Л. Н. ВОЛГИН

ПРИНЦИП СОГЛАСОВАННОГО ОПТИМУМА

В 67
6Ф0.1
УДК 519.283+519.8+007+33

Волгин Л. Н.

В 67 Принцип согласованного оптимума. М., «Сов. радио», 1977.

144 с.

В книге обосновывается принцип «согласованного оптимума», позволяющий согласовывать противоречивые интересы кибернетических субъектов

Книга рассчитана на подготовленных читателей: экономистов, математиков, социологов, психологов, юристов, исследующих возможности точных методов в гуманитарных науках.

В $\frac{30501\text{-}032}{046(01)\text{-}77}$ 65-77 6Ф0.1

Редакция кибернетической литературы

Математику ошибочно считают наукой трудной, а иногда даже подозрительной, только потому, что она имела несчастье быть неизвестной отцам церкви. Между тем, как она важна, как полезна.

Роджер Бэкон

Экстремальные задачи на максимум и минимум нуждаются для своего решения лишь в правильном использовании известных методов и приемов математической науки. Но когда речь идет об оптимальном решении какой-либо хозяйственной задачи, всегда нужно еще ясно себе представлять, с чьей именно точки зрения — какого именно «хозяина» или иного оценивающего субъекта — искомое решение явится оптимальным, то есть наилучшим в данных обстоятельствах места и времени.

С. Г. Струмилин

Методология, принятая в естественных науках, только теперь начинает проникать в науку об обществе, поэтому и система моделей еще очень бедна и не представляет собой такого хорошо организованного здания, которое сумела за триста лет построить физика.

Н. Н. Моисеев

В науке сложны пути, и выводы просты.

Н. Н. Семенов

ОТ РЕДАКЦИИ

Усилить взаимосвязь общественных, естественных и технических наук.

«Основные направления развития народного хозяйства на 1976—1980 гг.»

Книги бывают разные. Одни пишутся на традиционные, проверенные темы, другие же (и таких весьма немного) открывают новые разделы науки и предлагают новый способ решения существующих проблем. Книги последнего рода (как, впрочем, и первого) не всегда имеют шумный успех. Их авторам часто грозят непонимание, замалчивание*, а иногда и неприятности. Особенно трудно приходится книгам, противоречащим общепринятым взглядам и предлагающим нетрадиционные методы исследования. Это верно не только в науках об обществе, где отражаются интересы классов и социальных групп, а и в науках естественных и даже в такой точной науке, как математика. Появление в 1905 г. теории относительности или в 1925—26 г. квантовой механики сопровождалось большими (иногда очень жестокими) дискуссиями, не смолкающими и по сей день. Когда в 1948 г. появилась «Кибернетика» Н. Винера, то понадобились десяток лет и сотни дискуссий разного уровня, прежде чем перевести книгу на русский язык. Рукопись Л. В. Канторовича по математической экономике, которая была написана еще в 1942 г., увидела свет только в 1959 г. [50]. Попытки ее напечатать ни к чему не приводили из-за сопротивления

---

* Так, например, было встречено гениальное творение К. Маркса «Капитал». Ф. Энгельс по этому поводу писал: «Немецкая пресса все еще молчит о «Капитале», а между тем чрезвычайно важно, чтобы что-нибудь было сказано... Главное заключается в том, чтобы вообще о книге все время давались отзывы». (К. Маркс и Ф. Энгельс, т. 31, стр. 475).

традиционных экономистов, способных лишь на цитатничество и бесплодные дискуссии (наподобие известных дискуссий о законе стоимости). Таких примеров можно привести великое множество.

Что отсюда следует? Только то, что авторы действительно оригинальных и нужных произведений должны обладать, кроме способностей, еще и не меньшим мужеством, чтобы пережить непонимание, а иногда и просто нелепые или оскорбительные выкрики.

Но, может быть, это все было в прошлом? А современный (образованный) читатель легко отличает действительно стоющие научные теории от шумов, их сопровождающих? К сожалению, это не так. История многих научных дискуссий (жаль, *что мы ее не очень серьезно изучаем*) показывает, что практические интересы конкретных людей пока были гораздо сильнее благородных порывов служения истине и справедливости. Взять хотя бы дискуссию «последователей мичуринского направления в биологии» с «вейсманистами-морганистами». Что она показала? — Что в научных дискуссиях часто ровно ничего не значит широкая (даже ученая) публика. Десятки академиков, членов-корреспондентов, докторов наук и их многочисленная пишущая братия, как сейчас уже всем ясно, осрамлены и стыдливо опускают глаза при упоминании о тех временах. Не удалось вырастить («при надлежащих условиях») из гороха пшеницу и, наверно, долго еще не удастся. Прав оказался Г. Мендель и его законы наследственности, которые, кстати, переоткрывались несколько раз, пока не были признаны окончательно. Это говорит о том, что надо терпимо относиться к «необычным» теориям, по крайней мере, пока ошибочность их не строго доказана.

В научных дискуссиях надо принимать во внимание еще и психологию спорящих. Специалисты по гуманитарным наукам не так рассуждают, как специалисты по естественным, и особенно точным наукам. А поскольку жизнь настоятельно требует «женить» их, то от такого «брака» возникают иногда интересные дети, которых не понимают их родители. Математическая экономика — это именно такой «ребенок», а экономическая дискуссия «за круглым столом» в 1964 г. — превосходный пример спора между «родителями». В таких дискуссиях, как правило, побеждают специалисты по точным наукам (у них строгие теоремы). Горячие дискуссии на тему:

«что может и чего не может вычислительная машина»? — блестяще это подтверждают.

Не так давно многие наши экономисты встречали в штыки любые экономико-математические теории. Под видом материалистической критики буржуазной политэкономии часто преподносилось нечто весьма поверхностное. Вот образец подобной «критики» каких-нибудь полтора десятка лет тому назад: «Возможность дифференцирования данных функций предполагает не только их непрерывность, но и бесконечную делимость тех величин, которые связаны данной функциональной зависимостью. Между тем экономические блага не могут делиться до бесконечности. Правда, физические тела поддаются бесконечному дроблению, но бесконечно малая доля какого-нибудь тела (например, хлеба) существует только физически (как известная часть материи), но не экономически, поскольку бесконечно малые доли каких угодно тел не имеют потребительной стоимости, а следовательно, и стоимости вообще. Процесс бесконечного деления, которому экономисты-математики подвергают все экономические величины, приводит к устранению экономического содержания.

Под мантией математических операций у представителей математической школы нередко происходит процесс трансформации отдельных категорий, процесс метаморфозы различных понятий.

Яркую иллюстрацию такого формализма и трансформации понятий в результате математических операций представляет весьма модная в настоящее время «теория игр и экономического поведения» Неймана и Моргенштерна». (Блюмин И. Г. [48]).

Это писалось в 1962 г. И хотя многое изменилось с тех пор, но по-прежнему осталось еще много экономистов, забывших, что такое производная и зачем она вообще нужна экономисту. Естественно, что для такого рода экономистов непостижимыми являются и математические абстракции, и условность терминологии, и то, что на данном этапе абсолютные истины в этой области пока мало вероятны.

При подготовке этой книги к печати редакция встретилась с большими трудностями в выборе подходящей терминологии. Однако эти трудности не помешали автору предложить ряд интересных решений широко обсуждаемых среди специалистов проблем, и хотелось бы, чтобы на эти проблемы, а не на терминологию обращали внимание читатели. В предыдущей книге Л. Н. Волгина «Проблема оптимальности в теоретической кибернетике» (1968 г.) ставился ряд важных проблем. Некоторые из идей автора усиленно дискутировались. Вопросы, которые излагаются в этой книге, тоже стоят в центре внимания ученых.

Первым на многокритериальную оптимизацию (полиоптимизацию) обратил внимание американский ученый Л. А. Заде [56]. Тесно связанная с ней теория игр с непротивоположными интересами получила развитие в работах Ю. Б. Гермейера [3], Н. Н. Моисеева [52] и др. Глубокое развитие получила теория дифференциальных игр (см. работы Айзекса Р. [47], Л. С. Понтрягина [53], Н. Н. Красовского [51]). Имеются и другие работы, в той или иной степени затрагивающие эти вопросы. Автор, на наш взгляд, наиболее последовательно изложил здесь так называемую теорию аналитических игр и перспективу ее возможных приложений.

В настоящее время разработана теория антагонистических игр двух лиц (игры с нулевой суммой). В этом случае «работает» доказанный фон Нейманом знаменитый принцип «минимакса» — принцип получения максимума из того минимума, который оставляет тебе антагонистически настроенный противник. Предполагается, что участники игры поступают разумно, и вышеуказанный принцип описывает предельно осторожное поведение двух субъектов.

В случае неантагонистической игры (игры с ненулевой суммой) принцип минимакса уже «не работает» и надо искать другие подходы. Один из таких подходов — принцип согласованного оптимума В. Парето.

Принцип предполагает, что все участники игры разумны и доброжелательны друг к другу: ни один из игроков не хочет получить выигрыш за счет другого участника игры. Они должны договориться, как построить отношения, чтобы интересы всех участников игры были наилучшим образом удовлетворены. Это, конечно, идеализация. Реальные субъекты будут, по-видимому, так поступать только в более или менее далеком будущем.

Впервые математическое описание принципа (принцип Парето) было сделано В. Парето в 1909 г.

Автору этой книги удалось найти пять новых различных подходов к обоснованию этого принципа и применить свою теорию к решению ряда глобальных экономических проблем на основе сочетания принципа согласованного оптимума с принципом эквивалентного обмена.

Возникает вопрос: как согласовать исследования автора с тем, что известно до сих пор в политической экономии? Или это только рабочая гипотеза, не учитывающая многих факторов реальной жизни и обладающая поэтому, как выразился один из рецензентов этой книги, «чрезвычайной степенью абстракции»? Здесь должны сказать свое слово экономисты нового поколения, которые хорошо знают не только политическую экономию, но и математическую экономику, теорию игр и другие вещи, неизвестные прежним исследователям.

При этом следует иметь в виду, что один и тот же математический аппарат может применяться и интерпретироваться по-разному: либо на основе диалектико-материалистической философии, либо подобно тому, как это делает вульгарная буржуазная политэкономия. Использование методов высшей математики в политэкономии нельзя отдавать на откуп только буржуазным экономистам. Пользуясь методом, который выработала материалистическая философия, нам нужно переосмыслить старые и новые теории на основе последних достижений теоретической кибернетики, т. е. выполнить задачу, которую еще никто не успел сделать, и извлечь из этих теорий все для нас ценное (только не так, как мы «использовали» материалистическую диалектику для оценки новой физики, кибернетики, генетики и др.). Чтобы такую задачу с честью выполнить, *надо преодолеть школярство и не бояться «ошибочных» теорий: истинная наука на фоне таких ошибок только укрепляет свои позиции.* Важно только при этом прямо смотреть фактам в лицо, и если теория не объясняет новых фактов, то надо уточнять и совершенствовать теорию или же придумывать новую, если «совершенствование» теории не идет дальше теории эпициклов в геоцентрической системе мира Птолемея.

Надо иметь в виду, что многие положения автора дискуссионны и могут быть верными только при определенных условиях (например, цена в обществе субъектов с бесконечным интеллектом не отклоняется от стоимости и т. п.).

Экономистов может заинтересовать теория ценообразования, планирования производства и потребления в социалистической экономике, могут быть интересными условия взаимовыгодного обмена между различными экономическими субъектами, методика аналитического расчета в задачах внешней торговли и др.

К сожалению, автором совсем не рассмотрены аналитические игры в ограниченных областях, что, по-видимому, будет делом недалекого будущего.

Мы здесь обращали внимание на экономические приложения теории игр, где, по-видимому, больше всего можно ожидать неясностей и критики. Однако теория игр может найти применение и при разработке новой техники — электронных вычислительных машин. Усложнение задач, которые должны решать управляющие вычислительные машины, требует новых принципов построения ЭВМ. Конструктор ЭВМ не может предусмотреть всех ситуаций, в которых машина может оказаться в ходе выполнения заданной программы. Требуется создать машину, которая могла бы без чьего либо вмешательства приспосабливаться к неожиданно изменяющейся обстановке. Теория показывает принципиальную осуществимость таких машин — сложные задачи, которые решал раньше человек, после соответствующего обучения могут решать сами машины. Конструктор ЭВМ должен знать лишь некоторые общие черты, характерные свойства этих условий. Располагая этими сведениями, можно выбирать параметры обучаемой управляющей машины так, чтобы обеспечить ее успешную работу при любых изменениях в пределах, когда эти сведения истинны.

Теория игр проливает свет на взаимодействие между конструктором и обучаемой ЭВМ, а также между ЭВМ и управляемой ситуацией.

Весьма интересный подход к обучаемым машинам, развивающий теорию фон Неймана, нашли И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин. Выдвинутый ими «принцип наименьшего взаимодействия» хорошо объясняет работу иерархической системы обучаемых машин и может быть, как нам кажется, весьма перспективным.

Нам хотелось бы указать и на такой интересный аспект применения теоретико-игровых построений, как научное прогнозирование. Так, с помощью этой теории в дополнение к теории Форрестера Д. В., Медоуза Д. Л.

[54, 55] и др. можно было бы строить различные модели эволюции и проверять их на выживаемость. Можно понять, например, смысл многих правил морали и различных ограничений в различных обществах и прогнозировать их развитие. Некоторые из этих правил оказываются, по-видимому, решающими в трудной и долгой эволюции человека, предохраняя его от вырождения или исчезновения с лица земли. Математический аппарат этой книги (см. также [2]) интересно было бы применить и в педагогике и в юридических науках, например при научной разработке (оптимизации) нашего законодательства.

Современная научно-техническая революция, развитие экономики и усложнение общественных связей привели к тому, что старые методы организации работы и управления зачастую или не действуют, или недостаточно эффективны. Чтобы освоить новые методы, требуется время и большие усилия. Чисто математические трудности — это еще далеко не все. Как пишет автор в этой книге, существуют троякого рода трудности: выбор модели, математические трудности и умение провести оптимальное решение в жизнь. Самое трудное иногда — это именно этап внедрения научных результатов в практику. Только совместными усилиями кибернетиков и представителей многих других профессий эти трудности можно преодолеть.

Редакция надеется, что эта книга окажется полезной, а те недостатки, которые в ней имеются, не умаляют ее значения, особенно в момент, когда *вопросы оптимизации управления стали проблемой «номер один»*. Как и из предыдущей книги Л. Н. Волгина, читатель получит много интересных идей для размышлений и творческих дискуссий. Исправлять же недостатки этой книги — дело будущего.

Редакция

Отзывы на книгу редакция просит присылать по адресу: Москва, Главпочтамт, а/я 693, издательство «Советское радио».

ОТ АВТОРА

Основным содержанием этой книги является теория аналитических игр и ее применение. Математический аппарат книги — это в основном классический математический анализ, высшая алгебра и аналитическая геометрия, основными понятиями которых являются понятия функции, производной, интеграла, вектора, матрицы, определителя, функционала, оператора, последовательности, ряда, алгебраического, разностного и дифференциального уравнений. Однако данная книга меньше всего предназначена для математиков. Она должна заинтересовать в первую очередь экономистов, занятых оптимизацией социалистической экономики, многие из которых уже хорошо владеют аппаратом математической экономики и экономической кибернетики. Предлагаемый в книге математический аппарат направлен на решение глобальных задач оптимизации в экономике. Насколько хорошо решены эти задачи, пусть судит читатель.

Кроме экономистов, книга может заинтересовать и других представителей общественных наук: философов, социологов, юристов, психологов, медиков и т. д.

Гуманитарные науки отстали в своем развитии от естественных, а между тем их роль для человечества огромна. В настоящее время общество больше нуждается в духовном изобилии, чем в материальном. Привести гуманитарные науки в соответствие с требованиями современности можно, лишь пользуясь методологией, которую предлагает кибернетика.

Особенности мирового развития в послевоенный период стимулировали высокий темп развития кибернетических наук. Искусственные преграды развитию кибернетики, которые выдвигались некоторыми философами, математиками, экономистами и биологами в СССР, были, наконец, отброшены в сторону перед лицом угрозы отставания в этой жизненно важной отрасли науки, и кибернетика была узаконена.

Духовная миссия ученого, о которой очень хорошо сказал в своем завещании Н. Винер, требует от него честного и беспристрастного служения истине, стремления ответить на насущнейшие вопросы современности, не избегая участия в разрешении спорных и острых вопросов своего времени *.

Мы живем в мире, преображенном второй промышленной революцией, в ходе которой были созданы новые могучие средства служения человеку. Вторая промышленная революция развивается более высокими темпами, чем первая **, и мы не успеваем следить за стремительным преображением этого нового мира.

Одним из наиболее важных проявлений нового человеческого представления о мире является тенденция всеобъемлющей математизации наук, затрагивающих самые тонкие аспекты человеческой психологии, общественных отношений и экономического благосостояния человека. Кажется, мы приближаемся к тому удивительному времени, когда само понятие человеческого счастья становится предметом точных наук.

В связи с рассмотрением в книге общественных явлений необходимо заметить следующее. Вопрос о соответствии некоторой модели реальному явлению не может быть решен в рамках самой модели, ибо в этих рамках термин «реальное явление» остается неопределенным. Обычно под «реальным явлением» понимается некоторое его описание, которое можно назвать «словесной моделью» явления. В общественных науках накоплено огромное множество «словесных моделей» общественных явлений. Базой для сравнения двух моделей, одна из которых является математической, а другая — словесной, может быть лишь более общая модель, включающая две первые модели как частные случаи. Однако такие модели еще не созданы. Безусловно, верховным критерием всех существующих моделей остается практика в широком смысле этого слова, но критерий практики требует накопления статистики, которая редко бывает достаточной для получения категорических выводов.

---

* Н. Винер (родился 26 ноября 1894 г. в США, умер 18 марта 1964 г. в Швеции) — один из крупнейших математиков нашего века, основатель и популяризатор современной кибернетики [9].

** Через 50 лет после создания первой паровой машины в мире имелось только 5 тыс. таких машин, а через 25 лет после создания первой ЭВМ — уже около 100 тыс. таких машин.

ВВЕДЕНИЕ

Предметом рассмотрения в данной работе является аналитическая теория игр лиц с противоречивыми, но не прямо противоположными интересами. Понятие «игра» используется в кибернетике для обозначения конфликтной ситуации, в которой оказываются люди, организации, государства, а также создаваемые людьми автоматические системы. Теория игр, изучающая вопрос об оптимальном поведении взаимодействующих между собой разумных существ и создаваемых ими автоматов, является одним из наиболее быстро развивающихся разделов теоретической кибернетики.

Возникновение этой теории приходится на эпоху Возрождения — период бурного расцвета идей и зарождения всей современной науки. Первая теоретико-игровая задача была поставлена в конце XV в. итальянским математиком Лукой Пачиоли (1445—1514), которому принадлежит также открытие двоичной системы счисления [28]. Это — задача о справедливом разделе ставки между двумя игроками в кости. Задача была решена через 150 лет после ее постановки гениальным французским математиком и физиком Блезом Паскалем (1623—1662) в письме к другому величайшему французскому математику XVII в. Пьеру Ферма (1601—1665) [30]. В ответном письме Ферма Паскалю это решение было упрощено [23]. Через три года голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629—1695) независимо от них в самом общем виде решает эту задачу [25].

В связи с широким распространением азартных игр вопросы, поднятые этими учеными, были весьма «злободневными», однако существовавший тогда уровень теории не мог предложить игрокам никаких готовых рецептов выигрыша. Ведь в то же время еще не существовало даже исчисления бесконечно малых и бесконечно больших величин, открытого гениальным английским ученым Исааком Ньютоном (1642—1727) в 1665 г. и не менее гениальным немецким ученым Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716) независимо от

Ньютона в 1673 г. Возникшее тогда широкое убеждение в бесполезности применения математических методов к жизненным ситуациям надолго затормозило развитие теории игр, и оно возобновилось лишь 200 лет спустя, после того как математика была успешно применена к множеству более простых ситуаций и накопила арсенал мощных средств и приемов исследования.

В XIX в. бурное развитие капиталистических отношений породило массу исследований на тему, как быстрее и лучше всего разбогатеть. В 1838 г. французский экономист Антуан Курно (1801—1847) опубликовал книгу «Исследование математических принципов теории богатства» [21], в которой были впервые сформулированы условия экономического конкурентного равновесия. В 1854 г. немецкий ученый Герман Генрих Госсен (1810—1858) в книге «Закон человеческого общения и вытекающие из него правила поведения людей» [24] формулирует психофизиологические законы человеческого наслаждения в результате удовлетворения потребностей. В книге Госсена сформулированы два закона:

1) по мере удовлетворения потребности в данном виде материальных благ степень наслаждения, ощущаемого человеком при вкушении этих благ, падает;

2) при невозможности удовлетворить все потребности полностью их удовлетворение необходимо ограничить на том уровне, при котором ощущается одинаковый прирост наслаждения от каждого вида используемых материальных благ.

Второй закон является математическим следствием первого, первый же закон выражает объективное психофизиологическое свойство человека. Можно сказать, что Г. Г. Госсен был первый, кто обратил внимание на возможность научного подхода к этим сложным вопросам, внеся тем самым значительный вклад в науку о человеке*. Математический вывод второго закона Госсена изложен в работе [2, с. 61].

В 1874 г. выходит учебник «Элементы чистой политической экономии, или теория общественного богатства»

---

* Существуют различные мнения относительно вклада Г. Г. Госсена в науку о человеке. По мнению редакции, этот вопрос нуждается в более тщательном исследовании. По-видимому, ценным в этих работах является то, что Госсен попытался перевести на математический язык то, что изучали до него на словесном уровне, т. е. сделал первый шаг. Мы уже должны развивать и переосмысливать эти идеи с марксистских позиций. (*Прим. ред.*)

[32] Леона Вальраса* (1834—1910), в котором он по существу повторяет изложение математических законов конкурентного равновесия, открытых А. Курно. Этот учебник оказал большое влияние на многих последующих экономистов.

В конце XIX в. появляется так называемая «австрийская школа» ученых — сторонников «психологической теории стоимости», опирающейся на труд Г. Г. Госсена, людей, не понявших или не захотевших понять всей глубины трудовой теории стоимости и противопоставивших теорию Госсена теории Уильяма Петти (1623—1687) — Адама Смита (1723—1790) — Давида Рикардо (1772—1823) и др.

На протяжении всего XX в. шел спор между сторонниками психологической и трудовой теорий стоимости о том, чем определяется стоимость продукта — количеством ли труда, вложенного в него производителем, или психологическим отношением к нему потребителя, уже частично удовлетворившего свою потребность в этом продукте и назначающего ему свою цену.

Исследование формирования цен на основе количества заключенного в продуктах труда и наличием человеческой потребности в этих продуктах составляет одну из главных задач экономической кибернетики.

В данной работе изучается вопрос об оптимальном поведении кибернетических субъектов. *Субъектом* в кибернетике называется система, имеющая собственную цель (синонимы: критерий, интересы). Субъектами являются все живые существа, кибернетические машины (в которые закладывается определенная цель при программировании) и всевозможные организации, состоящие из живых существ и кибернетических машин. Предполагается, что каждый субъект имеет некоторую возможность *выбора*, т. е. имеет некоторый набор вариантов поведения.

---

* Вальрáс (Walras) Леон — швейцарский экономист, проф. Лозаннского университета (1870—92), основатель математической школы в политической экономии. Он известен, как автор общей статистической экономико-математической модели народного хозяйства (система общего экономического равновесия), получившей дальнейшее развитие с помощью средств линейного программирования. Ценным в моделях Л. Вальраса является постановка глобальных задач оптимизации в народном хозяйстве и понимание цены как одного из регуляторов экономической системы и средства нахождения общего оптимума. (*Прим. ред.*)

Цель, которую преследуют простейшие живые существа, проста: выжить и получить максимум наслаждения *. Интересы высокоорганизованных живых существ и создаваемых ими кибернетических систем более сложны и многообразны. Будем считать, что максимизация собственного благополучия есть свойство, присущее любому организму, в том числе и человеку. Каждый живой субъект стремится обеспечить себе наилучшие условия существования — это его право, которое нельзя у него отнять.

Наличие собственных интересов у разных людей — это объективный фактор несогласованности их действий, в результате чего люди в погоне за собственным благополучием могут наносить ущерб друг другу. Это иногда приводит к конфликтным ситуациям в коллективе, нарушает нормальный психологический климат. Отдельные люди ставят свои личные интересы выше общественных, поэтому в социалистическом обществе ведется постоянная и направленная работа по воспитанию нового человека, развитию коллективных интересов.

Согласование интересов различных людей, организаций и целых государств пока еще не было предметом изучения точных наук, хотя этому вопросу посвящают свою жизнь многие представители рода человеческого. Обладая сознанием того, что сообща, учитывая возможности и потребности всех, а не только свои, можно добиться большего, чем в одиночку, люди вырабатывают единую цель и общие методы достижения этой цели, требующие согласованных действий.

Именно эта ситуация и является предметом изучения в теории игр лиц с непротивоположными интересами. Раздоры, ставящие человечество на грань полного уничтожения, борьба за существование различных видов живых существ, в частности постоянная борьба человека с микроорганизмами, являющимися источниками опасных болезней, проблемы личного счастья и психологической совместимости в коллективе, защита растений и животных от вредителей и проблема охраны окружающей среды — все это частные задачи, требующие единого научного подхода. Все эти задачи подпадают под схему, которую построила математическая теория игр.

---

* «Конечными основаниями экономического исчисления являются, несомненно, наслаждения и страдания». (У. С. Джевонс)

Трудности, которые стоят перед этой, впрочем, как и перед всякой другой теорией, троякого характера. Первая трудность состоит в отображении реального жизненного конфликта в математическую схему: она сводится к умению строить так называемые «целевые функции» реальных субъектов путем их математической идентификации. Вторая трудность состоит в умении решить оптимально возникающую математическую задачу. Существует также и третья трудность: это умение провести в жизнь полученное оптимальное решение. Цель данной работы — указать пути решения только второй трудности — трудности чисто математической. Поясним, в чем она состоит.

Задача, которую ставит перед собой аналитическая теория игр, на первый взгляд кажется парадоксальной: требуется найти точку, максимизирующую сразу несколько функций. Это явно противоречивая с точки зрения традиционной математики задача называется *игрой*. Более строгое определение понятия «аналитическая игра» было сформулировано автором в работе [2, с. 96—97]:

1. «Под *аналитической игрой* понимается следующая математическая схема. В игре принимают n игроков $S_1, \ldots, S_n$. Ситуация игры описывается n аналитическими функциями выигрыша

$$J_1=f_1(\mathbf{x}), \ldots, J_n=f_n(\mathbf{x}),$$

где J_i — выигрыш i-го игрока, а $\mathbf{x}$ — вектор параметров управления».

2. «Пространство параметров управления $\mathbf{x} \in X$ является непрерывным. Набор функций $\{f_i\}$ определяет «метрику» этого пространства. В задании этой метрики состоят главные трудности применения этой очень общей теории».

3. «Набор параметров управления $\mathbf{x}$ разбивается на n наборов

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

где $\mathbf{x}_i$ — набор параметров, контролируемых i-м участником игры. В частности, один из наборов $\mathbf{x}_i$ можно рассматривать как набор случайных параметров, контролируемых Природой».

4. «Каждый участник игры выбором контролируемого им набора параметров стремится максимизировать свой выигрыш J_i».

Классическая математика таких задач перед собой не ставила. В ней рассматривались только задачи максимизации одной функции

$$J = f(\mathbf{x}),$$

решением которых была, как правило, единственная точка $\mathbf{x}^*$, где достигался искомый максимум этой функции

$$f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

Если рассматривать задачи максимизации нескольких функций порознь

$$J_i = f_i(\mathbf{x}),$$

то для каждой из них найдется своя точка максимума $\mathbf{x}^*_i$, в которой

$$f_i(\mathbf{x}^*_i) = \max_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}).$$

Совпадение всех точек $\mathbf{x}^*_i$ ($\mathbf{x}^*_1 = \mathbf{x}^*_2 = \ldots \mathbf{x}^*_n$) представляет собой исключительное событие, а правилом является их различие:

$$\mathbf{x}^*_1 \neq \mathbf{x}^*_2 \neq \ldots \neq \mathbf{x}^*_n.$$

Поэтому требование максимизации нескольких функций поиском единственной точки $\mathbf{x}^*$ математику-классику кажется нелепым*. Явное противоречие, которое здесь имеет место, и ныне ставит втупик многих даже сведущих в математике людей. Однако данная задача — не досужая выдумка, а отражение конфликтных ситуаций, возникающих в жизни на каждом шагу.

Простейшей интерпретацией поставленной задачи является стремление каждого субъекта к максимизации собственного благополучия в обществе взаимодействующих субъектов, где поведение каждого влияет на состояние всех остальных. Вообще говоря, *каждое разумное существо имеет свою цель, отличающуюся от целей всех других существ.* Так, например, различные цели

* Вот что пишет по этому поводу Дж. фон Нейман [17, с. 37]: «Ведущий принцип не может формулироваться в виде требования одновременной максимизации двух или более функций. Любой подобный принцип, если его понимать буквально, является внутренне противоречивым. (Одна функция, вообще говоря, не будет иметь максимума там, где его имеет другая.)».

Классическая математика таких задач перед собой не ставила. В ней рассматривались только задачи максимизации одной функции

$$J=f(\mathbf{x}),$$

решением которых была, как правило, единственная точка $\mathbf{x}^*$, где достигался искомый максимум этой функции

$$f(\mathbf{x}^*)=\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

Если рассматривать задачи максимизации нескольких функций порознь

$$J_i=f_i(\mathbf{x}),$$

то для каждой из них найдется своя точка максимума $\mathbf{x}^*_i$, в которой

$$f_i(\mathbf{x}^*_i)=\max_{\mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}).$$

Совпадение всех точек $\mathbf{x}^*_i$ $(\mathbf{x}^*_1=\mathbf{x}^*_2= \dots \mathbf{x}^*_n)$ представляет собой исключительное событие, а правилом является их различие:

$$\mathbf{x}^*_1\neq\mathbf{x}^*_2\neq \dots \neq\mathbf{x}^*_n.$$

Поэтому требование максимизации нескольких функций поиском единственной точки $\mathbf{x}^*$ математику-классику кажется нелепым *. Явное противоречие, которое здесь имеет место, и ныне ставит втупик многих даже сведущих в математике людей. Однако данная задача — не досужая выдумка, а отражение конфликтных ситуаций, возникающих в жизни на каждом шагу.

Простейшей интерпретацией поставленной задачи является стремление каждого субъекта к максимизации собственного благополучия в обществе взаимодействующих субъектов, где поведение каждого влияет на состояние всех остальных. Вообще говоря, *каждое разумное существо имеет свою цель, отличающуюся от целей всех других существ.* Так, например, различные цели

* Вот что пишет по этому поводу Дж. фон Нейман [17, с. 37]: «Ведущий принцип не может формулироваться в виде требования одновременной максимизации двух или более функций. Любой подобный принцип, если его понимать буквально, является внутренне противоречивым. (Одна функция, вообще говоря, не будет иметь максимума там, где его имеет другая.)».

у государств, у каждой отрасли хозяйства, у каждого предприятия и учреждения, наконец, у каждого отдельного человека. Игнорировать это разнообразие критериев — нельзя.

Цель, которую преследует тот или иной субъект, может определить только сам субъект (*принцип автономии субъекта*). В самом деле, разве существуют такие люди, которые за тебя могут решить, что для тебя лучше?! А если такие люди все же находятся, то к ним применима латинская пословица: Sed quis custodiet ipsos custodies? (Но кто сторожит самих сторожей?)

Степень удовлетворенности каждого субъекта должна измеряться самим субъектом, который дает субъективную оценку каждой единице получаемого или отдаваемого им блага. Безусловно, далеко не каждый человек отдает себе отчет в том, чего он хочет. Теория позволяет учесть и это обстоятельство, вводя в рассмотрение целевые функции стохастического характера, имеющие вид

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})\, w(\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — набор случайных величин, а $w(\boldsymbol{\eta})$ — его неизвестное распределение.

Казалось бы, что если неизвестны целевые функции отдельных личностей, то что говорить о целевых функциях «больших систем», подобных государству, которые состоят из миллионов личностей? Однако здесь проявляется эффект аналитизации целевых функций больших систем, отражаемый в так называемых предельных теоремах теории вероятностей, утверждающих, что при суммировании большого числа случайных слагаемых отклонение суммарного эффекта от общего правила с ростом числа слагаемых сглаживается. Поэтому о большой системе мы можем судить более определенно, чем о ее компонентах.

Случай, когда критерием i-го субъекта является собственное благополучие, — наиболее естественный и распространенный, хотя это и называют оскорбительным словом — «эгоизм». Но описанная схема распространяется на значительно более широкий круг задач. В качестве целевой функции i-го субъекта может выступать любая комбинация целевых функций других субъектов — так называемая «забота о ближних». Она включает также случай полного альтруизма — забота об «общем благе», если, конечно, субъекту известны действительные функции цели остальных людей, а не превратное представление о них. Целевую функцию беспристрастного альтруиста можно выразить так

$$J=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}).$$

Некоторые субъекты преследуют и вовсе трансцендентные цели, никак не связанные с их собственным благополучием, и это тоже можно подвести под нашу схему.

Под эту схему можно подвести и любовь, когда целью субъектов, составляющих любящую пару, является максимизация благополучия партнера

$$J_1=f_2(\mathbf{x}); \quad J_2=f_1(\mathbf{x}),$$

и ненависть, обостренную до такой степени, когда субъекты, забывая о собственном благополучии, стремятся нанести максимум ущерба друг другу

$$J_1=-f_2(\mathbf{x}); \quad J_2=-f_1(\mathbf{x}).$$

Если речь идет о государствах, то этот вариант отношений соответствует состоянию войны.

