187 gesehen haben, daß sie dieselbe Rolle spielt wie die Selbstinduktion) verursacht ein Hinausschwingen über die Ruhelage. Ist aber der Bewegungswiderstand sehr groß, so geht das Pendel oder die Flüssigkeit langsam in die Ruhelage zurück, ohne eine Schwingung auszuführen (aperiodische Bewegung). Die folgende mathematische Betrachtung gibt nähere Aufschlüsse.

Sobald die Entladung des Kondensators über die Funkenstrecke F (Abb. 325) beginnt, fließt im Entladungsstromkreis ein Strom i . Die Summe aus dem Ohmschen Spannungsabfall wi und dem induktiven Spannungsabfall $L \frac{di}{dt}$ muß in jedem Augenblick gleich der an den Klemmen des Kondensators herrschenden Spannung e sein¹⁾, also

$$e = wi + L \frac{di}{dt} \dots \dots \dots (I)$$

Nun ist nach § 26

$$q = eC,$$

wenn q die in jedem Augenblick vorhandene, der Spannung e entsprechende Ladung bedeutet.

Ferner ist nach Gl. 196

$$i = - \frac{dq}{dt} = - C \frac{de}{dt}$$

und daher

$$\frac{di}{dt} = - C \frac{d^2e}{dt^2}.$$

Mithin geht die obige Spannungsgleichung über in

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{w}{L} \frac{de}{dt} + \frac{e}{LC} = 0 \dots \dots \dots (II)$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form, wie die für ein

¹⁾ In § 172 u. f. haben wir diese Spannung mit e_c bezeichnet. Der Einfachheit halber lassen wir jetzt den Index c weg.

gedämpftes Pendel bei kleinen Ausschlägen. Ein Integral derselben ist

$$e = B \varepsilon^{\alpha t},$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen und t die Zeit vom Beginn der Entladung an bedeutet, und B und α zwei Größen sind, deren Bedeutung sich im folgenden ergibt.

Bildet man $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d^2e}{dt^2}$ und setzt alle drei Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$B \varepsilon^{\alpha t} \left(\alpha^2 + \frac{w}{L} \alpha + \frac{1}{LC} \right) = 0.$$

Da B nicht Null sein kann, weil sonst auch e Null wäre, so muß der Klammerausdruck Null sein. Dieser ist eine quadratische Gleichung, so daß sich für α folgende zwei Werte ergeben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Die allgemeinste Lösung für e muß beiden Werten Rechnung tragen; sie lautet daher

$$e = B \varepsilon^{\alpha_1 t} + D \varepsilon^{\alpha_2 t} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Sind die Wurzelausdrücke reell, so sind α_1 und α_2 negativ, und die Spannung e wird daher mit wachsender Zeit immer kleiner, bis sie für $t = \infty$ Null ist. e nimmt um so rascher ab, je größer α , d. h. je größer w und je kleiner L ist. Das Verhältnis $\frac{w}{L}$ wurde in § 187 Zeitkonstante genannt. Diese kommt also auch hier in Betracht. Während der ganzen Zeit bleibt e positiv. Die Entladung erfolgt also stetig abnehmend, ohne periodische Schwankungen, d. h. aperiodisch, und zwar in Form einer Exponentialkurve wie in Abb. 311. Dieser Fall (Wurzelausdrücke reell), ist dann vorhanden, wenn

$$\frac{w^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$$

oder

$$w^2 \geq \frac{4L}{C} \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

ist, d. h. wenn der Ohmsche Widerstand einen gewissen von der Selbstinduktion und der Kapazität abhängigen Wert übersteigt.

Ist hingegen

$$w^2 < \frac{4L}{C} \dots \dots \dots \text{(V)}$$

so sind die Wurzelausdrücke imaginär und man kann schreiben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + j\omega$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - j\omega,$$

wobei

$$j = \sqrt{-1}$$

und

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \dots \dots \dots \text{(VI)}$$

Dann geht Gl. III über in

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} [B\varepsilon^{j\omega t} + D\varepsilon^{j\omega t}]$$

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} [(B + D) \cos \omega t + (Bj - Dj) \sin \omega t]. \text{ } ^1)$$

Setzt man

$$B + D = M \quad \text{und} \quad Bj - Dj = N.$$

so ist

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} (M \cos \omega t + N \sin \omega t).$$

Die Werte der Größen M und N ergeben sich auf folgende Weise. Zur Zeit $t=0$ ist die Ladung und daher auch die Spannung des Kondensators noch unverändert, also $e = \mathfrak{E}_0$, wenn \mathfrak{E}_0 diese, vor Beginn der Entladung herrschende Spannung bedeutet. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{E}_0 = M.$$

Nach einer der vorstehenden Gleichungen ist

$$i = -C \frac{de}{dt} = \frac{wC}{2L} \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} (M \cos \omega t + N \sin \omega t) -$$

$$- C \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} (-\omega M \sin \omega t + \omega N \cos \omega t).$$

Zur Zeit $t=0$ ist aber diese Stromstärke Null, da die Entladung eben erst beginnt. Es folgt also daraus

$$0 = \frac{w}{2L} M - \omega N, \quad N = \frac{w}{2\omega L} M = \frac{w}{2\omega L} \mathfrak{E}_0.$$

¹⁾ Weil nach einem mathematischen Lehrsatz

$$\varepsilon^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

und

$$\varepsilon^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Mithin ist

$$e = \mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \left(\cos \omega t + \frac{w}{2\omega L} \sin \omega t \right) \dots \text{(VII)}$$

Daraus ersieht man, daß sich die Spannung, und weil $q = eC$ ist, auch die Ladung periodisch ändert. Für $t = 0$ ist $e = \mathfrak{E}_0$. Für alle Werte von ωt aber, für welche $\cos \omega t = 1$ und $\sin \omega t = 0$ ist, erreicht die Spannung abwechselnd positive und negative Maxima, wie folgende Tabelle zeigt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Für } t = 0 \text{ ist } e = \mathfrak{E}_0 \\ \text{„ } \omega t = \pi \text{ „ } e_1 = -\mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_1 \\ \text{„ } \omega t = 2\pi \text{ „ } e_2 = +\mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w2\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_2 \\ \text{„ } \omega t = 3\pi \text{ „ } e_3 = -\mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w3\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_3 \end{array} \right\} \dots \text{(VIII)}$$

Die obere Kurve in Abb. 329 zeigt den Verlauf dieser Spannung, und man erkennt daraus den Charakter der gedämpften Schwingung, da jede folgende Amplitude kleiner ist als die vorhergehende,

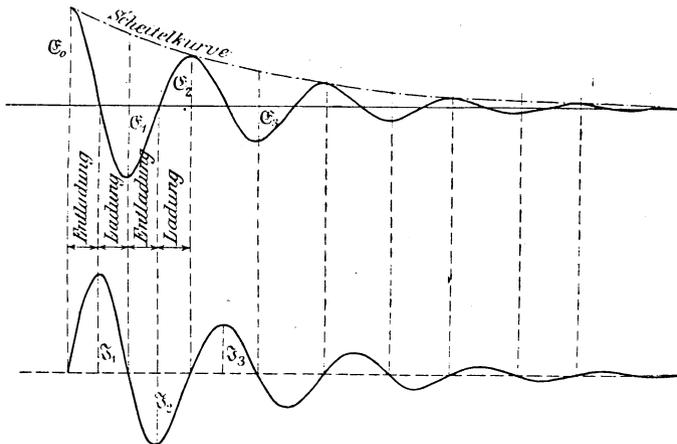


Abb. 329.

weil der negative Potenzexponent von ε mit wachsender Zeit immer größer wird. Für $t = \infty$ wird schließlich $e = 0$. Praktisch aber sind die Amplituden in der Regel schon nach ganz kurzer Zeit verschwindend klein. Die Kurve, welche die Scheitelpunkte verbindet, heißt Scheitellkurve; sie ist gegeben durch den Faktor vor

der Klammer in Gl. VII, also durch $\mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}$; sie ist also eine Exponentialkurve und läßt erkennen, wie rasch die Scheitelwerte infolge der Dämpfung abnehmen.

Die Periode, nach welcher sich dieselbe Phase der Schwingung wiederholt, ist 2π . Der im Argument der periodischen Funktion stehende Faktor ω ist also

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu,$$

wenn τ die Dauer einer Periode, und ν die Anzahl der Perioden oder ganzen Schwingungen in einer Sekunde bedeutet. Dann ist nach Gl. VI

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \dots \dots \dots \text{(IX)}$$

Für die Stromstärke in dem Entlastungsstromkreis ergibt sich aus $i = -C \frac{de}{dt}$ mit Berücksichtigung von Gl. VI

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \sin \omega t \dots \dots \dots \text{(X)}$$

Die untere Kurve in Abb. 329 zeigt den Verlauf dieses Entladestromes, und die linke Hälfte der Abb. 326 die oszillographische Aufnahme eines solchen.

Setzt man $\frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} = \mathfrak{I}_0 \dots \dots \dots \text{(XI)}$

so bedeutet \mathfrak{I}_0 einen Wert der Stromstärke, welcher zwar der vor Beginn der Entladung herrschenden Spannung \mathfrak{E}_0 entspricht, aber in Wirklichkeit nicht vorkommt. Denn für $t=0$ ist $i=0$. Der tatsächlich erste und größte Scheitelwert \mathfrak{I}_1 tritt ein für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ und ist (nach Gl. X)

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} = \mathfrak{I}_0 \varepsilon^{\frac{\pi w}{4\omega L}} \left. \dots \dots \dots \text{(XII)} \right\}$$

Der nächste Scheitelwert für $\omega t = \frac{3\pi}{2}$ ist

$$\mathfrak{I}_2 = -\frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{3\pi w}{4\omega L}} = -\mathfrak{I}_0 \varepsilon^{\frac{3\pi w}{4\omega L}}$$

und so weiter.

Die Gl. X für die Stromstärke gilt natürlich nur unter derselben Voraussetzung wie die entsprechende Spannungsgleichung VII, nämlich für $w^2 < \frac{4L}{C}$. Ist dies nicht der Fall, so verläuft der Strom aperiodisch, ebenso wie die Spannung. Die linke Hälfte der Abb. 327 zeigt den Verlauf des Stromes für einen solchen Fall. Sie ist bei Beginn der Entladung Null, steigt rasch bis zu einem Maximum und fällt dann allmählich auf Null. Je größer der Widerstand ist, desto kleiner ist das Maximum und desto langsamer erfolgt der Abfall.

Vergleicht man die Ausdrücke für Spannung und -Strom bei oszillatorischer Entladung (Gl. VII und X) und die entsprechenden Wellenzüge in Abb. 329, so sieht man, daß eine Phasenverschiebung zwischen beiden besteht. Bezeichnet man sie mit φ , so kann man nach einem Satz der Trigonometrie die Gl. VII in die Form

$$e = \mathfrak{X} \sin(\omega t + \varphi)$$

bringen, wobei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\frac{w}{2\omega L}} = \frac{2\omega L}{w}$$

Die Phasenverschiebung ist also um so größer, je größer der induktive Widerstand ωL und je kleiner der Ohmsche Widerstand ist. Da bei oszillatorischen Entladungen ω in der Regel sehr groß ist, so ist φ nahezu 90° . Daraus folgt, daß der Entladestrom in der Regel nahezu ganz wattlos ist. Dagegen ist bei einer aperi-odischen Entladung die wattlose Komponente klein gegenüber der Wattkomponente.

Bei den meisten oszillatorischen Entladungen ist das Glied $\frac{w^2}{4L^2}$ (in Gl. VI) so klein gegen $\frac{1}{LC}$, daß es vernachlässigt werden kann. Dann ist also

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ \tau &= 2\pi\sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(XIII)}$$

Es kann dann auch das zweite Glied in Gl. VII vernachlässigt werden, so daß

$$e = \mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \cos \omega t \dots \dots \dots \text{(XIV)}$$

Für den Strom ergibt sich nach Einsetzung des obigen Wertes von ω

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \sin \omega t \dots \dots \dots \text{(XV)}$$

Hieraus ersieht man den theoretisch größtmöglichen Scheitelwert \mathfrak{I}_0 des Stromes, nämlich

$$\mathfrak{I}_0 = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit Gl. XI, wie man sofort sieht, wenn man Gl. XIII in Gl. XI einsetzt. Während also für die Frequenz der Ausdruck \sqrt{LC} bestimmend ist, kommt für die Stromstärke einer Eigenschwingung der Ausdruck $\sqrt{\frac{L}{C}}$ in Betracht. Man bezeichnet ihn als Charakteristik des Schwingungskreises.

Unter der obigen Voraussetzung ist also die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleich 90° , da diese nach einem Sinus, jener nach einem Cosinus verläuft.

Die Gl. XIII für die Periodenzahl läßt sich in die Form

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

bringen. Dann geht die Gl. XI über in

$$\mathfrak{I}_0 = \omega C \mathfrak{E}_0,$$

das ist dieselbe Gleichung wie in § 172 für Strom und Kapazitätsspannung in einem Wechselstromkreis mit Kondensator¹⁾.

Im Eingang dieses Paragraphen wurde gesagt, daß der oszillatorische Entladungsvorgang darin besteht, daß sich der Kondensator abwechselnd entladet und wieder ladet. Jede Entladung und Ladung spielt sich, wie man aus Abb. 329 erkennt, während einer Viertelperiode ab. Wenn der Strom den ersten Scheitelwert \mathfrak{I}_1 erreicht, und die Kondensatorspannung zum erstenmal durch Null geht, ist die erste Entladung vollendet, und es beginnt eine neue Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Diese ist vollendet, wenn der Strom durch Null geht, und die Spannung den Wert \mathfrak{E}_1 erreicht usf.

Da die Ladung eines Kondensators gleich dem Produkte aus Kapazität und Spannung ist, so folgt aus den Gleichungen VIII für die aufeinanderfolgenden Scheitelwerte der Ladungen:

$$\mathfrak{Q}_0 = C \mathfrak{E}_0$$

$$\mathfrak{Q}_1 = C \mathfrak{E}_1 = - C \mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{\omega \pi}{2 \omega L}} = - \mathfrak{Q}_0 \varepsilon^{-\frac{\omega \pi}{2 \omega L}}$$

$$\mathfrak{Q}_2 = C \mathfrak{E}_2 = + C \mathfrak{E}_0 \varepsilon^{-\frac{\omega 2 \pi}{2 \omega L}} = + \mathfrak{Q}_0 \varepsilon^{-\frac{\omega 2 \pi}{2 \omega L}}$$

und so fort.

Mit Hilfe der ersten dieser Gleichungen lassen sich nun die Scheitelwerte des Stromes (Gl. XII) in folgender Weise ausdrücken.

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\omega LC} \varepsilon^{-\frac{\pi \omega}{4 \omega L}} \dots \dots \dots \text{(XVI)}$$

und so fort.

¹⁾ Die obige Ableitung gilt unter der Voraussetzung, daß der Stromleiter selbst keine merkliche Kapazität hat. Ist das der Fall, so treten außer der durch Gl. XIII bestimmten Schwingung noch Oberschwingungen auf, wie schon Kirchhoff gezeigt hat. Vgl. auch § 207.

Ist der Widerstand klein, so daß die Gleichungen XIII gelten. so ist

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\sqrt{LC}} \varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} \dots \dots \dots \text{(XVII)}$$

oder

$$\mathfrak{I}_1 = \omega \mathfrak{Q}_0 \varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} \dots \dots \dots \text{(XVIII)}$$

und so fort.

Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß bei gleicher Ladung die Stromstärke um so größer ist, je größer die Schwingungszahl ν ist, weil $\omega = 2\pi\nu$. Das erklärt sich daraus, daß die Dauer einer Viertelperiode, während welcher sich die Entladung und Ladung vollzieht, dann auch um so kürzer ist, weil $\tau = \frac{1}{\nu}$ ist. Theoretisch kann man also mit beliebig kleinen Ladungen beliebig große Stromstärken erzielen.

Da nur die erste Ladung \mathfrak{Q}_0 bei der Spannung \mathfrak{E}_0 zugeführt werden braucht, so ist die gesamte aufgewendete Arbeit (nach § 32) gleich $\frac{\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{E}}{2}$ oder $\frac{C \mathfrak{E}^2}{2}$. Je kleiner der Widerstand ist, desto mehr Schwingungen kommen zustande, desto länger dauert es, bis diese Arbeit ganz in Wärme umgesetzt ist¹⁾.

196. Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion.

Wir haben nun den Fall zu untersuchen, daß ein Stromkreis mit einem Kondensator und mit Selbstinduktion plötzlich an eine Stromquelle von konstanter EMK E angeschlossen wird, z. B. dadurch, daß der Schalter S (Abb. 330) geschlossen wird. Es entsteht dadurch ein von Null beginnender Strom, der so lange zunimmt, bis der Kondensator die seiner Kapazität C und der EMK der Stromquelle E entsprechende Ladung erhalten hat. Die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten (Kondensatorspannung) bezeichnen wir wieder mit e .

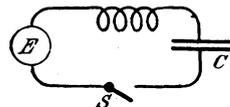


Abb. 330.

Im Gegensatz zu Abb. 325, wo keine äußere EMK vorhanden ist, wirkt hier in jedem Augenblick die um den Betrag der EMK E

¹⁾ Wäre der Widerstand Null, so würde ein ewigdauernder Wechsel zwischen Ladungs-Energie der Kapazität und magnetischer Energie der Selbstinduktion wie bei der Stromresonanz vor sich gehen (§ 180). In der Tat ergibt sich aus der Gleichsetzung dieser Energien: $\frac{C \mathfrak{E}^2}{2} = \frac{L \mathfrak{I}^2}{2}$ und aus der Grundgleichung $\mathfrak{E} = \omega LC$ die Frequenz ω der ungedämpften Schwingung.

verminderte Spannung, also $e - E$. Diese ist es, welche den Ohmschen und induktiven Spannungsabfall¹⁾ zu decken hat. Es ist also

$$e - E = iw + L \frac{di}{dt}$$

Nun ist wie im vorigen Paragraph

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{de}{dt}.$$

Die Spannungsgleichung geht also über in

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{w de}{L dt} + \frac{e}{LC} = \frac{LC}{E}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat dieselbe Form wie die für die Ladung eines Kondensators. Ihre Integration erfolgt in ähnlicher Weise. Wenn

$$w^2 \geq \frac{4L}{C}$$

ist, so erfolgt die Ladung aperiodisch, d. h. die Kondensatorspannung nimmt von Null an stetig zu, bis sie gleich der EMK E der ladenden Stromquelle geworden ist. Sie verläuft als Exponentialkurve wie in Abb. 310.

Ist aber $w^2 < \frac{4L}{C}$, so erfolgt die Ladung periodisch (oszillatorisch) und die Kondensatorspannung verläuft nach der Gleichung

$$e = E - E e^{-\frac{w}{2L} t} \left(\cos \omega t + \frac{w}{2\omega L} \sin \omega t \right).$$

Man sieht, das zweite Glied ist gleich dem Verlauf der Spannung bei der Entladung (Gl. VII). Für $t = 0$ ist das zweite Glied

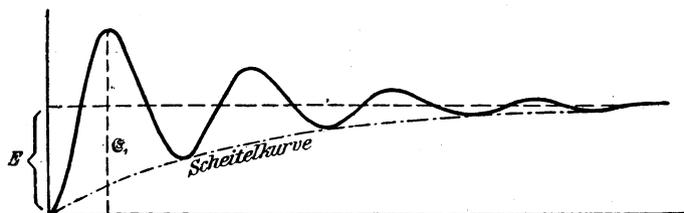


Abb. 331.

gleich E und daher $e = 0$. Man findet den ganzen Verlauf von e sofort, wenn man die Spannungswelle der Abb. 329 von dem konstanten Werte E abzieht. Es ergibt sich so der Wellenzug in Abb. 331.

¹⁾ Es kommt natürlich Widerstand und Selbstinduktion des ganzen Stromkreises einschließlich der Stromquelle in Betracht.

Die Scheitelkurve $E - E \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}$ läßt wiederum erkennen, wie rasch die Spannung bis zum endgültigen Werte ansteigt.

Für die Stromstärke ergibt sich in gleicher Weise wie im vorigen Paragraphen

$$i = -\frac{E}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \sin \omega t,$$

d. h. die Stromstärke verläuft in gleicher Weise wie bei der Entladung, erscheint aber hier mit negativen Vorzeichen, weil der Strom jetzt in den Kondensator hineinfließt, während er bei der Entladung aus dem Kondensator herausfließt. In Abb. 327 zeigt die rechte Hälfte den Verlauf des Stromes bei aperiodischer Ladung, in Abb. 326 bei periodischer Ladung.

Ist in Gl. VI das zweite Glied so klein, daß es vernachlässigt werden kann, so gelten für v , e und i die entsprechenden vereinfachten Formeln wie bei der Ladung.

197. Eigenschwingung, aufgedrückte und erzwungene Schwingung.

Es wurde schon in § 195 darauf hingewiesen, daß die Differentialgleichung II dieselbe Form hat wie für ein Pendel oder überhaupt einen schwingenden Körper. Daher hat auch Gl. IX für die Periodenzahl einer gedämpften elektrischen Schwingung dieselbe Form wie für ein gedämpftes Pendel, und Gl. XII für die Periodenzahl einer ungedämpften elektrischen Schwingung $\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)$ dieselbe Form wie für ein ungedämpftes Pendel $\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{T}{D}}}\right)$. An Stelle der

Trägheit T tritt die Selbstinduktion L , wie wir schon in § 187 gesehen haben, und an Stelle der Antriebskraft (Direktionskraft) D tritt der reziproke Wert der Kapazität.

Die Bewegung der Elektrizität bei Entladung eines Kondensators über einen Stromkreis mit Selbstinduktion erfolgt also nach denselben Gesetzen wie die Bewegung eines Pendels, das einmal aus der Ruhelage gebracht wurde. Man bezeichnet daher auch eine solche elektrische Schwingung als freie Schwingung oder Eigenschwingung des betreffenden Stromkreises. Dagegen entspricht eine periodische Bewegung der Elektrizität, die dadurch erzeugt wird, daß ein Stromkreis an eine Wechselstromquelle angeschlossen wird, einer schwingenden Bewegung, die einem Pendel durch eine äußere Kraft (Kurbel oder dgl.) aufgedrückt wird. Man kann daher jeden gewöhnlichen Wechselstrom als aufgedrückte Schwingung betrachten.

In § 175 haben wir gefunden, daß in einem Stromkreis mit Kapazität C und Selbstinduktion L ein plötzliches Anwachsen der Stromstärke stattfindet, wenn die Periodenzahl der Bedingung

$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ entspricht, also gleich der Eigenschwingung des Strom-

kreises ist, während bei jeder kleineren oder größeren Frequenz die Stromstärke sehr viel kleiner ist. Diese Erscheinung wurde wegen ihrer Ähnlichkeit mit akustischen Erscheinungen als elektrische Resonanz bezeichnet. Wir gewinnen nun einen tieferen Einblick in diese Erscheinung. Durch die elektrische Schwingung, die dem Stromkreis von der äußeren Stromquelle aufgedrückt wird, wird die Eigenschwingung dieses Stromkreises angeregt, und es entsteht eine erzwungene Schwingung von bedeutend größerer Stärke¹⁾.

Würde die Eigenschwingung allein bestehen, wie in § 195, so würde sie nach einiger Zeit verschwinden, weil sie vom Ohmschen Widerstand aufgezehrt, d. h. ihre Energie in Wärme umgesetzt wird. Die erzwungene Schwingung hingegen besteht so lange, als die äußere Stromquelle wirkt, weil diese den Verlust immer ersetzt. Das gilt auch, wenn von der aufgedrückten Schwingung die Eigenschwingung zur Resonanz angeregt wird. Daher kommt für den Eintritt der Resonanz nicht die Periodenzahl der gedämpften, sondern die der ungedämpften Schwingung (Gl. XIII) in Betracht, selbst wenn der Widerstand des Stromkreises noch so groß ist. Nur die Höhe der Resonanz, das ist in diesem Fall die Stromstärke, ferner die Kapazitätsspannung und die Induktionsspannung ist vom Widerstand abhängig.

Damit ein Stromkreis eine bestimmte Eigenschwingung hat, ist es notwendig, daß die Kapazität in Form von Kondensatoren, und die Selbstinduktion in Form von Spulen vorhanden d. h. auf einen gewissen Raum konzentriert ist. Hingegen hat jeder Leiter in jedem Längenelement merkliche Kapazität und Selbstinduktion, die also wie der Ohmsche Widerstand gleichmäßig über den ganzen Leiter verteilt sind. Ein Schwingungskreis, der nur verteilte Kapazität und Selbstinduktion enthält, hat aber nicht eine einzige, sondern mehrere Eigenschwingungen, von denen jede ein Vielfaches der niedrigsten Frequenz ist, ebenso wie ein gleichmäßig mit Masse versehener Stab oder eine gespannte Saite mehrere Eigenschwingungen

¹⁾ Wir machen also einen Unterschied zwischen aufgedrückter und erzwungener Schwingung. Unter der ersten verstehen wir die ursprüngliche vom Taktgeber (Wechselstrommaschine) erzeugte, unter der letzten die vom schwingenden Körper (der Elektrizität) wirklich ausgeführte Schwingung. Sie kann gleichbedeutend mit der aufgedrückten Schwingung sein (bei starrer Kupplung), oder durch den Einfluß der Eigenschwingung wesentlich verändert sein. Der Unterschied ist um so größer, je größer von vornherein der Unterschied zwischen aufgedrückter und Eigenschwingung ist, und je schwächer die Kupplung ist. Vgl. auch § 203.

hat, während ein Stab, bei dem die Masse zum größten Teil am Ende konzentriert ist, nur eine einzige hat. Über die räumliche Anordnung solcher Schwingungen vgl. § 207.

198. Die Dämpfung einer elektrischen Schwingung.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß die Elektrizitätsbewegung beim Öffnen und Schließen eines Stromkreises mit Selbstinduktion und Kapazität nach denselben Gesetzen vor sich geht, wie die Schwingung eines gedämpften Pendels oder dgl. Wäre der Widerstand w des ganzen Stromkreises Null, so würde die Differentialgleichung (II) übergehen in die eines ungedämpften Pendels. Die Gleichung für die Kondensatorspannung (VII) würde übergehen in

$$e = \mathfrak{E}_0 \cos \omega t,$$

und die für den Strom (X) in

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \sin \omega t,$$

d. h. es würde durch das Entladen oder Laden eines Kondensators ein ewig dauernder Wechselstrom eingeleitet werden, der jedoch vollständig wattlos ist, weil er nach dem Sinus, die Spannung aber nach dem Cosinus verläuft, so daß zwischen beiden genau 90° Phasenverschiebung besteht. Es wäre dann so wie bei einem ungedämpften Pendel, das, einmal angestoßen, ewig fortschwingen würde. Sowie aber der geringste Ohmsche Widerstand in dem Stromkreis vorhanden ist, nehmen die Scheitelwerte beständig ab, wie aus Abb. 329 zu ersehen ist.

Das Verhältnis zweier auf derselben (positiven oder negativen) Seite aufeinanderfolgender Scheitelwerte ist konstant und eignet sich daher als Maß für die Größe der Dämpfung. Man bezeichnet es als Dämpfungsverhältnis x . Es ist also (nach den Gleichungen VIII):

$$x = \frac{e}{e_2} = \frac{e_2}{e_4} = \frac{e_4}{e_3} = \dots = \varepsilon \frac{\pi w}{\omega L}$$

oder da $\omega = 2\pi\nu$ ist,

$$x = \varepsilon \frac{w}{2\nu L}.$$

Da ε eine reine Zahl (2,72) ist, so liegt das Maß für die Dämpfung im Potenzexponenten. Man kann ihn abgesondert erhalten, wenn man den natürlichen Logarithmus von x bildet. Es ist also

$$\log \text{nat } x = \frac{\pi w}{\omega L} = \frac{w}{2\nu L} = A.$$

Man bezeichnet diesen Wert als logarithmisches Dekrement (logarithmische Abnahme) der Schwingung¹⁾. Für den Fall, daß w klein ist, kann man Gl. XIII einsetzen und dann ist

$$A = \pi w \sqrt{\frac{C}{L}} \dots \dots \dots \text{(XIX)}$$

Man ersieht daraus, daß die Dämpfung um so kleiner ist, je kleiner der Widerstand ist, was wir schon aus dem vorigen erkannt haben, daß sie aber auch um so kleiner ist, je kleiner die Kapazität und je größer die Selbstinduktion ist. Ferner ist von Wichtigkeit, daß in diesem Ausdruck für A die Spannung nicht vorkommt; sie hat also keinen Einfluß auf die Dämpfung. Dagegen hat bei gleicher Dämpfung der ganze Schwingungsvorgang um so mehr Perioden, d. h. er dauert um so länger, je größer die Spannung ist, weil da der erste Scheitelwert um so größer ist. Bei gleicher Spannung dauert der ganze Schwingungsvorgang um so länger, je kleiner die Dämpfung ist²⁾.

Will man bei unveränderter Schwingungszahl ν eine möglichst kleine Dämpfung erzielen, so hat man zwei Wege: erstens Verminderung des Widerstandes w , da dieser, solange die Bedingung V gilt, keinen Einfluß auf die Schwingungszahl hat, zweitens Verminderung der Kapazität C und gleichzeitige proportionale Vergrößerung der Selbstinduktion L ; dann wird aus diesen beiden Ursachen das Verhältnis $\frac{C}{L}$ im logarithmischen Dekrement A kleiner, während das Produkt LC in der Schwingungsdauer ungeändert bleibt.

¹⁾ Führt man A in das zweite Glied der Gl. IX ein, so erhält man

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{2\pi}\right)^2}}$$

woraus man unmittelbar den Einfluß der Dämpfung auf die Frequenz ersieht.

Es ist bemerkenswert, daß das Dekrement A gleich ist dem Verhältnis der im Widerstand w während einer halben Welle verbrauchten Energie zur magnetischen Energie derselben halben Welle. Erstere ist $\frac{w\mathfrak{S}^2\tau}{2}$ (§ 131); letztere ist $\frac{L\mathfrak{S}^2}{2}$ (§ 167). Ihr Verhältnis ist

$$\frac{\frac{w\mathfrak{S}^2}{2} \cdot \frac{1}{2\nu}}{\frac{L\mathfrak{S}^2}{2}} = \frac{w}{2\nu L} = A$$

²⁾ Das gilt alles nur unter Voraussetzung, daß w , C und L konstant sind, sonst ist auch das Dämpfungsverhältnis nicht konstant. w ist nicht konstant, wenn die Schwingung über einen Funken verläuft. C ist nicht konstant, wenn Entladungen und Nebenschlüsse zwischen den Kondensatorplatten auftreten. L ist nicht konstant, wenn ein Eisenkern vorhanden ist.

Was den Widerstand w anbelangt, so kann dieser nicht beliebig klein gemacht werden, da er aus dem Widerstand des Leitungsdrahtes und des Funkens besteht. In der Regel ist jener sehr klein gegenüber diesem, so daß eine Verminderung jenes auf w wenig Einfluß hat.

Die Dämpfung bei der Entladung eines Kondensators beruht darauf, daß die im Kondensator vorhandene elektrische Arbeit bei ihrem Wechsel zwischen elektrischer und magnetischer Arbeit einen Verlust erleidet, und zwar dadurch, daß sie sich in Wärme umsetzt oder aus dem Schwingungskreis heraustritt.

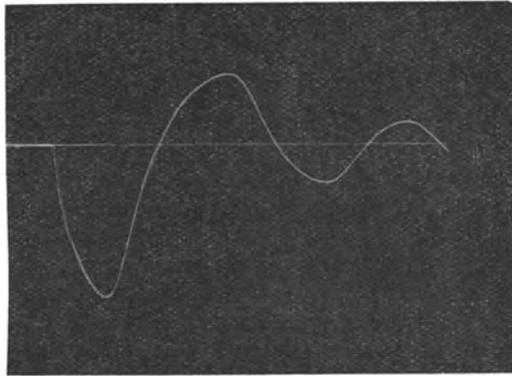


Abb. 332. Durch Hysterese verzerrte Eigenschwingung.

Der Umsatz in Wärme erfolgt durch den Widerstand des ganzen Stromkreises, also zum Teil in den Leitungsdrähten, zum Teil im Funken (vgl. § 190). Hier ist die Wärmeentwicklung unter Umständen so bedeutend, daß eine oberflächliche Verbrennung der Elektroden eintritt. Ein weiterer Umsatz in Wärme findet im Dielektrik des Kondensators (§ 181), durch sekundäre Ströme (Wirbelströme § 188) und beim Vorhandensein eines Eisenkörpers durch magnetische Hysterese statt.

Das Austreten der elektrischen Energie aus dem Schwingungskreis findet statt durch Übergang der Elektrizität in die umgebende Luft also Ausstrahlung¹⁾ oder durch Nebenschlüsse über mangelhaft isolierte Teile des Stromkreises insbesondere zwischen den Platten

¹⁾ Die Ausstrahlung erfolgt in Form von dunklen Entladungen, Glimmlicht, Büschellicht oder Funkenentladungen (§ 246 u. f.). Die magnetischen Kraftlinien, welche entsprechend der Stromstärke, und die elektrischen Kraftlinien, welche entsprechend der Kapazität entstehen und den umgebenden Raum erfüllen, indem sie mit wechselndem Vorzeichen entstehen und verschwinden, also insbesondere zwischen Geber und Sender der drahtlosen Telegraphie vorhanden sind, gehören nicht zur Energie verzehrenden Ausstrahlung, wenn auch das Wort „Ausstrahlung“ häufig darauf angewendet wird.

eines Kondensators. Ausstrahlungen und Nebenschlüsse sind um so größer, je höher die Spannung, je größer die leitende Oberfläche des Schwingungskreises ist, und je mehr Spitzen und Kanten er hat. Sie können fast ganz beseitigt werden, wenn man den Schwingungskreis (hauptsächlich Kondensator und Funkenstrecke) unter Öl bringt. Als wichtigste und unvermeidlichste Ursache der Dämpfung bleibt dann der Funkenwiderstand.

Die Hysterese in einer Spule mit Eisenkern bewirkt nicht nur eine Dämpfung, sondern auch eine Verzerrung der Schwingung (wie Abb. 332 zeigt) aus demselben Grunde wie die in Abb. 249 konstruierte Verzerrung des Magnetisierungsstromes.

199. Überspannung beim Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion.

Wie man aus Abb. 331 ersieht, erreicht die Spannung bei jedem positiven Scheitelwert einen höheren Wert als die EMK E der Stromquelle, und zwar um soviel höher als der betreffende Scheitelwert der gedämpften Sinuswelle beträgt. Der erste und höchste Scheitelwert E_1 tritt ein für $\cos \omega t + \frac{w}{2\omega L} \sin \omega t = -1$, d. h. für $\omega t = \pi$.

$$\text{Er ist} \quad \mathfrak{E}_1 = E + E\varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}}.$$

Der größte Wert, der theoretisch möglich wäre, nämlich $\mathfrak{E}_1 = 2E$, würde eintreten, wenn $w = 0$ wäre. Sonst sind \mathfrak{E}_1 und alle folgenden Scheitelwerte um so kleiner, je größer die Dämpfung ist, d. h. je größer nach Gl. XIX Widerstand und Kapazität und je kleiner die Selbstinduktion ist.

Für das Vorstehende gilt die selbstverständliche Voraussetzung, daß vor dem Schließen des Stromkreises die Kapazität noch keine Ladung hatte. Ist aber ein Ladungsrückstand mit der Spannung $\pm E_r$ von einem vorherigen Betriebe vorhanden, so ist der höchste Scheitelwert gleich

$$\pm E_r + E + E\varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}}.$$

Es kann also ein (theoretisch unbegrenzter) Höchstwert auftreten, wenn E_r gleiches Vorzeichen wie E hat. Andernfalls ergibt sich eine entsprechende Verminderung der resultierenden Spannung. Wir haben also hier einen ähnlichen Fall, wie die Vergrößerung der Kraftlinienmenge beim Einschalten eines Wechselstromkreises, der einen Eisenkern mit remanentem Magnetismus hat (§ 193). Die dort mögliche weitere Steigerung der Stromstärke, weil die magnetische Durchlässigkeit schließlich abnimmt, ist hier nicht möglich, weil die Dielektrizitätskonstante im wesentlichen konstant ist. Ist der Stromkreis geschlossen, so verschwindet die rückständige Ladung und da-

mit E_r meistens sehr schnell, viel schneller als der remanente Magnetismus.

Das Auftreten einer höheren Spannung als die EMK der Stromquelle kann eine Durchbrechung der Isolation des Stromkreises zur Folge haben. Diese Gefahr ist um so kleiner, je größer die Dämpfung ist, weil dann die Scheitelwerte um so kleiner sind, und in um so geringerer Zahl auftreten¹⁾.

200. Ein- und Ausschalten langer Leitungen.

In der Praxis kommt sehr häufig der Fall vor, daß eine lange Leitung an einen Stromerzeuger angeschlossen oder abgeschaltet wird. Ist sie offen, so ist es ein Kondensator, der mit der Selbstinduktion des Stromerzeugers in Reihe geschaltet ist. Wir haben dann den in § 195—199 behandelten Fall. Ist sie durch einen Stromverbraucher geschlossen, so verläuft gleichzeitig ein Leitungsstrom neben dem Kapazitätsstrom. Für den zeitlichen Verlauf des letzteren gilt qualitativ dasselbe wie bei offener Leitung.

Wird ein solcher Stromkreis derart geschlossen (eingeschaltet), daß sich das Schließen während eines Bruchteiles einer halben Periode vollzieht, so entstehen Schwingungen wie in § 196. Abb. 333 zeigt eine oszillographische Aufnahme²⁾ vom Einschalten und Abschalten eines offenen Kabels, wobei

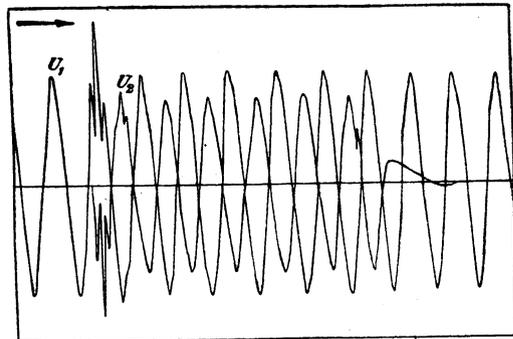


Abb. 333.

¹⁾ Das Durchbrechen des Dielektriks eines Kondensators bei der Ladung desselben ist dann häufig zu bemerken, wenn es aus Luft besteht. Daraus erklärt sich, warum bei Funkeninduktoren und anderen Apparaten zur Erzeugung von Funkenentladungen plattenförmige Elektroden eine bessere Wirkung geben als kugelförmige oder spitzenförmige, weil jene eine größere Kapazität darstellen. Es tritt infolgedessen beim Entstehen der EMK, die ja als eine Ladung der Elektroden zu betrachten ist, eine höhere Spannung auf als die von der Stromquelle erzeugte, so daß es schon bei einer kleineren EMK zu einer Funkenentladung kommt.

Der Unterschied ist besonders deutlich, wenn man einmal plattenförmige und einmal kugelförmige Elektroden mittels eines Schalters plötzlich an eine Stromquelle anschließt. Bei ersteren erhält man unter gleichen Verhältnissen größere Schlagweiten als bei letzteren. Bei jenen erhält man daher die richtigen, von Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand unabhängigen Schlagweiten nur, wenn man die EMK der Stromquelle langsam steigert (vgl. auch § 249).

²⁾ Nach David, ETZ 1905 S. 1164.

U_1 die Spannung des Stromerzeugers, U_2 die des Kabels bedeutet. Wie man sieht, entstanden beim Einschalten drei Schwingungen von höherer Frequenz wie die aufgedrückte Wechselspannung. Das Ausschalten vollzog sich wegen der Funkenbildung im Schalter nicht augenblicklich, sondern erstreckte sich, wie man sieht, über zwei halbe Wellen (vgl. § 193 B). Dabei ergab sich kein wesentlicher Unterschied, ob ein Ölschalter oder ein Luftschalter verwendet wurde.

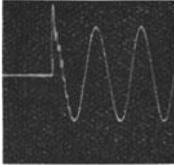


Abb. 334.

Ein Unterschied zeigt sich erst, wenn die Stromstärke so groß ist, daß am Luftschalter ein Lichtbogen auftritt.

Abb. 334 zeigt die Spannung beim Einschalten eines Kabels mit angeschlossenem Transformator¹⁾. Wie man sieht, entstand hier eine Schwingung von höherer Frequenz, aber sehr kleinen Amplituden. Der Strom hatte wegen des angeschlossenen Transformators einen ähnlichen Verlauf wie in Abb. 316. Abb. 335 zeigt die Schwingungen²⁾, die sich über die Wechselspannung überlagern, wenn durch eine Funkenstrecke bei jeder Halbwellen ein Funkenübergang entsteht.

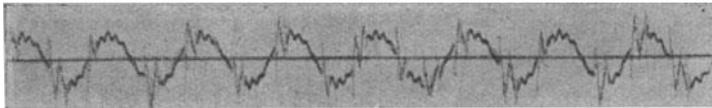


Abb. 335.

Aus allen diesen Bildern ersieht man, daß der größte Spannungswert niemals das Doppelte des Scheitelwertes des Stromerzeugers übersteigt gemäß § 196.

Vollzieht sich das Ausschalten infolge Funkenbildung während eines Zeitraumes, der mehrere Halbwellen umfaßt, so nehmen die Scheitelwerte allmählich ab, wie Abb. 336 zeigt, die sich auf das Ausschalten eines Drehstromkabels mit Transformator bezieht. J ist der Strom, E sind die Spannungen in zwei verschiedenen Phasen. Bei langsamer Unterbrechung besteht eben kein Unterschied gegenüber dem in § 193 besprochenen Stromkreis ohne Kapazität.

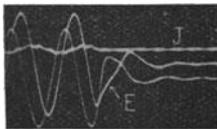


Abb. 336.

Über die räumliche Verteilung von Schwingungen auf langen Leitungen vgl. § 207.

¹⁾ Nach Junkersfeld und Schweitzer, *Proceed. Amer. Inst. Electr. Eng.* Bd. 27, 1908.

²⁾ Nach Schrottke und Delling, *ETZ* 1910, S. 579.

201. Umformung elektrischer Schwingungen. Tesla-Transformator.

Die durch Entladung eines Kondensators über einen Stromkreis mit Selbstinduktion auftretenden Schwingungen können (nach § 195, Gl. VIII) keine höhere Spannungsamplitude haben als die ursprüngliche Kondensatorspannung, das ist die Spannung der Stromquelle, die zum Laden des Kondensators dient. Will man die Schwingungen auf höhere Spannung bringen, so muß man sie mittels eines Transformators umformen. Abb. 337 zeigt diese Anordnung schematisch. Mittels der Drähte a , b , die zu einer geeigneten Stromquelle führen (Funkeninduktor, Wechselstromtransformator), wird der Kondensator C_1 geladen, bis die Funkenstrecke F von der Spannung durchschlagen wird. Dadurch wird der Kondensator entladen und zwar oszillatorisch, wenn die Bedingungsgleichung V (S. 407) erfüllt ist.

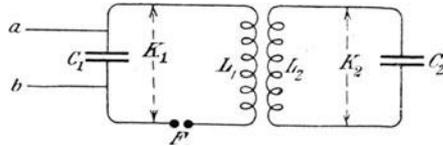


Abb. 337.

Diese elektrischen Schwingungen werden durch den Transformator $L_1 L_2$ umgeformt, und man erhält im allgemeinen in der sekundären Wicklung elektrische Schwingungen von höherer Spannung, wenn die Windungszahl der sekundären Wicklung eine höhere ist als die der primären.

Der Kondensator C_2 läßt aber nur dann einen stärkeren Strom durch, wenn er in einem solchen Verhältnis zur sekundären Selbstinduktion L_2 steht, daß Resonanz eintritt (§ 174)¹⁾.

Aus § 152 wissen wir, daß bei gegenseitiger Induktion der sekundäre Strom auf den primären zurückwirkt. Daraus kann man schließen, daß die Schwingung, die im sekundären Kreis ausgelöst wird, auch im primären auftritt. Nach der in § 197 gegebenen Darstellung kann man den Vorgang so beschreiben: Durch die magnetische Kupplung zwischen den beiden Wicklungen wird die im primären Kreis durch Entladung des Kondensator C_1 erzeugte Schwingung dem sekundären Kreis aufgedrückt. Dadurch wird der sekundäre Kreis zu seiner Eigenschwingung angeregt, und diese wird wiederum dem primären Kreis aufgedrückt, so daß man in jedem Stromkreis zwei Schwingungen hat.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Stromkreisen wird durch die Kraftlinien hergestellt, die von beiden Wicklungen umschlossen werden; es ist also eine magnetische Kupplung. Sie wird

¹⁾ Man kann übrigens den Kondensator C_2 auch weglassen und doch noch Resonanz im sekundären Kreis erreichen, nämlich dann, wenn bei hohen Periodenzahlen schon die Kapazität der Wicklung und der angeschlossenen Leitungen ausreicht.

wie bei jedem Transformator durch den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion M zahlenmäßig ausgedrückt, dessen Zusammenhang mit den Selbstinduktionskoeffizienten der beiden Wicklungen (§ 150) bestimmt ist durch

$$M^2 = \kappa^2 L_1 L_2,$$

wobei κ den Kupplungsfaktor bedeutet. κ und M sind um so kleiner, je größer die magnetische Streuung ist, d. h. je mehr Kraftlinien es gibt, die nur zu einem der beiden Stromkreise gehören.

Die Spannungsgleichungen eines Transformators sind nach § 147:

$$w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = k_1$$

$$w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = k_2.$$

Sind die Ohmschen und induktiven Widerstände der äußeren Verbindungsdrähte verschwindend klein, so ist k_1 gleich der Spannung am Kondensator C_1 und k_2 gleich der Spannung am Kondensator C_2 , wie in Abb. 337 angenommen wurde¹⁾. Dann ist (Gl. 202):

$$k_1 = \frac{1}{\omega^2 C_1} \frac{di_1}{dt}$$

$$k_2 = \frac{1}{\omega^2 C_2} \frac{di_2}{dt}.$$

Mithin

$$w_1 i_1 + \left(L_1 - \frac{1}{\omega^2 C_1} \right) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$w_2 i_2 + \left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C_2} \right) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Die Behandlung dieses allgemeinen Falles würde hier zu weit führen und hat nichts Wichtiges gegenüber dem einfacheren Fall, wo die beiden Widerstände verschwindend klein sind. Es sei also

$$w_1 = w_2 = 0.$$

Dann lassen sich die letzten beiden Gleichungen ohne weiteres integrieren und man erhält

$$\left. \begin{aligned} \left(L_1 - \frac{1}{\omega^2 C_1} \right) i_1 + M i_2 &= 0 \\ \left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C_2} \right) i_2 + M i_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

¹⁾ Da eine äußere Selbstinduktion hier nicht vorhanden ist, wird (wie in § 186) $L_{2i} = L_2$ gesetzt.

Oder wenn man für M den Kupplungsfaktor κ einführt

$$i_2 = -i_1 \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2}} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

$$i_2 = -i_1 \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen i_1 und i_2 , so erhält man folgende Gleichung für ω

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2}{(1 - \kappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} + \frac{1}{(1 - \kappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} = 0.$$

Daraus erhält man zwei verschiedene Werte für ω , die wir mit ω_a und ω_b bezeichnen

$$\omega_a^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 - \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 \kappa^2 L_1 L_2 C_1 C_2}}{2(1 - \kappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} \text{(IV)}$$

$$\omega_b^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 + \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 \kappa^2 L_1 L_2 C_1 C_2}}{2(1 - \kappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} \text{(V)}$$

In jedem der beiden Stromkreise treten also zwei Schwingungen von verschiedener Periodenzahl auf¹⁾. Daß sie in jedem auftreten müssen, folgt daraus, daß die letzten Gleichungen aus der Vereinigung der Gleichungen II und III, von denen die erste für den primären, die zweite für den sekundären Kreis gilt, erhalten wurden. Ferner folgt es aus dem Grundgesetz des Transformators, wonach die Periodenzahlen in beiden Kreisen unbedingt dieselben sind. Zwei verschiedene Schwingungen in jedem Stromkreis treten sogar dann auf, wenn jeder der beiden Stromkreise für sich allein bestehend dieselbe Eigenschwingung hätte, d. h. wenn

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

wäre. Dann ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} \omega_a^2 &= \frac{1}{(1 + \kappa) L_1 C_1} \\ \omega_b^2 &= \frac{1}{(1 - \kappa) L_1 C_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(VI)}$$

Aus den Gl. IV und V geht hervor, daß die Periodenzahlen von der magnetischen Kupplung κ abhängen. Abb. 338 zeigt die

¹⁾ Auch die Dämpfungsdekremente der beiden Schwingungen sind verschieden und von der Kupplung abhängig. Darauf kann hier nicht weiter eingegangen werden, weil es nur für die drahtlose Telegraphie Bedeutung hat.

Abhängigkeit der beiden Schwingungen von der magnetischen Kupp-
 lung für $L_1 C_1 = 10^{-12}$ und $L_2 C_2 = \frac{3}{4} \cdot 10^{-12}$. Wir betrachten die
 äußersten Fälle ($\kappa = 1$, $\kappa = 0$); zunächst, wenn die Kupplung eine

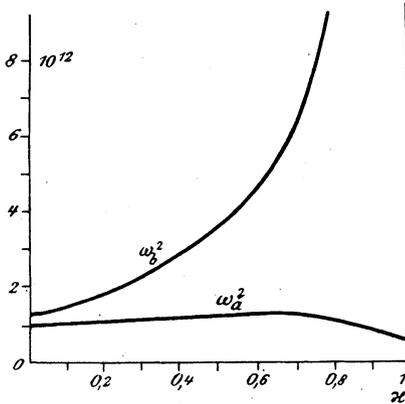


Abb. 338.

vollständige ist, d. h. wenn keine
 magnetische Streuung zwischen
 den beiden Stromkreisen besteht.
 Für diesen Fall ist

$$\kappa = 1$$

und die Gl. IV und V gehen
 über in

$$\omega_a^2 = \frac{0}{0} \dots \text{(VII)}$$

$$\omega_b^2 = \infty \dots \text{(VIII)}$$

Die Bedeutung des unbestimm-
 ten Ausdruckes $\frac{0}{0}$ für ω_a^2 er-
 hält man, wenn man auf die
 Gl. II und III zurückgeht und

$\kappa = 1$ setzt. Dann erhält man eine lineare Gleichung für ω^2 und
 dieser Wert ist

$$\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \dots \dots \dots \text{(IX)}$$

In jedem der beiden Stromkreise besteht also in diesem Falle
 nur eine Schwingung, deren Frequenz einen Mittelwert aus den
 Eigenschwingungen beider darstellt. Diesen Fall praktisch zu ver-
 wirklichen ist unmöglich, weil eine gänzliche Vermeidung der Streu-
 ung bei einem Transformator unmöglich ist. Hier aber kommt es
 nicht nur auf die magnetische Kupplung zwischen den Wicklungen
 des Transformators, sondern der ganzen Stromkreise einschließlich
 der Verbindungsleitungen an, deren Kraftlinien mit dem anderen
 Stromkreis nicht gekuppelt sind. Dagegen ist eine vollständige
 Kupplung bei mechanischen Schwingungen leicht möglich; man be-
 zeichnet sie als starre Kupplung (vgl. § 203) und sieht ohneweiteres
 ein, daß in diesem Falle beide Systeme nur eine und dieselbe
 Schwingung ausführen können.

Wir betrachten nun den anderen äußersten Fall der magneti-
 schen Kupplung, nämlich

$$\kappa = 0,$$

der ist vorhanden, wenn die beiden Stromkreise nahezu unabhängig
 voneinander sind. Dann gehen die Gl. IV und V über in

$$\omega_a^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \dots \dots \dots \text{(X)}$$

$$\omega_b^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \dots \dots \dots \text{(XI)}$$

Jeder Stromkreis führt also seine Eigenschwingung, und die des anderen Stromkreises aus.

Da die Kupplung so schwach ist, bleibt die Eigenschwingung in jedem Stromkreis unverändert. Jeder drückt aber auch seine Eigenschwingung dem anderen auf, und diese bleibt aus demselben Grunde auch unverändert. Diese aufgedrückten Schwingungen sind natürlich um so schwächer, je schwächer die Kupplung ist und verschwinden ganz, wenn die Kupplung gänzlich aufgehoben ist.

Das Vorstehende gilt strenge genommen nur für ungedämpfte Schwingungen, da wir die Widerstände gleich Null gesetzt haben. Angenähert gilt es aber auch für gedämpfte Schwingungen, da der Widerstand (nach Gl. IX, S. 410) auf die Schwingungszahl wenig Einfluß hat, wenn er nicht so groß ist, daß sich die Kondensator-entladung der Aperiodizität nähert.

202. Fortsetzung: Resonanz zwischen zwei gekuppelten schwingungsfähigen Stromkreisen.

Wir betrachten nun die sekundäre Stromstärke und Klemmenspannung. Die Gl. III besagt, daß die beiden Stromstärken (wie beim gewöhnlichen Transformator § 151) in jedem Augenblick einander entgegengesetzt sind und in einem bestimmten Verhältnis stehen. Das gilt also auch für die Scheitelwerte und daher ist

$$\mathfrak{S}_2 = - \mathfrak{S}_1 \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \dots \dots \dots \text{(XII)}$$

Da die Klemmenspannungen nach der Voraussetzung mit den Kondensatorspannungen identisch sind, so ist nach § 172 (Gl. 200)

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\mathfrak{S}_2}{\omega C_2} \qquad \mathfrak{R}_1 = \frac{\mathfrak{S}_1}{\omega C_1}$$

und daher
$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} \cdot \frac{C_1}{C_2} = - \mathfrak{R}_1 \frac{\kappa \omega C_1 \sqrt{L_1 L_2}}{C_2 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} \dots \text{(XIII)}$$

Weiter folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\mathfrak{S}_2 = - \mathfrak{R}_1 \frac{\kappa \omega^2 C_1 \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \dots \dots \dots \text{(XIV)}$$

Aus Gl. II folgt

$$\mathfrak{S}_1 = - \mathfrak{S}_2 \frac{\kappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}} \dots \dots \dots \text{(XV)}$$

und nach Einsetzung der Gl. XIV:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_1 \frac{\kappa^2 \omega^3 C_1 L_1 L_2}{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \dots \dots \text{(XVI)}$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen ohne weiteres, daß \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{R}_2 unendlich groß werden, also Resonanz eintritt, wenn

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} \dots \dots \dots \text{(XVII)}$$

oder wenn

$$\omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2} \dots \dots \dots \text{(XVIII)}$$

d. h. wenn für den einen oder den anderen Stromkreis die Resonanzbedingung als einzelner Stromkreis (entsprechend seiner Eigenschwingung) erfüllt ist.

Sind die Widerstände nicht Null, so werden \mathfrak{R}_2 und \mathfrak{S}_2 und \mathfrak{S}_1 natürlich nicht unendlich groß sondern um so kleiner, je größer die Widerstände sind. Die Lage des Maximums hinsichtlich der Periodenzahlen wird aber nur wenig geändert, weil letztere von den Widerständen wenig abhängig sind.

Wie sehr \mathfrak{R}_2 und \mathfrak{S}_2 von der Kupplung κ abhängen, kann man aus den vorstehenden Formeln nicht ersehen, weil κ auch in ω enthalten ist (Gl. IV, V). Wir betrachten daher wieder die beiden äußersten Fälle. Ist.

$$\kappa = 1,$$

d. h., ist die Kupplung eine vollständige (starre), so erhält man nach Einsetzung der Gl. IX in Gl. XIII

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}};$$

und da sich die Selbstinduktionskoeffizienten so verhalten wie die Quadrate der Windungszahlen, so ist

$$\frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \ddot{u}.$$

Die Klemmenspannungen verhalten sich also wie die Windungszahlen. Für das Verhältnis der Ströme ergibt sich auf gleiche Weise

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{N_2}{N_1} = \frac{C_2}{C_1} \ddot{u}.$$

Ist $\kappa = 0$,

d. h., sind die beiden Stromkreise voneinander unabhängig, so ist $\mathfrak{R}_2 = 0$. Ist κ sehr klein, aber noch nicht Null, so gilt für die erregende Schwingung, welche durch die Entladung des Kondensators

Während also mit zunehmender Kupplung die Scheu vor der Resonanz wächst, nimmt die sekundäre EMK zu, so daß die höchste sekundäre Klemmenspannung bei einem Zwischenwerte der Kupplung eintritt.

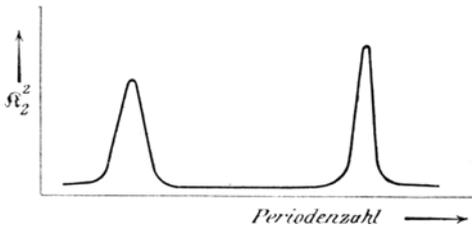


Abb. 340.

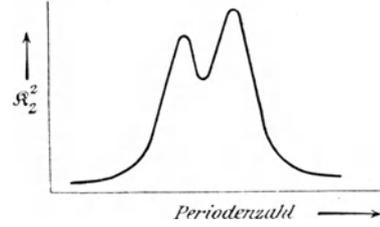


Abb. 341.

Ist die Kupplung nicht sehr schwach, so treten entsprechend den beiden Schwingungen in jedem Stromkreis zwei verschiedene Resonanzstellen auf, die um so weiter auseinanderrücken, je stärker die Kupplung ist. Verändert man also die Periodenzahlen, wozu (nach Gl. IV, V) schon die Veränderung von C_1 oder C_2 genügt, so kommt zuerst die eine, dann die andere Schwingung zur Resonanz, und man erhält für die sekundäre Spannung oder für die Stromstärken den in Abb. 340 dargestellten Verlauf. Die Höhe der Resonanz ist im allgemeinen verschieden. Je stärker die Kupplung, desto stärker die Scheu vor der Resonanz, desto unschärfer werden die Resonanzen, und desto weiter rücken sie auseinander. Je schwächer die Kupplung, desto schärfer werden die Resonanzen, und desto näher rücken sie zusammen, so daß sie ineinander übergehen können, wie Abb. 341 zeigt, und schließlich ganz zusammenfallen.

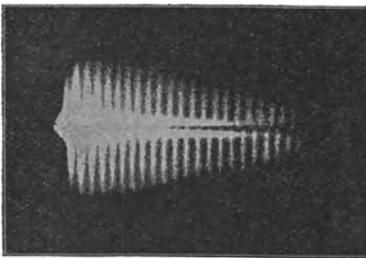


Abb. 342.

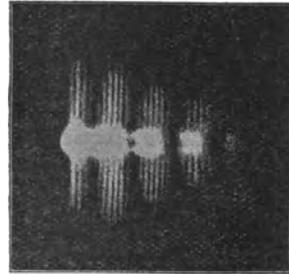


Abb. 343.

Das Auftreten zweier Schwingungen in demselben Stromkreis hat zur Folge, daß durch Interferenz derselben Schwebungen entstehen. Abb. 342 zeigt die Schwingung eines einzelnen Stromkreises¹⁾

¹⁾ Nach Aufnahmen von Diesselhorst (Verh. d. Deutsch. phys. Gesellsch. 1907, Nr. 14) mittels des Glimmlichtoszillographen.

mit Kapazität und Selbstinduktion (gemäß Abb. 329). Ab. 343 zeigt die Schwingung desselben Stromkreises bei Anwesenheit eines sekundären schwingungsfähigen Stromkreises. Abb. 344 zeigt den Verlauf

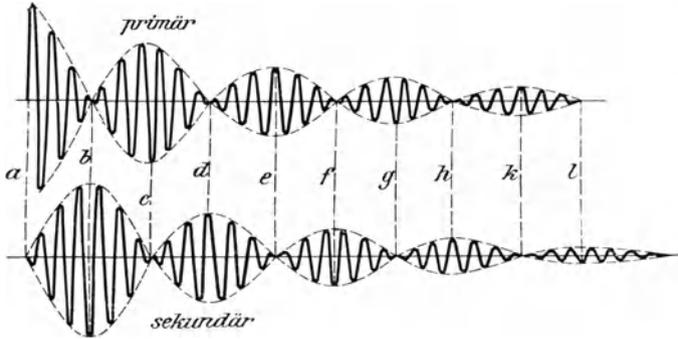


Abb. 344.

des Stromes in beiden Stromkreisen von dem Augenblick an, wo die Funkenentladung im primären Kreise einsetzt. Abb. 345 zeigt dasselbe bei schwächerer Kupplung¹⁾. Es besteht (wie bei einem gewöhnlichen Transformator mit kleinem Widerstand) Phasenverschiebung von nahezu 180° zwischen den beiden Strömen. Bemerkens-

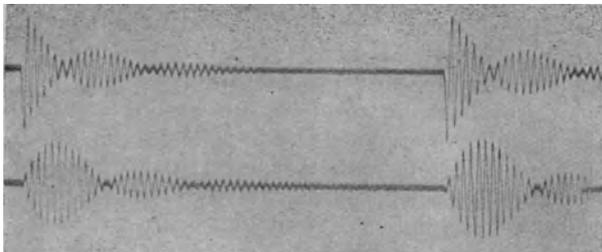


Abb. 345.

wert ist, daß die Energie zwischen beiden Stromkreisen hin und her schwingt²⁾, und zwar mit der Periode bf . Zu den Zeitpunkten b, d, f, h ist die Energie im primären Stromkreis Null, im sekundären dagegen ein Maximum. In den Zeitpunkten a, c, e, g ist es umgekehrt. (Dieser Wechsel der Schwingungsenergie zwischen den beiden Systemen läßt sich sehr deutlich an dem mechanischen Modell, Abb. 349, verfolgen.)

¹⁾ Abb. 345, 346 und 347 aus B. Glatzel, „Methoden zur Erzeugung von Hochfrequenzenergie“, Leipzig 1913.

²⁾ Das steht im Einklang mit dem Übergang der Entladungsenergie auf den sekundären Stromkreis beim Unterbrechen eines kapazitätslosen Stromkreises (§ 188).

Die Schwingungen im primären Stromkreis können natürlich nur solange andauern, als der Funken besteht. Ist er verlöscht, z. B. im Augenblick t , so ist der primäre Stromkreis offen und seine Schwingung unterbrochen; die beiden Stromkreise sind entkuppelt. Ist der sekundäre Stromkreis noch geschlossen, so verläuft hier die Schwingung weiter, bis ihre ganze Energie durch Umsatz in Wärme verbraucht ist. Verlöscht der primäre Funken schon zur Zeit b , so kann nun die Energie vom sekundären Kreis nicht mehr auf den primären zurückschwingen, sondern verläuft im sekundären Kreis als wenig gedämpfte Schwingung (Abb. 346), wie in jedem einzelnen

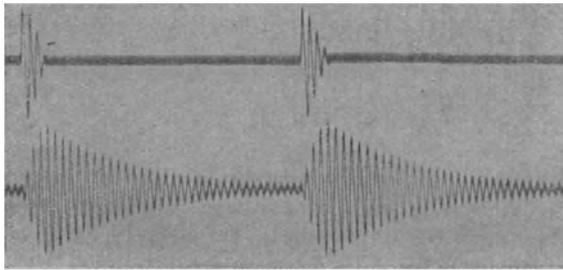


Abb. 346.

schwingungsfähigen Stromkreis ohne Funkenstrecke, also mit kleinem Widerstand. Man nennt das Stoßerregung¹⁾. Das frühzeitige Verlöschen des primären Funkens wird dadurch bewirkt, daß man ihn möglichst stark abkühlt, indem man die Funkenstrecke in mehrere kurze, hintereinander geschaltete Strecken zerlegt und die Elektroden aus starken Kupferplatten herstellt (Löschfunkenstrecken); allenfalls bringt man sie noch in Wasserstoff, der ein größeres Wärmeleitungsvermögen hat als Luft. Wenn der primäre Funken frühzeitig verlöscht, hat das noch den Vorteil, daß man eine stärkere Kupplung anwenden, also von vornherein mehr Energie auf den sekundären Kreis übertragen kann, ohne daß man zwei Schwingungen von ähnlicher Frequenz erhält. Denn wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, treten in jedem Stromkreis zwei Schwingungen auf, die nur bei sehr schwacher Kupplung in eine übergehen. Daher mußte man bei der drahtlosen Telegraphie früher, wo man ohne Löschfunkenstrecken arbeitete, sehr schwache Kupplung anwenden, um im Sender nur eine Schwingung zu erhalten. Hätte man hier zwei Schwingungen, so wäre die Abstimmung auf Resonanz zwischen Sender und Empfänger unsicher. Wenn aber der primäre Funken frühzeitig verlöscht, so ist der Sendedraht, der den sekundären Teil des Schwingungserzeugers bildet, von da an entkuppelt und schwingt

¹⁾ M. Wien, Ann. d. Phys., Bd. 25, 1908.

nun wie jeder einzelne Stromkreis nur mit einem sinusförmigen Wellenzug weiter.

Ein weiterer Vorteil der frühzeitigen Funkenlöschung besteht darin, daß der Funken nur kurze Zeit besteht und infolgedessen der nächste Funken in viel kürzerer Zeit folgen kann, als wenn er so lange andauert, wie in Abb. 345. Eine neue Funkenentladung entsteht nämlich immer dann, wenn nach dem Verlöschen eines Funkens die Stromstärke und infolgedessen auch der Spannungsabfall Null geworden ist, so daß die Leerlaufspannung auftritt, die eine neue Entladung bewirkt. Die Funkenfolge kann noch weiter gesteigert werden, wenn man dafür sorgt, daß die periodische Schwingung des primären Stromkreises, die in Abb. 346 aus 6 Halbwellen besteht, nur mehr aus einer Halbwelle besteht, so daß der Strom im primären Kreis im wahren Sinne des Wortes nur aus aufeinanderfolgenden Stromstößen besteht, wie Abb. 347 nach einer oszillographischen Aufnahme zeigt. Zu diesem Zwecke stellt man den Widerstand des primären Kreises so ein, daß die Schwingung aperiodisch ist (vgl. S. 407). Das hat den weiteren Vorteil, daß man dabei den primären und sekundären Kreis nicht aufeinander abstimmen muß. Die Kupplung zwischen primärem und sekundärem Stromkreis hat jetzt nur den Zweck, den primären Stromstoß auf den sekundären Stromkreis zu übertragen (aperiodische Stoßerregung), der nun nach jedem Stromstoß seine Eigenschwingung ausführt, wie bei jeder Kondensatorentladung. Die Kupplung kann dabei stärker sein, als bei der oszillierenden Stoßerregung. Auf diese Weise kann man bis zu 10000 Stromstößen oder Funkenentladungen in der Sekunde kommen und hat überhaupt nicht mehr den Eindruck von gewöhnlichen Funken, sondern den eines tönenden Lichtbogens zwischen den Elektroden¹⁾. Bei Funken nach Abb. 345 kann man höchstens 50 Entladungen in der Sekunde anwenden.

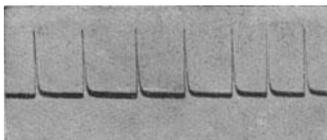


Abb. 347.

¹⁾ Die Anwendung solcher tönenden Funken bringt noch den Vorteil mit sich, daß man die telegraphischen Zeichen von atmosphärischen oder anderen Störungen unterscheiden kann. Schließt man nämlich an den Empfangsapparat ein Telephon an, so hört man in diesem natürlich denselben Ton, den der genannte Lichtbogen im Sender hat. Um die wünschenswerte Reinheit des Tones im Sender zu erzielen, verwendet man Wechselstrom mit Resonanztransformator (§ 186) und stellt die Funkenstrecke so ein, daß beim Scheitelwert jeder Halbwelle eine aperiodische Stoßentladung eintritt. Wird Gleichstrom verwendet, so muß die Anzahl der Entladungen durch einen dem Entladungskreis parallel geschalteten (elektrisch gekuppelten) Schwingungskreis mit entsprechender Selbstinduktion und Kapazität geregelt werden. Darauf kann hier nicht näher eingegangen werden.

203. Allgemeine Betrachtung über die Schwingungen gekuppelter Systeme.

Dasselbe Ergebnis wie im Vorhergehenden, wonach bei sehr schwacher Kupplung Resonanz eintritt, wenn die im primären Stromkreis erzeugte Schwingung gleiche Frequenz hat wie die Eigenschwingung des sekundären Kreises, haben wir auch bei dem in § 186 behandelten Problem (Resonanztransformator) erhalten, wo ein Transformator in gewöhnlicher Weise an eine Wechselstromquelle angeschlossen ist, und der sekundäre Kreis Kapazität und Selbstinduktion enthält, also zu Eigenschwingungen befähigt ist. Auch dort haben wir gesehen, daß Resonanz eintritt, wenn die Frequenz der Wechselstromquelle gleich der Eigenschwingung des sekundären Kreises ist. Ein wesentlicher Unterschied aber liegt darin, daß bei jenem Falle in jedem Kreis nur eine Schwingung auftritt, während bei dem zuletzt behandelten Falle in jedem Kreis zwei Schwingungen auftreten, die nur für $\kappa = 1$ in eine zusammenfallen (Gl. IX, S. 426).

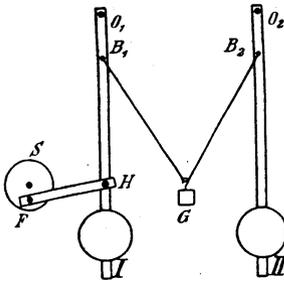


Abb. 348.

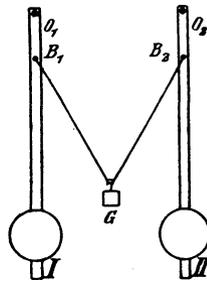


Abb. 349.

In § 197 haben wir gesehen, daß die elektrischen Schwingungen nach denselben Gesetzen vor sich gehen, wie mechanische Schwingungen. Das gilt auch für Schwingungen gekuppelter Systeme. Sehr deutlich kann man dies an folgendem Apparat zeigen (Abb. 348). Zwei Pendel I und II mit den Drehpunkten O_1 und O_2 sind durch einen Faden B_1, B_2 , der durch das Gewicht G gespannt wird, miteinander verbunden. Der Faden muß im Verhältnis zu den Ausschlägen der beiden Pendel sehr lang sein, damit er ihre Bewegung nicht hindert. Die durch das Gewicht bewirkte Spannung des Fadens stellt die Kupplung zwischen den beiden Pendeln dar. Durch Veränderung dieses Gewichtes kann die Stärke der Kupplung verändert werden. Ist kein Gewicht vorhanden, so besteht keine Kupplung ($\kappa = 0$). Wird der Faden durch einen in den Punkten B_1, B_2 drehbaren Stab ersetzt, so ist die Kupplung eine vollständige ($\kappa = 1$), die man in der Mechanik als starre Kupplung bezeichnet.

Das Pendel I wird durch Drehung der Scheibe S mit Hilfe der um die Punkte F, H drehbaren Stange in periodische Bewegung versetzt. Es wird ihm also eine Schwingung aufgedrückt. Die Schwingung des Pendels I wird nun weiterhin durch die Fadenkupplung $B_1 B_2$ dem Pendel II aufgedrückt, wodurch dieses zur Eigenschwingung angeregt wird. Aus dieser und der aufgedrückten Schwingung entsteht eine resultierende, die erzwungene Schwingung. Das entspricht genau dem in § 186 behandelten Fall (Resonanztransformator), wo dem primären Stromkreis durch eine äußere Stromquelle ein periodischer Strom aufgedrückt wird, und der sekundäre Stromkreis vermöge seiner Selbstinduktion und der angeschlossenen Kapazität zu Eigenschwingungen befähigt ist. Hat die aufgedrückte Schwingung dieselbe Periodenzahl wie die Eigenschwingung, so tritt Resonanz ein, d. h. das Pendel II macht sehr große Ausschläge. Das Pendel I hingegen kann keine größeren Ausschläge ausführen, als ihm aufgedrückt werden, da die starke Kupplung FH Eigenschwingungen verhindert.

Besteht ein kleiner Unterschied zwischen den Periodenzahlen der aufgedrückten und der Eigenschwingung des Pendels II, so führt es Schwebungen aus, die durch Interferenz der beiden Schwingungen entstehen. Ist die Kupplung nicht sehr schwach, sondern stärker, so tritt auch Resonanz ein, aber nicht, wenn die Periodenzahl der aufgezungenen Schwingung gleich der Eigenschwingung von II ist, sondern bei einer um so höheren Periodenzahl, je stärker die Kupplung ist (Gl. IV, S. 425). Die Resonanz wird aber auch um so unschärfer. Es besteht auch da die durch die Kupplung bewirkte Scheu vor der Resonanz. Ist die Kupplung eine vollständige (starre), so gibt es keine Resonanz mehr, sondern das Pendel II führt genau dieselbe Bewegung aus wie I, also die aufgedrückte Schwingung.

Für den Fall, daß die Widerstände nicht Null sind, d. h. für gedämpfte Schwingungen, werden die Gleichungen I bis III des § 186 so unübersichtlich, daß man allgemeine Folgerungen daraus nicht ziehen kann. Um so leichter läßt sich der Einfluß der Dämpfung bei diesen mechanischen Schwingungen übersehen, wenn man die Pendel in einer Flüssigkeit schwingen läßt. Je zäher diese ist, desto größer ist die Dämpfung. Wenn der Bewegungswiderstand, welcher der Schwingung entgegengesetzt wird, nicht so groß ist, daß die Bewegung schon nahezu aperiodisch ist (Bedingungsgleichung V, S. 407), so hat er auf die Periodenzahl (Gl. IX) wenig Einfluß. Um so stärker ist sein Einfluß auf die Amplitude der Resonanz. Diese ist um so kleiner, je größer die Dämpfung ist. Der Grund liegt darin, daß die Eigenschwingung um so kleinere Ausschläge hat und um so eher verschwindet, je größer die Dämpfung ist. Das hat weiter zur Folge, daß die Resonanz nicht erst bei vollständiger Kupplung ($\kappa = 1$), sondern schon bei schwächerer Kupplung aufhört. Die Scheu vor der Resonanz kommt um so stärker und bei

um so schwächerer Kupplung zur Geltung, je größer die Dämpfung ist.

Von diesem Fall, wo die primäre Schwingung durch eine äußere Kraft erzeugt wird, unterscheidet sich der in § 201 und 202 behandelte Fall (Tesla-Transformator) dadurch, daß die Schwingung im primären Kreise durch Entladung des Kondensators C_1 erzeugt wird, also keine von außen aufgedrückte ist. Abb. 349 zeigt das entsprechende mechanische Modell. Wird das Pendel I aus der Ruhelage gebracht, so führt es eine Schwingung aus, die durch die Kupplung $B_1 B_2$ dem Pendel II aufgedrückt wird. Dies gerät dadurch auch in eine Schwingung, die wiederum dem Pendel I aufgedrückt wird. Infolgedessen wird die Bewegung jedes Pendels durch zwei Schwingungen dargestellt. Diese gehen bei jedem Pendel nur dann in eine über, nämlich in die Eigenschwingung des betreffenden Pendels (Gl. X und XI, S. 426), wenn die Kupplung nahezu Null ist. In diesem Falle tritt Resonanz ein, wenn beide Pendel dieselbe Eigenschwingung haben (Gl. XIX). Hingegen weichen die beiden Schwingungen, die jedes Pendel ausführt, um so mehr von den Eigenschwingungen ab, je stärker die Kupplung ist. Gleichzeitig wird die Resonanz um so unschärfer. Werden die beiden Pendel durch eine in den Punkten $B_1 B_2$ drehbare Stange verbunden, d. h. ist die Kupplung eine vollständige ($\kappa = 1$), so gibt es keine Resonanz, sondern beide führen dieselbe Bewegung aus. Die Periodenzahl der einen Schwingung ist dann gleich einem von beiden Eigenschwingungen bestimmten Werte (Gl. IX), die der anderen ist unendlich groß (Gl. VIII), also praktisch nicht vorhanden. Ist eines der beiden Pendel gedämpft, so gilt auch da, daß seine Resonanz um so weniger ausgeprägt ist, je größer die Dämpfung ist. Infolgedessen verschwindet die Resonanz nicht erst bei vollständiger Kupplung, sondern bei um so schwächerer Kupplung, je größer die Dämpfung ist. Sind beide Pendel gedämpft, so wird die Resonanz noch mehr beeinträchtigt; die Scheu vor der Resonanz kommt noch mehr zur Geltung.

Ein sehr charakteristisches Beispiel dafür, wie selbst bei aller schwächster Kupplung eine scharfe Resonanz eintritt, jedoch nur bei genauer Übereinstimmung der Eigenschwingungen, bieten zwei auf gleichen Ton abgestimmte Stimmgabeln oder Saiten. Hier besteht die Kupplung nur aus der Luft, die sich zwischen ihnen befindet. Wird die eine angeschlagen, so entstehen Wellen in der Luft, die auf die andere auftreffen und diese in Schwingung versetzen. Das tritt nicht ein, wenn sie nicht ganz gleich abgestimmt sind.

In gleicher Weise verhalten sich zwei parallelgeschaltete Synchronmaschinen. Die Kupplung besteht hier aus dem Ausgleichstrom, der zwischen den beiden Maschinen verkehrt. Die als „Pendeln“ der Maschinen bekannte Erscheinung ist nichts anderes, als die Interferenz zwischen der aufgedrückten und der Eigenschwin-

gung, wie sie Abb. 344 zeigt¹⁾). Zu einer ausgeprägten Resonanz kommt es nicht, weil bei normal erregten Maschinen die Kupplung durch den Ausgleichstrom und die Dämpfung zu stark ist.

204. Mittel zur Erzeugung elektrischer Schwingungen.

Die einzigen Bedingungen für das Zustandekommen elektrischer Schwingungen durch Entladung eines Kondensators bestehen darin, daß dieser auf irgendeine Weise bis zu genügend hoher Spannung geladen und dann plötzlich entladen wird, und daß für die drei Elemente des Entladungskreises die Bedingungsgleichung $\omega^2 < \frac{4L}{C}$ erfüllt ist (§ 195).

Die Ladung des Kondensators geschieht am einfachsten dadurch, daß man ihn mit einer geeigneten Stromquelle in Verbindung bringt. Dabei ist es gleichgültig, ob der Anschluß unmittelbar an den Platten liegt (Abb. 350) oder ob Selbstinduktion und Widerstand dazwischen liegt (Abb. 351), so daß die Anschlüsse zu beiden Seiten der Funkenstrecke F liegen.

Die einfachste Stromquelle für die Ladung des Kondensators ist eine Elektrisiermaschine, weil sie das einfachste Mittel zur Erzeugung

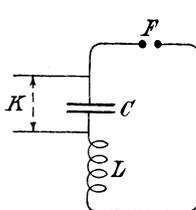


Abb. 350.

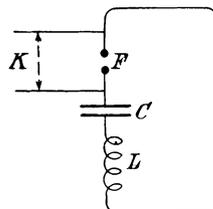


Abb. 351.

von genügend hoher Spannung ist; je höher die Spannung ist, desto höher ist die Ladung Q_0 des Kondensators und desto größer die Stromstärke der elektrischen Schwingung. Die Entladung des Kondensators geschieht am einfachsten durch Annäherung der Elektroden der Funkenstrecke aneinander, oder indem man die Funkenstrecke so kurz einstellt, daß die Spannung selbst überschlägt. Ist die Elektrisiermaschine fortgesetzt im Gang, so erfolgt nach der ersten Entladung gleich eine neue Ladung, die sich wieder entladet, wenn die Funkenspannung erreicht ist. Man erhält so eine Reihe aufeinanderfolgender Entladungen. Solche erhält man auch mittels Funkeninduktoren (vgl. § 205).

Gleichstrommaschinen und Batterien kommen kaum in Betracht, weil ihre verfügbaren Spannungen in der Regel zu klein sind. Dagegen kommt Wechselstrom häufig zur Anwendung, weil man diesen durch Transformation auf höhere Spannung umformen kann. Abb. 352 zeigt das Schema einer solchen Anordnung. Man kann den Trans-

¹⁾ Bei pendelnden Maschinen nehmen aber die Schwebungsamplituden nicht ab, wie in Abb. 344, weil die Antriebskraft die durch Reibung vernichtete Energie immer wieder ersetzt. Näheres darüber in: Benischke „Der Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen“, 2. Aufl., Braunschweig 1918.

formator natürlich auch zu beiden Seiten des Kondensators anschließen wie in Abb. 350. Ist \mathfrak{R}_2 der Scheitelwert der sekundären

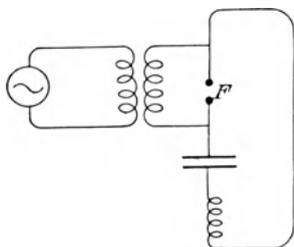


Abb. 352.

Spannung, mit welcher der Kondensator geladen wird, so muß die Funkenstrecke F so eingestellt werden, daß sie von ihm mit Sicherheit überschlagen wird. Dem ersten Funken folgt häufig sogleich ein dauernder Lichtbogen. Der Lichtbogen erzeugt aber keine regelmäßigen Schwingungen; er ist inaktiv und muß daher vermieden werden¹⁾. Er tritt nicht auf, wenn die Spannung \mathfrak{R}_2 beim ersten Stromübergang so weit herabsinkt, daß sie den

Lichtbogen nicht aufrecht zu erhalten vermag.

Um diesen Abfall der Spannung zu erreichen; kann man entweder den Transformator mit so viel Streuung versehen, daß sein induktiver Spannungsabfall beträchtlich ist, oder man schaltet ihm

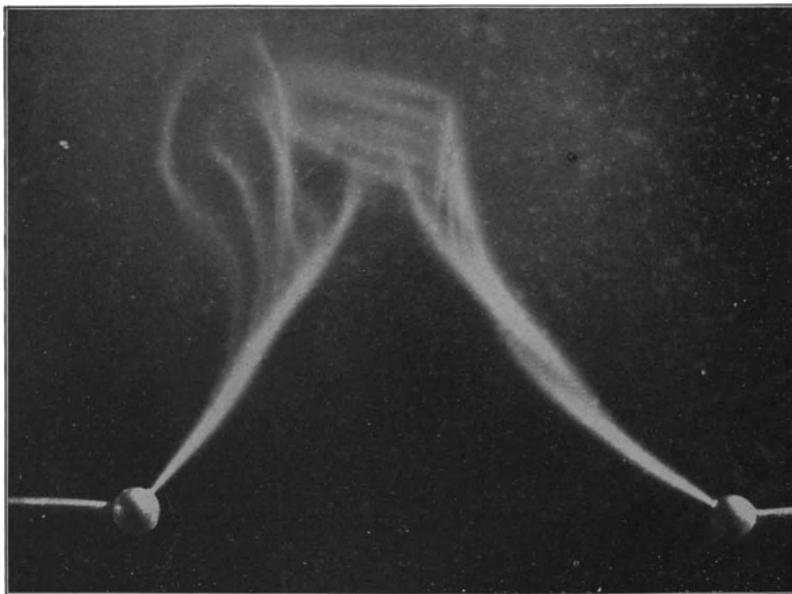


Abb. 353. Inaktive Entladung (Lichtbogen) eines Transformators.

einen Widerstand oder eine Drosselspule vor, die beim Auftreten des Stromes einen ihr proportionalen Teil der Spannung abdrosselt. Ist der Lichtbogen auf diese Weise gleich nach Auftreten des Stromes

¹⁾ Über den Gleichstromlichtbogen als Schwingungserzeuger vgl. § 263.

wieder erloschen, so steigt die Spannung wieder auf ihren ursprünglichen, bei Leerlauf des Transformators bestehenden Wert und kann die Funkenstrecke von neuem überschlagen. Auf diese Weise erhält man rasch aufeinanderfolgende aktive Funken, d. h. solche, die aus elektrischen Schwingungen bestehen. In der Regel kann man inaktive Entladungen (Lichtbögen) und aktive Entladungen (oszillatorische Funken) schon äußerlich durch das Aussehen und das Geräusch unterscheiden. Abb. 353 zeigt eine inaktive Entladung eines Transformators bei 50 000 V. Leerlaufspannung (effektiv), Abb. 354

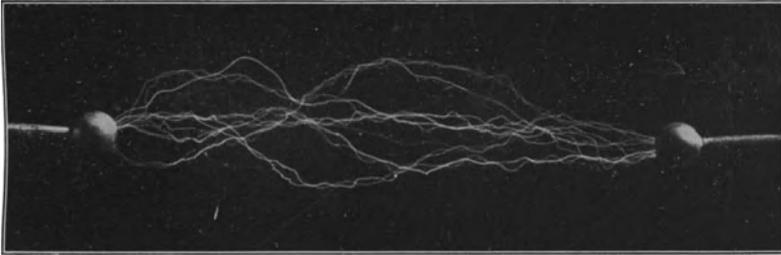


Abb. 354. Aktive Funkenentladung eines Transformators.

mehrere aktive Funken desselben Transformators bei derselben Spannung, dem aber jetzt eine Drosselspule im primären Stromkreis vorgeschaltet war. Die inaktive Entladung gibt ein zischendes, die aktive ein knatterndes oder prasselndes Geräusch.

Eine noch schnellere Unterbrechung des Stromes, als sie durch den Spannungsabfall von selbst eintritt, erreicht man dadurch, daß

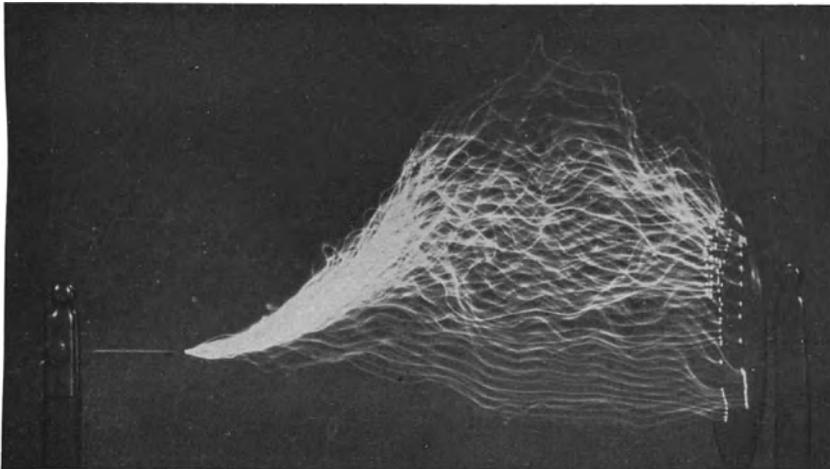


Abb. 355. Funkenentladung eines Induktors mit elektrolytischem Unterbrecher.

man auf den Funken ein magnetisches Gebläse wirken läßt, indem man die Funkenstrecke derart zwischen zwei entgegengesetzte Pole stellt, daß die Kraftlinien senkrecht zur Funkenbahn verlaufen.

Manchmal folgen die Funkenentladungen so rasch aufeinander, daß sie dem Auge als Lichtbogen erscheinen. Nur durch das knatternde Geräusch oder durch eine photographische Aufnahme erkennt man, daß es sich um rasch aufeinanderfolgende Funken handelt. Abb. 355 zeigt eine solche Aufnahme¹⁾. Es sind die Funken eines Induktors zwischen einer Spitze und einer Platte. Die primäre Unterbrechung erfolgte durch einen elektrolytischen Unterbrecher (§ 205). Infolge der Raschheit der aufeinanderfolgenden Funken (Dauer der Aufnahme 1 Sekunde), verlaufen sie in nahezu parallelen Bahnen, deren Endpunkte auf der Platte (rechts) wandern.

Zur Erzeugung sehr kräftiger elektrischer Schwingungen, wie sie zur Funkentelegraphie auf große Entfernungen erforderlich sind, eignet sich besonders der in § 186 behandelte Resonanztransformator. Wir haben dort gesehen, daß ein Resonanzmaximum der sekundären Spannung eintritt, wenn die Periodenzahl des primären Stromes der Bedingung

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL_2(1-\kappa^2)}}$$

entspricht. Wird also die Periodenzahl des dem Transformator zugeführten Wechselstromes auf diesen Wert eingestellt, so steigt die sekundäre Spannung rasch auf einen hohen Resonanzwert, mit dem der Kondensator geladen wird. Ist die Funkenstrecke F so eingestellt, daß sie von der gewöhnlichen Spannung nicht überschlagen wird, sondern erst von der Resonanzspannung, so wird der

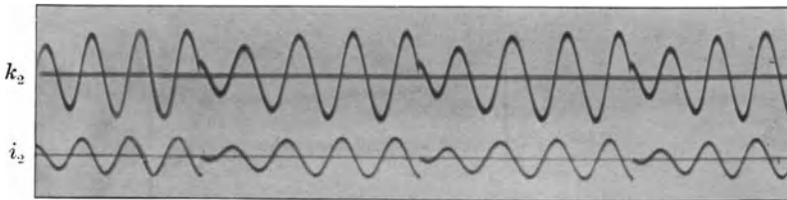


Abb. 356. Sekundäre Spannung k_2 und sekundärer Strom i_2 eines Resonanztransformators bei Überschlägen über die sekundäre Funkenstrecke.

