Математика
для
техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 1

Издание третье, переработанное

Под редакцией Г. Н. ЯКОВЛЕВА

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для средних специальных учебных заведений*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.1
М34
УДК 51 (075.3)

Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: Учебник. Ч. 1/Каченовский М. И., Колягин Ю. М., Кутасов А. Д., Луканкин Г. Л. и др.; Под ред. Г. Н. Яковлева. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.—464 с.

Книга является первой частью учебника «Алгебра и начала анализа», написанного в соответствии с действующей программой по математике для техникумов на базе неполной средней школы.

При подготовке третьего издания книга существенно переработана: упрощено изложение, приведена в порядок система упражнений, ряд обязательных тем из второй части перенесен в первую, а именн неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложени

2-е издание вышло в 1981 г.

Для учащихся техникумов на базе неполной средней школы.

Рецензент
преподаватель Ленинградского радиоаппаратостроительного т никума кандидат педагогических наук *Л. Ю. Сергиенко*

М $\frac{1702010000—138}{053 (02)\text{-}87}$ 68-87

297 × 420
Л-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является первой частью учебника «Алгебра и начала анализа», написанного в соответствии с программой по математике, утвержденной в 1985 году для средних специальных учебных заведений, ведущих подготовку специалистов на базе 8 классов общеобразовательной школы.

В новом издании при сохранении структуры учебника предыдущего издания проведено перераспределение учебного материала: дополнительные и некоторые обязательные темы, необходимые для небольшого числа специальностей, сосредоточены во второй части. Некоторые главы и параграфы существенно сокращены. Полностью переработана глава «Вычислительная математика». В связи с реализацией реформы средней общеобразовательной и специальной школы содержание и методика изложения всего учебного материала подверглись переработке в направлении большей доступности и усиления прикладной направленности курса математики.

Изложение теоретического материала сопровождается разбором большого числа задач и упражнений. В конце каждого параграфа приводятся вопросы для контроля и упражнения для самостоятельной работы учащихся. В новом издании существенно переработана и расширена система упражнений.

Учебники написаны с учетом школьной программы, в них выдерживается преемственность с курсом математики неполной средней школы как в изложении учебного материала, так и в вопросах обозначений и терминологии.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность преподавателю математики Ленинградского радиоаппаратостроительного техникума кандидату педагогических наук Л. Ю. Сергиенко, которая внимательно прочитала рукопись и сделала ряд ценных замечаний.

Глава I

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Множества и операции над ними

1. Множество и его элементы. Подмножества. Множество представляет собой соединение, совокупность, собрание некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку. Например, множество учащихся класса, множество букв алфавита, множество цифр десятичной нумерации, множество чисел первого десятка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество книг на полке и т. д.

Предметы, из которых состоит множество, называются его *элементами* (например, буква «к» — элемент множества букв русского алфавита).

Элементы множества обозначают малыми буквами латинского или греческого алфавита. Для обозначения множеств используют заглавные буквы латинского алфавита или запись со скобками. Например, A, B или $\{\alpha; \beta; \gamma\}$.

Запись $\alpha \in A$ означает, что *элемент α принадлежит множеству A*. Запись $\alpha \notin A$ означает, что *элемент α не принадлежит множеству A*. Например, если $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, то $2 \in \boldsymbol{N}$, $0 \notin \boldsymbol{N}$.

Множество считается заданным (известным), если или перечислены все его элементы, или указано такое свойство его элементов, которое позволяет судить о том, принадлежит данный элемент множеству или нет.

Так, например, говоря о множестве M всех четных чисел, мы указываем свойство его элементов: каждое число, принадлежащее этому множеству, делится нацело на два. Это записывается так:

$$M = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \vdots 2\}.$$

Здесь фигурные скобки указывают на наличие множества; знак | (вертикальная палочка) заменяет слова «таких, что» (или «такие, что»); знак «$\vdots$» читается как «делится нацелo»; о знаке $\in$ сказано ранее; буквой N обозначено множество натуральных чисел.

Буквальное чтение этой записи таково: «Множество M — это множество натуральных чисел x таких, что каждое из них делится нацело на 2». Можно прочитать и короче: «M — множество натуральных чисел, делящихся на 2», или «M — множество четных натуральных чисел».

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными* (одинаковыми). Если множества A и B равны, то пишут $A = B$.

Если любой элемент множества B является и элементом множества A, то множество B называется *подмножеством (частью) множества* A. В этом случае говорят, что B содержится в A или A содержит B, и пишут $B \subset A$ или $A \supset B$.

В силу этого определения любое множество является своим подмножеством.

Для удобства рассматривают и множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

По определению, пустое множество является подмножеством любого множества.

Таким образом, у любого множества A всегда имеются два очевидных подмножества A и $\varnothing$.

Пример. Найти все подмножества множества

$$A = \{1;\ 2;\ 3\}.$$

$\triangle$ Подмножествами данного множества являются множества

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1;\ 2\},\ \{1;\ 3\},\ \{2;\ 3\},\ \{1;\ 2;\ 3\},\ \varnothing.$$

Других подмножеств множество A не имеет. $\blacktriangle$

2. Пересечение множеств. Рассмотрим множество натуральных чисел, кратных числу 2, и множество натуральных чисел, кратных числу 3. Нетрудно заметить, что множество чисел, кратных числу 6, состоит из элементов, которые входят в каждое из двух рассмотренных множеств.

Множество C, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств A и B, называется *пересечением множеств* A и B и обозначается $A \cap B$ ($\cap$ — знак пересечения).

На рис. 1 изображены множества A и B и их пересечение.

Для точечных множеств (например, геометрических фигур) смысл термина «пересечение множеств» соответст-

вует привычному для нас смыслу термина «пересечение фигур». Так, например, если прямая имеет две точки пересечения с некоторой окружностью, то множество, являющееся пересечением множеств точек окружности и прямой, состоит из двух элементов (точек). Пересечение множеств точек отрезков AB и CD (рис. 2) есть отрезок CB.

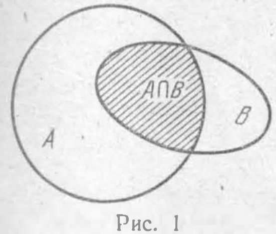


Рис. 1

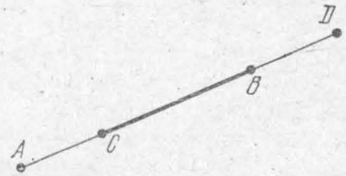


Рис. 2

Два множества, пересечение которых является пустым множеством, называются *непересекающимися множествами*.

3. Объединение множеств. *Объединением множеств* A и B называется такое множество C, которое состоит из всех элементов множеств A и B и только из них. В этом случае пишут $C = A \cup B$ ($\cup$ — знак объединения).

Например, объединением отрезков AB и CD является отрезок AD (см. рис. 2),

$$\{1;\ 2;\ 3\} \cup \{4;\ 5\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}.$$

Если множества A и B имеют общие элементы (т. е. $A \cap B \neq \varnothing$), то каждый из этих общих элементов берется в множестве C только один раз.

Например,

$$\{1;\ 2;\ 3\} \cup \{3;\ 4\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}.$$

4. Вычитание множеств. Дополнение до множества. Пусть даны два множества A и B. Множество C, которое состоит из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B, называется *разностью множеств* A и B и обозначается $A \setminus B$ (рис. 3).

Например,

если $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{1;\ 2\}$, то $A \setminus B = \{3;\ 4\}$;

если $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, то $A \setminus B = \{1;\ 2\}$;

если $A = \{1;\ 2;\ 5\}$, $B = \{3;\ 4\}$, то $A \setminus B = \{1;\ 2;\ 5\}$;

если $A = \{1;\ 2\}$, $B = \{1;\ 2;\ 3\}$, то $A \setminus B = \varnothing$.

Если $A \supset B$, то разность $A \setminus B$ называется *дополнением множества* B до множества A (рис. 4).

Отметим, что результат операции «дополнение» существенно зависит от того множества, до которого «дополняется» данное множество. Например, дополнением множества целых чисел до множества всех рациональных

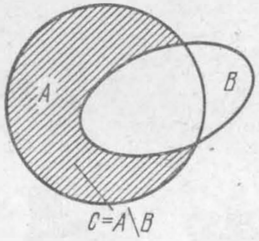


Рис. 3

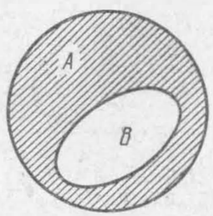


Рис. 4

чисел является множество всех дробных чисел; если же рассматривать дополнение множества целых чисел до множества действительных чисел, то дополнением этого множества будет множество всех дробных и всех иррациональных чисел.

Вопросы для контроля

1. Какими способами можно задать множество?
2. Какие множества называются равными?
3. Что называется подмножеством данного множества?
4. Какое множество называется пустым?
5. Что называется пересечением множеств?
6. Какие множества называются непересекающимися?
7. Что называется объединением множеств?
8. Что называется разностью множеств?
9. Что называется дополнением множества?
10. В каком случае разность $A \setminus B$ есть дополнение множества B до множества A?

Упражнения

1.1. Найдите множество корней уравнения

$$(x^2-1)(x^2+5x+6)=0.$$

1.2. Найдите множество всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 \leqslant 5$.

1.3. Пусть M — множество всех корней уравнения

$$x^5+3x^4+x^3-1=0.$$

Какие из чисел $1;\ -1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}$ являются элементами множества M?

1.4. Найдите все подмножества множества $A=\{3;\ 4;\ 5\}$.

1.5. Сколько подмножеств у множества, состоящего
1) из одного элемента;
2) из двух элементов;
3) из трех элементов;
4) из пяти элементов;
5) из десяти элементов?

1.6. Найдите $A \cap B$, если
1) $A=\{3;\ 4;\ 5\}$, $B=\{3;\ 5;\ 6\}$;
2) $A=\{0;\ 1;\ 7;\ 8\}$, $B=\{-7;\ 0;\ 6;\ 9\}$;
3) $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $B=\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$;
4) $A=\{1;\ 2;\ 3\}$, $B=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

1.7. Пусть M — множество всех корней уравнения $2x^6+x^3+x=0$. Найдите пересечение этого множества с множествами $A=\{1;\ 2;\ 3\}$, $B=\{0;\ 1;\ -1\}$, $C=\{-2;\ -1;\ 1\}$.

1.8. Найдите $A \cup B$ для множеств A и B, указанных в упр. 1.6.

1.9. Найдите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ для множеств A и B, указанных в упр. 1.6.

1.10. Найдите $A \setminus M$, $B \setminus M$, $C \setminus M$ для множеств A, B, C, M, указанных в упр. 1.7.

1.11. Найдите объединение множеств $A \setminus M$, $B \setminus M$, $C \setminus M$, которые определены в упр. 1.10.

1.12. Найдите дополнение множества A до множества B, если
1) $A=\{1;\ 2;\ 3\}$, $B=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5\}$;
2) $A=\{1,\ 2;\ 3\}$, $B=\left\{\frac{1}{2};\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\right\}$;
3) $A=\{0;\ 1\}$, $B=\{-1;\ 0;\ 1;\ -2\}$.

1.13. Чему равны $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, если $A \subset B$?

1.14. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$, если

$$A=\{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\},$$
$$B=\{4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0;\ -1;\ -2\},$$
$$C=\{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}.$$

1.15. Найдите $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$, где A, B, C определены в упр. 1.14.

1.16. Пусть N — множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, а множества A, B, C определены в упр. 1.14. Найдите $A \cap \mathbf{N}$, $B \cap \mathbf{Z}$, $B \cup \mathbf{Z}$, $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$, $(A \cap B) \cap \mathbf{N}$.

1.17. Пусть N — множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел. Как эти множества связаны между собой?

1.18. Найдите все элементы множеств

$$M=\{x \in Q \mid 2x=3\},\quad E=\{x \in N \mid x-3<5\}.$$

1.19. Пусть F_1 — множество всех параллелограммов, F_2 — множество всех прямоугольников, F_3 — множество всех ромбов, F_4 — множество всех квадратов. Найдите множества

$$F_1 \cap F_2,\ F_2 \cap F_3,\ F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_1,\ F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4.$$

1.20. Докажите равенства

$$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C).$$

§ 2. Рациональные числа

1. Натуральные и целые числа. Представления о числах у человечества складывались постепенно под влиянием требований практики.

Натуральные числа 1, 2, 3, ... появились в связи с необходимостью подсчета предметов, т. е. с необходимостью ответить на вопрос: «Сколько элементов содержит данное множество?». Например, пересчитав книги, стоящие на полках книжного шкафа, мы говорим, что на первой полке 5 книг, на второй полке 8 книг и т. д.

Если же одна из полок книжного шкафа свобод
книг (на ней могут находиться тетради или другие предметы), то мы говорим, что на этой полке 0 (нуль) книг.

Если к множеству всех натуральных чисел $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ присоединить число 0, то получим *множество неотрицательных целых чисел* $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

Одних только неотрицательных целых чисел для решения задач, поставленных практикой, а значит, и математических задач, отражающих данную реальную ситуацию, оказалось недостаточно. Так, чтобы охарактеризовать температуру воздуха
жение в противоположных направлениях, требуются противоположные числа. Например, температуру воздуха в шесть градусов тепла и шесть градусов мороза характеризуют соответственно $+6\,°C$ и $-6\,°C$. Числа 6 и -6 называются *противоположными числами*: -6 противоположно 6, а 6 противоположно -6. В общем случае для натурального числа n противоположным будет $-n$, а для числа $-n$ противоположным будет число n. Нуль считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и нуль составляют *множество* Z *целых чисел*.

В множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения, в результате этих операций всегда получится целое число. Операция деления в множестве целых чисел определена не для любых двух целых чисел. Например, число 2 нельзя разделить на число 3 так, чтобы в результате получилось целое число.

2. Рациональные числа. Решение практических задач, связанных с делением и измерением величин, привело к необходимости расширения множества целых чисел, введения *дробных чисел*.

Целые и дробные числа составляют *множество* Q *рациональных чисел*.

Дадим более полное описание множества рациональных чисел.

Положительными рациональными числами называются числа вида $\frac{p}{n}$, где p и n — натуральные числа. Такие числа называются еще *положительными обыкновенными дробями*. Число p называется *числителем* дроби, а число n — *знаменателем* дроби.

Числа вида $-\frac{p}{n}$, где p и n — натуральные числа, называются *отрицательными рациональными числами*. Их еще называют *отрицательными обыкновенными дробями*.

Любое отрицательное и положительное целое число можно представить в виде обыкновенной дроби, у которой знаменатель равен 1. Например,

$$2 = \frac{2}{1}, \quad -3 = -\frac{3}{1}.$$

Число 0 можно представить в виде обыкновенной дроби, у которой числитель равен нулю:

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \ldots$$

Две обыкновенные дроби считаются *равными*, если одна из них получается из другой умножением числителя и знаменателя на одно и то же натуральное число. Например,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{5}{10}.$$

Для любых двух обыкновенных дробей определены операции сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль).

Множество всех обыкновенных дробей (положительных, отрицательных и равных нулю) образует множество Q рациональных чисел.

3. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Если знаменатель обыкновенной дроби равен натуральной степени числа 10, то эту дробь можно записать в виде *конечной десятичной дроби*. Например,

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{23}{10} = 2{,}3; \quad \frac{123}{100} = 1{,}23;$$

$$-\frac{7}{10} = -0{,}7; \quad -\frac{17}{10} = -1{,}7.$$

Очевидно, любую конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби, причем после сокращения ее знаменатель не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

Пример 1. Записать в виде несократимых обыкновенных дробей следующие десятичные дроби:

$$0{,}2;\ -0{,}25;\ 1{,}4.$$

△ Имеем

$$0{,}2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5};$$

$$-0{,}25=-\frac{25}{100}=-\frac{1}{4};$$

$$1{,}4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}.\ ▲$$

Верно и обратное утверждение: если знаменатель дроби не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эту дробь можно представить конечной десятичной дробью. Для этого нужно числитель и знаменатель дроби умножить на соответствующие степени чисел 2 и 5, а можно воспользоваться способом «деления уголком» числителя на знаменатель.

Пример 2. Записать в виде десятичных дробей следующие обыкновенные дроби:

$$\frac{3}{50},\quad \frac{6}{25},\quad -\frac{7}{20}.$$

△ Воспользуемся способом домножения числителя и знаменателя на степени чисел 2 и 5:

$$\frac{3}{50}=\frac{3\cdot 2}{100}=0{,}06;$$

$$\frac{6}{25}=\frac{6\cdot 4}{100}=0{,}24;$$

$$-\frac{7}{20}=-\frac{7\cdot 5}{100}=-0{,}35.$$

Аналогичный результат получим и способом «деления уголком» числителя на знаменатель. ▲

Если знаменатель несократимой обыкновенной дроби имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, то эта дробь не может быть записана в виде конечной десятичной дроби. Применив к ней способ «деления уголком», мы не получим конечную десятичную дробь.

Например,

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots;\quad -\frac{1}{3}=-0{,}333\ldots,$$

где точки означают, что цифра 3 периодически повторяется бесконечно много раз. Аналогично,

$$\frac{5}{9}=0{,}555\ldots;\quad -\frac{5}{9}=-0{,}555\ldots$$

Выражения вида 0,333...; —0,333...; 0,555...; —0,555... называются *бесконечными десятичными дробями*.

Следовательно, каждое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a_0,a_1a_2a_3\ldots,$$

где a_0 — целое число, а каждое из a_1, a_2, a_3, ... — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9.

4. Рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби. Бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, если у нее, начиная с некоторого места, все десятичные знаки периодически повторяются. Например, бесконечные десятичные дроби

$$0{,}333\ldots;\quad -0{,}333\ldots;$$
$$1{,}2444\ldots;\quad -2{,}5151\ldots$$

являются периодическими. Бесконечная десятичная дробь

$$3{,}125787878\ldots,$$

где точки означают, что цифры 7, 8 периодически повторяются бесконечно много раз, тоже является периодической.

Для записи бесконечных периодических десятичных дробей имеется специальное обозначение. Например, вместо 0,333... пишут 0,(3):

$$0{,}333\ldots=0{,}(3).$$

Аналогично,

$$-0{,}333\ldots=-0{,}(3);$$
$$3{,}125787878\ldots=3{,}125(78).$$

Число, записанное в скобках, называется *периодом* рассматриваемой дроби. Поэтому дроби 0,(3); —0,(3); 3,125(78) читаются соответственно так: «нуль целых и три в периоде», «минус нуль целых и три в периоде», «три целых, сто двадцать пять тысячных и семьдесят восемь в периоде».

Теорема 1. *Каждое рациональное число представимо в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.*

Например, рациональное число $\frac{5}{11}$ представляется в виде десятичной периодической дроби 0,(45), причем для получения такого представления достаточно разделить число 5 на 11:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 11 \\ \underline{44} & 0{,}45 \\ 60 & \\ \underline{55} & \\ 5 & \end{array}$$

Получив остаток, равный 5, мы можем дальше не вести вычислений, так как остатки и цифры в частном будут повторяться. Поэтому $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots=0{,}(45)$, т. е. имеем нуль целых и 45 в периоде.

В общем случае для произвольного рационального числа $\pm\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, поступают аналогично: делят m на n. Так как при делении на n для остатка имеется лишь n возможных значений 0, 1, 2, ..., $n-1$, то не более чем через n шагов в частном от деления m на n начнется повторение десятичных знаков. Последнее означает, что деление m на n приводит к конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Замечание. Для единообразия иногда конечные десятичные дроби удобно записывать в виде бесконечных периодических десятичных дробей, у которых справа после десятичных знаков, отличных от нуля, на месте последующих десятичных знаков стоят нули. Например,

$$0{,}25=0{,}25000\ \ldots\ =0{,}25(0);$$
$$-1{,}2=-1{,}2000\ldots=-1{,}2(0).$$

Целые числа также записывают в виде бесконечных периодических десятичных дробей, у которых справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули. Например,

$$15=15{,}000\ldots=15{,}(0);\quad -6=-6{,}000\ldots=-6{,}(0).$$

Учитывая это замечание, теорему 1 можно сформулировать короче: *каждое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Верно и обратное утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является представлением некоторого рационального числа.

В общем виде это утверждение доказывать не будем. Покажем лишь на примерах, как по бесконечной периодической десятичной дроби можно найти рациональное число, представлением которого она является.

Пример 1. Найти рациональное число, представлением которого является периодическая дробь 0,(7).

△ Чтобы умножить бесконечную десятичную дробь на 10, достаточно в данной десятичной дроби запятую перенести на один десятичный знак вправо. Поэтому

$$0{,}(7)\cdot 10=7{,}(7).$$

Последняя дробь равна сумме натурального числа 7 и десятичной дроби 0,(7):

$$7{,}(7)=7+0{,}(7).$$

Обозначим через x искомое рациональное число. Тогда из предыдущих равенств получаем уравнение

$$10x=7+x,$$

из которого следует, что $x=\frac{7}{9}$.

Проверкой убеждаемся, что действительно

$$\frac{7}{9}=0{,}(7).\ ▲$$

Пример 2. Найти рациональное число, равное периодической дроби 1,2(3).

△ Обозначим

$$x=0{,}2(3).$$

Тогда

$$10x=2{,}(3),$$
$$100x=23{,}(3).$$

Из второго равенства почленно вычтем первое, в результате получим

$$90x=23-2,$$
$$x=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}.$$

Следовательно, $1{,}2(3)=1+x=\frac{37}{30}$.

Проверкой убеждаемся, что действительно

$$\frac{37}{30}=1{,}2(3). \blacktriangle$$

Пример 3. Найти рациональное число, равное периодической дроби 0,12(34).

$\triangle$ Искомое рациональное число обозначим через x:

$$x=0{,}12(34).$$

Тогда

$$100x=12{,}(34),$$
$$10\,000x=1234{,}(34).$$

Из второго равенства почленно вычтем первое, в результате мы получим

$$9900x=1234-12,$$
$$x=\frac{1\,234-12}{9\,900}=\frac{1\,222}{9\,900}=\frac{611}{4\,950}.$$

Делением уголком можно убедиться, что действительно

$$\frac{611}{4\,950}=0{,}12(34). \blacktriangle$$

Пример 4. Найти рациональное число, равное периодической дроби 0,2(9).

$\triangle$ Искомое рациональное число обозначим через x:

$$x=0{,}2(9).$$

Тогда

$$10x=2{,}(9),$$
$$100x=29{,}(9),$$

и поэтому

$$90x=29-2,$$
$$x=\frac{29-2}{90}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Следовательно,

$$0{,}2(9)=0{,}3. \blacktriangle$$

Вообще, любая бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9 равна некоторой конечной десятичной дроби. Отметим, что методом «деления уголком» никогда не получится бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9.

В дальнейшем при представлении рациональных чисел десятичными дробями будем исключать из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9.

Сформулируем правила обращения периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Бесконечная периодическая дробь называется *чистой*, если у нее первый период начинается сразу после запятой. В противном случае она называется *смешанной*.

Чтобы чистую периодическую дробь

$$0,(\alpha_1\ldots\alpha_n)$$

обратить в обыкновенную, поступим следующим образом:

1) обозначим ее, например, через x:

$$x=0,(\alpha_1\ldots\alpha_n);$$

2) умножим на 10^n, где n — число цифр в периоде, обе части этого равенства:

$$10^n x=\alpha_1\ldots\alpha_n,(\alpha_1\ldots\alpha_n);$$

3) из второго равенства почленно вычтем первое:

$$10^n x-x=\alpha_1\ldots\alpha_n.$$

В результате получим линейное уравнение относительно x:

$$(10^n-1)\,x=\alpha_1\ldots\alpha_n,$$

из которого находим

$$x=\frac{\alpha_1\ldots\alpha_n}{10^n-1}.$$

Следовательно, *чистая периодическая дробь* $0,(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ *равна обыкновенной, у которой числитель равен периоду* $\alpha_1\ldots\alpha_n$, *а знаменатель равен* 10^n-1, *где* n — *число цифр в периоде.*

Чтобы смешанную периодическую дробь

$$0,\beta_1\ldots\beta_m(\alpha_1\ldots\alpha_n)$$

обратить в обыкновенную, поступим следующим образом:

1) обозначим ее через x:

$$x=0,\beta_1\ldots\beta_m(\alpha_1\ldots\alpha_n);$$

2) умножим на 10^m, где m — число цифр до первого периода, обе части этого равенства:

$$10^m\cdot x=\beta_1\ldots\beta_m,(\alpha_1\ldots\alpha_n);$$

3) умножим это равенство еще на 10^n, где n — число цифр в периоде:

$$10^{m+n}\cdot x=\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_n,(\alpha_1\ldots\alpha_n);$$

4) из последнего равенства почленно вычтем второе:

$$10^{m+n}\cdot x-10^m\cdot x=\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_n-\beta_1\ldots\beta_m.$$

В результате получим линейное уравнение относительно x:

$$10^m(10^n-1)x=\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_n-\beta_1\ldots\beta_m,$$

из которого находим

$$x=\frac{\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_n-\beta_1\ldots\beta_m}{10^m(10^n-1)}.$$

Следовательно, *смешанная периодическая дробь вида* $0,\beta_1\ldots\beta_m(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ *равна обыкновенной, у которой числитель равен разности*

$$\beta_1\ldots\beta_m\alpha_1\ldots\alpha_n-\beta_1\ldots\beta_m,$$

а знаменатель равен произведению $10^m(10^n-1)$, *где* m — *число цифр до первого периода, а* n — *число цифр в периоде.*

Вопросы для контроля

1. Какие числа называются целыми?
2. Какие операции определены в множестве целых чисел?
3. Какие числа называются рациональными?
4. Какие операции определены в множестве рациональных чисел?
5. Какую обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби?
6. Какая бесконечная десятичная дробь называется периодической?
7. Что называется периодом бесконечной десятичной дроби?
8. Каким образом обыкновенную дробь можно разложить в конечную или бесконечную десятичную дробь?
9. Какая бесконечная периодическая дробь называется чистой?
10. Каким образом чистую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную?
11. Какая бесконечная периодическая дробь называется смешанной?
12. Каким образом смешанную периодическую дробь можно обратить в обыкновенную?

Упражнения

1.21. Найдите все целые числа от 20 до 40, которые делятся на 3.

1.22. Найдите все простые числа от 10 до 30.

1.23. Существует ли двузначное число, которое равно сумме своих цифр?

1.24. Найдите все целые числа, удовлетворяющие неравенству $|x-1|<4$.

1.25. Найдите значения выражений:

1) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$; 2) $\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

при $x=2$; $x=\dfrac{1}{3}$; $x=0,3$.

1.26. Найдите 5 %, 10 %, 125 % от числа 240.

1.27. Найдите число, n процентов которого равны 15, если 1) $n=15$; 2) $n=25$; 3) $n=125$.

1.28. Какие из следующих обыкновенных дробей представимы конечными десятичными дробями:

$$\frac{1}{7},\quad \frac{10}{13},\quad \frac{17}{20},\quad \frac{20}{17},\quad \frac{27}{125}?$$

1.29. Представьте в виде конечных или бесконечных десятичных дробей следующие рациональные числа:

1) $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{3}{60}$, $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{13}{50}$;

2) $\dfrac{7}{30}$, $\dfrac{11}{3}$, $\dfrac{13}{60}$, $\dfrac{13}{11}$, $\dfrac{11}{13}$.

1.30. Найдите рациональные числа, представлением которых являются следующие бесконечные периодические десятичные дроби:

1) $0,(51)$; $1,(13)$; $-0,(25)$; $2,(125)$; $-0,(113)$;

2) $0,3(51)$; $2,1(23)$; $0,2(125)$; $-1,31(12)$; $1,25(13)$.

1.31. Найдите сумму и разность следующих рациональных чисел:

1) $a=0,(3)$, $b=1,(7)$;

2) $a=-1,(21)$, $b=0,(5)$;

3) $a=1,(2)$, $b=1,0(4)$.

1.32. Найдите произведение и частное рациональных чисел, указанных в упр. 1.31.

§ 3. Действительные числа

1. Множество действительных чисел. Множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей называется *множеством действительных чисел*, а каждая такая дробь называется *действительным числом*. Множество всех действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Напомним, что бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9 исключаются, так как каждая из таких дробей равна некоторой конечной десятичной дроби.

Как следует из предыдущего параграфа, множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел является подмножеством множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*. Иррациональные числа изображаются бесконечными непериодическими десятичными дробями.

Следующая теорема утверждает, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным. Напомним, что $\sqrt{2}$ — это положительный корень уравнения $x^2=2$. В частности, $\sqrt{2}$ — это длина диагонали единичного квадрата. Следовательно, иррациональные числа возникают даже в самых простых алгебраических и геометрических задачах.

Теорема 2. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.*

□ Доказательство будем проводить методом от противного. Допустим, что существует рациональное число, квадрат которого равен 2, представимое несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Тогда имеем

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2, \quad \frac{m^2}{n^2}=2, \quad m^2=2n^2.$$

Следовательно, число m^2 — четное, но тогда и число m — четное. В самом деле, если бы $m=2k+1$ (т. е. было нечетным), то $m^2=(4k^2+4k)+1$ — нечетное, так как $(4k^2+4k)$ — четное.

Но если m — четное число, т. е. $m=2k$, то

$$4k^2=2n^2, \quad n^2=2k^2,$$

т. е. число n^2 — четное, а значит, и число n — четное.

Итак, наше допущение привело к тому, что оба числа m и n оказались четными, что вступает в противоречие с предположением о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Это противоречие показывает, что мы сделали неправильное допущение о существовании рационального числа, квадрат которого равен 2.

Следовательно, число $\sqrt{2}$ иррациональное. ■

Можно показать, что

$$\sqrt{2}=1,41421356\ldots$$

Число π, являющееся отношением длины окружности к диаметру, тоже является иррациональным числом. Для него имеем

$$\pi=3,14159\ldots$$

2. Действия над действительными числами. Для любой бесконечной десятичной дроби (действительного числа) $x=a_0,a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots$ конечная десятичная дробь $x_n=a_0,a_1a_2\ldots a_n$ называется n-м *отрезком* этой дроби.

Рассмотрим два действительных числа:

$$x=a_0,a_1a_2a_3\ldots \text{ и } y=b_0,b_1b_2b_3\ldots$$

(напомним, что из рассмотрения исключаются бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Числа x и y считаются *равными*, если они изображаются одной и той же бесконечной десятичной дробью. В противном случае действительные числа x и y считаются *неравными*.

Другими словами, $x=y$, если $x_n=y_n$ при любом n, и $x\neq y$, если найдется m такое, что $x_m\neq y_m$.

Считается, что число x *больше* числа y (или число y *меньше* числа x), если найдется m такое, что $x_m>y_m$. В этом случае пишут $x>y$ или $y<x$.

Например,

$1,467\ldots<2,458\ldots$, так как $1<2$ (здесь $m=0$);

$1,467\ldots<1,476\ldots$, так как $1,46<1,47$ (здесь $m=2$);

$-2,4793\ldots<-2,4737$, так как $-2,479<-2,473$ (здесь $m=3$).

Чтобы приближенно найти сумму, разность, произведение и частное двух бесконечных десятичных дробей, нужно проделать соответствующие действия (сложение, вычитание, умножение, деление) над n-ми отрезками этих бесконечных десятичных дробей. Для этого можно воспользоваться любым микрокалькулятором.

Следовательно,

$$x+y\approx x_n+y_n,$$
$$x-y\approx x_n-y_n,$$
$$xy\approx x_ny_n,$$
$$\frac{x}{y}\approx\frac{x_n}{y_n}.$$

При делении, конечно, предполагается, что $y\neq 0$ и $y_n\neq 0$.

Очевидно, чем больше n, тем с большей точностью будут вычислены результаты соответствующих действий.

Оценка точности вычислений будет рассмотрена ниже.

3. Десятичные приближения действительных чисел. Для любого положительного числа

$$x=a_0,a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots$$

число $x_n'=a_0,a_1a_2\ldots a_n$ называется *n-м десятичным приближением числа x с недостатком с точностью до 10^{-n}*, а число $x_n''=a_0,a_1a_2\ldots a_n+10^{-n}$ называется *n-м десятичным приближением с избытком с точностью до 10^{-n}*.

Например, для числа $\sqrt{3}=1,7321\ldots$ числа

$$1;\ 1,7;\ 1,73;\ 1,732;\ 1,7321$$

являются десятичными приближениями с недостатком соответственно с точностью до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001, а числа

$$2;\ 1,8;\ 1,74;\ 1,733;\ 1,7322$$

являются десятичными приближениями с избытком с точностью до 1, до 0,1 и т. д.

Заметим, что для положительного числа n-е десятичное приближение с недостатком совпадает с n-м отрезком соответствующей бесконечной десятичной дроби.

Для любого отрицательного числа

$$x=-a_0,a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots,\ \text{где } a_0\geqslant 0,$$

n-е десятичные приближения определяются следующим образом:

$$x'_n=-a_0,a_1a_2\ldots a_n-\frac{1}{10^n};$$
$$x''_n=-a_0,a_1a_2\ldots a_n.$$

В этом случае n-е десятичное приближение с избытком совпадает с n-м отрезком соответствующей бесконечной десятичной дроби.

Очевидно, что десятичные приближения любого числа x обладают следующим свойством: если $m<n$, то

$$x'_m\leqslant x'_n\leqslant x\leqslant x''_n\leqslant x''_m.\ \bullet$$

Таким образом, любое десятичное приближение числа x с недостатком не больше числа x, а любое десятичное приближение с избытком не меньше числа x. Кроме того, по мере возрастания точности десятичные приближения с недостатком не убывают, а десятичные приближения с избытком не возрастают.

Используя десятичные приближения с недостатком и с избытком, можно оценить точность приближенных вычислений с действительными числами. Как это делается, рассмотрим на примерах.

Пример 1. Зная два первых десятичных знака у бесконечных десятичных дробей, равных π и $\sqrt{2}$:

$$\pi=3,14\ldots;\quad \sqrt{2}=1,41\ldots,$$

найти приближенно сумму этих чисел и оценить точность полученного приближения.

$\triangle$ Очевидно, можно считать, что

$$\pi+\sqrt{2}\approx 4,55.$$

Оценим точность этого приближенного равенства.

Из данных условий следует

$$3,14\leqslant\pi\leqslant 3,15,$$
$$1,41\leqslant\sqrt{2}\leqslant 1,42.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$4,55\leqslant\pi+\sqrt{2}\leqslant 4,57.$$

Отсюда следует, что

$$0\leqslant(\pi+\sqrt{2})-4,55\leqslant 4,57-4,55=0,02,$$
$$0\leqslant 4,57-(\pi+\sqrt{2})\leqslant 4,57-4,55=0,02.$$

В этом случае говорят, что

$$\pi+\sqrt{2}\approx 4,55\ \text{ и }\ \pi+\sqrt{2}\approx 4,57$$

с точностью до 0,02. Чтобы подчеркнуть, что $4,55\leqslant\pi+\sqrt{2}$, а $4,57\geqslant\pi+\sqrt{2}$, говорят, что число 4,55 является *приближением с недостатком* (*снизу*), а число 4,57 — *приближением с избытком* (*сверху*) суммы $\pi+\sqrt{2}$ с точностью до 0,02.

Возможно, одно из этих приближений является более точным, чем второе, но, исходя только из данных условий, нельзя сказать, какое из них более точное.

Более точное приближение суммы $\pi+\sqrt{2}$ дает среднее арифметическое найденных приближений с недостатком и с избытком. Именно,

$$\pi+\sqrt{2}\approx 4,56$$

с точностью до 0,01, так как

$$|\pi+\sqrt{2}-4,56|\leqslant 0,01.$$

В этом случае пишут $\pi+\sqrt{2}=4,56\pm 0,01$. $\blacktriangle$

Пример 2. Исходя из условий предыдущего примера, найти приближенно разность $\pi-\sqrt{2}$ и оценить точность полученного приближения.

△ Можно считать, что

$$\pi-\sqrt{2}\approx 1{,}73.$$

Оценим точность этого приближенного равенства. Так как

$$3{,}14-1{,}42\leqslant\pi-\sqrt{2}\leqslant 3{,}15-1{,}41,$$
$$1{,}72\leqslant\pi-\sqrt{2}\leqslant 1{,}74,$$

то, очевидно,

$$\pi-\sqrt{2}=1{,}73\pm 0{,}01,$$

т. е. $\pi-\sqrt{2}\approx 1{,}73$ с точностью до 0,01. ▲

Пример 3. Исходя из условий примера 1, найти приближенно произведение $\pi\sqrt{2}$ и оценить точность полученного приближения.

△ Так как

$$3{,}14\leqslant\pi\leqslant 3{,}15,$$
$$1{,}41\leqslant\sqrt{2}\leqslant 1{,}42,$$

то

$$3{,}14\cdot 1{,}41\leqslant\pi\sqrt{2}\leqslant 3{,}15\cdot 1{,}42.$$

Выполнив умножение конечных десятичных дробей, получим

$$4{,}4274\leqslant\pi\sqrt{2}\leqslant 4{,}5130.$$

Следовательно, число 4,4274 является приближением с недостатком, а 4,5130 — приближением с избытком произведения $\pi\sqrt{2}$.

Так как сомножители произведения были взяты с точностью до одной сотой, то и у приближений естественно оставлять только сотые знаки. Тогда

$$4{,}42<\pi\sqrt{2}<4{,}52.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\pi\sqrt{2}\approx 4{,}47$$

с точностью до 0,05, т. е.

$$\pi\sqrt{2}=4{,}47\pm 0{,}05. \ ▲$$

(О приближенных вычислениях более подробно будет рассказано в следующих параграфах.)

Пример 4. Исходя из условий примера 1, найти приближенно частное $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ и оценить точность полученного приближения.

△ Так как

$$\frac{3{,}14}{1{,}42}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{3{,}15}{1{,}41},$$

то, вычислив частные конечных десятичных дробей соответственно с недостатком и с избытком с точностью до одной тысячной, получим неравенство

$$2{,}211<\frac{\pi}{\sqrt{2}}<2{,}235,$$

из которого следует, что

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}=2{,}223\pm 0{,}012$$

или

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}=2{,}22\pm 0{,}02. \ ▲$$

4. Координатная ось и числовая прямая. На плоскости рассмотрим некоторую прямую. На этой прямой зафиксируем некоторую точку O. Эта точка O, которую будем называть *начальной точкой*, данную прямую разбивает на два луча (рис. 5). На одном из этих лучей

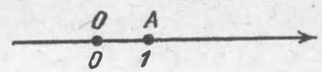


Рис. 5

выберем некоторую точку A и отрезок OA примем за единицу длины. Отрезок OA называется *единичным отрезком*, а точка A — *единичной точкой*. Выбор единичной точки A на прямой с начальной точкой O определяет на этой прямой *положительное направление*. Луч OA называется *положительным лучом*, а противоположный луч — *отрицательным лучом*.

Прямая, на которой выбраны начальная и единичная точки, называется *координатной осью* или *координатной прямой*.

На рис. 5 координатная прямая нарисована горизонтально с единичной точкой A, лежащей вправо от начальной точки O, т. е. за положительное направление выбрано направление слева направо. Вообще же, координатная ось на плоскости может располагаться произвольно, и положительное направление на ней может быть выбрано удобным образом. Например, если координатная ось расположена вертикально, то за положительное направление на ней может быть выбрано как направление вверх, так и направление вниз.

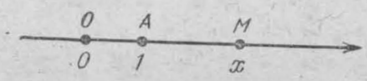


Рис. 6

Каждой точке M координатной оси поставим в соответствие действительное число x (рис. 6) по следующим правилам:

1) начальной точке O поставим в соответствие число $x=0$;

2) точке M, принадлежащей положительному лучу, поставим в соответствие число $x=|OM|$;

3) точке M, принадлежащей отрицательному лучу, поставим в соответствие число $x=-|OM|$.

Здесь $|OM|$ — длина отрезка OM, измеренного при помощи единичного отрезка OA.

Число x, которое, согласно этим правилам, ставится в соответствие точке M координатной оси, называется *координатой точки M*.

Очевидно, что каждая точка координатной оси имеет единственную координату и, наоборот, каждое действительное число является координатой единственной точки координатной оси. В этом случае говорят, что между точками координатной оси и множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому множество $\boldsymbol{R}$ называют иногда *числовой прямой*, а действительные числа — *точками числовой прямой*.

Напомним определения и обозначения некоторых подмножеств множества действительных чисел (или подмножеств числовой прямой), которые были изучены в школе.

Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $a\leqslant x\leqslant b$, называется *замкнутым промежутком* или *отрезком* с началом в точке a и концом в точке b и обозначается $[a;\ b]$.

Множество всех действительных чисел x таких, что $a<x<b$, называется *открытым промежутком* или *интервалом* с началом в точке a и концом в точке b и обозначается $(a;\ b)$.

Множество всех действительных чисел x таких, что $a\leqslant x<b$, называется *полуоткрытым промежутком* и

обозначается $[a;\ b)$. Аналогично определяется промежуток $(a;\ b]$.

Множество всех $x>a$ называется *бесконечным промежутком* и обозначается $(a;\ +\infty)$. Аналогично определяются бесконечные промежутки $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b)$, $(-\infty;\ b]$.

Множество $\boldsymbol{R}$ также иногда называется бесконечным промежутком и обозначается $(-\infty;\ +\infty)$.

Вопросы для контроля

1. Что называется множеством действительных чисел?
2. Какие числа называются иррациональными?
3. Каким образом на практике может возникнуть рациональное число?
4. Какие действительные числа называются равными?
5. Что называется n-м отрезком данной бесконечной десятичной дроби?
6. В каком случае одно действительное число больше другого?
7. Каким образом приближенно можно найти сумму, разность, произведение и частное двух бесконечных десятичных дробей?
8. Что называется n-м десятичным приближением данного числа с недостатком с точностью до 10^{-n}?
9. Что называется n-м десятичным приближением данного числа с избытком с точностью 10^{-n}?
10. Какими свойствами обладают десятичные приближения с недостатком и с избытком?
11. Что называется координатной прямой?
12. Что называется координатой точки на прямой?
13. Что называется числовой прямой?
14. Что называется числовым отрезком?
15. Что называется интервалом?
16. Что называется числовым промежутком?
17. Какой промежуток называется полуоткрытым?
18. Какие промежутки называются бесконечными?

Упражнения

1.33. Докажите, что уравнение $x^2=3$ не имеет рациональных корней.

1.34. Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным. Пользуясь калькулятором, найдите несколько знаков в десятичном разложении этого числа.

1.35. Сравните следующие пары действительных чисел:
1) 2,39748 ... и 2,39784 ...; 2) 2,3874 ... и 0,3874 ...;
3) 1,2030 ... и 1,2003 ...; 4) 4,8181 ... и 4,1881 ...;
5) 17,2 ... и $\frac{87}{5}$; 6) $-\frac{3}{7}$ и 0,428 ...;

7) $-10,003\ldots$ и $-10,030\ldots$; 8) $-0,025\ldots$ и $-0,052\ldots$

1.36. Пользуясь калькулятором, вычислите значения выражений:

1) $\frac{x^3+1}{x-3}$; 2) $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$

при $x=0,13$; $x=\frac{1}{7}$; $x=0,(3)$; $x=\sqrt{2}$; $x=\pi$.

1.37. Найдите десятичные приближения с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком для чисел:

1) 0,37893; 2) 1,4978; 3) $-4,5678$; 4) $-3,7326$;

5) $\sqrt{5}$; 6) $-\sqrt{5}$; 7) $\sqrt{7}$; 8) $-\sqrt{7}$;

9) $\frac{2}{3}$; 10) $-\frac{2}{3}$; 11) $\frac{15}{7}$; 12) $-\frac{15}{7}$.

1.38. Докажите, что числа 1,4142 и 1,4143 являются десятичными приближениями числа $\sqrt{2}$ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до 0,0001.

1.39. Докажите, что числа $-1,7322$ и $-1,7321$ являются десятичными приближениями числа $-\sqrt{3}$ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до 0,0001.

1.40. Пользуясь калькулятором, найдите с точностью до 0,01 сумму и разность следующих чисел:

1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$ и 0,(15);

3) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{6}$ и 1,1(2).

1.41. Пользуясь калькулятором, найдите с точностью до 0,01 произведение и частное чисел, указанных в упр. 1.40.

1.42. Какая из двух точек находится на координатной прямой левее и какая правее, если эти точки имеют координаты:

1) $2,3934\ldots$ и $2,3443\ldots$; 2) $15,55\ldots$ и $15\frac{3}{9}$;

3) $-1,001\ldots$ и $-1,010\ldots$; 4) 0 и $-1,56\ldots$;

5) $2,34\ldots$ и $-3,345\ldots$?

1.43. Какая из двух точек находится на координатной прямой дальше от начальной точки O, если эти точки имеют координаты:

1) $4,783\ldots$ и $4,793\ldots$; 2) $3,5678\ldots$ и $2,7893\ldots$;

3) $-15,004\ldots$ и $-15,040\ldots$; 4) $-0,20\ldots$ и $-0,30\ldots$?

§ 4. Приближенные значения и погрешности приближений

1. Приближенное значение величины. Абсолютная погрешность приближения. Граница абсолютной погрешности. В практической деятельности человеку приходится измерять различные величины, учитывать материалы и продукты труда, производить различные вычисления. Результатами измерений, подсчетов и вычислений являются числа. Числа, полученные в результате измерения, лишь приблизительно, с некоторой точностью, характеризуют искомые величины. Точные измерения невозможны ввиду

неточности измерительных приборов, несовершенства наших органов зрения, да и сами измеряемые объекты иногда не позволяют определить их величину с любой точностью.

Пусть результат измерения или вычисления величины x с некоторой точностью равен a. Тогда a называется *приближенным значением* (или *приближением*) величины x. Причем, если $a \leqslant x$, то a называется *приближенным значением с недостатком* (или *приближением снизу*), а если $a \geqslant x$, то a называется *приближенным значением с избытком* (или *приближением сверху*) величины x.

Разность точного и приближенного значений величины называется *погрешностью приближения*.

Так, если x — точное значение, a — приближенное значение, то разность $x-a$ — погрешность приближения. Если ее обозначим через Δx, то получим

$$x=a+\Delta x,$$

т. е. истинное значение равно сумме приближенного значения и погрешности приближения.

Модуль разности точного и приближенного значений величины называется *абсолютной погрешностью приближения*.

Следовательно, если $\Delta x=x-a$ — погрешность приближения, то $\boxed{|\Delta x|=|x-a|}$ — абсолютная погрешность приближения.

Пример 1. Известно, что $-0,333$ является приближенным значением для $-\frac{1}{3}$. Найти погрешность и абсолютную погрешность этого приближения.

△ Здесь $x=-\frac{1}{3}$, $a=-0,333$. Тогда, согласно определению погрешности приближения,

$$\Delta x=x-a=-\frac{1}{3}+0,333=-\frac{1}{3}+\frac{333}{1\,000}=-\frac{1}{3\,000}.$$

Следовательно, погрешность приближения равна $-\frac{1}{3\,000}$, а абсолютная погрешность приближения равна $\frac{1}{3\,000}$. ▲

Во многих практически важных случаях нельзя найти абсолютную погрешность приближения из-за того, что неизвестно точное значение величины. Однако можно указать положительное число, больше которого эта абсолютная погрешность быть не может.

Любое положительное число, которое больше или равно абсолютной погрешности, называется *границей абсолютной погрешности.*

Следовательно, если x — точное значение, a — приближенное значение, $\Delta x = x - a$ — погрешность приближения, то любое число h, удовлетворяющее неравенству $|\Delta x| \leqslant h$, является границей абсолютной погрешности. В этом случае говорят, что величина x приближенно с точностью до h равна a, и пишут

$$x \approx a \text{ с точностью до } h$$

или $x = a \pm h$. Запись $x = a \pm h$ означает, что истинное значение величины x заключено между границами $a - h$ и $a + h$, т. е.

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h.$$

Если известно, что a является приближенным значением величины x, и требуется определить границу абсолютной погрешности этого приближенного значения, то эту задачу обычно формулируют так: «Определить (найти) точность приближенного равенства $x \approx a$».

Пример 2. Известно, что $\pi = 3{,}14\ldots$ Найти точность приближенного равенства $\pi \approx 3{,}14$.

$\triangle$ Мы не знаем всех десятичных знаков в разложении числа π и в этом смысле мы не знаем истинного значения π. Следовательно, мы не можем найти погрешность и абсолютную погрешность данного приближения. Однако мы можем указать границу абсолютной погрешности. Действительно, так как

$$3{,}14 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15,$$

то $0 \leqslant \pi - 3{,}14 \leqslant 0{,}01$, и поэтому $\pi \approx 3{,}14$ с точностью до $0{,}01$, т. е. $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}01$. $\blacktriangle$

2. Относительная погрешность. Граница относительной погрешности. Абсолютная погрешность приближения не характеризует качества измерений. Действительно, если мы измеряем с точностью до 1 см какую-либо длину, то в том случае, когда речь идет об определении длины карандаша, это будет плохая точность. Если же с точностью до 1 см определить длину или ширину волейбольной площадки, то это будет высокая точность.

Пример 1. При измерении длины l и диаметра d проводника получили

$$l = (10{,}0 \pm 0{,}1)\text{ м}, \quad d = (2{,}5 \pm 0{,}1)\text{ мм}.$$

Какое из этих измерений точнее?

$\triangle$ Измерение длины проводника производилось с точностью до $0{,}1$ м $= 100$ мм, а измерение диаметра проводника — с точностью до $0{,}1$ мм. Казалось бы, что точнее измерен диаметр проводника. Однако это не так.

При измерении длины проводника допускается абсолютная погрешность в 100 мм на 10 000 мм, и, следовательно, допустимая абсолютная погрешность составляет

$$\frac{100}{10\,000} = 0{,}01 = 1\,\%$$

измеряемой величины. При измерении диаметра допустимая абсолютная погрешность составляет

$$\frac{0{,}1}{2{,}5} = 0{,}04 = 4\,\%$$

измеряемой величины. Следовательно, измерение длины проводника выполнено точнее. $\blacktriangle$

Для характеристики качества измерения вводится понятие относительной погрешности.

Отношение абсолютной погрешности приближения к модулю приближенного значения величины называется *относительной погрешностью* приближения.

Следовательно, если x — точное значение, a — приближенное значение, то отношение

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} = \frac{|x - a|}{|a|}$$

является относительной погрешностью приближения.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

В отличие от абсолютной погрешности, которая чаще всего бывает размерной величиной, относительная погрешность является безразмерной величиной.

Пример 2. Известно, что $0{,}111$ является приближенным значением для $\frac{1}{9}$. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближения.

△ Здесь $x=\frac{1}{9}$, $a=0,111$. Тогда

$$\Delta x = x - a = \frac{1}{9} - 0,111 = \frac{1}{9\,000},$$

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{1}{9\,000} \cdot \frac{1}{0,111} = \frac{1}{999}.$$

Следовательно, абсолютная погрешность приближения равна $\frac{1}{9\,000}$, а относительная погрешность равна $\frac{1}{999}$. ▲

Как уже отмечалось, во многих практически важных случаях нельзя найти абсолютную погрешность, а можно указать лишь границу абсолютной погрешности. В этих случаях нельзя найти и относительную погрешность, но можно найти границу относительной погрешности.

Любое положительное число, которое больше или равно относительной погрешности, называется *границей относительной погрешности*.

Следовательно, если Δx — погрешность приближения, то любое число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|\Delta x|}{|a|} \leqslant \delta,$$

является границей относительной погрешности. В частности, если h — граница абсолютной погрешности, то число

$$\delta = \frac{h}{|a|}$$

является границей относительной погрешности приближения a. Отсюда, зная границу относительной погрешности, можно найти границу абсолютной погрешности:

$$h = \delta |a|.$$

Если известно, что a является приближенным значением величины x, и требуется определить границу относительной погрешности этого приближенного значения, то эту задачу формулируют так: «Определить (найти) относительную точность приближенного равенства $x \approx a$».

Пример 3. Известно, что $\sqrt{2} = 1,41\ \ldots$. Найти относительную точность приближенного равенства $\sqrt{2} \approx 1,41$.

△ Здесь $x=\sqrt{2}$, $a=1,41$, $\Delta x = \sqrt{2} - 1,41$. Очевидно, что

$$0 \leqslant \Delta x \leqslant 1,42 - 1,41 = 0,01$$

$$\frac{\Delta x}{a} \leqslant \frac{0,01}{1,41} = \frac{1}{141},$$

и поэтому граница абсолютной погрешности равна 0,01, а граница относительной погрешности равна $\frac{1}{141} < 0,008$.

Следовательно, $\sqrt{2} \approx 1,41$ с относительной точностью до 0,008. В этом случае говорят, что $\sqrt{2} \approx 1,41$ с точностью до 0,8%. ▲

Пример 4. Известно, что $x \approx 2,56$ с точностью до 10%. Найти границу абсолютной погрешности.

△ По условию, граница относительной погрешности равна 0,1. Следовательно, граница абсолютной погрешности равна $0,1 \cdot 2,56 = 0,256$. ▲

3. Округление и погрешность округления. На практике результаты измерений и вычислений обычно выражаются в виде конечных десятичных дробей. Если в десятичной дроби, равной точному или приближенному значению некоторой величины, десятичных знаков больше, чем это необходимо по практическим соображениям, то эту дробь округляют. Операция округления десятичной дроби состоит в отбрасывании единиц младших разрядов начиная с некоторого. Полученное число принимается за приближенное значение этой дроби.

Абсолютная погрешность, допускаемая при округлении, называется *ошибкой округления*.

Существуют три способа округления положительных десятичных дробей: округление с недостатком, округление с избытком и округление с наименьшей ошибкой.

Округление с недостатком до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов. При таком округлении все цифры десятичной дроби до данного разряда включительно не меняются, а цифры младших разрядов заменяются нулями. Например, если $x=23,467$, то округления с недостатком до сотых, десятых, единиц, десятков соответственно равны

23,46; 23,4; 23; 20.

Ошибки округления соответственно равны

0,007; 0,067; 0,467; 3,467.

Округление с избытком до единиц некоторого разряда отличается от округления с недостатком тем, что число единиц данного разряда увеличивается на единицу.

Например, если $x=23,467$, то округления с избытком до сотых, десятых, единиц, десятков соответственно равны

$$23,47;\ 23,5;\ 24;\ 30.$$

Ошибки округления соответственно равны

$$0,003;\ 0,033;\ 0,533;\ 6,533.$$

После округления 2,996 до сотых с избытком получим 3,00. Последние две цифры 00 здесь оставлены для того, чтобы помнить, что округление произведено до сотых. Этот пример показывает, что при округлении с избытком могут меняться все цифры.

Самым распространенным округлением является *округление с наименьшей погрешностью*. Оно производится по следующим правилам:

1) единицы младших разрядов отбрасываются;

2) число единиц данного разряда не меняется, если следующая цифра данной дроби меньше 5, и увеличивается на единицу, если следующая цифра больше или равна 5.

Например, если $x=23,467$, то округления с наименьшей погрешностью до сотых, десятых, единиц, десятков соответственно равны

$$23,47;\ 23,5;\ 23;\ 20.$$

Ошибки округления соответственно равны

$$0,003;\ 0,033;\ 0,467;\ 3,467.$$

Правила округления с наименьшей погрешностью обычно называют *правилами округления десятичных дробей*.

Пример 1. Пусть $x=274,61$. Выполнить округление с недостатком и с избытком до десятых, единиц, десятков и сотен.

△ Согласно определению округления с недостатком до десятых, единиц, десятков, сотен соответственно равны

$$274,6;\ 274;\ 270;\ 200.$$

Ошибки этих округлений равны

$$0,01;\ 0,61;\ 4,61;\ 74,61.$$

Округлениями с избытком соответственно будут

$$274,7;\ 275;\ 280;\ 300,$$

а их ошибками —

$$0,09;\ 0,39;\ 5,39;\ 25,39.\ ▲$$

Пример 2. Пусть $x=274,61$. Выполнить округление до десятых, единиц, десятков и сотен по правилам округления дробей (т. е. с наименьшей погрешностью).

△ Согласно правилу округления десятичных дробей имеем

$$274,6;\ 275;\ 270;\ 300.$$

Ошибки этих округлений соответственно равны

$$0,01;\ 0,39;\ 4,61;\ 25,39.\ ▲$$

Из правил округления следует, что ошибка округления с наименьшей погрешностью не превышает половины единицы последнего сохраняемого разряда. При округлении с недостатком и с избытком погрешность может быть больше половины единицы последнего сохраняемого разряда, но не превышает единицы этого разряда.

Пусть число a является приближением величины x с точностью до h, т. е.

$$x=a\pm h.$$

Тогда, если $\bar{a}$ — округление числа a с ошибкой округления α, то

$$x=\bar{a}\pm(h+\alpha),$$

т. е. $x\approx\bar{a}$ с точностью до $h+\alpha$. Следовательно, при округлении приближения к его погрешности добавляется ошибка округления.

Пример 3. Пусть $x=1,23\pm0,02$. Округлить приближение до десятых и найти границу абсолютной погрешности нового приближения.

△ По правилам округления получаем новое приближение 1,2 с ошибкой округления 0,03. Следовательно, $x=1,2\pm0,05$. ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется приближенным значением с недостатком?
2. Что называется приближенным значением с избытком?
3. Что называется погрешностью приближения?
4. Что называется абсолютной погрешностью приближения?
5. Что называется границей абсолютной погрешности?
6. Что называется относительной погрешностью приближения?
7. Размерной или безразмерной величиной является относительная погрешность?
8. Что называется границей относительной погрешности?

9. Как связаны границы абсолютной и относительной погрешностей?

10. Что называется округлением десятичной дроби?

11. Что такое ошибка округления?

12. Какое округление называется округлением с недостатком?

13. Какое округление называется округлением с избытком?

14. Что называется округлением с наименьшей погрешностью?

15. Что называется правилами округления десятичных дробей?

Упражнения

1.44. Найдите погрешность и абсолютную погрешность приближенного значения a величины x, если

1) $x=\frac{5}{3}$; $a=1{,}6$; 2) $x=-\frac{5}{3}$; $a=-1{,}66$;

3) $x=\frac{3}{11}$; $a=0{,}273$; 4) $x=\frac{3}{11}$; $a=0{,}2727$.

1.45. Определите точность приближенного равенства $x \approx a$, если

1) $x=1{,}23156\ldots$; $a=1{,}23$;

2) $x=-0{,}12765\ \ldots$; $a=-0{,}127$;

3) $x=2{,}875(3)$; $a=2{,}875$.

1.46. Граница абсолютной погрешности приближенного значения a числа x равна h. Найдите границы, в которых заключено число x, если

1) $a=23$; $h=0{,}5$; 2) $a=1{,}5$; $h=0{,}01$;

3) $a=-2{,}32$; $h=0{,}1$; 4) $a=4{,}55$; $h=0{,}05$.

1.47. Найдите относительную погрешность приближенного значения a величины x из упр. 1.44.

1.48. Определите относительную точность приближенного равенства $x \approx a$ для x и a из упр. 1.45.

1.49. Известно, что $x \approx a$ с точностью до p процентов. Найдите границу абсолютной погрешности, если

1) $a=2{,}75$; $p=20$; 0,55 2) $a=1{,}3$; $p=10$; 0,13

3) $a=237$; $p=1$; 4) $a=1{,}49$; $p=0{,}1$. 0,00149

1.50. Округлите с недостатком и с избытком до тысячных, сотых и десятых следующие десятичные дроби:

1) 0,3253; 2) 1,23789; 3) 24,00391; 4) —3,7426.

Найдите ошибки округления.

1.51. Округлите по правилам округления до тысячных, сотых и десятых десятичные дроби из упр. 1.50. Найдите ошибки округления.

§ 5. Погрешности вычислений с приближенными значениями

1. Погрешность суммы. Пусть $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx b$ с точностью до h_2. Найдем точность h, с которой сумма $a+b$ приближает сумму $x+y$.

□ Имеем

$$x=a+\Delta x,$$
$$y=b+\Delta y,$$

где Δx и Δy — погрешности приближения x и y. Сложив почленно эти равенства, получим равенство

$$x+y=a+b+\Delta x+\Delta y,$$

из которого следует, что погрешность приближения суммы равна сумме погрешностей приближений слагаемых, т. е.

$$\Delta(x+y)=\Delta x+\Delta y.$$

Так как модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых, то

$$|\Delta(x+y)| \leqslant |\Delta x|+|\Delta y|.$$

Следовательно, абсолютная погрешность приближения суммы не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений слагаемых, и поэтому

$$|\Delta(x+y)| \leqslant h_1+h_2. \blacksquare$$

Таким образом, справедливо следующее правило подсчета точности суммы: *граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых, т. е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx b$ с точностью до h_2, то $x+y \approx a+b$ с точностью до*

$$h=h_1+h_2.$$

Пример 1. Найти сумму $x+y$, если

$$x=5{,}1 \pm 0{,}05, \quad y=2{,}3 \pm 0{,}05.$$

△ Здесь $h_1=h_2=0{,}05$. По правилу подсчета точности суммы получаем

$$h=h_1+h_2=0{,}05+0{,}05=0{,}1.$$

Следовательно, $x+y \approx 5{,}1+2{,}3=7{,}4$ с точностью до 0,1, т.е.

$$x+y=7{,}4 \pm 0{,}1. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти периметр треугольника ABC, если $|AB|=63{,}4 \pm 0{,}1$, $|BC|=47{,}8 \pm 0{,}1$ и $|CA|=73{,}1 \pm 0{,}1$.

△ Если через P обозначить периметр данного треугольника:

$$P=|AB|+|BC|+|CA|,$$

то

$$P \approx 63{,}4 + 47{,}8 + 73{,}1 = 184{,}3$$

с точностью до $h = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$, т. е.

$$P = 184{,}3 \pm 0{,}3. \blacktriangle$$

2. Погрешность разности. Пусть $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx b$ с точностью до h_2. Найдем точность h, с которой разность $a-b$ приближает разность $x-y$.

$\square$ Из равенства

$$x - y = a - b + (\Delta x - \Delta y)$$

следует, что погрешность приближения разности равна разности погрешностей приближений уменьшаемого и вычитаемого, т. е.

$$\Delta(x-y) = \Delta x - \Delta y.$$

Следовательно,

$$|\Delta(x-y)| \leqslant |\Delta x| + |\Delta y|,$$

т. е. абсолютная погрешность приближения разности не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений уменьшаемого и вычитаемого, и поэтому

$$|\Delta(x-y)| \leqslant h_1 + h_2. \blacksquare$$

Таким образом, справедливо следующее правило подсчета точности разности: *граница абсолютной погрешности разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т. е. если $x \approx a$ с точностью до h_1, $y \approx b$ с точностью до h_2, то $x - y \approx a - b$ с точностью до $h = h_1 + h_2$.*

Пример 1. Найти разность $x-y$, если

$$x = 7{,}5 \pm 0{,}05, \quad y = 3{,}4 \pm 0{,}02.$$

$\triangle$ Здесь $h_1 = 0{,}05$, $h_2 = 0{,}02$. По правилу подсчета точности разности имеем $h = 0{,}07$. Следовательно,

$$x - y = 4{,}1 \pm 0{,}07. \blacktriangle$$

Пример 2. Масса ящика с конфетами равна $m_1 = (7{,}3 \pm 0{,}05)$ кг, масса пустого ящика равна $m_2 = (0{,}8 \pm 0{,}05)$ кг. Найти массу конфет.

$\triangle$ Если через m обозначить массу конфет,

$$m = m_1 - m_2,$$

то, согласно правилу подсчета точности разности, $m = 6{,}5$ кг с точностью до 0,1 кг, т. е.

$$m = (6{,}5 \pm 0{,}1)\text{ кг}. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти разность $x-y$, если $x \approx 7{,}3$ с точностью до 1%, $y \approx 0{,}8$ с точностью до 2%.

$\triangle$ Сначала найдем границы абсолютных погрешностей h_1 и h_2 для x и y:

$$h_1 = 7{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}073,$$
$$h_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}02 = 0{,}016.$$

Тогда граница абсолютной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$h = 0{,}073 + 0{,}016 = 0{,}089.$$

Округлив 0,089 с избытком до сотых, получим

$$x - y = 6{,}5 \pm 0{,}09.$$

По $h = 0{,}09$ и приближенному значению 6,5 находим границу относительной погрешности:

$$\delta = \frac{0{,}09}{6{,}5} = 0{,}0138\ldots$$

Следовательно, $x - y \approx 6{,}5$ с относительной точностью до 0,014. Если относительную точность выразить в процентах, то получим

$$x - y \approx 6{,}5 \text{ с точностью до } 1{,}4\%. \blacktriangle$$

3. Погрешность произведения. Как было показано, абсолютная погрешность суммы оценивается суммой абсолютных погрешностей слагаемых. Такой простой оценки абсолютной погрешности произведения через абсолютные погрешности сомножителей не существует. Однако для относительной погрешности произведения можно получить аналогичную оценку через относительные погрешности сомножителей.

Пусть $x \approx a$ с относительной точностью до δ_1, $y \approx b$ с относительной точностью до δ_2. Найдем относительную точность δ, с которой ab приближает произведение xy.

$\square$ Перемножив почленно два равенства:

$$x = a + \Delta x,$$
$$y = b + \Delta y,$$

получим равенство

$$xy = ab + a \cdot \Delta y + b \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y,$$

из которого для абсолютной погрешности произведения получается оценка

$$|xy-ab| \leqslant |a|\cdot|\Delta y| + |b|\cdot|\Delta x| + |\Delta x|\cdot|\Delta y|.$$

Разделив обе части этого неравенства на $|ab| = |a|\cdot|b|$, получим

$$\frac{|xy-ab|}{|ab|} \leqslant \frac{|\Delta x|}{|a|} + \frac{|\Delta y|}{|b|} + \frac{|\Delta x|}{|a|}\cdot\frac{|\Delta y|}{|b|}.$$

Здесь слева стоит относительная погрешность произведения, а справа — сумма трех слагаемых: относительных погрешностей первого и второго сомножителей и произведения этих погрешностей. Обычно относительные погрешности являются достаточно малыми. Тогда их произведением можно пренебречь и считать, что относительная погрешность произведения приближений не превышает суммы относительных погрешностей сомножителей. ■

На практике пользуются следующим правилом подсчета точности произведения: *граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей, т. е. если* $x \approx a$ *с относительной точностью до* δ_1, $y \approx b$ *с относительной точностью до* δ_2, *то* $xy \approx ab$ *с относительной точностью до* δ, *где*

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Если же относительная точность выражена в процентах, то это утверждение формулируется так: если $x \approx a$ с точностью до $\alpha\%$, $y \approx b$ с точностью до $\beta\%$, то $xy \approx ab$ с точностью до $\gamma\%$, где $\gamma = \alpha + \beta$.

Пример 1. Найти площадь прямоугольника ширины x и длины y, если $x \approx 4$ м и $y \approx 5{,}4$ м с точностью до 1%.

△ Если S — площадь данного прямоугольника, то, как известно, $S = xy$, и поэтому S приближенно равна

$$4\text{ м}\cdot 5{,}4\text{ м} = 21{,}6\text{ м}^2.$$

Тогда по правилу подсчета точности произведения получаем

$$S \approx 21{,}6\text{ м}^2 \text{ с точностью до } 2\%,$$

т. е. с относительной точностью до 0,02.

Найдем границу абсолютной погрешности произведения:

$$h = 0{,}02\cdot 21{,}6\text{ м}^2 = 0{,}432\text{ м}^2.$$

Следовательно, $S \approx 21{,}6$ м² с точностью до 0,432 м². ▲

Пример 2. Найти площадь прямоугольника ширины x и длины y, если $x = (4{,}0 \pm 0{,}05)$ м и $y = (5{,}4 \pm 0{,}05)$ м.

△ Из данных задачи следует, что приближенное значение площади S равно

$$4{,}0\text{ м}\cdot 5{,}4\text{ м} = 21{,}6\text{ м}^2.$$

Так как граница абсолютной погрешности измерения ширины и длины равна 0,05 м, то границы относительных погрешностей равны

$$\frac{0{,}05}{4{,}0} = \frac{1}{80} \text{ и } \frac{0{,}05}{5{,}4} = \frac{1}{108}.$$

Тогда граница относительной погрешности для произведения равна сумме этих границ:

$$\frac{1}{80} + \frac{1}{108} = \frac{47}{2\,160},$$

а граница абсолютной погрешности равна

$$\frac{47}{2\,160}\cdot 21{,}6\text{ м}^2 = 0{,}47\text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$S = (21{,}6 \pm 0{,}47)\text{ м}^2. ▲$$

4. **Погрешность частного.** Пусть $x \approx a$ с относительной точностью до δ_1, $y \approx b$ с относительной точностью до δ_2. Найдем относительную точность δ, с которой число $\frac{a}{b}$ приближает частное $\frac{x}{y}$ (при условии, что $y \neq 0$ и $b \neq 0$).

□ Если a — приближенное значение x с погрешностью Δx, b — приближенное значение y с погрешностью Δy, а $c = \frac{a}{b}$ — приближенное значение частного $z = \frac{x}{y}$ с погрешностью Δz, то

$$\Delta z = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\Delta x}{b+\Delta y} - \frac{a}{b} = \frac{b\cdot\Delta x - a\cdot\Delta y}{y\cdot b}.$$

Следовательно,

$$\frac{|\Delta z|}{|c|} = \frac{|b\cdot\Delta x - a\cdot\Delta y|}{|c|\cdot|y|\cdot|b|} = \frac{|b|}{|y|}\left|\frac{\Delta x}{a} - \frac{\Delta y}{b}\right| \leqslant \frac{|b|}{|y|}\left(\frac{|\Delta x|}{|a|} + \frac{|\Delta y|}{|b|}\right).$$

Так как приближенное значение обычно мало отличается от истинного значения величины, то можно считать, что $\left|\frac{b}{y}\right|$ равно единице. Тогда относительная погрешность частного не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя. ■

На практике пользуются следующим правилом подсчета точности частного: *граница относительной погрешности частного равна сумме границ относительных погрешностей делимого и делителя, т. е. если $x \approx a$ с относительной точностью до δ_1, $y \approx b$ с относительной точностью до δ_2, то $\frac{x}{y} \approx \frac{a}{b}$ с относительной точностью до δ, где*

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Пример 1. Вычислить $z = \frac{x}{y}$, если $x \approx 12{,}3$ и $y \approx 23{,}5$ с точностью до 1%.

△ По правилу подсчета точности частного получаем

$$\frac{x}{y} \approx \frac{12{,}3}{23{,}5} \text{ с точностью до } 2\%,$$

т. е. с относительной точностью до 0,02.

Найдем границу абсолютной погрешности частного:

$$h = \frac{123}{235} \cdot 0{,}02 = \frac{2{,}46}{235} = 0{,}01046 \ldots$$

Взяв значение h с избытком с точностью до 10^{-4}, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{123}{235} \pm 0{,}0105.$$

Так как

$$\frac{123}{235} = 0{,}523 \ldots,$$

то

$$\frac{123}{235} = 0{,}523 \pm 0{,}001$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y} = 0{,}523 \pm 0{,}0115.$$

Округлив 0,523 до сотых, получим

$$\frac{x}{y} = 0{,}52 \pm 0{,}0115.$$

Наконец, округлив точность до 10^{-3} с избытком, получим

$$\frac{x}{y} = 0{,}52 \pm 0{,}012. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $z = \frac{x}{y}$, если $x = 47{,}2 \pm 0{,}5$, $y = 19{,}4 \pm 0{,}1$.