Наше исследование охватывает и игры, в которых целью некоторых или всех субъектов является минимизация, а не максимизация целевых функций, например, целью i-го субъекта является

$$J_i=f_i(\mathbf{x})\longrightarrow\min.$$

Эта задача сводится к стандартной постановке, если заменить целевую функцию этого субъекта на противоположную, но уже с целью ее максимизации

$$J_i=-f_i(\mathbf{x})\longrightarrow\max.$$

В том специальном случае, когда субъекты преследуют цель получить максимальную пользу для себя и причинить максимальный вред партнеру,

$$J_1=f_1(\mathbf{x})-f_2(\mathbf{x}); \quad J_2=f_2(\mathbf{x})-f_1(\mathbf{x}),$$

игра становится антагонистической и попадает под схему теории игр двух лиц с противоположными интересами (так называемые игры «с нулевой суммой»).

Обозначив $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, эту игру можно представить так

$$J_1=f(x)\to\max;\ J_2=-f(x)\to\max$$

или

$$J_1=f(x)\to\max;\ J_2=f(x)\to\min.$$

Итак, мы показали, что очень многие конфликтные ситуации сводятся к стандартной схеме максимизации нескольких различных целевых функций. Поэтому предлагаемую теорию можно назвать действительно общей теорией аналитических игр.

Игровые проблемы принципиально отличны от экстремальных проблем обычной математики, и поэтому реальные жизненные проблемы, в которых пересекаются, как правило, интересы многих взаимодействующих субъектов, безнадежно решать средствами классической математики.

В основе данной работы лежит принцип согласованного оптимума. *Согласованный оптимум означает преобразование конфликтной ситуации в такую ситуацию, в которой ни один из участников конфликта не может улучшить свое состояние, не причинив своими действиями вреда остальным партнерам.* Поэтому состояние согласованного оптимума является наилучшим для всех, т. е. оптимальным. Его достижение требует согласованных действий конфликтующих сторон, именно поэтому мы и назвали такое решение игры «согласованным оптимумом».

Если в качестве решения аналитической игры использовать точку, определяемую уравнениями

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0\quad (i=1,\dots,n),$$

то можно показать, что эта точка, к которой сходится игра (в том случае, когда все игроки действуют по принципу «каждому свое», независимо один от другого) не является оптимальной, потому что она реализует лишь часть возможного максимального выигрыша каждым из игроков. Поэтому можно назвать эту точку точкой *несогласованного оптимума.*

Исследование показало, что существует другая точка, при переходе к которой выигрывают все игроки. Эта точка определяется уравнением

$$\frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}=0,$$

где $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_n)$ — вектор, составленный из функций выигрыша f_i, а $D/D\mathbf{x}$ — *якобиан* векторного преобразования* $\mathbf{J}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Эту точку мы назвали точкой *согласованного оптимума*. Она является действительно оптимальной в том смысле, что любой игрок, отступающий от нее, не может повысить свой выигрыш, не уменьшив тем самым выигрыш других участников игры. Поэтому нарушение любым участником игры условий согласованного оптимума карается всеми другими ее участниками мерами, направленными против нарушителя. Это придает точке согласованного оптимума устойчивость**.

Принцип согласованного оптимума является математическим выражением и средством достижения справедливого разрешения конфликтов в отношениях между людьми. Математически он учитывает реальное неравенство людей (физическое, моральное и интеллектуальное). Поэтому он глубже принципов формального равенства, которого никогда не было (и не будет) достигнуто (да и нужно ли это?). *Разумные* субъекты, к которым относится Homo sapiens, рано или поздно должны осознать, что, скоординировав свои действия по принципу согласованного оптимума с помощью кибернетических машин, они могут добиться подлинной справедливости производственных и других отношений, не

---

* Якобианом [по имени немецкого математика Карла Густава Якоба Якоби (1804—1851)] называется определитель матрицы, составленной из частных производных функций f_i по переменным x_k

$$\frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}=\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|_1^n=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

** Точка согласованного оптимума является устойчивой, если участники игры знают целевые функции друг друга, которые предполагаются стабильными.

нарушив при этом ничьих интересов. В разумно устроенном обществе принцип согласованного оптимума может стать плодотворным инструментом достижения гармонии человеческих отношений.

Величайшей заслугой классиков марксистско-ленинской общественной науки и нашего народа явилось построение нового общества, свободного от антагонизма между ведущими классами. Новому социалистическому обществу свойственна общность интересов различных классов и наций. Социальные отношения членов социалистического общества построены на принципах взаимопомощи и сотрудничества. Вместе с тем изучение этих вопросов происходит в основном качественно, а количественная сторона еще не получила развития. С количественной стороны эти вопросы должна помочь решить математическая кибернетика, в частности математическая теория игр.

Математическая политическая экономия утверждает, что научно оправданное с современной точки зрения Оптимальное Общественное устройство может удовлетворить всех, за исключением «множества меры нуль», т. е. ничтожного меньшинства.

Как это выясняется сейчас, основоположником аналитической теории игр является итальянский математик и социолог (инженер, по образованию) Вильфредо Парето (1848—1923). Он родился 15 июля 1848 г. в Париже и умер 19 августа 1923 г. в Швейцарии. Его отец — итальянец, мать — француженка. В 1858 г. их семья переселилась из Парижа в Италию, в Турин, где Парето окончил Политехнический институт. В 1869 г. он защитил докторскую диссертацию по теории упругого равновесия твердых тел. Но Парето интересовался общественными науками. Он интенсивно занимался экономикой в 1892—1912 г., потом переключился на социологию. Он преподавал экономику в Лозанне, был признанным математиком-экономистом. В 1906 г. он издал в Милане свой «Учебник политической экономии», который в 1909 г. в Париже был переведен на французский язык [29]. В математическом приложении к этому учебнику, полностью переработанном по сравнению с итальянским изданием, фактически содержится материал, который можно интерпретировать как теорию согласованного оптимума. В частности, у Парето имеется уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

как условие согласованного оптимума в игре двух лиц, каждое из которых управляет одним числовым параметром. Точка оптимума *, определяемая этим уравнением, получила широкое признание у теоретиков как «точка Парето».

Поэтому единственное, на что может претендовать автор данной работы, — на то, что ему выпала честь переоткрыть заново давно открытое, но не оцененное по достоинству творение.

Парето с уважением относился к К. Марксу, высоко ценил его теорию классовых конфликтов. Он разделял убеждение Маркса, что социализм в принципе более эффективен, чем капитализм. Парето неоднократно редактировал «Капитал» Маркса и писал введения к нескольким его изданиям **.

Парето много занимался социологией и в 1916 г. издал четырехтомный «Трактат по общей социологии». Его считают основателем экономической теории благосостояния. Широкую известность получил «закон Парето» о распределении доходов.

Парето был глубокоэрудированным ученым широкого кругозора, освоившим наследие классиков и труды современных ему ученых. Его любимыми увлечениями были математика, экономика, социология, философия, история, языки и многое другое.

По сей день многие специалисты считают основателем математической теории игр крупнейшего математика XX в. Джона фон Неймана (1903—1957). Однако не все знают, что фон Нейман был учеником Парето, идеи которого он успешно развивал. Фон Нейман стремился фактически реализовать мечту Парето о сведении зако-

---

* Математическая пунктуальность требует пояснить, что на самом деле уравнение Парето определяет не точку, а целую линию: $F(x_1, x_2) = 0$.

** В нашей литературе (см., например, БСЭ, т. 19, 3-е изд. 1975 г.) приводится несколько иная оценка В. Парето. По-видимому, для более глубокой и квалифицированной оценки работ В. Парето требуется специальное исследование. (*Прим. ред.*).

нов политической экономии к законам механики. Однако он создал конструктивную теорию только для антагонистических игр, опубликовав ее в 1943 г. в монографии «Теория игр и экономическое поведение» [17], написанной совместно с экономистом Оскаром Моргенштерном. Что касается теории неантагонистических игр, т. е. игр с непротивоположными интересами, то в этом направлении результаты фон Неймана являются сравнительно бедными.

Строго говоря, рассмотренный фон Нейманом случай антагонистических игр представляет собой математическую абстракцию, имеющую место лищь «на множестве меры нуль», как выражаются математики, потому что интересы реальных субъектов никогда не являются строго противоположными.

Принцип согласованного оптимума (*принцип Парето*) является основой теории неантагонистических аналитических игр. Широкая распространенность жизненных проблем, которые приводятся к схеме неантагонистической игры, и универсальность принципа согласованного оптимума позволяют надеяться на его широкое применение, в первую очередь, для решения экономических задач планирования и управления в обществах, состоящих из субъектов, преследующих различные цели.

Действительно, *мир управляется законами оптимальности*, и эти законы, если их понимать достаточно широко, действуют всегда.

До сих пор экономическая кибернетика, опираясь на принципы математической теории планирования (или «программирования»), решала лишь частные задачи оптимизации производства и распределения продуктов, потому что она не располагала теоретическими методами решения глобальных задач планирования и управления. Принцип согласованного оптимума является первым формально-математическим инструментом решения таких задач. Предлагаемая теория дает возможность решать глобальные задачи управления.

Глобальная оптимизация по принципу согласованного оптимума означает достижение наибольшего блага для всех членов неантагонистического общества. Она включает как частности оптимизацию технологии, экономики и социальных отношений.

Согласованный оптимум возможен и в обществе, еще не достигнувшем полного изобилия материальных благ. Изобилие благ вызовет насыщение потребностей людей, и многие проблемы, которые сейчас нас волнуют, просто исчезнут *. Речь идет о достижении согласованного оптимума в обществе, потребности которого превышают его возможности.

В данной работе с помощью принципа согласованного оптимума составлен ряд моделей глобальных задач оптимального управления социалистической экономикой:

— задача оптимального планового управления социалистическим народным хозяйством с составлением оптимального общегосударственного плана производства и потребления всех видов продукции;

— задача установления оптимальной пропорции между развитием промышленности и сельского хозяйства с определением оптимальных уровней промышленного и сельскохозяйственного производства;

— задача ценообразования в социалистическом обществе, в результате решения которой могут быть найдены оптимальные цены всех производимых в обществе продуктов;

— задача оптимизации внешней торговли, позволяющая заменить существующую практику в отношениях между государствами точным аналитическим расчетом.

Кроме того, составлена простейшая модель согласованного оптимума в отношениях между группами трудящихся социалистического общества.

Решение глобальных задач оптимизации социалистической системы хозяйства на основе предлагаемых алгоритмов, вытекающих из принципа согласованного оптимума, доступно современной вычислительной технике. Оно позволит покончить с эмпиризмом планирования, о котором писал акад. С. Г. Струмилин в 1962 г. [40]: «Практика планирования продвигается вперед пока в основном путем эмпирических исканий, на котором и самые крупные достижения неизбежно перемежаются с досадными промахами и заметными потерями», и который сохраняется по разным причинам и поныне (в том числе и из-за недостаточно развитой математико-экономической теории). Безусловно, что потери, вызванные ошибками планирования, намного меньше потерь, кото-

* Изобилия может не наступить ввиду истощения ресурсов природы.

рые несет капиталистическое общество из-за хаотичности механизма конкуренции, являющегося регулятором производства. Однако они достаточно велики, и, следовательно, мы еще не полностью используем потенциальные преимущества социализма перед капитализмом.

Если взвесить значение политико-экономических проблем, связанных с оптимальным решением неантагонистических игр, то все прочие проблемы, в решении которых эта теория может быть использована (медицинские проблемы защиты человека от пожирания его микробами или проблемы матримониального характера), кажутся малозначительными. На самом деле значимость этих проблем иногда не меньше, чем значимость политико-экономических проблем, и любое продвижение в их решении принесло бы человечеству избавление от многих страданий и бед.

Кроме того, не надо забывать, что аналитическая теория игр способна решать не только проблемы согласованного оптимума, но и противоположные им проблемы «антисогласованного пессимума» *, которые возникают в военно-стратегических областях. Создание теории аналитических игр значительно расширяет возможности кибернетики, которые можно использовать для решения проблем как мира, так и вооруженных конфликтов.

Дальнейшее развитие теории аналитических игр позволит решать и многие социологические проблемы. Дело в том, что принцип согласованного оптимума есть средство агрегации критериев субъектов, составляющих общество, в критерий самого общества. В иерархической системе управления, построенной по принципу согласованного оптимума, «веса» субъектов, занимающих j-й «этаж» иерархической лестницы, определяются через «веса» субъектов нижележащего $(j-1)$-го «этажа». Аналитическая теория игр позволяет рассчитать все эти «веса», т. е. найти оптимальное общественное устройство. Построенная на принципе согласованного оптимума иерархическая система будет оптимальной в том смысле, что каждый составляющий ее индивидуум будет иметь возможность максимизировать свою эффективность. Аналитическая теория игр позволяет наилучшим образом решить проблему «сочетания обществен-

* Pessimum (лат.) — наихудший.

ных и личных интересов» членов социалистического общества. Зная критерии всех членов социалистического общества, можно найти критерий социалистической системы в целом. Любые попытки решить эту задачу, минуя аналитическую теорию игр, останутся бесплодными.

Если создание основ аналитической теории игр является заслугой В. Парето, то своим достижением, помимо популяризации принципа согласованного оптимума, автор считает его применение к играм обмена, изложенное в части второй настоящей работы.

Если применительно к аналитическим играм вообще говорить о «точке» согласованного оптимума можно лишь при наличии добавочных ограничений, а в общем случае она единственным образом не определяется, то *в играх обмена точка согласованного оптимума единственна.* На основе принципа согласованного оптимума может быть сформулировано формальное определение цены, которая автоматически сопутствует любому процессу обмена.

Как показало наше исследование, из принципа согласованного оптимума в применении к играм обмена автоматически вытекает так называемый *принцип эквивалентного обмена.*

Цель, вытекающая из принципа согласованного оптимума, будет достигнута в обществе путем реализации справедливых обменов. Для этого потребуется измерение колоссального количества субъективных факторов, определяющих эмоциональное состояние людей, таких как вкусы, привычки, законы моды и т. п.

Есть явления неизмеренные, но никто еще не доказал, что есть явления неизмеримые. Наука найдет способы измерения психологических, социальных и этических категорий. Передовая теория должна предшествовать практике, указывая те факторы, которые подлежат и поддаются измерению. Обработка колоссального количества статистических данных потребует использования самых совершенных вычислительных машин.

Главная трудность применения предлагаемой теории — это практическое составление критериальных, а также производственных и потребительных функций.

Однако и теоретически и практически эта задача разрешима, и она, несомненно, будет решена объединенными усилиями инженеров, экономистов и. математиков.

Безусловно, принцип согласованного оптимума никогда в полной мере не будет реализован. Он был и останется абстракцией, к которой общество лишь монотонно может приближаться. Но здесь, как и в любом другом явлении, безусловно, скажется Пороговый Эффект.

Установление согласованного оптимума требует абсолютного интеллекта, т. е. бесконечной глубины рефлексии от субъектов, участвующих в конфликте. Интеллект человека, не вооруженного знанием математики, и не оснащенного измерительной и вычислительной техникой, ограничен вследствие закона о невозможности превышения удвоенного среднего (см. приложение 4). Статистические обследования [44] дали следующую картину распределения интеллекта в человеческом обществе (рис. 1). Согласно статистике, в обществе преобладают люди со средними способностями и имеются сравнительно небольшие доли людей с повышенными интеллектуальными способностями вплоть до «гениев» и пониженными интеллектуальными способностями вплоть до «идиотов».

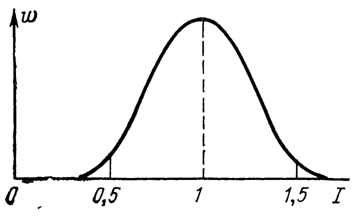

Рис. 1. Распределение интеллекта в человеческом обществе.

Мы не будем здесь касаться вопросов о способах измерения интеллекта: в настоящее время этим занимаются психологи и медики. Мы ограничимся утверждением, что интеллект, как и любая другая «физическая» величина, в принципе измерим *.

При объединении людей в коллективы их интеллекты не складываются арифметически. Н. Винер утверждал даже, что «государство глупее, чем большинство

---

* Простейшая формула связывает количество интеллекта субъекта I с числом партий n, за которые данный субъект обучается

$$I = \sqrt[n]{2} - 1.$$

Согласно этой формуле, люди, обучающиеся с одной партии, имеют 100% интеллекта, с двух партий — 41%, с трех партий — 26%, с четырех партий — 19% и т. д. Практически полноценные субъекты должны обучаться за одну — две — три партии.

его членов»*. Будем надеяться, что это все же не так. Скорее следует считать правильными слова К. Маркса: «Учреждения более могущественны, чем люди».

Коллективное действие в принципе несомненно эффективнее индивидуального. Сила коллектива в том, что информация каждого становится достоянием всех. Сила коллектива может быть больше или меньше суммы сил его членов в зависимости от того, имеется ли у всех членов коллектива единая цель. В коллектив объединяются люди со сходными интересами. Взаимная поддержка и взаимопомощь людей в коллективе проистекает из наличия общих интересов. Законы борьбы за существование побуждают людей объединяться в коллективы.

Механическое объединение людей с целевыми функциями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}), \ldots, J_n=f_n(\mathbf{x})$$

в коллектив приводит к арифметическому сложению их целевых функций

$$J=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}).$$

Дифференцируя эти функции по всем аргументам, получаем

$$dJ=\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x}\right),$$

где

$$\xi_i(\mathbf{x})=\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}.$$

Обозначив

$$\xi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}),$$

получим

$$dJ=(\xi(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x}).$$

Вектор, ортогональный вектору $\xi(\mathbf{x})$, определяет направление интересов коллектива, а сам вектор $\xi(\mathbf{x})$ представляет собой векторную сумму векторов $\xi_i(\mathbf{x})$,

---

* См. Винер Н. [9, с. 200].

ортогональных векторам интересов членов коллектива. Таким образом, *сложение интересов участников коллектива можно рассматривать как обычное сложение векторов.* Ясно, что при сложении близко направленных векторов можно получить вектор, «длина» которого превышает «длину» векторов-слагаемых, а при сложении векторов, направленных в противоположные стороны, можно получить вектор, «длина» которого меньше «длины» каждого из слагаемых. Точно так же происходит и сложение сил субъектов в силу коллектива. Силу коллектива можно отождествить с «длиной» его вектора интересов, конечно, не понимая «длину» в смысле Эвклида — как сумму квадратов «длин» компонентов. «Метрика» взаимодействия участников коллектива, безусловно, сложнее механического сложения их физических сил.

Искусство создания сильных коллективов, направленных на решение определенных задач, сводится к подбору субъектов, векторы интересов которых направлены на решение данных задач или их составных частей. Именно это искусство применительно к подбору команд парусных кораблей привело древнегреческого философа Платона (427—347 гг. до н. э.) к созданию науки об управлении — кибернетики [1].

Современное общество испытывает острый дефицит умственной энергии, потому что потребности в умственной энергии, грубо говоря, растут пропорционально квадрату физической энергии, находящейся в руках человечества. Этот дефицит преодолевается благодаря использованию кибернетических машин, появившихся впервые в середине нашего века и получивших сейчас широкое распространение. Освобождая человека от однообразного умственного труда для подлинного творчества, кибернетика способствует разрешению «кризиса мысли» и сплочению человеческого общества в единый коллектив.

Математика, измерительная и вычислительная техника, вместе взятые, в пределе оснащают человечество абсолютным интеллектом, обладание которым является необходимой предпосылкой гармонии человеческих отношений.

Мыслящие машины! Что это — праздная забава или жизненная необходимость? Ответ на этот вопрос дает основная теорема Шеннона [43]. В несколько свободной формулировке она гласит:

Если поток информации превышает пропускную способность каналов связи некоторой системы с внешней средой, то в этой системе нельзя избежать такого накопления ошибок, которое полностью исказит представление этой системы о внешней среде.

Именно на этой теореме основан вывод кибернетики о том, что недостаточность пропускной способности мозга отрицательно сказывается на способности любого самого гениального человека полностью перерабатывать запасы и катастрофически возросшие потоки жизненно важной информации.

Решение жизненно важных проблем должно происходить в реальном времени, и всякая отсрочка принятия решений связана с невозвратимыми потерями. Кибернетики видят единственную возможность решения этого противоречия в создании искусственного интеллекта, превосходящего по своим возможностям человеческий.

Следует оговориться, что универсальный искусственный интеллект, если понимать под *универсальным интеллектом системы ее способность к оптимальному поведению в любой ситуации* *, по-видимому, никогда не будет создан. Сошлемся опять на работу [2, с. 11], где говорится: «Сложность систем, с которыми имеет дело кибернетика, обусловлена не только большим количеством образующих систему элементов, но и разнородностью этих элементов, разнообразием взаимодействий между ними, сложностью организации системы. Эта принципиальная сложность и разнообразие кибернетических систем, по-видимому, делают невозможным использование единой математической теории в кибернетике». Из невозможности построения единой математической теории в кибернетике следует и невозможность построить машину с универсальным интеллектом, ибо без математической теории ни одна машина интеллекта иметь не будет.

Правда, на создание машины с универсальным интеллектом претендует теория распознавания образов. Но машины, построенные на принципах теории распо-

* Именно такое определение интеллекта дано в [2, с. 137].

знавания, имеют только возможность приобретения интеллекта, т. е. способность к обучению, а не сам интеллект. Универсальные распознающие машины мыслятся как машины, классифицирующие ситуации путем разложения их на элементарные двоичные признаки. Возможности машин, распознающих «образы» путем разложения их на элементарные двоичные признаки, приобрести универсальный интеллект соответствуют потугам некоторых математиков заменить математической логикой все дерево современной математики с ее бесконечным разнообразием методов — речь идет о так называемом «дискретном анализе». Различие между теоретической возможностью и практической целесообразностью этого такое же, как различие между «потенциальной» и «актуальной» бесконечностями. Претензии математической логики на универсальность оправдывались бы только в том случае, если бы для большинства проблем кибернетики не существовали гораздо более сильные математические средства, специально приспособленные для решения определенного узкого круга задач. А поскольку такие средства существуют, то математической логике уготована в кибернетике гораздо более скромная роль, чем многим другим теориям, в частности теории игр.

Что касается теории распознавания образов, то ей предстоит большое будущее в создании специализированных обучающихся машин, способных приобретать интеллект, т. е. способность к оптимальному поведению в ограниченном классе ситуаций. Если универсальные обучающиеся машины требуют обучающей информации в виде образцов оптимального поведения, которых, в общем-то, взять неоткуда*, то специализированные обучающиеся машины, в которых заложен критерий оптимальности поведения, сами демонстрируют улучшающееся поведение без помощи извне**.

В тех ситуациях, в которых известен не только критерий оптимальности поведения, но известно само опти-

---

* См., например, работу [37].

** Именно такие машины описаны в работе Я. З. Цыпкина [7]. Возможность ускорения обучения в них благодаря использованию градиентных методов («стохастическая аппроксимация») обусловлена аналитичностью критериальных функций, описывающих состояние управляемых объектов, и предполагаемой аналитичностью поверхностей раздела между распознаваемыми ситуациями разных классов (принцип «компактности» образов Э. М. Бравермана [36]).

мальное поведение, применять обучающиеся машины вообще нет смысла, ибо техническая реализация известного алгоритма оптимального поведения, как правило, проще реализации алгоритма обучения данному алгоритму поведения.

Возможности оптимального поведения машин в ограниченных классах ситуаций реализуются по мере разработки алгоритмов оптимального поведения для различных ситуаций. Такая работа в теоретической кибернетике происходит непрерывно, и математический арсенал кибернетики год от года пополняется новыми достижениями.

«Используемые в настоящее время кибернетикой представления являются простейшими из возможных — в основном это линейные статические и динамические модели и простейшие вероятностные схемы. Можно ожидать в ближайшее время появления новых теорий и алгоритмов, расширяющих сферу эффективного применения кибернетики. Чрезвычайно актуальным является создание нелинейных и комбинаторных вероятностных моделей, которые позволят глубже отражать закономерности реальных явлений» *.

Описываемый в данной работе комплекс ситуаций — аналитические игры с непротивоположными интересами участвующих в них субъектов, для которых найдены оптимальные решения в виде нелинейных алгебраических уравнений, легко разрешимых различными вычислительными методами (например, известным с XVII в. методом «секущих» Исаака Ньютона, методами наискорейшего спуска ** или методом «оврагов» ***), — расширяет сферу действия искусственного интеллекта на очень широкую область экономики, социологии, психологии, юриспруденции, медицины и техники.

Если бы удалось на практике осуществить (по разработанным алгоритмам) глобальную оптимизацию экономики, то это было бы таким благом для людей, которое равносильно достижению всеобщего изобилия материальных благ, т. е. переходу к следующей стадии общественного развития — к коммунистическому строю.

---

* См. Волгин Л. Н. [2, с. 155].

** См. обзорную работу Л. В. Канторовича [39] или гл. 4 нашей работы [2, с. 54—56].

*** См. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. [38].

Основное содержание данной работы состоит *в объективном изучении субъективных факторов.* Изучение субъективного мира методами кибернетики — это не субъективизм. В век ядерных угроз, когда в распоряжении отдельных субъектов сконцентрированы силы, способные подвергнуть уничтожению все живое на Земле, пренебречь изучением субъективных факторов было бы преступлением.

Состояние, в котором находится сейчас человечество, не может быть разумно осмыслено без кибернетических машин.

Использование кибернетики в мирных целях, для улучшения международных отношений и разумного управления миром — назревающая задача, решение которой будет возможно в недалеком будущем *.

Физическая энергия, находящаяся сейчас в распоряжении человечества, гораздо сильнее умственной. Необходимо восстановить равновесие!

---

* Автор (как здесь, так и в других местах книги) явно переоценивает значение кибернетики (как и всякой другой науки) в решении таких глобальных задач, как разумное переустройство мира. Кроме математических истин существует, к сожалению, еще и классовая борьба, и здесь более сильными, чем наука и ученые, являются эгоистические интересы господствующих классов. Осуществить это переустройство на практике — гораздо труднее, чем нам этого хотелось бы. Надо иметь в виду, что в эволюционном смысле человечество (если не считать лучших представителей рода человеческого) не так далеко ушло от своего первобытного состояния, как это нам кажется. Однако не надо впадать и в другую крайность и не верить в исправление человеческой природы. Подобно тому, как развитые страны прекрасно научились регулировать деторождение (мысль крамольная для первобытного дикаря), так же люди научатся и жить по науке, без войн, виселиц и прочих «прелестей» старого мира, связанных с эксплуатацией человека человеком. (*Прим. ред.*)

Часть первая

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГР

Математика есть азбука философии.

Роджер Бэкон

1. Субъект и его целевая функция

Теория игр изучает поведение разумных существ. Математической абстракцией от понятия «разумное существо» является термин — *«субъект»*. Понятия «субъект» и «объект» кибернетика позаимствовала у философии, вложив в них свое более строгое содержание. Субъект отличается от объекта наличием собственных интересов. Эти интересы выражаются *целевой функцией* *

$$J=f(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

к максимальному значению которой стремится каждое разумное существо.

Аргументом этой функции является *ситуация* $\mathbf{x}$, которая характеризуется набором *параметров* $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n).$$

В качестве параметров ситуации могут выступать различные характеристики действий субъекта. Мы будем говорить, что субъект S обладает *свободой выбора* параметров $\mathbf{x}$, если существует область X, такая что любое значение $\mathbf{x}$ из этой области $\mathbf{x}\in X$ может быть реализовано субъектом. При этом мы будем различать мысленный выбор, когда субъект в уме прикидывает различные значения $\mathbf{x}$ и оценивает соответствующие им значения функции J, от реального выбора, когда субъект осуществляет свой выбор $\mathbf{x}$ в реальности. Случай,

---

* Синонимами термина «целевая функция» являются: 1) критерий, 2) функция полезности, 3) функция предпочтения, 4) функция выигрыша и т. д.

когда субъект лишен реальной свободы выбора, не рассматривается в теории игр.

Математическая теория игр базируется на предположении, что функция (1.1) есть числовая функция, каждое значение которой есть просто число. Это значит, что состояние субъекта может быть оценено количественно.

Аналитическая теория игр исходит из предположения, что целевая функция субъекта (1.1) есть *аналитическая функция*, т. е. функция, которая в каждой точке $\mathbf{x}_0$ области X может быть разложена в сходящийся степенной ряд вида

$$f(\mathbf{x}) = a_0 + (\mathbf{a}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \ldots,$$

где

$$a_0 = f(\mathbf{x}_0); \quad \mathbf{a}_1 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0); \quad \mathbf{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}_0), \ldots$$

С целью упрощения записи здесь приняты следующие обозначения: символом $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ обозначено «скалярное произведение» векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

символом $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ обозначен вектор градиента функции f:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}_1^n,$$

символом $\mathbf{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}$ обозначена матрица:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right\}_1^n,$$

а под произведением матрицы на вектор $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ понимается вектор с компонентами b_i, равными

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

Еще одно ограничивающее предположение состоит в том, что значения аргументов функции (1.1), а также значение самой функции есть реальные (действительные) числа.

2. Максимальная удовлетворенность

Целевая функция субъекта выражает степень его удовлетворенности. Точка, в которой достигается максимальное значение этой функции, называется *оптимальной точкой* для данного субъекта. Согласно известной теореме немецкого математика К. Вейерштрасса (1815—1897), для любой аналитической функции такая точка существует.

В математике различают точки локального и глобального максимумов. Точка x_ν называется *точкой локального максимума* функции (1.1), если для всех точек $\mathbf{x}$, лежащих в достаточно малой окрестности точки x_ν:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\nu\|<\varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$f(\mathbf{x})\leqslant f(\mathbf{x}_\nu).$$

Здесь $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_\nu\|$ — это „расстояние" между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_\nu$, которое может быть задано различными способами.

Необходимым условием того, чтобы точка $\mathbf{x}$ была точкой локального максимума аналитической функции (1.1), является равенство нулю полного дифференциала этой функции в точке $\mathbf{x}$:

$$dJ=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}},\ d\mathbf{x}\right)=0.$$

Если все параметры x_i независимы, то их приращения dx_i произвольны и, приравнивая нулю все частные производные от f, мы получаем систему из n уравнений с n неизвестными

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=0,$$

решение которой дает всѐ локально экстремальные точки *.

Отбор точек локального максимума среди них может быть произведен по достаточному условию локального

---

* К экстремальным точкам относятся не только точки максимума, но и точки минимума, точки перегиба функции, «седловые» точки и т. д.

максимума, опирающемуся на критерий Сильвестра *, требующий чередования знаков главных миноров матрицы вторых производных

$$\mathbf{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}$$

в проверяемой точке. Другими словами, критерий Сильвестра требует выполнения неравенств

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_3} \end{vmatrix} < 0,$$

. . . .

Среди отобранных таким образом точек локального максимума x_ν существует одна точка $\mathbf{x}^*$, которая дает наибольшее значение функции f (так называемый «максимум максиморум»):

$$f(\mathbf{x}^*) = \max_\nu f(\mathbf{x}_\nu).$$

Эта точка называется точкой *глобального* максимума.

Целью кибернетики, частью которой является теория игр, является, как правило, нахождение глобального максимума (или глобального минимума). Оно часто осуществляется путем двухэтапной процедуры, на первом этапе которой находятся все локально оптимальные точки, а на втором — среди них выбирается глобальный оптимум.

3. Задача планирования

Выше мы рассматривали задачу о нахождении максимума функции (1.1) в неограниченном пространстве.

---

* Джемс Джозеф Сильвестр (1814—1897) — английский математик.

На практике допустимая область выбора X часто определяется системой ограничений вида

$$g_j(\mathbf{x}) = b_j \quad (j=1, \ldots, m),$$

которую можно записать просто как

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{3.1}$$

Величины $\mathbf{b}$ мы будем интерпретировать как *ресурсы*, находящиеся в распоряжении субъекта S. Обозначим через λ пока не определенный набор стоимостей ресурсов $\mathbf{b}$.

При наличии ограничений (3.1) величина критерия (1.1) уменьшается на величину общей стоимости ресурсов (так называемая «функция Лагра́нжа»)

$$L = f(\mathbf{x}) - (\lambda, \mathbf{g}).$$

Максимизируя это уменьшенное количество *

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} \lambda = 0, \tag{3.2}$$

получаем систему из $(n+m)$ уравнений (3.1) и (3.2) относительно такого же числа неизвестных $\mathbf{x}$ и λ. Решая эту систему, получаем точку оптимума $\mathbf{x}^*$, лежащую на многообразии (3.1), и соответствующие ей стоимости ресурсов λ^*. Можно показать, что

$$\lambda^* = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{b}}(\mathbf{x}^*).$$

Таким образом, величины λ_j показывают, насколько возрастает целевая функция субъекта при единичном приросте соответствующего ресурса b_j.

В том случае, когда ограничения на ресурсы имеют вид неравенств $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{b}$, их можно заменить равенствами, вводя в рассмотрение неиспользованные остатки ресурсов ε:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \varepsilon = \mathbf{b}, \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

Составляя функцию Лагранжа

$$L = f(\mathbf{x}) - (\lambda, \mathbf{g}) - (\lambda, \varepsilon)$$

и вычисляя

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = -\lambda,$$

---

* Знак $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ означает транспонирование матрицы $\mathbf{A}$, т. е. замену ее строк столбцами: $\{a_{ik}\}^{\mathrm{T}} = \{a_{ki}\}$.

мы должны потребовать, чтобы величина каждого остатка ε_j была оптимальной. Это значит следующее.

1. Если остаток действительно имеет место, т. е. $\varepsilon_j>0$, то оптимальное значение этого остатка должно максимизировать L, т. е. должно выполняться условие

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j}=0,$$

откуда следует $\lambda_j=0$.