Kondensator mit der dieser hohen Spannung entsprechenden großen Ladung entladen. Sowie aber der Strom übergeht, verändert sich sofort die magnetische Kupplung κ des Transformators, weil die Streuung mit der Stromstärke zunimmt. Aus demselben Grunde verändert sich auch die Selbstinduktion L_2 . Die Resonanzbedingung ist

¹⁾ Nach J. F. Koch, ETZ 1906, S. 707.

nun nicht mehr erfüllt, und die Spannung fällt plötzlich auf ihren gewöhnlichen Wert herab, so daß der Funken bei F ebenso plötzlich abreißt. Damit ist auch der Strom wieder Null geworden, die Kupplung und die Selbstinduktion erhalten wieder ihren ursprünglichen Wert, die Spannung steigt auf ihren Resonanzwert und überschlägt wieder die Funkenstrecke. Abb. 356 zeigt diesen Verlauf der sekundären Spannung und Stromstärke. Der Abfall des Resonanzwertes geht so rasch vor sich, daß ein magnetisches Gebläse bei der Funkenstrecke überflüssig ist. Wie aus der vorstehenden Formel ersichtlich ist, kann der Eintritt der Resonanz auch durch Einstellung der Kapazität C des angeschlossenen Kondensators oder der Kupplung α erfolgen; letzteres durch Verschiebung der primären oder sekundären Spule, so daß sich die Streuung ändert.

Über den Lichtbogen als Schwingungserzeuger vgl. § 263, über einen maschinellen Schwingungserzeuger § 220.

205. Funkeninduktoren und ihre Unterbrecher.

Einer der ältesten und seit seiner Erfindung nur wenig veränderten Apparate ist der Funkeninduktor von R h u m k o r f f. Er besteht aus einer an eine Gleichstromquelle angeschlossenen primären Wicklung (Abb. 357) und einer in der Funkenstrecke F endigenden sekundären Wicklung. Im primären Stromkreis liegt noch ein Unterbrecher U . Wird der Stromkreis durch diesen geschlossen, so entsteht ein Strom nach den in § 187 behandelten Gesetzen, der von Null bis zu dem von Spannung und Widerstand bestimmten Wert ansteigt. Dadurch wird in der sekundären

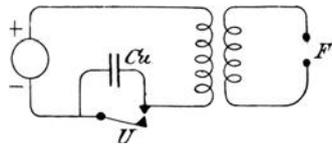


Abb. 357.

Wicklung eine EMK induziert, die bei offenem Kreis gleich $M \frac{di_1}{dt}$, bei geschlossenem Kreisgleich $M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$ ist. Diese EMK dauert

natürlich nur so lange, als die Änderung des primären Stromes dauert. Hat dieser seinen endgültigen Wert erreicht, so ist die sekundäre EMK Null. Wird nun der primäre Stromkreis durch den Unterbrecher U geöffnet, so wird nach demselben Gesetz wieder eine EMK in der sekundären Wicklung induziert. Der Abfall des primären Stromes beim Öffnen erfolgt aber rascher als der Anstieg beim Schließen, weil beim Öffnen noch ein rasch wachsender Widerstand w'

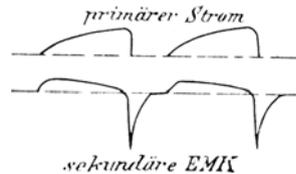


Abb. 358.

in den Stromkreis eingeschaltet wird, wie dies in § 189 näher erläutert wurde. Infolgedessen ist die sekundäre EMK nach obigem Gesetz beim Öffnen größer als beim Schließen. Abb. 358 zeigt den Verlauf des primären Stromes und der sekundären EMK beim auf-

einanderfolgenden Schließen und Öffnen des Stromes. Man sieht, daß die EMK beim Öffnen größer ist als beim Schließen.

Der Abfall des Stromes beim Unterbrechen kann noch mehr beschleunigt werden, wenn man den Funken möglichst verkürzt, indem man parallel zum Unterbrecher einen Kondensator C_u (Abb. 357) von passender Kapazität anschließt. Dieser nimmt einen großen Teil der Elektrizitätsmenge auf, die an den Kontakten des Unterbrechers auftritt und den Funken erzeugt. Die Elektrizität hat hier ein Reservoir, in das sie abströmen kann, und braucht sich nicht des Weges über die Funkenstrecke zu bedienen. Der Strom fällt infolgedessen rascher auf Null. Um die günstigste Wirkung zu erzielen, muß der Kondensator in einem gewissen Verhältnis zur Stromstärke stehen. Die Verkleinerung des Funkens hat auch eine Verkleinerung seiner Wärme zur Folge, so daß die Kontakte weniger abgenutzt werden. Auch in anderen Fällen wird dieses Mittel häufig angewandt zur Verkleinerung von Öffnungsfunken.

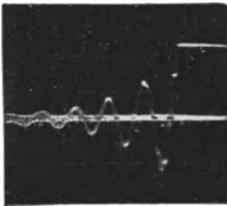


Abb. 359. Öffnungsstrom eines Funkeninduktors mit Kondensator.

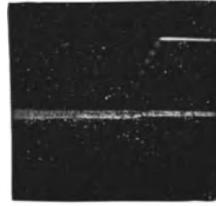


Abb. 360. Öffnungsstrom eines Funkeninduktors ohne Kondensator.

Die Einschaltung des Kondensators in den primären Stromkreis während des Öffnens hat noch eine weitere Folge. Der Öffnungsfunken ist jetzt oszillatorisch (nach § 195), wie Abb. 359 nach einer photographischen Aufnahme mit der Braun'schen Röhre (§ 290) zeigt. Bei Abwesenheit des Kondensators hingegen erfolgt die Abnahme des Stromes aperiodisch (nach § 187), wie Abb. 360¹⁾ zeigt. Man sieht, daß im ersten Falle der Abfall des Stromes rascher erfolgt als im zweiten und bis unter die Nulllinie reicht. Die Änderung des Stromes $\frac{di_1}{dt}$ und daher die induzierte EMK ist also größer als bei Abwesenheit eines Kondensators. Die sekundäre EMK nimmt aber nun auch denselben Verlauf. Bei geeigneter Einstellung der sekundären Funkenstrecke gehen also hier mehrere Teilfunken über. Dient die sekundäre EMK zum Laden eines Kondensators C_2 in einem Stromkreis mit Selbstinduktion (Abb. 361), so ruft jeder Teil-

¹⁾ Abb. 326 und 330 aus Zenneck: „Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie“. Stuttgart 1905.

funken eine sekundäre oszillatorische Entladung über die sekundäre Funkenstrecke F_2 hervor, wenn diese entsprechend eingestellt ist.

Die sekundäre EMK hängt aber nicht nur von $\frac{di_1}{dt}$, sondern, auch von der gegenseitigen Induktion M ab. Diese ist um so größer, je größer die magnetische Kupplung zwischen den beiden Wicklungen ist, d. h. je kleiner die Streuung ist. Dafür gelten dieselben Gesetze wie für einen Transformator (§ 150). Der Eisenkern muß unterteilt sein, nicht nur wegen der Verluste durch Wirbelströme, sondern auch deshalb, weil bei einem massiven Eisenkern die Stromstärke beim Unterbrechen nicht rasch genug abfallen würde (§ 192). Um die Wirbelströme noch mehr zu vermindern, und weil es bei einem Funkeninduktor nicht auf die Größe des Magnetisierungsstromes ankommt wie bei einem Transformator, verwendet man vorzugsweise offene Eisenkerne.

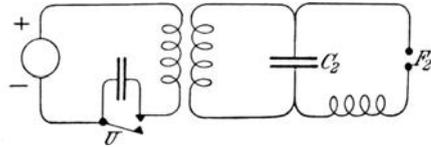


Abb. 361.

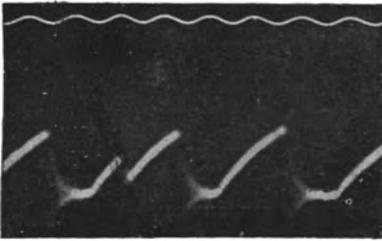


Abb. 362. Primärer Strom eines Funkeninduktors bei Hammerunterbrecher.

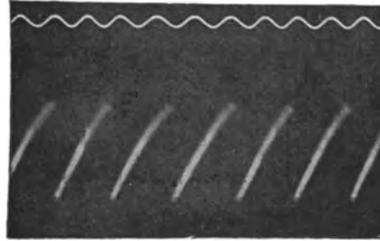


Abb. 363. Primärer Strom eines Funkeninduktors bei elektrolytischem Unterbrecher.

Aus der Rolle, die der Abfall des primären Stromes beim Öffnen spielt, erklärt sich die Wichtigkeit des Unterbrechers. Es sind folgende Arten hauptsächlich in Gebrauch:

1. Hammer-Unterbrecher. Der Kontakt wird durch elektromagnetische Anziehung eines Ankers (Hammers) geöffnet und nach dem Verschwinden des Stromes durch eine Feder wieder geschlossen. Abb. 362¹⁾ zeigt den Verlauf des primären Stromes bei einem solchen Unterbrecher mit parallel geschaltetem Kondensator. Daher treten bei jeder Unterbrechung Schwingungen auf wie in Abb. 359. An einer Stelle sieht man, daß der Unterbrecher schlecht gearbeitet und den Strom nicht geöffnet hat. Abb. 364a zeigt den Verlauf des sekundären Stromes über eine kurze Funkenstrecke.

¹⁾ Wehnelt und Donath, Annal. d. Phys. 69, 1899. Die Schwingungen sind hier infolge ihrer großen Geschwindigkeit nur schwach sichtbar.

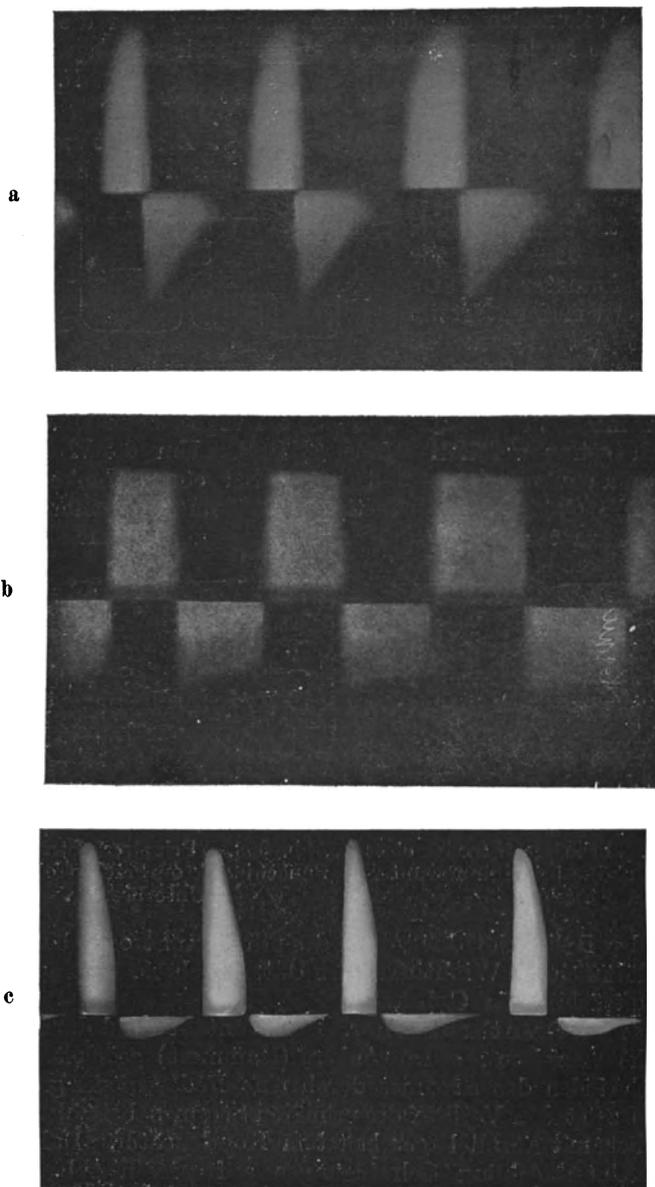


Abb. 364. Sekundärer Strom eines Funkeninduktors: a) bei Hammerunterbrecher, b) bei Turbinenunterbrecher, c) bei elektrolytischem Unterbrecher. Nach Aufnahmen von E. Ruhmer mittels des Glimmlichts-Oszillographen (§ 290). Die äußeren Konturen der Lichtflächen stellen den Verlauf des Stromes dar. Die oberen, höheren entsprechen immer dem Öffnen, die unteren dem Schließen des primären Stromes.

2. Turbinen-Unterbrecher (Boas). Ein durch Zentrifugalkraft aus einer Düse austretender Quecksilberstrahl trifft bei seiner Drehung abwechselnd auf die Zähne und Zwischenräume eines mit breiten Zähnen versehenen feststehenden Ringes. Wenn der Strahl auf einen Zahn auftrifft, ist der Stromkreis geschlossen, wenn er durch einen Zwischenraum geht, ist er geöffnet. Die Unterbrechung erfolgt rascher als beim Hammerunterbrecher, und die Anzahl der Unterbrechungen kann viel höher gesteigert werden. Abb. 364 b zeigt den Verlauf des sekundären Stromes bei diesem Unterbrecher.

3. Elektrolytische Unterbrecher (Wehnelt). In ein Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure taucht eine Bleiplatte (Abb. 365) und eine Platinspitze. Die Stromzuführung zu letzterer geht durch eine isolierende Röhre, so daß der Strom nur aus der Spitze austreten kann. Infolgedessen ist der Querschnitt der Flüssigkeit, durch den der Strom eintreten muß, sehr klein, und es wird hier eine so große Wärme entwickelt, daß Verdampfung und Zerlegung in Wasserstoff und Sauerstoff (Knallgas) eintritt. Dadurch wird der Widerstand noch größer, so daß explosivartige Verbrennung des Knallgases eintritt und dadurch die Flüssigkeit von der Platinspitze weggeschleudert und der Strom unterbrochen wird. Durch die nachdrängende Flüssigkeit wird der Strom wieder geschlossen. Da die Unterbrechung also nur auf Wärmewirkung beruht, müßte es gleichgültig sein, ob die Spitze positive oder negative Elektrode ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß dieser Unterbrecher nicht gut arbeitet, wenn die Spitze negative Elektrode ist. Wahrscheinlich liegt das daran, daß der hier elektrolytisch ausgeschiedene Wasserstoff von der Flüssigkeit sofort absorbiert wird, während der Sauerstoff, der elektrolytisch ausgeschieden wird, wenn die Spitze positive Elektrode ist, nicht so rasch absorbiert wird. Bei diesem Unterbrecher geschieht das Öffnen so plötzlich, und das Öffnen und Schließen folgt so rasch aufeinander, daß ein parallel zu ihm geschalteter Kondensator keine Verbesserung mehr bringt. Abb. 363 zeigt den Verlauf des primären Stromes, Abb. 364 c den des sekundären Stromes bei diesem Unterbrecher.

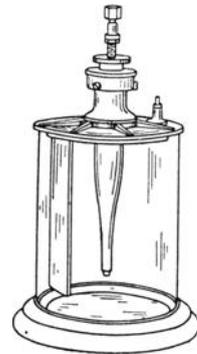


Abb. 365. Elektrolytischer Unterbrecher.

206. Elektrische Strom- und Spannungskupplung.

In § 186 und 201 wurden elektrische Schwingungen behandelt, deren Stromkreise durch die Kraftlinien des gemeinsamen magnetischen Feldes miteinander gekuppelt sind; es ist also eine magnetische oder induktive Kupplung. Die Kupplung kann aber auch durch den Strom erfolgen. Abb. 366 a zeigt die elektrische Stromkupplung eines Schwingungskreises CL mit einem Leiterstück AB ,

durch welches von einer äußeren Stromquelle ein periodischer Strom geschickt wird. Dieser Fall entspricht dem in § 186, weil auch hier die primäre Schwingung eine aufgedrückte ist. Ein Teil des Stromes kann über LC fließen und erregt dadurch die Eigenschwingung des geschlossenen Kreises $LCA B$.

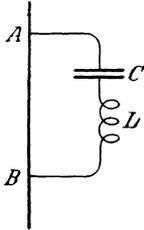


Abb. 366 a.

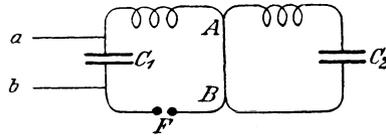


Abb. 366 b.

Abb. 366 b zeigt die Stromkupplung zweier Stromkreise, die beide zu Eigenschwingungen befähigt sind. Sie entspricht dem in § 201 behandelten Fall. Die Kupplung ist um so stärker, je größer der scheinbare Widerstand des gemeinsamen Leiterstückes zwischen den Punkten AB ist gegenüber den scheinbaren Widerständen der übrigen Teile. Der Kondensator C_1 wird durch die Drähte ab geladen, bis ein Überschlag über die Funkenstrecke F eintritt¹⁾.

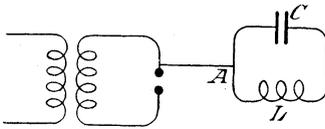


Abb. 367 a.

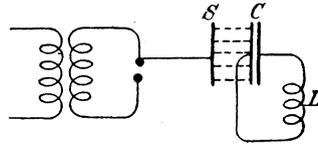


Abb. 367 b.

Auch durch die elektrische Spannung kann eine Kupplung stattfinden. Dazu ist nichts weiter erforderlich, als daß der Schwingungskreis LC (Abb. 367 a) in einem Punkte A an eine periodisch veränderliche Spannung (Potential gegen die Umgebung) angeschlossen ist, z. B. an einen Pol eines Funkeninduktors oder Transformators, oder an eine Platte eines Kondensators, der oszillatorisch entladen wird. Die elektrische Spannungskupplung kann aber auch ohne direkte Verbindung nur durch die elektrischen Kraftlinien erfolgen. Abb. 367 b zeigt eine solche Anordnung. An einen Pol eines Funkeninduktors oder dgl. ist eine Platte S angeschlossen, der eine Platte des Kondensators C des Schwingungskreises CL gegenübersteht. Durch die Kraftlinien (gestrichelte Linien), die von der Platte S ausgehen

¹⁾ Dieser Fall entspricht mechanisch dem, daß eine Stimmgabel auf einen Resonanzkasten befestigt ist, die durch Anschlagen zum Schwingen gebracht wird. Der Resonanzkasten entspricht dem sekundären Schwingungskreis.

und auf C enden, werden im Kondensator C periodische Ladungen induziert. Spannungskupplung durch Kondensatoren zeigen die Abb 377 und 378.

207. Die Ausbreitung elektrischer Schwingungen in Leitungen. Fortschreitende und stehende Wellen.

Wir haben bisher nur den zeitlichen Verlauf von Wechselströmen und Eigenschwingungen, der für die Elektrotechnik die Hauptsache ist, betrachtet. In langen Leitungen kann auch die räumliche Ausbreitung von Wichtigkeit sein.

Die folgenden Abbildungen geben zunächst eine schematische Übersicht über die verschiedenen Verteilungsformen, die vorkommen können, nämlich die in einem bestimmten Augenblick längs einer Leitung herrschende Stromstärke oder die in einem anderen, der zeitlichen Phasenverschiebung entsprechenden Augenblick herrschende Spannung (Potential gegen Erde oder gegen eine andere Leitung.)

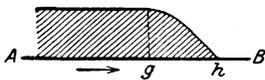


Abb. 368.

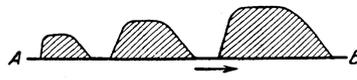


Abb. 369.

Abb. 368 zeigt die räumliche Ausbreitung eines entstehenden Gleichstromes über einen Leiter AB , kurz nachdem der Anfang A an eine konstante Stromquelle angeschlossen wurde. Die Elektrizität ist in dem dargestellten Augenblick bis zu dem Punkte h der Leitung vorgedrungen, hat aber erst im Punkte g den normalen Strom- und Spannungszustand erreicht. Die Verteilung zwischen g und h bezeichnet man als Wellenstirn. Je nach Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität ist sie steiler oder flacher¹⁾. Auf dem Leiterstück gh ist das Spannungsgefälle natürlich viel größer als bei stationärem Zustande (entsprechend dem Ohmschen Gesetze).

Abb. 369 zeigt die räumliche Verteilung von drei aufeinanderfolgenden Ladungen gleicher Polarität (intermittierende, nicht oszillierende Entladung vgl. Abb. 465 und 466).

Abb. 370 zeigt die räumliche Verteilung eines Wechselstromes, kurz nachdem er bei A in den Leiter eingedrungen ist. Es ist ein Wechselstrom von so großer Periodenzahl (kurzer Wellenlänge), daß mehrere Halbwellen auf dem Leiterstück gh Platz haben. Die Ver-

¹⁾ Niemals kann sie senkrecht oder eckig sein, wie bei Berechnungen angenommen wird. Die Selbstinduktion verhindert das ebenso wie die sofortige Entstehung des Stromes (§ 187). Dazu kommt noch der verflachende Einfluß der Dämpfung und der etwaigen Funkenbildung. Unstetige, sprunghafte Änderungen sind in der Natur überhaupt unmöglich. Binder (ETZ 1915 S. 241) fand z. B. zwischen zwei Punkten von 1 m Abstand etwa 12 Proz. und zwischen zwei Punkten von 20 m Abstand etwa 70 Proz. der ganzen Wellenhöhe.

bindung der Scheitelwerte durch die gestrichelte Linie zeigt die Wellenstirn. Von den langsamen Wechselströmen (große Wellenlänge) der Starkstromtechnik würde auf demselben Leiterstück gh nur ein kleiner Teil einer halben Wellenlänge Platz finden, so daß die Wellenstirn ähnlich der Abb. 368 ist.

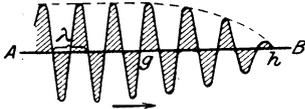


Abb. 370.

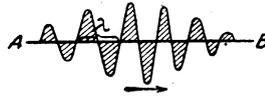


Abb. 371.

Abb. 371 zeigt die räumliche Verteilung einer gedämpften Eigenschwingung von hoher Frequenz, die schon nach 11 halben Wellen durch Dämpfung aufgezehrt ist.

Solche Schwingungen heißen wie in der Mechanik fortschreitende oder Wanderwellen. Sie können als aufgedrückte oder als Eigenschwingung entstehen. Eine aufgedrückte fortschreitende Welle (Abb. 370) ist jeder Wechselstrom, der von einem Wechselstromerzeuger in eine Leitung fließt. Eine fortschreitende Eigenwelle (Abb. 371) entsteht bei jeder oszillatorischen Funkenentladung (§ 195, 196) in den an den Kondensator oder die Funkenstrecke angeschlossenen Leitungen, sowie beim Ein- oder Ausschalten einer Leitung und überhaupt bei jeder plötzlichen Störung des elektrischen Zustandes.

Nebst der den zeitlichen Verlauf kennzeichnenden Schwingungsdauer τ und Periodenzahl ν ($\nu = \frac{1}{\tau}$), kommt jetzt noch die Wellenlänge und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Betracht. Die Wellenlänge λ ist der Abstand zwischen 2 Punkten, in denen derselbe Schwingungszustand besteht (Abb. 370).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist jene Strecke, welche die fortschreitende Welle in 1 Sekunde zurücklegt. Finden in 1 Sekunde ν Schwingungen, jede von der Länge λ statt, so muß

$$v = \nu\lambda$$

sein. Man erhält daraus also v , wenn man ν und λ ermittelt hat. Für die Ausbreitung elektrischer Wellen in Luft ergab sich $v = 3 \cdot 10^{10}$ cm (Lichtgeschwindigkeit), in Erde¹⁾ $v = 2,6 \cdot 10^{10}$ cm, in einem Kupferkabel²⁾ $v = 1,7 \cdot 10^{10}$ cm.

Andauernde fortschreitende Wellen können nur in geschlossenen Stromkreisen vorkommen, die an Wechselstromerzeuger oder an Schwingungserzeuger (§ 204) angeschlossen sind. Das sind

¹⁾ Demmler Archiv f. Elektrot. 3. Bd., 3. Heft.

²⁾ Faßbender ebenda 2. Bd., 12. Heft.

aufgedrückte Schwingungen, weil ihre Periodenzahl von dem betreffenden Erzeuger, nicht von dem betreffenden Stromkreis selbst bestimmt wird. Nimmt man die vorstehende Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Kupferkabel für alle Kupferleiter an, so erhält man daraus und aus der aufgedrückten Periodenzahl die Wellenlänge. Entstehen z. B. durch Entladungen in einem Stromkreis mit Kondensator und Drosselspule Schwingungen von $\nu = 10^7$ Perioden, und fließen diese durch einen geschlossenen Stromkreis, so ist hier die Länge der fortschreitenden Wellen:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1,7 \cdot 10^{10}}{10^7} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ cm} = 17 \text{ m.}$$

Schickt eine Wechselstrommaschine Strom von 50 Perioden durch einen geschlossenen Stromkreis, so ist die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{1,7 \cdot 10^{10}}{50} = 34 \cdot 10^7 \text{ cm} = 3400 \text{ km.}$$

Es kommt also selbst in den längsten Fernleitungen der Starkstromtechnik nur ein kleiner Teil einer Wellenlänge vor, so daß am Anfang und am Ende in jedem Augenblicke nahezu derselbe Schwingungszustand herrscht, und nur der zeitliche Verlauf des Stromes von Wichtigkeit ist¹⁾.

Eine fortschreitende elektrische Welle entspricht einer Flüssigkeitswelle, die sich fortbewegt, oder der fortschreitenden Welle eines Seiles mit losem Ende, dessen Anfang in periodische Bewegung versetzt wird. Trifft eine fortschreitende Welle auf eine Stelle, die diese Bewegung nicht mitzumachen vermag, so kehrt die Bewegung gewissermaßen um (wird reflektiert), und es entsteht eine stehende Welle. Das tritt ein, wenn Flüssigkeitswellen auf eine feste Wand auftreffen (Flüssigkeit in einem Gefäß, die durch Erschütterungen in

¹⁾ Für die Starkstromtechnik hat die Betrachtung der elektrischen Schwingungen als fortschreitende Wellen nur soweit Interesse, als nebst der bei Einschaltwellen auftretenden Spannungserhöhung (bis höchstens zum doppelten Scheitelwert § 199), noch ein sehr vergrößertes Spannungsgefälle am jeweiligen Ort der Wellenstirn entsteht. Sobald die Wellenstirn in eine Wicklung eindringt, ist infolgedessen die Potentialdifferenz zwischen zwei benachbarten Windungen derselben Lage und noch mehr zwischen zwei übereinanderliegenden Windungen verschiedener Lagen vielmals größer als bei stationärem Zustand, so daß die Isolation zwischen diesen Windungen gefährdet sein kann. Das gilt besonders von den Anfangs- bzw. Endwindungen einer Wicklung. Je weiter die Wellenstirn in der Wicklung vordringt, desto flacher wird sie infolge des Einflusses der Wirbelströme und der Hysterese im Eisenkern. Daher müssen die Anfangswindungen stärkere Isolation haben oder, was noch besser ist, man schaltet eine Drosselspule mit stärkerer Isolation vor. Da diese außerdem einen großen Teil der ankommenden Wellenstirn reflektiert, gelangt nur eine sehr abgeflachte Wellenstirn in die Wicklung. Die reflektierende und dämpfende Wirkung der Drosselspule ist vielmals größer, wenn sie einen Eisenkern hat (Benischke ETZ 1915, S. 34. Elektr. u. Maschinenbau 1917, S. 609).

Schwingungen versetzt wird) oder bei dem erwähnten Seile, wenn sein Ende fest gemacht wird. Stehende Wellen bilden sich ferner auf Saiten, die an beiden Enden befestigt sind (Abb. 372), oder bei Pfeifen, die an einem Ende geschlossen sind. Der Unterschied gegenüber fortschreitenden Wellen besteht darin, daß bei diesen alle Punkte nacheinander dieselbe Bewegung ausführen, während es bei den stehenden Wellen



Abb. 372.

bestimmte Punkte K gibt, die in Ruhe bleiben, während die in der Mitte dazwischen liegenden B , die größte Ausweichung aus der Ruhelage ausführen. Die ersteren heißen Knoten, die letzteren Bäuche. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Knoten oder Bäuche ist

eine halbe Wellenlänge $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Der Abstand zwischen einem Knoten und dem nächsten Bauch ist eine Viertelwellenlänge $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$. Die einfachste

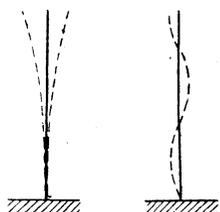


Abb. 373.

Abb. 374.

stehende Welle bildet ein langer Stab l , der an einem Ende festgeklemmt ist (Abb. 373), und dessen anderes Ende aus der Ruhelage gebracht wird. Dadurch entsteht eine Viertelwellenlänge ($\lambda = 4l$). Ist der Stab gleichmäßig

dick (Masse gleichmäßig verteilt), so kann er auch in Wellen von kürzerer Wellenlänge schwingen, wie Abb. 374 zeigt, wenn er genügend rasche Stöße erhält. Immer aber ist das feste Ende ein Knoten, das freie Ende ein Bauch, so daß nur solche Wellen möglich sind, wo die Länge des Stabes gleich $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4} \dots$ Wellenlängen, oder $\lambda = \frac{4l}{3}, \frac{4l}{5}, \frac{4l}{7} \dots$ ist. Die größte Welle ($\lambda = 4l$) bezeichnet man als

Grundschiwingung, die anderen als Oberschwingungen. Ist aber der größte Teil der Masse am Ende konzentriert, so hat der Stab nur eine einzige Eigenschwingung (Grundschiwingung) wie ein Pendel. Dabei handelt es sich immer um Eigenschwingungen, weil sie schon durch einen einzigen Anstoß entstehen und ihre Wellenlänge, also auch ihre Periodenzahl nur vom schwingenden Körper selbst abhängt. Aufgedrückte Schwingungen, deren irgendwie erzeugte Periodenzahl sehr von der Eigenschwingungszahl abweicht, bilden keine regelmäßigen stehenden Wellen, sondern mehr oder weniger unregelmäßige Bewegungen.

Das alles gilt auch von elektrischen Schwingungen¹⁾. Auch da entsteht aus einer fortschreitenden Eigenschwingung eine stehende

¹⁾ Schwingungen sind Bewegungszustände. Ihre Gesetze hängen daher nur von der Art und Weise der Bewegung ab, nicht davon, was für ein Stoff die Bewegung ausführt.

Welle, wenn sie auf eine Stelle trifft, wo die Elektrizität nicht weiterströmen kann, d. h. auf ein isoliertes Leitungsende. Daher bilden sich stehende elektrische Wellen, wenn man an die Elektroden einer Funkenstrecke zwei lineare Leiter (Abb. 375) anschließt, deren Enden isoliert sind, und sie nun mit Hilfe einer geeigneten Stromquelle (Elektrifiziermaschine, Funkeninduktor u. dgl.) ladet, bis an der Funkenstrecke ein Überschlag stattfindet. Die Entladung erfolgt oszillatorisch, indem die Elektrizität zwischen den beiden Leitern über die Funkenstrecke hin und her schwingt. Daher ist die Bewegung der Elektrizität, d. h. die Stromstärke, hier am stärksten, an den Enden aber Null. An der Funkenstrecke besteht also ein Bauch, an den Enden je ein Knoten der Stromwelle. Während des Stromüberganges ist die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden Null, zwischen den Enden aber am größten. An der Funkenstrecke besteht also ein Knoten, an den Enden zwei entgegengesetzte Bäuche der Spannungswelle¹⁾. Die Wellenlänge der Eigenschwingung eines solchen Leiters mit gleichmäßig verteilter Kapazität und Selbstinduktion ist also wie bei einem schwingenden Stab (Abb. 373) gleich der vierfachen Länge eines der beiden Leiter. Außerdem können wie bei einem Stab

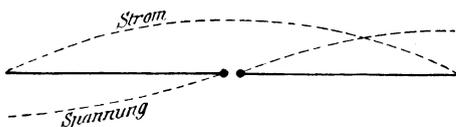


Abb. 375.

Oberschwingungen 3., 5., 7. . . Ordnung stattfinden; Abb. 376 zeigt die Oberschwingung

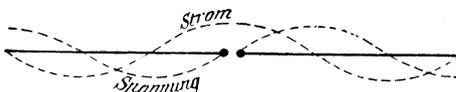


Abb. 376.

3. Ordnung ($\lambda = \frac{4l}{3}$). Aus

dieser und Abb. 375 erkennt man, daß Oberschwingungen gerader Ordnung (2., 4., 6. . .) unmöglich sind, denn dann müßte die Stromwelle an den isolierten Enden einen Bauch haben.

Will man nur die Grundschwingung erhalten, so muß man an einem Ende des Drahtes einen Kondensator anbringen, dessen Kapa-

¹⁾ Wie bei jeder Reflexion einer Wirkung, die an der Reflexionsstelle einen Bauch ergibt, so findet auch hier eine theoretische Verdopplung des Scheitelwertes der Spannung der fortschreitenden Welle statt, weil diese an den isolierten Enden Bäuche hat. Praktisch kommt noch die Dämpfung in Betracht, so daß der wirklich auftretende größte Scheitelwert kleiner ist als der doppelte Scheitelwert der Spannung des Schwingungserzeugers. In der Literatur über die elektrischen Überspannungen findet man zuweilen die Ansicht, daß durch nochmalige Reflexion eine nochmalige Verdopplung, also die vierfache Spannung vorkommen könne. Das ist unrichtig, denn durch die Reflexion ist die fortschreitende Welle in eine stehende umgewandelt worden und besteht als solche so lange, bis sie durch Dämpfung aufgezehrt ist. Eine nochmalige Reflexion kann also nicht vorkommen. Was in § 199 betont wurde, gilt unter allen Umständen, gleichgültig ob die Schwingung eine fortschreitende oder eine stehende Welle bildet.

zität erheblich größer ist als die des Drahtes¹⁾ Die Erregung der Schwingung geschieht durch direkte Spannungskupplung (Abb. 377) oder durch elektrische Kraftlinienkupplung (Abb. 378). Bei ersterer ist bloß ein Kondensator vorhanden, durch dessen Entladung über

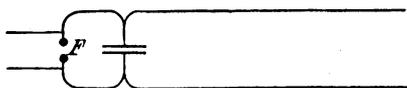


Abb. 377.

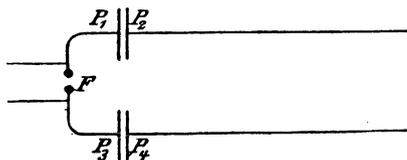


Abb. 378.

die Funkenstrecke F die Schwingung erzeugt wird. Bei Abb. 378 (Lechersche Anordnung) sind die beiden Kondensatoren im Schwingungskreis hintereinandergeschaltet. Die gesamte Kapazität ergibt sich aus § 179.

Da im einfachsten Falle einer stehenden Welle (lineare Leiter) die Eigenschwingung durch $\lambda = 4l$ und $v = \nu\lambda$ bestimmt ist, so folgt $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l}$. Andererseits gilt für jede Eigenschwingung das

Grundgesetz $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_m C_m}}$, wenn der Ohmsche Widerstand klein

ist (§ 195). Es fragt sich aber, was hier für L_m und C_m einzusetzen ist, denn die in § 26 und 120 angegebenen Formeln gelten nur unter der Voraussetzung, daß die magnetischen bzw. elektrischen Kraftlinien gleichmäßig über die ganze Leiterlänge verteilt sind. Das ist bei stehenden Wellen nicht der Fall, denn in den Knoten ist die Kraftliniendichte Null, in den Bäuchen hingegen am größten. Da alle einfachen Schwingungen sinusförmig verlaufen, so nimmt man Mittelwerte an, welche zum größten Wert (Scheitelwert) in derselben Beziehung stehen, wie der in § 130 berechnete Mittelwert, also

$$L_m = \frac{2}{\pi} L \quad \text{und} \quad C_m = \frac{2}{\pi} C,$$

so daß die obige Grundgleichung übergeht in

$$\nu = \frac{1}{4\sqrt{LC}},$$

wobei L und C für gleichmäßige Kraftliniendichte längs des ganzen Leiters gelten, also nach § 26 und 120 zu berechnen sind.

Nehmen wir z. B. zwei parallele Leiter von der Länge l , so ist $L = 4l \log \text{nat} \frac{a}{r}$ elektromagn. Einh. (Da es sich um Strömungsvorgänge, nicht

¹⁾ Es ist so, als wenn man am oberen Ende des Stabes in Abb. 373 ein Gewicht anbringt.

um statische Zustände handelt, ergibt diese Formel elektromagn. Einh.). Ferner ist $C = \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{a}{r}}$ elektrost. Einh. $= \frac{l}{4 \log \text{nat} \frac{a}{r}} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 10^{10})^2}$ elektromagnetische Einh. (§ 300). (Da die Kapazität ein statischer Ladungszustand ist, ergibt die Formel elektrost. Einh. Für die Einsetzung in obige Gleichung muß sie aber in elektromagn. Einh. umgewandelt werden.)

Mithin ist
$$\nu = \frac{1}{4 \sqrt{LC}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{4l}.$$

Nun ist aber $3 \cdot 10^{10}$ gleich der Lichtgeschwindigkeit v , so daß $\nu = \frac{v}{4l}$. Diese Formel steht also in Übereinstimmung mit der obigen, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Für Luft scheint das zu gelten, nicht aber für Kupfer (vgl. S. 448). Da aber die Grundgleichungen $\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}}$ und $\nu = \frac{v}{4l}$ zu demselben Wert führen müssen, so müssen die Mittelwerte L_m und C_m für stehende Wellen in jedem Falle so definiert werden, daß Übereinstimmung besteht.

Ferner gilt auch hier für fortschreitende und stehende Eigenwellen wie für alle Eigenschwingungen die auf S. 411 erhaltene Beziehung zwischen den größtmöglichen Scheitelwerten des Stromes und der Spannung

$$\mathfrak{I}_0 = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob man für L und C die für gleichmäßige Kraftliniendichte gültigen Werte oder die obigen Mittelwerte L_m , C_m einsetzt, weil sie hier einen Quotienten bilden. Bei Leitungen mit gleichmäßig verteilter Selbstinduktion und Kapazität bezeichnet man den maßgeblichen Ausdruck $\sqrt{\frac{L}{C}}$ als Leitungscharakteristik.

Wie überall tritt auch in offenen Leitungen Stromresonanz ein, wenn eine aufgedrückte Schwingung mit der durch $\nu = \frac{v}{4l}$ bestimmten Eigenschwingung oder deren ungeraden Vielfachen übereinstimmt. Nach der obigen Rechnung (S. 449) hat eine Schwingung von 50 Perioden in Kupferleitern eine Wellenlänge von 3400 km. Zur Ausbildung einer derartigen stehenden Welle als Eigenschwingung sind nach Abb. 375 zwei Leiter von $l = \lambda/4$, also in diesem Beispiel von 850 km erforderlich. Die Gefahr der Resonanz beim Anschluß einer offenen Leitung eines Elektrizitätswerkes an eine Wechselstrommaschine von 50 Perioden besteht also nicht.

Eine stehende Welle entsteht aber nicht nur in einem Leiter mit isoliertem Ende, sondern jedesmal, wenn die Wellenstirn einer fortschreitenden Welle auf eine Stelle der Leitung stößt, wo Widerstand oder Selbstinduktion oder Kapazität pro Längeneinheit plötz-

lich einen anderen Wert hat, also insbesondere beim Aufstoßen auf einen Wicklungsanfang. Es wird aber nur ein Teil der fortschreitenden Welle reflektiert und zu einer stehenden Welle umgebildet, während der Rest weiter vordringt. Wie viel reflektiert wird, hängt von Widerstands-, Selbstinduktions- und Kapazitätsverhältnissen ab. Wo in einem solchen Falle der Strom- und der Spannungsbauch liegt, das hängt davon ab, ob der scheinbare Widerstand pro Längeneinheit an der Reflexionsstelle zu- oder abnimmt. Ist er hinter der Reflexionsstelle größer als vor derselben (z. B. beim Übergang von einer geraden Leitung zu einer Wicklung), so bildet sich hier ein Stromknoten und daher ein Spannungsbauch wie bei der vollständigen Reflexion an einem isolierten Leitungsende (Abb. 375)¹⁾. Ist aber der scheinbare Widerstand hinter der Reflexionsstelle kleiner als vor derselben, so daß die Elektrizität von da an weniger behindert wird (z. B. beim Übergang von einem kleineren Leiterquerschnitt zu einem größeren), so bildet sich hier ein Strombauch und infolgedessen ein Spannungsknoten.

Die so entstandene stehende Welle ist als Eigenschwingung nur vorübergehend; sie wird durch Dämpfung aufgezehrt. Ist die fortschreitende Welle eine dauernde (Einschalten einer Leitung mit Stromverbraucher), so vergrößert sich der in die Wicklung des Stromverbrauchers eindringende Teil der fortschreitenden Welle im selben Maße, als der reflektierte Teil aufgezehrt wird, so daß schließlich der stationäre Zustand des normalen Stromdurchganges eintritt.

Auf die Strom- und Spannungsverhältnisse einer fortschreitenden Welle kann hier nicht eingegangen werden²⁾.

208. Elektromagnetische Wellen im Dielektrik.

Bei jeder Bewegung der Elektrizität in einem Stromleiter entstehen magnetische und elektrische Kraftlinien (§ 76 und 117). Elektrische Schwingungen in irgend welchen Leitern erzeugen also ein ziemlich kompliziertes magnetisches und elektrisches Feld, das man in seiner Gesamtheit als elektromagnetisches Feld bezeichnet, und das sich mit derselben Frequenz ändert wie die Schwingung, von der es erzeugt wird. Hertz hat den Beweis erbracht, daß dieses Feld nicht in jedem Augenblick und nicht an jedem Punkte denselben Schwingungszustand hat, sondern daß es sich als fortschreitende Welle mit einer gewissen, der Lichtgeschwindigkeit gleichkommenden Geschwindigkeit fortpflanzt, wenn es nicht durch eine leitende Fläche aufgehalten wird. An einer solchen wird die

¹⁾ Der größtmögliche Scheitelwert der Spannung erreicht dabei natürlich nicht den doppelten Scheitelwert des Schwingungserzeugers wie bei einer vollständigen Reflexion (Anm. 1 auf S. 451).

²⁾ Vgl. z. B. Breitfeld „Berechnung von Wechselstromfernleitungen“ Braunschweig. 1912.

elektromagnetische Welle reflektiert, und es bilden sich stehende Wellen aus.

Die elektromagnetischen Wellen sind polarisiert, wie die Lichtwellen, d. h. es sind transversale Wellen, während die Stromwellen in einem Leiter longitudinale Wellen sind. Die elektromagnetischen Wellen werden auch beim Übergang von einem Dielektrik zu einem anderen gebrochen wie Lichtwellen. Beim senkrechten Auftreffen auf eine Grenzfläche eines anderen Dielektriks gehen sie zum Teil durch, zum Teil werden sie reflektiert wie Lichtwellen beim Auftreffen auf einen durchsichtigen Körper.

Die elektromagnetischen Wellen sind es, welche die Kupplung zwischen Sender und Empfänger der drahtlosen Telegraphie herstellen. Da diese Kupplung sehr schwach ist, so ist klar, daß eine brauchbare Wirkung auf große Entfernung nur erreicht werden kann, wenn beide aufeinander abgestimmt sind, so daß Resonanz eintreten kann.

209. Wellenanzeiger und Wellenmesser.

Jeder sekundäre Stromkreis, in dem eine periodische EMK induziert wird, ist ein Anzeiger dafür, daß ein periodisch veränderliches Feld vorhanden ist. Das Vorhandensein einer sekundären EMK oder eines sekundären Stromes kann durch verschiedene Meßinstrumente nachgewiesen werden. Außerdem gibt es Erscheinungen, die unmittelbar das Vorhandensein einer elektrischen Schwingung anzeigen und daher einen wesentlichen Teil der drahtlosen Telegraphie bilden (§ 210).

Der älteste Wellenanzeiger ist der Fritter oder Kohärer (Branly). In einem Glasröhrchen (Abb. 379) befindet sich zwischen zwei Metall-



Abb. 379. Fritter.

elektroden Metall-Feilicht oder besser kleine scharfkantige Metallkörner. Werden die Elektroden in den Stromkreis einer Batterie und eines Galvanometers eingeschaltet, so geht kein Strom hindurch, weil die vielen lockeren Berührungsstellen zwischen den Metallkörnern einen unendlich großen Widerstand darstellen. Sowie aber elektromagnetische Wellen auf den Fritter auftreffen, sinkt der Widerstand so bedeutend herab, daß das Galvanometer einen deutlichen Strom anzeigt. Hören die elektromagnetischen Wellen wieder auf, so bleibt der Strom bestehen. Erschüttert man aber den Fritter durch einen leisen Schlag, so hört der Stromdurchgang auf.

Fast ebenso empfindlich ist der elektrolytische Wellenanzeiger¹⁾. Zwei Platindrähte, die mit einer Batterie und einem Galvanometer *G* verbunden sind (Abb. 380), tauchen in verdünnte Schwefelsäure. Ist die EMK der Batterie gerade etwas größer als die Polarisation zwischen Platin und verdünnter Schwefelsäure, so

¹⁾ Schlömilch, ETZ 1903, S. 959.

geht ein schwacher Strom hindurch. Treffen elektromagnetische Wellen auf diese Zelle auf, so wird der Strom bedeutend stärker, geht aber von selbst wieder auf seinen früheren Wert zurück, wenn die Wellen aufhören. Die Empfindlichkeit ist um so größer, je kleiner die Berührungsstelle der positiven Elektrode und der Flüssigkeit ist. Man verwendet daher für diese Elektrode einen Draht kleinsten Querschnittes, der bis zur Spitze in eine Glasröhre eingeschlossen ist.

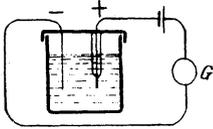


Abb. 380. Elektrolytischer Wellenanzeiger.

Auf ähnlicher Wirkung beruhen die zahlreichen Arten von Kontaktdetektoren: zwei verschiedene Körper (Leiter oder Halbleiter), die sich mit leichtem Druck berühren¹⁾. Auch jedes Mikrophon reagiert auf elektrische Schwingungen.

Grobe, aber sehr deutliche Wellenanzeiger sind Geißlersche oder Hittorffer Röhren (§ 233), und zwar auch solche ohne Elektroden. Sie leuchten auf, wenn zwischen ihren Enden eine Spannung (Potentialdifferenz) besteht. Sie müssen also, um wirken zu können, so in das Feld der elektromagnetischen Welle gebracht werden, daß sie parallel zu den elektrischen Kraftlinien liegen²⁾.

Vorrichtungen, welche nicht nur das Vorhandensein elektrischer Wellen nachweisen, sondern auch ihre Periodenzahl zu erkennen gestatten, bezeichnet man als Wellenmesser, oder da sie alle auf Resonanz beruhen, als Resonatoren.

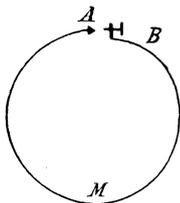


Abb. 381. Hertz'scher Resonator.

Die ersten derartigen Apparate sind von Hertz angewendet worden. Der einfachste besteht aus einem kreisförmig oder viereckig zusammengebogenen Draht (Abb. 381), dessen Enden eine Funkenstrecke bilden. Die eine Elektrode sitzt gewöhnlich an einer Stellschraube, um eine empfindliche Einstellung zu ermöglichen. Entsteht darin eine stehende Welle, deren Spannungsknoten in der Mitte des Drahtes bei *M* liegt, und deren Bäuche an den Enden liegen, so springen in der Funkenstrecke kleine Funken über, weil die beiden Schwingungsbäuche an den Enden entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es ist also nichts anderes als die in Abb. 375 dargestellte Drahtanordnung zusammengebogen, wobei die Schwingungen nicht durch Entladung einer Funkenstrecke, sondern durch Resonanz erzeugt werden, wenn sich dieser Resonator in einem Raum befindet, der

¹⁾ Vom Fritter unterscheiden sich die Kontaktdetektoren (und auch der elektrolytische Wellenanzeiger) dadurch, daß der scheinbare Widerstand für den durchgehenden Strom bei jenem nur vom ersten elektrischen Anstoß abhängt, während er bei diesen um so kleiner wird (bis zu einer gewissen Grenze), je mehr Wellen hindurchgehen. Daher werden diese Wellenanzeiger als summierende oder integrierende bezeichnet.

²⁾ Über andere Wellenanzeiger (Bolometer, Thermolement, magnetische Wellenanzeiger) vgl. die Lehrbücher der drahtlosen Telegraphie.

von elektromagnetischen Schwingungen durchzogen wird, oder durch elektrische Kupplung mit einem Schwingungserzeuger gekuppelt ist. Die Resonanz tritt ein, wenn die elektromagnetischen Wellen bzw. ihr Erzeuger eine solche Periodenzahl hat, daß eine halbe Welle gleich der Länge dieses Resonators ist, denn das ist seine Eigenschwingung. Nach § 207 können zwar auch kürzere Wellen (höhere Periodenzahl) in einem solchen Draht als Eigenschwingung auftreten. Sie sind aber zu schwach, um Funken zu erzeugen. Die Kupplung dieses Resonators mit dem Schwingungserzeuger (Oszillator) kann magnetisch oder elektrisch sein. Im ersteren Falle muß er so stehen, daß seine Fläche von den magnetischen Kraftlinien des elektromagnetischen Feldes getroffen wird. Im zweiten Fall muß eine leitende Verbindung des Oszillators mit einer Stelle des Resonators hergestellt werden wie in Abb. 367. Das darf aber nicht bei M geschehen, denn hier ist der Knoten der Spannungsweite, sondern bei A oder B . Die Kupplung ist um so stärker, je näher die Verbindung einem Spannungsbauch liegt.

Eine stehende Welle besteht natürlich nur, wenn kein Funken übergeht. Sowie ein solcher auftritt, ist die Welle eine fortschreitende, denn der Funke ist ein Leiter, durch den der offene Stromkreis des Resonators zu einem geschlossenen wird.

Zu einer elektrischen Kupplung durch die elektrischen Kraftlinien ist erforderlich, daß Resonator und Oszillator (wenigstens zum Teil) parallel liegen (Abb. 382). Diese Anordnung ist also ganz symmetrisch. Die Welle im Oszillator und im Resonator ist wie in

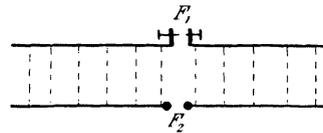


Abb. 382.

Abb. 375 oder 376. Wenn im Oszillator ein Funke bei F_2 überschlägt, geht im Resonator ein Funke bei F_1 über.

Um möglichst ausgeprägte Resonanz und nur die Grundschwingung zu erhalten, verwendet man statt der Resonatoren mit verteilter Kapazität und Selbstinduktion, wie die eben besprochenen, solche mit an einer Stelle konzentrierter Kapazität (Kondensator) wie in Abb. 366 und 367. Als Anzeiger des Eintrittes der Resonanz kann entweder ein Elektrometer an die Kondensatorklemmen angelegt werden, denn die Kondensatorspannung steigt in gleicher Weise an wie der Strom, oder es wird die Wärmewirkung des Stromes benutzt wie bei dem Wellenmesser von Dönitz¹⁾, wo ein Widerstandsdraht in die Kugel H (Abb. 383) eines Luft-

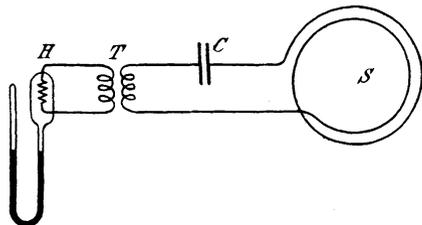


Abb. 383.

¹⁾ Dönitz, ETZ 1903, S. 920.

thermometers eingeschlossen ist. Dieser Draht ist aber, um durch seinen Widerstand nicht die Resonanz unscharf zu machen, nicht in den Resonanzkreis selbst eingeschaltet, sondern unter Zwischenschaltung eines Transformators *T*. Die Kupplung mit dem Felde des Schwingungserzeugers geschieht in der aus ein oder mehreren Drahtwindungen bestehenden Schleife *S*. Tritt Resonanz ein, so erwärmt der Widerstandsdraht die Luft im Luftthermometer und die Flüssigkeit in der U-Röhre steigt. Um die Resonanz für verschiedene Periodenzahlen einstellen zu können, ist der Kondensator *C* und damit die Eigenschwingung des Kreises veränderlich gemacht. Der Kondensator besteht nämlich aus mehreren übereinander liegenden, halbkreisförmigen Platten (Abb. 384), die mehr oder weniger ineinander geschoben werden können. In Abb. 385, die einen solchen Apparat zeigt, ist dieser

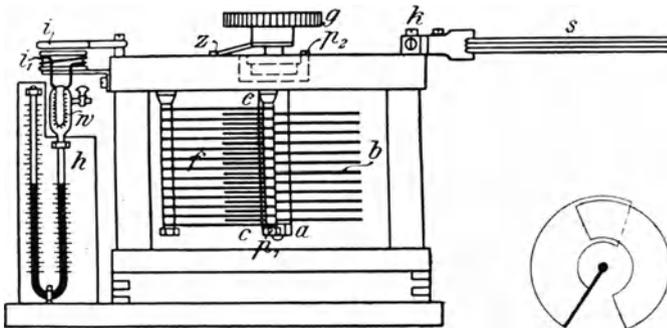


Abb. 385.



Abb. 384.



Abb. 386.

mehrplattige Kondensator im senkrechten Querschnitt zu sehen. Man kann also durch Drehung des Knopfes die Kapazität verändern, bis die Eigenschwingung dieses Kreises mit der ankommenden Schwingung gleich ist und daher Resonanz eintritt. Den Eintritt der Resonanz erkennt man, wie schon erwähnt, an dem Luftthermometer. Aus der Stellung des Knopfes kann man auf einer geeichten Skala die Eigenschwingungszahl ablesen. Zur Veränderung der Eigenschwingung zwecks Einstellung der Resonanz kann statt der veränderlichen Kapazität natürlich auch eine veränderliche Selbstinduktion dienen.

Ein anderer etwas größerer aber einfacherer Wellenmesser ist der „Multiplikationsstab“ von Slaby¹⁾. Er besteht aus einem Draht, der auf einen isolierten Stab aufgewickelt ist (Abb. 386). Durch die nebeneinanderliegenden Windungen erhält er eine größere Selbstinduktion und Kapazität als bei gerader Ausspannung, und es tritt eine Steigerung der Spannung ein (daher der Name). Bringt man ein Ende durch einen Draht in elektrische Kupplung mit dem zu untersuchenden

¹⁾ Slaby, ETZ 1903, S. 1007.

Schwingungserzeuger, so entsteht hier ein Strombauch, am andern Ende aber ein Spannungsbauch, der sich durch leichtes Funken-sprühen an dem damit verbundenen Knopf *F* bemerkbar macht.

210. Das Wesen der drahtlosen Telegraphie.

Das Wesen der drahtlosen Telegraphie beruht auf der Induktion sekundärer Ströme im Empfänger durch primäre Ströme, die im Sender erzeugt werden. Die Träger dieser Ströme sind Drähte (Abb. 387) von möglichst großer Höhe. Am unteren Ende des Sendedrahtes werden durch Funkenentladungen Schwingungen erzeugt, die im Draht eine stehende Welle bilden; es ist also die eine Hälfte der Abb. 375 lotrecht gestellt, während die andere Hälfte durch die Erde ersetzt ist. Infolge der großen Kapazität der Erde kann zwischen Funkenstrecke und Erde dieselbe Bewegung der Elektrizität stattfinden wie zwischen Funkenstrecke und Draht, so daß Symmetrie besteht wie in Abb. 375. Durch den periodischen Strom, den die im Draht auf- und ab-schwingende Elektrizität darstellt, werden magne-tische Kraftlinien erzeugt, die den Draht konzen-trisch umgeben (wie in Abb. 81) und sich bis ins Unendliche ausbreiten, wenn sie nicht vorher auf Leiter auftreten. Treffen und schneiden sie den lot-rechten Draht des Emp-fängers, so induzieren sie in ihm Ströme von glei-cher Art, also auch eine stehende Welle. Diese hat

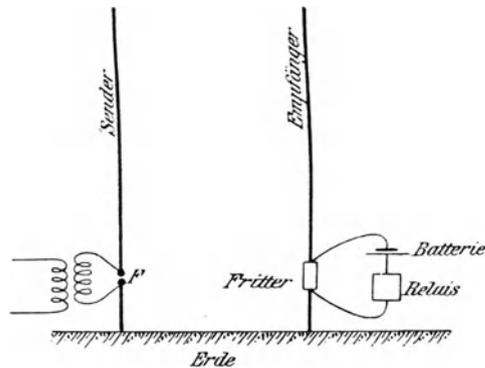


Abb. 387.

bei großen Abständen nur dann genügende Stärke, wenn der Empfänger auf gleiche Schwingungen wie der Sender abgestimmt ist¹⁾. Wir haben es demnach mit zwei parallelen, durch magnetische Kraftlinien gekuppelten Leitern zu tun. In den Empfängerdraht ist unten, also in der Nähe des Bauches der Stromschwingung ein Wellen-anzeiger, z. B. ein Fritter eingeschaltet (Abb. 387). Durch die im Draht entstehende Welle wird der Fritter leitend und dadurch der aus einer Batterie und einem Relais bestehende Ortsstromkreis geschlossen. Von dem Sendedraht gehen auch elektrische Kraftlinien aus, so daß man strenge genommen von einer elektromagnetischen

¹⁾ Dies wurde erst nach den Versuchen von Slaby allgemein eingeführt. Marconi verwendete zwar schon einen Kondensator im Empfänger, aber nicht zur Abstimmung, sondern zur Abhaltung atmosphärischer Ladungen, also als Sperrkondensator.

Welle im Sinne des § 208 sprechen muß, die die Kupplung zwischen Sender und Empfänger bewirkt. Man kommt aber bei der Erklärung mit der alleinigen Berücksichtigung der magnetischen Kraftlinien aus. Daß sie tatsächlich die Hauptrolle spielen, also die Kupplung im wesentlichen eine magnetische ist, geht daraus hervor, daß man durch Erhöhung der Spannung im Sendedraht keine erhebliche Steigerung der Wirkung erzielt, wohl aber durch Vergrößerung der im Sendedraht hin und her schwingenden Elektrizitätsmenge, d. h. der Stromstärke der Welle. Eine Vergrößerung der Stromstärke könnte nach Gl. XI, S. 410 durch Erhöhung der Ladespannung erreicht werden. Praktisch wird aber dadurch eine Steigerung der Wirkung nicht erzielt, weil auch die Dämpfung eine wichtige Rolle spielt. Diese wächst aber mit der Spannung aus zwei Gründen: erstens, weil bei Erhöhung der Spannung die Funkenlänge vergrößert werden muß und damit der Funkenwiderstand wächst, zweitens, weil mit der Spannung auch der Ausstrahlungsverlust aus dem Sendedraht zunimmt.

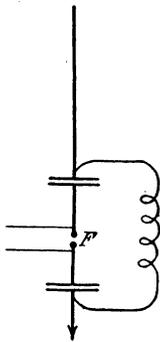


Abb. 388.

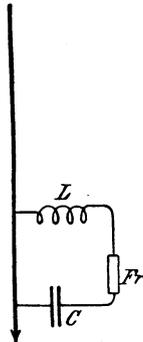


Abb. 389.

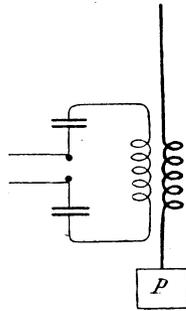


Abb. 390.

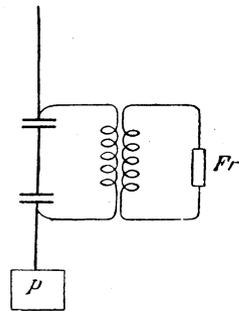


Abb. 391.

Dagegen gelingt eine wirksame Vergrößerung der Stromstärke durch Kupplung des Sendedrahtes mit einem geschlossenen Schwingungskreis (Braun 1898), dessen Gesetze in § 195 abgeleitet wurden. Abb. 388 zeigt eine solche Senderanordnung. Ein aus zwei hintereinandergeschalteten Kondensatoren¹⁾ und einer Drosselspule bestehender geschlossener Schwingungskreis wird durch Anschluß an eine Stromquelle (Funkeninduktor oder Transformator) geladen und über die Funkenstrecke F oszillatorisch entladen. Mit ihm ist der stark gezeichnete Sendedraht elektrisch gekuppelt (§ 206), und es kommt nun in ihm eine viel größere Elektrizitätsmenge zur Schwingung als ohne den geschlossenen Schwingungskreis. Er steht

¹⁾ In der Praxis wird gewöhnlich — auch bei den Schaltungen Abb. 390, 391 — nur ein Kondensator verwendet. Die Schaltung wird dadurch zwar unsymmetrisch, die Wirkungsweise aber bleibt grundsätzlich dieselbe.

zu letzterem in einem ähnlichen Verhältnis wie eine Stimmgabel zu ihrem Resonanzkasten. Abb. 389 zeigt die entsprechende Empfängerschaltung. Der Wellenanzeiger Fr , der Kondensator C und die Selbstinduktion L bilden einen geschlossenen Schwingungskreis, der mit dem Empfängerdraht gekuppelt ist. An den Wellenanzeiger ist wieder der Ortsstromkreis angeschlossen wie in Abb. 387.

Die Kupplung des geschlossenen Schwingungskreises mit dem Sendedraht kann auch eine magnetische sein, wie Abb. 390 zeigt. Bei der entsprechenden Empfängerschaltung tritt an Stelle der Funkenstrecke der Wellenanzeiger. Abb. 391 zeigt noch eine andere Empfangsschaltung, wo der Wellenanzeiger Fr magnetisch gekuppelt ist mit dem geschlossenen Schwingungskreis, der mit dem Empfängerdraht elektrisch gekuppelt ist.

Die gekuppelten Systeme haben aber auch einen Nachteil gegenüber den einfachen (Abb. 387), weil zwei verschiedene Schwingungen auftreten (§ 201), so daß die Abstimmung des Empfängers auf den Sender unsicherer ist, als beim einfachen System. Dieser Nachteil wird vermindert oder ganz beseitigt, wenn die Erregung der Schwingungen im geschlossenen Kreis durch Stoßerregung (S. 432) geschieht, weil nach dem Erlöschen des Funkens der primäre Kreis offen ist, d. h. als Schwingungskreis nicht mehr besteht, so daß dann im Sendedraht nur eine Schwingung weiterbesteht, und die Aussendung der Wellen „eintönig“ erfolgt.

Abb. 392 zeigt eine Senderschaltung, wie sie jetzt meist verwendet wird. T ist ein Resonanz-Transformator oder -Induktor, F eine Löschfunkenstrecke, welche Schwingungen nach Art der Abb. 346 oder 347 im primären Schwingungskreis $L_1 C_1$ erzeugt. Diese erregen durch magnetische Kupplung die Eigenschwingungen des sekundären Kreises $L_2 C_2 L_3$. Mit diesem ist die Sendeleitung

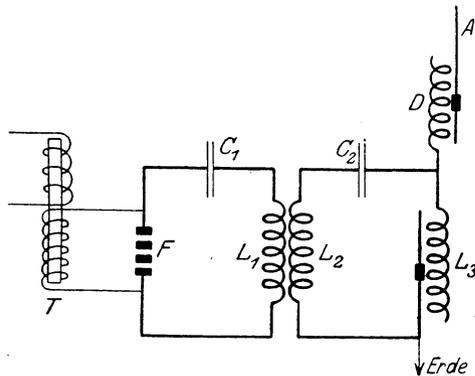


Abb. 392.

(ADL_3 -Erde) durch Stromkupplung gekuppelt, da L_3 gemeinsam ist. Die verstellbaren Kontakte bei L_3 und D dienen zur Veränderung des Kupplungsgrades und der Eigenschwingung der Sendeleitung.

Eine weitere Steigerung der im Sendedraht schwingenden Elektrizitätsmenge wird durch die Mehrfachsysteme erzielt¹⁾. Abb. 393 a und b zeigen derartige Schaltungen. Hier sind zwei geschlossene

¹⁾ Braun, Physikal. Zeitschr. 5, S. 193, 1904.

Schwingungskreise mit dem Sendedraht gekuppelt; im ersteren Falle elektrisch, im zweiten Falle magnetisch. Natürlich müssen die Schwingungen in den beiden Kreisen nicht nur gleiche Schwingungszahl haben, sondern auch in gleicher Phase sein, wenn sie sich in ihrer Wirkung auf den Sendedraht unterstützen sollen. Die gleiche Schwingungszahl ergibt sich durch gleiche Kapazität und Selbstinduktion,

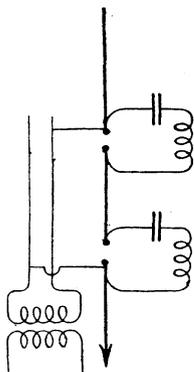


Abb. 393 a.

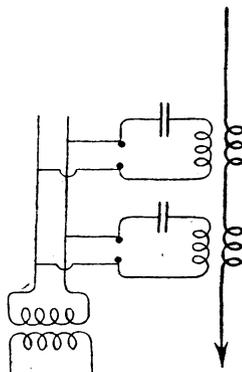


Abb. 393 b.

die Phasenübereinstimmung stellt sich von selbst dadurch ein, daß beide Schwingungskreise mit demselben Sendedraht ziemlich stark gekuppelt sind. Es gibt noch zahlreiche andere Schaltungen, die sich durch unwesentliche Abänderungen oder Kombination der verschiedenen Grundarten ergeben, worauf hier nicht eingegangen werden kann¹⁾.

Über die Schwingungserzeuger vgl. § 203, 204.

¹⁾ Näheres über die drahtlose Telegraphie bei H. Rein „Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie“, Berlin 1917. J. Zenneck „Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie“, Stuttgart 1916.

Dreizehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Wellenformen.

211. Die wichtigsten Wellenformen.

Bisher wurde bei allen Betrachtungen über Wechselströme vorausgesetzt, daß der Verlauf des Stromes, der Spannung und des magnetischen Feldes einer einfachen Sinuswelle entspricht. Bei der praktischen Anwendung der Wechselströme ist dies selten der Fall. Wir betrachten zunächst die einfachsten Fälle zusammengesetzter Wellenformen.

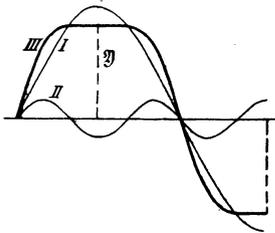


Abb. 394.

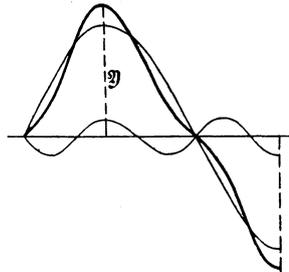


Abb. 395.

Abb. 394 zeigt eine stumpfe Wellenform *III*, die aus zwei Sinuswellen *I* und *II* zusammengesetzt ist. Jede Ordinate von *III* ist gleich der Summe der Ordinaten von *I* und *II*. Der mathematische Ausdruck von *I* ist $\mathfrak{A}_1 \sin \omega t$, der von *II* ist $\mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t$, weil sie dreimal so viel Perioden hat. Mithin ist der mathematische Ausdruck von *III*

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t.$$

Wie man ohne weiteres sieht, ist der Scheitelwert dieser Welle: $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3$. Man erhält ihn auch rechnerisch aus der Gleichung für *III*, wenn man $\omega t = 90^\circ$ setzt. Das ist aber nicht der Fall, wenn die Wellenform gesattelt ist (Abb. 402). Dann liegt der Scheitelwert nicht in der Mitte und muß besonders bestimmt werden.

Die spitze Wellenform in Abb. 395 besteht aus denselben Gliedern; aber die dreifache Welle beginnt mit negativen Werten.

Ihre Gleichung ist also

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t - \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t$$

und ihr Scheitelwert ist in jedem Falle:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3.$$

Betrachtet man eine Welle von der Form

$$y = \mathfrak{A}_1 \cos \omega t + \mathfrak{A}_3 \cos 3 \omega t,$$

so findet man aus der Addition der beiden Einzelwellen (Abb. 396) eine Welle von gleicher Gestalt wie in Abb. 395, nur liegt hier der Anfang ($\omega t = 0$) beim Scheitelwert, d. h. jene ist gegen diese um 90° verschoben. Tatsächlich läßt sich diese in Sinuswellen mit 90° Phasenverschiebung überführen, denn es ist

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_1 \cos \omega t + \mathfrak{A}_3 \cos 3 \omega t \\ &= \mathfrak{A}_1 \sin(\omega t + 90) - \mathfrak{A}_3 \sin(3 \omega t + 270) \\ &= \mathfrak{A}_1 \sin(\omega t + 90) - \mathfrak{A}_3 \sin 3(\omega t + 90). \end{aligned}$$

Wie man in den vorstehenden Abbildungen das Glied dritter Ordnung aus der Abstumpfung bzw. Zuspitzung der Welle erkennen kann, so kann man stark ausgeprägte Glieder höherer Ordnung aus den Einbuchtungen erkennen. So findet man aus Abb. 397, daß sie ein Glied elfter Ordnung enthält, denn jeder positive Scheitel elfter Ordnung erzeugt eine Ausbuchtung, jeder negative Scheitel eine Einbuchtung in der resultierenden Welle. Solcher Aus- und Einbuchtungen zählt man in einer halben Welle elf, entsprechend den elf halben Wellen. Ist das Glied elfter Ordnung negativ, so folgt auf den Nullpunkt nicht eine Ausbuchtung, sondern eine Einbuchtung.

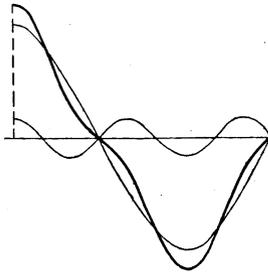


Abb. 396.

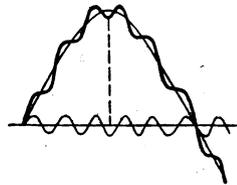


Abb. 397.

Sind mehrere Glieder höherer Ordnung vorhanden, so kann man sie nicht so leicht erkennen, sondern nur durch graphische oder rechnerische Auflösung (§ 221).

Die vorstehenden, nur aus sin-Gliedern oder nur aus cos-Gliedern ohne Phasenverschiebung bestehenden Wellenformen, sind sowohl zur Abszissenachse als auch zum Scheitelwert jeder Halbwelle symmetrisch. Kommen sin- und cos-Glieder gleichzeitig vor

oder bestehen zwischen sin-Gliedern Phasenverschiebungen, so ist die Welle zwar noch zur Abszissenachse, aber nicht mehr zum Scheitelwert symmetrisch. Dieser liegt nicht mehr in der Mitte zwischen den Nullpunkten. Abb. 398 hat die Gleichung

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \cos 3 \omega t.$$

Durch Einführung einer Phasenverschiebung von 90° kann man den cos in den sin überführen und erhält dann

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin (3 \omega t + 90) \\ &= \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 (\omega t + 30). \end{aligned}$$

Abb. 398 zeigt auch diese Phasenverschiebung.

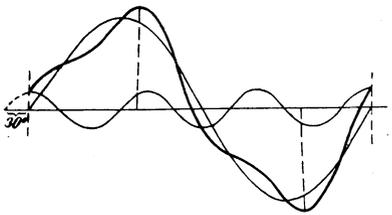


Abb. 398.

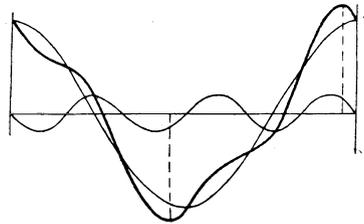


Abb. 399.

Abb. 399 hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{A}_1 \cos \omega t - \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t \\ &= \mathfrak{A}_1 \sin (\omega t + 90) - \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t. \end{aligned}$$

212. Beziehung zwischen Spannungswellen und magnetischen Wellen.

Die Wellenformen in Abb. 394 und 395 stehen in einer wichtigen Beziehung zueinander. Stellt z. B. die erste eine magnetische Welle

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t + \mathfrak{Z}_3 \sin 3 \omega t$$

vor, so ist die von ihr induzierte Spannungswelle (nach § 132)

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\omega N \mathfrak{Z}_1 \cos \omega t - 3 \omega N \mathfrak{Z}_3 \cos 3 \omega t \\ &= -(\mathfrak{E}_1 \cos \omega t + \mathfrak{E}_3 \cos 3 \omega t). \end{aligned}$$

Diese Wellenform ist identisch mit der in Abb. 395, während die \mathfrak{z} -Welle durch Abb. 394 dargestellt ist. Umgekehrt findet man, daß eine magnetische Welle von der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t - \mathfrak{Z}_3 \sin 3 \omega t$$

(Abb. 395) eine Spannungswelle von der Form wie in Abb. 394 erzeugt. Im allgemeinen erzeugt also eine stumpfe magnetische Welle eine spitze Spannungswelle und umgekehrt, wenn sie symmetrisch sind.

Ferner erkennt man, daß zwischen den Scheitelwerten der Spannung und des magnetischen Feldes einer Welle x ter Ordnung folgende Beziehung besteht

$$\mathcal{E}_x = x \omega N \mathfrak{B}_x.$$

Drückt man die EMK im effektiven Wert und praktischer Einheit aus, während \mathfrak{B} in abs. Einh. (Anzahl der Kraftlinien) bleibt, so ergibt sich wie auf S. 230:

$$\mathcal{E}_x = 4,44 x \nu N \mathfrak{B} \cdot 10^{-8} \cdot \text{Volt} \dots \dots \dots (220)$$

Betrachten wir nun eine unsymmetrische Spannungswelle

$$e = \mathcal{E} \sin \omega t + \mathcal{E}_3 \cos 3 \omega t \quad (\text{Abb. 398})$$

und suchen die dazu gehörige magnetische Welle, so ist diese

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{N} \int e dt = \frac{\mathcal{E}_1}{\omega N} \cos \omega t - \frac{\mathcal{E}_3}{3 \omega N} \sin 3 \omega t.$$

Das ist die in Abb. 399 dargestellte Welle. Solche kommen zustande, wenn die Maschine Strom liefert, und die eine Hälfte jedes Poles durch die Ankerrückwirkung geschwächt oder verstärkt wird.

Wir betrachten nun eine Wellenform mit einem Gliede 2. Ordnung:

$$e = \mathcal{E}_1 \sin \omega t + \mathcal{E}_2 \sin 2 \omega t.$$

Das ist die in Abb. 400 dargestellte Welle. Die entsprechende magnetische Welle ist

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{N} \int e dt = \frac{\mathcal{E}_1}{\omega N} \cos \omega t + \frac{\mathcal{E}_2}{2 \omega N} \cos 2 \omega t.$$

Das ist die in Abb. 401 dargestellte Welle. Eine Maschine mit derartiger magnetischer Welle müßte also aufeinanderfolgende Pole von

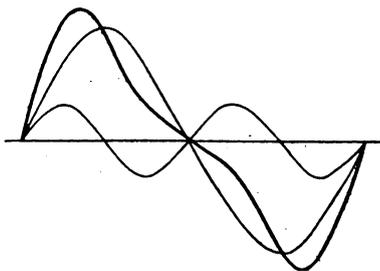


Abb. 400.

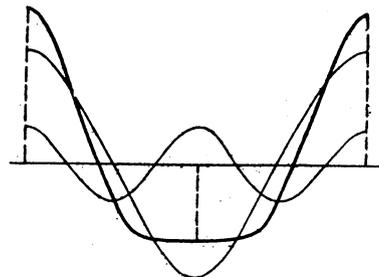


Abb. 401.

verschiedener Kraftlinienmenge haben, und die Abstände der Nullpunkte müßten bei beiden Wellenhälften verschieden sein, d. h. die Maschine müßte während der beiden Halbwellen verschiedene Geschwindigkeit haben. Das ist aber unmöglich, denn dieselben

Kraftlinien, die bei einem Pol austreten, treten beim anderen wieder ein, und die Geschwindigkeit der Maschine ist während jeder Halbwelle dieselbe. Aus demselben Grunde können auch höhere Glieder von gerader Ordnung in elektrischen Maschinen nicht entstehen¹⁾. Wohl aber können derartige Wellenformen durch Lichtbögen mit verschiedenartigen Elektroden (§ 261), elektrische Ventile (§ 262) u. dgl. unsymmetrische Anordnungen hervorgebracht werden²⁾.

Wir kommen nach dem Vorstehenden zu folgendem Ergebnis. Wellenformen, die zur mittleren Ordinate symmetrisch sind, enthalten nur Sinusglieder oder nur Cosinusglieder ungerader Ordnung. Unsymmetrische Wellenformen, die dadurch charakterisiert sind, daß die um eine halbe Welle auseinanderliegenden Ordinaten gleich groß sind, bestehen aus Sinusgliedern und Cosinusgliedern ungerader Ordnung, oder aus Sinusgliedern mit Phasenverschiebung. Unsymmetrische Wellen anderer Art enthalten Glieder gerader Ordnung; sie sind in elektrischen Maschinen unmöglich.

Es läßt sich also jede von Wechselstrommaschinen erzeugte Wellenform durch folgende Gleichung darstellen

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \mathfrak{A}_5 \sin 5 \omega t + \dots \\ + \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3 \omega t + \mathfrak{B}_5 \cos 5 \omega t + \dots$$

oder durch

$$y = \mathfrak{D}_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + \mathfrak{D}_3 \sin 3 (\omega t + \varphi_3) \\ + \mathfrak{D}_5 \sin 5 (\omega t + \varphi_5) + \dots \dots \dots (221)$$

¹⁾ Um in dieser Hinsicht keiner Täuschung zu verfallen, muß man immer eine ganze Welle, nicht nur eine Halbwelle betrachten. Denn eine Halbwelle der Abb. 400 sieht einer Halbwelle der Abb. 398 sehr ähnlich. In der Tat könnte man jede Halbwelle der letzteren zeichnerisch durch eine Grundwelle und zwei Halwellen zweiter Ordnung wie in Abb. 400 darstellen. Macht man das aber für die ganze Abb. 398, so sieht man, daß von dieser scheinbaren Welle zweiter Ordnung immer zwei positive und zwei negative Halwellen aufeinanderfolgen, statt abwechselnd eine positive und eine negative, wie es bei einem sin oder cos der Fall sein muß.

²⁾ Ein schwaches Glied zweiter Ordnung kann auch in normalen Wechselstromlichtbögen und in Glühlampen entstehen, und zwar lediglich als Folge der periodischen Stromwärme, die beim Scheitelwert des Stromes ein Maximum, beim Nullwert ein Minimum ist. Und weil jeder negative Scheitelwert ein ebensolches Maximum der Stromwärme ergibt wie jeder positive Scheitelwert, so kommen auf jede Periode des Wechselstromes zwei Maxima (positive Scheitelwerte) und zwei Minima (negative Scheitelwerte), also zwei Perioden. Diese doppelte Periodizität erkennt man auch aus den Leistungskurven in Abb. 199 bis 201. Da dieses Glied zweiter Ordnung nur aus der periodischen Änderung des Widerstandes entsteht, kommt es nur in der Stromwelle, aber nicht in der Spannungswelle vor. Im allgemeinen ist es auch in der Stromwelle so klein, daß es nur durch genaue Ausmessung einer oszillographischen Aufnahme ermittelt werden kann. Im Wechselstromlichtbogen entstehen außerdem bedeutend stärkere Glieder höherer Ordnung in der Elektrodenspannung durch den Zündvorgang, wie die Abb. 501 und 502 zeigen. Da sich diese Vorgänge beim Anstieg jeder Halbwelle auf der positiven und negativen Seite im gleichen Sinne wiederholen, so sind es Glieder gerader Ordnung, die dadurch entstehen.

Zwischen den Scheitelwerten und Phasenverschiebungen dieser beiden Gleichungen bestehen folgende Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2} \\ \operatorname{tg} x \varphi_x &= \frac{\mathfrak{B}_x}{\mathfrak{A}_x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (222)$$

mit deren Hilfe man eine in die andere überführen kann.

213. Scheitelwert, effektiver Wert und arithmetischer Mittelwert einer zusammengesetzten Wellenform.

Der Scheitelwert ist der größte Ordinatenwert einer Welle. Bei einer einfachen Sinuswelle liegt er in der Mitte zwischen den beiden Nullpunkten. Bei unsymmetrischen Wellenformen wie in Abb. 398 und 399 liegt er nicht in der Mitte. Bei eingesattelten symmetrischen Wellen (Abb. 402) kommt er in jeder halben Welle zweimal vor (\mathfrak{y}). Zu seiner Berechnung aus den Scheitelwerten der einzelnen Glieder gibt es keine bestimmte Regel, sondern man muß nach den Regeln der Differentialrechnung das Maximum

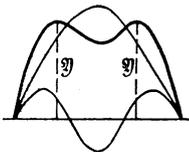


Abb. 402.

aufsuchen, was aber häufig rechnerische Schwierigkeiten bietet. Ist die Wellenform gezeichnet, so erhält man den Scheitelwert natürlich durch Abmessung.

Der effektive Wert ist nach § 131 definiert durch

$$Y = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} y^2 dt} \dots \dots \dots (223)$$

Für eine Welle von der Form

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{B}_1 \cos \omega t$$

ergibt sich

$$Y = \sqrt{\frac{2}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1^2 \sin^2 \omega t dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{B}_1^2 \cos^2 \omega t dt + 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \sin \omega t \cos \omega t dt \right]}$$

Das erste Integral ist nach § 131 gleich $\frac{\mathfrak{A}_1^2 \tau}{4}$, das zweite ist gleich $\frac{\mathfrak{B}_1^2 \tau}{4}$. Das dritte ist

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \omega t \cos \omega t dt = \left| \frac{1}{2\omega} \sin^2 \omega t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} = \left| \frac{1}{2\omega} \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} = 0.$$

Also ist der effektive Wert

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2)}.$$

Da $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1$ die Scheitelwerte der einzelnen Glieder sind, so sind ihre effektiven Werte

$$A_1^2 = \frac{\mathfrak{A}_1^2}{2} \qquad B_1^2 = \frac{\mathfrak{B}_1^2}{2}.$$

Mithin

$$y = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Enthält die Welle beliebig viele Glieder höherer Ordnung, lautet sie also

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_2 \sin 2 \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \dots \\ + \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_2 \cos 2 \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3 \omega t + \dots$$

so ist

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \dots + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \dots)} \\ = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \dots} \quad (224)$$

wenn $A_1 \dots B_1 \dots$ die effektiven Werte der einzelnen Glieder bedeuten.

In der Praxis liegt fast immer eine Zeichnung von der betr. Wellenform vor. Dann braucht man zur Ermittlung des effektiven Wertes nicht die Gl. 224, welche die umständliche Berechnung der Fourierschen Reihe voraussetzt, sondern man kann die Definitionsgleichung 223 benutzen, indem man eine halbe Welle in eine beliebige Anzahl, z. B. a gleichbreite Streifen einteilt (Abb. 403). Mißt man in jedem Streifen die Höhe h , so ist der effektive Wert

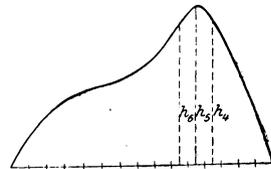


Abb. 403.

$$Y = \sqrt{\frac{1}{a}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dots)} \quad (225)$$

denn das ist nichts anderes als Gleichung 223 geometrisch ausgedrückt. Je größer die Anzahl a der Streifen, desto größer ist die Genauigkeit¹⁾.

¹⁾ Man erhält so auf viel kürzerem Wege eine größere Genauigkeit für den effektiven Wert, als durch Ausrechnung der Fourierschen Reihe; besonders dann, wenn man bei sehr spitzen Wellenformen die Anzahl der Streifen so wählt, daß der größte Wert (Scheitelwert) mit einer der Mittellinien h zusammenfällt, denn gerade dieser hat großen Einfluß auf den effektiven Wert. Da man das bei Ausrechnung der Fourierschen Reihe meist nicht so einrichten kann, wenn man nicht sehr viel Glieder auf langwierige Weise berechnen will, so ergeben sich gerade bei dieser manchmal beträchtliche Fehler.

Der arithmetische Mittelwert, der (nach § 130) definiert ist durch

$$Y_{mi} = \frac{1}{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{2}} y dt,$$

läßt sich nicht so wie der effektive durch eine für alle Wellenformen gültige Formel darstellen, sondern er ist verschieden, je nach den Gliedern, welche die Welle enthält.

So ergibt sich z. B. für eine Welle

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_2 \sin 2 \omega t$$

der Mittelwert

$$Y_{mi} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \sin \omega t dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_2 \sin 2 \omega t dt = \frac{2 \mathfrak{A}_1}{\pi},$$

weil das zweite Integral für die Grenzen 0 und $\frac{\tau}{2}$ gleich Null wird.

Dagegen ist für eine Welle

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t$$

dieser Mittelwert gleich

$$Y_{mi} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \sin \omega t dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t dt = \frac{2 \mathfrak{A}_1}{\pi} + \frac{2 \mathfrak{A}_3}{3 \pi}.$$

Zu beachten ist, daß bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwertes die Integration immer zwischen den Nullpunkten der resultierenden Welle, nicht zwischen denen des ersten Gliedes stattfinden muß, da man sonst einen falschen Wert erhält. Diese Nullpunkte fallen aber nur dann aufeinander, wenn alle Glieder höherer Ordnung durch den Nullpunkt des ersten Gliedes gehen.

In allen anderen Fällen darf die Integration nicht zwischen 0 und $\frac{\tau}{2}$ erfolgen, sondern nur zwischen den Nullpunkten der resultierenden Welle, die vorher ermittelt werden müssen.

214. Formfaktor und Scheitelfaktor.

Um die Stumpfheit oder Spitzheit einer Wellenform zahlenmäßig zu charakterisieren, wurde von Fleming der Formfaktor f vorgeschlagen; er ist das Verhältnis des effektiven zum arithmetischen Mittelwert:

$$f = \frac{Y}{Y_{mi}}$$

In den meisten Fällen ist dieser Wert um so größer, je spitzer die Wellenform ist. Es gibt aber Fälle, wo dies nicht zutrifft. Aus diesem und den im folgenden angegebenen Gründen ist vom Verfasser der Scheitelfaktor σ zur Charakterisierung der Wellenform vorgeschlagen worden¹⁾. Er ist definiert durch das Verhältnis des Scheitelwertes zum effektiven Wert:

$$\sigma = \frac{\mathfrak{U}}{Y}.$$

Je größer dieser Wert, desto spitzer ist unter allen Umständen die Wellenform. Er hat außerdem noch den Vorteil, daß man den arithmetischen Mittelwert, den man sonst nirgends braucht, nicht eigens bestimmen muß, und daß bei verschiedenen Wellenformen der Unterschied im Scheitelfaktor größer ist als im Formfaktor, wie man aus folgender Zusammenstellung dreier geometrischer Wellenformen mit gleichem Scheitelwert \mathfrak{U} sieht.

	Formfaktor f	Scheitelfaktor σ
Sinuswelle	$\frac{\mathfrak{U}/\sqrt{2}}{2 \mathfrak{U}/\pi} = 1,111$	$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}/\sqrt{2}} = 1,414$
Gleichseitiges Dreieck . .	$\frac{\mathfrak{U}/\sqrt{3}}{\mathfrak{U}/2} = 1,150$	$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}/\sqrt{3}} = 1,732$
Rechteck	$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}} = 1$	$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{U}} = 1$

Die Kenntnis des Scheitelfaktors σ ist notwendig für die Beurteilung der elektrischen Beanspruchung der Isolierstoffe unter hoher Spannung, denn diese Beanspruchung hängt nicht von irgend einem Mittelwert, sondern von der höchsten Spannung, also vom Scheitelwert \mathfrak{U} ab. Da dieser nicht unmittelbar gemessen werden kann, muß man die Beziehung $\mathfrak{U} = \sigma E$ benützen, wobei E die vom Voltmeter angegebene Spannung bedeutet. σ muß also für die betr. Maschine und bei Abhängigkeit der Wellenform von der Belastung²⁾ für die betr. Belastung aus einem Oszillogramm ermittelt werden, indem der Scheitelwert abgemessen, und der effektive Wert nach Gl. 225 berechnet wird.