△ Для вычисления точности h приближенного значения

$$\frac{47{,}2}{19{,}4} = \frac{236}{97} = 2{,}432 \ldots$$

частного $\frac{x}{y}$ можно сначала найти относительные точности δ_1 и δ_2 делимого и делителя:

$$\delta_1 = \frac{0{,}5}{47{,}2}, \quad \delta_2 = \frac{0{,}1}{19{,}4},$$

затем найти границу δ относительной погрешности частного:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

и, наконец, найти h:

$$h = \frac{236}{97} \cdot \delta.$$

Мы не будем проводить эти вычисления до конца. Вычислим частное $\frac{x}{y}$ по *способу границ*.

По условию,

$$47{,}15 \leqslant x \leqslant 47{,}25,$$
$$19{,}3 \leqslant y \leqslant 19{,}5.$$

Следовательно,

$$\frac{47{,}15}{19{,}5} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{47{,}25}{19{,}3}.$$

Так как

$$\frac{47{,}15}{19{,}5} = 2{,}41794 \ldots, \quad \frac{47{,}25}{19{,}3} = 2{,}44815 \ldots,$$

то отсюда получаем границы для частного:

$$2{,}4179 < \frac{x}{y} < 2{,}4482.$$

За приближенное значение частного $\frac{x}{y}$ возьмем среднее арифметическое этих границ:

$$\frac{2{,}4179 + 2{,}4482}{2} = 2{,}4331.$$

Тогда точность h вычисляется по формуле

$$h = \frac{2{,}4482 - 2{,}4179}{2} = \frac{0{,}0303}{2} = 0{,}0152.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y} = 2{,}4331 \pm 0{,}0152.$$

После соответствующих округлений получаем

$$\frac{x}{y} = 2{,}43 \pm 0{,}02. \blacktriangle$$

Напомним, что способом границ вычисляются приближенные значения с недостатком и с избытком для суммы, разности, произведения и частного двух действительных чисел. Как показывает решение примера 2, способом границ можно пользоваться и для вычислений с приближенными значениями. Однако при большом количестве вычислений обычно пользуются практическими приемами приближенных вычислений, а они основаны на правилах подсчета точности.

5. Погрешность степени и корня. Пусть $x \approx a$ с относительной точностью δ. Найдем относительную точность, с которой a^n, где $n \in N$, приближает степень x^n.

Так как n-я степень — это произведение n одинаковых сомножителей, то из правила подсчета точности произведения получается следующее правило подсчета точности степени: *граница относительной погрешности степени равна произведению границы относительной погрешности основания на показатель степени, т. е. если $x \approx a$ с относительной точностью до δ, то $x^n \approx a^n$ с относительной точностью до $n\delta$.*

Пример 1. Найти степень x^4, если $x \approx 2$ с точностью до 2,5%.

$\triangle$ По правилу подсчета точности степени получаем $x^4 \approx 2^4$ с точностью до $4 \cdot 2{,}5\%$, т. е. $x^4 \approx 16$ с точностью до 10%.

Найдем границу абсолютной погрешности степени:

$$h = 16 \cdot 0{,}1 = 1{,}6.$$

Следовательно, $x^4 \approx 16$ с точностью до 1,6. $\blacktriangle$

Из правила подсчета точности степени получается следующее правило подсчета точности корня: *граница относительной погрешности корня n-й степени в n раз меньше границы относительной погрешности подкоренного числа.*

Пример 2. Найти $\sqrt[5]{x}$, если $x \approx 32$ с точностью до 2,5%.

$\triangle$ По правилу подсчета точности корня получаем

$$\sqrt[5]{x} \approx 2 \text{ с точностью до } 0{,}5\%.$$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{x} \approx 2 \text{ с точностью до } 0{,}01. \blacktriangle$$

6. Вычисления с заданной точностью. В предыдущих пунктах решались задачи, в которых требовалось оценить погрешность результата действий с приближенными значениями, зная оценки погрешности этих приближенных значений.

Во многих случаях требуется решить обратную задачу, в которой требуется установить, каковы должны быть погрешности данных приближенных значений, чтобы результат вычислений получился с наперед заданной точностью.

Пример 1. С какой относительной точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы при вычислении его площади относительная погрешность не превышала 1%?

$\triangle$ Если сторона квадрата равна a, то, как известно, его площадь S вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

Следовательно, сторону квадрата нужно измерить с точностью до 0,5%. Тогда площадь квадрата будет вычислена с точностью до 1%. $\blacktriangle$

Пример 2. Известно, что длина x стороны квадрата более 9 см, но менее 10 см. С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы погрешность площади, вычисленной по формуле $S = a^2$, не превышала 1 см²?

$\triangle$ Из неравенств

$$\frac{|\Delta S|}{S} \leqslant \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{81}$$

следует, что граница относительной погрешности площади равна $\frac{1}{81}$; отсюда и из правила подсчета точности степени (или корня) следует, что длину стороны квадрата нужно измерить с относительной точностью до $\frac{1}{162}$.

Следовательно, сторону квадрата нужно измерить с точностью до

$$\frac{1}{162} \cdot 9 \text{ см} = \frac{1}{18} \text{ см},$$

чтобы погрешность площади не превышала 1 см².

Так как

$$\frac{1}{18}\text{ см} > \frac{1}{20}\text{ см} = 0{,}5\text{ мм},$$

то после округления получаем: сторону квадрата надо измерить с точностью до 0,5 мм. ▲

Вопросы для контроля

1. Чему равна граница абсолютной погрешности суммы?
2. Чему равна граница абсолютной погрешности разности?
3. Чему равна граница относительной погрешности произведения?
4. Чему равна граница относительной погрешности частного?
5. Чему равна граница относительной погрешности степени?
6. Чему равна граница относительной погрешности корня?

Упражнения

1.52. Найдите сумму $x+y$, если
1) $x=7{,}8 \pm 0{,}05$, $y=3{,}4 \pm 0{,}05$;
2) $x=-2{,}6 \pm 0{,}01$, $y=1{,}5 \pm 0{,}02$;
3) $x=1{,}25 \pm 0{,}05$, $y=1{,}02 \pm 0{,}02$;
4) $x=7{,}1 \pm 0{,}18$, $y=6{,}2 \pm 0{,}02$.

1.53. Для x и y, определенных в упр. 1.52, найдите разность $x-y$.

1.54. Найдите произведение xy, если
1) $x \approx 3{,}2$ с точностью до 0,5 %, $y \approx 2{,}35$ с точностью до 1 %;
2) $x \approx 3{,}5$ с точностью до 1 %, $y \approx 1{,}23$ с точностью до 0,5 %;
3) $x \approx 0{,}43$ с точностью до 0,1 %, $y \approx 4{,}3$ с точностью до 1 %.

1.55. Для x и y, определенных в упр. 1.54, найдите частное $\frac{x}{y}$.

1.56. Известно, что длина ребра куба измерена с точностью до 0,5%. С какой точностью будет вычислен объем куба?

1.57. Найдите границу относительной погрешности $\sqrt[3]{26{,}4 \pm 0{,}1}$.

1.58. Известно, что длина ребра куба более 5 см, но менее 6 см. С какой точностью надо измерить ребро куба, чтобы погрешность объема не превышала 2 см^3?

1.59. С какой относительной точностью необходимо измерить длину, ширину и высоту комнаты, чтобы погрешность вычисленного объема комнаты не превышала 1%?

1.60. Известно, что $r \approx 15$ см с точностью до 1 см. С какой точностью надо измерить радиус круга и сколько десятичных знаков надо взять у числа π, чтобы при вычислении площади круга по формуле $S=\pi r^2$ абсолютная погрешность не превышала 3 см^2?

§ 6. Практические приемы приближенных вычислений

1. Запись чисел в стандартном виде. Всякое положительное число можно записать в виде $a\cdot 10^k$, где число a удовлетворяет неравенствам

$$1 \leqslant a < 10,$$

а число k — целое. Если число записано в таком виде, то говорят, что оно записано в *стандартном виде*. Целое число k называется *порядком* данного числа.

Например, порядок числа $27=2{,}7\cdot 10$ равен 1, порядок числа $0{,}03=3\cdot 10^{-2}$ равен -2, порядок числа $1{,}5=1{,}5\cdot 10^0$ равен 0.

На практике значения величин часто сравниваются по порядку. Например, говорят, что величина x на порядок больше величины y. Это означает, что порядок значения величины x на единицу больше порядка значения величины y.

Ясно, что если порядок числа x существенно больше порядка числа y, то числа $x+y$, $x-y$ и x имеют один порядок, и можно считать, что $x+y\approx x$ и $x-y\approx x$ с достаточно хорошей точностью.

Например, если $x=2\cdot 10^{-2}$ и $y=2{,}5\cdot 10^{-4}$, то

$$x+y=(2+2{,}5\cdot 10^{-2})\cdot 10^{-2}=2{,}025\cdot 10^{-2}$$

и, следовательно,

$$x+y\approx 2\cdot 10^{-2}$$

с точностью до $2{,}5\cdot 10^{-4}$.

Аналогично,

$$x-y=(2-2{,}5\cdot 10^{-2})\cdot 10^{-2}\approx 2\cdot 10^{-2}$$

с точностью до $2{,}5\cdot 10^{-4}$.

Если порядок числа x равен n, а порядок числа y равен m, то порядок произведения xy равен $n+m$ или $n+m+1$.

Например, если $x=1{,}3\cdot 10^3$, $y=2{,}1\cdot 10^{-1}$, то $xy=2{,}73\cdot 10^2$; если $x=5\cdot 10^{-3}$, $y=3{,}2\cdot 10$, то $xy=1{,}6\cdot 10^{-1}$.

Если порядок числа x равен n, а порядок числа y равен m, то порядок частного $\frac{x}{y}$ равен $n-m$ или $n-m-1$.

Например, если $x=2{,}4\cdot 10^{-2}$, $y=1{,}2\cdot 10^{-3}$, то $\frac{x}{y}=2\cdot 10$ и $\frac{y}{x}=5\cdot 10^{-2}$.

Отметим, что при решении многих задач практического и теоретического характера важно знать только порядок величин.

2. Верные и сомнительные цифры в записи приближенного значения. На практике результаты измерений и вычислений обычно выражаются в виде конечных десятичных дробей. Поэтому можно говорить о первой, второй и, вообще, n-й цифре приближенного значения.

Цифра какого-либо разряда в записи приближенного значения называется *верной*, если граница абсолютной погрешности приближения не привышает единицы этого разряда.

Если же граница абсолютной погрешности приближения больше единицы разряда, в котором записана цифра, то эта цифра называется *сомнительной*.

Например, если $x=2{,}353\pm0{,}002$, то у приближенного значения 2,353 величины x последняя цифра 3 сомнительная, а все другие верные.

Ясно, что если некоторая цифра верная, то и все предыдущие цифры верные.

Если же некоторая цифра сомнительная, то и все последующие цифры сомнительные.

При округлении десятичной дроби с недостатком или с избытком получаются приближенные значения этой дроби, у которых все цифры верные.

При округлении десятичной дроби по правилам округления (т. е. с наименьшей ошибкой округления) получается приближенное значение, погрешность которого не превышает половины единицы разряда, до которого производилось округление.

Цифра в записи приближенного значения называется *строго верной*, если его абсолютная погрешность не превышает половины единицы разряда, в котором записана эта цифра.

Следовательно, при округлении десятичной дроби по правилам округления получается приближенное значение, у которого все цифры строго верные.

Пример 1. Пусть $x=2{,}351\pm0{,}0005$. Указать верные цифры приближенного значения 2,351.

$\triangle$ Так как $0{,}0005<0{,}001$, то последняя цифра 1 приближенного значения является верной. Верными будут все цифры этого приближения; более того, они будут строго верными. $\blacktriangle$

Пример 2. Пусть $x=2{,}352\pm0{,}002$. Указать верные и сомнительные цифры приближенного значения 2,352.

$\triangle$ Так как $0{,}002>0{,}001$, где $0{,}001$ — единица разряда последней цифры 2 приближенного значения, то эта цифра сомнительная. Легко видеть, что цифра 5 является верной, а значит, верными будут и все предыдущие цифры. $\blacktriangle$

Приближенное значение принято записывать так, чтобы все цифры в его записи были верными. Чтобы удовлетворить этому условию, иногда приходится пользоваться записью приближенных значений в стандартном виде.

Если в записи приближенного значения a величины x все цифры верные, то пишут $x\approx a$ без указания точности.

Например,

$$x\approx9{,}3 \quad \text{означает, что} \quad x=9{,}3\pm0{,}1;$$
$$x\approx9{,}30 \quad \text{означает, что} \quad x=9{,}30\pm0{,}01;$$
$$x\approx30 \quad \text{означает, что} \quad x=30\pm1.$$

Если же $x=530\pm10$, то приближенное значение 530 записывают в стандартном виде $5{,}3\cdot10^2$ и пишут $x\approx\approx5{,}3\cdot10^2$, так как у приближенного значения 530 цифры 5 и 3 верные, а цифра 0 сомнительная.

Приближенное равенство $x\approx530$ означает, что $x==530\pm1$. Приближенное равенство $x\approx530$ можно записать и так: $x\approx5{,}30\cdot10^2$ (здесь цифра 0 у 5,30 верная).

3. Сложение и вычитание приближенных значений. Как известно, граница абсолютной погрешности суммы и разности приближенных значений равна сумме границ абсолютных погрешностей приближений, т. е. если $x==a\pm\alpha$, $y=b\pm\beta$, то

$$x+y=a+b\pm h,\quad x-y=a-b\pm h,$$

где $h=\alpha+\beta$.

Пример 1. Пусть $x\approx12{,}5$, $y\approx3{,}1$ и десятичные знаки приближенных значений строго верные. Найти $x+y$ и $x-y$ с точностью до верных десятичных знаков.

$\triangle$ По условию, десятичные знаки приближений, т. е. цифра 5 у числа 12,5 и цифра 1 у числа 3,1, являются строго верными, а это означает, что

$$x=12{,}5\pm0{,}05,\quad y=3{,}1\pm0{,}05.$$

По формулам сложения и вычитания приближенных значений получаем

$$x+y=15{,}6\pm0{,}1,$$
$$x-y=9{,}4\pm0{,}1.$$

Десятичные знаки полученных приближенных значений суммы и разности являются верными. Следовательно, можно написать

$$x+y\approx15{,}6,\quad x-y\approx9{,}4. \blacktriangle$$

Пример 2. Пусть $x\approx12{,}5$, $y\approx3{,}126$, причем десятичные знаки приближений строго верные. Найти $x+y$ и $x-y$ с точностью до верных десятичных знаков.

$\triangle$ По условию,

$$x = 12{,}5 \pm 0{,}05,$$
$$y = 3{,}126 \pm 0{,}0005.$$

Отсюда получаем

$$x + y = 15{,}626 \pm 0{,}0505,$$
$$x - y = 9{,}374 \pm 0{,}0505.$$

У полученных приближенных значений суммы и разности два последних десятичных знака сомнительные. После округления с точностью до верных десятичных знаков получаем

$$x + y \approx 15{,}6, \quad x - y \approx 9{,}4.$$

Отметим, что результат получился такой же, как и в примере 1, хотя здесь y задавалось существенно точнее. ▲

Вообще, если складываются или вычитаются два приближенных значения, в записи которых все цифры строго верные, то в сумме и разности получается столько верных десятичных знаков, сколько их имеет приближенное значение с наименьшим числом десятичных знаков.

Обычно в записи приближенных значений исходных данных все цифры строго верные. Так, например, бывает, если они получены при измерении или при округлении. Поэтому на практике пользуются следующим правилом: *в сумме и разности приближенных значений, в записи которых все цифры верные, оставляют столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное значение с наименьшим числом десятичных знаков.* Во многих случаях эти десятичные знаки будут не только верными, но и строго верными.

Для простоты вычислений целесообразно произвести округление по правилам округления. При округлении приближенных значений в них оставляют на один верный десятичный знак больше, чем их имеется в наименее точном приближении. В таких случаях говорят, что оставляют одну запасную цифру.

Пример 3. Пусть $u \approx 4{,}26$ и $v \approx 2{,}71854$. Найти $u + v$ и $u - v$.

$\triangle$ Наименьшее число верных десятичных знаков имеет число 4,26 (два десятичных знака). Округлим число 2,71854, оставив в нем на один десятичный знак больше:

$$2{,}71854 \approx 2{,}719.$$

Находим сумму и разность приближений:

$$4{,}26 + 2{,}719 = 6{,}979,$$
$$4{,}26 - 2{,}719 = 1{,}541.$$

Округлив полученные значения до сотых, получим

$$u + v \approx 6{,}98,$$
$$u - v \approx 1{,}54.$$

Все это решение записывают короче:

$$u + v \approx 4{,}26 + 2{,}71854 \approx 4{,}26 + 2{,}719 = 6{,}979 \approx 6{,}98,$$
$$u - v \approx 4{,}26 - 2{,}71854 \approx 4{,}26 - 2{,}719 = 1{,}541 \approx 1{,}54. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти сумму чисел x и y, если $x \approx 1{,}32 \cdot 10^4$, $y \approx 1{,}25 \cdot 10^5$.

$\triangle$ Чтобы здесь применить правило сложения приближенных значений, следует вынести за скобку 10^5. Тогда имеем $x + y \approx 1{,}32 \cdot 10^4 + 1{,}25 \cdot 10^5 = 10^5(1{,}32 \cdot 10^{-1} + 1{,}25) = 10^5(0{,}132 + 1{,}25) = 1{,}382 \cdot 10^5 \approx 1{,}38 \cdot 10^5$.

Следовательно,

$$x + y \approx 1{,}38 \cdot 10^5. \blacktriangle$$

4. Умножение и деление приближенных значений. Известно, что граница относительной погрешности произведения и частного приближенных значений равна сумме границ относительных погрешностей этих приближенных значений, т. е. если $x \approx a$ с относительной точностью δ_1, $y \approx b$ с относительной точностью δ_2, то $xy \approx ab$ с относительной точностью $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Чтобы сформулировать правило умножения и деления приближенных значений, которым обычно пользуются, введем понятие *значащей цифры.*

Значащими цифрами называются все верные цифры в записи приближенного значения, кроме нулей, стоящих перед первой отличной от нуля цифрой. Например, у приближенного значения 2,75 все цифры значащие, у 2,70 все цифры значащие (значащей будет и последняя цифра 0), а у 0,020 только две значащие цифры: цифра 2 и последняя цифра 0.

Если приближенное значение записано в стандартном виде $a \cdot 10^k$, где $1 \leqslant a < 10$, то все верные цифры будут и значащими цифрами.

Например, если

$$x \approx 2{,}10 \cdot 10^{-3}, \quad y \approx 3{,}01 \cdot 10^3,$$

то у приближенных значений в множителе, стоящем перед степенью 10, все цифры и верные, и значащие.

Граница относительной погрешности не зависит от порядка числа, но существенно зависит от числа значащих цифр.

Например, если $x \approx 1{,}3 \cdot 10^k$, то $\delta = \frac{1}{13}$ при любом k. Если же $x \approx 1{,}30 \cdot 10^k$, то $\delta = \frac{1}{130}$ при любом k.

Пример 1. Найти произведение xy и частное $\frac{x}{y}$, если $x = 1{,}2 \pm 0{,}05$, $y = 0{,}3 \pm 0{,}05$.

$\triangle$ Граница относительной погрешности произведения и частного вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{0{,}05}{1{,}2} + \frac{0{,}05}{0{,}3} = \frac{0{,}5}{12} + \frac{0{,}5}{3}.$$

Тогда $xy \approx 0{,}36$ с точностью до $h_1 = 0{,}36 \cdot \delta$, $\frac{x}{y} \approx 4$ с точностью до $h_2 = 4 \cdot \delta$.

Найдем h_1 и h_2:

$$h_1 = 0{,}5 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}12 = 0{,}075,$$

$$h_2 = \frac{2}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ \ldots$$

Следовательно,

$$xy = 3{,}6 \pm 0{,}075, \quad \frac{x}{y} = 4 \pm 0{,}84.$$

Отметим, что полученные приближенные значения имеют по одной значащей цифре. ▲

Пример 2. Найти произведение xy, если
а) $x = 100{,}00 \pm 0{,}005$, $y = 0{,}10 \pm 0{,}005$;
б) $x = 300{,}00 \pm 0{,}005$, $y = 0{,}10 \pm 0{,}005$.

$\triangle$ В первом случае имеем $xy \approx 10$ с точностью до

$$h = 10 \cdot \left(\frac{0{,}5}{10\,000} + \frac{0{,}5}{10}\right) = 0{,}5005.$$

Во втором случае $xy \approx 30$ с точностью до

$$h = 30 \cdot \left(\frac{0{,}5}{30\,000} + \frac{0{,}5}{10}\right) = 0{,}0005 + 1{,}5 = 1{,}5005.$$

Приближенное значение произведения в первом случае имеет две значащие цифры, а во втором случае — только одну значащую цифру. ▲

В рассмотренных примерах, как легко видеть, в произведении и в частном приближенных значений получается столько же значащих цифр, сколько их имеет приближенное значение с меньшим числом значащих цифр, или на одну цифру меньше. Это утверждение справедливо и в общем случае. Поэтому на практике пользуются следующим правилом: *в произведении и частном приближенных значений оставляют столько цифр, не считая нулей, стоящих впереди, сколько значащих цифр имеет приближенное значение с меньшим числом значащих цифр.*

Тогда произведение и частное получаются со всеми верными цифрами, кроме, быть может, последней.

Чтобы избежать лишней работы, целесообразно округлить то приближенное значение, у которого значащих цифр больше. При округлении в нем оставляют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное значение с меньшим числом значащих цифр, и одну запасную цифру.

Пример 3. Найти произведение чисел $x \approx 1{,}5268$ и $y \approx 0{,}62$.

$\triangle$ Множителем с меньшим числом значащих цифр является 0,62, у него две значащие цифры. Второй множитель имеет пять значащих цифр. Округлим его до трех значащих цифр:

$$1{,}5268 \approx 1{,}53.$$

Перемножим полученные приближения:

$$1{,}53 \cdot 0{,}62 = 0{,}9486.$$

Округлив это значение до двух цифр, не считая первого нуля, получим

$$xy \approx 0{,}95.$$

Если произведение xy используется в дальнейших вычислениях, то округляют до трех цифр, не считая первого нуля. Тогда $xy \approx 0{,}949$ (здесь последняя цифра запасная). ▲

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{xy}{x+y}$ для x, y из примера 3.

$\triangle$ В примере 3 мы получили $xy \approx 0{,}949$ с одной запасной цифрой.

Найдем сумму $x + y$:

$$x + y \approx 1{,}5268 + 0{,}62 = 2{,}1468 \approx 2{,}147$$

(здесь последняя цифра запасная).

Теперь имеем

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{0{,}949}{2{,}147} \approx 0{,}442,$$

где последнее приближенное равенство выполняется с точностью до 0,001.

Так как в записи знаменателя три значащие цифры, а в записи числителя значащих цифр только две, то

$$\frac{xy}{x+y} \approx 0{,}44. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Что называется записью числа в стандартном виде?
2. Что называется порядком числа?
3. Какая цифра в десятичной записи приближенного значения называется верной?
4. Какая цифра в десятичной записи приближенного значения называется сомнительной?
5. Какая цифра в десятичной записи приближенного значения называется строго верной?
6. Как принято записывать приближенные значения?
7. В чем состоит правило сложения и вычитания приближенных значений?
8. Какая цифра называется значащей?
9. В чем состоит правило умножения и деления приближенных значений?

Упражнения

1.61. Запишите в стандартном виде следующие числа:

$0{,}523$; $0{,}031$; $302{,}25$; $37{,}4\cdot 10^3$; $0{,}3\cdot 10^{-2}$; $1{,}2\cdot 10^{-3}$.

1.62. Определите порядки следующих чисел:

$0{,}3$; $3{,}51$; $321{,}24$; 21; $5\cdot 10^5$; $0{,}1\cdot 10^{-2}$; $47{,}5\cdot 10^{-3}$.

1.63. Укажите верные и сомнительные цифры в записи приближенных значений:
1) $x=1{,}256 \pm 0{,}013$; 2) $y=1{,}37 \pm 0{,}01$;
3) $z=0{,}036 \pm 0{,}01$; 4) $u=3{,}40 \pm 0{,}01$.

1.64. Какова точность приближенных равенств:

$$x \approx 1{,}25, \quad y \approx 1{,}25\cdot 10^2,$$
$$z \approx 13{,}20, \quad u \approx 1{,}51\cdot 10^{-3},$$

если в записи приближенных значений все цифры верные?

1.65. Какова точность приближенных равенств из упр. 1.64, если в записи приближенных значений все цифры строго верные?

1.66. Найдите сумму $x+y$, если
1) $x \approx 1{,}34$, $y \approx 2{,}30$;
2) $x \approx 4{,}331$, $y \approx 5{,}7$;
3) $x \approx 2{,}0\cdot 10^3$, $y \approx 1{,}25\cdot 10^2$;
4) $x \approx 1{,}7\cdot 10^2$, $y \approx 7{,}1\cdot 10^{-1}$.

1.67. Найдите разность $x-y$, где x и y определены в упр. 1.66.

1.68. Укажите значащие цифры следующих приближенных значений:

$x \approx 2{,}10$, $y \approx 20{,}1$, $z \approx 0{,}0210$, $u=1{,}50\cdot 10^3$, $v=2{,}700\cdot 10^{-2}$.

1.69. Укажите значащие цифры следующих приближенных значений:
1) $x=2{,}10 \pm 0{,}02$; 2) $x=20{,}1 \pm 0{,}1$;
3) $x=1{,}50\cdot 10^3 \pm 10^2$; 4) $x=2{,}700\cdot 10^{-2}+0{,}001$.

1.70. Найдите произведение xy, если
1) $x \approx 12{,}6$, $y \approx 2{,}10$;
2) $x \approx 1{,}2\cdot 10^2$; $y \approx 3\cdot 10^3$;
3) $x \approx 25{,}678$, $y \approx 1{,}23$;
4) $x \approx 4{,}8\cdot 10^2$, $y \approx 1{,}331\cdot 10^{-2}$.

Для вычисления произведения рекомендуется пользоваться калькулятором.

1.71. Найдите частное $\frac{x}{y}$ для x и y, определенных в упр. 1.70. Для вычисления частного $\frac{x}{y}$ рекомендуется пользоваться калькулятором.

1.72. Найдите значение выражения $\frac{xy}{x^2+y^2}$ для x и y, определенных в упр. 1.70. Для вычислений рекомендуется пользоваться калькулятором.

Глава 2* [1])

ПРОСТЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

§ 7. Высказывания и предложения, зависящие от переменной

1. Высказывания. Под *высказыванием* понимают всякое утверждение (суждение), о котором имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно). Примерами высказываний могут служить следующие утверждения:

1. Столица СССР — Москва.
2. Число 7 простое.
3. Слон — насекомое.
4. $5 > 10$.
5. $2CO + O_2 = 2CO_2$.

Утверждения 1, 2, 5, как известно, истинны, а 3 и 4 ложны.

Высказывания могут быть образованы с помощью слов или каких-либо знаков (символов). Конечно, не всякое предложение, не всякий набор символов, даже если они имеют смысл, является высказыванием. Например, утверждения «в техникум поступить легко», «$x > 0$», «число 13 несчастливое» высказываниями не являются, так как судить об их истинности или ложности невозможно.

Не являются высказываниями и предложения, содержащие определения (Геометрической фигурой называется любое множество точек), призывы (Храните деньги в сберегательной кассе!), вопросы (Был звонок?).

Подчеркнем еще раз, что каждое высказывание или истинно, или ложно. Одновременно быть истинным и ложным высказывание не может.

Каждому высказыванию p можно сопоставить утверждение, заключающееся в том, что высказывание p ложно. Такое утверждение либо истинно, либо ложно и, следовательно, само является высказыванием. Это новое высказывание обозначают через $\bar{p}$ и называют *отрицанием* высказывания p. В высказывании $\bar{p}$ говорится, что p ложно. Следовательно, $\bar{p}$ истинно, если p ложно, и, наоборот, $\bar{p}$ ложно, если p истинно. Например, для высказывания «число 6 простое» отрицание можно построить так: «число 6 не простое», или «неверно, что число 6 простое», или «число 6 составное». В данном случае исходное высказывание ложно, поэтому его отрицание истинно.

В тех случаях, когда высказывания содержат математические знаки, при построении отрицания обычно также используют соответствующие знаки. Ниже слева записаны некоторые высказывания, справа — их отрицания:

$$2 \in \boldsymbol{N} \ (\text{истинно}), \qquad 2 \notin \boldsymbol{N} \ (\text{ложно});$$
$$2 \leqslant 3 \ (\text{истинно}), \qquad 2 > 3 \ (\text{ложно});$$
$$2+3=5 \ (\text{истинно}), \qquad 2+3 \neq 5 \ (\text{ложно});$$
$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R} \ (\text{истинно}), \qquad \boldsymbol{N} \not\subset \boldsymbol{R} \ (\text{ложно}).$$

2. Предложения, зависящие от переменной. В математике и других науках наряду с высказываниями приходится иметь дело с различными утверждениями (предложениями), зависящими от одной или нескольких переменных. Например, предложение «n — простое число» зависит от переменной n, принимающей натуральные значения. При одних значениях n оно истинно, при других — ложно. Уравнения и неравенства также являются такого рода предложениями. Неравенство $x+1 > 0$ представляет собой предложение, зависящее от переменной x. Истинность или ложность этого предложения зависит от того, какое значение переменной выбрать: при $x=0$, например, оно истинно, при $x=-1$ ложно. Уравнение $x-y=1$ является предложением, зависящим от двух переменных x и y. Если, например, $x=1$, $y=0$, то оно истинно; если $x=0$, $y=1$, то оно ложно.

Предложения, зависящие от переменных, будем обозначать $p(n)$, $q(x)$, $r(x, y)$ и т. д. Для каждого предложения должно быть указано, на каком множестве оно рассматривается или, как еще говорят, на каком множестве оно определено или задано. В тех случаях, когда ясно, о каком множестве идет речь, для краткости вместо $p(x)$, $x \in U$, иногда будем писать просто $p(x)$.

Предложение $p(x)$, $x \in U$, не является высказыванием, если оно рассматривается на всем множестве U. Но если $p(x)$ рассмотреть при некотором конкретном значении

[1]) Здесь и далее звездочкой * отмечен материал, выходящий за рамки программы.

$x=a$, то утверждение $p(a)$ будет либо истинно, либо ложно, т. е. будет высказыванием.

Множество U, на котором задано предложение $p(x)$, можно разбить на два подмножества. Одно содержит те элементы U, для которых $p(x)$ истинно. Оно называется *множеством истинности* предложения $p(x)$. Другое подмножество состоит из тех элементов U, для которых $p(x)$ ложно. Если первое из этих подмножеств обозначить буквой A, то второе следует обозначать $\bar{A}$, так как оно является дополнением множества A до множества U.

Для предложения $x^2-x<0$ множеством истинности A является интервал $(0;\ 1)$; множеством $\bar{A}$ — объединение промежутков $(-\infty;\ 0]$ и $[1;\ +\infty)$ (дополнение интервала $(0;\ 1)$ до всей числовой прямой).

Два предложения $p(x)$ и $q(x)$, заданные на одном и том же множестве, называются *равносильными*, если их множества истинности совпадают.

Например, два предложения (неравенства)

$$2x^2(x-1)>0 \quad \text{и} \quad x-1>0$$

равносильны, так как множеством истинности каждого из них является промежуток $(1;\ +\infty)$.

Отрицанием предложения $p(x)$, $x\in U$, называется предложение, определенное на том же множестве U и обращающееся в истинное высказывание для тех и только тех значений x, для которых $p(x)$ ложно.

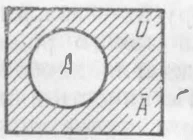


Рис. 7

Отрицание $p(x)$ обозначается $\overline{p(x)}$. Ясно, что если A — множество истинности $p(x)$, то множеством истинности $\overline{p(x)}$ будет $\bar{A}$. На рис. 7 схематически изображены множества U, A, $\bar{A}$. Множество $\bar{A}$ заштриховано.

3. Знаки общности и существования. С предложениями, зависящими от переменных, связаны два вида часто встречающихся утверждений.

1. Предложение $p(x)$, $x\in U$, обращается в истинное высказывание для *всех* элементов множества U.

2. Предложение $p(x)$, $x\in U$, обращается в истинное высказывание *хотя бы для одного* элемента множества U; другими словами, существует элемент $a\in U$, для которого $p(a)$ — истинное высказывание.

В математике принято записывать такие утверждения кратко, используя для этого специальные знаки: *знак*

общности $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова All — все) и *знак существования* $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова Exists — существует).

Знак общности $\forall$ заменяет слова «все», «всякий», «каждый», «любой». Знак существования $\exists$ употребляется вместо слов «хотя бы один», «найдется», «существует».

Используя знаки $\forall$ и $\exists$, утверждения 1 и 2 можно записать кратко следующим образом:

1. $(\forall x)\,p(x)$. 2. $(\exists x)\,p(x)$.

Заметим, что первое утверждение означает, что множеством истинности предложения $p(x)$ является множество U. Следовательно, если $p(x)$ хотя бы для одного значения $x\in U$ ложно, то утверждение 1 ложно. Второе утверждение означает, что множество истинности предложения $p(x)$ непусто. Следовательно, второе утверждение ложно только тогда, когда $p(x)$ ложно при всех x.

Каждое из предложений 1, 2 либо истинно, либо ложно и, следовательно, является высказыванием.

Например, если $p(x)$ есть предложение $x^2>0$, $x\in \boldsymbol{R}$, то высказывание $(\forall x)\,p(x)$ ложно, а высказывание $(\exists x)\,p(x)$ истинно. Если $q(x)$ — предложение $x^2\geqslant 0$, $x\in\boldsymbol{R}$, то оба высказывания $(\forall x)\,q(x)$ и $(\exists x)\,q(x)$ истинны. Если $r(x)$ — предложение $x^2+1<0$, $x\in\boldsymbol{R}$, то высказывания $(\forall x)\,r(x)$ и $(\exists x)\,r(x)$ ложны.

Подчеркнем еще раз, что для того, чтобы опровергнуть высказывание вида $(\forall x)\,p(x)$, $x\in U$, достаточно указать только один элемент $a\in U$, для которого $p(a)$ ложно.

Элемент a множества U, для которого предложение $p(x)$ неверно, называется *контрпримером* для высказывания $(\forall x)\,p(x)$.

Таким образом, чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x)\,p(x)$, достаточно найти (или, как еще говорят, построить) один контрпример. Пусть $p(n)$, $n\in\boldsymbol{N}$,— предложение «число n^2+n+41 — простое». Для высказывания $(\forall n)\,p(n)$, т. е. для высказывания «при всех натуральных значениях число n^2+n+41 — простое», элемент $n=40$ является контрпримером, так как число $40^2+40+41=40\cdot 41+41$ делится на 41, т. е. не является простым. Интересно отметить, что для всех $n<40$ предложение $p(n)$ истинно.

Вопросы для контроля

1. Что называется высказыванием?
2. Что называется отрицанием данного высказывания?

3. Что называется множеством истинности предложения с переменной?

4. Какие два предложения с переменной называются равносильными?

5. Что называется отрицанием предложения с переменной?

6. В чем состоит высказывание $(\forall x)\ p(x)$?

7. В чем состоит высказывание $(\exists x)\ p(x)$?

8. Что называется контрпримером для высказывания $(\forall x)\ p(x)$?

Упражнения

2.1. Среди следующих предложений выделите те, которые являются высказываниями, и установите, истинны они или ложны:

1) великий русский поэт А. С. Пушкин родился в 1799 году;
2) Луна — спутник Марса;
3) $3+\sqrt{2}$;
4) $17\cdot 2+3=37$;
5) $3\geqslant 2+1$;
6) любое натуральное число положительно;
7) существуют различные породы собак.

2.2. Даны два высказывания:

p — «число 3 является делителем числа 174»,

q — «идет дождь».

В чем заключаются высказывания $\overline{p}$ и $\overline{q}$?

2.3. Виктор, Роман, Юрий, Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Роман — первый, Сергей — второй;
2) Роман — второй, Виктор — третий;
3) Юрий — второй, Виктор — четвертый.

Как распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

2.4. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. «Замечательно, что один из нас имеет белые, один черные и один рыжие волосы, но ни у одного нет волос того цвета, на который указывает его фамилия»,— заметил черноволосый. «Ты прав»,— сказал Белов. Какой цвет волос у художника?

2.5. Даны два предложения на множестве натуральных чисел n, удовлетворяющих условию $3\leqslant n\leqslant 12$, $p(n)$ — «число 3 — делитель числа n» и $q(n)$ — «число n не превосходит 6». Найдите множество истинности для предложений:

1) $p(n)$; 2) $q(n)$; 3) $\overline{p(n)}$; 4) $\overline{q(n)}$.

2.6. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Какие из высказываний истинны и какие ложны:

1) сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;
2) сумма корней *любого* приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;
3) *существует* приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену?

2.7. Дана система

$$\begin{cases} 2x-\alpha y=3,\\ 3x+y=a. \end{cases}$$

При каких значениях α истинны следующие предложения:

1) $p(\alpha)$ — «при любом a система имеет хотя бы одно решение»;
2) $q(\alpha)$ — «существует a, при котором система имеет хотя бы одно решение»?

§ 8. Метод математической индукции

1. Принцип и метод математической индукции. В предыдущем параграфе уже отмечалось, что для доказательства ложности высказывания, имеющего вид $(\forall x)\ p(x)$, $x\in U$, достаточно указать один элемент $a\in U$ такой, что $p(a)$ ложно (построить контрпример). А для того чтобы убедиться в истинности высказывания $(\forall x)\ p(x)$, $x\in U$, необходимо проверить справедливость предложения $p(x)$ для всех элементов множества U. В случае, если множество U содержит мало элементов, можно попытаться все их перебрать и для каждого установить истинность предложения $p(x)$. Если же U — бесконечное множество или хотя и конечное, но содержит много элементов, доказать истинность высказывания $(\forall x)\ p(x)$ можно лишь логическим рассуждением.

В тех случаях, когда предложение задано на множестве натуральных чисел, истинность высказывания $(\forall n)\ p(n)$, $n\in \boldsymbol{N}$, часто удается доказать *методом математической индукции*. Этот метод основан на так называемом *принципе математической индукции* (аксиоме индукции), который можно сформулировать следующим образом.

Предложение $p(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

1) предложение $p(n)$ истинно для $n=1$;

2) для любого натурального k из предположения, что $p(n)$ истинно для $n=k$, следует, что оно истинно и для $n=k+1$.

Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения $p(n)$ для всех натуральных значений n, то сначала проверяют истинность высказывания $p(1)$ и затем, допустив истинность высказывания $p(k)$, доказывают истинность высказывания $p(k+1)$. Если высказывание $p(1)$ истинно и для каждого натурального значения k из предложения истинности $p(k)$ следует истинность $p(k+1)$, то в соответствии с принципом математической индукции предложение $p(n)$ является истинным для всех значений n.

Пример 1. Доказать равенство

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n\in N. \qquad (1)$$

△ Это равенство представляет собой предложение $p(n)$, заданное на множестве натуральных чисел. Докажем истинность $p(n)$ для всех значений n методом математической индукции.

Очевидно, $p(1)$ истинно, так как

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot(2\cdot 1+1)}{6}.$$

Предположим, что $p(k)$ истинно, т. е. справедливо равенство

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Прибавив к обеим частям равенства $(k+1)^2$, получим

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Преобразуем правую часть равенства следующим образом:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Следовательно,

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6},$$

а это означает, что $p(k+1)$ истинно. Это рассуждение верно при любом k, поэтому равенство (1) доказано. ▲

Пример 2. Доказать неравенство

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha, \quad \alpha>-1, \quad n\in N. \qquad (2)$$

Это неравенство называется *неравенством Бернулли*.

△ При $n=1$ получаем истинное высказывание $1+\alpha\geqslant 1+\alpha$.

Предположим, что неравенство верно при $n=k$, т. е.

$$(1+\alpha)^k\geqslant 1+k\alpha.$$

Умножив обе части неравенства на $1+\alpha$ (это можно сделать, так как $\alpha>-1$), получим

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant(1+k\alpha)(1+\alpha)=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.$$

Учитывая, что $k\alpha^2\geqslant 0$, приходим к неравенству

$$(1+\alpha)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)\alpha.$$

Итак, предположив, что данное неравенство верно для $n=k$, мы доказали, что оно верно и для $n=k+1$. Доказательство, очевидно, остается справедливым для каждого значения k. Следовательно, неравенство (2) доказано. ▲

2. Обобщение метода математической индукции. Иногда метод математической индукции применяют для доказательства истинности предложения $p(n)$ не для всех натуральных значений n, а для всех n, начиная с некоторого натурального числа m. В таких случаях сначала проверяется истинность высказывания $p(m)$.

Пример 1. Определить, при каких натуральных значениях n верно неравенство

$$2^n>n^2+4n+5. \qquad (1)$$

△ Рассматривая значения $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$, убеждаемся в том, что при этих значениях данное неравенство неверно. Например, при $n=6$ получаем $2^6=64>6^2+4\cdot 6+5=65$, т. е. ложное неравенство.

Докажем методом математической индукции, что при всех значениях $n\geqslant 7$ неравенство верно.

При $n=7$ получаем

$$2^7=128>7^2+4\cdot 7+5=82,$$

т. е. при $n=7$ неравенство верно.

Предположим, что неравенство верно для некоторого значения $n=k$, т. е.

$$2^k>k^2+4k+5.$$

Умножив обе части неравенства на 2 и преобразовав правую часть, получим

$$2^{k+1}>2k^2+8k+10=(k+1)^2+4(k+1)+5+k^2+2k.$$

Учитывая, что $k^2+2k>0$, можем написать

$$2^{k+1}>(k+1)^2+4(k+1)+5.$$

Следовательно, данное неравенство верно при $n=k+1$. Проведенное доказательство справедливо при всех значениях $k\geqslant 7$.

Итак, методом математической индукции доказано, что неравенство (1) верно для всех значений $n \geqslant 7$. В самом начале мы убедились в том, что для $n < 7$ оно неверно.

Ответ: $n \geqslant 7$. ▲

Вопросы для контроля

1. В чем состоит принцип математической индукции?
2. В чем состоит метод математической индукции?
3. Какое неравенство называется неравенством Бернулли?
4. В чем состоит обобщение метода математической индукции?

Упражнения

2.8. Методом математической индукции докажите, что при любом натуральном n верны равенства:

1) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

2) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

3) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

4) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

5) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

2.9. Методом математической индукции докажите, что при любом натуральном n

1) $n(2n^2-3n+1)$ делится нацело на 6;

2) n^5-n делится нацело на 5.

2.10. Методом математической индукции докажите формулы общего члена и суммы n первых членов

1) арифметической прогрессии;

2) геометрической прогрессии.

2.11. Методом математической индукции докажите истинность неравенства

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

для всех натуральных $n>1$.

2.12. Докажите, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять только трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

§ 9. Различные виды теорем и их взаимосвязь

1. Взаимно обратные теоремы. Теоремы в математике, как правило, формулируются (или могут быть сформулированы) в таком виде.

Для каждого элемента x множества U из предложения $p(x)$ следует предложение $q(x)$.

Следовательно, каждую теорему такого вида можно записать следующим образом:

$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)), \quad x \in U. \tag{1}$$

Предложение $p(x)$ называется *условием* теоремы, предложение $q(x)$ — *заключением* теоремы.

Рассмотрим, например, теорему: «Если четырехугольник x — параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам». Здесь условием теоремы является предложение $p(x)$: четырехугольник x — параллелограмм и заключением теоремы — предложение $q(x)$: диагонали четырехугольника x точкой пересечения делятся пополам. Оба предложения $p(x)$ и $q(x)$ заданы на множестве U всех четырехугольников.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $p(x)$ — предложение «параллелограмм x является ромбом», $q(x)$ — предложение «диагонали параллелограмма x взаимно перпендикулярны». Оба предложения заданы на множестве U всех параллелограммов. Тогда теорема вида (1) состоит в следующем: «Для любого параллелограмма верно утверждение: если параллелограмм — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны». Обычно эту теорему формулируют короче: «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны». Но под этой краткой формулировкой подразумевается именно то, что содержится в той развернутой формулировке, которую мы только что дали.

В дальнейшем теоремы, имеющие вид (1), будем записывать короче:

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

Теоремы

$$p(x) \Rightarrow q(x) \quad \text{и} \quad q(x) \Rightarrow p(x)$$

называются *взаимно обратными*.

Иногда одну из этих теорем называют *прямой*, тогда другую называют *обратной*. Ясно, что любую из двух взаимно обратных теорем можно принять за прямую.

Из данного определения видно, что, поменяв местами в формулировке прямой теоремы условие и заключение, мы получим формулировку обратной.

Важно понимать, что для пары взаимно обратных теорем могут осуществляться все три возможности, а именно:

1) обе теоремы могут быть верными;

2) одна из теорем может быть верной, а другая — неверной;

3) обе теоремы могут быть неверны.

Приведем соответствующие примеры.

Теоремы «Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и число делится на 3» и «Если натуральное число делится на 3, то и его сумма цифр делится на 3» являются взаимно обратными. Из арифметики известно, что обе эти теоремы верны.

Теоремы «Если четырехугольник — прямоугольник, то его диагонали равны» и «Если диагонали четырехугольника равны, то четырехугольник — прямоугольник» также являются взаимно обратными. Как известно, первая из этих теорем верна. Вторая теорема неверна: в качестве контрпримера можно взять равнобочную трапецию.

Этот пример показывает, что из двух взаимно обратных теорем одна может быть верна, другая — неверна.

Для теоремы «Если хотя бы одно из двух натуральных чисел делится на 3, то и их сумма делится на 3» обратная формулируется так: «Если сумма двух натуральных чисел делится на 3, то по крайней мере одно из слагаемых делится на 3». Очевидно, что обе эти теоремы (и прямая, и обратная) неверны.

2. Взаимно противоположные теоремы. Теоремы

$$p(x) \Rightarrow q(x) \quad \text{и} \quad \overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$$

называются *взаимно противоположными*.

Следовательно, если в формулировке некоторой теоремы заменить условие и заключение их отрицаниями, то получится формулировка теоремы, противоположной исходной.

Например, для теоремы «Если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам» противоположная формулируется следующим образом: «Если четырехугольник не является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения не делятся пополам». В данном случае обе теоремы верны. Нетрудно привести пример двух взаимно противоположных теорем, из которых одна будет верной, а другая — неверной.

Для каждой теоремы

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

можно сформулировать еще три теоремы:

обратную: $q(x) \Rightarrow p(x)$;

противоположную: $\overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)}$;

противоположную обратной: $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$.

Возьмем в качестве исходной теорему «Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны» (теорема верна).

Тогда указанные три теоремы формулируются так:

обратная теорема: «Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то четырехугольник является ромбом» (теорема неверна) (рис. 8);

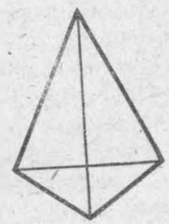


Рис. 8

противоположная теорема: «Если четырехугольник не ромб, то его диагонали не перпендикулярны» (теорема неверна; см. рис. 8);

противоположная обратной: «Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом» (теорема верна).

В рассмотренном примере прямая теорема и противоположная обратной оказались истинными, а обратная и противоположная — ложными. Это совпадение не является случайным. Между этими четырьмя видами теорем существует тесная взаимосвязь, а именно:

1) теоремы

$$p(x) \Rightarrow q(x) \quad \text{и} \quad \overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)},$$

т. е. прямая и противоположная обратной, одновременно истинны или ложны;

2) теоремы

$$q(x) \Rightarrow p(x) \quad \text{и} \quad \overline{p(x)} \Rightarrow \overline{q(x)},$$

т. е. обратная и противоположная, также одновременно истинны или ложны.

Отсюда следует, что нет необходимости доказывать все четыре теоремы. Доказав, например, прямую и обратную теоремы, мы тем самым устанавливаем истинность всех четырех теорем.

Иногда доказательство прямой теоремы $p(x) \Rightarrow q(x)$ связано с некоторыми трудностями. В таких случаях следует попытаться доказать теорему $\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}$, из истинности которой вытекает истинность исходной теоремы. Известный метод «доказательства от противного» как раз и состоит в том, что вместо прямой теоремы доказывают противоположную обратной.

3. Необходимые и достаточные условия. При формулировке теорем часто используют термины «достаточно», «необходимо», «необходимо и достаточно». Выясним смысл этих терминов.

Если теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$ верна, то условие теоремы $p(x)$ называют *достаточным условием* для заключения $q(x)$, а заключение теоремы $q(x)$ называют *необходимым условием* для $p(x)$.

Рассмотрим еще раз теорему «Если четырехугольник — прямоугольник, то его диагонали равны». Эта теорема верна, и, следовательно, условие теоремы является достаточным условием для заключения, т. е. для того чтобы диагонали четырехугольника были равны, *достаточно*, чтобы четырехугольник был прямоугольником.

Заключение этой теоремы является необходимым условием для условия теоремы, т. е. для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, *необходимо*, чтобы диагонали четырехугольника были равны.

Если справедлива не только теорема $p(x) \Rightarrow q(x)$, но и ей обратная $q(x) \Rightarrow p(x)$, то $p(x)$ является *необходимым и достаточным условием* для $q(x)$, а $q(x)$ — *необходимым и достаточным условием* для $p(x)$.

Рассмотрим теорему «Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то и число делится на 3». Выше уже отмечалось, что эта теорема и теорема, ей обратная, верны. Поэтому можно сказать, что для делимости числа на 3 *необходимо и достаточно*, чтобы сумма цифр числа делилась на 3.

Следует помнить, что в тех случаях, когда в теореме содержатся слова «необходимо и достаточно», доказательство обязательно должно состоять из доказательства необходимости и доказательства достаточности. Ведь в такой формулировке на самом деле объединены формулировки двух теорем: прямой и обратной. Каждая нуждается в доказательстве, так как из справедливости одной не следует справедливость другой.

П р и м е р. Заменить многоточия словами «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы получились верные утверждения:

а) для того чтобы выиграть в лотерее, ... иметь хотя бы один лотерейный билет;

б) для того чтобы сумма двух действительных чисел была числом рациональным, ..., чтобы каждое слагаемое было рациональным числом;

в) для того чтобы треугольник был равнобедренным, ..., чтобы углы при основании были равны.

△ а) Многоточие следует заменить словом «необходимо». Если многоточие заменить словом «достаточно», получится ложное утверждение.

б) Истинное утверждение получится, если многоточие заменить словом «достаточно». Условие, чтобы каждое слагаемое было числом рациональным, не является необходимым. Например, сумма иррациональных чисел $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$ является рациональным числом.

в) При замене многоточия словами «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» получаются, очевидно, истинные утверждения. ▲

Вместо слов «необходимо и достаточно» часто употребляют также слова «тогда и только тогда», «в том и только в том случае», «те и только те». Полезно иметь в виду, что рассматриваемые отдельно части этих связок также имеют смысл. Например, слова «только в том случае», «только тогда» заменяют слово «необходимо», а слова «тогда», «в том случае» заменяют слово «достаточно». Заметим еще, что иногда слово «условие» заменяют словом «признак» и говорят о *необходимом признаке*, или говорят о *достаточном признаке*, или, наконец, о *необходимом и достаточном признаке*.

Например, делимость суммы цифр числа на 9 есть достаточный и необходимый признак делимости числа на 9.

Вопросы для контроля

1. Что называется условием теоремы?
2. Что называется заключением теоремы?
3. Какие теоремы называются взаимно обратными?
4. Какие теоремы называются взаимно противоположными?
5. В чем состоит метод доказательства от противного?
6. Что называется достаточным условием?
7. Что называется необходимым условием?
8. Какое условие называется необходимым и достаточным?

Упражнения

2.13. Приведите пример двух взаимно противоположных теорем, из которых одна была бы верна, а другая — неверна.

2.14. Какие из следующих шести теорем являются по отношению друг к другу обратными, противоположными, противоположными обратным? Какие из этих теорем верны:

1) если каждое из двух натуральных чисел делится нацело на 7, то их сумма делится на 7;

2) если ни одно из двух чисел не делится на 7, то и их сумма не делится на 7;

3) если хотя бы одно из двух чисел делится на 7, то и их сумма делится на 7;

4) если сумма двух чисел делится на 7, то каждое слагаемое делится на 7;

5) если сумма двух чисел не делится на 7, то ни одно из слагаемых не делится на 7;

6) если сумма двух чисел не делится на 7, то хотя бы одно из слагаемых не делится на 7?

2.15. Для каждой из теорем сформулируйте обратную:

1) если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник представляет собой ромб;

2) если параллелограмм является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность;

3) если многоугольник является четырехугольником, то сумма его внутренних углов равна 360°.

2.16. Дана теорема: «В любом четырехугольнике, который является прямоугольником, диагонали равны». Сформулируйте теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Какие из этих четырех теорем верны?

2.17. Дана теорема: «Если существует число x, при котором многочлен x^2+px+q принимает отрицательное значение, то квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два положительных корня». Сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы. Какие из них верны?

2.18. В следующих предложениях замените многоточия словами «необходимо и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо» так, чтобы получились верные утверждения:

1) для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы прямые, проведенные через середины противоположных сторон, были его осями симметрии;

2) для того чтобы уравнение $x^2-2x+q=0$ имело два положительных корня, ..., чтобы выполнялось условие $q>0$.

2.19. Докажите или опровергните утверждения:

1) для делимости числа n^2-1 $(n\geqslant 5)$ на 24 достаточно, чтобы n было простым числом;

2) для делимости числа n^2-1 $(n\geqslant 5)$ на 24 необходимо, чтобы n было простым числом.

Глава 3

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 10. Уравнения и системы уравнений

1. Квадратные уравнения. Любое равенство вида

$$f(x)=g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, называется *уравнением с одним неизвестным* x (или с *одной переменной* x); $f(x)$ называется левой частью, а $g(x)$ — правой частью уравнения (1).

Число a называется *решением* (или *корнем*) уравнения с неизвестным x, если при подстановке a вместо x в обе части уравнения получается верное числовое равенство. Решить уравнение — значит найти все решения этого уравнения.

Простейшими нелинейными уравнениями являются квадратные уравнения. Напомним основные определения и формулы, относящиеся к квадратным уравнениям.

Уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{2}$$

где a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, называется *квадратным*. Очевидно, что уравнение (2) имеет те же решения, что и каждое из уравнений

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{3}$$

Число $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом квадратного уравнения* (2). Из уравнения (3) следует, что если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет решений на множестве действительных чисел, так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным. Если

$D=0$, то квадратное уравнение имеет одно решение $x=-\frac{b}{2a}$, а если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два решения

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, квадратное уравнение не имеет решений на множестве действительных чисел, если $D<0$; имеет одно решение, если $D=0$; имеет два решения, если $D>0$. Причем все решения квадратного уравнения (2), если они есть, находятся по формуле

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

Заметим, что для уравнения

$$ax^2+2px+c=0$$

формула (4) принимает вид

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-ac}}{a}.$$

В частности, для уравнения $x^2+2px+c=0$ имеем

$$x=-p\pm\sqrt{p^2-c}.$$

Пример 1. Решить уравнение $3x^2+5x+2=0$.

△ Так как $D=5^2-4\cdot3\cdot2=1$, то данное уравнение имеет два решения

$$x_1=\frac{-5-1}{2\cdot3}=-1 \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-5+1}{2\cdot3}=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=-\frac{2}{3}$. ▲

Пример 2. Решить уравнение $x^2+2x+2=0$.

△ Так как $D=2^2-4\cdot2=-4$, то данное уравнение решений не имеет на множестве действительных чисел.

Ответ: действительных корней нет. ▲

2. Уравнения с одним неизвестным (общий случай). Пусть заданы два уравнения. Если любое решение первого уравнения является решением второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Если уравнение $f_2(x)=g_2(x)$ является следствием уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то будем писать

$$f_1(x)=g_1(x)\Rightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Два уравнения называются *равносильными* (или *эквивалентными*), если у них одно и то же множество решений. Очевидно, если уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого. В этом случае будем писать

$$f_1(x)=g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x).$$

Сформулируем несколько утверждений, которые называются *правилами преобразования уравнений.*

1) Для любых $f(x)$ и $g(x)$

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0.$$

□ Действительно, если x_0 — решение первого уравнения, т. е. $f(x_0)=g(x_0)$, то $f(x_0)-g(x_0)=0$, т. е. x_0 — решение второго уравнения, и наоборот. ■

2) Если функция $\varphi(x)$ определена для всех x, то

$$f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x).$$

□ Действительно, если $f(x_0)=g(x_0)$, то и $f(x_0)\varphi(x_0)=g(x_0)\varphi(x_0)$. Однако получившееся уравнение может иметь решения, которые не являются решениями исходного уравнения. ■

Например, уравнение $x^2=-1$ не имеет решений, а уравнение $x^3=-x$ имеет решение $x=0$.

3) Каждое решение уравнения $f(x)g(x)=0$ есть решение либо уравнения $f(x)=0$, либо уравнения $g(x)=0$, т. е.

$$f(x)g(x)=0\Rightarrow f(x)=0 \quad \text{или} \quad g(x)=0.$$

□ Действительно, если $f(x_0)g(x_0)=0$, то либо $f(x_0)=0$, либо $g(x_0)=0$. (Конечно, возможен и случай, когда $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$.) Однако, если $f(x_0)=0$, но $g(x)$ не определена при $x=x_0$, то x_0 не является решением уравнения $f(x)g(x)=0$. ■

Например,

$$x\cdot\frac{x+3}{|x|}=0\Rightarrow x=0 \quad \text{или} \quad x=-3,$$

причем число -3 является решением данного уравнения, а число 0 не является решением, так как оно не входит в область определения функции $\frac{x+3}{|x|}$.

4) Для любых $f(x)$ и $g(x)$ и любого $n\in N$

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (f(x))^n=(g(x))^n.$$

Здесь в общем случае нельзя поставить знак равносильности $\Leftrightarrow$. Например, уравнение $x=x-1$ не имеет решений, а уравнение $x^2=(x-1)^2$ имеет решение $x=0{,}5$.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x+1}{3-x}=\frac{2-x}{2x+1}$.

$\triangle$ Умножим обе части данного уравнения на $(3-x)(2x+1)$. Тогда

$$\frac{x+1}{3-x}=\frac{2-x}{2x+1}\Rightarrow(x+1)(2x+1)=(2-x)(3-x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1=6-5x+x^2\Leftrightarrow x^2+8x-5=0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет корни

$$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{16+5}=-4\pm\sqrt{21}.$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа $-4+\sqrt{21}$ и $-4-\sqrt{21}$. Проверкой убеждаемся, что оба эти числа являются решениями данного уравнения.

Ответ: $x_1=-4+\sqrt{21}$; $x_2=-4-\sqrt{21}$. ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}.$$

$\triangle$ Умножим обе части данного уравнения на произведение $(x-1)(x+2)$. Тогда

$$3x-6=3x(x+2)-2x(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-6=x^2+8x\Leftrightarrow x^2+5x+6=0.$$

Последнее квадратное уравнение имеет корни $x_1=-3$, $x_2=-2$.

Проверкой убеждаемся, что число -3 является решением, а -2 не является решением данного уравнения (при $x=-2$ не определены обе части уравнения).

Ответ: $x=-3$. ▲

Пример 3. Решить уравнение

$$(x-1)(x^2+3x-1)+x=1.$$

$\triangle$ $(x-1)(x^2+3x-1)+x=1\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x^2+3x-1)+x-1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x^2+3x)=0\Leftrightarrow(x-1)x(x+3)=0.$$

Ответ: $x_1=-3$; $x_2=0$; $x_3=1$. ▲

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x+3}=x+1$.

$\triangle$ $\sqrt{x+3}=x+1\Rightarrow x+3=x^2+2x+1\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow(x+2)(x-1)=0.$$

Следовательно, только числа -2 и 1 могут быть решениями данного уравнения. Проверкой убеждаемся, что число 1 является решением, а число -2 не является решением данного уравнения. Действительно, $\sqrt{x+3}=2$ и $x+1=2$ при $x=1$, а при $x=-2$ имеем $\sqrt{x+3}=1$, но $x+1=-1$.

Ответ: $x=1$. ▲

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+6}.$$

$\triangle$ Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x-5+2\sqrt{(2x-5)(x+1)}+x+1=x+6.$$

Приведем подобные члены и уединим корень в одной части уравнения, а остальные члены уравнения перенесем в другую часть уравнения:

$$\sqrt{(2x-5)(x+1)}=5-x.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат, получим

$$(2x-5)(x+1)=25-10x+x^2,$$
$$2x^2-3x-5=25-10x+x^2,$$
$$x^2+7x-30=0,$$
$$x_1=-10,\quad x_2=3.$$

Проверкой убеждаемся, что $x_1=-10$ не является корнем, а $x_2=3$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=3$. ▲

Пример 6. Решить биквадратное уравнение

$$x^4-3x^2-4=0.$$

$\triangle$ Введем замену $x^2=y$, получим $y^2-3y-4=0$. Решая это уравнение, найдем $y_1=4$, $y_2=-1$, откуда $x^2=4$, $x^2=-1$. Второе уравнение не имеет действительных корней; из первого уравнения получаем $x_1=-2$, $x_2=2$.

Ответ: $x_{1,2}=\pm2$. ▲

3. Уравнения и системы уравнений с двумя неизвестными. Равенство вида $f(x, y)=g(x, y)$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — некоторые функции переменных x и y, называется *уравнением с двумя неизвестными* x и y (или с двумя *переменными* x и y). *Решением уравнения* с двумя неизвестными x и y называется любая пара чисел $(a;\ b)$ такая, что при замене в уравнении x на a и y на b получается верное числовое равенство.

Множество точек плоскости, координаты которых являются решениями уравнения, называется *графиком* этого уравнения.

Например, графиком уравнения $x^2+y^2=R^2$, где $R>0$, является окружность радиуса R с центром в точке $(0;\ 0)$. Графиком уравнения $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, является парабола.

Как и для уравнений с одним неизвестным, если каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого. Два уравнения называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Решением системы уравнений называется общее решение всех уравнений данной системы.

Например, числа $x=2$ и $y=3$ являются решением системы

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1, \end{cases}$$

так как они являются решением каждого из уравнений этой системы.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Например, системы

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+3y=13, \\ x=y-1 \end{cases}$$

равносильны, так как решением первой системы является пара чисел $(2;\ 3)$ и решением второй системы является пара чисел $(2;\ 3)$.

Сформулируем (без доказательства) несколько правил преобразования систем уравнений.

1) Если в системе одно уравнение заменить на равносильное, то получим систему, равносильную данной.

2) Пусть система содержит уравнение вида $x=\varphi$, где x — некоторое неизвестное, а φ — функция, не зависящая от x. Тогда, если во всех других уравнениях системы вместо x подставить φ, то получим систему, равносильную данной.

Это правило называется *правилом подстановки.*

3) Если в системе, содержащей уравнения $f=g$ и $\varphi=\psi$, уравнение $f=g$ заменить уравнением $f+\varphi=g+\psi$ (суммой уравнений), то получим систему, равносильную данной.

Это правило называется *правилом сложения.*

4) Система, содержащая уравнение вида $f\cdot g=0$, распадается на две системы: в одной это уравнение заменено уравнением $f=0$, а в другой — уравнением $g=0$. Причем, если уравнение $f\cdot g=0$ равносильно совокупности уравнений $f=0$ и $g=0$, то данная система равносильна совокупности данных систем, т. е. множество решений данной системы есть объединение множеств решений этих систем.

Это правило иногда называется *правилом множителей.*

Методы решения систем уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=5. \end{cases}$$

△ Из второго уравнения системы находим $x=y+5$. Подставив это выражение для x в первое уравнение, получим уравнение $(y+5)^2+y^2=25$, содержащее только неизвестное y. Решим это уравнение:

$$2y^2+10y=0, \quad y_1=0 \quad \text{и} \quad y_2=-5.$$

Из уравнения $x=y+5$ находим $x_1=5$, $x_2=0$.

Таким образом, данная система имеет два решения $(5;\ 0)$ и $(0;\ -5)$, и других решений нет.

Ответ: $(5;\ 0)$; $(0;\ -5)$. ▲

Примененный здесь метод решения называется *методом подстановки* (см. правило 2) или *методом исключения.*

Запишем предыдущее решение, используя понятие равносильности систем:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5, \\ (y+5)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+5, \\ y(y+5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=y+5, \\ y=0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=y+5, \\ y+5=0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=5, \\ y=0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=0, \\ y=-5 \end{cases}\right).$$

Здесь мы воспользовались по порядку правилами 1 и 2, правилом 1, правилом 4 и снова правилом 2.

Обычно такая подробная запись решения не делается. Однако, чтобы быть уверенным, что получены все решения и только они, необходимо во всех случаях уметь выписывать соответствующую цепочку равносильных систем или следствий.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2-1=x^2+2x, \\ x^2+y^2=3xy+1. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения системы получаем $y^2=(x+1)^2$, т. е. $y=x+1$ или $y=-x-1$. Следовательно (см. правило 4), данная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} y=x+1, \\ x^2+y^2=3xy+1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=-x-1, \\ x^2+y^2=3xy+1. \end{cases}$$

Полученные системы решим методом подстановки.

Пусть сначала $y=x+1$. Тогда, в силу второго уравнения, имеем

$$x^2+(x+1)^2=3x(x+1)+1,$$

и поэтому $x^2+x=0$, $x_1=0$, $x_2=-1$.

Из уравнения $y=x+1$ находим $y_1=1$, $y_2=0$.

Пусть теперь $y=-x-1$. Тогда

$$x^2+(x+1)^2=-3x(x+1)+1,$$
$$5x^2+5x=0, \quad x(x+1)=0,$$

и поэтому $x_3=0$, $x_4=-1$, $y_3=-1$, $y_4=0$.

Ответ: (0; 1); (−1; 0); (0; −1). ▲

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

△ Из второго уравнения почленно вычтем первое уравнение. Полученное уравнение

$$-xy+2y^2=2$$

не имеет решений, у которых $y=0$, поэтому оно равносильно уравнению

$$x=2\cdot\frac{y^2-1}{y}.$$

Следовательно (см. правило 3), данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x=2\cdot\frac{y^2-1}{y}. \end{cases}$$

Эту систему будем решать методом подстановки:

$$4\cdot\frac{(y^2-1)^2}{y^2}-y^2=5, \quad 3y^4-13y^2+4=0.$$

Последнее уравнение является квадратным относительно квадрата неизвестного (такие уравнения называются *биквадратными*), и поэтому

$$y^2=\frac{13\pm\sqrt{169-4\cdot3\cdot4}}{6}=\frac{13\pm11}{6},$$

т. е. $y^2=4$ или $y^2=\frac{1}{3}$.

Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x=2\cdot\frac{y^2-1}{y}, \\ y^2=4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=2\cdot\frac{y^2-1}{y}, \\ y^2=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Из первой системы находим $y_1=2$, $y_2=-2$, $x_1=3$, $x_2=-3$, т. е. первая система имеет два решения (3; 2), (−3; −2). Из второй системы находим $y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y_4=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $x_4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, т. е. вторая система имеет два решения $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ответ: (3; 2); (−3; −2); $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. ▲

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=xy+1, \\ x^2+y^2=xy+3. \end{cases}$$

△ Записав второе уравнение в виде $(x+y)^2=3xy+3$, видим, что данную систему можно рассматривать как систему с новыми неизвестными $u=x+y$ и $v=xy$

этих новых неизвестных получаем систему

$$\begin{cases} u = v + 1, \\ u^2 = 3v + 3. \end{cases}$$

Подставив $u = v + 1$ во второе уравнение, получим $(v+1)^2 = 3v + 3$, $v^2 - v - 2 = 0$, $v_1 = -1$, $v_2 = 2$.

Из уравнения $u = v + 1$ находим $u_1 = 0$, $u_2 = 3$.

Таким образом, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $y = -x$, $x^2 = 1$, и, следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

Из второй системы находим $y = 3 - x$, $x(3 - x) = 2$, и, следовательно, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $y_3 = 2$, $y_4 = 1$.

Ответ: (1; —1); (—1; 1); (1; 2); (2; 1). ▲

Примененный здесь метод решения называется ***методом введения новых неизвестных.***

Вопросы для контроля

1. Что называется решением (корнем) уравнения с одним неизвестным?
2. Какое уравнение называется квадратным?
3. Что называется дискриминантом квадратного уравнения?
4. Когда квадратное уравнение имеет два разных корня?
5. Когда квадратное уравнение имеет один корень?
6. Когда квадратное уравнение не имеет решений в множестве действительных чисел?
7. Когда одно из двух уравнений называется следствием другого?
8. Какие уравнения называются равносильными?
9. Что называется решением уравнения с двумя неизвестными?
10. Что называется графиком уравнения с двумя неизвестными?
11. Что называется решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?

Упражнения

3.1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 11x + 30 = 0$; 2) $x^2 - 19x + 88 = 0$;
3) $x^2 + 8x - 33 = 0$; 4) $x^2 + 4x - 32 = 0$;
5) $x^2 - 6x - 135 = 0$; 6) $5x^2 - 16x + 3 = 0$;
7) $(2x+3)^2 - (x-2)^2 = 5$; 8) $(x-2)^2 - 9 = 0$;
9) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$; 10) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;
11) $x^4 + x^2 - 6 = 0$; 12) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

3.2. Равносильны ли уравнения:

1) $x - 4 = 0$ и $(x-4)(x+5) = 0$;
2) $x^2 - 3x = 0$ и $x - 3 = 0$;
3) $x - 1 = 5$ и $x - 1 + \frac{1}{x-6} = 5 + \frac{1}{x-6}$;
4) $\frac{2}{x-1} = 1$ и $(x-1)\left(\frac{2}{x-1} - 1\right) = 0$;
5) $2x = x + 2$ и $(2x)^2 = (x+2)^2$;
6) $2x - 3 = 5$ и $(2x-3)^2 = 25$?

3.3. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2+x}$; 2) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)} + \frac{1}{x-3} = 1$;
3) $\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$; 4) $(x+1)(6x^2 - 5x + 1) = 0$.

3.4. Решите уравнения:

1) $\sqrt{x-1} = 3$; 2) $3 + \sqrt{x-2} = 4$;
3) $\sqrt{4x+5} = x$; 4) $x + \sqrt{x^2-9} = 21$;
5) $\sqrt{3x+4} + x = 2x$; 6) $\sqrt{x+3} = 9 - x$;
7) $\sqrt{x+5} + 1 = x$; 8) $5\sqrt{x-2} = x + 2$;
9) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x + 3$; 10) $\sqrt{2x+15} = 3 + \sqrt{x-1}$;
11) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$; 12) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$;
13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+4} = 6$; 14) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = x$.

3.5. Решите уравнения:

1) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; 2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$; 4) $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$;
5) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$; 6) $3x + 5\sqrt{x} - 2 = 0$;
7) $x^{-2} + 3x^{-1} - 4 = 0$; 8) $\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{x-2}{x}\right) - 5 = 0$.