2. Остаток должен браться равным нулю $\varepsilon_j=0$, если появление остатка приводит к уменьшению целевой функции, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j}<0, \text{ что дает } \lambda_j>0.$$

Таким образом, субъективную цену $\lambda_j>0$ имеют только те виды ресурсов, которые исчерпываются полностью. Если же с точки зрения данного субъекта оптимально использовать лишь часть имеющегося в его распоряжении ресурса b_j, то субъективная цена оставшейся части ресурса ε_j имеет для него нулевое значение.

Описанная ситуация была рассмотрена впервые в 1951 г. американскими математиками Г. У. Куном и А. В. Таккером [45]. Выведенное ими условие $\lambda \geqslant 0$ носит название *теоремы Куна — Таккера.*

Для решения задачи планирования, т. е. задачи максимизации (1.1) при наличии ограничения

$$J=f(\mathbf{x})\rightarrow \max, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x})\leqslant \mathbf{b},$$

существуют многочисленные вычислительные приемы, рассмотрение которых не входит в нашу задачу*.

4. Понятие аналитической игры

Совокупность взаимодействующих субъектов образует *общество*. Рассмотрим общество, состоящее из n лиц, $S_1, \ldots, S_n$. Взаимодействие субъектов заключается в том, что выигрыш каждого из них зависит не только от того, какой выбор произвел данный субъект, но и от выборов, сделанных всеми остальными субъектами. Это означает, что ситуация игры $\mathbf{x}$ распадается на n на-

---

* См., например, книги Денниса Д. Б. [11] и Кюнци Г. П., Крелле В. [14].

боров:

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

где $\mathbf{x}_i$ есть набор параметров, контролируемых игроком S_i.

Каждый из участников игры имеет свою целевую функцию, отличную от целевых функций других участников игры. Обозначим целевые функции участников игры через

$$J_1=f_1(\mathbf{x}), \ldots, J_n=f_n(\mathbf{x}).$$

Предполагается, что каждый из игроков обладает свободой выбора набора параметров $\mathbf{x}_i$ из допустимой области X_i

$$\mathbf{x}_i \in X_i \quad (i=1, \ldots, n).$$

Игрой называется ситуация, в которой по крайней мере два из ее участников обладают некоторой свободой выбора. Игра двух лиц является простейшей из игр.

Игра n лиц называется *антагонистической* или игрой с противоположными интересами, если целевые функции ее участников подчинены ограничению

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})=0.$$

Это значит, что сумма выигрышей одной части игроков равна сумме проигрышей другой части.

Антагонистические игры можно рассматривать как предельный случай *неантагонистических* игр или игр с непротивоположными интересами.

Другим предельным случаем являются игры с *параллельными* интересами всех участников

$$J_i=\lambda_i J_n+\gamma_i, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i=1, \ldots, n-1).$$

В игре с параллельными интересами полные дифференциалы целевых функций участников игры пропорциональны

$$dJ_i=\lambda_i dJ_n \quad (i=1, \ldots, n-1).$$

Таким образом, выполнение условия оптимальности $dJ_i=0$ хотя бы для одного из участников такой игры автоматически означает выполнение этого условия для всех ее участников

$$dJ_j=0 \quad (i=1, \ldots, n).$$

Поэтому решение игр с параллельными интересами сводится к обычной задаче планирования.

Игра называется *аналитической*, если целевые функции всех ее участников являются аналитическими функциями. Наше исследование ограничено только этим случаем.

5. Равновесие в игре

В отличие от ситуации, имеющей место в задаче планирования, *оптимума в классическом смысле в игре вообще нет*: то, что оптимально для одного из ее участников, не оптимально для остальных.

Функции, определяющие выбор данного игрока в зависимости от выборов его партнеров, называются *реакциями* игроков. Обозначим реакции игроков через

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = \varphi_1(\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{x}_n = \varphi_n(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}). \end{array}\right\} \qquad (5.1)$$

Эти уравнения дают определенную систему уравнений *, которая может иметь или не иметь решения. Если реакции игроков пересекаются в точке $\mathbf{x}^*$, т. е. система уравнений (5.1) имеет решение, то это решение называется точкой *равновесия* игры.

Равновесие бывает устойчивым и неустойчивым. Для того чтобы определить эти понятия, рассмотрим те мыслительные процессы, которые совершают участники игры, прежде чем сделать свой реальный выбор.

Рассмотрим простейшую аналитическую игру двух лиц с целевыми функциями, зависящими от двух простых параметров **

$$J_1 = f_1(x_1, x_2); \qquad J_2 = f_2(x_1, x_2),$$

где x_1 — параметр, выбираемый игроком S_1, а x_2 — параметр, выбираемый игроком S_2.

Предположим, что оба игрока тем или иным способом определили свои реакции на поведение партнера:

$$x_1 = \varphi_1(x_2); \qquad x_2 = \varphi_2(x_1). \qquad (5.2)$$

---

* *Определенной* называется система, в которой число неизвестных равно числу уравнений.

** *Простым* называется параметр, описываемый одним действительным числом.

В мозгу игрока S_1 происходит следующий мыслительный процесс: если я выберу значение $x^0{}_1$, то мой партнер S_2 выберет значение $x^1{}_2=\varphi_2(x^0{}_1)$; следовательно, я должен выбрать $x^2{}_1=\varphi_1(x^1{}_2)=\varphi_1[\varphi_2(x^0{}_1)]$, на что партнер отреагирует выбором $x^3{}_2=\varphi_2(x^2{}_1)= =\varphi_2(\varphi_1[\varphi_2(x^0{}_1)])$, и т. д. Таким образом, мышление игрока S_1 описывается следующим итеративным процессом:

$$x_1^{2i}=\varphi_1(x_2^{2i-1});\quad x_2^{2i+1}=\varphi_2(x_1^{2i})\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

который после бесконечного числа итераций приводит, как правило, к точке

$$x^*{}_1=\underbrace{\varphi_1\,[\varphi_2\,(\ldots\,\varphi_1\,[\varphi_2}_{\infty}\,(x^0{}_1)])\,\ldots],$$

$$x^*{}_2=\underbrace{\varphi_2\,[\varphi_1\,(\ldots\,\varphi_2}_{\infty}\,(x^0{}_1)])\,\ldots],$$

являющейся точкой равновесия игры и удовлетворяющей условиям

$$x^*{}_1=\varphi_1(x^*{}_2),\qquad x^*{}_2=\varphi_2(x^*{}_1).$$

Заметим, что финальная точка такого процесса не зависит от начального выбора.

Аналогичными рассуждениями будет пользоваться и второй игрок S_2, который независимо от своего начального выбора $x^0{}_2$ также придет к точке равновесия $(x^*{}_1,\ x^*{}_2)$.

Мы описали последовательность попеременных мысленных выборов. Можно представить себе мыслительный процесс с одновременными мысленными выборами, описываемый уравнениями

$$x_1^{i+1}=\varphi_1(x^i{}_2),\qquad x_2^{i+1}=\varphi_2(x^i{}_1)\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\qquad (5.3)$$

Этот процесс происходит одновременно в мозгу обоих игроков, каждый из которых, задаваясь предположительными начальными состояниями своего партнера $x^0{}_2$ и $x^0{}_1$, вычисляет свои ответные действия из уравнений

$$x^1{}_1=\varphi_1(x^0{}_2),\qquad x^1{}_2=\varphi_2(x^0{}_1).$$

После этого игроки обмениваются между собой информацией о своих предположительных ответных действиях и вычисляют новые их значения

$$x^2{}_1=\varphi_1(x^1{}_2),\quad x^2{}_2=\varphi_2(x^1{}_1),$$

Таким образом, процесс описывается итерациями (5.3) и сходится к той же самой точке равновесия (x^*_1, x^*_2).

Если на каждом шаге мысленных итераций игроки будут обмениваться информацией о своих предположительных выборах, то они могут не знать реакции своего партнера.

Мыслительные процессы, происходящие в сознании игроков, можно изображать графически (рис. 2).

На этом графике реакции субъектов S_1 и S_2 отложены «ортогонально» одна другой. Точка пересечения этих реакций является точкой равновесия. Направленная ломаная линия изображает мыслительный процесс, происходящий в мозгу одного из участников игры.

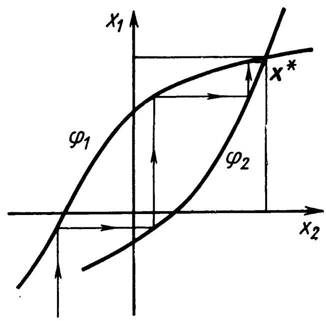

Рис. 2. Реакции субъектов и мыслительные процессы в их сознании (x* — точка равновесия).

Теперь мы можем дать определения понятий устойчивого и неустойчивого равновесия. Точка $\mathbf{x}^*$ называется точкой *устойчивого* равновесия, если процесс, начинающийся из точки $\mathbf{x}^0$, находящейся в окрестности точки $\mathbf{x}^*$

$$\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|<\varepsilon$$

сходится к точке $\mathbf{x}^*$

$$\lim_{i\to\infty}\mathbf{x}^i=\mathbf{x}^*,$$

и точкой *неустойчивого* равновесия, если такой сходимости нет.

Пример на пересечение двух реакций с точками устойчивого и неустойчивого равновесия приведен на рис. 3.

Пользуясь (5.2), условия, определяющие точку равновесия, можно представить в виде

$$x_1=\varphi_1[\varphi_2(x_1)],\qquad x_2=\varphi_2[\varphi_1(x_2)].$$

Функции $\varphi=\varphi_1[\varphi_2]$ и $\psi=\varphi_2[\varphi_1]$ называются функциями *воспроизведения* выбора. В точке равновесия выборы воспроизводятся

$$x^*_1=\varphi(x^*_1),\qquad x^*_2=\psi(x^*_2).$$

Итеративные процессы, которые приводят в точку равновесия, можно представить в виде

$$x_1^{i+1}=\varphi(x^i_1),\ x_2^{i+1}=\psi(x^i_2)\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Условия, при которых точка $\mathbf{x}^*$ является точкой устойчивого равновесия, имеют вид

$$|\varphi'(x^*)|<1, \qquad |\psi'(x^*)|<1.$$

Нетрудно показать, что выполнение хотя бы одного из этих условий автоматически влечет за собой выполнение и другого.

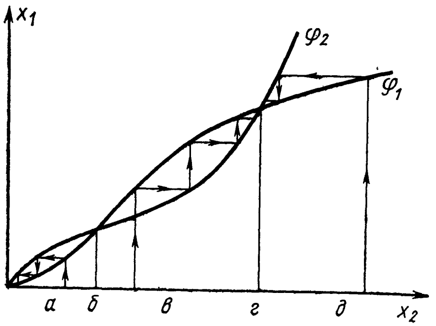

Рис. 3. Типичные реакции людей:

а — зона нечувствительности; *б* — порог сближения; *в* — зона прогрессивного развития отношений; *г* — точка устойчивого равновесия; *д* — зона насыщения.

Условие устойчивости равновесия можно выразить и через функции φ_1 и φ_2. Оно принимает вид

$$|\varphi'_1(x^*_2)|\cdot|\varphi'_2(x^*_1)|<1.$$

Будем обозначать функцию, обратную к φ, через φ_{-1}. Это значит, что из $y=\varphi(x)$ следует $x=\varphi_{-1}(y)$. Пользуясь этим обозначением, условие того, что точка $\mathbf{x}^*$ является точкой равновесия, можно записать в виде

$$\varphi_1(x^*_2)=[\varphi_2]_{-1}(x^*_2)$$

или

$$\varphi_2(x^*_1)=[\varphi_1]_{-1}(x^*_1),$$

а условие устойчивости равновесия можно представить в виде

$$|\varphi'_1(x^*_2)|:|[\varphi_2]'_{-1}(x^*_2)|<1$$

или

$$|\varphi'_2(x^*_1)|:|[\varphi_1]'_{-1}(x^*_1)|<1.$$

6. Принцип «каждому — свое»

В игре n лиц, описываемой уравнениями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}),\ \ldots,\ J_n=f_n(\mathbf{x}),$$

субъекты $S_1, \ldots, S_n$ могут руководствоваться различными стратегическими принципами. Простейшим из них является знаменитый принцип «suum cuique»*, означающий, что каждый из участников игры стремится к максимизации своей целевой функции, действуя независимо от остальных. Реализация этого принципа всеми игроками приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1}=0, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}_n}=0.$$

Это определенная система уравнений, однозначно определяющая реакции игроков (5.1) и приводящая игру к некоторой точке равновесия, называемой точкой *несогласованного оптимума*. Точка несогласованного оптимума не является самой оптимальной точкой, но она является точкой равновесия, и к ней будет сходиться игра, если каждый из игроков будет действовать независимо от других.

Принцип «каждому свое» реализует лишь часть возможного максимального выигрыша каждым из игроков. Для того чтобы доказать это, рассмотрим сепарабельные целевые функции

$$J_i=\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(\mathbf{x}_k) \quad (i=1, \ldots, n).$$

Дифференцирование функции J_i по параметру $\mathbf{x}_i$ означает максимизацию только одного члена из этой суммы, а именно «главного эффекта» $f_{ii}(\mathbf{x}_i)$. Таким образом, каждый из игроков, действующих по принципу «каждому — свое», ограничивается максимизацией только не зависящей от действий других части своего выигрыша, не пытаясь получить максимального эффекта от взаимодействия с другими участниками игры.

7. Вектор интересов

Игрок S, имеющий аналитическую целевую функцию

$$J=f(\mathbf{x}) \tag{7.1}$$

* «Suum cuique» (лат.) — «каждому — свое».

и находящийся в начальном состоянии $\mathbf{x}^0$, может вычислить значение этой функции в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ с помощью ряда

$$J = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right) + \ldots$$

Вектор градиента

$$\xi(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)$$

указывает направление, в котором функция (7.1) убывает быстрее всего, а ортогональный ему вектор $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$

$$(\xi(\mathbf{x}^0),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0$$

характеризует направление, в котором целевая функция (7.1) убывает медленнее всего, т. е. *направление интересов* субъекта S.

Два игрока с целевыми функция $J_1 = f_1(x_1, x_2)$, $J_2 = f_2(x_1, x_2)$, находящиеся в мысленных начальных состояниях $\mathbf{x}^0_1$ и $\mathbf{x}^0_2$, имеющие в этих точках градиенты целевых функций

$$\xi_1(\mathbf{x}^0_1) = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0_1), \quad \xi_2(\mathbf{x}^0_2) = \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0_2)$$

и вычислившие направления своих векторов интересов, могут искать общую точку на пересечении их векторов интересов. Эта точка соответствует решению следующей линейной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\xi_1(\mathbf{x}^0_1),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0_1) = 0,\\ (\xi_2(\mathbf{x}^0_2),\ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0_2) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Обозначим ее через $\mathbf{x}^1$ (рис. 4).

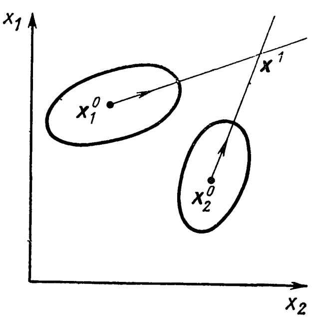

Рис. 4. Точка пересечения векторов интересов.

Полученная точка $\mathbf{x}^1$ не является оптимальной, потому что интересы каждого субъекта от точки к точке меняются.

Вычисление новых значений градиентов в точке $\mathbf{x}^1$

$$\xi_1(\mathbf{x}^1) = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}'), \qquad \xi_2(\mathbf{x}^1) = \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^1)$$

само по себе ничего не дает, потому что векторы $\xi_1(\mathbf{x}^1)$ и $\xi_2(\mathbf{x}^1)$ пересекаются в точке $\mathbf{x}^1$. Для того чтобы сделать следующий шаг к оптимуму, надо выбрать в достаточно малой окрестности U_1 точки $\mathbf{x}^1$ две новые точки $\mathbf{x}^1{}_1$ и $\mathbf{x}^1{}_2$. Вычислив в них значения градиентов $\xi_1(\mathbf{x}^1{}_1)$ и $\xi_2(\mathbf{x}^1{}_2)$, мы можем перейти в следующую точку, удовлетворяющую уравнениям,

$$\left.\begin{aligned}(\xi_1(\mathbf{x}^1{}_1),\ \mathbf{x}-\mathbf{x}^1{}_1)=0,\\ (\xi_2(\mathbf{x}^1{}_2),\ \mathbf{x}-\mathbf{x}^1{}_2)=0.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, мы определили итерационный процесс

$$\left.\begin{aligned}(\xi_1(\mathbf{x}^i{}_1),\ \mathbf{x}^{i+1}-\mathbf{x}^i{}_1)=0,\\ (\xi_2(\mathbf{x}^i{}_2),\ \mathbf{x}^{i+1}-\mathbf{x}^i{}_2)=0,\end{aligned}\right\}$$

который при соответствующих выборах окрестностей U_i в конце концов приведет нас в точку, удовлетворяющую условиям

$$\left.\begin{aligned}dJ_1=(\xi_1(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x})=0,\\ dJ_2=(\xi_2(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x})=0.\end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

Полученная точка называется точкой *согласованного оптимума.*

8. Согласованный оптимум в отношениях двух игроков с бесконечной глубиной рефлексии

Участвующие в игре субъекты S_1 и S_2 могут определять свои реакции

$$x_1=\varphi_1(x_2), \qquad x_2=\varphi_2(x_1)$$

из самых различных, в том числе и из так называемых «принципиальных» соображений, но, по-видимому, самым распространенным принципом выбора реакции является максимизация личной целевой функции, исходя из определенного представления о реакции партнера.

Обозначим через

$$x_1=\tilde{\varphi}_1(x_2),\ x_2=\tilde{\varphi}_2(x_1)$$

представления игроков о реакции своего партнера.

Исходя из этих представлений и руководствуясь принципом максимальной личной выгоды, игроки S_1 и S_2 будут выбирать свои реакции согласно уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{dJ_1}{dx_1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{d\tilde{\varphi}_2}{dx_1}=0,\\ \frac{dJ_2}{dx_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{d\tilde{\varphi}_1}{dx_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

Полученные уравнения неявно определяют истинные значения реакций игроков S_1 и S_2, неизвестные партнеру.

Случай, когда истинные реакции игроков, получаемые из уравнений (8.1), совпадают с представлениями о них у партнеров

$$x_1 = \varphi_1(x_2) = \tilde{\varphi}_1(x_2), \qquad x_2 = \varphi_2(x_1) = \tilde{\varphi}_2(x_1),$$

называется *согласованным оптимумом.* Это второе независимое определение согласованного оптимума.

Рассматриваемые нами исключительно эгоистические субъекты, исходящие из критериев максимальной личной выгоды, но принимающие во внимание то обстоятельство, что партнер руководствуется теми же принципами и рассчитывает свои действия с бесконечной глубиной рефлексии *

$$x_1 = \underbrace{\varphi_1[\varphi_2(\varphi_1 \ldots \varphi_2[\varphi_1}_{\infty}(x_2)]) \ldots],$$

$$x_2 = \underbrace{\varphi_2[\varphi_1(\varphi_2 \ldots \varphi_1[\varphi_2}_{\infty}(x_1)]) \ldots],$$

примут принцип согласованного оптимума как идеальное решение игры.

Подставляя в уравнения (8.1) вместо представлений о реакциях истинные функции x_1 и x_2, мы получаем систему из двух уравнений, определяющую оптимальные согласованные реакции партнеров по игре

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения можно записать как уравнения в полных дифференциалах

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 = 0, \\ dJ_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

* Бесконечная глубина рефлексии соответствует абсолютному интеллекту субъектов.

Таким образом, дав другое определение согласованного оптимума, чем в предыдущем разделе, мы получили те же самые уравнения, определяющие точку согласованного оптимума, что и уравнения (7.2).

Частные производные

$$\xi_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i,\ j=1,\ 2),$$

выражающие прирост удовлетворенности субъектов S_1 и S_2 от единичного приращения факторов x_1 и x_2, называются *субъективными оценками полезности* факторов x_1 и x_2 для субъектов S_1 и S_2 в точке $\mathbf{x}$.

Учитывая эти обозначения, уравнения согласованного оптимума (8.2) можно записать так

$$\left.\begin{aligned} dJ_1&=\xi_{11}dx_1+\xi_{12}dx_2=0, \\ dJ_2&=\xi_{21}dx_1+\xi_{22}dx_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения представляют собой однородную систему двух линейных уравнений относительно полных дифференциалов dx_1 и dx_2. Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая этот определитель, получим

$$\xi_{12}\xi_{21}=\xi_{11}\xi_{22}.$$

Таким образом, *в точке согласованного оптимума произведение взаимных оценок субъектов S_1 и S_2 равно произведению их самооценок.*

Условия (7.2) означают, что в точке согласованного оптимума векторы интересов, а следовательно, и векторы оценок полезностей обоих участников игры параллельны (коллинеарны)

$$\xi_1=\lambda\xi_2.$$

Расписывая это равенство покоординатно, получаем

$$\xi_{11}(x_1,\ x_2)=\lambda\xi_{21}(x_1,\ x_2), \quad \xi_{12}(x_1,\ x_2)=\lambda\xi_{22}(x_1,\ x_2).$$

Мы получили неявное уравнение *линии согласованного оптимума,* которую можно представить также и в параметрическом виде

$$x_1=x_1(\lambda), \quad x_2=x_2(\lambda)$$

Исключая параметр λ, можно выразить взаимно обратные оптимальные реакции партнеров

$$x_1=\varphi(x_2), \quad x_2=\varphi_{-1}(x_1).$$

Таким образом, теория согласованного оптимума в игре двух лиц позволяет найти однозначно оптимальные реакции партнеров, выражаемые линией согласованного оптимума, но не позволяет дать однозначной точки согласованного оптимума. Однако при наличии добавочного ограничения вида

$$g(x_1, x_2)=b,$$

пересечение линии согласованного оптимума с линией ограничения дает однозначную точку согласованного оптимума. Как будет показано ниже, в экономических задачах таким ограничением является принцип эквивалентного обмена.

9. Принцип согласованного оптимума как обобщение метода Лагранжа

В двух предыдущих разделах мы дали два независимых определения согласованного оптимума: первое — через итерационный процесс отыскания точки пересечения векторов интересов, второе — через оптимальные действия игроков с бесконечной глубиной рефлексии. В данном разделе мы дадим третье определение согласованного оптимума, которое опирается на представление о партнере, ставящем перед собой конечную цель.

Заметим, что дифференциальные уравнения линии согласованного оптимума

$$dJ_1=(\xi_1, d\mathbf{x})=0, \quad dJ_2=(\xi_2, d\mathbf{x})=0,$$

обеспечивающие коллинеарность векторов-градиентов целевых функций

$$\xi_1=\lambda\xi_2, \tag{9.1}$$

не обеспечивают максимальности обоих функций f_1 и f_2 на всей линии согласованного оптимума, а обеспечивают только стационарность этих функций

$$f_1(\mathbf{x})=C_1(\lambda), \quad f_2(\mathbf{x})=C_2(\lambda).$$

Различным значениям параметра λ соответствуют различные точки на линии согласованного оптимума. Каждой точке на линии согласованного оптимума соответствуют определенные значения констант C_1 и C_2, которые мы будем трактовать как «доходы» субъектов S_1 и S_2.

Можно лишь утверждать, что линия согласованного оптимума проходит через точки абсолютных личных оптимумов субъектов S_1 и S_2: значению $\lambda=0$ соответствует точка абсолютного личного оптимума субъекта S_1, определяемая условием $\xi_1=0$, а значению $\lambda=-\infty$ соответствует точка абсолютного личного оптимума субъекта S_2, определяемая условием $\xi_2=0$.

Покажем, что к согласованному оптимуму приходит субъект S_1, если он исходит из представления о том, что его партнер ставит своей задачей получение конечного «дохода» C_2. Действительно, тогда субъект S_1 имеет обычную задачу планирования на максимизацию одной функции с ограничением

$$J_1=f_1(\mathbf{x})\longrightarrow\max,\quad f_2(\mathbf{x})=C_2.$$

Для решения этой задачи необходимо составить функцию Лагранжа

$$L_1=f_1(\mathbf{x})-\lambda f_2(\mathbf{x})$$

и продифференцировать ее по $\mathbf{x}$, в результате чего мы опять получаем уравнение (9.1), решением которого является опять-таки линия согласованного оптимума

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\lambda).$$

Параметр λ однозначно определяется величиной C_2 согласно уравнению

$$f_2(\mathbf{x}(\lambda))=C_2.$$

Придавая различные значения величине C_2, мы будем получать различные значения параметра λ, двигаясь тем самым по линии согласованного оптимума. Таким образом, линия согласованного оптимума представляет собой совокупность оптимальных точек для субъекта S_1, исходящего из совокупности представлений о желаемых целях его партнера S_2. Все сказанное целиком относится и к субъекту S_2, исходящему из аналогичных представлений о субъекте S_1.

Таким образом, как только становится известным, чего хочет один из участников игры (например, какое значение C_1 удовлетворяет «аппетит» субъекта S_1), второй участник игры (субъект S_2) мгновенно приходит к согласованному оптимуму с ним, определяя соответствующий значению C_1 коэффициент λ и вычисляя соответствующее согласованному оптимуму свое значение целевой функции $C_2(\lambda)$. Если «аппетит» партнера (определяемый величиной C_1) не слишком велик, то точка согласованного оптимума существует. При больших значениях C_1 этой точки может не существовать, ибо уравнение, обеспечивающее субъекту S_1 «доход» C_1 при значениях $x^*_1(\lambda)$ и $x^*_2(\lambda)$, вытекающих из принципа согласованного оптимума

$$f_1(\mathbf{x}^*(\lambda)) = C_1,$$

может не всегда иметь решение.

Если «аппетиты» обоих участвующих в игре субъектов безграничны, то согласованный оптимум в отношениях между ними недостижим. Этот случай соответствует наличию антагонизма между участниками игры, однако, поскольку нас интересуют согласованные действия игроков, его мы касаться не будем.

10. Линия согласованного оптимума как геометрическое место точек касания линий равных потерь

Линией равных потерь * субъекта S_1 называется линия, определяемая уравнением

$$J_1 = f_1(\mathbf{x}) = C_1.$$

Линия равных потерь субъекта S_2 определяется аналогично:

$$J_2 = f_2(\mathbf{x}) = C_2.$$

Уравнение

$$dJ_1 = (\xi_1,\ d\mathbf{x}) = 0 \tag{10.1}$$

есть дифференциальное уравнение линий равных потерь субъекта S_1, определяющее все эти линии, различающиеся величиной потерь C_1. То же самое можно сказать и про уравнение

$$dJ_2 = (\xi_2,\ d\mathbf{x}) = 0 \tag{10.2}$$

для субъекта S_2.

Векторы ξ_1 и ξ_2 ортогональны линиям равных потерь. Параллельность векторов ξ_1 и ξ_2

$$\xi_1 = \lambda \xi_2 \tag{10.3}$$

---

* В литературе употребляется также термин «линия безразличия» [5].

означает, что в точках, определяемых этим условием, линии равных потерь обоих субъектов касаются одна другой (рис. 5).

Следовательно, геометрическое место точек, в которых векторы ξ_1 и ξ_2 коллинеарны, есть геометрическое место точек касания линий равных потерь.

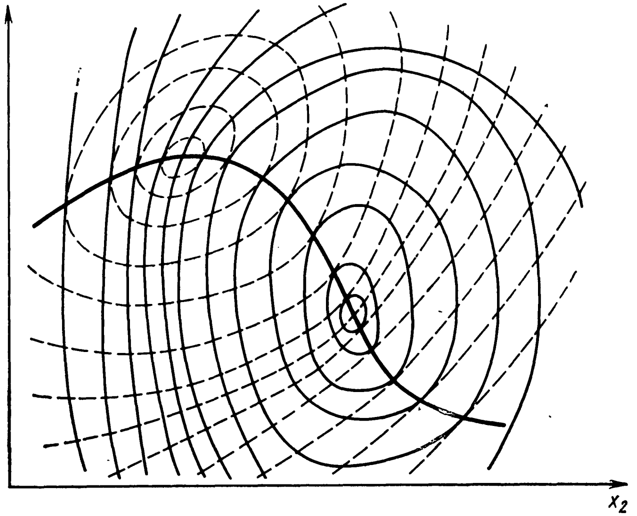

Рис. 5. Линии равных потерь и линии согласованного оптимума.

Движение, направленное перпендикулярно линии согласованного оптимума, приносит убытки обоим игрокам. Именно поэтому линия согласованного оптимума является оптимальной линией.

Как мы уже говорили, линия согласованного оптимума проходит через точки абсолютных личных оптимумов, определяемые условиями $\xi_1=0$ и $\xi_2=0$. Она имеет «физический смысл» *гребня*, соединяющего две вершины — точки абсолютных личных оптимумов.

На отрезке линии согласованного оптимума между этими точками положительному приращению целевой функции первого субъекта $dJ_1>0$ соответствует отрицательное приращение целевой функции второго субъекта $dJ_2<0$.

Из уравнений (10.1)—(10.3) следует

$$dJ_1=\lambda dJ_2.$$

Таким образом, на отрезке линии согласованного оптимума между точками абсолютных личных оптимумов величина λ отрицательна. Переходу от одной точки личного оптимума к другой соответствует изменение λ от 0 до $-\infty$. На остальной части линии согласованного оптимума величина λ положительна, и движение вдоль линии согласованного оптимума здесь вызывает одновременное увеличение или уменьшение обоих целевых функций. Поэтому остальная часть линии согласованного оптимума, за исключением отрезка от одного личного оптимума к другому, не представляет интереса, т. е. не является оптимальной. Отклонение от линии согласованного оптимума на этой остальной ее части может давать выигрыш сразу обоим игрокам.

11. Линия согласованного оптимума как геометрическое место точек оптимума, соответствующих различным ограничениям

При наличии ограничения вида $g(\mathbf{x})=b$ игру двух лиц $J_1=f_1(\mathbf{x})$, $J_2=f_2(\mathbf{x})$ можно рассматривать как две независимые задачи планирования:

1) $J_1=f_1(\mathbf{x})\to\max, \quad g(\mathbf{x})=b,$

2) $J_2=f_2(\mathbf{x})\to\max, \quad g(\mathbf{x})=b.$

Обозначим через $\boldsymbol{\eta}$ градиент функции g:

$$\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Решая оптимально первую задачу, мы получаем условие

$$\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\eta}, \tag{11.1}$$

решая вторую, получаем аналогичное условие

$$\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\eta}. \tag{11.2}$$

Исключая $\boldsymbol{\eta}$ из этих двух уравнений, мы получаем уравнение линии согласованного оптимума

$$\boldsymbol{\xi}_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\boldsymbol{\xi}_2.$$

Уравнение (11.1) дает линию $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1(\lambda_1)$, где λ_1 находится из условия $g(\mathbf{x}_1(\lambda_1))=b$.

Уравнение (11.2) дает линию $\mathbf{x}=\mathbf{x}_2(\lambda_2)$, где λ_2 находится из условия $g(\mathbf{x}_2(\lambda_2))=b$.

Каждой функции g соответствуют определенные значения λ_1 и λ_2 и, следовательно, определенное значение λ. При различных g мы будем получать различные значения λ.

Таким образом, линия согласованного оптимума есть геометрическое место точек оптимума, соответствующих различным ограничениям, а пересечение линии согласованного оптимума с линией ограничения дает однозначную точку согласованного оптимума.

12. Линия согласованного оптимума в отношениях двух лиц со многими согласуемыми параметрами

Рассмотрим игру двух лиц с целевыми функциями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}); \qquad J_2=f_2(\mathbf{x}),$$

заданными на ситуациях, описываемых набором параметров

$$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_m),$$

обе части которого $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, управляемые соответственно субъектами S_1 и S_2, предоставляются в согласованное управление.

Принцип согласованного оптимума требует равенства нулю полных дифференциалов целевых функций

$$dJ_1=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}, \ d\mathbf{x}\right)=0, \qquad dJ_2=\left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}, \ d\mathbf{x}\right)=0.$$

Это значит, что в точках согласованного оптимума векторы-градиенты целевых функций обоих игроков

$$\xi_1=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \xi_2=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}$$

являются коллинеарными

$$\xi_1=\lambda\xi_2.$$

Написанное уравнение представляет собой определенную систему из m уравнений относительно m неизвестных компонентов вектора $\mathbf{x}$. Решая эту систему, можно получить линию согласованного оптимума

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\lambda).$$

Исключая параметр λ, уравнение линии согласованного оптимума можно записать через определители

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{13} & \xi_{23} \end{vmatrix}=0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{1m} & \xi_{2m} \end{vmatrix}=0.$$

Полученные $(m-1)$ уравнений относительно m неизвестных при наложении одного скалярного ограничения вида

$$g(\mathbf{x})=b$$

дают определенную систему, которая имеет, как правило, единственное решение.

13. Условия оптимальности в аналитической игре n лиц

Рассмотрим аналитическую игру n лиц с целевыми функциями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}),\ \ldots,\ J_n=f_n(\mathbf{x}),$$

зависящими от m согласованно выбираемых параметров

$$\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_m),$$

где каждое лицо имеет в своем распоряжении по крайней мере один управляемый параметр и, следовательно, $m \geqslant n$.