¹⁾ ETZ 1900, S. 674. Zeitschr. f. Elektrot., Wien 1902, Heft 13. Vgl. auch die Anmerk. auf S. 474.

²⁾ Bei gewöhnlichen Wechselstromerzeugern kann sich der Scheitelfaktor zwischen Leerlauf und Vollbelastung um 15 Proz. ändern. Durch sekundäre Kurzschluß-Dämpfung (zur Vermeidung des Pendelns beim Parallelbetrieb) wird dieser Einfluß unterdrückt, und die Spannungswelle bleibt nahezu unverändert. Vgl. Benischke, ETZ 1915, S. 396.

215. Der Hystereseverlust im Eisen bei zusammengesetzten Wellenformen.

Nach § 156 hängt der Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung des Eisens nicht vom effektiven Wert, sondern vom Scheitelwert der Kraftliniendichte ab. Hat man eine magnetische Welle von der Form

$$z = z_1 \sin \omega t + z_3 \sin 3 \omega t$$

und eine andere von der Form

$$z = z_1 \sin \omega t - z_3 \sin 3 \omega t,$$

so haben beide denselben effektiven Wert $\sqrt{\frac{1}{2}(z_1^2 + z_3^2)}$; auch die effektiven Werte der entsprechenden Spannungswellen $\sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_3^2)}$ sind gleich. Dagegen ist der magnetische Scheitelwert der ersten Wellenform gleich $z_1 + z_3$, der der zweiten gleich $z_1 - z_3$. Bei der letzteren hat man also erheblich größeren Hystereseverlust¹⁾.

Zur Berechnung des Hystereseverlustes ist also die Kenntnis des magnetischen Scheitelwertes erforderlich. Experimentell kann

¹⁾ Demnach wären also Stromerzeuger mit stumpfer magnetischer Welle und spitzer Spannungswelle vorzuziehen. Dem steht aber entgegen, daß für elektrische Bogenlampen eine stumpfe Spannungswelle günstiger ist. Für alle anderen Belange, insbesondere für die Vermeidung der Resonanzspannungen höherer Glieder (§ 219) sind möglichst reine Sinuswellen erwünscht. Diese sollen daher bei der Konstruktion der Stromerzeuger angestrebt werden. Beim Betriebe ist noch zu berücksichtigen, daß durch Ankerrückwirkung eine Verzerrung der Spannungswelle im Stromerzeuger stattfindet. Die Gesetze dieser Verzerrung wurden vom Verfasser in „Elektrotechnik und Maschinenbau“ 1905, S. 681, wie folgt festgestellt:

1. Die unsymmetrische Verzerrung der Grundform einer Spannungswelle (bei Drehstromerzeugern der Sternspannung) durch Ankerrückwirkung rührt im wesentlichen nur von der Wattkomponente des Stromes her und erfolgt bei voreilem und nacheilendem Strome in gleichem Sinne und gleicher Stärke.

2. Die wattlose Komponente hat entweder gar keinen Einfluß auf die Wellenform oder sie verursacht bei nacheilendem Strome eine symmetrische Abstufung oder Einsattelung, bei voreilem Strome eine symmetrische Zuspitzung der Spannungswelle.

3. Die Spannungsabnahme bei nacheilendem Strom und die Spannungszunahme bei voreilem Strom rührt im wesentlichen von der wattlosen Komponente her.

4. Die unsymmetrische Verzerrung der Spannungswelle ist unter sonst gleichen Umständen um so geringer, je schmaler die Polschuhe sind, und bei dreiphasigen Maschinen kleiner als bei einphasigen.

5. Die unsymmetrische Verzerrung besteht in den meisten Fällen hauptsächlich aus Gliedern dritter und neunter Ordnung. Da diese bei dreiphasigen Maschinen aus der verketteten Spannung herausfallen (§ 225), so zeigt die Wellenform der letzteren nur geringe Verzerrung.

6. Die Glieder höherer Ordnung in der Spannungswelle, wie sie in der Regel durch die Ankerzähne verursacht sind, werden im Wesentlichen nur durch den wattlosen Strom beeinflußt, und zwar durch den nacheilenden Strom abgeschwächt, durch den voreilenden verstärkt.

man ihn direkt nicht ermitteln, sondern nur die entsprechende Spannungswelle, aus der man ihn berechnen kann. Bei einfachen Sinuswellen geschieht dies mittels der in § 132 erhaltenen Gleichung

$$E = \frac{2\pi}{\sigma} \nu N \mathfrak{z} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu N \mathfrak{z} = 4,44 \nu N \mathfrak{z}.$$

Da jede andere Wellenform einen anderen Scheitelfaktor σ hat, so erhält diese Gleichung einen anderen Zahlenfaktor, den man in folgender Weise berechnen kann.

Durch experimentelle Bestimmung habe man eine Spannungswelle von der Form

$$e = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t - \mathfrak{E}_3 \sin 3 \omega t$$

gefunden; dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= -\frac{1}{N} \int e dt = \frac{\mathfrak{E}_1}{\omega N} \cos \omega t - \frac{\mathfrak{E}_3}{3 \omega N} \cos 3 \omega t \\ &= \mathfrak{z}_1 \cos \omega t - \mathfrak{z}_3 \cos 3 \omega t. \end{aligned}$$

Die e -Welle entspricht der Abb. 395, die \mathfrak{z} -Welle der Abb. 394.

Für bestimmte Zahlenwerte, z. B.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{E}_1 = 30 & \mathfrak{E}_3 = 5 & N = 1 \\ \nu = 50 & \omega = 2\pi\nu = 314 & \end{array}$$

ergibt sich also

$$\mathfrak{z} = 0,0955 \cos \omega t - 0,0053 \cos 3 \omega t.$$

Der Scheitelwert der Spannungswelle ist (nach Abb. 395)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3 = 35.$$

Der effektive Wert ist

$$E = \sqrt{\frac{1}{2}(30^2 + 5^2)} = 21,5$$

und daher der Scheitelfaktor $\sigma = \frac{35}{21,5} = 1,63$.

Den Scheitelwert der \mathfrak{z} -Welle findet man durch Abmessung der aufgezeichneten Welle¹⁾:

$$\mathfrak{z} = 0,0902.$$

¹⁾ In einfachen Fällen wie hier kann man ihn aus der Maximumsbedingung $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0\right)$ berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} &= -\omega \mathfrak{z}_1 \sin \omega t + 3 \omega \mathfrak{z}_3 \sin 3 \omega t = 0 \\ &= -\mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 (3 \sin \omega t - 4 \sin^3 \omega t) = 0. \end{aligned}$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\sin \omega t = 0$ oder $\omega t = 0$. Die beiden anderen sind

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{\frac{3\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{E}_1}{4\mathfrak{E}_3}}.$$

Setzt man die obigen Zahlenwerte ein, so wird der Wurzel Ausdruck ima-

Man erhält nun durch Division der Scheitelwerte:

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{I}} = \frac{25}{0,0902} = 390$$

oder $\mathfrak{E} = 390 \mathfrak{I}$. Dividiert man durch den Scheitelfaktor, so erhält man den effektiven Wert

$$E = \frac{\mathfrak{E}}{\sigma} = \frac{390 \mathfrak{I}}{1,63} = 237 \mathfrak{I}.$$

Das ist die gesuchte Beziehung für eine Windung und für 50 Perioden. Willt man die der obigen Gleichung entsprechende Beziehung für N -Windungen und statt für 50 Perioden für ν Perioden haben, so hat man durch 50 zu dividieren und mit ν und N zu multiplizieren. Das gibt

$$E = 4,76 \nu N \mathfrak{I}$$

als Beziehung zwischen EMK und Kraftlinienmenge für alle Wellenformen obiger Art, wo \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_3 im Verhältnis von 6:1 stehen.¹⁾

216. Leistung, Leistungsfaktor, äquivalente Sinuswelle.

Wirkt in einem Wechselstromkreis eine EMK

$$\mathfrak{E}_x \sin x \omega t,$$

so ist Stromstärke und Phasenverschiebung (§ 133):

$$\mathfrak{I}_x = \frac{\mathfrak{E}_x}{\sqrt{w^2 - (x \omega L)^2}} \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{x \omega L}{w}.$$

Wirken gleichzeitig mehrere EMKs von verschiedener Periodenzahl, d. h. eine zusammengesetzte Welle von der Form

$$\begin{aligned} e &= \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \dots + \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3 \omega t + \dots \\ &= \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \varepsilon_1) + \mathfrak{E}_3 \sin 3(\omega t + \varepsilon_3) + \dots \quad \dots \quad (226) \end{aligned}$$

ginär. Es besteht also nur ein Maximum bei $\omega t = 0$. Setzt man dies ein, so erhält man für den Scheitelwert

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_3 = 0,0955 - 0,0053 = 0,0902.$$

¹⁾ Statt dieses vom Verfasser angegebenen Verfahrens (ETZ 1901 S. 53) hat man früher und auch jetzt noch die Formel $E \cdot 10^8 = 4 f \nu N \mathfrak{I}$ angewendet, wo f den auf S. 470 definierten Formfaktor bedeutet. Diese Formel ist grundsätzlich falsch, denn hier bedeutet \mathfrak{I} nicht den Scheitelwert (größten Wert), sondern die mittlere, zwischen den Hauptnullpunkten liegende Ordinate der magnetischen Welle. Bei unsymmetrischen Wellenformen, wie Abb. 399 und bei eingesattelten Wellenformen, wie Abb. 402, ist dieser Wert kleiner als der Scheitelwert. Nur wenn der Scheitelwert mit der mittleren Ordinate zusammenfällt, erhält man infolge dieses Umstandes aus dieser falschen Formel einen richtigen Wert. Es ist das einer der Gründe, warum der Formfaktor f vom Verfasser als überflüssig und ungeeignet erklärt, und statt dessen der im obigen Verfahren auftretende Scheitelfaktor eingeführt wurde. Dazu kommt noch, daß man bei diesem Verfahren den arithmetischen Mittelwert nicht auszurechnen braucht, während er zur Ermittlung des f notwendig ist.

so entsteht ein Strom von der Form

$$i = \mathfrak{G}_1 \sin \omega t + \mathfrak{G}_3 \sin 3 \omega t + \dots + \mathfrak{S}_1 \cos \omega t + \mathfrak{S}_3 \cos 3 \omega t + \dots \\ = \mathfrak{S}_1 \sin (\omega t + \gamma_1) + \mathfrak{S}_3 \sin 3 (\omega t + \gamma_3) + \dots \dots \dots (227)$$

und zwischen den einzelnen Gliedern besteht die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \frac{\mathfrak{G}_1}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} & \text{tg } (\varepsilon_1 - \gamma_1) &= \frac{\omega L}{w} \\ \mathfrak{S}_3 &= \frac{\mathfrak{G}_3}{\sqrt{w^2 + (3 \omega L)^2}} & \text{tg } (\varepsilon_3 - \gamma_3) &= \frac{3 \omega L}{x} \end{aligned} \right\} \dots (228)$$

Da jedes Glied in Strom und Spannung eine Sinuswelle ist, kann jede einzelne Gleichung durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle $\sqrt{2}$ dividiert werden, und man erhält die effektiven Werte

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{E_1}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \\ J_3 &= \frac{E_3}{\sqrt{w^2 + (3 \omega L)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (229)$$

Demgemäß kann für jedes Glied das Widerstandsdreieck Abb. 198 konstruiert werden. Alle haben dieselbe Kathete w , während die andere Kathete mit der Ordnungszahl (Frequenz) des Gliedes wächst. Infolgedessen gibt es für den Gesamtstrom $J = \sqrt{J_1^2 + J_3^2 + \dots}$ kein Widerstandsdreieck. Daraus folgt weiter, daß alle graphischen Darstellungen und Formeln, die in § 140—143 über Hintereinander- und Nebeneinanderschaltungen abgeleitet wurden, für zusammengesetzte Wellenformen nicht gelten.

Da jedes Stromglied eine andere Phasenverschiebung hat, hat jedes eine andere Leistung. Die des ersten Gliedes ist (§ 134):

$$\frac{1}{2} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{S}_1 \cos (\varepsilon_1 - \gamma_1) = E_1 J_1 \cos (\varepsilon_1 - \gamma_1),$$

die des dritten

$$\frac{1}{2} \mathfrak{G}_3 \mathfrak{S}_3 \cos (\varepsilon_3 - \gamma_3) = E_3 J_3 \cos (\varepsilon_3 - \gamma_3).$$

Da die Leistung keine gerichtete Größe (Vektor) ist, so können die einzelnen Beträge ohne weiteres addiert werden, und daher ist die gesamte Leistung des Stromes

$$P = \frac{1}{2} [\mathfrak{A}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{G}_3 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{S}_3 + \dots] \\ = \frac{1}{2} [\mathfrak{G}_1 \mathfrak{S}_1 \cos (\varepsilon_1 - \gamma_1) + \mathfrak{G}_3 \mathfrak{S}_3 \cos (\varepsilon_3 - \gamma_3) + \dots] \\ = E_1 J_1 \cos (\varepsilon_1 - \gamma_1) + E_3 J_3 \cos (\varepsilon_3 - \gamma_3) + \dots \dots \dots (230)$$

Diese Leistung wird von einem Wattmeter angegeben. Man sieht aber, daß sich die in § 134 für sinusförmige Wellen erhaltene Definition $P = EJ \cos \varphi$ hierauf nicht anwenden läßt (obwohl die

effektiven Werte E und J durch Gl. 224 einwandfrei definiert sind und durch Voltmeter bzw. Amperemeter gemessen werden können), weil hier verschiedene Phasenverschiebungen ($\varepsilon - \gamma$) bestehen, die sich in keiner Weise durch eine einheitliche, für die Gesamtwellen gültige Phasenverschiebung darstellen lassen. Der Leistungsfaktor $\frac{P}{EJ}$ kann daher nicht mehr als Cosinus eines Phasenverschiebungswinkels wie bei Sinuswellen definiert werden, sondern nur als Verhältnis der Leistung zu dem Produkte aus Strom und Spannung.

Beschränkt man sich auf die Darstellung der Leistung P durch die effektiven Werte E und J ohne Rücksicht auf die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Gliedern, so kann man der beliebig geformten Strom- und Spannungswelle äquivalente Sinuswellen unterstellen. Das sind jene Sinuswellen, deren effektiver Wert $\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{\mathcal{J}}{\sqrt{2}}$ gleich ist dem durch Gl. 224 definierten Wert E bzw. J , und die einen solchen Phasenverschiebungswinkel φ haben, daß sein Cosinus gleich $\frac{P}{EJ}$ ist. Die Scheitelwerte \mathcal{E} bzw. \mathcal{J} dieser äquivalenten Sinuswellen sind aber nicht gleich den wirklichen Scheitelwerten der betreffenden Spannungs- und Stromwelle. Man darf sie daher nicht zur Berechnung der Kraftlinienmenge und der Hysteresis benutzen, sondern muß diese nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren besonders berechnen.

Da, wie wir oben gesehen haben, graphische Darstellungen für zusammengesetzte Wellenformen unmöglich sind, so verwendet man die äquivalenten Sinuswellen zur Konstruktion von Diagrammen, wenn es sich nur um die effektiven Werte von Strom und Spannung handelt. Unter dieser Annahme setzt man das Verhältnis der effektiven Werte $\frac{E}{J}$, das ist der scheinbare Widerstand, gleich $\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}$.

In diesem Ausdruck kommen die Glieder höherer Ordnung nicht vor, während sie in der mathematischen Definition (Gl. 224) enthalten sind. Setzt man in $\omega = 2\pi\nu$, für ν die Periodenzahl des ersten Gliedes ein, weil dieses in der Regel am stärksten ist, und berechnet daraus L , so hat dieses einen andern Wert, als das L , das in den Gleichungen 228 vorkommt, d. h. die der äquivalenten Sinuswelle entsprechende Selbstinduktion hängt von der betreffenden Wellenform, für die die Sinuswelle gesetzt wurde, ab; dasselbe gilt für die Kapazität C^1 .

¹⁾ Dagegen bleiben die Widerstände w und $\rho = \frac{P}{J^2}$ (§ 152) unter allen Umständen unverändert, weil das Gesetz von der Erhaltung der Arbeit unter allen Umständen gilt.

Nach Gl. 230 besteht die Leistung jedes Gliedes aus dem Produkte von Strom und Spannung. Fehlt aber in der Spannungswelle ein Glied, das in der Stromwelle vorhanden ist oder umgekehrt, so gibt dieses keine Leistung. Diesen Fall haben wir in einer Spule mit Eisenkern (§ 159). Dort haben wir zu einer sinusförmigen Spannungswelle eine verzerrte Stromwelle erhalten, d. h. eine solche, die neben der Grundwelle noch Glieder 3, 5, 7... Ordnung enthält. Leistung ergibt aber nur die Grundwelle, weil nur sie ein entsprechendes Spannungsglied hat; die übrigen Glieder nicht, d. h. sie bestehen nur als wattlose Ströme. Das erscheint hier nicht auffällig, weil ja die Spule eine beträchtliche Selbstinduktion hat. Auffälliger ist es beim Strom eines Wechselstromlichtbogens (Abb. 501), der keine erhebliche Selbstinduktion besitzt, sondern einen nahezu induktionslosen Widerstand darstellt. Trotzdem ist die gemessene Leistung kleiner als das Produkt EJ , weil die Stromwelle infolge ihrer Verzerrung Glieder erhalten hat, die in der Spannungswelle nicht vorkommen, und daher als wattloser Strom bestehen. Während aber bei sinusförmigen Wellenformen ein wattloser Strom nur auf Selbstinduktion (§ 136) oder Kapazität (§ 172) zurückgeführt werden kann, darf dieser Schluß bei anderen Wellenformen nicht ohne weiteres gezogen werden.

Auch bei Glühlampen ergibt sich aus genauen Messungen ein Leistungsfaktor, der etwas kleiner ist als 1, obwohl die Glühfäden namentlich bei geradliniger Form unter allen Leitern die kleinste Selbstinduktion haben. Die Ursache liegt darin, daß der Glühfaden durch den Wechselstrom eine periodisch schwankende Temperatur und infolgedessen einen periodisch schwankenden Widerstand erhält. Die Folge davon sind Glieder zweiter Ordnung in der Stromwelle, die in der Spannungswelle nicht vorkommen (vgl. Anmerkung 2 auf S. 467).

217. Die Stromwelle bei Selbstinduktion und bei Kapazität.

Wirkt auf einen Stromkreis mit Selbstinduktion eine Spannungswelle mit Gliedern höherer Ordnung, so ist das erste Glied der entsprechenden Stromwelle

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{w^2 + (wL)^2}}$$

und das xte Glied

$$J_x = \frac{E_x}{\sqrt{w^2 + (xwL)^2}}.$$

Ist der induktive Widerstand $(\omega L)^2$ verschwindend klein gegen w^2 , so ist

$$J_1 = \frac{E_1}{w} \quad J_x = \frac{E_x}{w}.$$

Jedes Stromglied ist also dem betreffenden Spannungsglied proportional, d. h. in einem induktions- und kapazitätslosen Stromkreis hat die Stromwelle gleiche Form wie die Spannungswelle.

Ist hingegen der Ohmsche Widerstand w^2 verschwindend klein gegen den induktiven $(\omega L)^2$, so ist

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L} \quad J_x = \frac{E_x}{x \omega L}.$$

Man erkennt daraus, daß in der Stromwelle die höheren Glieder um so schwächer werden, von je höherer Ordnung sie sind, und je

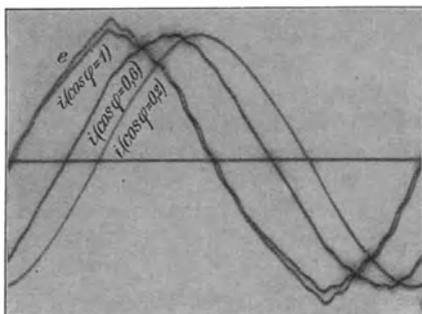


Abb. 405.

kleiner der Ohmsche Widerstand ist, d. h. je kleiner der Leistungsfaktor $(\cos \varphi)$ ist. Abb. 405 bestätigt dies. Die Spannungswelle e enthält Glieder 5., 7. und 23. Ordnung. Bei $\cos \varphi = 1$ sind sie alle noch erkennbar; die Stromwelle hat gleiche Form wie die Spannungswelle. Bei $\cos \varphi = 0,2$ ist nur mehr das Glied 1. Ordnung, also eine reine Sinuswelle vorhanden.

Im Gegensatz dazu sind in einem Stromkreis mit Kapazität die Stromglieder höherer Ordnung stärker ausgeprägt als in der Spannungswelle. Das Stromglied 1. Ordnung ist

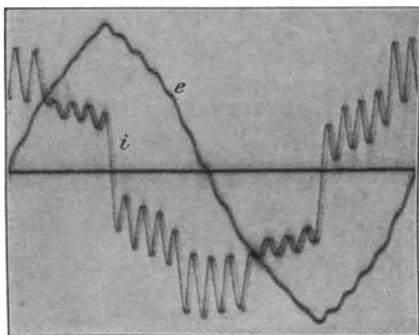


Abb. 406.

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Das Stromglied x ter Ordnung ist

$$J_x = \frac{E_x}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{x \omega C}\right)^2}}.$$

Ist der Ohmsche Widerstand w^2 verschwindend klein gegen den Kapazitätswiderstand, so ist

$$J_1 = \omega C E_1 \quad J_x = x \omega C E_x.$$

Abb. 406 läßt das erkennen. Die Spannungswelle e ist dieselbe wie in Abb. 405. Man sieht, wie in der Stromwelle das 23. Glied als höchstes Glied am stärksten ausgeprägt ist; aber auch das Glied

5. Ordnung ist deutlich erkennbar. Man benützt dies, um das Vorhandensein eines Gliedes höherer Ordnung, das in der Spannungswelle nicht deutlich erkennbar ist, festzustellen.

Dieser Einfluß auf Glieder höherer Ordnung erstreckt sich auch auf die Leistung, denn wenn in Abb. 405 das Stromglied 23. Ordnung bei $\cos \varphi = 0,2$ verschwunden ist, so ist auch das entsprechende Leistungsglied $E_{23} J_{23} \cos (\varepsilon_{23} - \gamma_{23})$ verschwunden. Dagegen wird es durch die Kapazität (Abb. 406) verstärkt. Dieser Einfluß auf die Leistung ist aber kein proportionaler, weil ein Teil des Stromes wattlos ist.

Sind in dem Stromkreis Selbstinduktion und Kapazität gleichzeitig vorhanden (§ 173), so besteht natürlich jener Einfluß, der dem überwiegenden Teile entspricht.

218. Die Wellenformen des allgemeinen Transformators.

Wenn nicht sehr starke Streuung vorhanden ist, müssen die primäre und sekundäre EMK gleiche Wellenform haben, weil ihre Hauptbestandteile von demselben gemeinsamen magnetischen Felde nach dem Gesetze $e = -\frac{d\lambda}{dt}$ induziert werden (§ 146). Daher müssen auch die Spannungen e_1 und e_2 bei Leerlauf sowie bei kleiner Belastung einander gleich sein (Abb. 407). Dagegen machen sich bei großer Belastung bereits Abweichungen bemerkbar (Abb. 408), weil der von der Stromwelle abhängige Ohmsche Spannungsabfall mit der Stromstärke wächst.

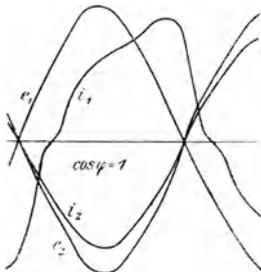


Abb. 407.

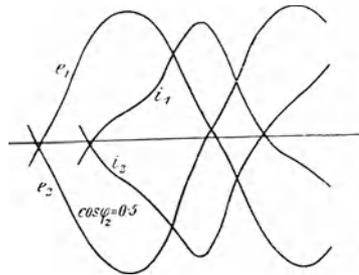


Abb. 408.

Für den primären Strom bei Leerlauf gilt dasselbe wie in § 159, denn bei Leerlauf ist der Transformator nicht anderes als eine Drosselspule mit Eisenkern.

Die Wellenform des sekundären Stromes hängt außer von der Wellenform der sekundären Spannung von der Beschaffenheit des äußeren Stromkreises ab. Ist dieser induktions- und kapazitätslos, so ist die Stromwelle gleich der sekundären Spannungswelle. Ist das

nicht der Fall, so besteht der im vorigen Paragraphen besprochene Einfluß auf Glieder höherer Ordnung.

Die Stromkomponente, die infolge des sekundären Stromes nun auch im primären Kreis zum Leerlaufstrom hinzukommt (§ 151, 152), ergibt sich aus dem Verhältnis der Windungszahlen. Aus der Summe der Ordinaten beider ergibt sich der gesamte primäre Strom. Seine Wellenform muß daher der des sekundären Stromes um so ähnlicher

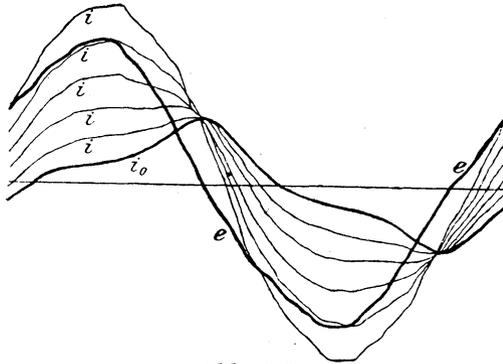


Abb. 409.

werden, je größer die Belastung des Transformators ist. Das ist sehr deutlich aus Abb. 409 zu erkennen, welche die primäre Spannung e , den Leerlaufstrom i_0 und 5 Stromwellen bei steigender induktionsloser Belastung enthält¹⁾. Daß alle Stromwellen den Leerlaufstrom in demselben Punkte schneiden, ist nicht Zufall, sondern ergibt sich aus Abb. 250 (S. 299). Der Schnitt-

punkt liegt dort, wo die Wattkomponente i_w durch Null geht, und der Magnetisierungsstrom i_m seinen Scheitelwert hat. Alle Stromwellen müssen sich also in demselben Punkte schneiden, solange keine andere wattlose Komponente hinzukommt. Man erkennt aus diesem Oszillogramm auch, daß die Phasenverschiebung zwischen der Spannung e und dem Strome um so kleiner werden muß, je größer die Belastung ist.

Enthält der sekundäre Stromkreis in seinem äußeren Teil einen Eisenkern, so ist die sekundäre Stromwelle um so mehr verschieden von der Spannungswelle, je größer der Magnetisierungsstrom dieses Eisenkernes ist. Da der sekundäre Strom auch in der primären Stromwelle auftritt, werden die beiden Stromwellen einander um so ähnlicher, je größer der sekundäre Strom gegen den Leerlaufstrom ist, gleichgültig, welcher Art die Belastung ist. Das folgt auch aus § 151, wonach der primäre und sekundäre Strom sich in jedem Augenblick umgekehrt wie die Windungszahlen verhalten, wenn die Streuung klein ist.

Abb. 407 zeigt die vier Wellen eines Transformators bei geringer induktionsloser Belastung. Strom und Spannung im sekundären Kreis haben gleiche Form und gleiche Phase. Der primäre Strom zeigt noch deutlich die Form und Phasenverschiebung des Leerlaufstromes (ähnlich wie in Abb. 250). Abb. 408 zeigt die Wellen des-

¹⁾ Nach einer Aufnahme von Hospitalier mit seinem Wellenzeichner.

selben Transformators bei größerer induktiver Belastung. Die beiden Ströme haben nahezu gleiche Form und Phasenverschiebung. Daß die Spannungswellen in Abb. 407 und 408 nicht ganz gleich sind, hat seinen Grund darin, daß die größere Stromstärke im zweiten Falle eine Beeinflussung der Spannungswelle im Stromerzeuger durch Ankerrückwirkung verursacht.

Vgl. auch die Stromwellen eines Stromwandlers Abb. 564 u. 565.

219. Resonanz bei zusammengesetzten Wellenformen.

In einem Stromkreis mit reiner Selbstinduktion und Kapazität (d. h. ohne Verluste) ist die Stromstärke eines Gliedes x . Ordnung (§ 216):

$$J = \frac{E_x}{\sqrt{w^2 + \left(x\omega L - \frac{1}{x\omega C}\right)^2}},$$

wenn $\omega = 2\pi\nu$ ist, und ν die Grundfrequenz bedeutet. Die Resonanzbedingung für das Glied x . Ordnung lautet also

$$(x\omega)^2 = (2\pi\nu x)^2 = \frac{1}{LC}$$

oder

$$\nu = \frac{1}{2\pi x \sqrt{LC}}.$$

Während also bei einer Frequenz ν die Resonanz der Grundschwingung (Betriebsfrequenz des Wechselstromes) eintritt, tritt die Resonanz des Gliedes x . Ordnung schon beim x . Teil der Betriebsfrequenz ein. Schreibt man die Resonanzbedingung in der Form

$$LC = \frac{1}{(2\pi\nu x)^2},$$

so sieht man, daß beispielsweise zur Resonanz des 5. Gliedes nur der 25. Teil von LC erforderlich ist, als zur Resonanz der Grundschwingung.

Durch die Stromresonanz wird also jeweils ein Glied besonders herausgeholt und seine Stromstärke vergrößert¹⁾. Die Folge davon ist natürlich eine entsprechende Veränderung der Stromwelle, während die Spannungswelle (abgesehen von der Ankerrückwirkung im Stromerzeuger) unverändert bleibt.

¹⁾ Hierauf beruht die Methode von Armagnat (Journal de Phys. 1902 S. 346) zur Analyse von Wellenformen, indem durch Einschaltung von veränderlicher Selbstinduktion und Kapazität die einzelnen Glieder nacheinander zur Resonanz gebracht, d. h. so weit verstärkt werden, daß sie meßbar sind, während die anderen sehr klein bleiben.

220. Die Gewinnung höherer Frequenzen.

Die Frequenz eines Wechselstromes und aller von ihm abhängigen sekundären Ströme ist $\nu = pu$, wenn p die Anzahl der Polpaare und u die sekundliche Umlaufzahl des Stromerzeugers ist. Es ist daher nicht möglich, mittels eines einzelnen ruhenden Apparates eine Veränderung der Frequenz herbeizuführen. Dagegen ist es möglich, bei einer zusammengesetzten Wellenform die Grundwelle zu unterdrücken und ein höheres Glied zu isolieren, so daß man dann einen Wechselstrom von höherer Frequenz erhält. Abb. 410 zeigt eine solche Schaltung. Die primären Wicklungen zweier Transformatoren sind hintereinander geschaltet. Eine zweite Wicklung wird von Gleichstrom durchflossen, und zwar im Transformator I im gleichen Sinne, im Transformator II im entgegengesetzten Sinne.

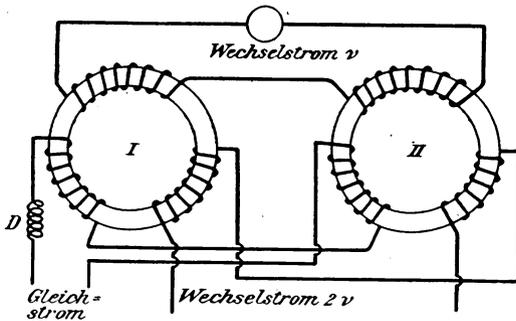


Abb. 410.

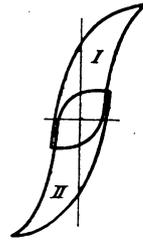


Abb. 411.

Diese überlagerte Gleichstrommagnetisierung bewirkt in I eine Verschiebung der Hystereseschleife über die Nulllinie (Abb. 411), so daß die Magnetisierung so verläuft wie die unsymmetrische Welle in Abb. 401. Wie wir dort gesehen haben, gehört dazu die in Abb. 400 gezeichnete Spannungswelle, die in Abb. 412 nochmals gezeichnet ist. Im Transformator II bewirkt der gegengeschaltete Gleichstrom eine Verschiebung der Hystereseschleife unter die Nulllinie (Abb. 411), so daß in seiner sekundären Wicklung die Spannungswelle II der Abb. 412 entsteht.

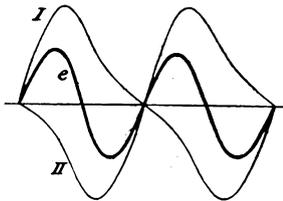


Abb. 412.

Werden nun die sekundären Wicklungen beider Transformatoren gegeneinander geschaltet, so daß sich die Spannungswellen subtrahieren, so ergibt sich die resultierende Spannungswelle e , welche die doppelte Frequenz hat wie der Strom in den primären Wicklungen.

Einen Strom doppelter Frequenz kann man auch in der Erregewicklung einer synchronen Wechselstrommaschine (Stromerzeuger oder Motor) erhalten. Wir wissen vom Transformator, daß infolge der magnetischen Kupplung nicht nur eine Einwirkung des primären

auf den sekundären Stromkreis, sondern auch umgekehrt (Rückwirkung) besteht. Aus demselben Grunde wirkt bei der Synchronmaschine der Ankerstrom auf den Erregerstromkreis zurück. Die Folge davon ist, daß sich bei Belastung der Maschine ein Wechselstrom ab (Abb. 413) über den konstanten, aus Gleichstrom bestehenden Erregerstrom lagert. Da aber die Wicklung nicht stillsteht, sondern bei jedem Wechsel des Ankerstromes einer anderen Spule gegenübertritt, wird jede zweite Halbwelle

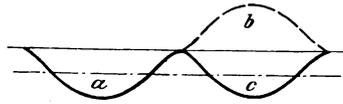


Abb. 413.

in der Erregerwicklung gewissermaßen umgeklappt (kommutiert), so daß der Wellenstrom ac entsteht. Das Ergebnis ist also so, als wenn sich ein unsymmetrischer Wechselstrom von doppelter Frequenz (bezogen auf die strichpunktierte Linie) über den konstanten Erregerstrom lagert¹⁾. Schaltet man nun in den Erregerstromkreis die primäre Wicklung eines Transformators ein, so erhält man in der sekundären Wicklung einen Wechselstrom von doppelter Frequenz. Hieraus erklärt sich die Wirkungsweise der Goldschmidtschen Hochfrequenzmaschine für Funkentelegraphie²⁾. Denn der pulsierende Erregerstrom ac erzeugt nun seinerseits einen Strom von gleicher Frequenz in der Ankerwicklung. Dieser erzeugt durch Rückwirkung auf den Erregerstromkreis in diesem einen Strom von doppelter Frequenz, also von 4facher Betriebsfrequenz. Das geht so weiter, und die Folge ist, daß sowohl im Erreger- wie im Anker-Stromkreis alle Glieder gerader Ordnung, die durch fortgesetzte Multiplikation mit 2 entstehen, vorkommen. Sie sind aber sehr schwach, so daß sie für den normalen Betrieb als nicht vorhanden gelten können. Wird aber dem Erreger- und dem Anker-Stromkreis ein aus Kondensator und Drosselspule bestehender, auf 4 oder 8fache oder vielmals höhere Betriebsfrequenz abgestimmter Schwingungskreis (§ 195) parallel geschaltet, so hebt dieser durch Resonanz das betreffende Stromglied so stark heraus, daß es für die drahtlose Telegraphie nutzbar gemacht werden kann.

In ähnlicher Weise erhält man aus zwei elektrischen Ventilen einen pulsierenden Gleichstrom, dessen Pulsationen die doppelte Frequenz des zugeführten Wechselstromes haben. Vgl. § 262.

Über die Isolierung von Gliedern 3. Ordnung aus Dreiphasenstrom vgl. § 227.

¹⁾ Das gilt zunächst für Einphasenmaschinen. Bei Mehrphasenmaschinen geben die zwei bzw. drei Ankerströme eine resultierende MMK, die im idealen Falle eine gleichmäßige, sinusförmige Verteilung im Anker hat (§ 228). Infolgedessen macht sich im Erregerstromkreis einer Mehrphasenmaschine eine Stromverzerrung nur soweit bemerkbar, als die resultierende MMK nicht gleichmäßig verläuft.

²⁾ ETZ 1911, S. 54. Goldschmidt gibt aber eine andere Erklärung der Wirkungsweise.

221. Formeln zur Ausrechnung einer zusammengesetzten Wellenform.

Alle Wellenformen, mit Ausnahme der in Abb. 400 und 401 dargestellten, lassen sich durch folgende Gleichung darstellen, wenn man sich auf Glieder bis zur 11. Ordnung beschränkt:

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \dots + \mathfrak{A}_{11} \sin 11 \omega t \\ &= \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3 \omega t + \dots + \mathfrak{B}_{11} \cos 11 \omega t \end{aligned} \quad (\text{I})$$

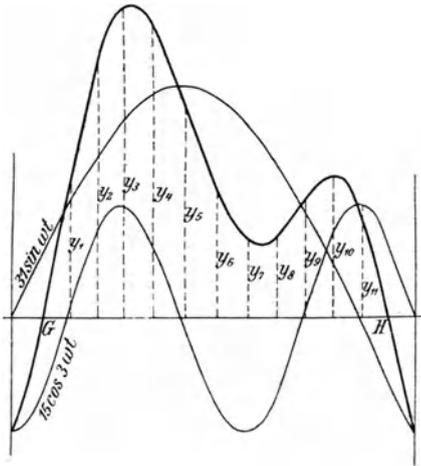


Abb. 414.

Zur Berechnung der Scheitelwerte $\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{B}_1$ kann man in folgender Weise verfahren.

Man teilt die Grundlinie GH der halben Welle (Abb. 414) in 12 gleiche Teile und mißt die Längen der Ordinaten y_1 bis y_{11} ab. Daraus bildet man zur Berechnung der $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3 \dots$ folgende Werte

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_{11} \\ m_2 &= y_2 + y_{10} \\ m_3 &= y_3 + y_9 \\ m_4 &= y_4 + y_8 \\ m_5 &= y_5 + y_7 \\ m_6 &= y_6 \end{aligned}$$

$$a = 0,043 m_1$$

$$b = 0,118 m_1$$

$$c = 0,161 m_1$$

$$d = 0,083 m_2$$

$$f = 0,167 m_2$$

$$g = 0,118 m_3$$

$$h = 0,144 m_4$$

$$k = 0,161 m_5$$

$$l = 0,118 m_5$$

$$p = 0,043 m_6$$

$$q = 0,167 m_6$$

und setzt sie in folgende Formeln ein

$$\mathfrak{A}_1 = a + d + g + h + k + q$$

$$\mathfrak{A}_3 = b + f + g - (l + q)$$

$$\mathfrak{A}_5 = c + d + p + q - (g + h)$$

$$\mathfrak{A}_7 = c + h + p - (d + g + q)$$

$$\mathfrak{A}_9 = b + g + q - (f + l)$$

$$\mathfrak{A}_{11} = a + g + k - (d + h + q)$$

Beispiel. Wir berechnen die in Abb. 414 stark ausgezogene Wellenform. Für die Ordinaten y findet man durch Ausmessung folgende Werte

$y_1 = 18$	$m_1 = 31$	$a = 1,33$
$y_2 = 34$	$m_2 = 52,8$	$b = 3,7$
$y_3 = 41,4$	$m_3 = 57,2$	$c = 5,0$
$y_4 = 39,7$	$m_4 = 50,5$	$d = 4,4$
$y_5 = 29$	$m_5 = 39,4$	$f = 8,8$
$y_6 = 17,5$	$m_6 = 17,5$	$g = 6,74$
$y_7 = 10,4$		$h = 7,3$
$y_8 = 10,8$		$k = 6,34$
$y_9 = 15,8$		$l = 4,62$
$y_{10} = 18,8$		$p = 1,7$
$y_{11} = 13$		$q = 2,9$

$$\mathfrak{A}_1 = 29 \quad \mathfrak{A}_3 = 11,7$$

Alle anderen \mathfrak{A} -Werte werden Null.

$n_1 = 18,6$	$a = 0,8$
$n_2 = 29$	$\beta = 2,2$
$n_3 = 25,6$	$\zeta = 3$
$n_4 = 15,2$	$\delta = 2,5$
$n_5 = 5$	$\eta = 4,84$
	$\gamma = 3,02$
	$\varrho = 2,2$
	$\varkappa = 0,81$
	$\lambda = 0,59$
	$\sigma = 0,22$

$$\mathfrak{B}_1 = 9,33 \quad \mathfrak{B}_3 = -9,47$$

Alle anderen \mathfrak{B} -Werte werden Null.

Die Gleichung der Welle ist also

$$y = 29 \sin \omega t + 11,7 \sin 3 \omega t + 9,33 \cos \omega t - 9,47 \cos 3 \omega t.$$

Um sie auf die Form II zu bringen, benutzen wir die Gl. 222 und erhalten

$$\mathfrak{D}_1 = \sqrt{29^2 + 9,33^2} = 30,6; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{9,33}{29} = 0,322 \quad \varphi_1 = 17^\circ 50'$$

$$\mathfrak{D}_3 = \sqrt{11,7^2 + 9,47^2} = 15; \quad \operatorname{tg} 3 \varphi_3 = -\frac{9,47}{11,7} = -0,81 \quad 3 \varphi_3 = -39^\circ$$

$$y = 30,6 \sin(\omega t + 17^\circ 50') + 15 \sin 3(\omega t - 13^\circ).$$

Verschiebt man nun den Nullpunkt um $-17^\circ 50'$, so erhält man (abgerundet)

$$y = 30,6 \sin \omega t + 15 \sin 3(\omega t - 30)$$

oder

$$y = 30,6 \sin \omega t - 15 \sin(90 - 3 \omega t)$$

$$y = 30,6 \sin \omega t - 15 \cos 3 \omega t.$$

Über eine geometrische Methode siehe R. Slaby, „Archiv f. Elektr.“ 1913, Heft 1, wo auch die ältere Literatur angegeben ist.

Vierzehntes Kapitel.

Die mehrphasigen Wechselströme.

222. Das Prinzip der mehrphasigen Motoren.

Zwei Wechselströme von gleicher Spannung und Stromstärke, die eine Phasenverschiebung von einer Viertelperiode gegeneinander haben (Abb. 415), sind auf einen Eisenring aufgewickelt, so wie es in Abb. 416 schematisch gezeichnet ist. Im Augenblick *a* hat der Strom I seinen größten Wert, während II Null ist. Es erzeugt also bloß jener ein magnetisches Feld im Ring, und zwar einen Südpol und einen Nordpol, wie in Abb. 416a. Wird ein Dauermagnet *ns* in das Innere des Ringes drehbar eingesetzt, so muß er die gezeichnete Stellung einnehmen. Eine Viertelperiode später, im Augenblick *c* hat II seinen größten Wert und I ist Null. Das magnetische Feld und daher auch der Magnet *ns* erscheint jetzt um 90° gedreht (416c). Im Augenblick *d* ist II Null und I hat seinen größten negativen Wert, d. h. der Strom hat jetzt die entgegengesetzte Richtung wie im Augenblick *a*, also auch die Magnetisierung. Im Augenblick *g* haben wir entgegengesetzte Lage wie in *c*.

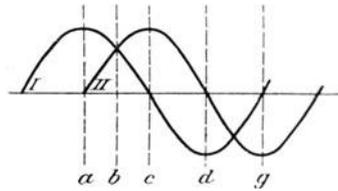


Abb. 415.

In allen dazwischen liegenden Momenten führen beide Stromkreise Strom, und es entsteht ein resultierendes magnetisches Feld; im Augenblick *b* z. B. haben beide gleiche Stromstärke, und daher haben wir ein nach Art der Abb. 10 zusammengesetztes Feld, dessen Richtung aus Abb. 416b zu ersehen ist. Während einer Stromperiode vollführt also das magnetische Feld im Innern des Ringes eine ganze Drehung und mit ihm der Dauermagnet *ns*. Dieser rotiert also synchron mit dem Felde. Bringt man hingegen ein mit einer kurzgeschlossenen Wicklung versehenes Eisenstück (Anker, Läufer) in das Innere des Ringes, so werden Ströme induziert, welche nach dem Lenzschen Gesetze die Drehung des magnetischen Feldes zu hindern suchen. Da sie das nicht können, muß sich der Läufer mit dem Felde drehen. Die Drehung erfolgt aber nicht synchron, wie

die des Dauermagnetes, weil sonst die geschlossene Wicklung des Läufers immer dasselbe Kraftlinienbündel umfassen würde, so daß kein Strom in ihr entstehen könnte. Die Drehung des Läufers muß also langsamer vor sich gehen als die des Feldes, weil nur so ein Strom induziert wird. Da dieser Strom um so stärker ist, je größer der Unterschied zwischen der Umdrehungsgeschwindigkeit des Läufers und des Feldes ist, ist auch die Zugkraft um so stärker. Der Läufer hat also das Bestreben, in Synchronismus zu kommen, ohne ihn aber jemals zu erreichen, weil dann der Strom Null würde¹⁾.

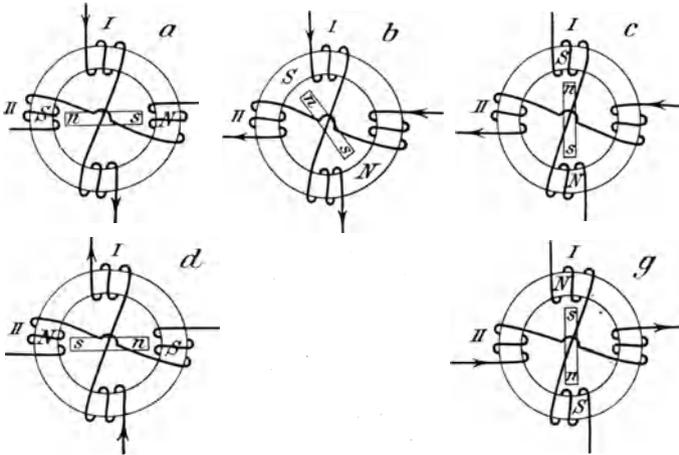


Abb. 416.

Ist die Wicklung des Ringes strömlos, und wird der Magnet ns durch eine äußere Kraft gedreht, so werden zwei Ströme von der in Abb. 415 dargestellten Art induziert; man hat also einen Stromerzeuger für Zweiphasenstrom.

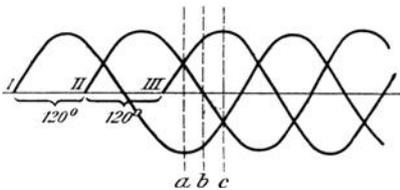


Abb. 417.

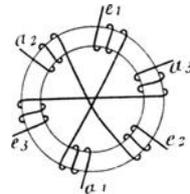


Abb. 418.

In gleicher Weise kommt ein Drehfeld und daher auch ein Drehmoment zustande, wenn drei um eine Drittelperiode ver-

¹⁾ Näheres über die Wirkungsweise des Drehstrommotors in dem Buche des Verfassers über die Drehstrommotoren Bd. 5 der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen“.

schobene Wechselströme angewendet werden, wie sie in Abb. 417 dargestellt sind (Dreiphasenstrom). Abb. 418 zeigt ihre Anwendung als zweipolige Ringwicklung.

223. Verkettung beim Zweiphasenstrom.

Gemäß Abb. 416 brauchte man für das Zweiphasensystem 4 Leitungen. Man kann aber die beiden Rückleitungen zu einer vereinigen, und erhält so Abb. 419, welche die Verbindung zwischen einem Stromerzeuger und einem Stromverbraucher (Motor, Transformator u. dergl.) darstellt. In der gemeinsamen Rückleitung fließt der verkettete Strom i_v . Dieser entsteht in jedem Augenblicke aus der Summe der beiden um 90° verschobenen Ströme, die mit i_I und i_{II} bezeichnet sind. Ist i_I von der Form

$$i_I = \Im \sin \omega t$$

so ist¹⁾

$$i_{II} = \Im \sin(\omega t + 90) = \Im \cos \omega t.$$

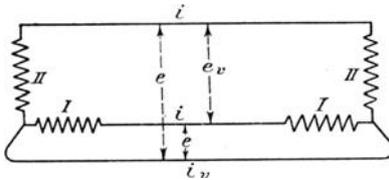


Abb. 419.

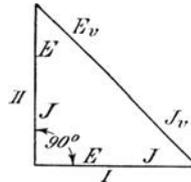


Abb. 420.

Mithin ist der verkettete Strom in der gemeinsamen Leitung

$$\begin{aligned} i_v &= i_I + i_{II} = \Im (\sin \omega t + \cos \omega t) \\ &= \Im \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \omega t \right) \\ &= \sqrt{2} \Im (\cos 45 \sin \omega t + \sin 45 \cos \omega t) \\ &= \sqrt{2} \Im \sin(\omega t + 45) \end{aligned}$$

Der verkettete Strom hat also $+45^\circ$ Phasenverschiebung gegen i_{II} , d. h. er liegt gerade zwischen diesen Strömen. Dasselbe ergibt sich aus der zeichnerischen Darstellung Abb. 415, wenn man die beiden Sinuswellen addiert. Abb. 420 zeigt die Zweigströme und den verketteten Strom als Vektoren und die Phasenverschiebungen zwischen ihnen.

Was vor einer periodischen Funktion steht, ist immer ihr Scheitelwert. Somit ist der Scheitelwert \Im_v des verketteten Stromes

$$\Im_v = \sqrt{2} \Im.$$

¹⁾ Man könnte die Phasenverschiebung auch durch -90° statt durch $+90^\circ$ ausdrücken. Das hängt nur davon ab, ob man die Numerierung der Ströme I und II nach links oder rechts herum vornimmt. Im Endergebnis ändert sich nichts.

Dividiert man durch den Scheitelfaktor, so erhält man die effektiven Werte:

$$J_v = \sqrt{2} J.$$

Bei gleichem Spannungsabfall und gleicher Stromwärme muß also die gemeinsame Rückleitung einen 1,4 mal größeren Querschnitt haben als die beiden anderen Leitungen. Da bei der unverketteten Schaltung (Abb. 416) statt dieser gemeinsamen Rückleitung zwei Leitungen erforderlich sind, bedeutet die verkettete Schaltung eine Ersparnis von 18% an Leitungsmaterial gegenüber den beiden anderen.

Bezeichnet man die in den Wicklungszweigen *I* und *II* (Abb. 419) induzierten EMKE mit e_I und e_{II} , so haben auch diese eine Phasenverschiebung von 90° . Die zwischen beiden Leitungen herrschende Spannung e_v (verkettete Spannung) ist gleich $e_I + e_{II}$. Daher erhält man auf gleiche Weise wie oben

$$E_v = \sqrt{2} E$$

Sind Strom, Spannung und Phasenverschiebung in den Leitungen gleich, so ist die gesamte Leistung des Zweiphasensystemes bei der verketteten Schaltung

$$P = 2 E J \cos \varphi = \sqrt{2} E_v J \cos \varphi = \sqrt{2} E J_v \cos \varphi = E_v J_v \cos \varphi.$$

224. Verkettung beim Dreiphasenstrom.

Die Anwendung dreier Stromkreise, wie in Abb. 418, erfordert sechs Leitungen. Vereint man aber drei zu einer (Abb. 421), so ist zu untersuchen, welcher Strom in dieser vierten (neutrale Leitung, Nulleitung) verkehrt¹⁾. Ist der eine der drei Ströme

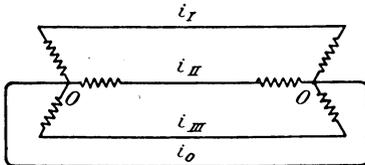


Abb. 421.

$$i_I = \Im \sin \omega t,$$

so ist der zweite (gemäß Abb. 417)

$$i_{II} = \Im \sin(\omega t + 120)$$

und der dritte

$$i_{III} = \Im \sin(\omega t + 240).$$

In der neutralen Leitung kommen alle drei zusammen; daher ist der hier verlaufende Strom i_0 :

$$\begin{aligned} i_0 &= i_I + i_{II} + i_{III} = \Im [\sin \omega t + \sin(\omega t + 120) + \sin(\omega t + 240)] \\ &= \Im (\sin \omega t + \sin \omega t \cos 120 + \cos \omega t \sin 120 + \sin \omega t \cos 240 \\ &\quad + \cos \omega t \sin 240) \end{aligned}$$

¹⁾ Die Vereinigungspunkte *O* bezeichnet man als neutrale Punkte.

und weil $\sin 120 = -\sin 240 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120 = \cos 240 = -\frac{1}{2}$

so ist $i_0 = i_I + i_{II} + i_{III} = 0$,

d. h. in der neutralen Leitung ist der Strom Null. Man kann sie daher auch weglassen und erhält so die in Abb. 422 dargestellte Schaltung eines Stromerzeugers und -Verbrauchers, die man als offene oder Stern-Schaltung bezeichnet.

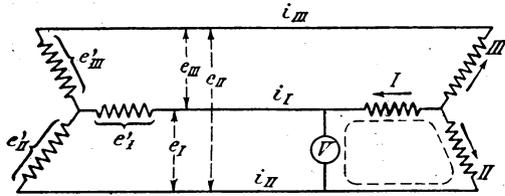


Abb. 422.

Daß die Summe der drei Ströme in jedem Augenblick Null ist, erkennt man übrigens auch aus Abb. 417, wo die algebraische Summe der Ordinaten in jedem Augenblick Null ist.

Aus der letzten Gleichung folgt

$i_I = -i_{II} - i_{III}; i_{II} = -i_I - i_{III}; i_{III} = -i_I - i_{II}$,

d. h. jeder Strom findet in den beiden anderen seine Rückleitung. Infolgedessen ist auch die in Abb. 423 dargestellte Schaltung möglich, die man als geschlossene oder Dreieck-Schaltung bezeichnet.

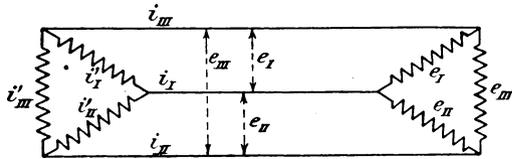


Abb. 423.

Abb. 424 zeigt die Ausführung der Sternschaltung, Abb. 425 die der Dreieckschaltung als zweipolige Ringwicklung.

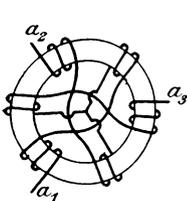


Abb. 424.

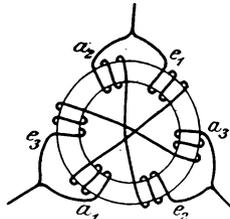


Abb. 425.

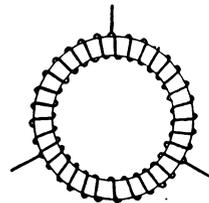


Abb. 426.

gleichet man mit Abb. 418, wo die Anfänge mit *a*, die Enden mit *e* bezeichnet sind, so sieht man, daß die erstere durch Vereinigung aller Enden (oder aller Anfänge) entsteht, die letztere durch Verbindung

jedes Endes mit dem Anfang der nächsten Wicklung. Aus diesem Grundsatz folgt, daß auch die in Abb. 426 dargestellte Schaltung eine richtige Dreieckschaltung ist. Es ist dies nichts anderes als eine geschlossene Ringwicklung, welcher an drei um ein Drittel des Kreises (120°) voneinander abstehenden Stellen Dreiphasenstrom zugeführt, beziehungsweise abgenommen wird.

Wie man aus Abb. 422 ersieht, ist bei der Sternschaltung der Strom in einem Wicklungszweig derselbe wie in der äußeren Leitung; dagegen ist die Spannung e zwischen zwei Leitungen (verkettete Spannung) verschieden von der Sternspannung e' . Wird ein Voltmeter V zwischen die Leitungen I und II geschaltet zur Messung der verketteten Spannung e , so sieht man, daß in dem durch die gestrichelte Linie angedeuteten Stromkreis die beiden Sternspannungen einander entgegengeschaltet sind; es ist also

$$\begin{aligned} e_I &= e'_I - e'_{II} = \mathfrak{E}' \sin \omega t - \mathfrak{E}' \sin (\omega t + 120) \\ &= \mathfrak{E}' (\sin \omega t - \sin \omega t \cos 120 - \cos \omega t \sin 120) \\ &= \mathfrak{E}' \left(\frac{3}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) \\ &= \sqrt{3} \mathfrak{E}' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t \right) \\ &= \sqrt{3} \mathfrak{E}' (\cos 30 \sin \omega t - \sin 30 \cos \omega t) \\ e_I &= \sqrt{3} \mathfrak{E}' \sin (\omega t - 30) \dots \dots \dots \text{(I)} \end{aligned}$$

Der Scheitelwert der verketteten Spannung ist somit

$$\mathfrak{E} = \sqrt{3} \mathfrak{E}' = 1,73 \mathfrak{E}'$$

und der effektive Wert

$$E = \sqrt{3} E' = 1,73 E' \dots \dots \dots \text{(II)}$$

In der Phase ist die verkettete Spannung um 30° gegen e'_I und infolgedessen gegen die andere Sternspannung e'_{II} um $120 + 30 = 150^\circ$ verzögert. Das gleiche erhält man für die beiden anderen verketteten Spannungen. Stellt man alle sechs Vektoren in ein Polardiagramm zusammen, so ergibt sich Abb. 427. Das gleiche Ergebnis erhält man aus der zeichnerischen Darstellung zweier Sternspannungen Abb. 428. e'_I , e'_{II} sind die beiden Sternspannungen. Die zweite muß, da sie im entgegengesetzten Sinne wirkt, umgekehrt eingezeichnet werden (die gestrichelte Welle). Aus dieser und e_I ergibt sich durch Addition die Welle e_I .

Bei der Dreieckschaltung (Abb. 423) ist die Spannung e zwischen zwei Leitungen dieselbe wie die eines Zweiges der Wicklung. Dagegen setzt sich der Strom i einer äußeren Leitung aus zwei Zweigströmen ebenso zusammen wie bei der Sternschaltung die ver-

kettete Spannung aus den Sternspannungen. Es ist also der verkettete Strom J

$$J = \sqrt{3} J' = 1,73 J'$$

und zwischen verkettetem Strom und Zweigströmen bestehen dieselben Phasenverschiebungen wie in Abb. 427 zwischen den Spannungen.

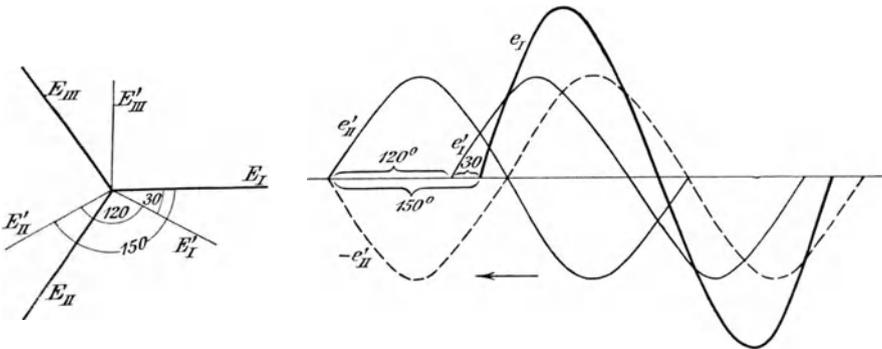


Abb. 427.

Abb. 428.

Auch aus den Vektordiagrammen ergibt sich das gleiche. Abb. 429 ist das Spannungsdiagramm bei Sternschaltung, Abb. 430 das Stromdiagramm bei Dreieckschaltung. Es ist zu beachten, daß die Phasenunterschiede von 120° immer auf die positiven Richtungen der Ströme oder der Spannungen zu beziehen sind. Daher bilden sie Außenwinkel der Dreiecke.

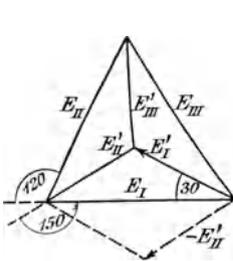


Abb. 429.

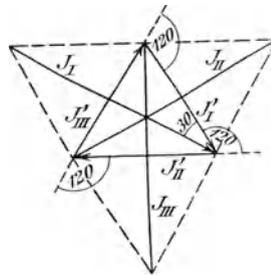


Abb. 430.

Wie man aus den Abb. 423 und 425 ersieht, bilden die drei Wicklungen einer Dreieckschaltung einen in sich geschlossenen Stromkreis, so daß die Frage entsteht, ob hier vielleicht ein Strom verkehrt, der nicht in die äußeren Leitungen gelangt. Es wirken hier die drei Spannungen e_I, e_{II}, e_{III} Hintereinanderschaltung. Da sie um 120° gegeneinander verschoben sind, haben wir dieselbe Addition wie eingangs dieses Paragraphen mit den drei Strömen der Stern-

schaltung auszuführen und erhalten wie dort Null. Es kann also in der geschlossenen Wicklung kein in sich geschlossener Strom verkehren.

Alles Vorstehende gilt aber nur für einfache Sinuswellen.

225. Verkettung zusammengesetzter Wellenformen.

Wir erweitern nun die vorstehende Betrachtung auf Wellenformen, wie sie in der Praxis vorkommen, nämlich auf solche, die sich aus Gliedern ungerader Ordnung zusammensetzen. Ist z. B. die Sternspannung eines Dreiphasenerzeugers von der Form $e' = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \mathfrak{A}_5 \sin 5 \omega t + \mathfrak{A}_7 \sin 7 \omega t + \mathfrak{A}_9 \sin 9 \omega t$ so ergibt sich nach vorigem Paragraphen die verkettete Spannung, wenn man davon die nächste, um 120° verschobene Sternspannung subtrahiert, also

$$\begin{aligned}
 e &= e_I' - e_{II}' = \mathfrak{A}_1 [\sin \omega t - \sin (\omega t + 120)] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_3 [\sin 3 \omega t - \sin 3 (\omega t + 120)] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_5 [\sin 5 \omega t - \sin 5 (\omega t + 120)] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_7 [\sin 7 \omega t - \sin 7 (\omega t + 120)] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_9 [\sin 9 \omega t - \sin 9 (\omega t + 120)] \\
 &= \mathfrak{A}_1 [\sin \omega t - \sin \omega t \cos 120 - \cos \omega t \sin 120] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_3 [\sin 3 \omega t - \sin 3 \omega t \cos 360 - \cos 3 \omega t \sin 360] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_5 [\sin 5 \omega t - \sin 5 \omega t \cos 600 - \cos 5 \omega t \sin 600] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_7 [\sin 7 \omega t - \sin 7 \omega t \cos 840 - \cos 7 \omega t \sin 840] + \\
 &\quad + \mathfrak{A}_9 [\sin 9 \omega t - \sin 9 \omega t \cos 3 \cdot 360 - \cos 9 \omega t \sin 3 \cdot 360] \\
 &= \mathfrak{A}_1 \left[\frac{3}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right] + \mathfrak{A}_3 \left[\frac{3}{2} \sin 5 \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5 \omega t \right] \\
 &\quad + \mathfrak{A}_7 \left[\frac{3}{2} \sin 7 \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 7 \omega t \right] \\
 &= \sqrt{3} \mathfrak{A}_1 [\cos 30 \sin \omega t - \sin 30 \cos \omega t] + \\
 &\quad + \sqrt{3} \mathfrak{A}_3 [\cos 30 \sin 5 \omega t + \sin 30 \cos 5 \omega t] + \\
 &\quad + \sqrt{3} \mathfrak{A}_7 [\cos 30 \sin 7 \omega t - \sin 30 \cos 7 \omega t] \\
 e &= \sqrt{3} \mathfrak{A}_1 \sin (\omega t - 30) + \sqrt{3} \mathfrak{A}_3 \sin (5 \omega t + 30) + \\
 &\quad + \sqrt{3} \mathfrak{A}_7 \sin (7 \omega t + 30).
 \end{aligned}$$

Der effektive Wert der verketteten Spannung ist also nach Gl. 224 (S. 469):

$$E = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sqrt{3} \mathfrak{A}_1)^2 + (\sqrt{3} \mathfrak{A}_3)^2 + (\sqrt{3} \mathfrak{A}_7)^2]}$$

Dasselbe ergibt sich in cos, wenn Cosinusglieder in der Sternspannung enthalten sind.

In der verketteten Spannung kommen also die Glieder dritter und neunter Ordnung nicht mehr vor, wie überhaupt kein Glied, dessen Ordnungszahl ein Vielfaches von 3 ist, weil dann in der obigen Ableitung bei diesen Gliedern Vielfache von 360° entstehen. Diese Glieder heben sich bei der Bildung der verketteten Spannung gegenseitig auf, wie auch 431 zeigt, die zwei Sternspannungen mit Gliedern erster und dritter Ordnung enthält. Die gestrichelte Welle ist die negative Welle e'_{II} , die zu e'_I zu addieren ist.

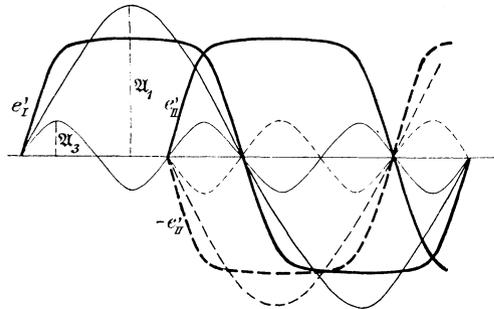


Abb. 431.

Dieselben Glieder, die in der Spannungswelle fehlen, müssen natürlich auch in der Stromwelle fehlen.

Nach Gl. 224 ist der effektive Wert der Sternspannung

$$E' = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_3^2 + \mathfrak{U}_5^2 + \mathfrak{U}_7^2 + \mathfrak{U}_9^2)}$$

oder in effektiven Werten ($A_1, A_3 \dots$):

$$E' = \sqrt{A_1^2 + A_3^2 + A_5^2 + A_7^2 + A_9^2} \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Der effektive Wert der verketteten Spannung ist nach obiger Formel:

$$E = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_5^2 + \mathfrak{U}_7^2)}$$

$$E = \sqrt{3} \sqrt{A_1^2 + A_5^2 + A_7^2} \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

Die Beziehung zwischen Sternspannung und verketteter Spannung ist also von der Wellenform abhängig, wenn Glieder 3. Ordnung oder Vielfache davon in der Sternspannung enthalten sind. Das Verhältnis zwischen Sternspannung und verketteter Spannung hängt dann von der Größe dieser Glieder ab. Sind solche Glieder in der Sternspannung nicht enthalten, sondern nur Glieder 1., 5., 7., 11. ... Ordnung, so ist wie bei reinen Sinuswellen $E = \sqrt{3} E'$. Findet man durch Messung von E und E' , daß dieses Verhältnis nicht besteht, so weiß man, daß Glieder dritter Ordnung vorhanden sind.

Bei der Dreieckschaltung besteht zwischen dem verketteten Strome in den Leitungen und den Zweigströmen dieselbe Beziehung wie bei der Sternschaltung zwischen den Spannungen, so daß alles Vorstehende auch für die Ströme bei der Dreieckschaltung gilt. Wenn aber der Strom in einer Leitung keine Glieder dritter Ordnung oder Vielfache davon enthält, kann auch die Spannung in einer Außenleitung keine enthalten.

Für einfache Sinuswellen haben wir im vorigen Paragraphen gefunden, daß in der geschlossenen Wicklung der Dreieckschaltung kein geschlossener Strom verkehrt, weil die Summe der drei EMKe e , die hier in Hintereinanderschaltung wirken, Null ist. Um zu sehen, wie es sich damit bei zusammengesetzten Wellenformen verhält, haben wir folgende Summe zu bilden:

$$e_0 = e_I + e_{II} + e_{III} = \mathfrak{U}_1 [\sin \omega t + \sin (\omega t + 120) + \sin (\omega t + 240)] \\ + \mathfrak{U}_3 [\sin 3 \omega t + \sin 3 (\omega t + 120) + \sin 3 (\omega t + 240)] + \dots$$

Der erste Klammerausdruck ist Null, so wie in § 224; dergleichen alle Glieder 5., 7., 11., 13. . . Ordnung. Hingegen ergibt sich aus den Gliedern 3. Ordnung folgendes:

$$e_0 = \mathfrak{U}_3 [\sin 3 \omega t + \sin 3 \omega t \cos 360 + \cos 3 \omega t \sin 360 \\ + \sin 3 \omega t \cos 720 + \cos 3 \omega t \sin 720] \\ e_0 = 3 \mathfrak{U}_3 \sin 3 \omega t.$$

Auf ähnliche Weise ergeben die Glieder 9. Ordnung die Summe $3 \mathfrak{U}_9 \sin 9 \omega t$, und so fort alle Glieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist.

Der effektive Wert E_0 dieser in der geschlossenen Wicklung wirksamen Spannung ist also

$$E_0 = 3 \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{U}_3^2 + \mathfrak{U}_9^2)} = 3 \sqrt{A_3^2 + A_9^2} \quad \dots \quad (\text{V})$$

Dieser Wert kann direkt gemessen werden, wenn man die geschlossene Wicklung an einer Stelle öffnet und ein Voltmeter einschaltet, was natürlich nur bei leerlaufender Maschine ausführbar ist.

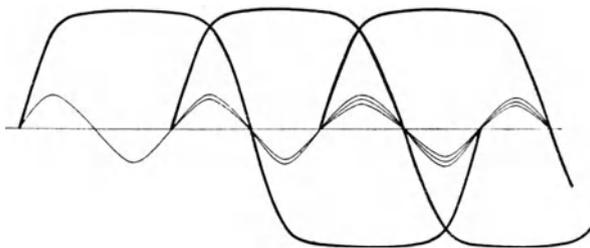


Abb. 432.

Abb. 432 zeigt am Verlauf der drei EMKe, die aus Gliedern erster und dritter Ordnung bestehen, wie sich letztere addieren.

Jedes Spannungsglied erzeugt einen Strom nach Maßgabe des scheinbaren Widerstandes der geschlossenen Wicklung. Mithin besteht in dieser ein Strom:

$$J_0 = 3 \sqrt{J_3^2 + J_9^2},$$

der nicht in die Leitung gelangt, und daher nichts zur Leistung im Netz beiträgt, wohl aber die Wicklung stärker erwärmt, also den

Wirkungsgrad des Stromerzeugers verschlechtert. Die Dreieckschaltung ist daher bei Stromerzeugern grundsätzlich zu vermeiden, denn Glieder 3. Ordnung können im Betriebe infolge der Ankerrückwirkung selbst dann auftreten, wenn sie in der Leerlaufspannung nicht enthalten sind. (Vgl. die Anmerk. auf S. 472.)

Auf S. 491 haben wir gesehen, daß bei Sternschaltung mit neutraler Leitung (Abb. 421) der Strom in der neutralen Leitung Null ist, wenn die drei Stromwellen sinusförmig sind. Enthalten sie aber Glieder dritter Ordnung oder vielfache davon, so addieren sich in der neutralen Leitung die Glieder dritter Ordnung aus allen drei Wicklungen, und es entsteht ein Strom J_0 in der neutralen Leitung gemäß obiger Gleichung. Derselbe Stromkreis entsteht, wenn der neutrale Punkt des Stromerzeugers und eines Stromverbrauchers geerdet ist. Man kann also auf diese Weise einen Strom von dreifacher Frequenz erhalten (§ 227). Zwischen den neutralen Punkten herrscht eine Spannung E_0 gemäß Gl. V. Schaltet man ein Voltmeter in die neutrale Leitung oder in eine Erdverbindung ein, so zeigt es diese Spannung E_0 an.

Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis. Aus einer Maschine mit Sternschaltung ohne neutrale Verbindung oder mit Dreieckschaltung können Spannungs- oder Stromglieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist, nicht in die Leitungen gelangen. Bei Sternschaltung mit neutraler Verbindung enthält jede der drei Leitungen dieselben Glieder in Strom und Spannung, die im Stromerzeuger entstehen. Sie sind daher auch in dem betreffenden Verbrauchsapparat (Motor, Transformator) vorhanden. In der neutralen Leitung addieren sich die Glieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist. Bei Dreieckschaltung addieren sich diese Spannungsglieder im Stromerzeuger und erzeugen einen Strom in der geschlossenen Wicklung. In Verbrauchsapparaten kann ein Strom in der geschlossenen Wicklung nicht vorkommen, weil Glieder dritter Ordnung überhaupt nicht hineingelangen.

226. Die elektrische Leistung des Dreiphasenstromes.

Die gesamte elektrische Leistung P eines Dreiphasenstromes ist natürlich gleich der Summe der Leistungen in den drei Wicklungszweigen. Sind Strom, Spannung und Phasenverschiebung in allen dreien gleich, so ist bei Sternschaltung (Abb. 422):

$$P = 3 E' J \cos \varphi.$$

Enthalten die Wellenformen keine Glieder dritter Ordnung und Vielfache davon, so ist nach Gl. II (S. 492)

$$P = \sqrt{3} E J \cos \varphi.$$

Bei Dreieckschaltung (Abb. 423) ist

$$P = 3 E J' \cos \varphi = \sqrt{3} E J \cos \varphi \dots \dots \dots \text{(VI)}$$

Es gilt also in beiden Fällen dieselbe Formel, wenn Strom und Spannung auf die äußeren Leitungen bezogen werden. Die Phasenverschiebung φ gilt dabei immer für die Wicklungen, nicht für die äußeren Leitungen.

Die vorstehenden Formeln gelten natürlich nur, wenn Strom, Spannung und Phasenverschiebung in allen drei Leitungen gleich sind, andernfalls muß die Leistung für jede Leitung besonders bestimmt werden. Sind die Stromstärken und Spannungen nicht gleich, erfüllen aber die drei Spannungen zwischen den Leitungen die Bedingung

$$e_I + e_{II} + e_{III} = 0,$$

so erhält man eine Formel für die gesamte Leistung auf folgende Weise. Bedeutet p die gesamte Leistung in jedem Augenblick, so ist nach Abb. 423:

$$p = e_I i_I' + e_{II} i_{II}' + e_{III} i_{III}'.$$

Zufolge obiger Voraussetzung ist

$$i_I' (e_I + e_{II} + e_{III}) = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorigen, so ist

$$p = e_{II} (i_{II}' - i_I') + e_{III} (i_{III}' - i_I').$$

Nun ist nach Abb. 423

$$i_I = i_I' - i_{II}' \quad \text{und} \quad i_{III} = i_{III}' - i_I',$$

also

$$p = e_{II} i_I + e_{III} i_{III}.$$

In dieser Gleichung kommen nur die Spannungen zwischen den Leitungen und die Ströme in den Leitungen vor. Will man zu den effektiven Werten übergehen, so müssen die Phasenverschiebungen zwischen diesen Spannungen und Strömen (γ bzw. δ) eingeführt werden und man erhält so für die gesamte Leistung in effektiven Werten

$$P = E_{II} J_I \cos \gamma + E_{III} J_{III} \cos \delta.$$

Jedes dieser zwei Glieder kann durch ein Wattmeter gemessen werden. Vgl. § 281.

227. Das resultierende magnetische Feld einer mehrphasigen Spulentwicklung.

Wirken die drei Ströme eines Dreiphasensystems auf einen Eisenkern, so hängt das resultierende Feld von der Art der drei Wicklungen ab. Eine vollständige Übereinanderlagerung der drei Felder findet nur statt, wenn alle drei Ströme in ganz gleicher Weise zur Wirkung kommen. Das ist der Fall, wenn die drei Stromleiter unmittelbar nebeneinander liegen wie in Abb. 433. Die Berechnung

des resultierenden Feldes kann aber nicht so vorgenommen werden, daß man etwa aus Abb. 125 oder 177 die zu jeder Wicklung gehörigen Kraftliniendichten \mathfrak{B} entnimmt und daraus die Resultierende bildet. Das wäre deshalb falsch, weil in \mathfrak{B} die Durchlässigkeit μ steckt, und diese hängt nicht von den Komponenten, sondern von der tatsächlich vorhandenen Kraftliniendichte ab. Man muß daher die Resultierende aus den MMKen bilden und dann erst die dazu gehörige Kraftlinienmenge suchen. Bei Luft oder anderen Stoffen von konstanter Durchlässigkeit ist es natürlich gleichgültig, ob man so oder so verfährt.



Abb. 433.

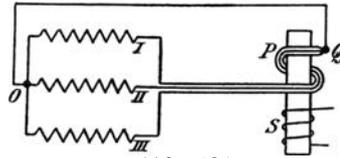


Abb. 434.

Sind f_I, f_{II}, f_{III} die Augenblickswerte der MMKe der drei Stromkreise, so ist die resultierende MMK f_r bei der in Abb. 433 dargestellten Wicklung

$$f_r = f_I + f_{II} + f_{III}$$

und nach § 105, wenn N die Windungszahl jedes Stromkreises ist,

$$f_r = 0,4\pi N(i_I + i_{II} + i_{III}).$$

Nach § 224 ist aber der Klammerausdruck Null und daher

$$f_r = 0.$$

Es muß also auch das magnetische Feld Null sein. Fließt aber einer der drei Ströme, z. B. i_I , in entgegengesetztem Sinne, sei es, daß der Sinn seiner Wicklung oder die Anschlüsse verkehrt sind, so ist

$$f_r = 0,4\pi N(-i_I + i_{II} + i_{III}).$$

Nun ist aber nach § 224

$$i_{II} + i_{III} = -i_I.$$

Mithin

$$f_r = -0,4\pi N \cdot 2 i_I = -2 f_I.$$

Daher ist der Scheitelwert \mathfrak{F}_r der resultierenden MMK in diesem Falle

$$\mathfrak{F}_r = 0,8\pi \mathfrak{F} N.$$

Kommen die drei Stromkreise nicht auf jeden Teil des Kernes in gleicher Weise zur Wirkung, so ist die resultierende MMK im ersten Fall größer als Null und im zweiten Fall kleiner als 2. Das ist der Fall, wenn die drei Wicklungen übereinanderliegende Spulen bilden (Abb. 217a). Dann wirkt die mittlere Spule schwächer auf

den Kern als die innere, und die oberste schwächer als die mittlere. Noch schlechter ist das Zusammenwirken der drei Spulen, wenn sie nebeneinander liegen, weil sich dann zwischen den Spulen Folgepole ausbilden, wie in Abb. 161.

Das Vorstehende gilt aber nur für solche Wellenformen, die keine Glieder dritter Ordnung und ihrer Vielfachen enthalten. Sind solche in den Strömen enthalten, so gibt ihre Summe, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, das Dreifache. Daher ist bei gleichem Wicklungssinn:

$$\begin{aligned} f_r &= 0,4\pi N(3\mathfrak{F}_3 \sin 3\omega t \pm 3\mathfrak{F}_9 \sin 9\omega t + \dots) \\ f_r &= 1,2\pi N(\mathfrak{F}_3 \sin 3\omega t \pm \mathfrak{F}_9 \sin 9\omega t + \dots). \end{aligned}$$

Bringt man eine sekundäre Spule auf diesen Eisenkern, so entsteht in ihm ein EMK, deren Grundfrequenz die dreifache der Betriebsfrequenz ist. Damit aber die Glieder dritter Ordnung aus dem Stromerzeuger in die Leitung gelangen, ist es nach § 225 notwendig, daß eine neutrale Leitung besteht. So ergibt sich die Schaltung in Abb. 434. Hier führt also die Wicklung S einen sekundären Strom dreifacher Frequenz, während der entsprechende primäre Strom dreifacher Frequenz in der neutralen Leitung OQ fließt. In den Leitungen I, II, III fließt außerdem noch die Grundwelle des Stromes.

Fließt einer der Ströme im entgegengesetzten Sinne, so heben sich zwei dieser Glieder gegenseitig auf, und es ist

$$\mathfrak{F}_r = 0,4\pi N(\mathfrak{F}_3 \mp \mathfrak{F}_9 \mp \dots).$$

Wird ein Eisenkern wie in Abb. 433 von den durchwegs parallelliegenden Leitungen eines Zweiphasenstromes magnetisiert, so ist die resultierende MMK in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} = 0,4\pi N\mathfrak{F}[\sin \omega t + \sin(\omega t + 90)].$$

Das gilt auf gleiche Weise wie in § 223

$$f_r = \mathfrak{F}\sqrt{2}(\omega t + 45).$$

Läuft der Strom in einer der beiden Wicklungen im entgegengesetzten Sinne, so ist

$$f_r = f_I - f_{II} = \mathfrak{F}\sqrt{2} \sin(\omega t - 45).$$

Der Scheitelwert \mathfrak{F}_r , der resultierenden EMK ist also in beiden Fällen

$$\mathfrak{F}_r = \sqrt{2} \mathfrak{F} = 0,566\pi\mathfrak{F}N.$$

Hat der Strom eine zusammengesetzte Wellenform, so ergibt sich auf gleiche Weise

$$f_r = \sqrt{2}[\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t \pm 45) + \mathfrak{F}_3 \sin(3\omega t \pm 45) + \mathfrak{F}_5 \sin(5\omega t \pm 45) + \dots].$$

228. Das resultierende magnetische Feld mehrphasiger Trommelwicklungen.

Bei den mehrphasigen Maschinen (Stromerzeuger und Motoren) muß die Wicklung derart angeordnet werden, daß sich das resultierende magnetische Feld um die Achse der Maschine dreht. Das wird, wie in § 222 gezeigt wurde, dadurch erreicht, daß die Wicklungen um ebensoviel räumlich gegeneinander verschoben werden, als die Ströme zeitliche Phasenverschiebung haben. Bei Zweiphasenstrom müssen also die Wicklungen um $\frac{1}{4}$ des Kreises (Abb. 416), bei Dreiphasenstrom um $\frac{1}{3}$ des Kreises (Abb. 418) versetzt sein.

Bei mehrpoligen Maschinen muß die räumliche Verschiebung $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{3}$ des Bereiches eines Polpaares betragen.

In den genannten Abbildungen sind der leichteren Darstellung wegen Ringwicklungen gezeichnet. Diese werden jetzt nicht mehr angewendet, weil die ursprüngliche Richtung der MMK dieser Wicklungsart nicht durch die Mitte der Maschine (durch den Läufer) geht, und infolgedessen bedeutend größere Streuung entsteht, als bei der Trommelwicklung (Abb. 435). Bei dieser Wicklungsart haben die MMKe jeder Spule von vornherein dieselbe Richtung, wie die entstehenden Kraftlinien. Um ein möglichst gleichmäßiges Drehfeld zu erzielen, dürfen aber die Spulen der verschiedenen Phasen nicht nebeneinander angeordnet werden, sondern müssen sich teilweise überdecken, damit die Grenzen zwischen den MMKe der einzelnen Spulen möglichst verwischt werden. Im folgenden wird sich zeigen, daß auf solche Weise ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotierendes Feld entsteht.

Denkt man sich in einem bestimmten Augenblick die von einem der Ströme erzeugten Kraftliniendichten im Luftzwischenraum zwischen Ständer und Läufer als senkrechte Linien auf den inneren Umfang aufgetragen, so erhält man die in Abb. 436 durch die gestrichelte Linie dargestellte Feldverteilung. Sie kann als Sinuslinie mit dem Scheitelwert \mathfrak{M} betrachtet werden. Rechnet man die Welle vom Punkt A an, so ist die MMK an irgend einer Stelle b des Umfanges, die von A um den Winkel ξ und um das Stück l des Umfanges entfernt ist:

$$f_I = \mathfrak{M} \sin \xi l.$$

Ist λ die Länge des Umfanges, also die Wellenlänge, so ist

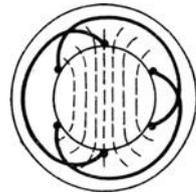


Abb. 435.

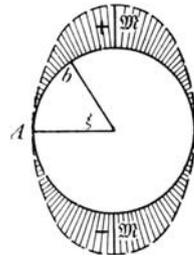


Abb. 436.

$\xi = \frac{2\pi}{\lambda}$. Tatsächlich ist dann für $l = \frac{\lambda}{4}$, $f = \mathfrak{M} \sin \frac{\pi}{2} = \mathfrak{M}$; für $l = \frac{\lambda}{2}$, $f = 0$; für $l = \frac{3\lambda}{4}$, $f = -\mathfrak{M}$.

Durch diese Gleichung wird die räumliche Verteilung der MMK bestimmt, gleichgültig ob Gleichstrom oder Wechselstrom durch die betreffende Spule geht. Ist es ein Wechselstrom, dessen zeitlicher Verlauf sinusförmig ist, so ist die MMK \mathfrak{M} :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \sin \omega t,$$

wenn \mathfrak{F} den Scheitelwert der MMK einer Spule bedeutet. Es ist demnach

$$f_I = \mathfrak{F} \sin \omega t \cdot \sin \xi l.$$

Durch diese Gleichung wird also die MMK an einem beliebigen Punkte des Umfanges, dessen Bogenlänge l ist, zur Zeit t bestimmt. Das gilt für eine Spule. Für die zweite Spule eines Dreiphasensystems, die um ein Drittel des Umfanges, also um 120° räumlich verschoben ist und einen Strom führt, der um 120° zeitlich verschoben ist, gilt

$$f_{II} = \mathfrak{F} \sin(\omega t + 120) \cdot \sin(\xi l + 120),$$

und für die dritte Spule

$$f_{III} = \mathfrak{F} \sin(\omega t + 240) \cdot \sin(\xi l + 240).$$

Die gesamte, aus der Wirkung der drei Spulen resultierende EMK f_r ist in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} + f_{III}.$$

Unter Benützung einer bekannten trigonometrischen Formel¹⁾ erhält man dann

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{\mathfrak{F}}{2} [\cos(\omega t - \xi l) - \cos(\omega t + \xi l) + \cos(\omega t - \xi l) \\ &\quad - \cos(\omega t + \xi l + 240) + \cos(\omega t - \xi l) - \cos(\omega t + \xi l + 480)] \\ &= \frac{\mathfrak{F}}{2} [3 \cos(\omega t - \xi l) - \cos(\omega t + \xi l) - \cos(\omega t + \xi l) \cos 240 \\ &\quad + \sin(\omega t + \xi l) \sin 240 - \cos(\omega t + \xi l) \cos 480 \\ &\quad + \sin(\omega t + \xi l) \sin 480]. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\sin 480 = \sin 120 = -\sin 240$$

$$\cos 480 = \cos 120 = \cos 240 = -\frac{1}{2},$$

so verschwinden die letzten Glieder, und es ist

¹⁾ $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$

$$f_r = \frac{3}{2} \mathfrak{F} \cos(\omega t - \xi l).$$

Diese Gleichung gibt an, welchen Wert die resultierende MMK an irgend einer Stelle des Umfanges zu irgend einer Zeit hat.

Der Scheitelwert \mathfrak{F}_r der resultierenden MMK ist nach der vorstehenden Gleichung

$$\mathfrak{F}_r = \frac{3}{2} \mathfrak{F}.$$

Die Magnetisierung wird also dargestellt durch eine MMK mit dem Scheitelwerte \mathfrak{F}_r , deren räumliche Verteilung einer einfachen periodischen Funktion entspricht und die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω rotiert¹⁾.

Da für eine Spule

$$\mathfrak{F} = 0,4 \pi \mathfrak{J} N \text{ ist,}$$

so ist

$$\mathfrak{F}_r = 0,6 \pi \mathfrak{J} N.$$

Hat der in den Spulen fließende Wechselstrom eine zusammengesetzte Wellenform von der Art

$$\mathfrak{J}_1 \sin \omega t + \mathfrak{J}_3 \sin 3 \omega t + \mathfrak{J}_5 \sin 5 \omega t + \dots,$$

so ist

$$\begin{aligned} f_I &= [\mathfrak{J}_1 \sin \omega t + \mathfrak{J}_3 \sin 3 \omega t + \mathfrak{J}_5 \sin 5 \omega t + \dots] \sin \xi l \\ f_{II} &= [\mathfrak{J}_1 \sin(\omega t + 120) + \mathfrak{J}_3 \sin 3(\omega t + 120) \\ &\quad + \mathfrak{J}_5 \sin 5(\omega t + 120) + \dots] \sin(\xi l + 120) \\ f_{III} &= [\mathfrak{J}_1 \sin(\omega t + 240) + \mathfrak{J}_3 \sin 3(\omega t + 240) \\ &\quad + \mathfrak{J}_5 \sin 5(\omega t + 240) + \dots] \sin(\xi l + 240). \end{aligned}$$

Die Ausrechnung ergibt für die resultierende MMK

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{3}{2} \mathfrak{F}_1 \cos(\omega t - \xi l) - \frac{3}{2} \mathfrak{F}_5 \cos(5 \omega t + \xi l) \\ &\quad + \frac{3}{2} \mathfrak{F}_7 \cos(7 \omega t - \xi l) - \frac{3}{2} \mathfrak{F}_{11} \cos(11 \omega t + \xi l). \end{aligned}$$

Die Glieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 sind, sind verschwunden. In dem resultierenden Ankerfelde eines Stromerzeugers, das die Ankerrückwirkung verursacht, sowie im Felde eines Motors kommen demnach solche Glieder nicht vor, selbst wenn sie in den Strömen und in den MMKen der einzelnen Wicklungen vorkommen.