3.6. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 37; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ x^2 + y^2 = 208; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ xy = -0{,}2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 10x + 3y = 13, \\ xy = -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 9 = 0, \\ y - x = 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + 10y = 1, \\ x^2 - 2y = 1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3y = -1, \\ x^2 + y^2 + y = 3. \end{cases}$

§ 11. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и определители второго порядка

1. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Напомним, что *линейным* уравнением называется уравнение вида

$$ax + by = c,$$

где a, b, c — заданные числа, а x, y — искомые неизвестные. Числа a, b называются *коэффициентами уравнения* или коэффициентами при неизвестных, а число c — *правой частью уравнения* или *свободным членом*.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, если все коэффициенты и правые части уравнений системы (1) равны нулю, то любая пара чисел $(x; y)$ является решением системы. Если все коэффициенты уравнений системы равны нулю, а правые части уравнений не все равны нулю, то система (1) не имеет решений.

В дальнейшем будем рассматривать только такие системы, в которых хотя бы один коэффициент одного из уравнений отличен от нуля.

Пусть, например, $b_2 \neq 0$. Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2}, \end{cases} \tag{2}$$

т. е. если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (1), то она является и решением системы (2), и наоборот.

Второе уравнение системы (2) умножим на b_1 и полученное уравнение вычтем почленно из первого уравнения:

$$\left(a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1\right)x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1. \tag{3}$$

Заменив теперь первое уравнение системы (2) на уравнение (3), получим систему

$$\begin{cases} \left(a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1\right)x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2}, \end{cases} \tag{4}$$

которая, очевидно, равносильна системе (2).

Если $a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1 \neq 0$, т. е. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то из первого уравнения находим, что

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{5}$$

Подставляя это значение x во второе уравнение системы (4), находим

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{6}$$

Для простоты введем обозначения:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta,$$
$$c_1b_2 - c_2b_1 = \Delta_x,$$
$$a_1c_2 - a_2c_1 = \Delta_y;$$

тогда формулы (5) и (6) можно записать так:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Формулы (5) и (6) называются *формулами Крамера* (швейцарский математик, 1704—1752 гг.).

Таким образом, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система (4) имеет единственное решение, которое находится по формулам (5), (6).

Так как система (4) равносильна системе (1), то решение системы (4) является и решением системы (1).

Пусть теперь

$$a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1 = 0. \tag{7}$$

Тогда система (4) имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x = c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1, \\ \frac{a_2}{b_2}x + y = \frac{c_2}{b_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, эта система не имеет решений, если

$$c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1 \neq 0.$$

Если же

$$c_1 - \frac{c_2}{b_2}b_1 = 0,$$

то любая пара чисел $(x;\ y)$, где

$$y=\frac{c_2}{b_2}-\frac{a_2}{b_2}x,\quad x\in R,$$

является решением системы (8).

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Если $\Delta\neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера (5), (6).

Если $\Delta=0$, то система (1) или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений.

Случай $\Delta=0$ рассмотрим подробнее.

Пусть, как и выше, $b_2\neq 0$. Тогда, положив $k=\frac{b_1}{b_2}$, получим (см. формулу (7)) $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$. Таким образом, в этом случае система (1) имеет вид

$$\begin{cases} ka_2x+kb_2y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

Очевидно, что эта система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда

$$c_1=kc_2.$$

Итак, если $\Delta=0$ и $b_2\neq 0$, то система (1) имеет решение тогда и только тогда, когда первое уравнение системы получается из второго почленным умножением на число $k=\frac{b_1}{b_2}$.

В наших рассуждениях мы предполагали, что $b_2\neq 0$. Это предположение не умаляет общности, так как если, например, $b_1\neq 0$, то, поменяв местами уравнения, придем к тем же выводам. Если же $a_1\neq 0$, то, поменяв местами уравнения и неизвестные, снова придем к разобранному случаю.

Частным, но важным случаем систем вида (1) является система двух *линейных однородных уравнений* с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0,\\ a_2x+b_2y=0.\end{cases}\tag{9}$$

Эта система всегда имеет решение

$$x=0,\ y=0.$$

Из предыдущего следует, что если $\Delta\neq 0$, то система (9) имеет единственное решение $x=0$, $y=0$.

Если же $\Delta=0$ и, например, $b_1\neq 0$, то ее решением является любое решение уравнения

$$a_1x+b_1y=0,$$

т. е. любая пара чисел $(x;\ y)$, где

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x,\quad x\in R.$$

Пример 1. Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x-3y=16,\\ x+2y=11.\end{cases}$$

△ Выпишем и вычислим

$$\Delta=5\cdot 2-1\cdot(-3)=13,$$
$$\Delta_x=16\cdot 2-11\cdot(-3)=65,$$
$$\Delta_y=5\cdot 11-16\cdot 1=39;$$

тогда

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{65}{13}=5,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{39}{13}=3.$$

Ответ: $x=5$, $y=3$. ▲

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y=13,\\ 4x+6y=20.\end{cases}$$

△ Разделив второе уравнение на 2, получим равносильную данной систему

$$\begin{cases} 2x+3y=13,\\ 2x+3y=10,\end{cases}$$

которая противоречива; следовательно, данная система решений не имеет.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 4x-3y=7,\\ 20x-15y=35.\end{cases}$$

△ Разделив второе уравнение системы на 5, получим

$$\begin{cases} 4x-3y=7,\\ 4x-3y=7.\end{cases}$$

Система равносильна одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесконечное множество решений $\left(x;\ \frac{4x-7}{3}\right)$, где $x \in R$. ▲

Пример 4. Решить систему двух однородных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x+3y=0, \\ 2x-4y=0. \end{cases}$$

△ Вычислим Δ:

$$\Delta = 5\cdot(-4)-2\cdot 3 = -26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение: $x=0$, $y=0$. ▲

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 3x+5y=0, \\ 9x+15y=0. \end{cases}$$

△ Так как

$$\Delta = 3\cdot 15 - 9\cdot 5 = 0,$$

то система имеет бесконечное множество решений: $\left(x;\ -\frac{3}{5}x\right)$, где $x \in R$. ▲

2. Геометрическая иллюстрация решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Как показано выше, при решении систем двух уравнений с двумя неизвестными возможны три различных случая:

1) система имеет единственное решение;
2) система не имеет решений;
3) система имеет бесконечное множество решений.

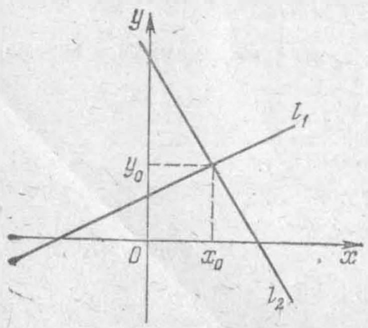


Рис. 9

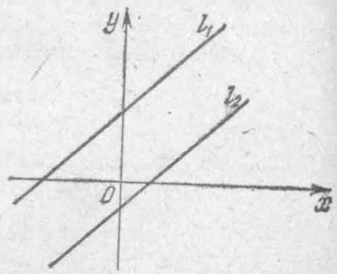


Рис. 10

Перечисленные случаи легко истолковать геометрически. Напомним, что каждое линейное уравнение с двумя неизвестными, у которого хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля, на плоскости определяет прямую.

1) Если прямые l_1 и l_2 пересекаются, т. е. имеют одну общую точку с координатами $(x_0;\ y_0)$, то система линейных уравнений, являющихся уравнениями этих прямых, имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$. Наоборот, если система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$, то прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями системы, пересекаются в точке $(x_0;\ y_0)$ (рис. 9).

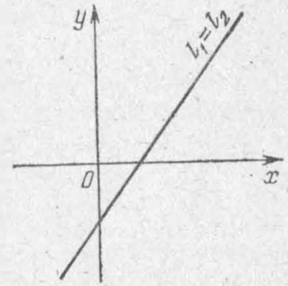


Рис. 11

2) Если прямые l_1 и l_2 параллельны и не имеют общих точек, то система линейных уравнений, являющихся уравнениями этих прямых, не имеет решений. Наоборот, если система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не имеет решений, то прямые l_1 и l_2, определяемые этими уравнениями, не имеют общих точек, т. е. параллельны и не совпадают (рис. 10).

3) Если прямые l_1 и l_2 совпадают, т. е. каждая точка первой прямой одновременно является и точкой второй прямой, то соответствующая система уравнений имеет бесконечное множество решений. Наоборот, если система двух линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, то прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями этой системы, совпадают (рис. 11).

Пример. Найти координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями

$$3x+2y-13=0,$$
$$4x-3y-6=0.$$

△ Найти координаты точки M пересечения данных прямых — это значит найти решение системы

$$\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 4x-3y=6. \end{cases}$$

Вычислим Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = 3\cdot(-3)-4\cdot 2 = -17,$$
$$\Delta_x = 13\cdot(-3)-6\cdot 2 = -51,$$
$$\Delta_y = 3\cdot 6 - 4\cdot 13 = -34;$$

следовательно,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-51}{-17}=3, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-34}{-17}=2.$$

Ответ: $M(3;\ 2)$. ▲

3. Определители второго порядка. Рассмотрим квадратную таблицу вида

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — некоторые числа. Любая такая таблица называется *квадратной матрицей второго порядка*. Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами матрицы*.

Определение. Число $a_1b_2-a_2b_1$ называется *определителем матрицы* (1) и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, согласно определению

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Определитель квадратной матрицы второго порядка называется *определителем второго порядка*.

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются *элементами определителя*. Видно, что элементы определителя в его обозначении расположены в форме квадрата. Диагональ, на которой находятся элементы a_1 и b_2, называется *главной*, а диагональ, на которой находятся элементы a_2 и b_1, — *побочной*.

Теперь можно сформулировать следующее правило вычисления определителей второго порядка:

Для того чтобы вычислить определитель второго порядка, нужно из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

△ На главной диагонали стоят элементы 2 и 7, их произведение $2\cdot 7 = 14$; на побочной диагонали стоят элементы 3 и 4, их произведение $3\cdot 4=12$.

По определению,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14-12=2.$$

Ответ: 2. ▲

Пример 2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

△ а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 4\cdot 5 = -14$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - 5\cdot 0 = -12$. ▲

Формулы Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными можно записать в следующем виде:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \tag{3}$$

так как

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta,$$
$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = \Delta_x,$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = \Delta_y.$$

При рассмотрении формул (3) легко установить *правило* получения определителей, стоящих в числителях, из определителя, стоящего в знаменателе: каждый определитель в числителе получается из определителя в знаменателе путем замены столбца коэффициентов при определяемом неизвестном на столбец правых частей системы. В самом деле, Δ_x получается из Δ заменой a_1 и a_2 на c_1 и c_2, а Δ_y — заменой b_1 и b_2 на c_1 и c_2.

Пример 3. Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x+2y=29, \\ 3x+4y=23. \end{cases}$$

△ Выпишем и вычислим определители Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5\cdot 4-2\cdot 3=14,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}29 & 2\\ 23 & 4\end{vmatrix}=29\cdot 4-2\cdot 23=70,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 29\\ 3 & 23\end{vmatrix}=5\cdot 23-3\cdot 29=28.$$

Таким образом,

$$x=\frac{70}{14}=5,\quad y=\frac{28}{14}=2.$$

Ответ: $x=5$, $y=2$. ▲

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}4x+3y-28=0,\\ 3x-5y-21=0.\end{cases}$$

△ Приведем систему к стандартному виду:

$$\begin{cases}4x+3y=28,\\ 3x-5y=21.\end{cases}$$

Выпишем и вычислим определители Δ, Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & -5\end{vmatrix}=4\cdot(-5)-3\cdot 3=-29,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}28 & 3\\ 21 & -5\end{vmatrix}=28\cdot(-5)-3\cdot 21=-203,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}4 & 28\\ 3 & 21\end{vmatrix}=4\cdot 21-28\cdot 3=0.$$

Таким образом,

$$x=\frac{-203}{-29}=7,\quad y=\frac{0}{-29}=0.$$

Ответ: $x=7$, $y=0$. ▲

4. Свойства определителей второго порядка. Сформулируем основные свойства определителей второго порядка.

Свойство 1.

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix},$$

т. е. *определитель не изменится, если в нем строки заменить на столбцы, а столбцы — на строки.*

Это свойство утверждает равноправие строк и столбцов. Поэтому в дальнейшем все свойства определителей будем формулировать только для строк.

Свойство 2.

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_1 & b_1\end{vmatrix},$$

т. е. *если в определителе переставить местами строки, то определитель изменит только знак.*

Свойство 3.

$$\begin{vmatrix}ka_1 & kb_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},$$

т. е. *если все элементы строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Другими словами, если все элементы какой-либо строки определителя умножить на некоторое число, то определитель умножится на это число.*

Свойство 4.

$$\begin{vmatrix}a_1+a_1' & b_1+b_1'\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1' & b_1'\\ a_2 & b_2\end{vmatrix},$$

т. е. *если все элементы какой-либо строки есть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых суммы заменены их первыми слагаемыми, а во втором — вторыми.*

Следствие 1. *Определитель, у которого элементы одной строки соответственно равны элементам другой строки, равен нулю.*

Следствие 2. *Если в определителе элементы одной строки соответственно пропорциональны элементам другой строки, то определитель равен нулю.*

Следствие 3. *Если к элементам какой-либо строки соответственно прибавить элементы другой строки или числа, им пропорциональные, то определитель не изменится.*

Иначе, *если к строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число, то определитель не изменится.*

Все сформулированные выше свойства легко доказываются простым вычислением.

Покажем на примерах, как использовать эти свойства при вычислении определителей.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}325 & -132\\ 175 & -60\end{vmatrix}.$$

△ Вынесем сначала из первого столбца общий множитель 25 за знак определителя:

$$\Delta=25\begin{vmatrix}13 & -132\\ 7 & -60\end{vmatrix},$$

а из второго столбца общий множитель -12:

$$\Delta=25\cdot(-12)\begin{vmatrix}13 & 11\\ 7 & 5\end{vmatrix}.$$

Затем из первой строки получившегося определителя вычтем его вторую строку:

$$\Delta=25\cdot(-12)\begin{vmatrix}6 & 6\\ 7 & 5\end{vmatrix}.$$

Теперь вынесем из первой строки общий множитель 6:

$$\Delta=25\cdot(-12)\cdot 6\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 5\end{vmatrix}=-1800\cdot(5-7)=3600. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}105 & 55\\ 245 & 154\end{vmatrix}.$$

△ Из первой строки вынесем общий множитель 5, а из второй 7:

$$\Delta=5\cdot 7\begin{vmatrix}21 & 11\\ 35 & 22\end{vmatrix}.$$

Вынесем теперь общий множитель 7 из первого столбца и 11 из второго столбца:

$$\Delta=35\cdot 7\cdot 11\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=2\,695. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Какое уравнение называется линейным уравнением с двумя неизвестными?
2. Какие формулы называются формулами Крамера?
3. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?
4. В чем заключается геометрическая иллюстрация решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
5. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь два и только два решения?
6. Что называется матрицей второго порядка? Что называется ее определителем?

7. Сформулируйте правило вычисления определителя второго порядка.
8. Запишите формулы Крамера с помощью определителей.
9. Перечислите свойства определителей.
10. Когда система двух линейных уравнений с двумя неизвестными а) имеет бесконечное множество решений; б) не имеет решений?

Упражнения

3.7. Вычислите определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 4\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{4}{3}\\ 6 & 8\end{vmatrix}$.

3.8. Вычислите определители второго порядка:

1) $\begin{vmatrix}\log_2 32 & \log_3 27\\ \log_4 16 & \log_5 125\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}\sin 45^\circ & \operatorname{tg} 45^\circ\\ \operatorname{ctg} 45^\circ & \sin 45^\circ\end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix}\log_2 8 & \log_{1/3} 27\\ \log_5 1 & \lg 1000\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}\cos 0^\circ & \sin 60^\circ\\ \sqrt{3} & \sin 90^\circ\end{vmatrix}$.

3.9. При каком значении k система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}3x+4y=17,\\ 4x+ky=4\end{cases}$$

имеет решение $x=3$, $y=2$?

3.10. Решите уравнения:

1) $x^2+\begin{vmatrix}2x & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0$; 2) $x^2+\begin{vmatrix}5 & 1\\ x & -4\end{vmatrix}=0$;

3) $\begin{vmatrix}3 & 15-x^2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & 5\\ 4 & x\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}x^2-3 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5x & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}-7x\begin{vmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3$.

3.11. С помощью определителей решите следующие системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases}3x-2y=5,\\ 4x+y=14;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x+y=17,\\ 3x-5y=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x-3y=16,\\ 2x+4y=22;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x-2y-6=0,\\ 7x-5y-4=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x+4y=9,\\ 2x-5y=6;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}4x-3y-7=0,\\ 8x-6y-14=0.\end{cases}$

3.12. Найдите решения систем двух однородных линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases}3x+2y=0,\\ 5x-3y=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-2y=0,\\ 6x-4y=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}4x-5y=0,\\ 7x+2y=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+7y=0,\\ 2x+15y=0;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-3y=0,\\ 4x-6y=0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x+5y=0,\\ 5x+3y=0.\end{cases}$

3.13. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных своими уравнениями:

1) $\begin{matrix} 4x-3y-7=0, \\ 3x+2y-18=0; \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 5x-4y-9=0, \\ 2x+3y-22=0. \end{matrix}$

3.14. Решите системы уравнений графически:

1) $\begin{cases} 3x-y=5, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y=4, \\ 9x+6y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3y=12, \\ -x-4y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-4y=7, \\ 6x-8y=14. \end{cases}$

3.15. При каком значении k система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений:

1) $\begin{cases} 5x-ky=3, \\ \frac{5}{2}x+y=\frac{3}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=4, \\ kx-y=2? \end{cases}$

3.16. При каком значении k система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не имеет решений:

1) $\begin{cases} 3x-ky=9, \\ 2x+7y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ 3x+3y=k? \end{cases}$

3.17. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} (\alpha-1)x-4y=11+\alpha, \\ -x+(\alpha+2)y=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, бесконечное множество решений и не имеет решений?

3.18. Решите систему

$$\begin{cases} x-(\alpha-1)y=1, \\ \alpha x-2y=4-\alpha, \quad \alpha\in R. \end{cases}$$

§ 12. Определители третьего порядка и их свойства

1. Матрицы и определители третьего порядка. Рассмотрим квадратную таблицу вида

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 — некоторые числа. Любая такая таблица называется *квадратной матрицей третьего порядка*. Числа a_1, b_1, c_1, ..., c_3 называются *элементами матрицы* (1).

Определение. Число

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

называется *определителем матрицы* (1) и обозначается

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Таким образом, согласно определению

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Определитель квадратной матрицы третьего порядка называется *определителем третьего порядка.*

Из определения видно, что определитель третьего порядка выражается через определители второго порядка.

Формулу (3) называют *разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.*

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

△ Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Delta=2\cdot(-2-18)-3\cdot(-10+6)-4\cdot(15+1)=$$
$$=2\cdot(-20)-3\cdot(-4)-4\cdot16=-92.$$

Ответ: $\Delta=-92$. ▲

Пример 2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

△ а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=$

$$=3\cdot2-2\cdot1+1\cdot0=4;$$

б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=$

$$=1\cdot(-14)+2\cdot(-21)+3\cdot(-7)=-77;$$

в) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot6=30.$ ▲

2. Свойства определителей третьего порядка. Определители третьего порядка обладают теми же свойствами, что и определители второго порядка; убедиться в этом можно непосредственным вычислением.

Сформулируем основные свойства определителей третьего порядка.

Свойство 1. *Определитель не изменится, если в нем строки заменить на столбцы, а столбцы — на строки.*

Это свойство утверждает равноправие строк и столбцов. Поэтому в дальнейшем все свойства будем формулировать лишь для строк.

Свойство 2. *Если в определителе переставить местами две какие-либо строки, то определитель изменит только знак.*

Свойство 3. *Если все элементы какой-либо строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Другими словами, если все элементы какой-либо строки умножить на некоторое число, то определитель умножится на это число.

Свойство 4. *Если у определителя все элементы какой-либо строки заданы как суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых суммы заменены их первыми слагаемыми, а во втором — вторыми.*

Это свойство определителя справедливо и для случая, когда элементы какой-либо строки равны сумме не двух, а большего числа слагаемых.

Следствие 1. *Определитель, у которого две какие-либо строки одинаковы, равен нулю.*

Следствие 2. *Если в определителе элементы одной строки пропорциональны элементам какой-либо другой строки, то определитель равен нулю.*

Следствие 3. *Если к элементам какой-либо строки соответственно прибавить элементы любой другой строки или числа, им пропорциональные, то определитель не изменится.*

Покажем на примерах, как пользоваться этими свойствами при вычислении определителей.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}-14 & 21 & 28\\ 6 & -9 & 12\\ 10 & 15 & -20\end{vmatrix}.$$

△ Выносим за знак определителя общие множители элементов каждой строки:

$$\Delta=7\cdot3\cdot5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix},$$

а затем третью строку прибавим к первой и ко второй:

$$\Delta=105\cdot\begin{vmatrix}0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}.$$

Разложив получившийся определитель по элементам первой строки, получим

$$\Delta=105\cdot(-6)\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -4\end{vmatrix}=630\cdot16=10\,080.$$

Ответ: $\Delta=10\,080$. ▲

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}17 & 29 & 41\\ 36 & -24 & 60\\ 20 & 27 & 46\end{vmatrix}.$$

△ Вынесем общий множитель элементов второй строки за знак определителя:

$$\Delta=12\begin{vmatrix}17 & 29 & 41\\ 3 & -2 & 5\\ 20 & 27 & 46\end{vmatrix}.$$

Прибавив к первой строке вторую, получим

$$\Delta=12\begin{vmatrix}20 & 27 & 46\\ 3 & -2 & 5\\ 20 & 27 & 46\end{vmatrix}=0,$$

так как определитель имеет две одинаковые строки.

Ответ: $\Delta=0$. ▲

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}49 & 37 & 41\\ 23 & 37 & 41\\ 95 & 74 & 82\end{vmatrix}.$$

△ Из первой строки вычтем вторую, а затем получившийся определитель разложим по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}26 & 0 & 0\\ 23 & 37 & 41\\ 95 & 74 & 82\end{vmatrix}=26\begin{vmatrix}37 & 41\\ 74 & 82\end{vmatrix}=0.$$

Ответ: $\Delta=0$. ▲

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 36 & 48 & 30 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

△ Вынесем общий множитель элементов второй строки (число 6) и общий множитель элементов третьей строки (число 2), а затем вынесем общий множитель элементов первого столбца (число 3) и общий множитель элементов второго столбца (число 4):

$$\Delta=6\cdot 2\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=6\cdot 2\cdot 3\cdot 4\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислив теперь последний определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-1=2,$$

получим $\Delta=6\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2=288$.

Ответ: $\Delta=288$. ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется матрицей третьего порядка?
2. Что называется определителем третьего порядка?
3. Перечислите свойства определителей.
4. Объясните, почему определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

равны нулю.

Упражнения

3.19. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

3.20. Докажите равенство определителей, не вычисляя их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Указание. Воспользуйтесь свойствами определителей.

3.21. Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix}=0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix}=9$; 3) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ -4 & -2x & 5 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}=0$.

3.22. Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-8=0$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=0$.

3.23. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}=xy,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2).$$

3.24. Решите уравнение

$$\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix}=0.$$

3.25. Решите уравнение

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}=0.$$

§ 13*. Системы линейных уравнений со многими неизвестными

1. Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases} \tag{1}$$

Тройка чисел $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называется *решением системы* (1), если при подстановке этих чисел в уравнения системы вместо x, y и z получаются верные числовые равенства.

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю:

$$a_i = b_i = c_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

В этом случае, если все свободные члены уравнений системы равны нулю:

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0,$$

то, очевидно, любая тройка чисел $(x;\ y;\ z)$ является решением этой системы. Если же не все свободные члены уравнений равны нулю, то система не имеет решений.

Рассмотрим теперь более интересный случай, когда не все коэффициенты уравнений системы (1) равны нулю. Покажем, что в этом случае решение системы (1) всегда можно свести к решению некоторой системы двух уравнений с двумя неизвестными. Пусть, например, не равен нулю коэффициент c_3. Тогда из третьего уравнения системы (1) можно выразить z через x и y:

$$z = \frac{d_3 - a_3x - b_3y}{c_3}. \tag{2}$$

Подставив это выражение для z в первое и второе уравнения системы (1), мы исключим неизвестное z и получим систему двух уравнений с неизвестными x и y. Методы исследования и решения таких систем были подробно изучены в § 11. Решив полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y, по формуле (2) найдем значение третьего неизвестного z. Заметим, что вместо z можно исключать любое неизвестное и что исключаемое неизвестное можно находить из любого уравнения, в которое оно входит.

Таким образом, решение системы трех уравнений с тремя неизвестными путем исключения одного из неизвестных всегда можно свести к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Такой метод решения систем называется *методом исключения*. Отметим, что исключать неизвестное можно и другими способами, например путем почленного сложения уравнений или сложения одного уравнения системы с другим уравнением, предварительно умноженным на какое-либо число (см. пример 2).

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

△ Из третьего уравнения системы находим

$$z = 10 - 3x + y.$$

Подставляем найденное выражение для z в первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} x + 2y + 4(10 - 3x + y) = 31, \\ 5x + y + 2(10 - 3x + y) = 29. \end{cases}$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y. После упрощения будем иметь

$$\begin{cases} 11x - 6y = 9, \\ x - 3y = -9. \end{cases}$$

Решив эту систему любым из описанных в § 11 способов, найдем $x = 3$, $y = 4$. Теперь находим соответствующее значение z:

$$z = 10 - 3 \cdot 3 + 4 = 5.$$

Ответ: $(3;\ 4;\ 5)$. ▲

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6, \\ 2x + 3y + 3z = 13, \\ 3x + 3y + z = 8. \end{cases}$$

△ Вычтем почленно из второго уравнения системы первое уравнение, предварительно умноженное на 2, и из третьего уравнения — первое, предварительно умноженное на 3. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6, \\ -3y + z = 1, \\ -6y - 2z = -10. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе, предварительно умноженное на 2. Получим

$$\begin{cases} x + 3y + z = 6, \\ -3y + z = 1, \\ -4z = -12. \end{cases}$$

В результате преобразований получили так называемую *треугольную систему уравнений*. Треугольные системы уравнений легко решаются. В самом деле, из последнего уравнения видно, что $z = 3$. Из второго уравнения находим $y = \frac{2}{3}$, из первого получаем $x = 1$.

Ответ: $\left(1;\ \frac{2}{3};\ 3\right)$. ▲

Замечание. Решение системы линейных уравнений путем сведения ее к треугольной системе уравнений называется *методом Гаусса*. Этот метод является частным случаем метода исключения переменных. Он применим к системам с любым числом уравнений и неизвестных. Метод Гаусса широко используется при численном решении систем, содержащих иногда десятки и сотни уравнений и неизвестных, на современных электронных вычислительных машинах.

Пример 3. Решить систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=12, \\ 2x-3y+z=1. \end{cases}$$

△ Данная система является частным случаем системы трех уравнений с тремя неизвестными. В качестве третьего уравнения можно рассматривать, например, первое уравнение, второе уравнение или, наконец, уравнение $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0$.

Сложив почленно уравнения данной системы, получим уравнение

$$5x-y=13.$$

Следовательно, $y=5x-13$. Подставив это значение для y во второе уравнение, найдем

$$z=1-2x+3(5x-13)=13x-38.$$

Таким образом, любая тройка чисел

$$x, \quad y=5x-13, \quad z=13x-38,$$

где $x\in R$, является решением данной системы, и других решений нет.

Ответ: система имеет бесконечное множество решений $(x;\ 5x-13;\ 13x-38)$, $x\in R$. ▲

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y-\ z=0, \\ 4x+6y-3z=0. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения находим

$$z=2x+3y.$$

Подставив во второе уравнение, получим

$$4x+6y-3(2x+3y)=0,$$

т. е. $2x+3y=0$. Следовательно,

$$y=-\frac{2}{3}x, \quad z=2x-2x=0.$$

Ответ: система имеет бесконечное множество решений $\left(x;\ -\frac{2}{3}x;\ 0\right)$, $x\in R$. ▲

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ 2x+3y-\ z=8, \\ x+5y+\ z=22. \end{cases}$$

△ Сложив почленно второе и третье уравнения, исключаем неизвестное z:

$$3x+8y=30.$$

Полученное уравнение совпадает с первым уравнением данной системы. Следовательно, данная система равносильна системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ x+5y+z=22. \end{cases}$$

Положим $z=c$, где c — произвольное число, и решим систему относительно x и y:

$$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ x+5y=22-c. \end{cases}$$

Так как определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=7$ не равен нулю, то система имеет решение при любом c. Вычислив определители

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 30 & 8 \\ 22-c & 5 \end{vmatrix}=8c-26, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 30 \\ 1 & 22-c \end{vmatrix}=36-3c,$$

по формулам Крамера находим

$$x=\frac{8c-26}{7}, \quad y=\frac{36-3c}{7}.$$

Таким образом, любая тройка чисел

$$x=\frac{8c-26}{7}, \quad y=\frac{36-3c}{7}, \quad z=c,$$

где $c\in R$, является решением системы, и других решений данная система не имеет.

Ответ: система имеет бесконечное множество решений $\left(\frac{8c-26}{7};\ \frac{36-3c}{7};\ c\right)$, c — произвольное число. ▲

При решении систем двух уравнений с двумя неизвестными использовались определители второго порядка (§ 11). Аналогично, при решении системы (1) трех уравнений с тремя неизвестными иногда удобно использовать определители третьего порядка.

Определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

называется определителем системы (1). Можно доказать, что если определитель $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (3)$$

где Δ_x, Δ_y, Δ_z — определители, получающиеся из определителя Δ заменой соответственно первого, второго, третьего столбцов столбцом из свободных членов системы (1). Формулы (3) называются формулами Крамера для системы (1) трех уравнений с тремя неизвестными.

Если $\Delta=0$, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений, которые могут быть найдены методом исключения.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y+\ z=14, \\ 3x-\ y+2z=5, \\ \ x+2y-\ z=7. \end{cases}$$

△ Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-5)+1\cdot 7=16.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}=14\cdot(-3)-3\cdot(-19)+1\cdot 17=32,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-19)-14\cdot(-5)+1\cdot 16=48,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot(-17)-3\cdot 16+14\cdot 7=16.$$

Подставив найденные значения определителей в формулы Крамера (3), получим

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{32}{16}=2, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{48}{16}=3, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{16}{16}=1.$$

Ответ: (2; 3; 1). ▲

Пример 7. Определить, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} ax+\ y+\ z=1, \\ x+ay+\ z=a, \\ x+\ y+az=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, бесконечное множество решений, не имеет решений.

△ Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=a(a^2-1)-(a-1)+1-a=(a-1)(a^2+a-2)=$$
$$=(a-1)^2(a+2).$$

При всех значениях a, кроме $a=1$ и $a=-2$, определитель системы не равен нулю и, следовательно, система имеет единственное решение. При $a=1$ система равносильна одному уравнению с тремя неизвестными

$$x+y+z=1,$$

которое имеет бесконечное множество решений.

Докажем, что при $a=-2$ система не имеет решений. Допустим противное: пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — решение. Тогда

$$\begin{cases} -2x_0+\ y_0+\ z_0=1, \\ x_0-2y_0+\ z_0=-2, \\ x_0+\ y_0-2z_0=4. \end{cases}$$

Сложив почленно эти три уравнения, получаем $0=3$, т. е. сделанное предположение неверно.

Ответ: при $a=-2$ система решений не имеет, при $a=1$ система имеет бесконечное множество решений, при всех остальных значениях a система имеет единственное решение. ▲

2. Системы линейных уравнений с n неизвестными. Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными. При большом числе неизвестных и уравнений неизвестные обозначаются одной буквой с разными индексами, например

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а коэффициенты уравнения — буквой с двумя индексами, например

$$a_{ij}, \text{ где } i=1, 2, \ldots, m, \ j=1, 2, \ldots, n.$$

Здесь первый индекс обозначает номер уравнения, а второй — номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

В таких обозначениях система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Заметим, что число неизвестных n и число уравнений m в общем случае между собой никак не связаны. Возможны все три случая:

$$m=n, \quad m<n, \quad m>n.$$

Решением уравнения с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любая конечная последовательность из n чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$ такая, что при $x_1=c_1, x_2=c_2, \ldots, x_n=c_n$ уравнение превращается в верное числовое равенство.

Решением системы (1) называется любая конечная последовательность из n чисел $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$, которая является решением каждого из уравнений системы.

Как и системы с двумя и тремя неизвестными, системы m линейных уравнений с n неизвестными решаются методом исключения неизвестных.

Решение системы из m уравнений с n неизвестными исключением одного из неизвестных всегда сводится к решению системы из $m-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными.

В частности, решение системы из четырех уравнений с четырьмя неизвестными сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+3x_4=-4, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=6. \end{cases}$$

△ Сначала из первого, третьего и четвертого уравнений исключаем неизвестное x_1. Для этого второе уравнение умножим на 3 и вычтем почленно из третьего уравнения, а затем снова второе уравнение умножим на 2 и вычтем почленно из четвертого и первого уравнений. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1, \\ 14x_2-11x_3+7x_4=6, \\ 12x_2-8x_3+x_4=8, \\ 9x_2-10x_3+7x_4=-2, \end{cases}$$

равносильную данной системе.

Решение этой системы сводится к решению системы трех последних уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 14x_2-11x_3+7x_4=6, \\ 12x_2-8x_3+x_4=8, \\ 9x_2-10x_3+7x_4=-2. \end{cases}$$

Такие системы уже решались в предыдущем параграфе. Решив ее одним из известных методов, например методом исключения неизвестных, найдем $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=0$, а затем из уравнения

$$x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1$$

найдем x_1:

$$x_1=-1+4\cdot2-3\cdot2+2\cdot0=1.$$

Таким образом, последовательность из четырех чисел (1; 2; 2; 0) является решением данной системы, и других решений нет.

Ответ: (1; 2; 2; 0). ▲

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

△ Применим метод Гаусса. В первом уравнении коэффициент при x_1 не равен 0 (если бы он оказался равным 0, в качестве первого уравнения следовало бы взять то, в котором он не равен 0). Исключим неизвестное x_1 из третьего и четвертого уравнений системы. Для этого первое уравнение системы вычтем из второго уравнения; первое уравнение системы умножим на 2 и вычтем из третьего уравнения; первое уравнение системы умножим на 3 и вычтем из четвертого уравнения.

Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ -x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -11, \\ -x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -18. \end{cases} \quad (3)$$

Исключим x_2 из третьего и четвертого уравнений системы (3). Для этого сложим второе уравнение системы сначала с третьим, а затем с четвертым.

В результате получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ 5x_3 - 7x_4 = -13, \\ 4x_3 - 8x_4 = -20. \end{cases} \quad (4)$$

Исключим теперь неизвестное x_3 из третьего и четвертого уравнений системы (4). Для этого третье уравнение системы (4) разделим на 5, умножим затем на 4 и вычтем из четвертого уравнения.

Получим треугольную систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 - x_4 = -2, \\ 5x_3 - 7x_4 = -13, \\ -\frac{12}{5}x_4 = -\frac{48}{5}. \end{cases} \quad (5)$$

Найдя из четвертого уравнения системы (5) $x_4 = 4$, подставим это значение в третье уравнение системы и найдем $x_3 = 3$; из второго уравнения системы находим $x_2 = 2$, а из первого — $x_1 = 1$. Решением системы будет последовательность (1; 2; 3; 4).

Ответ: система имеет единственное решение (1; 2; 3; 4). ▲

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

△ Решим эту систему трех уравнений с четырьмя неизвестными методом Гаусса. Из второго уравнения вычтем почленно первое уравнение, предварительно умноженное на 2, из третьего уравнения вычтем первое. Получим треугольную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

равносильную исходной системе. Положив $x_4 = c$, где c — произвольное число, из третьего уравнения системы находим $x_3 = -1 - \frac{c}{2}$, из второго находим $x_2 = 1 + \frac{c}{2}$, из первого получаем $x_1 = 2 - c$. Таким образом, любая последовательность из четырех чисел $\left(2 - c;\ 1 + \frac{c}{2};\ -1 - \frac{c}{2};\ c\right)$, где $c \in \mathbf{R}$, является решением данной системы, и других решений система не имеет.

Ответ: система имеет бесконечное множество решений $\left(2 - c;\ 1 + \frac{c}{2};\ -1 - \frac{c}{2};\ c\right)$, $c \in \mathbf{R}$. ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется решением системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными?
2. В чем заключается метод Гаусса?
3. Запишите формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.
4. В каком случае формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными неприменимы?
5. Приведите пример какой-либо системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, которая а) имеет единственное решение; б) имеет бесконечное множество решений; в) не имеет решений.

6. Как записывается линейное уравнение с n неизвестными в общем виде?

7. Что называется решением уравнения с n неизвестными?

8. Что называется решением системы m уравнений с n неизвестными?

9. Может ли однородная система m уравнений с n неизвестными не иметь ни одного решения?

Упражнения

3.26. Решите следующие системы:

1) $\begin{cases} 3x-y+z-4=0, \\ x+2y-z-4=0, \\ 2x+y+2z-16=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ 2x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y+2z=-5, \\ 2x+y-z=5, \\ 7x+y-z=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+2y+2z-16=0, \\ 4x-2y+5z-5=0. \end{cases}$

3.27. Решите следующие системы:

1) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6, \\ 2x_1-x_2+3x_3=11, \\ 4x_1+x_2-5x_3=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2-4x_3=9, \\ 6x_1-5x_2+2x_3=17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=9, \\ 2x_1-x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-1, \\ x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 3x_1-4x_2-x_3=5. \end{cases}$

3.28. Определите, имеют ли решение следующие системы:

1) $\begin{cases} 3x+4y+1=0, \\ 2x-5y-30=0, \\ 4x+2y-12=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y=3, \\ 4x+7y=4, \\ -x+6y=9. \end{cases}$

3.29. Прямая задана уравнением

$$4x-5y-1=0.$$

Установите, проходит ли она через точку пересечения прямых, заданных уравнениями

$$2x+3y-17=0,$$
$$x+2y-10=0.$$

3.30. Решите системы четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

1) $\begin{cases} 3x+4y-z-u=3, \\ 2x-y-2z+2u=9, \\ x+3y+5z-4u=2, \\ 4x-8y-3z+3u=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=6, \\ x_2+x_3+3x_4=16, \\ x_1-2x_2-x_4=-6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ y+3z+u=15, \\ 4x+z+u=11, \\ x+y+5u=23, \end{cases}$

3.31. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x+ay+2z=0, \\ 2x+y+3z=0, \\ 4x-y+7z=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3.32. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 8x+y+4z=0, \\ ax-y+z=0, \\ a^2x+3y+2z=0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

§ 14. Неравенства и системы неравенств

1. Неравенства с одним неизвестным. Неравенство вида $f(x)<g(x)$ или $f(x)\leqslant g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, называется *неравенством с одним неизвестным* x (или *с одной переменной* x).

Неравенства вида $f(x)<g(x)$ называются *строгими*, а неравенства вида $f(x)\leqslant g(x)$ — *нестрогими*. В дальнейшем все определения и утверждения, как правило, будут формулироваться для строгих неравенств.

Число a называется *решением* неравенства с одним неизвестным, если при подстановке числа a вместо неизвестного в неравенство получаем верное числовое неравенство.

В этом случае говорят, что число a удовлетворяет неравенству $f(x)<g(x)$.

Например, число 0 является решением неравенства $2x+1>0$, так как $2\cdot 0+1=1>0$, а число -1 не является решением, так как $2\cdot(-1)+1=-1<0$.

Требование «решить данное неравенство» означает — найти все решения этого неравенства или показать, что оно не имеет решений.

Пример 1. Решить неравенство

$$3x-1>0.$$

$\triangle$ Очевидно, что если некоторое число удовлетворяет данному неравенству, то оно удовлетворяет и неравенству $x>\frac{1}{3}$, и наоборот. Следовательно, любое число, удовлетворяющее неравенству $x>\frac{1}{3}$, является решением данного неравенства, и других решений оно не имеет.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. $\blacktriangle$

Ответ можно записать и так: $x > \frac{1}{3}$. Такая запись ответа также является правильной и допустимой.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 < 0$.

$\triangle$ Данное неравенство не имеет решений, так как квадрат любого действительного числа больше нуля (если $x \neq 0$) или равен нулю (если $x = 0$).

Ответ: решений нет. $\blacktriangle$

Два неравенства называются равносильными (или *эквивалентными*), *если они имеют одно и то же множество решений*. Другими словами, два неравенства называются равносильными, если каждое решение первого неравенства является решением второго и каждое решение второго неравенства является решением первого или если оба неравенства не имеют решений.

Например, неравенства $3x - 1 > 0$ и $6x > 2$ равносильны. Неравенства $x^2 > 1$ и $x > 1$ не являются равносильными, так как, например, число -2 является решением первого неравенства и не является решением второго неравенства.

Пусть заданы два неравенства $f_1(x) < g_1(x)$ и $f_2(x) < g_2(x)$. Если любое решение первого неравенства является решением и второго неравенства, то второе неравенство называется *следствием* первого. В этом случае будем писать

$$f_1(x) < g_1(x) \Rightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

Например, неравенство $x^2 > 1$ является следствием неравенства $x > 1$, т. е. $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

Очевидно, два неравенства равносильны, если каждое из них является следствием другого. В этом случае будем писать

$$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

Например,

$$3x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3x > 1.$$

Докажем несколько теорем о равносильности неравенств.

1) *Неравенство* $f(x) < g(x)$ *равносильно неравенству* $f(x) - g(x) < 0$, т. е.

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0.$$

$\square$ Действительно, если x_0 — решение первого неравенства, т. е. $f(x_0) < g(x_0)$, то $f(x_0) - g(x_0) < 0$, т. е. x_0 — решение второго неравенства. И наоборот, если x_0 — решение второго неравенства, то x_0 — решение первого неравенства.

Аналогично доказывается, что

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0. \blacksquare$$

2) *Если число* m *положительное, то неравенство* $f(x) < g(x)$ *равносильно неравенству* $mf(x) < mg(x)$, т. е.

$$mf(x) < mg(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

Если же $m < 0$, *то*

$$mf(x) < mg(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

$\square$ Пусть $m > 0$. Из свойств числовых неравенств следует: если x_0 такое, что $f(x_0) < g(x_0)$, то $mf(x_0) < mg(x_0)$ и наоборот. Это и означает, что если x_0 — решение неравенства $f(x) < g(x)$, то x_0 — решение и неравенства $mf(x) < mg(x)$, и наоборот. Следовательно, $mf(x) < mg(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, если $m > 0$. Аналогично доказывается, что $mf(x) < mg(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, если $m < 0$. $\blacksquare$

2. Линейные неравенства. Неравенства с модулем. Линейные и квадратные неравенства подробно изучались в школе. Напомним соответствующие определения и методы решения.

Неравенства вида

$$ax + b > px + q \text{ или } ax + b \geqslant px + q,$$

где a, b, p, q — некоторые числа, называются *линейными*. Обе части линейного неравенства являются линейными функциями.

Решение линейных неравенств сводится к решению неравенств вида

$$ax > b \text{ и } ax < b,$$

где a и b — некоторые числа. Очевидно, что

1) если $a > 0$, то

$$ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a},$$

$$ax < b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a},$$

т. е. множеством решений неравенства $ax > b$ является бесконечный интервал $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$, а множеством решений неравенства $ax < b$ — бесконечный интервал $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$;

2) если $a < 0$, то

$$ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a},$$

$$ax < b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a},$$

т. е. множеством решений неравенства $ax > b$ является интервал $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$, а неравенства $ax < b$ — интервал $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Случай $a = 0$, т. е. неравенства вида $0 \cdot x > b$ и $0 \cdot x < b$, следует рассмотреть особо. Действительно, если $b > 0$, то неравенство $0 \cdot x > b$ не имеет решений, а неравенству $0 \cdot x < b$ удовлетворяет любое действительное число. Если $b < 0$, то неравенство $0 \cdot x < b$ не имеет решений, а неравенству $0 \cdot x > b$ удовлетворяет любое действительное число. Если $b = 0$, то неравенства $0 \cdot x > b$ и $0 \cdot x < b$ решений не имеют.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $2x + 1 > \frac{3}{2}x - 2$;

б) $x + 1 > x + 2$;

в) $2x + 2 > 2x + 1$.

$\triangle$ а) $2x + 1 > \frac{3}{2}x - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > -3 \Leftrightarrow x > -6$;

б) $x + 1 > x + 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 1$; следовательно, данное неравенство решений не имеет;

в) $2x + 2 > 2x + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x > -1$; следовательно, данному неравенству удовлетворяет любое действительное число, т. е. множество решений — это множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. ▲

Пример 2. Решить неравенство $2x + |x| < 1$.

$\triangle$ Данное неравенство не является линейным, однако его решение сводится к решению линейных неравенств. Действительно, если рассматривать только $x \geqslant 0$, то $2x + |x| = 3x$ и, следовательно, данное неравенство принимает вид $3x < 1$. Его неотрицательными решениями будут все числа из промежутка $\left[0; \frac{1}{3}\right)$.

Пусть теперь $x < 0$; тогда $2x + |x| = 2x - x = x$ и данное неравенство принимает вид $x < 1$. Его отрицательными решениями будут все числа $x < 0$.

Объединив неотрицательные и отрицательные решения данного неравенства, получим, что любое число $x < \frac{1}{3}$ является решением и других решений нет.

Ответ: $x < \frac{1}{3}$. ▲

Пример 3. Решить неравенство

$$|x - 1| < |x + 2| + 1.$$

$\triangle$ Разобьем числовую прямую на три промежутка: $x < -2$, $-2 \leqslant x < 1$, $x \geqslant 1$.

Если $x < -2$, то данное неравенство принимает вид $-x + 1 < -x - 2 + 1$, т. е. $0 \cdot x < -2$. Отсюда следует, что на промежутке $(-\infty; -2)$ решений нет.

Если $-2 \leqslant x < 1$, то данное неравенство принимает вид $-x + 1 < x + 2 + 1$, т. е. $2x > -2$, откуда $x > -1$. Поэтому на промежутке $[-2; 1)$ решением будет любое $x \in (-1; 1)$.

Если $x \geqslant 1$, то данное неравенство принимает вид $x - 1 < x + 2 + 1$, т. е. $0 \cdot x < 4$. Поэтому на данном промежутке решением неравенства будут числа $x \geqslant 1$.

Объединив полученные решения, получим множество всех решений: $x > -1$.

Ответ: $x > -1$. ▲

3. Квадратные неравенства. Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c < 0,$$

где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называются *квадратными*.

Известно, что если дискриминант квадратного уравнения $D > 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Если $D = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

где $x_0 = x_1 = x_2$ — корень квадратного уравнения (1).

Если $D > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ обращается в нуль в двух точках $x = x_1$ и $x = x_2$ и в этих точках меняет знак. Действительно, пусть для определенности $x_1 < x_2$; тогда

$$(x-x_1)(x-x_2) > 0, \text{ если } x < x_1,$$
$$(x-x_1)(x-x_2) < 0, \text{ если } x_1 < x < x_2,$$
$$(x-x_1)(x-x_2) > 0, \text{ если } x > x_2.$$

Следовательно, если $D > 0$, то на интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$

$$ax^2+bx+c > 0, \text{ если } a > 0,$$

$$ax^2+bx+c < 0, \text{ если } a < 0,$$

а на интервале $(x_1; x_2)$

$$ax^2+bx+c < 0, \text{ если } a > 0,$$

$$ax^2+bx+c > 0, \text{ если } a < 0.$$

Если $D=0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ обращается в нуль только в одной точке $x=x_0$ и не меняет знака:

$$ax^2+bx+c > 0, \text{ если } a > 0,$$

$$ax^2+bx+c < 0, \text{ если } a < 0,$$

для любого $x \neq x_0$.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение (1) не имеет действительных корней, т. е. квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ не обращается в нуль и не меняет знака, а именно: $ax^2+bx+c > 0$, если $a > 0$, и $ax^2+bx+c < 0$, если $a < 0$, для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $x^2-5x-6 > 0$; б) $x^2-5x-6 < 0$;

в) $x^2-5x-6 \geqslant 0$; г) $x^2-5x-6 \leqslant 0$.

$\triangle$ а) Квадратное уравнение $x^2-5x-6=0$ имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=6$. Следовательно,

$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6),$$

поэтому $x^2-5x-6 > 0$, если $x < -1$ или $x > 6$.

б) $x^2-5x-6 < 0$, если $-1 < x < 6$.

в) Чтобы решить неравенство $x^2-5x-6 \geqslant 0$, нужно к решениям неравенства а) присоединить еще числа -1 и 6, которые также являются решениями данного неравенства. Следовательно, $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 6$.

г) Из б) и в) следует, что $-1 \leqslant x \leqslant 6$. ▲

Пример 2. Найти интервалы знакопостоянства квадратичной функции $y=-2x^2-7x+4$.

$\triangle$ Уравнение $-2x^2-7x+4=0$ имеет два корня: $x_1=-4$, $x_2=0{,}5$. Следовательно, $y=-2(x+4)(x-0{,}5)$, и поэтому, если $x < -4$, то $y < 0$; если $-4 < x < 0{,}5$, то $y > 0$; если $x > 0{,}5$, то $y < 0$.

Ответ: положительна на интервале $(-4; 0{,}5)$ и отрицательна вне отрезка $[-4; 0{,}5]$. ▲

Пример 3. Решить неравенства:

а) $-x^2+6x-9 > 0$; б) $-x^2+6x-9 < 0$;

в) $-x^2+6x-9 \geqslant 0$; г) $-x^2+6x-9 \leqslant 0$.

$\triangle$ Очевидно, что $-x^2+6x-9=-(x-3)^2$. Следовательно, $-x^2+6x-9 < 0$ для любого $x \neq 3$ и $-x^2+6x-9=0$ для $x=3$.

Ответ: а) решений нет; б) любое $x \neq 3$; в) $x=3$; г) любое $x \in \boldsymbol{R}$. ▲

Пример 4. Решить неравенства:

а) $x^2+6x+10 > 0$; б) $x^2+6x+10 < 0$;

в) $x^2+6x+10 \geqslant 0$; г) $x^2+6x+10 \leqslant 0$.

$\triangle$ Квадратное уравнение $x^2+6x+10=0$ решений не имеет. Следовательно, квадратичная функция $y=x^2+6x+10$ нигде не обращается в нуль и не меняет знака. Так как $y > 10$ при $x=0$, то $x^2+6x+10 > 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: а) любое $x \in \boldsymbol{R}$; б) решений нет; в) любое $x \in \boldsymbol{R}$; г) решений нет. ▲

4. Рациональные неравенства. Неравенства вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} < \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

где $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ — некоторые многочлены, называются *рациональными*. Простейшими примерами рациональных неравенств являются линейные и квадратные неравенства.

Методы решения рациональных неравенств проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{x+1}{x-2} > 1$.

$\triangle$ Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x+1}{x-2}-1 > 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{3}{x-2} > 0,$$

и поэтому любое число $x > 2$ является решением и других решений нет.

Ответ: $x > 2$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x+1}{2-x} > 1$.

△ Очевидно, что

$$\frac{x+1}{2-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2-x} > 0.$$

Отношение двух чисел положительно тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель одного знака. Поэтому из последнего неравенства следует, что если $2x-1>0$, то и $2-x>0$, т. е. x должно удовлетворять двум неравенствам $x>\frac{1}{2}$ и $x<2$. Следовательно, любое число из интервала $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ является решением.

Если же $2x-1<0$, то и $2-x<0$, т. е. x должно удовлетворять неравенствам $x<\frac{1}{2}$ и $x>2$. Очевидно, что таких чисел нет.

Ответ: $\frac{1}{2}<x<2$. ▲

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^2+x-1}{x-1}<2x+1$.

$$\triangle\ \frac{x^2+x-1}{x-1}<2x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x-1}-2x-1<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{x-1}<0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x-1)>0.$$

Решая последнее неравенство *методом интервалов* (рис. 12), получим $0<x<1$, $x>2$. ▲

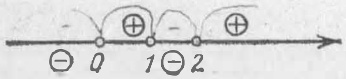


Рис. 12

5. Системы неравенств. Число a называется *решением системы неравенств с одним неизвестным*, если оно является решением каждого неравенства системы.

Например, число 1 является решением системы двух неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-1>0, \\ x+2>0, \end{cases}$$

а число -2 не является решением этой системы, так как оно не является решением второго неравенства, хотя и является решением первого неравенства.

Решить систему неравенств — значит найти множество всех решений системы.

Две системы неравенств называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Приемы решений систем неравенств рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x<x+2, \\ x+1<\frac{1}{2}x+2. \end{cases}$$

△ Данная система равносильна системе $\begin{cases} x<1, \\ x<2. \end{cases}$

Ответ: $x<1$. ▲

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+1>x+2, \\ x-1>2x. \end{cases}$$

△ Данная система неравенств равносильна системе $\begin{cases} x>1, \\ -1>x, \end{cases}$ так как каждое неравенство системы заменено равносильным неравенством. Полученная система не имеет решений, следовательно, и данная не имеет решений. ▲

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0, \\ x-x^2+2\geqslant 0. \end{cases}$$

△ Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)\geqslant 0, \\ -(x+1)(x-2)\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы методом интервалов, получим (рис. 13) $x\leqslant 1$ или $x\geqslant 2$.

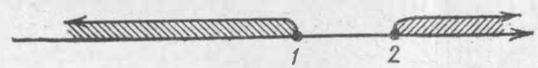


Рис. 13

Рис. 14

Решая второе неравенство системы, получим (рис. 14) $-1\leqslant x\leqslant 2$.

Объединяя найденные числовые промежутки, получим $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $x = 2$. ▲

Пример 4. Изобразить на координатной плоскости xOy множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x + 3, \\ y \leqslant -x + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

△ На координатной плоскости xOy множество всех решений неравенства $y \geqslant x + 3$ изображается в виде множества точек полуплоскости, лежащих выше (над) прямой $y = x + 3$ и на этой прямой (рис. 15).

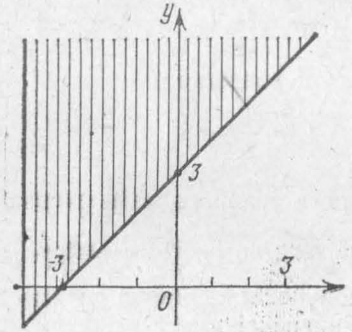


Рис. 15

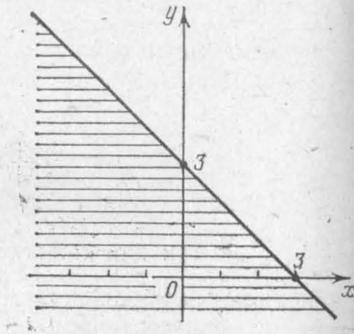


Рис. 16

Аналогично, множество решений неравенства $y \leqslant -x + 3$ изображается в виде множества точек полуплоскости, лежащих ниже (под) прямой $y = -x + 3$ и на этой прямой (рис. 16).

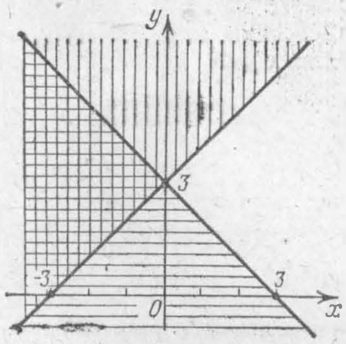


Рис. 17

Ясно, что системе неравенств (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые принадлежат пересечению множеств точек, задаваемых каждым из неравенств системы (на рис. 17 искомое множество покрыто двойной штриховкой). ▲

Пример 5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2y - 3x + 5 < 0, \\ 3y + 4x - 1 > 0. \end{cases}$$

△ 1) Выражаем y из каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} 2y < 3x - 5, \\ 3y > -4x + 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, \\ y > -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

2) Строим прямые $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ и $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

3) Первому неравенству системы будут удовлетворять координаты всех точек полуплоскости, лежащих ниже

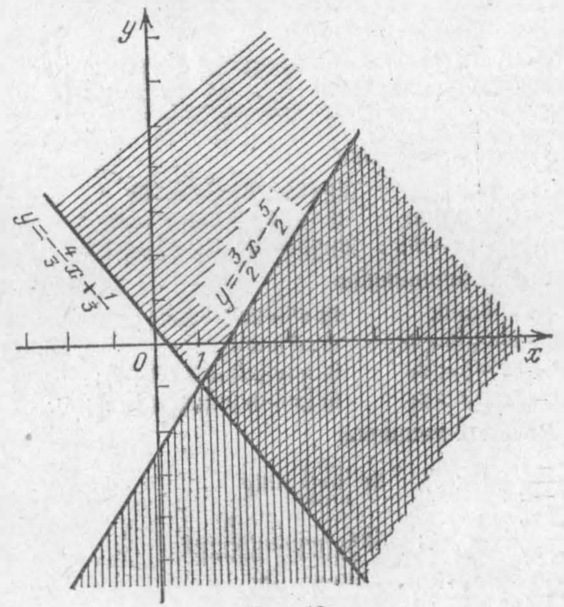


Рис. 18

прямой $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$; второму неравенству системы будут удовлетворять координаты всех точек плоскости, лежащих выше прямой $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

4) Данной системе неравенств удовлетворяют координаты тех и только тех точек плоскости, которые явля-

ются общими для первого и второго из указанных множеств точек (на рис. 18 искомое множество точек покрыто двойной штриховкой). ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется решением неравенства с одним неизвестным?
2. Какие два неравенства называются равносильными?
3. В каком случае одно неравенство является следствием другого?
4. Какое неравенство называется линейным?
5. Какое неравенство называется квадратным?
6. Приведите пример квадратного неравенства, которое не имеет решений.
7. Дайте определение рационального неравенства.

Упражнения

3.33. Решите неравенства:

1) $5(x-1)-x(7-x) < x^2$; 2) $(x-3)^2 < x(x+2)+3$;
3) $\frac{3-2x}{5}+8 > \frac{5x+2}{2}-x$; 4) $5-\frac{x}{3} < \frac{7}{2}-\frac{4x+1}{8}$.

3.34. Решите неравенства:

1) $x+1 < |x|$; 2) $|3x-9| > 4x-5$;
3) $|3x-6| < x+2$; 4) $-3|x+20| < -20$;
5) $|x+3| > |x-2|$; 6) $|3x-2|-5 < |x+1|$.

3.35. Решите неравенства:

1) $x^2+x-6 \geqslant 0$; 2) $x^2-2x+3 \geqslant 0$;
3) $3x^2-19x+6 < 0$; 4) $x^2+9 < 6x$;
5) $2x^2+3x-5 \leqslant 0$; 6) $x(x+5) \leqslant 2(x^2+2)$;
7) $6x^2-7x+2 > 0$; 8) $(x+4)(x+6) < 6(x+6)$.

3.36. Решите неравенства:

1) $\frac{2x-1}{2x-3}+1 < 0$; 2) $\frac{x+1}{x+2} > 3$;
3) $\frac{1-3y}{3-8y}+\frac{1}{2} > 0$; 4) $\frac{2}{2x-1} > \frac{3}{3x-4}$;
5) $\frac{z-1}{4z+5} < \frac{z-3}{4z-3}$; 6) $\frac{5-y}{y-6} < \frac{2}{3}$.

3.37. Решите системы неравенств:

1) $\begin{cases} x+2 > 2x+3, \\ 2x+3 > 3x+5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-5 > 23-4x, \\ 7x+3 < 9x-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(2x-3) < 5x-\frac{3}{4}, \\ 8x-5 < \frac{15x-8}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < x+3, \\ \frac{3x+8}{4} > 2x+4. \end{cases}$

3.38. Изобразите на координатной плоскости xOy множество решений каждой из следующих систем неравенств:

1) $\begin{cases} x+y \leqslant 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y \leqslant 1, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant -\frac{2}{3}x+4, \\ y \geqslant \frac{2}{3}x+4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 6, \\ -3 \leqslant y \leqslant 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+y-2 \geqslant 0, \\ x-y+1 \leqslant 0, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ y-1 \geqslant 0, \\ x+y-3 \geqslant 0, \\ -6x-7y+42 \geqslant 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x-y+2 \geqslant 0, \\ x-y \geqslant -2, \\ x \leqslant 1, \\ 2x-y-3 \geqslant 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+y-2 > 0, \\ x-2y+2 < 0. \end{cases}$

§ 15. Понятие о задачах линейного программирования

Начнем с рассмотрения одной простой задачи о перевозке хлеба.

П р и м е р. Для снабжения трех районов города хлебом имеются два хлебозавода. Первый район ежедневно потребляет хлеба 26 т, второй — 14 т, третий — 10 т. Хлебозавод № 1 выпекает ежедневно 30 т хлеба, а хлебозавод № 2 — 20 т. Стоимость в рублях доставки одной тонны хлеба с каждого хлебозавода каждому району приведена в таблице

Хлебозавод	Район 1	Район 2	Район 3
№ 1	3	4	6
№ 2	3	5	2

Требуется составить наиболее экономный план (программу) перевозки хлеба.

△ Обозначим через x число тонн хлеба, которое будет перевозиться с хлебозавода № 1 в первый район, а через y — число тонн хлеба, которое будет перевозиться с этого хлебозавода во второй район. Тогда в третий район с хлебозавода № 1 будет перевозиться $30-x-y$ тонн. Так как первый район ежедневно потребляет 26 тонн хлеба, то $26-x$ тонн нужно доставлять с хлебозавода № 2. Аналогично с хлебозавода № 2 нужно доставлять второму району $14-y$, а третьему району $x+y-20$ — тонн хлеба.

Следовательно, ежедневный план перевозок хлеба можно представить таблицей

Хлебозавод	Район		
	1	2	3
№ 1	x	y	$30-x-y$
№ 2	$26-x$	$14-y$	$x+y-20$

Легко видеть, что стоимость S всей перевозки равна сумме попарных произведений чисел из первой таблицы на соответствующие числа второй таблицы:

$$S=3x+4y+6(30-x-y)+3(26-x)+$$
$$+5(14-y)+2(x+y-20),$$

т. е.

$$S=288-4x-5y. \qquad (1)$$

Так как количество хлеба, привозимого в данный район города, не может быть отрицательным, то все числа второй таблицы должны быть неотрицательными:

$$\left\{\begin{aligned} x&\geqslant 0,\\ y&\geqslant 0,\\ 30-x-y&\geqslant 0,\\ 26-x&\geqslant 0,\\ 14-y&\geqslant 0,\\ x+y-20&\geqslant 0.\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Стоимость S можно рассматривать как функцию точки M, координаты которой удовлетворяют неравенствам (2). Множество всех таких точек является многоугольником $ABCDE$ (рис. 19). Функцию S называют *целевой функцией*.

Покажем, что целевая функция S свое наименьшее значение принимает в одной из вершин многоугольника $ABCDE$.

Пусть функция S принимает значение c в некоторой точке M многоугольника $ABCDE$. Очевидно, что это же

значение она принимает во всех точках прямой l, заданной уравнением

$$288-4x-5y=c. \qquad (3)$$

В частности, стоимость S равна c в точках пересечения прямой l с границей многоугольника $ABCDE$.

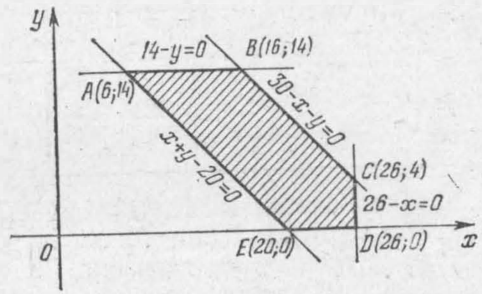


Рис. 19

Очевидно, что если при некотором значении c прямая (3) проходит через внутренние точки многоугольника $ABCDE$, то и любая прямая, заданная уравнением

$$288-4x-5y=c-\delta,$$

при достаточно малом $\delta>0$ также проходит через внутренние точки многоугольника $ABCDE$. Поэтому такое значение функции S не может быть минимальным, и, следовательно, наименьшее значение она принимает на прямых, заданных уравнением вида (3), которые пересекаются только с границей многоугольника $ABCDE$.

Легко видеть, что любая прямая, которая пересекается только с границей многоугольника, обязательно проходит через его вершину. Отсюда следует, что целевая функция S принимает наименьшее значение в одной из вершин многоугольника $ABCDE$.

Найдем теперь значения S в каждой из вершин многоугольника $ABCDE$:

$$\left\{\begin{aligned} S(A)&=288-4\cdot 6-5\cdot 14=194,\\ S(B)&=288-4\cdot 16-5\cdot 14=154,\\ S(C)&=288-4\cdot 26-5\cdot 4=164,\\ S(D)&=288-4\cdot 26=184,\\ S(E)&=288-4\cdot 20=208.\end{aligned}\right.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение S равно 154 и принимается в точке B, т. е. при $x=16$, $y=14$.

Таким образом, самый экономный план (самая экономная программа) перевозки хлеба задается следующей таблицей:

Хлебозавод	Район		
	1	2	3
№ 1	16	14	0
№ 2	10	0	10

Заметим, что наибольшее значение стоимости S равно 208 и принимается в точке $E(20;\ 0)$. Соответствующий план перевозок является самым дорогим. По сравнению с ним самый экономный способ перевозки дает экономию в 54 рубля ежедневно, а за год около 20 тысяч рублей. ▲

Мы рассмотрели простейшую транспортную задачу. Многие вопросы экономики и планирования сводятся к подобного рода задачам.

Заметим, что в рассмотренной задаче целевая функция является линейной функцией своих переменных и ограничения задаются линейными неравенствами. Поэтому такие задачи называются *задачами линейного программирования*. Таким образом, задачи линейного программирования — это задачи нахождения оптимальных производственных программ в случае, когда целевая функция и ограничения линейные.

Упражнения

3.39. Найдите наибольшее значение функции $s=2(x+y)$ при условии, что x и y удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{cases} 3x-2y+6\geqslant 0, \\ 3x+\ y-3\geqslant 0, \\ 3-x\geqslant 0. \end{cases}$$

3.40. Найдите наименьшее значение функции $s=12x+4y$ при условии, что x и y удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{cases} x+y-2\geqslant 0, \\ y-x\geqslant 0, \\ 2x-1\geqslant 0, \\ 4-y\geqslant 0. \end{cases}$$

3.41. Два хлебозавода выпекают хлеб для трех населенных пунктов, хлебозавод № 1 выпекает ежедневно 40 т хлеба, хлебозавод № 2 — 20 т. Населенный пункт № 1 ежедневно потребляет 30 т хлеба, населенный пункт № 2 — 20 т, населенный пункт № 3 — 10 т. Стоимость доставки одной тонны хлеба в рублях с каждого хлебозавода в каждый населенный пункт задана таблицей

Хлебозавод	Населенный пункт		
	1	2	3
№ 1	3	4	5
№ 2	3	5	2

Требуется составить наиболее экономный план доставки хлеба.

Глава 4

ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ

§ 16. Функции

1. **Понятие функции.** Одним из важнейших математических понятий является понятие функции. В этом понятии наиболее ярко воплощается материалистическая природа математики, ее тесная связь с различными явлениями реальной действительности.

Вы уже знакомы с некоторыми конкретными видами функций: линейной, квадратичной, рациональной и т. д. Дадим определение функции в общем виде.

Пусть заданы множества A и B. Через x обозначим произвольный элемент множества A, а через y — произвольный элемент множества B. Тогда, если каждому элементу x по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент y, единственный для каждого x, то говорят, что *на множестве A задана функция f со значениями из множества B*, и пишут $f: A \to B$ или $y=f(x)$, $x \in A$. Кроме f употребляют и другие обозначения: F, g, φ и т. п.

Например, запись

$$y=x^2, \quad x \in [-1;\ 1], \tag{1}$$

обозначает функцию, заданную на числовом отрезке $[-1;\ 1]$, которая каждому числу x из этого отрезка ставит в соответствие число y, равное x^2.

Пусть задана функция $y=f(x)$, $x \in A$. Тогда x называется *аргументом* или *независимой переменной*, а y — *значением функции* или *зависимой переменной*. Множество A называется *областью определения функции*, а множество всех y, поставленных в соответствие хотя бы одному из x, — *множеством значений функции*. Область определения функции называют также *областью значений аргумента* или *областью изменения* независимой переменной.

Для функции $y=x^2$, $x \in [-1;\ 1]$, областью определения является отрезок $[-1;\ 1]$, а множеством значений — отрезок $[0;\ 1]$. Для функции

$$y=x^2, \quad x \in [0;\ 1],$$

областью определения является отрезок $[0;\ 1]$, а множеством значений — отрезок $[0;\ 1]$. Для функции

$$y=x^2, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

областью определения является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, а множеством значений — множество всех неотрицательных действительных чисел.

2. **Функции и отображения.** Если A и B — множества точек плоскости или пространства, то функция $f: A \to B$ называется *отображением* f множества A *в* множество B. Причем, если множество значений отображения f совпадает с множеством B, то говорят, что f отображает множество A *на* множество B. В общем случае в множестве B может быть элемент, который не соответствует ни одному элементу из множества A.

Если при отображении $f: A \to B$ каждый элемент из множества B поставлен в соответствие единственному элементу из множества A, то это отображение называется *взаимно однозначным* или *обратимым*.

3. **Числовые функции.** Мы будем в основном изучать *числовые* функции, т. е. функции, у которых область определения и множество значений являются числовыми множествами.

Примерами числовых функций являются функции

$$y=2x+3, \quad x \in \boldsymbol{R}; \qquad y=\sqrt{x-1}, \quad x \geqslant 1;$$

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad x \neq 1.$$

Другим примером числовой функции является функция $y=[x]$, $x \in \boldsymbol{R}$. Здесь $[x]$ — *целая часть числа* x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1]=1$, $[1,5]=1$, $[-0,2]=-1$, $\left[\frac{1}{3}\right]=0$.

4. **Способы задания функции.** Напомним основные способы задания функции.

На практике широко применяется табличный способ. Метеорологи, например, составляют таблицы выпавших осадков в различных пунктах («точках») земного шара. Эти различные «точки» земного шара выступают в данном случае в роли «значений аргумента», а количество осадков — в роли «значений функции».

Числовые функции чаще всего задаются так называемым **аналитическим способом**. Этот способ удобен, когда множество A является бесконечным. При таком способе указывается область определения функции (множество A) и формулируется закон (задается формула), по которому каждому $x \in A$ сопоставляется соответствующий ему $y \in \boldsymbol{R}$.

Например, функция $y = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, задана аналитически.

Заметим, что одной и той же формулой можно задавать различные функции в зависимости от указания множества A. Так, функции

$$y = x^2, \ x \in \boldsymbol{R}, \quad \text{и} \quad y = x^2, \ x \in \boldsymbol{N},$$

— различные функции; первая — квадратичная функция, вторая — числовая последовательность вида 1; 4; 9; 16; ... ; n^2; ...

Если числовая функция, заданная формулой $y = f(x)$, определена на множестве тех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл, то при задании функции формулой область ее определения обычно не указывается.

Например, если числовая функция $f(x) = x^2 - 5x + 6$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, то она обычно задается формулой без указания области ее определения; если функция $f(x) = x^2 - 5x + 6$ задана на некотором подмножестве множества $\boldsymbol{R}$, то это специально оговаривается.