Согласно принципу согласованного оптимума все m параметров предоставляются в совместное распоряжение общества и ищется оптимальное значение этого набора параметров $\mathbf{x}^*$, обеспечивающее равенство нулю полных дифференциалов всех целевых функций:

$$dJ_1=(\xi_1,\ d\mathbf{x})=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dJ_n=(\xi_n,\ d\mathbf{x})=0.$$

Попытка добиться коллинеарности всех векторов-градиентов

$$\xi_1=\lambda_1\xi_n,\ \ldots,\ \xi_{n-1}=\lambda_{n-1}\xi_n$$

налагает $(m-1)(n-1)$ условий вида

$$\frac{\xi_{11}}{\xi_{n1}}=\ldots=\frac{\xi_{1m}}{\xi_{nm}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\xi_{n-1,1}}{\xi_{n1}}=\ldots=\frac{\xi_{n-1,m}}{\xi_{nm}}$$

на m переменных.

Условие отсутствия переопределенности $(m-1)(n-1) \leqslant m$ выполнимо только при $n=2$, т. е. только в игре двух лиц.

Таким образом, *только в игре двух лиц можно достичь коллинеарности векторов интересов всех участников игры.*

В общем случае ортогональность векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вектору $d\mathbf{x}$ означает лишь их линейную зависимость, т. е. существование отличных от нуля чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, таких что

$$\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n = 0. \qquad (13.1)$$

Нетрудно заметить, что это условие означает максимизацию по $\mathbf{x}$ суммарного взвешенного критерия

$$J = \lambda_1 J_1 + \ldots + \lambda_n J_n.$$

Таким образом, *условие согласованного оптимума в аналитической игре n лиц сводится к требованию оптимизации по суммарному взвешенному критерию.*

Условие (13.1) показывает, что в игре трех лиц можно достичь компланарности векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_3:

$$\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3 = 0,$$

т. е. того, чтобы эти три вектора лежали в одной плоскости; в игре четырех лиц можно достичь того, чтобы четыре вектора лежали в трехмерном пространстве; вообще, в игре n лиц можно добиться того, чтобы n векторов-градиентов лежали в $(n-1)$-мерном пространстве.

Уравнения (13.1) представляют собой переопределенную однородную систему из m уравнений относительно n неизвестных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Эта система имеет нетривиальное решение при выполнении $(m-n+1)$ условий вида

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1,n} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1,n+1} & \ldots & \xi_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1m} & \ldots & \xi_{nm} \end{vmatrix} = 0.$$

Полученные $(m-n+1)$ уравнений относительно m неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ являются необходимыми условиями согласованного оптимума. Они оставляют возможность произвольного выбора $(n-1)$ параметров, т. е. имеют $(n-1)$ степеней свободы. Таким образом, в игре n лиц для доопределения точки согласованного оптимума можно задать $(n-1)$ ограничений вида

$$g_j(\mathbf{x})=b_j \quad (j=1, \ldots, n-1).$$

В игре двух лиц мы имели одну степень свободы, что давало линию согласованного оптимума. В игре трех лиц мы имеем две степени свободы, что дает поверхность согласованного оптимума. В игре четырех лиц мы получим трехмерное пространство согласованного оптимума. Вообще, в игре n лиц мы будем иметь $(n-1)$-мерное пространство согласованного оптимума.

Ниже мы покажем, что эта свобода в выборе оптимальных точек в игре многих лиц устраняется возможностью образования коалиций.

14. Теория коалиций в аналитических играх

Целью настоящего раздела является обоснование теории согласованного оптимума как математической основы теории коалиций в аналитических играх.

С целью упрощения изложения мы ограничимся рассмотрением игры n лиц $S_1, \ldots, S_n$, каждое из которых обладает свободой выбора одного числового параметра. Таким образом, рассматривается аналитическая игра с целевыми функциями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}), \ \ldots, \ J_n=f_n(\mathbf{x}),$$

зависящими от n простых числовых параметров:

$$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n),$$

где x_i есть параметр, контролируемый субъектом S_i.

Необходимым условием согласованного оптимума, обеспечивающим равенство нулю n полных дифференциалов

$$dJ_1=(\xi_1, d\mathbf{x})=0, \ \ldots, \ dJ_n=(\xi_n, d\mathbf{x})=0, \qquad (14.1)$$

является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (14.2)$$

Это условие налагает одно ограничение на n переменных $x_1, \ldots, x_n$, оставляя $(n-1)$ степеней свободы.

Описанная неопределенность игры многих участников устраняется возможностью образования участниками игры коалиций. *Коалиция* — это игра с меньшим количеством участников, решаемая по принципу, взаимно выгодному для всех ее участников, например, по принципу согласованного оптимума.

А. Коалиции в игре трех лиц. Простейшей игрой, в которой возможно образование коалиций, является игра трех лиц S_1, S_2 и S_3. В ней возможны три коалиции, которые мы обозначим через $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_3\}$ и $\{S_2, S_3\}$. Рассмотрим для примера коалицию $\{S_1, S_2\}$.

Необходимое условие согласованного оптимума в отношениях между S_1 и S_2 — это равенство нулю главного минора второго порядка матрицы (14.2)

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (14.3)$$

Эта связь переменных x_1, x_2 и x_3 позволяет выразить реакцию S_1 на действия S_2 и S_3:

$$x_1 = \varphi_1(x_2, x_3)$$

и найти ее полный дифференциал

$$dx_1 = \psi_{12} dx_2 + \psi_{13} dx_3.$$

Подставляя это выражение в (14.1) при $n=3$, получаем

$$dJ_1 = (\xi_{11}\psi_{12} + \xi_{12}) dx_2 + (\xi_{11}\psi_{13} + \xi_{13}) dx_3 = 0,$$
$$dJ_2 = (\xi_{21}\psi_{12} + \xi_{22}) dx_2 + (\xi_{21}\psi_{13} + \xi_{23}) dx_3 = 0,$$
$$dJ_3 = (\xi_{31}\psi_{12} + \xi_{32}) dx_2 + (\xi_{31}\psi_{13} + \xi_{33}) dx_3 = 0.$$

Присоединение субъекта S_3 к коалиции $\{S_1, S_2\}$ на основе принципа согласованного оптимума налагает два необходимых условия

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}\psi_{12} + \xi_{12} & \xi_{21}\psi_{12} + \xi_{22} \\ \xi_{11}\psi_{13} + \xi_{13} & \xi_{21}\psi_{13} + \xi_{23} \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \xi_{11}\psi_{12} + \xi_{12} & \xi_{31}\psi_{12} + \xi_{32} \\ \xi_{11}\psi_{13} + \xi_{13} & \xi_{31}\psi_{13} + \xi_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Эти условия вместе с условием (14.3) дают определенную систему из трех уравнений относительно трех неизвестных x_1, x_2 и x_3, которая, как правило, имеет единственное решение. Таким образом, игра трех лиц при фиксированной коалиции двух из них имеет единственную точку согласованного оптимума.

Б. Коалиции в игре четырех и более лиц. Игра четырех лиц отличается от игры трех лиц многообразием возможностей для образования коалиций. В ней возможны 6 коалиций типа «2—2» и 4 коалиции типа «3—1». Мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда игроки по одному присоединяются к уже существующей коалиции. Условие согласованного оптимума в коалиции $\{S_1, S_2\}$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{14.4}$$

дает возможность выразить реакцию первого игрока на действия остальных

$$x_1 = \varphi_1(x_2, x_3, x_4)$$

и найти ее полный дифференциал:

$$dx_1 = \psi_{12} dx_2 + \psi_{13} dx_3 + \psi_{14} dx_4.$$

Подставляя это выражение в (14.1) при $n=4$, получаем

$$dJ_i = (\xi_{i2} + \xi_{i1}\psi_{12})\,dx_2 + (\xi_{i3} + \xi_{i1}\psi_{13})\,dx_3 + \\ + (\xi_{i4} + \xi_{i1}\psi_{14})\,dx_4 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{14.5}$$

Присоединение субъекта S_3 к коалиции $\{S_1, S_2\}$ налагает две связи

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} + \xi_{11}\psi_{12} & \xi_{13} + \xi_{11}\psi_{13} \\ \xi_{22} + \xi_{21}\psi_{12} & \xi_{23} + \xi_{21}\psi_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

(14.6)

$$\begin{vmatrix} \xi_{12} + \xi_{11}\psi_{12} & \xi_{13} + \xi_{11}\psi_{13} \\ \xi_{32} + \xi_{31}\psi_{12} & \xi_{33} + \xi_{31}\psi_{13} \end{vmatrix} = 0.$$

Эти два условия вместе с условием (14.4) позволяют выразить реакции трех первых игроков на действия четвертого:

$$x_1 = \varphi_1(x_4), \quad x_2 = \varphi_2(x_4), \quad x_3 = \varphi_3(x_4),$$

и найти их дифференциалы

$$dx_1 = \psi_1 dx_4, \quad dx_2 = \psi_2 dx_4, \quad dx_3 = \psi_3 dx_4.$$

После подстановки этих выражений в (14.5) получаем

$$dJ_i = (\xi_{i1}\psi_1 + \xi_{i2}\psi_2 + \xi_{i3}\psi_3 + \xi_{i4})\,dx_4 = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Присоединение субъекта S_4 к коалиции $\{\{S_1, S_2\}, S_3\}$ требует наложить еще четыре условия вида

$$\xi_{i1}\psi_1 + \xi_{i2}\psi_2 + \xi_{i3}\psi_3 + \xi_{i4} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

на те же самые переменные x_1, x_2, x_3 и x_4.

Но эти четыре условия противоречат ранее установленным трем условиям. Таким образом, присоединение четвертого субъекта к коалиции трех заставляет пересмотреть всю систему прежних отношений между ними. Это правило сохраняется и для игр с более чем четырьмя участниками: присоединение каждого нового субъекта к существующей коалиции заставляет пересматривать всю существующую систему отношений между ними. Поскольку на практике такой пересмотр отношений часто не производится, то в выигрышном положении оказываются те субъекты, которые вступают в коалицию раньше других.

Часть вторая

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Если экономический анализ не преследовал бы важную цель, то затрачиваемые на него часы можно было бы со спокойной совестью посвятить множеству других дел.

П. А. Самуэльсон

1. Основные законы математической экономики

Потребление материальных благ в объеме x человеком (или всем обществом) дает *эмоциональное удовлетворение,* выражаемое функцией

$$J = f(x). \tag{1.1}$$

Это целевая функция субъекта, к максимальному значению которой он стремится.

Среди людей бытует мнение о безграничных потребностях человека. Этот вопрос стоит того, чтобы на нем остановиться. Прежде всего будем различать материальные, эмоциональные и интеллектуальные потребности человека. Предметом изучения экономической науки являются только материальные потребности человека, изучение же высших (эмоциональных и интеллектуальных) потребностей человека относится к области психологии и этики.

Что касается материальных потребностей, то можно безапелляционно утверждать, что *реальные (и разумные) субъекты получают максимум удовлетворения при конечных входах.* Таким образом, значение объема x^* любого материального блага, дающего максимум функции удовлетворенности (1.1), конечно:

$$x^* < \infty.$$

Это значит, что уровень потребления блага x разбивается на три зоны: первую — от нуля до точки максимума функции (1.1) x^*: $0 \leqslant x \leqslant x^*$, которую можно назвать «зоной неудовлетворенности», вторую — от точки максимума функции (1.1) до точки ее перехода через нуль x^0: $x^* < x \leqslant x^0$, которую можно назвать «зоной пресыщения», и третью — выше точки $x^0 : x^0 < x$, которую можно назвать «зоной отвращения» или зоной отрицательных эмоций.

В зоне неудовлетворенности целевая функция является монотонно возрастающей

$$f'(x) > 0.$$

Это значит, что большее количество материальных благ дает большее эмоциональное удовлетворение.

Характерной особенностью целевых функций реальных субъектов является их выпуклость

$$f''(x) < 0,$$

следствием которой является падение относительного удовлетворения

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' < 0.$$

Другими словами, рост эмоционального удовлетворения происходит медленнее роста потребления. Все это различные формулировки одного и того же первого закона Г. Г. Госсена [24]. *Этот закон выражает объективное психофизиологическое свойство насыщения человеческих потребностей, ввиду которого каждая последующая потребляемая порция блага дает меньшее эмоциональное удовлетворение, чем предыдущая.* Следствием первого закона Госсена является конечность материальных потребностей человека.

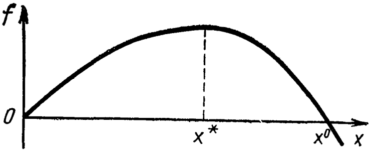

Рис. 6. Функция удовлетворенности субъекта

Перейдем теперь от рассмотрения потребностей человека к рассмотрению его возможностей. Проявив некоторую способность к абстрактному мышлению, мы будем рассматривать один вид «абстрактного человеческого труда», который проявляется в негативных эмоциональных затратах и может быть выражен в тех же самых единицах измерения, в которых мы выражали состояние эмоциональной удовлетворенности человека (или всего общества в целом).

Производство материальных благ в объеме x осуществляется ценой затраты этого «абстрактного труда», или эмоциональных усилий, выражаемых функцией

$$J=g(x).$$

Подобно функции эмоционального удовлетворения $f(x)$ функция эмоциональных затрат $g(x)$ также обладает некоторыми примечательными свойствами. Характерной особенностью функции эмоциональных затрат является ее монотонное возрастание:

$$g'(x)>0.$$

Это значит, что для производства большего количества благ требуется большее количество эмоциональных усилий (труда). Что касается второй производной функции $g(x)$, то здесь возможны различные случаи. Случай положительности второй производной

$$g''(x)>0,$$

означающий вогнутость функции $g(x)$ или, что то же самое, рост относительных трудовых затрат

$$\left[\frac{g(x)}{x}\right]'>0,$$

может быть назван *законом возрастающей трудоемкости благ,* который гласит: рост эмоциональных затрат происходит быстрее роста производства.

Закон возрастающей трудоемкости благ может быть объяснен эффектом истощения ресурсов, из которых и с помощью которых добываются эти блага — с расширением производства приходится использовать все более трудоемкие и энергоемкие виды сырья, перерабатывать все более бедные руды, использовать все менее калорийные виды топлива, обрабатывать все менее плодородные земли, использовать все менее способных людей и т. д. Вместе с тем всем известен и обратный эффект: крупное производство выгоднее мелкого, массовое поточное производство выгоднее индивидуального и мелкосерийного. Этот эффект обусловлен так называемыми «постоянными затратами», связанными с подготовкой процесса производства (обучение людей, переналадка оборудования и прочие единовременные издержки) и не зависящими от объема производства. Эффект подготовительных (или «организационных») постоянных затрат входит аддитивно в общие затраты труда наряду с линейным, квадратичным и прочими эффектами. Таким образом, функцию эмоциональных (трудовых) затрат можно представить в виде суммы

$$g(x) = a_0\sigma(x) + a_1x + a_2x^2 + \ \ldots,$$

где a_0 — постоянные затраты, связанные с организацией производства благ x, а $\sigma(x)$ — функция, принимающая значения

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

При отсутствии квадратичного эффекта (а именно, положительность этого эффекта обусловливает возрастающую трудоемкость производства) эффект постоянных затрат обусловливает падение относительной трудоемкости благ с ростом объема их производства:

$$\left[\frac{g(x)}{x}\right]' = \left[\frac{a_0\sigma(x) + a_1x}{x}\right]' = -\frac{a_0\sigma(x)}{x^2} < 0.$$

Вторым важным эффектом, обусловливающим падение относительных эмоциональных затрат с ростом объема производства, является *эффект обучения*, свойственный человеку и самонастраивающимся кибернетическим системам. Субъект, осуществляющий производство определенного продукта в объеме x, в ходе труда совершенствует свою квалификацию, в результате чего происходит повышение производительности труда, определяемой как отношение объема продукции x к соответствующим трудовым затратам $g(x)$:

$$p(x) = \frac{x}{g(x)}.$$

Следовательно, производная от производительности труда $p(x)$ по x в результате эффекта обучения является положительной

$$p'(x) = \left[\frac{x}{g(x)}\right]' > 0.$$

Нетрудно показать, что это условие соответствует отрицательности второй производной функции $g(x)$: $g''(x) < < 0$.

Таким образом, мы перечислили ряд факторов, одни из которых обусловливают эффект возрастающей трудоемкости благ, а другие — эффект убывающей трудоемкости. Результирующий эффект зависит от соотношения этих факторов. Примерный вид функции эмоциональных затрат с учетом эффекта постоянных затрат и эффекта возрастающей трудоемкости благ показан на рис. 7.

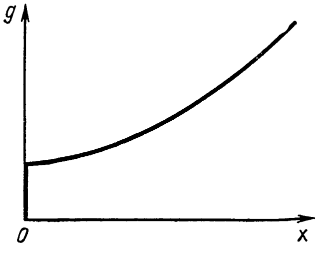

Рис. 7. Функция эмоциональных затрат.

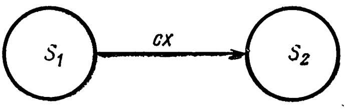

Рис. 8. Схема «купли—продажи».

Рассмотрим теперь совместный процесс «производство — потребление». Субъект, производящий материальные блага в объеме x с эмоциональными затратами $g(x)$ и потребляющий их с эмоциональным удовлетворением $f(x)$, должен руководствоваться целевой функцией

$$J = f(x) - g(x).$$

Условие максимума этой целевой функции

$$\frac{dJ}{dx} = 0$$

требует равенства производных функций эмоционального удовлетворения и эмоциональных затрат:

$$f'(x) = g'(x) > 0.$$

Это уравнение определяет оптимальный объем производства — потребления. Достаточное условие максимума

$$\frac{d^2J}{dx^2} < 0$$

выполняется ввиду $f'' < 0$ и $g'' > 0$.

Для того чтобы стимулировать увеличение объема производства — потребления x, необходимо

$$f'(x) > g'(x).$$

Максимальное удовлетворение потребностей, соответствующее условию

$$f'(x)=0,$$

может требовать таких больших трудовых затрат, что

$$\frac{dJ}{dx}=f'(x)-g'(x)<0.$$

Только если трудоемкость падает до нуля (а это возможно лишь при полной автоматизации производства)

$$g'(x)=0,$$

можно достичь максимального удовлетворения потребностей, иначе оно недостижимо.

Изложенное легко переносится на многомерный случай. Производство — потребление набора материальных благ

$$\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$$

с эмоциональными затратами $g(\mathbf{x})$ и эмоциональным удовлетворением $f(\mathbf{x})$ должно производиться в объемах, максимизирующих критерий

$$J=f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}).$$

Условия максимума имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}.$$

Это значит, что *предельная трудоемкость каждого блага должна равняться его предельной потребительной стоимости.*

До сих пор производитель и потребитель материальных благ рассматривался как один субъект. Если производитель и потребитель не тождественны, а представляют собой два различных субъекта, то между ними возникают отношения купли — продажи (рис. 8).

Производитель S_1 производит, а потребитель S_2 покупает продукт x по цене c за единицу продукта. При этом субъекты S_1 и S_2 руководствуются целевыми функциями:

1) критерий производителя $J_1=cx-g(x)$,

2) критерий потребителя $J_2=f(x)-cx$.

Объем купли — продажи x и цена продукта c есть результат решения проблемы оптимальности.

Условие оптимальности для производителя

$$\frac{dJ_1}{dx}=0$$

дает уравнение

$$g'(x) = c, \qquad (1.2)$$

а условие оптимальности для потребителя

$$\frac{dJ_2}{dx} = 0$$

дает уравнение

$$f'(x) = c. \qquad (1.3)$$

Достаточные условия максимумов J_1 и J_2 обеспечиваются ввиду $f''<0$ и $g''>0$. Совместное решение системы уравнений (1.2), (1.3) определяет оптимальный объем купли — продажи x и цену продукта c.

Таким образом, цена продукта определяется, с одной стороны, условиями производства, а с другой — психологией потребления.

Уравнение (1.2) есть уравнение классической политической экономии; оно утверждает, что *цена равна предельной трудоемкости;* уравнение (1.3) есть уравнение Г. Г. Госсена; оно утверждает, что *цена равна предельной потребительной стоимости.* Ни одно из этих утверждений не противоречит другому, ибо в уравнения входит кроме цены c еще одно неизвестное — объем продукта x, которое влияет как на трудоемкость, так и на потребительную стоимость.

Полученные результаты легко переносятся на многомерный случай. Если производитель S_1 продает, а потребитель S_2 покупает набор продуктов $\mathbf{x}$ по ценам $\mathbf{c}$ за единицу продукта, то их целевые функции равны:

1) для производителя $J_1 = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$,

2) для потребителя $J_2 = f(\mathbf{x}) - (\mathbf{c}, \mathbf{x})$.

Условия оптимальности для производителя и потребителя

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{x}} = 0, \qquad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

дают систему уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c},$$

из которой могут быть определены оптимальные объемы купли — продажи $\mathbf{x}$ и оптимальные цены $\mathbf{c}$.

В заключение данного раздела рассмотрим еще одну задачу: задачу о бюджете потребителя, имеющего ограниченный запас денежных ресурсов Q. Зная цены продуктов $\mathbf{c}$, субъект распределяет наличные средства между ними:

$$(\mathbf{c},\ \mathbf{x}) = Q, \tag{1.4}$$

чтобы максимизировать свою функцию эмоциональной удовлетворенности

$$J = f(\mathbf{x}) \to \max.$$

Эта задача решается методом Лагранжа. Составляя функцию Лагранжа

$$L = f(\mathbf{x}) = -\lambda[(\mathbf{c},\ \mathbf{x}) - Q]$$

и приравнивая нулю ее производную по $\mathbf{x}$, получаем

$$\xi = \lambda \mathbf{c}. \tag{1,5}$$

Здесь через $\xi = \partial f / \partial \mathbf{x}$ обозначен набор частных производных — градиент функции f, а через λ — множитель Лагранжа, определяемый с помощью соотношения (1.4). Уравнение (1.5), утверждающее, что предельные потребительные стоимости продуктов должны быть пропорциональны их ценам, определяет оптимальные объемы закупок. Для того чтобы уравнение (1.5) имело решение, ξ должно быть переменной величиной; это значит, что целевая функция субъекта не должна быть линейной функцией, а должна иметь нелинейные члены.

2. Оптимальное решение задачи об обмене

Задача об обмене является важным звеном всей политической экономии. Качественным исследованием этой задачи занимался еще Адам Смит [20].

Нашей целью является строгое количественное решение задачи об обмене. Отношения обмена между двумя субъектами S_1 и S_2 представлены на рис. 9.

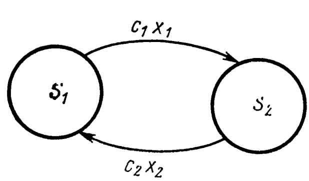

Рис. 9. Схема обмена.

Субъект S_1 назначает цену c_1 на производимый им товар x_1 и выбирает объем покупаемого им чужого товара x_2; субъект S_2 назначает цену c_2 на производимый им товар x_2 и выбирает объем покупаемого им товара x_1.

Объемы реализации товаров x_1 и x_2 зависят от их цен c_1 и c_2. Эта зависимость выражается *функциями* *спроса:*

$$x_1 = x_1(c_1, c_2), \qquad x_2 = x_2(c_1, c_2).$$

Цены c_1 и c_2 не могут назначаться произвольно: между ними существует зависимость, которую мы попытаемся отыскать.

Как впервые показал Г. Г. Госсен [24], при выборе объемов обмена субъекты S_1 и S_2 руководствуются субъективными потребительными стоимостями (по нашей терминологии, целевыми функциями)

$$J_1 = f_1(x_1, x_2), \qquad J_2 = f_2(x_1, x_2),$$

определяющими степень удовлетворенности субъектов в зависимости от объемов их производства и потребления.

Частные производные

$$\xi_{ij}(\mathrm{x}) = \frac{\partial f_i(\mathrm{x})}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2),$$

называются дифференциальными потребительными стоимостями товаров x_1 и x_2 для субъектов S_1 и S_2. Субъективная оценка ξ_{ij} выражает прирост удовлетворенности субъекта S_i от единичного прироста товара x_j в точке x. Оценки

$$\xi_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad \xi_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

выражают трудоемкости производства единицы товара x_1 для субъекта S_1 и товара x_2 для субъекта S_2, а оценки

$$\xi_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \qquad \xi_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

выражают потребительные стоимости единицы товара x_2 для объекта S_1 и товара x_1 для субъекта S_2.

Стремясь в результате обмена максимизировать свои целевые функции, субъекты S_1 и S_2 вступают в математическую (в частности, аналитическую) игру, решением которой и являются объемы обмениваемых товаров x_1 и x_2 и их цены c_1 и c_2.

Употребляемое нами слово «цена», выражающее стоимость каждой единицы обмениваемого товара в условиях данного конкретного обмена, соответствует терминам «цена» и «меновая стоимость», употребляемым в политической экономии. Если участвующие в игре субъекты

S_1 и S_2 образуют лишь небольшую ячейку общества, то получающиеся в результате решения этой игры величины c_1 и c_2 можно трактовать как «цены» в смысле политической экономии; если же субъекты S_1 и S_2 олицетворяют собой общество в целом, то величины c_1 и c_2 можно рассматривать как «меновые стоимости». Поэтому в дальнейшем мы не будем делать различия между терминами «цена» и «стоимость».

В результате обмена продуктами x_1 и x_2 целевые функции субъектов трансформируются согласно уравнениям

$$L_1=f_1+c^1{}_1x_1-c^1{}_2x_2,$$
$$L_2=f_2+c^2{}_2x_2-c^2{}_1x_1,$$

где $c^1{}_1$ и $c^1{}_2$ — субъективные оценки стоимостей единиц товаров x_1 и x_2 для субъекта S_1, а $c^2{}_1$ и $c^2{}_2$ — субъективные оценки стоимостей единиц товаров x_1 и x_2 для субъекта S_2.

Эти субъективные оценки стоимостей можно заменить объективными стоимостями c_1 и c_2, если ввести коэффициенты отношения субъектов к стоимостям λ_1 и λ_2 согласно уравнениям

$$c^1{}_1x_1-c^1{}_2x_2=\lambda_1(c_1x_1-c_2x_2),$$
$$c^2{}_2x_2-c^2{}_1x_1=\lambda_2(c_2x_2-c_1x_1).$$

Используя эти обозначения, получаем

$$L_1=f_1+\lambda_1(c_1x_1-c_2x_2),$$
$$L_2=f_2+\lambda_2(c_2x_2-c_1x_1). \qquad (2.1)$$

Целевые функции субъектов приняли вид функций Лагранжа. Таким образом, игра обмена может рассматриваться как обычная игра с целевыми функциями

$$J_1=f_1(x_1, x_2); \qquad J_2=f_2(x_1, x_2)$$

и ограничением

$$c_1x_1-c_2x_2=0.$$

Это ограничение является слабым, так как оно содержит неопределенные параметры c_1 и c_2.

В разделе 11 части первой показано, что игры с ограничением можно решать как две независимые задачи планирования

1) $J_1=f_1(x_1, x_2)\to\max, \quad c_1x_1-c_2x_2=0,$

2) $J_2=f_2(x_1, x_2)\to\max, \quad c_1x_1-c_2x_2=0.$

Критерии игроков, записанные в форме (2.1), являются функциями Лагранжа этих двух задач планирования, а субъективные коэффициенты отношения игроков к стоимостям λ_1 и λ_2 являются обычными множителями Лагранжа.

Дифференцируя функции (2.1) по x_1, x_2 и λ_1, λ_2, как того требует метод Лагранжа, получаем решение задачи обмена, соответствующее принципу согласованного оптимума:

$$\xi_{11} = -\lambda_1 c_1, \quad \xi_{21} = \lambda_2 c_1,$$
$$\xi_{12} = \lambda_1 c_2, \quad \xi_{22} = -\lambda_2 c_2, \qquad (2.2)$$

и ограничение, которое выражает *принцип эквивалентного обмена*

$$c_1 x_1 = c_2 x_2. \qquad (2.3)$$

Этот принцип выражает отношение потребителя к товару: если товар однороден, то ему безразлично, продается ли первая партия вновь выпущенного товара или последняя; любым его одинаковым партиям он придает одну и ту же цену; его интересует общее количество товара и больше ничего. Математическими свойствами принципа эквивалентного обмена являются его линейность и однородность.

Раскроем экономический смысл полученных уравнений (2.2). Уравнения

$$\xi_{11} = -\lambda_1 c_1, \qquad \xi_{22} = -\lambda_2 c_2$$

утверждают, что цены товаров пропорциональны их предельным трудоемкостям. Величины ξ_{11} и ξ_{22} здесь отрицательны, так как они выражают негативные эмоции, связанные с затратами труда. Так конкретизуется утверждение, что «стоимости определяются трудом»*.

Уравнения

$$\xi_{12} = \lambda_1 c_2, \qquad \xi_{21} = \lambda_2 c_1$$

утверждают, что эти же самые цены определяются предельными потребностями субъектов, или потребительными стоимостями.

* Это утверждение и есть «закон стоимости» в его классической форме, однако его можно считать правильным лишь в первом приближении, ибо вычисление коэффициентов пропорциональности между «стоимостью» и «трудом» λ_1 и λ_2 требует решения всей задачи.

Никакого противоречия между этими двумя утверждениями нет, так как система уравнений (2.2), (2.3) не является переопределенной: она содержит 5 уравнений и 6 неизвестных: x_1, x_2, c_1, c_2, λ_1 и λ_2. Покажем, однако, что никакой неопределенности здесь тоже нет, и решение задачи, как правило, является единственным.

Исключая неизвестные λ_1 и λ_2 из уравнений (2.2), получаем

$$\frac{\xi_{11}(x_1, x_2)}{\xi_{12}(x_1, x_2)} = -\frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{\xi_{21}(x_1, x_2)}{\xi_{22}(x_1, x_2)} = -\frac{c_1}{c_2}.$$

Эти два уравнения можно разрешить относительно x_1 и x_2, выразив таким образом функции спроса, т. е. объемы реализации товаров в зависимости от соотношения цен. В эти уравнения входят не сами цены c_1 и c_2, а только их отношение c_1/c_2, т. е. одно неизвестное, а не два. Следовательно, цены определяются с точностью до масштабного коэффициента, и одну из них можно задать произвольно. Поэтому система уравнений (2.2), (2.3) является определенной и имеет, как правило, единственное решение.

Таким образом, мы показали, что *принцип эквивалентного обмена получается в результате решения задачи обмена методом Лагранжа*, который представляет собой одну из модификаций принципа согласованного оптимума*. Другими словами, этот принцип *есть следствие принципа согласованного оптимума в применении к задаче обмена*. Кроме того, нами доказана единственность решения задачи обмена по принципу согласованного оптимума.

Исключая из уравнений (2.2) c_1 и c_2, можно получить такие уравнения

$$\frac{1}{\lambda_1}\xi_{11} + \frac{1}{\lambda_2}\xi_{21} = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\xi_{12} + \frac{1}{\lambda_2}\xi_{22} = 0.$$

Эти уравнения получаются также путем дифференциро-

* Классический метод неопределенных множителей был введен Ж. Л. Лагранжем для решения задач на условный экстремум: $f(x)\to\max$, $g(x)=b$. Задача решается **введением функции Лагранжа** $L(x)=f(x)+\lambda[g(x)-b]$ с неопределенным множителем λ.

вания по x_1 и x_2 суммарного взвешенного критерия

$$J=\frac{1}{\lambda_1}f_1+\frac{1}{\lambda_2}f_2,$$

что также является одной из модификаций принципа согласованного оптимума.

Таким образом, мы доказали, что «веса» субъектов в обществе обратно пропорциональны коэффициентам их субъективного отношения к стоимости. Отношение этих «весов» $\lambda=\lambda_1/\lambda_2$ может быть однозначно найдено в результате оптимального решения задачи обмена:

$$\lambda=-\frac{\xi_{11}}{\xi_{21}}=-\frac{\xi_{12}}{\xi_{22}}.$$

Из уравнений (2.2) следует, что *товар имеет нулевую цену, если он производится одним из субъектов без трудовых затрат, хотя и представляет ненулевую потребительную стоимость для другого субъекта. Товар имеет нулевую цену и в том случае, когда он не является потребительной стоимостью для второго субъекта, хотя и производится первым субъектом с трудовыми затратами.*

Следует заметить, что система уравнений (2.2) разрешима только в том случае, когда все ξ_{ij} являются переменными величинами: это значит, что целевые функции участвующих в игре обмена субъектов должны быть нелинейными.

На практике решение задач обмена достигается в процессе торга. Любой итеративный метод решения системы уравнений (2.2), (2.3), определяющих объемы обмена и цены товаров, может служить моделью торга.

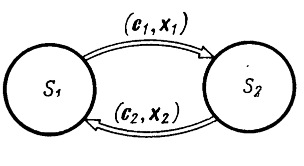

Рис. 10. Многопродуктовый обмен.

Рассмотренная задача легко переносится на случай обмена наборами товаров или многопродуктового обмена (рис. 10).

Субъект S_1 производит набор товаров $\mathbf{x}_1$, а субъект S_2 — набор товаров $\mathbf{x}_2$. После обмена субъект S_1 потребляет набор товаров $\mathbf{x}_2$, а субъект S_2 — набор товаров $\mathbf{x}_1$. Целевые функции субъектов имеют вид

$$J_1=f_1(x_1, \mathbf{x}_2), \quad J_2=f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Наборы частных производных

$$\xi_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1}; \qquad \xi_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2}$$

выражают трудоемкости производства товаров субъектами S_1 и S_2 соответственно, а наборы частных производных

$$\xi_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_2}, \qquad \xi_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_1}.$$

выражают потребности субъектов S_1 и S_2.