¹⁾ Durch experimentelle Bestimmung mittels eines Wellenzeichners wurde festgestellt, daß die Feldverteilung tatsächlich sinusförmig ist, und zwar unabhängig von der Anzahl der Wicklungslöcher und der Form der Spulen, wenn die Spannung des zugeführten Stromes sinusförmig ist: Electrical World Bd. 46, Nr. 8, S. 408, 1906. ETZ 1906, S. 702.

Sind die Scheitelwerte der höheren Glieder nicht so groß, daß sie eine Einsattelung der resultierenden Welle bewirken, was bei magnetischen Feldern selten vorkommt, so ist der Scheitelwert:

$$\mathfrak{F}_r = \frac{3}{2}(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_5 - \mathfrak{F}_7 + \mathfrak{F}_{11}),$$

wovon man sich durch Aufzeichnung dieser Glieder überzeugt.

Den Scheitelwert \mathfrak{B}_r der resultierenden Kraftlinienmenge erhält man nun (§ 105) aus

$$\mathfrak{B}_r = \frac{\mathfrak{F}_r}{w},$$

wenn w den magnetischen Widerstand des gesamten Kraftlinienbündels bedeutet.

Für Cosinuglieder dritter Ordnung und ihre Vielfachen gilt dasselbe wie für Sinusglieder.

Bei Zweiphasenmaschinen sind die beiden Wicklungen um 90° (Viertel einer Wellenlänge) räumlich verschoben. Analog der Dreiphasenwicklung ist also bei einfachen Sinuswellen

$$f_I = \mathfrak{F} \sin \omega t \cdot \sin \xi l$$

$$f_{II} = \mathfrak{F} \sin(\omega t + 90) \sin(\xi l + 90) = \mathfrak{F} \cos \omega t \cdot \cos \xi l.$$

Daher die resultierende MMK in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} = \mathfrak{F}(\sin \omega t \cdot \sin \xi l + \cos \omega t \cdot \cos \xi l)$$

$$f_r = \mathfrak{F} \cos(\omega t - \xi l).$$

Der Scheitelwert \mathfrak{F}_r der resultierenden MMK ist also gleich dem einer Wicklung und daher die resultierende Kraftlinienmenge

$$\mathfrak{B}_r = \frac{0,4 \pi \mathfrak{F} N}{w}.$$

Hat der Strom eine zusammengesetzte Wellenform, so ist

$$f_I = [\mathfrak{F}_1 \sin \omega t + \mathfrak{F}_3 \sin 3 \omega t + \dots] \sin \xi l$$

$$f_{II} = [\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t + 90) + \mathfrak{F}_3 \sin 3(\omega t + 90) + \dots] \sin(\xi l + 90)$$

und daraus die resultierende MMK

$$f_r = \mathfrak{F}_1 \cos(\omega t - \xi l) - \mathfrak{F}_3 \cos(3 \omega t + \xi l) + \mathfrak{F}_5 \cos(5 \omega t - \xi l) \pm \dots$$

mithin der Scheitelwert der resultierenden MMK

$$\mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_3 - \mathfrak{F}_5 \pm \dots$$

229. Umwandlung von Zwei- in Dreiphasenstrom.

Mittels zweier Transformatoren kann man eine solche Umwandlung ausführen. Abb. 437 zeigt die Schaltung der beiden Transformatoren, die primär an Zweiphasenstrom angeschlossen sind,

$A B C$ sind die Enden der sekundären Wicklungen, von denen der Dreiphasenstrom abgenommen wird. Abb. 438 zeigt das Diagramm dieser Schaltung. I ist der Vektor der sekundären Spannung der Wicklung $A B$. Senkrecht darauf im Mittelpunkt O steht der Vektor II der sekundären Spannung der Wicklung $O C$. Diese beiden Vektoren stehen deshalb senkrecht aufeinander, weil die den primären Wicklungen zugeführten Spannungen des Zweiphasenstromes um 90° gegeneinander verschoben sind. Ist die Spannung $O C$ gleich

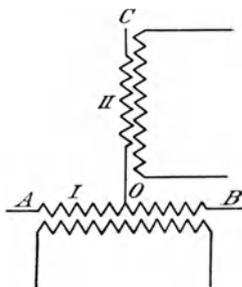


Abb. 437.

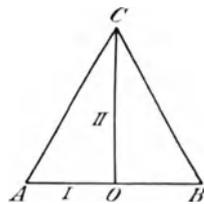


Abb. 438.

dem $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ($= 0,87$)fachen der Spannung $A B$, so ist das Spannungsdreieck $A B C$ ein gleichseitiges, wie in Abb. 429. Daher sind die drei Spannungen zwischen $A B$, $B C$ und $C A$ um 120° untereinander verschoben. Um dieses bestimmte Spannungsverhältnis zu bekommen, muß bei gleicher primärer Spannung das Übersetzungsverhältnis des Transformators II gleich dem 0,87 fachen des Transformators I sein, d. h. bei gleicher Magnetisierung in den Eisenkernen muß die sekundäre Windungszahl des Transformators II gleich der 0,87 fachen des Transformators I sein.

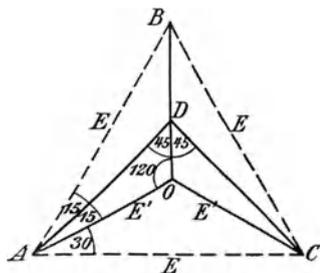


Abb. 439.

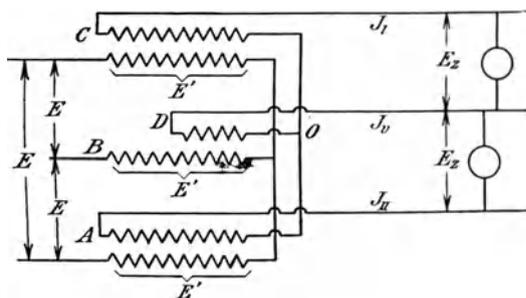


Abb. 440.

Auch mit einem einzigen Transformator kann man Dreiphasenstrom in Zweiphasenstrom umwandeln und umgekehrt, wenn eine Phase die im folgenden berechnete Windungszahl hat oder entsprechend angezapft werden kann. In das Diagramm Abb. 439 läßt sich offenbar ein rechter Winkel so einzeichnen, daß seine Spitze D auf $O B$ liegt. Hieraus ergibt sich

$$A C = \sqrt{3} \cdot A O = \sqrt{3} E'$$

$$AD = AC \cdot \sin 45 = \sqrt{3} E' \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} E' = 1,22 E'$$

$$OD = \sqrt{AO^2 + AD^2 - 2 AO \cdot AD \cos 15}$$

$$= \sqrt{E'^2 + \frac{3}{2} E'^2 - 2 E'^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \cos 15} = 0,37 E'.$$

Abb. 440 zeigt die Schaltung. Die Wicklung derjenigen Phase, an welche die verkettete Leitung J_v des Zweiphasensystemes angeschlossen ist, also OD , muß nach vorstehender Rechnung 37 Prozent von der Windungszahl der anderen Phasen erhalten.

230. Herstellung zweiphasiger Ströme aus einphasigem Wechselstrom.

I. Wird ein Wechselstrom in zwei Zweige geteilt (Abb. 441), von denen der eine den induktionslosen Widerstand w_1 , der andere soviel Selbstinduktion L_2 enthält, daß der Widerstand w_2 gegen den induktiven Widerstand ωL_2 verschwindet, so besteht nach § 141 eine Phasenverschiebung zwischen den beiden Zweigströmen von nahezu 90° . Man erhält also auf diese Weise einen Zweiphasenstrom. Will man aber damit einen Motor betreiben, so müssen beide Zweigströme durch die entsprechenden Wicklungen geschickt werden, und dadurch erhält nun auch der Zweig 1 einen erheblichen induktiven Widerstand, so daß die Phasenverschiebung zwischen den beiden Zweigströmen weit kleiner als 90° ist. Ein zum normalen Betrieb geeignetes Drehfeld erhält man aber auf diese Weise nicht, und man verwendet es daher nur, um einen einphasigen Induktionsmotor, der von selbst nicht anläuft, in Betrieb zu setzen¹⁾. Dieser

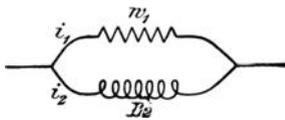


Abb. 441.

erhält zu diesem Zweck zwei Wicklungen wie in Abb. 416, die von den beiden Zweigströmen gespeist werden, und er läuft nun als Zweiphasenmotor mit 40 bis 60° Phasenverschiebung an. Hat der Motor seine normale Umlaufzahl erreicht, so wird der Zweig mit dem Widerstand w_1 abgeschaltet. Die beiden Motorwicklungen sind nun hintereinander geschaltet und von dem einphasigen Wechselstrom durchflossen, so daß der Motor nun als Einphasenmotor weiterläuft. Ganz kleine Motoren, wo es auf den Wirkungsgrad, der durch

¹⁾ Theoretisch erhält man zwar auch mit zwei gleichen Strömen von beliebigem Phasenverschiebungswinkel δ ein richtiges Drehfeld, wenn man die Wicklungen so anordnet, daß auch die räumliche Verschiebung δ bzw. $180 - \delta$ beträgt, statt $+90$ bzw. -90 wie in Abb. 416. Praktisch trifft es aber nicht zu, weil die Streuung zwischen den Spulen namentlich in dem großen Zwischenraum $180 - \delta$ zu groß ist, so daß keine genügende Übereinanderlagerung der Felder eintritt.

den Widerstand w_1 stark herabgedrückt wird, nicht ankommt, läßt man wohl auch dauernd in der Schaltung Abb. 441 laufen.

II. Mittels anderen Schaltungen lassen sich aber auch Phasenverschiebungen von genau 90° und mehr herstellen. So mit der Brückenschaltung (Abb. 442), wo w_2, w_3, w_5 induktionsfreie Widerstände bedeuten. Durch den Brückenweig CD gehen zwei Ströme, die durch die gestrichelte und die strichpunktierte Linie angedeutet sind. Der letztere geht durch die Selbstinduktionen L_1 und L_2 und hat daher eine große Phasenverschiebung gegen die Spannung zwischen den Punkten AB , wenn w_5 nicht zu groß ist. Der erstere hat keine Phasenverschiebung gegen diese Spannung, da er nur durch die Widerstände w_3, w_5, w_2 geht. Da er aber im Zweig CD dem anderen Strom entgegengerichtet ist, so hat er gegen diesen 180° Phasenverschiebung. Im Zweig CD entsteht also ein resultierender Strom, der bei geeigneter Wahl der Widerstände und Selbstinduktionen um mehr als 90° gegen den Strom i verschoben ist. Diese Schaltung wird bei den Induktionsinstrumenten von Siemens & Halske (§ 271) angewendet.

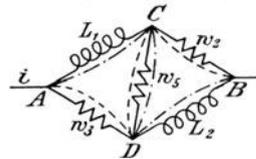


Abb. 442.

III. Bei der durch Abb. 443 dargestellten Schaltung denke man sich zunächst den Zweig mit der Selbstinduktion L' weg. Dann hat der durch L und w gehende Strom i eine Phasenverschiebung von nahezu 90° gegen die Spannung zwischen den Punkten AD , wenn ωL groß gegen w ist. In gleicher Phase mit diesem Strom ist die Spannung zwischen den Punkten BD , da w induktionslos ist. Legt man nun den Zweig L' an, so hat der Strom i' in diesem Zweig eine Phasenverschiebung von nahezu 90° gegen die Spannung zwischen seinen Anschlußpunkten BD . Man würde also eine Phasenverschiebung von nahezu 180° zwischen i' und der Spannung AD erhalten, wenn die

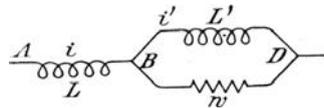


Abb. 443.

Spannung zwischen BD unverändert geblieben wäre. Das ist nun nicht der Fall; aber man sieht, daß man eine Phasenverschiebung von 90° und darüber durch geeignete Wahl der Größen L, L' und w erhalten kann. Nimmt man von AD einen induktionslosen Zweig ab, so kann die Phasenverschiebung zwischen dem Strome in ihm und i' mehr als 90° betragen. Die genaue Berechnung der Ströme und aller Phasenverschiebung zwischen ihnen und den Spannungen läßt sich mit Hilfe der Formeln in § 141 bis 143 ausführen.

IV. Schaltet man einen Kondensator in einen Zweig (Abb. 444), so erhält man eine Phasenverschiebung von genau 90° zwischen den beiden Zweigströmen, wenn der Kondensator ein vollkommener ist. Da solche sehr teuer sind, kommt



Abb. 444.

dieses Mittel praktisch nicht zur Anwendung. Bei unvollkommenen Kondensatoren (§ 182) ist die Phasenverschiebung kleiner als 90° . Durch Einschaltung einer Selbstinduktion in den Zweig 1 kann man aber die Phasenverschiebung zwischen beiden Zweigströmen auf 90° und darüber bringen (§ 177).

V. Endlich läßt sich bei einer Stromverzweigung mit gegenseitiger Induktion, also bei der in Abb. 267 (S. 317) dargestellten Schaltung, eine Phasenverschiebung von 90° und darüber zwischen den beiden Zweigströmen herstellen, wenn der Wicklungssinn so ist, daß für die wirksamen Selbstinduktionen die Gleichungen 194 (S. 318) gelten. Dann ist die Phasenverschiebung β zwischen den beiden Zweigströmen nach Gl. 123 (S. 246)

$$\operatorname{tg} \beta = \omega \frac{w_2 (L_1 - M) - w_1 (L_2 - M)}{w_1 w_2 + \omega^2 (L_1 - M) (L_2 - M)}.$$

Soll z. B. $\beta = 90^\circ$, also $\operatorname{tg} \beta = \infty$ sein, so muß

$$w_1 w_2 + \omega^2 (L_1 - M) (L_2 - M) = 0$$

sein.

Daraus ergibt sich für M

$$M = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(L_1 - L_2)^2 - \frac{4 w_1 w_2}{\omega^2}}.$$

Es gibt also zwei Werte von M , die dieser Bedingung genügen, wenn L_1, L_2, w_1, w_2 so gewählt werden, daß die Wurzel reell ist.

Alle diese Schaltungen bezeichnet man als Schaltungen mit Kunstphase. Wegen der erheblichen Verluste durch Stromwärme in den induktionslosen Widerständen können sie nur bei kleinen Motoren, wo es auf den Wirkungsgrad nicht ankommt, und die Wärme leicht abgeleitet werden kann, angewendet werden; hauptsächlich bei Induktions-Elektrizitätszählern¹⁾.

231. Motoren mit verschobenen magnetischen Feldern.

Zwar sind bei allen gewöhnlichen Drehstrommotoren, wie sie in § 222 erläutert wurden, magnetische Felder vorhanden, die ebenso wie die Ströme untereinander verschoben sind und ein sich drehendes resultierendes Feld ergeben; es lassen sich aber auch aus dem Felde einer einzigen, vom Wechselstrom durchflossenen Spule magnetische Felder von verschiedener Phase erzeugen, und zwar mit Hilfe sekundärer Ströme.

¹⁾ Bei diesen kommt es aber nicht darauf an, daß zwischen den Strömen 90° Phasenverschiebung besteht, sondern darauf, daß sie zwischen den magnetischen Feldern des Hauptstromes und des Nebenschlusses besteht. Daher kann das magnetische Feld des letzteren unmittelbar — durch eine sekundäre Kurzschlußwindung (Abb. 260) oder durch einen magnetischen Nebenschluß — beeinflußt werden. Vgl. auch den folgenden Paragraph.

Bei dem durch Abb. 445 dargestellten Motor System Tesla geht ein Teil der Kraftlinien durch die Polschuhe C und der übrige Teil durch die Polschuhe D , die von jenen durch den Zwischenraum d getrennt sind. Sind die Polschuhe D aus massivem Eisen, so entstehen in ihnen Wirbelströme von beträchtlicher Stärke, die in bezug auf den Strom

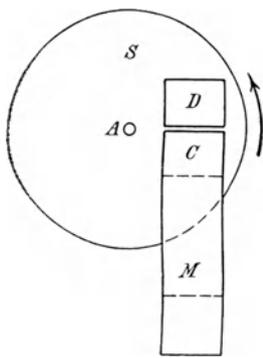
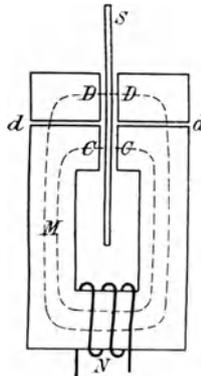


Abb. 445.



die in bezug auf den Strom

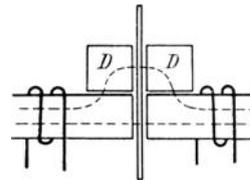


Abb. 446.

in der Spule N sekundäre Ströme sind. Da auch diese ein magnetisches Feld erzeugen, so entsteht in den Polschuhen D ein resultierendes Feld β , das nach Abb. 224 gegen den primären Strom verschoben, und zwar verspätet ist. Somit ist es auch gegen das durch die Polschuhe C verlaufende Feld verspätet, denn dieses hat nahezu die gleiche Phase wie der Strom in der Spule N , weil die Polschuhe C und der Eisenkern M aus unterteiltem Eisen bestehen.

Im ganzen betrachtet, hat man also ein von C nach D fortschreitendes Feld. Die Scheibe S (aus Kupfer oder Aluminium) muß sich daher drehen wie ein kurzgeschlossener Anker in einem Drehfelde, weil in ihr Ströme induziert werden, die das Fortschreiten des Feldes von C nach D zu verhindern suchen; und weil sie das nicht können, wird die Scheibe von dem fortschreitenden Felde mitgenommen¹⁾. Die massiven Polschuhe D können auch seitwärts vom Magnet angeordnet werden wie in Abb. 446.

Statt der sekundären Polschuhe aus massivem Eisen können auch solche aus unterteiltem Eisen angewendet werden, wenn sie von geschlossenen Ringen aus gut leitendem Metall umschlossen sind. Dann entstehen in diesen sekundäre Ströme, welche die Verschiebung des Feldes bewirken. Hierauf beruht einer der ältesten Elektrizitätszähler für Wechselstrom, nämlich der von Wright-Ferranti (Abb. 447), bei dem eine um die Achse A drehbare Kupfer- oder Aluminiumtrommel T unter der Wirkung der Pole M steht, auf denen die Kupferringe R sitzen. Infolgedessen sind die hinter diesen Ringen

¹⁾ Dieser Motor wird bei einer Regelungsvorrichtung (Wechselstrombogenlampe) von Schuckert (D. R. P. Nr. 73886) angewendet. Über den auf elektrodynamischer Schirmwirkung beruhenden Wechselstrommotor vgl. S. 307.

liegenden Teile magnetisch verspätet gegen die vor ihnen liegenden¹⁾.

Auf diese Weise kann man mittels mehrerer Kupferringe, die auf einen Eisenkern (Abb. 448) aufgeschoben sind, und der an einem Ende von einer Wechselstromspule magnetisiert wird, bewirken, daß in diesem Eisenkern ein magnetisches Feld entsteht, dessen Phase um so mehr verspätet ist, je weiter nach rechts man kommt. Es entsteht auf diese Weise eine räumlich fortschreitende magnetische Welle.

Das Zustandekommen dieser räumlichen magnetischen Phasenverschiebungen ist aber

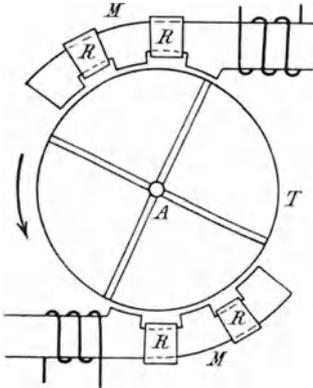


Abb. 447.



Abb. 448.

nur dadurch möglich, daß magnetische Streuung besteht, infolge deren ein Teil der Kraftlinien aus den Seitenflächen des Eisenkernes heraustreten kann. Würde keine Streuung bestehen, sondern würden alle von dem Strome in der Spule und von den sekundären Strömen erzeugten Kraftlinien durch den Eisenkern in seiner ganzen Länge verlaufen, so würde ein resultierendes Feld entstehen, das zwar gegen den Strom in der Spule wie in Abb. 224 verspätet, aber an allen Stellen gleich viel verspätet ist, so daß ein Phasenunterschied zwischen verschiedenen Stellen des ganzen Kraftlinienpfades nicht besteht²⁾.

Daher erhält man die stärkste Motorwirkung (Drehmoment), wenn die Streuung durch einen gewissen Luftzwischenraum zwischen primärem und sekundärem Polschuh wie in Abb. 445 und 446 begünstigt wird. Er darf natürlich nicht zu weit sein, weil sonst der magnetische Widerstand zu groß ist, und dann zu wenig Kraftlinien in den sekundären Polschuh gelangen.

¹⁾ Motoren, Elektrizitätszähler, Meßinstrumente, bei denen dieses Prinzip oder das im vorigen Paragraphen erläuterte angewendet wird, werden häufig als Ferraris-Motoren oder Ferraris-Instrumente bezeichnet. Das ist unberechtigt, denn noch bevor Ferraris die Wirkung phasenverschobener Ströme gefunden hatte, waren schon zwei Elektrizitätszähler nach obigem Prinzip bekannt nämlich der von Borel und der von Schallengerger. (Vgl. ETZ 1901, S. 743 und Fodor „Die elektr. Verbrauchsmesser“ Wien 1891, S. 96 u. 196.)

²⁾ Dasselbe gilt für einen massiven Eisenkörper außerhalb der Magnetisierungsspule. Da die Wirbelströme den inneren Teil des Feldes umschließen (Abb. 234), und aus den Seitenflächen Kraftlinien heraustreten, so hat auch da das magnetische Feld an verschiedenen Stellen verschiedene Phase.

Fünfzehntes Kapitel.

Der Durchgang der Elektrizität durch Nichtleiter.

232. Verschiedene Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Luft und sonstige die elektrischen Leiter umgebenden Gase absolute Isolatoren seien, d. h. daß sie die Elektrizität nicht im geringsten zu leiten vermögen, sondern daß sie nur in einen Zwangs- oder Spannungszustand versetzt werden, der bei ruhender Elektrizität durch die elektrischen, bei strömender Elektrizität außerdem noch durch die magnetischen Kraftlinien charakterisiert ist. Unter gewissen Umständen, die im folgenden behandelt werden, zeigen jedoch die gasförmigen Stoffe Leitungsvermögen, so daß ein elektrischer Strom durch sie hindurchgehen kann, der sich in verschiedener Weise bemerkbar macht.

Jene Grenzflächen, wo die Elektrizität aus einem metallischen oder elektrolytischen Leiter in das Gas ein- oder austritt, nennt man Elektroden, und man bezeichnet ebenso wie bei der Elektrolyse jene Elektrode, bei welcher der Strom in das Gas eintritt, also die, die mit dem positiven Pol der Stromquelle verbunden ist, als Anode, und jene, bei welcher der Strom das Gas verläßt, also die, die mit dem negativen Pol der Stromquelle verbunden ist, als Kathode. Die zwischen den Elektroden bestehende Potentialdifferenz (Spannung) bezeichnet man als Elektrodenspannung.

Je nachdem, ob ein Stromdurchgang durch Gas von selbst, d. h. nur unter dem Einfluß der Elektrodenspannung eintritt, oder ob er durch äußere Einflüsse (hohe Temperatur, Bestrahlung des Gases usw.) hervorgerufen wird, unterscheidet man selbständige und unselbständige Strömung der Elektrizität (§ 243 und ff.). Zur selbständigen Strömung gehört also z. B. die Funkenentladung.

Am auffälligsten macht sich die elektrische Strömung in Gasen durch Lichterscheinungen bemerkbar, und man unterscheidet in dieser Hinsicht: Glimmentladung, Büschelentladung, Funken-

entladung, Lichtbogen und, wenn eine Lichterscheinung nicht bemerkbar ist, dunkle Entladung. Die Entladung aus einer spitzen Elektrode bezeichnet man im besonderen noch als Spitzenentladung, die alle vorstehenden Erscheinungsformen haben kann.

Einen näheren Aufschluß über die Elektrizitätsleitung in Gasen erhielt man, als man darauf die Webersche Anschauung vom atomistischen Wesen der Elektrizität und die Clausiussche Anschauung über die elektrolytische Leitung anwandte. Diese bilden auch die Grundlage der Elektronentheorie.

Wir beginnen im folgenden mit dem Durchgang der Elektrizität durch verdünnte Gase in sogenannten Entladungsröhren, also mit einer selbständigen Strömung, weil sich hier die Eigentümlichkeiten am deutlichsten zeigen und freie Elektrizität auftritt.

233. Entladung in verdünnten Gasen.

Schließt man eine Glasröhre mit zwei Elektroden an eine Stromquelle an, die eine Spannung von mehreren Tausend Volt bei gleichbleibender Richtung liefert (Hochspannungsbatterie, Elektrisiermaschine, Funkeninduktor, der nur Öffnungsfunken zur Geltung bringt), und verbindet sie durch einen Ansatz mit einer Luftpumpe, so kann man die Abhängigkeit der Entladungsvorgänge von der Gasdichte bequem verfolgen. Hat die Luft in der Röhre noch die gewöhnliche Dichte (Atmosphärendruck), so geht kein Strom über, außer die Elektrodenspannung wird so hoch gesteigert, daß die gewöhnliche Funkenentladung eintritt. Wird die Luft durch Aus-

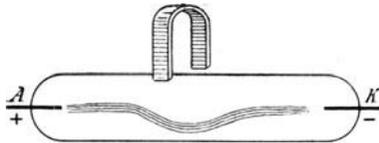


Abb. 449.

pumpen soweit verdünnt, daß der Druck auf etwa 40 mm Quecksilbersäule sinkt, so geht schon bei wesentlich kleinerer Spannung eine Entladung in Form eines dünnen leuchtenden Fadens über. Mit weiter abnehmender Dichte wird der Faden immer breiter und

erfüllt schließlich fast den ganzen Querschnitt der Röhre. Man hat jetzt (bei etwa 5 bis 3 mm Druck) das bläuliche Licht der Geißlerischen¹⁾ Röhren, wie es zuerst von Plücker beobachtet und studiert wurde. Ist statt Luft ein anderes Gas in der Röhre enthalten, so hat das Licht eine etwas andere Farbe. Betrachtet man es durch ein Spektroskop, so sieht man das Spektrum des betreffenden Gases. Diese zwischen den beiden Elektroden gleichmäßig verlaufende Lichtsäule hat alle Eigenschaften eines gewöhnlichen elektrischen Stromes in einem leicht biegsamen Leiter. Bringt man z. B. einen Magnet so in die Nähe der Röhre, daß sie von seinen Kraftlinien gekreuzt

¹⁾ Geißler war der Glasbläser, der die Röhren nach den Angaben Plückers anfertigte.

wird (Abb. 449), so wird die Lichtsäule derart ausgebaucht, daß die Krümmungsebene senkrecht zu den Kraftlinien steht gemäß § 85. Wird die eine Hälfte eines Stabmagnetes in ein Glasgefäß (Abb. 450) eingeschlossen, in welchem die untere Elektrode den Stab ringförmig umschließt, und wird nun die Luft ausgepumpt, so kreist der zwischen den beiden Elektroden verlaufende Lichtstreifen beständig um den Magnet. Ebenso wie nach dem Biot-Savartschen Gesetz (§ 78) jedes Stück eines stromführenden Leiters senkrecht zu der durch den Magnetpol und den Leiter gelegten Ebene abgestoßen wird, so erfährt auch hier der Lichtstreifen eine solche Abstoßung.

Wird die Luft weiter verdünnt, so erhält man bei etwa 0,1 mm Druck ein wesentlich anderes Bild der Entladung (Abb. 451 und 452). Das Licht erfüllt nicht mehr die ganze Länge der Röhre, sondern in der Nähe der Kathode *K* ist es von einem dunklen Raum unterbrochen, der um so länger ist, je verdünnter das Gas ist. Man unterscheidet dann folgende Teile. Von der Anode bis etwa zur Mitte der Röhre (*a* bis *b*) zeigt sich eine rötliche Lichtsäule, zuweilen mit mehreren deutlichen Schichten (Abb. 451), zuweilen ohne diese (Abb. 452), die man als positive Lichtsäule oder positives Licht schlechtweg bezeichnet. Dann folgt der dunkle Raum (zwischen *b* und *c*), auch Faradayscher Dunkelraum genannt, der sich bis in die Nähe der Kathode erstreckt. An der Kathode befindet sich das negative Glimm-

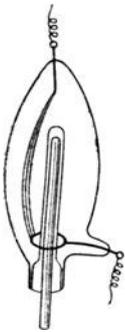


Abb. 450.



Abb. 451.

licht (*c* bis *d*), an dem sich drei Schichten unterscheiden lassen: unmittelbar auf der Kathodenoberfläche sitzt eine dünne Schicht rötlich gelben Lichtes, das als erste Kathodenschicht bezeichnet wird. Darauf folgt eine dunkle Schicht, der sogenannte dunkle Kathodenraum, und darauf folgt die zweite leuchtende Schicht, die als zweite Kathodenschicht oder als Glimmschicht bezeichnet wird, und die sich allmählich in den Faradayschen Dunkelraum verliert.

Läßt man die Entladung längere Zeit durch eine solche Röhre gehen, so wird die anfangs glatte Kathode rau, und die benachbarte Glaswand überzieht sich mit einem feinen Belag. Daraus geht hervor, daß die Kathode durch die Entladung zerstäubt wird.

Ist die Kathode groß genug, um eine größere Ausbreitung des Glimmlichtes zu ermöglichen, so nimmt der von ihm bedeckte Teil der Kathodenoberfläche mit der Stromstärke zu, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Gasdruck konstant ist. Diese Eigen-

schaft wird zur Darstellung der Wellenform von Wechselströmen benützt (§ 290, IV). Wird hingegen Stromstärke und Temperatur konstant gehalten, so ist die bedeckte Fläche dem Gasdruck umgekehrt proportional.

Wird die Luft in der Röhre noch weiter ausgepumpt, so verlängert sich das negative Glimmlicht, während das positive Licht zurücktritt und der Dunkelraum immer länger wird. Indem das positive Licht schließlich fast ganz verschwindet (bei etwa 0,01 mm Druck), breiten sich von der Kathode schwach bläuliche, gradlinige Strahlen aus, die dort, wo sie auf die Glaswand treffen, je nach der Glassorte ein grünliches oder bläuliches Fluoreszenzlicht¹⁾ hervorrufen. Es sind dies die von Plücker entdeckten und von Hittorf studierten Kathodenstrahlen. Daher werden Röhren mit so geringer Gasdichte als Hittorfsche Röhren bezeichnet.

Beobachtet man während des fortgesetzten Auspumpens der Röhre die Elektrodenspannung, d. h. jene Klemmenspannung, die notwendig ist, um die beschriebenen Entladungserscheinungen hervorzubringen, so findet man, daß sie bis zu einem geringsten Wert — beim gleichmäßigen Geißlerschen Licht — abnimmt und von da an wieder steigt, und zwar um so rascher, je geringer der Druck wird.

234. Spannungsgefälle in Entladungsröhren.

Längs eines linearen Leiters AC (Abb. 62) von gleichmäßigem Widerstand ändert sich das Potential gleichmäßig, so daß der Verlauf des Potentials durch eine gerade Linie FC dargestellt wird, wobei $AF = E$ die Potentialdifferenz oder Spannung zwischen den Punkten A C bedeutet. Den Spannungsabfall auf der Längeneinheit des Leiters bezeichnet man als Spannungsgefälle oder Potentialgradient. Unter der obigen Voraussetzung, daß der Leiter gleichmäßigen Widerstand hat, ist das Spannungsgefälle an allen Stellen des Leiters dasselbe, und zwar gleich dem Verhältnis $\frac{E}{AC}$.

In solchen Leitern aber, wo der Widerstand nicht gleichmäßig ist, hat das Spannungsgefälle an verschiedenen Stellen verschiedenen Wert. Dies ist der Fall bei allen Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas.

In Abb. 452 stellt die Kurve GH den Verlauf des Potentials längs einer Entladungsröhre von gleichmäßigem Querschnitt dar, und zwar bei der darunter dargestellten Entladungsform. DG ist gleich der an die Klemmen der Röhre angelegten Klemmenspannung E . Der Verlauf des Potentials ist dadurch festgestellt worden, daß an verschiedenen Stellen der Röhre Sonden aus dünnem Platindraht eingeschmolzen wurden, so daß die Spannung zwischen diesen und den

¹⁾ Bei leicht schmelzbarem, thüringischem Natron-Glas ist das Fluoreszenzlicht grünlich, beim schwer schmelzbaren englischen Kali-Glas ist es bläulich.

Elektroden gemessen werden konnte. Wie man sieht, ist der Spannungsabfall auf einem kurzen Stück unmittelbar an der Kathode und unmittelbar an der Anode sehr groß, und zwar an jener noch beträchtlich größer als an dieser. Dagegen ist er auf dem ganzen dazwischenliegenden Teil der Röhre klein und insbesondere im negativen Glimmlicht verschwindend klein, da die Potentialkurve hier nahezu parallel zur Grundlinie verläuft. Der durch seine Größe auffallende Spannungsabfall an der Kathode — kurz Kathodenfall genannt — findet statt zwischen der Kathode und einem Punkt der negativen Glimmschicht, d. h. in der ersten Kathodenschicht und im dunklen Kathodenraum.

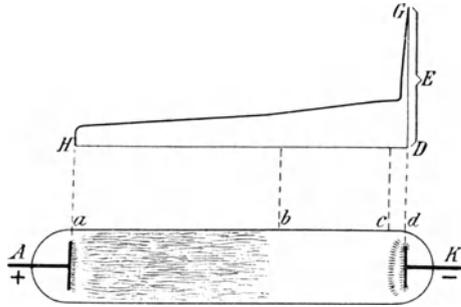


Abb. 452.

Hinsichtlich der Abhängigkeit des Kathodenfalles von den Bestimmungsgrößen ist zu unterscheiden zwischen normalem und abnormalem Kathodenfall. Der erstere besteht, solange die Kathode noch nicht ganz mit Glimmlicht bedeckt ist, der letztere, wenn sie bereits ganz mit Glimmlicht bedeckt ist, so daß sich letzteres auch bei starker Steigerung der Elektrodenspannung und Stromstärke auf der Kathodenoberfläche nicht weiter ausbreiten kann. Der normale Kathodenfall ist eine von der Stromstärke und Gasdichte unabhängige; dagegen der Art des Gases und der Kathode eigentümliche Konstante. So beträgt er z. B. bei Platin in Wasserstoff 300 V., in Sauerstoff 270 V., in Stickstoff 230 V., in Ammoniak 480 V. Dagegen bei Magnesium in Stickstoff 207 V., bei Kalium in Stickstoff 170 V.

Der abnormale Kathodenfall nimmt mit wachsender Stromstärke und mit abnehmender Gasdichte zu.

Der Spannungsabfall unmittelbar an der Anode — kurz Anodenfall genannt — liegt in der Regel zwischen 20 und 40 V. Er hängt von der Art des Gases und der Anode, sowie von der Gasdichte und Stromstärke ab.

Die Summe aus Kathodenfall und Anodenfall gibt jene Spannung, die mindestens notwendig ist, um eine Entladung in dem betreffenden Gas, zwischen den betreffenden Elektroden aufrecht zu erhalten (Minimumspannung), selbst wenn diese einander so nahe sind, daß nur die ersten Schichten des negativen Glimmlichtes und des positiven Lichtes möglich sind. Bei einem größeren Abstand der Elektroden kommt hierzu noch der Spannungsabfall auf dem dazwischenliegenden Teil, der um so größer ist, je größer der Elektrodenabstand

ist. Die ganze Elektrodenspannung setzt sich also aus einem konstanten und einem veränderlichen Teil zusammen.

Ist der Abstand der Elektroden kleiner als die erste Kathodenschicht und der dunkle Kathodenraum, so daß die Anode in diesen hineinragt, so tritt ein Elektrizitätsübergang schon bei kleinerer Spannung als den oben angegebenen Werten ein.

235. Die Eigenschaften der Kathodenstrahlen.

Außer in der Glaswand der Röhre, in der die Kathodenstrahlen erzeugt werden (§ 233), rufen sie auch in zahlreichen anderen Stoffen, die in eine solche Röhre eingeschlossen sind, zum Teil sehr lebhaftes, verschiedenfarbiges Fluoreszenzlicht hervor. Sie werden auch nur dadurch deutlich sichtbar, denn das bläuliche Licht im Gas selbst, das in § 233 erwähnt wurde, ist sehr schwach.

Ihre wichtigste Eigenschaft, wodurch sie im Gegensatz zu den anderen Entladungserscheinungen bei größerer Gasdichte stehen, ist die, daß sie senkrecht von der Kathodenoberfläche ausgehen und sich nur geradlinig fortpflanzen, wenn nicht äußere Störungen hinzutreten. Diese geradlinige Fortpflanzung hat zur Folge, daß sie Schatten werfen wie die Lichtstrahlen. Bringt man einen undurchlässigen Körper, z. B. ein Kreuz aus Metall (Abb. 453) in den Weg der Kathoden-



Abb. 453.

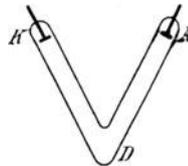


Abb. 454.

strahlen, so zeigt sich der Schatten des Kreuzes auf der fluoreszierenden Glaswand gegenüber der Kathode. Dagegen würde sich das negative Glimmlicht und das positive Licht um die Ränder des Kreuzes herum ausbreiten. Noch auffälliger zeigt sich die geradlinige Fortpflanzung der Kathodenstrahlen in einer winklig gebogenen Röhre (Abb. 454). Ist diese noch nicht soweit ausgepumpt, daß Kathodenstrahlen auftreten, so verläuft die leuchtende Entladung im Weg der Röhre um die Ecke herum. Wenn aber Kathodenstrahlen auftreten, so breiten sich diese von der Kathode *K* nur bis zu der gegenüberliegenden Stelle *D* der Glaswand aus, wo sie das Fluoreszenzlicht hervorrufen.

Die Kathodenstrahlen erwärmen jenen Teil eines Körpers, auf den sie auffallen. Bei genügend starker Entladung werden die von ihnen getroffenen Teile der Glaswand der Röhre so heiß, daß das

Glas weich wird und von dem äußeren Luftdruck eingedrückt wird. Ein von den Kathodenstrahlen getroffenes Platinblech im Innern der Röhre kann zum Glühen gebracht werden¹⁾.

Die Kathodenstrahlen vermögen auch mechanische Kräfte auszuüben. Bringt man ein leicht drehbares Rädchen mit Schaufeln aus Glimmerplättchen derart in eine weite Röhre (Abb. 455), daß die Kathodenstrahlen nur die oberen Schaufeln treffen, so dreht sich das Rädchen.



Abb. 455.

Aus diesen Erscheinungen kam Crookes zu der Anschauung, daß die Kathodenstrahlen aus fortgeschleuderten Teilchen der Kathode bestehen, die aber noch bedeutend feiner als im gasförmigen Zustande sind. Er nahm an, daß hier ein vierter Aggregatzustand vorhanden sei und bezeichnet ihn als strahlende Materie. Wie wir später (§ 237) sehen werden, ist diese Anschauung nicht weit von der jetzt herrschenden entfernt.

Wie schon Hittorf zeigte, werden die Kathodenstrahlen von einem Magnet sehr stark beeinflußt. Am deutlichsten läßt sich das durch die in Abb. 456 dargestellte Röhre zeigen. Vor der Kathode befindet sich ein Glimmerschirm mit einem schmalen Spalt, so daß von den Kathodenstrahlen nur ein schmales Bündel hindurchgelassen wird. In der Längsrichtung der Röhre befindet sich eine Glimmerwand, die mit einem fluoreszierenden Stoff bestrichen ist, so daß darauf das aus dem Spalt auftretende Kathodenstrahlbündel als geradliniger Lichtstreifen sichtbar wird. Wird nun ein Magnet so in die Nähe gebracht, daß die Kraftlinien senkrecht zu dem Streifen und zur Glimmerwand verlaufen, so wird der Streifen, je nach der Richtung der Kraftlinien, nach oben oder nach unten abgelenkt. Nach der Ablenkung behält der Strahl die letzt erhaltene Richtung bei, wie ein Stab, der an einem Ende befestigt ist und an einer Stelle gebogen wird. Es besteht mithin ein Unterschied gegenüber der magnetischen Beeinflussung, welche ein bei größerer Gasdichte auftretender Entladungsstreifen (Geißlersche Röhre Abb. 449) oder ein gewöhnlicher Lichtbogen (§ 85) erfährt. Dieser wird durch das magnetische Feld ausgebuchtet wie ein an beiden Enden befestigtes elastisches Band.

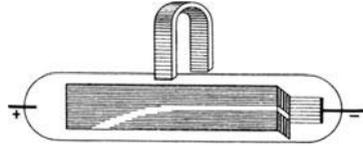


Abb. 456.

¹⁾ Die Kathodenstrahlen werden von allen festen und flüssigen Stoffen sehr stark absorbiert, selbst von der dünnsten Glaswand, so daß es nicht möglich ist, ihre Existenz außerhalb der Glasröhre, in der sie erzeugt wurden, nachzuweisen. Nur durch ein äußerst dünnes Metallplättchen, das in die Glaswand eingeschmolzen ist (Lenardsches Fenster), gehen sie in ganz geringer Stärke hindurch.

Auch durch die elektrischen Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes werden die Kathodenstrahlen abgelenkt, und zwar je nach der Richtung der Kraftlinien, in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung. Durch elektrometrische Messung wurde festgestellt, daß die Kathodenstrahlen negative Elektrizität mit sich führen (§ 239). Daraus erklärt sich die Ablenkung durch ein elektrisches Feld.

Die merkwürdigste Eigenschaft der Kathodenstrahlen ist die im folgenden beschriebene Erzeugung einer anderen Strahlengattung, der Röntgenstrahlen.

Es ist bereits gelungen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen zu bestimmen, und da hat sich ergeben, daß diese Geschwindigkeit unter sonst gleichen Umständen um so größer ist, je größer die Elektrodenspannung ist; und weil diese (wenn bereits Kathodenstrahlen vorhanden sind) mit abnehmendem Druck zunimmt (§ 233), so nimmt die Geschwindigkeit mit abnehmendem Druck zu. Das erklärt sich daraus, daß der Bewegungswiderstand um so geringer ist, je dünner die Luft ist. Die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen in solchen Röhren liegt zwischen $2 \cdot 10^8$ bis $6 \cdot 10^9$ cm, das ist $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{5}$ der Lichtgeschwindigkeit. Mittels anderer Methoden hat man aber auch Kathodenstrahlen von viel kleinerer Geschwindigkeit ($8 \cdot 10^7$ cm) erhalten.

236. Röntgenstrahlen.

Fallen die Kathodenstrahlen auf irgend einen festen Körper, z. B. die Glaswand der Röhre, in welcher sie erzeugt werden, oder auf eine zu diesem Zweck innerhalb der Röhre besonders angebrachte Metallplatte, so geht von den getroffenen Stellen eine neue Art unsichtbarer Strahlen aus, die zuerst von Röntgen im Jahre 1895 beobachtet und daher nach ihm benannt wurden. Sie haben wesentlich andere, zum Teil entgegengesetzte Eigenschaften wie die Kathodenstrahlen. Sie werden weder von einem magnetischen noch von einem elektrischen Felde beeinflußt; ferner werden sie von den meisten Stoffen nur wenig absorbiert, sondern mehr oder weniger von ihnen durchgelassen. Nur die allerdichtesten, wie insbesondere Blei und Platin, absorbieren die Röntgenstrahlen so stark, daß selbst durch dünne Platten nichts hindurchgeht. Im allgemeinen lassen die verschiedenen Stoffe Röntgenstrahlen um so besser hindurch, je geringer ihre Dichte ist. Bei gleicher Dichte ist daher die Durchlässigkeit nahezu gleich; so gehen sie z. B. durch Aluminium ebensogut hindurch wie durch Glas. Der Aggregatzustand eines Stoffes hat keinen Einfluß auf die Durchlässigkeit; so ist sie z. B. für Wasser und Eis fast gleich groß, aber für ersteres etwas geringer, weil es etwas dichter ist. Die größte Durchlässigkeit hat weiches Holz¹⁾.

¹⁾ Von größter Wichtigkeit ist diese Eigenschaft für die Heilkunde geworden. Da Knochen und Fleisch, sowie die verschiedenen Gewebe des menschlichen

Um möglichst starke Röntgenstrahlung zu erzielen, gibt man der Entladungsröhre die in Abb. 457 dargestellte Form, die Röntgenröhre genannt wird. Von der Kathode *K*, die ein Stück einer Kugelschale bildet, gehen die Kathodenstrahlen aus und bilden ein kegelförmiges Bündel, dessen Spitze auf jene Metallfläche *B* auffällt, von der die Röntgenstrahlen ausgehen sollen, und die man als Antikathode bezeichnet. Von dieser gehen nun die Röntgenstrahlen nach allen Richtungen geradlinig aus, wie z. B. die Lichtstrahlen von einem glühenden Metallblech. Man hat also ein Strahlungszentrum, das sich zur Herstellung scharfer Schattenrisse gut eignet. Da die Röntgenstrahlen im Glas ein schwach grünliches Fluoreszenzlicht hervorrufen, kann man den Kegelmündel des von der Antikathode ausgehenden Strahlenbündels erkennen. Die Antikathode *B* wird in der Regel mit der Anode leitend verbunden, so daß in Wirklichkeit beide Anoden sind.

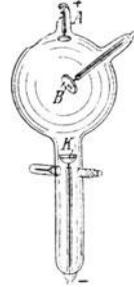


Abb. 457.

Das für Lichtstrahlen geltende Emissionsgesetz, daß nämlich jene Stoffe, welche das stärkste Absorptionsvermögen haben, auch die stärkste Ausstrahlung (Emission) zeigen, gilt auch für Röntgenstrahlen. Es wäre daher am besten, die Antikathode aus Blei herzustellen. Da Blei aber durch die auftreffenden Kathodenstrahlen leicht zum Schmelzen gebracht wird, und das nächstbeste Metall — Platin — zu teuer ist, verwendet man Nickel oder Kupfer, allenfalls mit einem Platinüberzug. Bei Röntgenröhren für besonders starke Wirkung werden aber selbst diese Metalle glühend. Man wendet daher sehr große Metallmassen oder sogar Wasserkühlung bei der Antikathode an.

Es ist bereits gelungen, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu bestimmen, und sie hat sich ungefähr gleich der Lichtgeschwindigkeit ergeben.

So wie es verschiedene Lichtstrahlen (Farben) gibt, die von einem und demselben Körper in verschiedene Stärke durchgelassen und absorbiert werden, so gibt es auch Röntgenstrahlen von verschiedenem Durchdringungsvermögen. Dieses ist um so größer, je größer die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ist, von denen

Körpers verschiedene Dichte und daher auch verschiedene Durchlässigkeit haben, so ist es möglich, Schattenbilder der Röntgenstrahlen zu erhalten, welche die Umrisse der Teile von verschiedener Durchlässigkeit zeigen. Da aber die Röntgenstrahlen vom Auge nicht wahrgenommen werden, so können diese Umrisse nur sichtbar gemacht werden, wenn man das Schattenbild auf eine photographische Platte fallen läßt und diese dann ebenso entwickelt wie eine belichtete Platte, denn auf die photographischen Platten wirken Röntgenstrahlen ebenso wie Lichtstrahlen. Die Röntgenstrahlen rufen auf manchen Stoffen, auf die sie auffallen, Fluoreszenzlicht hervor; am stärksten auf Bariumplatinzyanür. Bestreicht man damit einen Papierschild und stellt einen Körper zwischen diesen und eine Röntgenstrahlen aussendende Röhre, so sieht man in einem verdunkelten Raum das Schattenbild unmittelbar mit den Augen.

sie erzeugt werden. Und da letztere um so größer ist, je größer die Elektrodenspannung und je kleiner der Druck in der Röhre ist, so nimmt das Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen mit diesen Größen zu¹⁾.

237. Die Elektronentheorie.

Zur Erklärung der inneren Vorgänge beim Durchgang der Elektrizität durch Gase ist es notwendig, auf das Wesen der Elektrizität einzugehen. In § 1 wurde der ältesten Anschauung Erwähnung getan, wonach die Elektrizität ein außerordentlich leichter Stoff (Fluidum) ist. Diese Anschauung von der stofflichen Natur der Elektrizität war zu einfach, als daß sie dauernde Anerkennung gefunden hätte, trotzdem Wilhelm Weber und Hittorf der heutigen Auffassung schon ziemlich nahe gekommen waren. Da sich Wärme und Licht als nicht stofflicher Art, sondern als Energiezustände der materiellen Stoffe bzw. des „Äthers“ erwiesen hatten, wurde namentlich unter dem Einfluß von Maxwell und Hertz die energetische Hypothese aufgebaut, wonach Elektrizität und Magnetismus als Energiezustände des „Äthers“ aufzufassen seien. Besonders englische Physiker gingen darin so weit, daß sie den elektrischen Strom in metallischen Leitern nicht als einen Vorgang im Leiter selbst, sondern als Energieänderungen im Dielektrik betrachteten.

Nach den Ergebnissen der jüngsten Forschungen ist die Elektrizität zweifellos ein Stoff, wobei es aber auch heute noch unentschieden ist, ob es zwei Arten dieses Stoffes mit entgegengesetzten Eigenschaften (positiv und negativ) gibt, oder ob nur eine Art vorhanden ist, und die entgegengesetzte Ladung eines Körpers als ein Mangel dieses Stoffes gegenüber dem neutralen, unelektrischen Zustand zu betrachten sei. Doch neigt man gegenwärtig mehr der letzteren Ansicht zu.

So wie die chemischen Stoffe aus Atomen, als letzten unteilbaren Teilchen, zusammengesetzt sind, besteht auch die Elektrizität aus einzelnen kleinsten Teilchen, die man „Elementarquantum“ oder „Elektron“ nennt. Diese Anschauung vom atomistischen Wesen der Elektrizität ist von W. Weber bereits deutlich ausgesprochen worden. Der Fortschritt in dieser Anschauungsweise seit Weber besteht nur darin, daß man die Elektrizitätsmenge (Ladung) eines solchen Elektrons und seine Masse zahlenmäßig bestimmen konnte. Und zwar ist die Ladung eines negativen Elektrons ungefähr $3,5 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten oder $1,3 \cdot 10^{-19}$ Coulomb und seine Masse ungefähr gleich einem Zweitausendstel der Masse eines

¹⁾ Je größer das Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen ist, desto dunkler sind die von ihnen herrührenden Schattenbilder, und desto mehr verschwinden die Unterschiede. Röntgenröhren, welche solche Strahlen aussenden, werden als harte bezeichnet und umgekehrt.

Wasserstoffatoms, das sind $7,5 \cdot 10^{-28}$ Gramm. Diese Masse ist aber nicht durch Messung mittels der Wage, wie die eines chemischen Atoms, sondern auf indirektem Wege ermittelt worden, und zwar aus dem Grade der Ablenkung, die ein Kathodenstrahl in einem magnetischen und in einem elektrischen Felde von bekannter Stärke erfährt. Daher ist es noch zweifelhaft, ob diese Masse eines Elektrons eine wirkliche wie bei einem chemischen Atom ist oder eine scheinbare, elektrodynamische, die mit den wirklichen Massen nur das gemeinsam hat, daß sie Trägheit oder Beharrungsvermögen besitzt¹⁾. Daß man die nur auf indirektem Wege ermittelte Masse eines Elektrons nicht ohne weiteres als wirkliche Masse betrachten darf, hat seinen Grund darin, daß bei den chemischen Stoffen die Masse definiert ist durch das konstante Verhältnis von Kraft zu Beschleunigung $\left(m = \frac{F}{g}\right)$. Bei den Elektronen aber hat sich ergeben, daß dieses Verhältnis nicht konstant, sondern von der Geschwindigkeit abhängig ist.

Vergleicht man mit der oben angegebenen Ladung eines negativen Elektrons die am Schlusse des § 60 angegebene Ladung eines elektrolytischen Ions, sie findet man sie nahezu gleich. Diese Übereinstimmung ist keine zufällige, sondern es hat sich auch auf andere Weise ergeben, daß das hier erwähnte, Elektron genannte Elementarquantum dasselbe ist, das mit einem neutralen chemischen Atom (oder Atomgruppe) zusammen das elektrolytische Ion bildet.

Nach der kinetischen Gastheorie ist die Größe einer Molekel (als Kugel betrachtet) etwa ein Millionstel eines Millimeters. Nach den Berechnungen der Elektronentheorie ist die Größe eines Elektrons etwa ein Billionstel eines Millimeters²⁾.

¹⁾ Zunächst erscheint es unmöglich, sich ein Beharrungsvermögen denken zu können, das nicht an wirkliche chemische Masse gebunden ist. Wenn man aber bedenkt, daß das Beharrungsvermögen oder die Trägheit nichts anderes ist als eine Eigenschaft, welche besagt, daß ein Körper jeder Änderung seines Bewegungszustandes einen gewissen Widerstand entgegensetzt, so findet man, daß es etwas Ähnliches beim elektrischen Strom gibt. Nach dem Lenzschen Gesetze wird ja bei jeder Änderung eines Stromes ein solcher sekundärer Strom induziert, daß er diese Änderung zu hindern sucht. Es tritt also ein Widerstand (und zwar ein Bewegungswiderstand im mechanischen Sinne, nicht Ohmscher Widerstand) gegen diese Änderung auf, ohne daß der elektrische Strom aus wirklicher chemischer Masse besteht.

²⁾ Wer sich eingehender über diese Theorie, insbesondere über ihren Werdegang unterrichten will, sei auf den Vortrag von Lorentz (Leiden), ETZ 1905, Heft 24 und 25, und auf das Buch von Schmidt: „Die Kathodenstrahlen“, Braunschweig, 1907, verwiesen, ferner auf Righi „Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen“. Leipzig, 1905. Müller-Pouillet „Lehrbuch der Physik“ 10. Aufl. Bd. IV.

238. Der elektrische Strom in metallischen Leitern als Strom freier Elektronen.

Die Elektronen können frei beweglich oder an chemische Atome oder Atomgruppen gekettet vorkommen. Den elektrischen Strom in einem Metalle hat man sich vorzustellen als eine Strömung freier Elektronen, die durch die Zwischenräume zwischen den chemischen Atomen hindurchgeht. Hält man an dem Vorhandensein zweier Elektrizitätsarten fest, so geht ein Strom positiver Elektronen vom positiven zum negativen Pol und gleichzeitig ein Strom negativer Ionen in entgegengesetzter Richtung. Nimmt man aber an, daß es nur eine Art Elektrizität gibt, so ist es die negative, und der elektrische Strom besteht in einem Strom negativer Elektronen vom negativen zum positiven Pol.

Dem Durchströmen der Elektronen durch die Zwischenräume zwischen den Atomen steht natürlich ein gewisser Reibungswiderstand entgegen, der im Ohmschen Gesetz als Ohmscher Widerstand erscheint. Der dabei auftretende Reibungsverlust setzt sich in Wärme um; das ist die Joulesche oder Stromwärme.

Die Stromstärke ist definiert als die in einer Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Diese ist um so größer, je größer die Anzahl der Elektronen in einer Volumeneinheit ist und je schneller sie strömen. Da die magnetische Wirkung eines elektrischen Stromes seiner Stromstärke proportional ist, so gelangen wir zu dem Ergebnis, daß die magnetische Wirkung eines einzelnen bewegten Elektrons seiner Geschwindigkeit proportional ist. Das muß natürlich auch von jeder beliebigen Anzahl von Elektronen gelten, die z. B. die Ladung einer Kugel bilden. Wird also eine geladene Kugel in einer Kreisbahn bewegt, so muß sich eine magnetische Wirkung zeigen. Dieser Versuch ist zuerst von Rowland ausgeführt, später von anderen wiederholt worden, und hat gezeigt, daß tatsächlich eine magnetische Wirkung vorhanden ist. Das ist für die Elektronentheorie von größter Wichtigkeit; denn hätte sich ergeben, daß eine bewegte Ladung keine magnetische Wirkung ausübt, so hätte man nicht annehmen dürfen, daß der elektrische Strom aus bewegten elektrischen Teilchen besteht.

239. Kathodenstrahlen als freie negative Elektronen. Kanalstrahlen als freie positive Elektronen.

Die in § 235 beschriebenen Kathodenstrahlen sind nichts anderes als freie Elektronen, und zwar negative, die von der negativen Elektrode (Kathode) mit der dort angegebenen Geschwindigkeit grad-

linig fortgeschleudert werden¹⁾. Die Stromquelle, an die die Röhre angeschlossen ist, liefert die nötige Zufuhr an Elektronen. Daß es negative Elektronen sind, folgt erstens daraus, daß sie nur von der negativen Elektrode ausgehen, zweitens aus dem Sinne der Ablenkung durch ein magnetisches Feld, die so ist, als wenn beim Rowlandschen Versuch (§ 238) eine negative Ladung in derselben Richtung wie die Kathodenstrahlen bewegt wird, drittens aus dem Sinne der Ablenkung durch ein elektrostatisches Feld; viertens endlich läßt sich nachweisen, daß die Kathodenstrahlen negative Ladung mit sich führen, wenn man sie in geeigneter Weise auf einen Metallschirm auffallen läßt, der gegen andere Einflüsse geschützt ist. Der Schirm läßt sich auf diese Weise negativ.

Über andere Vorgänge, wo freie negative Elektronen auftreten, vgl. § 244.

Verwendet man in einer Hittorfschen Röhre als Kathode eine durchlochte oder geschlitzte Platte, die nicht am Ende, sondern etwa in der Mitte der Röhre angebracht ist (Abb. 458), so zeigt sich, daß von den Löchern Strahlen ausgehen, die nach oben verlaufen, also in entgegengesetzter Richtung wie die Kathodenstrahlen, die von derselben Elektrode ausgehen, aber nach unten verlaufen, weil die Anode unten ist. Es sind die sogenannten Kanalstrahlen, die von Goldstein zuerst bemerkt wurden. Sie werden ebenso wie die Kathodenstrahlen von allen Stoffen stark absorbiert und rufen ein Fluoreszenzlicht auf der Glaswand, auf die sie auffallen, hervor.

Da negative Ladungen niemals allein auftreten können, so liegt es nahe, die Kanalstrahlen als die notwendige positive Ergänzung zu den aus negativen Elektronen bestehenden Kathodenstrahlen, d. h. als positive Elektronen zu betrachten. Sie gehen ebenfalls von der Kathode aus, treten durch die Löcher der Kathode in den Raum hinter dieser ein und verlaufen in entgegengesetzter Richtung wie die Kathodenstrahlen. Tatsächlich werden sie durch ein magnetisches und durch ein elektrisches Feld in entgegengesetztem Sinne wie die Kathodenstrahlen abgelenkt, müssen also entgegengesetzte Ladung führen wie diese. Aus dem Grade dieser Ablenkungen hat sich das Verhältnis der Ladung ϵ zur Masse μ , also die spezifische

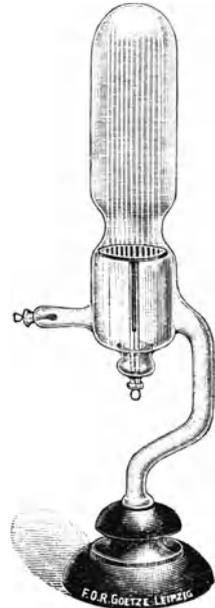


Abb. 458.

¹⁾ Diese Ansicht ist bereits von Hittorf ausgesprochen worden. Crookes hat sie in etwas phantastisches Gewand gekleidet (strahlende Materie als vierter Aggregatzustand). Unter dem Druck der energetischen Anschauungen ist jene wieder verlassen und in jüngster Zeit erst von Giese wieder aufgenommen worden.

Ladung $\frac{\epsilon}{\mu}$ der positiven Elektronen zahlenmäßig bestimmen lassen.

Dieses Verhältnis ergab sich etwa 2000 mal kleiner als für die negativen Elektronen. Daraus folgt, daß entweder die Masse μ des positiven Elektrons sehr viel größer oder die Ladung ϵ sehr viel kleiner als die des negativen Elektrons ist¹⁾. Diese Ungleichheit von Gebilden, die man als gleich erwarten sollte, hat zu der Annahme geführt, daß das positive Elektron überhaupt keine Ladung, sondern nur Masse, und das negative Elektron überhaupt keine Masse, sondern nur Ladung besitzt, d. h. daß es nur eine Art Elektrizität gibt, und zwar diejenige, die man seit jeher als negative Ladung bezeichnet, während das positive Elektron nichts anderes ist, als der aus chemischem Stoff bestehende Rest des Atoms.

In dieser Schlußfolgerung liegt natürlich noch kein Beweis. Für die Zwecke dieses Buches genügt aber auch das, was bis jetzt feststeht, nämlich daß es positive und negative Elektronen gibt, die frei vorkommen können, und daß die Ladung eines negativen Elektrons gleich der Ladung eines elektrolytischen, einwertigen Ions ist.

240. Radiumstrahlen.

Becquerel beobachtete, daß gewisse Stoffe ganz von selbst eine dem Auge unsichtbare Strahlung aussenden, die ähnlich den Röntgenstrahlen viele Stoffe zu durchdringen vermag. Aus der Pechblende gelang es dann, Stoffe zu gewinnen, die als Chlor- und Bromsalz eines neuen Elementes, des Radiums, zu betrachten sind. Das Radium selbst darzustellen, ist bis jetzt nicht gelungen.

Bringt man Radiumsalz in einem Tiegelchen (Abb. 459) in ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, so findet man, daß das Strahlenbündel in drei Teile zerlegt wird, die man als α -, β -, γ -Strahlen bezeichnet hat. Die γ -Strahlen verlaufen genau so, wie wenn das magnetische Feld nicht vorhanden ist; sie werden also magnetisch und, wie gleich bemerkt werden soll, auch elektrisch nicht beeinflusst; sie haben ähnliche Eigenschaften wie die Röntgenstrahlen. Die α - und β -Strahlen werden vom magnetischen Felde nach entgegengesetzten Seiten abgelenkt; die letzteren stärker als die ersteren. Die β -Strahlen haben ähnliche Eigenschaften wie die Kathodenstrahlen. Wie diese bestehen sie aus freien negativen Elektronen, die mit großer Geschwindigkeit vom Radiumsalz ausgeschleudert werden. Die α -Strahlen bestehen wie die Kanalstrahlen aus positiven Elektronen.

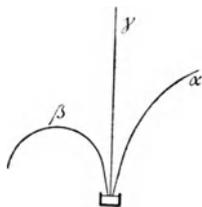


Abb. 459.

¹⁾ Die Ladung und die Masse des positiven Elektrons für sich allein zu bestimmen, wie beim negativen Elektron, ist bisher nicht gelungen.

Die wichtigste Eigenschaft der Radiumstrahlen ist die, daß die Luft, die von ihnen durchstrahlt wird, elektrisch leitend wird (vgl. § 243).

Eine wenn auch geringe Selbststrahlung wie die Radiumsalze zeigen die meisten Stoffe, auch die Luft, was für die selbständige Entladung der Elektrizität von Wichtigkeit ist (§ 245).

241. Elektrizitätsleitung in Gasen durch Ionisierung.

Wir wissen aus § 60, daß in einem elektrolytischen Leiter ein elektrischer Strom nur deshalb zustande kommt, weil ein Teil der Molekeln durch den Einfluß des Lösungsmittels in einen elektropositiven und einen elektronegativen Teil — Ionen — zerspalten (dissoziiert) ist, von denen sich die ersteren unter der Wirkung des zwischen den Elektroden bestehenden elektrischen Feldes nach der Kathode, die letzteren nach der Anode bewegen. Hier werden ihre Ladungen durch Aufnahme einer entgegengesetzten Ladung, die von der Elektrizitätsquelle zugeführt wird, neutralisiert. Gleichzeitig schlagen sich die neutralisierten Teilchen auf den Elektroden nieder oder gehen neue chemische Verbindungen ein.

Schon Hittorf hat die Meinung vertreten, daß es sich auch beim Durchgang der Elektrizität durch ein Gas um einen ähnlichen Vorgang handelt. Wir denken uns heute ein Gas aus neutralen Teilchen (Atomen oder Atomgruppen) bestehend, von denen jedes unter der Wirkung gewisser Kräfte in einen elektropositiven und einen elektronegativen Bestandteil — Gasionen — zerspalten werden kann. Jedes dieser Ionen kann seinen eigenen Weg einschlagen. Den Vorgang des Zersplattens nennt man Ionisierung des Gases. Befindet sich ein ionisierendes Gas zwischen zwei Elektroden, zwischen denen eine Potentialdifferenz besteht, so befindet sich das Gas in einem elektrischen Felde, durch dessen Kraftwirkung die positiven Ionen nach der Kathode, die negativen nach der Anode getrieben werden, wo ihre Ladungen durch Aufnahme einer entgegengesetzten Ladung, die von der Elektrizitätsquelle zugeführt wird, neutralisiert werden — wie bei der elektrolytischen Leitung. Man hat also einen durch das Gas gehenden elektrischen Strom. Hinsichtlich der Wirkung bedeutet also Ionisierung so viel wie: Das Gas wird leitend.

Zwischen der Stromleitung in einem elektrolytischen und in einem gasförmigen Leiter besteht folgender Unterschied. Eine elektrolytische Leitung tritt niemals bei chemisch einfachen, nichtmetallischen Stoffen ein, wie z. B. flüssigem Chlor oder flüssigem Stickstoff, sondern nur bei zusammengesetzten Stoffen, die unter dem Einfluß des Lösungsmittels (Wasser) dissoziiert sind. Die Dissoziation besteht darin, daß die Molekeln (nicht die Atome!) in einen positiven und einen negativen Teil zerfallen. Bei Gasen hingegen findet eine Elektrizitätsleitung auch in einheitlichen Stoffen, wie z. B. Chlor, Stickstoff, Quecksilberdampf usw. statt. Daraus folgt, daß der Zerfall

der Gasteilchen in ihre positiven und negativen Gasionen nicht im Molekel, sondern im Atom stattfindet. Die einfachste Annahme ist, daß jedes einwertige neutrale Atom, wie man es aus der Chemie kennt, aus einem positiven und negativen Teil besteht; die mehrwertigen aus entsprechend mehreren. Diese sind im Atom mit einer gewissen Kraft aneinandergelagert und bedürfen daher zu ihrer Trennung einer gewissen Kraft und eines gewissen Arbeitsaufwandes. Eine genaue Kenntnis darüber, woraus jeder dieser beiden Teile besteht, ob aus chemischer Masse und einem Elektron, oder nur aus dem entsprechenden Elektron (scheinbare Masse), haben wir zurzeit noch nicht. Man umgeht diese noch offene Frage in der Rede-weise am besten dadurch, daß man wie bei der elektrolytischen Leitung kurz von Ionen spricht oder von Gasionen, wenn man besonders hervorheben will, daß es sich nicht um einen elektrolytischen Leiter, sondern um ein Gas handelt.

242. Unselbständige und selbständige Elektrizitätsleitung in Gasen.

Ein weiterer Unterschied zwischen der Elektrizitätsleitung in einem Elektrolyten und in einem Gase besteht in folgendem. Während bei einem elektrolytischen Leiter der Zerfall der Molekeln in Ionen von selbst oder richtiger, nur unter dem Einfluß des Lösungsmittels stattfindet, und die Anzahl der getrennten Ionen so groß ist, daß auch bei der kleinsten Elektrodenspannung ein Strom auftritt, der dieser Spannung proportional ist, findet bei einem Gase eine Elektrizitätsleitung nur statt, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen Wert übersteigt, oder wenn gewisse andere Kräfte auf das Gas einwirken. Daraus folgt, daß das Gas im gewöhnlichen Zustande keine freien Ionen enthält, sondern daß die Zerspaltung der neutralen Gasatome erst durch die elektrische Kraft des eigenen, zwischen den Elektroden bestehenden elektrischen Feldes oder durch andere, äußere Kräfte veranlaßt werden muß. Im ersteren Falle spricht man von selbständiger Ionisierung und selbständiger elektrischer Strömung. Hierher gehört die Entladung in Geißler'schen und Hittorf'schen Röhren (§ 233), das Glimmlicht und Büschellicht (§ 246), die Funkenentladung (§ 247) und der Lichtbogen (§ 257). Im zweiten Falle spricht man von unselbständiger Ionisierung und unselbständiger elektrischer Strömung. Hierher gehört die Ionisierung eines Gases durch Bestrahlung mit Röntgenstrahlen oder mit Radiumstrahlen oder mit ultraviolettem Licht oder durch andere Einflüsse.

Zu dem am Schluß des vorigen Paragraphen angeführten Unterschiede zwischen der elektrischen Leitung in einem Elektrolyten und in einem Gase kommt nun noch folgender. In einem Elektrolyten beginnt der Strom schon bei der kleinsten Elektrodenspannung und seine Stärke i ist der Elektrodenspannung e proportional, wenig-

stens. so lange, als nicht die Erwärmung des Elektrolyten so groß wird, daß Verdampfung eintritt. Es ist also $i = \frac{e}{w}$. Stellt man die Beziehung zwischen Strom und Elektrodenspannung durch eine Schaulinie dar, so ergibt sich eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie (Abb. 460).

Bei der unselbständigen Strömung in einem Gase beginnt zwar der Strom ebenfalls schon bei der kleinsten Elektrodenspannung, aber seine Stärke ist nur bei kleinen Spannungen dieser proportional und nähert sich bei wachsender Spannung einem Grenzwerte, dem sogenannten Sättigungsstrom, der nicht überschritten wird. Das Ohmsche Gesetz gilt also hier nicht. Die Ursache dieser Erscheinung wird im folgenden Paragraphen behandelt. Als Schaulinie der Stromstärke ergibt sich die in Abb. 460 enthaltene. Sie geht ebenfalls durch den Nullpunkt, verläuft anfangs proportional, krümmt sich aber dann und verläuft schließlich parallel zur Abszissenachse.

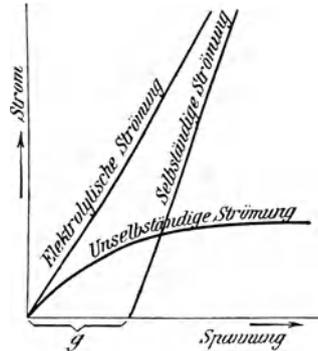


Abb. 460.

Bei der selbständigen Strömung in einem Gase kann ein Strom erst eintreten, wenn die Elektrodenspannung und daher die Stärke des elektrischen Feldes einen gewissen Wert (g) überschritten hat. Von diesem Werte an bleibt die Stromstärke der Zunahme der Spannung, also dem Werte $e - g$, proportional; mithin ist

$$i = \frac{e - g}{w}$$

Als Schaulinie der Stromstärke ergibt sich also eine Gerade, welche auf der Abszissenachse im Abstand g vom Nullpunkt ihren Anfang nimmt (Abb. 460).

Häufig besteht die selbständige Strömung nicht allein, sondern mit der unselbständigen gemischt; dann ist der Stromlauf nicht so einfach.

243. Ursachen der unselbständigen Strömung.

Die im vorigen erwähnten äußeren Einflüsse, welche eine Ionisierung des Gases bewirken und es dadurch leitend machen, sind folgende: Hohe Temperatur des Gases, und zwar sowohl wenn die hohe Temperatur durch einen anderen erhitzten Körper oder durch Verbrennung des betreffenden Gases selbst erzeugt wird. Darum zeigen brennende Flammen und die von ihnen ausgehenden Flammengase ein verhältnismäßig großes Leitungsvermögen. Ferner Röntgenstrahlen, Radiumstrahlen und ultraviolette Lichtstrahlen, wenn das betreffende Gas von ihnen durchstrahlt wird. Gleichzeitig findet immer auch eine Absorption dieser Strahlen

durch das Gas statt, so daß beide Vorgänge miteinander verknüpft erscheinen.

Nachdem die Spaltung eines Gasatoms unter einem der genannten Einflüsse stattgefunden hat, besitzt jedes Ion eine selbständige, von dem anderen unabhängige Bewegung, die im allgemeinen regellos erfolgt, aber sofort geordnet wird, wenn ein elektrisches Feld in dem Gase erzeugt wird. Dann suchen sich alle in der Richtung der Kraftlinien nach den Elektroden hin zu bewegen. Aber sowohl bei der regellosen wie bei der geordneten Bewegung kommt es vor, daß positive und negative Ionen zusammenstoßen und sich infolge der Anziehungskraft, die sie aufeinander ausüben, wieder zu einem neutralen Atom vereinigen. Es verschwinden also auf diese Weise wieder eine gewisse Anzahl der vorhandenen Ionen. Eine andere Anzahl aber gelangt bei der geordneten Bewegung an die Elektroden, wo sie durch die von der Stromquelle kommende Elektrizität neutralisiert werden, also ebenfalls verschwinden. Bezeichnet man die Anzahl der in der Zeiteinheit durch Ionisierung des Gases entstandenen Ionen mit a , die durch Zusammenstoß neutralisierten mit b , die an den Elektroden neutralisierten mit d , so ist die schließlich vorhandene Anzahl $a - b - d$. Ist die Elektrodenspannung so groß, daß die Anzahl d der an den Elektroden neutralisierten sehr groß ist gegenüber den durch Zusammenstoß neutralisierten (b), so kann b gegen d vernachlässigt werden und die Anzahl der in der Volumseinheit verbleibenden Ionen ist $a - d$. Da a nur von der Stärke der ionisierenden Ursache abhängig, von der Stromstärke aber unabhängig ist, hingegen d der Stromstärke proportional ist, so muß bei wachsender Stromstärke schließlich ein Zustand eintreten, wo $a = d$ ist, d. h. wo sämtliche durch Ionisierung erzeugten Ionen den Elektroden zugeführt werden. Damit ist der Sättigungsstrom erreicht und eine weitere Zunahme der Stromstärke unmöglich, wie sehr auch die Elektrodenspannung gesteigert werden mag, natürlich immer unter der Voraussetzung, daß die ionisierende Ursache konstant ist, und daß es sich um eine rein unselbständige Strömung handelt, bei welcher durch die Elektrodenspannung selbst keine Ionisierung stattfindet.

Dieselbe Überlegung hat auch für die elektrolytische Leitung Gültigkeit, da auch hier die Dissoziation nicht von der Spannung, sondern von einem äußeren Einfluß, dem Lösungsmittel abhängt. Daß man dabei trotzdem keinen Sättigungsstrom kennt, sondern daß die Stromstärke proportional der Spannung zunimmt, hat seinen Grund darin, daß die Anzahl der in der Zeiteinheit durch Dissoziation gebildeten Ionen sehr viel mal größer, ihre Wanderungsgeschwindigkeit aber sehr viel kleiner ist als bei Gasen, so daß d immer noch sehr viel kleiner ist als a . Praktisch kann man die Spannung nicht beliebig steigern, weil dann eine Verdampfung des Elektrolyten durch die Stromwärme eintritt. Vergleicht man Ströme von gleicher Stärke in einem Elektrolyten und in einem Gas mit-

einander, so besteht der erstere aus einer großen Anzahl von Ionen, die sich mit kleiner Geschwindigkeit zu den Elektroden hinbewegen, weil die Dichte und daher die Reibung einer Flüssigkeit sehr groß ist. Dagegen besteht der Strom in einem Gas aus einer kleinen Anzahl von Ionen, die sich mit großer Geschwindigkeit bewegen, weil die Dichte und die Reibung eines Gases gering ist. Die in der Zeiteinheit beförderten Ionen und Elektrizitätsmengen sind in beiden Fällen gleich. Aus dem Vorstehenden erklärt sich noch ein anderer Unterschied zwischen der elektrolytischen und der unselbständigen Strömung. Vergrößert man den Abstand der Elektroden in einem Elektrolyten, so nimmt bei gleichbleibender Spannung die Stromstärke ab. Das gilt auch beim Stromdurchgang durch Gase, solange die Stromstärke klein ist. Ist aber der Sättigungsstrom erreicht, so nimmt dieser mit dem Abstand der Elektroden zu. Das erklärt sich daraus, daß der Sättigungsstrom in einem Gase von der Anzahl a der erzeugten Ionen abhängt. Wird der Abstand der Elektroden doppelt so groß gemacht, so ist auch das Volumen und daher die Anzahl a der gesamten vorhandenen Ionen verdoppelt. Und weil für den Sättigungsstrom $d = a$ ist, so ist auch die Stromstärke doppelt so groß. Bei einem Elektrolyten aber, wo immer weit mehr Elektronen vorhanden sind, als den Elektroden zugeführt werden, hängt die Stromstärke von dem Reibungswiderstand der Ionen in der Flüssigkeit ab, folgt also dem Ohmschen Gesetz.

Der Potentialverlauf bei der unselbständigen Strömung zwischen zwei Elektroden ist im allgemeinen so wie Abb. 461 zeigt, die im besonderen für ein Gas bei Atmosphärendruck gilt, das von Röntgenstrahlen ionisiert wird. Wie man sieht, ist der Charakter des Potentialverlaufes ein

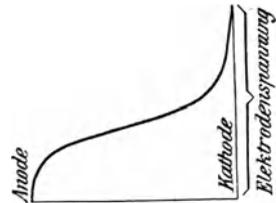


Abb. 461.

ähnlicher wie in Abb. 452 in einer Hittorfschen Röhre, indem auch hier der Spannungsabfall an den Elektroden bedeutend größer ist als in der Mitte, und zwar an der Kathode größer als an der Anode.

244. Elektrizitätszerstreuung.

Eine Art unselbständige elektrische Strömung ist die elektrische Zerstreung. Ladet man einen sehr gut isolierten Leiter mit einer negativen Ladung und läßt ihn unberührt stehen, so verschwindet die Ladung nach kürzerer oder längerer Zeit fast vollständig, und zwar um so schneller, in je hellerem Lichte sich der Leiter befindet. Wird er von ultraviolettem Lichte bestrahlt, so verschwindet die Ladung sofort.

Das Verschwinden der Ladung erfolgt dadurch, daß die negative Elektrizität in Form freier Elektronen in das umgebende Gas übertritt, weshalb man von Zerstreung der Elektrizität spricht, wenn

man den geladenen Leiter im Auge hat, oder von einer Elektrisierung des Gases, wenn man das umgebende Gas, das die Elektrizität in Form freier Elektronen aufnimmt, im Auge hat.

Die Schnelligkeit, mit der eine negative Ladung unter dem Einfluß des Lichtes verschwindet, d. h. die Stärke der lichtelektrischen Zerstreuung, ist um so größer, je blanker die Oberfläche des betreffenden Leiters ist, je heller das Licht und je kürzer seine Wellenlänge ist: außerdem hängt sie von dem Stoff des Leiters ab. Die stärkste Wirkung erfahren Kalium, Natrium, dann Manesium, Zink usw. Aber auch die Nichtleiter zeigen eine, wenn auch sehr geringe Zerstreuung¹⁾. Eine blanke Metalloberfläche, die längere Zeit der lichtelektrischen Wirkung gedient hat, verändert sich; sie wirkt dann schlechter (lichtelektrische Ermüdung). Röntgenstrahlen wirken in gleicher Weise wie Lichtstrahlen, aber schwächer.

Von der Ionisierung (§ 241) unterscheidet sich die Elektrisierung eines Gases dadurch, daß bei der Ionisierung die Elektronen aus den Gasatomen selbst durch Zerspaltung derselben entstehen, während bei der Elektrisierung die Elektronen aus einem anderen Körper in das Gas übertreten.

Bei den oben aufgezählten stark wirksamen Metallen findet die lichtelektrische Zerstreuung nicht nur dann statt, wenn sie eine negative Ladung haben, sondern auch im ungeladenen, neutralen Zustande senden sie unter dem Einfluß des ultravioletten Lichtes negative Elektronen aus. Naturgemäß müssen sie dann, wenn sie gut isoliert sind, eine überschüssige positive Ladung aufweisen, so daß man früher annahm, das Licht erzeuge hier positive Elektrizität.

Ein Übertritt freier Elektronen in das umgebende Gas, also Elektrisierung desselben, findet auch dann statt, wenn metallische Körper oder Kohle oder Metalloxyde stark erhitzt werden, und zwar beginnt die Ausstrahlung bei Rotglut und nimmt bis zu einem gewissen Grade mit der Temperatur zu. Ist die Erscheinung sehr stark, so erhält sie den Charakter einer Strahlung, und zwar ähnlich den Kathodenstrahlen, da es negative Elektronen sind. Wird ein solcher Körper als Kathode bei einem Entladungsvorgang benutzt, so findet dadurch eine bedeutende Herabsetzung des Kathodenfalles statt (von 200—300 V. auf 20 V.). Davon wird Anwendung gemacht bei einer Ventilröhre (§ 262 III).

Eine rasche Zerstreuung und zwar sowohl positiver wie negativer Elektrizität findet besonders dann statt, wenn der geladene Körper in eine Flamme gehalten wird. Die Flammengase nehmen die Elektrizität auf und führen sie fort.

¹⁾ Reiger, Annal. d. Phys. 17, S. 935, 1905.

245. Ursache der selbständigen Strömung.

Die selbständige elektrische Strömung durch ein Gas infolge selbständiger Ionisierung tritt ein, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen von der Art und der Dichte des Gases abhängigen Wert — die Anfangsspannung — überschreitet. Die zunächstliegende Erklärung wäre die, daß die elektrische Kraft des elektrischen Feldes jene Kraft, mit der die beiden Ionen eines neutralen Atomes aneinander gekettet sind, überwindet, indem der positive Bestandteil nach der einen, der negative nach der entgegengesetzten Seite gezogen wird. Die dazu nötige Kraft konnte aus anderen Erscheinungen berechnet werden; es zeigte sich aber, daß die selbständige Ionisierung schon bei sehr viel kleinerer Feldstärke eintritt. Als unmittelbare Ursache der selbständigen Ionisierung betrachtet man den Zusammenstoß freier Elektronen oder Ionen mit neutralen Atomen. In § 243 wurde erwähnt, daß beim Zusammenstoßen zweier ungleichnamiger Ionen die Bildung eines neuen neutralen Atomes stattfindet. Wenn aber ein sich frei bewegendes Ion auf ein neutrales Atom stößt, und seine lebendige Kraft groß genug ist, so zerstört es den Zusammenhang im Atom. Es entstehen so zwei neue Ionen oder Elektronen, und alle drei setzen nach dem Zusammenstoß ihren Weg selbständig fort. Die lebendige Kraft A eines Ions hängt bei gegebener Masse von seiner Geschwindigkeit v ab: $A = \frac{mv^2}{2}$. Die Geschwindigkeit erhält es dadurch, daß es von

der einen Elektrode angezogen, von der anderen abgestoßen wird, also durch die elektrische Kraft ξ zwischen den Elektroden. Da diese Kraft beständig auf das Ion einwirkt, so erhält es eine beschleunigte Bewegung. Infolgedessen ist seine Geschwindigkeit an jeder beliebigen Stelle seiner Bahn im Bereiche eines homogenen Feldes proportional der Quadratwurzel aus der Kraft ξ und dem seit Beginn der Bewegung ohne Hindernis zurückgelegten Wege l , wie bei jeder beschleunigten Bewegung; also $v = c\sqrt{\xi}l$. Mithin ist die lebendige Kraft eines Ions im Moment seines Zusammenstoßes mit einem Atom: $A = cm\xi l$. D. h. die lebendige Kraft ist proportional der elektrischen Kraft, ferner der Masse des Ions und seinem bis zum Zusammenstoße zurückgelegten Wege. Man nennt diesen Weg die freie Weglänge des Ions. Um also eine gewisse, zur Zerspaltung eines Atoms notwendige lebendige Kraft zu erreichen, muß das Ion bei gegebenem m und ξ , d. h. bei einer bestimmten durch die Art des Gases gegebenen Masse des Ions und bei einer bestimmten elektrischen Kraft eine gewisse freie Weglänge zurückgelegt haben. Diese notwendige Weglänge erreicht es um so öfter, je weniger Ionen und Atome in einer Volumseinheit des Gases enthalten sind, d. h. je dünner das Gas ist. Sind aber sehr viele Atome in der Volumseinheit enthalten, so stößt es häufig

mit Atomen zusammen, bevor es die erforderliche freie Weglänge zurückgelegt hat. Solche Zusammenstöße vermögen aber eine Zerspaltung der Atome nicht zu bewirken, sondern das aufprallende Elektron wird vom Atom zurückgeworfen, wie beim Zusammenstoß einer kleinen und einer großen elastischen Kugel.

Man erkennt aus dieser Überlegung den Grund, warum zur Entstehung einer selbständigen Entladung um so weniger Spannung erforderlich ist, je dünner das Gas ist. Bei sehr dünnen Gasen (unter 0,1 mm Druck) gilt dies aber nicht mehr, sondern da nimmt die zur Entladung erforderliche Anfangsspannung wieder zu, weil dann schon so wenig Atome vorhanden sind, daß die nötige Anzahl freier Ionen erst wieder durch größere elektrische Kraft erzielt wird.

Da nach jeder Zerspaltung eines Atoms durch Ionenstoß zwei neue Ionen entstehen, die sich sofort nach den Elektroden in Bewegung setzen und nun ebenfalls andere Atome durch ihre Stöße ionisieren, so erkennt man, daß die Ionenzahl lawinenartig zunimmt, und daß daher in unmeßbar kurzer Zeit nach Überschreitung der Anfangsspannung die der Spannung $e - g$ entsprechende Stromstärke

$i = \frac{e - g}{w}$ erreicht wird. Dennoch kann die Ionisierung nicht beliebig hoch anwachsen, weil bei der Bewegung der Ionen nach den Elektroden hin ungleichnamige Ionen zusammenstoßen und sich dadurch zu neuen Atomen zusammenschließen.

Das gilt für alle selbständigen Entladungen in Gasen von über 0,1 mm Druck oder genauer, solange keine Kathoden- und Kanalstrahlen auftreten. Unter 0,1 mm Druck ist das Gas so dünn, daß die Ionen so große Weglängen ohne Zusammenstoß mit Atomen oder anderen Ionen zurücklegen können, daß sie die in § 235 erwähnte kolossale Geschwindigkeit von $\frac{1}{15} - \frac{1}{5}$ der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Da die Bewegung jedes Ions so lange geradlinig ist, als nicht ein Zusammenstoß erfolgt, so ist der Gesamteindruck der einer geradlinigen Strahlung.

Die obige Erklärung der selbständigen Ionisierung durch Ionenstoß setzt voraus, daß vor Beginn der selbständigen Strömung bereits freie Ionen vorhanden sind. Tatsächlich ist dies immer und überall der Fall; und zwar rühren sie davon her, daß viele Stoffe in der Erde und wahrscheinlich alle atmosphärischen Gase radioaktiv sind, d. h. Radiumstrahlen aussenden, von denen wir aus § 240 wissen, daß sie eine Ionisierung der Gasatome bewirken. Dazu kommt noch die ionisierende Wirkung der ultravioletten Lichtstrahlen.

Zwei Bedingungen müssen also erfüllt sein, wenn eine selbständige Strömung zustande kommen soll; erstens muß wenigstens ein freies Ion in dem Felde zwischen den Elektroden vorhanden sein, zweitens muß die elektrische Kraft oder die Elektrodenspannung so groß sein, daß die vorhandenen Ionen auf der freien Weg-

länge hinreichende Geschwindigkeit erlangen, um durch ihren Stoß Atome zu zerspalten.

Man kann die zur Ionisierung durch Elektronenstoß erforderlichen Bedingungen (freie Weglänge, Minimumspannung, Art und Dichte des Gases) in einer Zahl zum Ausdruck bringen, wenn man auf die Potentialdifferenz (Spannung) zurückgeht, die ein freies Elektron durchlaufen muß, bis es die nötige Energie erhalten hat. Man nennt diese Spannung die Ionisierungsspannung. Frank und Hertz¹⁾ fanden dafür ungefähr bei Wasserstoff 11, bei Sauerstoff 9, bei Stickstoff 7,5 Volt.

Die äußeren Erscheinungen der selbständigen Entladung sind sehr mannigfaltig. Am auffälligsten sind die Lichterscheinung und das Geräusch. Lichterscheinungen treten auf, wenn nach dem geschilderten Vorgang die Zusammenstöße der Ionen und Atome sehr zahlreich sind, und die Stromstärke auf einen so hohen Wert anwächst, daß eine starke Erwärmung des leitenden Gases oder der Elektroden an der Antrittsstelle des Stromes eintritt. Je nach der Art der auftretenden Lichterscheinung lassen sich die selbständigen Strömungen einteilen in: dunkle Entladungen, Glimm- und Büschelentladungen, Funkenentladungen, Lichtbögen, die im folgenden einzeln behandelt werden.