Если функция задана формулой $y = \frac{4}{x-3}$ без указания области ее определения, то предполагается, что область определения этой функции — множество всех действительных чисел, кроме числа 3 $\left(\text{при } x = 3 \text{ выражение } \frac{4}{x-3} \text{ не имеет смысла}\right)$.

Иногда числовые функции на различных числовых промежутках задаются различными формулами.

Такова, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in \boldsymbol{R}, \quad x < 0, \\ x^2, & x \in \boldsymbol{R}, \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

В случаях, когда формулу, по которой каждому $x \in A$ сопоставляется $y \in \boldsymbol{R}$, записать трудно (или невозможно), пользуются **словесным описанием** способа, задающего функцию. Таково, например, задание функции $[x]$, рассмотренной в предыдущем пункте.

На практике часто пользуются **геометрическим** (или **графическим**) **способом** задания функции. Этот способ удобен, когда аналитически задать функцию довольно трудно. Кроме того, при изучении многих процессов используются приборы, которые не могут «говорить» на языке формул. Однако с помощью этих приборов получаются кривые, по которым можно судить о свойствах изучаемой функции.

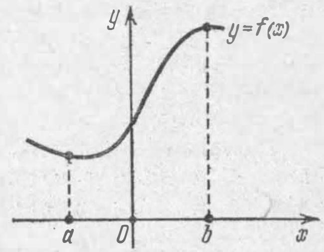


Рис. 20

В медицине, например, широко используются электрокардиографы. С помощью этих приборов можно получить электрокардиограммы — кривые, которые отражают изменение электрических импульсов, возникающих в мышце сердца. Такие кривые помогают врачу делать правильные заключения о работе сердца человека.

Геометрический способ задания функции используется в математике также для иллюстрации тех или иных свойств функции.

Множество всех точек плоскости с координатами x и $y = f(x)$ называют *графиком* функции $f(x)$, $x \in A$.

Задать функцию геометрически — значит задать (изобразить) ее график (рис. 20).

5. Функция, обратная к данной функции. Вы уже знакомились с понятием функции, обратной к данной. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть, например, задана функция

$$y = x^2, \quad x \in [0; 2].$$

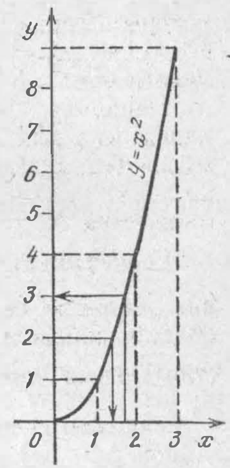


Рис. 21

Она определена на отрезке [0; 2] и принимает любое значение из отрезка [0; 4] (рис. 21). Как и полагается функции, она каждому $x \in [0; 2]$ ставит в соответствие единственное $y = x^2 \in [0; 4]$. Кроме того, эта функция обладает еще таким свойством: каждое $y \in [0; 4]$ поставлено в соответствие единственному $x = \sqrt{y} \in [0; 2]$. Такие функции называются *обратимыми*.

Функция $y=f(x)$, $x\in A$, называется *обратимой*, если каждое значение y из множества значений функции поставлено в соответствие единственному $x\in A$.

Пусть B — множество значений функции $y=f(x)$, $x\in A$, и пусть эта функция $f\colon A\to B$ — обратимая. Тогда на множестве B определена функция $f^{-1}\colon B\to A$, которая каждому $y\in B$ ставит в соответствие $x\in A$, для которого $f(x)=y$.

По определению, из

$$y=f(x),\quad x\in A,$$

следует

$$x=f^{-1}(y),\quad x\in B,$$

где B — множество значений функции f.

Функция $f^{-1}\colon B\to A$ называется *обратной функцией* к функции $f\colon A\to B$.

Очевидно, функция $f^{-1}\colon B\to A$ имеет обратную. Именно, обратной к f^{-1} будет функция f. Поэтому функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*.

Пример 1. Доказать, что функция

$$y=2x-1,\quad x\in[2;\ 5],$$

— обратимая, и найти обратную функцию.

$\triangle$ Уравнение $y=2x-1$ при любом y однозначно решается относительно x:

$$x=\frac{y+1}{2}.$$

Следовательно, данная функция — обратимая.

Полученная формула, выражающая x через y, задает обратную функцию. Чтобы определить эту функцию полностью, найдем ее область задания.

Обратная функция определена на множестве значений данной функции. Из условий следует, что этим множеством является отрезок $[3;\ 9]$.

Следовательно, функция

$$x=\frac{y+1}{2},\quad y\in[3;\ 9],$$

является обратной к данной.

В полученной записи обратной функции независимая переменная обозначается через y, а зависимая — через x. Иногда бывает удобным, чтобы у обратной функции зависимая и независимая переменные обозначились так же, как и у данной функции. Тогда, заменив обозначения x

на y и y на x, получим функцию

$$y=\frac{x+1}{2},\quad x\in[3;\ 9],$$

обратную к данной. $\blacktriangle$

Переобозначение переменных, которое было произведено в конце решения примера 1, удобно в тех случаях, когда требуется изобразить графики взаимно обратных функций в одной системе координат.

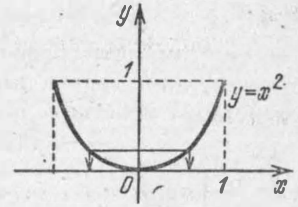


Рис. 22

Отметим, что графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ всегда симметричны относительно прямой $y=x$.

Пример 2. Является ли обратимой функция $y=x^2$, $x\in[-1;\ 1]$?

$\triangle$ Эта функция не является обратимой, так как, например, значение $y=\frac{1}{4}$ получается при двух значениях $x\in[-1;\ 1]$: $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$ (рис. 22). $\blacktriangle$

6. Четные и нечетные функции. Функция f с областью определения A называется *четной*, если для любого x из множества A выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Примерами четных функций являются функции

$$f(x)=x^2+2,\quad f(x)=|x|+1,$$
$$f(x)=-|x|,\quad f(x)=2^x+2^{-x},$$

определенные на всей числовой прямой, функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, определенная на отрезке $[-1;\ 1]$, и функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$, определенная для всех $x\neq 0$.

Отметим, что график четной функции симметричен относительно оси ординат (например, рис. 23). Это свойство четной функции можно использовать при построении ее графика. Именно, можно построить ее график для $x\geqslant 0$ и отразить получившуюся кривую симметрично относительно оси ординат.

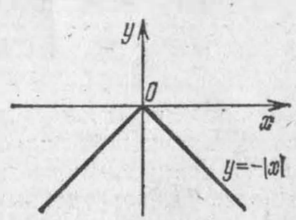


Рис. 23

Функция f с областью определения A называется *нечетной*, если для любого x из множества A выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

Примерами нечетных функций являются функции

$$f(x)=x^3,\quad f(x)=x\cdot|x|,\quad f(x)=2^x-2^{-x},$$

определенные на всей числовой прямой, функция $f(x)=$ $=x\sqrt{1-x^2}$, определенная для $x\in[-1;\ 1]$, и функция $f(x)=\frac{1}{x}$, определенная для всех $x\neq 0$.

Заметим, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (например, рис. 24). Этим свойством нечетной функции можно пользоваться при построении ее графика, а именно, построить график функции для $x\geqslant 0$ и отразить его симметрично относительно начала координат.

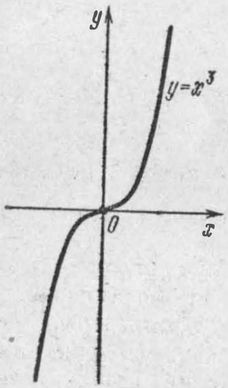


Рис. 24

Числовое множество A назовем *симметричным относительно начала координат*, если этому множеству вместе с числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$.

Примерами таких множеств являются любой интервал вида $(-a;\ a)$, множество $\{-4;\ -2\}\cup\{2;\ 4\}$, множество Q рациональных чисел и т. п.

В силу определения, для того чтобы функция $y=f(x)$, $x\in A$, была четной или нечетной, необходимо, чтобы x и $-x$ принадлежали множеству A, т. е. область определения A этой функции была множеством, симметричным относительно начала координат. Последнее условие удобно использовать при решении вопроса о четности и нечетности функций. Например, функция $f(x)=\sqrt{x}$ не является ни четной, ни нечетной, так как она определена на множестве $(0;\ +\infty)$, которое не является симметричным относительно начала координат. Ясно также, что указанное выше условие не является достаточным. В этом легко убедиться, рассмотрев, например, функцию $f(x)=x+1$, определенную на всей числовой прямой. Она не является ни четной, ни нечетной. Вместе с тем область определения этой функции является множеством, симметричным относительно начала координат.

7. Периодические функции. Функция f с областью определения A называется *периодической*, если существует число $l\neq 0$ такое, что для любого x из множества

A выполняется равенство

$$f(x-l)=f(x)=f(x+l).$$

В этом случае число l называется *периодом* функции f.

Если число l является периодом функции f, то очевидно, что ее периодами будут также числа nl, где n — любое целое число, кроме 0.

Пример. Исследовать на периодичность функцию $f(x)=x-[x]$.

△ Эта функция называется *дробной частью* числа x. Вычислим несколько ее значений:

$$f(2)=2-2=0;$$
$$f(5{,}32)=5{,}32-5=0{,}32;$$
$$f(0{,}32)=0{,}32-0=0{,}32;$$
$$f(-3{,}21)=-3{,}21-(-4)=-3{,}21+4=0{,}79;$$
$$f(-0{,}21)=0{,}21-(-1)=-0{,}21+1=0{,}79.$$

При прибавлении к x любого целого числа a получим

$$f(x+a)=(x+a)-[(x+a)]=(x+a)-[x]-a=x-[x]=f(x).$$

Это означает, что данная функция периодическая и ее периодом является любое целое число, кроме нуля. ▲

Часто используется *наименьший положительный период* функции f (если говорят просто о периоде функции, то под этим обычно понимают наименьший положительный период, если он существует).

Можно доказать, что если l_0 — наименьший положительный период функции f, то любой ее период выражается формулой $l=$ $=nl_0$, где n — целое, не равное нулю число.

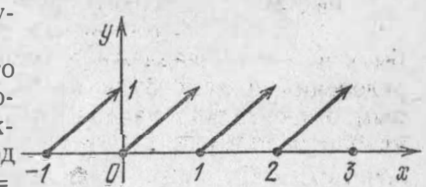


Рис. 25

Ясно, что в предыдущем примере наименьший положительный период равен 1. Из определения периодической функции следует, что график периодической функции будет «повторять» себя через промежуток длины l_0, равной наименьшему положительному периоду. Поэтому, если функция $y=f(x)$ имеет наименьший положительный период, равный l_0, то достаточно построить ее график на любом промежутке вида $a\leqslant x<a+l_0$. Смещая построенный график вдоль оси абсцисс на отрезки длины l_0, получим график функции $y=f(x)$.

Например, достаточно построить график функции $f(x)=x-[x]$ на промежутке $0\leqslant x<1$ (ее период равен 1), а затем, перемещая его вдоль оси абсцисс, получить график этой функции (рис. 25).

8. **Монотонные функции.** Числовая функция f называется *строго возрастающей*, если для любых x_1 и x_2 из области определения f таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Например, линейная функция $f(x)=ax+b$ является строго возрастающей на $\boldsymbol{R}$, если $a>0$.

Действительно, если $x_1<x_2$, то

$$f(x_2)-f(x_1)=a(x_2-x_1)>0.$$

Числовая функция f называется *возрастающей*, если для любых x_1 и x_2 из области определения f таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. Например, функция $f(x)=[x]$ является возрастающей на $\boldsymbol{R}$ (рис. 26).

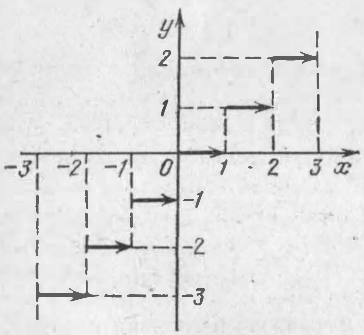


Рис. 26

Числовая функция f называется *строго убывающей*, если для любых x_1 и x_2 из области определения f таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Очевидно, линейная функция $f(x)=ax+b$, где $a<0$, является строго убывающей на $\boldsymbol{R}$. Рассмотрим для примера еще функцию $f(x)=-x^3$, $x\in\boldsymbol{R}$, и покажем, что она строго убывающая.

Пусть $x_1<x_2$; тогда

$$f(x_2)-f(x_1)=-x_2^3+x_1^3=-(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2).$$

А так как $x_2^2+x_1x_2+x_1^2>0$ для любых x_1 и $x_2\neq x_1$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Числовая функция f называется *убывающей*, если для любых x_1 и x_2 из области определения f таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. Например, функция $f(x)=-[x]$ является убывающей на $\boldsymbol{R}$ (рис. 27). На рис. 28 изображен график еще одной убывающей функции.

Легко видеть, что если функция $f(x)$ — строго возрастающая (возрастающая), то функция $-f(x)$ — строго убывающая (убывающая), и наоборот.

будем использовать также следующее обозначение: a_n, $n\in\boldsymbol{N}$. Число a_1 есть *первый член последовательности*, a_2 — *второй*, ..., a_n — *n-й (общий) член последовательности*, а числа 1, 2, ..., n — номера соответствующих членов последовательности.

Напомним основные способы задания бесконечной последовательности.

1. Последовательность может быть задана с помощью формулы, указывающей, как по номеру n члена последовательности вычислить его значение a_n.

Пример 1. Рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2},\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

Используя эту формулу, можно вычислить любой член последовательности. Например,

$$a_1=\frac{1+(-1)^1}{2}=0,\quad a_2=\frac{1+(-1)^2}{2}=1,\quad a_3=\frac{1+(-1)^3}{2}=0$$

и т. д. Следовательно, данная последовательность имеет вид

$$0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \ldots$$

Условимся вместо слов «рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой $a_n=f(n)$, $n\in\boldsymbol{N}$», говорить короче: «рассмотрим последовательность $a_n=f(n)$, $n\in\boldsymbol{N}$», или еще короче: «пусть $a_n=f(n)$».

Пример 2. Пусть $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

Эта последовательность имеет вид

$$1;\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{27};\ -\frac{1}{64};\ \ldots$$

Пример 3. Пусть $a_n=3$, $n\in\boldsymbol{N}$. Тогда последовательность имеет вид 3; 3; 3; ... Каждый член данной последовательности принимает значение, равное трем.

Последовательность, у которой все члены принимают равные между собой значения, называется *постоянной последовательностью*.

2. Укажем еще один способ задания последовательности — рекуррентный (индуктивный) способ. Этот способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило (обычно это формула), позво[illegible]щее вычислить общий член последовательности[illegible]

предыдущие, и задается несколько начальных членов последовательности.

Формула, позволяющая вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, носит название *рекуррентного соотношения*. Примером рекуррентного соотношения может служить формула

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \qquad (1)$$

Отметим, что заданием только рекуррентного соотношения последовательность полностью не определяется. Все дело в том, что первые члены последовательности нельзя вычислить по рекуррентному соотношению. Например, формула (1) не имеет смысла при $n=1$ и $n=2$, так как члены a_0 и a_{-1} с номерами 0 и -1 не существуют, поэтому значения a_1 и a_2 надо задавать дополнительно. Такие значения a_1 и a_2 для данной последовательности называются *начальными*. Далее, начиная с a_3, рекуррентное соотношение и начальные члены a_1 и a_2 позволяют вычислить любой член последовательности.

Пусть, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Тогда

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2\cdot 0 - 1 = -1,$$
$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2\cdot(-1) - 0 = -2,$$
$$a_5 = 2a_4 - a_3 = 2\cdot(-2) - (-1) = -3$$

и т. д. Таким образом, рассмотренная выше последовательность будет задана, если указаны формула $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ и первые два члена последовательности $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$.

3. Последовательность может быть задана словесно, т. е. описанием ее членов. Например:

а) последовательность (a_n), где a_n — десятичное приближение $\sqrt{2}$ с избытком с точностью до n-го десятичного знака; вычисление показывает, что

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 1{,}5; \quad a_3 = 1{,}42; \quad a_4 = 1{,}415; \ \ldots;$$

б) последовательность (a_n), где a_n — n-е четное число; начало этой последовательности имеет вид 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...;

в) последовательность (a_n), где $a_n = 2$, если n — четное, и $a_n = 0$, если n — нечетное.

Заметим, что в последнем случае легко находится формула для общего члена: $a_n = 1 + (-1)^n$.

При изучении последовательностей удобно использовать их геометрическое изображение. Для этого используются в основном следующие два способа:

1) Так как последовательность (a_n) есть функция, заданная на $\boldsymbol{N}$, то ее можно изобразить как график этой функции, т. е. на плоскости рассмотреть множество точек M_n, $n \in \boldsymbol{N}$, с координатами $(n; a_n)$. На рис. 31 таким способом изображена последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

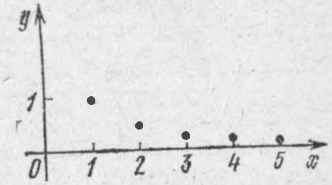


Рис. 31

2) Члены последовательности (a_n) можно изобразить точками $x = a_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, числовой оси.

Таким способом на рис. 32 изображена последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

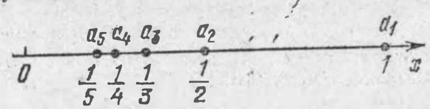


Рис. 32

На рис. 33, 34 изображена последовательность $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $n \in \boldsymbol{N}$, рассмотренная выше в примере 1.

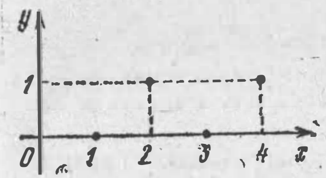


Рис. 33

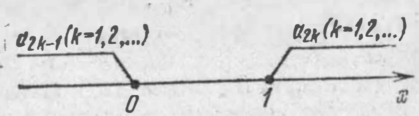


Рис. 34

2. **Монотонные последовательности.** К монотонным последовательностям относят строго убывающие, убывающие, строго возрастающие и возрастающие последовательности.

Последовательность (a_n) называется *строго убывающей*, если каждый предыдущий член больше последующего, т. е. если

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$$

Короче, последовательность (a_n) называется строго убывающей, если $a_{n+1} < a_n$ для всех n.

Например, последовательность

$$1;\ 1/2^2;\ 1/3^2;\ \ldots;\ 1/n^2;\ \ldots$$

строго убывающая, так как $1/(n+1)^2 < 1/n^2$ для всех n. На рис. 35, где члены последовательности изображены точками числовой оси, каждая точка, соответствующая последующему члену a_{n+1}, лежит левее точки, соответствующей предыдущему члену a_n.

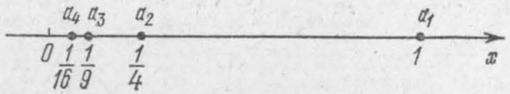


Рис. 35

Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если $a_{n+1} \leqslant a_n$ для всех n, или, другими словами, каждый предыдущий член не меньше последующего.

Например, последовательность $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \ldots$ является убывающей, так как предыдущий член не меньше последующего. Если члены последовательности изобразить точками числовой прямой, то каждая точка, соответствующая последующему члену a_{n+1}, будет лежать не правее точки, соответствующей предыдущему члену a_n (рис. 36).

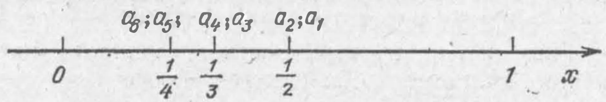


Рис. 36

Последовательность (a_n) называется *строго возрастающей*, если каждый последующий член больше предыдущего, т. е. если

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$$

Короче, последовательность (a_n) называется строго возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$ для всех n.

Последовательность $a_n = \frac{3n-1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$,— строго возрастающая, так как

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{n+1} - \frac{3n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

и, следовательно, $a_{n+1} > a_n$ для всех n. На рис. 37, где члены последовательности изображены точками числовой оси, каждая точка, которая соответствует последующему члену a_{n+1}, лежит правее точки, соответствующей предыдущему члену a_n.

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ для всех n, или, другими словами, если каждый последующий член не меньше предыдущего.

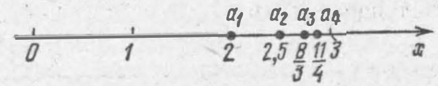


Рис. 37

Например, последовательность 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4;... есть возрастающая, так как каждый последующий член не меньше предыдущего. Если члены последовательности изобразить точками числовой прямой, то каждая точка,

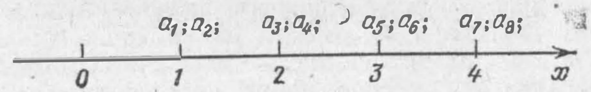


Рис. 38

соответствующая последующему члену a_{n+1}, будет лежать не левее точки, соответствующей предыдущему члену a_n (рис. 38).

Очевидно, что не всякая последовательность является монотонной. Например, последовательности

$$1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ 6;\ \ldots \text{ и } 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots$$

не являются монотонными.

3. Ограниченные и неограниченные последовательности. Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если существуют числа M и m такие, что для любого n имеет место неравенство $m \leqslant a_n \leqslant M$.

В противном случае она называется *неограниченной*. Имеются неограниченные последовательности трех видов.

1. Последовательность такова, что для нее существует число m и не существует числа M. В этом случае про неограниченную последовательность говорят, что она является *ограниченной снизу* и *неограниченной сверху*.

2. Для последовательности существует число M и не существует числа m. В этом случае о неограниченной последовательности говорят, что она является *ограниченной сверху* и *неограниченной снизу*.

3. Последовательность такова, что для нее не существуют оба числа m и M. Тогда говорят, что такая последовательность является *неограниченной и сверху, и снизу*.

Например, последовательности $a_n=\frac{1}{n^2}$ и $a_n=(-1)^n$ — ограниченные, так как $0\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant 1$ и $-1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ для любого $n\in N$. Последовательности $a_n=n$, $a_n=-2n$, $a_n=(-1)^n n$ являются неограниченными. Действительно, последовательность $a_n=n$ будет ограниченной снизу, так как $1\leqslant n$ для любого $n\in N$, и неограниченной сверху, так как не существует числа M такого, что $n\leqslant M$ для любого $n\in N$.

Аналогично доказывается, что последовательность $a_n=-2n$ является ограниченной сверху и неограниченной снизу, а последовательность $a_n=(-1)^n n$ является неограниченной и сверху, и снизу.

Геометрически ограниченность последовательности (a_n) означает существование отрезка $[m;\ M]$, на котором помещены все члены этой последовательности. Одновременно заметим, что для неограниченной последовательности (a_n) такого отрезка $[m;\ M]$, которому принадлежат все члены a_n, не существует. Например, для ограниченной последовательности $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ число $m=0$ и число $M=1$, так как $0\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant 1$ для любого $n\in N$. Таким образом, все члены данной последовательности принадлежат отрезку $[0;\ 1]$. Для неограниченной последовательности $a_n=-2n$, $n\in N$, число M равно -2, а числа m не существует. В самом деле, всегда найдется член последовательности a_i такой, что $a_i=-2i<m$, т. е. не принадлежит отрезку $[m;\ M]$, где $m<-2$ — любое число. Для этого достаточно взять номер $i>\left[-\frac{m}{2}\right]$. Следовательно, не существует отрезка $[m;\ M]$, которому принадлежали бы все члены данной последовательности.

Заметим, что в случае *монотонной* последовательности нахождение числа m (или числа M) облегчается, так как для строго возрастающей (или возрастающей) последовательности $m=a_1$, ибо $a_1\leqslant a_n$, $n\in N$, а для строго убывающей (или убывающей) последовательности $M=a_1$, ибо $a_n\leqslant a_1$, $n\in N$. Поэтому для установления ограниченности строго возрастающей (или возрастающей) последовательности достаточно установить ограниченность сверху (т. е. найти число M), а для ограниченности строго убывающей (или убывающей) последовательности достаточно установить ограниченность снизу (т. е. найти число m).

Например, последовательность $a_n=1-\frac{1}{n}$, $n\in N$, — строго возрастающая, поэтому $m=a_1=0\leqslant a_n$ для любого $n\in N$. Так как $1-\frac{1}{n}<1$ для любого $n\in N$, то $M=1$. Следовательно, данная последовательность — ограниченная. Последовательность $a_n=1+\frac{1}{n}$, $n\in N$, — строго убывающая, поэтому $M=a_1=2\geqslant a_n$ для любого $n\in N$. Так как $1<1+\frac{1}{n}$ для любого $n\in N$, то $m=1$. Следовательно, данная последовательность — ограниченная.

И в заключение отметим, что последовательность (a_n) будет ограниченной тогда и только тогда, когда существует такое число B, что $|a_n|\leqslant B$ для любого n. Действительно, достаточно положить B равным наибольшему из чисел $|m|$ и $|M|$.

Например, для ограниченной последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ числа $m=1$ и $M=2$, поэтому $B=2$, т. е. $\left|1+\frac{1}{n}\right|\leqslant 2$ для любого $n\in N$.

Вопросы для контроля

1. Что называется последовательностью?
2. Какие способы задания последовательностей вы знаете?
3. Приведите пример задания последовательности с помощью формулы n-го члена.
4. Приведите пример рекуррентного задания последовательности.
5. Приведите пример словесного задания последовательности.
6. Какая последовательность называется возрастающей? В каком случае она называется строго возрастающей? Приведите примеры таких последовательностей.
7. Какая последовательность называется убывающей? Когда она называется строго убывающей? Приведите примеры таких последовательностей.
8. Приведите примеры немонотонных последовательностей.
9. Какая последовательность называется ограниченной? Приведите примеры монотонных ограниченных последовательностей.
10. Приведите примеры неограниченных последовательностей, в том числе неограниченных сверху и неограниченных снизу.

Упражнения

4.14. Выпишите первые шесть членов следующих последовательностей:

1) $a_n=\frac{n^3}{n+1}$; 2) $a_n=\frac{3n^2-1}{n^2+1}$; 3) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+4}$;

4) $a_n=\frac{n}{4^n}$; 5) $a_n=2^n+\frac{1}{3^n}$; 6) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

4.15. Является ли членом последовательности $a_n=n^2+2n+1$ число:

1) 289; 2) 361; 3) 1000; 4) 223?

4.16. Содержится ли среди членов последовательности $a_n=n^2-17n$ число: 15 9

1) -30; 2) -72; 3) -100?

Если содержится, то какой номер имеет этот член?

4.17. Найдите первые пять членов последовательности (a_n), если

1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+1$; 2) $a_1=7$, $a_{n+1}=a_n-3$;

3) $a_1=-5$, $a_{n+1}=2a_n$; 4) $a_1=\frac{1}{6}$, $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$;

5) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$; 6) $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

4.18. Выпишите первые четыре члена последовательностей, составленных из десятичных приближений с избытком и с недостатком для следующих иррациональных чисел:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{7}$.

4.19. Напишите формулу общего члена последовательности, первые пять членов которой совпадают со следующими:

1) $3\cdot 2$; $5\cdot 2^2$; $7\cdot 2^3$; $9\cdot 2^4$; $11\cdot 2^5$;

2) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{2^2}$; $\frac{3}{2^3}$; $\frac{4}{2^4}$; $\frac{5}{2^5}$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}$; $\frac{1}{4\cdot 5}$; $\frac{1}{5\cdot 6}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; $\left(\frac{4}{9}\right)^2$; $\left(\frac{5}{11}\right)^2$;

5) 1; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; $\frac{1}{4\sqrt{4}}$; $\frac{1}{5\sqrt{5}}$.

4.20. Изобразите геометрически (двумя способами) следующие последовательности, заданные общими членами:

1) $a_n=\frac{1}{n+1}$; 2) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$; 3) $a_n=\frac{n+1}{2n}$;

4) $a_n=\frac{1}{n^3}$; 5) $a_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$; 6) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$;

7) $a_n=\frac{3n+1}{n}$; 8) $a_n=\frac{1-5n}{n}$; 9) $a_n=2+\frac{1}{n}$; 10) $a_n=3-\frac{1}{n}$.

4.21. Установите, какие из следующих последовательностей являются монотонными, а какие немонотонными:

1) $a_n=\frac{2n-3}{n}$; 2) $a_n=\frac{n+4}{2n}$; 3) $a_n=(-1)^n n-6$;

4) $a_n=n^2-7n+6$; 5) $a_n=3n^2+5n+6$; 6) $a_n=\frac{4-n^2}{n^2}$;

7) $a_n=\frac{3n^2+2}{n^2}$; 8) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; 9) $a_n=\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1}$;

10) 1; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$; ... ;

11) 1; 1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; ...;

12) 3; $\frac{1}{2}$; 5; $\frac{1}{4}$; 7; $\frac{1}{6}$; ...

4.22. Установите, что последовательность (a_n), заданная рекуррентно:

$$a_{n+1}=\frac{2+a_n^2}{2a_n} \text{ и } a_1=3,$$

строго убывает.

4.23. Установите, что последовательность (a_n), заданная рекуррентно: $a_{n+1}=\frac{1+a_n^2}{a_n}$ и $a_1=2$, строго возрастает.

4.24. Какие из данных последовательностей ограничены и какие неограничены:

1) $a_n=\frac{1}{n}$; 2) $a_n=\frac{n}{n-1}$; 3) $a_n=(-1)^n n$;

4) $a_n=(-1)^n n^2$; 5) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; 6) $a_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$;

7) $a_n=\frac{2n}{3n+3}$; 8) $a_n=\frac{n-5}{n^2}$; 9) $a_n=2^n$;

10) $a_n=3^{-n}$; 11) $a_n=n^n$?

4.25. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=0 \text{ и } a_{n+1}=\frac{a_n+3}{4}.$$

Докажите, что она ограничена.

4.26. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=0,\ a_2=1 \text{ и } a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$$

Докажите, что она ограничена.

4.27. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=2 \text{ и } a_{n+1}=a_n+1.$$

Докажите, что она неограничена.

4.28. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=1 \text{ и } a_{n+1}=\frac{1+a_n^2}{a_n}.$$

Докажите, что она неограничена.

§ 18. Предел последовательности

1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности. Рассмотрим последовательность

$$a_n=\frac{3n-1}{n},\ n\in \mathbf{N}. \qquad (1)$$

Легко видеть, что значения членов этой последовательности по мере возрастания их номера n располагаются сколь угодно близко к числу 3. Поставим перед собой задачу — придать этому утверждению точную математическую формулировку. С этой целью сначала ответим на следующий вопрос.

Каким должно быть n, чтобы модуль разности a_n-3 был меньше 0,001?

Так как

$$|a_n-3|=\left|\frac{3n-1}{n}-3\right|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

то неравенство $|a_n-3|<0{,}001$ выполняется для любого $n>N_0=1000$.

Для произвольного положительного ε неравенство

$$|a_n-3|<\varepsilon \qquad (2)$$

равносильно неравенству $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Так как нас интересуют натуральные значения n, то имеем: неравенство (2) выполняется для любого $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$. В этом случае говорят, что предел последовательности (1) равен 3, и пишут

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=3.$$

Сформулируем теперь определение предела последовательности.

Определение 1. Число a называется *пределом последовательности* (a_n), если для каждого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что для любого $n>N$ выполняется неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

или

$$a_n\to a \text{ при } n\to\infty$$

и говорят: «Последовательность (a_n) имеет пределом число a» или «Последовательность (a_n) сходится к числу a».

Рассмотренный пример показывает, что выбор N зависит от числа ε, т. е. $N=N(\varepsilon)$.

Определение 2. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}.$$

Найти номера $N(\varepsilon)$ такие, что при $n>N$

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

для $\varepsilon=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

△ Согласно определению предела число $\frac{3}{2}$ будет пределом последовательности с общим членом $a_n=\frac{3n+1}{2n-1}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что выполняется неравенство

$$\left|a_n-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \text{ при } n>N. \qquad (3)$$

Так как

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2(2n-1)},$$

то неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{2{,}5}{2n-1}<\varepsilon,$$

которое справедливо для любого $n>\frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Таким образом,

$$\left|a_n-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon \text{ при } n>\frac{2{,}5+\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Из последнего следует, что в качестве номера $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$, т. е. $N=\left[\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$.

Итак, мы установили, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}.$$

Перейдем теперь к нахождению номера $N(\varepsilon)$ в зависимости от конкретно заданного ε. Пусть, например, $\varepsilon=0,1$; тогда

$$N=\left[\frac{2,5+0,1}{2\cdot 0,1}\right]=\left[\frac{2,6}{0,2}\right]=13,$$

т. е. $N(0,1)=13$.

Следовательно, неравенство $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|<0,1$ справедливо для всех $n>13$.

Используя формулу $N=\left[\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$, легко вычисляем значения N при $\varepsilon=0,01$; $0,001$: $N(0,01)=125$ и $N(0,001)=1250$.

В заключение отметим, что так как данная последовательность имеет предел, то эта последовательность — сходящаяся. ▲

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$.

△ Возьмем некоторое $\varepsilon>0$ и рассмотрим неравенство $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$. Так как $10^n\geqslant 1+9n$, то $\frac{1}{10^n}\leqslant\frac{1}{1+9n}$ и, следовательно, $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$, если $\frac{1}{9n}<\varepsilon$. Тогда, положив $N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$, получим

$$\left|\frac{1}{10^n}-0\right|<\varepsilon$$

для любого $n>N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$.

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$. ▲

Пример 3. Доказать, что последовательности (α_n) и (α_n') десятичных приближений числа α сходятся к этому числу:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n'=\alpha.$$

△ Как известно, для десятичных приближений действительного числа α имеют место неравенства

$$|\alpha_n-\alpha|\leqslant\frac{1}{10^n} \text{ и } |\alpha_n'-\alpha|\leqslant\frac{1}{10^n}.$$

В примере 2 было установлено, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$ такое, что $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ для любого $n>N$. Следовательно,

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon \text{ и } |\alpha_n'-\alpha|<\varepsilon$$

для любого $n>N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$.

Согласно определению предела это означает

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \text{ и } \lim_{n\to\infty}\alpha_n'=\alpha. \ ▲$$

2. Геометрический смысл сходимости последовательности. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$; тогда, согласно определению предела, для каждого $\varepsilon>0$ существует N такое, что

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ для всех } n>N.$$

Так как

$$(|a_n-a|<\varepsilon)\Leftrightarrow(-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon)\Leftrightarrow(a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon),$$

то все члены последовательности (a_n), сходящейся к числу a, с номерами $n>N$, т. е. члены a_{N+1}, a_{N+2} и т. д.,

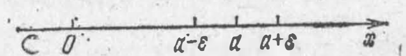


Рис. 39

лежат в интервале $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ (рис. 39). Напомним, что интервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью точки a*.

Итак, если последовательность (a_n) сходится к числу a, то геометрически это означает, что каждой ε-окрестности точки a принадлежат все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера, а вне ее может находиться лишь конечное число членов.

Например, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ имеет своим пределом нуль. Поэтому, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, интервал $(-\varepsilon; +\varepsilon)$ (окрестность точки нуль) будет содержать почти все члены последовательности, т. е. все члены последовательности, за исключением их конечного числа. В самом деле, решая неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, получим, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ для $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. все члены данной последовательности с номерами n, большими номера $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, находятся в ε-окрестности нуля, а вне ее находится лишь конечное число членов последовательности, номера которых не превосходят N.

Рассмотрим еще пример. Пусть дана последовательность

$$0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ \frac{1+(-1)^n}{2};\ \ldots$$

Эта последовательность предела не имеет. В самом деле, каково бы ни было число a, можно указать такую его ε-окрестность, что вне ее заведомо лежит бесконечное число членов данной последовательности. Действительно, так как расстояние между точками 0 и 1 равно 1, то в интервале вида $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, не содержится либо 0, либо 1, т. е. всякий раз вне указанной ε-окрестности точки a будет находиться бесконечное число членов данной последовательности. Следовательно, у любого числа a имеется ε-окрестность, вне которой находится бесконечное число членов данной последовательности, а это и означает, что данная последовательность предела не имеет, т. е. она расходящаяся.

3. Необходимое условие существования предела последовательности.

Теорема. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

□ Из определения предела следует: если последовательность (a_n) имеет своим пределом число a, то, например, для $\varepsilon = 1$ найдется номер N такой, что вне интервала $(a-1; a+1)$ могут оказаться лишь члены $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N, a-1, a+1$ найдем наименьшее и наибольшее и обозначим их соответственно через m и M. Очевидно, что $m \leqslant a_n \leqslant M$ для всех n, т. е. последовательность (a_n) ограничена. ■

Из доказанной теоремы следует, что ограниченность последовательности есть необходимое условие существования предела. Последним обстоятельством часто пользуются для установления отсутствия предела у последовательности. Например, последовательность $a_n = n(1+(-1)^n)$, $n \in N$, — неограниченная и поэтому предела не имеет.

4. Единственность предела последовательности.

Теорема. *Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

□ Доказательство будем проводить методом от противного. Допустим, что имеется последовательность (a_n), которая имеет два различных предела a и b. Пусть $a < b$. Тогда, положив $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, получим

$$a+\varepsilon < b-\varepsilon. \tag{1}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то, согласно определению предела, для $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ существует такое N_1, что для всех $n > N_1$ $|a_n - a| < \varepsilon$ и, в частности, $a_n < a+\varepsilon$. С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, то существует N_2 такое, что для всех $n > N_2$ $|a_n - b| < \varepsilon$ и, в частности, $b-\varepsilon < a_n$. Положив $N = \max\{N_1; N_2\}$ [1]), получим, что $b-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$ для $n > N$, но это противоречит неравенству (1). Следовательно, последовательность не может иметь двух различных пределов. ■

5. Бесконечно малые последовательности. Основные теоремы о бесконечно малых последовательностях. Доказательства теорем о пределах существенно облегчаются, если ввести понятие бесконечно малой последовательности.

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Например, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ является бесконечно малой, так как ее предел равен нулю. Последовательность $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ также бесконечно малая, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ (см. пример 2 из п. 1).

---

[1]) Здесь и везде в дальнейшем символом $\max\{c_1; c_2; \ldots; c_n\}$ будем обозначать наибольшее из чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Теорема 1. *Для того чтобы число a было пределом последовательности (a_n), необходимо и достаточно, чтобы a_n имело представление $a_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность.*

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ для всех } n > N. \qquad (1)$$

Положим $\alpha_n = a_n - a$, тогда

$$|\alpha_n| < \varepsilon \text{ для всех } n > N. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Таким образом, если число a — предел последовательности (a_n), то $a_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Аналогично доказывается и обратное утверждение, так как из (2) следует (1). ■

Например, последовательность $\left(\frac{3n}{n+1}\right)$ имеет предел, равный 3.

Действительно, $a_n = \frac{3n}{n+1} = \frac{3n+3-3}{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, то $\left(\frac{3}{n+1}\right)$ — бесконечно малая последовательность. Таким образом, в силу теоремы 1 предел рассматриваемой последовательности равен 3.

Теорема 2. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

□ Пусть (a_n) и (b_n) — две бесконечно малые последовательности. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N_1 такое, что

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } n > N_1, \qquad (3)$$

и найдется N_2 такое, что

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для всех } n > N_2. \qquad (4)$$

Положив $N = \max\{N_1; N_2\}$, получим, что для любого $n > N$ неравенства (3) и (4) имеют место одновременно. Поэтому для любого $n > N$ получим

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было взято произвольным, то тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$, т. е. последовательность $(a_n + b_n)$ — бесконечно малая. ■

Например, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ и $\left(\frac{2}{n+1}\right)$ — бесконечно малые последовательности. Их сумма $\left(\frac{3}{n+1}\right)$ — также бесконечно малая последовательность.

Аналогично доказывается, что сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 3. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

□ Пусть (b_n) — ограниченная последовательность и пусть

$$|b_n| \leqslant M \text{ для всех } n. \qquad (5)$$

Пусть, далее, (a_n) — бесконечно малая последовательность. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M+1} \text{ для всех } n > N. \qquad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot M < \varepsilon$$

для любого $n > N$. А это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0,$$

т. е. последовательность $(a_n b_n)$ — бесконечно малая. ■

Например, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ — бесконечно малая, а последовательность $\left(\frac{2n-1}{n}\right)$ — ограниченная. Их произведение $\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)$ — бесконечно малая последовательность, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0.$$

Заметим далее, что теорема 3 имеет место и для случая, когда ограниченная последовательность не имеет предела. Например, последовательность $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ — бесконечно малая, а $(-1)^n$ — ограниченная последовательность, не имеющая предела. Их произведение, последовательность $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$, $n \in N$, — бесконечно малая, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$.

Замечание. Так как бесконечно малая последовательность имеет предел, т. е. ограничена (см. п. 3), то из теоремы 3 следует, что *произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Например, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ и $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ — бесконечно малые последовательности. Их произведение, последовательность $\left(\frac{1}{6^n}\right)$ — бесконечно малая.

6. Теоремы о пределах последовательностей. При вычислении пределов часто приходится использовать теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного.

Теорема 1 (о пределе суммы). *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то последовательность (a_n+b_n) также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b;$$

тогда по теореме 1 из п. 5

$$a_n = a+\alpha_n, \text{ где } (\alpha_n) \text{ — бесконечно малая,}$$
$$b_n = b+\beta_n, \text{ где } (\beta_n) \text{ — бесконечно малая.}$$

Складывая эти равенства, получим

$$a_n+b_n = (a+b)+(\alpha_n+\beta_n).$$

Так как сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность, то $(\alpha_n+\beta_n)$ — бесконечно малая. Таким образом, согласно теореме 1 из п. 5 имеем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \ ■$$

Методом математической индукции можно доказать, что *предел суммы конечного числа последовательностей, имеющих пределы, существует и равен сумме пределов этих последовательностей.*

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то последовательность*

(a_nb_n) также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

□ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b;$$

тогда (см. теорему 1 из п. 5)

$$a_n = a+\alpha_n \quad \text{и} \quad b_n = b+\beta_n,$$

где (α_n) и (β_n) — бесконечно малые. Перемножив последние равенства, получим

$$a_nb_n = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n).$$

Из теорем 2 и 3 и замечания из п. 5 следует, что $(b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$ — бесконечно малая последовательность. Следовательно, согласно теореме 1 из п. 5

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n). \ ■$$

Методом математической индукции доказывается, что *предел произведения конечного числа сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов.*

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n.$$

□ Согласно теореме 2

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \lim_{n\to\infty} c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot\lim_{n\to\infty} a_n,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. ■

Следствие 2. *Если последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, то последовательность (a_n-b_n) также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□ Согласно теореме 1

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n+(-1)b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)b_n.$$

Далее, с учетом следствия 1 получим

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n. \ ■$$

Приведем без доказательства теорему о пределе частного.

Теорема 3. *Если последовательности* (a_n) *и* (b_n), *где* $b_n \neq 0$, *сходятся и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то последовательность* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *также сходится и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Рассмотрим примеры вычисления пределов с помощью теорем о пределах.

Пример 1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8(n^2-3n-4)}{3-n-4n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-3n-1}{4-5n-n^3}$.

△ а) Числитель и знаменатель представляют собой расходящиеся последовательности (так как они неограничены), поэтому непосредственно применять теорему о пределе частного нельзя. В этом случае поступим так: числитель и знаменатель разделим на n (от этого дробь не изменится), а затем применим доказанные теоремы о пределах последовательностей. Приведем подробную запись вычисления предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{3}{n}}{\frac{13}{n}-7} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n}-7\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{13}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 7} = \frac{8-0}{0-7} = -\frac{8}{7}.$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{8(n^2-3n-4)}{3-n-4n^2} = 8 \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}-4} = -2.$$

в) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-3n-1}{4-5n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{n^3}-\frac{5}{n^2}-1} = 0. \ ▲$$

При доказательстве некоторых теорем и решении задач удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Если между членами трех последовательностей* (a_n), (b_n) *и* (c_n) *выполняются неравенства* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, *причем пределы* (a_n) *и* (b_n) *существуют и равны между собой, то и предел* (c_n) *существует и равен общему пределу* (a_n) *и* (b_n).

□ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Тогда, согласно определению предела последовательности, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_1, что

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \ \text{ для всех } n > N_1,$$

и найдется такое N_2, что

$$a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon \ \text{ для всех } n > N_2.$$

Поэтому, если $n > N = \max\{N_1; N_2\}$, то

$$a-\varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a+\varepsilon$$

и, следовательно,

$$|c_n - a| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство (1). А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. ■

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$.

△ Так как

$$0 < \frac{1}{n}\sin n \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то, согласно доказанной теореме, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0$. ▲

7. Бесконечно большие последовательности. Связь между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.

Определение. Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой*, если для каждого положительного числа A найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > A$. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, т. е. последовательность (n) — бесконечно большая.

Теорема. *Если последовательность* (a_n), *где* $a_n \neq 0$,— *бесконечно большая, то последовательность* $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ — *бесконечно малая, и наоборот.*

□ Пусть (a_n) — бесконечно большая последовательность. Тогда, согласно определению, для каждого $A > 0$ найдется N такое, что

$$|a_n| > A \text{ для всех } n > N. \qquad (1)$$

Положив $\varepsilon = \frac{1}{A}$, из соотношения (1) получим

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon \text{ для всех } n > N.$$

Так как ε здесь может быть произвольным положительным числом, то это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$, т. е. последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ — бесконечно малая.

Пусть теперь последовательность (a_n) — бесконечно малая. Тогда, по определению, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$|a_n| < \varepsilon \text{ для всех } n > N. \qquad (2)$$

Положив $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, из соотношения (2) получим

$$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A \text{ для всех } n > N,$$

т. е. последовательность $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ — бесконечно большая. ■

Например, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ — бесконечно малая, а последовательность (n) — бесконечно большая.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, если $|q| > 1$.

△ Если $|q| > 1$, то $|q| = 1 + h$, где $h > 0$, и согласно неравенству Бернулли (см. § 8, п. 1, пример 2)

$$|q|^n = (1+h)^n \geqslant 1 + hn. \qquad (3)$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} (1 + hn) = \infty,$$

т. е. последовательность $(1 + hn)$ — бесконечно большая. Из неравенства (3) следует, что последовательность (q^n) тоже бесконечно большая, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

Пусть теперь $|q| < 1$. Если $q = 0$, то $q^n = 0$ для любого натурального n и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Если же $q \neq 0$, то $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$. По только что доказанному последовательность $\left(\frac{1}{q}\right)^n$, $n \in \boldsymbol{N}$,— бесконечно большая. В силу теоремы о связи между бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями последовательность q^n, $n \in \boldsymbol{N}$,— бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. ▲

8. Существование предела у монотонной ограниченной последовательности. Для установления существования предела последовательности широко используется следующий достаточный признак существования предела.

Теорема Вейерштрасса. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательства этой теоремы мы не приводим. Заметим, что в теореме Вейерштрасса сформулированы достаточные условия существования предела последовательности, но способ нахождения этого предела не указывается.

Пример. Используя теорему Вейерштрасса, доказать существование предела у последовательности с общим членом

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

△ Рассмотрим вспомогательную последовательность с общим членом

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Очевидно, что эта последовательность ограничена снизу, так как $b_n > 0$. Докажем, что она убывает:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^n} =$$

$$= \frac{(n^2)^{n+1}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Согласно неравенству Бернулли при $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

т. е.

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > \frac{n}{n-1}.$$

Таким образом, для любого $n \geqslant 2$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = 1.$$

Отсюда следует, что последовательность (b_n) убывает. Кроме того, она ограничена, так как $0 \leqslant b_n \leqslant b_1$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность (b_n) имеет предел.

Рассмотрим теперь предел последовательности (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует. Этот предел принято обозначать буквой e, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e играет большую роль в математике, естествознании и технике. Это число иррациональное, с точностью до 10^{-4} оно равно 2,7183. ▲

9. Понятие числового ряда. Для заданной числовой последовательности (a_n) выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (1)$$

называется *бесконечным числовым рядом.*

В этом случае a_n называется *n-м (общим) членом ряда.* Суммы $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, $S_3=a_1+a_2+a_3$ и т. д. называются *частичными суммами ряда* (1), сумма $S_n=a_1+ +a_2+\ldots+a_n$ называется *n-й частичной суммой.*

О п р е д е л е н и е. Если последовательность частичных сумм ряда сходится, то ряд называется *сходящимся*, а предел последовательности частичных сумм называется *суммой ряда.*

Если последовательность частичных сумм расходится, то ряд называется *расходящимся.*

П р и м е р 1. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$$

Последовательность частичных сумм этого ряда

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \ldots,\ S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0,$$

предела не имеет, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится.

П р и м е р 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Построим последовательность частичных сумм этого ряда:

$$S_1=a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Значит, данный ряд, согласно определению, сходится, и его сумма равна 1, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим бесконечную десятичную дробь $a_0,a_1a_2a_3\ldots$, с помощью которой представляется действительное число α. Эту дробь можно записать в следующем виде:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots, \qquad (2)$$

т. е. в виде некоторого числового ряда. Очевидно, частичные суммы этого ряда являются десятичными приближениями числа α с недостатком: $S_n=\alpha_{n-1}$. Так как (см. пример 3 из п. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, то ряд (2) сходится и его сумма равна α.

10. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Рассмотрим геометрическую прогрессию, т. е. последовательность с общим членом $a_n=a_1q^{n-1}$.

Покажем, что ряд, составленный из членов этой последовательности,

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots \qquad (1)$$

при $|q|<1$ сходится, и найдем его сумму.

Как известно, при $q\neq 1$ для суммы n первых членов этой прогрессии, т. е. для n-й частичной суммы ряда (1), имеет место формула

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Поэтому, если $|q|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}\left(1-\lim_{n\to\infty}q^n\right)=\frac{a_1}{1-q},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

Итак, мы установили, что ряд (1) сходится при $|q|<1$.

Сумма ряда, составленного из членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии, называется суммой этой прогрессии. Таким образом, имеем следующую формулу для вычисления суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{a_1}{1-q}, \qquad (2)$$

где a_1 — первый член прогрессии, q ($|q|<1$) — знаменатель прогрессии.

Пример 1. Найти сумму ряда

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{27}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$$

△ Так как последовательность (a_n), где $a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, представляет собой геометрическую прогрессию, у которой $a_1=1$ и $q=-\frac{1}{3}$, то данный ряд сходится и его сумма вычисляется по формуле (2):

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}. \ ▲$$

Рассмотрим некоторую бесконечную периодическую десятичную дробь $\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_m(b_1b_2\ldots b_n)$. Покажем, что эта дробь изображает рациональное число. Воспользуемся формулой (2):

$$\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^{m+n}}+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^{m+2n}}+\ldots=$$
$$=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^{m+n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}}=$$
$$=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^m(10^n-1)}.$$

Итак,

$$\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_m(b_1b_2\ldots b_n)=$$
$$=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{b_1b_2\ldots b_n}{10^m(10^n-1)}. \qquad (3)$$

Пример 2. Представить периодические десятичные дроби 0,(28514) и 3,2(63) в виде обыкновенных дробей.

△ Используя формулу (3), получаем:

$$0,(285714)=0+\frac{285\,714}{10^6-1}=\frac{285\,714}{999\,999}=\frac{2\cdot 142\,857}{7\cdot 142\,857}=\frac{2}{7};$$

$$3,2(63)=3,2+\frac{63}{10\cdot(10^2-1)}=3+\frac{2}{10}+\frac{63}{10\cdot 99}=$$
$$=3+\frac{2}{10}+\frac{7}{110}=3\frac{29}{110}. \ ▲$$

Замечание. Положим в формуле (3) $n=1$ и $b_1=9$, тогда

$$\alpha=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{9}{10^m(10-1)}=a_0,a_1a_2\ldots a_m+\frac{1}{10^m}.$$

Таким образом, всякая десятичная периодическая дробь с периодом, равным девяти, равна конечной десятичной дроби, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с исходной дробью.

Например, $1(9)=2$. В самом деле,

$$1{,}(9)=1+\frac{9}{10-1}=1+1=2.$$

Аналогично имеем $6{,}3(9)=6{,}4$. Действительно,

$$6{,}3(9)=6{,}3+\frac{9}{10\,(10-1)}=6{,}3+\frac{1}{10}=6{,}4.$$

Вопросы для контроля

1. Что называется пределом последовательности?
2. В чем заключается геометрический смысл сходимости последовательности?
3. Сформулируйте необходимое условие существования предела последовательности.
4. Сколько пределов может иметь последовательность?
5. Какая последовательность называется бесконечно малой? Приведите пример.
6. Какая последовательность называется бесконечно большой? Приведите пример.
7. Сформулируйте теорему о пределе суммы двух последовательностей.
8. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух последовательностей.
9. Сформулируйте теорему о пределе отношения двух последовательностей.
10. Сформулируйте теорему о пределе монотонной последовательности (теорему Вейерштрасса).
11. Что называется бесконечным числовым рядом?
12. Какой ряд называется сходящимся?
13. Какой ряд называется расходящимся?
14. Приведите формулу для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Упражнения

4.29. Докажите, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-5}{n}=2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$.

4.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+6}{n+1}=5$. Каким должно быть n, чтобы число $\left|\frac{5n+6}{n+1}-5\right|$ было меньше 0,1 и 0,01?

4.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{2+n}=-1$. Каким должно быть n, чтобы число $\left|\frac{1-n}{2+n}+1\right|$ было меньше 0,1; 0,001?

4.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$. Каким должно быть n, чтобы число $\left|\frac{n^2-1}{2n^2+n}-\frac{1}{2}\right|$ было меньше 0,01; 0,001?

4.33. Установите, какие из последовательностей сходящиеся, а какие расходящиеся:

1) $a_n=\frac{4n+2}{2n}$; 2) $a_n=\frac{(-3)^n+2}{2}$; 3) $a_n=1+\frac{1}{n}$;

4) $a_n=2^n-1$; 5) $a_n=n^2-1$; 6) $a_n=\frac{(-1)^n}{n^3}$.

4.34. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n-8}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-n}{2n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{1-4n^2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+n-1}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

4.35. Какие из следующих утверждений верны:

1) если последовательность неограничена, то она не имеет предела;
2) если последовательность имеет предел, то она ограничена;
3) если последовательность немонотонна, то она не имеет предела;
4) если последовательность имеет предел, то она монотонна?

4.36. Выясните существование предела у следующих последовательностей:

1) $a_n=-\frac{1}{2n}$; 2) $a_n=\frac{4}{4n-3}$; 3) $a_n=\frac{n+1}{n^2+2}$;

4) $a_n=\frac{1}{3^n}$; 5) $a_n=\frac{1}{4^n}$; 6) $a_n=\frac{1}{n-(-1)^n}$;

7) $a_n=n-(-1)^{n+1}$; 8) $a_n=\frac{n!}{\ln n}$; 9) $a_n=\frac{1}{\sqrt{3n-1}}$;

10) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

4.37. Найдите сумму бесконечных геометрических прогрессий:

1) $2;\ \frac{4}{5};\ \frac{8}{25};\ \frac{16}{125};\ \ldots$; 2) $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{64};\ \ldots$;

3) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{18};\ -\frac{1}{54};\ \ldots$; 4) $-3;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{12};\ -\frac{1}{72};\ \ldots$

4.38. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (a_n), если известно, что

1) $a_2=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{5}$; 2) $a_3=-1$, $q=\frac{1}{7}$;

3) $a_2=-2$, $q=-\frac{1}{2}$; 4) $a_3=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{3}$.

4.39. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1) 0,82(63); 2) 13,83(54); 3) 8,4(57);

4) −10,3(621); 5) −32,2(54); 6) 3,09(04).

§ 19. Предел функции

1. Предел функции в точке. Сформулируем определение предела функции в точке, используя определение предела последовательности.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a. Число B называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a (или *при* x, *стремящемся к* a), если для любой последовательности значений аргумента $x_n \neq a$, $n \in \boldsymbol{N}$, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, сходится к числу B.

В этом случае пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=B \text{ или } f(x)\to B \text{ при } x\to a.$$

Короче, $B=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=B$ для любой последовательности $x_n\neq a$, $n\in\boldsymbol{N}$, сходящейся к a.

Пример 1. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$.

△ Рассмотрим любую последовательность значений аргумента $x_n\neq 0$, $n\in\boldsymbol{N}$, сходящуюся к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Тогда, так как $f(x)=x^2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. ▲

Пример 2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

△ Рассмотрим любую последовательность значений аргумента $x_n\neq 1$, $n\in\boldsymbol{N}$, сходящуюся к 1, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$. Тогда, так как $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(x_n+1)=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2. \ ▲$$

Если же для некоторой последовательности значений аргумента $x_n\neq a$, $n\in\boldsymbol{N}$, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений функций $f(x_n)$, $n\in\boldsymbol{N}$, предела не имеет, то функция $f(x)$ *не имеет предела в точке* a. Функция $f(x)$ *не имеет предела в точке* a и тогда, когда для двух различных последовательностей значений аргумента, сходящихся к a, последовательности соответствующих значений функции имеют разные пределы.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ не существует.

△ Рассмотрим последовательность, сходящуюся к нулю: $x_n'=\frac{1}{n}$, $n\in\boldsymbol{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$. Рассмотрим теперь другую последовательность, сходящуюся к нулю: $x_n''=-\frac{1}{n}$, $n\in\boldsymbol{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=-1$. Так как для двух различных последовательностей аргумента, сходящихся к нулю, последовательности соответствующих значений функции имеют разные пределы, то предел функции $f(x)=\frac{x}{|x|}$ в точке $x=0$ не существует. ▲

Отметим, что точка a, в которой рассматривается предел функции $f(x)$, может принадлежать области определения функции $f(x)$ (см. пример 1), а может и не принадлежать, так как при нахождении предела функции в точке не рассматривается значение функции в этой точке (см. пример 2).

Используя определение предела, найдем пределы некоторых функций.

Пример 4. Доказать, что предел постоянной функции равен этой же постоянной.

△ Пусть $f(x)=c$ для всех x из некоторого интервала, содержащего точку a. Тогда для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n\to a$ при $n\to\infty$, имеем $f(x_n)=c$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=c.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c. \blacktriangle$$

Пример 5. Доказать, что для $f(x) = x$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a.$$

$\triangle$ Для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Следовательно, согласно определению предела

$$\lim_{x\to a} x = a. \blacktriangle$$

2. Теорема о единственности предела.

Теорема. *Функция не может иметь двух разных пределов в точке.*

$\square$ Доказательство проведем методом от противного. Пусть в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет два различных предела A и B.

Согласно определению предела для любой последовательности значений аргумента x_n, $n \in \mathbf{N}$, такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = B.$$

В силу единственности предела последовательности отсюда получаем равенство $A = B$, которое противоречит предположению. Следовательно, функция не может иметь двух разных пределов в точке. $\blacksquare$

3. Теоремы о пределах. Основные теоремы о пределах функций (о пределе суммы, произведения и частного), облегчающие вычисление пределов, аналогичны соответствующим теоремам о пределах последовательностей.

Теорема 1. *Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 2. *Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют:*

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.*

$$\lim_{x\to a} (cf(x)) = c \lim_{x\to a} f(x),$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *существует.*

Теорема 3. *Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$$

если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

$\square$ Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0.$$

Согласно определению предела функции в точке для любой последовательности значений x_n аргумента такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B \neq 0.$$

Используя последние равенства и теорему о пределе частного для сходящихся последовательностей, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ т. е. } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \blacksquare$$

Теоремы 1 и 2 доказываются аналогично.

При изучении пределов функций иногда полезно использовать следующую «теорему о пределе промежуточной функции».

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = B, \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = B$$

и в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, выполняются неравенства

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

то

$$\lim_{x\to a} f(x) = B.$$

Эта теорема следует из соответствующей теоремы для последовательностей.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(9x^2-6x+8)$.

$\triangle$ Применив теоремы о пределах суммы, разности и произведения, получим

$$\lim_{x\to 1}(9x^2-6x+8) = \lim_{x\to 1}(9x^2) - \lim_{x\to 1}(6x) + \lim_{x\to 1} 8 =$$
$$= 9\lim_{x\to 1} x^2 - 6\lim_{x\to 1} x + 8 = 9\left(\lim_{x\to 1} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1} x\right) - 6\cdot 1 + 8 =$$
$$= 9\cdot 1\cdot 1 - 6\cdot 1 + 8 = 11. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

$\triangle$ Здесь предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться теоремой о пределе частного нельзя. Разложим числитель на множители:

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2).$$

Так как при нахождении предела в точке 2 рассматриваются лишь $x \neq 2$, то можно сократить на $x-2$, и поэтому

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-3) = 2-3 = -1. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

$\triangle$ Прежде всего покажем, что

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = 1.$$

Так как для любого $x > 0$

$$0 \leqslant |\sqrt{x}-1| = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} \leqslant |x-1|,$$

поэтому по теореме 4 имеем, что $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}-1) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = 1$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2. \blacktriangle$$

Замечание. В примерах 2 и 3 при $x=2$ и $x=1$ соответственно числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. В таких случаях говорят, что имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, а нахождение предела называют раскрытием неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

4. Односторонние пределы. В приведенном в п. 1 определении предела функции в точке аргумент x принимает значения x_n из окрестности точки a, кроме $x=a$, как слева, так и справа от a.

Если при нахождении предела рассматривать значения x только слева от a, то такой предел называется *левым* или *левосторонним* и обозначается

$$\lim_{x\to a-0} f(x);\quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \quad \text{или} \quad f(a-0),$$

а если рассматривать значения x только справа от точки a, то такой предел называется *правым* или *правосторонним* и обозначается

$$\lim_{x\to a+0} f(x);\quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{или} \quad f(a+0).$$

Левый и правый пределы называются *односторонними пределами*, а предел иногда называется *двусторонним*.

В случае, когда изучают односторонние пределы в точке $x=0$ (т. е. при $x\longrightarrow 0$), запись упрощают и пишут для левостороннего предела $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = f(-0)$, а для правостороннего — $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(+0)$.

Из определений следует, что если у $f(x)$ существует предел в точке x_0 и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \tag{1}$$

то односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ также существуют и

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = A. \tag{2}$$

Верно и обратное утверждение: если имеет место (2), то имеет место и (1).

Таким образом, *для установления существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 достаточно проверить выполнение следующих трех условий:* а) *существование* *левого предела*; б) *существование правого предела*; в) *совпадение односторонних пределов.*

Пример 1. Найти предел функции $f(x)=|x|$ при $x\to 0$.

$\triangle$ Данная функция определена на всей числовой прямой (рис. 40). Так как $f(x)=-x$ для x, удовлетворяющих неравенству $x<0$, то

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}(-x)=0.$$

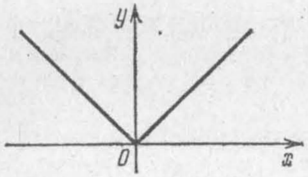


Рис. 40

Аналогично,

$$f(+0)=\lim_{x\to +0}x=0.$$

Таким образом, $f(+0)=f(-0)=0$.

Так как односторонние пределы в точке нуль совпали, то предел функции $f(x)$ в точке нуль существует и равен их общему значению, т. е.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}-x^3, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 2+x, & \text{если } x>1\end{cases}$$

не имеет предела в точке $x=1$.

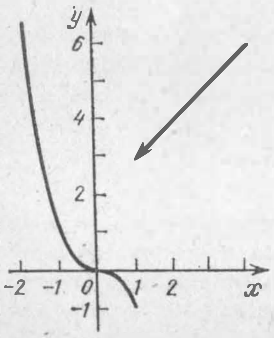


Рис. 41

$\triangle$ Данная функция (рис. 41) определена на всей числовой прямой. Вычислим односторонние пределы этой функции в точке $x=1$:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}(-x^3)=-1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(2+x)=3.$$

Итак, $f(1-0)\neq f(1+0)$. Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $x=1$. $\blacktriangle$

5. О пределе функции при $x\to\pm\infty$. Бесконечный предел функции. При изучении свойств функций приходится рассматривать предел функции в бесконечности, бесконечный предел функции в точке, а также бесконечный предел в бесконечности.

Остановимся подробнее на пределе функции в бесконечности, т. е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Число B называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=B$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

В этом случае пишут $\lim_{x\to+\infty}f(x)=B$. Аналогично, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=C$, если $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=C$ для любой (x_n) такой, что $\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3}=1$.

$\triangle$ Рассмотрим произвольную последовательность (x_n) такую, что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

Так как последовательность

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-1}{x_n^2+3}=1-\frac{4}{x_n^2+3},\quad n\in \boldsymbol{N},$$

сходится к 1, то, согласно определению,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3}=1.$$

Легко видеть, что и

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+3}=1. \ \blacktriangle$$

В ряде случаев поведение функции $f(x)$ разное при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Например, для функции $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}$, определенной для всех $x\neq 1$, имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=-3,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=3.$$

Поэтому при исследовании свойств функций рассматривают как $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, так и $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

Кроме рассмотренного случая конечного предела функции $f(x)$ при $x\to a$ (или $x\to\pm\infty$) используется понятие бесконечного предела. Например, функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$, определенная для всех $x\neq 0$ (рис. 42), принимает сколь угодно большие значения при $x\to 0$. В этом случае говорят, что функция в точке $x=0$ имеет своим пределом бесконечность, и пишут $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

Сформулируем определение бесконечного предела: если для любой последовательности значений аргумента (x_n) такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, то говорят, что *предел функции* $f(x)$ *в точке* a *есть бесконечность*, и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

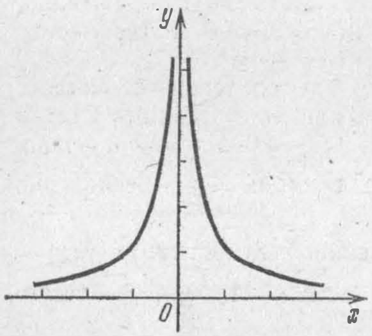


Рис. 42

Если в данном определении условие $x_n \neq a$ заменить на условие $x_n < a$ (или $x_n > a$), то получим определение бесконечного левого предела (соответственно правого предела) функции $f(x)$ в точке a.

Аналогично определяются бесконечные пределы в бесконечности, т. е. пределы вида $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}$.

$\triangle$ Разделим числитель и знаменатель на x^3, тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3}-\frac{1}{x}-1}=\frac{3}{-1}=-3. \blacktriangle$$

Замечание 1. В примерах 1 и 2 при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности. В таких случаях говорят, что имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, а нахождение предела называют раскрытием неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

$$\triangle \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0. \blacktriangle$$

Замечание 2. В примере 3 рассмотрена неопределенность вида $\infty-\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x\to a$. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x\to a$. Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые функции при $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Заметим, что, так же как и для последовательностей, имеет место следующее утверждение: если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$ для $x\neq a$ из некоторой окрестности точки a, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая при $x\to a$.

Верно и обратное утверждение: если функция $f(x)$ — бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая при $x\to a$.

Например, функция $f(x)=x$ является бесконечно малой при $x\to 0$ и бесконечно большой при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ и бесконечно большой при $x\to 0$ (аналогично при $x\to+0$ и при $x\to-0$).

Например, функция $f(x)=[x]$ (целая часть от x), как легко видеть, является бесконечно большой при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Функция $f(x)=x-[x]$ (дробная часть от x) является бесконечно малой при $x\to+0$ и не является бесконечно малой при $x\to-0$, так как легко показать, что

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} x=0, \quad \lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}(1+x)=1.$$

Вопросы для контроля

1. Что называется пределом функции?
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3. Сформулируйте теорему о пределе суммы (разности) двух функций.
4. Сформулируйте теорему о пределе произведения двух функций.
5. Сформулируйте теорему о пределе отношения двух функций.
6. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной функции.
7. Что называется правым (правосторонним) пределом функции в точке?

8. Что называется левым (левосторонним) пределом функции в точке?

9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке.

10. Что называется пределом функции при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$)?

11. Что называется бесконечным пределом функции?

12. Какая функция называется бесконечно большой при $x \to a$?

13. Какая функция называется бесконечно малой при $x \to a$?

Упражнения

4.40. Используя определение предела функции, докажите справедливость равенств:

1) $\lim\limits_{x\to 4} 2x=8$; 2) $\lim\limits_{x\to 1/2} (3-12x)=-3$; 3) $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2-2)=1$.

4.41. Найдите следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 4} (x^4-2x+5)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-11}{8x^2+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to +2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$; 8) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-6x-16}{x^2+x-2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

4.42. Выясните существование предела в точках -2; -1; 0; 1; 2 для следующих функций:

1) $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x\leqslant 0; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x>0, \\ x^2, & x\leqslant 0; \end{cases}$

3) $f(x)=[x]$; 4) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$;

5) $f(x)=x-[x]$; 6) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\geqslant 2, \\ x, & x<2. \end{cases}$

4.43. Найдите левый и правый пределы функции

$$\varphi(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{при } x\leqslant 1, \\ 2x-1 & \text{при } x>1 \end{cases}$$

в точке $x=1$.

4.44. Найдите левый и правый пределы функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-2}}}$$

в точке $x=2$.

4.45. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-3x}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-5x-6}{7x^2-8x-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-1)^3}{x^3-2x^2-3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

4.46. Найдите $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{12x^2+5}{4x^2+9}$.

4.47. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+2x+7}{x^2-3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-8}{3-x+10x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2}-x}{4x+11}$.

§ 20. Непрерывные функции

1. Понятие непрерывной функции. Впервые с непрерывными функциями вы встречались и широко использовали их свойства при построении графиков простейших функций, хотя сам термин «непрерывная функция» не употребляли, а тем более определение этого понятия вам не давалось. На первых этапах построение графиков простейших функций, например $y=ax+b$, $y=ax^2$ или $y=ax^3$, совершается по точкам. А именно, составляют таблицу значений функции, соответствующих определенным значениям аргумента, затем на плоскости, в которой задана система координат, строят точки, координаты которых занесены в таблицу; соединив отмеченные точки «сплошной линией», получают график функции. Это можно делать не всегда, а только в том случае, если функция непрерывная (тогда график ее есть линия сплошная).

Определение. Функция $f(x)$, $x\in(a;\,b)$, называется *непрерывной в точке* $x_0\in(a;\,b)$, если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Согласно данному определению непрерывность функции f в точке x_0 означает выполнимость следующих условий:

1) функция f должна быть определена в точке x_0;

2) у функции f должен существовать предел в точке x_0;

3) предел функции f в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке.

Например, функция $f(x)=x^2$ определена на всей числовой прямой, и

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

Так как $f(1)=1$, т. е. значение $f(x)=x^2$ в точке $x=1$ совпадает с пределом при $x\longrightarrow 1$, то, согласно определению, функция $f(x)=x^2$ непрерывна в точке $x=1$.

Если использовать левый и правый пределы функции, то можно определить левостороннюю и правостороннюю непрерывности функции, а именно: функция называется *непрерывной слева в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0),$$

и *непрерывной справа в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Например, функция $f(x)=x-[x]$ непрерывна всюду, за исключением целочисленных значений аргумента x, в которых она непрерывна справа (см. рис. 25).

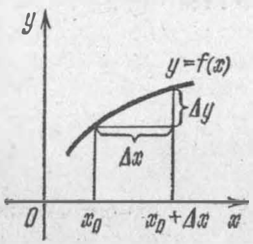


Рис. 43

Дадим другую формулировку определения непрерывности функции через приращения функции и аргумента.

Пусть задана функция $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, и пусть x_0 — некоторое значение аргумента из интервала $(a;\ b)$. Тогда, если $x\in(a;\ b)$ — другое фиксированное значение аргумента, то разность $x-x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx, т. е. $\Delta x=x-x_0$. В этих обозначениях $x=x_0+\Delta x$.