Составляя функции Лагранжа

$$L_1=f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)+\lambda_1[(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}_1)-(\mathbf{c}_2, \mathbf{x}_2)],$$

$$L_2=f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)+\lambda_2[(\mathbf{c}_2, \mathbf{x}_2)-(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}_1)],$$

где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — наборы цен товаров первого и второго субъектов, и производя обычное дифференцирование, получаем принцип эквивалентного обмена

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}_1)=(\mathbf{c}_2, \mathbf{x}_2), \tag{2.4}$$

выражающий равенство обмениваемых стоимостей, и обычные уравнения пропорциональности субъективных и объективных оценок

$$\begin{aligned} \xi_{11}&=-\lambda_1\mathbf{c}_1, & \xi_{21}&=\lambda_2\mathbf{c}_1, \\ \xi_{12}&=\lambda_1\mathbf{c}_2, & \xi_{22}&=-\lambda_2\mathbf{c}_2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если размерности векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{c}_1$, ξ_{11} и ξ_{21} равны n, а размерности векторов $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{c}_2$, ξ_{12} и ξ_{22} равны m, то векторные уравнения (2.5) дают $2(n+m)$ скалярных уравнений, что вместе с уравнением (2.4) дает $2(n+m)+1$ уравнений относительно $2(n+m)+2$ неизвестных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, λ_1 и λ_2.

Поскольку цены определяются по-прежнему с точностью до масштаба и все уравнения системы (2.4), (2.5) линейны относительно цен и множителей Лагранжа, то одну из цен или один из множителей Лагранжа можно выбрать произвольно. Заданием одного из множителей Лагранжа мы устанавливаем масштаб измерения потребительных стоимостей товаров и эмоциональных затрат труда в единицах меновой стоимости. После этого система становится определенной и имеет, как правило, единственное решение.

3. Об оптимальных уровнях промышленного и сельскохозяйственного производства

Выше мы рассмотрели случай, когда товар собственного производства не представляет интереса для обоих субъектов и предназначен только для обмена. На практике же чаще имеют место задачи, когда производство товаров осуществляется субъектами частично и для собственного потребления. Рассмотрим такую задачу сначала для случая простых товаров (рис. 11).

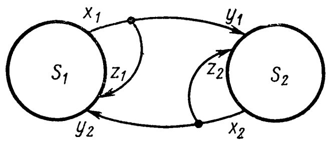

Рис. 11. Обмен и собственное потребление.

Из производимого субъектом S_1 товара x_1 количество z_1 предназначено для собственного потребления, а количество y_1 — для обмена. Аналогичные величины для S_2 есть x_2, z_2 и y_2. Эти величины связаны между собой уравнениями материального баланса

$$x_1 = y_1 + z_1, \qquad x_2 = y_2 + z_2. \tag{3.1}$$

Целевые функции субъектов имеют вид

$$J_1 = f_1(x_1, y_2, z_1); \qquad J_2 = f_2(y_1, x_2, z_2).$$

Частные производные

$$\xi_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad \xi_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

выражают трудоемкости производства; частные производные

$$\xi_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \qquad \xi_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}$$

— потребности в товаре, производимом партнером, а частные производные

$$\xi_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \qquad \xi_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}$$

— потребности в собственных продуктах производства.

Будем искать оптимальное решение этой задачи на основе принципа согласованного оптимума. Введем объективные цены товаров, производимых обоими субъектами, обозначив их через c_1 и c_2. С учетом обмена и ограничений, вытекающих из уравнений материального баланса, составим функции Лагранжа

$$L_1 = f_1(x_1, y_2, z_1) + \lambda_1 (c_1 y_1 - c_2 y_2) + \\ + \mu_1 (x_1 - y_1 - z_1) + \nu_1 (x_2 - y_2 - z_2),$$

$$L_2 = f_2(y_1, x_2, z_2) + \lambda_2 (c_2 y_2 - c_1 y_1) + \\ + \mu_2 (x_2 - y_2 - z_2) + \nu_2 (x_1 - y_1 - z_1).$$

Дифференцируя эти функции по всем аргументам, получаем вдобавок к уравнениям материального баланса (3.1) и уравнению эквивалентного обмена

$$c_1 y_1 = c_2 y_2 \tag{3.2}$$

еще и следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{11} + \mu_1 = 0, \\ &\nu_1 = 0, \\ &\lambda_1 c_1 - \mu_1 = 0, \\ &\xi_{12} - \lambda_1 c_2 - \nu_1 = 0, \\ &\xi_{13} - \mu_1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &\nu_2 = 0, \\ &\xi_{22} + \mu_2 = 0, \\ &\xi_{21} - \lambda_2 c_1 - \nu_2 = 0, \\ &\lambda_2 c_2 - \mu_2 = 0, \\ &\xi_{23} - \mu_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Исключая переменные μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, получаем обычную для задачи обмена систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} &\xi_{11} = -\lambda_1 c_1, \qquad &\xi_{21} = \lambda_2 c_1, \\ &\xi_{12} = \lambda_1 c_2, \qquad &\xi_{22} = -\lambda_2 c_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

и еще два уравнения

$$\xi_{11} + \xi_{13} = 0, \qquad \xi_{22} + \xi_{23} = 0, \tag{3.4}$$

экономический смысл которых заключается в следующем: собственное потребление производимого субъектом продукта должно вызывать такие эмоции, которые полностью компенсируют негативный эмоциональный эффект трудовых затрат. Это полностью соответствует условию равенства предельных приростов эмоционального удовлетворения и эмоциональных затрат для изолированного субъекта. Таким образом, учет собственного потребления не приводит ни к каким дополнительным трудностям: задачи обмена и удовлетворения собственных потребностей аддитивны.

Решая совместно систему из 9 уравнений (3.1)—(3.4) относительно 10 неизвестных x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, c_1, c_2, λ_1 и λ_2, задавшись произвольным значением одного из множителей Лагранжа λ_1 или λ_2, получаем, как правило, единственное оптимальное решение задачи.

Многомерный вариант этой задачи мы рассмотрим на примере товарообмена между рабочими, производящими промышленную продукцию, и крестьянами, производящими сельскохозяйственную продукцию.

Субъект S_1 олицетворяет рабочих, а субъект S_2 — крестьян. Введем следующие обозначения:

$\mathbf{x}_1$ — набор промышленных товаров,

$\mathbf{x}_2$ — набор сельскохозяйственных товаров,

$\mathbf{c}_1$ — цены промышленных товаров,

$\mathbf{c}_2$ — цены сельскохозяйственных товаров,

$\mathbf{z}_1$ — набор промышленных товаров, потребляемых рабочими,

$\mathbf{z}_2$ — набор сельскохозяйственных товаров, потребляемых крестьянами,

$\mathbf{y}_1$ — набор промышленных товаров, потребляемых крестьянами,

$\mathbf{y}_2$ — набор сельскохозяйственных товаров, потребляемых рабочими.

Целевую функцию рабочих, выражающую их стремление к максимальному удовлетворению собственных потребностей с учетом их трудовых возможностей, обозначим

$$J_1=f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1)$$

и аналогично для крестьян

$$J_2=f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{z}_2).$$

Функции

$$\xi_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1}, \qquad \xi_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2}$$

выражают трудоемкости производства промышленных товаров рабочими и сельскохозяйственных товаров крестьянами. Функции

$$\xi_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \qquad \xi_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$$

выражают потребительные стоимости сельскохозяйственных товаров для рабочих и промышленных товаров для крестьян, и, наконец, функции

$$\xi_{13}=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \qquad \xi_{23}=\frac{\partial f_2}{\partial z_2}$$

выражают потребительные стоимости промышленных товаров для рабочих и сельскохозяйственных товаров для крестьян.

Согласованный оптимум в отношениях рабочих и крестьян достигается путем решения следующей системы уравнений

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_1, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}_2, \tag{3.5}$$

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{c}_2, \mathbf{y}_2), \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_{11} &= -\lambda_1 \mathbf{c}_1, \\ \xi'_{12} &= \lambda_1 \mathbf{c}_2, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \xi_{21} &= \lambda_2 \mathbf{c}_1, \\ \xi_{22} &= -\lambda_2 \mathbf{c}_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

$$\xi_{11} + \xi_{13} = 0, \quad \xi_{22} + \xi_{23} = 0. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.5) выражают условия материального баланса, уравнение (3.6) — условие эквивалентности обмена между рабочими и крестьянами, уравнения (3.7) — пропорциональность между трудоемкостями и взаимными потребительными стоимостями, с одной стороны, и ценами с другой, оптимизируя тем самым отношения обмена, и, наконец, уравнения (3.8) оптимизируют самоснабжение рабочих и крестьян продуктами собственного труда.

Если размерность набора промышленных товаров равна n, а размерность набора сельскохозяйственных товаров равна m, то мы имеем систему из $4(n+m)+1$ уравнений относительно $4(n+m)+2$ неизвестных компонентов наборов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ и двух параметров λ_1 и λ_2. Задаваясь одним из параметров λ_1, λ_2 из условия соизмерения натуральных и стоимостных единиц, мы получаем определенную систему уравнений с единственным, как правило, решением.

4. Оптимальное плановое управление народным хозяйством

На рис. 12 представлена математическая модель экономических отношений между аппаратом управления производством продуктов труда (субъект S_1) потребителями (субъект S_2).

Целевые функции субъектов S_1 и S_2 имеют вид

$$J_1 = f_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2); \qquad J_2 = f_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2),$$

где $\mathbf{x}_1$ — набор производимых продуктов; $\mathbf{y}_1$ — набор потребляемых продуктов; $\mathbf{x}_2$ — набор количеств производимого труда различных видов; y_2 — набор количеств потребляемого труда различных видов.

Введем также следующие обозначения:

c_1 — цены производимых продуктов,

c_2 — цены различных видов труда,

$\xi_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ — потребительные стоимости производимых продуктов с точки зрения интересов государства,

$\xi_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}$ — потребительные стоимости различных видов труда с точки зрения интересов государства,

$\xi_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ — потребительные стоимости различных продуктов труда с точки зрения потребителей,

$\xi_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ — потребительные стоимости различных видов труда с точки зрения потребителей.

В зависимости от международной обстановки и других обстоятельств субъект S_1 имеет возможность оперативно менять свою целевую функцию, осуществляя тем самым функцию управления. Целевая функция населения складывается на протяжении длительного периода времени, она обладает большой инерционностью, благодаря чему государственный аппарат обладает возможностью предвидеть результаты своей политики, заключающейся в выборе функции f_1, соответствующей поставленной перед народом цели.

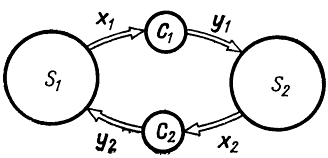

Рис. 12. Модель «аппарат управления — потребители».

Между набором производимых в государстве продуктов и набором количеств различных видов потребляемого труда существует следующая функциональная зависимость (функция производства, или производственная функция):

$$g_1(x_1) = y_2.$$

Между набором производимых населением видов труда и набором потребляемых продуктов существует следующая функциональная зависимость (функция потребления):

$$g_2(x_2) = y_1.$$

Условие эквивалентности обмена между производителями и потребителями имеет вид

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{c}_2, \mathbf{y}_2).$$

Исключая переменные $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$, представим целевые функции субъектов в виде

$$J_1 = f_1[\mathbf{x}_1 - \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2),\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)],$$
$$J_2 = f_2[\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2),\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)].$$

Условия согласованного оптимума в отношениях между этими субъектами требуют равенства нулю их полных дифференциалов *

$$dJ_1 = \left(\xi_{11} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{12},\ d\mathbf{x}_1\right) - \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{11},\ d\mathbf{x}_2\right) = 0,$$
$$(4.1)$$
$$dJ_2 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{21} + \xi_{22},\ d\mathbf{x}_2\right) - \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{22},\ d\mathbf{x}_1\right) = 0.$$

Здесь функции ξ_{11} и ξ_{12} берутся в точке $[\mathbf{x}_1 - \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2),\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)]$, а функции ξ_{21} и ξ_{22} — в точке $[\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2),\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)]$.

Условие эквивалентного обмена представим в виде

$$(\mathbf{c}_1,\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_2)) - (\mathbf{c}_2,\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)) = 0.$$

Дифференцируя его, получаем

$$\left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_2, d\mathbf{x}_1\right) - \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_1, d\mathbf{x}_2\right) = 0. \qquad (4.2)$$

Условия (4.1), (4.2) представляют собой переопределенную однородную систему из трех линейных уравнений относительно двух дифференциалов $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$. Эта система имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю двух определителей

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{12} & -\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{11} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_2 & -\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{21} + \xi_{22} & -\left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{22} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}_1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_2 & -\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{x}_2}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

---

* Здесь использовано следующее свойство скалярного произведения: $(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Из равенства нулю определителя второго порядка следует пропорциональность его строк. Выпишем эти условия пропорциональности

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{11} = -\lambda_1 c_1, \\ &\xi_{11} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{12} = -\lambda_1 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}} c_2, \\ &\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}} \xi_{21} + \xi_{22} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}} c_1, \\ &\xi_{22} = -\lambda_2 c_2. \end{aligned}\right\}$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{11}\,[x_1 - g_2(x_2), g_1(x_1)] = -\lambda_1 c_1, \\ &\xi_{12}\,[x_1 - g_2(x_2), g_1(x_1)] = \lambda_1 \left\{\left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} c_1 - c_2\right\}, \\ &\xi_{22}\,[g_2(x_2), x_2 - g_1(x_1)] = -\lambda_2 c_2, \\ &\xi_{21}\,[g_2(x_2), x_2 - g_1(x_1)] = \lambda_2 \left\{\left[\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} c_2 - c_1\right\}. \end{aligned}\right\}$$

Обозначим размерности векторов x_1, c_1, ξ_{11} и ξ_{21} через n, а размерности векторов x_2, c_2, ξ_{12} и ξ_{22} — через m. Мы получили определенную систему из $2(n+m)$ уравнений относительно $2(n+m)$ неизвестных компонентов векторов x_1, x_2, c_1 и c_2. Задаваясь масштабом цен, величину одного из множителей Лагранжа λ_1 или λ_2 можно положить равным единице, а величину другого множителя определить из условия эквивалентного обмена.

Решение данной системы уравнений определяет оптимальные объемы производства различных продуктов x^*_1 и оптимальные объемы различных видов труда x^*_2, а также их цены c^*_1 и c^*_2. Вычисленный таким образом вектор x^*_1 представляет собой *оптимальный план производства* народного хозяйства.

5. К теории ценнообразования

Конкретизируя модель отношений между аппаратом управления и потребителями, рассмотрим производство n видов продукции, обмениваемой на один вид труда — так называемый «абстрактный» труд (рис. 13).

Целевые функции аппарата управления и потребителей принимают вид

$$J_1 = f_1(x_1 - y_1, y_2), \quad J_2 = f_2(y_1, x_2 - y_2),$$

где $\mathbf{x}_1$ — набор производимых товаров; $\mathbf{y}_1$ — набор потребляемых товаров; x_2 — производимый «абстрактный» труд; y_2 — потребляемый «абстрактный» труд.

Для начала будем считать, что на производство товаров затрачивается труд и только труд, считая нулевыми стоимости затрачиваемых вместе с трудом ресурсов. Таким образом, функция производства имеет вид

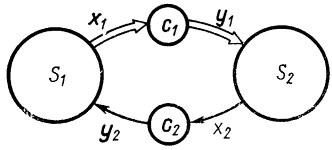

Рис. 13. Модель ценообразования.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = y_2,$$

где $\mathbf{a}$ — набор трудоемкостей товаров.

Что касается функции потребления, выражающей зависимость производимого в обществе труда от потребляемых продуктов, то ее мы запишем в виде

$$x_2 = \varphi(\mathbf{y}_1).$$

Уравнение эквивалентности обмена, связывающее цены продуктов $\mathbf{c}_1$ с ценою абстрактного труда c_2, принимает форму

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1) = c_2 y_2.$$

Исключая зависимые переменные x_2 и y_2, целевые функции S_1 и S_2 представим в виде

$$J_1 = f_1[\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1)],$$

$$J_2 = f_2[\mathbf{y}_1, \varphi(\mathbf{y}_1) - (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1)], \qquad (5.1)$$

а уравнение эквивалентности обмена — в виде

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1) = c_2(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1). \qquad (5.2)$$

Введем следующие обозначения:

$\xi_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1}$ — потребительные стоимости товаров с точки зрения интересов государства,

$\xi_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2}$ — оценка различных видов труда государством,

$\xi_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{y}_1}$ — потребительные стоимости товаров с точки зрения интересов потребителей,

$\xi_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ — оценка, выражающая отношение потребителей к труду.

Дифференцируя уравнения (5.1), (5.2) и используя условия согласованного оптимума, можно написать

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_{11}[\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1,(\mathbf{a},\mathbf{x}_1)]=-\lambda_{11}c,\\
&\mathbf{a}\xi_{12}[\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1,(\mathbf{a},\mathbf{x}_1)]=\lambda_1(c_1-\mathbf{a}c_2),\\
&\xi_{22}[\mathbf{y}_1,\ \varphi(\mathbf{y}_1)-(\mathbf{a},\mathbf{x}_1)]=-\lambda_2c_2,\\
&\xi_{21}[\mathbf{y}_1,\varphi(\mathbf{y}_1)-(\mathbf{a},\mathbf{x}_1)]=\lambda_2\left(c_2\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{y}_1}-c_1\right).
\end{aligned}\right\}$$

Мы написали $(3n+1)$ уравнение относительно $(3n+1)$ неизвестных величин $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{c}_1$ и c_2. Один из множителей Лагранжа λ_1, λ_2 можно задать произвольно, определив тем самым масштаб цен, а другой определяется из условия эквивалентного обмена. Таким образом, все величины определяются однозначно.

Используя второе и третье из полученных уравнений, составим уравнение

$$\mathbf{c}_1=\left(\frac{\xi_{12}}{\lambda_1}-\frac{\xi_{22}}{\lambda_2}\right)\mathbf{a}.$$

Оно утверждает, что цены товаров $\mathbf{c}_1$ в первом приближении* пропорциональны их трудоемкостям $\mathbf{a}$, подтверждая тем самым трудовую теорию стоимости.

Однако заслуживает рассмотрения и случай, когда в производство включается не только живой труд, но и природные ресурсы, количество которых ограничено**. Труд, количество которого всегда ограничено, является одним из видов используемых ресурсов.

В работе [2, с. 19] мы показали, что в оптимальном производственном процессе число производимых продуктов совпадает с числом лимитированных ресурсов.

Запишем уравнение производственного процесса в виде

$$\mathbf{A}x_1=\mathbf{b},$$

где $\mathbf{b}$ — вектор ресурсов, а $\mathbf{A}$ — матрица технологических коэффициентов a_{ji}, показывающих количество j-го ресурса, идущее на производство единицы i-го продукта.

---

* В первом приближении величины ξ_{12} и ξ_{22} можно считать постоянными, причем величина ξ_{22} заведомо отрицательна. Что касается коэффициентов λ_1 и λ_2, то сказанное в примечании на с. 74 сохраняет силу.

** Более точная модель должна отражать использование природных ресурсов и в процессе производства живого труда.

Выделяя отдельно строку, соответствующую ограниченному труду

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = y_2,$$

мы должны считать вектор $\mathbf{b}$ имеющим размерность $(n-1)$.

Составим целевые функции

$$J_1 = f_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, y_2, \mathbf{b}), \quad J_2 = f_2(\mathbf{y}_1, x_2 - y_2),$$

и обозначим через

$$\xi_{13} = \partial f_1 / \partial \mathbf{b}$$

потребительные стоимости ресурсов с точки зрения интересов государства. Уравнение эквивалентности обмена принимает вид

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1) = c_2 y_2 + (\mathbf{c}_3, \mathbf{b}),$$

где через $\mathbf{c}_3$ обозначены пока неизвестные цены ограниченных природных ресурсов.

Прибегая к обычным манипуляциям, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_{11} = -\lambda_1 \mathbf{c}_1, \\
&\xi_{11} + \xi_{12}\mathbf{a} + A^{\mathrm{T}}\xi_{13} = -\lambda_1 (c_2\mathbf{a} + A^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_3), \\
&\xi_{21} + \xi_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{y}_1} = -\lambda_2 \mathbf{c}_1, \\
&\xi_{22}\mathbf{a} = -\lambda_2 (c_2\mathbf{a} + A^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_3).
\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Это определенная система из $4n$ уравнений относительно $4n$ неизвестных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{c}_1$, c_2 и $\mathbf{c}_3$. Множители λ_1, λ_2 по-прежнему определяются из закона стоимости, причем один из них может быть выбран произвольно. Таким образом, система имеет, как правило, единственное решение, определяя тем самым неизвестные цены товаров и ресурсов.

Покажем справедливость трудовой теории стоимости в этом имеющем первостепенную важность случае. Используя первое, второе и четвертое из уравнений (5.3), получаем

$$\mathbf{c}_1 = \left(\frac{\xi_{12}}{\lambda_1} - \frac{\xi_{22}}{\lambda_2}\right)\mathbf{a} + \frac{1}{\lambda_1} A^{\mathrm{T}}\xi_{13}. \tag{5.4}$$

Таким образом, трудовая теория остается в первом приближении справедливой только в том случае, если ресурсы, на добычу которых мы по предположению не затрачиваем труда, не имеют потребительной стоимости, т. е. при условии $\xi_{13} = 0$.

В общем же случае *цены создаваемых продуктов обусловлены не только человеческим трудом, но и потребительными свойствами лимитированных ресурсов Природы:* земли, воды, воздуха, полезных ископаемых, солнечной энергии.

Сто лет тому назад природные ресурсы были или по крайней мере казались неисчерпаемыми. Но сейчас, когда вся пригодная к использованию земля уже возделана, когда все наиболее богатые нужными минералами руды уже исчерпаны и приходится разрабатывать все менее концентрированные залежи полезных ископаемых, когда чистая вода стала редкостью, когда воздух городов и целых стран отравлен миазмами промышленных отходов, не учитывать цены природных ресурсов нельзя *.

Их цены можно найти из уравнения (5.4), если рассматривать их как продукты производственного процесса с технологической матрицей единичного типа

$$\mathbf{A}=\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

и нулевыми трудовыми затратами $\mathbf{a}=0$. Подставляя эти значения в (5.4), получаем

$$\mathbf{c}_1=\frac{1}{\lambda_1}\xi_{12}.$$

Таким образом, в данном простейшем случае цены природных ресурсов получаются пропорциональными

* С некоторой абстрактной точки зрения ограниченность природных ресурсов может казаться преходящим и условным фактором. Новейшие открытия ядерной физики и теории относительности показывают не только взаимопревращаемость различных веществ, но и взаимопревращаемость вещества и энергии. Поставив себе на службу практически необозримые запасы энергии термоядерного синтеза и покорив окружающее космическое пространство, человечество отбросит представление об ограниченности ресурсов Природы. Но если смотреть на дело с трезвых позиций сегодняшнего дня, то существующая в данный момент ограниченность природных ресурсов является таким же непреложным фактом, как и ограниченность трудовых ресурсов человечества, которые со временем тоже могут стать неограниченными.

их потребительным стоимостям. В общем же случае при наличии реального производственного процесса с $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ и $\mathbf{a} \neq 0$ цены ресурсов $\mathbf{c}_3$ определяются из уравнений (5.3).

6. Согласованный оптимум в задачах внешней торговли

Рассмотрим еще одну задачу, решение которой основано на применении принципа согласованного оптимума. Эта задача представляет интерес для экономистов, занимающихся вопросами международных отношений и внешней торговли.

Схема отношений двух государств S_1 и S_2, добывающих природные ресурсы и обменивающихся произведенной продукцией, представлена на рис. 14.

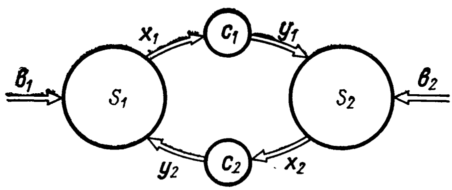

Рис. 14. Схема экономических отношений двух государств.

Введем следующие обозначения:

$\mathbf{x}_1$ — продукция, производимая S_1,

$\mathbf{x}_2$ — продукция, производимая S_2,

$\mathbf{y}_1$ — продукция, закупаемая S_2 у S_1 через внешнюю торговлю,

$\mathbf{y}_2$ — продукция, закупаемая S_1 у S_2 через внешнюю торговлю,

$\mathbf{b}_1$ — ресурсы, добываемые S_1 у Природы,

$\mathbf{b}_2$ — ресурсы, добываемые S_2 у Природы,

$\mathbf{c}_1$ — цены продукции S_1,

$\mathbf{c}_2$ — цены продукции S_2.

Рассматривается линейная производственная модель. Производство продукции у S_1 и S_2 описывается через технологические матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 + \mathbf{b}_1, \qquad \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2. \tag{6.1}$$

Целевые функции S_1 и S_2 имеют вид

$$J_1=f_1(\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{b}_1),$$
$$J_2=f_2(\mathbf{y}_1,\ \mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2,\ \mathbf{b}_2),$$

или с учетом (6.1), их можно представить в виде

$$J_1=f_1(\mathbf{x}_1-\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2-\mathbf{b}_2,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1-\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_1),$$
$$J_2=f_2(\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2-\mathbf{b}_2,\ \ \mathbf{x}_2-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1-\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2). \qquad (6.2)$$

Условие эквивалентного обмена между S_1 и S_2, имеющее вид $(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1)=(\mathbf{c}_2, \mathbf{y}_2)$, с учетом (6.1) представляется в виде

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\mathbf{c}_2,\ \mathbf{x}_1)-(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2\mathbf{c}_1,\ \mathbf{x}_2)-(\mathbf{c}_2,\ \mathbf{b}_1)+(\mathbf{c}_1,\ \mathbf{b}_2)=0. \qquad (6.3)$$

Условия согласованного оптимума, обеспечивающие максимум целевых функций обоих государств, требуют равенства нулю полных дифференциалов целевых функций: $dJ_1=0$, $dJ_2=0$.

Обозначим через

$$\xi_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1},\qquad \xi_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2}$$

потребительные стоимости собственной продукции для S_1 и S_2, через

$$\xi_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{y}_2},\qquad \xi_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{y}_1}$$

— потребительные стоимости покупаемой продукции для S_1 и S_2 соответственно, и через

$$\xi_{13}=\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{b}_1},\qquad \xi_{23}=\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{b}_2}$$

— потребительные стоимости ресурсов для S_1 и S_2.

Дифференцируя (6.2) и (6.3), получаем

$$\left.\begin{aligned}
&(\xi_{11}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\xi_{12},\ d\mathbf{x}_1)-(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_{21}\xi_{11},\ d\mathbf{x}_2)+(\xi_{13}-\xi_{12},\ d\mathbf{b}_1)+\\
&\quad+(\xi_{11},\ d\mathbf{b}_2)=0,\\
&(-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\xi_{22},\ d\mathbf{x}_1)+(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2\xi_{21}+\xi_{22},\ d\mathbf{x}_2)+(\xi_{22},\ d\mathbf{b}_1)+\\
&\quad+(\xi_{23}-\xi_{21},\ d\mathbf{b}_2)=0,\\
&(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\mathbf{c}_2,\ d\mathbf{x}_1)-(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2\mathbf{c}_1,\ d\mathbf{x}_2)-(\mathbf{c}_2,\ d\mathbf{b}_1)+(\mathbf{c}_1,\ d\mathbf{b}_2)=0.
\end{aligned}\right\}$$

Здесь функции ξ_{11}, ξ_{12} и ξ_{13} берутся в точке $[\mathbf{x}_1-\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2-\mathbf{b}_2,\ \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1-\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_1]$, а функции ξ_{21}, ξ_{22} и ξ_{23} — в точке $[\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2-\mathbf{b}_2,\ \mathbf{x}_2-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1-\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]$.

Эти три дифференциальных уравнения могут выполняться при наложении следующих условий:

$$\left.\begin{array}{ll} (A^{T}_{1})^{-1}\xi_{11}+\xi_{12}=\lambda_1 c_2; & \xi_{21}+(A^{T}_{2})^{-1}\xi_{22}=\lambda_2 c_1, \\ \xi_{11}=\lambda_1 c_1, & \xi_{22}=\lambda_2 c_2; \\ \xi_{13}-\xi_{12}=-\lambda_1 c_2, & \xi_{23}-\xi_{21}=-\lambda_2 c_1, \end{array}\right\}$$

которые можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_{11}=-\lambda_1 c_1, & \xi_{21}=\lambda_2 [(A^{T}_{2})^{-1} c_2 - c_1], \\ \xi_{12}=\lambda_1 [(A^{T}_{1})^{-1} c_1 - c_2], & \xi_{22}=-\lambda_2 c_2, \\ \xi_{13}=\lambda_1 (A^{T}_{1})^{-1} c_1, & \xi_{23}=\lambda_2 (A^{T}_{2})^{-1} c_2. \end{array}\right\}$$

Обозначим размерности векторов x_1, y_1, c_1, b_2, ξ_{11}, ξ_{21}, ξ_{23} через n, а размерности векторов x_2, y_2, c_2, b_1, ξ_{12}, ξ_{22}, ξ_{13} — через m. Полученные уравнения вместе с уравнениями (6.1) и (6.3) образуют систему из $4(n+m)+1$ уравнений относительно $4(n+m)+2$ неизвестных x_1, x_2, y_1, y_2, c_1, c_2, b_1, b_2, λ_1 и λ_2. Задаваясь масштабом цен, т. е. приравнивая субъективную оценку одного из продуктов его объективной цене, или, что то же самое, приравнивая один из множителей Лагранжа λ_1 или λ_2 единице, мы получаем определенную систему с числом уравнений, равным числу неизвестных, которая, как правило, имеет единственное решение.

Таким образом, аналитическая теория игр дает строгое решение задач внешней торговли, позволяя заменить существующую практику торгов в отношениях между государствами точным аналитическим расчетом.

7. Согласованный оптимум в балансовой модели производства и потребления

Балансовой мы будем называть модель, учитывающую, что часть производимых в обществе продуктов потребляется в процессе воспроизводства продуктов и часть производимого в обществе труда потребляется в процессе воспроизводства труда (рис. 15).

Производимые в обществе продукты x_1 делятся на продукты потребления y_1 и продукты, вновь поступающие в процесс воспроизводства, z_1

$$x_1=y_1+z_1. \qquad (7.1)$$

Точно так же производимый в обществе труд x_2 делится

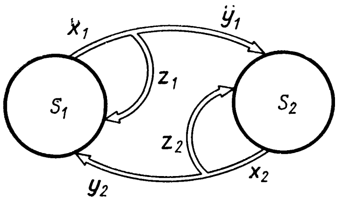

Рис. 15. Балансовая модель производства и потребления.

на труд, потребляемый в процессе производства продуктов y_2, и труд, необходимый для воспроизводства труда z_2,

$$x_2=y_2+z_2. \tag{7.2}$$

Таким образом, функция производства может быть представлена в виде

$$x_1=g_1(z_1, y_2), \tag{7.3}$$

а функция потребления — в виде

$$x_2=g_2(z_2, y_1). \tag{7.4}$$

Целевые функции аппарата управления производством и населения, осуществляющего производство труда, имеют вид

$$J_1=f_1(x_1, y_2, z_1), \qquad J_2=f_2(y_1, x_2, z_2).$$

Обозначим

$$\xi_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad \xi_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial y_2}, \qquad \xi_{12}=\frac{\partial f_2}{\partial z_1},$$

$$\xi_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \qquad \xi_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \qquad \xi_{23}=\frac{\partial f_2}{\partial z_2}.$$

Полные дифференциалы функций полезности равны

$$dJ_1=(\xi_{11}, dx_1)+(\xi_{12}, dy_2)+(\xi_{13}, dz_1),$$

$$dJ_2=(\xi_{21}, dy_1)+(\xi_{22}, dx_2)+(\xi_{23}, dz_2).$$

Исключая переменные x_1 и x_2 с помощью соотношений (7.1), (7.2), получаем

$$dJ_1=(\xi_{11}, dy_1)+(\xi_{12}, dy_2)+(\xi_{11}+\xi_{13}, dz_1),$$

$$dJ_2=(\xi_{21}, dy_1)+(\xi_{22}, dy_2)+(\xi_{22}+\xi_{23}, dz_2). \tag{7.5}$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$. Из (7.1)—(7.4) имеем

$$\mathbf{y}_1+\mathbf{z}_1=\mathbf{g}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}_2), \quad \mathbf{y}_2+\mathbf{z}_2=\mathbf{g}_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{y}_1).$$

Дифференцируя эти функции, получаем

$$\left(\mathbf{I}-\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{z}_1}\right) d\mathbf{z}_1=\left(\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{y}_2}\right) d\mathbf{y}_2-d\mathbf{y}_1,$$

$$\left(\mathbf{I}-\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{z}_2}\right) d\mathbf{z}_2=\left(\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}_1}\right) d\mathbf{y}_1-d\mathbf{y}_2,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Обозначим

$$\mathbf{A}_1=\left(\mathbf{I}-\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{z}_1}\right)^{-1}, \quad \mathbf{A}_2=\left(\mathbf{I}-\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{z}_2}\right)^{-1};$$

$$\mathbf{B}_1=\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{y}_2}, \quad \mathbf{B}_2=\frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \mathbf{y}_1}.$$

В результате получим

$$d\mathbf{z}_1=\mathbf{A}_1(\mathbf{B}_1 d\mathbf{y}_2-d\mathbf{y}_1), \qquad d\mathbf{z}_2=\mathbf{A}_2(\mathbf{B}_2 d\mathbf{y}_1-d\mathbf{y}_2).$$

Подставляя эти выражения в (7.5), будем иметь

$$dJ_1=([\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1]\,\xi_{11}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1\xi_{13}, d\mathbf{y}_1)+(\xi_{12}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_1\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1 \times$$

$$\times[\xi_{11}+\xi_{13}], d\mathbf{y}_2),$$

$$dJ_2=(\xi_{21}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2[\xi_{22}+\xi_{23}], d\mathbf{y}_1)+([\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2] \times$$

$$\times\,\xi_{22}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2\xi_{23}, d\mathbf{y}_2).$$

Условие эквивалентного обмена имеет вид

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{y}_1)=(\mathbf{c}_2, \mathbf{y}_2).$$

Дифференцируя его, имеем

$$(\mathbf{c}_1, d\mathbf{y}_1)-(\mathbf{c}_2, d\mathbf{y}_2)=0.$$

Условиями согласованного оптимума являются

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1)\,\xi_{11}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1\xi_{13}=-\lambda_1\mathbf{c}_1, \\
\xi_{12}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_1\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_1(\xi_{11}+\xi_{13})=\lambda_1\mathbf{c}_2, \\
\xi_{21}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_2\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2(\xi_{22}+\xi_{23})=\lambda_2\mathbf{c}_1, \\
(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2)\,\xi_{22}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_2\xi_{23}=-\lambda_2\mathbf{c}_2,
\end{array}\right\}$$

или после преобразований

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{I}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}{}_1)\,\xi_{11}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}{}_1\xi_{13}&=-\lambda_1\mathrm{c}_1,\\ \mathrm{B}^{\mathrm{T}}{}_1\xi_{11}+\xi_{12}&=\lambda_1(\mathrm{c}_2-\mathrm{B}^{\mathrm{T}}{}_1\mathrm{c}_1),\\ \mathrm{B}^{\mathrm{T}}{}_2\xi_{22}+\xi_{21}&=\lambda_2(\mathrm{c}_1-\mathrm{B}^{\mathrm{T}}{}_2\mathrm{c}_2),\\ (\mathrm{I}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}{}_2)\,\xi_{22}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}{}_2\xi_{23}&=-\lambda_2\mathrm{c}_2.\end{aligned}\right\}$$

Обозначим размерности векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{c}_1$, ξ_{11}, ξ_{21} через n, а размерности векторов $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{c}_2$, ξ_{12}, ξ_{22} — через m. Мы получили определенную систему из $2(n+m)$ уравнений, которые вместе с $2(n+m)$ уравнениями (7.1)—(7.4) позволяют определить $4(n+m)$ неизвестных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$. По-прежнему один из множителей Лагранжа λ_1 или λ_2 задается произвольно, а другой определяется из условия эквивалентного обмена.