Entsprechend den verschiedenen Erscheinungsformen ist auch das Spannungsgefälle verschieden. Alle aber haben das gemeinsam, daß der Abfall in unmittelbarer Nähe der Elektroden größer ist als an irgendeiner Stelle der Strombahn im Gase.

246. Dunkle Entladung, Glimmlicht, Büschellicht.

Verbindet man zwei spitze Elektroden, die einen Abstand von mehreren Zentimetern haben, mit einer Stromquelle und steigert die Spannung auf einige Tausend Volt, so bemerkt man noch keine Lichterscheinung. Dennoch findet bereits eine Entladung aus den Spitzen statt, die man mit genügend feinen Mitteln nachweisen kann. Häufig hört man schon ein leises zischendes Geräusch, und nach längerer Zeit bemerkt man einen stechenden Geruch, der von Ozon und Stickoxyden herrührt (§ 264). Solche Entladungen bezeichnet man als dunkle Entladungen. Steigert man die Spannung weiter, so bemerkt man an den Spitzen Lichterscheinungen, die je nach der Polarität der Spitze verschiedenes Aussehen haben, und die man als Glimmlicht und Büschellicht bezeichnet²⁾. Diese Entladungsformen sind die am längsten bekannten. Sie zeigen sich am auffälligsten an Elektrisiermaschinen, wenn sich an den Polen Spitzen befinden. An den negativen Spitzen zeigt sich ein wenig ausge-

¹⁾ Berichte d. Deutschen Physik. Gesellsch. 1913, Heft 2.

²⁾ Eine objektive Grenze zwischen dunkler Entladung und Glimmlicht besteht natürlich nicht, denn der Unterschied beruht nur auf unserer Sinneswahrnehmung und dem Helligkeitsgrad des Raumes.

breiteter Lichtpunkt, der ähnlichen Charakter hat wie das Licht an einer spitzen Elektrode in einer Geißlerschen Röhre. An den positiven Spitzen zeigt sich ein weit ausgebreitetes leuchtendes Büschel. Werden die Entladungen von Wechselstrom erzeugt, so kann das Auge die positive und negative Erscheinung nicht mehr getrennt wahrnehmen, sondern beide Elektroden scheinen gleichmäßig zu leuchten. Daß der Unterschied vorhanden ist, zeigt die durch eine stroboskopische Scheibe gemachte photographische Aufnahme an zwei parallelen Drähten Abb. 462. Hier ist links das positive, rechts das negative Glimmlicht, und dieses Bild wechselt mit jeder halben Periode¹⁾.

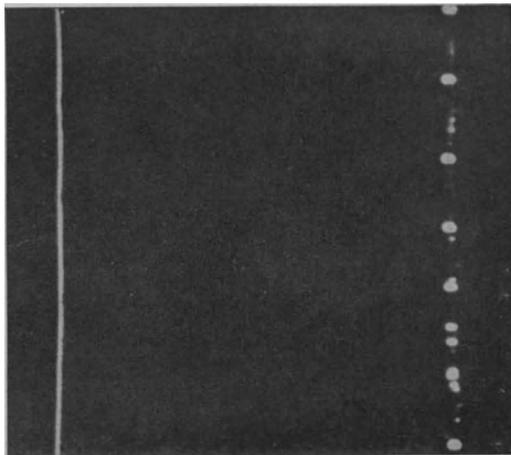


Abb. 462. Links positives, rechts negatives Glimmlicht an runden Drähten.

Bei Wechselstrom hängt der Eintritt der Entladung vom höchsten Spannungswert also vom Scheitelwert, nicht vom effektiven Wert ab.

Haben die Elektroden keine Spitzen und keine Kanten, sondern abgerundete Formen, so tritt das Glimm- oder Büschellicht nur auf, wenn die Spannung entsprechend höher ist, oder das Gas unter niedrigerem Druck steht.

Die Leuchtpunkte des negativen Glimmlichtes treten in jeder Halbwelle an denselben Stellen des Drahtes auf, nämlich an jenen, wo die Oberfläche Unebenheiten hat, wenn sie auch noch so klein sind.

Wie alle selbständigen Strömungen der Elektrizität treten auch diese Entladungsformen erst auf, wenn eine gewisse Spannung — die Anfangsspannung — überschritten wird. Diese hängt von der Art des Gases, dem Druck und der Temperatur, sowie von der Form der Elektroden ab. Sie liegt um so niedriger, je spitzer die

¹⁾ Peek, Proceed. Am. Inst. of El. Eng. Bd. 31, 1912.

Elektroden sind, weil das Potentialgefälle und daher auch die elektrische Kraft in unmittelbarer Nähe der Elektroden um so größer ist, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden ist (Spitzenwirkung § 20). Sie ist ferner um so niedriger, je kleiner der Druck und je höher die Temperatur ist.

Über die elektrischen Verluste durch Glimm- und Büschelentladungen vgl. § 250, über den Durchgang von Büschelentladungen durch feste Isolierstoffe vgl. § 251.

247. Äußeres Bild der Funkenentladungen. Vorentladungen. Intermittierende Entladungen.

Unter Funkenentladung versteht man jede kurz andauernde, von einer funkenartigen Lichterscheinung begleitete Entladung. Sie tritt im allgemeinen nur bei größerer Gasdichte (über 1 mm Quecksilbersäule) auf. Sie gehört zu den selbständigen Strömungen der Elektrizität (§ 245), weil sie erst eintritt, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen Wert — die Anfangsspannung der Funkenentladung — überschritten hat. Diese liegt immer höher als bei der Glimm- und Büschelentladung. In manchen Fällen aber, namentlich bei geringem Gasdruck oder bei kleinen Abständen der Elektroden, kann eine scharfe Grenze zwischen Büschel- und Funkenentladung nicht gezogen werden (vgl. Abb. 475).

Den Raum zwischen den Elektroden, in dem sich die Entladung abspielt, bezeichnet man als Funkenstrecke, den Abstand der Elektroden, bzw. jener Stellen, von denen die Entladung ausgeht, als Schlagweite.

Liefert die Stromquelle, an die die Elektroden angeschlossen sind, genügend Elektrizität (z. B. größere Dynamomaschinen, Transformatoren), so bleibt nach Eintritt der Funkenentladung ein dauernder Stromübergang — der Lichtbogen — bestehen, mit dem wir uns in § 257 u. f. beschäftigen. Abb. 353 zeigt das Bild eines Lichtbogens, der aus dem ersten Funkenübergang zwischen zwei Elektroden entstanden ist, die an einen 10 Kilowatt-Transformator bei 40000 V. angeschlossen waren. Fällt die Spannung nach dem ersten Übergang wegen mangelnder Elektrizitätszufuhr unter einen gewissen Wert — die Minimumspannung —, so hört die Entladung sofort wieder auf. Man erhält also nur Funken, wie dies bei der Entladung von Kondensatoren und bei Funkeninduktoren immer der Fall ist. Abb. 354 zeigt mehrere aufeinanderfolgende Funkenentladungen zwischen denselben Elektroden und bei derselben Spannung wie der Lichtbogen in Abb. 353. Während beim Lichtbogen die primäre Wicklung unmittelbar an eine Dynamomaschine von genügender Größe angeschlossen war, war in diesem Falle eine Drosselspule vorgeschaltet. Ihr induktiver Widerstand bewirkt schon beim ersten Stromübergang einen so großen Spannungsabfall, daß die Spannung sogleich wieder unter die Minimumspannung fällt. Nach dem Verlöschen des Funkens

steigt die Spannung wieder auf den anfänglichen Wert, es tritt eine neue Entladung ein und so fort. Dasselbe würde eintreten, wenn schon die Dynamomaschine und der Transformator zusammen einen so großen Spannungsabfall hätten, oder wenn eine Drosselspule von gleichem prozentualen Spannungsabfall im sekundären Stromkreis der Funkenstrecke vorgeschaltet wäre¹⁾. Bei sehr großem Wider-



Abb. 463. Vorentladungen ohne vollständigen Übergang.

stand im Stromkreis tritt manchmal schon infolge der vorausgehenden dunklen Entladung oder der Büschelentladung ein so großer Spannungsabfall auf, daß es überhaupt zu keiner Funkenentladung

kommt, wie Abb. 463 zeigt. Hier hat die Entladung dreimal hintereinander angesetzt, ohne daß es zu einem völligen Funkenübergang gekommen wäre²⁾.

In Abb. 464 gehen dem vollständigen Übergang fünf Entladungen voraus, von denen jede denselben Weg nimmt, aber ein Stück weiter



Abb. 464. Funkenentladung mit Vorentladungen.

reicht als die vorhergehende, bis endlich der vollständige Übergang stattfindet. Es haben also Vorentladungen stattgefunden, die dem vollständigen Übergang den Weg bahnen. Ist die zur Verfügung stehende Elektrizitätsmenge so gering, daß sie schon durch die Vorentladungen erschöpft wird, so kommt es überhaupt zu keinem vollständigen Übergang, wie Abb. 463 zeigt. Ihrem Wesen nach sind die Vorentladungen Glimm- und Büschelentladungen; sie zeigen auch die Eigentümlichkeit derselben, daß die von der positiven Elektrode ausgehenden weiter reichen als die von der negativen (vgl. Abb. 451

¹⁾ Bei der praktischen Verwendung von Hochspannungsapparaten in elektrischen Anlagen muß man wegen des geringen Spannungsabfalles der Stromerzeuger damit rechnen, daß jeder Funkenentladung ein Lichtbogen folgt, der einen völligen Kurzschluß bewirken kann.

²⁾ Abb. 463—465 aus dem „Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten“ XX von B. Walter. Es sind Aufnahmen auf bewegten photographischen Platten.

und 452). Besonders stark sind die Vorentladungen ausgeprägt bei Gleitfunken (§ 254), bei Funkenstrecken mit großer Kapazität (Platten) und bei langen Funkenstrecken unter hoher Spannung. Bei kurzen Funkenstrecken (unter 1 cm) treten sichtbare Vorentladungen nicht auf, sondern die Entladung erscheint gleich als Funken.

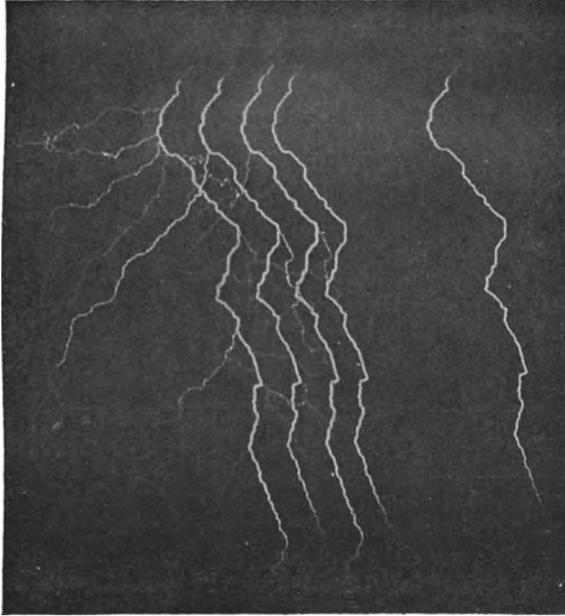


Abb. 465. Intermittierende Blitzentladung.

Abb. 465 zeigt eine auf bewegter Platte aufgenommene Blitzentladung und Abb. 466 die Entladung eines Funkeninduktors. Sie bestehen beide aus mehreren vollständigen Übergängen (Teilfunken; intermittierende Entladung). Solche entstehen, wenn die zur Entladung kommende Elektrizitätsmenge den Entladungsstellen nicht rasch genug zuströmen kann. Auf der Gewitterwolke ist die Elektrizität über eine große Fläche verteilt, deren Leitungswiderstand sehr groß ist. Beim Funkeninduktor verhindert der hohe Widerstand der sekundären Wicklung und ihre Kapazität, daß die ganze induzierte Elektrizitätsmenge sofort den Elektroden zuströmt. Daß es sich hier nicht um die Schwingungen einer oszillatori-

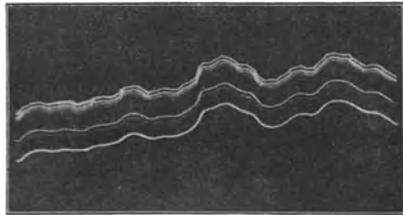


Abb. 466. Intermittierende Funkenentladung.

sehen Entladung handelt, zeigt ein Vergleich mit Abb. 326. Dort folgen die Halbwellen in genau gleichen Abständen, stetig abnehmend aufeinander. Übrigens war die Geschwindigkeit der bewegten Platte bei Abb. 466 viel zu klein, um elektrische Schwingungen wahrnehmbar zu machen, denn diese Teilentladungen folgen in zehntel bis hundertstel Sekunden aufeinander, während die oszillatorischen Entladungen aus Halbwellen von tausendstel bis millionstel Sekunden bestehen. Der Blitz (Abb. 465) hat auch Vorentladungen, die hier als Verästelungen nach unten auseinanderlaufen, weil die Entladung zwischen einem Punkte (Wolke) und einer großen Fläche (Erde) stattfindet. Daß es Vorentladungen sind, geht daraus hervor, daß sie am Beginn der Entladung (links) vorhanden sind, am Ende (rechts) aber nicht mehr. Daß die Teilentladungen alle in derselben Bahn verlaufen, erklärt sich daraus, daß jede vorausgehende eine Ionisierung der Luft zurückläßt, die für die folgende einen gut leitenden Weg darstellt. Folgt aber die nächste Entladung nicht rasch genug, so haben sich die Ionen schon zerstreut, und es muß ein neuer Weg gebahnt werden. Das ist dann keine Teilentladung der vorhergehenden, sondern eine neue, selbständige Funkenentladung, wie Abb. 354 mehrere solche zeigt.

Jede Teilentladung kann oszillatorisch oder aperiodisch sein; das hängt nur von Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand des Entladungskreises ab.

Die Funkenentladung durch einen festen Isolierstoff (Durchschlag) bedarf offenbar noch mehr der Vorbereitung des Weges durch Vorentladungen, als durch gasförmige und flüssige Isolierstoffe. Bevor es zu den mit *A* bezeichneten Durchschlägen der Stabilitplatte in Abb. 490 kam, gingen längere Zeit Büschelentladungen über die ganze Platte hinweg, sowie auch um den Rand der Platte herum zur anderen Elektrode wie in Abb. 488. Sie suchten also die ganze Platte ab nach solchen Stellen, wo sich größere Poren befinden. Nachdem die in diesen Poren enthaltene Luft genügend ionisiert war, kam es hier zum Durchschlag. Bei Abb. 490 war die Spannung nur um wenig höher als bei Abb. 488.

248. Die Schlagweite der Funkenentladung in Luft.

Die Schaulinien in Abb. 467 bis 469 stellen die Beziehung zwischen Schlagweite und Funkenspannung für gewöhnliche Luft bei verschiedenen Elektrodenformen dar. Auf der linken Seite stehen die Spannungen in effektiven Volt, auf der rechten Seite die Scheitelwerte (bei sinusförmiger Spannungswelle) also die eigentlichen Spannungswerte, die den Überschlag verursachen. Wie man sieht, besteht zwischen Schlagweite und Funkenspannung keine Proportionalität.

Diese Kurven sind mittels Transformatoren aufgenommen, wobei die sekundäre Spannung aus dem Übersetzungsverhältnis und der gemessenen primären Spannung berechnet wurde. Sie sind nicht

durch eine einzige Aufnahme an einem einzigen Transformator gewonnen worden, sondern durch Übereinanderlagerung mehrerer Aufnahmen mit verschiedenen Transformatoren. Die einzelnen Aufnahmen liefern nämlich keine so regelmäßigen Kurven, wie sie hier abgebildet sind, sondern sie haben irgendwo eine Einbuchtung, wie sie Abb. 470 zeigt. Und zwar tritt diese Einbuchtung bei verschiedenen Transformatoren an verschiedenen Stellen der Kurve, also bei ver-

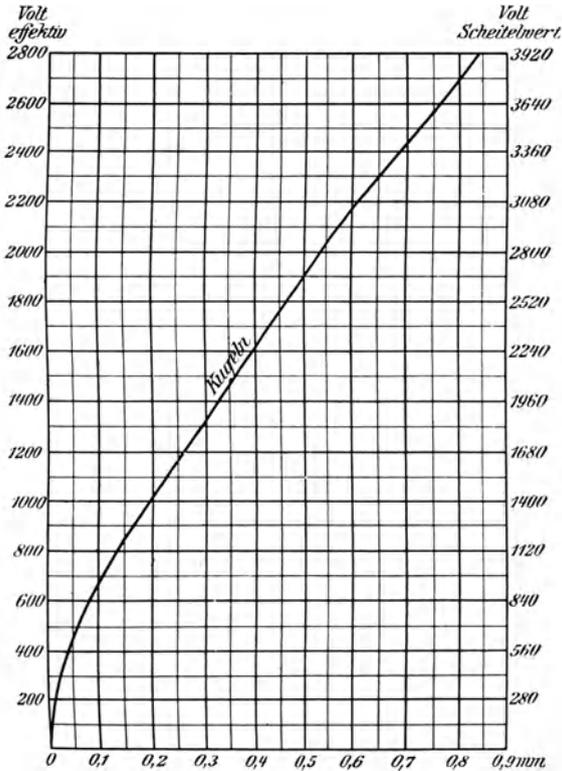


Abb. 467.

schiedenen Schlagweiten auf¹⁾. Daraus folgt, daß die Ursache dieser Erscheinung nicht in der Funkenstrecke, sondern im Transformator liegt. Offenbar macht sich hier der auf S. 380 erwähnte Einfluß der Eigenkapazität der Hochspannungswicklung bemerkbar.

Der äußerliche Zusammenhang zwischen Schlagweite und Funkenspannung ist zwar praktisch sehr wichtig; der innere Zusammenhang aber besteht zwischen Schlagweite und elektrischer Kraft

¹⁾ Es ist dies einer der Gründe, warum die öfter vorgeschlagene Spannungsmessung durch die Schlagweite der Funkenentladung unbrauchbar ist.

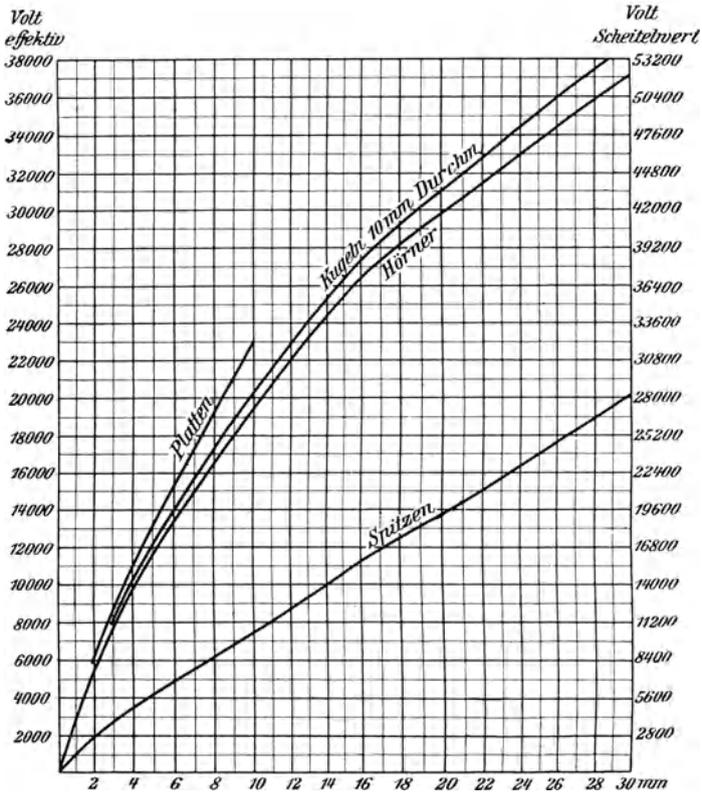


Abb. 468.

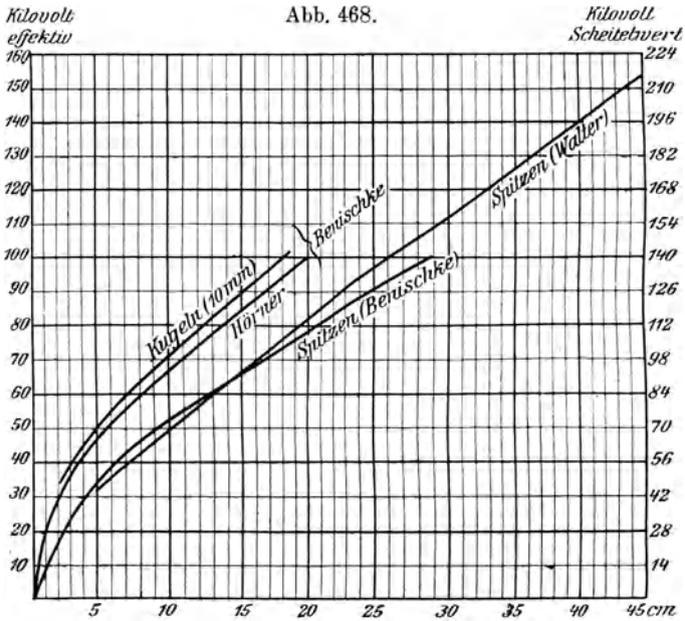


Abb. 469.

(Feldstärke) ξ , da von dieser die notwendige Ionisierung des Gases abhängt. Eine an allen Stellen gleiche elektrische Kraft herrscht in einem homogenen Felde, also zwischen parallelen Platten, oder zwischen Kugeln, deren Abstand klein ist gegen ihren Radius. Für diesen Fall zeigt Abb. 471 die Abhängigkeit der Schlagweite von der elektrischen Kraft ξ in elektrostatischen Einheiten nebst der Schlagweitenkurve, aus der ξ berechnet wurde¹⁾. Daraus ersieht man, daß eine um so kleinere elektrische Kraft zur Erzeugung des Funkens nötig ist, je länger die Schlagweite ist. Schließlich nähert sich die elektrische Kraft asymptotisch einem konstanten Werte. Das erklärt sich daraus, daß bei kurzen Schlagweiten nur ein kurzer Weg zur Verfügung steht, auf dem die freien Ionen die nötige lebendige Kraft zur Zerspaltung der Atome erlangen müssen.

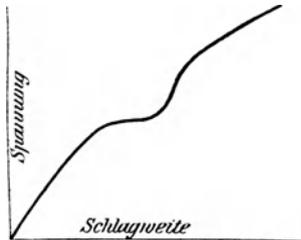


Abb. 470.

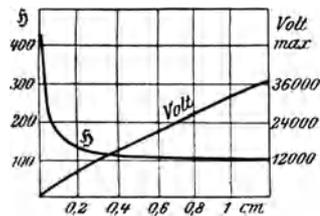


Abb. 471.

Daher muß die beschleunigende elektrische Kraft groß sein. Andererseits kann bei großen Schlagweiten die Geschwindigkeit der freien Ionen trotz dauernder Einwirkung der elektrischen Kraft nicht unbegrenzt anwachsen, weil der Bewegungswiderstand schneller (wahrscheinlich quadratisch) als die Geschwindigkeit wächst. Fallende Schneeflocken erhalten schon nach kurzer Weglänge eine gleichförmige Geschwindigkeit; ebenso ist es bei der Bewegung der Ionen. Aus diesem Grunde nähert sich mit wachsender Schlagweite die zur Erzeugung der Funkenentladung nötige elektrische Kraft einem konstanten Werte, und die in Abb. 468 und 469 enthaltenen Funkenspannungen gehen schließlich in nahezu gerade Linien über.

Bei gleicher Spannung ist die Kraftliniendichte und daher die elektrische Kraft um so größer, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden ist, d. h. je spitzer sie sind (§ 20). Daraus erklärt sich die aus Abb. 468 und 469 hervorgehende Tatsache, daß bei gleicher Spannung die Schlagweite um so kürzer ist, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden ist.

Die Dichte des Gases ist von starkem Einfluß auf die Schlagweite. Bei sehr kleinen Dichten kommt überhaupt kein Funken, sondern nur Glimm- oder Büschellicht zustande (§ 233). Für jene Dichten, wo eine deutliche Funkenentladung stattfindet, hat die

¹⁾ Schwedoff, Annal d. Phys. Bd. 19, S. 918, 1906.

Funkenspannung für alle Schlagweiten l und Gasdichten d , deren Produkt ld konstant ist, denselben Wert¹⁾.

Bei konstanter Schlagweite nimmt die zu einer Funkenentladung nötige Spannung (Durchschlagsfestigkeit) mit dem Druck, unter dem das Gas steht, zu (vgl. § 245), und zwar ungefähr proportional bis etwa 20 Atmosphären; dann wächst sie langsamer und scheint sich einem konstanten Wert zu nähern²⁾. Auch bei flüssigen Isolierstoffen wächst die Durchschlagsfestigkeit mit dem Druck.

¹⁾ Paschen, *Annal. d. Phys.*, Bd. 37, S. 69, 1889. Schwedoff ist es gelungen (am angegebenen Orte) auf Grund der in § 245 entwickelten Theorie der selbständigen Strömung eine Gleichung abzuleiten, welche die Beziehung zwischen Schlagweite l und Funkenspannung k in Volt darstellt, nämlich

$$k = \frac{0,0192 l}{1 + \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{l}{\alpha}}\right)} \text{ cm.}$$

Hier ist ε die Basis der natürl. Logar., $\alpha = 0,0041$, $\beta = 0,00022$. Genauer ist die Formel, wenn α aus folgender Beziehung berechnet wird

$$\alpha = 0,0043 \log \left(1 + \frac{l \delta}{0,0008}\right),$$

wobei δ das Verhältnis der herrschenden Gasdichte zur gewöhnlichen Luftdichte bedeutet. Für gewöhnlichen Atmosphärendruck ist also $\delta = 1$. Mit \log sind hier gemeine Logarithmen bezeichnet. Die Werte von α und β bzw. der erste Zahlenfaktor in der Formel für α ändern sich natürlich mit der Natur des Gases und der Elektrodenform. Die obigen Werte gelten für Luft und plattenförmige Elektroden und für Kugeln, deren Radius groß ist gegen ihren Abstand. Zur Ausrechnung dieser Werte dienten die in Abb. 471 dargestellten Messungen. Für $l = 0$ wird auch $k = 0$, d. h. zu einer unendlich kleinen Schlagweite ist nur eine unendlich kleine Spannung notwendig. Die Schaulinien in Abb. 468 streben auch wirklich dem Nullpunkt zu. Das scheint im Widerspruch zu stehen mit der in § 234 besprochenen Tatsache, wonach ein gewisser Spannungsabfall an der Anode und an der Kathode auftritt. Das gilt aber nur, wenn der Abstand der beiden Elektroden größer ist als die Summe aus der ersten Kathodenschicht und der ersten Anodenschicht, in denen jener Spannungsabfall liegt. Ist der Abstand kleiner, so daß die beiden Schichten teilweise zusammenfallen, so gelten auch jene Spannungsabfälle nicht mehr. Bei so kurzen Schlagweiten kann auch nicht mehr zwischen Glimmentladung und Funkenentladung unterschieden werden.

Für $l = \infty$ geht die obige Formel für k in eine lineare über, das entspricht auch dem Charakter der Schaulinien in Abb. 469, die sich mit wachsender Schlagweite einer geraden Linie nähern.

²⁾ Man hat daher die Anwendung stark gepreßter Gase (natürlich solcher, die nicht brennen und die Verbrennung nicht fördern, also z. B. Stickstoff) für Hochspannungstransformatoren, Schalter, Kondensatoren usw. öfter erwogen. Die Schwierigkeiten der Abdichtung der Gefäße sowie die Explosionsgefahr sind aber hindernd.

249. Beeinflussung der Funkenentladung durch Entladeverzögerung und Überspannung. Einfluß der Kapazität.

Häufig bemerkt man, daß beim Anlegen einer konstanten Spannung an die Elektroden die Funkenentladung erst nach einiger Zeit eintritt, oder daß trotz unveränderter Versuchsanordnung an einem Tage die Entladung eintritt, an einem andern nicht. Schließt man zwei Funkenstrecken *C* und *D* (Abb. 472), deren Länge wenig voneinander verschieden ist, an dieselbe Stromquelle an, so kann man durch Abdunkelung der kürzeren und Beleuchtung der längeren erreichen, daß an der längeren eher eine Funkenentladung eintritt als an der kürzeren.

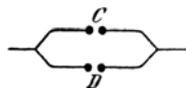


Abb. 472.

Diese Erscheinung hat Ähnlichkeit mit dem Siedeverzug beim Sieden von Flüssigkeiten, weshalb man sie als Entladeverzögerung bezeichnet. Die Erklärung ergibt sich daraus, daß eine Entladung nur dann zustande kommt, wenn bereits Ionen in dem Gas vorhanden sind, denen durch die elektrische Kraft eine solche Geschwindigkeit erteilt wird, daß sie durch ihren Stoß auf neutrale Atome neue Ionen bilden, bis das Gas genügendes Leitungsvermögen erlangt hat. Wäre der Fall möglich, daß kein einziges freies Ion in dem Gas vorhanden ist, so könnte man die Elektrodenspannung beliebig erhöhen, ohne daß eine Entladung zustande käme. Dieser Fall ist praktisch nicht möglich, weil, wie in § 245 erwähnt, in jedem Gas eine Selbstionisierung besteht. Eine gewisse Zeit ist aber immerhin erforderlich, bis unter dem Einfluß des elektrischen Feldes genügend Ionen entstanden sind, um eine Entladung zu ermöglichen.

Befindet sich die negative Elektrode im hellen Licht, so treten aus ihr freie Elektronen in das Gas über (§ 244). Dann geht die weitere Ionisierung durch die Stöße dieser Elektronen in so kurzer Zeit vor sich, daß die Entladung anscheinend sofort eintritt. Befinden sich aber die Elektroden im Dunkeln und entstehen auch aus anderen Ursachen nicht genügend freie Elektronen, so kann es minutenlang dauern, bis es zu einer Entladung kommt, oder auch gar nicht, wenn die Elektrodenspannung nur sehr wenig über der zur Ionisierung nötigen Anfangsspannung liegt. Durch Bestrahlung der negativen Elektrode mit intensivem Licht, insbesondere ultraviolettem, oder mit Röntgenstrahlen oder mit Radiumstrahlen wird der Entladeverzögerung sofort aufgehoben. Die Auslösung des Funkens wird auch durch elektrische Wellen, die auf die Funkenstrecke aufreffen, bewirkt oder beschleunigt (vgl. § 209).

Der Entladeverzögerung und die Umstände, die seine Aufhebung bewirken, haben zur Folge, daß man nur unter besonderen Vorsichtsmaßregeln, insbesondere nur bei genügender Helligkeit, einiger-

maßen übereinstimmende Werte bei der Messung von Funken-
spannungen erhält.

Am meisten macht sich der Entladeverzug bemerkbar, wenn die Elektroden-
spannung nicht plötzlich, sondern durch allmähliche Steigerung hoch
gebracht wird. Manchmal aber tritt bei plötzlicher Herstellung der
Spannung die Entladung schon bei einem so niedrigen Werte ein, daß
das nicht aus der Aufhebung des Entladeverzuges erklärt werden kann.
Das zeigt sich dann, wenn die Elektroden aus Platten oder Kugeln
bestehen, die eine gewisse Kapazität darstellen, oder sonst eine
Kapazität mit den Elektroden unmittelbar verbunden ist. Die Erklärung
liegt in der Überspannung, die auftritt, wenn die Ladung dieser
Kapazitäten oszillatorisch erfolgt (§ 199). Die wirkliche vorhandene
Anfangsspannung ist dann höher als die Klemmenspannung der
betreffenden Stromquelle und kann auch nicht mit einem Spannungs-
zeiger gemessen werden, weil sie zu kurze Zeit andauert. Sehr häufig
zeigen sich solche Überspannungen bei Kondensatoren in Form von
langen Büschelentladungen und Funkenentladungen, wenn die
Spannung plötzlich eingeschaltet wird, oder wenn der Magnetregulator
des Stromerzeugers nicht fein genug abgestuft ist, so daß die
Spannung sprungweise gesteigert wird. In solchen Fällen erfolgt eben
die Ladung oszillatorisch. Es handelt sich hier also nicht um
Aufhebung eines Entladeverzuges, sondern um eine kurzdauernde
Erhöhung der an den Elektroden herrschenden Spannung gegenüber
dem aus dem Übersetzungsverhältnis des Transformators berechneten
oder mittels einem Meßinstrument gemessenen Mittelwerte der
Spannung.

Aber auch bei ganz langsamer Erhöhung der Spannung besteht ein
die Funken-
spannung vermindernder Einfluß der Kapazität. Das zeigt sich schon,
wenn man die Elektroden mit leitenden Körpern von größerer
Kapazität verbindet. Der Grund dürfte darin liegen, daß die
Vorentladungen, die dem Funkenüberschlag den Weg vorbereiten,
um so stärker auftreten, je größer die Kapazität ist. Diese bildet
gewissermaßen ein Reservoir für die Elektrizität, deren Menge
und Spannung gerade beim Durchgang des Stromes durch Null am
größten ist (Abb. 279, S. 343). Besonders auffällig ist der Ein-
fluß der Kapazität, wenn man mehrere gleiche Kondensatoren oder
Isolatoren (die natürlich auch Kapazität haben) hintereinander
schaltet. Nach § 178 soll bei gleichen Kapazitäten die gesamte
Spannung gleich der Summe aller Teilspannungen sein. Das ist
auch der Fall, solange noch keine Entladungen stattfinden. Treten
irgendwelche Entladungen — wenn auch nur dunkle — auf, so ist
das nicht mehr der Fall, sondern die gesamte Spannung ist kleiner
als die Summe aller Teilspannungen. Welch großen Einfluß in
dieser Hinsicht selbst kleine Kapazitäten ausüben, zeigen die
vergleichenden Versuche Abb. 473 und 474. Beim ersten Versuch
sind die drei Hängeisolatoren nur mittels Drähten aneinandergelagert.
Bei 130 000 V

tritt schwaches Glimmlicht auf. Beim zweiten Versuch sind dieselben Isolatoren durch eiserne Manschetten miteinander verbunden. Die geringe Kapazität derselben bewirkt schon, daß bei derselben Spannung bereits Funkenentladungen auftreten¹⁾.

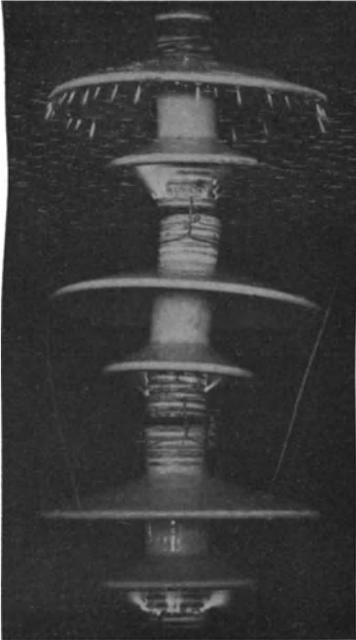


Abb. 473.



Abb. 474.

250. Entladungen aus zylindrischen Elektroden (Drähten).

Von praktischer Wichtigkeit sind die Entladungen aus einer zylindrischen Elektrode (Draht), sei es, daß die andere Elektrode aus einem gleichen, parallelen Zylinder besteht (Luftleitungen und Kabel mit parallelen Drähten), oder aus einem konzentrischen Zylinder (konzentrische Kabel, Durchführungen u. dgl.). Derartige Anordnungen müssen in allen Fällen so bemessen werden, daß die Betriebsspannung weit unter der Durchschlagspannung liegt. Sie muß aber auch unter der Anfangsspannung der sichtbaren oder hörbaren Glimmentladungen liegen. Denn wenn diese auch keinen Durchschlag bewirken, so verursachen sie doch bei festen Isolierstoffen

¹⁾ Bei einer größeren Anzahl hintereinandergeschalteter Isolatoren zeigt sich ferner noch, daß die Entladungen am ersten Isolator stärker sind, und daß auch sein Material stärker auf Durchschlag beansprucht wird, als bei denen in der Mitte.

eine allmähliche Verschlechterung und schließliche Zerstörung derselben, und in allen Fällen einen Leistungsverlust. Ist bei Luftleitungen dieser Verlust so groß wie die Zunahme des Stromwärmeverlustes bei Anwendung kleinerer Betriebsspannung und entsprechend größerer Stromstärke, so ist es vorteilhafter, eine kleinere Spannung als Betriebsspannung zu wählen. Folgende Tabelle gibt die Anfangsspannung des Glimmlichtes für zwei parallele Drähte von verschiedenen Dicken bei 122 cm Abstand nach Versuchen von Ryan¹⁾.

Drahtstärke mm	(Scheitelwert) Volt
1,5	79000
2,7	118000
5	157000
11	236000
18	314000
25	390000

Der Einfluß des Abstandes zweier Drähte von 5,3 mm Dicke ergibt sich aus folgenden Versuchen von Mershon²⁾

Abstand cm	Volt (Scheitelwert)
38	75000
56	80000
89	86000
122	93000

Wie man sieht, stimmen die beiden Tabellen schlecht zusammen. Es spielen eben die Verhältnisse in der Atmosphäre (Druck und Temperatur), Grad der Dunkelheit, Oberflächenbeschaffenheit (blank oder oxydiert) eine Rolle.

Dazu kommt, daß es für den Beginn der Glimmentladung keinen objektiven Maßstab gibt, sondern nur die rein subjektive Beobachtung der Lichtempfindungen³⁾. Dagegen kann der Eintritt der Funkenentladung sicher festgestellt werden, weil sie plötzlich erfolgt. Abb. 475 enthält Funkenentladung und Glimmlicht⁴⁾ zwischen zwei parallelen Drähten von 6 mm Durchmesser nach Beobachtungen des Verfassers. Wie man sieht, fallen sie bei kleinen Abständen zusammen; die Entladung erscheint da sogleich als Funken, ohne daß vorher Glimmlicht auftritt.

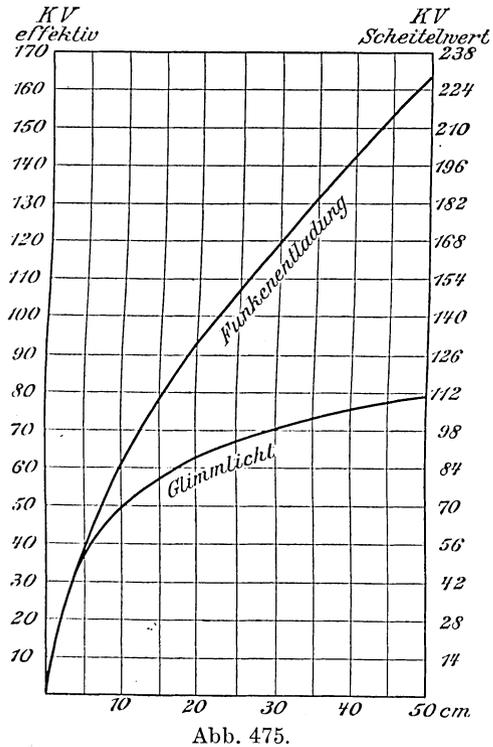
¹⁾ ETZ 1904, S. 387.

²⁾ ETZ 1914, S. 387.

³⁾ Läßt man unter gleichen Verhältnissen von verschiedenen Beobachtern den Eintritt des Glimmlichtes feststellen, ohne daß einer von den Angaben des anderen etwas weiß, so ergeben sich Unterschiede bis zu 100 %.

⁴⁾ Als Spannung des Glimmlichtes wurde jene angesehen, bei der nicht nur einzelne Lichtpunkte (die nur von Staubteilchen oder kleinen Unebenheiten herrühren) auftreten, sondern eine gleichmäßige Lichterscheinung am ganzen Draht.

Versucht man bei parallelen Drähten den Zusammenhang der Funkenentladung mit der elektrischen Kraft (Feldstärke) an der Drahtoberfläche herzustellen, wie es Schwedoff für parallele Platten getan hat (S. 541), so findet man einen völlig entgegengesetzten Verlauf. Während bei parallelen Platten die zur Entladung notwendige Feldstärke mit wachsendem Abstand der Elektroden rasch abnimmt und einem konstanten Wert zustrebt (Abb. 471), wächst sie bei parallelen Drähten mit wachsendem Abstand ins Unbegrenzte (vgl. die Kurven von Peck, Americ. Inst. Electr. Eng. Bd. 31, S. 1085, 1912; ETZ 1913, S. 298). Das erklärt sich daraus, daß für die Funkenentladung nicht die Feldstärke an der Oberfläche, sondern im ganzen Abstand zwischen den Elektroden maßgebend ist, weil eine Funkenentladung eben nur zustande kommen kann, wenn der ganze Weg hinreichend ionisiert ist (§ 245, 247). Zwischen parallelen Platten



(homogenes Feld) ist die Feldstärke in der Mitte ebenso groß wie an der Oberfläche der Platten, während sie zwischen Drähten in der Mitte um so kleiner ist, je größer ihr Abstand ist.

Stellt man die Beziehung her zwischen Glimmlicht und Feldstärke an der Oberfläche für parallele Drähte mit wachsendem Abstand, so nähert sich die Kurve einem konstanten, nur vom Drahtdurchmesser abhängigen Wert. Die Glimmentladung hängt eben im wesentlichen nur von der Feldstärke an der Oberfläche ab, während die Feldstärke in größeren Abständen keinen Einfluß darauf hat, weil die Glimmentladung nur geringe Ausdehnung hat. Ist der Abstand der Drähte groß gegenüber ihrem Durchmesser, so treten Glimm- und Funkenentladung an drei parallelen Dreiphasenleitungen bei derselben (verketeteten) Spannung ein, wie an zwei Drähten mit einphasigem Strom. Es macht auch nichts aus, ob die drei Drähte (bei genügenden Abständen) in einer Ebene liegen, oder ob sie Kanten eines Prismas bilden.

Wichtiger als der von rein subjektiver Gesichtswahrnehmung abhängige Beginn der Glimmentladung ist der damit verbundene Leistungsverlust durch Ausstrahlung der Elektrizität. Abb. 476

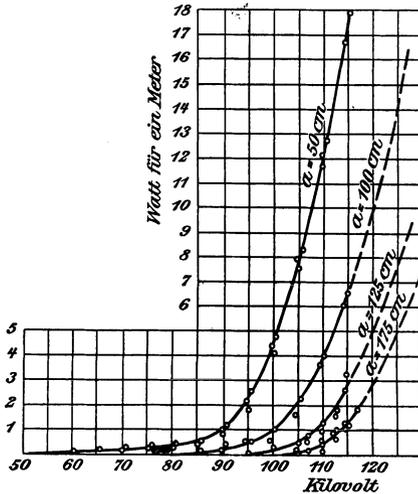


Abb. 476.

zeigt Meßergebnisse an zwei parallelen Drahtseilen (7 Drähte von je 2,8 mm Durchmesser) mit verschiedenen Abständen a in Abhängigkeit von der effektiven Spannung, bei 17° Temperatur und bei 750 mm Luftdruck¹⁾.

Da die Anfangsspannung des Glimmlichtes von Druck und Temperatur abhängt, hängen natürlich auch diese Verluste davon ab; bei Regen sind sie erheblich größer.

Die Anfangsspannung der Glimmentladungen ist von der Frequenz des Wechselstromes unabhängig, dagegen wächst der Ausstrahlungsverlust mit der Frequenz, aber weniger als proportional.

Schließt man an dieselbe Spannungsquelle zwei parallele Drähte mit großem Abstand und gleichzeitig einen Draht von gleicher Dicke, der von einem konzentrischen Zylinder im gleichen Abstand umgeben ist (Zylinderanordnung) an, so findet man, daß das Glimmlicht an den Drähten gleichzeitig eintritt²⁾. Ebenso bei einem Draht und

¹⁾ Görge, Weidig, Jaensch, ETZ 1911, S. 1071. Dasselbe Drahtseil wurde in einer 110000 V.-Anlage angewendet. Messungen an der fertigen Leitung zeigten aber, daß trotz den Isolatoren die Verluste nur 5 Watt für 1 m betragen, gegenüber 8,5 nach Abb. 476. (Mitteilungen des Dresdner Elektr. Ver. Nr. 16, 1913 und Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing. 1913, Bd. 57, S. 1300.) Dieser um 70% größere Wert läßt sich aus Unterschieden der Temperatur, des Luftdruckes und der Wellenform der Spannung nicht erklären. Es sind eben alle Entladungsmessungen noch sehr unsicher, weil die Umstände, durch die sie unter verschiedenen Verhältnissen beeinflußt werden, noch nicht genügend bekannt sind. Darum sind auch alle Versuche, aus den Beobachtungszahlen empirische Formeln über den Eintritt der Glimmentladung und über die Verluste aufzustellen, wertlos. Eine zuverlässige Beurteilung einer Leitung für sehr hohe Spannung kann man nur auf Grund von Messungen im Freien bei verschiedenen Tages- und Jahreszeiten gewinnen.

²⁾ Vgl. die Versuchsangaben des Verfassers in ETZ 1913, S. 1354. Der von Görge, Weidig und Jaensch erhobene Einwand, daß die daraus berechnete Feldstärke für die Anfangsspannung einen von anderen Beobachtern abweichenden Wert ergibt, beruht auf einer willkürlichen, falschen Annahme, denn es ist nicht die Anfangsspannung, sondern der Eintritt des gleichmäßigen Glimmlichtes in einem halbdunkeln Raum beobachtet worden, weil da die Vergleichung am sichersten ist. Dagegen ist der dort erwähnte Versuch von

paralleler Ebene im gleichen Abstand. Bei genügend großem Abstand der anderen Elektrode hängt eben die Glimmentladung aus einem Draht nicht von der anderen Elektrode ab, sondern nur vom Durchmesser des Drahtes selbst. Bei der Funkenentladung, für die nicht nur die Feldstärke an der Oberfläche, sondern im ganzen Abstand zwischen den Elektroden maßgebend ist, zeigen sich Unterschiede von ähnlicher Art wie in Abb. 468 und 469.

Bei kleinem Abstand zweier konzentrischer Zylinderelektroden (Abb. 36, S. 47) hat der Abstand natürlich großen Einfluß. Das ergibt sich aus der auf S. 50 abgeleiteten Formel für die Feldstärke an der inneren Elektrode

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{E}{r_1 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}$$

und für die Feldstärke an der Innenseite der äußeren Elektrode

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{E}{r_2 \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man die Tatsache, daß die Feldstärke im ganzen Raum zwischen den Elektroden dadurch vermindert werden kann, daß man r_2 vergrößert, also eine dickere Isolierschicht ($r_2 - r_1$) verwendet, oder daß man unter Beibehaltung der Schichtdicke ($r_2 - r_1$) sowohl r_1 als auch r_2 vergrößert. Daher soll man bei konzentrischen Kabeln den inneren Draht nicht zu dünn wählen. Auch für verseilte Kabel gilt derselbe Grundsatz, wie man aus den Formeln auf S. 52 erkennt.

251. Elektrizitätsdurchgang durch feste und flüssige Isolatoren.

Auch durch feste und flüssige Isolatoren kann, abgesehen von einer durch Beimengungen verursachten metallischen oder elektrolytischen Leitung, Elektrizität hindurchgehen, ohne daß ein Durchschlag stattfindet.

Der Durchgang beginnt in Form dunkler Entladungen. In einem flüssigen Isolator kann man sie leicht dadurch erkennen, daß die Flüssigkeit in der Nähe der Elektroden in Bewegung gerät. Infolge der elektrischen Anziehung, die auf die Oberfläche als Grenzfläche zweier verschiedener Dielektrizitätskonstanten ausgeübt wird, verändert

Görges usw. falsch angestellt worden, weil die beiden Versuchsanordnungen nicht gleichzeitig, sondern nacheinander angeschlossen wurden, so daß der Eintritt des Glimmlichtes, auf rein subjektiven, durch Suggestion beeinflussten Eindrücken beruht. Es wurde schon oben darauf hingewiesen, wie schlecht die Angaben verschiedener Beobachter über den Eintritt des Glimmlichtes, und selbst Messungen des Glimmlichtverlustes zusammenstimmen.

sich die Oberflächenspannung und daher auch die Kapillarität, was man beim Ein- und Ausschalten der Spannung an den Rändern der Oberfläche bemerkt. Bei festen Isolatoren merkt man die dunklen Entladungen meistens erst nach langer Zeit, wenn sie eine allmähliche Zerstörung des Stoffes bewirkt haben. Sind die Elektroden nicht unmittelbar mit dem flüssigen oder festen Stoff in Berührung,

sondern besteht ein Luftzwischenraum, so bemerkt man in diesem bei genügender Spannung Glimm- oder Büschelentladungen, wie Abb. 477 zwischen einem Porzellanrohr und seiner metallischen Fassung zeigt; die zweite Elektrode befindet sich im Innern des Rohres. Abb. 478 zeigt Büschelentladungen, die von einem um einen Isolatorkopf geschlungenen Draht ausgehen,

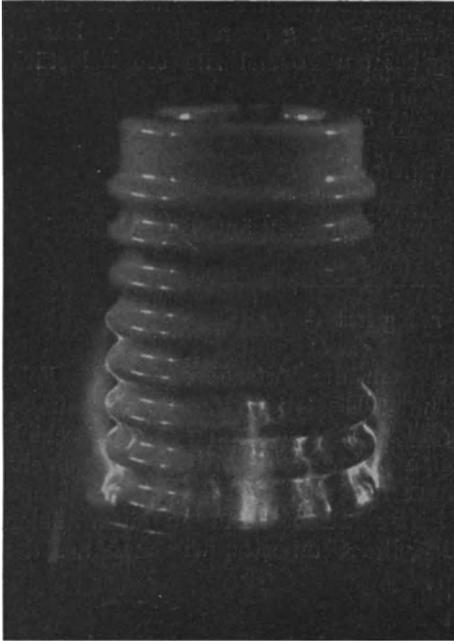


Abb. 477. Durchgang der Entladungen durch ein Porzellanrohr.

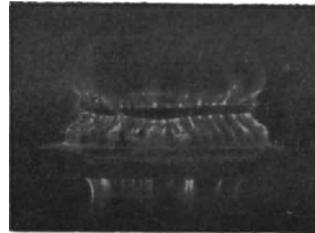


Abb. 478. Durchgang der Entladungen durch das Dach eines Isolators.

durch das Dach hindurchgehen und unter diesem wieder sichtbar werden. Von hier gehen sie durch das Porzellan des Mittelkörpers zur anderen Elektrode (Stütze), auf welcher der Isolator sitzt. Hat eine evakuierte Glasröhre nur an einem Ende eine Elektrode, an dem anderen aber einen äußerlichen Stanniobelag, so leuchtet die Röhre beinahe ebenso, als wenn sie zwei innere Elektroden hätte. Auch wenn beide Elektroden aus äußeren Belägen bestehen, kommen Entladungen in der Röhre zustande. Man benutzt solche zur Ozonerzeugung (§ 264). Die Folge eines solchen Elektrizitätsdurchganges ist eine Erwärmung des betreffenden Stoffes. Bei Wechselstrom kommt hierzu noch eine Erwärmung durch Rückstandsbildung (§ 181).

Der Durchgang der Elektrizität durch die flüssigen Isolatoren

scheint ebenso wie bei Gasen auf einer Ionisierung zu beruhen¹⁾. Bei den festen Isolatoren, wo die Moleküle und Atome keine fortschreitende Bewegung ausführen können, dürfte der Durchgang der Elektrizität nur darauf beruhen, daß alle Stoffe Gasbläschen und Poren enthalten, in denen die Ionisierung stattfindet. Bei Porzellan ist dies durch mikroskopische Untersuchung von Dünnschliffen nachgewiesen worden²⁾.

Die flüssigen Isolierstoffe sind für die Elektrotechnik von großer Wichtigkeit. Natürlich kommen nur solche in Betracht, die nicht leicht entzündbar sind, also die schwerflüssigen mineralischen Öle und Harzöl. Die Vorteile sind folgende: 1. Sowohl dunkle Entladungen als Büschel- und Funkenentladungen benötigen in Öl eine sehr viel höhere Spannung als in Luft. Lichtbögen in Öl können aus den auf S. 401 angeführten Gründen nur sehr schwer bestehen, jedenfalls nur bei sehr hoher Spannung und sehr großer Energiemachlieferung der Stromquelle. Daher können Funkenentladungen trotz zureichender äußerer Bedingungen nicht leicht in Lichtbögen übergehen; 2. kommen die in § 254 näher beschriebenen gleitenden Entladungen auf der Oberfläche eines festen Isolierstoffes nur sehr schwer zustande, wenn er sich unter Öl befindet (vgl. § 259); 3. gegenüber den festen Isolierstoffen haben die flüssigen den Vorzug, daß ein Funkenüberschlag keinen bleibenden Kanal erzeugt wie in einem festen Stoff, so daß die Isolation durch eine Funkenentladung nicht dauernd zerstört wird.

252. Durchschlagsfestigkeit.

Eine Funkenentladung durch einen gasförmigen oder flüssigen oder festen Stoff hat große Ähnlichkeit mit einer mechanischen Durchdringung desselben; bei einem festen Stoff verbleibt ein Loch oder Kanal. Daher spricht man von „Durchschlag“ und „Durchschlagsfestigkeit“ oder elektrischer Festigkeit. Darunter versteht man die Widerstandsfähigkeit des betreffenden Stoffes gegen eine Funkenentladung³⁾. Sie läßt sich aber nicht durch eine einzige Zahl charakterisieren, weil sie weder der elektrischen Kraft, noch der Spannung zwischen den Elektroden, noch der Dicke der Schicht proportional ist, sondern man muß Schaulinien aufstellen, wie in Abb. 467—469 für Luft und in Abb. 479 und 480 für einige andere Stoffe in Form von ebenen Platten.

¹⁾ Schweidler, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien. Bd. 109 (IIa) 1900. Przi Bram, ebenda, Bd. 114 (IIa) 1905.

²⁾ Zoellner, ETZ 1908, S. 1257; 1909, S. 95.

³⁾ Auf den tatsächlichen Eintritt der Funkenentladung kommt es an, nicht auf dunkle oder leuchtende Vorentladungen, denn diese machen den betreffenden Apparat oder die Fernleitung nicht betriebsunfähig. Wenn die Vorentladungen den Isolierstoff verschlechtern, so vermindern sie eben die elektrische Festigkeit.

Bei demselben Stoff, derselben Elektrodenform und unter derselben Spannung hängt die Durchschlagsfestigkeit von der elektrischen

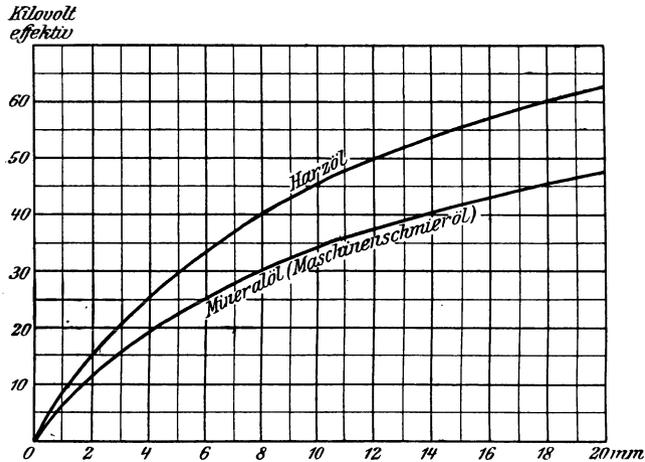


Abb. 479. Durchschlagsspannung von Harzöl und Mineralöl.

Kraft ab. Diese ist bei gekrümmten Schichten um so größer, je kleiner der Krümmungsradius ist. Isolierschichten, die von konzentrischen krummen Flächen begrenzt sind, werden aus diesem Grunde an der inneren Seite stärker beansprucht, als an der äußeren. Um also bei der Prüfung von Stoffen auf ihre Durchschlagssfestigkeit Zahlen zu erhalten, welche von der Form der Elektroden und sonstigen Äußerlichkeiten unabhängig sind, muß man ebene Platten verwenden, an welchen parallele Elektroden von mindestens 2 cm^2 Fläche anliegen. Zwischen solchen ist das elektrische Feld in der Mitte homogen; also die Beanspruchung des zu prüfenden

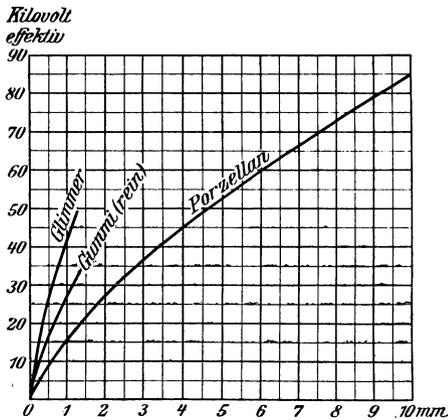


Abb. 480. Durchschlagsspannung von Glimmer, Gummi und Porzellan.

Stoffes in allen Tiefen dieselbe¹⁾.

¹⁾ Elektroden in Form von konzentrischen Zylindern oder Kugeln oder gar Spitzen sind daher zur Prüfung von Isolierstoffen ungeeignet. Andererseits sollen die plattenförmigen Elektroden auch nicht zu groß sein, weil sonst die Kapazität derselben schon einen Einfluß ausübt (vgl. S. 544).

Haben die Elektroden scharfe Ränder (Abb. 481), so herrscht hier (bei a) ein größeres Potentialgefälle und daher größere Kraftliniendichte als zwischen den mittleren Teilen der Elektroden (bei b) und daher eine stärkere Beanspruchung des zwischen ihnen befindlichen Stoffes als in der Mitte. Bei höherer Spannung entstehen aber aus scharfen Rändern Randentladungen $a c$ (bestehend aus dunklen Entladungen oder Büschelentladungen Abb. 488, S. 562), wodurch das Potentialgefälle sehr vermindert wird. Abb. 482 zeigt die Verteilung der Kraftlinien in diesem Falle. Verhindert man die Randentladungen, z. B. dadurch, daß man das Ganze unter Öl bringt, so besteht die in Abb. 481 dargestellte Kraftlinienverteilung und daher tritt schon bei kleinerer Spannung der Durchschlag ein, als wenn derselbe Versuch in Luft gemacht wird.

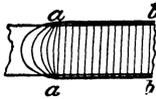


Abb. 481.

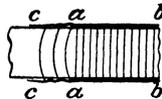


Abb. 482.

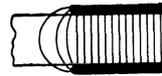


Abb. 483.

Der Unterschied zwischen dem Kraftlinienverlauf in Luft und in Öl verschwindet, wenn die Elektroden aus dicken Platten mit abgerundeten Rändern bestehen. Abb. 483 zeigt, daß in diesem Falle die Kraftlinien in der Mitte am dichtesten sind. Hier ist auch das Feld homogen, so daß hier eine durch die Spannung wohl definierte und in allen Tiefen gleiche Beanspruchung des Stoffes besteht. Scharfkantige Metallteile (Fassungen, Klemmen und dgl.) müssen daher bei Apparaten mit Ölisolation (Transformatoren, Ölswitcher und dgl.) sorgfältig vermieden werden.

Die Durchschlagsfestigkeit nimmt mit wachsender Temperatur ab, so daß diese bei vergleichenden Versuchen berücksichtigt werden muß¹⁾.

Vom Ohmschen Widerstand hängt die Durchschlagsfestigkeit nicht ab. Luft hat z. B. vor dem Auftreten der dunklen Entladungen einen unendlich großen Widerstand. Trotzdem kommt es bei genügender Spannung zu einem Überschlag, und zwar eher als bei vielen festen Stoffen, bei denen sich ein gewisser Leitungswiderstand messen läßt. Unter den festen Isolierstoffen kann einer mit dem kleineren Widerstand die größere Durchschlagsfestigkeit haben. Durch Poren im Material wird die Durchschlagsfestigkeit natürlich stark herabgesetzt (vgl. S. 563, 565).

Auch bei elektrolytischen Flüssigkeiten mit deutlichem Leitungsvermögen läßt sich eine Durchschlagsfestigkeit feststellen, da Funken-

¹⁾ Bei dünnen Schichten solcher Stoffe, welche durch die dielektrischen Verluste (§ 181) erwärmt werden, kann sogar schon die durch dicht anliegende plattenförmige Elektroden bewirkte Abkühlung eine andere Durchschlagsspannung verursachen; vgl. die Versuche von Rayner, ETZ 1913, S. 1350.

entladungen in ihnen eintreten können, wenn die Spannung sehr schnell gesteigert wird, und der Widerstand so groß ist, daß es eine gewisse Zeit dauert, bis der Strom eine gewisse Stärke erreicht hat und das Potentialgefälle auf einen kleinen Wert herabdrückt¹⁾.

Die elektrische Festigkeit eines Isolierstoffes läßt sich nicht durch eine bestimmte Zahl angeben, wie die mechanische Festigkeit oder Elastizität eines mechanischen Konstruktionsmaterialies. Denn wie die Abb. 479 und 480 zeigen, sind die Kurven, welche die Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Schichtdicke angeben, sämtlich gekrümmt. Die elektrische Festigkeit ist also der Schichtdicke nicht proportional. Aus Abb. 479 ergibt sich z. B., daß Mineralöl in einer Schicht von 2 mm bei 12000 V. durchschlagen wird, so daß auf 1 mm 6000 V. kommen. Eine Schichtdicke von 10 mm wird bei 35000 V. durchschlagen, so daß da nur 3500 V. auf 1 mm kommen. Es gibt also keine spezifische elektrische Festigkeit. Zur Charakterisierung eines Isolierstoffes muß man daher eine Kurve wie in jenen Abbildungen haben²⁾.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß zu einem elektrischen Durchschlag außer den in § 245 bis 248 besprochenen physikalischen Bedingungen der Funkenentladung auch noch zwei äußere Bedingungen erforderlich sind, nämlich eine gewisse Elektrizitätsmenge und eine gewisse Zeit. Das gilt für jede Entladungsform, auch in Luft; aber beim Durchschlag eines festen Isolierstoffes wird es besonders auffällig. Es kommt nicht auf gleiche Energie (Produkt aus Spannung und Strom) an, wie man zunächst erwarten sollte, sondern es ist bei allen Spannungen mindestens dieselbe Stromstärke erforderlich, um einen Durchschlag zu bewirken. D. h. bei einer dickeren Schicht ist zu ihrem Durchschlag nicht nur eine höhere Spannung, sondern auch eine erheblich größere Energiemenge erforderlich³⁾.

¹⁾ Heydweiller, *Annal. d. Phys.*, Bd. 17, S. 346, 1905.

²⁾ Es ist in letzter Zeit viel von elektrischer Festigkeitsberechnung gefabelt worden, und es wurden in Büchern und Zeitschriften Berechnungen veröffentlicht, denen ein Durchschlagswert pro mm oder pro cm als Festigkeitskoeffizient zugrunde gelegt wurde. Wie aus dem Obigen hervorgeht, sind solche Rechnungen von vornherein falsch, weil der Schluß von der Festigkeit pro mm oder pro cm auf entsprechende Festigkeit einer dickeren oder dünneren Schicht falsch ist. In der Praxis werden auch solche Rechnungen gar nicht gemacht, sondern die jeweils erforderliche Schichtdicke wird Durchschlagskurven wie in den obigen Abbildungen entnommen. Und auch das ist nur zulässig, wenn die Schicht nicht zu stark gekrümmt ist. Bei Zylinderschichten, wo die innere Mantelfläche viel kleineren Krümmungsradius hat als die äußere, ist die elektrische Beanspruchung innen und außen sehr verschieden, so daß auch für den Durchschlag andere Verhältnisse bestehen. Darum muß bei allen Apparaten und Maschinen die zulässige Betriebsspannung durch Versuche festgestellt werden, und die Dimensionierung neuer Konstruktionen muß auf Grund der Versuche an ähnlichen Apparaten erfolgen.

³⁾ Daher darf man zu Versuchen über Durchschlagfestigkeit keine Elektrifiziermaschinen oder Funkeninduktoren oder kleine Transformatoren verwenden, sondern nur solche, welche normal d. h. bei nicht zu großem Spannungsabfall mindestens 0,2 A. Strom liefern können. Also ist bei 100000 V. ein Transformator von mindestens 20 Kilowatt normaler Leistung erforderlich.

Es ist aber auch eine gewisse Zeit notwendig, bevor es zu einem Durchschlag kommt. So zeigt sich häufig, daß trotz unveränderter Spannung und unveränderten Nebenbedingungen der Durchschlag erst nach einigen Minuten eintritt, während andererseits eine um 20% höhere Spannung keinen Durchschlag verursacht, wenn sie nur eine Sekunde lang wirkt. Zahlenangaben über elektrische Festigkeit (Spannungsprüfung) müssen sich natürlich auf dauernde Festigkeit beziehen.

Mit dem Erfordernis einer gewissen Zeitdauer der Einwirkung dürfte die Tatsache im Zusammenhang stehen, daß im allgemeinen zum Durchschlag eine um so höhere Spannung erforderlich ist, je größer die Periodenzahl ist, wenn dabei auch keine Proportionalität besteht¹⁾.

Bei festen Isolierstoffen zeigt sich häufig eine ähnliche Erscheinung wie die Überbeanspruchung bei der mechanischen Festigkeit. Ist ein Stoff bis knapp vor seinem Durchschlag beansprucht worden, so schlägt er bei neuerlicher Einschaltung erheblich früher durch. Es hat also durch die erste Überbeanspruchung eine dauernde Herabsetzung der elektrischen Festigkeit stattgefunden, ebenso wie durch mechanische Überbeanspruchung eine Herabsetzung der mechanischen Festigkeit bewirkt wird²⁾.

253. Durchschlagfestigkeit hintereinandergeschalteter Isolierstoffe³⁾.

Der Umstand, daß der elektrische Durchschlag homogener Isolierstoffe in Form ebener Platten unter gewöhnlichen Verhältnissen nur von der Elektrodenspannung abhängt, hat dazu geführt, die elektrische Kraft als hinreichende Bedingung für den Durchschlag zu betrachten. Tatsächlich ist das nur eine äußerlich notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung. Diese ist nur dann vorhanden, wenn zwischen den Elektroden auf einem zusammenhängen-

¹⁾ In der amerikanischen Literatur ist öfter die Ansicht vertreten worden, als seien kurzdauernde Überspannungen (Spannungstöße) den Isolierstoffen besonders gefährlich, namentlich dem Porzellan, weil Freileitungsisolatoren häufig durchschlagen werden, auch wenn sie vor ihrer Montierung höhere Prüfspannungen ausgehalten haben. Der Grund dafür liegt auf anderem Gebiete (Sprünge, Schlieren, innere mechanische Spannungen in der Porzellanmasse; vgl. ETZ 1917, S. 433). Jedenfalls tritt ein Durchschlag eher ein, wenn dieselbe Spannung dauernd wirkt, als wenn sie nur stoßweise auftritt. Die erwähnte falsche Ansicht beruht wohl auf einer falschen Analogie mit mechanischen Stößen.

²⁾ Für die Praxis hat das die wichtige Folge, daß man fertige Apparate bei der Isolationsprüfung nicht bis in die Nähe des Durchschlages beanspruchen darf. Man erhält durch zu hoch getriebene Prüfspannung keine größere Sicherheit, sondern eine dauernde Verschlechterung des Isolierstoffes. Die Güte des angewendeten Stoffes muß man an solchen Probestücken prüfen, die nachher nicht zur Fabrikation verwendet werden.

³⁾ Benischke, ETZ 1907, S. 95.

den Weg hinreichende Ionisierung besteht. Im Entladeverzug (§ 249) haben wir schon einen Fall kennen gelernt, wo trotz genügender Elektrodenspannung ein Durchschlag nicht zustande kommt, weil keine genügende Ionisierung vorhanden ist. Ein anderer Fall ist der, daß zwei Isolierstoffe von verschiedener Dielektrizitätskonstante so liegen, daß sie hinsichtlich der elektrischen Kraftlinien hintereinandergeschaltet sind, und in dem einen die elektrische Kraft zu klein ist, um hinreichende Ionisierung zu bewirken.

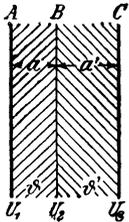


Abb. 484.

Wir betrachten den Fall, daß sich zwei Isolierstoffe mit den Dielektrizitätskonstanten ϑ und ϑ' in parallelen Schichten von der Dicke a und a' zwischen zwei leitenden Flächen A und C befinden (Abb. 484), deren Potentialwerte U_1 und U_3 seien. Ist E die Spannung, an die sie angeschlossen sind, so ist

$$U_1 - U_3 = E.$$

Da die Kraftlinien auf den beiden Flächen senkrecht stehen, so ist die Trennungslinie B zwischen den beiden Stoffen eine Niveaulinie mit dem noch unbekanntem Potentialwerte U_2 . Nach § 14 ist die elektrische Kraft in dem linken Stoff

$$\mathfrak{S} = \frac{U_1 - U_2}{a}$$

und die elektrische Kraft in dem rechten Stoff

$$\mathfrak{S}' = \frac{U_2 - U_3}{a'}$$

oder

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= a \mathfrak{S} \\ U_2 - U_3 &= a' \mathfrak{S}'. \end{aligned}$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$U_1 - U_3 = E = a \mathfrak{S} + a' \mathfrak{S}'.$$

Nach Gl. 35 (S. 60) ist

$$\vartheta \mathfrak{S} = \vartheta' \mathfrak{S}'.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergeben sich nun die elektrischen Kräfte wie folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{E}{a + a' \frac{\vartheta}{\vartheta'}} \\ \mathfrak{S}' &= \frac{E}{a' + a \frac{\vartheta'}{\vartheta}}. \end{aligned}$$

Ist \mathfrak{S}_v die elektrische Kraft in dem Falle, daß der ganze Raum

zwischen den leitenden Flächen A und C von einem einzigen Stoff ausgefüllt ist, so daß $\vartheta = \vartheta'$ ist, so ist

$$\mathfrak{S}_v = \frac{E}{a + a'}.^1)$$

Aus den drei letzten Formeln erkennt man folgendes: ist $\vartheta > \vartheta'$, so ist $\mathfrak{S} < \mathfrak{S}_v < \mathfrak{S}'$, d. h. in dem Stoff mit der größeren Dielektrizitätskonstante ist die elektrische Kraft kleiner, in dem anderen aber größer, als wenn derselbe Raum von einem einzigen Stoff ausgefüllt ist.

Wir betrachten als Beispiel den Fall, daß zwischen zwei Elektroden mit einem Abstand von $a + a' = 1$ cm eine Porzellanplatte oder Glimmerplatte ($\vartheta = 6$, ungefähr) von $a = 0,2$ cm eingeschoben wird, so daß ein Luftraum von $a' = 0,8$ cm verbleibt ($\vartheta' = 1$). Dann ist bei einer Spannung von 100 elektrostatischen Einheiten (= 30000 Volt) die elektrische Kraft in der Porzellanplatte

$$\mathfrak{S} = \frac{100}{0,2 + 0,8 \cdot 6} = 20$$

und die elektrische Kraft im verbleibenden Luftraum

$$\mathfrak{S}' = \frac{100}{0,8 + \frac{0,2}{6}} = 120.$$

Dagegen war die elektrische Kraft vor dem Einschieben der Platte

$$\mathfrak{S}_v = \frac{100}{1} = 100.$$

Die elektrische Kraft im Luftraum ist also zwar durch das Einschieben der Platte von 100 auf 120 gestiegen, eine Entladung zwischen den beiden Elektroden kann aber trotzdem nicht stattfinden, weil die Elektrizität dabei auch durch die Platte hindurch müßte. Hier aber ist die elektrische Kraft so gering (20), daß die für den Durchgang der Elektrizität erforderliche Ionisierung nicht eintritt. Die Isolierung und Durchschlagsfestigkeit ist also durch das Einschieben der Platte erhöht worden, und das wäre selbst dann der Fall, wenn das Material der Platte an und für sich eine geringere Durchschlagsfestigkeit hätte als Luft. Eine solche Schicht, in welcher die elektrische Kraft, also die elektrische Beanspruchung

¹⁾ Daß hierin die Dielektrizitätskonstante nicht vorkommt, erklärt sich daraus, daß die Potentialdifferenz $U_1 - U_3$ konstant (gleich E) ist, und die elektrische Kraft immer gleich dem Potentialgefälle ist (§ 14). Nur bei konstanter Elektrizitätsmenge ist Kraft und Potential von der Dielektrizitätskonstante abhängig (§ 27).

des Stoffes zu gering ist, um einen Durchgang der Elektrizität zu bewirken, wirkt, demnach hinsichtlich der anderen, stärker beanspruchten Schicht wie ein Schirm. Ein Durchschlag kann eben nur dann erfolgen, wenn die Elektrizität durch beide Schichten hindurchgehen kann. Daher erreicht man mit solchen Anordnungen im ganzen eine größere Durchschlagsfestigkeit als wenn alle Schichten gleich stark beansprucht sind¹⁾. Abb. 485 zeigt die günstige Wirkung einer

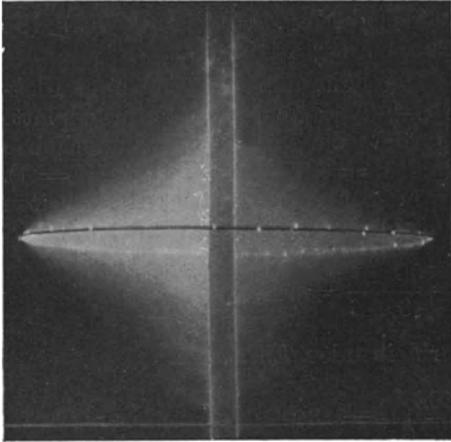


Abb. 485. Vorentladungen an einer (schematischen) Durchführung. Stab mit Mikanitrohr.

dünnen Isolierschicht von größerer Dielektrizitätskonstante an einem mit Mikanit überzogenen Metallstab, der von einem Metallring (äußere Elektrode) umschlossen ist²⁾. Trotz der hohen Spannung (130 000 V.) kommen nur Büschelentladungen, aber kein Durchschlag zustande.

Theoretisch wird die Isolierung um so besser, je dünner die eingeschobene Platte ist, weil sich die elektrische Kraft (im obigen Beispiel) asymptotisch dem Werte $\frac{100}{6} = 16,6$ in der Platte und dem Werte $\frac{100}{1} = 100$ im

Luftraum nähert. Praktisch aber kommt man bei dünner werdender Platte zu einer Grenze, wo die Durchschlagsfestigkeit plötzlich Null wird, weil leitende Teilchen oder Poren zutage treten, die sich über die ganze Dicke der Platte erstrecken.

Für drei Platten mit den Dicken a_1, a_2, a_3 und den Dielektrizitätskonstanten $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ findet man auf gleiche Weise

¹⁾ Es ist eine grundfalsche Anschauung, daß ein Durchschlag schon erfolgt, wenn nur an einer Stelle oder in einer dünnen Schicht die Beanspruchung die Festigkeitsgrenze überschreitet. Wenn das richtig wäre, wäre es kaum möglich, höhere Spannungen hinreichend zu isolieren. Zu den besten Isolierstoffen, über die wir z. Zt. verfügen, gehört Papier, das im Vakuum getrocknet und mit einer Lackschicht überzogen ist. Bei allen Anwendungen solchen Papiers wird die elektrische Festigkeit der Papierschicht weit überschritten, ohne daß ein Durchschlag erfolgt, weil eben die Lackschicht den Durchgang der Elektrizität so lange verhindert, bis auch ihre Festigkeit überschritten ist. Vgl. auch S. 536, 547.

²⁾ Nach W. Fellenberg, ETZ 1912, S. 585. Die elektrische Festigkeit wäre bei dieser zylindrischen Anordnung noch größer, wenn der Mikanitzylinder größeren Durchmesser hätte, so daß er einen dicken Luftzylinder umschließen würde, wie sich im folgenden zeigen wird.

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{E}{a_1 + a_2 \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} + a_3 \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}}$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{E}{a_2 + a_1 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} + a_3 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}}$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{E}{a_3 + a_1 \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} + a_2 \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}}$$

Sind die leitenden Flächen keine Ebenen, sondern konzentrische Zylinder, wie bei einem Kabel (Abb. 36), so nimmt die Kraftliniendichte und daher auch die elektrische Kraft gegen die Achse zu. Für zwei verschiedene Isolierschichten folgt dann aus dem Obigen daß die elektrische Beanspruchung noch ungleichmäßiger wird, wenn der Stoff mit der kleineren Dielektrizitätskonstante innen liegt, und umgekehrt.

Verlaufen die Kraftlinien nicht senkrecht zur Trennungsfäche der beiden Stoffe, so treten an Stelle der Gl. 35 die Gl. 38 und 40. Dann ist die Verteilung der elektrischen Kraft nicht nur von den Dicken und Dielektrizitätskonstanten der beiden Stoffe, sondern auch vom Einfallswinkel der Kraftlinien abhängig.

Voraussetzung für das Vorstehende ist erstens, daß beide Stoffe wirkliche Isolatoren von homogener Beschaffenheit sind, d. h. daß sie kein merkliches metallisches oder elektrolytisches Leitungsvermögen und keine Poren haben. Hat aber einer der Stoffe ein merkliches Leitungsvermögen oder Oberflächenleitung, so nimmt die Trennungsfäche B (Abb. 484) das Potential jener leitenden Fläche an, mit der sie in Berührung ist, z. B. mit A . Dann ist

$$U_2 - U_3 = E$$

und daher

$$\mathfrak{S}' = \frac{E}{a'}$$

Vor dem Einschieben dieser Platte war die elektrische Kraft

$$\mathfrak{S}_v = \frac{E}{a + a'}$$

Das Einschieben einer solchen Platte bedeutet also in diesem Fall eine um so größere Steigerung der elektrischen Kraft, also eine um so größere Beanspruchung des anderen Stoffes, je dicker die Platte ist, mithin eine wesentliche Verschlechterung.

Zweitens ist Voraussetzung, daß keiner der Stoffe Poren hat, welche die Schicht durchsetzen. Ist eine solche vorhanden, so wird bei genügender elektrisierender Kraft die Luft in ihr ionisiert, d. h.

leitend. Es ist dann so, als wenn ein leitender Faden die Schicht durchsetzt. Die Kraftlinien nehmen den in Abb. 486 dargestellten Verlauf, d. h. die andere Schicht wird nun besonders stark beansprucht.

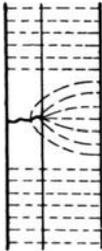


Abb. 486.

Das Einschieben einer solchen fehlerhaften Platte bringt also eine wesentliche Verschlechterung statt einer Verbesserung. Oberflächliche Versuche mit leitenden oder porösen Platten haben denn auch die falsche Ansicht erzeugt, als sei das Einschieben einer Platte aus festem Isolierstoff überhaupt eine Verschlechterung. Tatsächlich hat man aber in der Elektrotechnik schon seit langem von der Hintereinanderschaltung verschiedener Isolierstoffe Gebrauch gemacht, bevor man noch die im vorstehenden berechnete Wirkungsweise kannte. So wird z. B. bei den Öltransformatoren an Stellen, wo die Schichtdicke des Öles nicht ausreicht, noch eine zweite, feste Isolierschicht angewendet. Insbesondere werden zur Verstärkung der Isolation von Verbindungsleitungen, Zugstangen und dgl. Rohre aus imprägniertem Papier, Preßspan und dgl. darüber geschoben. Bei den Durchführungen der Hochspannungsleitungen durch die Gehäuse der Öl-

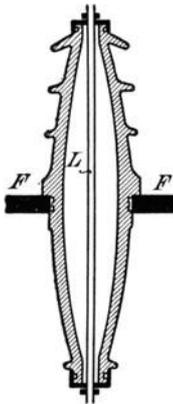


Abb. 487.

transformatoren, Ölschalter und dgl. erreicht man die höchste Durchschlagsfestigkeit bei kleinstem Materialaufwand, wenn man die Leitung durch ein Porzellanrohr gehen läßt, das im Innern noch einen großen Luftzwischenraum zwischen Leitung und Wand hat (Abb. 487). Die Durchschlagsfestigkeit dieser Anordnung ist größer, als wenn der ganze Raum zwischen der Leitung L und der Metallfassung F nur aus Luft oder nur aus Porzellan¹⁾ besteht. In großen Porzellanstücken entstehen beim Trocknen und Brennen leicht feine Risse, die man oft nicht sieht, weil sie zu fein und von der Glasur überdeckt sind. Daher erreicht man eine größere Sicherheit, wenn man diese Durchführungen mit Öl statt mit Luft füllt, was sich am leichtesten ausführen läßt, indem man die Durchführungen waagrecht unter der Öloberfläche anordnet, also durch die Seitenwand des Ölgefäßes gehen läßt²⁾.

¹⁾ Solche dicke Porzellanrohre erhält man, indem man mehrere Rohre ineinanderkittet oder zusammenglasiert. Die Durchschlagsfestigkeit ist aber kleiner als bei Hintereinanderschaltung von Porzellan und Luft nach Abb. 487.

²⁾ Die umgekehrte Anordnung: Luft oder Öl außen, Porzellan innen, ist erheblich schlechter. Denn wie oben betont wurde, kommt es darauf an, durch eine Schicht, in welcher die elektrische Beanspruchung möglichst klein ist, eine Schirmzone herzustellen. Da bei zylindrischer Anordnung die Kraftlinien-dichte außen kleiner ist als innen, wird die Beanspruchung der äußeren Schicht noch weiter verkleinert, also die Schirmwirkung verstärkt, wenn ihre Dielektrizitätskonstante größer ist als die der inneren Schicht. Durch umgekehrte Anordnung kann die ungleiche Beanspruchung ausgeglichen werden, so daß keine

Man kann Durchführungen natürlich auch dadurch herstellen, daß man biegsames Material wie imprägniertes oder lackiertes Papier, Mikanit und dgl. in vielen Lagen um die Leitung wickelt und so ein dickes Rohr herstellt. Materialaufwand und Kosten sind aber bei gleicher elektrischer Festigkeit größer als bei Abb. 487. Das Einwickeln von leitenden Zwischenschichten aus Stanniol (Kondensator-Durchführungen) ist dabei nicht nur zwecklos sondern schädlich. Denn durch eine leitende Zwischenlage zwischen zwei Isolierschichten werden die schlechten Stellen und Poren, die gewöhnlich nicht übereinander zu liegen kommen, hintereinandergeschaltet, so daß der Zweck der schichtenweisen Anordnung des Isolierstoffes vereitelt wird. Dazu kommt, daß die Endflächen eines so hergestellten Zylinders (oder Mantelflächen eines Kegelstumpfes) insofern verschlechtert werden, als die gleitenden Entladungen durch die Ränder der leitenden Flächen begünstigt werden.

254. Oberflächenleitung. Gleitende Entladungen.

Oft ist die Isolierung eines Gegenstandes trotz bestem Isolierstoff schlecht, weil die Oberfläche leitend ist. Die Ursache dieser Oberflächenleitung ist meist eine dünne Feuchtigkeitshaut. Besonders dem Glas ist sie eigen und daher muß es, um gut zu isolieren, mit Lack überzogen werden. Andere Stoffe, wie insbesondere die durch Vulkanisierung hergestellten, erhalten nach längerer Zeit eine leitende Oberfläche unter der Wirkung des Ozons und der salpetrigen Säure der Luft oder der schwefligen Säure des Stoffes selbst, die von der Vulkanisierung herrührt. Dabei handelt es sich um Stromleitung von elektrolytischem oder metallischem Charakter, denn es ist nichts zu hören und zu sehen. Sie tritt naturgemäß bei feuchtem Wetter stärker auf. Das wirksamste Mittel dagegen ist das Einsetzen des Objektes in Öl.

Davon zu unterscheiden sind Entladungen, die längs der Oberfläche eines festen oder flüssigen Isolierstoffes verlaufen, und die man daher als gleitende Entladungen bezeichnet. Sie können bei entsprechender Spannung in allen Formen, namentlich als Glimm- und Büschellicht, Funken- und Lichtbögen auftreten. Abb. 488 zeigt Büschelentladungen und zwei darauf folgenden Funkenentladungen, die um den Rand einer Hartgummiplatte herum von der einen Elektrode zur anderen gehen. Diese Büschelentladungen sind manchmal so lang und so lichtstark, daß sie einen prächtigen Anblick gewähren.

Schirmwirkung besteht. Gorman hat in der Tat für Kabel die letztere Anordnung empfohlen. Die Versuche haben aber keine Verbesserung gezeigt (vgl. auch Humann ETZ, 1912, S. 1306). Es hätte eben der umgekehrte Weg eingeschlagen, nämlich die größere Dielektrizitätskonstante außen angeordnet werden müssen, um die oben betonte Schirmzone zu erhalten wie bei den Porzellandurchführungen nach Abb. 487.

Was bei den gleitenden Entladungen, sowohl Büschel- als Funkenentladungen am meisten auffällt, ist ihre große Länge. Man hat allerlei weit hergeholt, aber unrichtige Gründe dafür angegeben. In Wirklichkeit erklärt sich diese große Länge einfach aus der größeren elektrischen Festigkeit des Isolierstoffes, auf dessen Oberfläche sie verlaufen, im Vergleich zur Luft. Auf einem Stoff, dessen elektrische Festigkeit geringer ist als die der Umgebung, gibt es

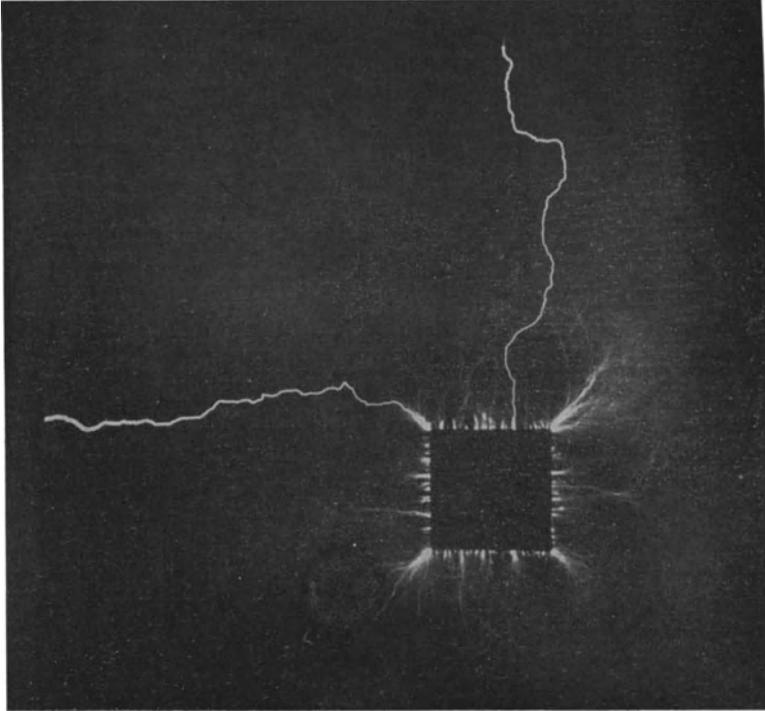


Abb. 488. Gleitende Entladungen: Büschellicht an der Elektrode und Gleitfunken um eine Platte herum.

keine gleitenden Entladungen. Bei dem durch Abb. 488 dargestellten Versuch war die Platte 3 mm dick. Hätten die Elektroden ohne diese Platte, also in Luft denselben Abstand gehabt, so wären Funkenentladungen schon bei 9000 V. von einer Elektrode zur anderen gegangen. Da aber die Platte erst bei etwa 20000 V. durchschlagen wurde, mußten bis dahin lange Büschelentladungen auf der Oberfläche und endlich Funkenentladungen um die Platte herum erfolgen. Wäre die Platte noch größer gewesen, so wären diese Funkenentladungen nicht zustande gekommen, sondern nur noch längere Büschel-

entladungen, bis endlich bei weiterer Steigerung der Spannung der Durchschlag der Platte eingetreten wäre. Daß Büschelentladungen bei 20000 V. große Länge und bei genügender Elektrizitätsquelle starke Lichterscheinungen zeigen, ist nicht zu verwundern. Auf die Dielektrizitätskonstante kommt es nicht an. Natürlich werden die gleitenden Entladungen noch begünstigt, wenn die Elektroden scharfe Ränder haben, wie schon auf S. 553 erwähnt wurde, oder wenn die Oberfläche des festen Stoffes hygroskopisch ist wie bei Glas, so daß noch eine gewisse Leitfähigkeit der Oberfläche dazukommt, oder wenn die Oberfläche ganz naß ist wie bei Freileitungsisolatoren im Regen.

Daß die große Länge gleitender Entladungen ihren Grund nur in der geringeren elektrischen Festigkeit der Luft hat, ergibt sich auch aus Abb. 489, die ein Porzellanrohr mit dachartiger Rippe zeigt. Die gleitenden Entladungen reichen nur bis zur Rippe. Die elektrische Festigkeit längs der Oberfläche ist hierbei größer, als wenn diese Rippe nicht vorhanden ist, d. h. wenn das Rohr glatt ist¹⁾. Bei weiterer Steigerung der Spannung gehen die Entladungen endlich auch über die Rippe hinweg, wenn nicht vorher ein Durchschlag des Rohres eintritt.