Разность

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

называется *приращением функции* f в точке x_0 и обозначается Δf или Δy (рис. 43).

Если функция f непрерывна в точке x_0, то, согласно определению,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$, а это значит, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$.

Из последнего соотношения следует, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции или, точнее, приращение функции f есть функция, бесконечно малая при $\Delta x\longrightarrow 0$.

Следовательно, можно дать определение непрерывности функции в точке в следующем виде: функция $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, называется *непрерывной в точке* $x_0\in(a;\ b)$, если ее приращение в этой точке есть функция, бесконечно малая при $\Delta x\longrightarrow 0$.

2. Примеры.

Пример 1. Исследовать на непрерывность в точке $x_0=0$ функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$ (читается «сигнум x» или «знак x»):

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1 \text{ для } x>0,\\ 0 \text{ для } x=0,\\ -1 \text{ для } x<0.\end{cases}$$

△ Из задания функции (рис. 44) видно, что

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}(-1)=-1,$$

$$f(+0)=\lim_{x\to +0} 1=1.$$

Таким образом, $f(-0)\neq f(+0)$, т. е. односторонние пределы существуют, но различны, поэтому функция

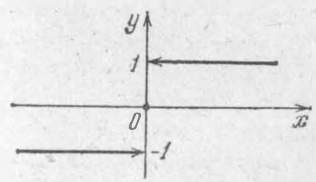


Рис. 44

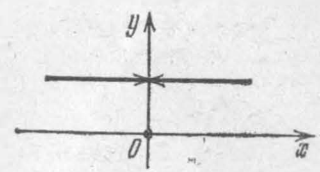


Рис. 45

$f(x)=\operatorname{sign} x$ не имеет предела и тем более не является непрерывной в точке $x_0=0$. ▲

Пример 2. Исследовать данную функцию $f(x)=|\operatorname{sign} x|$ на непрерывность в точке $x_0=0$ (рис. 45).

$\triangle$ Так как $f(x)=1$ для $x \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=1$.

Таким образом, предел функции в точке $x_0=0$ существует, но он не равен $f(0)$, так как $f(0)=0$, и поэтому функция $f(x)=|\operatorname{sign} x|$ не является непрерывной в точке $x_0=0$. ▲

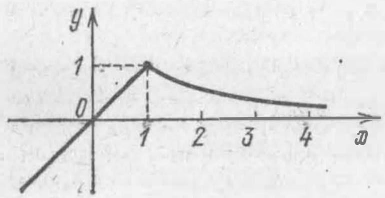


Рис. 46

Пример 3. Исследовать функцию

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{для } x \geqslant 1, \\ x & \text{для } x<1 \end{cases}$$

(рис. 46) на непрерывность в точке $x_0=1$.

$\triangle$ Так как

$$f(1-0)=\lim_{x \to 1-0} x=1, \quad f(1+0)=\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x}=1, \quad f(1)=1,$$

то в точке $x_0=1$ предел функции существует и равен значению функции, а это значит, что рассматриваемая функция непрерывна в точке $x_0=1$. ▲

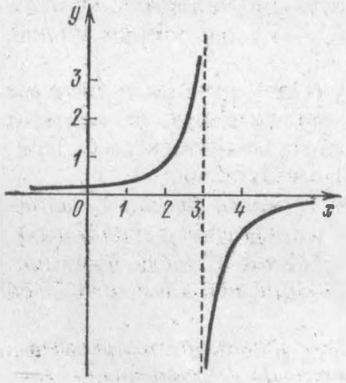


Рис. 47

Пример 4. Исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{3-x}$, $x \in R$, $x \neq 3$ (рис. 47), на непрерывность в точке $x=3$.

$\triangle$ Рассматриваемая функция не является непрерывной в точке $x_0=3$, так как она не определена при $x=3$. ▲

3. О непрерывности функции на множестве. Функция называется *непрерывной на интервале* $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке интервала. Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Отметим, что для непрерывности функции на отрезке $[a; b]$, как это видно из определения, не требуется непрерывности функции на концах отрезка. В точках a и b (концах отрезка $[a; b]$) требуется только односторонняя непрерывность функции.

Например, функция

$$f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$

является функцией, непрерывной на этом отрезке, так как она непрерывна в каждой точке интервала $(1; 2)$, непрерывна справа в точке $x=1$ и непрерывна слева в точке $x=2$.

4. Точки разрыва. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется *точкой непрерывности* функции $f(x)$. В противном случае, т. е. когда предел функции $f(x)$ в точке x_0 не существует или существует, но не равен $f(x_0)$, функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке x_0, а точка x_0 — *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Если $f(x)$ определена во всех точках интервала $(a; b)$, кроме точки $x_0 \in (a; b)$, то x_0 также называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Из сказанного следует, что в точке разрыва функция может быть определена (см. примеры 1, 2 п. 2) и не определена в такой точке, хотя определена в некоторой «проколотой» окрестности этой точки, например точки $x_0=3$ в рассмотренном выше примере 4 п. 2.

В первом случае точка разрыва принадлежит области определения функции (примеры 1, 2), во втором случае не принадлежит ей (пример 4).

5. Свойства непрерывных функций. В этом пункте мы будем рассматривать функции, определенные на одном и том же множестве, например некотором промежутке. Приведем без доказательства некоторые теоремы.

Теорема 1. *Сумма конечного числа функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в этой точке.*

Теорема 2. *Произведение конечного числа функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в этой точке.*

Теорема 3. *Отношение двух функций, непрерывных в точке a, есть функция, непрерывная в этой точке, если значение функции, стоящей в знаменателе, отлично от нуля в точке a.*

Теоремы 1, 2, 3 следуют из соответствующих теорем для пределов функций.

Пример 1. Доказать, что функция $f(x)=x^n$, где $n \in N$, непрерывна на всей числовой прямой.

$\triangle$ Действительно, так как

$$f(x)=x^n=\underbrace{x \ x \ \ldots \ x}_{n \text{ сомножителей}},$$

то из теоремы 2, учитывая непрерывность x, получим, что функция непрерывна всюду на числовой прямой. ▲

Очевидно, что и функция $f(x)=cx^n$ (c — константа) непрерывна на всей числовой прямой.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2 и примера 1.

Теорема 4. *Многочлен есть функция, непрерывная на всей числовой прямой.*

□ Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Функции $f_0(x)=a_0x^n$, $f_1(x)=a_1x^{n-1}$, ..., $f_{n-1}(x)=a_{n-1}x$, $f_n(x)=a_n$ представляют собой функции, непрерывные всюду на числовой прямой (см. пример 2). Следовательно, рассматривая многочлен как сумму этих функций, из теоремы 1 получим, что многочлен есть функция, непрерывная на $\boldsymbol{R}$. ■

Теорема 5. *Любая рациональная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.*

□ Рациональная функция имеет вид

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Так как $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны на всей числовой прямой и в области определения функции $f(x)$ многочлен $Q(x)$ отличен от нуля, то $f(x)$ непрерывна в своей области определения (см. теорему 3). ■

Например, функция $f(x)=\frac{3-x}{4x+7}$ непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x=-\frac{7}{4}$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль. Функция же

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

непрерывна всюду на $\boldsymbol{R}$, так как знаменатель нигде не обращается в нуль.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают целым рядом важных свойств. Приведем без доказательства некоторые из теорем, характеризующие эти свойства.

Теорема 6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a;\ b]$ найдется хотя бы одна точка, в которой данная функция обращается в нуль.*

Это свойство имеет простой геометрический смысл: если непрерывная функция на концах отрезка принимает значения разных знаков, то кривая, являющаяся графиком этой функции, должна пересечь ось Ox. Таким образом, функция, удовлетворяющая условиям теоремы 6, пересекает ось Ox, т. е. существует хотя бы одна точка, в которой данная функция обращается в нуль.

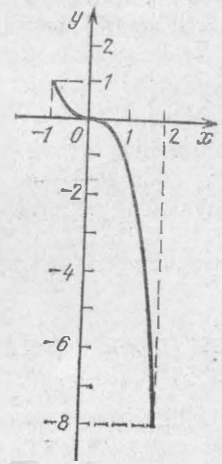


Рис. 48

Например, так как функция $f(x)=-x^3$, $x\in[-1;\ 2]$, — непрерывная, $f(-1)=+1>0$ и $f(2)=-8<0$, то согласно теореме 6 существует точка, в которой функция обращается в нуль. Действительно, в точке $x=0$ функция $f(x)=-x^3$ обращается в нуль, т. е. $f(0)=0$ (рис. 48).

Приведем пример непрерывной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 6, у которой имеется несколько точек, в которых она принимает значения, равные нулю. Функция $f(x)=x^3-2x^2$, $x\in[-1;\ 3]$, — непрерывная, $f(-1)=-3<0$ и $f(3)=9>0$. Легко видеть, что в точках $x=0$ и $x=2$ данная функция обращается в нуль, т. е. $f(0)=0$ и $f(2)=0$ (рис. 49).

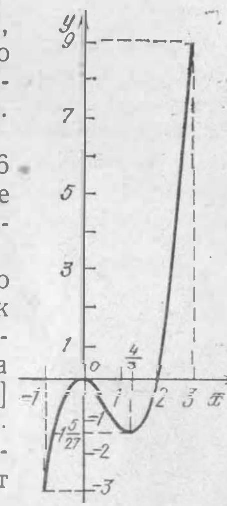


Рис. 49

Заметим, что с помощью теоремы 6 можно устанавливать существование нулей функции и находить их приближенное значение.

Например, рассмотрим непрерывную функцию $f(x)=x^4-x-1$, $x\in[1;\ 2]$. Так как $f(1)=-1<0$ и $f(2)=13>0$, то согласно теореме 6 функция имеет нуль на отрезке $[1;\ 2]$. Разделим отрезок $[1;\ 2]$ пополам, найдем его середину $x_1=1{,}5$. Так как $f(1{,}5)\approx2{,}56>0$, то, следовательно, на отрезке $[1;\ 1{,}5]$ функция имеет нуль. Разделим отрезок $[1;\ 1{,}5]$ пополам, найдем его середину $x_2=1{,}25$; так как $f(1{,}25)\approx0{,}19>0$, то на отрезке $[1;\ 1{,}25]$ функция имеет нуль. Разделим отрезок $[1;\ 1{,}25]$ пополам, найдем его середину $x_3=1{,}125$. Так как $f(1{,}125)\approx-0{,}525<0$, то на отрезке $[1{,}125;\ 1{,}25]$ функция имеет нуль. Таким образом, нами установлено существование нуля у данной функции и найдено его приближенное значение с точностью до 0,025.

Теорема 7. *Если функция непрерывна на отрезке, то среди значений, принимаемых ею на этом отрезке, существуют наименьшее и наибольшее значения. При этом она принимает все значения между наибольшим и наименьшим значениями.*

Например, непрерывная функция $f(x)=x^3-2x^2$, $x\in[-1;\ 3]$, принимает наибольшее значение в точке $x=3$, т. е. $f(3)=9$, наименьшее значение — в точке $x=-1$, т. е. $f(-1)=-3$, а множество значений функции есть отрезок $[-3;\ 9]$ (см. рис. 49).

Вопросы для контроля

1. Какая функция называется непрерывной?
2. Какая точка называется точкой непрерывности функции?
3. Какая точка называется точкой разрыва функции?
4. Сформулируйте теорему о сумме конечного числа непрерывных функций.
5. Сформулируйте теорему о произведении конечного числа непрерывных функций.
6. Сформулируйте теорему об отношении двух непрерывных функций.
7. Всякий ли многочлен является непрерывной функцией?
8. Любая ли рациональная функция является непрерывной функцией?

Упражнения

4.48. Исследуйте на непрерывность следующие функции:

1) $f(x)=2x+1$ в точках $x=1$, $x=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ в точках $x=0$, $x=-1$ и $x=1$;

3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & x>0,\end{cases}$ в точках $x=-1$, $x=0$ и $x=2$;

4) $f(x)=x-|x|$ в точках $x=-4$, $x=0$ и $x=3$;

5) $f(x)=\begin{cases}2|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$ в точках $x=-1$, $x=0$ и $x=3$.

4.49. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(4x-x^3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-5)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-8}{4x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+x^2}{2x^2+x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$; 10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

11) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 16) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$.

7

Глава 5

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 21. Степени и логарифмы

1. Арифметические корни. Из школьного курса алгебры известно, что *арифметическим квадратным корнем из числа* a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначается $\sqrt{a}$.

Например,

$$\sqrt{49}=7;\quad \sqrt{0}=0;\quad \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3};$$

$$\sqrt{0,0625}=0,25;\quad \sqrt{b^2}=|b|.$$

Основными свойствами квадратных корней являются следующие:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\quad a\geqslant 0,\ b>0.$$

Часто при решении задач приходится находить корни уравнения

$$x^n=a,\ \text{где } n\in \boldsymbol{N}.$$

Например, решить уравнение

$$x^4=16.$$

Это уравнение имеет два действительных корня: $x_1=2$ и $x_2=-2$. Корень $x_1=2$ — положительное число. Это число называют арифметическим корнем четвертой степени из числа 16 и обозначают $\sqrt[4]{16}$. Отрицательный корень $x_2=-2$ уравнения $x^4=16$ обозначается $-\sqrt[4]{16}$.

Введем понятие корня n-й степени из неотрицательного числа. Корнем n-й степени из неотрицательного числа называется неотрицательное число, n-я степень которого равна данному числу.

Этот корень называют арифметическим корнем n-й степени ($n\geqslant 2$) из неотрицательного числа ($a\geqslant 0$) и обозначают $\sqrt[n]{a}$. Если $n=2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Например, число 3 является арифметическим корнем шестой степени из числа 729, т. е. $\sqrt[6]{729}=3$.

Существуют также корни нечетной степени из отрицательных чисел. Например, число -2 есть корень пятой степени из числа -32, т. е. $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Корень нечетной степени из отрицательного числа обозначается тем же символом $\sqrt[2k+1]{a}$.

Основные свойства арифметического корня n-й степени

1. Корень из произведения:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \tag{1}$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 2$.

2. Корень из дроби:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \tag{2}$$

где $a\geqslant 0$, $b>0$, $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 2$.

3. Возведение корня в степень:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}, \tag{3}$$

где $a\geqslant 0$, $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 2$.

4. Извлечение корня из корня:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \tag{4}$$

где $a\geqslant 0$, $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$.

Докажем первое из этих свойств.

☐ Левая и правая части равенства (1) — неотрицательные числа, так как $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, и корни — арифметические. По свойству степени с натуральным показателем и определению корня n-й степени получаем

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab. \blacksquare$$

Аналогично доказываются и другие свойства корня.

Пример 1. Вычислить: а) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{0,0081}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[6]{8}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; г) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}\cdot 8}$.

△ а) $\sqrt[4]{\frac{16}{0,0081}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{0,0081}}=\frac{2}{0,3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$;

б) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\frac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=2$;

в) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=2$;

г) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}\cdot 8}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}\cdot(-8)}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}\cdot\sqrt[3]{-8}=$

$=-\frac{4}{3}\cdot 2=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$. ▲

П р и м е р 2. Упростить выражение $\frac{\sqrt[4]{a^4b^8}}{b^2}$.

△ $\frac{\sqrt[4]{a^4b^8}}{b^2}=\frac{|a|\,b^2}{b^2}=|a|$. ▲

2. Степень с рациональным показателем. Определим степень положительного действительного числа с рациональным показателем.

Пусть $a\geqslant 0$, $r=\frac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$; тогда степень a^r определяется равенством

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Например,

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3;\quad 8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4;$$

$$125^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{125})^2=25;\quad 36^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{36^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6};$$

С в о й с т в а с т е п е н и с р а ц и о н а л ь н ы м п о к а з а т е л е м.

Пусть a и b — положительные действительные числа, а r, r_1 и r_2 — произвольные рациональные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

2) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1r_2}$;

3) $(ab)^r=a^rb^r$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

5) если $a>1$ и $r_1<r_2$, то $a^{r_1}<a^{r_2}$;
6) если $0<a<1$ и $r_1<r_2$, то $a^{r_1}>a^{r_2}$;
7) если $a<b$ и $r>0$, то $a^r<b^r$;
8) если $a<b$ и $r<0$, то $a^r>b^r$;
} свойства монотонности степени

9) если $a\neq 1$, $a^{r_1}=a^{r_2}$, то $r_1=r_2$.

Например:

1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}=2^{\frac{15}{5}}=2^3=8$;

2) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$;

3) $(16\cdot 25)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}=4\cdot 5=20$;

4) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(4)^{-\frac{1}{2}}}{(9)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{(2^2)^{-\frac{1}{2}}}{(3^2)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2^{-1}}{3^{-1}}=\frac{3}{2}$;

5) $7^{-\frac{2}{3}}>7^{-\frac{3}{4}}$, так как $7>1$ и $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}$;

6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}<\left(\frac{1}{3}\right)^{1,28}$, так как $0<\frac{1}{3}<1$ и $1,4>1,28$;

7) $2^{\frac{3}{5}}<3^{\frac{3}{5}}$, так как $2<3$ и $\frac{3}{5}>0$;

8) $2^{-\frac{3}{5}}>3^{-\frac{3}{5}}$, так как $2<3$ и $-\frac{3}{5}<0$.

П р и м е р. Упростить $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}$.

△ $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}=$

$$=a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}. \blacktriangle$$

3. Степень с действительным показателем. Покажем, как можно определить степень с иррациональным показателем на примере степени $5^{\sqrt{3}}$.

Обозначим через $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{3}$ с недостатком:

$$r_1=1,7;\ r_2=1,73;\ r_3=1,732;\ r_4=1,7320;\ \ldots$$

Эти числа являются рациональными, для них определены степени:

$$5^{1,7};\ 5^{1,73};\ 5^{1,732};\ 5^{1,7320};\ \ldots$$

Эта последовательность возрастает и ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Этот предел обозначается $5^{\sqrt{3}}$. Поэтому можно записать

$$5^{\sqrt{3}} = \lim_{n\to\infty} 5^{r_n}.$$

Дадим определение степени с любым действительным показателем α.

Определение. Пусть действительное число α записано в виде бесконечной десятичной дроби и пусть α_n, $n \in N$,— последовательность его десятичных приближений с недостатком. Тогда для любого действительного числа $a > 0$ степень a^α определяется равенством

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}. \qquad (1)$$

Докажем, что для любого действительного числа α и любого действительного числа $a > 0$ степень a^α существует, т. е. существует предел (1).

□ Для любого действительного числа α последовательность его десятичных приближений с недостатком (α_n) является неубывающей и ограниченной. Пусть, например, $\alpha_n \leqslant \beta$ для всех n, где β — целое число. Тогда, если $a > 1$, то последовательность (a^{α_n}) в силу свойства степеней с рациональными показателями будет возрастающей и ограниченной сверху числом a^β, а если $0 < a < 1$, то (a^{α_n}) будет убывающей и ограниченной снизу нулем. Из теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности следует, что предел (1) существует в обоих случаях. ■

Степени с действительными показателями обладают всеми свойствами степеней с рациональными показателями. Сформулируем эти свойства.

Если a и b — положительные действительные числа, а x, x_1, x_2 — произвольные действительные числа, то справедливы следующие утверждения:

1) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ — умножение степеней;
2) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$ — возведение степени в степень;
3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ — возведение произведения в степень;
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ — возведение дроби в степень;

5) если $a > 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$;
6) если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$;
7) если $a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$;
8) если $a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$;

(5)–(8) — свойства монотонности степени

9) если $a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Эти свойства степеней с действительными показателями примем без доказательства.

Пример 1. Сравнить числа $3^{\sqrt{2}}$ и $3^{1,41}$.

△ Так как $3 > 1$ и $\sqrt{2} > 1{,}41$, то по свойству возрастания степени $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,41}$. ▲

Пример 2. Упростить $\dfrac{b^{2\sqrt{7}-3} \cdot b^{5-2\sqrt{7}}}{(b^{\sqrt{5}+2})^{2-\sqrt{5}}}$.

△ Применяя свойства степени с действительным показателем, получаем

$$\frac{b^{2\sqrt{7}-3} \cdot b^{5-2\sqrt{7}}}{(b^{\sqrt{5}+2})^{2-\sqrt{5}}} = \frac{b^{2\sqrt{7}-3+5-2\sqrt{7}}}{b^{(\sqrt{5}+2)\cdot(2-\sqrt{5})}} = \frac{b^2}{b^{-1}} = b^3. \ ▲$$

Пример 3. Решить уравнение $8^{2x} = 2^{12\sqrt{5}}$.

△ Так как $8^{2x} = (2^3)^{2x} = 2^{6x}$, то уравнение можно записать так: $2^{6x} = 2^{12\sqrt{5}}$. По свойству равенства степеней с одинаковым основанием $6x = 12\sqrt{5}$, откуда $x = 2\sqrt{5}$. ▲

4. Логарифмы. Во многих задачах требуется уметь решать уравнения вида $a^x = b$. Для этого надо найти показатель степени по данным значениям степени и ее основания. С этой целью рассмотрим понятие логарифма числа.

Логарифмом числа $b > 0$ *по основанию* $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Логарифм числа b по основанию a обозначается $\log_a b$. По определению,

$$a^{\log_a b} = b.$$

Это равенство является просто другой формой определения логарифма, его часто называют *основным логарифмическим тождеством*.

Например:

1) $3 = \log_2 8$, так как $2^3 = 8$;

2) $-3 = \log_3 \frac{1}{27}$, так как $3^{-3} = \frac{1}{27}$;

3) $2 = \log_{\sqrt{5}} 5$, так как $(\sqrt{5})^2 = 5$;

4) $\frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}$, так как $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$;

5) $6^{\log_6 7} = 7$; 6) $3^{\log_3 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$.

Пример 1. Вычислить: а) $\log_{1/5} 25$; б) $\log_{27} 243$.

△ а) Пусть $\log_{1/5} 25 = x$. Тогда по определению логарифма $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$, откуда $\left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$. По свойству монотонности степени $x=-2$.

Ответ: $\log_{1/5} 25=-2$.

б) Пусть $\log_{27} 243=x$. Тогда по определению логарифма $27^x=243$, откуда $3^{3x}=3^5$, $3x=5$, $x=\frac{5}{3}$.

Ответ: $\log_{27} 243=\frac{5}{3}$. ▲

Действие нахождения логарифма числа называют *логарифмированием*. Отметим особые случаи.

Если $a>0$, $a\neq 1$, то

1) $\log_a a=1$, так как $a^1=a$;

2) $\log_a 1=0$, так как $a^0=1$.

Например, $\log_6 6=1$; $\log_6 1=0$.

Пример 2. Вычислить $7^{-3\log_7 2}$.

△ $7^{-3\log_7 2}=(7^{\log_7 2})^{-3}=(2)^{-3}=\frac{1}{8}$. ▲

Пример 3. При каких значениях x существует $\log_3\frac{x-1}{4-x}$?

△ По определению логарифма $\frac{x-1}{4-x}>0$. Решая это неравенство, получим $1<x<4$. ▲

5. Основные свойства логарифмов. Из определения следует, что логарифм определен лишь для положительных чисел. Примем без доказательства, что логарифм определен для любого положительного действительного числа.

Сформулируем основные свойства логарифмов. Пусть a, x_1, x_2 и x — положительные действительные числа, причем $a\neq 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\log_a (x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$ — логарифм произведения.

□ По определению логарифма и свойству умножения степеней имеем

$$x_1x_2=a^{\log_a x_1}a^{\log_a x_2}=a^{\log_a x_1+\log_a x_2},$$

и поэтому по определению логарифма

$$\log_a (x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2. \blacksquare$$

2) $\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x$ — логарифм степени.

□ Аналогично, по определению логарифма и свойству возведения степени в степень имеем

$$x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x},$$

и, следовательно,

$$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x. \blacksquare$$

3) $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$ — логарифм частного.

□ Из свойств 1 и 2 логарифмов следует

$$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a(x_1x_2^{-1})=\log_a x_1+\log_a x_2^{-1}=\log_a x_1-\log_a x_2. \blacksquare$$

4) Если $a>1$ и $x_1<x_2$, то $\log_a x_1<\log_a x_2$.

5) Если $0<a<1$ и $x_1<x_2$, то $\log_a x_1>\log_a x_2$.

(4–5 — свойства монотонности логарифма)

□ Пусть $a>1$ и $x_1<x_2$. Если бы было $\log_a x_1\geqslant\log_a x_2$, то в силу свойства степени

$$a^{\log_a x_1}\geqslant a^{\log_a x_2},$$

т. е. $x_1\geqslant x_2$. Полученное неравенство противоречит тому, что $x_1<x_2$. Следовательно,

$$\log_a x_1<\log_a x_2. \blacksquare$$

Аналогично доказывается и свойство 5 монотонности логарифма.

Пример. Вычислить: а) $\log_8 16+\log_8 4$; б) $\log_5 375-\log_5 3$; в) $\frac{1}{2}\log_3 36+\log_3 2-\log_3\sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_3 8$.

△ а) $\log_8 16+\log_8 4=\log_8(16\cdot 4)=\log_8 64=2$;

б) $\log_5 375-\log_5 3=\log_5\frac{375}{3}=\log_5 125=3$;

в) $\frac{1}{2}\log_3 36+\log_3 2-\log_3\sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_3 8=$

$$=\log_3\sqrt{36}+\log_3 2-(\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{8})=$$

$$=\log_3\frac{\sqrt{36}\cdot 2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}}=\log_3\frac{12}{\sqrt{48}}=$$

$$=\log_3\frac{12}{4\cdot\sqrt{3}}=\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}. \blacktriangle$$

6. Формула перехода от логарифмов по одному основанию к логарифмам по другому основанию. По определению логарифма

$$c=a^{\log_a c},\ \text{где } c>0,\ a>0,\ a\neq 1.$$

Прологарифмируем обе части равенства по основанию $b>0$, $b\neq 1$:

$$\log_b c=\log_b a^{\log_a c},$$

По свойству логарифма степени получим

$$\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a.$$

Эта формула обычно записывается в таком виде:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

и называется *формулой перехода к другому основанию*. Полученная формула позволяет находить логарифмы чисел по основанию a, если известны логарифмы по основанию b. Эта формула очень часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств. Из нее, в частности, следует, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Пример. Вычислить $\log_{32} 2$.

$\triangle$ Перейдем к логарифмам по основанию 2, используя формулу перехода:

$$\log_{32} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 32} = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$. $\blacktriangle$

Наиболее употребительными на практике являются *десятичные логарифмы*, когда в качестве основания берется число 10, и *натуральные логарифмы*, когда в качестве основания берется число $e = \lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $e \approx 2{,}7$.

Десятичный логарифм числа b обозначается $\lg b$, а натуральный логарифм обозначается $\ln b$.

Применяя формулу перехода, можно свести вычисление логарифма числа по любому основанию к вычислениям десятичных или натуральных логарифмов по специальным таблицам логарифмов или на микрокалькуляторе.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение арифметического квадратного корня из числа. Приведите пример.
2. Дайте определение корня n-й степени из числа. Приведите примеры.
3. Каковы основные свойства корня n-й степени?
4. Дайте определение степени с рациональным показателем. Приведите пример.

5. Поясните, что понимается под степенью с иррациональным показателем на примере $3^{\sqrt{2}}$.
6. Назовите основные свойства степени с действительным показателем.
7. Дайте определение логарифма числа. Запишите основное логарифмическое тождество.
8. Назовите основные свойства логарифмов.
9. Запишите формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию. Приведите пример.
10. Какие логарифмы называют натуральными, десятичными?

Упражнения

5.1. Найдите значения выражений:

1) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 100}$; 2) $\sqrt{64 \cdot 36 \cdot 10000}$;

3) $\sqrt[3]{1000 \cdot 27 \cdot 8}$; 4) $\sqrt[3]{64 \cdot 125 \cdot 729}$;

5) $\sqrt[4]{16 \cdot 625 \cdot 81}$; 6) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 0{,}0016 \cdot 625}$;

7) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 100000}$; 8) $\sqrt[5]{0{,}00001 \cdot 32 \cdot 0{,}00243}$.

5.2. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; 3) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; 4) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$;

5) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; 6) $\sqrt[3]{192} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; 7) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$;

8) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 9) $\sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; 10) $\sqrt[4]{0{,}09} \cdot \sqrt[4]{0{,}3} \cdot \sqrt[4]{0{,}3}$.

5.3. Вычислите:

1) $\sqrt[5]{0{,}4^5 \cdot 5^5}$; 2) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot 12^6}$; 3) $\sqrt[3]{16^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 0{,}125}$;

4) $\sqrt[4]{27^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot (0{,}5)^4}$; 5) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^9}$; 6) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^{20}}$;

7) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot 4^{10}}$; 8) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^{12}}$; 9) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$;

10) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{729}}}$.

5.4. Вычислите:

1) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}}$;

5) $\frac{\sqrt{200} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; 6) $\frac{\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$.

5.5. Вычислите:

1) $2^{\frac{7}{5}}\cdot 2^{\frac{8}{5}}$; 2) $4^{\frac{3}{8}}\cdot 4^{\frac{5}{8}}$; 3) $9^{\frac{11}{10}}:9^{\frac{3}{5}}$; 4) $5^{\frac{11}{3}}:5^{\frac{2}{3}}$;

5) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 6) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$; 7) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$;

8) $48^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$; 9) $\dfrac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$; 10) $\dfrac{6^{1,7}\cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

5.6. Выведите общий множитель за скобки:

1) $a-a^{\frac{1}{2}}$; 2) $15ab^{\frac{1}{2}}+5a^{\frac{1}{2}}b$;

3) $(xy)^{\frac{1}{4}}-(xz)^{\frac{1}{4}}$; 4) $10x^{\frac{2}{3}}-5x^{-\frac{1}{3}}$.

5.7. Упростите (воспользуйтесь тождеством $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$):

1) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{9a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{3a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}-3a^{\frac{2}{5}}$.

5.8. Упростите (воспользуйтесь тождеством $a^3+b^3=(a+b)\times$ $\times(a^2-ab+b^2)$ или $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$):

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x+y}+\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$;

4) $\dfrac{x+y}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$.

5.9. Сравните между собой следующие пары чисел:

1) $9^{\frac{2}{3}}$ и $9^{\frac{4}{5}}$; 2) $2^{1,7}$ и $2^{0,8}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,8}$;

4) $4^{\sqrt{62}}$ и $4^{\sqrt{57}}$; 5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{5}}$; 6) 3^{π} и $3^{3,14}$;

7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,7}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 8) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{7}+2}$ и $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3\sqrt{8}-1}$;

9) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{8}-2}$ и 1; 10) $\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\sqrt{7}-3}$ и 1.

5.10. Вычислите:

1) $2^{2-3\sqrt{3}}\cdot 8^{\sqrt{3}}$; 2) $4^{1-2\sqrt{3}}\cdot 16^{\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{12^{3+\sqrt{5}}}{3^{2+\sqrt{5}}\cdot 4^{1+\sqrt{5}}}$;

4) $\dfrac{15^{4+2\sqrt{3}}}{5^{6+2\sqrt{3}}\cdot 3^{3+2\sqrt{3}}}$; 5) $(9^{\sqrt{3}-2}-3^{2\sqrt{3}-3})\cdot 3^{5-2\sqrt{3}}$;

6) $(7^{2\sqrt{2}}-49^{\sqrt{2}-1})\cdot 7^{-2\sqrt{2}}$.

5.11. Решите уравнения:

1) $3^{4x}=3^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=2$; 4) $5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$;

5) $16^x=4^{3\sqrt{2}}$; 6) $32^x=2^{3\pi}$; 7) $5^{x\sqrt{3}}=\sqrt[3]{5}$; 8) $25^{x\sqrt{2}}=5\sqrt[3]{5}$;

9) $(\sqrt{3})^x=3\sqrt[3]{3}$; 10) $7^{2x}=-1$; 11) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}=1$; 12) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x\sqrt{5}}=1$.

5.12. Вычислите:

1) $\log_{12}144$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}$; 3) $\log_{\frac{1}{4}}256$; 4) $\log_5\frac{1}{625}$; 5) $\lg 1000$;

6) $\lg 0,0001$.

5.13. Вычислите:

1) $\log_{\sqrt{3}}9\sqrt{3}$; 2) $\log_{\sqrt{7}}7\sqrt[3]{49}$; 3) $\log_{\sqrt{7}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{7\cdot 49}}$;

4) $\lg 10\sqrt[5]{100}$; 5) $7^{\log_7 2}$; 6) $0,1^{\log_{0,1}4}$; 7) $3^{2\log_3 4}$;

8) $7^{-\log_7 9}$; 9) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\log_3 5}$; 10) $5^{2-2\log_{1/5}2}$.

5.14. Вычислите:

1) $\log_5\log_2\log_3\log_2 512$; 2) $\log_a a^2\sqrt[3]{a^2}$;
3) $\log_{12}2+\log_{12}72$; 4) $\log_5 35-\log_5 7$;

5) $\frac{1}{2}\log_4 7+\log_4 32-\frac{1}{2}\log_4 28$; 6) $\log_3 12-\frac{1}{2}\log_3 32+\frac{1}{2}\log_3 6$.

5.15. Вычислите, если $\lg 3\approx 0,477$; $\lg 2\approx 0,301$; $\lg 5\approx 0,699$:

1) $\log_5 3$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_6\sqrt{3}$; 4) $\log_8\sqrt[3]{9}$.

5.16. При каких значениях x существуют выражения:

1) $\sqrt{\dfrac{2x+3}{4-x}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{1-2x}}$;

3) $\log_6\dfrac{6-x}{3x+1}$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{5x+3}{7-2x}$?

§ 22. Показательная, логарифмическая и степенная функции

1. Показательная функция. Пусть задано некоторое число $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда функция

$$y = a^x, \; x \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

называется *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции.

1. По определению, показательная функция *определена на множестве* $\boldsymbol{R}$ *всех действительных чисел.*

2. *Множеством значений* показательной функции является множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

Действительно, для любого $y_0 > 0$ существует $x_0 = \log_a y_0$, и поэтому $a^{x_0} = y_0$.

3. Показательная функция является строго *возрастающей*, если $a > 1$, и строго *убывающей*, если $0 < a < 1$.

Это следует из свойств монотонности степени с действительным показателем.

4. Показательная функция *непрерывна* в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$, так как можно доказать, что для любого $a > 0$, $a \neq 1$, будет выполняться условие

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

5. Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Пример 1. Построить график функции $y = 3^x$.

$\triangle$ Вычислим значения функции для нескольких значений аргумента:

$$x = -2, \; y = \frac{1}{9}; \; x = -1, \; y = \frac{1}{3}; \; x = 0, \; y = 1;$$
$$x = 1, \; y = 3; \; x = 2, \; y = 9.$$

Построим эти точки. Основание степени больше 1, следовательно, функция строго возрастает, т. е. с увеличением аргумента значения функции увеличиваются. Учитывая, что функция определена на всей числовой прямой и непрерывна, соединяем найденные точки графика сплошной линией (рис. 50). ▲

В общем случае для $a > 1$ график показательной функции имеет вид (рис. 51).

Пример 2. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

$\triangle$ Вычислим значения функции для нескольких значений аргумента:

$$x = -2, \; y = 9; \; x = -1, \; y = 3; \; x = 0, \; y = 1;$$
$$x = 1, \; y = \frac{1}{3}; \quad x = 2, \; y = \frac{1}{9}.$$

Построим эти точки. Основание степени меньше 1, следовательно, функция строго убывает, т. е. с увеличением аргумента значения функции уменьшаются. Учитывая, что функция определена на всей числовой прямой

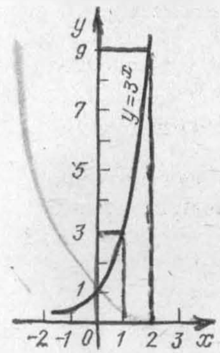


Рис. 50

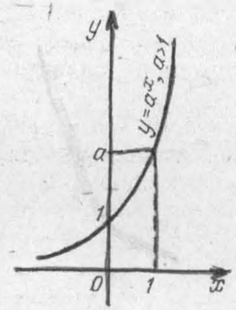


Рис. 51

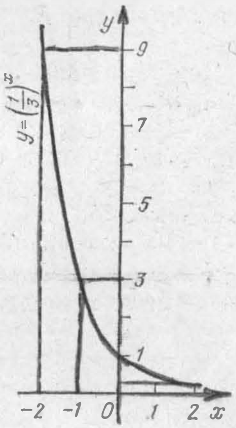


Рис. 52

и непрерывна, соединяем найденные точки графика сплошной линией (рис. 52). ▲

В общем случае для $0 < a < 1$ график показательной функции имеет вид (рис. 53).

Отметим, что графики всех показательных функций проходят через точку (0; 1).

Пример 3. Используя график, найти корни уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$.

$\triangle$ Левая часть уравнения представляет собой показательную функцию, правая — линейную. Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = x + 3$ (рис. 54).

Из рисунка видно, что абсцисса точки пересечения графиков приблизительно равна —1. Проверим значение —1, подставив его вместо x в уравнение. Проверка показывает, что $x=-1$ — корень уравнения. Рисунок показывает, что других корней уравнение не имеет. ▲

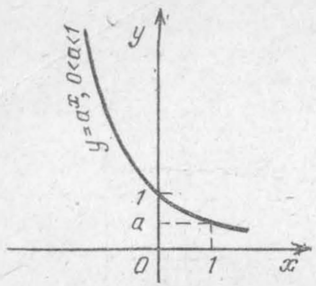


Рис. 53

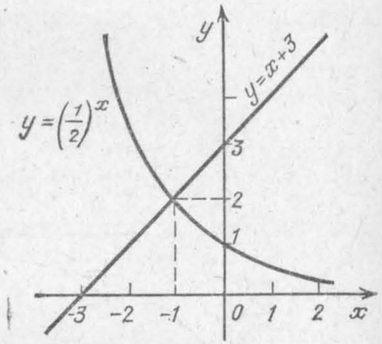


Рис. 54

2. Логарифмическая функция. Пусть задано некоторое число $a>0$, $a\neq 1$. Тогда функция

$$y=\log_a x,\ x\in \boldsymbol{R}_+, \qquad (1)$$

называется *логарифмической функцией*.

Если $a=e$, то логарифмическая функция обозначается $y=\ln x$, а если $a=10$, то обозначается $y=\lg x$.

Основные свойства логарифмической функции

1. По определению, логарифмическая функция *определена на множестве $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел.*

2. Из определения логарифма числа по данному основанию следует, что логарифмическая функция является функцией, обратной к показательной. Действительно, если логарифмическая функция $y=\log_a x$ числу α ставит в соответствие число β, т. е. $\beta=\log_a \alpha$, то показательная функция $y=a^x$ числу β ставит в соответствие число α, т. е. $\alpha=a^\beta$, и наоборот. Поэтому множеством значений логарифмической функции является множеством $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3. Логарифмическая функция является строго *возрастающей*, если $a>1$, и строго *убывающей*, если $0<a<1$.

Это следует из свойств монотонности логарифма.

4. Логарифмическая функция *непрерывна* в любой точке $x_0\in\boldsymbol{R}_+$, так как можно доказать, что для любого $a>0$,

$a\neq 1$, будет выполняться условие

$$\lim_{x\to x_0}\log_a x=\log_a x_0.$$

5. Если $a>1$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty.$$

Если $0<a<1$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty,\quad \lim_{x\to+0}\log_a x=+\infty.$$

Пример 1. Построить график функции $y=\log_3 x$.

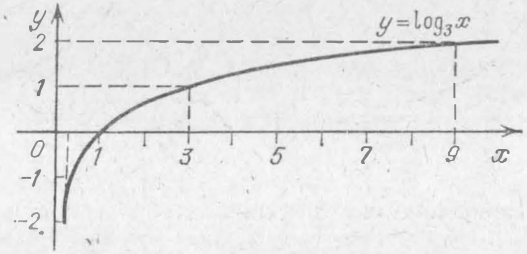


Рис. 55

△ Вычислим значения функции для нескольких значений аргумента:

$$x=\frac{1}{9},\ y=-2;\quad x=\frac{1}{3},\ y=-1;\quad x=1,\ y=0;$$

$$x=3,\ y=1;\quad x=9,\ y=2.$$

Построим эти точки. Основание логарифма больше 1, поэтому функция строго возрастает. Учитывая, что функция определена на множестве положительных чисел и непрерывна, соединяем построенные точки сплошной линией (рис. 55). ▲

В общем случае для $a>1$ график логарифмической функции имеет вид (рис. 56).

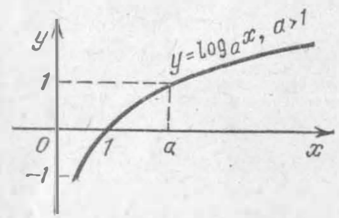


Рис. 56

Пример 2. Построить график функции $y=\log_{1/3} x$.

△ Вычислим значения функции для нескольких значений аргумента:

$$x=\frac{1}{9},\ y=2;\quad x=\frac{1}{3},\ y=1;\quad x=1,\ y=0;$$

$$x=3,\ y=-1;\quad x=9,\ y=-2.$$

Построим эти точки. Используя свойства функции $y=\log_{1/3} x$ и данные точки, строим график (рис. 57). ▲

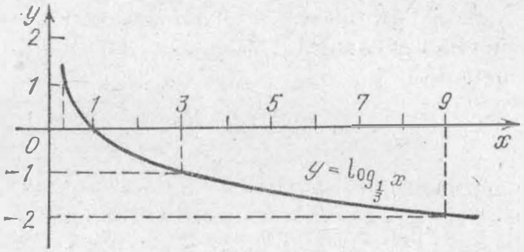


Рис. 57

В общем случае для $0 < a < 1$ график логарифмической функции имеет вид (рис. 58).

Отметим, что графики всех логарифмических функций проходят через точку (1; 0).

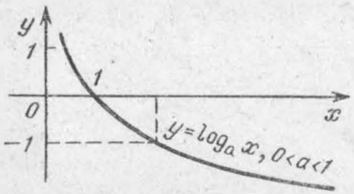


Рис. 58

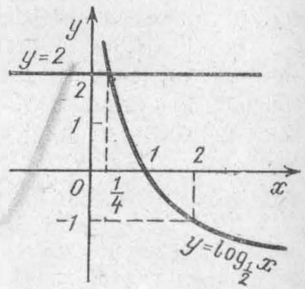


Рис. 59

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{1/2} x < 2. \qquad (2)$$

△ Представим правую часть неравенства в виде логарифма по основанию $\frac{1}{2}$, тогда

$$\log_{1/2} x < \log_{1/2} \frac{1}{4}. \qquad (3)$$

Так как логарифмическая функция $y=\log_{1/2} x$ определена для $x > 0$ и убывает, то из (3) следует $x > 1/4$.

С помощью графика проиллюстрируем решение данного неравенства.

На одной координатной плоскости построим графики функций $y=\log_{1/2} x$ и $y=2$ и найдем точку пересечения этих графиков (рис. 59); ее координаты $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$. Из рисунка видно, что при $x > \frac{1}{4}$ график логарифмической функции $y=\log_{1/2} x$ лежит ниже графика линейной функции $y=2$, т. е. выполняется неравенство $\log_{1/2} x < 2$. ▲

3. Степенная функция. Для любого действительного числа α функция

$$y=x^{\alpha},\ x \in \boldsymbol{R}_+, \qquad (1)$$

называется *степенной функцией* с показателем α.

Замечание. Для некоторых α степень x^{α} определена не только для $x > 0$. Так, если α — натуральное число ($\alpha=n$), то степень x^n определена для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Например, $y=x^2$; $y=x^3$; $y=x^4$. Если $\alpha=-n$, где n — натуральное число, то степень x^{-n} определена для любого $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$. Например, $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$; $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$.

Поэтому функции $y=x^n$, $x \in \boldsymbol{R}$, и $y=x^{-n}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$, часто также называют степенными.

Эти функции являются четными, если n — четное, и нечетными, если n — нечетное. Например, $y=x^2$, $y=x^4$ — четные функции, $y=x^3$, $y=x^5$ — нечетные функции. Если n — нечетное, то функции $y=x^n$ и $y=x^{-n}$ имеют обратные: $y=x^{1/n}$ и $y=x^{-1/n}$. Например, функции $y=x^3$ и $y=x^{-5}$ имеют соответственно обратные: $y=x^{1/3}$, $y=x^{-1/5}$. Эти функции также называют степенными. Так, считают, что формула $y=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ задает функцию, определенную на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел. Она называется степенной функцией с показателем 1/3.

Так как любая степенная функция определена при $x > 0$, то в общем виде степенную функцию определяют так, как это записано в начале этого пункта.

Основные свойства степенной функции.

1. По определению степенной функции она *определена на множестве $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных действительных чисел.*

2. *Множество $\boldsymbol{R}_+$ является множеством значений степенной функции при любом $\alpha \neq 0$.* Действительно, значение $y_0 > 0$ степенная функция (1) с показателем $\alpha \neq 0$ принимает в точке $x_0=y_0^{1/\alpha}$.

Если $\alpha=0$, то $x^{\alpha}=1$ для любого $x > 0$.

3. Степенная функция с положительным показателем является строго *возрастающей*, степенная функция с отрицательным показателем является строго *убывающей*. Это следует из свойств монотонности степени.

4. Степенная функция *непрерывна* в любой точке $x_0 \in R_+$, так как можно доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n^\alpha = x_0^\alpha.$$

5. Если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} x^\alpha = 0.$$

Если $\alpha < 0$, то

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \to +0} x^\alpha = +\infty.$$

На рис. 60 изображены схемы графиков степенных функций при $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha \in (0; 1)$.

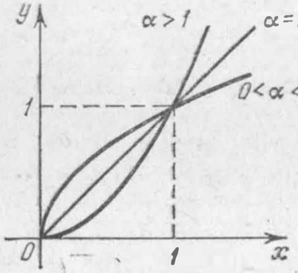


Рис. 60

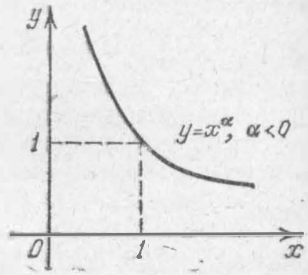


Рис. 61

На рис. 61 изображен график степенной функции при $\alpha < 0$.

Пример. Построить график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$.

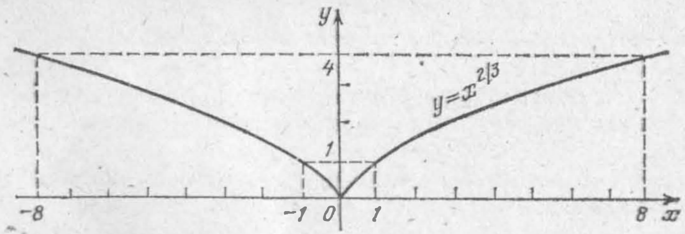


Рис. 62

△ Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел. Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ — четная, т. е. ее график симметричен относительно оси ординат.

Построим часть графика функции для $x \geqslant 0$; для этого вычислим несколько значений функции: $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 8$, $y = 4$. Построим эти точки. Так как показатель степени $\frac{2}{3} > 0$, функция при $x > 0$ строго возрастает; она непрерывна на этом промежутке. Соединив построенные точки сплошной линией и выполнив симметрию этой части графика относительно оси Oy, получим график данной функции (рис. 62). ▲

Вопросы для контроля

1. Дайте определение показательной функции. Назовите основные свойства этой функции и укажите, как эти свойства иллюстрируются графиком функции.

2. Изобразите схематически график показательной функции $y = a^x$ для случаев $0 < a < 1$; $a > 1$.

3. Дайте определение логарифмической функции. Назовите основные свойства этой функции и укажите, как эти свойства иллюстрируются графиком функции.

4. Изобразите схематически график логарифмической функции $y = \log_a x$ для случаев $0 < a <$; $a > 1$.

5. Дайте определение степенной функции. Приведите примеры степенных функций.

6. Назовите основные свойства степенной функции, определенной на множестве положительных чисел, и укажите, как эти свойства иллюстрируются графиком функции.

Упражнения

5.17. Постройте на одном чертеже графики функций $y = 3^x$, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Укажите сходство и различие графиков этих функций.

5.18. Выполните аналогичное предыдущему задание для функций $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

5.19. Найдите область определения и множество значений следующих функций:

1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = -2^x$; 3) $y = |3^x - 3|$; 4) $y = \left|2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right|$;

5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 1$; 6) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$; 7) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 2$.

Постройте графики этих функций.

5.20. Решите графически уравнения:
1) $2^x = x^2$; 2) $2^x = 4x$; 3) $2^x = x^3$; 4) $2^{x-1} = x + 1$;
5) $2^x = 5 - 3x$; 6) $2^{|x|} = x + 1$.

5.21. Постройте на одном и том же чертеже графики функций $y=\log_3 x$, $y=\log_{3,5} x$, $y=\log_5 x$. Укажите сходство и различие в графиках этих функций.

5.22. Выполните аналогичное предыдущему задание для функций $y=\log_{1/3} x$, $y=\log_{0,5} x$, $y=\log_{1/4} x$.

5.23. Найдите область определения и множество значений следующих функций:

1) $y=\log_2 |x|$; 2) $y=\log_{0,5} |x|$; 3) $y=|\log_2 x|$;

4) $y=|\log_{1/2} x|$; 5) $y=\log_2(-x)$; 6) $y=|\log_{1/2}(-x)|$.

Постройте графики этих функций.

5.24. С помощью графика проиллюстрируйте решение неравенств:

1) $\log_3 x < 2$; 2) $\log_3 x \geqslant 2$; 3) $\log_{1/3} x < -1$;

4) $\log_{1/3} x \geqslant 1$.

5.25. Постройте на одном и том же чертеже графики функций $y=x$, $y=x^2$, $y=x^{1/2}$, $y=x^{2/3}$, $y=x^{3/2}$. Укажите сходство и различие графиков этих функций.

5.26. Может ли график функции $y=x^r$, где r — рациональное число, проходить через точку $A(2;\ 3)$?

5.27. Дана функция $y=x^n$. Покажите, что при любом $n\in N$ график функции проходит через начало координат и точку $(1;\ 1)$.

§ 23. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

1. Показательные уравнения. *Показательными уравнениями* обычно называют такие уравнения, в которых неизвестное содержится только в показателе степени. Так, например, уравнения $2^{x+7}-7=0$, $3^x=1$ будут показательными, а уравнения $2^{x+1}=x$, $x\cdot 3^x=x$ уже не являются показательными.

Методы и приемы решения показательных уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. Решить уравнение $4^{2x-1}=2^x$.

△ Приведем левую часть уравнения к основанию 2:

$$2^{2(2x-1)}=2^x.$$

По свойству равенства степеней с одинаковыми основаниями получим $2(2x-1)=x$, откуда

$$4x-2=x,$$
$$3x=2,$$
$$x=\frac{2}{3}.$$

Процесс решения можно записать символически:

$$4^{2x-1}=2^x \Leftrightarrow 2^{2(2x-1)}=2^x \Leftrightarrow 2(2x-1)=x \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}. \ ▲$$

27 ·51.

Пример 2. Решить уравнение $4^{x-1}=3^{3x}$.

△ Логарифмируя обе части данного уравнения по основанию 4, получаем

$$x-1=3x\log_4 3,$$

и, следовательно,

$$x=\frac{1}{1-3\log_4 3}.$$

В символической записи решение выглядит так:

$$4^{x-1}=3^{3x} \Leftrightarrow \log_4 4^{x-1}=\log_4 3^{3x} \Leftrightarrow x-1= =3x\log_4 3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{1-3\log_4 3}. \ ▲$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{(0,125)^{x-0,5}}{2\sqrt{2}}=8\cdot(0,25)^{1-x}.$$

△ Прежде всего заметим, что

$$0,125=(0,5)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3},$$
$$2\sqrt{2}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=2^{1,5},$$
$$0,25=(0,5)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=2^{-2}.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{(2^{-3})^{x-0,5}}{2^{1,5}}=2^3\cdot(2^{-2})^{1-x}$$

или

$$2^{-3(x-0,5)-1,5}=2^{3-2(1-x)}.$$

По свойству равенства степеней с одинаковыми основаниями (или логарифмируя обе части уравнения по основанию 2) имеем

$$-3(x-0,5)-1,5=3-2(1-x),$$
$$-3x+1,5-1,5=3-2+2x,$$
$$5x=-1,$$
$$x=-\frac{1}{5}. \ ▲$$

Во всех предыдущих примерах применялся при решении один и тот же метод — *метод логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию.* Этот метод основан на том, что два положительных числа равны тогда и только тогда, когда равны их логарифмы по одному и тому же основанию, т. е.

$$b=c \Leftrightarrow \log_a b=\log_a c, \text{ где } b>0, \ c>0, \ a>0, \ a\neq 1.$$

Применяя свойство равенства с одинаковыми основаниями степеней, мы по существу используем тот же метод, так как

$$b=c \Leftrightarrow a^{\log_a b}=a^{\log_a c}.$$

Пример 4. Решить уравнение $4^{x+2}-3\cdot 4^{x-1}=122$.

$\triangle$ $4^{x+2}-3\cdot 4^{x-1}=122 \Leftrightarrow 4^{x-1}(4^3-3)=122 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4^{x-1}\cdot 61=122 \Leftrightarrow 4^{x-1}=2 \Leftrightarrow 2^{2x-2}=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x-2=1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Решить уравнение $5^{x-3}=7^{x-3}$.

$\triangle$ Делим обе части уравнения на $7^{x-3}\neq 0$, $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3}=1$.

Так как $\left(\frac{5}{7}\right)^0=1$, то $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3}=\left(\frac{5}{7}\right)^0$, откуда $x-3=0$, $x=3$. $\blacktriangle$

Пример 6. Решить уравнение $2\cdot 9^x-3^{x+1}-2=0$.

$\triangle$ Так как данному уравнению можно придать вид

$$2\cdot(3^x)^2-3\cdot 3^x-2=0,$$

то, положив $y=3^x$, относительно y получим квадратное уравнение

$$2y^2-3y-2=0.$$

Решив это уравнение, получим $y=2$ и $y=-\frac{1}{2}$. Последнее равенство невозможно, так как $3^x>0$. Следовательно, $3^x=2$.

Ответ: $x=\log_3 2$. $\blacktriangle$

Здесь мы применили прием, который называется методом *замены переменной*. Отметим, что этот прием может привести к появлению так называемых посторонних корней. Так, в примере 6 после замены $y=3^x$ получаем относительно y квадратное уравнение. Очевидно, что если x_1 — корень исходного уравнения, то $y_1=3^{x_1}$ — корень полученного квадратного уравнения. Однако у квадратного уравнения есть корень ($y=-1/2$), который не соответствует никакому корню исходного уравнения. Поэтому при решении уравнений методом замены переменной необходима проверка.

В заключение рассмотрим еще один пример уравнения, которое решается методом замены переменной.

Пример 7. Решить уравнение $2^{x^2+1}-4^{x^2}=1$.

$\triangle$ Заменой переменной $y=2^{x^2}$ данное уравнение сводится к следующему квадратному уравнению:

$$2y-y^2=1,$$

которое имеет только одно решение $y=1$. Из уравнения $1=2^{x^2}$ находим, что $x=0$. Проверкой убеждаемся, что $x=0$ действительно является решением данного уравнения. $\blacktriangle$

2. **Логарифмические уравнения.** *Логарифмическими уравнениями* обычно называют такие уравнения, в которых неизвестное содержится только под знаком логарифма (в частности, в основании логарифма). Так, например, уравнения $2\log_2 x-7=0$, $\log_x 2=4$ будут логарифмическими, а уравнение $\lg x-x^2=0$ уже не является логарифмическим.

Методы решения логарифмических уравнений проиллюстрируем на конкретных примерах.

Пример 1. Решить уравнение $\log_7(4x-3)=2$.

$\triangle$ По определению логарифма

$$4x-3=7^2, \quad \text{откуда} \quad 4x-3=49,$$
$$4x=52,$$
$$x=13.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=13$ — корень данного уравнения. $\blacktriangle$

Пример 2. Решить уравнение $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$.

$\triangle$ Преобразуем обе части данного уравнения, используя свойства логарифмов:

$$\lg(x-2)(x-3)=\lg 10-\lg 5,$$
$$\lg(x-2)(x-3)=\lg 2. \qquad (1)$$

Если логарифмы двух чисел по одному и тому же основанию равны, то равны и сами эти числа. Поэтому, если некоторое x_0 удовлетворяет уравнению (1), то оно удовлетворяет и уравнению

$$(x-2)(x-3)=2, \qquad (2)$$

т. е. уравнению

$$x^2-5x+4=0.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа 1 и 4. Проверкой убеждаемся, что $x=4$ будет решением данного уравнения, а $x=1$ не будет решением, так как при $x=1$ не определена (не имеет смысла) левая часть исходного уравнения.

Кратко решение этого уравнения можно записать так:

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5 \Rightarrow \lg(x-2)(x-3)=$$
$$=\lg 2 \Rightarrow (x-2)(x-3)=2 \Leftrightarrow x=4 \quad \text{и} \quad x=1.$$

Проверка:

$$\lg(4-2)+\lg(4-3)=1-\lg 5, \quad \lg 2=\lg 2.$$

$\lg(1-2)+\lg(1-3)=1-\lg 5$ — равенство не имеет смысла.

Укажем еще другой метод решения этого уравнения, основанный на предварительном нахождении множества всех значений x, для которых определены (имеют смысл) обе части уравнения. Это множество обычно называется *областью определения уравнения* или *областью допустимых значений переменной*.

Функция $\lg(x-2)$ определена лишь для $x>2$, а функция $\lg(x-3)$ — лишь для $x>3$, поэтому левая часть данного уравнения определена лишь для $x>3$ и, в частности, все решения данного уравнения принадлежат интервалу $(3;\ +\infty)$.

Из свойств логарифмов следует, что $x>3$ удовлетворяет данному уравнению тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению

$$\lg(x-2)(x-3)=\lg 2.$$

Далее, $x>3$ удовлетворяет этому уравнению тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению

$$(x-2)(x-3)=2,$$

а этому уравнению среди $x>3$ удовлетворяет лишь $x=4$. Следовательно, $x=4$ является корнем данного уравнения, и других корней нет.

Кратко эти рассуждения можно записать следующим образом.

На интервале $(3;\ +\infty)$, т. е. на области определения данного уравнения,

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5 \Leftrightarrow \lg(x-2)(x-3)=\lg 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=2 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $x=4$. ▲

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(3x-2)=\log_{1/2}x$.

$D = 4ab$

△ Так как по формуле перехода к другому основанию

$$\log_{1/2}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x,$$

то данное уравнение равносильно следующему:

$$\log_2(3x-2)=\log_2 x^{-1}, \tag{3}$$

откуда

$$3x-2=x^{-1}, \tag{4}$$

$$3x-2=\frac{1}{x},$$

$$3x^2-2x-1=0,$$

$$x_1=1, \quad x_2=-\frac{1}{3}.$$

Проверкой убеждаемся, что только $x=1$ является решением данного уравнения.

Ход решения можно записать следующим образом:

$$\log_2(3x-2)=\log_{1/2}x \Leftrightarrow \log_2(3x-2)=\log_2 x^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-2=x^{-1} \Leftrightarrow 3x^2-2x=1 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{и} \quad x=-1/3.$$

Здесь при переходе от уравнения (3) к уравнению (4) поставлен знак $\Rightarrow$, а не знак $\Leftrightarrow$, так как решение уравнения (4) может не быть решением уравнения (3).

Ответ: $x=1$. ▲

Пример 4. Решить уравнение $4^{\log_2 \lg x}=\lg x-\lg^2 x+1$.

△ Правая часть уравнения определена для всех $x>0$, а левая часть — для всех x, для которых $\lg x>0$, т. е. для $x>1$. Следовательно, областью определения данного уравнения является интервал $(1;\ +\infty)$. На этом интервале, т. е. для $x>1$, левая часть уравнения принимает вид

$$4^{\log_2 \lg x}=(2^2)^{\log_2 \lg x}=(2^{\log_2 \lg x})^2=(\lg x)^2.$$

Поэтому на интервале $(1;\ +\infty)$ данное уравнение равносильно уравнению

$$2\lg^2 x-\lg x-1=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получаем два решения:

$$\lg x=1 \quad \text{и} \quad \lg x=-1/2.$$

Второе решение не удовлетворяет условию $\lg x > 0$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $\lg x = 1$ и имеет единственный корень $x = 10$.

Ответ: $x = 10$. ▲

Заметим, что при решении последнего уравнения можно воспользоваться заменой переменной $y = \lg x$.

Пример 5. Решить уравнение $\lg(1-x) - 7\lg x = 2\lg(x-3)$.

△ Левая часть этого уравнения определена для x, удовлетворяющих условиям $1-x > 0$ и $x > 0$, т. е. для $0 < x < 1$, а правая часть — для $x > 3$. Следовательно, это уравнение не имеет решений. ▲

Пример 6. Решить уравнение $x^{\log_3 x^2 + \log_3^2 x - 10} = \frac{1}{x^2}$.

△ Это уравнение, строго говоря, не является логарифмическим, однако, логарифмируя обе его части по основанию 3, получаем равносильное ему логарифмическое уравнение:

$$(2\log_3 x + \log_3^2 x - 10)\log_3 x = -2\log_3 x,$$

$$(2\log_3 x + \log_3^2 x - 10)\log_3 x + 2\log_3 x = 0,$$

$$\log_3 x(2\log_3 x + \log_3^2 x - 10 + 2) = 0,$$

$$\log_3 x(2\log_3 x + \log_3^2 x - 8) = 0.$$

Это уравнение равносильно следующим двум:

$$\log_3 x = 0 \quad \text{или} \quad \log_3^2 x + 2\log_3 x - 8 = 0.$$

Решая первое из них, получим $x_1 = 1$.

Решая второе уравнение относительно $\log_3 x$, получим $\log_3 x = -1 \pm 3$, т. е. $\log_3 x = 2$, $\log_3 x = -4$, откуда

$$x_2 = 9, \quad x_3 = \frac{1}{81}.$$

Проверка показывает, что все корни удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = \frac{1}{81}$. ▲

3. Показательные и логарифмические неравенства. Методы решения показательных и логарифмических неравенств рассмотрим на конкретных примерах. Основные приемы решения этих неравенств опираются на свойства возрастания или убывания соответствующих функций.

Пример 1. Решить неравенство $3^{2x} > 3^{x-2}$.

△ Показательная функция с основанием, большим 1, возрастает, поэтому

$$3^{2x} > 3^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2.$$

Ответ: $x > -2$. ▲

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{16}$.

△ Так как $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ и показательная функция с основанием, меньшим 1, убывает, то данное неравенство выполняется для тех и только тех x, для которых $2x - 1 < 4$, т. е. для $x < 2{,}5$.

Ответ: $x < 2{,}5$. ▲

Пример 3. Решить неравенство $3^{x-2} \cdot 2^x > 2^2$.

$$△\ 3^{x-2} \cdot 2^x > 2^2 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^{-2} \cdot 2^x > 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot 2^x > \frac{2^2}{3^{-2}} \Leftrightarrow 6^x > 6^2 \Leftrightarrow x > 2.\ ▲$$

Пример 4. Решить неравенство $2^x > 3$.

△ Прологарифмируем обе части данного неравенства по основанию 2, получим

$$x\log_2 2 > \log_2 3,$$

$$x > \log_2 3.\ ▲$$

Пример 5. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \frac{1}{8}$.

△ Прологарифмируем обе части данного неравенства по основанию $\frac{1}{2}$, затем воспользуемся тем, что показательная функция с основанием, меньшим 1, убывает. Тогда

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0.$$

Решая полученное квадратное неравенство, находим, что $x > 3$ или $x < -1$.

Ответ: $x < -1$ или $x > 3$. ▲

Пример 6. Решить неравенство $\log_3(2x+1) < \log_3 5$.

△ Если некоторое x удовлетворяет заданному неравенству, то оно удовлетворяет неравенству

$$2x + 1 > 0,$$

так как логарифм определен лишь для положительных чисел, и неравенству

$$2x + 1 < 5,$$

так как логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает.

Очевидно, и наоборот, если x удовлетворяет этим двум неравенствам, то x удовлетворяет и данному неравенству.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+1>0, \\ 2x+1<5, \end{cases}$$

находим, что $-0{,}5<x<2$.

Ход решения этого неравенства можно записать следующим образом:

$$\log_3(2x+1)<\log_3 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>0, \\ 2x+1<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-0{,}5, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0{,}5<x<2.$$

Ответ: $-0{,}5<x<2$. ▲

Пример 7. Решить неравенство $\log_3(5x-6)<2$.

$\triangle\ \log_3(5x-6)<2 \Leftrightarrow \log_3(5x-6)<\log_3 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6<9, \\ 5x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x<15, \\ 5x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x>\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5}<x<3. ▲$$

Пример 8. Решить неравенство $\log_{0,5}(3x+1)<$ $<\log_{0,5}(x-1)$.

$\triangle$ Левая часть неравенства определена лишь для x таких, что $3x+1>0$, а правая — для $x>1$. Учитывая это замечание и используя свойство убывания логарифмической функции с основанием, меньшим 1, получаем, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x+1>0, \\ x>1, \\ 3x+1>x-1. \end{cases}$$

Решением этой системы будет любое $x>1$, и других решений она не имеет.

Ответ: $x>1$. ▲

Пример 9. Решить неравенство $\log_{1-x}(x-2)\geqslant-1$.

$\triangle$ Левая часть неравенства определена для x, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ x-2>0, \\ 1-x\neq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что нет ни одного действительного числа, которое удовлетворяло бы этим условиям. Поэтому данное неравенство не имеет решений. ▲

Упражнения

5.28. Решите уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; 2) $2^{3x}=5^x$; 3) $3^x=7^{x/2}$;

4) $5^{x-3}=2^{3-x}$; 5) $5^{\frac{x-3}{2}}=7^{x-3}$;

6) $2^{x+2}+3\cdot2^{x+1}+7\cdot2^x=68$; 7) $4^{2x-1}+4^{2x-2}-4^{2x-4}=316$;

8) $5^{4x}+3\cdot5^{4x-2}=140$; 9) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9=0$;

10) $10\cdot25^x+18\cdot5^x-4=0$.

5.29. Решите уравнения:

1) $3^{x-5}=81$; 2) $9^{\frac{x-1}{2}}=27^{x^2-1}$; 3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;

4) $1{,}8^{x^2-5x-11}=5{,}832$; 5) $21\cdot3^x-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$;

6) $3^{x-\frac{1}{2}}-2^{2x}=4^{x-\frac{1}{2}}-3^{x+\frac{1}{2}}$; 7) $27\cdot3^{2(x+1)}-3^{x+2}=2$;

8) $2^{x+2+\sqrt{x^2-3}}-5\cdot2^{x+\sqrt{x^2-3}}+8=0$; 9) $2^x+2^{-x}=2a$,

где a — действительное число.

5.30. Решите уравнения:

1) $3^{x+1}+3^x=108$; 2) $7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

3) $5^{2x+1}=5^x+4$; 4) $4^{x-2}-17\cdot2^{x-4}+1=0$;

5) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$; 6) $5^{x^2}-3^{x^2+1}=2\left(5^{x^2-1}-3^{x^2-2}\right)$;

7) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-(x+1)}=343^{x+3}:125^{x+3}$.

5.31. Решите уравнения:

1) $\log_4(5x+6)=0$; 2) $\log_{1/5}\left(7x+\frac{1}{25}\right)=2$;

3) $\lg(2x)+\lg(x+3)=\lg(12x-4)$; 4) $\lg\frac{x-5}{x-2}=2$;

5) $\log_{1/2}\left(x-\sqrt{x^2-16}\right)=-1$;

6) $\log_2\left(3^{2x-2}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$;

7) $(3-\lg x+\lg 3)\lg x=2\lg 3+2$; 8) $\frac{1}{4}\lg\left(x^{2\lg x}\right)=\lg\sqrt{x}$;

9) $\log_3 x+\log_x 3=2{,}5$; 10) $9\cdot3^{\log_x^2 4}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x\frac{1}{8}}=0$.

5.32. Решите уравнения:

1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+2x)-\lg\sqrt{x+2}=0$;

2) $4\lg^2 x - 2 = \lg x^2$; 3) $4\lg^2 x + \lg x^2 = 2$;
4) $0{,}5\log_2(x^2 - 2x) - \log_2\sqrt{6-x} = 0$;
5) $1 + \log_2(3x+1) = \log_2(x^2-5)$;
6) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$;
7) $\lg(169 + x^3) - 3\lg(x+1) = 0$; 8) $\lg(x-9) + 2\lg\sqrt{2x-1} = 2$;
9) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2\log_2(3^{x-1} + 1)$;
10) $x^{1+\lg x} = 0{,}001^{-2/3}$; 11) $\lg(4^x - 6) + \dfrac{1}{\lg(4^x-6)} = 2$;
12) $\lg^2 x - \lg x^2 = \lg^2 3 + \dfrac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{1/3}} 3$.

5.33. Решите неравенства:

1) $4^x > 64$; 2) $0{,}3^x < 3\dfrac{1}{3}$; 3) $6^x > 13$;
4) $0{,}5^{x^2-4x} < 8$; 5) $2^{\frac{2}{x}} + 4^{\frac{1}{x}+2} < 68$; 6) $4^x < 2^{x+1} + 3$;
7) $(4^{x-1})^{x/2} > 4$; 8) $2^x + 2^{2x+3} - 3\cdot 2^{2x+1} > -3$.

5.34. Решите неравенства:

1) $\dfrac{1}{5^x} \geqslant 0{,}04$; 2) $0{,}25^x \leqslant \dfrac{1}{8}$; 3) $3^{2x+5} \leqslant 3^{x+2} + 2$;
4) $(0{,}04)^{5x-x^2-8} < 625$; 5) $2^x + 1 < 3\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}$;
6) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{1/x} < \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

5.35. Решите неравенства:

1) $\log_{0,5}(2-5x) \leqslant -2$; 2) $\log_2(4-3x) \leqslant -3$;
3) $\log_4(3-4x) \geqslant -1$; 4) $\log_{0,2}(15-2x) \geqslant -2$;
5) $\log_{16}(0{,}6+2x) \geqslant -0{,}25$; 6) $\log_{0,8}(3-5x) \geqslant 0$;
7) $(\log_{0,6} 0{,}216)\log_5(5-2x) \leqslant 0$; 8) $\log_{0,2}(2-5x) \geqslant 0$;
9) $25 > 5^{\log_5(4-3x)}$; 10) $0{,}4^2 \geqslant 0{,}4^{\log_{0,4}(3-2x)}$;
11) $\log_{1/2}(x^2+2x-8) \geqslant -4$; 12) $\log_6(x^2-3x+2) \geqslant 1$;
13) $\dfrac{\log_{0,5}(5x+3)}{11{,}02+19x} \geqslant 0$; 14) $\dfrac{13x+15{,}99}{\log_{0,8}(4x+5)} \leqslant 0$;
15) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) + \lg x \leqslant 14$.

5.36. Решите неравенства:

1) $\log_3(2x-7) > 2$; 2) $\log_{1/3}(x-1) \leqslant -2$;
3) $\log_{0,25}(x-1) + \log_{0,25}(x+1) > \log_{0,25} 3$;
4) $\log_{1/2}(x+8) - \log_{1/2}(x-3) > \log_{1/2} 3x$;
5) $2 + \log_2\sqrt{x+1} > 1 - \log_{1/2}\sqrt{4-x^2}$; 6) $\log^2_{1/2} x > 25$;
7) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} > 3$; 8) $\log_x(x^2+1) > 2$; 9) $\log_x\dfrac{x+3}{x-1} > 1$;
10) $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x > -1$; 11) $15^{\log_5 3}\cdot x^{1+\log_5 9x} > 1$.