8. Согласованный оптимум в отношениях между трудящимися: рабочими, крестьянами и интеллигенцией

Продукты труда в современном обществе являются результатом совместной работы трех групп трудящихся: рабочих (S_1), крестьян (S_2) и интеллигенции (S_3). Взаимоотношения интеллигенции, крестьян и рабочих схематически представлены на рис. 16.

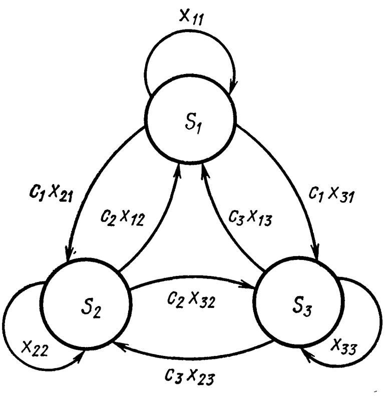

Рис. 16. Схема отношений трех групп трудящихся.

Введем следующие обозначения: x_1 — промышленные продукты, x_2 — продукты сельского хозяйства, x_3 — продукты интеллектуального труда, x_{ij} — доля x_j, потребляемая группой S_i, c_1—цена промышленной продукции, c_2 — цена сельскохозяйственной продукции, c_3 — цена интеллектуальной продукции.

Переменные x_j и x_{ij} связаны между собой балансовыми соотношениями

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_{11}+x_{21}+x_{31},\\ x_2&=x_{12}+x_{22}+x_{32},\\ x_3&=x_{13}+x_{23}+x_{33}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.1)$$

Производство продукции тремя группами можно описать с помощью производственных функций

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{12}, x_{13}), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{21}, x_{23}), \\ x_3 &= \varphi_3(x_{31}, x_{32}). \end{aligned}\right\} \quad (8.2)$$

Степень удовлетворенности каждой группы описывается функциями

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= f_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}), \\ J_2 &= f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}), \\ J_3 &= f_3(x_{31}, x_{32}, x_{33}). \end{aligned}\right\}$$

Введем дифференциальные потребительные стоимости

$$\xi_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Условия согласованного оптимума, обеспечивающие максимальную удовлетворенность всех трех групп, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 &= \xi_{11}dx_{11} + \xi_{12}dx_{12} + \xi_{13}dx_{13} = 0, \\ dJ_2 &= \xi_{21}dx_{21} + \xi_{22}dx_{22} + \xi_{23}dx_{23} = 0, \\ dJ_3 &= \xi_{31}dx_{31} + \xi_{32}dx_{32} + \xi_{33}dx_{33} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Исключая переменные x_{11}, x_{22} и x_{33} с помощью уравнений (8.1), получаем

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 &= \xi_{11}(dx_1 - dx_{21} - dx_{31}) + \xi_{12}dx_{12} + \xi_{13}dx_{13} = 0, \\ dJ_2 &= \xi_{21}dx_{21} + \xi_{22}(dx_2 - dx_{12} - dx_{32}) + \xi_{23}dx_{23} = 0, \\ dJ_3 &= \xi_{31}dx_{31} + \xi_{32}dx_{32} + \xi_{33}(dx_3 - dx_{13} - dx_{23}) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.3)$$

Дифференцируя (8.2), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \psi_{12}dx_{12} + \psi_{13}dx_{13}, \\ dx_2 &= \psi_{21}dx_{21} + \psi_{23}dx_{23}, \\ dx_3 &= \psi_{31}dx_{31} + \psi_{32}dx_{32}. \end{aligned}\right\} \quad (8.4)$$

Подставим (8.4) в (8.3)

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 &= (\psi_{12}\xi_{11} + \xi_{12})\,dx_{12} + (\psi_{13}\xi_{11} - \xi_{13})\,dx_{13} - \\ &\quad - \xi_{11}dx_{21} - \xi_{11}dx_{31} = 0, \\ dJ_2 &= (\psi_{21}\xi_{22} + \xi_{21})\,dx_{21} + (\psi_{23}\xi_{22} + \xi_{23})\,dx_{23} - \\ &\quad - \xi_{22}dx_{12} - \xi_{22}dx_{32} = 0, \\ dJ_3 &= (\psi_{31}\xi_{33} + \xi_{31})\,dx_{31} + (\psi_{32}\xi_{33} + \xi_{32})\,dx_{32} - \\ &\quad - \xi_{33}dx_{13} - \xi_{33}dx_{23} = 0, \end{aligned}\right\}$$

Введя упрощенные обозначения

$$\left.\begin{aligned} \xi_{112} &= \psi_{12}\xi_{11} + \xi_{12}, \\ \xi_{221} &= \psi_{21}\xi_{22} + \xi_{21}, \\ \xi_{331} &= \psi_{31}\xi_{33} + \xi_{31}, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \xi_{113} &= \psi_{13}\xi_{11} + \xi_{13}, \\ \xi_{223} &= \psi_{23}\xi_{22} + \xi_{23}, \\ \xi_{332} &= \psi_{32}\xi_{33} + \xi_{32}, \end{aligned}\right\}$$

перепишем эти условия в виде

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 &= -\xi_{11}dx_{21} - \xi_{11}dx_{31} + \xi_{112}dx_{12} + \xi_{113}dx_{13} = 0, \\ dJ_2 &= \xi_{221}dx_{21} - \xi_{22}dx_{12} - \xi_{22}dx_{32} + \xi_{223}dx_{23} = 0, \\ dJ_3 &= \xi_{231}dx_{31} + \xi_{332}dx_{32} - \xi_{33}dx_{13} - \xi_{33}dx_{23} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Условия эквивалентного обмена между тремя группами имеют вид

$$\left.\begin{aligned} c_1x_{31} &= c_2x_{12}, \\ c_1x_{31} &= c_3x_{13}, \\ c_2x_{32} &= c_3x_{23}. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Дифференцируя эти условия, исключаем переменные x_{12}, x_{23} и x_{31}. В результате будем иметь

$$\left.\begin{aligned} dJ_1 &= \left(\frac{c_1}{c_2}\xi_{112} - \xi_{11}\right)dx_{21} + \left(\xi_{113} - \frac{c_3}{c_1}\xi_{11}\right)dx_{13} = 0, \\ dJ_2 &= \left(\xi_{221} - \frac{c_1}{c_2}\xi_{22}\right)dx_{21} + \left(\frac{c_2}{c_3}\xi_{223} - \xi_{22}\right)dx_{32} = 0, \\ dJ_3 &= \left(\frac{c_3}{c_1}\xi_{331} - \xi_{33}\right)dx_{13} + \left(\xi_{332} - \frac{c_2}{c_3}\xi_{33}\right)dx_{32} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Приравнивая нулю все частные производные, мы получаем систему из 6 уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_1\xi_{112} - c_2\xi_{11} &= 0, \\ c_1\xi_{113} - c_3\xi_{11} &= 0, \\ c_2\xi_{221} - c_1\xi_{22} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} c_2\xi_{223} - c_3\xi_{22} &= 0, \\ c_3\xi_{331} - c_1\xi_{33} &= 0, \\ c_3\xi_{332} - c_2\xi_{33} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

которые вместе с тремя уравнениями эквивалентного обмена (8.5) образуют определенную систему из 9 уравнений относительно 9 неизвестных x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{31}, x_{23}, x_{32}, c_1, c_2 и c_3. Поскольку система (8.5), (8.6) является однородной относительно цен c_1, c_2 и c_3, то одну из цен можно задать произвольно, определив тем самым масштаб цен.

Таким образом, мы добились того, что все обмены между тремя группами являются оптимальными для каждой пары групп.

Приложение 1

Элементы математической политической экономии *

Дальнейшее более глубокое применение методов теории игр к экономике требует предварительного изложения азов политической экономии.

Предметом экономической науки является изучение процессов производства, распределения и потребления материальных благ в человеческом обществе. Поддержание человеческой жизни немыслимо без обмена веществ между человеческим организмом и окружающей его средой. Человек живет за счет Природы, и создаваемая им на Земле новая стоимость есть преображенная форма стоимости, возникающей в результате естественных природных процессов (в частности, процесса фотосинтеза органических веществ из неорганических).

Изучение вопроса о том, как трансформируется стоимость в различных процессах, происходящих в Природе и обществе, является первоочередной задачей математической политической экономии.

Это изучение мы начнем с рассмотрения линейного производственного процесса, в котором производится n видов продуктов $\mathbf{x}$, а потребляются n_1 видов труда $\mathbf{b}_1$ и n_2 видов природных ресурсов $\mathbf{b}_2$.

Обозначим через ξ стоимости производимых продуктов, через η_1 — стоимости различных видов труда, а через η_2 — стоимости природных ресурсов. Обозначим через $\mathbf{A}_1$ матрицу трудоемкостей, а через $\mathbf{A}_2$ — матрицу материалоемкостей продуктов.

Известно **, что в оптимальном производственном процессе число производимых видов продукции n равно числу лимитированных потребляемых ингредиентов, т. е. в данном случае $n=n_1+n_2$, за исключением так называемых случаев «вырожденности», когда $n<n_1+n_2$.

Если учитывать только лимитирующие ингредиенты, то изучаемый линейный производственный процесс может быть описан как определенная линейная система из n равенств относительно n пере-

---

* Это приложение содержит спорные и не до конца доказанные положения. Помещая его, редакция, тем не менее, надеется, что оно вызовет полезные дискуссии, ибо здесь дается все-таки четкая абстрактная модель, которую можно обсуждать. Подобно тому, как абстрактная модель несуществующего в Природе идеального газа дала возможность получить реальные законы термодинамики и статистической физики, так же с помощью абстрактных моделей кибернетики надеются получить реальные законы функционирования экономических систем. При этом надо проявить научную зрелость и не отчаиваться, если модель выбрана неудачно. (*Прим. ред.*)

** См. Волгин Л. Н. [2, с. 19].

менных

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x = b_2. \qquad (1)$$

Нелимитирующие ингредиенты можно не учитывать, ибо они не влияют на оптимальный производственный план и не имеют стоимости (в смысле В. Парето — Дж. фон Неймана).

Конечно, для того чтобы выделить эти лимитирующие ингредиенты, надо решить полную задачу линейного планирования

$$J = (\xi, x) \longrightarrow \max, \quad A_1 x \leqslant b_1, \quad A_2 x \leqslant b_2, \quad A_3 x \leqslant b_3,$$

результатом решения которой будет превращение первых двух неравенств в равенства (1), а последнего нестрогого неравенства в строгое неравенство $A_3 x < b_3$, которое можно отбросить.

Задача, двойственная к поставленной [2, с. 19]

$$J^{\mathrm{T}} = (b, \eta) \longrightarrow \min, \quad A^{\mathrm{T}}_1 \eta_1 + A^{\mathrm{T}}_2 \eta_2 + A^{\mathrm{T}}_3 \eta_3 \geqslant \xi,$$

в результате оптимального решения дает $\eta^*_3 = 0$ и

$$A^{\mathrm{T}}_1 \eta^*_1 + A^{\mathrm{T}}_2 \eta^*_2 = \xi. \qquad (2)$$

Полученное уравнение представляет собой *закон сохранения стоимости.*

Стоимость каждой единицы произведенного продукта образуется из перенесенной на нее стоимости труда

$$v^* = A^{\mathrm{T}}_1 \eta^*_1$$

и перенесенной на нее стоимости ресурсов Природы

$$c^* = A^{\mathrm{T}}_2 \eta^*_2.$$

В итоге

$$\xi = c^* + v^*. \qquad (3)$$

Утверждая, что величина стоимости определяется количеством труда, классическая политэкономия, по сути дела, считала, что ограничивающим фактором производства является только располагаемое обществом количество человеческого труда, а ресурсы Природы: землю, воду, воздух, полезные ископаемые — считала имеющимися в избытке, приписывая им нулевую стоимость. Таким образом, имеющая хождение в нашей литературе «стоимость» в смысле классической политической экономии есть также решение задачи линейного планирования, но только в том случае, когда $n_2 = 0$. Следовательно, *понятие стоимости в смысле В. Парето — Дж. фон Неймана есть обобщение понятия стоимости в классическом смысле на случай произвольного* n_2. *

В классической экономической теории, безусловно, учитывается, что в процессе производства потребляется не только труд, но и ресурсы: т. е. сырье, машины и пр. Но эти ресурсы считаются, в свою очередь, произведенными трудом человека, и, таким образом, все сводится к труду и только к труду **.

---

* Отметим, что крупный английский ученый XVII в. Уильям Петти занимал правильную позицию в этом вопросе. Ему принадлежит крылатая фраза: «Труд — отец богатства, а Земля — его мать», которую, кстати, цитирует в своем «Капитале» и К. Маркс.

** Но Землю-то создал не человек!

Та часть стоимости продукта, которая возникает за счет снашивания машин, называется «постоянным капиталом». Обозначим ее через c. Поскольку износ машин есть только часть потребленных ресурсов, то $c<c^*$. Ведя «двойную бухгалтерию», капиталист — организатор производственного процесса — оплачивает рабочую силу не по ее истинной стоимости v^*, а по стоимости $v<v^*$. Неоплаченный труд рабочих и неоплаченный расход ресурсов Природы образуют «прибавочную стоимость»

$$m=(v^*-v)+(c^*-c). \qquad (4)$$

Преобразуя это уравнение и учитывая (3), мы получаем уравнение

$$\xi=c+v+m. \qquad (5)$$

Это уравнение в отличие от уравнения (3), показывающего, как создается стоимость, показывает, как она распределяется: c — это возмещение ресурсов Природы (неполное), v — возмещение затрат труда (неполное), а m — прибыль.

Прибыль частично используется для расширения производства, а частично потребляется самим капиталистом, возмещая затраты его труда по организации производства. Поскольку это один из наиболее квалифицированных видов труда, трудно поддающихся учету и нормированию, а также благодаря тому, что капиталист обладает правами собственности на средства производства, которых лишены рабочие, возникает возможность эксплуатации рабочих капиталистами: это значит, что v непропорционально мало, а m непомерно велико.

Поскольку организация производственного процесса есть тоже производственный процесс (только нелинейный!), то прибавочная стоимость m должна возмещать вложенный капиталистом труд, и значит должна быть больше нуля: $m>0$. Если при этом не происходит ограбления Природы, т. е. $c^*=c$, то, как это следует из уравнения (4), $v<v^*$. Это значит, что оплата труда рабочих не может быть полной в принципе и не всякое $v<v^*$ означает эксплуатацию человека человеком.

Если рассматривать производственный процесс вместе с процессом его организации как единое целое, то это будет некий нелинейный процесс, изучая который, мы можем найти оптимальное разделение вновь созданной стоимости $\xi-c$ между рабочими и капиталистом

$$v^\circ+m^\circ=\xi-c.$$

Возможность эксплуатации человека человеком существует лишь на определенной ступени развития человеческого общества, характеризующейся тем, что, во-первых, производство возможно лишь на основе соединения средств производства с человеческим трудом, а во-вторых, тем, что средства производства выступают в качестве объекта собственности отдельных человеческих существ.

Оба эти условия являются преходящими, потому что развитие средств производства идет так, что, во-первых, становится возможным производство благ, с одной стороны, лишь одними средствами производства без участия человека (автоматическое производство), и, с другой — лишь одним человеческим трудом без использования средств производства (интеллектуальный труд), а во-вторых, средства производства становятся столь громоздкими, что сохранение отношения к ним как к предметам собственности становится немыслимым.

Закон сохранения стоимости можно записать и по-другому. Подставляя в $J^*=(\xi, \mathbf{x}^*)$ уравнение (2), получаем

$$J^*=(\xi, \mathbf{x}^*)=(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\eta^*{}_1, \mathbf{x}^*)+(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2\eta^*{}_2, \mathbf{x}^*)=(\eta^*{}_1, \mathbf{A}_1\mathbf{x}^*)+(\eta^*{}_2, \mathbf{A}_2\mathbf{x}^*)$$

или с учетом (1)

$$J^*=(\eta^*{}_1, \mathbf{b}_1)+(\eta^*{}_2, \mathbf{b}_2).$$

Введем обозначения

$$\mathbf{v}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1\eta_1, \quad \mathbf{c}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2\eta_2, \quad \mathbf{m}_1=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_1(\eta^*{}_1-\eta_1), \quad \mathbf{m}_2=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{}_2(\eta^*{}_2-\eta_2).$$

С учетом этих обозначений уравнение закона сохранения стоимости принимает вид

$$J^*=C+V+M_1+M_2,$$

где $V=(\mathbf{b}_1, \eta_1)$ — стоимость рабочей силы, т. е. оплаченный труд рабочих; $M_1=(\mathbf{b}_1, \eta^*{}_1-\eta_1)$ — прибавочная стоимость, возникающая за счет неоплаченного труда рабочих; $C=(\mathbf{b}_2, \eta_2)$ — возмещаемая стоимость потраченных ресурсов Природы (главным образом, изношенных машин); $M_2=(\mathbf{b}_2, \eta^*{}_2-\eta_2)$ — прибавочная стоимость, возникающая за счет хищнического ограбления Природы, невозмещаемых ее ресурсов, уменьшения плодородия почвы, истребления диких животных и растений, уменьшения запасов полезных ископаемых и т. д.

Общая сумма прибыли капиталиста — организатора производственного процесса — равна

$$M=M_1+M_2.$$

Стоимость, производимая трудом человека

$$V+M_1=(\mathbf{b}_1, \eta^*{}_1),$$

превышает стоимость самой рабочей силы:

$$V=(\mathbf{b}_1, \eta_1).$$

Функция

$$V+M_1=\varphi(V)$$

выражает возможность роста общего объема стоимости товаров в человеческом обществе, что фактически и имеет место. Этот рост происходит за счет деградации природы согласно закону $C=\psi(C+M_2)$.

Если природные ресурсы, потребляемые в производственных процессах, возмещаются полностью

$$\eta_2=\eta^*{}_2,$$

то общая стоимость благ — продуктов человеческого труда на Земле — в результате жизнедеятельности человечества может возрастать.

Человек может как обогащать Природу, так и обеднять ее. Если человек не обращается с Природой хищнически, то стоимость природных богатств на Земле возрастает в результате естественных природных процессов: получения и усвоения солнечной энергии, жизнедеятельности микроорганизмов, растений и животных, химико-геологических процессов накопления полезных ископаемых и т. д.

Самым существенным фактором роста стоимости земных благ является биологическое размножение живых существ на Земле. Одноклеточные организмы размножаются, как правило, путем парного деления (коэффициент размножения равен 2). Коэффициент размножения высокоорганизованных живых существ в среднем также больше единицы. Так, человечество растет в среднем на 25% за одно поколение. В результате естественных и искусственных мутаций на Земле возникают новые виды живых организмов, среди которых человек производит отбор наиболее полезных.

Эмоциональное состояние человечества на каждом историческом этапе его эволюции (впрочем, так же как и состояние каждого отдельного человека в различные моменты его жизни) определяется соотношением между его возможностями g и потребностями f.

Печально известный английский экономист и социолог Томас Роберт Мальтус (1766—1834), чрезмерно упрощая вопрос, считал, что возможности общества растут в дискретном времени i по закону арифметической прогрессии

$$g_{i+1}=g_i+d \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

а потребности — по закону геометрической прогрессии

$$f_{i+1}=\alpha f_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Решение этих уравнений в непрерывном времени дает для возможностей общества — прямую

$$g(t)=a_0+a_1t,$$

а для потребностей — экспоненту

$$f(t)=f(0)e^{at}.$$

Поскольку экспонента растет быстрее прямой, отсюда вытекает пессимистический вывод о неизбежности отставания возможностей общества от его потребностей в будущем.

На самом деле возможности и потребности общества изменяются во времени по более сложному закону, чем в мальтусовском приближении. Отправляясь от этого приближения, мы учтем квадратичные эффекты. Аппроксимируя уравнение возможностей общества разностным уравнением второго порядка

$$g_{i+1}-2g_i+g_{i-1}=d,$$

мы получаем уже не прямую, а параболу

$$g(t)=a_0+a_1t+a_2t^2.$$

Вводя квадратичный член в уравнение потребностей

$$f_{i+1}=\alpha f_i-\beta f^2{}_i,$$

мы получаем уже не экспоненту, а логистическую кривую

$$f(t)=a/(1+be^{-ct}).$$

Примерный вид кривых возможностей и потребностей человечества во времени, соответствующих внесенным поправкам, показан на рис. 17.

Согласно этому представлению, в истории человечества можно различать три эпохи: прошлую — когда возможности человечества превышали его потребности (так называемый «первобытный коммунизм»), настоящую — когда возможности общества отстают от его потребностей, и будущую — когда возможности общества перекроют его потребности («научный коммунизм», или «общество всеобщего изобилия»).

Что же является целью человечества? Вполне допустимо представлять себе, что целью человечества является производство материальных благ **x** в таком объеме, который обеспечивает дости-

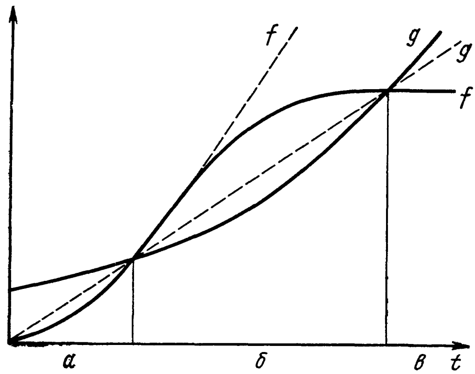

Рис. 17. Примерный ход развития возможностей (g) и потребностей (f) человечества:

а — «первобытный коммунизм»; *б* — современность; *в* — «общество всеобщего изобилия» (пунктиром обозначено приближение Мальтуса).

жение заданной степени удовлетворения своих потребностей $f(\mathbf{x}) \geqslant \geqslant c$ с минимальными эмоциональными затратами

$$J_1 = g(\mathbf{x}) \longrightarrow \min.$$

Допустима также и такая постановка задачи, при которой общество, располагающее ограниченными резервами свободного труда $g(\mathbf{x}) \leqslant a$, стремится максимизировать свое эмоциональное удовлетворение

$$J_2 = f(\mathbf{x}) \longrightarrow \max.$$

Если x^* есть оптимальное решение первой из этих задач, причем оно достигается на границе допустимой области, т. е. при $f(\mathbf{x}^*) = c$, и обеспечивает значение критерия оптимальности, равное

$$J^*_1 = g(\mathbf{x}^*),$$

то это же $\mathbf{x}^*$ является оптимальным решением и второй задачи, при условии, что $a = J^*_1$, и это решение дает значение критерия оптимальности второй задачи, равное величине ограничения первой задачи

$$J^*_2 = f(\mathbf{x}^*) = c.$$

Эта единственность оптимального решения обеих задач сохраняется и при условии, что в каждую из этих задач внесено дополнительное ограничение на используемые природные ресурсы вида

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{b}.$$

Постановка этой пары задач и доказательство единственности их решения содержится в работе А. Г. Аганбегяна и К. А. Багриновского [33].

Приложение 2

Конкуренция между государством и «черным рынком»

Модель экономической структуры общества можно представить себе условно в виде, изображенном на рис. 18. Элемент S_0 обозначает население, осуществляющее функции производства и потребления продуктов труда. Система S_1 есть государственная система учета и планирования — будем называть эту систему «правой». Система S_2 есть система «частной инициативы», или «черный рынок» — будем называть ее «левой» системой. Капиталистические государства характеризуются преобладанием «левой» системы над «правой», социалистические же — преобладанием «правой» системы над «левой». Считать, что в современных социалистических государствах «левой» системы совсем нет, было бы опасным и наивным заблуждением.

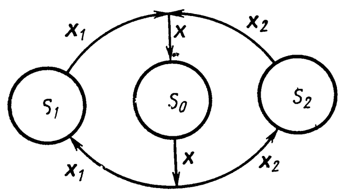

Рис. 18. Модель отношений между государством и «черным рынком».

Товары, производимые в обществе, достигают потребителя по одному из двух каналов: «правому» или «левому». По «правому» каналу проходят товары, учитываемые официальной статистикой и реализуемые государством через свою сеть снабжения и торговли. «Налево» уходят товары, ускользающие от официальной системы учета в результате неконтролируемого производства, хищений, служебных махинаций, злоупотреблений и реализуемые на «черном рынке».

Обозначив через $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ объемы товаров, проходящих по каждому из каналов, имеем

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}$ — общий объем производства.

Система S_1 приобретает товары у производителей по себестоимостям $\boldsymbol{\gamma}_1$ и продает их потребителям по ценам $\mathbf{c}_1$, получая прибыль

$$J_1 = (\mathbf{c}_1 - \boldsymbol{\gamma}_1,\ \mathbf{x}_1).$$

Система S_2 приобретает товары по ценам γ_2 и реализует их по ценам c_2, получая прибыль

$$J_2=(c_2-\gamma_2,\ x_2).$$

Система S_1, организованная оптимально по критерию всего общества, использует эту прибыль на расширение производства и другие нужды всего общества. Система же S_2 использует прибыль не в интересах общества в целом, а в корыстных интересах отдельных личностей.

Каждая из систем S_1 и S_2 стремится к максимуму прибыли, ибо величиной прибыли определяется ее жизнеспособность. При этом возникает игра, т. е. конфликтная ситуация, к которой применимы методы теории игр.

Рассмотрим вначале случай, когда функционирует только «правая» система, а «левая» отсутствует, т. е. $x_2=0$. Обозначим прибыль этой системы просто через

$$J=(c-\gamma,\ x).$$

Платежеспособный спрос населения на товары зависит от их цен:

$$x=x(c).$$

Эта функция априорно неизвестна и медленно меняется со временем случайным образом ввиду технического прогресса, колебаний моды и многих других трудно учитываемых факторов. Если бы вид этой функции был известен, то можно было бы рассчитать оптимальную с точки зрения S_1 систему цен c^*, решив уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial c}=x+H^{т}(c-\gamma)=0,$$

где $H=\partial x/\partial c$ — матрица эластичностей спроса. Эта система уравнений распадается на группы уравнений, связывающих оптимальные цены на взаимозаменяемые товары.

Оптимальная система цен c^* определяет и оптимальную структуру производства: она соответствует той структуре потребления

$$x^*=x(c^*),$$

которая сложится при оптимальной системе цен.

Поскольку функция спроса априорно неизвестна, то нахождение оптимальной системы цен можно произвести эмпирически, действуя, например, по методу градиента *. Для реализации метода градиента надо периодически (например, ежегодно) производить реформу цен, переходя от цен c к ценам $c+\Delta c$ и подсчитывая новое значение спроса $x(c+\Delta c)$. При этом мы будем получать следующее приращение прибыли:

$$\Delta J=(c-\gamma+\Delta c,\ x(c+\Delta c))-(c-\gamma,\ x(c)).$$

Направление изменения цен Δc выбирается таким, в котором главная часть приращения прибыли

$$\Delta J=(x(c)+H^{т}(c-\gamma),\ \Delta c)$$

* При этом предполагается, что производственная система физически в состоянии удовлетворить любой спрос.

максимальна, а это — направление градиента, следовательно,

$$\Delta c = \alpha[x(c) + H^{T}(c - \gamma)].$$

Мы получили итеративный алгоритм последовательности реформ

$$c_{i+1} = c_i + \alpha[x(c_i) + H^{T}_i(c_i - \gamma)],$$

который после практически конечного числа итераций позволяет сколь угодно точно приблизиться к оптимальной системе цен c^*, дающей наибольшую прибыль государству.

Однако эта процедура, игнорирующая существование конкурентной системы S_2 и предполагающая государственную монополию на все виды товаров, которая в принципе никогда не осуществима (!), привела бы к таким неимоверно высоким ценам, при которых спрос на государственную продукцию упал бы до минимума, а производители предпочли бы вести «натуральное хозяйство», производя самостоятельно те виды товаров, которые им нужны для личного потребления. Это прекрасно осознавал В. И. Ленин, предупреждая теоретиков-плановиков от головотяпства.

Рассмотрим теперь математическую модель конкурентной системы обслуживания потребителей и производителей, представленную субъектами S_1 и S_2 — государством и «черным рынком». Спрос потребителя, который имеет возможность выбирать между предложениями обеих систем, меняется в зависимости от соотношения цен в «правом» и «левом» каналах. Если цена товара, запрашиваемая «левым» поставщиком, ниже государственной цены, то потребитель мгновенно переключается с «правого» канала на «левый». Если цена товара, предлагаемая «левым» скупщиком производителю выше государственной себестоимости, то товар уходит «налево».

В зависимости от соотношения цен на товар, запрашиваемых поставщиками S_1 и S_2, объем реализации товара через «правую» и «левую» системы равен

$$x_1(c_1, c_2) = x(c_1)\,\sigma(c_2 - c_1) = \begin{cases} x(c_1), & c_1 < c_2, \\ 0, & c_2 < c_1, \end{cases}$$

$$x_2(c_1, c_2) = x(c_2)\,\sigma(c_1 - c_2) = \begin{cases} x(c_2), & c_2 < c_1, \\ 0, & c_1 < c_2. \end{cases}$$

Функции зависимости объема продажи от цены $x(c_1)$ и $x(c_2)$ одинаковы для обеих систем, ибо покупателю безразлично, у кого покупать товар — у государства или у частника, если прочие условия (качество товара и его цена) одинаковы у обеих систем.

«Левая» система может предложить товары потребителю по более низким ценам, чем «правая» система, если цена производства товара в «левой» системе γ_2 меньше его себестоимости у государства γ_1: $\gamma_2 < \gamma_1$. Цена γ_2 может равняться нулю, если товары попадают в «левый» канал просто в результате хищений.

Если цены в «правой» системе слишком низки (c_1 мало) и товары становятся дефицитными, исчезая из продажи, то «левая» система, приобретая их у «правой» по цене $\gamma_2 = c_1$, начинает спекулировать ими по цене $c_2 > c_1$.

Если цены в «правой» системе назначены неправильно, например более трудоемкий товар x_1 продается по менее высокой цене, чем менее трудоемкий товар x_2, то производители реагируют на это автоматически, отказываясь от производства товара x_1 и переходя на производство более выгодного товара x_2, в результате чего товар x_1 станет редкостью и будет продаваться по спекулятивным ценам на «черном рынке».

Поскольку производители обладают суверенностью решения, сдать ли произведенную продукцию государству по себестоимости γ_1 или реализовать непосредственно потребителю по цене c_2, то при высоком уровне государственных цен $c_1 \gg \gamma_1$ они всегда имеют возможность с выгодой для себя реализовать продукцию «налево» по цене c_2

$$c_1 > c_2 > \gamma_1.$$

Таким образом, возможность появления «левых» каналов существует всегда, пока существует «правая» система — государство.

Возникающая игра двух систем обслуживания населения, описываемая уравнениями

$$J_1 = (\mathbf{c}_1 - \boldsymbol{\gamma}_1, \ \mathbf{x}_1(\mathbf{c}_1, \ \mathbf{c}_2)) \longrightarrow \max,$$

$$J_2 = (\mathbf{c}_2 - \boldsymbol{\gamma}_2, \ \mathbf{x}_2(\mathbf{c}_1, \ \mathbf{c}_2)) \longrightarrow \max,$$

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \leqslant \mathbf{x}, \ \mathbf{x}_1 \geqslant 0, \ \mathbf{x}_2 \geqslant 0,$$

не является *корректной* математической игрой *, которая может иметь оптимальное решение либо в чистых, либо в смешанных стратегиях **.