Sind Poren im Isolierstoff vorhanden, so bereiten die gleitenden Entladungen hier den Durchschlag vor. Ist dieser erfolgt (bei A in Abb. 490, S. 564), so wenden sich schließlich alle Entladungen den dadurch entstandenen Löchern zu.

Auch auf der Oberfläche eines flüssigen Isolierstoffes kommen gleitende Entladungen zustande, wenn seine elektrische Festigkeit größer ist als die der Luft, und wenn die Elektroden außerhalb des Öls nicht besonders isoliert sind. Daraus folgt, daß man Stromzuführungen zu Apparaten, die unter Öl sitzen, bis unter die Öloberfläche mit einem festen Isolierstoff isolieren muß.

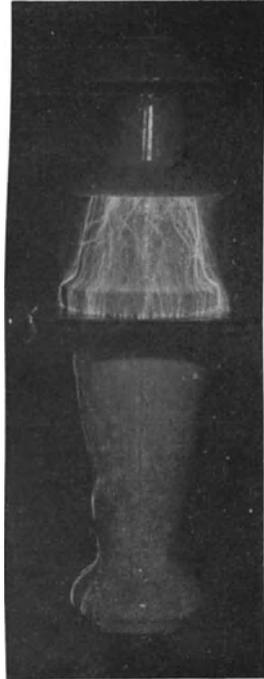


Abb. 489. Einfluß einer Rippe auf gleitende Entladungen.

255. Zerstörung der Isolierstoffe durch Entladungen.

Abgesehen von der in § 264 besprochenen Ozon- und Stickstoffbildung durch Entladungen in Gasen können in flüssigen und

¹⁾ Darum versenkt man auch, wo es möglich ist, die Elektroden in den Isolierstoff, oder bringt sie unter Öl, oder stülpt eine isolierende Kappe über sie.

festen Isolierstoffen Veränderungen durch Verbrennen, Schmelzen und mechanische Zerreißung des molekularen Zusammenhanges vorkommen. Das letztere ist der in § 252 behandelte Durchschlag. Das Verbrennen und Schmelzen ist eigentlich nur eine Nebenwirkung der von der Entladung entwickelten Hitze. Verbrennungen können umso weniger eintreten, je weniger Sauerstoff vorhanden ist. Funkenentladungen und Lichtbögen unter Öl bewirken daher nur eine Verkohlung von lteilchen. In Brand kann das Öl nur gesetzt werden, wenn es gleichzeitig weggeschleudert wird und dadurch die Luft zur Entladungsstelle Zutritt bekommt¹⁾.

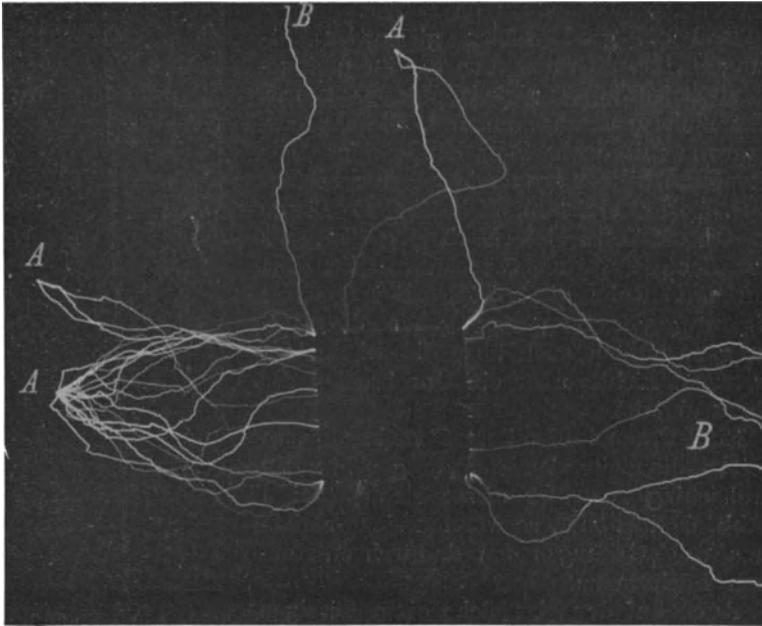


Abb. 490. Gleitfunken um die Platte herum (B) und Durchschläge (A) einer Stabilitplatte.

Chemische Veränderungen kommen fast nur bei den künstlichen, durch Vulkanisierung hergestellten Stoffen vor. Abb. 491 zeigt den Angriff einer schlechten Hartgummiplatte durch längere Einwirkung von Büschelentladungen. Wichtig ist die Zerstörung eines festen Isolierstoffes beim Durchschlag desselben. Gewöhnlich zeigt sich ein Loch oder ein unregelmäßig verlaufender Kanal manchmal mit aufgeworfenen, verbrannten oder geschmolzenen Rändern. Bei Por-

¹⁾ Daher müssen die Kontakte der lschalter tief unter Öl sitzen, vgl. auch S. 401.

zellan ist der Kanal manchmal so fein, daß er nicht leicht zu finden ist.

Der Durchschlag kommt offenbar dadurch zustande, daß die Kohäsion zwischen den Molekülen aufgehoben wird. Und zwar tritt er dort ein, wo Poren oder Bläschen vorhanden sind, und die darin enthaltene Luft (oder Gas) ionisiert wird. Daß der Durchschlag nur durch Luftbläschen oder Poren (manchmal auch durch leitende Verunreinigungen) verursacht wird, folgt daraus, daß immer nur Löcher oder Kanäle zustande kommen, selbst wenn man eine planparallele Platte zwischen parallele Elektroden also in ein homogenes Feld bringt. In einem solchen ist die elektrische Kraft überall dieselbe, alle Teile der Platte werden gleich beansprucht, und doch tritt immer nur eine Durchlöcherung derselben ein, niemals ein allgemeiner Zerfall des Stoffes, wie es sein müßte, wenn sich der elektrische Einfluß auf die Moleküle selbst erstrecken würde. Bei dicken Platten deutet auch der unregelmäßige, mit der ursprünglichen Kraftlinienrichtung nicht immer zusammenfallende Entladungskanal darauf hin, daß

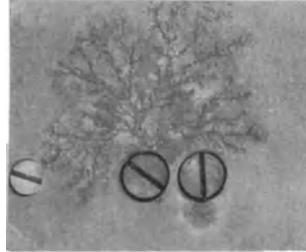


Abb. 491. Angriff der Oberfläche einer Hartgummiplatte durch Büschelentladungen.

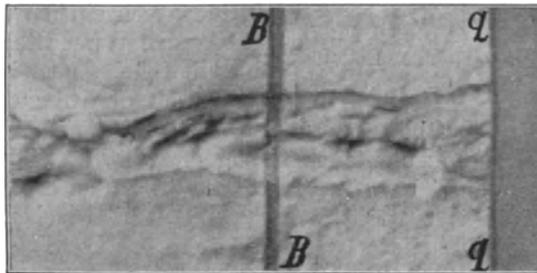


Abb. 492. Durchschlagskanal in Porzellan in 3facher Vergrößerung.

sich die Entladung Poren¹⁾ oder Bläschen oder Verunreinigungen aussucht. Einen völligen Beweis erbringt Abb. 490. Bei *B* gingen Funkenentladungen um die Platte herum. Bei *A* sind Durchschläge erfolgt, zwischen den Elektroden aber nicht, obwohl doch hier der Stoff viel stärker beansprucht wurde, als bei den 10 cm entfernten

¹⁾ Darum erhält man aus Holz und Papier, die im gewöhnlichen Zustande nicht isolieren, gute Isolierstoffe, wenn die Poren durch Imprägnierung mit Paraffin oder Öl im Vakuum ausgefüllt werden, und wenn durch luftdichten Abschluß dafür gesorgt wird, daß sich die Imprägnierung nicht mit der Zeit verflüchtigen kann. Solches Holz kann daher nur unter Öl, solches Papier nur in Kabeln mit luftdichter Umpressung verwendet werden.

Durchschlagsstellen A. Bei A waren eben Poren oder Bläschen vorhanden.

Ist die angewendete elektrische Spannung und Energie groß, so werden die Wände des Kanales verbrannt oder geschmolzen. Abb. 492 zeigt in dreifacher Vergrößerung einen Durchschlagskanal durch ein 2 cm dickes, aus zwei zusammenglasierten Porzellanrohren gebildetes Rohr¹⁾. Dieser breite Kanal entstand durch nachträgliches Ausbröckeln geschmolzener, schlackenartiger Porzellanteilchen. Nachdem diese ausgebrochen waren, erschien die gesunde Porzellanmasse, die unter der Einwirkung der Hitze glasartigen Glanz bekommen hat.

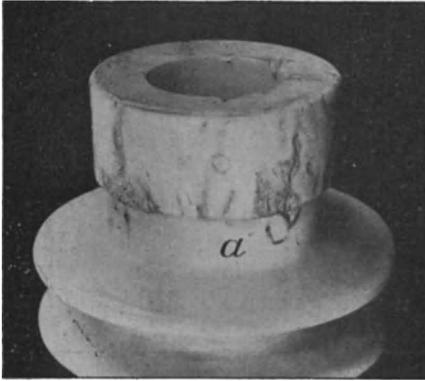


Abb. 493. Angriff (Ausbröckelung) des Porzellans durch gleitende Entladungen unter Öl.

sie im Porzellan Luftbläschen und Poren finden, im Öl aber nicht. Dadurch wurden Porzellanteilchen abgesprengt, so daß der Körper wie angefressen aussieht. Je länger die Entladungen dauern, desto tiefer werden die so entstehenden Furchen, weil es eben die Elektrizität immer vorzieht, unter der Oberfläche des Porzellans einen Weg zu bahnen, statt durch das Öl zu gehen.

Eigenartige Zerstörungen fester Isoliermassen treten ein, wenn gleitende Entladungen dadurch verhindert werden, daß die Luft durch gut isolierendes Öl ersetzt wird. Abb. 493 zeigt einen solchen Fall. Die Entladungen gingen, da sie den Körper nicht zu durchschlagen vermochten, von der äußeren Elektrode, die sich bei a befand, um den Rand des Rohres herum zur inneren Elektrode. Dabei zogen sie es vor, sich einen Weg durch das Porzellan unmittelbar unter der Oberfläche zu bahnen statt durch das Öl zu gehen, weil

256. Isolierung im Freien.

Wenn elektrische Leiter, die sich im Freien befinden, isoliert werden sollen, so sind besondere Bedingungen zu erfüllen, denn die Oberfläche der Isoliermittel wird beregnet. Nasse Oberflächen verursachen nicht nur Leitung der Elektrizität, sondern auch lange gleitende Entladungen (§ 254). Daher müssen die Isolatoren für Luftleitungen mindestens ein Dach haben, dessen Unterseite

¹⁾ B ist die Glasurschicht, welche die beiden Rohre verbindet, q ist die Oberflächenglasur. Da die Glasur glasartig ist, erscheint sie in der Photographie dunkel.

trocken bleibt. Bei Stützisolatoren erhält man eine weitere trockenbleibende Fläche durch Anordnung einer Hülse oder eines zweiten Daches um die Stütze. Die zweckmäßigsten Formen dafür haben sich aus längeren Versuchen unter künstlichem Regen ergeben. Prüft man unter Regen mit langsam steigender Spannung, so gehen zunächst vom Dachrande Büschelentladungen aus, die von den abfallenden Tropfen begünstigt werden und zunächst im Wege derselben verlaufen. Mit höherer Spannung werden sie immer länger und wenden sich schließlich der Stütze zu, da diese die andere Elektrode bildet (Abb. 494). Das sind noch Vorentladungen, die keinen Kurzschluß zwischen Leitung und Erde oder dem anderen Pol zur Folge haben. Steigt die Spannung weiter,

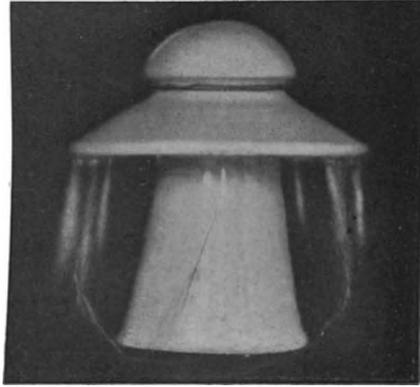


Abb. 494. Vorentladungen (Büschellicht).

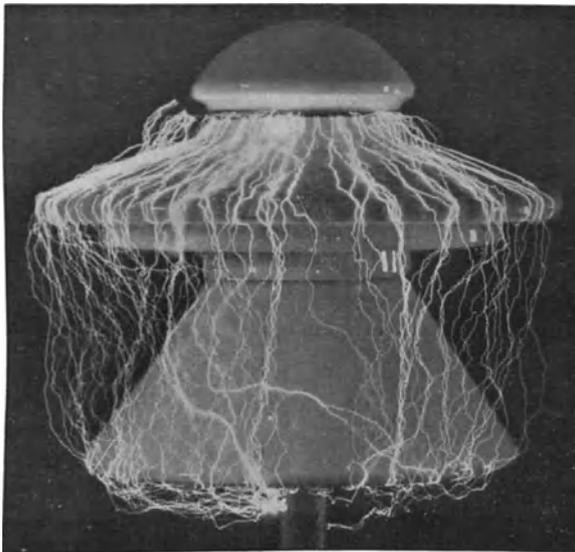


Abb. 495. Funkenentladungen.

so kommt es in dem durch die Vorentladungen ionisierten Weg zu Funkenentladungen (Spannungsüberschlag), die auf der nassen Oberfläche des Daches als gleitende Entladungen verlaufen

(Abb. 495)¹⁾. Liefert die Stromquelle genügend Energie, so geht die Funkenentladung sogleich in einen Lichtbogen über (Abb. 496)²⁾.



Abb. 496. Lichtbogen.

Bei sehr hohen Spannungen wird die Leitung an mehreren hintereinander geschalteten Isolatoren (Hängeisolatoren Abb. 473, 474) angehängt. Diese bilden aber eine schlechte Lösung der Aufgabe, denn die einzelnen Isolatoren sind nicht gleich beansprucht, sondern der unterste, an dem die Leitung hängt, ist stärker beansprucht als ein mittlerer. Wird der unterste durchgeschlagen, so wird jetzt der nächste um so stärker beansprucht und kommt dann um so eher zum Durchschlag. Vgl. auch § 249 über den Einfluß der Kapazität.

Weiter kann auf die Freileitungsisolatoren hier nicht eingegangen werden. Es sei auf die betreffenden Arbeiten des Verfassers („Elektr. Kraftbetriebe und Bahnen“ 1908, S. 41; 1909, S. 401; „Schweiz. Elektrot. Zeitschr.“ 1910, S. 58; „ETZ“ 1910, S. 1131; 1917, S. 433) verwiesen.

257. Äußeres Bild des Lichtbogens.

Zum Unterschied von der Funkenentladung bezeichnet man einen dauernden Elektrizitätsübergang zwischen zwei Elektroden in einem Gas von mehr als 0,1 mm Quecksilber Druck als Lichtbogen. Der Unterschied gegenüber einer dauernden Glimm- oder Büschelentladung (§ 233) besteht in der größeren Stromstärke und in dem geringeren Spannungsabfall an den Elektroden.

Ein Lichtbogen kann unter gewissen Bedingungen zwischen Elektroden aus Kohle und allen anderen gut leitenden Stoffen hergestellt werden. Bei Kohlenelektroden nimmt der Lichtbogen, wenn er zum ruhigen Brennen gekommen ist, folgende Gestalt an (Abb. 497). Beide Elektroden haben stumpfe Spitzen. Die positive (Anode) zeigt eine Abflachung oder Vertiefung, die man als Krater bezeichnet. Die Spitzen beider Elektroden befinden sich in Weißglut. Die Temperatur der positiven Spitze beträgt im Krater 3500° — 4000° , die

¹⁾ Der Unterschied zwischen Vorentladungen und vollständigen Entladungen (Überschlägen) zeigt sich deutlich darin, daß jene auf dem nassen Dach nicht sichtbar sind (Abb. 494), während diese auf dem nassen Dach deutlich ausgeprägt sind.

²⁾ Die Streifen in diesem Lichtbogen entsprechen den halben Wellen des Wechselstromes, weil sich der Lichtbogen infolge der elektrodynamischen Eigenwirkung (§ 82) erweitert.

der negativen Spitze 2500° — 3500° , die der Gasstrecke zwischen beiden, die man als den eigentlichen Bogen bezeichnet, liegt in der Mitte¹⁾. Das Licht geht zum weitaus größten Teile von den Elektrodenspitzen aus und zeigt wie bei allen weißglühenden Körpern das Spektrum des Sonnenlichtes. Vom Bogen gehen hauptsächlich blaue bis ultraviolette Strahlen aus. An ihm unterscheidet man den violetten „Kern“ *B* und die äußere „Aureole“ *C*. Der Kern ist der eigentliche stromleitende Teil; in ihm verlaufen die Stromlinien. Die Aureole scheint nur aus verbrennenden Teilchen des Elektrodenmaterials zu bestehen. Darum verschwindet sowohl die Aureole, sowie auch die zugespitzte Form der Elektroden bei den Bogenlampen mit eingeschlossenem Lichtbogen. Hier ist, um den Abbrand der Kohlen zu vermindern und dadurch eine längere Brenndauer zu erzielen, der Lichtbogen von einer an die Kohlenstifte gut anschließenden Glasglocke umgeben, so daß der Luftzutritt auf ein Minimum beschränkt ist. Infolgedessen erhalten die Elektroden beim Abbrennen keine spitzen, sondern flache Enden. Da dadurch die Lichtausstrahlung mehr behindert wird, muß man ihnen größeren Abstand geben, d. h. größere Lichtbogenspannung (60—80 Volt) anwenden.

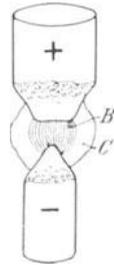


Abb. 497.

Bei den gewöhnlichen Bogenlampen verwendet man zur Verbesserung des Leitungsvermögens Kohlen, die eine Seele aus besser leitendem und leichter verdampfendem Material enthalten (Dochtkohlen). Da die positive Kohle eine höhere Temperatur hat und daher schneller abbrennt, wählt man sie dicker als die negative. Da sie auch mehr Licht ausstrahlt als die negative, ordnet man sie als obere Kohle an, wenn das Licht hauptsächlich nach unten geworfen werden soll.

Setzt man den Kohlen Oxyde oder Fluoride der Metalloide (Ca, Ba, Sr, Mg) zu, so gehen deren Dämpfe in den Bogen über, der nun auch eine beträchtliche Lichtmenge aussendet, natürlich nur jene Strahlen, die dem Spektrum des betreffenden Metalloides eigentümlich sind. Daher erhält das Licht durch Kalzium eine gelbliche, durch Strontium eine rötliche Färbung (Effektbogenlampen). Die Lichtausbeute nach unten wird noch weiter gesteigert, wenn die Kohlen nicht einander gegenüber, sondern unter einem kleinen Neigungswinkel nebeneinander stehen (Abb. 97, S. 122), so daß jetzt beide Elektroden und der Bogen ihr Licht nach unten senden. Das ist hier möglich, weil der Bogen durch das bessere Leitungsvermögen, das er durch die metallischen Dämpfe erhält, bei gleicher Spannungen zwei- bis dreimal so lang ist, als bei gewöhnlichen Kohlen. Die Aureole sieht dabei aus wie eine Flamme (Flammenbogenlicht).

¹⁾ Diese Temperaturen sind von der Stromstärke nahezu unabhängig. Die Steigerung der Stromstärke bewirkt nur eine größere Ausbreitung des Lichtbogens.

Im Lichtbogen findet ein Transport des Elektrodenmaterials von einer Elektrode zur anderen statt; hauptsächlich von der positiven zur negativen. Bei kurzen Lichtbögen erhält dadurch die negative Spitze einen Ansatz (Pilz), der von dem Material der positiven Elektrode herrührt.

258. Lichtbogenspannung und Existenzbedingung des Lichtbogens.

Wendet man das Ohmsche Gesetz formell auf den Lichtbogen an: $i = \frac{e}{w_s}$, so bedeutet w_s einen veränderlichen, also scheinbaren Widerstand, den man als Lichtbogenwiderstand bezeichnet. Daraus erhält man aber keinen Aufschluß über die Beziehung zwischen der Elektrodenspannung e , die man hier Lichtbogenspannung nennt, der Stromstärke i und dem Elektrodenabstand (Bogenlänge).

Genauere Untersuchungen haben gezeigt, daß dafür folgende Beziehung gilt:

$$e = g + \alpha l + \frac{\gamma + \delta l}{i};$$

wobei g , α , γ , δ Konstanten sind, die nur vom Material und der Dicke der Elektroden, sowie vom Gas, in dem der Bogen brennt, abhängen¹⁾. Für den normalen Gleichstrom-Lichtbogen zwischen Kohlenelektroden ist

$$e = 39 + 2l + \frac{12 + 10l}{i} \text{ Volt,}$$

wenn i in Ampere und l in mm ausgedrückt wird. Für $l = 0$ und $i = \infty$ ist $e = g = 39$. Mithin ist g jener Wert, den die Spannung mindestens haben muß, also die Minimumspannung; sie setzt sich zusammen aus dem Anoden- und dem Kathodenfall. Abb. 498 enthält eine Schar Kurven bei verschiedener Lichtbogenlänge, aus der die Konstanten der letzten Formel ermittelt wurden²⁾. Da sie die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung darstellen, bezeichnet man sie als Charakteristik des Lichtbogens. Abb. 499 zeigt die Abhängigkeit der Lichtbogenspannung von der Bogenlänge bei verschiedenen Stromstärken. Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse gibt die Minimumspannung für die betreffende Stromstärke, das ist der Wert $e = g + \frac{\gamma}{i}$.

Die Minimumspannung bei größter Stromstärke, das ist also g , hat für beiderseits gleiche Elektroden folgende Werte in Volt:

¹⁾ Über die Werte dieser Konstanten bei verschiedenen Elektrodenstoffen siehe Rasch, „Das elektrische Bogenlicht“, Braunschweig 1910.

²⁾ Nach H. Ayrton.

Gewöhnliche

Kohle	Platin	Eisen	Kupfer	Zink	Silber	Kadmium
39	27,5	25	24	20	15,5	10,5

In der Verteilung der Minimumspannung auf Anoden- und Kathodenfall zeigt sich ein Unterschied zwischen Glimmentladung (§ 234) und Lichtbogen. Während dort der Kathodenfall erheblich größer

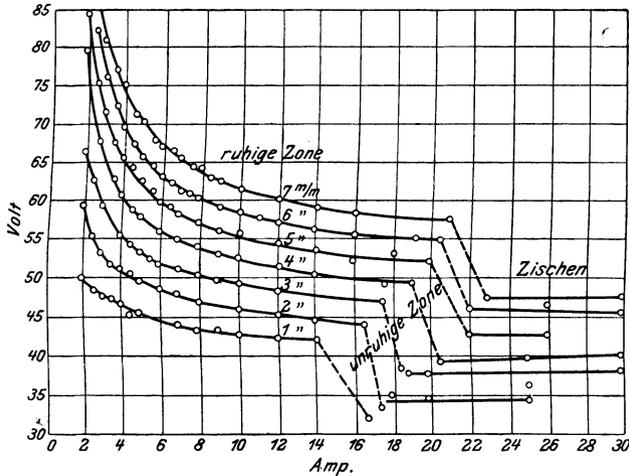


Abb. 498. Lichtbogencharakteristik zwischen Kohlenelektroden.

ist als der Anodenfall, ist das hier nicht der Fall. Bei gewöhnlichen Kohlen beträgt der Kathodenfall 8 V., der Anodenfall 31 V. Bei Metallelektroden ist der Kathodenfall um ein wenig größer als der Anodenfall.

Die Minimumspannung gibt keinen Aufschluß über die Existenzbedingung des Lichtbogens; sie sagt nur, welche Spannung mindestens notwendig ist, wenn die Stromstärke sehr groß und die Bogenlänge Null ist. Bei kleinerer Stromstärke und größerer Länge ist eine höhere Spannung erforderlich. Steigt z. B. der Spannungsabfall in der Stromquelle so sehr an, daß von der EMK nicht genug für die Lichtbogen-spannung übrig bleibt, so verlöscht der Lichtbogen. Der Bestand des Lichtbogens hängt also auch von den Verhältnissen im äußeren Stromkreis ab. Mathematisch läßt sich die dynamische Existenzbedingung (Stabilitätsgrenze) dadurch ausdrücken, daß der Lichtbogen erlischt, wenn

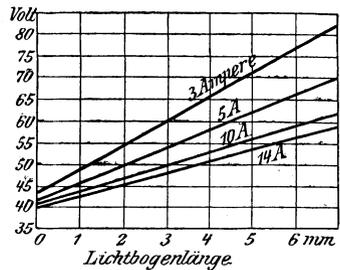


Abb. 499. Lichtbogen-spannung zwischen Kohlenelektroden.

$$-\frac{de}{di} < w_a \text{ ist}^1),$$

d. h. wenn $\frac{de}{di}$ negativ und kleiner ist als der äußere Widerstand w_a des Stromkreises. Er erlischt also nur, wenn bei zunehmender Stromstärke i die Bogenspannung e abnimmt, denn dann ist der Differentialquotient negativ. Das ist der Fall, wenn die Bogenlänge vergrößert wird, z. B. durch ein magnetisches Gebläse oder durch Auseinanderziehen der Elektroden. Das Verhältnis $\frac{de}{di}$ ist dabei gleich der Änderung, die der Lichtbogenwiderstand w_s erfährt. Ist der Betrag dieser Änderung kleiner als der äußere Widerstand w_a , so erlischt der Lichtbogen. Ist der äußere Widerstand verschwindend klein, so liegt die Grenzbedingung bei $\frac{de}{di} = 0$.

D. h. die Grenze liegt dort, wo die Charakteristik (Abb. 498) parallel zur Abszissenachse wird. Schon wenn der Lichtbogen in die Nähe dieser Grenze kommt, wird der Lichtbogen unruhig, die Stromstärke schwankt, und man hört ein brummendes und zischendes Geräusch.

Je kleiner w_a ist, desto kleinere Werte von $\frac{de}{di}$ genügen, um den Lichtbogen zum Verlöschen zu bringen; er brennt also um so ruhiger, je größer der äußere Widerstand ist. Man verwendet daher schon seit den Anfängen der Bogenlichtbeleuchtung Vorschaltwiderstände, die man als Beruhigungswiderstände bezeichnet. Bei Wechselstrom verwendet man Drosselspulen; w_a bedeutet dann ihren scheinbaren Widerstand.

259. Das Wesen des Lichtbogens.

Der Lichtbogen ist zu den selbständigen Strömungen zu rechnen. Die Ionisierung geschieht im wesentlichen dadurch, daß die neutralen Atome im Kern des Bogens, in dem die Stromleitung vor sich geht, durch den Stoß freier Ionen zerspalten werden. Die neutralen Atome werden durch Verdampfung des Elektrodenmaterials erzeugt, da sich die Spitzen der Elektroden in Weißglut befinden. Infolge dieser hohen Temperatur muß hier aber auch ein Übertritt von Ionen aus den Elektroden in die Gasstrecke, also eine Elektrizierung im Sinne des § 244 stattfinden. Ferner dürfte auch eine Ionisierung durch hohe Temperatur und ultraviolette Strahlung (§ 243) mitspielen, so daß man es also im Lichtbogen mit einer selbständigen und unselbständigen Strömung zu tun hat, wobei die

¹⁾ Kaufmann, Annal. d. Phys. 2, S. 158, 1900. Granquist (Gesellsch. d. Wissensch. zu Upsala 1903) hat diese Bedingung in folgender Form ausgedrückt: $E + i^2 \frac{dw_s}{di} < 0$, wobei E die EMK der Stromquelle bedeutet.

erstere stark überwiegt. Daraus erklärt sich, warum für den Lichtbogen die einfache theoretische Formel der selbständigen Strömung nicht genügt, sondern nur die im vorigen § angegebene.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich auch, warum es nicht möglich ist, einen Lichtbogen herzustellen, wenn die Elektroden verhindert werden, die erforderliche hohe Temperatur anzunehmen, und zwar ist es hauptsächlich die Kathode, die eine gewisse Temperatur unbedingt haben muß. Die Schwierigkeit, einen Lichtbogen unter Öl herzustellen, erklärt sich aus der starken Abkühlung, die durch das Öl bewirkt wird. Will man einen Lichtbogen herstellen zwischen einem Kohlenstift und einem rotierenden Kohlenzylinder, wo immer neue kalte Stellen dem Stift gegenüber treten, so gelingt es, wenn der rotierende Zylinder Anode ist, dagegen nicht, wenn er Kathode ist. Man muß daher annehmen, daß es hauptsächlich die Kathode ist, die freie Ionen aussendet und so die nötigen Geschosse liefert, um die große Menge neutraler Atome, die durch Verdampfung der Elektroden entstehen, zu zerspalten. Das steht in Übereinstimmung mit dem Entladungsvorgang in sehr verdünnten Gasen (§ 233), wo ebenfalls die Kathode es ist, welche die freien Ionen aussendet. Wo die negativen Ionen auftreffen, verursachen sie eine starke Erwärmung (§ 235). Darum hat beim Lichtbogen die Anode eine höhere Temperatur als die Kathode. Von der Glimmentladung unterscheidet sich der Lichtbogen dadurch, daß der Kathodenfall bedeutend kleiner ist als dort. Das erklärt sich eben aus der hohen Temperatur und der dadurch bewirkten Ausstrahlung freier Ionen (§ 244).

Da diese Ausstrahlung das Vorausgehende ist, so kann die Einleitung (Zündung) eines Lichtbogens entweder dadurch geschehen, daß man zuerst eine Funkenentladung zwischen den Elektroden erzeugt, oder daß man die unter Spannung stehenden Elektroden zur Berührung bringt. An den Berührungsstellen werden die Elektroden durch die Stromwärme glühend, die Ausstrahlung freier Ionen findet statt, und nun kann man die Elektroden wieder auseinanderziehen bis auf die der Stromstärke entsprechende Entfernung¹).

260. Der Quecksilberlichtbogen.

In sehr verdünnter Luft kann zwischen einer Quecksilberkathode und einer beliebigen Anode ein Lichtbogen hergestellt werden, der bei 100 Volt eine Länge bis zu einem Meter erreicht. Der Strom wird von dem den Raum erfüllenden Quecksilberdampf geleitet. Das Licht geht nur von diesem, nicht von den Elektroden aus und zeigt daher das Spektrum des Quecksilbers, dem die roten Strahlen fehlen, während die blauen bis ultravioletten überwiegen.

¹) Näheres über Lichtbögen und Bogenlampen in E. Rasch, „Das elektrische Bogenlicht“ Braunschweig 1910 und J. Zeidler, „Die elektrischen Bogenlampen“, Braunschweig 1905.

Wird der Bogen in einem Glasgefäß erzeugt, so werden die ultravioletten Strahlen zum größten Teil von der Glaswand absorbiert. Wird aber ein Gefäß aus Quarz verwendet, der die ultravioletten Strahlen wenig absorbiert, so erhält man die stärkste Quelle für ultraviolettes Licht (Uviolampe).

Der Quecksilberdampf entsteht durch Verdampfung des Quecksilbers an der Kathode. Daher ist zu seiner Herstellung eine Zündung ebenso erforderlich wie beim gewöhnlichen Lichtbogen, entweder durch eine Funkenentladung bei hoher Spannung oder durch Neigen und Schütteln des Gefäßes, bis das Quecksilber mit der Anode in Berührung kommt.

Der glühende Quecksilberdampf kondensiert sich an den kühleren Wänden des Gefäßes und fällt in Tropfen nach abwärts. Daher soll sich die Kathode an der tiefsten Stelle befinden, weil dann ihr Quecksilbervorrat immer wieder erneuert wird. Zweckmäßig ist es, wenn das Gefäß eine außerhalb der stromleitenden Bahn liegende Erweiterung (*B* in Abb. 505) hat, um die Kondensation zu begünstigen (Kühlkammer), wodurch der Druck des Quecksilberdampfes geringer wird.

Je reiner der Quecksilberdampf ist, d. h. je besser das Vakuum vor dem Gebrauch der Lampe war, desto besser funktioniert sie. Während des Brennens hat der Quecksilberdampf einen Druck von 1 bis 2 mm Quecksilbersäule.

Mit dem gewöhnlichen Lichtbogen hat der Quecksilberlichtbogen nur das gemein, daß der Kathodenfall sehr gering ist, und zwar wie dort wegen des Austrittes freier negativer Ionen aus der Kathode infolge der hohen Temperatur, und weil die Quecksilberoberfläche wegen des hohen Vakuums immer metallisch blank ist. Da die zum Bestande des Lichtbogens nötigen freien negativen Ionen eben nur aus der negativen Elektrode austreten, ist es für den Bestand des Lichtbogens gleichgültig, ob die positive Elektrode aus Quecksilber oder einem anderen guten Leiter besteht. In allen anderen Punkten zeigt sich ein Unterschied zwischen dem gewöhnlichen und dem Quecksilberlichtbogen. Während bei jenem die Bogen-
spannung mit der Stromstärke abnimmt (Abb. 498), nimmt sie bei diesem im allgemeinen zu (Abb. 500). Während jener vom magnetischen Felde ebenso stark abgelenkt wird wie ein die gleiche Stromstärke führender metallischer Leiter, wird dieser wenig oder gar nicht beeinflusst. Während jener nach einer Unter-

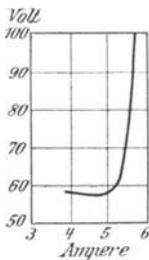


Abb. 500.

brechung von $\frac{1}{20}$ Sekunde von selbst wieder entsteht, ist es bei diesem nicht der Fall, selbst wenn die Unterbrechung nur $\frac{1}{1000}$ Sekunde dauert. Deshalb ist es nicht möglich, ohne besondere Hilfsmittel (§ 262 II) mittels Wechselstrom einen Quecksilberlichtbogen zu erhalten, selbst wenn beide Elektroden aus Quecksilber bestehen, und die Spannung mehr als 1000 V. beträgt. Bei fortgesetzter Steigerung

der Spannung erreicht man nur Funkenentladungen. Mithin ist der Quecksilberlichtbogen nicht als eigentlicher Lichtbogen, sondern als „positives Licht“ in hochevakuierten Entladungsröhren (§ 233) zu betrachten. Es zeigt sich auch wie dort ein dunkler Zwischenraum zwischen Kathode und Lichtsäule¹⁾.

261. Der Wechselstromlichtbogen.

Wird ein Lichtbogen von Wechselstrom unterhalten, so wechseln die Elektroden ihre Polarität bei jedem Wechsel des Stromes. Daher verschwindet der Unterschied in der Gestalt der Elektroden und beide erhalten die Form von stumpfen Spitzen. Obwohl der Wechselstrom zwischen jedem Wechsel durch Null geht, verlischt der Bogen doch nicht, weil die Elektroden und insbesondere die Kathode, auf die es ankommt, in Weißglut bleiben, und daher auch während des Augenblickes, wo der Strom Null ist, Ionen aussenden. Immerhin geht das Leitungsvermögen des Bogens etwas zurück und daher ist beim Anstieg der Spannung von Null an ein höherer Wert derselben notwendig, als wenn sie wie bei Gleichstrom konstant bleibt. Das erkennt man aus den Wellenformen in Abb. 501. Die Lichtbogenspannung steigt bis zu der Spitze im Augenblick *a*. Bis dahin ist die Stromstärke gering. Hier aber wird der Lichtbogen normal, die Stromstärke steigt plötzlich, die Spannung fällt auf den normalen Wert und behält ihn bis gegen Ende der halben Welle. Die Stromwelle erhält dadurch die Form einer Lanzenspitze. Eine Folge dieser Verzerrung beider Wellenformen ist es, daß das Produkt aus Strom und Bogenspannung nicht gleich der mit einem Wattmeter gemessenen Leistung ist, sondern größer, so daß sich ein Leistungsfaktor ergibt, der etwas kleiner ist als 1, obwohl Selbstinduktion oder Kapazität im Lichtbogen nicht vorhanden ist (vgl. S. 477).

Da der Strom bei jedem Wechsel durch Null geht, macht sich der Einfluß einer Abkühlung der Elektroden viel stärker bemerkbar als bei Gleichstrom. Bestehen beide Elektroden aus Metallstäben, so ist ein Wechselstromlichtbogen unter 500 V. unmöglich²⁾. Besteht

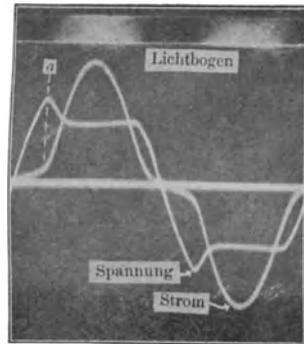


Abb. 501. Oszillographische Aufnahme von Strom, Spannung und Lichtbogen eines Wechselstromlichtbogens zwischen Kohlen.

¹⁾ Näheres über Quecksilberdampf lampen: Polak ETZ 1907, Heft 24 und 26.

²⁾ Bei genügender Spannung, genügender Leistung der Stromquelle und nicht zu großem Spannungsabfall in den Leitungen kann zwischen beliebigen Elektroden ein Wechselstromlichtbogen hergestellt werden, wie Abb. 99 einen zeigt.

die eine Elektrode aus Metall, die andere aus Kohle, so erhält man nur während einer halben Periode einen Lichtbogen, nämlich während jener, wo das Metall Anode und die Kohle Kathode ist, weil diese die erforderliche Temperatur erlangen kann. Abb. 502 zeigt die oszillographische Aufnahme der Lichtbogenspannung, des Stromes und des Lichtbogens selbst in einem solchen Fall. Bis zum Augenblick *a* steigt die Spannung zunächst wieder an. Jetzt entsteht der Lichtbogen und damit steigt auch der Strom rasch an, während die Spannung auf den normalen Wert sinkt. Auf diesem Wert bleibt sie bis zum Durchgang durch Null am Ende dieser Halbperiode bei *b*. Jetzt wird das Metall Kathode und daher entsteht kein Lichtbogen. Die Stromstärke ist Null, während die Spannung auf den Wert der EMK der Stromquelle ansteigt. Wie man sieht, besteht während der Halbperiode *b* bis *a* tatsächlich kein Lichtbogen, während er in Abb. 501 in jeder Halbperiode besteht.

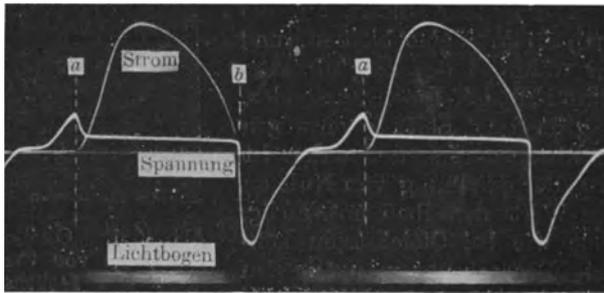


Abb. 502. Oszillographische Aufnahme von Strom, Spannung und Lichtbogen eines Wechselstromlichtbogens zwischen Metall und Kohle.

Für die Lichtbogenspannung eines normalen Wechselstromlichtbogens zwischen gleichen Kohlenelektroden gilt

$$e = 21 + 2l + \frac{37}{i} \text{ Volt (effektiv).}$$

Die effektive Minimumspannung (21 Volt) ist also erheblich kleiner als bei Gleichstrom (S. 571), was sich zum Teil daraus erklärt, daß für den Lichtbogen der Scheitelwert ($1,4 \times 21 \approx 30$) in Betracht kommt, zum Teil daraus, daß abwechselnd jede Kohle Kathode wird.

262. Elektrische Ventile. Gleichrichter.

I. Die im vorstehenden beschriebene Anordnung einer Metall- und einer Kohlenelektrode läßt, wie wir gesehen haben, nur die eine Halbwelle des Wechselstromes hindurch, so daß man einen von Pausen unterbrochenen, gleichgerichteten Strom erhält. Diese Anordnung wirkt also wie ein Ventil, das sich nur nach einer Seite

öffnet und daher Flüssigkeit nur in einer Richtung durchläßt. Die Ursache dieser einseitigen Wirkung liegt darin, daß Kathode und Anode verschiedene Funktionen beim Durchgang der Elektrizität durch eine Gasstrecke haben. Sind nun noch die Elektroden derart beschaffen, daß die eine ihre Aufgabe als Kathode leichter erfüllt als die andere, so wird zum mindesten ein stärkerer Strom in jener Halbperiode hindurchgehen, wo sie Kathode ist, während in der anderen Halbperiode nur ein schwacher oder gar kein Strom hindurchgelassen wird.

II. Aus § 260 wissen wir, daß zum Bestande eines Quecksilberlichtbogens unbedingt erforderlich ist, daß die Kathode aus metallischem Quecksilber besteht, während die andere aus einem anderen Leiter bestehen kann. Schließt man eine solche Quecksilberröhre an eine Wechselstromquelle an, so kann der Strom nur während jener Halbperiode durch, wo das Quecksilber Kathode ist. Dieser Fall liegt also genau so wie bei dem durch Abb. 502 erläuterten Fall des Metall-Kohlelichtbogens. Praktisch steht der Anwendung dieses Verfahrens der Umstand entgegen, daß die Zündung eines Quecksilberlichtbogens schwierig ist. Wenn der Lichtbogen nach der einen Halbwelle erloschen ist, entsteht er nur wieder, wenn er ganz von neuem gezündet wird. Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn drei um 120° verschobene Wechselströme (Dreiphasenstrom) in einem Gefäß mit drei Anoden und einer Quecksilberkathode (Abb. 503) zur Anwendung kommen. Wenn der Strom I (Abb. 504) seinen Nullwert erreicht, hat der Strom II schon den Wert e .

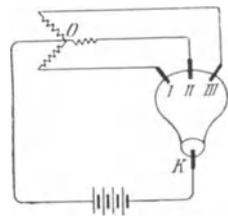


Abb. 503. Quecksilbergleichrichter für Drehstrom.

Der Lichtbogen geht daher schon zur Zeit t_1 auf den zweiten Strom und die Anode II über. Bevor dieser Null wird, geht der Lichtbogen zur Zeit t_2 auf den Strom III und die Anode III über; von da wieder auf den Strom I und die Anode I und so fort, so daß ein dauernder Lichtbogen besteht, wobei K immer Kathode ist. Jeder der drei Ströme muß durch die Leitung KO zwischen der Kathode und dem neutralen Punkt des Stromerzeugers gehen. Es fließt also hier ein Strom von der in Abb. 504 stark ausgezogenen Form; das ist ein pulsierender Gleichstrom. Hier kann also z. B. eine Akkumulatorenbatterie eingeschaltet und geladen werden. Bei einem einzelnen Wechselstrom erreicht man dasselbe, nämlich den Anschluß eines zweiten Lichtbogens, bevor der der ersten Halbwelle verlöscht, durch die in Abb. 505 dargestellte Schaltung, wo die von der Stromquelle F_1, F_2 kommende Spannung durch die Drosselspulen D_1, D_2 geteilt wird.

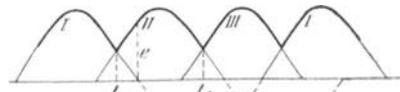
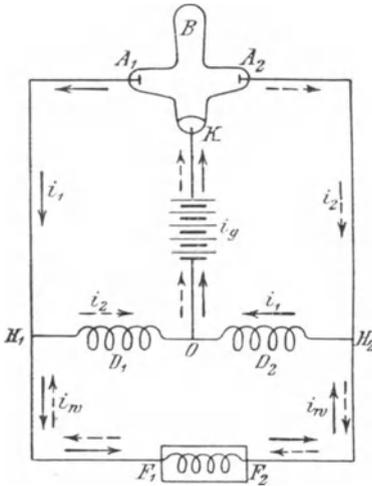


Abb. 504.

Zwischen dem dadurch erhaltenen Spannungsmittelpunkt O und der Quecksilberkathode K kann eine zu ladende Batterie eingeschaltet werden. Die eine Halbwelle i_1 nimmt den durch die ausgezogenen Pfeile, die andere i_2 den durch die gestrichelten Pfeile angedeuteten Weg. In Abb. 506 sind diese beiden



Weg. In Abb. 506 sind diese beiden durch oszillographische Aufnahmen dargestellt. Wie man sieht, setzt der zweite ein, bevor der erste Null wird. In der Leitung OK kommen sie beide im selben Sinn zusammen und ergeben den pulsierenden Gleichstrom i_g . Die Spannung zwischen den Punkten OK hat gleiche Form. In der Stromquelle und in den Leitungen $F_1 H_1$ und $F_2 H_2$ verkehrt der gewöhnliche Wechselstrom. In Abb. 507 ist noch die Spannung zwischen der Anode A_1 und der Kathode K dargestellt. Die Spannung zwischen A_2 und K hat gleiche Gestalt. Beide zusammen geben die Spannung zwischen A_1 und A_2 , die sich nur durch die kleinen

Abb. 505. Quecksilbergleichrichter für einphasigen Wechselstrom.

Unterbrechungen beim Beginn jeder Halbwelle von der Klemmenspannung der Stromquelle $F_1 F_2$ unterscheidet. Eine eigenartige Form hat die Spannung an den Klemmen OH_1 oder OH_2 der Drosselpulen. Sie ist unsymmetrisch zur Nulllinie und die Abstände

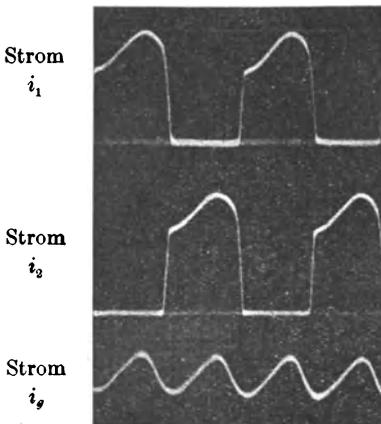


Abb. 506.

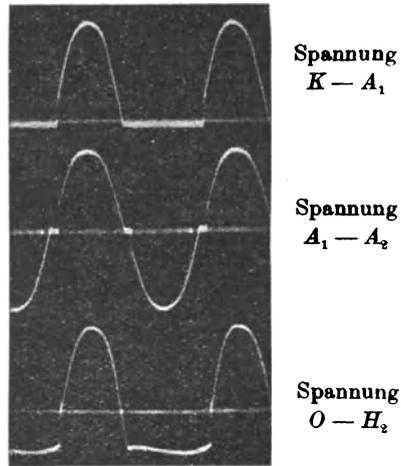


Abb. 507.

der Nullpunkte sind verschieden lang; sie hat den Charakter der Wellenform in Abb. 401, enthält also ein Glied zweiter Ordnung. Mithin hat das magnetische Feld in diesen Drosselspulen eine Wellenform wie Abb. 400. Wird als Stromquelle ein Transformator angewendet, so kann die Teilung der Spannung dadurch erfolgen, daß man den Anschluß O in der Mitte der sekundären Spule macht.

Bei sehr hohen Spannungen kann ein direkter Stromübergang zwischen A_1 und A_2 stattfinden, weil diese mit den Klemmen der Stromquelle in Verbindung stehen, und das Gefäß mit leitendem Quecksilberdampf gefüllt ist. Um das zu verhindern, schaltet man den Klemmen A_1 und A_2 Drosselspulen vor¹⁾.

III. Die in § 244 erwähnte Wirkung glühender Metalloxyde, durch die der Kathodenfall einer Entladungsröhre auf 20 V. herabgesetzt wird, kann ebenfalls zur Ventilwirkung benützt werden²⁾, wenn als zweite Elektrode ein Metall verwendet wird (Abb. 508). Durch den Hilfsstrom i_h wird die Oxydelektrode O glühend erhalten. Von dem Wechselstrom i_w wird dann nur jene Halbwelle durchgelassen, bei der O Kathode ist.

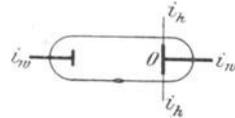


Abb. 508

IV. Auch bei gewöhnlichen Funkenentladungen tritt eine Ventilwirkung ein, wenn die eine Elektrode aus einer Spitze, die andere aus einer Platte besteht, weil die Kraftliniendichte und daher die elektrische Kraft an einer Spitze größer ist als an einer Platte. Bei geeignetem Verhältnis des Elektrodenabstandes zur Spannung tritt daher die Entladung nur bei jener Halbwelle ein, wo die Spitze Kathode ist, dagegen nicht, wenn die Platte Kathode ist.

V. Legt man zu einem der vorstehenden elektrischen Ventile einen Nebenschluß CD (Abb. 509), so erhält man in diesem jene Halbwelle, die durch das Ventil nicht durchgelassen wird, wenn der Widerstand des Nebenschlusses kleiner ist als der des Ventiles. Daraus erklärt sich die Gleichstromspannung, die man mißt, wenn man ein Gleichstrom-Voltmeter mittels der Sonden CD an die Kohlen eines Wechselstromlichtbogens AK anlegt, weil eine kleine Ungleichheit zwischen den Elektroden immer vorhanden ist. Die vollkommenste Trennung der beiden Halbwellen erhält man, wenn man den Nebenschluß mit einem entgegengesetzt geschalteten Ventil versieht, wie Abb. 510 zeigt. Dann geht durch jeden der beiden Zweige immer nur jene

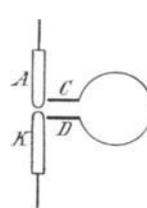


Abb. 509.

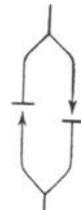


Abb. 510.

¹⁾ Näheres bei: Tschudy, ETZ 1912, S. 1088; Schäfer, ETZ 1912, S. 1164; 1918, S. 321; Hartmann-Kempf, ETZ 1913, S. 253, 284; Epstein, ETZ 1913, S. 1415; Norden, ETZ 1913, S. 1479; Kruh, Elektrot. u. Maschinenbau 1914, S. 845.

²⁾ Wehnelt, Annal. d. Phys. 19, 1906.

Halbwelle, für die K Kathode ist, während dieselbe Halbwelle im jeweiligen anderen Zweig ein bedeutendes Hindernis findet.

VI. Auf einem anderen Wege gelang dem Verfasser¹⁾ die Zerlegung des Wechselstromes in seine beiden Halbwellen. Einer gewöhnlichen Kohle B (Abb. 511) wurde eine gespaltete C , deren Hälften durch Glimmer voneinander isoliert sind, gegenübergestellt, und ein Lichtbogen gezündet. Wird nun ein gleichgerichtetes magnetisches Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, hergestellt, so lenkt es den Lichtbogen während einer halben Welle

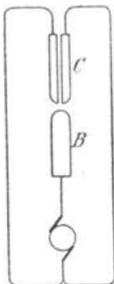


Abb. 511.



Abb. 512.

Teilung eines Wechselstromes durch ein magnetisches Gebläse.

nach der einen Seite (links), während der nächsten Halbwelle nach der anderen Seite (rechts) ab, so daß in den Zuleitungen zu C je ein gleichgerichteter pulsierender Strom verkehrt. Der Lichtbogen hat dementsprechend zwei Fackeln, wie Abb. 512 zeigt. Merkwürdigerweise gelingt diese Trennung durch das magnetische Feld nur im Lichtbogen, nicht aber in einem metallischen oder elektrolytischen Leiter.

VII. Endlich gibt es auch elektrolytische Ventile²⁾, bestehend aus einer Aluminiumanode, irgendeiner indifferenten (Kohle, Blei, Platin), Kathode und einem diese nicht angreifenden Elektrolyten (z. B. verdünnte Schwefelsäure, Alaun- oder Sodalösung). Wird eine solche Zelle in einen Stromkreis von mehr als 22 Volt eingeschaltet, so entsteht an der Aluminiumanode eine Polarisation von 20 bis 22 Volt. Nach anderer Ansicht soll es sich nicht um eine elektrolytische Polarisation, sondern um einen dünnen Überzug der Aluminiumplatte mit isolierendem Aluminiumoxyd handeln, der den Stromdurchgang verhindert. Geht der Strom in umgekehrter Richtung durch, so tritt der Sauerstoff an der indifferenten Elektrode auf, wo er entweicht. Schließt man also die Zelle an Wechselstrom an, so geht nur jene Halbwelle durch, für die die Aluminiumplatte

¹⁾ ETZ 1903, S. 403.

²⁾ Graetz, Annal. d. Phys. 62, 1897. Siegel, ETZ 1913, S. 970.

Anode ist. Bei der in Abb. 513 dargestellten, Schaltung mit vier solchen Zellen gelangen beide Halbwellen in den Leiter *CBD*, so daß man hier eine Batterie laden kann. Die gestrichelten Pfeile deuten den Weg der einen, die ausgezogenen Pfeile den der anderen Halbwellen an. Abb. 514 stellt die Spannungswelle des Wechsel-

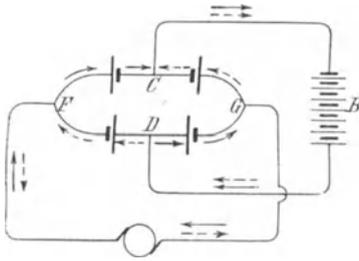


Abb. 513.

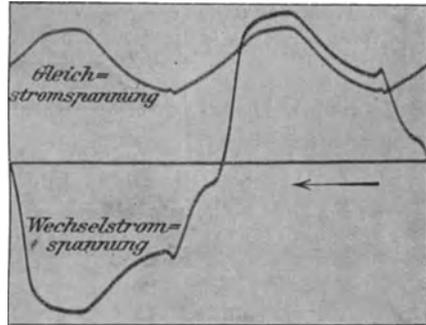


Abb. 514.

Vierzelliger elektrolytischer Gleichrichter.

stromes zwischen den Punkten *FG* und die des gleichgerichteten Stromes zwischen den Punkten *CD* dar. Wie man sieht, haben seine Pulsationen die doppelte Frequenz des zugeführten Wechselstromes wie beim Lichtbogen-Gleichrichter. Das ist überhaupt immer so, wenn durch Genschaltung zweier Ventile ein gleichgerichteter Strom entsteht.

VIII. Die Pulsationen der mittels vorstehender Methoden gleichgerichteten Ströme können durch Einschaltung von Drosselspulen vermindert werden. Natürlich wird dadurch aber auch die Stromstärke im ganzen vermindert.

Diese pulsierenden Ströme (oder Spannungen) sind hinsichtlich ihrer Wellenform aus einem Gleichstrom von der Stärke J_g und einem Wechselstrom von der Form $i = \mathfrak{J}_1 \sin \omega t + \mathfrak{J}_2 \sin 2 \omega t + \dots$ zusammengesetzt (Abb. 515). Ist J_w der effektive Wert dieses Wechselstromes, so gilt wie für jede beliebige Wellenform (Gl. 224), daß der effektive Wert $J = \sqrt{J_g^2 + J_w^2}$ ist. Die Wattleistung ist

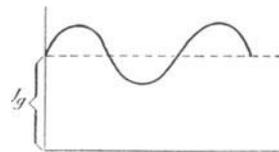


Abb. 515.

$$P = J_g E_g + J_w E_w \cos \varphi.$$

Natürlich darf zur Messung der effektiven Werte und der Leistung solcher Ströme kein Instrument verwendet werden, das nur Gleichstrom oder nur Wechselstrom anzeigt, sondern nur solche, die Gleich- und Wechselstrom in derselben Weise anzeigen, also

elektrostatische Instrumente in Wechselstromschaltung (§ 273) und dynamometrische Instrumente (§ 268 und 269) oder Hitzdrahtinstrumente (§ 270).

Schaltet man in den Gleichstromkreis einen Transformator ein, so kommt in dessen sekundärer Wicklung nur der Wechselstrom doppelter Frequenz (J_w) zur Geltung, weil ein Gleichstrom nicht transformiert wird. Solche Ventilschaltungen können also auch zur Frequenzverdoppelung benutzt werden (§ 220).

263. Der Lichtbogen als Schwingungserzeuger.

Wie Duddel gezeigt hat, lassen sich elektrische Schwingungen von beträchtlicher Stärke erzeugen, wenn man einen schwingungsfähigen, d. h. Selbstinduktion (L) und Kapazität (C) enthaltenden Stromkreis parallel zu einem Lichtbogen B (Abb. 516) legt. Für

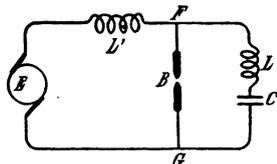


Abb. 516.

das Zustandekommen der Schwingungen im Lichtbogen ist erforderlich, daß der von der Stromquelle E und dem Lichtbogen B gebildete Stromkreis eine gewisse Selbstinduktion L' enthält, und daß der Lichtbogen eine gewisse von der Spannung abhängige Länge hat. Auf diese Weise können Schwingungen bis zu 50 000 Perioden erzeugt werden. Poulsen¹⁾ ist es gelungen,

durch Anwendung eines auf den Lichtbogen wirkenden magnetischen Gebläses und durch gekühlte Elektroden bei höherer Spannung (200 V.) Schwingungen bis zu 10^6 Perioden zu erhalten und dadurch diesen Schwingungserzeuger für die drahtlose Telegraphie nutzbar zu machen. Das Zustandekommen der Schwingungen erklärt sich auf folgende Weise. Beim Zünden des Lichtbogens wird der Stromkreis $EFBG$ geschlossen. Der Strom steigt aber nicht plötzlich von Null auf seinen endgültigen Wert an, sondern wegen der Selbstinduktion L' (§ 187) auf einer Exponentialkurve p (Abb. 517). Ist der Strom bis zu

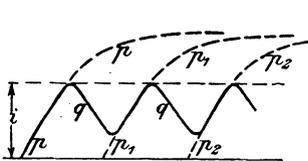


Abb. 517 a.

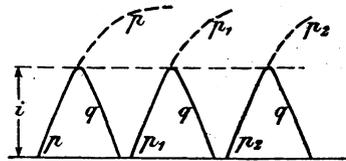


Abb. 517 b.

einem gewissen Werte i gestiegen, so hat das magnetische Gebläse, dessen Wirkung auf den Lichtbogen seiner Stromstärke und der Feldstärke proportional ist, so viel Wirkungsfähigkeit erlangt, daß

¹⁾ Poulsen, ETZ 1906, S. 1040.

es den Lichtbogen schwächt oder nahezu verlöscht. Der Strom kann aber wegen der Selbstinduktion L' nicht plötzlich abfallen, sondern nur im Wege der Kurve q . Mit dem Strome ist auch die Wirkung des magnetischen Gebläses kleiner oder Null geworden. Da aber die Ionisierung der Gasstrecke zwischen den beiden Elektroden nicht ganz verschwindet, und die Spannung eine hohe ist, entsteht ein neuerlicher Stromübergang; der Strom steigt jetzt auf der Kurve p_1 an. Von der Stärke des magnetischen Gebläses, der Spannung, der Beschaffenheit der Elektroden usw. hängt es ab, ob sich der Vorgang nach Abb. 517a oder b abspielt. Beim Werte i findet wieder das Auslöschen durch das magnetische Gebläse statt und so fort. Auf diese Weise kommt im Stromkreis EB die stark ausgezogene Welle zustande. Diese Welle ist für den Stromkreis BCL eine aufgedrückte Schwingung, weil dieser durch das gemeinsame Stück FG mit dem Stromkreis EB elektrisch gekuppelt ist (§ 206). Durch diese aufgedrückte Schwingung wird die Eigenschwingung des Kreises BCL erregt, und es entsteht nun aus beiden eine resultierende, erzwungene Schwingung nach den in § 197 und 203 erörterten Gesetzen. Bei genügender Übereinstimmung zwischen den Periodenzahlen der aufgedrückten und der Eigenschwingung kommt es zur Resonanz, d. h. zu einer erzwungenen Schwingung von großer Amplitude¹⁾.

Wesentlich für die Entstehung der Schwingungen im Lichtbogen ist nur die Anwendung solcher Mittel, die den Lichtbogen der in § 258 erwähnten Stabilitätsgrenze möglichst nahe bringen; dazu eignet sich jedes den Lichtbogen hindernde Mittel, dessen Wirkung mit der Stromstärke zunimmt. Dazu gehört auch die Hintereinanderschaltung zweier oder mehrerer Lichtbögen²⁾. Hierbei



Abb. 518.

nimmt beim Ansteigen des Stromes ein Lichtbogen dem anderen Spannung weg, und so bringen sie sich gegenseitig der Stabilitätsgrenze nahe.

Die Periodenzahl der vom Lichtbogen erzeugten und dem Schwingungskreis BLC aufgedrückten Schwingung hängt von sehr vielen Umständen ab, insbesondere von der Selbstinduktion L' samt der des Stromerzeugers, von der Spannung, von der Stärke des magnetischen Gebläses und sonstigen Einflüssen, die den Lichtbogen unstabil machen, von der Art der Elektroden, von der Art des Gases, in dem der Lichtbogen brennt, usw.

¹⁾ Weil diese Schwingung selbstverständlich so lange andauert, als im Lichtbogen die aufgedrückte Schwingung erzeugt wird, wurde sie als „unge-dämpfte Schwingung“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist unzutreffend, weil auch dabei Dämpfung durch Stromwärme und Kondensatorverluste besteht. Sachgemäß ist nur die Bezeichnung „dauernde Schwingung“.

²⁾ Hahnemann, ETZ 1906, S. 1089.

Außer den durch Abb. 517a dargestellten Lichtbogenschwingungen erster Art und den durch Abb. 517b dargestellten Lichtbogenschwingungen zweiter Art, kann noch eine dritte Art (Abb. 518) entstehen. Diese Schwingungen sind reine Eigenschwingungen des Stromkreises *BLC*. Sie entstehen durch Entladung des Kondensators *C* über den Lichtbogen und haben daher die durch Gleichung IX (S. 410) angegebene Frequenz. In der Funkentelegraphie werden nur die Schwingungen erster und zweiter Art angewendet, weil nur diese den Vorteil konstanter Amplituden bieten¹⁾.

264. Ozonisierung und Stickstoffbindung.

Beim Durchgang der Elektrizität durch Gase treten verschiedene chemische Wirkungen ein.

Die im Gas enthaltene Feuchtigkeit wird durch elektrische Entladungen in Wasserstoff und Sauerstoff (Knallgas) zerlegt. Gleichzeitig findet aber auch eine Entzündung und Wiedervereinigung zu Wasser statt. Die Entzündung des Knallgases erfolgt unter kleinen Explosionen, woraus sich das knisternde, prasselnde, knallende Geräusch der Lichtbögen und Funkenentladungen erklärt.

Die Bindung des in der Luft enthaltenen Stickstoffes an den Sauerstoff findet bei Funkenentladung und Lichtbogen statt. Am zweckmäßigsten erfolgt die Bildung von Stickoxyden durch den letzteren, und zwar zunächst *NO* und dann bei genügender Luftzufuhr *NO₂*. Um eine möglichst großflächige Berührung mit der Luft herzustellen, wird ein Wechselstrom-Lichtbogen durch ein gleichgerichtetes magnetisches Feld in der durch Abb. 110 angedeuteten Art ausgebreitet, so daß er die aus Abb. 519a ersichtliche flächenförmige Gestalt erhält (Verfahren von Birkeland und Eyde). Nach dem Verfahren von Schönherr wird bei etwa 5000 V ein sehr langer Lichtbogen hergestellt. Die Neigung zum seitlichen Ausweichen und Verlöschen wird dadurch beseitigt, daß er in ein Rohr eingeschlossen ist, welches von einem spiralförmigen Luftwirbel durchströmt wird, in dessen Achse der Lichtbogen trotz seiner Länge ruhig

¹⁾ Die obige Erklärung der Lichtbogenschwingungen nach Abb. 517 als erzwungene Schwingungen wurde vom Verfasser in ETZ 1906, S. 1212; 1907, S. 69 gegeben im Gegensatz zu anderen Erklärungsversuchen, die den Kondensator als eigentliche Ursache der Schwingungen hinstellen, so daß es Eigenschwingungen wären, die durch die Formel IX S. 410 bestimmt sein müßten. Das gilt aber nur von den durch Abb. 518 dargestellten Schwingungen 3. Art. Man bezeichnet auch die Veränderlichkeit des Lichtbogenwiderstandes als die Ursache der Schwingungen. Das ist aber nur eine selbstverständliche Voraussetzung, die zur Erklärung nicht genügt (notwendige aber nicht hinreichende Bedingung). Denn in einem Leiter mit unveränderlichem Widerstand kann der Strom nur so verlaufen wie die Spannung. Andererseits ist aber auch der Widerstand jedes gewöhnlichen, stabilen Lichtbogens veränderlich, ohne daß Schwingungen in ihm entstehen. Aus obiger Erklärung erklärt sich auch die Beobachtung, daß die Lichtbogenschwingungen im allgemeinen nicht sinusförmig sind, während Eigenschwingungen immer sinusförmig sind.

brennt. Nach dem Verfahren von Pauling werden Lichtbögen durch einen Luftstrom an Hörner-Elektroden (Abb. 98) in rascher Folge in die Höhe getrieben¹⁾.

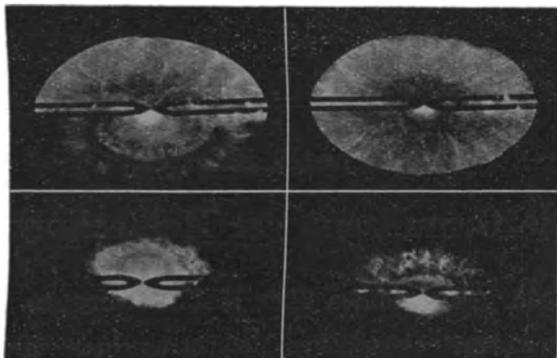


Abb. 519 a.

Die Vereinigung der Sauerstoffatome zu Ozonmolekülen (O_3) findet bei allen Entladungsformen, am stärksten aber bei der Glimm- und Büschelentladung statt. Um dabei Kurzschlüsse durch Funkenentladungen und Lichtbögen zu vermeiden, erzeugt man die Entladungen in elektrodenlosen Glasgefäßen, wie Abb. 519 b schematisch zeigt. Zwei Glaszylinder sind in einander geschoben. Der innere hat innen, der äußere außen einen Metallbelag; diese bilden die Elektroden und werden mittels der Zuleitungen cd an hochgespannten Wechselstrom angeschlossen. Die Entladungen müssen also erst durch die Glaswände und dann durch den Luftraum hindurch. Die frische Luft wird bei Z zugeführt, die ozonhaltige bei A abgeleitet. Die Entladung bewirkt aber auch einen Zerfall des schon vorhandenen Ozons (Desozonisierung), der um so stärker vor sich geht, je mehr Ozon schon in der Luft enthalten ist. Durch Steigerung der Entladung kann man also die Ozonisierung nur bis zu einer gewissen Grenze steigern, weil dann die Desozonisierung so stark wird, daß sie der Ozonisierung die Wage hält. Durch die oben erwähnte Oxydierung des Stickstoffes wird die Ozonbildung verringert.

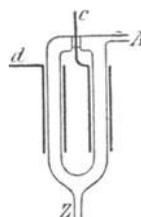


Abb. 519 b.

Sowohl das Ozon wie die Stickoxyde verraten sich durch einen stechenden Geruch; durch diesen kann man also auf Ozonbildung allein nicht schließen.

¹⁾ Näheres bei Erlwein, ETZ 1907, S. 41. Schönherr, ETZ 1909, S. 365. Weinwurm, Elektrot. u. Maschinenb. 1915, S. 5.

Sechzehntes Kapitel.

Die Grundlagen der Meßtechnik.

265. Allgemeines über Meßinstrumente.

Bei den meisten elektrischen Meßinstrumenten wird ein leicht drehbarer Teil durch die Wirkung des Stromes oder der elektrischen Ladung um eine Achse gedreht. Der Drehung wirkt eine Elastizitätskraft oder die Schwerkraft entgegen (Gegenkraft), bis bei einem gewissen Drehwinkel (Ausschlag) beide sich das Gleichgewicht halten, so daß einem bestimmten Strom- oder Spannungswerte ein bestimmter Ausschlag entspricht.

Ausschlag. Die Größe des Ausschlages wird entweder mittels eines an dem drehbaren Teile befestigten Zeigers auf einer Skala abgelesen (direkt zeigende Instrumente) oder auf dem drehbaren Teil ist ein Spiegel befestigt, der einen von einer Lichtquelle kommenden Lichtstrahl reflektiert und auf eine Skala wirft (Spiegelinstrumente), oder der drehbare Teil wird durch eine Torsionsfeder, die einerseits an ihm, andererseits an einem drehbaren Knopf mit Zeiger befestigt ist, in die Nullstellung zurückgedreht. Der Drehungswinkel des Knopfes wird auf einer Gradteilung abgelesen. Die ablenkende Kraft des Stromes ist diesem Torsionswinkel proportional (Torsionsinstrumente).

Dämpfung. Wird der die Ablenkung bewirkende Strom (oder Spannung) plötzlich auf das Instrument geschaltet, so erhält der drehbare Teil einen Stoß und schwingt daher so lange, bis seine Schwingungsenergie durch die dämpfende Wirkung der Reibung und des Luftwiderstandes aufgezehrt ist. Infolgedessen kann man die Ablesung erst nach einiger Zeit vornehmen, während welcher sich Strom oder Spannung schon verändert haben können. Um daher eine möglichst rasche Einstellung zu erreichen, werden besondere Mittel zur Dämpfung der Schwingungen angebracht. Solche sind:

1. Luftdämpfung. Ein mit der Achse A (Abb. 520) verbundener Flügel F bewegt sich in einer geschlossenen Luftkammer K , die so eng an den Flügel anschließt, daß die Luft mit erheblicher Geschwindigkeit und daher mit erheblicher Reibung durch den Zwischen-

raum hindurch muß. Von Wichtigkeit ist dabei, daß der Schlitz in der Kammer bei b , wo der Arm des Flügels hindurchgeht, möglichst eng ist, damit nicht zu viel Luft aus ihm entweichen kann. In Abb. 531, wo der Deckel der Kammer K abgenommen ist, ist der Dämpferflügel Z zu sehen. In Abb. 535 reichen die Kammern (zwei auf derselben Seite) bis nahe an die Achse, und die Flügel sind schaufelartig ausgebildet. Bei der von Raps an den Instrumenten von Siemens & Halske eingeführten Luftdämpfung (Abb. 521) ist der Schlitz überhaupt vermieden, weil sich der Dämpferflügel wie ein Kolben in einer nur an einem Ende offenen ringförmigen Röhre bewegt.

Bei fest aufgestellten Instrumenten wird zuweilen auch Flüssigkeitsdämpfung angewendet.

2. Magnetische Dämpfung. Mit dem drehbaren Teil ist ein leichter Aluminiumflügel verbunden, der sich bei der Drehung zwischen den Polen des Dauermagnetes M (Abb. 522) bewegt. Bei der Bewegung werden dessen Kraftlinien geschnitten und daher Ströme in den Flügel induziert, die die Bewegung zu hindern suchen (§ 125) und die Schwingungsenergie in Stromwärme umsetzen. Abb. 539 zeigt eine solche Dämpfung. Bei den Drehspulenzustrominstrumenten (Abb. 527) ist es das die Wicklung tragende Metallrähmchen, bei den Induktionsinstrumenten (Abb. 540 und 557) ist es die das Drehmoment hervorbringende Scheibe selbst, auf die der Dauermagnet wirkt. Bei jenen Galvanometern, deren drehbarer Teil ein kleiner Dauermagnet ist, wird dieser von einer feststehenden Kupferkapsel umschlossen, in der die dämpfenden Ströme bei der Drehung des Magnetes induziert werden. Die Dämpfung darf nicht zu stark sein, weil sonst die Bewegung des drehbaren Teiles zu langsam vor sich geht (das Instrument kriecht). Namentlich ist dann in der Nähe der endgültigen Einstellung die Bewegung eine so langsame, daß die geringste Reibung in den Lagern genügt, um zu bewirken, daß die Bewegung noch vor Erreichung dieser Einstellung zum Stillstand gelangt, also nicht richtig anzeigt. Es ist daher zweckmäßig, daß die Bewegung nicht vollständig aperiodisch erfolgt, sondern nur so viel gedämpft ist, daß das System noch ein oder zwei kleine Schwingungen um seine endgültige Einstellung macht. Sieht man solche, so ist man sicher, daß die Einstellung ohne Reibung und ohne Bewegungshindernis erfolgt. Da die Dämpfung der ersten bis zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, so wirkt sie

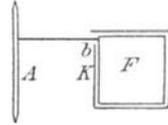


Abb. 520.



Abb. 521.

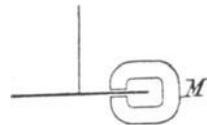


Abb. 522.

um so stärker, je rascher die Bewegung des drehbaren Teiles ist, also je kleiner dessen Trägheit ist.

Trägheit. Nicht zu verwechseln mit der Dämpfung ist die Trägheit, obwohl diese kurz dauernde Schwankungen des Stromes oder der Spannung nicht zur Geltung kommen läßt, weil ihre Kraftwirkungen nicht groß genug sind, um einer Masse von großer Trägheit eine merkliche Drehung zu erteilen. Kommt es aber durch einen genügenden Stromstoß zu einer Ablenkung, so dauern die Schwingungen um so länger, je größer die Trägheit ist, und daher ist eine um so stärkere Dämpfung erforderlich. Sehr große Trägheit, wie sie namentlich den Hitzdrahtstrommessern eigen ist¹⁾, bewirkt, daß selbst große Änderungen des Stromes, wenn sie rasch erfolgen, nicht angezeigt werden, sondern ein nicht definierbarer Mittelwert. Nur bei den sogenannten ballistischen Galvanometern (§ 278), die dazu dienen, die Elektrizitätsmenge eines kurz dauernden Stromes zu messen, ist große Trägheit notwendig.

Empfindlichkeit. Unter Empfindlichkeit eines Instrumentes versteht man die Fähigkeit, kleine Änderungen der zu messenden Größe anzuzeigen. Bei Instrumenten, deren Ausschlag der zu messenden Größe proportional ist, ist die Empfindlichkeit an allen Stellen des Meßbereiches dieselbe. Bei solchen, deren Ausschlag mit dem Quadrate der zu messenden Größe wächst, überhaupt bei allen, deren Skala nicht gleichmäßig verläuft, ist die Empfindlichkeit an verschiedenen Stellen des Meßbereiches verschieden. Die Empfindlichkeit ist bei gleichen Kräften um so größer, je kleiner die Reibung und die Trägheit des drehbaren Teiles ist. Die Dämpfung hat keinen Einfluß darauf, wenn sie nicht so groß ist, daß die kleinste Reibung bereits zu einem Bewegungshindernis wird. Die Empfindlichkeit ist im allgemeinen um so größer, je kleiner die Gegenkraft ist.

Genauigkeit. Diese ist von der Empfindlichkeit wohl zu unterscheiden. Sie ist gekennzeichnet durch den Unterschied zwischen dem richtigen Werte und dem vom Instrument angezeigten Werte. Je größer dieser Unterschied, desto kleiner die Genauigkeit, oder desto größer die Ungenauigkeit. Bei Instrumenten z. B., deren Angaben der zu messenden Größe proportional sein sollen, besteht die Ungenauigkeit in der Abweichung von der Proportionalität. Bei Instrumenten mit geeichter Skala besteht die Ungenauigkeit in der Abweichung vom Sollwert der Teilstriche. Die Ungenauigkeit kann herrühren von der Ausführung der Eichung und der Teilstriche oder von der Beschaffenheit des Instrumentes selbst (Ungleichheit des Ausschlages zu verschiedenen Zeiten infolge von Reibung, Temperaturänderung, Feuchtigkeit, magnetischen oder elektrischen Einflusses, Veränderung der Lage u. dgl.) In der Regel ist die Genauigkeit an verschiedenen Stellen des Meßbereiches verschieden.

¹⁾ Bei den Hitzdrahtinstrumenten handelt es sich natürlich nicht um mechanische Trägheit, sondern um die Temperaturträgheit des vom Strom durchflossenen Drahtes.

Einteilung. Direkt zeigende Instrumente kommen zur unmittelbaren Messung der Stromstärke, der Spannung (Potentialdifferenz) und der Leistung in Anwendung. Außerdem können diese Größen aber auch mittelbar gemessen werden.

Die Messung der Stromstärke kann auf folgende Arten geschehen:

- a) durch chemische Wirkung (Voltameter);
- b) durch Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten (Galvanometer, Tangenten-Boussole, Drehspulen-Instrumente);
- c) durch elektrodynamische Wirkung (Dynamometer, Stromwagen);
- d) durch Wärmewirkung (Hitzdrahtinstrumente);
- e) durch Anziehung oder Ablenkung weicher Eisenkörper im Felde des Stromes (Elektromagnetische Instrumente);
- f) durch elektrodynamische Induktion (Induktionsinstrumente);
- g) durch indirekte Methoden.

Die zur Gruppe a) und b) gehörenden Meßgeräte eignen sich nur für gleichgerichtete Ströme, die der Gruppen c), d), e) für Gleich- und Wechselströme, die der Gruppe f) nur für Wechselströme. Die zur Gruppe e) gehörenden bedürfen einer besonderen Eichung für die eine oder andere Stromart.

Die Messung der Spannung kann auf folgende Arten geschehen:

- a) durch die Anziehung oder Abstoßung statischer Ladungen (Elektrostatistische Spannungsmesser),
- b) durch alle Strommesser der vorstehenden Gruppen a) bis f) (Galvanometrische Spannungsmesser);
- c) durch indirekte Methoden.

Die Messung der Leistung kann auf folgende Arten geschehen:

- a) durch elektrodynamische Wirkung (Dynamometer, Stromwagen);
- b) durch elektrodynamische Induktion (Induktionsinstrumente);
- c) durch indirekte Methoden.

Im folgenden werden die einzelnen Gruppen behandelt.

Strom- und Spannungsmessung.

266. Voltameter.

Nach § 59 ist die von einem konstanten Strome J während der Zeit t in einer Zersetzungszelle ausgeschiedene Gewichtsmenge eines Ions

$$G = b J t,$$

wenn b sein elektrochemisches Äquivalent bedeutet. Daraus erhält man J , wenn die übrigen Größen bekannt sind.

Das Kupfervoltameter ist eine Zersetzungszelle, bestehend aus einer Kupferplatte als Anode und einer Kupfer- oder Platinplatte als Kathode. Als Elektrolyt dient eine 10- bis 15prozentige eisenfreie Lösung von Kupfersulfat. Man stellt die Elektroden mit einer gegenseitigen Entfernung von 1 bis 2 cm auf und rechnet auf etwa 1 dm² Oberfläche 2 bis 5 Ampere. Eine größere Stromdichte soll vermieden werden. Die Kathode muß vor dem Einsenken in die Zelle gut gereinigt und abgewogen werden. Nachdem der Strom eine gewisse Zeit von t Sekunden geschlossen war, spült man die Kathode vorsichtig ab und trocknet sie ebenso vorsichtig zwischen Fließpapier oder an der Luft, ohne zu erwärmen. Dann wiegt man wieder und erhält so das Gewicht des ausgeschiedenen Kupfers. Für Kupfer ist $z = 0,000328$ g in 1 Sekunde bezogen auf Ampere.

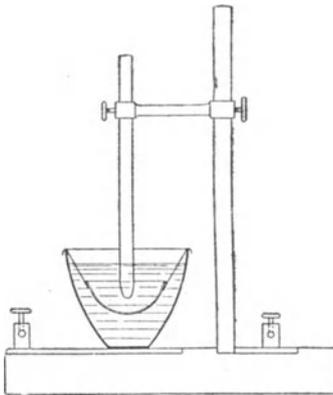


Abb. 523.

Eine genauere Bestimmung ermöglicht das Silbervoltameter. Bei der von der Firma Hartmann & Braun (Frankfurt a. M.) erhältlichen Ausführung dient ein Platintiegel (Abb. 523) als Kathode. Derselbe enthält eine 15 bis 30prozentige Lösung von salpetersaurem Silber. Als Anode dient ein Kegel oder Stab aus Silber. Die

Stromdichte soll 0,5 bis 2 A für je 1 dm² Oberfläche betragen. Für Silber ist $z = 0,001118$ g in 1 Sekunde bezogen auf Ampere¹⁾.

Diese Arten der Strommessung setzen natürlich einen konstant bleibenden Strom voraus; ist dies nicht der Fall, so kann man nur die während einer gewissen Zeit vom Strome gelieferte Elektrizitätsmenge bestimmen, entsprechend der Gleichung

$$G = bQ = bfi dt.$$

Nur zu diesem Zweck werden die elektrolytischen Methoden noch angewendet.

267. Instrumente mit Dauermagneten.

Die hierher gehörigen Instrumente, die man gewöhnlich als galvanometrische bezeichnet, beruhen auf der Kraftwirkung zwischen einem Magnet und einem stromführenden Leiter. Ist der Strom-

¹⁾ Näheres bei Rosa, Vinal und Daniel, ETZ 1913, S. 232, 1168. — Phys.-Techn. Reichsanstalt, ETZ 1914, S. 819.

leiter fest und der Magnet beweglich, so wird dieser abgelenkt. In der Regel ist der Magnet an einem Kokon- oder Quarzfaden aufgehängt. Seine Nullstellung ergibt sich aus der Einstellung im magnetischen Feld der Erde (oder im Felde eines Richtmagnetes) und der Gleichgewichtslage des Aufhängefadens.

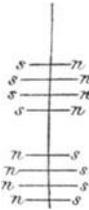


Abb. 524.

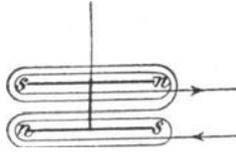


Abb. 525.

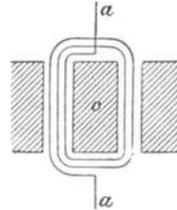


Abb. 526.

Befindet sich der Magnet in einem homogenen Felde, und sind die Ausschläge sehr klein, so sind die Ausschläge dem Strom proportional. Um die erste Bedingung zu erfüllen, macht man die Nadel sehr kurz und verwendet dafür mehrere (Abb. 524). Um die zweite Bedingung zu erfüllen, wendet man Spiegelablesung und weit entfernte Skala an, so daß man trotz sehr kleiner Drehungswinkel große Ausschläge auf der Skala erhält. Bei Instrumenten, die besonders empfindlich sein sollen, ist die Richtkraft des Erdmagnetismus schon zu stark. Der Magnet selbst darf aber nicht schwach sein, weil sonst auch die ablenkende Kraft schwach ist. Man verwendet daher astatische Nadelpaare (Abb. 525 und 524) und umgibt sie mit Spulen von entgegengesetzter Stromrichtung, so daß sich die ablenkenden Kräfte addieren. Statt der Verwendung eines astatischen Nadelpaares kann man die Empfindlichkeit auch dadurch erhöhen, daß man das ganze Instrument mit einem Eisenzylinder umgibt, der den größten Teil des Erdmagnetismus abschirmt (Abb. 139), so daß die Nullage eventuell nur durch den Aufhängefaden bestimmt wird (Panzer galvanometer).

Ist umgekehrt der Dauermagnet fest und der Stromleiter beweglich (System Deprez & D'Arsonval), so erhält man die sogenannten Drehspulenzinstrumente (Abb. 526 bis 528). Die Anordnung dieser Instrumente ist ähnlich der einer zweipoligen Gleichstrommaschine mit einer Ankerspule. Zwischen zwei Polen eines Dauermagnetes (Abb. 526) befindet sich ein fester Eisenzylinder *c*. In dem Luftzwischenraum zwischen beiden befindet sich eine Ankerspule, deren Aufhängedrähte zugleich als Stromzuführung *a* dienen, wenn das Instrument als Spiegelinstrument ausgeführt wird. Abb. 528 zeigt das aus dem Dauermagnet herausgehobene System eines solchen Spiegelinstrumentes (Bauart Siemens & Halske).

Bei den Zeigerinstrumenten ist die Ankerspule auf ein leichtes Aluminium- oder Kupferrähmchen aufgewickelt, das mittels zweier Spitzen in Achat- oder Saphirsteinen gelagert ist. Die Nullage wird

durch zwei Spiralfedern bestimmt, die gleichzeitig als Stromzuführung dienen. (In Abb. 527 ist ein Teil des vorderen Polschuhes weggeschnitten, um das Rähmchen sichtbar zu machen.) Diese Bauart wurde von Weston eingeführt.

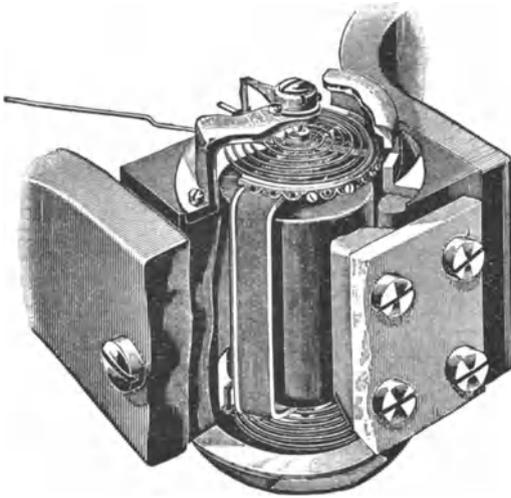


Abb. 527. Drehspulenzinstrument der Weston Co.



Abb. 528. System des Drehspulengalvanometers von Siemens & Halske.

Der Vorteil dieser Instrumente liegt in ihrer hohen Empfindlichkeit, weil das magnetische Feld in dem Luftzwischenraum sehr stark ist, und in ihrer starken durch das genannte Metallrähmchen bewirkten Dämpfung bei geringer Trägheit.

268. Dynamometer.

Das Wesen dieser von W. Weber angegebenen Instrumente besteht aus zwei zueinander senkrecht stehenden Stromkreisen (Abb. 529). Werden sie in der Richtung der Pfeile vom Strome durchflossen, so besteht Anziehung zwischen den gleichgerichteten und Abstoßung zwischen den entgegengesetzt gerichteten Seiten, d. h. die Stromflächen suchen sich parallel zu stellen. Die Kraft, mit der dies geschieht, ist in jedem Augenblick proportional dem Produkte der

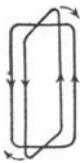


Abb. 529. Stromstärken in beiden Kreisen. Werden beide von dem-

selben Strome durchflossen, so ist sie proportional dem Quadrate der Stromstärke, also proportional dem in § 213 definierten Ausdruck für den effektiven Wert eines Stromes. Instrumente dieser Art zeigen also für Gleich- und Wechselstrom, unabhängig von Periodenzahl und Wellenform, den effektiven Wert an.

Bei den Torsionsdynamometern (Abb. 530) ist der eine Stromkreis mittels eines Kokonfadens und einer Spiralfeder an dem drehbaren Knopfe *K* aufgehängt. Stromkreis und Knopf sind mit Zeigern versehen. In der Ruhelage stehen diese auf dem Nullpunkt der Skala, und die bewegliche Spule steht senkrecht zu zwei anderen Spulen *A* und *B*, wovon die eine aus mehreren Windungen eines dünneren Drahtes (für schwächere Ströme) besteht. Die Enden der drehbaren Windung tauchen in zwei Quecksilbernäpfchen *c* und *d*. Wird nun der zu messende Strom mit den Klemmen 1 und 2 verbunden, so geht er durch die feste Spule *B* und durch die bewegliche Spule. Wird der Strom mit 3 und 2 verbunden, so geht er durch die feste Spule *A* und die bewegliche Spule. Wird nun die bewegliche Spule durch den Strom abgelenkt, so dreht man sie mittels des Knopfes *K* wieder auf Null zurück. Der Torsionswinkel, der vom Zeiger des Knopfes angegeben wird, ist proportional dem Quadrate der Stromstärke. In der Regel hat man eine Tabelle, die zu jedem Torsionswinkel die Stromstärke direkt angibt.

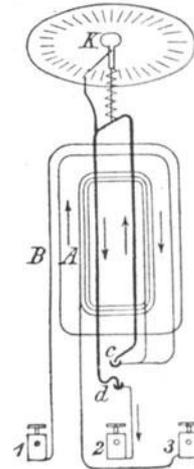


Abb. 530.

Die Anwendung des Torsionsprinzipes ist nur bei genügend konstantem Strom möglich. Daher sind diese Instrumente selten in Gebrauch, und an ihre Stelle sind Zeigerinstrumente getreten, wo die bewegliche Spule in Spitzen zwischen Steinen gelagert ist und die Stromzuführung durch die Spiralfedern, die die Gegenkraft bilden, geschieht. Abb. 531 und 534 zeigen solche Ausführungen. Man sieht die drehbare Spule *B* innerhalb der festen Spule *S*. An der Achse ist ein Zeiger und ein Dämpfflügel *Z* befestigt, der sich bei Abb. 531 in der Luftkammer *K*, von der der Deckel abgenommen ist, bewegt. Der Zeiger bewegt sich über einer Skala, die bei diesen Instrumenten natürlich empirisch geeicht sein muß.