§ 24. Тригонометрические функции числового аргумента

1. Радианное измерение углов и дуг. Любой угол можно рассматривать как результат вращения луча в плоскости вокруг начальной точки. Вращая луч вокруг точки O от начального положения OA до конечного положения OB, получим угол AOB (рис. 63).

При измерении углов некоторый определенный угол принимают за единицу измерения и с ее помощью измеряют другие углы. За единицу измерения можно принять любой угол.

На практике уже более трех тысяч лет за единицу измерения величины угла принята 1/360 часть полного оборота, которую называют *градусом*. В технике за единицу измерения углов принимают полный оборот. В мореплавании за единицу измерения углов принят румб, равный 1/32 части полного оборота. В артиллерии за единицу измерения углов принята 1/60 часть полного оборота, которую называют большим делением угломера (0,01 часть большого деления угломера называют малым делением угломера).

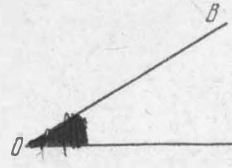


Рис. 63

В связи с развитием техники появилась потребность измерять круговые движения (т. е. повороты на сколь угодно большие углы и различные колебательные процессы, связанные с круговым движением). Появилась потребность в новой, универсальной единице измерения дуг и углов. Такой единицей оказалась радианная (радиусная) мера угла; она появилась в трудах Ньютона (1643—1727) и Лейбница (1646—1716) и вошла в науку благодаря трудам академика Петербургской академии наук Леонарда Эйлера (1707—1783).

Пусть дана некоторая единичная окружность, т. е. окружность с центром в некоторой точке O и с радиусом, равным единице масштаба. Выберем на этой окружности некоторую точку A (рис. 64).

Каждому числу $\alpha \in (0;\ 2\pi)$ поставим в соответствие точку M_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AM_α равна α, причем дуга AM_α откладывается от точки A против часовой стрелки. Числу 0 и числу 2π поставим в соответствие точку A. Таким образом, между точками единичной окружности и числами промежутка $[0;\ 2\pi)$ установлено взаимно однозначное соответствие.

Число α называется *радианной мерой* дуги AM_α и соответственно угла AOM_α.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу, называется углом в 1 радиан (рад).

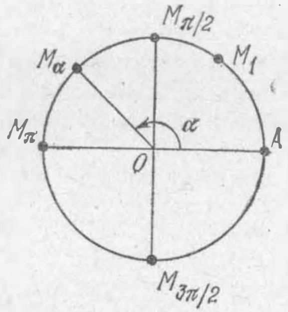


Рис. 64

Длина дуги единичной окружности, градусная мера которой β, равна

$$\frac{2\pi \cdot 1}{360^\circ} \cdot \beta = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \beta.$$

Если α — длина дуги единичной окружности, градусная мера которой равна β, то

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \beta. \qquad (1)$$

Здесь α — радианная мера центрального угла, опирающегося на дугу единичной окружности, содержащую β градусов. Поэтому мы получили формулу, связывающую радианную и градусную меры угла.

Таким образом, дуга в 1 радиан содержит $180/\pi$ градусов:

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Дуга в 1° содержит $\pi/180$ радиан:

$$\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175 \text{ рад}.$$

Приведем таблицу часто встречающихся углов и дуг в градусной и радианной мерах:

Градусы	360°	180°	90°	60°	45°	30°	18°	15°	10°	1°	β°
Радианы	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \beta$

Пример 1. Найти градусную меру угла, равного $\frac{2\pi}{3}$ радиан.

$\triangle$ Из формулы (1) следует, что

$$\beta = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^\circ, \qquad \beta = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3}\right)^\circ = 120^\circ.$$

Итак, угол в $\frac{2\pi}{3}$ радиан содержит 120°. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти радианную меру угла, равного 54°.

$\triangle$ По формуле (1) имеем

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 54^\circ\right) \text{ рад} = \frac{3\pi}{10} \text{ рад}.$$

Итак, угол в 54° содержит $\frac{3\pi}{10}$ радиана. $\blacktriangle$

Как правило, при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают и пишут, например,

$$54^\circ = \frac{3\pi}{10}.$$

Для перевода меры угла из градусной в радианную и обратно можно использовать таблицы (см., например, Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы.— М.: Просвещение, 1974.— С. 59—61), а также микрокалькуляторы.

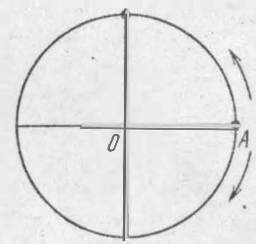


Рис. 65

Рассмотрим снова единичную окружность с выбранной точкой A (рис. 65).

Каждому числу $\alpha \in (-2\pi;\ 0)$ поставим в соответствие точку M_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AM_α равна $|\alpha|$ и дуга AM_α откладывается от точки A по часовой стрелке. Числу -2π поставим в соответствие точку A.

Произвольное число α представим следующим образом:

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi,$$

где k — некоторое целое число, $\alpha_0 \in (-2\pi;\ 2\pi)$. Заметим, что для любого α такое представление возможно. Теперь числу α поставим в соответствие ту же точку, что и числу α_0, т. е. точки M_α и M_{α_0} совпадают.

Таким образом, построено соответствие между действительными числами и точками единичной окружности. Из самого построения этого соответствия следует, что точки $M_{\alpha+2\pi}$, $M_{\alpha-2\pi}$, M_α совпадают.

О точке M_α говорят, что она получается из точки A поворотом на $|\alpha|$ радиан против часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < 0$. Вращение против часовой стрелки иногда называют вращением в положительном направлении, а вращение по часовой стрелке — вращением в отрицательном направлении.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа. В предыдушем пункте установлено соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек единичной окружности. Каждому действительному числу α поставлена в соответствие точка M_α единичной окружности.

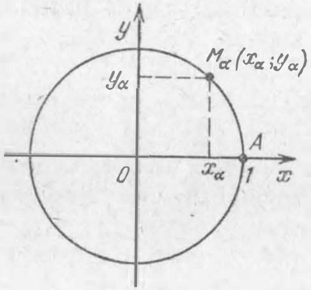


Рис. 66

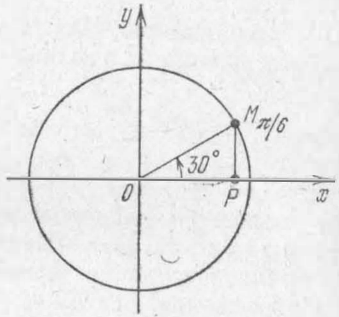


Рис. 67

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат так, что ее начало совпадает с центром рассматриваемой единичной окружности, а единичная точка оси абсцисс совпадает с точкой A (рис. 66).

Пусть x_α, y_α — координаты точки M_α. Тогда каждому числу α поставлены в соответствие два числа x_α и y_α. Число y_α называется *синусом* α и обозначается $\sin\alpha$, а число x_α называется *косинусом* α и обозначается $\cos\alpha$. Так как точка M_α лежит на окружности единичного радиуса, ее координаты удовлетворяют равенству

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1,$$

откуда $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ для любого $\alpha \in R$.

Пример 1. Найти синус числа $\alpha = \frac{13}{6}\pi$.

△ Так как

$$\frac{13}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

то этому числу соответствует та же точка $M_{\pi/6}$, что и числу $\pi/6$. Опустим из точки $M_{\pi/6}$ перпендикуляр $M_{\pi/6}P$ на ось Ox (рис. 67); имеем $|PM_{\pi/6}| = y$. В прямоугольном треугольнике POM длина гипотенузы $OM_{\pi/6}$ равна 1 (так как окружность единичная), длина катета $PM_{\pi/6}$ равна 0,5 (как катета, лежащего против угла в 30°). Следовательно, ордината точки $M_{\pi/6}$ равна 0,5.

Ответ: $\sin\frac{13}{6}\pi = 0{,}5$. ▲

Отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ называется *тангенсом* α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Легко видеть, что $\operatorname{tg}\alpha$ определен для всех действительных чисел $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ называется *котангенсом* α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Легко видеть, что $\operatorname{ctg}\alpha$ определен для всех действительных чисел $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

Из определения тангенса и котангенса следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

для всех значений α, при которых и $\operatorname{tg}\alpha$, и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют смысл, т. е. при всех $\alpha \in R$, кроме $\alpha = k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

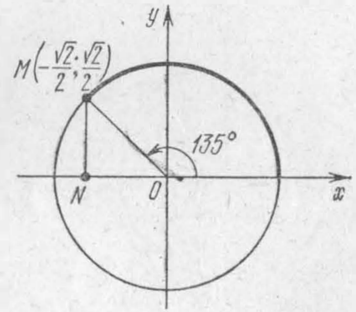


Рис. 68

Пример 2. Найти $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$ и $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi$.

△ Числу $3\pi/4$ на числовой окружности соответствует точка M, которая является концом дуги в 135°. Опустим из точки M перпендикуляр на ось Ox. Треугольник OMN — прямоугольный и равнобедренный (рис. 68). Следовательно, точка M имеет координаты $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi = \frac{y}{x} = -1, \quad \operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = \frac{x}{y} = -1.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi=\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi=-1$. ▲

Пример 3. Доказать, что $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

△ Преобразуем правую часть, заменив в числителе 1 на $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. Получим

$$\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha\neq 0$:

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Итак, получили выражение, которое находится в левой части заданного равенства, что и требовалось доказать. ▲

Пример 4. Решить уравнение $\cos x=1$.

△ Абсциссу, равную 1, на единичной окружности (рис. 69) имеет точка A, а также точки, совпадающие с

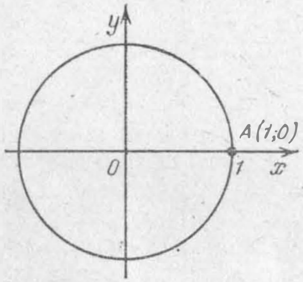


Рис. 69

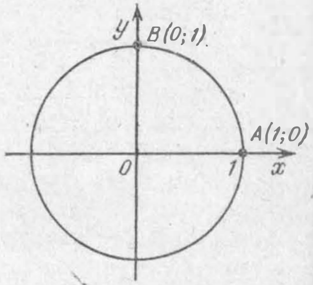


Рис. 70

точкой A, т. е. получаемые поворотом этой точки на 2π радиан (по или против часовой стрелки). Поэтому данному уравнению удовлетворяют числа вида $2\pi k$, где $k\in Z$.

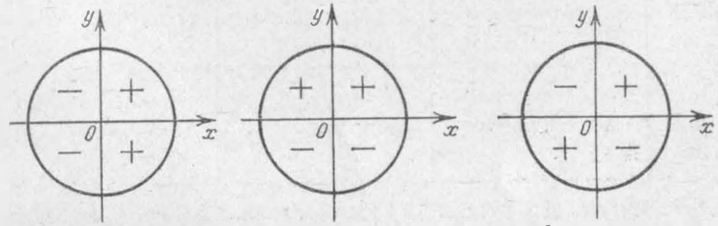
Ответ: $x=2\pi k$, $k\in Z$. ▲

Пример 5. Решить уравнение $\sin x=1$.

△ Ординату, равную 1, на единичной окружности имеет точка B (рис. 70), а также точки, совпадающие с точкой B, т. е. полученные поворотом этой точки на 2π радиан (по или против часовой стрелки). Поэтому данному уравнению удовлетворяют числа вида $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. ▲

3. Знаки значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Пусть, как и выше, M_α — точка единичной окружности с центром в начале координат, соответствующая числу α. Тогда, согласно определению, $\cos\alpha$ — абсцисса, а $\sin\alpha$ — ордината точки M_α. Поэтому, если M_α лежит в первой четверти координатной плоскости, то



Знаки косинуса — *а*; *Знаки синуса* — *б*; *Знаки тангенса и котангенса* — *в*

Рис. 71

$\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ положительны; если M_α — во второй четверти, то $\cos\alpha$ отрицателен, а $\sin\alpha$ положителен; если M_α — в третьей четверти, то $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ отрицательны; если M_α — в четвертой четверти, то $\cos\alpha$ положителен, а $\sin\alpha$ отрицателен.

Тангенс и котангенс положительны, если M_α лежит в первой или третьей четверти, и отрицательны, если M_α лежит во второй или четвертой четверти.

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса показаны на рис. 71, *а*, *б*, *в*.

Пример 1. Найти знаки чисел: а) $\sin\frac{5}{3}\pi$; б) $\operatorname{ctg}280°$.

△ а) Так как $\pi<\frac{5\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$, то $\sin\frac{5\pi}{3}<0$.

б) Так как $270°<280°<360°$, то $\operatorname{ctg}280°<0$. ▲

Зная определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и основные соотношения

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

можно установить следующие зависимости, представленные в таблице

$\sin\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha=$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Заметим, что два знака ($\pm$) перед радикалом означают две формулы, каждая из которых справедлива для определенных значений α. Например, если $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; если же $\pi\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, то $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Пример 2. Дано $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\cos\alpha$.

$\triangle$ Точка M_α находится в первой четверти, следовательно, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

Ответ: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. ▲

Пример 3. Дано $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти $\cos\alpha$.

$\triangle$ Точка M_α находится во второй четверти, следовательно, $\cos\alpha=-4/5$.

Ответ: $\cos\alpha=-4/5$. ▲

Пример 4. Дано $\sin\alpha=3/5$. Найти $\cos\alpha$.

$\triangle$ В задаче не указано, в какой четверти находится точка M_α, поэтому однозначного ответа дать нельзя. По условию задачи $\sin\alpha>0$, следовательно, точка M_α находится либо в первой, либо во второй четверти; в первой четверти косинус — число положительное, а во второй — отрицательное.

Ответ: если $0<\alpha<\pi/2$, то $\cos\alpha=4/5$; если $\pi/2<\alpha<\pi$, то $\cos\alpha=-4/5$. ▲

Пример 5. Дано $\operatorname{tg}\alpha=-4/3$, $3\pi/2<\alpha<2\pi$. Вычислить $\sin\alpha$.

$\triangle$ Точка M_α в четвертой четверти, следовательно,

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{-\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}=-\frac{4}{5}.$$

(Из двух знаков выбрали плюс, так как синус и тангенс в четвертой четверти одного знака.) ▲

Пример 6. Упростить выражение

$$A=\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha}+\frac{8}{1-\cos\alpha}}.$$

$\triangle$ Имеем

$$A=\sqrt{\frac{8(1-\cos\alpha)+8(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{16}{\sin^2\alpha}}=\frac{4}{|\sin\alpha|}.$$

Следовательно, $A=\frac{4}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha>0$, и $A=-\frac{4}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha<0$. ▲

4. Тригонометрические функции и их простейшие свойства. Определим тригонометрические функции. Функция $y=\sin x$, $x\in\boldsymbol{R}$, называется *синусом*.

Функция $y=\cos x$, $x\in\boldsymbol{R}$, называется *косинусом*.

Функция $y=\operatorname{tg}x$, $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, называется *тангенсом*.

Функция $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, называется *котангенсом*.

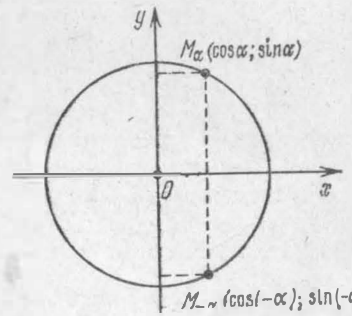


Рис. 72

Теорема 1. *Косинус — функция четная, а синус — нечетная.*

□ Пусть, как обычно, M_α — точка единичной окружности с центром в начале координат, соответствующая числу α, а $M_{-\alpha}$ — точка этой окружности, соответствующая числу $-\alpha$. По определению синуса и косинуса точка M_α имеет координаты $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, а точка $M_{-\alpha}$ — координаты $\cos(-\alpha)$ и $\sin(-\alpha)$ (рис. 72).

Так как точки M_α и $M_{-\alpha}$ симметричны относительно оси Ox, то их абсциссы совпадают, а ординаты противоположны. Следовательно,

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

для любого $\alpha\in \boldsymbol{R}$. ■

Например,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos(-135^\circ)=\cos 135^\circ=-\sqrt{2}/2,$$

$$\sin(-135^\circ)=-\sin 135^\circ=-\sqrt{2}/2.$$

С л е д с т в и е. *Тангенс и котангенс — функции нечетные.*

□ Действительно,

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

для любого допустимого $\alpha\in \boldsymbol{R}$. ■

Например,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}(-135^\circ)=-\operatorname{tg}135^\circ=1,\qquad \operatorname{ctg}(-135^\circ)=-\operatorname{ctg}135^\circ=1.$$

Т е о р е м а 2. *Функции синус и косинус являются периодическими функциями. Наименьший положительный период синуса и косинуса равен 2π.*

□ Числам α, $\alpha+2\pi$ и $\alpha-2\pi$ соответствует одна и та же точка единичной окружности с центром в начале координат, поэтому

$$\cos(\alpha\pm 2\pi)=\cos\alpha,\quad \sin(\alpha\pm 2\pi)=\sin\alpha$$

для любого $\alpha\in \boldsymbol{R}$. Следовательно, число 2π является периодом синуса и косинуса.

Функция $\sin\alpha$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ обращается в нуль при $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ и $\alpha=2\pi$. Поэтому, если у синуса есть положительный период, меньший 2π, то он равен π. Однако π не является периодом синуса, так как

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \text{но}\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1.$$

Следовательно, 2π — наименьший положительный период синуса.

Аналогично доказывается, что 2π — наименьший положительный период косинуса. ■

Заметим, что под периодом функции обычно понимается ее наименьший положительный период, и поэтому теорему 2 часто формулируют так: *синус и косинус являются периодическими функциями с периодом 2π.*

Прежде чем доказывать теорему о периодичности тангенса и котангенса, заметим, что

$$\sin(\alpha\pm\pi)=-\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha\pm\pi)=-\cos\alpha \tag{2}$$

для любого $\alpha\in \boldsymbol{R}$. Действительно, числам α и $\alpha\pm\pi$ на единичной окружности (рис. 73) соответствуют точки M_α и $M_{\alpha\pm\pi}$, симметричные относительно начала координат, и поэтому справедливы формулы (1) и (2).

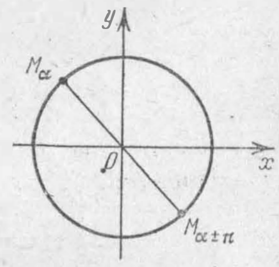


Рис. 73

Т е о р е м а 3. *Тангенс и котангенс являются периодическими функциями. Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен π.*

□ Из формул (1) и (2) следует, что

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$$

для любого допустимого $\alpha\in \boldsymbol{R}$, т. е. число π — период тангенса и котангенса. А так как расстояние между соседними нулями и у тангенса, и у котангенса равно π, то π — наименьший период. ■

Коротко теорему 3 можно сформулировать так: *тангенс и котангенс являются периодическими функциями с периодом π.*

П р и м е р. Вычислить значение выражения

$$\cos(-5\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+3\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$

△ Пользуясь свойствами четности (нечетности) и периодичности тригонометрических функций, получаем

$$\cos(-5\pi)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+3\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos 5\pi-\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{2}+\sin\frac{5\pi}{2}-3\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}=$$

$$=\cos\pi-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=$$

$$=-1-0+1-3=-3.\ ▲$$

Вопросы для контроля

1. Дайте определение угла в 1 радиан.

2. Какова формула, связывающая радианную и градусную меры угла?

3. Как определяются синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа?

4. Каким основным соотношением связаны синус и косинус действительного числа?

5. Каким основным соотношением связаны тангенс и котангенс действительного числа?

6. Дайте определение основных тригонометрических функций.

7. Назовите основные свойства тригонометрических функций.

8. Каковы значения тригонометрических функций для следующих значений аргумента: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$?

9. Каковы знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в различных координатных четвертях?

Упражнения

5.37. 1) Какова радианная мера угла, выраженного в градусах: $80°$; $65°$; $100°$; $160°$; $244{,}38°$; $146{,}18°$; $27{,}13°$; $42{,}7°$?

2) Какова градусная мера угла, выраженного в радианах: $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{5}$; 4; 1,57; 0,6400; 3,6270?

5.38. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(1;\ 0)$ на угол:

1) 9π; 2) $-\frac{13\pi}{2}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $-225°$;

5) $\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$; 6) $\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi$.

5.39. Решите уравнения:

1) $\sin x = -1$; 2) $\sin x = 0$; 3) $\cos x = 0$; 4) $\cos x = -1$;

5) $3\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$; 6) $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$.

5.40. Вычислите:

1) $\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

2) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{2}\sin(-765°) - \cos(-1140°) + \operatorname{tg}585° + \sqrt{3}\operatorname{ctg}(-240°)$;

4) $\cos(-3\pi) + \sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

5.41. Решите уравнения:

1) $\sin(-x) = -1$; 2) $\cos(-x) = 1$; 3) $\sin(-2x) = 0$;
4) $\cos(-3x) = -1$.

5.42. Найдите знаки чисел:

1) $\sin 217°$; 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}4$; 4) $\operatorname{ctg}237°$;

5) $\sin 2{,}8\pi$; 6) $\cos 1{,}2\pi$.

Найдите эти числа с помощью микрокалькулятора.

5.43. Дано $\sin\alpha = 0{,}8$, $\pi/2 < \alpha < \pi$. Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

5.44. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -4/3$ и $0 < \alpha < \pi$.

5.45. Могут ли иметь место следующие равенства для одного и того же значения аргумента α:

1) $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = -4/5$; 2) $\sin\alpha = -12/13$, $\cos\alpha = 5/13$;

3) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\alpha = -0{,}6$;

4) $\sin\alpha = \sqrt{40}/7$, $\cos\alpha = 3/7$; 5) $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 1$?

5.46. Чему равен $\sin\alpha$, если $\cos\alpha \approx 0{,}7538$?

5.47. Дано $\cos\alpha = b/c$, $0 < b < c$, $0 < \alpha < \pi/2$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

5.48. Найдите $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -3/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$.

5.49. Докажите, что

1) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

2) $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

3) $\cos^2\alpha(2\operatorname{tg}\alpha + 1)(\operatorname{tg}\alpha + 2) - 5\sin\alpha\cos\alpha = 2$;

4) $2 + \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$;

5) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{2}{|\cos\alpha|}$.

5.50. Упростите следующие выражения при всех α, для которых они определены:

1) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$;

2) $(\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha)^2 + (\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha)^2$;

3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + 1$; 4) $\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)$.

§ 25. Основные формулы тригонометрии, их следствия

1. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов. Пусть даны два действительных числа α и β. Рассмотрим простейший случай, когда $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \leqslant 2\pi$.

Пусть точка M единичной окружности соответствует действительному числу $\alpha + \beta$; ее координаты будут координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 74). Имеем

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{i}\cos(\alpha+\beta) + \boldsymbol{j}\sin(\alpha+\beta). \qquad (1)$$

Введем другую систему координат, которая получается из первой поворотом на угол α против часовой стрелки.

Тогда для того же радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в новой системе получим

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{i}'\cos\beta+\boldsymbol{j}'\sin\beta. \qquad (2)$$

Выразим теперь единичные векторы новой системы через единичные векторы старой системы (рис. 75):

$$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha, \quad \boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha.$$

Теперь равенство (2) можно записать так:

$$\overrightarrow{OM}=(\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha)\cos\beta+(-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha)\sin\beta,$$

т. е.

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{i}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+$$
$$+\boldsymbol{j}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta). \qquad (3)$$

В силу единственности разложения вектора по двум базисным векторам, сравнивая равенства (1) и (3), получаем формулы для синуса и косинуса суммы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

В общем случае эти формулы доказываются аналогично. Будем считать, что они доказаны для любых

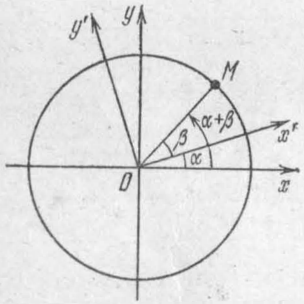


Рис. 74

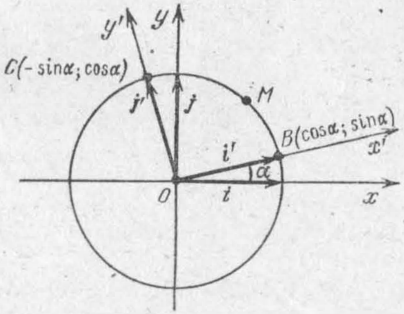


Рис. 75

действительных чисел α и β. Заменив в них β на $-\beta$, получим формулы для синуса и косинуса разности:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Тангенс и котангенс суммы двух аргументов можно получить из предыдущих формул:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Так как для аргументов $\frac{\pi}{2}+\pi k$ тангенс не существует, то нужно считать, что $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Полученная формула будет проще, если числитель и знаменатель ее правой части разделить на произведение $\cos\alpha\cos\beta$. Получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Если в этой формуле вместо β поставить $-\beta$, то, так как тангенс — функция нечетная, получим

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Отметим, что в последних формулах числа α, β, $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ не являются числами вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Пример 1. Используя формулы сложения, вычислить $\cos 75°$ и $\sin 75°$.

$\triangle$ $\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-$

$$-\sin 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}25,$$

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}96. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Дано $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$. Известно, что $\pi/2<\alpha<\pi$ и $\pi/2<\beta<\pi$. Найти $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$.

$\triangle$ $\cos\alpha=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8$, $\cos\beta=-\sqrt{1-0{,}8^2}=$
$=-0{,}6$,

$$\sin(\alpha+\beta)=0{,}6\cdot(-0{,}6)+(-0{,}8)\cdot 0{,}8=-1,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=(-0{,}8)\cdot(-0{,}6)-0{,}6\cdot 0{,}8=0. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Упростить выражение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

△ Используя формулу синуса разности, получим

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1. \blacktriangle$$

Пример 4. Упростить $\frac{1+\operatorname{tg}2{,}4\cdot\operatorname{tg}0{,}15}{\operatorname{tg}2{,}4-\operatorname{tg}0{,}15}$.

△ По формуле тангенса разности получим

$$\frac{1+\operatorname{tg}2{,}4\cdot\operatorname{tg}0{,}15}{\operatorname{tg}2{,}4-\operatorname{tg}0{,}15}=\frac{1}{\operatorname{tg}(2{,}4-0{,}15)}=\frac{1}{\operatorname{tg}2{,}25}=\operatorname{ctg}2{,}25. \blacktriangle$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x=0.$$

△ Так как

$$\sin x\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x=\sin\frac{3x}{2},$$

то $\sin\frac{3x}{2}=0$. Следовательно, $\frac{3x}{2}=\pi k$, т. е.

$$x=\frac{2}{3}\pi k, \quad \text{где} \quad k\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x=\frac{2}{3}\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ▲

2. Формулы приведения. Формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов

$$-\alpha;\ \frac{\pi}{2}\pm\alpha;\quad \pi\pm\alpha;\quad \frac{3}{2}\pi\pm\alpha;\quad 2\pi k\pm\alpha$$

через тригонометрические функции аргумента α, где α — любое допустимое значение аргумента, называются *формулами приведения*.

Все формулы приведения даны в следующей таблице:

Аргумент	Функция cos	sin	tg	ctg
$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Любая из формул приведения может быть выведена с помощью формул суммы и разности двух аргументов.

Пример 1. Доказать, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

для любого $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

△ По формуле для синуса разности двух аргументов получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=\cos\alpha.$$

Аналогично, по формуле для косинуса разности

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha. \blacktriangle$$

Свойство периодичности позволяет сводить вычисления значений тригонометрических функций любого действительного аргумента к вычислению их значений для аргумента в промежутке от 0 до 2π (для тангенса и котангенса — в промежутке от 0 до π).

Формулы приведения позволяют свести вычисления значений тригонометрических функций любого аргумента, принадлежащего области определения этих функций, к вычислению их значений в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\cos\frac{10\pi}{3}$.

$$\triangle \cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Упростить выражение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha).$$

$$\triangle \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+$$
$$+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=\cos\alpha-\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=0.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Решить уравнение $\cos(\pi-0{,}5x)+\cos(\pi+0{,}5x)=0$.

$$\triangle -\cos 0{,}5x-\cos 0{,}5x=0,$$
$$-2\cos 0{,}5x=0,$$
$$\cos 0{,}5x=0,$$
$$0{,}5x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$
$$x=\pi+2\pi k, \quad \text{где } k\in Z.$$

Ответ: $x=\pi\cdot(2k+1)$, $k\in Z$. ▲

3. Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов. Формулы двойного аргумента выражают тригонометрические функции аргумента 2α через тригонометрические функции аргумента α.

Если в формуле для косинуса суммы положить $\beta=\alpha$, то получим

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha,$$

и, следовательно,

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Итак, *косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента.*

Если в формуле для синуса суммы положить $\beta=\alpha$, то получим

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha,$$

и, следовательно,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Итак, *синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента.*

Аналогично выводятся формулы двойного аргумента для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

и

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Пример 1. Дано $\operatorname{tg}\alpha=3/4$. Вычислить $\operatorname{tg} 2\alpha$.

$$\triangle \operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=3\frac{3}{7}.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Дано $\sin\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\pi/2$. Вычислить $\sin 2\alpha$.

$$\triangle \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot 0{,}8\cos\alpha=$$
$$=1{,}6\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}=1{,}6\cdot\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}96.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Решить уравнение $\sin 3x\cos 3x+\frac{1}{2}=0$.

$$\triangle \sin 3x\cos 3x+\frac{1}{2}=0,$$
$$2\sin 3x\cos 3x+1=0,$$
$$\sin 6x=-1,$$
$$6x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$
$$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k, \quad k\in Z.\ \blacktriangle$$

Если выразить правую часть формулы для $\cos 2\alpha$ только через одну тригонометрическую функцию (синус или косинус), то получим

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

Эти формулы дают возможность выразить $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ и $\operatorname{tg}^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Эти формулы иногда называют *формулами понижения степени.*

Пример 4. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos 2\alpha = 4/5$ и $0 < \alpha < \pi/2$.

$\triangle$ Имеем: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-\frac{4}{5}}{2} = 0{,}1.$

Следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{0{,}1}$, так как $\sin\alpha > 0$. ▲

Пример 5. Вычислить $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{\pi}{8}$.

$\triangle$ Так как $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Перед корнем ставится знак плюс, так как $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ и $\cos\frac{\pi}{8} > 0$. ▲

Пример 6. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, где $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Вычислить $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$\triangle$ Находим $\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. Так как $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, то $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, и поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}. \blacktriangle$$

Пример 7. Решить уравнение $1+\cos 4x = -2\cos 2x$.

$$\triangle\ 1+\cos 4x = -2\cos 2x,$$
$$2\cos^2 2x = -2\cos 2x,$$
$$\cos^2 2x + \cos 2x = 0,$$
$$\cos 2x(\cos 2x + 1) = 0,$$

$$\cos 2x = 0 \qquad \text{или} \qquad \cos 2x + 1 = 0,$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad \cos 2x = -1,$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbf{Z}, \qquad 2x = \pi + 2\pi k,$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \blacktriangle$$

4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и разность, и наоборот. Если тождества

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

сложить почленно, то получим

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$

т. е.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)). \qquad (1)$$

Если тождества

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

сложить почленно, то получим

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)), \qquad (2)$$

а если вычесть, то получим

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

В формуле (1) положим $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$. Тогда

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2},$$

и из формулы (1) получаем

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

т. е. *сумма синусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности данных аргументов.*

Заменив в последней формуле y на $-y$, получим

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

т. е. *разность синусов равна удвоенному произведению синуса полуразности на косинус полусуммы данных аргументов.*

Для суммы и разности косинусов из (2) и (3) получаются следующие формулы:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

т. е. *сумма косинусов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности данных аргументов;*

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

т. е. *разность косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности данных аргументов, взятому со знаком минус.*

П р и м е р 1. Упростить $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\sin 5\alpha$.

$\triangle$ $\sin 2\alpha\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\sin 5\alpha=$

$$=\frac{1}{2}(\sin(-\alpha)+\sin 5\alpha)-\frac{1}{2}\sin 5\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 5\alpha-\frac{1}{2}\sin 5\alpha=-\frac{1}{2}\sin\alpha. \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Вычислить $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

$\triangle$ $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=$

$$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}. \blacktriangle$$

П р и м е р 3. Решить уравнение $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}$.

$\triangle$ $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos x=1,$$

$$x=2\pi k,\quad k\in Z. \blacktriangle$$

5*. Преобразование выражений $a\sin\alpha+b\cos\alpha$. При решении некоторых задач, например при исследовании гармонических колебаний, бывает необходимо преобразовать в произведение выражение вида

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha.$$

Обозначим

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Тогда для любых чисел a и b всегда найдется такое φ, что

$$a=r\cos\varphi \text{ и } b=r\sin\varphi, \tag{1}$$

и данную сумму можно записать так:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=r(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha)=r\sin(\alpha+\varphi).$$

Зная r, из равенств (1) находим

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

П р и м е р 1. Пусть точка M под действием силы F_1 совершает вдоль оси Oy гармоническое колебание $y=2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$, а под действием силы F_2 — гармоническое колебание $y=3\sin\pi t$.

Определить, какое движение будет совершать точка M при одновременном действии обеих сил.

$\triangle$ По законам механики точка M будет совершать колебание

$$y=2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\pi t=$$

$$=2\sin\pi t\cos\frac{\pi}{3}+2\cos\pi t\sin\frac{\pi}{3}+3\sin\pi t=$$

$$=4\sin\pi t+\sqrt{3}\cos\pi t.$$

Преобразуем полученную сумму в произведение. Имеем

$$r=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19},$$

следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{19}},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}},$$

и по таблицам находим $\varphi\approx 0{,}4078$.

Итак, $y=4\sin\pi t+\sqrt{3}\cos\pi t\approx\sqrt{19}\sin(\pi t+0{,}4078)$. Это означает, что точка M при одновременном действии двух сил F_1 и F_2 (направленных вдоль оси Oy) будет совершать гармоническое колебание с амплитудой $\sqrt{19}$, начальной фазой $\varphi\approx 0{,}4078$ и с той же частотой, как при действии силы F_1 или F_2.

Вопросы для контроля

1. Запишите формулы сложения для тригонометрических функций.
2. Выведите формулы приведения для аргументов $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$.
3. Запишите формулы двойного и половинного аргументов.

4. Выведите формулы для $\cos 2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$.

5. Запишите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность.

6. Запишите формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Упражнения

5.51. Вычислите:
1) $\sin 14^\circ \cos 31^\circ + \sin 31^\circ \cos 14^\circ$;
2) $\sin 55^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 55^\circ$;
3) $\sin 63^\circ \cos 33^\circ - \cos 63^\circ \sin 33^\circ$;
4) $\sin 24^\circ \cos 36^\circ - \cos 24^\circ \sin(-36^\circ)$; 5) $\sin 105^\circ$; 6) $\cos 105^\circ$.

5.52. Вычислите:
1) $\cos 5^\circ \cos 40^\circ - \sin 5^\circ \sin 40^\circ$;
2) $\cos 127^\circ \cos 37^\circ + \sin 37^\circ \sin 127^\circ$;
3) $\sin 46^\circ30' \cos 43^\circ30' + \sin 43^\circ30' \cos 46^\circ30'$;
4) $\cos 113^\circ30' \cos 53^\circ30' + \sin 113^\circ30' \sin 53^\circ30'$;
5) $\cos\frac{11\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{11\pi}{7}$;
6) $\sin\frac{13\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} - \sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$.

5.53. Упростите выражения:
1) $\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha$;
2) $\cos(60^\circ+\alpha)\cos\alpha + \sin(60^\circ+\alpha)\sin\alpha$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+2\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\beta\right)$;
4) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;
5) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;
6) $\cos 5\beta + \sin 2\beta \sin 3\beta$.

5.54. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, если

$$\cos\alpha = -8/17,\ \cos\beta = 4/5,\ \pi < \alpha < 3\pi/2 < \beta < 2\pi.$$

5.55. Чему равно значение $\sin(\alpha+\beta)$, если

$$\sin\alpha = 12/13,\ \cos\beta = -3/5,\ 0 < \alpha < \pi/2,\ \pi < \beta < 3\pi/2?$$

5.56. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = 5/13$, $\sin\beta = -3/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 3\pi/2$.

5.57. Докажите тождества:
1) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$;
3) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
4) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$.

5.58. Решите уравнения:
1) $\cos 3x\cos 2x - \sin 3x \sin 2x = 1$;
2) $\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$;
3) $\sqrt{2}\cos(45^\circ+x) + \sin x = -1$; 4) $\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0$.

5.59. Вычислите:
1) $\frac{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}43^\circ}{1-\operatorname{tg}17^\circ\operatorname{tg}43^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}19^\circ-\operatorname{tg}41^\circ}{1+\operatorname{tg}19^\circ\operatorname{tg}41^\circ}$;
3) $\frac{1+\operatorname{tg}77^\circ30'\operatorname{tg}32^\circ30'}{\operatorname{tg}77^\circ30'-\operatorname{tg}32^\circ30'}$; 4) $\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}$.

5.60. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если

$$\operatorname{tg}\alpha = 3/4,\ \cos\beta = 3/5 \text{ и } 0 < \alpha < \pi/2,\ 0 < \beta < \pi/2.$$

5.61. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если

$$\sin\alpha = 1/\sqrt{5},\ \operatorname{tg}\beta = 1/3 \text{ и } 0 < \alpha < \pi/2,\ 0 < \beta < \pi/2.$$

5.62. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если

$$\cos\alpha = 2/\sqrt{5},\ \operatorname{tg}\beta = 1/3 \text{ и } 0 < \alpha < \pi/2,\ 0 < \beta < \pi/2.$$

5.63. Вычислите:
1) $\sin 330^\circ$; 2) $\cos 570^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}225^\circ$; 4) $\operatorname{tg}135^\circ$;
5) $\sin(-930^\circ)$; 6) $\operatorname{ctg}(-3810^\circ)$; 7) $\cos\frac{8\pi}{3}$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$;
9) $\sin 2010^\circ + 4\operatorname{tg}(-855^\circ) + \sqrt{3}\cos(-1590^\circ)$;
10) $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - 6\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) + 2\operatorname{tg}\frac{15\pi}{4} - \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{6}$.

5.64. Докажите тождества:
1) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -1$;
2) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\beta-\frac{3\pi}{2}\right)} = -\sin\beta$;
3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\sin(2\pi-\alpha)\cdot\cos(\alpha-2\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)} = \sin^2\alpha$;
4) $\cos(45^\circ+\alpha) = \sin(45^\circ-\alpha)$.

5.65. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

5.66. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

5.67. Упростите выражения:

1) $\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\,(1+\cos 2\alpha)$;

3) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 4) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin 2\alpha$.

5.68. Докажите тождества:

1) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{1+\cos 6x}{2\sin^2 3x}\cdot\operatorname{tg}^2 3x=$

5.69. Решите уравнения:

1) $1+\cos x=2\cos\frac{x}{2}$; 2) $1-\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{4}$;

3) $\frac{1}{2}\sin 4x+2\cos^2 x-1=0$; 4) $2\sin^2 x-3\cos 2x=-3$.

5.70. Произведения представьте в виде сумм:

1) $\sin 10^\circ\sin 20^\circ$; 2) $\sin 45^\circ\cos 30^\circ$; 3) $\cos 35^\circ\sin 25^\circ$;

4) $\cos 55^\circ\cos 20^\circ$; 5) $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$;

6) $\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$; 7) $\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$.

5.71. Вычислите, не пользуясь таблицами:

1) $\sin 82^\circ30'\cos 52^\circ30'$; 2) $\sin 82^\circ30'\cos 37^\circ30'$;

3) $\cos 37^\circ30'\cos 7^\circ30'$; 4) $\cos 82^\circ30'\cos 37^\circ30'$;

5) $\cos 75^\circ\cos 105^\circ$; 6) $\cos 45^\circ\cos 75^\circ$.

5.72. Упростите выражения:

1) $\cos 50^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\cos 70^\circ$;

2) $2\sin 70^\circ\sin 10^\circ+\cos 80^\circ$;

3) $2\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos 3\alpha$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1$.

5.73. Докажите, что

1) $2\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$;

2) $2\sin\alpha\sin 3\alpha+2\cos 7\alpha\cos 3\alpha-\cos 10\alpha=\cos 2\alpha$.

5.74. Вычислите без применения таблиц:

1) $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ$; 2) $\sin 105^\circ-\sin 75^\circ$;

3) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi$; 4) $\sin\frac{11}{12}\pi-\sin\frac{5}{12}\pi$;

5) $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{7}{12}\pi$; 6) $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{7}{12}\pi$;

7) $\cos 97^\circ+\cos 83^\circ$; 8) $\cos 105^\circ-\cos 75^\circ$;

9) $\cos\frac{11}{12}\pi+\cos\frac{5}{12}\pi$; 10) $\cos\frac{11}{12}\ \ -\cos\frac{5}{12}\pi$.

5.75. Упростите данные выражения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\cos(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)$; 4) $\cos(\alpha+60^\circ)-\cos(\alpha-60^\circ)$;

5) $\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}$; 6) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

5.76. Данные выражения представьте в виде произведений:

1) $1+2\sin\alpha$; 2) $1-2\sin\alpha$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha$; 4) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$;

5) $0{,}5+\cos\alpha$; 6) $0{,}5-\cos\alpha$; 7) $\cos\alpha+1$; 8) $1-\cos\alpha$.

5.77. Докажите, что

1) $2(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{8}\sin(\alpha+45^\circ)$;

2) $2(\sin\alpha-\cos\alpha)=\sqrt{8}\sin(\alpha-45^\circ)$;

3) $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$;

4) $\frac{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 3\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha$.

5.78. Вычислите

$$\cos 95^\circ+\cos 94^\circ+\cos 93^\circ+\cos 85^\circ+\cos 86^\circ+\cos 87^\circ.$$

5.79. Решите уравнения:

1) $\sin 5x+\sin x=0$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{15}\right)=0$;

3) $\cos 2x+\cos x=0$;

4) $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$;

5) $\frac{\sqrt{6}}{2}\sin x=\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$;

6) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\cos\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}$.

5.80. Упростите выражения при всех α, для которых они определены:

1) $1+\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha$;

2) $\frac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

4) $\frac{1-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-3\alpha)-\sin(-\alpha)}$; 5) $\frac{\sin\alpha-0{,}5\sin(\pi+2\alpha)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

6) $\frac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)}-\sin^2\alpha$; 7) $\frac{2\cos^2\alpha}{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)}-\cos^2\alpha$;

8) $\frac{\cos(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}-\sin^2\alpha$; 9) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos^2\alpha$;

10) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

5.81. Докажите тождества:

1) $\cos^4\dfrac{\alpha}{2}-\sin^4\dfrac{\alpha}{2}=\cos\alpha$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=\sin 2\alpha$;

3) $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 4) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-1=-\sin 2\alpha$.

5.82. Докажите, что $\cos 15°\sin 15°=0{,}25$.

5.83. Известно, что $\cos 2\alpha=0{,}5$. Найдите $\cos^2\alpha$.

5.84. Докажите, что

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

для любого допустимого $\alpha\in R$.

5.85. Решите уравнения:

1) $\sin 2x-2\sin x=0$; 2) $\cos x+\sin^2\dfrac{x}{2}=1$;

3) $\cos^2 x=\sin^2 x$; 4) $\sin 2x\cos 2x-\dfrac{1}{2}=0$.

5.86. Выразите значения функции данного аргумента через значения функции вдвое большего аргумента:

1) $\cos^2 15°$; 2) $\sin^2 1{,}5\alpha$; 3) $\sin^2\left(45°+\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.87. Решите уравнения:

1) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=1$; 2) $\sin(\pi+3x)=0$;

3) $\sin\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=0$;

4) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+3x\right)\cos x+\sin 3x\sin(\pi-x)=-1$.

5.88. Выразите функции данного аргумента через функции вдвое меньшего аргумента:

1) $\sin 54°$; 2) $\cos 106°$; 3) $\operatorname{tg} 68°$; 4) $\sin 4\beta$;

5) $\cos 3\alpha$; 6) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 7) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)$;

8) $\sin\dfrac{\alpha}{4}$; 9) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$; 10) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}-\alpha\right)$.

5.89. Вычислите:

1) $2\sin 15°\cos 15°$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg} 22°30'}{1-\operatorname{tg}^2 22°30'}$;

3) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$; 4) $1-2\sin^2 75°$;

5) $2\sin 75°\cos 75°$; 6) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 75°}{2\operatorname{tg} 75°}$.

5.90. Вычислите:

1) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=3/5$ и $0<\alpha<\pi/2$;
2) $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-4/5$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$;

3) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos\alpha=-3/5$ и $\pi/2<\alpha<\pi$;
4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $0<\alpha<\pi/2$.

5.91. Найдите $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\pi/2$.

5.92. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=8/13$, $\sin\alpha>0$.

5.93. Что больше: $\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha$, если $0<\alpha<\pi/2$?

5.94. Упростите выражения:

1) $2\sin 40°\sin 50°$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg} 30°}{1-\operatorname{tg}^2 30°}$;

3) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $(\cos 15°-\cos 75°)(\sin 75°+\sin 15°)$.

§ 26. Тригонометрические функции, их графики

1. Непрерывность тригонометрических функций.

Лемма. *Для любого действительного числа α такого, что $0<|\alpha|<\pi/2$, справедливо неравенство*

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1. \qquad (1)$$

□ Пусть сначала $0<\alpha<\pi/2$. Построим единичный круг и угол AOB величины α (рис. 76). Далее опустим перпендикуляр BD из точки B на радиус OA и построим треугольник AOC. Тогда

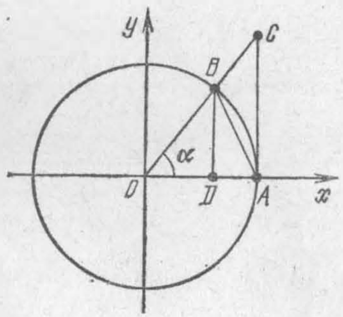


Рис. 76

$$S_{\triangle AOB}<S_{\text{сект. }AOB}<S_{\triangle AOC},$$

где $S_{\triangle}$ — площадь треугольника, $S_{\text{сект}}$ — площадь сектора.

Так как $|BD|=\sin\alpha$ и $|AC|=\operatorname{tg}\alpha$, то

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\text{сект. }AOB}=\frac{1}{2}\alpha,\quad S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|AC|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Сравнивая эти площади, получаем

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

Разделив все члены этого неравенства на $\sin\alpha$, получим

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}\quad\text{или}\quad\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1.$$

Заметим, что функции $\cos\alpha$ и $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ — четные, и поэтому неравенства (1) справедливы не только для $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, но и для $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. ■

Из неравенства (1) следует, что

$$|\sin\alpha| < |\alpha|$$

для любого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq 0$.

А так как $\sin 0 = 0$ и $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то

$$|\sin\alpha| \leqslant |\alpha| \qquad (2)$$

для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Теорема. *Тригонометрические функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *непрерывны в любой точке* $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

□ Для любых действительных чисел x и x_0 справедливо равенство

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2},$$

и поэтому, в силу неравенства (2),

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left|\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0|,$$

т. е.

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|.$$

Из последнего неравенства следует, что $\sin x \to \sin x_0$ при $x \to x_0$, а это и означает непрерывность $\sin x$ в точке x_0.

Аналогично доказывается непрерывность косинуса. ■

Следствие. *Тригонометрические функции* $\operatorname{tg} x$ *и* $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны в любой точке области определения.*

Это утверждение следует из доказанной теоремы и теоремы о непрерывности частного непрерывных функций.

2. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. В предыдущих пунктах показано, что функция $y = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$, — непрерывная, периодическая с периодом 2π, нечетная и ограниченная, причем $|\sin x| \leqslant 1$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$. Используем изученные свойства функции $y = \sin x$ для построения ее графика.

Итак, функция $y = \sin x$ обладает следующими свойствами:

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел.

2) Множество значений функции — отрезок $[-1; 1]$, т. е. график функции располагается в полосе, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

3) Синус — функция периодическая с периодом 2π; при построении графика можно ограничиться его построением на отрезке длиной 2π (например, на отрезке от $-\pi$ до π),

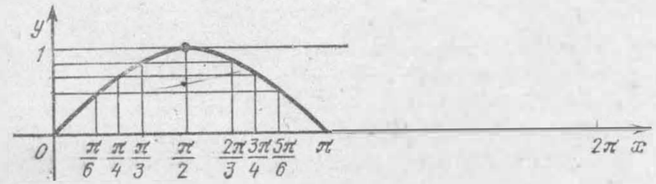


Рис. 77

а затем выполнить параллельные переносы построенной части графика на $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4) Синус — функция нечетная; график функции симметричен относительно начала координат, и поэтому его можно построить на отрезке $[0; \pi]$, а затем симметрией получить его на отрезке $[-\pi; 0]$.

5) Синус — функция непрерывная на всей числовой прямой.

Построим график функции $y = \sin x$.

Решая уравнение $\sin x = 0$ на отрезке $[0; \pi]$, находим $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, т. е. график функции пересекает в этих точках ось абсцисс. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ синус возрастает от 0 до 1; на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ синус убывает от 1 до 0.

Возьмем несколько промежуточных значений на отрезке $[0; \pi]$ и составим таблицу

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Построим эти точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 77). Выполнив последовательно симметрию полученной части графика относительно начала координат, а затем параллельные переносы на $2\pi k$, $k \in Z$, получим график функции $y=\sin x$, который называется *синусоидой* (рис. 78).

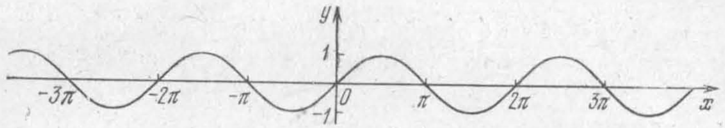


Рис. 78

6) Нулями функции являются точки $x=\pi k$, $k \in Z$.

7) Функция $y=\sin x$ строго возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$, и строго убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in Z$.

8) Функция $y=\sin x$ имеет минимумы, равные -1, в точках $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$, и имеет максимумы, равные 1, в точках $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Так как $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ для любого $x \in R$, то график функции $\cos x$, $x \in R$, получается из графика функции $\sin x$, $x \in R$, смещением вдоль оси абсцисс влево на

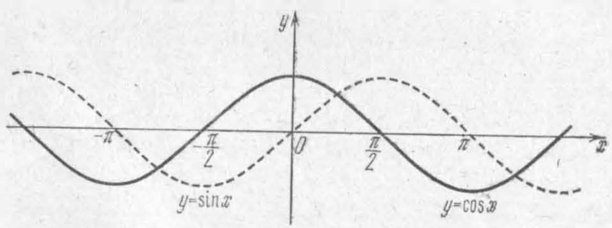


Рис. 79

отрезок длины $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, графиком косинуса будет смещенная синусоида (рис. 79), называемая *косинусоидой*.

Перечислим основные свойства функции $y=\cos x$.

1) Область определения — множество R.

2) Множество значений функции — отрезок $[-1; 1]$.

3) Косинус — функция периодическая с периодом 2π.

4) Косинус — функция четная (график симметричен относительно оси Oy).

5) Косинус — функция непрерывная в любой точке $x_0 \in R$.

6) Нулями функции являются точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

7) Функция строго возрастает от -1 до 1 на промежутках $[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k]$, $k \in Z$, и строго убывает от 1 до -1 на промежутках $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$, $k \in Z$.

8) Функция имеет минимумы, равные -1, в точках $x=\pi+2\pi k$, $k \in Z$, и максимумы, равные 1, в точках $x=2\pi k$, $k \in Z$.

3. Свойства и графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$. Функция $y=\operatorname{tg} x$ обладает следующими свойствами:

1) Область определения — множество R, кроме точек $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.

2) Множество значений — множество R.

3) Тангенс — функция периодическая с периодом π; при построении графика можно сначала построить его на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

4) Тангенс — функция нечетная; ее график симметричен относительно начала координат, и поэтому можно начинать построение с промежутка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

5) Тангенс — функция непрерывная в любой точке области определения.

Для построения графика функции $y=\operatorname{tg} x$ возьмем несколько точек на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и построим график $y=\operatorname{tg} x$ на этом промежутке. Выполнив последовательно симметрию относительно начала координат и параллельные переносы на πk, $k \in Z$, получим график функции $y=\operatorname{tg} x$, называемый *тангенсоидой* (рис. 80).

6) Нулями функции являются точки $x=\pi k$, $k \in Z$.

7) Тангенс строго возрастает на каждом промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

Так как $\operatorname{ctg} x=-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, то график функции $y=\operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y=\operatorname{tg} x$ параллельным переносом вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ и последующей симметрией относительно оси Ox. График функции $y=\operatorname{ctg} x$ изображен на рис. 81. Он называется *котангенсоидой.*

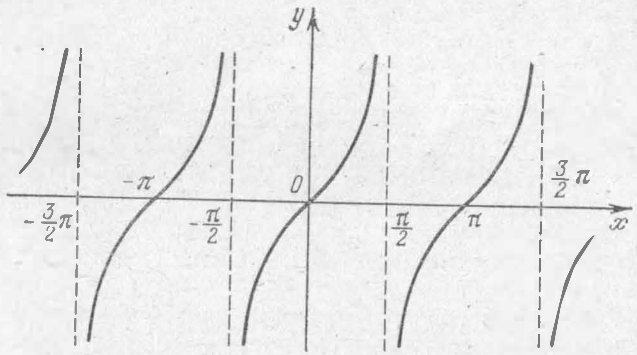


Рис. 80

4. График гармонического колебания. Пусть даны две функции

$$y=\sin x \quad \text{и} \quad y=3\sin x.$$

Построим графики данных функций на одном чертеже (рис. 82). Легко видеть, что график функции $y=3\sin x$

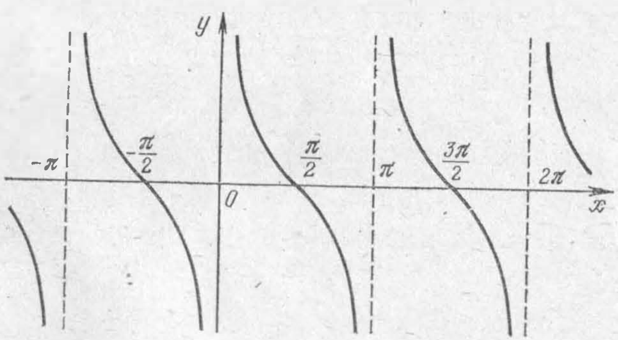


Рис. 81

получается из графика функции $y=\sin x$ растяжением вдоль оси ординат.

Вообще, график функции $y=k\sin x$, $k>0$, получается из графика функции $y=\sin x$ растяжением в k раз вдоль оси ординат. Если $k<0$, то график функции $y=k\sin x$ симметричен относительно оси абсцисс графику функции $y=|k|\sin x$.

Число $|k|$ при изучении гармонических колебаний называют *размахом*, или *амплитудой колебаний.*

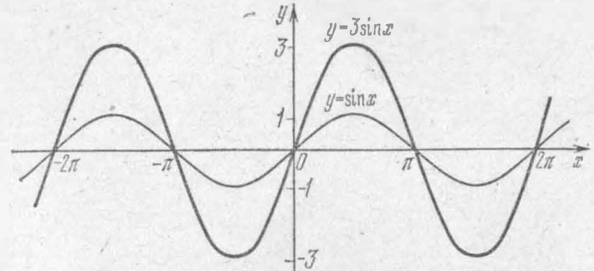


Рис. 82

На рис. 83 даны графики функций:

$$y=\sin x; \qquad y=2\sin x; \qquad y=0{,}5\sin x.$$

Пусть даны две функции

$$y=\sin x \quad \text{и} \quad y=\sin 2x.$$

Построим графики этих функций на одном чертеже (рис. 84). Можно сказать, что график функции $y=\sin 2x$ получается из графика функции $y=\sin x$ сжатием вдоль оси абсцисс.

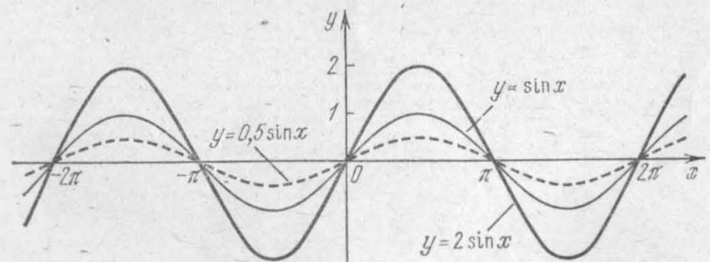


Рис. 83

Вообще, график функции $y=\sin ax$, $a>0$, получается из графика функции $y=\sin x$ сжатием (растяжением) вдоль оси абсцисс в a раз. Если $a<0$, то график функции $y=\sin ax$ симметричен относительно оси абсцисс графику функции $y=\sin(-a)x$.

На рис. 85 даны графики функций

$$y=\sin x, \qquad y=\sin 0{,}5x, \qquad y=\sin 2x.$$

Пусть даны две функции $y=\sin x$ и $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Построим графики этих функций (рис. 86). Можно сказать, что график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ получается

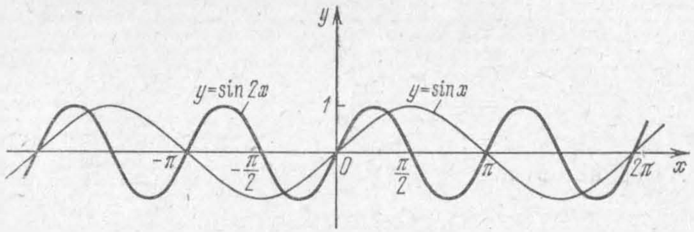


Рис. 84

параллельным смещением синусоиды $y=\sin x$ вдоль оси абсцисс влево на отрезок длины $\frac{\pi}{4}$.

В общем виде синусоида $y=\sin(x+\varphi_0)$ получается из синусоиды $y=\sin x$ смещением ее вдоль оси абсцисс

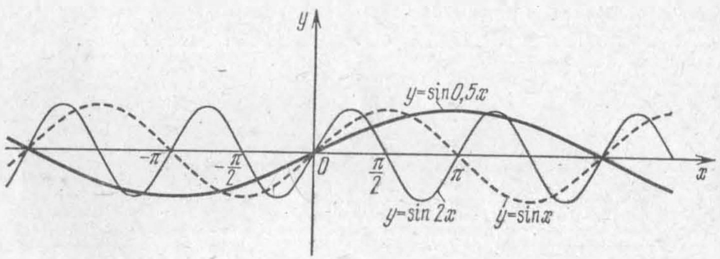


Рис. 85

на отрезок длины $|\varphi_0|$ влево, если $\varphi_0>0$, и вправо, если $\varphi_0<0$.

Пример. Дана функция $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. Описать словами, как выглядит ее график.

△ Это деформированная синусоида. Данную функцию представим следующим образом:

$$y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right).$$

Так как $k=3>0$, то синусоида растянута вдоль оси ординат; так как $a=2>0$, то синусоида сжата вдоль оси абсцисс; так как $\varphi_0=\frac{\pi}{12}>0$, то синусоида смещена влево вдоль оси абсцисс на отрезок длины $\frac{\pi}{12}$. ▲

Вообще, для построения графика функции

$$y=k\sin(ax+\varphi_0), \qquad a\neq 0,$$

ее представляют следующим образом:

$$y=k\sin a\left(x+\frac{\varphi_0}{a}\right).$$

Тогда легко видеть, что график этой функции получается из графика функции $y=k\sin ax$ смещением вдоль оси

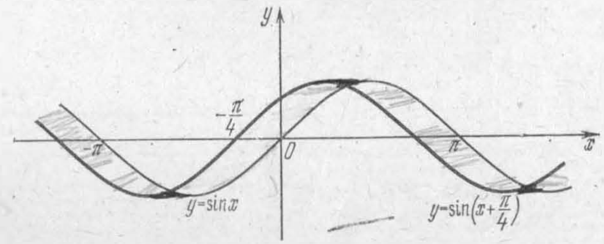


Рис. 86

абсцисс на отрезок длины $\frac{|\varphi_0|}{|a|}$ влево, если $\frac{\varphi_0}{a}>0$, и вправо, если $\frac{\varphi_0}{a}<0$.

Вопросы для контроля

1. Изобразите схематически графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

2. Назовите основные свойства функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Как эти свойства иллюстрируются на графиках?

Упражнение

5.95. Постройте на одном и том же чертеже графики функций:
1) $y=\sin x$ и $y=-2\sin x$;
2) $y=\sin x$ и $y=\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$;
3) $y=\cos x$ и $y=2\cos x$;
4) $y=\cos x$ и $y=\cos 2x$;

5) $y=\sin\frac{x}{2}-1$ и $y=1-\sin\frac{x}{2}$;

6) $y=\cos\frac{x}{2}+1$ и $y=1-\cos\frac{x}{2}$.

§ 27. Обратные тригонометрические функции

1. Функция арксинус и ее график. Пусть дана единичная окружность с центром в начале координат и прямая $y=a$, где $|a|\leqslant 1$ (рис. 87). Тогда одна из точек пересечения прямой и окружности принадлежит полуокружности $\smile CAB$, т. е. существует такое действительное

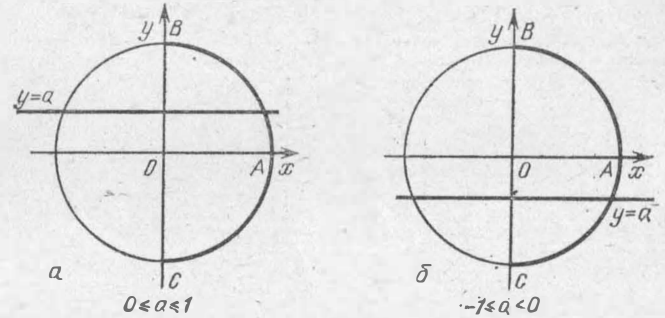


Рис. 87

число α, которое удовлетворяет равенству $\sin\alpha=a$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Такое число называют арксинусом числа a.

Определение. *Арксинусом* числа a, где $|a|\leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Арксинус числа a обозначают так: $\arcsin a$ (читается «арксинус a»).

Пример 1. Найти $\arcsin\frac{1}{2}$.

$\triangle$ Так как $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$\triangle$ Так как $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. $\blacktriangle$

Пример 3. Найти $\arcsin 0{,}975$.

$\triangle$ С помощью таблиц или микрокалькулятора находим $\arcsin 0{,}975\approx 1{,}346721\approx 1{,}35$. $\blacktriangle$

Функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ строго возрастает и непрерывна; следовательно, она имеет обратную

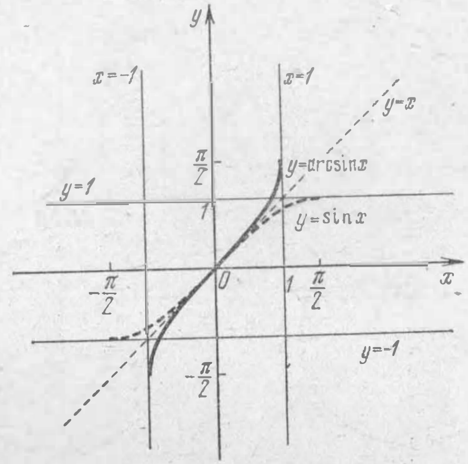


Рис. 88

функцию, строго возрастающую (см. § 16, п. 8) и непрерывную.

Функция, обратная для функции $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом* и обозначается $y=\arcsin x$, $x\in[-1;1]$.

Итак, согласно определению обратной функции, областью определения арксинуса является отрезок $[-1;1]$, а множеством значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Отметим, что график функции

$$y=\arcsin x,\ x\in[-1;1],$$

симметричен графику функции $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, относительно биссектрисы координатных углов первой и третьей четвертей (рис. 88).

2. Функция арккосинус и ее график. Пусть дана единичная окружность с центром в начале координат и прямая $x=a$, где $|a|\leqslant 1$ (рис. 89). Тогда одна из точек пересечения прямой и окружности принадлежит полуокружности ABD, т. е. существует такое действительное число α, которое удовлетворяет равенству $\cos\alpha = a$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Такое число называют арккосинусом числа a.

Определение. *Арккосинусом* числа a, где $|a| \leqslant 1$, называется такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

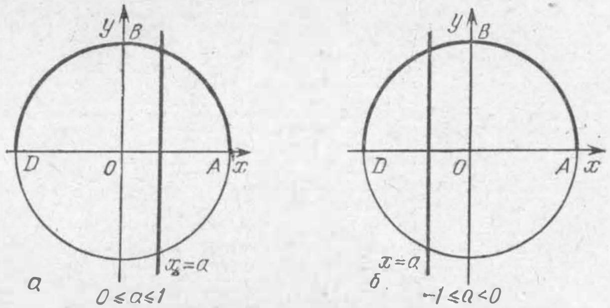


Рис. 89

Арккосинус числа a обозначается так: $\arccos a$ (читается «арккосинус a»).

Пример 1. Найти $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle$ Так как $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$, то $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. $\blacktriangle$

Пример 2. Найти $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\triangle$ Так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. $\blacktriangle$

Пример 3. Найти $\arccos 0{,}2$.

$\triangle$ С помощью таблиц или микрокалькулятора находим $\arccos 0{,}2 \approx 1{,}3694383 \approx 1{,}4$. $\blacktriangle$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ строго убывает и непрерывна; следовательно, она имеет обратную функцию, строго убывающую и непрерывную.

Функция, обратная для функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, называется *арккосинусом* и обозначается $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$.

Итак, согласно определению обратной функции, областью определения арккосинуса является отрезок $[-1; 1]$,

а множеством значений — отрезок $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$, симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, относительно биссектрисы координатных углов первой и третьей четвертей (рис. 90).

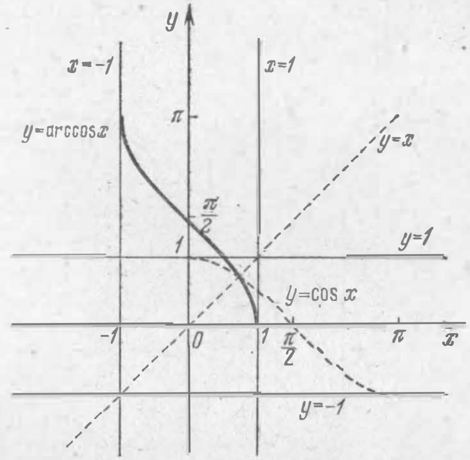


Рис. 90

3. Функции арктангенс и арккотангенс и их графики. Пусть числу α соответствует точка $M(x; y)$ единичной окружности. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$. Поэтому равенство

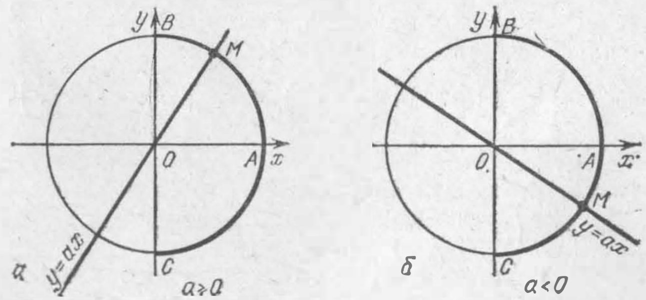


Рис. 91

$\operatorname{tg}\alpha = a$ можно записать в виде $\frac{y}{x} = m$ или $y = ax$. Это означает, что если точка M, соответствующая числу α, лежит на окружности и на прямой $y = ax$, то верно равенство $\operatorname{tg}\alpha = a$.

Одна из точек пересечения прямой $y=ax$ и единичной окружности принадлежит полуокружности CAB (рис. 91), т. е. существует такое действительное число α, которое удовлетворяет равенству $\operatorname{tg}\alpha=a$, где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Такое число называют арктангенсом числа a.

Определение. *Арктангенсом* числа a называется такое число $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

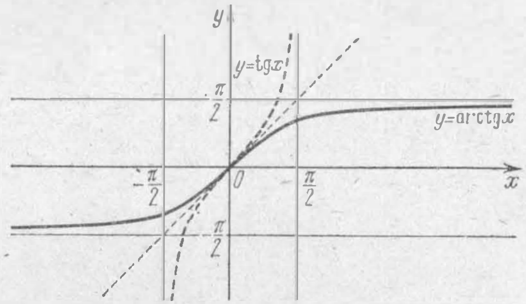


Рис. 92

Арктангенс числа a обозначают так: $\operatorname{arctg}a$ (читается «арктангенс m»).

Пример 1. Найти $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

$\triangle$ Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. ▲

Пример 2. Найти $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

$\triangle$ Так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$. ▲

Функция тангенс непрерывная и строго возрастающая на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; следовательно, она имеет обратную функцию, которая непрерывна и строго возрастает.

Функция, обратная для функции $y=\operatorname{tg}x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, называется *арктангенсом* и обозначается $y=\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbf{R}$.

Итак, согласно определению обратной функции, областью определения арктангенса является интервал $(-\infty;\infty)$, а множеством значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y=\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbf{R}$, симметричен графику функции $y=\operatorname{tg}x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, относительно биссектрисы координатных углов первой и третьей четвертей (рис. 92).

Определение. *Арккотангенсом* числа a называется такое число $\alpha\in(0;\pi)$, котангенс которого равен a.

Арккотангенс числа a обозначают $\operatorname{arcctg}a$ (читается «арккотангенс a»).

Пример 3. Найти $\operatorname{arcctg}(-1)$.

$\triangle$ Так как $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1$ и $\frac{3\pi}{4}\in(0;\pi)$, то $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$. ▲

На интервале $(0;\pi)$ функция котангенс строго убывает; кроме того, она непрерывна в каждой точке этого

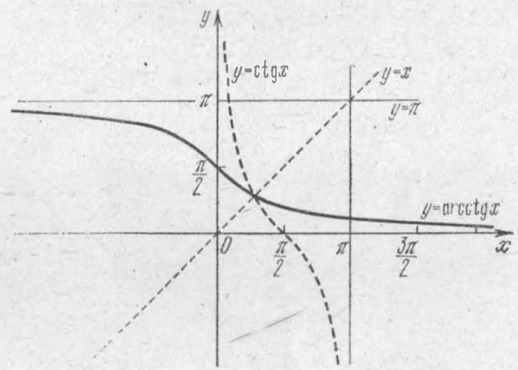


Рис. 93

интервала; следовательно, на интервале $(0;\pi)$ эта функция имеет обратную функцию, которая является строго убывающей и непрерывной.

Функция, обратная для функции $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(0;\pi)$, называется *арккотангенсом* и обозначается $y=\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbf{R}$.

Итак, согласно определению обратной функции, областью определения арккотангенса будет $\mathbf{R}$, а множеством значений — интервал $(0;\pi)$. График функции $y=\operatorname{arcctg}x$, $x\in\mathbf{R}$, дан на рис. 93. Этот график симметричен графику функции $y=\operatorname{ctg}x$, $x\in(0;\pi)$, относительно биссектрисы координатных углов первой и третьей четвертей.