Однако в жизни такие игры происходят. Математическое доопределение подобных математически некорректных игр, по-видимому, возможно, если из пространства ситуаций игры $\mathbf{x} \in X$ в поисках оптимума перейти в пространство реализуемых итеративных алгоритмов, которыми могут пользоваться игроки, и искать оптимальные параметры соответствующих алгоритмов или сами оптимальные алгоритмы. При этом возникает динамическая игра *** с поочередным выбором личных ходов обоими игроками, игра, в которой важнейшее значение имеет темп обработки информации и принятия решений каждым из игроков. Темпы, в которых действуют игроки, могут быть различны для обоих игроков и меняться в ходе динамической игры, подобно тому как это происходит во время дуэли.

Для игрока S_1, представляющего собой централизованное государство, под силу реализация довольно сложных динамических стратегий игры типа описанного градиентного метода. Игрок S_2 — «черный рынок» — существует только в основном за счет ошибок игрока S_1, однако он действует более оперативно. Его возможности будут сведены к минимуму, если государство как орган руководства экономической жизнью общества будет действовать оптимально.

---

* На существование некорректных аналитических игр обращено внимание в работе [2, с. 107].

** Аналитическая игра, особенно стохастическая, может решаться в смешанных стратегиях, когда вместо нахождения единственной оптимальной точки $\mathbf{x}$ ищется ее распределение $w(\mathbf{x})$ [41].

*** См. Волгин Л. Н. [2, с. 100].

Приложение 3

Стимулирование волевых усилий человека

Функцией стимулирования $y=f(x)$ называется зависимость дохода человека y, выраженного в определенных денежных единицах, от количества произведенного им общественно полезного продукта x. Обратная функция $x=f_{-1}(y)$, выражающая зависимость количества продукта x, которое надо произвести, чтобы получить определенный доход y, называется *функцией требований.* Функция стимулирования выражает основной экономический закон данного общественного строя — закон распределения общественных благ между людьми в зависимости от их общественной ценности.

Общество, заинтересованное в росте количества произведенной продукции, должно выбирать функцию стимулирования такой, чтобы доход человека рос с ростом произведенного им продукта, т. е. чтобы

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)>0. \tag{1}$$

Однако это требование не является достаточным. Дело в том, что человек заинтересован не просто в максимуме дохода, а в максимуме дохода на единицу произведенной им продукции

$$\frac{y}{x}=\frac{f(x)}{x}\to \max, \tag{2}$$

т. е. в максимуме дохода при минимуме труда. Если выполняется условие (1), т. е. доход растет с ростом продукта труда, но растет недостаточно быстро, то отношение (2) может даже падать. Для того чтобы заинтересовать человека в росте продукта труда, необходимо, чтобы его доход рос быстрее, чем растет продукт его труда, т. е. необходимо выполнение неравенства*

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)>0. \tag{3}$$

Функция стимулирования, удовлетворяющая требованиям (1) и (3), представлена на рис. 19.

Фактически при существующей системе стимулирования функция стимулирования зачастую не удовлетворяет не только требованию (3), но даже и требованию (1). На рис. 20 представлена функция требований, соответствующая этой далеко не оптимальной функции стимулирования.

Эта функция показывает, что при малых доходах требования к человеку растут очень быстро с повышением доходов, затем прирост требований уменьшается, а при больших доходах требования к человеку даже начинают падать.

Интеллектуальные и физические усилия человека и общества в целом, продукт труда отдельного человека и совокупный общественный продукт, денежный доход отдельного человека и национальный доход, степень удовлетворенности потребностей человека и всего общества связаны между собой функционально. Интеллек-

---

* Это условие не означает, что уровень дохода превышает стоимость произведенного продукта.

туальные и физические усилия общества не могут быть произвольными, а подчиняются определенному закону распределения. Оптимальная функция стимулирования, максимизирующая состояние удовлетворенности общества в целом, определяется видом этого закона распределения, а также социально-физиологическими функциями эффективности, сознательности и потребностей.

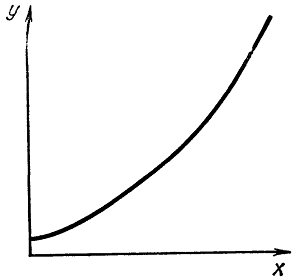

Рис. 19. Функция стимулирования, какой она должна быть.

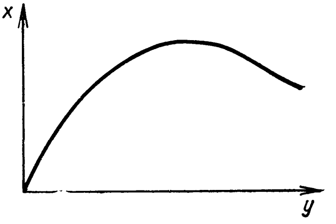

Рис. 20. Функция требований, какова она есть.

Социально-экономическое функционирование человека в обществе зависит от следующих его характеристик:

1) *функция эффективности* $x=g(z)$ — зависимость продукта труда x человека от его интеллектуальных и физических усилий z (производственная характеристика человека),

2) *функция сознательности* $z=d(u)$ — зависимость производственных усилий человека z от его удовлетворенности u (психическая характеристика человека),

3) *функция потребностей* $u=h(y)$ — зависимость удовлетворенности человека u от его дохода y (физиологическая характеристика человека).

Для каждого отдельного человека эти три функции индивидуальны: они задаются природой и воспитанием человека. Примерный вид этих трех функций показан на рис. 21—23.

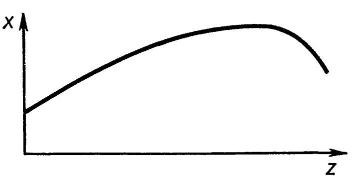

Рис. 21. Типичная функция эффективности.

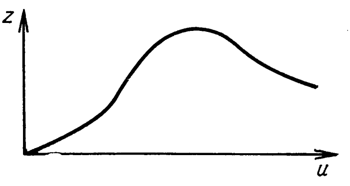

Рис. 22. Типичная функция сознательности.

Функция эффективности человека сначала растет с ростом его усилий, а затем резко падает, когда человек исчерпывает свои природные возможности. Функция сознательности современного человека такова, что его усилия при малой удовлетворенности растут, а при большой — падают. Функция потребностей человека такова, что удовлетворенность человека сначала очень быстро растет с ростом доходов, а затем переходит в насыщение, не увеличивая удовлетворенности человека при больших доходах.

Вид функций эффективности, сознательности и потребностей отражает национальные черты характера человека. Каждая нация обладает определенной однородностью этих природных характеристик своих представителей. Поэтому можно ввести в рассмотрение усредненные национальные социально-физиологические характеристики членов общества. Именно их мы будем учитывать при расчете оптимальной функции стимулирования в данном обществе.

Производственные усилия человека складываются из двух составляющих

$$z=\xi+\eta,$$

где ξ — естественные усилия человека, т. е. усилия, развиваемые им за счет естественных способностей без физического и психического напряжения, а η — добавочные волевые усилия, создаваемые человеком искусственно под влиянием общественного стимулирования. Естественные усилия человека определяются его способностями s: $\xi=\varphi(s)$. Распределение способностей людей описывается функцией $w(s)$, где $w(s)ds$ выражает пропорцию людей, обладающих способностями s (рис. 24).

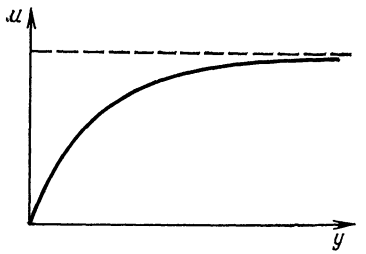

Рис. 23. Типичная функция потребностей.

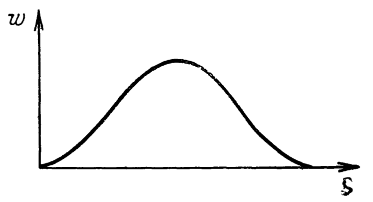

Рис. 24. Распределение способностей людей.

Искусственные усилия человека определяются функцией сознательности

$$\eta=d(u),$$

и в конечном счете зависят от выбора функции стимулирования $f(x)$. Все описанные зависимости можно изобразить схематически замкнутой системой (рис. 25).

Установившееся состояние этой системы описывается уравнением

$$z=\varphi(s)+d\{h\{f[g(z)]\}\}.$$

Для человека, обладающего заданными способностями s, это уравнение однозначно определяет его усилия $z^*(s, f)$ как функционал, зависящий от функции стимулирования $y=f(x)$.

Пользуясь имеющимися зависимостями, можно определить также установившиеся значения функционалов $x^*(s, f)$, $y^*(s, f)$,

$u^*(s, f)$ и $\eta^*(s, f)$. Зная эти значения как функции s, можно найти распределения этих значений из уравнений:

$$w_x(x^*)dx^*=w(s)ds, \quad w_y(y^*)dy^*=w(s)ds,$$
$$w_z(z^*)dz^*=w(s)ds, \quad w_u(u^*)du^*=w(s)ds.$$

Распределения w_x, w_y, w_z, w_u и w_η есть функции своих аргументов, зависящие от выбора функции $f(x)$. Таким образом, между функциями w_x, w_y, w_z, w_u, w_η и функцией стимулирования $f(x)$ имеется операторная связь.

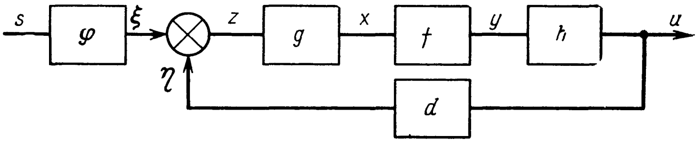

Рис. 25. Замкнутая система регулирования волевых усилий человека: s — способности; ξ — естественные усилия; η — стимулированные усилия; z — результирующие усилия; x — продуктивность труда; y — доход человека; u — удовлетворенность человека.

Критерием оптимальности выбора функции стимулирования $f(x)$ является максимальная удовлетворенность всего общества в целом

$$J=\int_0^\infty u^*(s, f)\, w_u(u^*)\, du^*=\int_0^\infty u^*(s, f)\, w(s)\, ds.$$

Значение критерия J является функционалом от $f(x)$. Таким образом, мы пришли к вариационной задаче

$$\delta J=\int_0^\infty \delta u^*(s, f)\, w(s)\, ds=0,$$

решая которую, можно найти оптимальную функцию стимулирования для общества в целом.

Максимальная удовлетворенность всего общества не означает максимальной удовлетворенности каждого отдельного человека. Максимум удовлетворенности каждого отдельного человека, определяемый условием $\delta u^*(s, f)=0$, требует подбора особой для каждого человека оптимальной функции стимулирования $y=f^*(s, x)$.

Если подобрать такие функции для всех групп людей, обладающих заданными способностями s, то удовлетворенность общества достигнет глобального экстремума. Ввиду того, что люди с данным уровнем способностей s могут оказаться более неоднородными по своим производственным, психическим и физиологическим характеристикам, чем все общество, мы, проводя оптимизацию по группам, будем пользоваться по-прежнему усредненными характеристиками для общества в целом, а не средними характеристиками внутри данной группы. Несмотря на то, что при таком подходе некоторые группы людей окажутся ущемленными, общество может только выиграть от такого дифференцированного подхода по сравнению с тем случаем, когда функция стимулирования едина для всех людей.

Осуществить подобную оптимизацию, т. е. поставить доходы каждого человека в прямую зависимость от производимых им продуктов труда, под силу только социалистическому строю, руководствующемуся принципом распределения «по труду» и безразличному к отношениям собственности. Для реализации оптимального стимулирования в социалистическом обществе достаточно провести статистическое обследование достаточно большой выборки из генеральной совокупности представителей данного общества, а затем рассчитать оптимальную функцию стимулирования на вычислительной машине.

Приложение 4

Закон о невозможности превышения удвоенного среднего

Как показал выдающийся французский ученый Симеон Дени Пуассон (1781—1840), чрезвычайно большое число встречающихся в Природе положительных целочисленных случайных величин имеет статистическое распределение *

$$p(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

где λ — среднее значение случайной величины n, равное

$$\lambda = \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n).$$

По Пуассону распределены умственные и физические способности человека, урожайность сельскохозяйственных культур и продуктивность животных, степень загруженности работников, занятых в сфере обслуживания и управления, интенсивность движения транспорта и число автомобильных катастроф, число совещаний, конференций, симпозиумов и конгрессов, количество опубликованных научных работ, число ошибок в сочинении школьника, число зарегистрированных счетчиком Гейгера радиоактивных частиц и многое другое.

На рис. 26—28 приведено семейство распределений Пуассона для значений $\lambda=1, 2, 3, 4, 5, 10, 20$.

Последовательные значения $p(n)$ связаны между собой рекуррентно

$$p(n) = \frac{\lambda}{n} p(n-1), \quad p(0) = e^{-\lambda}.$$

Отсюда видно, что при $n<\lambda$ значения вероятности $p(n)$ растут, при $n=\lambda$ достигают максимума, а при $n>\lambda$ начинают убывать. Таким

* Этому распределению подчиняются все сложные явления, составленные из бесконечно большого числа независимых простых событий.

образом, λ есть не только среднее, но и наиболее вероятное значение числа n, или его *мода*.

Случайная величина, подчиняющаяся распределению Пуассона, теоретически распределена на полубесконечном интервале, но практически, как это видно из графиков, ее максимальное значение не превышает 2λ, начиная буквально с $\lambda=4\div5$.

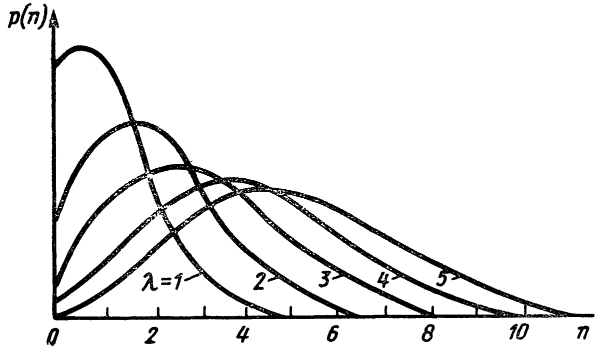

Рис. 26. Распределение Пуассона с $\lambda=1$, 2, 3, 4, 5.

Из распределения Пуассона вытекает следующий закон Природы: *вероятность того, что некоторый показатель достаточно сложного явления Природы превзойдет свое удвоенное среднее, пренебрежимо мала.*

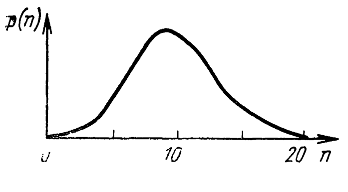

Рис. 27. Распределение Пуассона с $\lambda=10$.

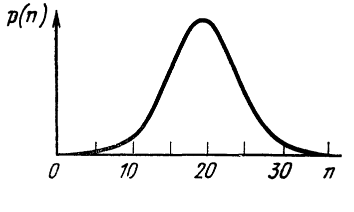

Рис. 28. Распределение Пуассона с $\lambda=20$.

Докажем это положение. Для этого рассмотрим вероятность превышения уровня m

$$P_\lambda(m)=\sum_{k=m}^{\infty} p_\lambda(k)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=p_\lambda(m)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(m+1)\ldots(m+k)}.$$

Воспользуемся неравенством

$$(m+1)\ldots(m+k)>m^k.$$

Тогда

$$P_\lambda(m) < p_\lambda(m) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k.$$

При $m > \lambda$ этот ряд суммируется к

$$P_\lambda(m) < p_\lambda(m) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{m}}.$$

Полагая $m = 2\lambda$, получаем $P_\lambda(2\lambda) < 2p_\lambda(2\lambda)$. Используя формулу Стирлинга

$$m! \simeq \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m,$$

которая имеет точность порядка $1/12m$ (при $m = 4 \div 5$ она уже имеет точность порядка 2%), упростим выражение для $P_\lambda(2\lambda)$

$$p_\lambda(2\lambda) = \frac{\lambda^{2\lambda}}{(2\lambda)!} e^{-\lambda} \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Итак, мы доказали, что искомая вероятность превышения удвоенного среднего удовлетворяет неравенству

$$P_\lambda(2\lambda) < \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Поскольку число $e/4 = 0{,}67957\ldots$ меньше единицы, его степени быстро убывают с ростом λ. Первый сомножитель также убывает с ростом λ. Так, при $\lambda = 10$ вероятность превышения удвоенного среднего не превышает 0,34%, при $\lambda = 20$—0,005%, при $\lambda = 40$—$2 \cdot 10^{-6}$%.

Отсюда следует, что «чудеса», на которые способна Природа, вообще никогда не превышают удвоенного среднего; в частности, ни один экземпляр животного или растения не превышает ни по каким показателям более чем вдвое среднего представителя вида, никто из людей не превышает по своим физическим и умственным способностям более чем вдвое среднего человека.

Распределение Пуассона есть математическое выражение того закона Природы, который утверждает, что во всем есть свой предел. Природа позаботилась, чтобы «деревья не росли до неба», и не считаться с этим законом Природы нельзя.

Закон ОПУС ставит жесткие рамки пределам повышения урожайности сельскохозяйственных культур и продуктивности животных. При существующем уровне развития сельского хозяйства растениям и животным далеко не обеспечиваются оптимальные условия, соответствующие их потребностям, и поэтому резервы повышения урожайности и продуктивности имеются, но недалеко то время, когда сельскохозяйственное производство будет вестись оптимально и тогда мы все ясно ощутим, что дальнейший рост его не-возможен. Например, если от средней коровы получают 30 л. молока в сутки, то возможно появление рекордисток, дающих 60 л. в сутки, но было бы абсурдом считать, что, улучшив уход и кормление, можно получить от одной коровы 100 л. молока в сутки *.

Распределение Пуассона применимо к тем явлениям, относительно которых справедлива гипотеза независимости составляющих их событий.

Глядя на графики Пуассона, можно сделать много интересных выводов. Например, если один гениальный писатель появляется в среднем один раз в сто лет, то вероятность появления в одном веке пяти гениальных писателей ничтожно мала. Если же они все-таки появились, значит надо отказаться от гипотезы независимости и искать общую причину, вызвавшую такую возможность. Если генетика не допускает такой причины, то она коренится только в условиях общественной жизни. Появление в XIX в. плеяды гениальных поэтов и писателей: А. С. Пушкина (1799—1837), М. Ю. Лермонтова (1814—1841), Н. В. Гоголя (1809—1852), Ф. М. Достоевского (1821—1881), Л. Н. Толстого (1828—1910), — по-видимому, не является просто капризом Природы, а является закономерным следствием общественных условий.

Назовем *нормой* реализации того или иного сложного события число реализующихся в нем простых событий.

Распределение нормы того или иного сложного явления, как правило, нельзя вывести из одних лишь теоретических предпосылок. Поэтому его получают эмпирически, рассматривая выборочную совокупность однородных явлений, или выборку $A_1, A_2, \ldots, A_m$, элементы которой характеризуются следующими значениями нормы $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

Набор частот $h(n) = m(n)/n$, где $m(n)$ есть число явлений в рассматриваемой выборке, норма которых равна n, является статистической оценкой распределения $p(n)$.

В качестве статистической оценки среднего значения нормы обычно берут среднее арифметическое наблюдаемых норм

$$\bar{n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Если теоретические предпосылки позволяют считать, что рассматриваемое явление относится к числу пуассоновых, то статистическую оценку его средней нормы можно производить по формуле

$$\bar{n} = \frac{1}{2} n_{\max}.$$

Достоинством этой оценки является простота ее получения.

Если рассматриваемая выборка является недостаточно представительной, то оценка среднего по этой формуле получается несколько заниженной, ибо на малой выборке, как правило, не достигается настоящий максимум.

Если же рассматриваемая выборка является недостаточно однородной, то оценка среднего по этой формуле получается несколь-

* Отметим, что в процессе эволюции происходит изменение средних показателей видов, а не только индивидуальных значений, но этот процесс является значительно более инерционным.

ко завышенной, ибо среди всех групп явлений, попавших в выборку, она характеризует лишь ту группу явлений, которая имеет наибольшую норму.

Это свойство оценки можно использовать для выявления неоднородности выборки. Если объем выборки не слишком мал, то признаком неоднородности данных является отрицательность величины

$$E = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n_i - \frac{1}{2} n_{\max}.$$

Положительность же этой величины характеризует всего лишь недостаточность данных. При малом m отрицательность E не является признаком неоднородности выборки, ни тем более признаком ее непуассоновости, так как флюктуация n_i может превысить удвоенное арифметическое среднее.

Например, если $m=3$ и экспериментальные значения n равны $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=9$, то их арифметическое среднее равно $\bar{n}=(1+2+9)/3=4$ и «выброс» 9 превышает $2\bar{n}=8$.

Однако в однородных выборках объема $m=10$ закон Пуассона, а вместе с ним и закон ОПУС, уже хорошо соблюдается.

В качестве примера приведем данные об урожае томатов двух сортов.

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее арифметическое	Макс.
Сорт № 1	13	8	20	10	12	7	12	7	15	13	11,7	20
Сорт № 2	8	30	28	15	8	12	9	14	10	27	16,1	30

В обоих случаях максимальное значение не превышает удвоенного среднего арифметического: $20<11{,}7\times 2=23{,}4$ и $30<16{,}1\times 2=32{,}2$. Однако если бы мы сгруппировали эти два разных сорта в одну совокупность, то получили бы «среднее» 13,9 и максимальное число в этом объединенном множестве 30 превысило бы удвоенное «среднее» $13{,}9\times 2=27{,}8$. Но это не опровергает закона Пуассона, а лишь выявляет неоднородность данных.

Отклонение от закона Пуассона может служить критерием открытия качественно нового явления, показатель которого нельзя считать случайным отклонением от старой нормы. Такие явления подлежат выделению в самостоятельную группу со своим средним значением нормы и опять-таки невозможностью превышения удвоенного среднего. К таким качественно новым явлениям можно отнести новые виды животных или растений, возникающие в результате мутаций генетического характера, новые методы и усовершенствования, повышающие производительность труда, новые способы организации общественных отношений.

Искусственный интеллект

Под *интеллектом* системы, оснащенной алгоритмом F, мы будем понимать меру мощности того класса функций

$$f(\mathbf{x}) \in C,$$

максимизацию которых данный алгоритм обеспечивает.

Более строгое определение интеллекта должно включать указание того класса начальных ситуаций

$$\mathbf{x}_0 \in X_0,$$

для которых данный алгоритм оказывается действенным, и указание времени T, в течение которого алгоритм обеспечивает нахождение точки максимума с заданной точностью

$$\|\mathbf{x}_T - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon.$$

Под алгоритмом мы понимаем дискретный или непрерывный вычислительный процесс вида

$$F(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_{i-1}, \ldots,\ \mathbf{x}_{i-n}) = 0,$$

или

$$F(\mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}},\ \ldots,\ \mathbf{x}^{(n)}) = 0,$$

где функция F включает стандартные операции над функцией $f(\mathbf{x})$ и ее производными.

Для класса аналитических функций хорошо зарекомендовали себя градиентные алгоритмы вида

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i \xi(\mathbf{x}_i),$$

где $\xi(\mathbf{x})$ есть градиент функции $f(\mathbf{x})$

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}.$$

Коэффициент шага α_i может быть постоянным числом, не зависящим от функции $f(\mathbf{x})$, но для ускорения сходимости его обычно делают переменным, зависящим либо просто от дискретного времени i, либо от самой функции $f(\mathbf{x}_i)$.

Так в методе «наискорейшего спуска» * число α_i равно

$$\alpha_i = -\frac{(\xi(\mathbf{x}_i),\ \xi(\mathbf{x}_i))}{\left(\xi(\mathbf{x}_i), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 f(\mathbf{x}_i)}.$$

В методе Ньютона вместо числа α_i используется нелинейный оператор $\mathbf{\Gamma}_i$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{\Gamma}_i \xi(\mathbf{x}_i),$$

---

* Слово «спуск» соответствует задаче минимизации функции $f(\mathbf{x})$; здесь бы более подошло слово «подъем».

где

$$\Gamma_i = -\left[\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)\right]^{-1}.$$

Достоинством метода Ньютона является то обстоятельство, что квадратичные целевые функции вида

$$f(\mathbf{x}) = a_0 + (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})$$

он максимизирует за один шаг.

Обобщением метода Ньютона является метод «касательных парабол» П. Л. Чебышева (1821—1894) *, который позволяет находить за один шаг точку максимума для любых полиномов от $\mathbf{x}$.

Для дифференцируемых функций $f(\mathbf{x})$ проблема их максимизации сводится к проблеме решения систем нелинейных алгебраических уравнений:

$$\xi(\mathbf{x}) = 0.$$

Таким образом, мы определяем интеллект как умение решать сложные математические задачи, сводящиеся к алгебраическим уравнениям **. Если заменить задачу максимизации функций задачей максимизации функционалов вида

$$J = \int_0^T f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})\, dt,$$

то мы придем к определению интеллекта как умения решать дифференциальные уравнения ***.

Какое отношение умение решать алгебраические и дифференциальные уравнения имеет к интеллекту как способности к оптимальному поведению? Самое непосредственное.

Представим себе, что функция $f(\mathbf{x})$ является функцией цели некоторого субъекта $J = f(\mathbf{x})$. Оптимальное поведение субъекта состоит в его умении перевести текущую ситуацию $\mathbf{x}_0$ в такую, которая приносила бы субъекту максимальное удовлетворение, т. е. максимизировала бы функцию $f(\mathbf{x})$:

$$f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

---

* См. Чебышев П. Л. [8, т. 5, с. 7].

** Определение интеллекта как умения максимизировать функции является более широким, чем умение решать уравнения, так как не все функции являются дифференцируемыми.

*** Максимизация функционалов типа интегралов, являющаяся задачей вариационного исчисления, сводится к нахождению решений дифференциальных уравнений Леонарда Эйлера (1707—1783) — Симеона Дени Пуассона (1781—1840)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} = 0.$$

Поведение субъекта описывается его алгоритмом F

$$F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \ldots, \mathbf{x}_0)=0,$$

следуя которому, он преобразует одну ситуацию в другую. Таким образом, субъект, пользующийся в своем поведении определенным алгоритмом F, представляет собой *динамическую систему.*

Алгоритм, приводящий субъекта в точку оптимума $\mathbf{x}^*$ за минимальное время из возможно более широкой области начальных ситуаций $\mathbf{x}_0 \in X_0$, называется *оптимальным.* Субъект, вооруженный этим алгоритмом, имеет наибольший интеллект среди всех подобных ему субъектов, т. е. субъектов, имеющих ту же самую целевую функцию.

Среди всех алгоритмов, переводящих начальную ситуацию в оптимальную за заданное число итераций, оптимальным является тот, который обеспечивает сходимость к оптимуму в самой широкой области начальных ситуаций. Если же начальная ситуация, в которой находится субъект, является заданной, то оптимальным алгоритмом для него является тот, который переводит его в точку оптимума или ее ε-окрестность за минимальное время. Субъект считается наделенным интеллектом, если он обладает алгоритмом, способным перевести его из той ситуации, в которой он находится, в оптимальную или ее ε-окрестность за конечное время.

Поскольку субъект, оснащенный определенным алгоритмом действия, представляет собой динамическую систему, а условие сходимости алгоритма к заданной в конечной точке пространства оптимальной ситуации есть условие *устойчивости* динамической системы, мы убеждаемся в том, что математической базой теории интеллекта является существующая ныне обширная *теория устойчивости* динамических систем. При таком подходе мы должны отождествить состояния устойчивого равновесия динамической системы с ее оптимальными точками.

Отличие теории интеллекта от существующей теории устойчивости динамических систем состоит в том, что для реальных субъектов точка, в которой они достигают максимальной удовлетворенности, априорно неизвестна, и целью теории должно быть указание на кратчайший путь к ее достижению. Если в теории динамических систем алгоритм действия системы (рекуррентное или дифференциальное уравнение) считается заданным, то в теории интеллекта для заданного своей целевой функцией субъекта ищется само это уравнение. Таким образом, теория интеллекта — это *теория оптимизации в пространстве алгоритмов,* т. е. теория выбора динамической системы, наилучшим образом решающей поставленную задачу (в нашей теории эта задача состоит в максимизации функции). Наиболее близкой к теории интеллекта является интенсивно развивающаяся теория самонастраивающихся экстремальных систем автоматического регулирования.

В качестве целевой функции живого существа может выступать функция

$$T=f(\mathbf{x}),$$

где T — время жизни, а $\mathbf{x}$ — параметры образа жизни живого существа. Эта функция имеет очень сложный характер, и поэтому нахождение ее максимума представляет собой очень сложную задачу. Если пытаться максимизировать эту функцию градиентным способом, то, во-первых, неизвестно, сойдется ли процесс из данного начального состояния $\mathbf{x}_0$ к оптимальной точке $\mathbf{x}^*$, а во-вторых, потери на поиск могут оказаться непомерно велики *.

Если в качестве целевой функции живого существа взять

$$J = \int_0^T f(\mathbf{x})\,dt,$$

где $f(\mathbf{x})$ — интенсивность наслаждений, то максимум этого функционала соответствует решению не дифференциального, а алгебраического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0,$$

т. е. для максимизации суммарного наслаждения субъекта за все время его жизни надо максимизировать наслаждение, получаемое в каждый текущий момент времени.

Ясно, что для высокоорганизованных живых существ поведение, направленное на получение максимума наслаждения в каждый текущий момент времени, не является оптимальным: иногда надо идти на жертвы, чтобы получить выигрыш потом. Это значит, что интенсивность наслаждений зависит не только от текущего состояния субъекта $\mathbf{x}(t)$, но и от ожидаемых состояний $\mathbf{x}(t+\Delta t)$. Поскольку ожидаемое состояние может быть выражено через текущие производные $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t), \ldots$:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(t)\,\Delta t^2 + \ldots,$$

то интенсивность наслаждения высокоорганизованного субъекта выражается функцией $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots)$, и, следовательно, для максимизации суммарного наслаждения за время жизни

$$J = \int_0^T f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots)\,\partial t$$

надо уметь решать уравнение Эйлера — Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{\mathbf{x}}} - \ldots = 0. \qquad (1)$$

Это — дифференциально уравнение вида

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots) = 0,$$

которое при заданных начальных условиях $\mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}_0$, $\ddot{\mathbf{x}}_0, \ldots$ определяет единственным образом процесс $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t)$. Это и есть тот оптимальный жизненный путь, который максимизирует суммарное наслаждение субъекта за время его жизни. Но чтобы его найти, надо решить дифференциальное уравнение (1). Уравнение (1) — это и есть та динамическая система, которая определяет оптимальное поведе-

* Осуществить несколько итераций рекуррентного процесса можно лишь на нескольких тождественных особях, так как вычисление времени жизни, соответствующего образу жизни $\mathbf{x}_i$, т. е. функции $f(\mathbf{x}_i)$, возможно только после смерти данной особи.

ние субъекта. Таким образом, вариационное исчисление дает метод оптимизации в пространстве алгоритмов непрерывного типа для функционалов интегрального характера.

Каков «физический» смысл этого решения? Он следующий: задавая функцию оценки ожидаемых наслаждений $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ldots)$, мы тем самым однозначно определяем свое поведение на будущее.

Простота «оптимизации в пространстве алгоритмов» в этом случае кажется немного неожиданной. Она обусловлена простотой понятия «функционала интегрального характера», т. е. интеграла. В самом деле, по определению интеграла,

$$\int_0^T f(\mathbf{x})\,dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ |\Delta t_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{N} f[\mathbf{x}(t_i)]\,\Delta t_i$$

— это просто взвешенная сумма, т. е. линейная комбинация функций от N аргументов, взятая в пределе при $N \longrightarrow \infty$,

$$\int_0^T f(\mathbf{x})\,dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ |\Delta t_i|\to 0}} \Phi[\mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_N)].$$

Простота «оптимизации в пространстве алгоритмов» в этом случае обусловлена «линейностью» структуры интегралов — в этом и заключается удивительная простота и своеобразие вариационного исчисления!

Разработка общей теории интеллекта должна опираться на максимизацию функционалов общего характера

$$J = \Phi(\mathbf{x}_t),$$

где знак $\Phi(\mathbf{x}_t)$ означает произвольную функцию от континуума функций

$$(\mathbf{x}_t) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ |\Delta t_i|\to 0}} [\mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_N)].$$

Это определение функционала общего характера является обобщением понятия интеграла.

Градиентные методы обеспечивают нахождение глобального максимума только для выпуклых кверху функций, удовлетворяющих условию

$$f[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] \geqslant \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

где $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — произвольные точки пространства ситуаций X, а λ — параметр, меняющийся в пределах $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Аналитические функции являются лишь локально-выпуклыми, и для них градиентная оптимизация дает лишь локальные максимумы. Важно отметить, что любая аналитическая функция имеет счетное число локальных максимумов и разбивает пространство ситуаций X на счетное число «областей притяжения» X_ν, таких что в случае принадлежности начальной ситуации $\mathbf{x}_0$ к области X_ν оптимизация приводит к попаданию в единственную точку локального максимума $\mathbf{x}_\nu$.

Отметим, что целевые функции реальных субъектов в случае их аналитичности составляют подкласс аналитических функций, такой что все функции этого подкласса не имеют оптимальных точек в бесконечности. Отсюда следует, что *все реальные субъекты являются нелинейными,* ибо линейные субъекты не могут удовлетвориться конечными значениями входных факторов, а реальные субъекты ими удовлетворяются. Будучи связаны в единое общество, *линейные субъекты не могут достичь согласованного оптимума, ибо их «аппетиты» безграничны.* Согласование интересов линейных субъектов в ограниченных областях требует нахождения новых принципов, так как принцип согласованного оптимума здесь уже не действует.

Для нахождения глобального максимума аналитической функции после нахождения всех ее локальных максимумов требуется произвести перебор всех локально-экстремальных точек. На практике множество локально-экстремальных точек субъектов не только счетно, но и конечно. Существование счетного бесконечного числа локально-экстремальных точек в ограниченной области пространства означало бы, что эти точки образуют где-то в ограниченном пространстве хотя бы одну «предельную» точку — точку сгущения, такую, что

$$\| \mathbf{x}_{\nu_k} - \mathbf{x}_{\nu^*} \| < \varepsilon$$

для всех k, начиная с некоторого $k^*(\varepsilon)$. «Физически» это значило бы, что в окрестности этой точки сгущения происходили бы резкие изменения состояния субъекта при малых вариациях ситуации, в которой он находится. Такой субъект представлял бы собой типичную «негрубую» систему *.