Da der Strom zur beweglichen Spule durch die Spiralfedern gehen muß, ist diese Ausführung zunächst nur für kleine Stromstärken sowie für Spannungsmesser (§ 275) und Leistungsmesser anwendbar. Daher wurde vom Verfasser für die Messung größerer Stromstärken die in Abb. 532 angegebene Nebenschlußschaltung in Anwendung gebracht, wobei durch die bewegliche Spule nur der Zweigstrom i' hindurchgeht, während der übrige Strom durch den Widerstand *W* und die feste Spule geht. Damit die Angaben bei

Gleichstrom und Wechselstrom dieselben sind, muß in beiden Zweigen der induktive Widerstand gegen den Ohmschen verschwindend klein sein, oder die induktiven Widerstände müssen im selben Verhältnis

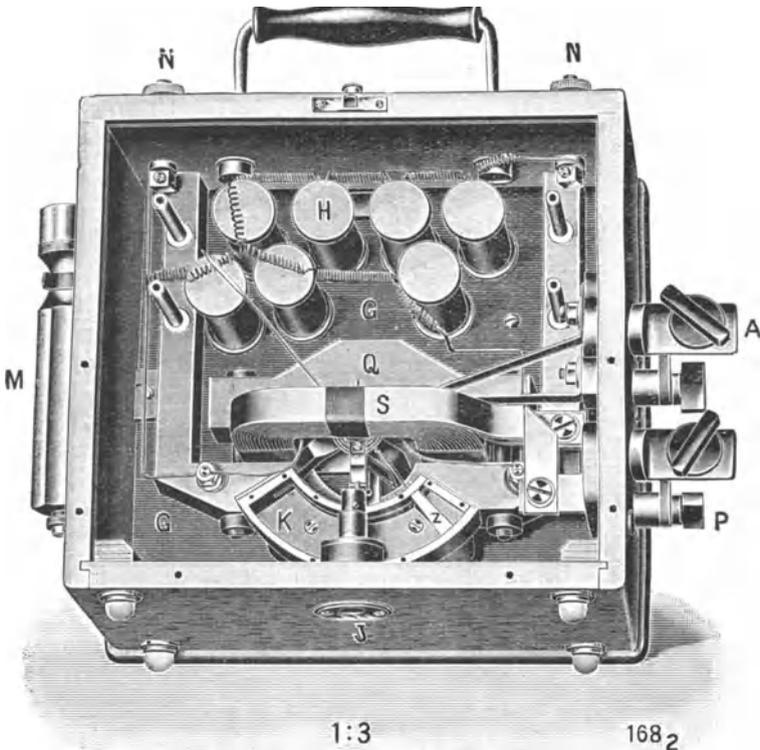


Abb. 531. Dynamometrisches Zeigerinstrument von Hartmann & Braun.

zueinander stehen wie die Ohmschen Widerstände. Das ist hier leicht zu erreichen, weil jeder der beiden Stromzweige nebst seiner Spule noch einen induktionslosen Widerstand (W , bzw. w') enthält.

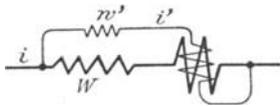


Abb. 532.

Aus demselben Grunde sind die Temperaturkoeffizienten ungefähr gleich, so daß die Angaben des Instrumentes von der Temperatur unabhängig sind. Abb. 533 zeigt die Schaltung dieser Strommesser für zwei Meßbereiche. Ist das Loch 3 zugestöpselt, so sind beide festen Spulen hintereinandergeschaltet.

Ist 2 und 4 zugestöpselt, so sind die beiden Spulen parallel geschaltet. Das Loch 1 dient zum Kurzschließen des Instrumentes.

Eine große Schwierigkeit der dynamometrischen Instrumente liegt darin, daß das von der festen Spule erzeugte magnetische Feld

ziemlich schwach ist und daher zur Erreichung des nötigen Drehmomentes bedeutend mehr Amperewindungen für die drehbare Spule erforderlich sind als bei den Drehspulinstrumenten für Gleichstrom (§ 267). Daher sind bei den von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft nach Angaben des Verfassers hergestellten ferrodynamischen

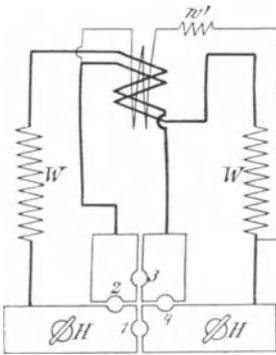


Abb. 533.

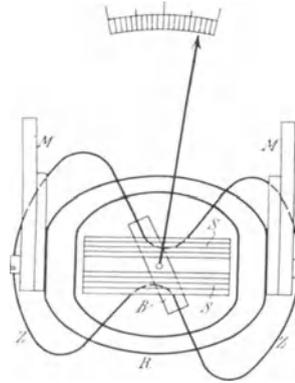


Abb. 534.

Instrumenten¹⁾ die festen Spulen *S* (Abb. 534) mit einem geschlossenen Ring *R* aus unterteiltem Eisen umgeben, wodurch das Feld stärker wird. Das Innere der Spulen enthält kein Eisen, damit der Einfluß der Hysterese und Wirbelströme möglichst verschwindet. Die Über-

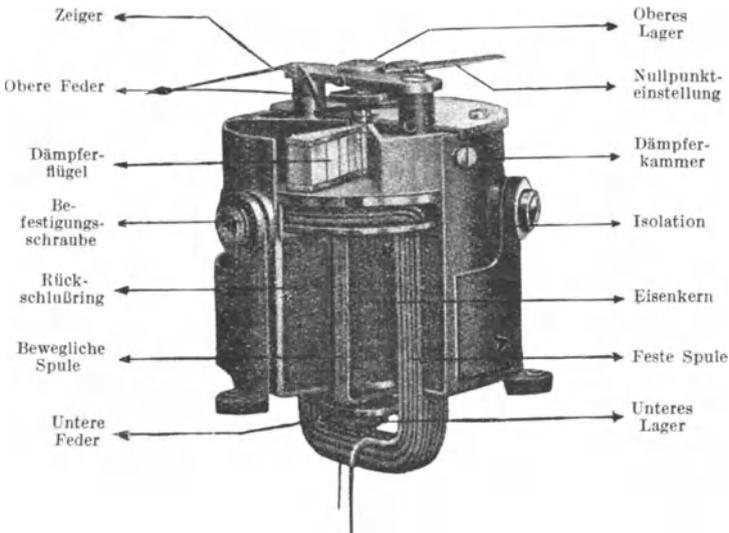


Abb. 535.

¹⁾ ETZ 1900, S. 399. DRP. Nr. 111 124, 1899.

einstimmung zwischen Gleich- und Wechselstrom ist daher ebensogut, als wenn der Eisenmantel nicht vorhanden ist¹⁾. Die dadurch erzielte Verstärkung des Feldes ist aber besonders für die Strommesser von Vorteil, weil hier nur der Nebenschlußstrom i' für die drehbare Spule zur Verfügung steht. Gleichzeitig bildet der Eisenmantel einen Schutz des Innern gegen äußere magnetische Felder und gegen die Dauermagnete M , zwischen deren Polen sich der Aluminiumdämpferflügel Z bewegt.

Seitdem es hochlegiertes Eisenblech (S. 293) gibt mit sehr kleinem Wirbelstrom- und Hystereserverlust, ist die Notwendigkeit, das Innere der Spulen frei von Eisen zu lassen, weggefallen. Daher bringt die Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft jetzt einen Eisenkern im Innern an, wodurch das magnetische Feld noch weiter verstärkt wird. Abb. 535 zeigt diese Ausführung, wobei auch die magnetische Dämpfung durch Luftdämpfung ersetzt ist²⁾.

Über die Anwendung der dynamometrischen Instrumente als Leistungsmesser siehe § 279.

269. Stromwagen.

Das Prinzip dieser von W. Thomson angegebenen Instrumente ist aus Abb. 536 ersichtlich.

Zwei Paare von kreisförmigen Stromleitern A, B und C, D befinden sich in paralleler Lage übereinander. Werden sie in der Richtung der Pfeile von Strömen durchflossen, so ziehen sich C und D an, während sich A und B abstoßen. Befestigt man nun die beiden oberen, B und D , an einem Wagebalken, so erhält man einen Ausschlag, der durch ein Laufgewicht wieder kompensiert werden

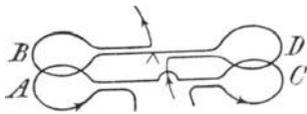


Abb. 536.

kann. Man hat also dasselbe so lange auf dem Wagebalken zu verschieben, bis er sich im Gleichgewicht befindet; die Stromstärke, die eben herrscht, wird an der Stelle, wo das Laufgewicht steht, auf einer empirisch geeichten Teilung abgelesen. Die Wirkung ist bei Gleich- und Wechselstrom dieselbe. Wegen der Schwierigkeit der Stromzuführung zum beweglichen Teil und wegen seiner großen Trägheit kommen die Stromwagen heute kaum mehr zur Anwendung.

270. Hitzdraht-Instrumente.

Sendet man einen Strom durch einen Draht, so dehnt sich dieser proportional der in ihm entwickelten Jouleschen Wärme

¹⁾ Über eine Vergleichung dieser Strommesser bei Gleich- und Wechselstrom mittels der optisch-pyrometrischen Methode in der Phys.-Techn. Reichsanstalt siehe Orlich, Zeitschr. für Instrumentenkunde, 1904, März, S. 69.

²⁾ Dolivo-Dobrowolsky, ETZ 1913, S. 113.

aus. Da letztere durch $A = \alpha J^2 wt$ gegeben ist, so ist die Längenausdehnung proportional dem Quadrate der Stromstärke. Diese Instrumente zeigen also wie die dynamometrischen bei Gleich- und Wechselstrom den effektiven Wert unabhängig von Periodenzahl und Wellenform an. Es handelt sich nun bloß darum, die Längenausdehnung auf einen Zeiger zu übertragen. Bei den Instrumenten von Hartmann & Braun geschieht dies auf die in Abb. 537 dargestellte Art. AB ist der vom Strome durchflossene Draht. An diesen ist bei C ein anderer angelötet, der bei D befestigt ist. An diesen wiederum ist ein dritter bei F angelötet, der einmal um das Röllchen H geschlungen und mit dem anderen Ende an der Feder G befestigt ist. Letztere befindet sich im gespannten Zustande und bewegt sich daher nach links, wenn sich der Draht AB infolge der Erwärmung ausdehnt. Dabei muß sich das Röllchen H und der an ihm befestigte Zeiger Z drehen, der auf einer empirisch geeichten Skala einspielt.

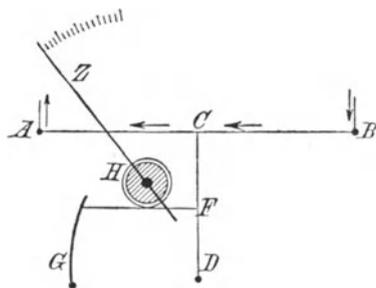


Abb. 537.

Da die im Draht entwickelte Temperatur mit der Zeit wächst, so ist die Ausdehnung des Drahtes erst von dem Augenblick an eine bestimmte, wo die ausgestrahlte Wärme gleich der entwickelten ist. Erst von da an behält der Draht eine bestimmte, dem Quadrate der Stromstärke proportionale Temperatur und daher auch eine bestimmte Ausdehnung. Damit nun diese Zeit nicht zu lange dauert, muß die Oberfläche des Drahtes sehr groß sein gegenüber seinem Querschnitt; es kann also nur ein sehr dünner Draht verwendet werden. Dadurch ist aber auch ein großer Widerstand bedingt, so daß diese Anordnung zunächst nur für sehr kleine Stromstärken (Spannungsmesser) anwendbar ist.

Um als Strommesser für stärkere Ströme geeignet zu sein, muß man den Hitzdraht AB als Nebenschluß zu einem Widerstande W (Abb. 538) legen, durch den der zu messende Strom fließt. Da aber die Potentialdifferenz zwischen den Punkten PP' , an die der Nebenschluß angelegt ist, nur klein ist, so würde der Widerstand des Hitzdrahtes AB zu groß sein, um genügend Strom zu seiner Erwärmung durchzulassen. Daher wird der Nebenschlußstrom durch ein sehr dünnes, lockeres Silberband dem Hitzdrahte in der Mitte zugeführt, so daß er sich hier teilt und in der Schiene MN wieder vereinigt. Durch die Parallelschaltung des

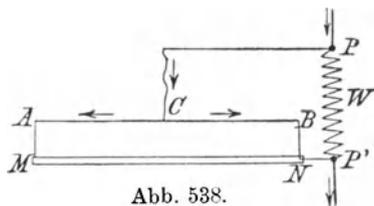


Abb. 538.

Hitzdrahtes von der Mitte aus wird dem Strome nur der vierte Teil des Widerstandes geboten. Durch mehrmalige derartige Unterteilung des Hitzdrahtes wie in Abb. 539 wird der Widerstand noch weiter vermindert. Trotzdem muß für einen Strommesser auch noch ein dicker Draht als Hitzdraht verwendet werden, um den Widerstand genügend klein zu erhalten. Daher dauert es einige Zeit (bis zu



Abb. 539. Hitzdraht-Strommesser von Hartmann & Braun.

8 Sekunden), bis ein stationärer Wärmezustand erreicht ist. Rasche Stromschwankungen werden daher von diesen Strommessern überhaupt nicht angezeigt. Bei den Instrumenten für sehr kleine Stromstärken (Spannungsmesser) kann zwar der Draht so dünn gewählt werden, daß der stationäre Zustand schon nach 1 Sekunde erreicht wird; dafür treten aber leicht dauernde Dehnungen des Drahtes ein, wodurch die Eichung unrichtig wird. Nach längerer Einschaltung ändern sich die Angaben auch dadurch, daß sich die Platte, die den Hitzdraht trägt, ausdehnt und dadurch der Draht eine andere Spannung erhält. Die Hitzdrahtinstrumente aller Art sind daher

hinsichtlich einer bleibenden Eichung die unzuverlässigsten von allen gebräuchlichen Meßinstrumenten. Man kann sich auf ihre Angaben nur verlassen, wenn man sie vor der Anwendung mit Gleichstrom prüft, bei stärkerer Beanspruchung auch nachher. Der Stromverbrauch bei den Spannungsmessern (0,2 Amp.), und der Spannungsabfall bei den Strommessern (0,25 Volt) und daher der Wattverbrauch ist größer als bei anderen Systemen.

271. Induktionsinstrumente.

Auf elektrodynamischer Schirmwirkung beruhende Induktionsinstrumente, System Benischke. Abb. 540 zeigt die Anwendung des auf S. 307 besprochenen Prinzipes auf Meßinstrumente¹⁾ nach Ausführung der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft. Auf die Aluminiumscheibe, die das Drehmoment erfährt, wirkt auch der aus der Abbildung ersichtliche Dauermagnet, der die Dämpfung bewirkt. Infolge des hohen induktiven Widerstandes der Stromwicklung bei sehr kleinen Stromstärken bedürfen sie als Spannungsmesser bis 250 Volt keines Vorschaltwiderstandes. Ist i der induzierende Strom in der Magnetspule, i_1 der induzierende Strom im Schirm T (Abb. 258), i_2 der induzierte Strom in der Scheibe S , so ist $i_1 = c_1 i$,

¹⁾ DRP. Nr. 84871, 1895. ETZ 1899, S. 82.

$i_1 = c_2 i$, wenn c_1, c_2 Proportionalitätsfaktoren sind. Da nun das Drehmoment auf der Anziehung zwischen i_1 und i_2 beruht, so ist es proportional $c_1 c_2 \int i^2 dt$. Diese Instrumente geben also den effektiven Wert an.

Auf phasenverschobenen Feldern beruhende Induktionsinstrumente (Drehfeldinstrumente). Abb. 541 zeigt die Ein-

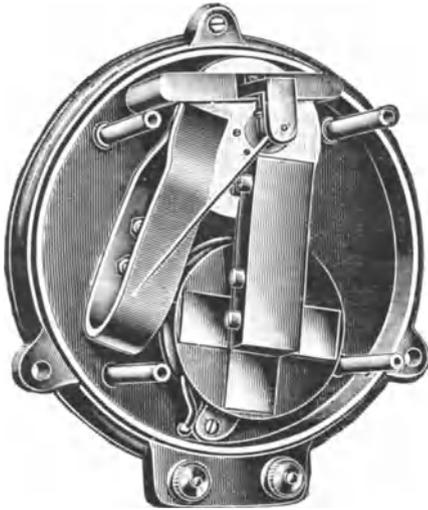


Abb. 540. Induktionsinstrument (Strom- oder Spannungsmesser) nach Benischke.

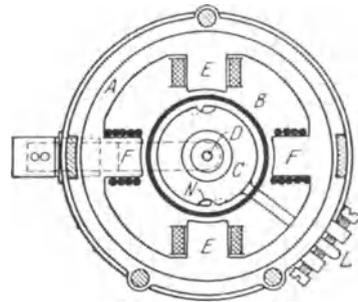
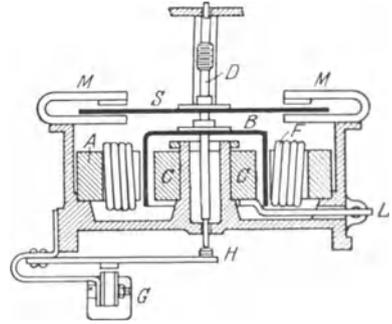


Abb. 541. Induktionsinstrumente von Siemens & Halske.

richtung derselben, die von Siemens & Halske¹⁾ unter dem Namen Ferraris-Instrumente fabriziert werden. Der drehbare Teil ist die Aluminiumtrommel *B* zwischen den vier Polen *E, F*. Die Felder in *E* sind gegen die in *F* um nahezu 90° in der Phase verschoben, so daß die Anordnung einem Zweiphasenmotor entspricht. Diese phasenverschobenen Felder entstehen aus dem in § 230 II erläuterten Prinzip der Phasenverschiebung durch Brückenschaltung. Außerdem ist eine besondere Dämpfscheibe *S*, auf welche die Dauermagnete *M* wirken, vorhanden.

Im Wesen aller Induktionsinstrumente liegt es, daß sie von der Temperatur abhängig sind, weil sich der spezifische Widerstand der induzierten Scheibe oder Trommel mit der Temperatur ändert. Die Abhängigkeit ist aber keine proportionale, sondern erheblich

¹⁾ Schrottke, ETZ 1901, S. 657.

geringer, weil der Einfluß auf den Widerstand der Scheibe oder Trommel durch andere unmittelbare Einflüsse auf das Drehmoment zum Teil kompensiert wird. Da die induzierten Ströme auch von der Periodenzahl abhängen, so sind die Angaben dieser Instrumente auch davon abhängig. Da aber auch schon das in den Eisenkernen der Spulen erzeugte magnetische Feld von der Periodenzahl abhängt, so ist die Abhängigkeit je nach der Art und dem Verwendungszweck verschieden. So zeigt sich, daß bei der Eichung nach Stromstärken die Abhängigkeit von der Periodenzahl erheblich größer ist als bei der Eichung nach Spannungen.

Die Abhängigkeit von der Wellenform ist gering¹⁾ für solche Wellenformen, deren positive und negative Hälften gleich sind. Bei Wellenformen von der durch Abb. 515 dargestellten Art, wo auch ein Gleichstrom darin enthalten ist, sind Induktionsinstrumente unbrauchbar, weil sie auf Gleichstrom überhaupt nicht reagieren.

Über die Induktionsinstrumente als Leistungsmesser siehe § 280.

272. Elektromagnetische Instrumente.

Hierunter gehören alle Instrumente, die auf der Anziehung oder Abstoßung eines weichen Eisenstückes beruhen.

Die einfachste und älteste Art beruht darauf, daß ein Eisenkern in das Innere einer vom Strome durchflossenen Spule hineingezogen wird. Bei dem Feder-Stromzeiger von Kohlrausch (Abb. 542) be-

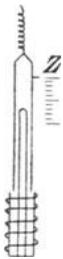


Abb. 542.

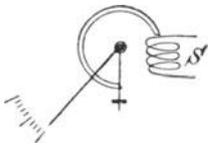


Abb. 543.

steht der Eisenkern aus einer Röhre von dünnem Eisenblech, der an einer Spiralfeder hängt. An der Röhre befindet sich ein Zeiger Z, der auf einer Skala einspielt. In den älteren Instrumenten von Siemens & Halske (Abb. 543) hat der Eisenkern die Form eines Kreisbogens, der in das Solenoid S hineinragt. Der Anziehung wird durch ein Gegengewichtchen oder durch eine Spiralfeder das Gleichgewicht gehalten. Diese Instrumente haben infolge des langen Eisenkörpers beträchtlichen Dauermagnetismus. Für Gleichstrom hat das zur Folge, daß die Angaben bei fallendem Strom zu hoch sind, weil der von der vorhergehenden, stärkeren Magnetisierung verbliebene Magnetismus noch wirkt. Für Wechselstrom hat das eine Abhängigkeit von der Wellenform des Stromes und von der Periodenzahl zur Folge¹⁾. Nach § 102 ist der Dauermagnetismus um so kleiner, je kürzer das Eisenstück ist. Daher wird in den neueren Instrumenten von Siemens & Halske ein rundes Stück Eisenblech (Abb. 521) angewendet, das in der Nullstellung über der stromführenden Spule steht und beim größten Ausschlag ein Stück in diese hineingezogen

¹⁾ ETZ 1901, S. 301.

ist. An der Achse befindet sich der in § 265 beschriebene Dämpferkolben.

Eine andere Art elektromagnetischer Instrumente beruht auf der gleichartigen Magnetisierung zweier Eisenstücke im Innern eines Solenoides. Abb. 544 zeigt dieses Prinzip in der Anordnung von Drexler. F und F' sind die beiden Eisenstücke, von denen das erstere fest, das andere aber um die Achse A , die noch den Zeiger Z trägt, drehbar ist. Durch den Strom werden sie so magnetisiert, daß die gleichnamigen Enden nebeneinander liegen und F' infolgedessen abgestoßen wird.

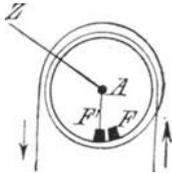


Abb. 544.

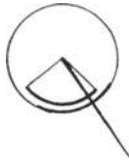


Abb. 545.

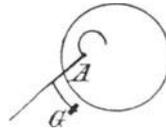


Abb. 546.

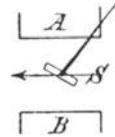


Abb. 547.

Bei dem System Uppenborn befinden sich im Innern der Spule zwei konaxiale Zylindermantelstücke aus Eisenblech. Das innere ist beweglich und steht in der Nullstellung gegen das andere etwas nach links verschoben (Abb. 545). Durch den Strom werden sie so magnetisiert, daß die auf derselben Seite liegenden Kanten gleichnamig sind, so daß eine noch weitere Verschiebung gegeneinander stattfindet. Eine ähnliche Ausführung haben die neueren Instrumente der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

Bei dem System Hummel befindet sich im Innern der Spule ein zylindrisches Eisenblech, das um die Achse A drehbar ist (Abb. 546). Das magnetische Feld der Spule ist nun bestrebt, das Eisenblech näher an die innere Wand der Spule zu ziehen, was gelingt, weil die Achse A exzentrisch ist.

Eine andere Art von solchen Instrumenten beruht auf dem Bestreben länglicher Eisenkörper, sich mit ihrer Längsachse in die Richtung der Kraftlinien zu stellen. Ist AB der Querschnitt einer Spule (Abb. 547), so haben die Kraftlinien die durch den Pfeil angedeutete Richtung. Das Eisenstück S sucht sich nun in diese Richtung einzustellen.

Bei diesen Instrumenten kann als Gegenkraft entweder das Gewicht des Eisenstückes oder des Zeigers oder beider zusammen, oder mit einer Spiralfeder angewendet werden, wovon natürlich der Verlauf der Skala abhängt. Soll eine Spiralfeder allein wirken, so muß das Gewicht des Eisenstückes und des Zeigers durch Gegengewichte ausgeglichen werden.

273. Elektrostatische Spannungsmesser.

Die einfachsten Mittel zur Messung elektrischer Spannungen (Potentialdifferenzen) sind das in § 25 beschriebene Elektroskop und das Elektrometer (System Braun). Viel genauer ist das Quadrantenelektrometer (Thomson). Es besteht im wesentlichen aus einer flachen, zylindrischen Metallbüchse, die durch zwei aufeinander senkrechte Achsenschnitte in 4 Quadranten geteilt ist (Abb. 548). In der Mitte derselben schwebt an einem feinen Drahte eine dünne Platte aus Aluminium in Form einer Lemniskate. Je zwei Quadranten *I* und *III*, *II* und *IV*, also die gegenüberliegenden, sind miteinander durch Drähte verbunden. Die Lemniskate wird mittels ihres Aufhängedrahtes mit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Spannung verbunden und erhält so eine konstante Ladung. Verbindet man nun die Quadrantenpaare mit zwei Punkten, deren Potentialdifferenz oder Spannung gemessen werden soll, so erhält das eine eine positive, das andere eine negative Ladung. Die Lemniskate wird von dem einen angezogen, von dem anderen abgestoßen und erfährt so eine Drehung, bis die Torsion des Aufhängedrahtes den elektrischen Kräften das Gleichgewicht hält. Das ist die gewöhnliche Art der Verwendung des Quadrantenelektrometers.

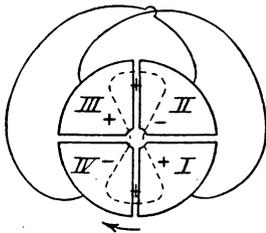


Abb. 548.

Behandelt man das Problem ganz allgemein mathematisch und bezeichnet mit u die Potentialdifferenz der Lemniskate gegen das Gehäuse, mit u_1 und u_2 die Potentialdifferenz der beiden Quadrantenpaare gegen das Gehäuse, so ist der Drehungswinkel α der Lemniskate

$$\alpha = c(u_1 - u_2) \left[u - \frac{u_1 + u_2}{2} \right],$$

wobei c ein Proportionalitätsfaktor ist.

Daraus ergeben sich folgende 2 Arten der Verwendung dieses Instrumentes.

1. Ist u sehr groß gegenüber $u_1 + u_2$, so kann man schreiben

$$\alpha = cu(u_1 - u_2) = c'(u_1 - u_2) = c'E.$$

Unter dieser Voraussetzung ist also der Ausschlagswinkel proportional der Potentialdifferenz jener Punkte, die mit den Quadrantenpaaren verbunden sind. Da der neue Proportionalitätsfaktor $c' = cu$ ist, so sind die Ausschlagswinkel um so größer und das Instrument ist um so empfindlicher, je größer das Potential u der Lemniskate ist. In allen Fällen aber muß es so groß sein, daß $u_1 + u_2$ dagegen klein ist. Man genügt dieser Bedingung, wenn man die Lemniskate mit einem Pol einer Zambonischen Säule

(§ 72) oder einer Akkumulatorenbatterie verbindet, deren anderer mit dem Gehäuse verbunden ist. Da die Quadranten manchmal schon vor der Messung eine kleine Ladung besitzen, so muß man, um den Nullpunkt der Einstellung zu finden, beide Paare miteinander, oder was auf dasselbe hinauskommt, mit der Erde verbinden.

2. Eine zweite Art der Anwendung erhält man, wenn $u = u_1$ ist. Dies ist der Fall, wenn man die Lemniskate mit einem Quadrantenpaar verbindet. Dann ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$\alpha = c(u_1 - u_2) \frac{u_1 - u_2}{2} = c'(u_1 - u_2)^2 = c'E^2.$$

Der Ausschlagswinkel ist jetzt proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz; es ändert sich also der Sinn der Drehung nicht, wenn die Potentialdifferenz E ihr Vorzeichen wechselt, da das Quadrat immer positiv ist. Man kann also bei dieser Schaltung die Spannungsdifferenzen von Wechselströmen messen. Zur Eliminierung des Proportionalitätsfaktors kann man eine konstante EMK E_1 verwenden, für welche $\alpha_1 = c'E_1^2$ ist. Dann ist also

$$E = E_1 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}.$$

Die Wechselstromspannung E ist durch die in § 213 gegebene Definition bestimmt.

Der Vorteil des Quadrantenelektrometers gegenüber den anderen Instrumenten zur Spannungsmessung liegt darin, daß kein Strom verbraucht wird, und überhaupt keine von Strom durchflossene Spule vorhanden ist, wie bei den galvanometrischen Spannungsmessern, so daß es keine Abhängigkeit von der Temperatur gibt. Die Messung mit diesem Apparat ist freilich schwieriger und umständlicher, als mit jedem anderen, so daß es nur für Laboratoriumsmessungen in Betracht kommt. Ein weiterer Übelstand ist der, daß bei sehr empfindlichen Instrumenten die obigen Gleichungen nicht genau stimmen, weil noch Nebenwirkungen dazu treten. Diese sind bei Gleichstrom kleine EMKe an den Stellen, wo verschiedene Metalle zur Berührung kommen (Lemniskate, Aufhängedraht, Schraube), so daß die Lemniskate von vornherein eine Ladung erhält. Bei Wechselstrom kann durch die Ausstrahlung aus den scharfen Kanten ein Drehmoment hinzukommen, das vom größten Wert (Scheitelwert) abhängt, also ein von der Wellenform abhängiges Drehmoment¹⁾.

¹⁾ Näheres über die Messungen mittels des Quadrantenelektrometers bei Orlich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. April 1903, S. 97.

274. Statische Spannungsmesser für hohe Spannungen.

Der Umstand, daß die statischen Instrumente keinen Strom verbrauchen, oder nur so viel, als ihrem Kapazitätswiderstand entspricht, ferner die theoretische Gleichheit der Angaben bei Wechselstrom und Gleichstrom, haben viele Bemühungen gezeitigt, sie als technische Spannungszeiger auszugestalten. Abb. 549 zeigt ein solches Instrument der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft für 6000 Volt.

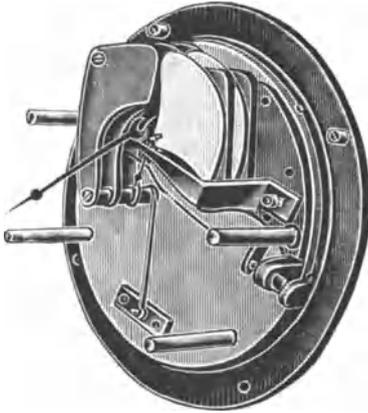


Abb. 549. Statisches Voltmeter der Allgemein. Elektrizitäts-Gesellschaft.

Praktisch haben diese Instrumente so viele Nachteile, daß sie fast nur mehr als Isolationsprüfer oder im Laboratorium unter besonderen Vorsichtsmaßregeln zur Anwendung kommen. Aus dem oben erwähnten Umstand, daß nämlich auch der Scheitelwert von Einfluß ist, sowie aus rückständigen Ladungen in den Isoliermaterialien ergeben sich bei höheren Spannungen oft beträchtliche Abweichungen zwischen Gleich- und Wechselstrom¹⁾. Abb. 550 zeigt diese Abweichungen bei einem Instrument für 6000 Volt nach Messungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Ihr größter Übelstand liegt aber in der leichten Be-

einflussung durch äußere Ladungen und in der leichten Zerstörbarkeit durch atmosphärische Entladungen.

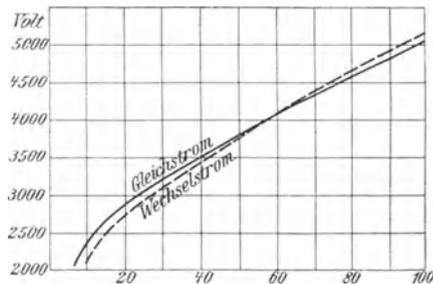


Abb. 550.

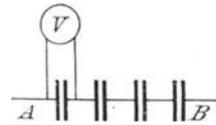


Abb. 551.

Infolge des äußerst geringen Stromverbrauches können die statischen Instrumente im Nebenschluß zu einem Kondensator, der mit anderen hintereinandergeschaltet ist, verwendet werden²⁾. So genügt zur Messung der Spannung zwischen AB (Abb. 551) ein Voltmeter V ,

¹⁾ Benischke, Physikal. Zeitschr. 7, S. 525, 1906.

²⁾ Peuckert, ETZ 1908, S. 657, Benischke, ETZ 1901, S. 265.

dessen Meßbereich nur etwa den vierten Teil der Spannung zwischen $A B$ zu umfassen braucht.

275. Galvanometrische Spannungsmesser.

Alle Strommesser für sehr kleine Stromstärken können zur Spannungsmessung verwendet werden gemäß dem Ohmschen Gesetze $E = JW$, wenn sie zwischen den Klemmen AB (Abb. 552) eingeschaltet werden, und der Widerstand W konstant ist. Zur praktischen Anwendung wird natürlich die Eichung gleich in Spannungseinheiten (Volt) statt in Stromeinheiten ausgeführt. Der Widerstand W braucht kein Ohmscher zu sein, sondern kann auch ein induktiver sein. Da er konstant sein muß, darf er keinen merklichen Temperaturkoeffizienten haben, sonst sind die Angaben von der Temperatur abhängig. Daher soll der Widerstand der Kupferdrahtwicklung selbst nur einen kleinen Teil des gesamten Widerstandes ausmachen und der Vorschaltwiderstand aus Konstanten oder Manganin oder dgl. bestehen (vgl. das 2. Rechnungsbeispiel auf S. 74).

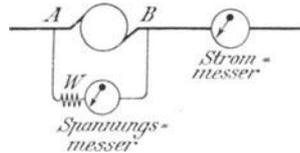


Abb. 552.

Bei Wechselstrom kann auch ein induktiver Widerstand verwendet werden. Dieser hat keinen Temperaturkoeffizienten, dafür ist er aber von der Periodenzahl abhängig. Doch kann dieser Einfluß zum Teil dadurch kompensiert werden, daß das Drehmoment des Instrumentes im entgegengesetzten Sinne von der Periodenzahl abhängt, wie bei den Induktionsinstrumenten (§ 271).

Der Widerstand der Wicklung eines Spannungsmessers soll möglichst klein sein, weil dann auch der Wattverbrauch und die Erwärmung des Instrumentes und seines Vorschaltwiderstandes klein ist. Verdoppelt man den Widerstand eines Spannungsmessers, so reicht das Instrument für einen doppelt so großen Meßbereich aus, aber auch die Wärmeentwicklung ist die doppelte. Daher verwendet man bei sehr hohen Wechselspannungen kleine Transformatoren (Spannungswandler), deren Hochspannungswicklung an die zu messende Spannung angeschlossen wird, während ein Spannungsmesser für niedrige Spannung an die sekundäre Wicklung angeschlossen ist. Sind Streuung und Verluste klein, so stehen die Spannungen im selben Verhältnis wie die Windungszahlen (§ 154). Andernfalls muß das Instrument samt dem Transformator empirisch geeicht werden.

276. Indirekte Spannungsmessung.

Die indirekte Spannungsmessung, die im allgemeinen nur zur Eichung und Kontrolle von Instrumenten angewendet wird, besteht in der Vergleichung einer gegebenen Spannung mit den in § 71 be-

sprochenen Normalelementen. Da ihre EMK nur dann konstant und gleich der Klemmenspannung ist, wenn aus dem Element kein Strom entnommen wird, und keiner hineingeht, so darf die Vergleichung nur mittels des Quadrantenelektrometers oder mittels des Kompensationsverfahrens ausgeführt werden.

Das Kompensationsverfahren besteht in folgendem. Man schließt die zu messende Spannung E (in Abb. 553 ist es eine Batterie) durch einen bekannten veränderlichen Widerstand W (zwischen C und D). An zwei Stellen F und H desselben legt man die Drähte an, die mit dem Normalelement E' und einem empfindlichen Galvanometer einen Stromkreis bilden. E und E' sind so geschaltet, daß die gleichnamigen Pole auf derselben Seite liegen, so daß sie in dem Normalelement E' einander entgegen wirken. Durch Verschieben der Kontakte F und H kann man den dazwischen liegenden Widerstand w so verändern, daß die Klemmenspannung zwischen diesen Punkten gleich ist der EMK E' des Normalelementes.

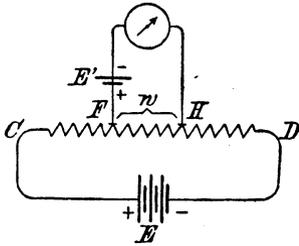


Abb. 553.

Dann geht kein Strom durch das Galvanometer — sein Ausschlag ist Null. Es verhält sich nun W zu w wie die zu messende EMK zu der des Normalelementes E' , also

$$\frac{E}{E'} = \frac{W}{w}.$$

Hat man einen Spannungsmesser zu eichen, so schließt man ihn an die Punkte CD an. Abb. 554 zeigt die Einrichtung des für dieses Verfahren besonders zweckmäßigen Feußner'schen Kompensationsapparates. Hierbei besteht der Widerstand W aus $W_1 + W_2 + W_3 + W_4$. Die Schaltebel k_1 und k_2 stellen die veränderlichen Kontakte F und H vor. Außerdem ist noch der Widerstand W_3 durch Stöpselung veränderlich, so daß man den zwischen F und H liegenden Widerstand w in weiten Grenzen verändern kann. Cl bedeutet das Normalelement. Um zu verhindern, daß durch letzteres ein zu starker Strom geht, bevor die

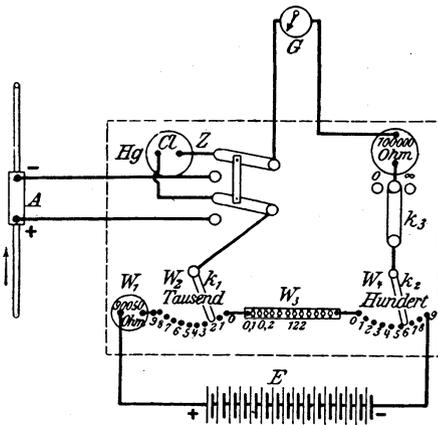


Abb. 554. Kompensationsapparat nach Feußner.

Kontakte k_1, k_2 richtig gestellt sind, wird noch ein großer Widerstand von etwa 100 000 Ohm vorgeschaltet. Hat man k_1 und k_2 angenähert so gestellt, daß das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt, so legt man den Hebel k_3 auf 0. Nun ist der Galvanometerkreis direkt geschlossen, und man kann die genaue Einstellung vornehmen. k_3 kann endlich auch auf einen dritten Knopf ∞ gelegt werden, wodurch der Stromkreis unterbrochen wird.

Um beliebig große Spannungen (bis 1400 Volt) zu messen, verwendet man die Batterie E als Vergleichsbatterie. Es sei z. B. die Klemmenspannung E'' (bei A) eines durch den Pfeil angedeuteten Stromes zu bestimmen. Dann schaltet man jene statt des Normalelementes Cl mittels des in Abb. 554 ersichtlichen Umschalthebels ein und verfährt in der vorher beschriebenen Weise. Es sei w'' der Widerstand zwischen k_1 und k_2 , bei welchem die Nullstellung des Galvanometers erreicht wird. Dann legt man den Doppelschalthebel um auf Cl (wie es die Figur zeigt) und stellt wieder ein. Der Widerstand zwischen k_1 und k_2 sei nun w' . Dann ist

$$\frac{E''}{E'} = \frac{w''}{w'}$$

Ist bei A ein bekannter Widerstand in den Strom eingeschaltet, so erhält man nach Ermittlung der an den Klemmen des Widerstandes herrschenden Spannung die Stromstärke aus dem Ohmschen Gesetz.

277. Indirekte Strommessung.

Im vorstehenden wurde schon erwähnt, wie aus der an einem bekannten Widerstande gemessenen Spannung die Stromstärke ermittelt wird. Ein Verfahren, das gewöhnlich zur Eichung und Kontrolle von Strommessern benützt wird.

Mittels der Drehspuleninstrumente (§ 267), dynamometrischen Instrumente (§ 268) und Hitzdrahtinstrumente (§ 270) können stärkere Ströme nicht unmittelbar gemessen werden, weil sie nicht durch die Federn bzw. durch den Hitzdraht geschickt werden können. Es wird daher nur ein Zweigstrom i_1 durch das Meßinstrument geschickt (Abb. 555). Bei den dynamometrischen und Hitzdrahtwiderständen wird der Widerstand w_2 in der Regel mit dem Instrument zusammengebaut und die Eichung für den Gesamtstrom i ausgeführt. Bei den Drehspuleninstrumenten für Schalttafeln geschieht dies auch; für tragbare Instrumente aber wird die Eichung gewöhnlich in Spannungseinheiten mit Meßbereichen bis 0,075 oder 0,100 oder 0,150 Volt ausgeführt, so daß sich die Stromstärke aus dem Ausschlag und dem bekannten Widerstand w_2 nach dem Ohmschen Gesetze ergibt.

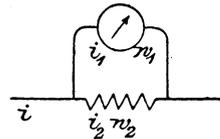


Abb. 555.

Voraussetzung ist aber, daß der Zweigstrom i_1 verschwindend klein ist gegen den Gesamtstrom i ; andernfalls muß i aus den Kirchhoffschen Gesetzen (§ 50) berechnet werden, wozu auch noch der Widerstand w_1 des Instrumentes bekannt sein muß. Ferner ist zu beachten, daß das Instrument keinen merklichen Temperaturkoeffizienten haben soll, oder die Messung wenigstens ungefähr bei derselben Temperatur stattfinden soll, wie die Eichung des Instrumentes.

Bei Wechselstrom muß der Widerstand w_2 natürlich induktionsfrei sein, oder es muß sein Koeffizient der Selbstinduktion bekannt sein, woraus man sich für die betreffende Periodenzahl den scheinbaren Widerstand ausrechnen kann.

Zur Vergleichung von Wechselstrom mit Gleichstrom eignet sich besonders gut die optisch-pyrometrische Methode¹⁾. Ein dünnes Platinblech wird vom Wechselstrom zur hellen Rotglut erhitzt und darauf der glühende Faden einer Glühlampe projiziert. Durch Veränderung des Stromes der Glühlampe kann die Helligkeit so verändert werden, daß sie gegen den Hintergrund des glühenden Platinbleches keinen Unterschied zeigt. Durch eine Reihe gleicher Versuche mit Gleichstrom kann der durch die Glühlampe gehende Strom auf den durch das Platinblech gehenden Strom geeicht werden.

278. Messung eines Stromstoßes oder einer Elektrizitätsmenge.

Geht ein kurzdauernder Strom (Stromstoß) durch ein Galvanometer, so bewirkt dieser natürlich keine dauernde Ablenkung der Nadel, sondern nur einen einmaligen Ausschlag. Diesen kann man nicht proportional der Stromstärke annehmen, da eine konstante Stromstärke überhaupt nicht vorhanden ist, sondern eine von Null bis zu einem Maximum ansteigende und dann wieder bis Null abfallende. Es herrscht also in jedem Zeitelemente dt eine andere Stromstärke und daher auch eine andere Ablenkung. Ist aber die Schwingungsdauer sehr groß gegenüber der Dauer des Stromes, was durch ein großes Trägheitsmoment des drehbaren Teiles leicht zu erreichen ist (ballistisches Galvanometer), so ist der Ausschlag proportional der Summe aller Stromstärken, das ist $\int i dt$. Diese Summe ist aber nichts anderes als die von dem kurzdauernden Strome gelieferte Elektrizitätsmenge q . Hat diese einen Ausschlag α verursacht, so ist

$$q = c \alpha,$$

wobei c ein Proportionalitätsfaktor ist, der experimentell dadurch bestimmt werden kann, daß man eine bekannte Elektrizitätsmenge durch dasselbe Galvanometer schickt. Diese erhält man am geeignetsten, wenn man die Entladung eines Kondensators von bekannter Kapazität C , der mit einer bekannten Spannung E geladen ist, durch das Galvanometer gehen läßt.

¹⁾ Zeitschr. f. Instrumentenkunde, März 1904, S. 65.

Die Konstante c läßt sich auch berechnen¹⁾, und dann läßt sich umgekehrt die Ladung eines Kondensators messen, und daraus bei bekannter Spannung die Kapazität berechnen.

Die Elektrizitätsmenge eines länger dauernden Stromes wird mittels Voltameters (§ 266) gemessen.

Leistungsmessung.

279. Dynamometrische Leistungsmesser.

Bei Gleichstrom ist die Leistung eines elektrischen Stromes J in einem Apparat oder einer Maschine V innerhalb der Klemmen FG (Abb. 556) gleich JE , wenn E die Spannung zwischen diesen Klemmen ist. Ein Instrument zur Messung der Leistung muß daher diese Multiplikation vornehmen. Das ist bei den Dynamometern (§ 268) der Fall. Zur Messung der Leistung geht der Strom J durch die feste Spule, während der von den Klemmen abgehende Nebenschlußstrom J' durch die drehbare Spule und durch einen vorgeschalteten großen Widerstand w' geht. Dann hängt der Ausschlag der drehbaren Spule von dem Produkte JJ' ab. Ist der Widerstand w' konstant, so ist J' der Spannung E proportional und daher mißt das Instrument bei entsprechender Bestimmung der Konstante oder bei entsprechender Eichung das Produkt JE , also die Leistung.

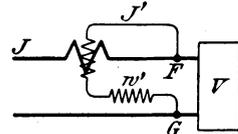


Abb. 556.

Bei Wechselstrom ist das Drehmoment D des Dynamometers

$$D = k \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i i' dt,$$

wenn k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Ist die Klemmenspannung

$$e = \mathfrak{E} \sin \omega t,$$

so ist

$$i = \mathfrak{I} \sin (\omega t - \varphi)$$

$$i' = \mathfrak{I}' \sin (\omega t - \varphi')$$

mithin
$$D = \frac{k}{\tau} \mathfrak{I} \mathfrak{I}' \int_0^{\tau} \sin (\omega t - \varphi) \cdot \sin (\omega t - \varphi') dt$$

$$= \frac{k}{2 \tau} \mathfrak{I} \mathfrak{I}' \int_0^{\tau} [\cos (\varphi' - \varphi) - \cos (2 \omega t - \varphi - \varphi')] dt$$

¹⁾ Darüber muß auf ein Lehrbuch der Physik verwiesen werden, z. B. Kohlrausch, Praktische Physik.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k}{2\tau} \Im \Im' \left[t \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t - \varphi - \varphi' \right]_0^t \\
 &= \frac{\Im \Im'}{2\tau} [\tau \cos(\varphi' - \varphi)]
 \end{aligned}$$

und nach Einführung der effektiven Werte (§ 131)

$$D = k J J' \cos(\varphi' - \varphi);$$

nun ist (nach Gl. 117)

$$J' = \frac{E \cos \varphi'}{w'},$$

mithin

$$D = k \frac{J E \cos \varphi' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}{w'}$$

und da die Leistung $P = J E \cos \varphi$ ist, so ist

$$P = \frac{D}{k} w' \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}$$

oder nach Umformung der Cosinuse

$$P = \alpha w' \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi'^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'},$$

wenn α ein Eichfaktor ist.

Dieser Ausdruck geht über in

$$P = \alpha w',$$

wenn

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi'$$

ist, oder wenn

$$\operatorname{tg} \varphi' = 0$$

ist.

Der letzten Bedingung kann man sehr nahe kommen, wenn $\frac{\omega L'}{w'}$ sehr klein ist, d. h. wenn der Vorschaltwiderstand w' sehr groß ist gegen den induktiven Widerstand $\omega L'$ der beweglichen Spule. Ist aber φ in dem zu messenden Stromkreis nahezu 90° , so daß $\operatorname{tg} \varphi$ nahezu unendlich groß wird, so erhält der letzte Faktor auch dann einen von 1 verschiedenen Wert, wenn w' sehr groß ist. Daher kann man den Wattverbrauch eines guten Kondensators oder eines guten Kabels mit einem Leistungsmesser nicht genau messen. Aber auch durch die Wirbelströme in dem Leiter, aus dem die feste Spule gewickelt ist, werden die Angaben bei großer Phasenverschiebung beeinflusst. Daher werden diese Spulen aus dünnen Kupferblechstreifen gewickelt, von denen bei größeren Stromstärken eine entsprechende Anzahl parallel geschaltet werden. Dieser Einfluß läßt sich theoretisch nicht berechnen, da er von der Gestalt der Spule abhängt; man weiß nur, daß er sich um so mehr bemerkbar macht, je größer die

Phasenverschiebung φ ist. Aus demselben Grunde müssen natürlich größere Metallteile von gutem Leitungsvermögen im Innern der drehbaren und der festen Spule vermieden werden.

280. Induktions-Leistungsmesser.

Die in § 271 behandelten Induktionsinstrumente können auch als Leistungsmesser ausgeführt werden, wenn dafür gesorgt wird, daß ein Drehmoment entsteht, das dem Produkte aus Strom und Spannung proportional ist. Dies wird erreicht, wenn man ein dem Strom J und ein der Spannung proportionales magnetisches Feld auf die Scheibe oder Trommel wirken läßt. Abb. 557 zeigt einen auf dem Schirmwirkungsprinzip beruhenden Leistungsmesser¹⁾. Der mittlere Magnet wird in den Strom J eingeschaltet (Abb. 556), die beiden äußeren in den Spannungsnebenschuß J' . Theoretisch ist nur einer nötig; dann entsteht aber noch ein zusätzliches Drehmoment auf Grund der in § 231 besprochenen Erscheinung, weil magnetische Streulinien aus den Eisenkernen seitlich austreten. Sitzen aber zu beiden Seiten des mittleren Kernes gleiche Kerne, so wirken diese zusätzlichen Drehmomente nach verschiedenen Seiten und heben sich auf. Es besteht dann bloß jenes Drehmoment, das auf dem Zusammenwirken der vom Hauptstrom i induzierten Ströme i_1 und der vom Nebenschlußstrom i' induzierten Ströme i_2 beruht. Natürlich muß der Wicklungssinn auf den beiden äußeren Kernen entgegengesetzt sein, damit sich nicht diese Drehmomente auch aufheben, sondern addieren. Ist die Spannung

$$e = \mathfrak{E} \sin \omega t,$$

$$\text{so ist} \quad i = \mathfrak{I} \sin (\omega t - \varphi).$$

Diesem ist (nach § 151) i_1 proportional unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung χ ; also

$$i_1 = c_1 \mathfrak{I} \sin (\omega t - \varphi - \chi).$$

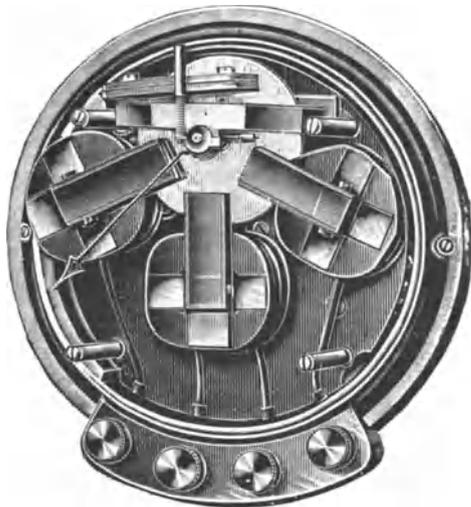


Abb. 557. Induktions-Leistungsmesser nach Benischke.

¹⁾ Benischke, ETZ 1899, S. 82, D. R. P. Nr. 84871, 1895.

Nach § 151 ist i_2 proportional der Spannung e unter Berücksichtigung einer Phasenverschiebung ε

$$i_2 = c_2 \mathfrak{E} \sin(\omega t - \varepsilon).$$

Das Drehmoment ist nun wie oben

$$D = c \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} i_1 i_2 dt$$

und daraus erhält man wie im vorigen Paragraph

$$D = c J E \cos(\varepsilon - \chi - \varphi).$$

Gelingt es nun $\varepsilon = \chi$ zu machen, so erhält man

$$D = c J E \cos \varphi,$$

also ein der Leistung proportionales Drehmoment, und zwar ohne den von φ' abhängigen Faktor, wie oben beim Dynamometer. Um $\varepsilon = \chi$ zu machen, hat man mehrere Mittel: Die richtige Dimensionierung der Schirme, die jetzt nur vor den beiden Spannungsmagneten sitzen, sowie das Verhältnis des induktiven Widerstandes zum Ohmschen im Spannungskreis i' , das man durch vorgeschaltete Drosselspulen oder induktionsfreie Widerstände in weiten Grenzen regulieren kann. Eine ganz genaue Abgleichung für alle Strom- und Spannungswerte, für die ein Wattmeter gebraucht wird, ist aber nicht möglich, weil der magnetische Widerstand und daher auch die Selbstinduktion von der Kraftliniendichte, den Wirbelströmen und der Streuung abhängen.

Bei den auf phasenverschobenen magnetischen Feldern beruhenden Induktions-Leistungsmessern, wie dem Elektrizitätszähler¹⁾ von Hummel und den sogenannten Ferraris-Leistungszeigern von Siemens & Halske (Abb. 541) wird immer ein Pol mit der Stromwicklung und der folgende mit der Spannungswicklung versehen. Um ein der Leistung proportionales Drehmoment zu erhalten, müssen die entsprechenden Felder um genau 90° gegeneinander verschoben sein. Um das zu erreichen, hat Hummel die in § 230 unter III angegebene Methode, Siemens & Halske die unter II angegebene verwendet. Heute gibt es eine große Zahl von Elektrizitätszählern, die auf der Herstellung zweier Felder mit 90° Phasenverschiebung beruhen.

¹⁾ Elektrizitätszähler unterscheiden sich grundsätzlich nur dadurch von diesen Leistungsmessern, daß die Gegenkraft wegfällt und ein Umlaufzähler angebracht ist, um die Umdrehungen der Scheibe der Trommel zu zählen. Elektrizitätszähler werden aber immer für eine bestimmte Spannung geeicht, weil sonst keine Proportionalität besteht. Bei Wattmetern braucht Proportionalität mit dem Ausschlagswinkel nicht zu bestehen, weil ihre Skala empirisch geeicht werden kann.

281. Schaltung der Leistungsmesser bei Ein- und Mehrphasenströmen.

Bei der in Abb. 556 dargestellten Schaltung, wo V beispielsweise einen Stromverbraucher bedeutet, also der Nebenschluß hinter der Stromspule, bei FG angeschlossen ist, wird durch den Leistungsmesser die Wärmeleistung im Widerstand w' mitgemessen, weil der Strom J' auch durch die Stromspule geht. Will man die reine Leistung des Stromverbrauchers haben, so muß jene Wärmeleistung berechnet und von der gemessenen Leistung abgezogen werden. Wird der Nebenschluß vor der Stromspule angeschlossen, so wird jetzt die Wärmeleistung in w' nicht mitgemessen, wohl aber die in der Stromspule, die aber meist vernachlässigt werden kann. Ist V ein Stromerzeuger, so muß die entsprechende Wärmeleistung zu der gemessenen Leistung hinzugefügt werden. Der Vorschaltwiderstand w' soll immer so wie in Abb. 556 liegen, nicht zwischen F und dem Instrument, weil sonst die ganze Spannung innerhalb des Leistungsmessers zwischen Strom- und Spannungsspule auftritt, was bei höheren Spannungen zur Zerstörung des Instrumentes führen kann.

Bei Zwei- oder Dreiphasenstrom sind zur Ermittlung der gesamten Leistung zwei bzw. drei Messungen notwendig. Der Nebenschluß ist dabei immer von jener Spannung abzunehmen, die zu dem betreffenden Strom gehört. Das gibt also bei Dreiphasenstrom mit neutralem Punkt die Schaltung in Abb. 558.

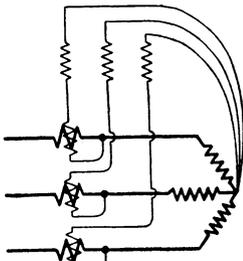


Abb. 558.

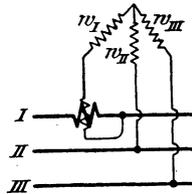


Abb. 559.

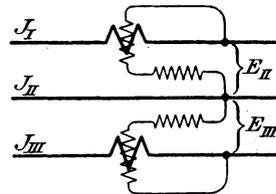


Abb. 560.

Bei unzugänglichem neutralem Punkt oder bei Dreieckschaltung müssen die drei Nebenschlüsse zu einem künstlichen neutralen Punkt vereinigt werden. Ein solcher ist vorhanden, wenn die Widerstände der drei Nebenschlüsse einander gleich sind.

Weiß man, daß die drei Stromkreise gleiche Leistung haben, so genügt die Messung in einem. Ist ein neutraler Punkt nicht vorhanden, so wird wiederum ein künstlicher durch die Widerstände w_I , w_{II} , w_{III} (Abb. 559) gebildet. Dabei muß der gesamte Widerstand w_I einschließlich der Spule des Instrumentes gleich dem der anderen Zweige sein.

Bei ungleicher Leistung der drei Ströme sind zur Messung der gesamten Leistung drei Leistungsmesser nach Abb. 558, mindestens aber zwei Leistungsmesser nach Abb. 560 gemäß der in § 226 abgeleiteten Gleichung

$$P = J_I E_{II} \cos \gamma + J_{III} E_{III} \cos \delta$$

notwendig.

Ist die Phasenverschiebung φ im Drehstromsystem Null, so ist $\gamma = +30^\circ$ und $\delta = -30^\circ$ (nach Abb. 427). Ist $\varphi = 60^\circ$, so ist $\gamma = 90^\circ$, so daß dieses Wattmeter auf Null steht, und das andere die gesamte Drehstromleistung anzeigt. Ist $\varphi > 60^\circ$, so ist $\cos \gamma$ negativ; dieses Wattmeter schlägt nun nach der anderen Seite aus, und seine Angabe muß von der des anderen subtrahiert werden.

Bei zusammengesetzten Wellenformen ist die Leistung (§ 216):

$$P = J_1 E_1 \cos \varphi_1 + J_3 E_3 \cos \varphi_3 + J_5 E_5 \cos \varphi_5 + \dots$$

Ist einer der Faktoren, z. B. E_3 Null, so verschwindet das ganze Glied dritter Ordnung. Daher dürfen die durch Abb. 559 und 560 dargestellten Schaltungen nicht angewendet werden, wenn ein neutraler Leiter besteht (Abb. 421), oder die neutralen Punkte des Stromerzeugers und des Stromverbrauchers an Erde gelegt sind. Denn dann sind die Glieder dritter Ordnung an der Leistung im Erzeuger und im Verbraucher beteiligt, im Leistungsmesser aber nicht, weil sie zwar durch die Stromspule, aber nicht durch den Nebenschluß desselben gehen (§ 225). Die durch Abb. 559 dargestellte Methode wird dann wieder richtig, wenn man den künstlichen neutralen Punkt mit einem natürlichen verbindet; dann braucht man aber die Widerstände w_{II} und w_{III} überhaupt nicht.

Ist bei einem Stromerzeuger mit Dreieckschaltung ein kurzgeschlossener Strom in der Wicklung vorhanden (§ 225), so erhält man durch Messung in den Leitungen die vom Stromerzeuger in die Leitungen geschickte Leistung, nicht aber die gesamte vom Stromerzeuger entwickelte Leistung.

282. Messung des Leistungsfaktors und des wattlosen Stromes.

Aus der Messung der Leistung P , des Stromes J und der Spannung E eines Wechselstromes ergibt sich der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ aus der Formel

$$\cos \varphi = \frac{P}{J E},$$

wie auch immer die Wellenform beschaffen sein mag¹⁾. Es sind

¹⁾ Aus der in Abb. 560 dargestellten Zweiwattmeterschaltung kann man auch die Tangente des Phasenverschiebungswinkels erhalten. Es ist nämlich (Breitfeld, ETZ 1899, S. 120):

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2},$$

zwar auch Instrumente konstruiert worden, die den Leistungsfaktor direkt anzeigen¹⁾. Sie sind aber kompliziert und zu sehr von anderen Umständen abhängig, als daß sie sich hätten einbürgern können.

Wichtiger sind die Instrumente, die den wattlosen Strom $J \sin \varphi$ unmittelbar anzeigen, weil sich danach die Spannungsregulierung von Synchronmotoren richtet. Solche Instrumente kann man aus jedem Leistungsmesser durch Umgestaltung des Nebenschlusses erhalten. Bewirkt man auf irgendeine Weise, daß der Strom oder das magnetische Feld des Nebenschlusses um 90° verschoben wird, so ist jetzt die Phasenverschiebung zwischen diesem und dem Hauptstrom $\varphi + 90$. Mithin ist jetzt das Drehmoment dieses Instrumentes

$$D = c J E \cos (\varphi + 90) = -c J E \sin \varphi.$$

Ist E konstant, so kann das Instrument in Einheiten des wattlosen Stromes $J \sin \varphi$ geeicht werden. Diese Einheiten sind natürlich ebenfalls Ampere, weil $\sin \varphi$ eine reine Zahl ist. Die erforderliche Phasenverschiebung von 90° kann bei Dynamometern annähernd erreicht werden, wenn man der beweglichen Spule statt des Widerstandes w' eine Drosselspule vorschaltet, deren Ohmscher Widerstand klein ist gegen den induktiven. Bei den Induktionsleistungsmessern, wo das magnetische Feld des Nebenschlusses um 90° gegen das des Hauptstromes verschoben ist, nimmt man eine Rückverschiebung des Feldes um nahezu 90° dadurch vor, daß man dem Nebenschluß einen hohen induktionsfreien Widerstand vorschaltet.

Bei Dreiphasenstrom kann man jeden Leistungsmesser für wattlosen Strom eichfähig machen, wenn man ihn statt wie in Abb. 558 oder 559 so schaltet wie in Abb. 561, also den Nebenschluß zwischen die beiden anderen Leitungen, wobei der Widerstand w' induktionsfrei sein muß. Aus Abb. 430 ersieht man, daß ein zwischen I und III abgenommener Strom J_{II} um 90° gegen den Strom J_{II} verschoben ist.

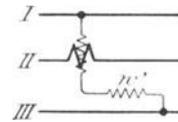


Abb. 561.

283. Stromwandler.

Die Durchleitung eines hochgespannten Stromes durch einen Strommesser oder einen Leistungsmesser ist mit schwerwiegenden Übelständen verbunden. Erstens ist eine sorgfältige Isolation notwendig, um eine Zerstörung des Instrumentes durch Übergang einer

wenn x_1, x_2 die Angaben der beiden Wattmeter bedeuten. Diese Methode ist aber nur gültig, wenn Strom- und Spannungswellen sinusförmig sind (Benischke, ETZ 1903, S. 193).

¹⁾ Bruger (Hartmann & Braun), ETZ 1898, S. 476; 1912, S. 1308; 1913, S. 998.

Entladung zu verhüten. Zweitens ist die Ablesung mit einiger Gefahr verbunden. Drittens treten fehlerhafte Angaben auf, wenn die

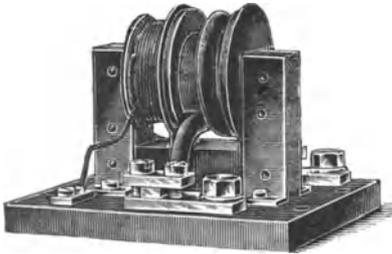


Abb. 562. Stromwandler der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft.

Ladung einen Ausschlag des beweglichen Teiles verursacht. Das letztere zeigt sich besonders häufig bei Leistungsmessern, indem der drehbare Teil schon einen Ausschlag zeigt, wenn die feste Spule noch stromlos ist. Bei Schaltanlagen kommt noch besonders erschwerend hinzu, daß die Hochspannungsleitungen bis zu der Tafel, auf der die Instrumente sitzen, geführt werden müssen¹⁾. Durch die Anwendung von

Stromwandlern wird das alles vermieden.

Ein solcher Stromwandler ist ein kleiner Transformator (Abb. 562), durch dessen primäre Wicklung der zu messende Strom J_1 geschickt wird (Abb. 563), während an die sekundäre Wicklung der Strommesser oder die Stromspule des Leistungsmessers angeschlossen wird.

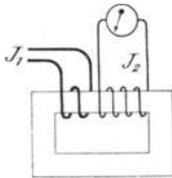


Abb. 563.

Das Instrument wird nun entweder mit dem Stromwandler zusammen empirisch geeicht, wozu man nur einen ganz kleinen Stromwandler braucht, oder man baut den Stromwandler so groß, daß die in § 151 erhaltene Beziehung

$$J_1 = J_2 \frac{N_2}{N_1}$$

gilt. Wie wir dort gesehen haben, ist dazu erforderlich, daß keine magnetische Streuung besteht ($\kappa = 1$), und daß w_2^2 verschwindend klein ist gegen $(\omega L_2)^2$. Zu w_2 gehören die gesamten sekundären Verluste, also auch die Eisenverluste. Daher sind Stromwandler, für die die obige Gleichung hinreichend genau gilt, erst möglich, seit es legierte Bleche (S. 293) mit sehr kleinem Wirbelstrom- und Hystereseverlust gibt. Wenn der induktive Widerstand ωL_2 groß sein soll, so muß nach Gl. 111 (S. 231) die Kraftlinienmenge \mathfrak{B} und die Windungszahl N_2 groß sein. Da die Kraftliniendichte wegen der Eisenverluste nicht groß sein darf, muß der Eisen-

¹⁾ Die jüngeren Elektrotechniker lernen die Schwierigkeiten, die früher bestanden, und die man durch Meßinstrumenten-Gehäuse aus Isolierstoff nebst isolierender Befestigung derselben, durch isolierte Aufstellung der ganzen Schalttafel samt Bedienungsgang, durch Schutzfenster usw. zu überwinden suchte, gar nicht mehr kennen. Die Schwierigkeiten waren so groß, daß eine Anwendung von mehr als 10000 V. im praktischen Betriebe unmöglich war. Das wurde erst anders durch die Erfindung der Stromwandler vom Verfasser im Jahre 1898 (ETZ 1899, S. 86).

querschnitt groß sein. Ein solcher Stromwandler darf also nicht zu klein gebaut werden¹⁾.

Voraussetzung ist natürlich auch, daß sich die Wellenform des sekundären Stromes nicht wesentlich von der des primären unterscheidet; das ist fast immer, selbst bei stark verzerrten Wellenformen der Fall, wie aus Abb. 564 hervorgeht, welche die Stromwellen bei Anschluß eines Instrumentes mit kleinem Widerstand, und aus Abb. 565, welche sie bei Anschluß eines Instrumentes mit größerem Widerstand darstellt.

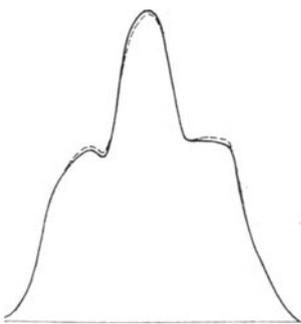


Abb. 564.

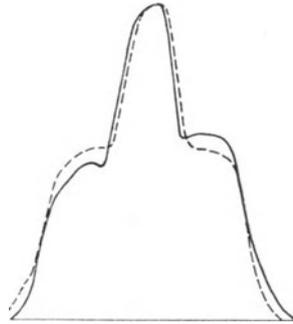


Abb. 565.

Aber auch bei niedrigen Spannungen ist die Anwendung eines Stromwandlers von großem Vorteil, wenn die Stromstärke so groß ist, daß die Einführung entsprechender Leitungsquerschnitte in ein Meßinstrument Schwierigkeiten macht oder überhaupt unmöglich ist. Dann braucht der primäre Strom keine Windung um den Eisenkern zu machen, sondern nur gerade durchgeführt zu werden, wie die Abb. 566 und 567 zeigen. Da die Kraftlinien einen Leiter als geschlossene Linien umgeben (vgl. Abb. 86, S. 114), verlaufen sie im Eisenkern. Um bei sehr großen Stromstärken die Leitungsschienen nicht unterbrechen zu müssen, ist bei der in Abb. 567 dargestellten Ausführung der Eisenkern so eingerichtet, daß er auseinandergeschraubt und genau so wie bei der Eichung auf den endgültigen Stromschienen wieder befestigt werden kann.

¹⁾ Vergrößert man die sekundäre Windungszahl (mit wenig Windungen beginnend), während der primäre Strom und das angeschlossene Amperemeter unverändert bleiben, so bemerkt man, daß der sekundäre Strom zunimmt. Das widerspricht also der obigen Gleichung, wonach der sekundäre Strom J_2 mit wachsender Windungszahl N_2 abnehmen müßte, erklärt sich aber daraus, daß die Selbstinduktion L_2 noch zu klein ist, also die obige Gleichung noch nicht gilt. Bei fortgesetzter Vergrößerung von N_2 erreicht J_2 ein Maximum und nimmt nun weiterhin ab, und zwar umgekehrt proportional mit N_2 , wenn dieses schon groß genug ist. Dieser Punkt muß überschritten sein, wenn das Stromverhältnis nach obiger Gleichung konstant sein soll.

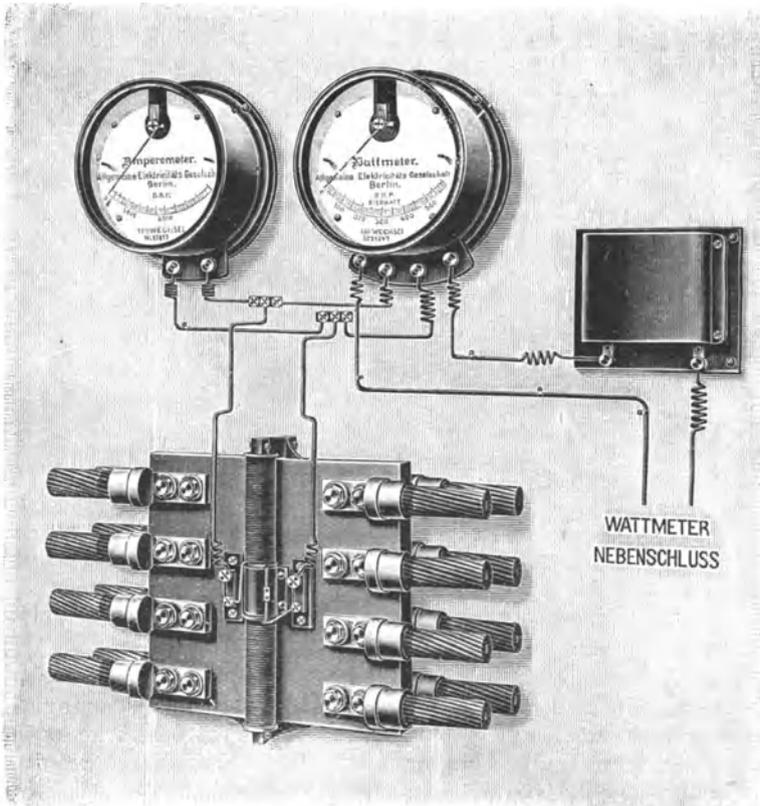


Abb. 566. Stromwandler mit Schienenstück. Allgem. Elektr.-Ges.

Um bei Leistungsmessern die Hochspannung vom Instrument fernzuhalten, muß auch der Nebenschlußstrom transformiert werden, was mit Hilfe der in § 275 erwähnten Spannungstransformatoren (Spannungswandler) geschieht. Das gibt die in Abb. 568 ersichtliche Schaltung von der durch Abb. 569 dargestellten Ausführung. Dabei ist Voraussetzung, daß die Phasenverschiebung zwischen den Spannungen

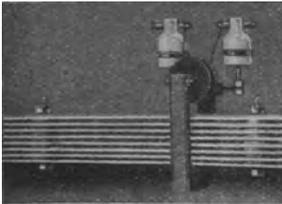


Abb. 567. Von den Schienen abnehmbarer Stromwandler. Allgem. Elektr.-Ges.

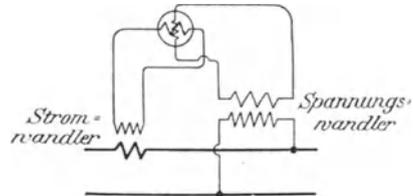


Abb. 568.

im Spannungswandler ebenso groß ist, wie zwischen den Strömen im Stromwandler. Sie ist in beiden 180° , wenn die Streuung und die Verluste klein sind.

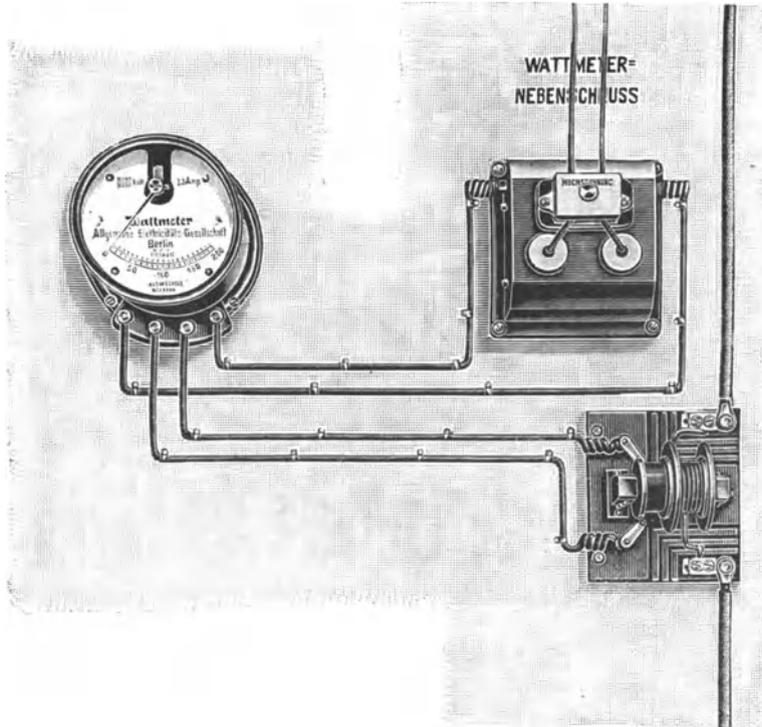


Abb. 569. Wattmeter mit Strom- und Spannungswandler.
Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft.

Das magnetische Feld im Eisenkern eines Stromwandlers kann natürlich durch äußere Wechselstromfelder beeinflusst werden, z. B. von benachbarten Stromleitern mit großer Stromstärke. Darauf ist bei der Anordnung auf Schalttafeln zu achten, nötigenfalls ist der Stromwandler durch elektrodynamische Schirme von der durch Abb. 257 (S. 306) dargestellten Art zu schützen.

Widerstandsmessungen.

284. Widerstandsmessung durch Vergleichung. Thomsonsche Brücke.

Am einfachsten ergibt sich der Widerstand eines Leiters aus dem Ohmschen Gesetz, wenn man den Strom und die Spannung an seinen Enden mißt. Genauer und zuverlässiger ist die Ver-

gleichung mit bekannten Widerständen, die unveränderlicher sind als Meßinstrumente. Schaltet man zu diesem Zweck den unbekanntem Widerstand x und den bekannten w hintereinander (Abb. 570) und legt die Enden eines empfindlichen Strom- oder Spannungsmessers einmal an die Klemmen von x und einmal an die Klemmen von w , so verhalten sich die Ausschläge des Instrumentes wie diese Widerstände, wenn die Stromstärke unverändert geblieben ist. Ferner ist Voraussetzung, daß der Strom, der durch das Instrument geht, verschwindend klein ist gegen den Strom, der durch w und x geht. Daher verwendet man bei genauen Messungen als Spannungsmesser den Kompensationsapparat (§ 276).

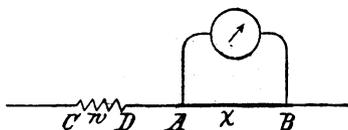


Abb. 570.

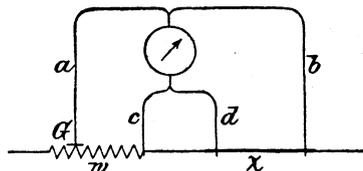


Abb. 571.

Von der Forderung konstanter Stromstärke während der Messung ist man unabhängig bei der Thomsonschen Brücke, die auf dem gleichen Prinzipie beruht. Sind x und w wieder die zu vergleichenden Widerstände (Abb. 571), so verbindet man alle vier Punkte so mit einem Galvanometer, daß die Spannungen an den beiden Widerständen gleichzeitig, aber im entgegengesetzten Sinne auf das Galvanometer wirken. Es zeigt daher auf Null, sobald man (durch Verschieben eines Gleitkontaktes G) $w = x$ gemacht hat. Mit G ist ein Zeiger verbunden, der unmittelbar den Widerstand auf einer geeichten Teilung anzeigt. Besitzen die Zuleitungen zum Galvanometer Widerstände von nicht zu vernachlässigender Größe, so muß $a = b$ und $c = d$ sein, oder sie müssen in einem bestimmten Verhältnis stehen. Ist z. B.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 10,$$

so ist x gleich dem zehnten Teil des bei Stromlosigkeit des Galvanometers abgelesenen Widerstandes. Ganz allgemein ist

$$\frac{w}{x} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

285. Die Wheatstonesche Brücke.

Auch bei dieser Methode ist man von Änderungen der Stromquelle unabhängig. Abb. 572 zeigt die Schaltung. In jedem der beiden Zweige fällt das Potential vom Werte U_1 auf den Wert U_2 . Es muß also zwei Punkte geben — z. B. A_1 und A_2 — die denselben

Potentialwert U besitzen. Verbindet man sie durch ein Galvanometer, so zeigt dieses keinen Ausschlag, da zwischen Punkten gleichen Potentials kein Strom entsteht. Die Punkte U_1, U_2, A_1, A_2 bestimmen vier Abschnitte mit den Widerständen w_1, w_2, w_3, w_4 . Es bestehen dann nach dem Ohmschen Gesetze folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} U_1 - U &= i_1 w_1 & U - U_2 &= i_1 w_2 \\ U_1 - U &= i_2 w_3 & U - U_2 &= i_2 w_4. \end{aligned}$$

Daraus ist

$$i_1 w_1 = i_2 w_3 \qquad i_1 w_2 = i_2 w_4.$$

Daraus folgt weiter

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

Sind nun drei von diesen Widerständen bekannt, so kann man den vierten daraus berechnen. Am einfachsten gestaltet sich die Messung, wenn $w_1 = w_2$ ist; dann ist $w_3 = w_4$.

Wie man sieht, ist die Schaltung in bezug auf die Punkte U_1, U_2 und A_1, A_2 symmetrisch; man kann daher Meßbatterie und Galvanometer miteinander vertauschen, ohne daß dadurch die Meßbedingung geändert würde.

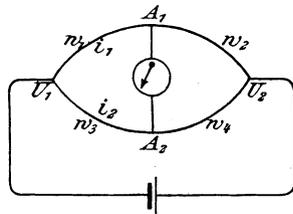


Abb. 572.

Beim Messen des Widerstandes einer Magnetwicklung hat man darauf zu achten, daß der Magnetismus, der durch den Meßstrom erregt wird, die Nadel des Galvanometers nicht beeinflußt. Man erkennt dies, indem man den Strom durch die Brücke gehen läßt, den Kontakt bei A_1 oder A_2 aber abhebt; wenn jetzt die Nadel einen Ausschlag gibt, so rührt er von äußeren magnetischen Einflüssen her. Man muß dann den Magnet weit wegstellen oder seinen magnetischen Kreis durch einen Anker kurzschließen, oder seinen Einfluß auf die Nadel durch einen Richtmagnet ausgleichen.

So ausgezeichnet diese Methode zur Messung größerer Widerstände ist, so ungeeignet ist sie für sehr kleine, da ja auch die Widerstände der Verbindungsdrähte und der Kontaktstellen mitgemessen werden. Man muß dann die im vorigen Paragraphen beschriebene Thomsonsche Brückenschaltung anwenden.

286. Widerstandsmessung von elektrolytischen Leitern und Zellen.

Zur Messung des Widerstandes eines Elektrolyten ist die Wheatstonesche Brücke am geeignetsten. Man darf aber als Meßstrom keinen Gleichstrom verwenden, sondern nur einen Wechselstrom, weil ersterer eine Zersetzung einleitet und gleichzeitig mit

dieser eine Polarisation (§ 66) eintritt, die bekanntlich in einer entgegengesetzt gerichteten EMK besteht. Diese würde sich bei der Messung wie ein erhöhter Widerstand bemerkbar machen. Bei einem Wechselstrom oder auch schon bei dem Strome eines Funkeninduktors fällt dies weg, weil so wie der Strom, auch die Polarisation eine wechselnde ist, deren Resultierende Null ist. Jetzt kann man aber kein gewöhnliches Gleichstromgalvanometer verwenden, sondern nur ein hochempfindliches Dynamometer oder aber ein Telephon. Dieses wird von einem Wechselstrom zum Tönen gebracht, und man stellt nun in der Wheatstoneschen Brücke auf das Verschwinden dieses Tones ein. Sind die Vergleichswiderstände nicht vollständig frei von Selbstinduktion, so verstummt es niemals gänzlich, und man stellt dann auf das Minimum der Tonstärke ein. Den zu messenden Elektrolyten gibt man in Röhren von bekanntem Querschnitt und führt den Strom durch Elektroden aus Platin oder platinierem Silber zu, deren Abstand leicht gemessen werden kann, so daß man aus dem gemessenen Widerstand leicht den spezifischen berechnen kann. Sind die Gefäße für die Elektrolyten nicht direkt ausmeßbar, so eicht man sie durch eine Messung mit einem Elektrolyten, dessen spezifischer Widerstand bekannt ist.

In gleicher Weise mißt man den inneren Widerstand galvanischer Zellen (Akkumulatoren). Kennt man ihre EMK, die man im stromlosen Zustand durch Messung der Klemmenspannung mit einem Voltmeter oder mit dem Kompensationsapparat erhält, so kann man eine rasche Messung in der Weise machen, daß man die Zelle durch einen bekannten Widerstand w und einen Strommesser schließt; dann erhält man aus dem Ohmschen Gesetz $J = \frac{E}{w + x}$ den inneren Widerstand x . Kennt man E nicht, so macht man noch eine zweite Messung mit einem anderen Widerstande und hat dann zwei Gleichungen, aus denen man E und x berechnen kann.

Die Messung der charakteristischen Wechselstromgrößen.

287. Die Messung des wirksamen, des Induktions- und des Kapazitäts-Widerstandes.

Wenn ein Leiter von Wechselstrom durchflossen wird, so hat er einen größeren Ohmschen Widerstand, als wenn er von Gleichstrom durchflossen wird, weil der in § 169 besprochene Einfluß der Wirbelströme bewirkt, daß vom Wechselstrom nicht der ganze Querschnitt des Leiters gleichmäßig ausgefüllt wird. Daher muß in jenen Fällen, wo dieser Einfluß erheblich ist, der Widerstand nicht mit Gleichstrom, sondern mit Wechselstrom bestimmt werden, wenn

er bei Wechselstrom benutzt werden soll. Ferner wissen wir aus § 158, daß bei einer Spule mit Eisenkern für den gesamten Wattverbrauch und die Phasenverschiebung nicht der wahre Ohmsche Widerstand und die wahre Selbstinduktion, sondern die entsprechenden äquivalenten Werte in Betracht kommen. Daher müssen auch diese Größen mit Wechselstrom bestimmt werden und zwar bei der Periodenzahl, die in Betracht kommt. Hierzu dienen in erster Linie die Gleichungen 180 und 181 (S. 279), die unter allen Umständen die richtigen, betriebsmäßigen Widerstandswerte ergeben. Man muß aber Spannung, Strom und Leistung messen, was nicht immer möglich ist. Dahef sind auch vergleichende Methoden mit einem Meßinstrument nötig.

Dazu dient am besten die in § 284 beschriebene Vergleichung des unbekanntes Widerstandes w_s mit einem bekannten Widerstande w_n (Abb. 573), wobei natürlich Voraussetzung ist, daß der bekannte Widerstand nicht auch durch den Wechselstrom verändert wird. Bei den käuflichen Widerstandsnormalien ist dies nicht der Fall, da sie aus einem Metall von so hohem spezifischen Widerstand (Konstantan, Manganin u. dgl.) bestehen, daß merkliche Wirbelströme nicht entstehen können. Eisen enthalten sie überhaupt nicht. Als Instrument zur Vergleichung muß natürlich ein Wechselstrominstrument von genügender Empfindlichkeit dienen, und sein Stromverbrauch J_1 muß neben dem durch die Widerstände gehenden Strome J verschwindend klein sein. Ist das nicht der Fall, so muß man einen veränderlichen Vergleichswiderstand w_n haben, den man ungefähr gleich groß mit w_s machen kann, so daß bei jeder der beiden Messungen ungefähr gleich viel Strom abgezweigt wird. Am genauesten ist die Messung natürlich, wenn man die Widerstände so genau abgleichen kann, daß man gleiche Ausschläge am Instrument erhält, oder wenn man ein empfindliches Quadrantenelektrometer verwendet, das gar keinen Strom verbraucht.

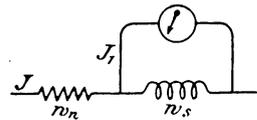


Abb. 573.

Mittels des Quadrantenelektrometers kann diese Methode zu einer Nullmethode umgestaltet werden, wenn man die Schaltung in Abb. 574 anwendet. Sind die Potentialdifferenzen $U_1 - U_2$ und $U_2 - U_3$ einander gleich, so zeigt das Elektrometer keinen Ausschlag. Dabei ist man von der Konstanz der Stromstärke unabhängig. Von Wichtigkeit ist aber, daß man die richtige Nullstellung des Elektrometers kennt, die nicht immer mit der Einstellung bei Spannungslosigkeit identisch ist. Man schaltet daher statt der Widerstände w_s und w_n vorher zwei gleiche induktionsfreie Widerstände oder zwei ganz gleich große und gleich beschaffene Kondensatoren ein. Dabei ist zu beachten, daß die volle Spannung $U_1 - U_3$ zwischen den beiden

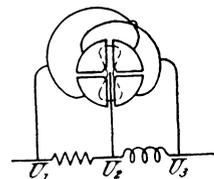


Abb. 574.

Quadrantenpaaren auftritt, so daß höhere Spannungen dem Instrument gefährlich werden können.

Mit diesen Methoden kann man also wirksame Widerstände und scheinbare Widerstände von der Form

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

mit wahren Widerständen vergleichen. Schließlich kann man L oder C berechnen, wenn w und $\omega = 2\pi\nu$ bekannt ist, und der zur Messung verwendete Strom nicht zu sehr von der Sinusform abweicht; andernfalls gilt der so gefundene Wert von L oder C nur für die betreffende Wellenform (§ 216). Für w kann man in der Regel den mit Gleichstrom gemessenen Wert einsetzen, denn er ist meist so klein gegen $(\omega L)^2$ oder $\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$, daß der geringe Unterschied zwischen Gleich- und Wechselstrom auf L oder C keinen merklichen Einfluß hat. Ist das nicht zulässig, so muß man eine zweite Messung machen, nachdem man zu dem scheinbaren Widerstand einen bekannten Normalwiderstand w' hinzugefügt hat. Dann hat man zwei Gleichungen

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} = w_n$$

und

$$\sqrt{(w + w')^2 + (\omega L)^2} = w_n',$$

aus denen man die Unbekannten w und ωL berechnen kann.

Die vorstehenden Methoden ermöglichen natürlich auch die Vergleichung von Kondensatoren. Die Ausschläge bei der Methode Abb. 573 verhalten sich wie die Kapazitätswiderstände, also umgekehrt wie die Kapazitäten. Hat man einen Luftkondensator von veränderlichem Abstand, so daß seine Kapazität der des anderen gleich gemacht werden kann, so kann man die Methode in Abb. 574 anwenden. Zur Berechnung der Kapazität eines Luftkondensators dienen die Formeln in § 26 und 31.

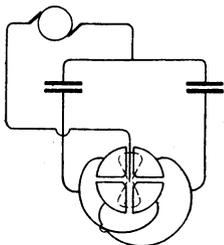


Abb. 575.

Hierfür eignet sich auch die in Abb. 575 dargestellte Schaltung, wenn die Kapazität des Elektrometers klein ist gegen die eines Kondensators. Diese Methode hat den Vorteil, daß die volle Spannung der Stromquelle nicht im Instrument zur Geltung kommt, so daß man auch hohe Spannung anwenden kann.

Bei der Anwendung der durch Abb. 573 dargestellten Methode zur Vergleichung zweier Kondensatoren kann man auch hochgespannten Strom anwenden, wenn man als Meßinstrument ein statisches Voltmeter von der durch Abb. 549 dargestellten Art verwendet. Das ist von Wichtigkeit für Kondensatoren mit festem Dielektrik, weil deren Kapazität bei Hochspannung manchmal anders ist als bei

Niederspannung. Man erhält dann durch eine solche Messung unmittelbar den äquivalenten Kapazitätswiderstand.