Вопросы для контроля

1. Дайте определение арксинуса числа, приведите примеры.
2. Дайте определение функции $y=\arcsin x$. Назовите ее основные свойства. Нарисуйте график этой функции.
3. Дайте определение арккосинуса числа, приведите примеры.
4. Дайте определение функции $y=\arccos x$. Назовите ее основные свойства. Нарисуйте график этой функции.
5. Дайте определение арктангенса числа. Приведите примеры.
6. Дайте определение функции $y=\operatorname{arctg} x$. Назовите ее основные свойства. Нарисуйте график этой функции.

Упражнения

5.96. Найдите:

1) $\arcsin(-1)$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\arcsin 0$.

5.97. Найдите:

1) $\arccos(-1)$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 6) $\arccos\frac{1}{2}$; 7) $\arccos 0$.

5.98. Найдите:

1) $\operatorname{arctg} 1$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\operatorname{arctg} 0$.

5.99. Найдите:

1) $\operatorname{arcctg} 1$; 2) $\operatorname{arcctg} 0$; 3) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

5.100. Найдите с помощью микрокалькулятора:
1) $\arcsin 0{,}8221$; 2) $\arcsin(-0{,}4051)$; 3) $\arccos 0{,}9128$;
4) $\arccos(-0{,}9703)$; 5) $\operatorname{arctg} 2{,}194$; 6) $\operatorname{arctg}(-7{,}897)$;
7) $\operatorname{arcctg} 3{,}706$; 8) $\operatorname{arcctg}(-264{,}4)$.

5.101. Найдите:

1) $\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+0{,}83\arccos 1$; 3) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\sqrt{3})$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 7) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

8) $\operatorname{tg} 2\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 9) $\arccos\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 10) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$.

5.102. Решите уравнения:

1) $\arcsin 2x=-\frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(x-1)=\frac{\pi}{6}$;

3) $\arccos\frac{x}{4}=\frac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arcctg}(x+1)=\frac{2\pi}{3}$.

5.103. Найдите значения функции $y=\arccos x-\operatorname{arctg} 2x$, если x равно 0; $-1/2$; $-\sqrt{3}/2$.

5.104. Найдите значения функции $y=\operatorname{arcctg} 2x-\arcsin x$, если x равно $-\sqrt{3}/2$; $-1/2$; $1/2$; $\sqrt{3}/2$.

5.105. Постройте графики следующих функций:

1) $y=2\arcsin x$; 2) $y=\arcsin 2x$;

3) $y=\frac{1}{2}\arccos x$; 4) $y=\arccos\frac{x}{2}$.

§ 28. Тригонометрические уравнения

1. Простейшие тригонометрические уравнения. Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида

$$\sin x=a,\ \cos x=a,\ \operatorname{tg} x=a,\ \operatorname{ctg} x=a,$$

где a — данное число.

Очень важно уметь решать простейшие тригонометрические уравнения, так как все способы и приемы решения любых тригонометрических уравнений заключаются в сведении их к простейшим.

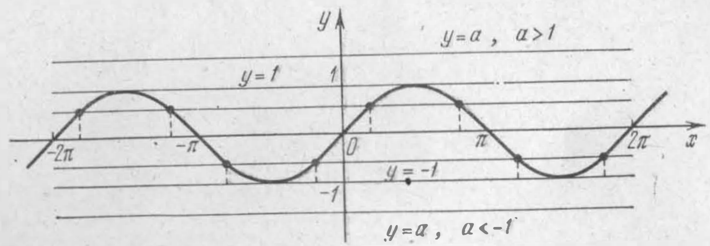


Рис. 94

1. Уравнение вида

$$\sin x=a. \tag{1}$$

Так как $|\sin x|\leqslant 1$, то уравнение (1) при $a>1$ и при $a<-1$ решений не имеет (рис. 94).

Если $a=1$, то уравнение (1) принимает вид $\sin x=1$; его решения:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z. \tag{2}$$

Если $a=-1$, то уравнение (1) принимает вид $\sin x=-1$; его решения:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z. \tag{3}$$

Пусть теперь $|a|<1$. Так как период синуса равен 2π, то для решения уравнения (1) достаточно найти все решения на любом отрезке длины 2π.

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ функция синус имеет два промежутка своей строгой монотонности: отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция возрастает и принимает только один раз значение a; отрезок $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, где функция убывает и принимает только один раз значение a.

Решением уравнения (1) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ будет $\arcsin a$ (по определению арксинуса). Для решения уравнения (1) на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ применим формулу $\sin x=\sin(\pi-x)$. Очевидно, что если $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, то $(\pi-x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и поэтому решением уравнения $\sin(\pi-x)=a$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ будет $\pi-x=\arcsin a$, т. е. $x=\pi-\arcsin a$.

Для получения всех решений уравнения (1) к каждому из двух полученных решений прибавим числа вида $2k\pi$, где $k\in Z$. Следовательно,

$$x=\arcsin a+2k\pi, \tag{4}$$

$$x=\pi-\arcsin a+2k\pi. \tag{5}$$

Обе серии решений можно объединить:

$$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k, \quad k\in Z. \tag{6}$$

В самом деле, при k четном получается формула (4), при k нечетном получается формула (5).

Пример 1. Решить уравнение $\sin 3x=\sqrt{3}/2$.

$\triangle$ Согласно формуле (6)

$$3x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi, \quad k\in Z.$$

Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, то $3x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$.

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. ▲

Пример 2. Решить уравнение $\sin 2x=-1$.

$\triangle$ По формуле (3) имеем $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. ▲

Пример 3. Решить уравнение $\sin x=-0{,}4099$.

$\triangle$ Согласно формуле (6)

$$x=(-1)^k\arcsin(-0{,}4099)+\pi k, \quad k\in Z.$$

Используя микрокалькулятор или таблицы, находим

$$x\approx(-1)^k(-24°12')+180°k, \quad k\in Z,$$

$$x\approx(-1)^{k+1}24°12'+180°k, \quad k\in Z. ▲$$

2. Уравнение вида

$$\cos x=a. \tag{7}$$

Так как $|\cos x|\leqslant 1$, то уравнение (7) при $a>1$ и при $a<-1$ решений не имеет (рис. 95).

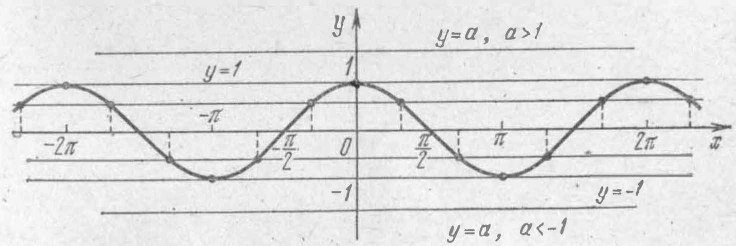


Рис. 95

Если $a=1$, то уравнение (7) принимает вид $\cos x=1$; его решения:

$$x=2\pi k, \quad k\in Z. \tag{8}$$

Если $a=-1$, то уравнение (7) принимает вид $\cos x=-1$; его решения:

$$x=\pi+2\pi k, \text{ т. е. } x=\pi(2k+1), \quad k\in Z. \tag{9}$$

Пусть теперь $|a|<1$. Так как период косинуса равен 2π, то для решения уравнения (7) достаточно найти все решения на любом отрезке длины 2π.

На отрезке $[-\pi; \pi]$ функция косинус имеет два промежутка строгой монотонности: отрезок $[-\pi; 0]$, на котором функция возрастает и принимает только один раз значение a, и отрезок $[0; \pi]$, где функция убывает и принимает только один раз значение a. Таким образом, на каждом из этих двух отрезков $[-\pi; 0]$ и $[0; \pi]$ уравнение (7) имеет по одному решению. Решение уравнения (7) на отрезке $[0; \pi]$ есть $\arccos a$. Решение уравнения (7) на отрезке $[-\pi; 0]$ есть $-\arccos a$, потому что функция косинус четная. Решениями уравнения (7) на отрезке $[-\pi; \pi]$ будут числа $\pm\arccos a$.

Для получения всех решений уравнения (7) к каждому из полученных решений прибавим числа $2k\pi$, $k \in Z$. Следовательно,

$$x = \pm\arccos a + 2k\pi, \quad k \in Z. \tag{10}$$

Пример 4. Решить уравнение $\cos 3x = 1/2$.

$\triangle$ По формуле (10) имеем

$$3x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in Z.$ ▲

Пример 5. Решить уравнение $\cos 5x = 0$.

$\triangle$ $5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5}\pi k, \quad k \in Z.$ ▲

Пример 6. Решить уравнение $\cos 2t = -0{,}5$.

$\triangle$ По формуле (10) имеем

$$2t = \pm\arccos(-0{,}5) + 2k\pi, \quad k \in Z,$$
$$2t = \pm(\pi - \arccos 0{,}5) + 2k\pi, \quad k \in Z,$$
$$2t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z,$$
$$t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Ответ: $t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$ ▲

3. Уравнение вида

$$\operatorname{tg} x = a. \tag{11}$$

Так как период тангенса равен π, то для того чтобы найти все решения уравнения (11), достаточно найти все его решения на любом отрезке длины π. По определению

Составим два простейших уравнения:

$$\cos x = 2 \quad \text{и} \quad \cos x = -1/2.$$

Первое уравнение решений не имеет, так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Второе уравнение имеет решение

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z.$ ▲

Пример 2. Решить уравнение $7\sin x = 3\cos 2x$.

$\triangle$ Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то

$$7\sin x = 3 - 6\sin^2 x,$$
$$6\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\sin x$. Обозначим $\sin x$ через y, тогда $6y^2 + 7y - 3 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет решения

$$y_1 = 1/3, \quad y_2 = -3/2.$$

Из уравнения $\sin x = 1/3$ получаем

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Уравнение $\sin x = -3/2$ решений не имеет, так как $|\sin x| \leqslant 1$ для любого x.

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in Z.$ ▲

Пример 3. Решить уравнение $5\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 6 = 0$.

$\triangle$ Это уравнение является квадратным относительно $\operatorname{tg} x$. Обозначим $\operatorname{tg} x$ через y, тогда $5y^2 - 13y - 6 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{2}{5}$.

Из уравнения $\operatorname{tg} x = 3$ получаем

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in Z.$$

Из уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5}$ получаем

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi k, \quad k \in Z,$$
$$x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi k$, $k \in Z.$ ▲

2. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

Пример 4. Решить уравнение $\sin x \operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$.

△ Перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$\sin x \operatorname{tg} x + 1 - \sin x - \operatorname{tg} x = 0$$

и разложим левую часть полученного уравнения на множители:

$$(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

Следовательно, или $\sin x - 1 = 0$, или $\operatorname{tg} x - 1 = 0$. Решениями уравнений будут

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ не удовлетворяет исходному уравнению, так как тангенс при этих значениях не существует.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$ ▲

Особо следует отметить, что если при некотором значении аргумента один из сомножителей обращается в нуль, а при других хотя бы один теряет смысл, то и все произведение теряет смысл; такие значения аргумента (неизвестного) решениями уравнения не являются.

Приведем еще один пример. Пусть дано уравнение

$$\operatorname{tg} x \sin 2x = 0.$$

Ясно, что оно распадается на два простейших уравнения $\operatorname{tg} x = 0$ и $\sin 2x = 0$; их решениями будут $x = \pi k$ и $x = \pi n/2$.

Первый сомножитель $\operatorname{tg} x$ теряет смысл при

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Все эти значения x содержатся в множестве решений второго уравнения при $n = 2k+1$ (нечетном). Они не являются решениями данного уравнения (их иногда называют посторонними решениями).

При $n = 2k$ решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Таким образом, решениями данного уравнения будут $x = \pi k$.

При решении тригонометрических уравнений выполняются преобразования над выражениями, входящими

в уравнение. Если в результате преобразований область допустимых значений для x расширилась, то могут появиться посторонние решения, а если сузилась, то возможна потеря решений.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\cos 2x}{2\cos x}$.

△ Так как

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{2\cos^2 x}{2\cos x} = \cos x,$$

то получаем уравнение

$$\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{или} \quad \cos x(\sin x - 1) = 0,$$

следовательно, или $\cos x = 0$, или $\sin x - 1 = 0$. Из уравнения $\cos x = 0$ получаем

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Из уравнения $\sin x - 1 = 0$ получаем

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Все значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ содержатся в множестве решений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ при четных значениях k, т. е. решениями будут $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

Так как правая часть заданного уравнения при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ теряет смысл, то все найденные для x значения не являются решениями.

Потерять же решения мы не могли, так как при переходе от данного уравнения к полученному множество допустимых значений для x расширилось.

Следовательно, данное уравнение не имеет решений. ▲

3. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$

Пример 6. Решить уравнение $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sin 2x$.

△ Заменим $\sin 2x$ на $2\sin x\cos x$:

$$5\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части полученного уравнения на $\cos^2 x$ (убедитесь, что $\cos x \neq 0$):

$$5\,\mathrm{tg}^2 x - 8\,\mathrm{tg}\,x + 3 = 0.$$

Заменив $\mathrm{tg}\,x$ на y, получим $5y^2 - 8y + 3 = 0$, откуда $y_1 = 1$ и $y_2 = 3/5$ или $\mathrm{tg}\,x = 1$ и $\mathrm{tg}\,x = 3/5$. Из первого уравнения следует, что $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, а из второго следует $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{5} + \pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{5} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Пример 7. Решить уравнение $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$.

△ Так как $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x$, то

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 2 = 0.$$

Заменив 2 на $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, получим

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0,$$

откуда

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Разделив обе части полученного уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 3 = 0,$$

откуда $\mathrm{tg}\,x = 1$ или $\mathrm{tg}\,x = 3$. Из первого уравнения следует, что $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а из второго следует, что $x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

4. Другие примеры решения тригонометрических уравнений

Пример 8. Решить уравнение $\cos 2x = \cos 6x$.

△ Запишем данное уравнение иначе:

$$\cos 2x - \cos 6x = 0.$$

По формуле разности косинусов имеем

$$2\sin 4x \sin 2x = 0.$$

Если $\sin 4x = 0$, то $x = \pi k/4$; если $\sin 2x = 0$, то $x = \pi k/2$. Вторая серия решений содержится в первой.

Ответ: $x = \pi k/4$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Пример 9. Решить уравнение $\cos 2x = \sin^2 x$.

△ Заменив $\sin^2 x$ по формуле

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

получим уравнение, в котором имеется только одна функция:

$$\cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{или} \quad 3\cos 2x = 1,$$

откуда получаем $2x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$.

Ответ: $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Пример 10. Решить уравнение $\sin 6x\cos 2x = \sin 5x\cos 3x$.

△ Преобразуем произведения тригонометрических функций в суммы:

$$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 8x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x),$$

откуда

$$\sin 4x = \sin 2x$$

или

$$\sin 4x - \sin 2x = 0.$$

По формуле разности синусов имеем

$$2\sin x\cos 3x = 0.$$

Следовательно, $\sin x = 0$ или $\cos 3x = 0$, и поэтому

$$x = \pi k \quad \text{или} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ▲

Пример 11. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

△ Используя формулы

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2},$$

$$1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2},$$

запишем данное уравнение иначе:

$$\sqrt{3}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

откуда

$$2\sin^2\frac{x}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Полученное уравнение является однородным относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим

$$2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0,$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0.$$

Вынося общий множитель $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ за скобки, получаем $\mathrm{tg}\frac{x}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)=0$, откуда

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0 \qquad \text{или} \qquad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3},$$

$$\frac{x}{2}=\pi k, \qquad \frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\pi k,$$

$$x=2\pi k,\ k\in Z, \qquad x=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}+2\pi k=$$

$$=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=2\pi k,\ x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$ ▲

Пример 12. Решить уравнение $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2.$

▲ По формуле для тангенса суммы имеем

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\,\mathrm{tg}\,x}=\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}.$$

Теперь данное уравнение можно записать в виде

$$\mathrm{tg}\,x+\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}=-2,$$

откуда

$$\mathrm{tg}^2 x=3.$$

Из этого уравнения находим $\mathrm{tg}\,x=\pm\sqrt{3}$. Если $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}$, то $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$; если $\mathrm{tg}\,x=-\sqrt{3}$, то $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$, где $k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z.$ ▲

Упражнения

5.106. Решите уравнения:

1) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$;

3) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $2\sin x=-\sqrt{2}$;

5) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 6) $2\sin 2x=-1$;

7) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$;

9) $\sin x=\frac{3}{5}$; 10) $\sin x=-0{,}25$.

5.107. Решите уравнения:

1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

3) $2\cos x=\sqrt{2}$; 4) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\cos(1-x)=\frac{1}{2}$; 8) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$;

9) $\cos\frac{x}{4}=\frac{4}{5}$; 10) $\cos 4x=-0{,}25$.

5.108. Решите уравнения:

1) $\mathrm{tg}\,2x=\sqrt{3}$; 2) $\mathrm{tg}\,2x=-\sqrt{3}$;

3) $\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $3\,\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$;

5) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; 6) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$;

7) $\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)=0$; 8) $\mathrm{ctg}(2x+45^\circ)=-1$;

9) $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=3$; 10) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-2$.

5.109. Решите уравнения:

1) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$; 2) $2\sin^2 x-5\cos x+1=0$;

3) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2=0$;

4) $\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0$; 5) $\operatorname{ctg}^2 2x-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2=0$;

6) $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3$; 7) $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=1$;

8) $\sin^4 x-\cos^4 x=0,5$; 9) $3\sin^2 x-\cos^2 x=0$;

10) $\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{tg}^2 x-12=0$.

5.110. Решите уравнения:

1) $(\sin x-1)\operatorname{tg} x=0$; 2) $2\cos x\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{ctg} 3x$;

3) $\sin 3x+\sin x=0$; 4) $\sin 5x=\sin x$;

5) $\cos 4x+\cos x=0$; 6) $\cos 2x=\cos x$;

7) $\cos 2x=\sin\left(6x-\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\cos(3x-2\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$;

9) $\cos 2x+\cos(\pi+6x)=0$; 10) $\cos 3x=\sin x$.

5.111. Решите уравнения:

1) $\sin x-\cos x=0$; 2) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;

3) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

4) $4\sin^2 x+2\cos^2 x-3\sin 2x=0$;

5) $4\sin^2 x-2\sin x\cos x=1$;

6) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2$;

7) $\sin^2 x-\cos^2 x=0,5$; 8) $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=0$;

9) $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x$; 10) $\sin 2x=2\sin^2 x$;

11) $\sin x+\cos x=1$; 12) $4\sin x+3\cos x=-3$.

5.112. Решите уравнения:

1) $\cos 4x\cos 2x=\cos 5x\cos x$;

2) $\sin 6x\cos 2x=\sin 5x\cos 3x$;

3) $\cos 2x\cos 3x=\sin 6x\sin x$;

4) $\cos 3x\cos x=\sin 3x\sin x$;

5) $2\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+0,75=\cos 2\alpha$;

6) $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} 3x$; 7) $\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg} 2x$.

5.113. Решите уравнения:

1) $1-\operatorname{tg}^2 x=2\operatorname{tg} x$; 2) $1-4\sin^2 x+\sin^2 2x=0$;

3) $\cos 2x=2\sin^2 x$; 4) $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 2x$; 5) $\operatorname{tg} 2x-3\operatorname{tg} x=0$;

6) $1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}$; 7) $7\sin x-3\cos 2x=0$.

5.114. Решите уравнения:

1) $\cos 3x-\cos x=0$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg} x+2=0$;

3) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg} x$;

4) $\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

5) $8\sin x-1=4\cos^2 x$; 6) $2\sin^2 x=3\cos x$.

5.115. Решите уравнения:

1) $2\cos^2 x+3\sin x=0$; 2) $3\sin x=2\cos^2 x$;

3) $\cos 2x+\cos x=0$; 4) $\cos^2(\pi-x)-2\cos x=3$;

5) $\cos^2(1,5\pi-x)-3\sin x=4$; 6) $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x=1$;

7) $4\sin 2x-3\cos 2x=3$.

5.116. Решите уравнения:

1) $2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$;

2) $\cos x-\cos(\pi-2x)=0$; 3) $\cos x-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2x\right)=-1$;

4) $1-\cos 2x=\sin x$; 5) $1+\cos 2x=\cos x$;

6) $3\cos x+5\sin\frac{x}{2}=-1$; 7) $\sin x-\cos x=4\sin x\cos^2 x$;

8) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg} x$.

Глава 6

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 29. Производная

1. Задачи, приводящие к понятию производной. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки и протекание тока в электрической цепи и изучим связанные с ними понятия.

Прямолинейное движение материальной точки (задача о мгновенной скорости). Пусть материальная точка M движется по прямой линии. На этой прямой выберем определенное направление, начало отсчета (точку O) и единицу масштаба (рис. 96). Каждому моменту времени t соответствует путь s, пройденный точкой M от точки отсчета O за время t, т. е. путь есть функция времени:

$$s=f(t),\ t\in[0;\ T].$$

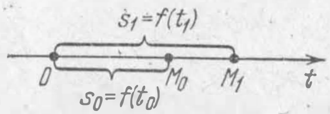


Рис. 96

Эта функция называется *законом движения точки M*.

Из всех движений материальной точки простейшим является равномерное движение по прямой. Из курса физики известно, что прямолинейное движение точки называется *равномерным*, если точка за любые равные по длительности промежутки времени проходит равные пути. *Скоростью* прямолинейного равномерного движения называется путь, пройденный точкой в единицу времени. Из сказанного видно, что при равномерном движении скорость движения постоянна. На практике поезда, автомобили, пароходы, самолеты, ракеты и космические корабли равномерно и прямолинейно движутся лишь на некоторых участках пути, а в общем случае их движение неравномерное. При неравномерном движении точка за разные, но равные по длительности, промежутки времени может проходить разные пути. Следовательно, неравномерное движение (в отличие от равномерного) нельзя

полностью охарактеризовать указанием пути, пройденного точкой за тот или иной промежуток времени. Поэтому для характеристики неравномерного движения точки используется понятие *средней скорости*.

Пусть материальная точка движется по закону $s=f(t)$, $t\in[0;\ T]$ (см. рис. 96). Если $s_0=f(t_0)$ и $s_1=f(t_1)$, то средней скоростью движения за промежуток времени от момента t_0 до момента t_1 называется число

$$v_{\text{ср}}=v_{\text{ср}}(t_0;\ t_1)=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}.$$

Из курса физики известно, что свободное падение тел происходит по закону $s(t)=\frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободно падающего тела ($g\approx 9{,}8$ м/с²), t — время (в секундах), s — путь (в метрах).

Вычислим путь, пройденный телом за первую секунду, т. е. за промежуток времени от момента $t_0=0$ с до момента $t_1=1$ с:

$$s(1)-s(0)=\left(\frac{g\cdot 1}{2}-\frac{g\cdot 0}{2}\right)\approx 4{,}9\ \text{м}.$$

Следовательно, средняя скорость движения тела за первую секунду равна $v_{\text{ср}}(0;\ 1)\approx 4{,}9$ м/с.

Вычислим теперь путь, пройденный телом за десятую секунду, т. е. за промежуток времени от момента $t_0=9$ с до момента $t_1=10$ с:

$$s(10)-s(9)=\left(\frac{g\cdot 10^2}{2}-\frac{g\cdot 9^2}{2}\right)\approx 93{,}1\ \text{м}.$$

Итак, средняя скорость движения тела за десятую секунду равна $v_{\text{ср}}(9;\ 10)\approx 93{,}1$ м/с.

Таким образом, свободное падение тел есть движение неравномерное, так как за разные, но равные по длительности, промежутки времени тело проходит различные пути. Заметим, что и средние скорости у свободно падающего тела в разные, но равные по длительности, промежутки времени (например, от $t_0=0$ с до $t_1=1$ с и от $t_0=9$ с до $t_1=10$ с) различны.

Найдем среднюю скорость свободно падающего тела за промежуток времени от начала падения, т. е. от $t_0=0$ с до момента $t_1=10$ с:

$$v_{\text{ср}}(0;\ 10)=\frac{s(10)-s(0)}{10-0}=\left(\frac{g\cdot 10^2}{2}-\frac{g\cdot 0^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{10}\approx 49\ \text{м/с}.$$

Сравнивая средние скорости $v_{ср}(0;\ 10) \approx 49$ м/с, $v_{ср}(0;\ 1) \approx 4{,}9$ м/с и $v_{ср}(9;\ 10) \approx 93{,}1$ м/с, видим, что средняя скорость для всего промежутка времени от $t_0 = 0$ с до $t_1 = 10$ с отлична от средних скоростей для первой и последней секунд из указанного промежутка времени.

Итак, если точка движется неравномерно, то, зная среднюю скорость для некоторого промежутка времени, невозможно установить скорость в какой-либо момент времени из этого промежутка. А это значит, что средняя скорость не может полностью характеризовать неравномерное движение, для его характеристики вводят так называемую *мгновенную скорость*.

Пусть точка движется по закону $s = f(t)$, $t \in [0;\ T]$. Тогда за промежуток времени длительности $t - t_0$ между моментами времени t_0 и t точка проходит путь, равный $f(t) - f(t_0)$, со средней скоростью

$$v_{ср}(t_0;\ t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Очевидно, что средняя скорость $v_{ср}(t_0;\ t)$ тем полнее характеризует движение за промежутки времени от t_0 до t, чем меньше длительность этого промежутка. Предел средней скорости за промежуток времени от t_0 до t при t, стремящемся к t_0, называется *мгновенной скоростью $v(t_0)$ в момент времени* t_0, т. е.

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_{ср}(t_0;\ t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Пример 1. Найти скорость в момент времени t_0 свободного падения тела.

$\triangle$ Так как свободное падение тела происходит по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, то

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{gt^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2}}{t - t_0} =$$

$$= \frac{g}{2} \lim_{t \to t_0} \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2} \lim_{t \to t_0} (t + t_0) = gt_0.$$

Итак, при свободном падении тело движется со скоростью $v(t) = gt$. ▲

Пример 2. Лифт после включения движется по закону

$$s(t) = 1{,}5t^2 + 2t + 12,$$

где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). Найдем мгновенную скорость в момент времени t_0.

$\triangle$ По определению мгновенной скорости получаем

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{(1{,}5t^2 + 2t + 12) - (1{,}5t_0^2 + 2t_0 + 12)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{1{,}5(t^2 - t_0^2) + 2(t - t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} (1{,}5(t + t_0) + 2) = 3t_0 + 2.$$

Следовательно, лифт после включения движется со скоростью $v(t) = 3t + 2$. ▲

Протекание тока в электрической цепи (задача о мгновенной величине тока). Представим себе электрическую цепь с некоторым источником тока. Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Тогда $q(t_1) - q(t_0)$ есть количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t_0 до момента t_1. *Средней силой тока* $I_{ср}$ за указанный промежуток времени называется число

$$I_{ср} = I_{ср}(t_0;\ t_1) = \frac{q(t_1) - q(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

В случае постоянного тока средняя сила тока $I_{ср}$ будет одинаковой для любых различных, но одинаковых по длительности промежутков времени. Если в цепи переменный ток, то $I_{ср}$ будет различной для различных, но одинаковых по длительности промежутков времени. Поэтому для характеристики цепи переменного тока вводят понятие мгновенной силы тока в данный момент времени: *мгновенной силой тока $I(t_0)$ в момент времени t_0* называется предел (если он существует), к которому стремится средняя сила тока за промежуток времени от t_0 до t при t, стремящемся к t_0, т. е.

$$I = \lim_{t \to t_0} I_{ср}(t_0;\ t) = \lim_{t \to t_0} \frac{q(t) - q(t_0)}{t - t_0}.$$

2. Производная функции. В рассмотренных выше задачах речь шла о мгновенной скорости движения и о мгновенной силе тока. Введение этих понятий происходило с помощью некоторого предела. Можно привести еще немало задач, для решения которых также необходимо отыскивать скорость изменения некоторой функции, например нахождение линейной плотности неоднородного стержня, теплоемкости тела при нагревании, угловой скорости вращающегося тела.

Определение. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in (a; b)$, и пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a; b)$. Предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (1)$$

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Согласно определению предела (см. § 19) равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$f(x)-f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x))(x-x_0), \qquad (2)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, или

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0), \qquad (3)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Формула (3) играет важную роль как в курсе математического анализа, так и во многих разделах естествознания.

Используя понятия приращения аргумента и функции, определение производной формулируется следующим образом: производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ в точке x_0 к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Производная функции $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, в точке x обозначается через $f'(x)$ или y' (читается: «эф штрих в точке икс» или «игрек штрих»). Итак,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Часто для обозначения производной используется символ $\frac{df}{dx}$ (читается «де эф по де икс»).

Операция нахождения производной от данной функции называется *дифференцированием*. Происхождение такого названия можно связать прежде всего с тем, что до перехода к пределу рассматривается отношение разностей, а разность на латинском языке обозначается словом differentia. Функция $f(x)$, $x \in (a; b)$, имеющая в каждой точке интервала $(a; b)$ производную, называется *дифференцируемой на этом интервале.*

Возвращаясь к задачам, рассмотренным в п. 1, можем сказать следующее:

1) мгновенная скорость движения $v(t)$ в момент времени t есть производная от пути по времени, т. е.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t);$$

2) мгновенная сила тока $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени, т. е.

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = q'(t).$$

3. Вычисление производной на основе ее определения. Исходя из определения производной, сформулируем следующее правило нахождения производной функции в точке.

Чтобы вычислить производную функции $f(x)$ в точке x_0 нужно:

1) найти разность $f(x)-f(x_0)$;

2) найти отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

3) найти предел этого отношения при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Поясним это правило нахождения производной на примерах.

Пример 1. Пусть $f(x) = c$, $x \in R$, где c — некоторая константа. Найти производную $f'(x)$.

△ 1) Находим разность

$$f(x)-f(x_0) = c-c = 0.$$

2) Находим отношение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0.$$

3) Находим предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0,$$

получим $f'(x)=(c)'=0$.

Итак, *производная постоянной равна нулю.* ▲

Пример 2. Найти производную линейной функции $f(x)=kx+b$.

△ 1) Находим разность

$$f(x)-f(x_0)=(kx+b)-(kx_0+b)=k(x-x_0).$$

2) Находим отношение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{k(x-x_0)}{x-x_0}=k.$$

3) Предел этого отношения для любого x_0 равен k. Итак, $f'(x_0)=k$. ▲

Пример 3. Дано $f(x)=x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Найти $f'(x)$.

△ 1) Вычисляем разность

$$f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2).$$

2) Находим отношение

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=x^2+xx_0+x_0^2.$$

3) Вычисляем предел

$$\lim_{x \to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2.$$

Таким образом, $f'(x_0)=3x_0^2$. Так как функция $f(x)=x^3$ имеет производную в любой точке $x=x_0 \in \mathbf{R}$, то будем писать $(x^3)'=3x^2$. ▲

4. Непрерывность дифференцируемой функции. Установим необходимое условие существования производной.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

□ По условию теоремы функция f в точке x_0 дифференцируема. Как известно, для функции, дифференцируемой в точке, имеет место следующая формула (см. формулу (3) в п. 2):

$$f(x)=f(x_0)+(f'(x_0)+\alpha(x))(x-x_0), \qquad (1)$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Переходя к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (1), получаем

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции f в точке x_0. ■

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что если функция не является непрерывной в некоторой точке, то она в этой точке не имеет производной, т. е. непрерывность в точке — необходимое условие дифференцируемости в точке. Однако следует заметить, что непрерывность функции в точке не является достаточным условием существования производной этой функции в рассматриваемой точке, т. е. из непрерывности функции в точке не следует ее дифференцируемость в этой точке.

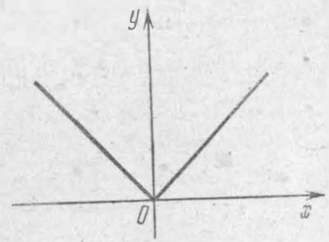


Рис. 97

Пример. Найти производную функции

$$f(x)=|x|.$$

△ Так как $f(x)=x$ при $x>0$ и $f(x)=-x$ при $x<0$ (рис. 97), то, используя формулу для производной линейной функции, получим

$$f'(x)=(|x|)'=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ -1, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Докажем, что функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ не имеет производной.

Если $x<0$, то $f(x)=-x$, и поэтому

$$\lim_{x \to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to -0}\frac{-x}{x}=-1.$$

Если $x>0$, то $f(x)=x$, и поэтому

$$\lim_{x \to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x \to +0}\frac{x}{x}=1.$$

Следовательно, функция $f(x)=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$. ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется производной функции в точке?
2. Какая функция называется дифференцируемой?
3. Чему равна производная постоянной?
4. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции.
5. Приведите примеры функций, которые не имеют производной в некоторой точке.

Упражнения

6.1. Самолет пролетает путь от Москвы до Ташкента, равный 2736 км, за 3,8 ч. Определите среднюю скорость движения самолета.

6.2. Расстояние между Москвой и Новосибирском 3200 км. Скорый поезд проходит это расстояние за 64 ч. Определите среднюю скорость движения поезда.

6.3. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

(здесь и везде дальше s — путь в метрах, t — время в секундах). Найдите мгновенную скорость этой точки:

1) при $t=0$;
2) при $t=t_0$.

6.4. Точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = 3t^2 - 2t + 3.$$

Найдите мгновенную скорость этой точки:
1) в начальный момент времени $t=0$;
2) через 5 с после начала движения;
3) в момент времени $t=2$ с.

6.5. Найдите мгновенную скорость тела в момент времени t_0, движущегося по закону:

1) $s(t) = 2\sqrt{t}$; 2) $s(t) = \frac{1}{3+t}$; 3) $s(t) = t^3 + \sqrt{t}$.

6.6. Найдите производные следующих функций в точках $x = x_0$, $x=1$, $x=5$:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = 2x^2+1$; 3) $f(x) = (x+3)^2$;
4) $f(x) = x^3+2x+1$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$;
6) $f(x) = 1-x^3$; 7) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$.

§ 30. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

1. Производная суммы и разности функций.

Теорема. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;\ b)$, то*

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

для любого $x \in (a;\ b)$. Короче,

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

□ Сумму функций $u(x) + v(x)$, где $x \in (a;\ b)$, которая представляет собой новую функцию, обозначим через $f(x)$ и найдем производную этой функции, исходя из определения.

Пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a;\ b)$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x) + v(x)) - (u(x_0) + v(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Итак, $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$. Так как x_0 — произвольная точка интервала $(a;\ b)$, то имеем

$$f'(x) = (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x).$$

Случай разности рассматривается аналогично. ■

Примеры.

а) $(x^2 + x + 5)' = (x^2)' + (x+5)' = 2x + 1$;

б) $(x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^2 + 4x + 15)' = (x^2)' + (4x + 15)' = 2x + 4$.

Замечание. Методом математической индукции доказывается справедливость формулы

$$(u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x))' = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_k'(x)$$

для любого конечного числа слагаемых.

2. Производная произведения функций.

Теорема. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;\ b)$, то*

$$(u(x)\, v(x))' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

для любого $x \in (a;\ b)$. Короче,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

□ Обозначим произведение $u(x)v(x)$ через $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, и найдем производную этой функции, исходя из определения.

Пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a;\ b)$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)\, v(x) - u(x_0)\, v(x_0)}{x - x_0}.$$

Далее, так как

$$u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=(u(x)-u(x_0))v(x)+u(x_0)(v(x)-v(x_0)),$$

то

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right)$$

и, следовательно,

$$f'(x_0)=v(x_0)u'(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

Так как x_0 — произвольная точка интервала $(a;\ b)$, то имеем:

$$f'(x)=(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x). \blacksquare$$

Примеры.

а) $((x+5)(x-8))'=(x+5)'(x-8)+(x-8)'(x+5)=$
$=1\cdot(x-8)+1\cdot(x+5)=2x-3;$

б) $(x^2(2x-7))'=(x^2)'(2x-7)+x^2(2x-7)'=$
$=2x(2x-7)+x^2\cdot 2=6x^2-14x;$

в) $(\sqrt{x}(5-3x))'=(\sqrt{x})'(5-3x)+\sqrt{x}(5-3x)'=$
$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)+\sqrt{x}(-3)=\frac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}}=\frac{5-9x}{2\sqrt{x}}.$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(af(x))'=af'(x).$$

□ Применив теорему о производной произведения к $af(x)$, где a — число, получим

$$(af(x))'=(a)'f(x)+af'(x)=0\cdot f(x)+af'(x)=af'(x). \blacksquare$$

Примеры.

а) $\left(\frac{x^2}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^2)'=\frac{2}{3}x;$

б) $\left(\frac{x^3}{3}+5x\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'+(5x)'=\frac{1}{3}(x^3)'+5(x)'=x^2+5.$

3. Производная частного двух функций.

Теорема. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках интервала $(a;\ b)$, причем $v(x)\neq 0$ для любого $x\in(a;\ b)$, то*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

для любого $x\in(a;\ b)$. Короче,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

□ Обозначим частное $\frac{u(x)}{v(x)}$ через $f(x)$ и найдем $f'(x)$, используя определение производной.

Пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a;\ b)$. Тогда

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x)}{v(x)v(x_0)(x-x_0)}=$$
$$=\frac{1}{v^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x)}{x-x_0}.$$

Далее, так как

$$u(x)v(x_0)-u(x_0)v(x)=$$
$$=(u(x)-u(x_0))v(x_0)+u(x_0)(v(x_0)-v(x)),$$

то

$$f'(x_0)=\frac{1}{v^2(x_0)}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x_0)-u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right)$$

и, следовательно,

$$f'(x_0)=\frac{v(x_0)u'(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Так как x_0 — произвольная точка интервала $(a;\ b)$, то в последней формуле x_0 можно заменить на x. $\blacksquare$

Отметим частный случай доказанной формулы:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

Примеры.

а) $\left(\frac{1+9x}{x+1}\right)'=\frac{(x+1)(1+9x)'-(1+9x)(x+1)'}{(x+1)^2}=$
$=\frac{(x+1)\cdot 9-(1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{8}{(x+1)^2};$

б) $\left(\frac{x^3}{4-x}\right)'=\frac{(4-x)(x^3)'-x^3(4-x)'}{(4-x)^2}=$
$=\frac{(4-x)3x^2-x^3(-1)}{(4-x)^2}=\frac{12x^2-2x^3}{(4-x)^2}.$

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте теорему о производной суммы (разности) двух функций.

2. Сформулируйте теорему о производной произведения двух функций.

3. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.

Упражнения

6.7. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x)=x+1$; 2) $g(x)=x^2+x+1$; 3) $h(x)=\sqrt{x}+x^2+3$;
4) $v(x)=x^3+\sqrt{x}$; 5) $y(x)=x^3+x^2+\sqrt{x}+4$;
6) $u(x)=1+4x+x^3$; 7) $w(x)=3x+41+x^2+x^3$.

6.8. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x)=-8x$; 2) $f(x)=\frac{3}{5}x$; 3) $f(x)=-\frac{4}{9}x$;
4) $f(x)=3x+\sqrt{x}-3x^2$; 5) $f(x)=1-5x-3x^3+4\sqrt{x}$;
6) $f(x)=(x-9)(x+1)$; 7) $f(x)=x^3(x-\sqrt{x})$;
8) $f(x)=\frac{x}{3}\left(x^2-\frac{4}{7}\sqrt{x}\right)$; 9) $f(x)=(x^2-3x-1)(1-4x-3x^3)$.

6.9. Докажите, что производная разности двух функций равна разности их производных, если эти производные существуют.

6.10. Докажите формулу для нахождения производной от произведения трех дифференцируемых функций:

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

6.11. Найдите производные в точке $x=1$ следующих функций:

1) $f(x)=\frac{3x-1}{5x+4}$; 2) $g(x)=\frac{x^2-1}{4-8x}$; 3) $h(x)=\frac{x^3}{x^2-2x}$;
4) $v(x)=\frac{\sqrt{x}}{3x-x^3}$; 5) $u(x)=\frac{x^3-\sqrt{x}}{x^2-5}$; 6) $w(x)=\frac{\sqrt{x}-2x^2-5x^3}{x-3x^3}$.

6.12. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема и $f(x)\neq 0$, то для любого числа k справедлива формула:

$$\left(\frac{k}{f(x)}\right)'=\frac{-kf'(x)}{f^2(x)}.$$

§ 31. Производная сложной и обратной функций

1. Сложная функция. Понятие сложной функции широко используется в математике. Со сложными функциями мы уже неоднократно встречались в курсе математики при рассмотрении различных вопросов.

Пусть заданы две функции $y=g(x)$ и $z=\varphi(y)$, причем область определения функции φ содержит множество значений функции g. Функция, заданная формулой $z=\varphi(g(x))$, называется *сложной функцией*, составленной из функций g и φ, или *суперпозицией функций* g и φ.

Например, функция $z=3\lg(1+x^2)$ есть сложная функция, составленная из более простых функций $z=3\lg y$ и $y=1+x^2$.

Подобным же образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух

функций. Например, функция $z=\lg(1+\sqrt{x})$ может быть рассмотрена как суперпозиция следующих функций: $z=\lg v$, $v=1+y$, $y=\sqrt{x}$.

Пример. Для функций $g(x)=x^2+\sqrt{x}$ и $\varphi(x)=\lg x+x^3+1$ составьте $g(\varphi(x))$ и $\varphi(g(x))$.

△ Используя определение сложной функции, получаем

$$g(\varphi(x))=(\lg x+x^3+1)^2+\sqrt{\lg x+x^3+1},$$
$$\varphi(g(x))=\lg(x^2+\sqrt{x})+(x^2+\sqrt{x})^3+1. ▲$$

Рассмотренный пример показывает, что результат суперпозиции двух различных функций зависит от порядка, в котором эти функции следуют, т. е. вообще говоря, $\varphi(g(x))\neq g(\varphi(x))$, если $\varphi(x)\neq g(x)$.

2. Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть функция $y=g(x)$, $x\in(a;\ b)$, имеет производную в точке $x_0\in(a;\ b)$, а функция $z=\varphi(y)$ определена на интервале, содержащем множество значений функции g, и имеет производную в точке $y_0=g(x_0)$. Тогда сложная функция $f(x)=\varphi(g(x))$ имеет производную в точке x_0, которая вычисляется по формуле $f'(x_0)=\varphi'(y_0)g'(x_0)$ или, опуская значения аргументов,*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

□ Доказательство теоремы проведем для случая, когда функции φ и g есть строго монотонные функции. Рассмотрим равенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\varphi(g(x))-\varphi(g(x_0))}{x-x_0}. \tag{2}$$

По условию теоремы $y=g(x)$ и $y_0=g(x_0)$, поэтому $g(x)-g(x_0)=y-y_0$ и равенство (2) можно записать так:

$$\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}. \tag{3}$$

Так как $g(x)$ имеет производную в точке x_0, а значит, и непрерывна в этой точке, то

$$y=g(x)\to y_0 \text{ при } x\to x_0,$$

т. е.

$$y\to y_0 \text{ при } x\to x_0. \tag{4}$$

$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ $\sqrt[3]{x^2}$

Найдем теперь производную сложной функции, используя определение производной и равенства (3) и (4):

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\varphi'(y_0)\cdot g'(x_0).$$

Таким образом,

$$f'(x_0)=\varphi'(y_0)\cdot g'(x_0)$$

или, в других обозначениях,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \blacksquare$$

Пример 1. Найти производную функции $f(x)=(x^2+3x+10)^2$.

$\triangle$ Будем рассматривать данную функцию как сложную, а именно, как суперпозицию функций $z=y^2$ и $y=x^2+3x+10$. Тогда, согласно формуле (1), получим

$$f'(x)=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(y^2)'\cdot(x^2+3x+10)'=$$

$$=2y\cdot(2x+3)=2(x^2+3x+10)(2x+3). \blacktriangle$$

Пример 2. Найти производную функции $h(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^3$.

$\triangle$ Представим данную функцию как суперпозицию двух функций $z=y^3$ и $y=\frac{x}{x+1}$.

Согласно формуле (1) получим

$$h'(x)=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(y^3)'\left(\frac{x}{x+1}\right)'=3y^2\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x^2}{(x+1)^4}. \blacktriangle$$

3*. Производная обратной функции.

Теорема. *Если функция $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, и ее обратная функция $f^{-1}(y)$ имеют производные, то*

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}. \qquad (1)$$

Опуская значения аргументов, получаем

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\quad \textit{или}\quad x'=\frac{1}{y'}.$$

$\square$ Рассмотрим сложную функцию $f^{-1}(f(x))$, $x\in(a;\ b)$. По определению обратной функции,

$$f^{-1}(f(x))=x$$

для любого $x\in(a;\ b)$. По теореме о производной сложной функции имеем

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}=1.$$

Отсюда и следует формула (1). $\blacksquare$

Пример. Найти производную функции $y=x^{1/3}$, $x>0$.

$\triangle$ Данная функция является обратной к функции $x=y^3$, $y>0$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3}x^{-2/3}. \blacktriangle$$

Вопросы для контроля

1. Какую функцию называют сложной?
2. Приведите примеры сложных функций.
3. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
4. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.

Упражнения

6.13. Для заданных функций $f(x)=x^2+3x-1$, $g(x)=\lg x+3$ и $h(x)=\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}$ составьте $f(g)$, $f(h)$, $g(h)$, $g(f)$, $h(f)$, $h(g)$.

6.14. Заданные функции представьте в виде суперпозиции более простых функций:

1) $y=\sqrt{x^2+3x+4}$; 2) $y=\frac{1}{x^2+5x+1}$; 3) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x}}$;

4) $y=\lg(3x^2+x+4)$; 5) $y=\frac{1}{\sqrt{3-\lg x}}$; 6) $y=\frac{1}{\lg(x^2+x^3)}$;

7) $y=\frac{x+1}{3+\sqrt{x}+\lg x}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}+\lg(1+x)}$.

6.15. Найдите производные следующих функций:

1) $y=(23+15x+x^3)^2$; 2) $y=(x^2-3)^3$;

3) $y=\left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$; 4) $y=\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2-5x}\right)^3$.

§ 32. Производные некоторых элементарных функций

1*. Пределы, связанные с числом e. В п. 9 § 18 мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

существует, и этот предел обозначили буквой e.

Так как $[z] \leqslant z \leqslant [z]+1$, то, положив $n=[z]$, получим неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{z}\right)^z \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

для любого $z>1$. Отсюда и из теоремы о пределе промежуточной функции, используя результаты п. 9 § 18, заключаем, что

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e. \qquad (1)$$

Заменой переменной $y=-z$ из формулы (1) можно вывести

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) сделаем замены $z=1/x$ и $y=1/x$ соответственно. Так как $x\to 0$ при $z\to+\infty$ и при $y\to-\infty$, то

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (4)$$

Действительно, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x},$$

то, используя непрерывность логарифмической функции и формулу (3), получим

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Далее, из формулы (4) следует

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1. \qquad (5)$$

Действительно, положив $t=\ln(1+x)$, получим

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

2. Производная показательной функции. Рассмотрим функцию $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Теорема. *Функция e^x имеет производную в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(e^x)' = e^x. \qquad (1)$$

□ Пусть x_0 — некоторая точка числовой прямой. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}.$$

Используя формулу (5) п. 1, отсюда получаем

$$f'(x_0) = e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = e^{x_0}.$$

Итак, $f'(x_0)=e^{x_0}$.

Так как x_0 — произвольная точка числовой прямой, то в последней формуле x_0 можно заменить на x. Таким образом, имеем

$$f'(x) = (e^x)' = e^x. \ ■$$

Следствие. *Показательная функция $f(x)=a^x$, $x\in R$, где $a>0$, $a\neq 1$, дифференцируема в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(a^x)' = a^x\ln a. \qquad (2)$$

□ Используя формулу производной сложной функции, а затем формулу (1), получаем

$$f'(x) = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

Таким образом, $(a^x)'=a^x\ln a$. ■

Пример 1. Найти производную функции $y=e^{x^2+1}$.

△ Используя формулу производной сложной функции и формулу (1), находим производную данной функции:

$$y' = (e^{x^2+1})' = e^{x^2+1}(x^2+1)' = e^{x^2+1}\cdot 2x. \ ▲$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y=8^{x^2+x+1}$.

△ Производную данной функции находим, используя формулу производной сложной функции и формулу (2):

$$y' = (8^{3x^2+x+1})' = 8^{3x^2+x+1}\ln 8\cdot(3x^2+x+1)' = 8^{3x^2+x+1}\ln 8\cdot(6x+1). \ ▲$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y=(x^3+4x+16)\,4^{\frac{5}{4}x^3+x+3}.$$

$\triangle$ Используя сначала формулы для производной произведения и сложной функции, а затем формулу (2), получим

$$y=(x^3+4x+16)'\,4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}+$$
$$+\left(4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\right)'(x^3+4x+16)\;=4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\cdot(3x^2+4)+$$
$$+4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\cdot\ln 4\cdot\left(\frac{5}{4}x^2+x+3\right)'(x^3+4x+16)=$$
$$=4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\left(3x^2+4+\ln 4\left(\frac{5}{2}x+1\right)(x^3+4x+16)\right).\ \blacktriangle$$

3. Производная логарифмической функции. Рассмотрим функцию

$$y=\log_a x,\ x\in \boldsymbol{R}_+,\ \text{где } a>0,\ a\neq 1.$$

Теорема. *Логарифмическая функция дифференцируема в своей области определения, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

$\square$ Рассмотрим сначала функцию $y=\ln x$, $x\in \boldsymbol{R}_+$. Найдем ее производную, исходя из определения и используя формулу (4) из п. 1:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right)=\frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь логарифмическую функцию $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Как известно, $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$, и поэтому

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.\ \blacksquare \qquad (2)$$

Пример 1. Продифференцировать функцию

$$y=\ln(x^2+3x+9).$$

$\triangle$ Используя формулу производной сложной функции и формулу (1), получаем

$$y'=(\ln(x^2+3x+9))'=\frac{(x^2+3x+9)'}{x^2+3x+9}=\frac{2x+3}{x^2+3x+9}.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y=\log_2(x^3+3x^2+4x+2).$$

$\triangle$ Производную данной функции находим, используя формулу производной сложной функции и формулу (2):

$$y'=(\log_2(x^3+3x^2+4x+2))'=$$
$$=\frac{(x^3+3x^2+4x+2)'}{(x^3+3x^2+4x+2)\ln 2}=\frac{3x^2+6x+4}{(x^3+3x^2+4x+2)\ln 2}.\ \blacktriangle$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y=(x^2+3)\ln(2x+1).$$

$\triangle$ Используя формулы для производной произведения и сложной функций, а также формулу (1), получим

$$y'=(x^2+3)'\ln(2x+1)+(x^2+3)(\ln(2x+1))'=$$
$$=2x\ln(2x+1)+(x^2+3)\frac{(2x+1)'}{2x+1}=$$
$$=2x\ln(2x+1)+\frac{2(x^2+3)}{2x+1}.\ \blacktriangle$$

4. Производная степенной функции. Рассмотрим функцию $y=x^\alpha$, $x\in \boldsymbol{R}_+$, где $\alpha\in \boldsymbol{R}$.

Теорема. *Степенная функция дифференцируема в своей области определения, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

$\square$ Пусть $y=x^\alpha$, $x\in \boldsymbol{R}_+$, где $\alpha\in \boldsymbol{R}$. Тогда

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x},$$

и поэтому, согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\frac{\alpha\cdot 1}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

т. е.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.\ \blacksquare \qquad (1)$$

Замечание. Для некоторых α, например натуральных, степенная функция определена на всей числовой прямой. Положим $x=-z$, $z>0$, получим $x^\alpha=(-z)^\alpha=(-1)^\alpha z^\alpha$. Так как постоянный множитель можно выносить за знак производной, то, используя формулу (1) и теорему о производной сложной функции, получаем

$$(x^\alpha)'=((-1)^\alpha z^\alpha)'=(-1)^\alpha (z^\alpha)'=(-1)^\alpha\alpha z^{\alpha-1}z'=$$
$$=(-1)^\alpha\cdot\alpha z^{\alpha-1}\cdot(-1)=(-1)^{\alpha-1}z^{\alpha-1}\alpha\cdot(-1)^2=\alpha x^{\alpha-1},$$

т. е.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом, и для этого случая верна формула (1).

Примеры.

а) Пусть $y=x$, тогда $y'=(x)'=1\cdot x^{1-1}=1$;

б) пусть $y=x^{10}$, тогда $y'=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$;

в) если $y=\sqrt{x}$, то $y'=(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=$
$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

г) если $y=x^{\sqrt{3}}$, то $y'=(x^{\sqrt{3}})'=\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$;

д) если $y=\sqrt[5]{x^4}$, то $y'=(\sqrt[5]{x^4})'=(x^{4/5})'=\frac{4}{5}x^{-1/5}$;

е) пусть $y=\frac{1}{3\sqrt{x+1}}$, тогда $y'=\left(\frac{1}{3\sqrt{x+1}}\right)'=$
$$=\frac{1}{3}\left((x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(x+1)'=$$
$$=-\frac{1}{6}(x+1)^{-3/2}\cdot 1=-\frac{1}{6}(x+1)^{-3/2}.$$

Из формулы (1) для случая $\alpha=n$, где $n\in N$, и правила дифференцирования суммы следует, что *многочлен есть дифференцируемая на числовой прямой функция, причем*

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)'=$$
$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}. \quad (2)$$

Так как рациональная функция представима в виде частного двух многочленов, то из формулы (2) и теоремы о производной частного следует, что *рациональная функция дифференцируема во всей своей области определения.*

Примеры.

а) Пусть $y=x^3+3x^5+10x^7$, тогда $y'=3x^2+15x^4+70x^6$;

б) если $y=13x^4+x+\frac{8}{x^2}-\frac{9}{x^{10}}$, то $y'=52x^3+1-$
$$-16x^{-3}+90x^{-11}.$$

5. Производная синуса. Рассмотрим функцию $y=\sin x$, $x\in R$.

Теорема. *Синус есть функция, дифференцируемая в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\sin x)'=\cos x.$$

□ Напомним (см. п. 1 § 26), что

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1,\quad\text{если}\quad 0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}.$$

Из этого неравенства при $\alpha\to 0$ получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \quad (1)$$

Согласно определению производной имеем

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}.$$

Заменим разность в числителе на произведение по формуле

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

По теореме о пределе произведения имеем

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

В силу непрерывности косинуса

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Из формулы (1) при $\alpha=\frac{\Delta x}{2}$ получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

Следовательно,

$$(\sin x)'=\cos x. \blacksquare$$

Примеры.

а) $(\sin 5x)' = \cos 5x\,(5x)' = 5\cos 5x$;

б) $(\sin 3x^2)' = \cos 3x^2\,(3x^2)' = 6x\cos 3x^2$;

в) $(\sin^3 2x)' = 3\sin^2 2x\,(\sin 2x)' =$

$$= 3\sin^2 2x\cos 2x\,(2x)' = 6\sin^2 2x\cos 2x.$$

6. Производная косинуса. Рассмотрим функцию $y = \cos x$, $x \in R$.

Теорема. *Косинус есть функция, дифференцируемая в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

□ Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то, используя формулу производной сложной функции, получаем

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)'\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \blacksquare$$

Примеры.

а) $(\cos 3x)' = -\sin 3x\,(3x)' = -3\sin 3x$;

б) $(\cos 3x^2)' = -\sin 3x^2\,(3x^2)' = -6x\sin 3x^2$;

в) $(\cos^2 3x)' = 2\cos 3x\,(\cos 3x)' =$

$$= 2\cos 3x\,(-\sin 3x)\,(3x)' = -3\sin 6x.$$

7. Производная тангенса. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in R, \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Теорема. *Тангенс есть функция, дифференцируемая в своей области определения, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□ По определению,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Применим формулу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Тогда

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \blacksquare$$

Примеры.

а) $(\operatorname{tg} 3x)' = \frac{1}{\cos^2 3x}(3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}$;

б) $(\operatorname{tg}^3 2x)' = 3\operatorname{tg}^2 2x\,(\operatorname{tg} 2x)' = 3\operatorname{tg}^2 2x\,\frac{1}{\cos^2 2x}(2x)' =$

$$= 6\,\frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x};$$

в) $(\operatorname{tg}^2(3x^2 + x))' = 2\operatorname{tg}(3x^2 + x)\,(\operatorname{tg}(3x^2 + x))' =$

$$= 2\operatorname{tg}(3x^2 + x)\,\frac{1}{\cos^2(3x^2 + x)}(3x^2 + x)' = 2(6x + 1)\,\frac{\sin(3x^2 + x)}{\cos^3(3x^2 + x)}.$$

8. Производная котангенса. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in R, \quad x \neq \pi n.$$

Теорема. *Котангенс есть функция, дифференцируемая в своей области определения, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

□ Так как $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \blacksquare$$

Примеры.

а) $(\operatorname{ctg} 4x)' = -\frac{1}{\sin^2 4x}(4x)' = -\frac{4}{\sin^2 4x}$;

б) $(\operatorname{ctg}^3 5x)' = 3\operatorname{ctg}^2 5x\,(\operatorname{ctg} 5x)' =$

$$= 3\operatorname{ctg}^2 5x\,\frac{-1}{\sin^2 5x}(5x)' = -15\,\frac{\cos^2 5x}{\sin^4 5x};$$

в) $(\operatorname{ctg}^5 x^2)' = 5\operatorname{ctg}^4 x^2\,(\operatorname{ctg} x^2)' =$

$$= 5\operatorname{ctg}^4 x^2\,\frac{-1}{\sin^2 x^2}(x^2)' = -10x\,\frac{\cos^4 x^2}{\sin^6 x^2}.$$

9. Производная арксинуса. Рассмотрим функцию

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;\ 1].$$

Теорема. *Арксинус есть функция, дифференцируемая в каждой точке интервала $(-1;\ 1)$, и ее производная* *вычисляется по формуле*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□ Функция

$$y = \arcsin x, \quad x \in [-1;\ 1], \tag{1}$$

является обратной к функции

$$x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Найдем производную функции (1) на интервале $(-1;\ 1)$ по правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Выразим теперь $\cos y$ через x. Так как

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y},$$

то, учитывая равенство (2), имеем

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}.$$

Перед корнем следует брать знак «+», потому что $\cos y$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ положителен.

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ■$$

Примеры.

а) $$(\arcsin\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}};$$

б) $$(x^3\arcsin x)' = (x^3)'\arcsin x + (\arcsin x)'x^3 = 3x^2\arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. Производная арккосинуса. Рассмотрим функцию

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1;\ 1].$$

Теорема. *Арккосинус есть функция, дифференцируемая в каждой точке интервала $(-1;\ 1)$, и ее производная*

вычисляется по формуле

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□ Функция

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1;\ 1], \tag{1}$$

является обратной к функции

$$x = \cos y, \quad y \in [0;\ \pi]. \tag{2}$$

Найдем производную функции (1) на интервале $(-1;\ 1)$ по правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Выразим теперь $\sin y$ через x. Так как

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y},$$

то, учитывая (2), имеем

$$\sin y = \sqrt{1-x^2}.$$

Перед корнем следует брать знак «+», потому что $\sin y$ на интервале $(0;\ \pi)$ положителен.

Таким образом,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ■$$

Примеры.

а) $$(\arccos x^3)' = -\frac{(x^3)'}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}};$$

б) $$((\arccos x)^3)' = 3(\arccos x)^2(\arccos x)' = -\frac{3(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. Производная арктангенса. Рассмотрим функцию

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Теорема. *Арктангенс есть функция, дифференцируемая в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

□ Функция

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

является обратной к функции

$$x=\operatorname{tg} y, \quad y\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2)$$

Найдем производную функции (1) по правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y.$$

Выразим теперь $\cos^2 y$ через x, используя равенство (2). Из равенства

$$1+x^2=1+\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$$

следует, что

$$\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}. \blacksquare$$

П р и м е р ы.

а) $(\operatorname{arctg}(x^2-3))'=\frac{1}{1+(x^2-3)^2}(x^2-3)'=\frac{2x}{x^4-6x^2+10}$;

б) $((\operatorname{arctg}\sqrt{x})^3)'=3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'=$

$$=\frac{3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})'=\frac{3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

12. Производная арккотангенса. Рассмотрим функцию

$$y=\operatorname{arcctg} x, \quad x\in R.$$

Т е о р е м а. *Арккотангенс есть функция, дифференцируемая в каждой точке числовой прямой, и ее производная вычисляется по формуле*

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

□ Функция

$$y=\operatorname{arcctg} x, \quad x\in R, \qquad (1)$$

является обратной к функции

$$x=\operatorname{ctg} y, \quad y\in(0;\ \pi). \qquad (2)$$

Найдем производную функции (1) по правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\operatorname{arcctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=-\sin^2 y.$$

Выразим теперь $\sin^2 y$ через x, используя равенство (2). Из равенства

$$1+x^2=1+\operatorname{ctg}^2 y=\frac{1}{\sin^2 y}$$

следует, что $\sin^2 y=\frac{1}{1+x^2}$.

Таким образом,

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \blacksquare$$

П р и м е р ы.

а) $(\operatorname{arcctg} x^3)'=-\frac{1}{1+(x^3)^2}(x^3)'=-\frac{3x^2}{1+x^6}$;

б) $\left(\operatorname{arcctg}\frac{3x}{1+x^2}\right)'=-\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{3(1+x^2)-2x\cdot 3x}{(1+x^2)^2}=$

$$=-\frac{3(1+x^2)-6x^2}{x^4+11x^2+1}=\frac{3(x^2-1)}{x^4+11x^2+1}.$$

13. Таблица производных. В этом пункте собраны известные нам формулы дифференцирования.

1. $(c')=0$ (c — константа).
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha\in R$.

В частности, $(x')=1$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $(a^x)'=a^x\ln a$.

В частности, $(e^x)'=e^x$.

4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

В частности, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$.

5. $(\sin x)'=\cos x$.
6. $(\cos x)'=-\sin x$.
7. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

13. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

14. $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

15. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$.

16. $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$.

17. $\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}$.

14. Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;\ b)$, и пусть в каждой точке этого интервала она имеет производную $f'(x)$; тогда $f'(x)$ можно назвать *первой производной* (или *производной первого порядка*) данной функции. Рассмотрим функцию $g(x) = f'(x)$, $x \in (a;\ b)$. Если $g(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in (a;\ b)$, то эту производную называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) данной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Короче, вторая производная — это производная от первой производной, т. е.

$$y'' = (y')' \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$(f'(x))' = f''(x) \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Производная от $f''(x)$, т. е. $(f''(x))' = f'''(x)$, называется *третьей производной* (или *производной третьего порядка*) данной функции $f(x)$ и т. д. Вообще *n-й производной* (или *производной n-го порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x (или на некотором интервале $(a;\ b)$) называется производная от производной $(n-1)$-го порядка в этой точке x (или на этом интервале $(a;\ b)$). Она обозначается

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \quad \frac{d^nf}{dx^n}, \quad y^{(n)} \quad \text{или} \quad f^{(n)}(x).$$

Примеры.

а) Если $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, то

$$f'(x) = 3x^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x + 6,$$
$$f'''(x) = 6, \quad f^{\text{IV}}(x) = f^{\text{V}}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0;$$

б) если $y = x \ln x$, то

$$y' = (x)'(\ln x) + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$y'' = (1 + \ln x)' = (1)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

$$y^{\text{IV}} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2 \cdot x}{x^4} = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{\text{V}} = \frac{2(-3)}{x^4} = \frac{-2 \cdot 3}{x^4},$$

$$y^{\text{VI}} = 2(-3)(-4)\,x^{-5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \ \ldots,$$

и вообще

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)}{x^{n-1}},$$

если $n \geqslant 3$.

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте теорему о производной показательной функции.
2. Сформулируйте теорему о производной логарифмической функции.
3. Сформулируйте теорему о производной степенной функции.
4. Сформулируйте теорему о производной синуса.
5. Сформулируйте теорему о производной косинуса.
6. Сформулируйте теорему о производной тангенса.
7. Сформулируйте теорему о производной котангенса.
8. Приведите формулу для нахождения производной арксинуса.
9. Приведите формулу для нахождения производной арккосинуса.
10. Приведите формулу для нахождения производной арктангенса.
11. Приведите формулу для нахождения производной арккотангенса.
12. Что называется второй производной (производной второго порядка) данной функции?
13. Что называется n-й производной (производной n-го порядка) данной функции?

Упражнения

6.16. Найдите производные следующих функций:

1) $y = (x+1)\,e^x$; 2) $y = x^2 e^{x^2+3x}$; 3) $y = \frac{x^2+1}{e^x}$;

4) $y = x \cdot 2^{3x+x^2}$; 5) $y = (3x + 5x^2 + x^3) \cdot 4^{x^2}$;

6) $y=\frac{3x+1}{e^x}-14^{x^2+3x+5}$; 7) $y=(x^2+4)\,e^{-x^2}$;

8) $y=(x^2+x^3+1)\,2^{-x^2+5x+\frac{4}{5}}$; 9) $y=(x^2+x^3+7x)\,3^{x^2+36x+10}$.

6.17. Найдите производные следующих функций:

1) $y=(x^2-1)\ln x^3$; 2) $y=\frac{\ln x}{x-1}$; 3) $y=\frac{x^2}{3\ln x}$;
4) $y=a^{x^2}\ln(x^2+4x+12)$; 5) $y=e^{(x+1)}\ln(x+5)$;
6) $y=(3x+4)\log_5(x+1+x^2)$.

6.18. Найдите производные следующих функций:

1) $y=x^{100}$; 2) $y=-x^5$; 3) $y=\sqrt[10]{x^7}$;

4) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$; 5) $y=\frac{1}{5\sqrt{11x}}$; 6) $y=\frac{x^2+3x+x^7}{\sqrt{x^2+1}}$;

7) $y=\frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt[9]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x^3}}}$; 8) $y=x^{\sqrt{5}}$; 9) $y=x^{\pi}$;

10) $y=\left(2\sqrt[3]{x^2}+3x^3+x^7\right)^5$; 11) $y=\left(\lg\sqrt{x}+x^{1/3}+12^{\sqrt{2}}\right)^3$;

12) $y=\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$.

6.19. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 6x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

6.20. Найдите производные следующих функций:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\sin ax$; 3) $y=\cos 3x$;
4) $y=\cos ax$; 5) $y=\sin 2x-\cos 3x$; 6) $y=x-\cos 2x$;

7) $y=2x^3+3\sin^2 5x$; 8) $y=\frac{\sin 3x}{3}$; 9) $y=\frac{1-\sin 2x}{2}$.

6.21. Найдите производные следующих функций:

1) $y=x\cos x$; 2) $y=x\sin x$; 3) $y=\sin x\cos x$;
4) $y=\sin 2x\cos 3x$; 5) $y=\sin ax\cos bx$; 6) $y=\sin^2 x$;
7) $y=\cos^3 x$; 8) $y=\cos^2 ax$; 9) $y=\sin^n ax$; 10) $y=\cos^n ax$.

6.22. Найдите производные следующих функций:

1) $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$; 2) $y=x\operatorname{ctg} x$; 3) $y=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} 3x$;
4) $y=\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{tg}^2 2x$; 5) $y=(\sin x+\cos x)^2$;
6) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; 7) $y=\operatorname{tg}^2 ax$; 8) $y=\sin(2x^2-x)$;
9) $y=\cos^2(x+\pi)$; 10) $y=\sin x+\cos 2x+\operatorname{tg} 3x$.

6.23. Докажите формулу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ почленным дифференцированием тождества $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

6.24. Найдите производные следующих функций:

1) $y=3\cos\frac{x}{3}$; 2) $y=\frac{1}{2}\sin 3x$; 3) $y=\frac{\sin ax}{a}$;
4) $y=x^2\cos(x-1)$; 5) $y=\sin(3+2x)+\cos(3+2x)$;
6) $y=2\sin^3 4x$; 7) $y=\frac{\operatorname{tg} 3x}{3}$; 8) $y=2\operatorname{tg} 3x-3\operatorname{tg} 2x$;
9) $y=2\operatorname{tg}^3 4x$; 10) $y=4\operatorname{ctg}^3 2x$.

6.25. Найдите производные следующих функций:
1) $y=\arcsin 7x$; 2) $y=\arcsin ax$; 3) $y=m\arcsin nx$.

6.26. Дана функция $y=\arcsin x^2$. Найдите ее производную.

6.27. Дана функция $y=\arcsin x^{-1/2}$. Найдите ее производную.

6.28. Найдите производную функции $y=\arcsin\frac{2x^3}{1+x^6}$.

6.29. Докажите, что $(\arcsin x)'+(\arccos x)'=0$.

6.30. Дано $y=x^2\arcsin x$. Найдите y'.

6.31. Найдите производные следующих функций:
1) $y=\arccos 4x$; 2) $y=\arccos ax$; 3) $y=m\arccos nx$.

6.32. Дана функция $y=\arccos x^2$. Найдите ее производную.

6.33. Докажите, что $(\arccos x^{-1})'=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

6.34. Найдите производную функции $y=x^2\arccos x$.

6.35. Дано $y=\arcsin x+\arccos x$. Найдите y'.

6.36. Докажите, что если $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$, то $y'=\frac{6x}{(x^2+9)|x|}$.

6.37. Найдите производные следующих функций:
1) $y=\operatorname{arctg} 3x$; 2) $y=\operatorname{arctg} mx$; 3) $y=m\operatorname{arctg} nx$.

6.38. Докажите, что $(\operatorname{arctg} x)'+(\operatorname{arcctg} x)'=0$.

6.39. Дано $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. Найдите y'.

6.40. Найдите производную функции $y=x^2\operatorname{arctg} x^2$.

6.41. Дана функция $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$. Найдите y'.

6.42. Найдите производную функции $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

6.43. Найдите производные следующих функций:
1) $y=\operatorname{arcctg} 2x$; 2) $y=\operatorname{arcctg} nx$; 3) $y=m\operatorname{arcctg} nx$.

6.44. Дано $y=\operatorname{arcctg} x^{-1}$. Найдите y'.

6.45. Найдите производную функции $y=(\operatorname{arcctg} 2x)^2$.

6.46. Дано $y=x^2\operatorname{arcctg} x$. Найдите y'.

6.47. Найдите производную функции $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{2x}{1+x^2}$.

6.48. Дано

$$y=\arcsin 2x+\operatorname{arctg} 3x+\arccos 2x+\operatorname{arcctg} 3x.$$

Найдите y'.

6.49. Найдите производные следующих функций:

1) $y=x^5-6x^4-8x^3-1$; 2) $y=\frac{7\text{[illegible]}+\sqrt{2}x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-1}$;

3) $f(x)=(3x-x^2-x^{10})(\sqrt{x}+3x^7-8)$;

4) $f(x)=\left(x^{10}+3x^{11}+\sqrt[7]{x^2}\right)\ln x$;

5) $f(t)=(t+\sqrt{t})\,e^{t^2-1}$; 6) $f(t)=\left(\ln t+\sqrt[3]{t^2}\right)e^{4t^3}$.

6.50. Найдите производные высших порядков:

1) $y=\sin x$; 2) $y=(x+3)^4$; 3) $y=\cos x$;
4) $y=e^x+x^2$; 5) $y=1+x^5+e^x$; 6) $y=e^{2x}+\sin 3x$.

6.51. Сколько раз нужно продифференцировать функцию $y = (x^2+1)^{50}$, чтобы в результате получился многочлен 30-й степени?

6.52. Докажите, что для функции $y=x^2+e^x$ справедливо равенство $y^{IV}=y^{V}$.