Следствием «грубости» большинства реальных субъектов является отсутствие точек сгущения локальных экстремумов целевой функции субъекта и вытекающая из этого факта конечность числа локальных оптимумов.

Целью кибернетики является создание универсального искусственного интеллекта, реализуемого с помощью электронной вычислительной техники. Под универсальным интеллектом понимается такой интеллект, который мог бы максимизировать любую функцию из достаточно широкого класса. Широта класса максимизируемых функций должна соответствовать целевым функциям реально существующих в Природе видов разумных живых существ — человека и некоторых животных, а также тех неразумных живых существ, которым человек покровительствует, или тех живых существ, которые являются его врагами. Знание целевых функций этих существ позволяет оптимизировать или пессимизировать их состояние в условиях их изолированности или взаимодействия. Каждому виду живых существ соответствует свой класс целевых функций, а каждому отдельному живому существу — своя функция из этого класса. Электронная вычислительная техника должна позволять имитировать любое живое существо, любого выбранного представителя своего вида.

Аппроксимация целевых функций реальных субъектов аналитическими функциями наверняка будет достаточно точной для получения существенного выигрыша при их оптимизации. Поскольку эти

---

* Понятие «грубой системы» было введено в 1937 г. академиками А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [34].

функции будут зависеть от большого числа аргументов, то во многих случаях придется обойтись полиномиальной аппроксимацией.

Поскольку задачи оптимизации поведения взаимодействующих субъектов сведены к системам алгебраических уравнений, то машинный интеллект, справляющийся с задачей оптимизации поведения изолированных субъектов, справится и с задачей оптимизации поведения этих субъектов в условиях их взаимодействия.

Проиллюстрируем это положение на примере игры двух лиц с целевыми функциями

$$J_1=f_1(\mathbf{x}) \qquad J_2=f_2(\mathbf{x}).$$

Уравнение согласованности оптимума в этой игре имеет вид

$$\xi_1+\lambda\xi_2=0,$$

где $\xi_1=\dfrac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}$, $\xi_2=\dfrac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}}$ — градиенты целевых функций, а λ — некоторое положительное число, определяемое из дополнительного условия $g(\mathbf{x})=b$.

Рекуррентные алгоритмы согласованного решения этой игры имеют вид

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+\alpha_i[\xi_1(\mathbf{x}_i)+\lambda_i\xi_2(\mathbf{x}_i)],$$

$$\lambda_{i+1}=\lambda_i+\beta_i[g(\mathbf{x}_i)-b].$$

Выбор коэффициентов шага α_i и β_i определяется условиями сходимости этих алгоритмов и «качества» переходного процесса совершенно так же, как и в задачах с единственным критерием оптимальности. Таким образом, для решения игровых задач по принципу согласованного оптимума благодаря полученному их аналитическому решению становится возможным применение классических вычислительных методов: методов И. Ньютона, П. Л. Чебышева, Л. В. Канторовича, И. М. Гельфанда — М. Л. Цетлина и др.

В общем случае аналитические игры происходят на фоне среды, воздействующей на игроков случайным образом. Такие игры моделируются с помощью функций

$$J_1=f_1(\mathbf{x},\ \eta), \qquad J_2=f_2(\mathbf{x},\ \eta),$$

которые зависят не только от набора управляемых игроками параметров $\mathbf{x}$, но и от набора случайных параметров η, управляемых Природой. Статистическое распределение этих случайных параметров в общем случае нельзя считать известным *.

Процесс отыскания решения экстремальной задачи при наличии неизвестных параметров носит название «стохастической аппрокси-

* Если среди случайных параметров встречаются такие, распределение которых $w(\eta)$ известно, то по ним производится обычное усреднение целевых функций:

$$f(\mathbf{x})=\int f(\mathbf{x},\ \eta)\,w(\eta)\,d\eta.$$

мации» * и заключается в применении тех же самых градиентных алгоритмов к фактически имеющим место реализациям случайных воздействий

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+\alpha_i\xi_i(\mathbf{x}_i,\ \eta_i).$$

Стохастичность целевых функций накладывает особые ограничения на коэффициенты шага

$$1)\quad \alpha_i \to 0,\qquad 2)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty,\ 3)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^2_i < \infty.$$

Смысл этих ограничений состоит в следующем. Ограничение 1 вытекает из требования сходимости алгоритма

$$\|x_{i+1}-\mathbf{x}_i\|\longrightarrow 0$$

при отклонениях от нуля градиента целевой функции в точке оптимума из-за случайных воздействий. Ограничение 2 вытекает из закона больших чисел, обеспечивающего сглаживание случайных флюктуаций только для достаточно большого числа слагаемых. И наконец, ограничение 3 обеспечивает стремление дисперсии случайной целевой функции к нулю с ростом числа итераций.

Проблема идентификации целевых функций реальных субъектов по их поведению относится к насущным проблемам, от решения которых зависит успешность применения развитой здесь теории к практическим нуждам людей. Решение этой проблемы, по-видимому, будет возможно на базе общей теории оптимизации в пространстве алгоритмов.

Приложение 6

Глобальная оптимизация кибернетических систем, в которых действует закон стоимости

Рассмотрим следующую модель кибернетической системы: имеется набор критериев $\mathbf{f}=\{f_i\}^n{}_1$, зависящих от набора материальных факторов $\mathbf{x}=\{x_j\}^m{}_1$. Число критериев не превышает числа факторов $n\leqslant m$.

Предполагая дифференцируемость всех функций f_i по всем переменным x_j, введем соответствующие оценки приростов критериев f_i при единичном увеличении факторов x_j:

$$\xi_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

* Метод «стохастической аппроксимации» был предложен в 1951 г. американскими статистиками Х. Роббинсом и С. Монро [46]. Глубокое развитие и обобщение этот метод получил в книге **Якова Залмановича Цыпкина [7].**

Условия, при которых в системе достигается глобальный согласованный оптимум, максимизирующий не только «главные эффекты», но и «эффекты взаимодействия», имеют вид

$$df_i = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} dx_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Написанные уравнения представляют собой условия ортогональности векторов $\xi_i = \{\xi_{ij}\}_{j=1}^{m}$ вектору $d\mathrm{x} = \{dx_j\}_1^m$. Следствием этого является их линейная зависимость, т. е. существование отличных от нуля чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i = 0.$$

Расписывая это векторное равенство покоординатно, получаем систему из m линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных «весов» $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_{ij} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Эта переопределенная система уравнений имеет нетривиальное решение при выполнении следующих $(m—n+1)$ условий:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1,n} & \ldots & \xi_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1,n+1} & \ldots & \xi_{n,n+1} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{1,n-1} & \ldots & \xi_{n,n-1} \\ \xi_{1,m} & \ldots & \xi_{n,m} \end{vmatrix} = 0.$$

Полученные $(m—n+1)$ уравнений относительно m неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ являются необходимыми условиями согласованного оптимума. Они оставляют возможность произвольного выбора $(n—1)$ параметров.

Недостающие для получения однозначной точки глобального согласованного оптимума уравнения можно получить, предположив линейную соизмеримость материальных факторов («закон стоимости»)

$$c_j x_j = c_1 x_1 \quad (j=2, \ldots, m), \tag{4}$$

где c_j — пока не определенные «цены» факторов x_j, а x_1 — фактор, принимаемый за «всеобщий эквивалент».

Диффеоенцируя (4), будем иметь

$$c_j dx_j = c_1 dx_1 \quad (j=2, \ldots, m).$$

Подставив эти выражения в (1), получим еще n уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\xi_{ij}}{c_j} = 0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{5}$$

Уравнения (3)—(5) образуют в совокупности систему из $2m$ уравнений относительно такого же числа неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ и $c_1, \ldots, c_m$. Таким образом, мы получили определенную систему уравнений, которая, как правило, имеет решение. Это решение и определяет точку, соответствующую глобальному согласованному оптимуму в системе.

Зная эту точку, из уравнений (2) можно найти относительные «веса» $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ критериев $f_1, \ldots, f_n$. Положив $f_{n+1}=x_1$, можно найти связь между «ценами» c_j на уровне факторов $x_1, \ldots, x_m$ и «ценами» λ_i на уровне критериев $f_1, \ldots, f_{n+1}$.

Приложение 7

Взаимоотношение теории согласованного оптимума с теорией антагонистических игр Дж. фон Неймана

В игре двух лиц с целевыми функциями

$$J_1 = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad J_2 = f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

условием согласованного оптимума является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}_2} \end{vmatrix} = 0.$$

В случае антагонистической игры, когда $f_1 = -f_2$, или игры с тождественными интересами, когда $f_1 = f_2$, условие согласованного оптимума превращается в тождество и ничего не дает для решения игры.

Решение игр с тождественными интересами сводится к решению обычной задачи планирования, т. е. задачи максимизации одной единственной функции $f_1=f_2=f$. При отсутствии ограничений эта задача решается обычным дифференцированием: оптимальные точки ищутся среди решений системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}=0, \quad \mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

путем проверки на чередуемость знаков главных миноров матрицы вторых производных (критерий Сильвестра)

$$\mathbf{A}=\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Решение антагонистических игр опирается на использование знаменитого принципа «минимакса» Дж. фон Неймана [17]: принципа получения максимума из того минимума, который оставляет тебе антагонистически настроенный противник

$$J^*=\max_{\mathbf{x}_1}\min_{\mathbf{x}_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=\min_{\mathbf{x}_2}\max_{\mathbf{x}_1} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

где $f=f_1=-f_2$. Этот принцип описывает предельно осторожное поведение двух взаимодействующих субъектов с абсолютным интеллектом.

«Минимаксу» функции f соответствует ее «седловая точка», которая удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}=0.$$

Среди всех решений этой системы «седловые точки» отбираются путем проверки на чередуемость знаков главных миноров матрицы

$$\mathbf{A}_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2_1},$$

положительность всех главных миноров матрицы

$$\mathbf{A}_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2_2}\cdot$$

и отрицательность всех главных миноров матрицы

$$\mathbf{A}_{12}=\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2_1}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2_2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_1 \partial \mathbf{x}_2}\right)^2.$$

Приложение 8

Расчет двухуровневой иерархической системы управления

Рассмотрим двухуровневую иерархическую систему управления, состоящую из подсистем, управляемых субъектами первого уровня $S_1, \ldots, S_n$, в свою очередь, подчиненных управляющему субъекту второго уровня S (рис. 29).

Ситуация управления описывается набором параметров $\mathbf{x}$, распадающимся на n поднаборов

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

управляемых субъектами $S_1, \ldots, S_n$ соответственно.

Целевые функции субъектов $S_1, \ldots, S_n$ равны

$$J_1 = f_1(\mathbf{x}_1), \ldots, J_n = f_n(\mathbf{x}_n),$$

а целевая функция субъекта S равна просто их сумме

$$J = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}_i)$$

Переменные $\mathbf{x}_i$ связаны n ограничениями локального характера

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\mathbf{b}_i$ можно интерпретировать как ресурсы подсистемы S_i, и m ограничениями глобального характера

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}) = r_j \quad (j = 1, \ldots, m),$$

наложенными на вектор ресурсов $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$.

Процедура оптимизации этой системы состоит из двух этапов. На первом этапе ищутся параметрически оптимальные решения локальных задач без учета глобальных ограничений

$$J_i = f_i(\mathbf{x}_i) \longrightarrow \max, \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_i.$$

Эти задачи решаются стандартным способом (см. раздел 3 части первой): составляются функции Лагранжа

$$L_i = f_i(\mathbf{x}_i) - (\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{b}_i)$$

и дифференцированием этих функций по $\mathbf{x}_i$ и $\boldsymbol{\lambda}_i$ получаются определенные системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_i = 0, \\ &\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_i. \end{aligned}\right\}$$

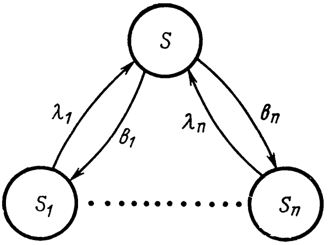

Рис. 29. Двухуровневая иерархическая система.

Оптимальные решения этих систем параметрически зависят от количества ресурсов, которыми располагает подсистема S_i

$$\mathbf{x}^*_i = \mathbf{x}^*_i(\mathbf{b}_i).$$

На втором этапе решается глобальная задача оптимизации распределения ресурсов. Для этого функции $\mathbf{x}^*_i(\mathbf{b}_i)$ подставляются в глобальный критерий оптимальности и ищется максимум этого критерия по переменным $\mathbf{b}$:

$$J = \sum_{i=1}^{n} f_i[\mathbf{x}^*_i(\mathbf{b}_i)] \to \max_{\mathbf{b}}$$

при ограничениях $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}) = r_j \quad (j = 1, \ldots, m)$.

Эта задача тоже может быть решена методом Лагранжа. Полученный в ходе ее решения вектор $\mathbf{b}^*$ подставляется в $\mathbf{x}^*_i(\mathbf{b}_i)$, что дает оптимальное решение всей поставленной задачи:

$$\mathbf{x}^{**}_i = \mathbf{x}^*_i(\mathbf{b}^*_i).$$

Второй вариант расчета двухуровневой иерархической системы заключается в подборе оптимальных цен на поставляемые подсистемам ресурсы. Введем обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \{g_i(\mathbf{x}_i)\}^n{}_1, \quad \mathbf{r} = \{r_j\}^m{}_1.$$

Тогда набор глобальных ограничений можно записать в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{r},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица, составленная из векторов $\mathbf{a}_j$.

Будем решать локальные задачи с учетом глобальных ограничений. Локальные функции Лагранжа имеют вид

$$L_i = f_i(\mathbf{x}_i) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{A}\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}).$$

Дифференцируя эти функции по $\mathbf{x}$, получаем

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_i} - \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 0.$$

С учетом добавочных условий $(\mathbf{a}_j, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = r_j$ эти системы можно разрешить относительно $\mathbf{x}^*_i$, выразив их как функции цен ресурсов:

$$\mathbf{x}^*_i = \mathbf{x}^*_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

Подставляя эти зависимости в глобальный критерий оптимальности

$$J = \sum_{i=1}^{n} f_i[\mathbf{x}^*_i(\boldsymbol{\lambda})],$$

будем его максимизировать по $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*_i}{\partial \lambda}\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}^*_i} = 0.$$

Решая эти уравнения, можно определить оптимальные цены ресурсов $\boldsymbol{\lambda}^*$ и, подставляя их в $\mathbf{x}^*_i(\boldsymbol{\lambda})$, найти оптимальные параметры ситуации

$$\mathbf{x}^{**}_i = \mathbf{x}^*_i(\boldsymbol{\lambda}^*).$$

Подробное изложение вопросов многоуровневой иерархической оптимизации можно найти в книге Р. Куликовского [27], а также в ряде статей Ю. Б. Гермейера, Н. Н. Моисеева, И. А. Вателя и др.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Человеческое познание закономерностей общественных явлений достигло той границы, когда только качественное их описание становится явно недостаточным. Практические нужды XX в. требуют точных количественных теорий, объясняющих мир. С каждым годом человечество распознает все более сложные закономерности. Каждая новая теория включает как частный случай старые, проверенные практикой бесспорные представления и расширяет наше представление о мире, поднимая его еще на одну ступень в процессе познания абсолютной истины. Это с неизбежностью требует применения все более мощных и всеобъемлющих средств исследования, все более глубокого и разнообразного математического аппарата.

Каждой эпохе присущи свои возможности, и если в прошлом веке многих экономистов и философов удовлетворяли доказательства, построенные на простых арифметических выкладках, то попытка сегодня решить теми же средствами более сложные вопросы или подтвердить более тонкими и изощренными методами старые догмы, как правило, обречена на неудачу.

Отличительной чертой новых теорий является постановка в них новых вопросов и получение ответов на них с помощью глубоких математических построений. Результаты этих «абстракций» превосходят самые смелые предположения тех, кто призван объяснять адекватность подобных построений действительности.

Чрезвычайная степень абстрактности новых математических теорий, применяемых к ряду задач, выходящих за рамки узкоспециальных или проблематичных, создает искусственную атмосферу нетерпимости вокруг этих теорий. Эта атмосфера возникает отчасти из-за недостаточной специальной подготовки «критиков», пытающихся обвинить самих авторов в той тенденциозной рекламе, которая сопровождает появление новых теорий, хотя сами ученые не несут никакой ответственности за подобную шумиху.

Ведь не секрет, что исходные теоретические предпосылки кибернетики считались противоречащими нашей идеологии, и только практические успехи кибернетики доказали ее правоту. В связи с этим уместно привести высказывание одного из ведущих кибернетиков сегодняшнего дня Г. фон Фёрстера: «Мы подозреваем, что и в наиболее эффективных коалициях могут оказаться помехи, превращающие «ложно» в обманчивое «истинно» или, что может быть даже еще хуже, переделывающие безразличное «истинно» в недопустимое «ложно»».

Наука и апологетика — диаметрально противоположные понятия. Математическая наука с ее мощными дедуктивными методами умозаключений в меньшей степени, чем любой другой способ рассуждения, позволяет кого бы то ни было обманывать.

Весь прошлый опыт человечества, весь накопившийся в нем «здравый смысл» должен быть подвергнут переоценке средствами математической дедукции.

Аналитическая теория игр является еще не вполне сложившейся наукой, но то, что уже сделано, позволяет оценить, насколько мощное средство исследования она собой представляет и какой важный скачок в развитии производительных сил общества возможен при использовании этой науки в экономике. Любые попытки сформулировать критерий общества через критерии его членов останутся бесплодными, если не подойти к этой задаче с позиции теории игр. Теория согласованного оптимума показывает, что только в игре двух субъектов можно достичь коллинеарности интересов игроков, а в игре трех субъектов можно добиться только их компланарности. По-видимому, поэтому во всей истории человечества не существовало такого экономического строя, который состоял бы более чем из двух классов, не считая классов, оставшихся от предыдущего экономического строя.

Социальные приложения теории игр носят классовый характер, поскольку оценка различных ситуаций в общественных отношениях может быть построена только с учетом идеологических соображений. Поэтому теория игр ни в коей мере не противопоставляется существующим общественным наукам. Теория игр способна поднять эти науки на уровень точных наук, что является объективной закономерностью развития всякой науки.

Новый экономический строй, который идет на смену старому вместе с полной автоматизацией производства и управления им, требует нового теоретического обоснования.

Наука об управлении — кибернетика — решает задачу об освобождении человека от труда по управлению производством, перекладывая его на машины. Сфера деятельности машин неуклонно расширяется. Мы стоим на пороге Второй Великой промышленной революции, в процессе которой человек будет почти полностью освобожден от тяжелого физического и однообразного умственного труда. Сейчас создаются автоматические устройства, которые работают по тому же принципу, что и человек, но обладают более развитыми органами «чувств», более быстрой реакцией на изменение окружающих условий, более мощными исполнительными органами. Они заменят человека на целых участках его деятельности. На повестку дня встали такие проблемы, как управление предприятиями с помощью кибернетических машин, замена умственного труда миллионов служащих государственного аппарата машинным трудом, создание надежной автоматической системы обороны страны и т. д. Мы идем от автоматизированных систем к автоматическим, полностью исключая вмешательство человека в процесс управления.

Создание управляющих машин — практическая цель кибернетики. Поэтому в узком смысле кибернетику можно назвать теорией управляющих машин. Однако при решении этой задачи кибернетикам приходится осмысливать, как функционирует механизм человеческого мышления, как человек решает стоящие перед ним задачи, как построена человеческая организация. Короче говоря, человек изучается как биологическое и общественное существо. Поэтому кибернетика вынуждена брать на себя решение гораздо большей задачи, которая раньше целиком относилась к областям биологии, социологии и философии.

Кибернетика в широком смысле слова — это теория субъектов и организаций, это наука, способствующая объективному изучению закономерностей общественных явлений и выработке методов решения наиболее важных социально-экономических проблем.

Философия не только обогащает конкретные науки, но и сама учится у них. «С каждым, составляющим эпоху, открытием даже в естественно-исторической области материализм неизбежно должен изменять свою форму», — писал Фридрих Энгельс (1820—1895). Кибернетика является одним из таких открытий. Она является ведущей наукой в наступлении на новые области, имеет наиболее широкую область исследования, лежащую близко к самым высоким сферам человеческого мышления, применяет точные математические методы и наиболее передовые технические средства решения и реализации своих задач. Кибернетика является самой универсальной из существующих наук. Естественно поэтому, что философию кибернетики нужно учитывать при создании современной научной философии.

Сущностью философии всегда было стремление человека понять окружающий мир и свое место в нем.

Излагать философию, не связанную с новыми научными результатами, считается неприличным для истинного ученого.

Философия науки — это познание наукой самой себя. Революция в философии — это только отражение революции, происходящей в науке, и способствовать ей можно больше всего, работая в науке. Но предупредить общество об этой революции можно и нужно. Владимир Маяковский остерегался «глубокой философии на мелких местах». Этому предупреждению вняли больше, чем нужно. Людям нужна и с т и н а, ибо «действительные интересы человека лежат по ту сторону материального производства» (К. Маркс).

В будущем система кибернетических машин в соединении с совокупностью средств производства даст все необходимое для удовлетворения материальных потребностей человека, а человек вытеснится в сферу производства духовных ценностей.

Массовое использование кибернетических машин вызовет коренные изменения в структуре производительных сил. Оставляя на рассмотрение политической экономии вопрос о той системе производственных отношений, которая возникнет на этой новой фазе общественного развития и о сроках осуществления этих изменений, заметим, что подобная экстраполяция является чрезвычайно трудным и неблагодарным делом, поскольку предсказанный ход развития в любой момент может быть нарушен социальными катаклизмами. Кибернетика вступает одним из игроков в сложную общественную игру, и только будущее покажет исход этой игры.

Можно ли решить проблему оптимального управления обществом без кибернетики? Что ж, такие попытки предпринимались на протяжении истории человечества неоднократно. Каждый руководитель стремится управлять обществом оптимально, и некоторым выдающимся деятелям прошлого это в какой-то степени удавалось.

Однако то, что было возможно в прошлом, становится невозможным в настоящем и будущем. Потоки информации ныне буквально захлестывают руководителей, которые не в состоянии не только обработать эту информацию, но ввиду практически неизбежной субъективности мышления не могут даже ее правильно воспринимать. Увеличение численности управленческого аппарата не может спасти положения. «Проблема не сепарабельна», как говорят некоторые математики, и никакое сверхгениальное руководство не может расчленить ее на такие части, чтобы каждый мог решить свою часть независимо от других. Отсюда бесконечные согласования и новые неувязки — процесс решения не сходится, а вращается по замкнутому кругу.

Прогресс и усложнение системы общественного производства идут такими темпами, что ощущение неудовлетворенности существующими методами управления у людей, которые вынуждены принимать те или иные решения, нарастает буквально с каждым днем. Эти люди надеются вздохнуть свободно лишь тогда, когда заработает, наконец, кибернетическая система сбора полезной информации и принятия оптимальных решений. «Создавая искусственный интеллект, кибернетика ставит проблему управления на твердую основу, которая не будет зависеть от превратностей судьбы и ошибок отдельных людей. Не следует ожидать, что, вступив в строй, кибернетическая система сразу начнет выдавать оптимальные решения. Машины должны накопить достаточную статистику и будут воздерживаться от решений, заставляя людей расплачиваться за отсутствие на протяжении долгого времени правильной организации систематического сбора и хранения нужной информации.

После этого решения, принимаемые машинами, будут неизбежно лучше многих решений, принимаемых в настоящее время людьми, ибо эти решения будут оптимальными» [2, с. 155].

Осуществленная в СССР и других социалистических странах экономическая реформа открыла путь к оптимизации социалистической экономики на основе применения научно обоснованных методов.

«Мы не можем даже себе представить, какие силы таятся в социалистическом строе. Наше дело в том, чтобы расчистить дорогу этим силам», — эти давно сказанные слова основоположника нашего государства В. И. Ленина по сей день звучат пророчески.

Развиваемая в данной работе экономическая теория представляет собой этюд будущей математической политической экономии, которая явится синтезом многих идей, накопленных к настоящему времени.

Математическая теория игр уже нашла себе многочисленные применения в капиталистической экономике и теперь должна стать инструментом исследования экономических проблем социализма — отрицать ее применимость к проблемам социализма могут только сторонники теории «бесконфликтности».

Противоречия между отдельными субъектами неустранимы ни при каком политическом строе, и это является причиной универсальности теории игр. Теория игр исследует проблему *оптимальности в обществе*. Важность этого предмета такова, что его изучение не могло не стать необходимостью еще до того, как появились возможности его подлинно научного исследования. Это подобно тому, как до появления научной химии исследованием превращений веществ занималась алхимия или до появления научной астрономии исследованием звездного неба занималась астрология. В настоящее время исследованием проблем оптимальности в человеческом обществе занимаются преимущественно описательные науки, такие как экономика, политическая экономия, юриспруденция, психология, медицина, эстетика, этика, экология и др. *Эти науки имеют многие неоспоримые достижения, и отбрасывать их полностью было бы варварством.* По-видимому, для дальнейшего развития этих наук было бы наиболее рациональным комбинирование идей, родившихся в этих науках, с точными математическими методами кибернетики.

Так, например, для дальнейшего развития психологии было бы существенным развитие аналитической теории игр в ограниченных областях пространства ситуаций

$$[\mathbf{x}\colon g(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{b}] \in X.$$

Развитие теории подобных игр потребует исследования возникающих в них устойчивых и неустойчивых «предельных циклов», отражающих мыслительные операции человека в сложных противоречивых ситуациях. Это и будет та «величественная система уравнений», о которой мечтал акад. И. П. Павлов (1849—1936), система, которая будет описывать работу живого мозга. Существенным вкладом в теорию игр было бы изменение схемы игры таким образом, чтобы включить в рассмотрение ограниченность интеллектов игроков, как это имеет место в реальности.

Нет сомнения в том, что аналитическая теория игр получит многочисленные практические приложения во всех перечисленных областях знания, но все-таки главным ее приложением, с нашей точки зрения, будет возникающая на наших глазах математическая политическая экономия. В этой области достигнуто пока еще немногое, но, по-видимому, следует надеяться на получение в ближайшем будущем таких результатов, которые будут иметь огромное народнохозяйственное и политическое значение.

Многое зависит от того, как сложатся отношения между учеными, пришедшими работать в эту область из разных школ. Отметим, что ученые-кибернетики нуждаются в помощи творчески работающих философов-марксистов, они ждут честной научной критики своих взглядов, а не простого охаивания или восхваления.

Только творческое содружество кибернетиков и представителей всех остальных наук способно решить грандиозную задачу построения первого в мире государства, в котором каждый человек чувствовал бы себя по-настоящему счастливым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

КНИГИ

Русские

1. **Берг А. И.** Кибернетика — наука об оптимальном управлении. М., «Энергия», 1964.

2. **Волгин Л. Н.** Проблема оптимальности в теоретической кибернетике. М., «Сов. радио», 1968.

3. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М., «Наука», 1976.

4. **Канторович Л. В.** Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.

5. **Кобринский Н. Е.** Основы экономической кибернетики. М., «Экономика», 1969.

6. **Немчинов В. С.** Экономико-математические методы и модели. М., «Мысль», 1965.

7. **Цыпкин Я. З.** Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.

8. **Чебышев П. Л.** Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1951.

Переводные

9. **Винер Н.** Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. Нью-Йорк, 1948, 1961. М., «Сов. радио», 1958, 1968.

10. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. Нью-Йорк, 1960. М., ИЛ, 1963.

11. **Деннис Д. Б.** Математическое программирование и электрические цепи. Нью-Йорк, 1959. М., ИЛ, 1961.

12. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Лондон, 1959. М., «Мир», 1964.

13. **Кейнс Дж. М.** Общая теория занятости, интереса и денег. Лондон, 1936, 1946. М., ИЛ, 1949.

14. **Кюнци Г. П., Крелле В.** Нелинейное программирование. Берлин, 1962. М., «Сов. радио», 1965.

15. **Льюс Р. Д., Райфа X.** Игры и решения. Нью-Йорк, 1957. М., ИЛ, 1961.

16. **Мак Кинси Д. Ч.** Введение в теорию игр. Нью-Йорк, 1952. М., ФМ. 1960.

17. **Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. Принстон, 1943, 1947, 1953, 1961. М., «Наука», 1970.

18. **Самуэльсон П. А.** Экономика. Вводный курс. Нью-Йорк, 1948, 1951, 1955, 1958, 1961. М., «Прогресс», 1964.

19. **Селигмен Б.** Основные течения современной экономической мысли. Нью-Йорк, 1963. М., «Прогресс», 1968.

20. **Смит А.** Исследование о природе и причинах богатства народов. Первое издание: Лондон, 1776. Последнее издание: М., Соцэкгиз, 1962.

Иностранные

21. **Cournot A. A.** Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris, 1838.
22. **Edgeworth F. Y.** Mathematical psychics. London, 1882.
23. **Fermat P., de.** Oeuvres, T. 1—4. Paris, 1891—1912.
24. **Gossen H. H.** Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschlichen Handeln. Berlin, 1854, 1889, 1927.
25. **Huygens Ch.** De ratiociniis in aleae ludo, 1657. In: Oeuvres complete, T. 1—22, 1888—1950.
26. **Jevons W. S.** The principles of science: a treatise on logic and scientific method, 1874. Последнее издание: NY, 1958.
27. **Kulikowski R.** Sterowanie w wielkich systemach. Warszawa, 1970.
28. **Pacioli P. L.** Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Veneziae, 1494.
29. **Pareto V.** Manuel d'économie politique. Paris, 1909, 1927.
30. **Pascal B.** Traité du triangle arithmétique, 1654. Первое издание: Paris, 1665.
31. **Shapley L. S., Shubik M.** Game theory in economics. Santa Monica, 1971.
32. **Walras L.** Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale. Lausanne, 1874.

СТАТЬИ

Русские

33. **Аганбегян А. Г., Багриновский К. А.** О некоторых проблемах народнохозяйственного оптимума. Тезисы доклада на Всесоюзном симпозиуме по моделированию общественного производства. Новосибирск, 1967.
34. **Андронов А. А., Понтрягин Л. С.** Грубые системы. — «ДАН СССР», 1937, т. 14, № 5.
35. **Бондарева О. Н.** Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. — «Проблемы кибернетики», 1963, № 10, с. 119—139.
36. **Браверман Э. М.** Некоторые вопросы построения машин, классифицирующих объекты по не заданному заранее признаку. — «Автоматика и телемеханика», 1960, т. 21, № 10.
37. **Волгин Л. Н.** К вопросу о создании обучаемых и самообучающихся систем автоматического управления. — «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1964, № 6.
38. **Гельфанд И. М., Цетлин М. Л.** О некоторых способах управления сложными системами. — УМН, 1962, т. 17, вып. 1.
39. **Канторович Л. В.** Приближенное решение функциональных уравнений. — УМН, 1956, т. 11, вып. 6.
40. **Струмилин С. Г.** К проблеме оптимальных пропорций. — «Плановое хозяйство», 1962, № 6.

41. **Цыпкин Я. З., Красненкер А. С., Каплинский А. И.** Рандомизация и сглаживание в задачах и алгоритмах адаптации. — «Автоматика и телемеханика», 1974, т. 35, № 6.

Переводные

42. **Ферстер Г. фон.** Био-логика. — В кн.: Проблемы бионики, Нью-Йорк, 1962. М., «Мир», 1965.

43. **Шеннон К. Э.** Математическая теория связи. — В кн.: Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963.

44. **Эшби У. Р.** Схема усилителя мыслительных способностей. — В кн.: Автоматы, Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. Принстон, 1956. М., ИЛ, 1956.

Иностранные

45. **Kuhn H. W., Tucker A. W.** Nonlinear programming. Proceedings of the 2-nd Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability. University of California Press, 1951.

46. **Robbins H., Monro S.** A stochastic approximation method. — «Annals of mathematical statistics», 1951, v. 22, № 1.

КНИГИ И СТАТЬИ К ПРЕДИСЛОВИЮ РЕДАКЦИИ

47. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. Нью-Йорк, 1965. М., «Мир», 1967.

48. **Блюмин И. Г.** Критика буржуазной политической экономии. М., АН СССР, 1962.

49. **Ватель И. А., Ерешко Ф. И.** Математика конфликта и сотрудничества. М., «Знание», 1973.

50. **Католин Л.** Кибернетические путешествия. М., «Знание», 1967.

51. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.

52. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М., «Наука», 1975.

53. **Понтрягин Л. С.** К теории дифференциальных игр. — «Успехи мат. наук», 1966, т. 21, № 4.

54. **Forester J. W.** World dynamics. Cambridge, 1971.

55. **Meadows D. L.** e. a. The limmits to Egrowth. N. Y., 1972.

56. **Zadeh L. A.** Optimality and non-scalar valued performancecriteria. «Trans. IEEE», v. AC-8, № 1, 1963.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕВ НИКОЛАЕВИЧ ВОЛГИН

Принцип согласованного оптимума

Редакторы Н. Д. Иванушко, А. С. Красненкер
Художественный редактор А. Н. Алтунин
Обложка художника В. Л. Николаева
Технические редакторы А. А. Егорова, Г. З. Кузнецова
Корректор З. Г. Галушкина

Сдано в набор 22/X 1976 г. Подписано в печать 30/VIII 1977 г. Т-16522
Формат 84×108/32 Бумага типографская № 2
Объем 7,56 усл. п. л., 7,94 уч.-изд. л.
Тираж 10 600 экз. Зак. 839 Цена 50 коп.
Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
при Государственном Комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.