Überhaupt erhält man bei Messungen mittels Wechselstrom den für Wechselstrom allein maßgeblichen äquivalenten Kapazitätswiderstand, der sich von dem reinen oder theoretischen Kapazitätswiderstand unterscheidet, wenn das Dielektrikum kein vollkommenes ist, oder wenn ein Übergang der Elektrizität zwischen den Kondensatorplatten durch Ausstrahlung oder Entladung stattfindet (§ 181).

Zur Bestimmung des Koeffizienten M der gegenseitigen Induktion dient die in § 151 abgeleitete Gleichung

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\omega M}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}},$$

wenn der scheinbare Widerstand $\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}$ durch eine der vorstehenden Methoden ermittelt werden kann. In der Starkstromtechnik braucht man aber diesen Koeffizienten nicht, sondern den Kupplungsfaktor $\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ oder den Streufaktor $\delta = 1 - \kappa^2$, deren Bestimmung in § 160 behandelt wurde.

288. Die Wheatstonesche Brücke bei Wechselstrom.

Die Wheatstonesche Brücke kann bei Wechselstrom nur unter besonderen Voraussetzungen angewendet werden. Nach § 285 erfolgt die Abgleichung derart, daß man Stromlosigkeit im Galvanometer herstellt. Bei Gleichstrom genügt hierzu die Bedingung, daß die Spannungen in den vier Zweigen gleich sind. Bei Wechselstrom genügt das nicht, sondern es darf auch keine Phasenverschiebung zwischen den Spannungen $U_1 - U$ und $U - U_2$ (Abb. 576) bestehen.

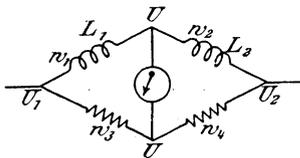


Abb. 576.

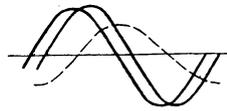


Abb. 577.

Die Notwendigkeit dieser Forderung erkennt man aus Abb. 577, in der zwei gleich große aber verschobene Spannungen gezeichnet sind. Man sieht, sie ergeben eine durch die gestrichelte Linie dargestellte resultierende Spannung. Ein entsprechender Strom würde durch das Galvanometer gehen. Wir betrachten die in Abb. 576 dargestellte Brücke, deren obere Zweige scheinbare Widerstände enthalten. Dann lautet die Bedingung für gleiche Spannung

$$\frac{\sqrt{w_1^2 + (\omega L_1)^2}}{\sqrt{w_2^2 + (\omega L_2)^2}} = \frac{w_3}{w_4}$$

und die Bedingung für Phasengleichheit

$$\frac{\omega L_1}{w_1} = \frac{\omega L_2}{w_2}$$

Im unteren Zweig, der nur induktionsfreie Widerstände enthält, sind die Phasen ohnehin gleich. Aus den beiden obigen Gleichungen ergeben sich die beiden folgenden

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} = \frac{L_1}{L_2}$$

Enthält also z. B. nur einer der vier Zweige Selbstinduktion, so kann das Galvanometer niemals stromlos werden¹⁾. Die Bedingungsgleichungen enthalten die Periodenzahl nicht; man ist also von Periodenzahl und Wellenform unabhängig. Dafür muß aber zur Bestimmung der einen Selbstinduktion die andere bekannt sein; ferner muß, um diese Gleichungen überhaupt erfüllen zu können, nicht nur w_3 und w_4 sondern auch w_2 veränderlich sein.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun

$$w_1 = w_2 \frac{w_3}{w_4}, \quad L_1 = L_2 \frac{w_3}{w_4}$$

w_1 und L_1 bedeuten die wirksamen Werte (§ 169) oder die äquivalenten Werte (ρ , λ ; § 152), die dem bei der Messung verwendeten Wechselstrom entsprechen.

Befindet sich an Stelle der Selbstinduktion L_1 eine Kapazität C , so ist (§ 172)

$$\frac{1}{\omega^2 C} = L_2 \frac{w_3}{w_4} \quad \text{oder} \quad C = \frac{w_4}{\omega^2 L_2 w_3}$$

Ist die Kapazität keine reine, so erhält man die äquivalente Kapazität (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen).

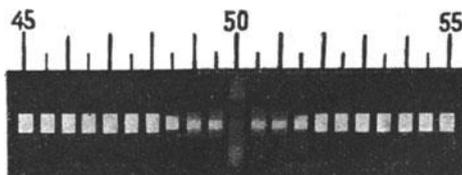
289. Bestimmung der Periodenzahl.

Die Periodenzahl eines Wechselstromes ist gleich dem Produkte aus der Umlaufszahl in einer Sekunde und der halben Polzahl. Man erhält sie also am einfachsten durch Zählung der Umlaufzahl des Stromerzeugers oder eines an sein Netz angeschlossenen Synchronmotors.

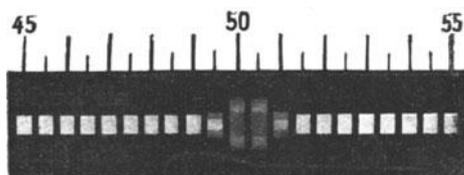
¹⁾ Bei allen Wechselstrommessungen ist darauf zu achten, daß in den Hilfsdrähten keine EMK induziert wird, daß sie also nebeneinander liegen oder verdreht werden (wie in Abb. 583). Die Nichtbeachtung dieser Regel hat schon zu falschen Schlüssen über die Selbstinduktion geführt (ETZ 1907, S. 978).

Wenn dies nicht möglich ist, läßt sie sich leicht mittels einer stroboskopischen Scheibe, die von einer an das Netz angeschlossenen Bogenlampe beleuchtet wird, bestimmen¹⁾. Wird die stroboskopische Scheibe so gedreht, daß sie still zu stehen scheint, so ist das Produkt aus der Umlaufzahl der Scheibe und der halben Segmentzahl gleich der Periodenzahl. Mit einer Glühlampe kann man die Erscheinung nur bei gedämpftem Tageslicht erkennen.

Hartmann - Kempf und Frahm haben die Resonanzschwingungen elastischer Körper angewendet. Befindet sich eine Stahlfeder vor einem von dem betreffenden Wechselstrom erregten Magnet, so gerät sie in Resonanzschwingungen, wenn ihre Eigenschwingungszahl der Polwechselzahl des Stromes gleich ist. Hat man also eine Reihe solcher abgestimmter Zungen nebeneinander, so kommt jene in Resonanz, deren Eigenschwingung mit der Polwechselzahl des Stromes übereinstimmt. Abb. 578 zeigt Ablesungen an einem solchen Apparat.



Ablesung = 50,5.



Ablesung = 50,25.

Abb. 578.

290. Die Aufnahme von Wellenformen²⁾.

I. Punktförmige Aufnahme (Joubert).

Mit der Welle des Stromerzeugers S (Abb. 579) ist eine Scheibe aus Isoliermaterial fest verbunden, die auf einer Hälfte einen Metallring M trägt. Mit diesem verbunden ist der Metallkontakt K . Auf den beiden Hälften schleifen die Bürsten B_1, B_2 . Ist die Maschine zweipolig, so erfolgt die Berührung zwischen K und B_2 immer bei demselben Augenblickswert des Stromes. Durch das Galvanometer G geht also ein diesem Augenblickswert proportionaler Strom, und es ent-

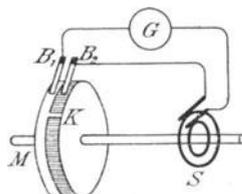


Abb. 579. Joubertsche Scheibe.

¹⁾ Benischke, ETZ 1899, S. 142, Annal. d. Phys. 5, 1901, S. 487.

²⁾ Es können hier nur die Prinzipien der wichtigsten Methoden angegeben werden. Näheres siehe: Orlich, „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven“ Heft 7 der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen“.

steht ein konstanter Ausschlag, weil bei 50 Perioden der Kontakt 50 mal in der Sekunde bei demselben Augenblickswert erfolgt. Wird die Bürste B_2 um einen gewissen Winkel verschoben, so erfolgt die Berührung bei einem anderen Augenblickswert. Trägt man die Drehungswinkel der Bürste B_2 als Abszissen, die Galvanometeraus schläge als Ordinaten auf, so erhält man Punkte, deren Verbindung die Wellenform ergibt.

II. Braunsche Röhre.

Diese Röhre ist eine Kathodenstrahlröhre (§ 235) mit einem erweiterten Ende, in dem sich ein fluoreszierender Schirm S (Abb. 580) befindet, um hier die von der Kathode K auftretenden Kathodenstrahlen sichtbar zu machen. D_1 und D_2 sind zwei Glaswände mit je einem Loch in der Mitte, so daß nur ein dünnes Kathodenstrahlbündel in das erweiterte Ende gelangt und auf dem Schirm S als leuchtender Punkt erscheint. Der zu untersuchende Wechselstrom wird durch eine Spule geschickt und diese so der Röhre — rechts von D_2 — genähert, daß ihre Kraftlinien das Kathodenstrahlbündel senkrecht kreuzen. Infolgedessen wird das Strahlenbündel proportional

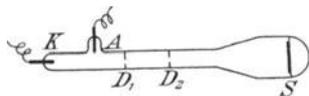


Abb. 580. Braunsche Röhre.

dem Strome abgelenkt, und auf dem Schirm erscheint eine leuchtende Linie. Betrachtet man diese durch einen rotierenden Spiegel, der so gestellt ist, daß seine Drehungsachse parallel zu dieser Linie liegt, so wird der leuchtende Punkt im Spiegel senkrecht zu seiner Ablenkungsrichtung verschoben, und daher sieht man bei geeigneter Drehgeschwindigkeit im Spiegel ein Bild der Stromwelle. Auf diese Weise sind die Abb. 359 bis 363 gewonnen worden. Die Kathodenstrahlen werden wie üblich durch Hochspannungsentladungen erzeugt. Am besten durch eine Elektrisiermaschine, weil damit die Röhre am wenigsten erhitzt wird¹⁾.

III. Oszillograph (Blondel).

Ein Galvanometer, das keine Trägheit hat, erhält in jedem Augenblick eine Ablenkung, die dem Augenblickswert des Stromes proportional ist wie ein Kathodenstrahlbündel. Die gewöhnlichen Galvanometer haben aber so viel Trägheit, daß sie bei Wechselstrom keinen Ausschlag zeigen, weil jedem Anstoß von einer positiven Halbwelle ein entgegengesetzter von der negativen Halbwelle folgt. Blondel ist es durch Anwendung des Deprez-D'Arsonvalschen Prinzipes (§ 267) auf folgende Weise gelungen, ein Instrument von

¹⁾ Wehnelt hat die Röhre dahin abgeändert, daß die Kathodenstrahlen durch die in § 244 erwähnte Ausstrahlung aus glühenden Metalloxyden erzeugt werden. Physikal. Zeitschr. VII, S. 732, 1905.

so geringer Trägheit herzustellen, daß es den Augenblickswerten des Wechselstromes folgen kann. Zwischen zwei starken Magnetpolen NS (Abb. 581) befindet sich eine aus dünnen Drähten oder Bändern gebildete Stromschleife, der bei b der Wechselstrom zugeführt wird. Auf den beiden Drähten ist das kleine Spiegelchen a befestigt. Die Stromschleife wird proportional dem Strome gedreht, wie eine Ankerschleife einer Gleichstrommaschine; während der positiven Halbwelle nach der einen Seite, während der negativen nach der anderen Seite. Und da die Trägheit dieses Systemes sehr klein ist, erfolgt die Drehung proportional den Augenblickswerten. Um die Bewegung des Spiegelchens sichtbar zu machen, läßt man einen kräftigen Lichtstrahl auf ihn fallen und nach Konzentration mittels einer Zylinderlinse auf ein lichtempfindlicher Papier, das auf einer Trommel aufgespannt ist, die von einem Synchronmotor gedreht wird. Die Abb. 326, 405, 406 u. a. sind auf diese Weise gewonnen.

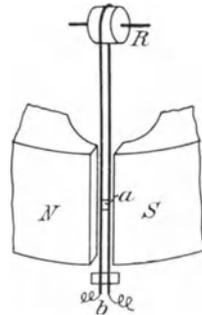


Abb. 581. Oszillograph.

IV. Glimmlicht-Ondograph (Gehrke).

In einer luftverdünnten Röhre sind zwei lange drahtförmige Elektroden (Abb. 582) eingeschmolzen. Wird eine genügend hohe Spannung angeschlossen, so überzieht sich (nach § 233) jene, die eben Kathode ist, mit dem kathodischen Glimmlicht, dessen Ausbreitung auf der Elektrode von der Spitze aus proportional der Stromstärke ist. Die Länge des Glimmlichtes auf der Elektrode ist also den Augenblickswerten des Wechselstromes, an den die Röhre angeschlossen ist, proportional. Beim Wechsel der Stromrichtung erscheint das Glimmlicht auf der anderen Elektrode. Betrachtet man sie in einem rotierenden Spiegel derart, daß die beiden Elektroden in einer Linie liegen, so sieht man leuchtende Flächen, deren äußerer Rand die Spannungswelle der Stromquelle darstellt. Da die Entladungserscheinung erst bei mehr als 300 Volt eintritt, ist diese Methode nur bei hoher Spannung verwendbar, aber gerade deshalb in manchen Fällen sehr zweckmäßig. Die Abb. 364a bis c sind nach diesem Verfahren gewonnen worden.



Abb. 582. Glimmlicht-Ondograph.

Magnetische Messungen.

291. Bestimmung der Kraftliniendichte und Kraftlinienmenge.

I. Um die magnetische Kraft (Feldstärke) \mathfrak{H} eines magnetischen Feldes in Luft mit einem anderen zu vergleichen, benützt man eine an einem Faden aufgehängte Magnetenadel und versetzt

sie in beiden Feldern in Schwingungen. Ist T das Trägheitsmoment und \mathfrak{M} das magnetische Moment der Nadel, so macht sie in dem Felde \mathfrak{S} in einer Zeiteinheit n Schwingungen und diese sind

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mathfrak{M} \mathfrak{S}}{T}},$$

in einem anderen Felde \mathfrak{S}' macht sie n' Schwingungen und daher ist

$$n^2 : n'^2 = \mathfrak{S} : \mathfrak{S}'.$$

Diese Methode ist aber nur bei schwachen Feldern anwendbar.

II. Um die durch eine gewisse Fläche gehende Kraftlinienmenge \mathfrak{B} und dadurch auch die Kraftliniendichte \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{S} zu messen, verwendet man ein ballistisches Galvanometer (§ 278), das an die Enden einer Drahtspule von N Windungen angeschlossen ist (Abb. 583). Diese stellt man in dem zu messenden Felde so auf, daß sie von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt wird. Entfernt man die Spule durch eine rasche Bewegung aus dem Felde bis an eine Stelle, wo es Null ist, so ist die induzierte EMK nach § 125

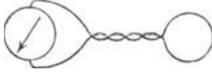


Abb. 583.

$$e = -N \frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Integriert man über die Zeit, während der die Bewegung stattfindet, so ist

$$\int e dt = - \int N \frac{d\mathfrak{B}}{dt} dt = -N\mathfrak{B}$$

und nach dem Ohmschen Gesetz

$$\int e dt = \int iw dt = qw,$$

wenn w den Widerstand des ganzen Stromkreises und q die beim Schneiden der \mathfrak{B} -Kraftlinien in Bewegung gesetzte Elektrizitätsmenge bedeutet. Diese wird durch das ballistische Galvanometer gemessen, und es ist

$$\mathfrak{B} = - \frac{qw}{N},$$

wobei q und w in absoluten elektrom. Einheiten auszudrücken sind.

Anstatt die Stromschleife aus dem Felde zu entfernen, kann man sie auch um 90° drehen. Dabei kommt sie in eine Stellung, bei der sie von keinen Kraftlinien getroffen wird, so daß die Änderung derselben auch gleich \mathfrak{B} ist. Besser ist es, wenn man die Schleife um 180° dreht; dabei werden sämtliche \mathfrak{B} -Kraftlinien zweimal geschnitten, ohne daß sich die Richtung des induzierten Stromes ändert (§ 128). Man erhält so den doppelten Ausschlag im Galvanometer und muß dann natürlich auch durch 2 dividieren.

Noch besser ist es, wenn das magnetische Feld von einem Strome herrührt, der geöffnet und geschlossen werden kann. Denn in beiden Fällen ist die Änderung der Kraftlinienzahl gleich \mathfrak{z} , und beim Umkehren des Stromes gleich $2\mathfrak{z}$. Das Öffnen oder Schließen oder Umkehren des Stromes ist deswegen vorzuziehen, weil man dabei die Drahtschleife feststellen kann. Mit dieser Methode erhält man auch die Kraftlinienzahl in einem Elektromagnet, wenn man die Drahtschleife um denselben herumlegt und den Magnetisierungsstrom umkehrt.

Auf diese Weise erhält man auch die Kraftlinienmenge eines Elektromagnetes oder eines Dauermagnetes an beliebigen Stellen, oder die magnetische Streuung irgendeines Apparates oder einer Maschine. Man bringt die aus einer oder mehreren Windungen bestehende Meßspule über den Magnet und kehrt dann den Magnetisierungsstrom um oder entfernt die Spule so weit, bis sie von Kraftlinien nicht mehr getroffen wird. Macht man das an verschiedenen Stellen 1, 2, 3 usw. (Abb. 584), so sind die Galvanometerausschläge den durch den betreffenden Querschnitt verlaufenden Kraftlinien proportional. Verhalten sich z. B. die in den Stellen 1 und 2-gemessenen Ausschläge wie 10 zu 9, so weiß man, daß zwischen 1 und 2 ein Zehntel aller Kraftlinien aus dem Eisen in die Luft übertritt. Auf diese Weise kann man die ganze Verteilung der Kraftlinien ermitteln. Macht man außerdem ein Bild des magnetischen Feldes durch Eisenfeilspäne, so hat man auch die Gestalt des Feldes. Der Hopkinsonsche Streufaktor (S. 186) zwischen diesen Stellen ist: $v = 10/9$; der Heylandsche Streufaktor ist: $\tau = 1/9$.

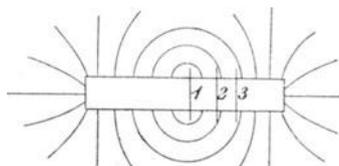


Abb. 584.

Noch einfacher ist diese Methode bei Wechselstrom-Magnetisierung. Dann braucht man die Meßspule nur an die betreffende Stelle, wo man die Kraftlinienmenge ermitteln will, zu bringen und mit einem Wechselstrom-Voltmeter zu verbinden. Dann ist nach dem Grundgesetz (§ 132)

$$\mathfrak{z} = \frac{E \cdot 10^8}{4,44 \nu N},$$

wenn die Kraftlinienmenge sich nach dem Sinusgesetz ändert. Ist dies nicht der Fall, so muß man nach einer der in § 290 angegebenen Methoden die Wellenform der induzierten EMK bestimmen und nach § 215 verfahren.

III. Magnetischer Spannungsmesser¹⁾. Die magnetischen Kraftlinien sind geschlossene Kurven. Sie werden erzeugt durch eine MMK \mathfrak{F} , welche entweder von einem Strome oder von der

¹⁾ Rogowski und Steinhaus, Archiv f. Elektrot. 1912 Bd. 1, S. 141.

Koerzitivkraft eines Dauermagnetes herrührt (§ 114). Betrachtet man Teilstücke eines magnetischen Kreises mit den magnetischen Widerständen w_1, w_2, w_3 , so ist (S. 189):

$$\mathfrak{F} = w_1 \mathfrak{z} + w_2 \mathfrak{z} + w_3 \mathfrak{z}.$$

Die einzelnen Glieder der rechten Seite bezeichnet man als magnetische Spannung zwischen jenen Punkten, zwischen denen der magnetische Widerstand w_1 bzw. w_2, w_3 besteht. Bringt man die Enden einer Meßspule (Abb. 585) an zwei Stellen, zwischen denen die magnetische Spannung $w_1 \mathfrak{z} = f_1 = \int_1^2 \mathfrak{H} \cdot dl$ herrscht (S. 175), so wird bei plötzlicher Entfernung der Meßspule¹⁾ ein Strom in ihr induziert, welcher in einem ballistischen Galvanometer gemessen

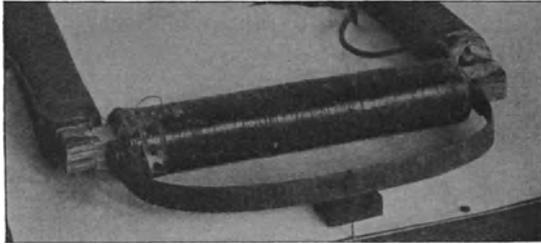


Abb. 585.

und auf magnetische Spannung oder unmittelbar auf Amperewindungen geeicht werden kann, weil $f_1 = 0,4\pi (iN)_1$ ist. Die so ermittelten Amperewindungen $(iN)_1$ sind jene, welche notwendig sind, um die magnetische Spannung f_1 zu erzeugen, d. h. um die Kraftlinienmenge \mathfrak{z} durch den magnetischen Widerstand w_1 durchzutreiben. Die Wirkung in der Meßspule beruht darauf, daß die Kraftlinienmenge, welche durch ein Längenelement dl' der Meßspule verläuft gleich $d\mathfrak{z}' = ns \mathfrak{H} \cdot dl'$ ist, wenn n die Windungszahl auf einer Längeneinheit und s der Querschnitt der Meßspule ist. Die gesamte Kraftlinienmenge, welche bei ihrem Verschwinden den Strom durch das Galvanometer schickt, ist daher $\mathfrak{z}' = \int_1^2 ns \mathfrak{H} \cdot dl'$. Ist n und s längs der ganzen Meßspule gleichmäßig, so ist $\mathfrak{z}' = ns \int_1^2 \mathfrak{H} \cdot dl'$, d. h. die Kraftlinienmenge und daher auch der induzierte Strom ist proportional dem Linienintegral der Feldstärke \mathfrak{H} zwischen den Endwindungen der Meßspule. Wie die Kraftlinien zwischen den Endwindungen verlaufen, ob sie einmal aus der Meßspule austreten und wieder eintreten, ist gleichgültig. Eine scharf definierte Feldstärke \mathfrak{H}

¹⁾ Zweckmäßiger ist es, den Strom in der Magnetisierungswicklung umzukehren, wobei sich der doppelte Ausschlag im Galvanometer ergibt.

ist nur dann vorhanden, wenn sie im Bereich der Endwindungen konstant ist. Andernfalls erhält man nur einen Mittelwert. Die Meßspule wird daher flach gemacht (auf einen Streifen Karton aufgewickelt), damit sie wenigstens in einer Richtung eine bestimmte Feldstärke abgrenzt.

Die Eichung erfolgt am einfachsten dadurch, daß die Meßspule um einen Strom von bekannten Amperewindungen JN zu einer ringförmigen Spule (Abb. 117) geschlossen wird. Dann ist

$$ns \int_1^2 \mathfrak{H} \cdot dl' = c \int \mathfrak{H} \cdot dl' = 0,4\pi JN.$$

Abb. 585 zeigt die Anwendung zur Messung der magnetischen Spannung in einem Eisenkern zwischen den Enden der Magnetisierungsspule. Abb. 586 zeigt die Messung der magnetischen Spannung an einem Zusammenstoß zweier solcher Eisenkerne¹⁾. Werden diese Messungen an allen vier Seiten und Ecken eines aus 4 solchen Kernen gebildeten Körpers (Abb. 590) ausgeführt, so muß die Summe aller gemessenen Spannungen gleich sein der MMK aller vier Magnetisierungsspulen.

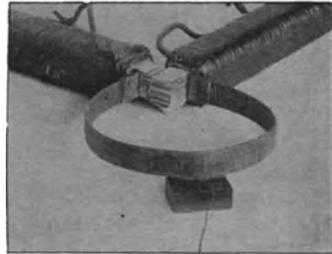


Abb. 586.

Es ist zu beachten, daß dieser magnetische Spannungsmesser eben nur die Spannung zwischen den Enden der Meßspule ergibt. Nur bei einem geraden oder kreisringförmigen Eisenkern mit gleichmäßiger Magnetisierung kann man annehmen, daß die Feldstärke an allen Stellen jenes Querschnittes, wo ein Ende der Meßspule angelegt wird, dieselbe ist. Dagegen gestattet eine Messung an einer Ecke wie in Abb. 586 keinen sicheren Schluß von der magnetischen Spannung zwischen zwei Stellen an der Oberfläche auf den magnetischen Widerstand zwischen diesen Stellen. In dieser Hinsicht ist das durch Abb. 584 dargestellte Verfahren einwandfreier.

Wird der magnetische Spannungsmesser bei Wechselstrommagnetisierung angewendet, so muß statt eines ballistischen Galvanometers ein empfindlicher Wechselstrommesser angewendet werden. Dann kann aber ein erheblicher Fehler dadurch entstehen, daß bei zusammengesetzten Wellenformen der induzierte Strom von der Wellenform abhängig ist (§ 217)

¹⁾ Das Verhältnis dieser zwei Messungen ergibt den Heylandschen Streufaktor $\tau = \frac{w_n}{w_s}$ (Gl. 82, S. 186) für die Streuung an der Ecke dieser zwei Eisenkerne.

292. Bestimmung des Hystereseverlustes.

Von größter Wichtigkeit ist die Kenntnis der magnetischen Hysterese einer Eisensorte. Sie wird aus der Messung des gesamten Eisenverlustes V in einer von Wechselstrom magnetisierten Eisenprobe ermittelt. Den genauesten Wert erhält man, wenn man die Probe in Form eines Blechringes hergestellten Ringes (Abb. 587) anwendet. Mit der in dieser Abbildung dargestellten Schaltung mißt man die Klemmenspannung, den Wattverbrauch und die Stromstärke. Ist der Ohmsche Widerstand der Wicklung verschwindend klein, so kann man die Kraftlinienmenge mittels der Gleichung 109 (S. 230) aus der Klemmenspannung berechnen, andernfalls muß man gemäß Abb. 202 die EMK E ausrechnen. Das Wattmeter gibt den gesamten Verlust V , bestehend aus Hysterese und Wirbelströmen nach Abzug der Stromwärme in der Wicklung, im Voltmeter und im Wattmeternebenschuß. Nach § 157 ist

$$V = (\eta \nu \mathfrak{B}^{1,6} + \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2) 10^{-7}.$$

Daraus ergibt sich der Wattverlust für eine Periode

$$\frac{V}{\nu} = (\eta \mathfrak{B}^{1,6} + \beta \nu \mathfrak{B}^2) 10^{-7}.$$

Das ist eine lineare Gleichung. Trägt man daher ν als Abszissen. $\frac{V}{\nu}$ als Ordinaten auf, so erhält man eine gerade Linie (Abb. 588).

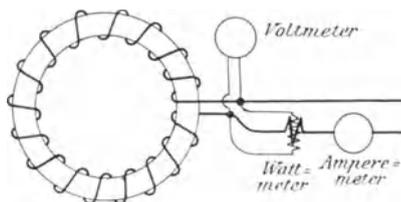


Abb. 587.

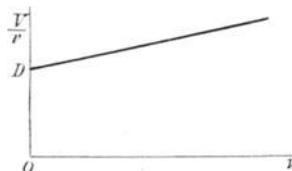


Abb. 588.

Ihre Lage ist durch mindestens zwei Punkte bestimmt. Mißt man also $\frac{V}{\nu}$ für 1 cm^3 bei zwei möglichst verschiedenen Periodenzahlen aber gleicher Kraftliniendichte \mathfrak{B} , so erhält man diese Linie für das betreffende Eisen. Der Abschnitt OD ist gleich $\eta \mathfrak{B}^{1,6}$, und daraus kann man den Hysteresekoeffizienten η berechnen. Der Rest ist der Wirbelstromverlust $\beta \nu \mathfrak{B}^2$ und daraus kann man den Wirbelstromkoeffizienten β berechnen. Diese Kurve ist aber nur dann eine gerade Linie, wenn der Wirbelstromverlust durch $\beta \nu^2 \mathfrak{B}^2$ hinreichend genau dargestellt ist. Das ist jedoch, wie sich in § 155 ergeben hat, nur dann der Fall, wenn der induktive Widerstand der Wirbelstrombahnen in den Eisenblechen verschwindend klein ist gegen den

Ohmschen Widerstand, also nur bei genügend dünnen Blechen und bei legiertem Eisen. Ist das nicht der Fall, so gilt für den Wirbelstromverlust nicht diese einfache Formel, sondern Gl. 187 (S. 287), die die Periodenzahl auch im Nenner (in ω) enthält. Infolgedessen nimmt der Wirbelstromverlust langsamer zu, und der Eisenverlust für eine Periode bildet keine gerade Linie wie in Abb. 588, sondern eine nach unten gekrümmte.

Bei häufigen Untersuchungen ist die Verwendung der Ringform unbequem, weil die Wicklung immer von neuem hergestellt werden muß. Daher empfiehlt sich die vom Verfasser angegebene Anordnung (Abb. 589). Hier wird das zu untersuchende Blechpaket A in

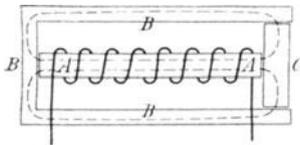


Abb. 589.

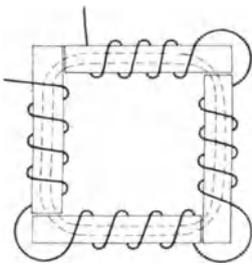


Abb. 590.

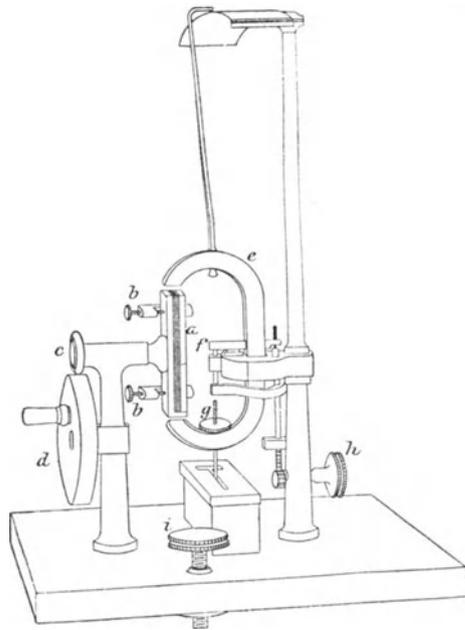


Abb. 591.

den ebenfalls aus Blech hergestellten Rahmen BC eingespannt, der durch Abnahme des Jochstückes C geöffnet werden kann. Die Magnetisierungsspule wird über A geschoben und die Kraftlinien nehmen den durch die gestrichelten Linien angedeuteten Verlauf. Durch eine zweite Messung, wobei zwei Spulen über die Schenkel B geschoben sind, wird der Verlust im Rahmen BC allein bestimmt. Aus dem Unterschied der beiden Messungen ergibt sich der Verlust im Blechpaket A allein. Diese Anordnung hat gegenüber der vom Verband Deutscher Elektrotechniker empfohlenen (Abb. 590) den Vorteil, daß die Kraftlinien das Probepaket parallel durchlaufen,

während bei dieser der Weg um die Ecken undefiniert ist. Die Kraftliniendichte ist daher nicht überall dieselbe. Dieser Fehler macht sich um so mehr geltend, je kürzer die Bleckpakete sind¹⁾.

Zur näherungsweise Vergleichung des Hystereseverlustes zweier Eisenproben dient der Apparat von Ewing, Abb. 591. Ein aus Magnetstahl bestehender Dauermagnet e ist in Schneiden (bei f) im stabilen Gleichgewicht aufgehängt. Ein mit ihm verbundener Zeiger zeigt den Ausschlag (Ablenkung aus der Ruhelage) an. Eine aus mehreren Blechstreifen bestehende Eisenprobe ist durch die Klemmschrauben b an einer Achse befestigt, die durch die Friktionsscheibe c mittels des Rades d gedreht wird. Stehen die Enden der Eisenprobe den Polen des Magnetes gegenüber (wie in der Abbildung), so besteht eine Anziehungskraft zwischen letzteren und den in der Eisenprobe induzierten Polen. Wird die Probe gedreht, so wird der Magnet nachgezogen, weil die Koerzitivkraft die Pole in der Eisenprobe aufrecht erhält, bis der andere Pol des Magnetes die entgegengesetzte Induktion ausübt. Erfolgt die Drehung rasch genug, so daß mehrere Ablenkungen in einer Sekunde aufeinanderfolgen, so stellt sich eine konstante Ablenkung ein, der die Schwerkraftkomponente das Gleichgewicht hält. Eine Flüssigkeitsdämpfung begünstigt die konstante Einstellung. Die Wirkung beruht also darauf, daß die in der Eisenprobe induzierten Pole von der Koerzitivkraft derselben eine Zeitlang festgehalten werden²⁾. Die Ablenkung des Magnetes ist also der Koerzitivkraft der Eisenprobe proportional; und weil diese (nach § 95) der Hysterese ungefähr proportional ist, so kann eine Vergleichung der Hysterese einer Eisenprobe mit einer anderen, schon bekannten durch die verschiedene Ablenkung des Magnetes erfolgen, aber nur näherungsweise. Der Apparat hat den Vorteil, daß man eine bedeutend kleinere Eisenmenge braucht als bei der unmittelbaren Messung des Eisenverlustes.

293. Die Bestimmung der magnetischen Durchlässigkeit.

Die magnetische Durchlässigkeit $\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$, bzw. die Kurven in Abb. 125 ergeben sich bei Blechen am einfachsten mittels Wechselstrom aus der in Abb. 587 dargestellten Schaltung. Aus der EMK

¹⁾ Näheres über derartige Messungen, Fehlerquellen, Trennung dieser Verluste usw. enthalten die Veröffentlichungen des Verfassers in ETZ 1901 S. 52; 1902 S. 464; 1905 S. 500; 1906 S. 9.

²⁾ Die Wirkungsweise dieses Apparates wird meist falsch dargestellt, indem gesagt wird, daß er die durch Hysterese in Wärme umgesetzte Arbeit oder das Drehmoment mißt. Durch eine Ablenkung, der eine Komponente der Schwerkraft das Gleichgewicht hält, wird aber niemals eine Arbeit (Drehmoment) gemessen, sondern nur eine Kraft. Es zeigt sich auch, daß die Ablenkung von der Umdrehungszahl der Eisenprobe, also von der Periodenzahl der Magnetisierung unabhängig ist, während doch die Hysteresearbeit der Periodenzahl der Magnetisierung proportional ist.

erhält man die Kraftlinienmenge \mathfrak{B} und daraus die Kraftliniendichte \mathfrak{H} . Aus der Strom- und Leistungsmessung ergibt sich gemäß Abb. 246 der Magnetisierungsstrom J_m und daraus die magnetische Kraft $\mathfrak{H} = \frac{0,4\pi i N}{l}$ (S. 136).

Bei massiven Eisenstücken ist Wechselstrom wegen der zu starken Wirbelströme nicht anwendbar. Dann eignet sich für elektrotechnische Zwecke am besten der Apparat von Köpsel (Siemens & Halske) (Abb. 592) mit Gleichstrommagnetisierung. P ist der zu untersuchende Eisenstab, der in das Eisenjoch J eingespannt wird. Über dem Eisenstab sitzt die Magnetisierungsspule S . Der hier hineingeschickte Strom gibt die magnetisierende Kraft. Die von ihr erzeugten Kraftlinien gehen durch das Joch und die in diesem eingebaute Spule s eines Drehspulinstrumentes (§ 267). Durch dessen Wicklung wird ein Hilfsstrom h geschickt. Daher ist der Ausschlag der Spule s proportional dem Produkte aus diesem Hilfsstrom und der Kraftlinienmenge. Wird nun der Hilfsstrom gemessen, so erhält man die Kraftlinienmenge und daraus die Kraftliniendichte. Jedem Apparat wird ein Normalstab mit $\mathfrak{B} - \mathfrak{H}$ -Kurve beigegeben, wonach der Hilfsstrom in Einheiten von \mathfrak{B} geeicht werden kann.

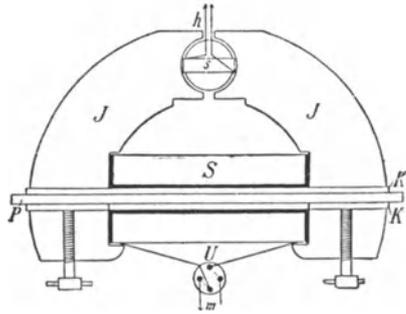


Abb. 592.

Siebzehntes Kapitel.

Das absolute und praktische Maßsystem.

294. Die Grundeinheiten.

Alle physikalischen Größen lassen sich auf drei voneinander unabhängige zurückführen; diese sind: Länge, Masse und Zeit. Die Einheiten für diese Größen sind durch internationale Vereinbarungen festgestellt und so bestimmt, daß sie, wenn die Urmaße einmal verloren gingen, wieder von neuem hergestellt werden können.

Man hat zu unterscheiden zwischen absoluten und praktischen Einheiten.

Die praktische Einheit der Länge ist der vierzigmillionste Teil des Erdmeridians und heißt Meter. Die absolute Einheit ist das Zentimeter.

Die praktische Einheit der Masse ist das Kilogramm, das ist die Masse eines Kubikdezimeters Wasser bei 4°. Die absolute Einheit ist das Gramm.

Die praktische Einheit der Zeit ist die Stunde; die absolute Einheit die Sekunde.

Auf diese drei Größen lassen sich alle übrigen durch ihre Definition zurückführen. Man deutet sie symbolisch durch C, G, S an. Die Formel, die irgendeine Größe durch die Grundeinheiten ausdrückt, nennt man die Dimension dieser Größe.

295. Geometrische Einheiten.

Eine Fläche ist das Produkt zweier Längen. Die Dimension derselben ist also C^2 und die absolute Einheit das Quadratcentimeter.

Ein Rauminhalt ist das Produkt dreier Längen; die Dimension ist also C^3 , die absolute Einheit das Kubikcentimeter; die praktische Einheit das Kubikmeter, bzw. das Liter.

Ein Winkel (Bogen) und alle trigonometrischen Funktionen haben als Verhältnis zweier Längen die Dimension 1 (dimensionslose Zahlen).

296. Mechanische Einheiten.

Die Geschwindigkeit v ist das Verhältnis des Weges zur Zeit:
 $v = \frac{C}{S}$. Um den Bruchstrich zu vermeiden, schreibt man die Dimension in der Form CS^{-1} .

Die Beschleunigung g ist das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Zeit $g = \frac{v}{S}$. Also die Dimension: CS^{-2} .

Die Kraft oder das Gewicht F ist bestimmt durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung $F = mg$. Daher die Dimension: CGS^{-2} .

Ist $m = 1$ und $g = 1$, so ist auch $F = 1$, das heißt: die absolute Einheit der Kraft ist jene, die der Masse Eins die Beschleunigung Eins erteilt; man nennt sie ein Dyn. Die Erde erteilt durch ihre Anziehungskraft der Masse eines Grammes eine Beschleunigung von rund 980 cm. Das Gewicht eines Grammes, oder die Kraft, mit der es auf seine Unterlage drückt, ist demnach 980 absol. Einh. Die Einheit der Kraft — das Dyn — wird also durch das Gewicht des 980. Teiles von einem Gramm dargestellt; und ein Kilogrammgewicht repräsentiert 980000 Dyn. Die Begriffe Masse und Gewicht werden häufig nicht scharf genug getrennt. Im gewöhnlichen Sprachgebrauche sagt man gewöhnlich Gewicht, obwohl man die Masse meint. Es hat aber in der Regel gar kein Interesse, das Gewicht, d. h. die Anziehungskraft der Erde auf einen Körper zu kennen; es handelt sich vielmehr darum, zu wissen, wie viel man von dem Körper hat, d. h. wie viel Moleküle vorhanden sind. Daß man zur Vergleichung zweier Massen die Wage benutzen kann, kommt daher, daß die Anziehungskraft an demselben Orte der Erde, also auch für beide Wagschalen dieselbe ist. Man soll daher bei technischen Angaben immer unterscheiden zwischen Gramm und Grammgewicht, zwischen Kilogramm und Kilogrammgewicht.

Die Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und dem in der Richtung der Kraft zurückgelegten Wege $A = FC$. Dimension: C^2GS^{-2} .

Da die Einheiten der Kraft und des Weges schon festgestellt sind, so ist die Einheit der Arbeit jene, die ein Dyn auf dem Wege von 1 cm leistet, und diese heißt Erg. Die praktische Einheit der Arbeit ist das Kilogramm-meter, das ist jene Arbeit, die geleistet wird, wenn man 1 kg 1 m hoch hebt. Da nach dem Vorigen 1 kg = 980000 Dyn und 1 m = 100 cm ist, so ist

$$1 \text{ kgm} = 98000000 \text{ Erg} = 98 \cdot 10^6 \text{ Erg.}$$

Das Drehmoment hat die gleiche Dimension wie die Arbeit, denn es ist das Produkt aus einer Kraft und dem Abstände des Angriffspunktes derselben vom Drehungspunkt.

Die Wärme ist bekanntlich auch eine Arbeit; man mißt sie aber mittels eines besonderen Maßes, der Kalorie. Und zwar ist eine Grammkalorie jene Wärmemenge, die notwendig ist, um die Temperatur von 1 g Wasser um 1° zu erhöhen; eine Kilogrammkalorie ist jene Wärmemenge, die 1 kg Wasser um 1° erhöht.

Um von diesen Einheiten zu den mechanischen überzugehen, braucht man eine Verwandlungszahl, ebenso wie wenn man Zoll in Zentimeter umwandeln will; und zwar ist

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kilogrammkalorie} &= 424 \text{ Kilogrammmeter} \\ &= 424 \cdot 98 \cdot 10^6 \text{ Erg.} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Grammkalorie} &= 424 \cdot 98 \cdot 10^3 \text{ Erg.} = 415 \cdot 10^5 \text{ Erg.} \\ \text{oder in runder Zahl:} &= 42 \cdot 10^6 \text{ Erg.} \end{aligned}$$

Die Zahl 424 nennt man das mechanische Wärmeäquivalent. Aus der letzten Gleichung folgt, daß

$$1 \text{ Erg} = 0,24 \cdot 10^{-7} \text{ Grammkalorien}$$

ist. Über die Beziehungen zwischen Erg, Kalorie und Watt vergleiche § 299.

Leistung (Effekt) P ist die auf 1 Sekunde entfallende Arbeit. Man hat demnach die Arbeit durch die Zeit, in der sie geleistet wird, zu dividieren:

$$P = \frac{A}{S}.$$

Dimension: $C^2 G S^{-3}$.

Als Einheit dient die Arbeit von 1 Erg in 1 Sekunde und wird Sekundenerg genannt.

Die praktische Einheit ist die Pferdestärke PS.

$$\begin{aligned} 1 \text{ PS} &= 75 \text{ Kilogramm in 1 Sekunde} \\ &= 75 \cdot 98 \cdot 10^6 = 736 \cdot 10^7 \text{ Erg in 1 Sekunde.} \end{aligned}$$

Die Engländer rechnen nach horse-power. 1 HP = 76 kgm.

Die Schwingungszahl irgendeiner Schwingung oder die Periodenzahl ν eines Wechselstromes hat auch eine Dimension; denn es ist $\nu = \frac{1}{\tau}$, und τ ist eine Zeit. Die Dimension ist also: S^{-1} .

Dieselbe Dimension hat auch $\omega = 2\pi\nu$, da π eine bloße Zahl ist.

297. Das elektrostatische Maßsystem.

Nach dem Coulombschen Gesetze wirken zwei gleichgroße elektrische Massen m mit einer Kraft

$$F = \frac{m \cdot m}{r^2} = \frac{m^2}{r^2}$$

aufeinander¹⁾. Wir finden demnach aus $m = r\sqrt{F}$ und der Dimension der Kraft die Dimension einer elektrischen Masse oder Elektrizitätsmenge: $C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$.

Da die Kraftlinienmenge $\mathfrak{B} = 4\pi m$ ist (§ 6), und 4π die Dimension 1 hat, so ergibt sich dieselbe Dimension wie für die Elektrizitätsmenge.

Aus $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{C^2}$ ergibt sich die Dimension der elektrischen Kraftliniendichte: $C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$.

Das elektrische Potential $\frac{m}{r}$ hat die Dimension $C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$.

Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{S} = \frac{m}{r^2}$ hat die Dimension $C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$.

Mithin hat die Dielektrizitätskonstante $\vartheta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{S}}$ die Dimension 1.

Die elektrische Kapazität eines Leiters oder Kondensators ist nach § 21 gleich $\frac{Q}{U}$, wobei Q die Elektrizitätsmenge und U das Potential ist. Wir finden also durch Division der entsprechenden Dimensionen für die Dimension der Kapazität eine bloße Länge: C . Das stimmt mit § 21 überein, wo wir die Kapazität einer Kugel gleich ihrem Radius fanden. Die Einheit der elektrostatischen Kapazität hat demnach eine Kugel vom Radius 1.

Da die Stromstärke gleich der Elektrizitätsmenge dividiert durch die Zeit ist, so ist ihre Dimension: $C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$.

Nach § 87 hat das magnetische Potential eines Stromes ($U = \omega i$) dieselbe Dimension wie die Stromstärke, weil der Winkel ω die Dimension 1 hat. Dieselbe Dimension haben die Amperewindungen iN , da die Windungszahl N die Dimension 1 hat; ebenso die magnetomotorische Kraft (§ 105).

Die magnetisierende Kraft (Feldstärke) \mathfrak{S} ist gleich dem Potentialgefälle (Potential durch Länge); also ist ihre Dimension: $C^{1/2}G^{1/2}S^{-2}$. Die Amperewindungen pro Längeneinheit (in) haben nach Gl. 51 (S. 136) dieselbe Dimension.²⁾

Zur Ableitung der Dimensionen der magnetischen Größen im elektrostatischen Maßsystem wird das Biot-Savartsche Gesetz benutzt (Gl. 43). Nach diesem ist die magnetische Masse $m = \frac{aF}{2i}$. Mit-

¹⁾ Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist demnach jene, die auf eine gleichgroße, im Abstände von 1 cm befindliche Menge die Kraft von 1 Dyn ausübt.

²⁾ Die Windungszahl n pro Längeneinheit hat nicht die Dimension 1, denn sie ist gleich N/l , hat also die Dimension C^{-1} .

hin ist ihre Dimension $\frac{C \cdot C G S^{-2}}{C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}} = C^{1/2} G^{1/2}$. Hieraus ergeben sich die Dimensionen der übrigen rein magnetischen Größen (Kraftliniendichte, Feldstärke, Flächendichte usw. Siehe die Zusammenstellung auf S. 648).

Die Heranziehung des Biot-Savartschen Gesetzes, also eines Strömungsgesetzes zur Dimensionsbestimmung der magnetischen Masse hat zur Folge, daß sich für die magnetische Durchlässigkeit $\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ nicht die Dimension 1 wie für die Dielektrizitätskonstante, sondern $C^{-2} S^2$ ergibt.

Die elektrostatischen Einheiten werden durch ESE bezeichnet.

298. Das elektromagnetische Maßsystem.

Für magnetische Massen (Pole) gilt dasselbe Coulombsche Grundgesetz wie für elektrische Massen. Daher haben magnetische Masse (Polstärke) Kraftlinienmenge, Potential, magnetomotorische Kraft, Kraftliniendichte, Feldstärke, Flächendichte usw. im elektromagnetischen Maßsystem dieselben Dimensionen wie die entsprechenden elektrischen Größen im elektrostatischen Maßsystem (siehe die Zusammenstellung auf S. 648).

Mit diesem magnetischen Maßsystem wird die aus dem Biot-Savartschen Gesetz (Gl. 43) gewonnene Einheit der elektrischen Stromstärke zum elektromagnetischen Maßsystem vereinigt¹⁾.

Die Dimension der Stromstärke folgt also aus $i = \frac{a F'}{2m}$ gleich $\frac{C \cdot C G S^{-2}}{C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}} = C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Für die Dimensionen der übrigen elektrischen Größen im elektromagnetischen Maßsystem dürfen nun nicht die statischen Gesetze sondern nur die der elektrischen Strömung benutzt werden.

Die Elektrizitätsmenge ist nach § 41 das Produkt aus Stromstärke und Zeit. Daher ist die Dimension der elektrischen Masse und der elektrischen Kraftlinienmenge im elektromagnetischen Maßsystem: $C^{1/2} G^{1/2}$.

Daraus folgt für die Dimension der elektrischen Kraftliniendichte: $C^{-3/2} G^{3/2}$.

Das Potential oder die Spannung (elektromotorische Kraft) gibt nach § 52 mit der Stromstärke und der Zeit die Arbeit: $A = e i t$. Wir finden also aus der Dimension der Arbeit, der Stromstärke und der Zeit die Dimension der EMK: $C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}$.

Aus § 124 folgt, daß die Einheit der EMK in einem Leiter

¹⁾ Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke hat dann nach § 81 jener Kreisstrom vom Radius 1, der auf eine im Mittelpunkt befindliche magnetische Masse 1 eine Kraft von 2π Dyn ausübt.

von 1 cm Länge induziert wird, wenn man denselben mit der Geschwindigkeit 1 in einem Felde von der Stärke 1 in einer zu den Kraftlinien und zum Leiter normalen Richtung bewegt.

Nach § 39 ist die elektrische Feldstärke (elektrische Kraft) gleich dem Potentialgefälle (Potential dividiert durch eine Länge); also folgt aus der Dimension des elektrischen Potentials die Dimension der elektrischen Feldstärke: $C^{1/2} G^{1/2} S^{-2}$.

Der Widerstand ist nach dem Ohmschen Gesetze $w = \frac{e}{i}$. Daher ist die Dimension: $C S^{-1}$.

Für die Kapazität folgt aus $\frac{Q}{U}$ die Dimension $C^{-1} S^2$.

Für den Koeffizienten der Selbstinduktion und den der gegenseitigen Induktion finden wir die Dimension aus den Beziehungen

$$e = -L \frac{di}{dt}, \quad e = -M \frac{di}{dt} \quad (\S\S 132, 146).$$

di hat die Dimension einer Stromstärke und dt ist eine Zeit. Man erhält so für die Dimension von L und M eine Länge: C .

Die elektromagnetischen Einheiten werden gewöhnlich durch EME bezeichnet.

Die Benutzung des Biot-Savartschen Gesetzes zur Dimensionsbestimmung der Stromstärke im elektromagnetischen System hat zur Folge, daß sich für die Dielektrizitätskonstante $\vartheta = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$ nicht die Dimension 1 wie für die magnetische Durchlässigkeit, sondern $C^{-2} S^2$ ergibt. Beim elektrostatischen System ist es umgekehrt.

299. Die praktischen Einheiten.

Für die Praxis haben sich die absoluten Einheiten als ungeeignet erwiesen, da sie entweder zu groß oder zu klein sind, und man infolgedessen mit zu kleinen oder zu großen Zahlen zu rechnen hat. So ist z. B. die absolute Einheit der EMK etwa der hundertmillionste Teil eines Daniellschen Elementes. Man hat daher das Hundertmillionenfache der absoluten EME als praktische Einheit festgesetzt und Volt genannt. Also:

$$1 \text{ Volt} = 10^8 EME.$$

Für Widerstandsmessungen hatte schon Werner Siemens eine praktische Einheit eingeführt, nämlich den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0°.

Um dieser sogenannten Siemenseinheit nahezukommen, wurde vom Elektrotechnikerkongreß in Paris (1881)

$$1 \text{ Ohm} = 10^9 EME$$

festgesetzt und gleich 1,06 Siemenseinheiten bestimmt. Spätere genaue Bestimmungen haben ergeben, daß 1 Ohm = 1,063 Siemenseinheiten ist (internationales Ohm).

Die praktische Einheit der Stromstärke wurde Ampere genannt. Für diese gibt es aber jetzt keine freie Wahl mehr, sondern es folgt aus dem Ohmschen Gesetze:

$$1 \text{ Ampere} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ohm}} = \frac{10^8}{10^9} = \frac{1}{10} \text{ EME}$$

oder

$$1 \text{ Ampere} = 10^{-1} \text{ EME}.$$

Ein Ampere scheidet in 1 Sekunde 0,0033 mg Knallgas (H_2O), 0,328 mg Kupfer, 1,118 mg Silber aus.

Die praktische Einheit der Elektrizitätsmenge ist das Coulomb (*Cb*). Daß ist jene Elektrizitätsmenge, die ein Strom von 1 *A* in 1 Sekunde liefert. Daher ist ebenso wie für das Ampere 1 Coulomb = 10^{-1} EME.

Häufig findet man auch den Ausdruck Ampere-stunde. Das ist jene Elektrizitätsmenge, die 1 *A* während einer Stunde liefert; da eine Stunde 3600 Sekunden hat, so sind dies 3600 *Cb*. Ein Strom von 2 Ampere gibt also z. B. in 2 Stunden 4 Ampere-stunden = 14400 *Cb*. Dasselbe gibt aber auch ein Strom von 0,5 *A* in 8 Stunden.

Die praktische Einheit der Kapazität, das Farad, ergibt sich aus der Gleichung:

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-9} \text{ EME}.$$

Die praktische Einheit des Koeffizienten der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion ist das Henry. Dieses muß dasselbe Vielfache der EME sein wie der Widerstand, da die Selbstinduktion in dem Ausdruck für den scheinbaren Widerstand eines Wechselstromes (§ 133) vorkommt. Also

$$1 \text{ Henry} = 10^9 \text{ EME}.$$

Im vorigen Paragraphen haben wir für die Dimension dieser Koeffizienten eine Länge (Zentimeter) gefunden. Nun sind 10^9 Zentimeter gleich der Länge eines Erdquadranten, weshalb diese Einheit früher Quadrant hieß.

Die praktische Einheit für die elektrische Leistung heißt Watt und ergibt sich aus:

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampere} = 10^8 \cdot 10^{-1} = 10^7 \text{ Sekundenerg.}$$

Das Produkt „Voltampere“ (scheinbare Leistung) hat dieselbe Dimension.

Die Dimension der elektrischen Leistung ist natürlich die der Leistung überhaupt; denn es gibt nur eine Leistung und eine

Arbeit, ob sie nun in der Form von mechanischer Arbeit oder von Wärme oder von elektrischer Arbeit auftritt. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man die Dimension von Spannung und Strom miteinander multipliziert.

Aus den in § 296 enthaltenen Zahlen folgt dann weiter:

$$736 \text{ Watt} = 1 \text{ PS,}$$

$$1 \text{ Watt} = \frac{1}{9,8} \text{ kg in 1 Sekunde,}$$

$$1 \text{ Watt} = 0,24 \text{ Grammkalorien in 1 Sekunde.}$$

1000 Watt nennt man ein Kilowatt, und es ist

$$1 \text{ Kilowatt} = 1,36 \text{ PS.}$$

Für die praktische Einheit der elektrischen Arbeit hat man das Joule. Nach § 52 ist Arbeit: $A = E J t = E Q$, wenn Q die Elektrizitätsmenge bedeutet. Dann ist

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Coulomb} = 10^8 \cdot 10^{-1} = 10^7 \text{ Erg.}$$

Manchmal findet man statt Joule den Ausdruck Voltcoulomb.

Nach den Beschlüssen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen ist nun noch das Siemens als Einheit des Leitwertes, d. h. des reziproken Widerstandes (§ 43) hinzugekommen. Mithin ist

$$1 \text{ Siemens} = \frac{1}{1 \text{ Ohm}} = 10^{-9} \text{ EME.}$$

Ferner findet man folgende Ausdrücke: Wattstunde, das sind 3600 Watt; diese Arbeit wird geleistet durch 3600 Watt in 1 Sekunde oder durch 1 Watt in 1 Stunde usf.

1 Kilowattstunde sind 1000 Wattstunden.

In vielen Fällen würde die Verwendung dieser Einheiten noch unbequem kleine oder große Zahlen ergeben. Man setzt daher zur Bezeichnung des millionsten Teiles das Wort mikro (= klein) vor.

Es ist daher:

$$1 \text{ Mikroohm} = \frac{1}{1\,000\,000} \text{ Ohm} = 10^3 \text{ EME.}$$

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-6} \text{ Farad} = 10^{-15} \text{ EME.}$$

Zur Bezeichnung des Millionenfachen setzt man das Wort mega (= groß) vor.

Es ist daher 1 Megohm = 1 000 000 Ohm = 10^6 Ohm = 10^{15} EME.

Den tausendsten Teil eines Ampere bezeichnet man auch als Milliampere.

300. Beziehung zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem.

Vergleicht man die Dimensionen derselben Größe des einen und des anderen Maßsystems, so findet man, daß z. B. die Dimension der Elektrizitätsmenge des elektromagnetischen Systems mit CS^{-1} multipliziert werden muß, um die Dimension im elektrostatischen System zu erhalten. Nun wissen wir aus § 296, daß CS^{-1} eine Geschwindigkeit (v) ist. Vergleicht man weiter, so findet man, daß diese Geschwindigkeit überall, wenn auch mit verschiedenen Potenzexponenten auftritt. So ist z. B. die Dimension der *EME* der Kapazität mit $C^2S^{-2} = v^2$ zu multiplizieren, um die Dimension der *ESE* zu erhalten.

Merkwürdigerweise hat die experimentelle Bestimmung dieses v ergeben, daß es gleich der Lichtgeschwindigkeit ist:

$$v = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm in 1 Sekunde.}$$

Es ist also eine Einheit der Kapazität im elektromagnetischen System gleich $(3 \cdot 10^{10})^2 = 9 \cdot 10^{20}$ Einheiten im elektrostatischen System¹⁾. Oder umgekehrt:

$$1 \text{ ESE der Kapazität} = \frac{1}{9} 10^{-20} \text{ EME.}$$

Und weil $10^{-9} \text{ EME} = 1 \text{ Farad}$, so ist

$$1 \text{ ESE der Kapazität} = \frac{1}{9} 10^{-11} \text{ Farad} = \frac{1}{9} 10^{-5} \text{ Mikrofarad.}$$

Beispiel: Es sei die Kapazität eines Plattenkondensators von $S = 100 \text{ cm}^2$ Fläche und mit einem $0,2 \text{ cm}$ dicken Luftzwischenraum in Farad anzugeben. Nach § 27 ist die Kapazität

$$\frac{S}{4\pi a} = \frac{100}{4\pi \cdot 0,2} = 41 \text{ ESE.}$$

$$\begin{aligned} \text{Das sind: } 41 \frac{1}{9} 10^{-11} &= 4,5 \cdot 10^{-11} \text{ Farad} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ Mikrofarad} \\ &= 0,000045 \text{ Mikrofarad.} \end{aligned}$$

Koeffizienten der gegenseitigen und der Selbstinduktion. Aus den Formeln in § 118 und 120 erhält man absolute elektromagnetische Einheiten, da es sich um Strömungsvorgänge handelt. Sollen sie in *ESE* umgewandelt werden, so ist nach der Zusammenstellung auf S. 648.

$$1 \text{ ESE} = v^2 \text{ EME} = 9 \cdot 10^{20} \text{ EME} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Henry.}$$

¹⁾ Man beachte, daß die Maßzahlen einer Größe in verschiedenen Maßsystemen sich umgekehrt verhalten wie die Dimensionen. Je größer die Einheit, desto kleiner ist die Maßzahl einer Größe, die in dieser Einheit ausgedrückt wird.

Ebenso findet man

Potential, elektromotorische Kraft:	$1 \text{ ESE} = v \text{ EME} = 300 \text{ Volt.}$
Elektrischer Widerstand Spezif. elektrischer Widerstand	} $1 \text{ ESE} = v^2 \text{ EME} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Ohm.}$
Stromstärke:	
Elektrizitätsmenge:	$1 \text{ ESE} = \frac{1}{3} 10^{-9} \text{ Coulomb.}$
Magnetische Feldstärke:	$1 \text{ ESE} = \frac{\text{EME}}{v} = \frac{1}{3} 10^{-10} \text{ Gauß.}$

301. Verwendung der Dimensionen zur Rechnungskontrolle.

Auf S. 205 haben wir die Kraft, die zwischen zwei parallelen Stromleitern wirkt, gleich $\frac{dM}{da} i_1 i_2$ gefunden. Wenn dieser Ausdruck richtig ist, so muß er die Dimension einer Kraft haben. Wir erhalten in EME : $\text{Dim} \frac{M}{a} i^2 = \frac{C}{C} [C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}]^2 = CGS^{-2}$ und das ist wirklich die Dimension einer Kraft. Dasselbe ergibt sich im elektrostatischen Maßsystem.

Da nur gleichartige Ausdrücke addiert werden können, so muß in dem scheinbaren Widerstande eines Wechselstromes

$$\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$$

der Ausdruck ωL dieselbe Dimension haben wie der Widerstand. Die Dimension von L ist C , die von ω ist S^{-1} . Die Dimension von ωL ist CS^{-1} , also wirklich die eines Widerstandes.

Dasselbe gilt für den scheinbaren Widerstand eines Kondensators $\frac{1}{\omega C}$ (§ 172): $\text{Dim} \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{S^{-1} C^{-1} S^2} = CS^{-1}$, also auch die eines Widerstandes.

Auf diese Weise hat man ein Kennzeichen für die Richtigkeit einer Ableitung insofern als ein Ausdruck, der nicht die ihm zukommende Dimension hat, gewiß falsch ist. Natürlich muß man bei den magnetischen und elektrischen Größen immer innerhalb desselben Maßsystems bleiben.

Für diesen Zweck sind auf der nächsten Seite die wichtigsten Dimensionsformeln zusammengestellt.

Allgemeine Größen:

Fläche, Querschnitt	C^2	Druck (Kraft auf die Flächeneinheit)	$C^{-1}GS^{-2}$
Raum	C^3	Trägheitsmoment	C^2G
Winkel, Bogen.	1	Schwingungsdauer	S
Geschwindigkeit	CS^{-1}	Umlaufzahl, Schwingungszahl, Periodenzahl, Frequenz	S^{-1}
Winkelgeschwindigkeit	S^{-1}	Dichte (Masse der Raumeinheit)	$C^{-3}G$
Beschleunigung	CS^{-2}	Spezifisches Gewicht	1
Kraft	CGS^{-2}	Wirkungsgrad	1
Arbeit, Drehmoment	C^2GS^{-2}		
Leistung	C^2GS^{-3}		

Elektrische und magnetische Größen	Elektrostatisches Maßsystem	Elektromagnetisches Maßsystem
Elektrische Masse (Ladung) m, q	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{1/2}G^{1/2}$
Elektrische Kraftlinienmenge \int		
Elektrisches Potential U , elektromotorische Kraft E , Spannung K	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$
Elektrische Kraftliniendichte \mathfrak{B}	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{-3/2}G^{1/2}$
Elektrische Feldstärke (elektrisierende Kraft) \mathfrak{E}	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-2}$
Elektrische Flächendichte σ	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{-3/2}G^{1/2}$
Magnetische Masse (Polstärke) m	$C^{1/2}G^{1/2}$	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$
„ Kraftlinienmenge \int		
Magnetisches Potential U , magnetomotorische Kraft (Amperewindungen)	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Magnetische Kraftliniendichte \mathfrak{B}	$C^{-3/2}G^{1/2}$	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$
„ Feldstärke (magnetisierende Kraft, Amperewindungen pro Längeneinheit) \mathfrak{H}	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-2}$	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Magnetische Flächendichte σ	$C^{3/2}G^{1/2}$	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Magnetischer Widerstand w	CS^{-2}	C^{-1}
Koeffizient der Selbstinduktion L	$C^{-1}S^2$	C
„ der gegenseitigen Induktion M		
Elektrischer Widerstand w	$C^{-1}S$	CS^{-1}
Spezifischer elektrischer Widerstand α	S	C^2S^{-1}
Kapazität	C	$C^{-1}S^2$
Elektrizitätsmenge q, Q	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{1/2}G^{1/2}$
Stromstärke	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Dielektrizitätskonstante ϑ	1	$C^{-2}S^2$
Magnetische Durchlässigkeit μ	$C^{-2}S^2$	1
Magnetisches Aufnahmevermögen κ		

Arbeiten des Verfassers aus dem Gebiete der Elektrotechnik.

ETZ = Elektrotechnische Zeitschrift; Z f. E. = Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien;
E. u. M. = Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien; E. K. u. B. = Elektrische Kraft-
betriebe und Bahnen.

- Experimental-Untersuchungen über Dielektrika. Sitzungsbericht d. Akademie d. Wissensch., Wien 1893, Bd. 102 IIa.
Zur Frage der Wärmetönung durch dielektrische Polarisation. Ebenda.
Eine neue asynchrone Wechselstromtriebmaschine. ETZ 1895, S. 368.
Die Wirkungsweise der Kondensatoren im Wechselstromkreise. ETZ 1895, S. 612.
Neue Wechselstrom-Meßinstrumente und -Bogenlampen. ETZ 1899, S. 82.
Stroboskopische Methoden zur Bestimmung der Umdrehungszahl, der Polwechselzahl und der Schlüpfung. ETZ 1899, S. 142.
Isolationssmesser für Wechselstrom-Betriebsspannung. ETZ 1899, S. 410.
Berechnung des Strompreises bei Wechselströmen. ETZ 1899, S. 454.
Über den Parallelbetrieb mit Wechselstrommaschinen. ETZ 1899, S. 870.
Präzisionsinstrumente für Wechselstrom. ETZ 1900, S. 399.
Die Abhängigkeit der Eisenverluste von der Kurvenform. ETZ 1901, S. 52.
Ein statisches Voltmeter für sehr hohe Spannungen. ETZ 1901, S. 265.
Der Einfluß der Kurvenform auf Meßinstrumente. ETZ 1901, S. 301.
Schutzvorrichtungen gegen schädliche Überspannungen. ETZ 1901, S. 589.
Messung und Berechnung der Leerlaufverluste von Drehstrommotoren. ETZ 1901, S. 698.
Spannungssicherungen. ETZ 1902, S. 552.
Formfaktor und Scheitelfaktor. ETZ 1900, S. 674, 765; Z. f. E. 1902, S. 157.
Über Resonanzerscheinungen. ETZ 1902, S. 97.
Elektrische Geschwindigkeitsmeßapparate. ETZ 1903, S. 401.
Einige Ursachen von Überspannungen in Hochspannungsanlagen. Elektrotechn. Rundschau, Frankfurt a. M. 1903, S. 75.
Über den Entwurf von Schaltanlagen für Hochspannungszentralen. Z. f. E. 1903, S. 149.
Das Pendeln parallelgeschalteter Wechselstrommaschinen. ETZ 1903, S. 195.
Über die Teilung des Wechselstromes in zwei gleichgerichtete Ströme. ETZ 1903, S. 403; Physik. Zeitschr., Bd. 4, S. 445.
Hochspannungölschalter. ETZ 1903, S. 613.
Schlüpfungsmesser. ETZ 1904, S. 392.
Der magnetische Widerstand von Luftstrecken. ETZ 1904, S. 810.
Das Kreisdiagramm für Übersynchronismus. ETZ 1904, S. 738.
Die Berechnung von Drehstrommotoren. ETZ 1904, S. 834.
Über den Einfluß der Unterteilung einer Funkenstrecke und der Kapazität auf Funkenentladung. ETZ 1905, S. 7.
Der Einfluß der Ankerrückwirkung auf die Wellenform von Wechselstrommaschinen. Z. f. E. 1905, S. 681.

- Die Abhängigkeit des Hystereseverlustes von der Wellenform bei legiertem Eisenblech. ETZ 1906, S. 9.
- Vorrichtung zum selbsttätigen Parallelschalten von Drehstrommaschinen. ETZ 1906, S. 642.
- Resonanz bei unvollkommenen Kondensatoren. ETZ 1906, S. 693.
- Der Einfluß eines sekundären Stromes auf Überspannung und Funkenbildung. E. u. M. 1906, S. 923.
- Zur Erklärung der sog. ungedämpften Schwingungen. ETZ 1906, S. 1212.
- Erdleitungswiderstände bei Blitzschutzvorrichtungen und Spannungssicherungen. ETZ 1906, S. 486.
- Der Resonanztransformator. ETZ 1907, S. 25.
- Elektrische Kraft und Durchschlagsfestigkeit in hintereinandergeschalteten Isolierstoffen. ETZ 1907, S. 95.
- Die Anwendung des Transformators als regulierbarer Widerstand. E. K. u. B. 1907, S. 408.
- Resonanz unter dem Einflusse von Wirbelströmen und Hysterese. E. u. M. 1907, S. 633.
- Theoretisches und Praktisches über den Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen. E. u. M. 1907, S. 1009.
- Das elektrische Verhalten der Freileitungsisolatoren. E. K. u. B. 1908, S. 41.
- Spannungsabfall und Streuung der Transformatoren. ETZ 1908, S. 71.
- Störungen im Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen mit Riemenantrieb. E. u. M. 1908, S. 383.
- Versuche mit 100 000-Volt-Transformatoren. E. K. u. B. 1908, S. 687.
- Angriff und Durchschlag von Porzellan durch Hochspannungsentladungen. E. K. u. B. 1909, S. 401.
- Die Ermittlung der Zeitkonstante und der stationären Temperatur elektrischer Maschinen. E. u. M. 1909, S. 27.
- Isolatoren für Hochspannungsfreileitungen. Schweiz. Elektrotechn. Zeitschr. 1910, S. 58.
- Die Wirkungsweise des einphasigen Induktionsmotors. E. K. u. B. 1910, S. 61.
- Die asynchrone Drehstrommaschine beim Durchgang durch den Synchronismus und der sog. Hysterese motor. ETZ 1910, S. 238.
- Versuche mit Hänge- und Stützisolatoren für sehr hohe Spannungen. ETZ 1910, S. 1131.
- Die experimentelle Bestimmung des Streufaktors von Transformatoren und Drehstrommotoren. E. K. u. B. 1912, S. 83.
- Drehfeld-Synchronmotoren ohne Gleichstromerregung. E. u. M. 1912, S. 177, 321, 491.
- Kondensatoren und Drosselpulen als Überspannungsschutz. ETZ 1915, S. 34.
- Spannungswellen und Stromwellen in Hochspannungsprüfanlagen. ETZ 1915, S. 396.
- Die Freileitungsisolatoren in der Entwicklung der Hochspannungstechnik. ETZ 1917, S. 433.
- Die elektrischen Überspannungen in der Entwicklung der Hochspannungstechnik. E. u. M. 1917, S. 609.

Schlagwörterverzeichnis.

- Absolutes Maßsystem** 638.
Akkumulatoren 107.
Aktive Funken 439.
Altern, magnetisches 172.
Aluminiumzelle 580.
Ampere 644.
Amperesche Regel 113.
Amperewindungen 175. 193.
Analyse zusammengesetzter Wellen-
formen 484.
Anfangsspannung 531. 534.
Anion 84.
Ankerrückwirkung 472.
Anode 84. 511.
Anodenfall 515.
Aperiodische Entladung 407.
Äquivalent, elektrochemisches 87.
Äquivalente Sinuswelle 474.
Äquivalenter Widerstand 276.
Arbeit 17. 639.
— elektrische 81. 235. 358.
— magnetische 133. 154. 203. 318.
Arbeitsverlust, magnetischer 156. 472.
— durch Entladung 361.
— im Dielektrik 361.
Arithmetischer Mittelwert 224. 468.
Aufnahmevermögen, magnetisches 143.
Augenblickswert 223.
Ausschalten 384. 387. 394. 400. 404.
421.
Ballistisches Galvanometer 608.
Batterien, galvanische 100.
Betriebskapazität 46.
Biot-Savartsches Gesetz 118.
Blitzentladung 537.
Braunsche Röhre 628.
Brücke, Thomsonsche 619.
— Wheatstonesche 620. 625.
Büschellicht 533.
Charakteristik des Lichtbogens 570.
— einer Leitung 453.
— magnetische 189.
Chemische Wirkungen der Entladung
584.
Clark-Element 103.
Coulombsches Gesetz 2.
Dämpfung eines Meßinstrumentes 586.
— einer Schwingung 417.
Dämpfungsverhältnis 417.
Daniellsche Zelle 101.
Dauermagnetismus 150. 165. 195.
Dekrement, logarithmisches 417.
Depolarisation 99.
Diagramm der Spannungen 238.
— der Ströme 239.
— des allgemeinen Transformators 265.
Diamagnetische Stoffe 144.
Dielektrik 28. 42.
Dielektrizitätskonstante 43. 45. 58.
Dissoziation 89.
Drahtlose Telegraphie 459.
Drehfeldinstrumente 599.
Drehspulinstrumente 591.
Dreieckschaltung 491.
Dreiphasenstrom 489. 490.
— -Leistung 497.
— Umwandlung 504.
Drosselpuln 241.
Dunkle Entladung 533.
Durchlässigkeit, magnetische 142. 636.
Durchschlagsfestigkeit 551. 555.
Dyn 639.
Dynamometrische Instrumente 592.
Effektbogenlampe 569.
Effektiver Wert 225. 468.
Eigenschwingung 415.
Einheiten, absolute 638.
— praktische 643.
Einschalten 384. 395. 413. 421.
Eisen, elektrischer Widerstand 73.
— legiertes 289.
— magnetische Untersuchung 634.
Eisenprüfer nach Ewing 635.
Eisenverlust 293.

Eisenverlustwiderstand 295.
 Elektrische Kraft 2. 42. 50. 556.
 Elektrisierende Kraft 44.
 Elektrisierungszahl 58.
 Elektrizitätsdurchgang durch Isolierstoffe 549.
 Elektrizitätsleitung in Gasen 525.
 Elektrizitätsmenge 68. 223.
 Elektrizitätsmessung 608.
 Elektrizitätszerstreuung 37. 529.
 Elektroden 84.
 Elektrodenspannung 511.
 Elektrolyse 83.
 Elektrolytische Leitung 88. 96.
 Elektromagnetische Instrumente 600.
 Elektromagnetisches Maßsystem 642.
 Elektrometer 35. 602.
 Elektromotorische Kraft 67. 105. 212. 258.
 — induzierte 212. 221. 227.
 Elektron 520.
 Elektroskop 35.
 Elektrostatische Instrumente 602.
 — Schirmwirkung 29.
 Elektrostatisches Maßsystem 640.
 Elementarquantum 520.
 Elemente, galvanische 100.
 Empfindlichkeit eines Instrumentes 588.
 Entladeverzug 543.
 Entladung, aperiodische 407.
 — dunkle 533.
 — gleitende 561.
 — intermittierende 535.
 — in verdünnten Gasen 512.
 — oszillatorische 405.
 Entladungsverlust 543. 548.
 Entmagnetisierende Kraft 165.
 Entstehen eines Stromes 382. 385. 394. 413.
 Erdmagnetismus 14.
 Erg 639.
 Erzwungene Schwingung 415. 435.
 Extrastrom 383.

Farad 644.
 Faradaysches Gesetz 86.
 Feld, elektrisches 3. 26. 113.
 — magnetisches 3. 14. 113. 134.
 — fiktives 257.
 Feldstärke 3. 10. 17. 21. 44.
 Ferraris-Instrumente 510. 599.
 Ferromagnetische Stoffe 145.
 Festigkeit, elektrische 554.
 Flächendichte 15.
 Flemmingsche Regel 215.
 Folgepole 184.
 Formfaktor 470.
 Frequenz 221.

Frequenz, Erhöhung der 482. 500.
 Fritter 455.
 Funkenbildung 387.
 Funkenentladung 439. 535.
 Funkeninduktor 411.
 Funkenstrecke 535.

Galvanometrische Spannungsmesser 605.

Gasionen 525.
 Gebläse, magnetisches 127.
 Geißlersche Röhren 512.
 Genauigkeit eines Instrumentes 588.
 Gleichrichter 576.
 Gleitfunken 561.
 Glimmlicht 533.

Hautwirkung 325.
 Hitzdrahtinstrumente 596.
 Hintereinanderschaltung, elektrische 79. 244. 314. 346. 357.
 — magnetische 175.
 Hochfrequenzmaschine 483.
 Homogenes Feld 8. 23.
 Hörnerblitzschutzvorrichtung 123.
 Hysterese, magnetische 147.
 Hystereseverlust 157. 289. 472.
 — -Messung 684.

Induktion, elektrische 210.
 — gegenseitige 203. 252.
 — magnetische 138.
 — unipolare 218.
 Induktionsfreie Wickelung 316.
 Induktionsinstrumente 598.
 Induktionsspannung 228.
 Induktiver Widerstand 234.
 Influenz 24.
 Intermittierende Entladung 535.
 Ionen 84. 521.
 Ionisierung 525.

Joubertsche Scheibe 627.
 Joulesches Gesetz 81.

Kabel, als Transformator 253.
 Kanalstrahlen 522.
 Kapazität 32. 39. 45. 340.
 — Formeln 33. 40. 47.
 Kapazitätsspannung 342.
 Kapazitätswiderstand 344. 364.
 Kataphorese 111.
 Kathode 84. 511.
 Kathodenfall 515.
 Kathodenstrahlen 514. 516. 522.
 Kation 84.

- Kilowatt 645.
 Kirchhoffsche Sätze 78.
 Klemmenspannung 76.
 Koeffizient der gegenseitigen Induktion 203. 261.
 — der Selbstinduktion 206. 260. 313.
 Koerzitivkraft 150.
 Kommutatorfunken 392.
 Kompensationsapparat 606.
 Kompensationswicklung 393.
 Kondensator 38. 52.
 — unvollkommener 363.
 Kraft, elektrische 2. 42. 50. 60. 556.
 — entmagnetisierende 165.
 — magnetische 2. 109. 117. 124. 158. 205.
 — Maßeinheit 639.
 Kraftlinien 3. 143. 199.
 Kraftlinienbrechung 62. 160.
 Kraftliniendichte 10. 43. 142.
 — Messung 629.
 Kraftlinienmenge 9. 33. 142.
 — Messung 629.
 Kreis, magnetischer 173.
 Kreisprozeß, magnetischer 156.
 Kunstphase 508.
 Kupfervoltmeter 590.
 Kupplung, elektrische 206.
 — magnetische 253.
 Kupplungsfaktor 270. 303.
 Kurzschluß 280.
 Kurzschlußstrom 402.

Ladestrom 345.
 Ladung, scheinbare 56.
 — wahre 56.
 — einer Batterie 107.
 — eines Kondensators 39.
 Ladungsenergie 55. 59. 358.
 Leerlauf eines Transformators 280.
 Legiertes Eisen 289.
 Leistung 81. 235. 474. 640.
 — eines Zweiphasenstromes 490.
 — eines Dreiphasenstromes 497.
 Leistungsfaktor 235. 474.
 — Messung 614.
 Leistungsmesser 609. 611.
 Leitfähigkeit 70.
 Leitungswiderstand 70.
 Leitwert 70. 80.
 Lenzsches Gesetz 214.
 Lichtbogen 438. 568.
 — als Schwingungserzeuger 582.
 Lichtbogenspannung 570.
 Lichtbogenwiderstand 570.
 Lokalströme 102.
 Luftdämpfung 586.

Magnetische Arbeit 17. 133. 154.
 — Charakteristik 189.
 — Dämpfung 587.
 — Durchlässigkeit 142. 636.
 — Einheiten 642.
 — Induktion 138.
 — Platte 128.
 — Sättigung 145.
 — Schirmwirkung 162.
 — Stauung 183. 306.
 — Streuung 185.
 — Tragkraft 196.
 — Verzögerung 154.
 — Verzweigung 191.
Magnetischer Kreis 173.
 — Spannungsmesser 631.
 — Widerstand 174. 178.
Magnetisches Altern 172.
 — Aufnahmevermögen 143.
 — Gebläse 127.
 — Moment 13.
 — Wirbelfeld 130.
Magnetisierende Kraft 143.
Magnetisierungskurve 146.
Magnetisierungsstärke 138.
Magnetisierungsstrom 294.
Magnetisierungszahl 142.
Magnetomotorische Kraft 174.
Maßsystem, absolutes 638.
 — elektromagnetisches 642.
 — elektrostatisches 640.
Mechanische Einheiten 639.
Mehrphasenströme 487.
Meßtransformator 618.
Minimumspannung 535.
Mittelwert, arithmetischer 224. 470.
 — quadratischer 225. 468.
Moment, magnetisches 13.
Multiplikationsstab 458.

Nebeneinanderschaltung, elektrische 79. 246. 352. 357.
 — magnetische 181.
Nebenschluß, magnetischer 191.
Nernst-Lampe 74.
Neutrale Leitung 490.
Niveaufläche 20. 133.
Normalelemente 103.
Nulleiter 490.

Oberflächenleitung 561.
Oberflächenspannung 36.
Ohm, Einheit 643.
Ohmsches Gesetz bei Gleichstrom 69.
 — bei Wechselstrom 232. 344.
Öl als Isolator 551.
Ölschalter 400.
Ondograph nach Gehrke 629.

- Oszillatorische Entladung 405.
 Oszillograph 628.
 Ozon 585.
- Paramagnetische Stoffe** 144.
 Periodenzahl 221.
 — Messung 626.
 Permeabilität 142.
 Permanenter Magnetismus 168.
 Phasenverschiebung 222. 233.
 Polarisierung 97.
 Polwechselzahl 222.
 Porzellan, Durchschlagsspannung 552.
 Porzellanisolatoren 567.
 Potential 17. 19. 131.
 — auf sich selbst 24. 30.
 — der Erde 34.
 Potentialgefälle 17.
 Potentialgradient 514.
 Pulsierender Gleichstrom 581.
- Quadrantenelektrometer** 602.
 Quecksilberlichtbogen 573.
 Quellenfeld 130.
 Querspannung 348.
 Querstrom 239.
 Querwiderstand 347.
- Radiumstrahlen** 524.
 Randentladungen 553.
 Remanenter Magnetismus 150.
 Resonanz 348. 377. 427.
 Resonanztransformator 375.
 Resonator 456.
 Röntgenstrahlen 518.
 Rowlandscher Versuch 522.
 Rückstandsbildung im Dielektrik 65.
 361.
- Sättigung, magnetische** 145.
 Scheinwiderstand 234. 340. 476.
 Scheitelfaktor 470.
 Scheitelkurve 409.
 Scheitelwert 221. 468.
 Scheu vor der Resonanz 420. 435.
 Schirmwirkung, elektrostatische 29.
 — elektrodynamische 305.
 — magnetische 162.
 Schlagweite der Funkenentladung 535.
 538.
 Schwebungen 430.
 Schwingung, elektrische 404. 415. 423.
 437.
 — gekuppelter Systeme 423. 434.
 — erzwungene 415. 435.
 Schwingungsdauer 221.
 Schwingungserzeuger 437. 582.
- Selbstinduktion 206. 227. 260. 313.
 — äquivalente 276.
 — wirksame 313. 327.
 — Messung 624. 626.
 Selbstpotential 24. 30.
 Selen 74.
 Sender der drahtlosen Telegraphie 459.
 Silbervoltmeter 590.
 Sinuswelle 221.
 — äquivalente 474.
 Solenoid 134.
 Spannung 69.
 — induktive 228.
 Spannungsabfall 76. 229.
 Spannungsdiagramm 237.
 Spannungsmessung, indirekte 605.
 — elektrostatische 602.
 Spannungsresonanz 350.
 Spannungswandler 618.
 Spannungsverlust 76.
 Spiegelinstrumente 587.
 Spitzenentladung 490.
 Spitzenwirkung 32.
 Stabilitätsgrenze des Lichtbogens 526.
 Stationärer Strom 381. 395.
 Statische Spannungsmesser 602. 604.
 Stauung, magnetische 183. 306.
 Stehende Wellen 447.
 Sternschaltung 491.
 Stickstoffbindung 584.
 Stoßerregung 432.
 Strahlung, elektrische 532.
 Streufaktor 186. 270. 303.
 Streuspannung 258.
 Streuung 185.
 Stromdiagramm 239.
 Stromkomponente, wattlose 239.
 Strommessung, indirekte 607.
 Stromresonanz 348. 371.
 Stromstärke 68.
 Stromstoß, Messung 608.
 Strömung, selbständige 526. 531.
 — unselbständige 526.
 Stromverzweigung 78. 246. 317. 352.
 Stromwage 596.
 Stromwandler 615.
 Stromwärme 81. 225. 359. 390.
 Suszeptibilität 143.
- Telegraphie, drahtlose** 459.
 Temperaturkoeffizient 72. 93.
 Temperatur, kritische 171.
 Tesla-Transformator 423.
 Thermomagnetischer Motor 152.
 Thomsonsche Brücke 619.
 Torsionsinstrumente 540. 547.
 Tragkraft eines Magnetes 197.
 Transformatordiagramm 266.
 Trockenelemente 104.

- Übersetzungsverhältnis 259.
 Überspannung 387. 420.
 Ummagnetisierungsarbeit 157.
 Unsymmetrische Wellen 465.
 Unterbrecher für Funkeninduktoren 411.
 Unterbrechungsfunken 387. 390. 400. 405.

 Vektordiagramm 242.
 Ventile, elektrische 576.
 Verbindungswärme 105.
 Verkettete Spannung 492.
 Verkettung beim Zweiphasenstrom 446.
 — beim Dreiphasenstrom 447. 451.
 Verluste im Eisen 293.
 — im Dielektrik 361.
 — durch Ausstrahlung 548.
 Verschiebungsstrom 341.
 Verschwinden eines Stromes 384. 400. 404.
 Verzögerung, magnetische 154.
 Voltameter 589.
 Voltampere 595.
 Vorentladungen 535. 567.

Wanderwellen 448.
 Wärmearbeit 82. 225. 359. 390.
 Wärmemenge, Einheit 640.
 Wasserzersetzung 86.
 Watt, Einheit 645.
 Wattloser Strom 239.
 Wattmeter 611.
 Wattstunde 645.
 Wattstrom 239.
 Wechselströme, mehrphasige 487.
 Wechselstromlichtbogen 575.
 Wechselstrommotoren mit Schirmwirkung 307.
 — mit verschobenen Feldern 508.
 Wechselzahl 222.

 Wellen, elektromagnetische 454.
 — fortschreitende 447.
 — stehende 447.
 Wellenanzeiger 455.
 Wellenformen, zusammengesetzte 461. 494.
 — Aufzeichnung 627.
 — Ausrechnung 484.
 — des allgem. Transformators 479.
 — unsymmetrische 465.
 Wellenlänge 448.
 Wellenmesser 455.
 Wendepole 393.
 Weston-Normalelement 103.
 Wheatstonesche Brücke für Gleichstrom 620.
 — — für Wechselstrom 625.
 Widerstand, äquivalenter 276.
 — Einheit 643.
 — elektrischer 70.
 — induktiver 234.
 — magnetischer 174. 178.
 — scheinbarer 234. 340. 476.
 — spezifischer 70.
 — wirksamer 327.
 Widerstandsdiagramm 234. 277.
 Widerstandsmessung bei Gleichstrom 619.
 — bei Elektrolyten 621.
 — bei Wechselstrom 622.
 Wirbelfeld 130.
 Wirbelströme 284. 309.

Zeitkonstante 383.
 Zellen, galvanische 68. 101.
 Zündung des Lichtbogens 573.
 Zusammengesetzte Wellenformen, 461. 494.
 — Ausrechnung 484.
 Zweiphasenstrom 487.
 — Umwandlung in Dreiphasenstrom 504.

L	= Koeffizient der Selbstinduktion.
λ	= Koeffizient der äquivalenten Selbstinduktion.
m	= magnetische und elektrische Masse (Polstärke).
\mathfrak{M}	= magnetisches Moment.
M	= Koeffizient der gegenseitigen Induktion.
μ	= magnetische Durchlässigkeit.
μ	= Masse eines Elektrons.
n	= Windungszahl einer Längeneinheit.
N	= Windungszahl, gesamt.
ν	= Schwingungszahl, Periodenzahl.
p, P	= Leistung.
q, Q, Ω	= Elektrizitätsmenge.
r	= Radius.
ρ	= äquivalenter Widerstand.
S	= Fläche, Querschnitt.
σ	= Flächendichte (elektrische oder magnetische).
σ	= Scheitelfaktor.
t	= Zeit.
T	= Trägheit.
τ	= Streufaktor (nach Heyland S. 186, 272).
ϑ	= Dielektrizitätskonstante.
U	= Potential.
\ddot{u}	= Übersetzungsverhältnis.
v	= Streufaktor (nach Hopkinson S. 186, 272).
v	= Rauminhalt.
V	= Eisenverlust.
w, W	= elektrischer Widerstand.
w	= magnetischer Widerstand.
\mathfrak{z}	= Kraftlinienmenge, Augenblickswert.
\mathfrak{z}	= " Scheitelwert.
ω	= Wechselgeschwindigkeit (= $2\pi\nu$).
ω	= Gesichtswinkel.

Berichtigung.

Seite 136: In Gleichung 52 soll N statt n stehen.