§ 33. Дифференциал функции

1. Определение дифференциала функции. Согласно определению производной функции f в точке x_0 имеем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Используя свойство предела, равенство (1) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Итак,

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что если функция f имеет производную в точке x_0, то приращение этой функции в x_0 можно представить в виде двух слагаемых.

Пусть $f'(x_0)\neq 0$. Тогда первое слагаемое $f'(x_0)\,\Delta x$ в формуле (2) пропорционально Δx, так как $f'(x_0)$ не зависит от Δx, т. е. оно линейно относительно Δx.

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f'(x_0)\cdot\Delta x=0$, то первое слагаемое есть бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Второе слагаемое в формуле (2) также есть бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, причем такая, что отношение $\frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x}$ снова есть бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, ибо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x}=0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x_0)\,\Delta x$ является в случае, когда $f'(x_0)\neq 0$, главной частью приращения функции в точке x_0.

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$, то произведение $f'(x_0)\,\Delta x$ называется *дифференциалом функции* f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом,

$$df(x_0)=f'(x_0)\,\Delta x.$$

Заметив, что $dx=x'\,\Delta x=\Delta x$, определим дифференциал независимой переменной как ее приращение. Тогда получим, что дифференциал функции в точке выражается формулой

$$df(x_0)=f'(x_0)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то

$$df(x)=f'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Из последнего равенства следует, что

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx},$$

т. е. производная функции есть частное от деления дифференциала этой функции на дифференциал аргумента.

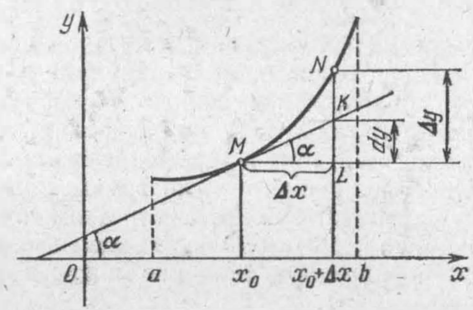


Рис. 98

Формула (3) позволяет вычислять дифференциалы функций, если известны их производные. Так, например,

$$dc=(c)'\,dx=0\cdot dx=0,$$

где c — постоянная,

$$dx^2=(x^2)'\,dx=2x\,dx,$$
$$d(3x^3+4x+7)=(3x^3+4x+7)'\,dx=(9x^2+4)\,dx,$$
$$d(\sin x+x^3)=(\sin x+x^3)'\,dx=(\cos x+3x^2)\,dx,$$
$$d(e^x+\cos 3x)=(e^x+\cos 3x)'\,dx=(e^x-3\sin 3x)\,dx,$$
$$d\ln x=(\ln x)'\,dx=\frac{dx}{x}.$$

2. Геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим дифференцируемую функцию $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$, график которой изображен на рис. 98.

Из $\triangle MKL$ имеем

$$|KL|=|ML|\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как $|ML| = \Delta x$ и $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, то $|KL| = f'(x_0)\,\Delta x$. Следовательно,

$$dy = |KL|.$$

Последнее равенство позволяет дать следующее **геометрическое истолкование дифференциала**: если функция f имеет производную в точке x_0, то дифференциал функции f в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0, при переходе от точки касания в точку с абсциссой $(x_0 + \Delta x)$.

Замечание. Легко видеть (см. рис. 98), что дифференциал функции в точке, вообще говоря, не совпадает с приращением этой функции в той же точке:

$$dy \neq \Delta y, \quad \text{так как} \quad |KL| \neq |NL|.$$

Однако при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е. $\Delta y \approx dy$. Это приближение широко используется как в самой математике, так и в ее приложениях, так как оно позволяет легко вычислять приращение функции с небольшой погрешностью. Геометрически замена Δy на dy означает замену дуги кривой MN отрезком прямой MK. Следовательно, на небольшом участке изменения аргумента всякую дифференцируемую функцию можно рассматривать как линейную.

В заключение заметим, что дифференциал линейной функции совпадает с ее приращением. В самом деле,

$$d(kx+b) = (kx+b)'\,dx = k\,dx,$$
$$\Delta(kx+b) = [k(x+\Delta x)+b] - (kx+b) = k\,\Delta x = k\,dx,$$

т. е.

$$d(kx+b) = \Delta(kx+b).$$

3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Из определения дифференциала функции в точке x_0 следует, что

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Следовательно, $df(x_0)$ является приближением $\Delta f(x_0)$ в точке x_0, причем абсолютная погрешность такого приближения стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Более того, если $f'(x_0) \neq 0$, то относительная погрешность также стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

В самом деле,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{df(x_0)} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x} \right| = 0.$$

Все сказанное означает, что для дифференцируемой в точке x_0 функции f, у которой $f'(x_0) \neq 0$, при всех достаточно малых Δx имеет место следующая формула:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0), \text{ т. е. } \Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x. \tag{1}$$

Формула (1) является основной для простейших приближенных вычислений.

Пример 1. Пусть $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$.

Так как для $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

то, используя формулу (1), получим для $x_0 \neq 0$ и всех достаточно малых Δx

$$\Delta f(x_0) = \sqrt[n]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[n]{x_0} \approx \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x.$$

Таким образом, для всех достаточно малых Δx

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x. \tag{2}$$

Пользуясь формулой (2), вычислим $\sqrt{3{,}998}$:

$$\sqrt{3{,}998} = \sqrt{4 - 0{,}002} \approx \sqrt{4} + \frac{-0{,}002 \cdot \sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 2 - 0{,}0005 = 1{,}9995.$$

Для вычисления $\sqrt[5]{243{,}45}$ также воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[5]{243{,}45} = \sqrt[5]{243 + 0{,}45} \approx \sqrt[5]{243} + \frac{0{,}45 \cdot \sqrt[5]{243}}{5 \cdot 243} = 3 + \frac{0{,}45 \cdot 3}{5 \cdot 3^5} \approx 3{,}001.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in R$. Известно, что $f'(x) = \cos x$. Поэтому, используя формулу (1), получим для любого $x \in R$ и всех достаточно малых Δx

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 \approx \cos x_0\,\Delta x.$$

Итак, для всех достаточно малых Δx

$$\sin(x_0 + \Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0\,\Delta x. \tag{3}$$

В частности, при $x_0=0$ из формулы (3) получим

$$\sin \Delta x \approx \Delta x$$

для всех достаточно малых Δx.

Если в формуле (3) положить $x=\frac{\pi}{4}$, то получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\Delta x)$$

для всех достаточно малых Δx.

Пример 3. Если $f(x)=\ln x$, $x \in (0;\ +\infty)$, то $f'(x)=\frac{1}{x}$. Поэтому для $x_0>0$ согласно формуле (1) для всех достаточно малых Δx будем иметь

$$\Delta f(x_0)=\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0 \approx \frac{\Delta x}{x_0},$$

т. е.

$$\ln(x_0+\Delta x) \approx \ln x_0+\frac{\Delta x}{x_0}. \qquad (4)$$

В частности, при $x_0=1$ из формулы (4) следует

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x$$

для всех достаточно малых Δx.

Вопросы для контроля

1. Что называется дифференциалом функции?
2. В чем заключается геометрический смысл дифференциала функции?

Упражнения

6.53. Докажите, что для всех достаточно малых значений x имеют место следующие формулы:

1) $e^x \approx 1+x$; 2) $\operatorname{tg} x \approx x$; 3) $\arcsin x \approx x$; 4) $\operatorname{arctg} x \approx x$.

6.54. Найдите приближенные значения:

1) $\sqrt{9{,}02}$; 2) $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[3]{24}$; 4) $\sqrt[3]{30}$; 5) $\sqrt[4]{3}$; 6) $\sqrt[4]{90}$.

6.55. Вычислите приближенно:

1) $\sqrt[3]{65}$; 2) $\sqrt[10]{1000}$; 3) $\sqrt[3]{125{,}1324}$; 4) $\sin 29°$; 5) $\ln 1{,}05$; 6) $\cos 91°$; 7) $\operatorname{tg} 44°$; 8) $\ln(e+0{,}1)$; 9) $\ln 0{,}97$.

Глава 7

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 34. Касательная и нормаль к кривой

1. Определение касательной и нормали к кривой. В курсе геометрии вы уже встречались с понятием касательной, а именно, касательная к окружности определялась как прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней единственную общую точку. Однако такое определение касательной неприменимо для случая произвольной кривой. Так, например, оси Ox и Oy имеют по одной общей точке с параболой $y=x^2$ (рис. 99). Однако ось Ox — касательная к параболе, а ось Oy не является касательной к ней.

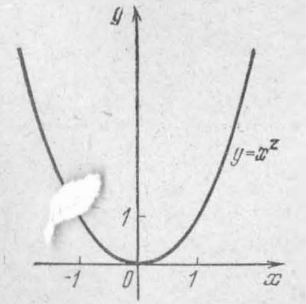


Рис. 99

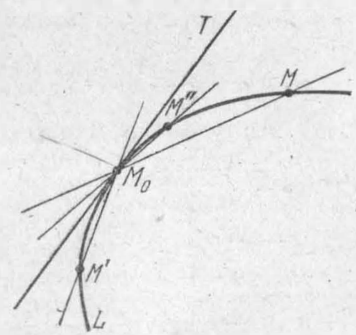


Рис. 100

Определим касательную к кривой L в точке M_0 в общем случае.

Пусть M — некоторая произвольная точка кривой L, которая отлична от M_0 и может располагаться на кривой L как слева, так и справа от нее (рис. 100). Прямая M_0M, проходящая через точки M_0 и M, называется *секущей* кривой L.

Если точку M перемещать по кривой L, приближая к точке M_0, то секущая M_0M будет поворачиваться вокруг точки M_0, занимая соответственно положения M_0M, M_0M', M_0M'' и т. д.

Если секущая M_0M будет стремиться занять некоторое предельное положение M_0T при стремлении точки M вдоль кривой L к точке M_0, то прямая M_0T называется *касательной к кривой* L в точке M_0.

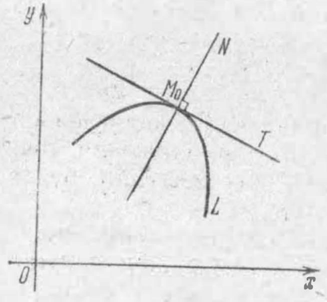


Рис. 101

Отметим, что не всякая кривая в любой точке имеет касательную. Простейшим примером такой кривой может служить график функции $y=|x|$ (см. рис. 40). Эта кривая в точке (0; 0) не имеет касательной.

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к кривой L в точке M_0, называется *нормалью к кривой* L в точке M_0.

Например, если прямая M_0T — касательная к кривой L в точке M_0, то прямая M_0N; $M_0N \perp M_0T$ (рис. 101), является нормалью к данной кривой L в точке M_0.

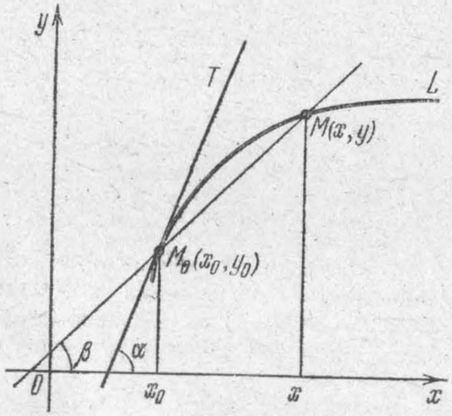


Рис. 102

2. Геометрический смысл производной. Пусть кривая L является графиком непрерывной функции $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$ (рис. 102). На кривой L рассмотрим точки $M_0(x_0;\ y_0)$ и $M(x;\ y)$ и проведем секущую M_0M. Очевидно, если $k=\operatorname{tg}\beta$ — ее угловой коэффициент, то

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Пусть теперь $x\to x_0$, т. е. абсцисса точки M приближается к абсциссе точки M_0 и, следовательно, точка M стремится к точке M_0, оставаясь на кривой L. При этих условиях секущая M_0M, вообще говоря, меняет свое положение, вращаясь вокруг точки M_0, т. е. изменяется угол β.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

и, следовательно, существует прямая M_0T, являющаяся предельным положением секущей при приближении точки M по кривой к M_0. Эта прямая, как известно, будет касательной к кривой L в точке M_0.

Таким образом, если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее график имеет касательную в точке $(x_0;\ f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$.

Сказанное позволяет дать следующее геометрическое истолкование производной: *производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x_0;\ f(x_0))$.*

3. Уравнения касательной и нормали к кривой. Из курса геометрии вы знаете, что в прямоугольной декартовой системе координат уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0)$, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (1)$$

Поэтому, положив в уравнении (1) $y_0=f(x_0)$ и $k=f'(x_0)$, получим уравнение касательной к кривой L в точке $(x_0;\ f(x_0))$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (2)$$

Как известно, условием перпендикулярности прямых, задаваемых уравнениями с угловыми коэффициентами k и k_1, является условие $k\cdot k_1=-1$. Следовательно, уравнение нормали к кривой L в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (3)$$

Замечание 1. Уравнение (3) задает нормаль к графику L функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, если существует отличная от нуля производная $f'(x_0)$. Если $f'(x_0)=0$, то касательная к кривой L в такой точке будет параллельна оси Ox, а ее уравнение (как это легко видеть из уравнения (2)) будет иметь вид $y=f(x_0)$. Из определения же нормали следует, что нормаль к кривой L в такой точке будет перпендикулярна оси Ox, а ее уравнение имеет вид $x = x_0$. Если же $f'(x_0) = \infty$, то касательная к кривой L в такой точке параллельна оси Oy и имеет уравнение $x = x_0$, а нормаль параллельна оси Ox и имеет уравнение $y = f(x_0)$.

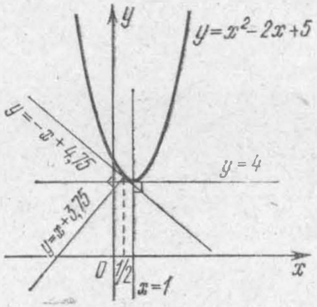


Рис. 103

Замечание 2. В дальнейшем для краткости вместо «касательная к графику функции $y = f(x)$» будем говорить «касательная к кривой $y = f(x)$».

Пример 1. Найти уравнения касательных и нормалей к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точках с абсциссами $x_1 = 0{,}5$ и $x_2 = 1$ (рис. 103).

$\triangle$ Найдем значения функции $f(x) = x^2 - 2x + 5$ в заданных точках: $f(0{,}5) = 4{,}25$, $f(1) = 4$. Далее, так как $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$, то $f'(0{,}5) = -1$, $f'(1) = 0$.

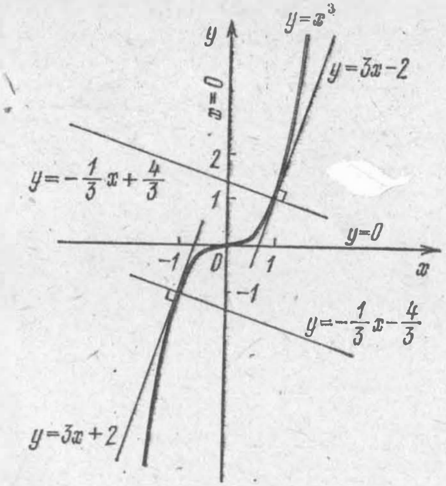


Рис. 104

Подставив найденные значения функции и ее производной в (2) и (3), получим уравнения касательных и нормалей.

В точке с абсциссой $x_1 = 0{,}5$

$$y - 4{,}25 = -1 \cdot (x - 0{,}5),$$

$$y - 4{,}25 = -\frac{1}{-1}(x - 0{,}5).$$

Следовательно, прямая $y = -x + 4{,}75$ — касательная, а прямая $y = x + 3{,}75$ — нормаль к параболе в точке $(0{,}5;\ 4{,}25)$.

В точке с абсциссой $x_2 = 1$: $y - 4 = 0(x-1)$. Таким образом, прямая $y = 4$ — касательная к параболе в точке $(1;\ 4)$, а значит, прямая $x = 1$ — нормаль к параболе в этой точке. ▲

Пример 2. Найти уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x^3$ в точках с абсциссами $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ (рис. 104).

$\triangle$ Найдем значения функции $f(x) = x^3$ при $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$: $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Так как $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, то $f'(-1) = 3$, $f'(0) = 0$ и $f'(1) = 3$.

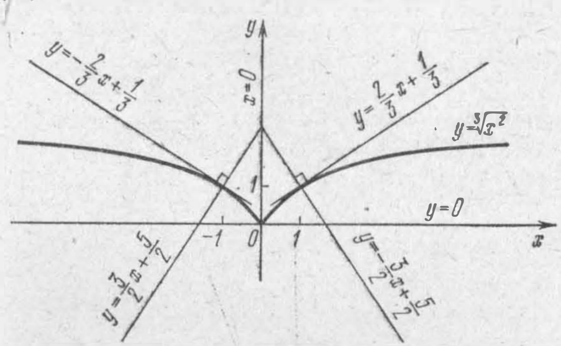


Рис. 105

Подставив найденные значения функции и ее производной в (2) и (3), получим уравнения касательных и нормалей.

Касательные и нормали имеют соответственно уравнения:

а) в точке с абсциссой $x_1 = -1$:

$$y = 3x + 2 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3};$$

б) в точке с абсциссой $x_2 = 0$:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x = 0;$$

в) в точке с абсциссой $x_3 = 1$:

$$y = 3x - 2 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}. \ ▲$$

Пример 3. Найти уравнения касательных и нормалей к кривой $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точках с абсциссами $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ (рис. 105).

△ Вычислим значения функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в заданных точках: $f(-1)=1$, $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Найдем производную данной функции $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ и подсчитаем ее значения в заданных точках: $f'(-1)=-2/3$, $f'(0)=\infty$ и $f'(1)=2/3$. Подставив найденные значения функции и ее производной в (2) и (3), найдем следующие уравнения касательных и нормалей:

а) при $x_1=-1$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2};$$

б) при $x_3=1$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}.$$

Так как $f'(0)=\infty$, то, согласно Замечанию 1, прямая $x=0$ (ось ординат) — касательная, а прямая $y=0$ (ось абсцисс) — нормаль к данной кривой в точке (0; 0). ▲

Вопросы для контроля

1. Какая прямая называется касательной к кривой?
2. Какая прямая называется нормалью к кривой?
3. Сформулируйте, в чем состоит геометрический смысл производной.
4. Запишите уравнение касательной к кривой.
5. Запишите уравнение нормали к кривой.

Упражнения

7.1. Найдите уравнения касательных и нормалей к параболе $y=2x^2+1$ в точках с абсциссами $x_1=-1$, $x_2=0$ и $x_3=1$.

7.2. Найдите уравнения касательных и нормалей к кривой $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ в точках с абсциссами $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=3$.

7.3. Найдите угол наклона касательной к кривой $y=x^3$ в точках с абсциссами $x_1=-\sqrt{3}/3$, $x_2=0$ и $x_3=\sqrt{3}/3$.

7.4. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y=x-x^2$ в точках с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=1/2$.

7.5. В какой точке касательная к кривой $y=\ln x$ наклонена к оси Ox под углом $\pi/4$?

7.6. Под каким углом касательная к кривой $y=e^x$ в точке (0; 1) пересекает ось Ox?

7.7. Вычислите угловые коэффициенты касательных к параболе $y=x^2$ в точках (1; 1), (−1; 1); (2; 4) и (−2; 4).

7.8. У параболы $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведены касательные в точках (0; 0), (2; 1) и (4; 0). Найдите углы наклона касательных к оси Ox.

§ 35. Некоторые применения производной в физике

В п. 1 § 29 мы уже рассмотрели задачи о нахождении мгновенной скорости прямолинейного движения точки и о мгновенной величине тока, при решении которых использовалась производная. Рассмотрим еще несколько задач, при решении которых применяется производная.

1. Задача о теплоемкости тела. Чтобы температура тела массой в 1 г повысилась от 0 градусов до τ градусов, телу необходимо сообщить определенное количество тепла Q. Значит, Q есть функция температуры τ, до которой тело нагревается: $Q=Q(\tau)$.

Пусть температура тела повысилась с τ_0 до τ. Количество тепла, затраченное для этого нагревания, равно $Q(\tau)-Q(\tau_0)$. Отношение

$$\frac{Q(\tau)-Q(\tau_0)}{\tau-\tau_0}$$

есть количество тепла, которое необходимо «в среднем» для нагревания тела на 1° при изменении температуры от τ_0 до τ. Это отношение называется *средней теплоемкостью* данного тела в температурном промежутке $[\tau_0; \tau]$ и обозначается $c_{\text{ср}}$.

Так как средняя теплоемкость не дает представления о теплоемкости для любого значения температуры τ, то вводится понятие теплоемкости при данной температуре τ_0 (в данной точке τ_0).

Теплоемкостью при температуре τ_0 (в данной точке τ_0) называется предел

$$\lim_{\tau\to\tau_0} c_{\text{ср}}=\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{Q(\tau)-Q(\tau_0)}{\tau-\tau_0}=Q'(\tau_0).$$

Итак, теплоемкость $c(\tau)$ при температуре τ есть производная от количества тепла $Q(\tau)$, получаемого телом, по температуре τ, т. е.

$$c(\tau)=\frac{dQ(\tau)}{d\tau}=Q'(\tau).$$

2. Задача о скорости химической реакции. Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества, вступившее уже в реакцию к моменту времени t, обозначим через $y(t)$. Таким образом, y есть функция времени, т. е. переменной t. Пусть $[t_0; t]$ — некоторый промежуток времени, тогда $y(t)-y(t_0)$ равно количеству вещества, вступившего в реакцию за промежуток времени от момента t_0 до момента t, а отношение $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ выразит *среднюю скорость* химической реакции за промежуток времени $[t_0;\ t]$. Для характеристики скорости химической реакции в данный момент t_0 следует рассмотреть предел этого отношения при $t \to t_0$.

Следовательно, скорость химической реакции в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t, т. е. равна $y'(t)$.

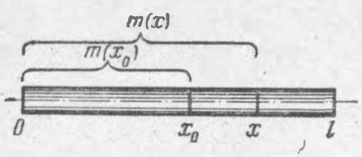


Рис. 106

3. Задача о линейной плотности стержня. Пусть дан стержень длины l (рис. 106). Стержнем называют такое физическое тело, которое по форме приближается к отрезку прямой линии, поперечное сечение его мало и одинаково на всем его протяжении. Каждому отрезку стержня длины x, $0 \leqslant x \leqslant l$, отмеряемому от одного фиксированного конца, соответствует определенная масса m, т. е. масса стержня есть функция его длины: $m = m(x)$, $x \in [0;\ l]$. Стержень называют однородным, если любые два его участка одинаковой длины имеют одинаковую массу. В этом случае отношение массы любого участка стержня к его длине есть одна и та же величина ρ, которую называют *линейной плотностью стержня*. Стержень называют неоднородным, если на два участка одинаковой длины приходятся, вообще говоря, различные массы. Таким образом, для неоднородного стержня встает вопрос о скорости изменения массы стержня в зависимости от его длины.

Пусть $m(x) - m(x_0)$ — масса части стержня между точками, расположенными соответственно на расстоянии x_0 и x от начала отрезка, где $0 \leqslant x_0 < x \leqslant l$. Тогда отношение $\frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0}$ называют *средней линейной плотностью стержня* на указанном участке и обозначают $\rho_{\text{ср}}$.

В случае неоднородного стержня средняя линейная плотность $\rho_{\text{ср}}$ не может полностью характеризовать скорость изменения массы стержня. Поэтому для неоднородных стержней вводится понятие *линейной плотности в данной точке*. Линейная плотность $\rho(x_0)$ стержня в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x)-m(x_0)}{x-x_0} = m'(x_0).$$

Итак, линейная плотность стержня в точке x есть производная по x от переменной массы $m(x)$.

4. Механический смысл второй производной (ускорение). Пусть материальная точка движется прямолинейно и $s = s(t)$, $t \in [0;\ T]$, — закон движения. Тогда скорость $v(t)$ равна

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Скорость движения $v(t)$ есть в свою очередь функция времени. Поэтому можно рассмотреть скорость изменения скорости

$$v'(t) = (s'(t))' = s''(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Заимствуя термин из механики, получим, что $s''(t)$ есть *ускорение движения в рассматриваемый момент времени* t.

Итак, *ускорение* $a(t)$ *движения в данный момент времени* t есть производная от скорости $v(t)$ по времени, или вторая производная от пути по времени:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Пример. Пусть точка совершает прямолинейное движение по закону

$$x = 5 + 3t + 2t^3,$$

где t — время. Найти ускорение.

△ Так как $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, то $a = 12t$. ▲

Вопросы для контроля

1. Что называется теплоемкостью в данной точке? По какой формуле она вычисляется?
2. Что называется скоростью химической реакции в данный момент времени? По какой формуле она вычисляется?
3. Что называется линейной плотностью стержня в данной точке? По какой формуле она вычисляется?
4. Сформулируйте, в чем состоит механический смысл второй производной.

Упражнения

7.9. Тело движется прямолинейно по закону $s(t)=3+2t+t^3$ (м). Определите его скорость и ускорение в моменты времени $t_1=1$ с и $t_2=3$ с.

7.10. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется законом $v(t)=4t+5t^2$ (м/с). Какое ускорение будет иметь тело через 5 с после начала движения?

7.11. Докажите, что если тело движется по закону $s(t)=ae^t+$ $+be^{-t}$ (м), то его ускорение равно пройденному пути.

7.12. Точка движется прямолинейно по закону $s=\sqrt{t}$. Докажите, что ее ускорение пропорционально кубу скорости.

7.13. Тело, масса которого $m=0{,}5$ кг, движется прямолинейно по закону $s(t)=2t^2+t-3$ (м). Найдите кинетическую энергию тела через 7 с после начала движения.

7.14. Найдите величину силы F, действующей на точку массой m, движущуюся по закону $s(t)=t^2-4t^4$ (м), при $t=3$ с.

7.15. Точка массой m движется по закону $s(t)=3t^2+7t+9$ (м). Докажите, что сила, действующая на точку, постоянна.

7.16. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi=a+bt-ct^2$, где a, b и c — положительные постоянные. Определите угловую скорость и ускорение вращения, а также через какое время колесо остановится.

7.17. Количество электричества, протекшего через проводник, начиная с момента времени $t=0$, дается формулой $q=2t^2+3t+1$. Найдите силу тока в конце пятой секунды.

7.18. Количество тепла Q (Дж), необходимого для нагревания 1 кг воды от 0 °С до t °С, определяется формулой $Q=t+0{,}00002t^2+$ $+0{,}0000003t^3$. Вычислите теплоемкость воды для 1) $t=30$ °С; 2) $t=$ $=100$ °С.

7.19. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x=A(1+e^{-kt})$. Определите скорость реакции.

§ 36. Приложение производной к исследованию возрастания и убывания функции

1. Необходимые условия возрастания и убывания функции. Докажем сначала теорему о необходимом условии возрастания функции на интервале.

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, возрастает на интервале $(a;\ b)$, то $f'(x)\geqslant 0$ для любого x из интервала $(a;\ b)$.*

□ Согласно определению возрастающей на $(a;\ b)$ функции, если $x>x_0$, то $f(x)\geqslant f(x_0)$, а если $x<x_0$, то $f(x)\leqslant$ $\leqslant f(x_0)$. Следовательно, для любых x_0 и x из $(a;\ b)$, $x\neq x_0$, справедливо неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

Так как $f(x)$ дифференцируема на $(a;\ b)$, то, переходя к пределу в последнем неравенстве при $x\to x_0$, получим

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0. \blacksquare$$

Рассмотрим теперь теорему о необходимом условии убывания функции на интервале.

Теорема 2. *Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x\in(a;\ b)$, убывает на интервале $(a;\ b)$, то $f'(x)\leqslant 0$ для любого x из интервала $(a;\ b)$.*

□ Так как функция $f(x)$ — убывающая, то функция $F(x)=-f(x)$ — возрастающая, и поэтому, в силу теоремы 1, $F'(x)=-f'(x)\geqslant 0$ для любого $x\in(a;\ b)$. Отсюда следует, что $f'(x)\leqslant 0$ для любого $x\in(a;\ b)$. ■

Интервалы, на которых функция возрастает или убывает, называются *интервалами монотонности* этой функции.

Заметим без доказательства, что если функция $f(x)$ — возрастающая (убывающая) на интервале $(a;\ b)$ и непрерывна в точках a и b, то она будет возрастающей (убывающей) и на отрезке $[a;\ b]$.

2. Теорема Лагранжа. При доказательстве теорем о достаточных условиях монотонности функции существенно используется следующая теорема, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, то найдется точка $c\in(a;\ b)$ такая, что имеет место формула*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений*.

Мы приводим теорему Лагранжа без доказательства, поясним лишь геометрический смысл этой теоремы (рис. 107). На графике функции $f(x)$ рассмотрим точки $A(a;\ f(a))$ и $B(b;\ f(b))$. Легко видеть, что угловой коэффициент секущей AB, проходящей через точки A и B, равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Запишем формулу (1) в следующем виде:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (2)$$

Вспоминая геометрический смысл производной, можно сказать, что формула (2), а следовательно, и формула (1) означает следующее: на интервале $(a; b)$ найдется точка c такая, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке C с абсциссой, равной c, совпадает

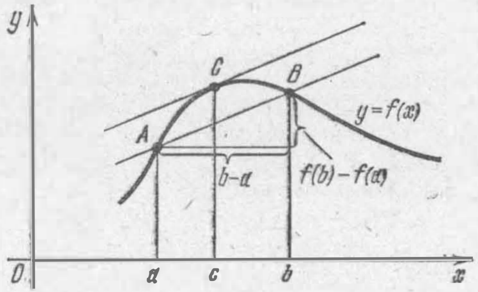


Рис. 107

с угловым коэффициентом секущей AB, т. е. существует касательная к графику данной функции, которая параллельна секущей AB.

3. Достаточные условия возрастания и убывания функции. Сначала сформулируем и докажем теорему о достаточном условии возрастания функции.

Теорема 1. *Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция f возрастает на интервале $(a; b)$.*

□ Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки интервала $(a; b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Тогда по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как по условию теоремы $f'(x) > 0$ и $x_2 - x_1 \geqslant 0$, то из последней формулы следует, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Последнее, согласно определению возрастающей функции, и означает, что функция f возрастает на интервале $(a; b)$. ■

Аналогично доказывается и следующая теорема о достаточном условии убывания функции.

Теорема 2. *Если функция f имеет неположительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция f убывает на интервале $(a; b)$.*

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1.$$

△ Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x) = 2(x^2 - 1)$. Так как

$f'(x) > 0$ для $|x| > 1$, то, согласно теореме 1, данная функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$. Так как $f'(x) < 0$ для $|x| < 1$, то, согласно теореме 2, данная функция убывает на интервале $(-1; 1)$. ▲

Пример 2. Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x} + 5.$$

△ Область определения функции — вся числовая прямая, кроме точки $x = 0$, т. е. состоит из интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Найдем производную:

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^2} = 3\frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Производная представляет собой дробь, знак которой будет определяться знаком числителя, так как знаменатель положителен. Таким образом, $f'(x) < 0$ для всех x из интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$; значит, согласно теореме 2, на интервалах $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ данная функция убывает. Так как $f'(x) > 0$ для всех x из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, то, согласно теореме 1, функция $f(x)$ на этих интервалах возрастает. Итак, функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и убывает на интервалах $(-1; 0)$ и $(0; 1)$. ▲

Заметим, что если функция имеет положительную производную в каждой точке интервала, то она является строго возрастающей на этом интервале. Если же функция имеет отрицательную производную в каждой точке интервала, то такая функция будет строго убывающей на этом интервале. Указанные условия являются достаточными, но не будут необходимыми условиями. Действительно, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси, и в то же время в точке $x = 0$ ее производная равна 0.

4. Правило нахождения интервалов монотонности. Сформулируем теперь правило нахождения интервалов монотонности функции.

1) Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$, а затем находим точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$.

2) Критическими точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.

3) Определяем знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) \geqslant 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает, если же $f'(x) \leqslant 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Пример. Найти интервалы монотонности функции

$$f(x) = x \ln x + 3x.$$

△ 1) Заданная функция определена и имеет производную во всех точках интервала $(0; \infty)$. Вычисляем производную данной функции: $f'(x) = 1 + \ln x + 3 = 4 + \ln x$. Из уравнения $f'(x) = 4 + \ln x = 0$ следует, что $x = e^{-4}$ — единственная критическая точка.

2) Так как $x = e^{-4}$ — критическая точка, то, следовательно, интервалы $(0; e^{-4})$ и $(e^{-4}; +\infty)$ являются интервалами монотонности.

3) Исследуем знак $f'(x)$ на каждом из этих интервалов, решая неравенства $\ln x + 4 < 0$ и $\ln x + 4 > 0$.

Так как $f'(x) < 0$ для любого $x \in (0; e^{-4})$, то на интервале $(0; e^{-4})$ данная функция убывает.

Так как $f'(x) > 0$ для $x > e^{-4}$, то на интервале $(e^{-4}; +\infty)$ данная функция возрастает. ▲

Вопросы для контроля

1. Сформулируйте необходимое условие возрастания функции на интервале.
2. Сформулируйте необходимое условие убывания функции на интервале.
3. Какие интервалы называются интервалами монотонности функции?
4. Сформулируйте теорему Лагранжа.
5. Сформулируйте достаточное условие возрастания функции на интервале.
6. Сформулируйте достаточное условие убывания функции на интервале.
7. Какие точки называются критическими для функции?
8. Сформулируйте правило нахождения интервалов монотонности.

Упражнения

7.20. Определите интервалы монотонности следующих функций:

1) $f(x) = 5x - 2$; 2) $f(x) = 4 - 9x$; 3) $f(x) = \frac{1}{3x}$;

4) $f(x) = \frac{4}{5 - x}$; 5) $f(x) = x^2 + x - 1$; 6) $f(x) = (x+1)^3$;

7) $f(x) = 7x^2 + 14x + 1$; 8) $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$; 9) $f(x) = x(x^2 - 3)$;

10) $f(x) = x^3(1 - x)$; 11) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; 12) $f(x) = \frac{x^3}{1 - x}$.

§ 37. Исследование экстремумов функции

1. О понятии экстремума функции.

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

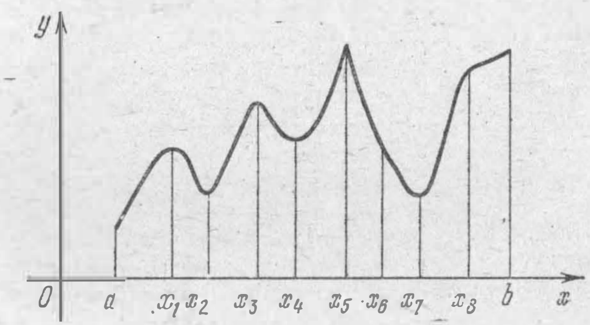


Рис. 108

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в точках максимума и минимума называются *максимумами* и *минимумами* функции или *экстремумами функции*.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$ (рис. 108). Точки x_1, x_3 и x_5 — точки максимума, а x_2, x_4 и x_7 — точки минимума. Из графика данной функции видно, что минимум функции в точке $x = x_4$ больше максимума этой функции в точке $x = x_1$. Последнее обстоятельство не противоречит определению экстремумов функции, так как в определении экстремумов сравниваются значения функции в точке со значениями функции из некоторой окрестности этой точки. Таким образом, понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью данной точки (определенным местом) из области определения функции, а не со всей областью. Поэтому иногда для обозначения этого понятия употребляется термин *локальный экстремум*, т. е. экстремум, связанный с определенным местом.

Замечание. Точки a и b (см. рис. 108) не относятся к экстремальным точкам функции f, так как у точек a и b не существует δ-окрестностей, принадлежащих области определения данной функции.

2. Необходимое условие существования экстремума. Рассмотрим сначала необходимое условие существования экстремума для дифференцируемой функции.

Теорема Ферма. *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y=f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0)=0$.*

□ Для определенности будем считать, что x_0 — точка максимума. Согласно определению это значит, что существует δ-окрестность точки x_0 такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

По условию теоремы функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную. Поэтому, с одной стороны,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0,$$

так как $x-x_0 < 0$ и $f(x)-f(x_0) < 0$ для всех $x \in (x_0-\delta;\ x_0)$, а с другой стороны,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0,$$

так как $x-x_0 > 0$ и $f(x)-f(x_0) < 0$ для всех $x \in (x_0;\ x_0+\delta)$. Следовательно, $f'(x_0)=0$.

Доказательство для точки минимума проводится аналогично. ■

Замечание. В теореме Ферма установлено лишь необходимое условие существования экстремума. Это условие позволяет лишь выделить точки, в которых функция может иметь экстремум. Это значит, что не всякая критическая точка является экстремальной. Например, функция $f(x)=x^3$ имеет в точке $x=0$ производную, равную нулю, но для этой функции точка $x=0$ не является экстремальной.

Мы рассмотрели те критические точки, в которых производная функции равна нулю, эти точки иногда на-

зывают *стационарными*. Рассмотрим критические точки, в которых функция не имеет производных.

Пример 1. Пусть $f(x)=|x|$ (см. рис. 40). В п. 4 § 29 было установлено, что в точке $x=0$ производной данной функции не существует. Следовательно, точка $x=0$ — критическая точка. Так как $f(x)>0$ для всех $x \neq 0$, а $f(0)=0$, то, следовательно, $f(x)>f(0)$ для всех $x \neq 0$. Последнее и означает, согласно определению 1, что точка $x=0$ есть точка минимума функции $f(x)=|x|$.

Пример 2. Пусть $f(x)=3x-|x|$ (рис. 109). В точке $x=0$ данная функция не имеет производной, т. е. $x=0$ — критическая точка данной функции. Так как для всех $x<0$ $f(x)<f(0)$, а для всех $x>0$ $f(x)>f(0)$, то в точке $x=0$ данная функция не имеет экстремума.

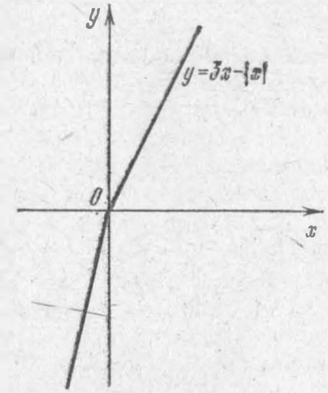


Рис. 109

3. Достаточные условия существования экстремума. Условимся в следующей терминологии: будем говорить, что некоторая функция $\varphi(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, если существует такая δ-окрестность $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ точки x_0, что слева от точки x_0, т. е. для $x \in (x_0-\delta;\ x_0)$, функция $\varphi(x)>0$, а справа от точки, т. е. для $x \in (x_0;\ x_0+\delta)$, функция $\varphi(x)<0$. Аналогично уславливаются в терминологии о перемене знака функции с минуса на плюс при переходе через точку x_0.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в ее δ-окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда*

а) *если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$;*

б) *если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$;*

в) *если существует окрестность $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ точки x_0, в которой производная $f'(x)$ сохраняет свой знак, то в точке x_0 данная функция $f(x)$ не имеет экстремума.*

□ Пусть производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус. Это значит, что существует число $\delta > 0$ такое, что $f'(x) > 0$ для всех x из интервала $(x_0-\delta;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ для всех x из интервала $(x_0;\ x_0+\delta)$. Так как $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0-\delta;\ x_0)$, то по теореме 1 из п. 3 § 36 следует, что на интервале $(x_0-\delta;\ x_0)$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0-\delta;\ x_0)$. Так как $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0;\ x_0+\delta)$, то по теореме 2 из п. 3 § 36 следует, что на интервале $(x_0;\ x_0+\delta)$ функция $f(x)$ убывает. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0;\ x_0+\delta)$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из интервала $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, т. е. согласно определению 2 п. 1 точка x_0 есть точка максимума функции $f(x)$.

Доказательство случаев б) и в) аналогично. ■

Сформулируем теперь достаточные условия существования экстремума в терминах значений производной второго порядка.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет первую и вторую производные и $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, причем максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

4. Правила нахождения экстремумов функции.

Правило 1. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале $(a;\ b)$, имеет производную всюду в интервале $(a;\ b)$, кроме, быть может, конечного числа точек, и имеет не более конечного числа стационарных точек. Тогда для нахождения экстремумов функции надо:

1) найти критические точки функции $f(x)$, т. е. точки, в которых или $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует;

2) исследовать знак производной $f'(x)$ в некоторой δ-окрестности каждой критической точки. При этом, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через такую точку, то функция $f(x)$ в этой точке имеет экстремум. А именно, если знак меняется с минуса на плюс, то в этой точке минимум; если с плюса на минус, то в этой точке максимум. Если же знак $f'(x)$ не меняется при переходе через рассматриваемую точку, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в этой точке.

Пример 1. Найти экстремумы функции

$$f(x) = x^{2/3}(x-3),\quad x \in R.$$

△ 1) Вычислим производную данной функции:

$$f'(x) = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$$

и найдем критические точки: $f'(x)=0$, если $x=6/5$; $f'(x)$ не существует в точке $x=0$.

Итак, критические точки: $x_1=0$ и $x_2=6/5$.

2) Исследуем знак производной $f'(x)$ в некоторой окрестности каждой критической точки.

Имеем: $f'(x) > 0$ для всех $x < 0$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (0;\ 1)$. Поэтому, согласно теореме 1 (см. п. 3), точка $x=0$ является точкой максимума, причем максимум функции равен $f(0)=0$.

Далее, так как $f'(x) < 0$ для всех $x \in \left(0;\ \frac{6}{5}\right)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x > \frac{6}{5}$, то по теореме 1 (см. п. 3) точка $x=\frac{6}{5}$ является точкой минимума, причем минимум функции равен $f\left(\frac{6}{5}\right) \approx -2{,}03$. ▲

Правило 2. Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, непрерывна и имеет вторую производную всюду на $(a;\ b)$, кроме, быть может, конечного числа точек. Тогда, чтобы найти экстремумы функции, надо:

1) найти стационарные точки функции $f(x)$;

2) в каждой стационарной точке вычислить вторую производную: если вторая производная положительна, то эта точка — точка минимума данной функции, если вторая производная отрицательна, то эта точка — точка максимума; если вторая производная равна нулю, то для установления экстремума необходимо использовать первое правило.

Пример 2. Найти экстремумы функции

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5.$$

△ 1) Вычисляем первую производную:

$$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2-4)$$

и находим стационарные точки: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$.

2) Вычисляем вторую производную: $f''(x) = 3x^2-4$ и подсчитываем ее значения в стационарных точках:

$$f''(-2) = 8 > 0,\quad f''(0) = -4 < 0,\quad f''(2) = 8 > 0.$$

Следовательно, данная функция имеет:
а) в точке $x=-2$ минимум, равный $f(-2)=1$;
б) в точке $x=0$ максимум, равный $f(0)=5$;
в) в точке $x=2$ минимум, равный $f(2)=1$. ▲

Вопросы для контроля

1. Какая точка называется точкой минимума функции?
2. Какая точка называется точкой максимума функции?
3. Какие точки называются точками экстремума функции?
4. Что называется максимумом функции?
5. Что называется минимумом функции?
6. Какие значения функции называются экстремумами функции?
7. Сформулируйте теорему Ферма (необходимое условие существования экстремума).
8. Какие точки называются стационарными?
9. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума с помощью производной первого порядка.
10. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума с помощью производной второго порядка.
11. Сформулируйте правило нахождения экстремума функции с помощью производной первого порядка.
12. Сформулируйте правило нахождения экстремума функции с помощью производной второго порядка.

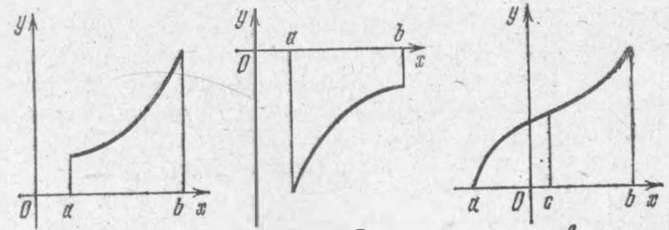
Упражнение

7.21. Найдите экстремумы следующих функций:
1) $f(x)=1+4x-x^2$; 2) $f(x)=3+x^2-6x$;
3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$; 4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^4+5$;
5) $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$; 6) $f(x)=\sqrt{x}$; 7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$;
8) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; 9) $f(x)=x^2e^{-x}$; 10) $f(x)=e^x+e^{-x}$;
11) $f(x)=x\ln x$; 12) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

§ 38. Выпуклость графика функции

1. О понятии выпуклости графика функции. На рис. 110 изображены графики функций, каждая из которых является возрастающей на отрезке $[a; b]$, однако хорошо видно различие в их поведении; в случае а) график функции обращен выпуклостью вниз; в случае б) — выпуклостью вверх; в случае в) на интервале $(a; c)$ график

функции обращен выпуклостью вверх, а на интервале $(c; b)$ — выпуклостью вниз. С геометрической точки зрения смысл выражения «обращен выпуклостью вниз» и «обращен выпуклостью вверх» вполне понятен. Придадим этим выражениям точный математический смысл и дадим



а б в

Рис. 110

критерий для выяснения того, в какую сторону обращена выпуклость графика функции.

Определение 1. График непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $x\in(a; b)$, называется *выпуклым вверх* на интервале $(a; b)$, если производная $f'(x)$ убывает на $(a; b)$. А если $f'(x)$ возрастает на $(a; b)$, то график этой функции называется *выпуклым вниз*.

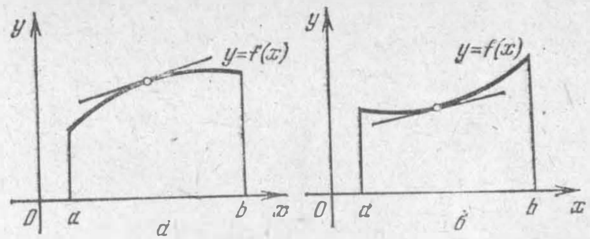


Рис. 111

Легко видеть, что если график функции выпуклый вверх, то все его точки лежат ниже любой его касательной (рис. 111, *а*), так как угловой коэффициент касательной уменьшается с возрастанием x. А если график выпуклый вниз (рис. 111, *б*), то все точки лежат выше любой его касательной (кроме, конечно, самой точки касания).

Определение 2. Интервалы, на которых график функции выпуклый вверх или вниз, называются *интервалами выпуклости* графика функции.

2. Достаточное условие выпуклости графика функции.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то на интервале $(a;\ b)$ график функции $f(x)$ выпуклый вверх, если же $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a;\ b)$.*

□ Если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a,\ b)$, то, согласно теореме 2 из п. 3 § 36, функция $f'(x)$ убывает на интервале $(a;\ b)$. Следовательно, согласно определению, график функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то, согласно теореме 1 из п. 3 § 36, функция $f'(x)$ возрастает на интервале $(a,\ b)$. Таким образом, согласно определению, график функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ выпуклый вниз. ■

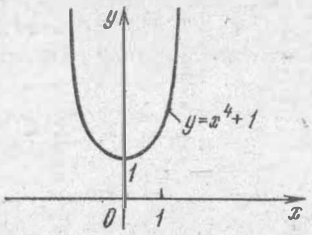


Рис. 112

Условие знакопостоянства второй производной, являясь достаточным условием выпуклости (вверх или вниз) графика функции, не является вместе с тем необходимым условием. Так, например, график функции $f(x) = x^4 + 1$ выпуклый вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $f''(x) = 12x^2$ обращается в нуль в точке $x = 0$ (рис. 112).

Сформулируем теперь *правило нахождения интервалов выпуклости* графика функции.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;\ b)$, имеет в интервале $(a;\ b)$ производную второго порядка кроме, быть может, конечного числа точек, и $f''(x)$ имеет не более конечного числа нулей в интервале $(a;\ b)$.

Тогда для нахождения интервалов выпуклости графика этой функции надо:

1) найти все точки, в которых или $f''(x) = 0$, или $f''(x)$ не существует (эти точки называются критическими точками функции по второй производной);

2) в каждом из интервалов, на которые разбивается интервал $(a;\ b)$ критическими точками, найденными в первом пункте данного правила, установить знак $f''(x)$.

Если в рассматриваемом интервале $f''(x) > 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз, если же $f''(x) < 0$, то выпуклый вверх.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости графика функции $f(x) = x^3$.

△ Данная функция на всей числовой прямой имеет производные $f'(x) = 3x^2$ и $f''(x) = 6x$. Следовательно, имеется одна критическая точка по второй производной. Она разбивает числовую прямую на два интервала $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

Так как $f''(x) > 0$ для всех $x > 0$ и $f''(x) < 0$ для всех $x < 0$, то график функции выпуклый вниз на интервале $(0;\ +\infty)$ и выпуклый вверх на интервале $(-\infty;\ 0)$ (рис. 113). ▲

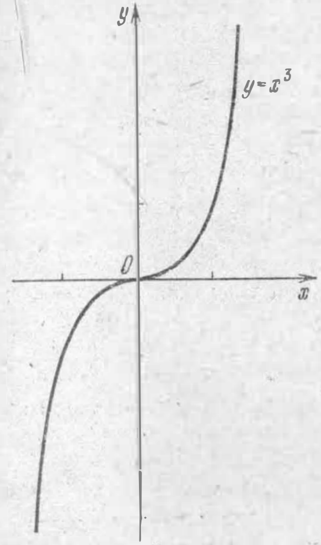


Рис. 113

Пример 2. Найти интервалы выпуклости графика функции $f(x) = xe^{-x}$.

△ Данная функция на всей числовой прямой имеет производные $f'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$ и $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Найдем критические точки функции (по второй производной): $x = 2$.

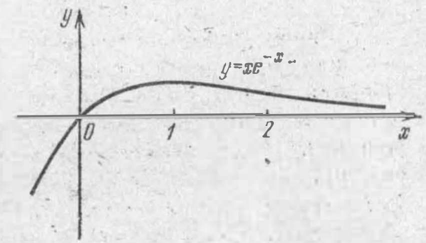


Рис. 114

Точка $x = 2$ разбивает числовую прямую на два интервала $(-\infty;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$.

Так как $f''(x) < 0$ для всех $x < 2$, то на интервале $(-\infty;\ 2)$ график данной функции обращен выпуклостью вверх, а так как $f''(x) > 0$ для $x > 2$, то на интервале $(2;\ +\infty)$ график обращен выпуклостью вниз (рис. 114). ▲

3. Точки перегиба. Как следует из примера 1 предыдущего пункта, точка $x = 0$ для функции $f(x) = x^3$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз. Аналогичным свойством обладает точка $x = 2$ для функции $f(x) = xe^{-x}$.

Определение. Точка графика дифференцируемой функции, абсцисса которой является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз, называется *точкой перегиба* графика этой функции.

Очевидно, что в точке перегиба касательная к графику кривой должна, с одной стороны, находиться выше графика кривой, а с другой, — ниже его, т. е. пересекать кривую в этой точке (рис. 115).

Теорема 1 (необходимое условие). *Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ имеет непрерывную производную второго порядка. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a;\ b)$ является точкой перегиба графика этой функции, то $f''(x_0)=0$.*

□ Доказательство будем проводить методом от противного. Допустим, что $f''(x_0)<0$ (или $f''(x_0)>0$). В силу непрерывности второй производной найдется δ-окрестность точки x_0 такая, что $f''(x)<0$ (соответственно $f''(x)>0$) для всех x на этой окрестности. По теореме из п. 2 данного параграфа график данной функции на интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ будет выпуклый вверх (соответственно вниз). Последнее противоречит тому, что x_0 является точкой перегиба. Значит, $f''(x_0)=0$. ■

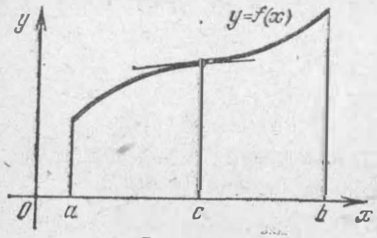


Рис. 115

Теорема 2 (достаточное условие). *Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$ имеет производную второго порядка. Тогда, если $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента через $x_0 \in (a,\ b)$, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика данной функции.*

□ Пусть $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс. Тогда в силу теоремы из п. 2 точка x_0 такова, что, с одной стороны, от точки x_0 график функции $y=f(x)$ обращен выпуклостью вверх, а с другой стороны, от этой точки x_0 обращен выпуклостью вниз. Последнее, согласно определению, означает, что точка $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $f(x)$. Аналогично доказывается, что и в случае, когда $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, точка $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $f(x)$. ■

Сформулируем правило нахождения точек перегиба графика функции.

Пусть функция $y=f(x)$, $x\in(a;\ b)$, имеет в интервале $(a;\ b)$ производную второго порядка, кроме, быть может, конечного числа точек, и $f''(x)$ имеет не более конечного числа нулей в интервале $(a;\ b)$. Тогда для нахождения точек перегиба графика этой функции нужно:

1) найти критические точки функции по второй производной;

2) исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента через критическую точку x_0, то $(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегиба графика данной функции.

Пример. Найти точки перегиба графика функции

$$f(x)=x^4-2x^3+1.$$

△ Данная функция на всей числовой прямой имеет производные

$$f'(x)=4x^3-6x^2,$$
$$f''(x)=12x(x-1).$$

Найдем критические точки функции (по второй производной) из уравнения $f''(x)=0$, т. е. $12x(x-1)=0$. Итак, $x_1=0$ и $x_2=1$ — критические точки данной функции.

Выясним теперь знак у $f''(x)$ в окрестности каждой критической точки $x_1=0$ и $x_2=1$.

Если $x<0$, то $f''(x)>0$; если $x\in(0;\ 1)$, то $f''(x)<0$. Таким образом, точка $(x_1;\ f(x_1))=(0;\ 1)$ — точка перегиба.

Если $x\in(1-\delta;\ 1)$, то $f''(x)<0$, а если $x\in(1;\ 1+\delta)$, то $f''(x)>0$. Следовательно, точка $(x_2;\ f(x_2))=(1;\ 0)$ — точка перегиба. ▲

4. Исследование квадратичной функции. Как известно, функция $f(x)=ax^2+bx+c$, где $x\in \boldsymbol{R}$ и $a\neq 0$, называется *квадратичной*, а многочлен ax^2+bx+c, $a\neq 0$, часто называют *квадратным трехчленом*. Квадратичная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, т. е. для любого x из $\boldsymbol{R}$. Производная этой функции $f'(x)=2ax+b$ существует при любом $x\in\boldsymbol{R}$ и обращается в нуль в единственной точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Вычислим значение y_0 функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{D}{4a},$$

где $D=b^2-4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена. Напомним, что знаком дискриминанта D определяется число и существование действительных корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c:

а) если $D > 0$, то трехчлен имеет два действительных корня:

$$x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a};$$

б) если $D = 0$, то трехчлен имеет один действительный корень:

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

в) если $D < 0$, то трехчлен не имеет действительных корней, т. е. не существует действительного числа, являющегося корнем квадратного трехчлена.

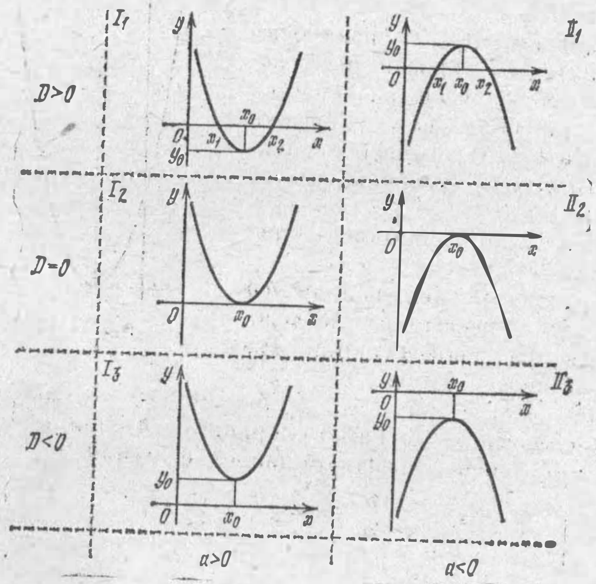


Рис. 116

Найдем интервалы монотонности и экстремумы квадратичной функции, используя ее производную.

а) Если $a > 0$, то $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Следовательно, функция $f(x)$ убывает на интервале $(-\infty;\ x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0;\ +\infty)$. Так как $f'(x_0) = 0$ и производная $f'(x)$ при переходе x через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, т. е.

$$f_{\min} = f(x_0) = y_0.$$

б) Если $a < 0$, то $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Поэтому квадратичная функция $f(x)$ возрастает на интервале $(-\infty;\ x_0)$ и убывает на интервале $(x_0;\ +\infty)$. Так как $f'(x_0) = 0$ и производная $f'(x)$ при переходе x через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, т. е.

$$f_{\max} = f(x_0) = y_0.$$

График квадратичной функции не имеет точек перегиба, так как $f''(x) = 2a \neq 0$ для любого $x \in R$. Он обращен выпуклостью вниз, если $a > 0$, и вверх, если $a < 0$.

В зависимости от знака дискриминанта D каждый из рассмотренных случаев разбивается еще на три подслучая. Графики каждого из 6 подслучаев квадратичной функции изображены на рис. 116.

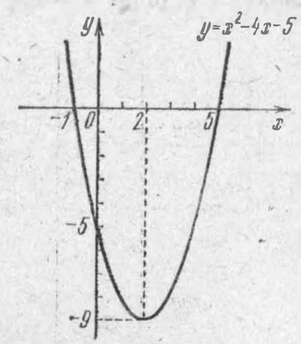


Рис. 117

Пример 1. Построить график функции $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

$\triangle$ При построении используем результаты проведенного исследования квадратичной функции. Так как для нашего случая $a = 1 > 0$ и $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 36 > 0$, то мы имеем дело со случаем I_1. Найдем координаты вершины параболы, являющейся графиком данной функции:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$$

и

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 - 5 = -9.$$

Таким образом, данная функция в точке $x_0 = 2$ имеет минимум, т. е. $f_{\min} = f(2) = -9$. Решая уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$, найдем абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox: $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$.

Найдем значение функции в точке $x = 0$: $f(0) = -5$. Следовательно, парабола пересекает ось Oy в точке $(0;\ -5)$. График данной функции изображен на рис. 117. $\blacktriangle$

Пример 2. Построить график функции $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.

△ Так как $a=-\frac{1}{3}<0$ и $D=b^2-4ac=2^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)\times$ $\times(-3)=4-4=0$, то мы имеем дело со случаем II_2. Положив $x=0$, получим $f(0)=-3$, т.е. график функции пересекает ось Oy в точке $(0;\ -3)$. Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=3, \quad y_0=f(3)=0.$$

График данной функции изображен на рис. 118. ▲

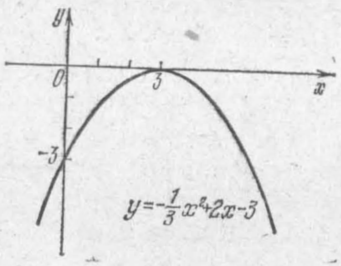


Рис. 118

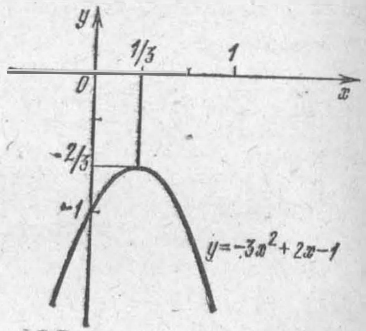


Рис. 119

Пример 3. Построить график функции $f(x)=$ $=-3x^2+2x-1$.

△ В данном случае $a=-3<0$ и

$$D=b^2-4ac=2^2-4(-3)(-1)=-8<0,$$

поэтому имеет место случай II_3. Положив $x=0$, получим $f(0)=-1$, т. е. график пересекает ось Oy в точке $(0;\ -1)$. Найдем теперь координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-3)}=\frac{1}{3}$$

и

$$y_0=f\left(\frac{1}{3}\right)=-3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}.$$

График данной функции изображен на рис. 119. ▲

Вопросы для контроля

1. Какой график называется выпуклым вверх?
2. Какой график называется выпуклым вниз?
3. Какие интервалы называются интервалами выпуклости графика функции?

4. Сформулируйте достаточное условие выпуклости графика функции.
5. Сформулируйте правило нахождения интервалов выпуклости графика функции.
6. Какая точка называется точкой перегиба графика функции?
7. Сформулируйте необходимое условие существования точки перегиба графика функции.
8. Сформулируйте достаточное условие существования точки перегиба графика функции.
9. Сформулируйте правило нахождения точек перегиба графика функции.

Упражнения

7.22. Для графиков следующих функций найдите интервалы, в которых график функций обращен выпуклостью вверх и вниз:
1) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$; 2) $f(x)=(x+1)^4$;
3) $f(x)=x^4-6x^2+4$; 4) $f(x)=x^4+8x^2+16$.

7.23. Исследуйте квадратичные функции и постройте их графики:
1) $f(x)=x^2+2x-3$; 2) $f(x)=4x^2-6x-7$;
3) $f(x)=3+4x-x^2$; 4) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x-1$;
5) $f(x)=-4x^2+2x-1$; 6) $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+2x-5$;
7 $f(x)=x^2+x-2$; 8) $f(x)=x^2-2x+3$.

§ 39. Построение графиков функций

1. Асимптоты. Прямая $y=kx+b$ называется *асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0.$$

Таким образом, если прямая $y=kx+b$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, то функция

$$\alpha(x)=f(x)-kx-b$$

является бесконечно малой при $x\to+\infty$.

Отсюда следует, что

$$k=\frac{f(x)}{x}-\frac{b+\alpha(x)}{x}$$

и поэтому

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\alpha(x)}{x}=0.$$

Далее, $b=f(x)-kx-\alpha(x)$ и поэтому

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx).$$

Аналогично определяется и находится асимптота графика функции $f(x)$ при $x\to-\infty$.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{3x^2+1}{x}$.

$\triangle$ Так как

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

то прямая $y=3x$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$. Легко убедиться, что эта же прямая

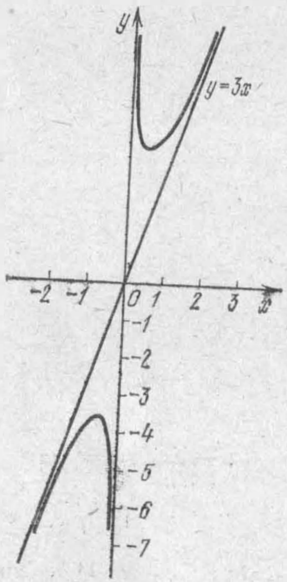


Рис. 120

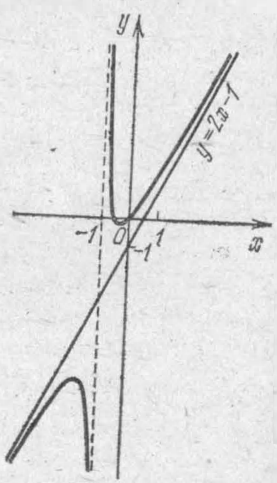


Рис. 121

$y=3x$ является асимптотой и при $x\to-\infty$. График функции изображен на рис. 120. ▲

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\frac{2x^2+x}{x+1}$.

$\triangle$ Так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x+1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right)=-1,$$

то прямая $y=2x-1$ является асимптотой графика данной функции при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$. График функции изображен на рис. 121. ▲

Пример 3. Пусть дана функция

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Найти асимптоты.

$\triangle$ Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-2x\right)=0.$$

Итак, прямая $y=x$ является асимптотой графика данной функции при $x\to+\infty$.

Рассмотрим теперь пределы при $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}+2x\right)=0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ является асимптотой для графика данной функции при $x\to-\infty$. Изображение графика дано на рис. 122. ▲

Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty.$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точки разрыва данной функции $f(x)$.

Пример 4. Пусть $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$. Найти асимптоты.

$\triangle$ Рассмотрим точки $x=2$ и $x=-2$. Имеем

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x)=\lim_{x\to\pm 2}\frac{4}{x^2-4}=\infty,$$

и поэтому прямые $x=2$ и $x=-2$ являются вертикальными асимптотами графика данной функции.

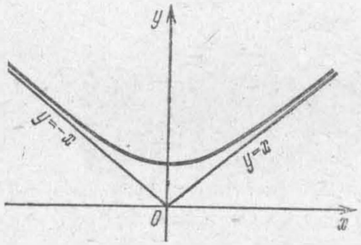


Рис. 122

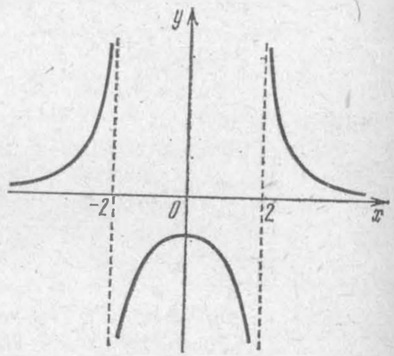


Рис. 123

График функции $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$ изображен на рис. 123. ▲

Пример 5. Пусть дана функция $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$. Найти асимптоты.

$\triangle$ Рассмотрим точки $x=0$ и $x=1$, где эта функция не определена. В этих точках

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=+\infty,\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty.$$

Следовательно, прямые $x=0$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами графика данной функции. Кроме того, прямая $y=0$ является асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty$.

Изображение графика функции дано на рис. 124. ▲

2. Примеры построения графиков функций. При построении графиков функций можно использовать следующую схему:

1) Найти область определения функции, если она заранее не указана.

2) Проверить функцию на четность и нечетность.

3) Исследовать функцию на периодичность.

4) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5) Найти интервалы знакопостоянства функции.

6) Найти асимптоты графика функции.

7) Исследовать функцию на монотонность.

8) Найти точки экстремума функции.

9) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости графика функции.

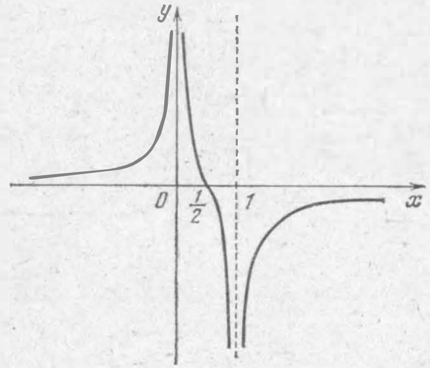


Рис. 124

10) Построить график.

Отметим, что не всегда нужно точно следовать данной схеме при построении графика функции. Иногда для построения графика функции достаточно пп. 1)—6).

Пример 1. Построить график функции $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

$\triangle$ 1) Область определения функции — вся числовая прямая, кроме $x=+1$, $x=-1$.

2) $f(x)$ — нечетная функция, так как $f(-x)=-f(x)$. Поэтому для построения графика $y=f(x)$ достаточно исследовать ее для $x\geqslant 0$.

3) Функция непериодическая.

4) График функции пересекает оси координат только в точке (0; 0).

Точки $x_1=-1$, $x_2=0$ и $x_3=1$ разбивают числовую прямую на четыре интервала:

$$(-\infty;\ -1),\ (-1;\ 0),\ (0;\ 1)\ \text{и}\ (1;\ +\infty).$$

5) Найдем знаки функции лишь в интервалах (0; 1) и $(1;\ +\infty)$:

$$f(x)<0 \text{ для всех } x\in(0;\ 1),$$
$$f(x)>0 \text{ для всех } x\in(1;\ +\infty).$$

В силу нечетности данной функции имеем

$$f(x)<0 \text{ для всех } x\in(-\infty;\ -1),$$
$$f(x)>0 \text{ для всех } x\in(-1;\ 0).$$

6) Так как

$$\lim_{x\to+1\pm0} f(x)=\pm\infty \text{ и } \lim_{x\to-1\pm0} f(x)=\pm\infty,$$

то прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами. А так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=0,$$

то график данной функции имеет асимптоту $y=x$.

7) Найдем производную:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Она существует во всех точках числовой прямой, кроме $x=\pm1$, и равна нулю в точках $x=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$. Поэтому критическими точками функции будут

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1,\ x_5=\sqrt{3}.$$

Изучим поведение $f'(x)$ в окрестности каждой критической точки. Вследствие нечетности $f(x)$ достаточно рассмотреть знак $f'(x)$ на промежутках $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\ +\infty)$. Результаты исследования запишем в таблицу

x	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$1<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$\sqrt{3}<x<+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	убывает	нет экстремума	убывает	убывает	минимум $=\frac{3\sqrt{3}}{2}$	возрастает

В точках $x=-1$ и $x=1$ функция не имеет экстремума, так как эти точки не принадлежат области определения данной функции.

В силу нечетности функции можно утверждать, что при $x=-\sqrt{3}$ данная функция имеет максимум.

8) Чтобы исследовать график функции на выпуклость, найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

и критические точки данной функции (по второй производной): $f''(x)=0$ при $x=0$ и $f''(x)$ не существует при $x=\pm1$. Однако точки $x=\pm1$ не принадлежат области определения функции, поэтому точка перегиба может быть только в точке с абсциссой $x=0$.

Исследуем знак второй производной и результаты исследования запишем в таблицу

x	$x<-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x>1$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	выпуклость вверх	выпуклость вниз	точка перегиба	выпуклость вверх	выпуклость вниз

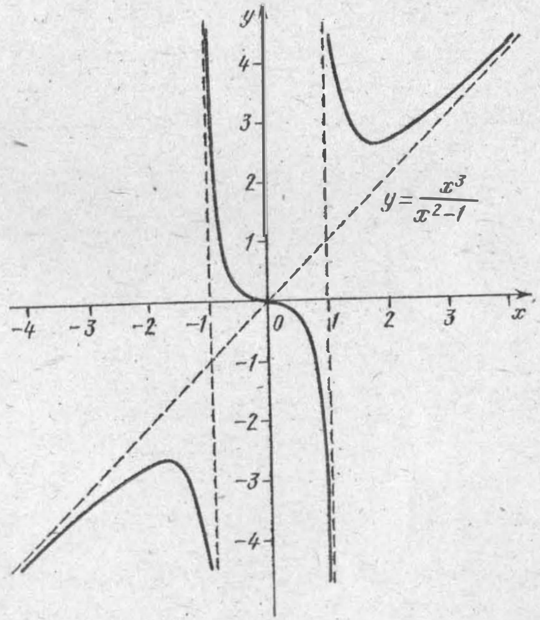


Рис. 125

9) На основе проведенного исследования функции строим ее график (рис. 125). ▲

П р и м е р 2. Построить график функции $f(x)=\frac{5(x-2)}{x^2}$.

$\triangle$ 1) Область определения функции — вся числовая ось, кроме точки $x=0$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Функция непериодическая.

4) Найдем нули функции. Решив уравнение $\frac{5(x-2)}{x^2}=0$, получим $x=2$. Таким образом, график функции пересекает ось абсцисс в точке $x=2$. Далее, так как $x=0$ не входит в область определения функции, то график функции ось ординат не пересекает.

5) Точки $x=0$ и $x=2$ разбивают числовую ось на три интервала $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$, в каждом из которых значения функции имеют постоянные знаки (см. таблицу):

x	$-\infty<x<0$	$0<x<2$	$2<x<+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

6) Найдем асимптоты графика функции. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5(x-2)}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5(x-2)}{x^3}=0,$$

то прямая $y=0$, т. е. ось абсцисс, является горизонтальной асимптотой. А так как

$$\lim_{x\to\pm 0} f(x)=\lim_{x\to\pm 0}\frac{5(x-2)}{x^2}=\infty,$$

то прямая $x=0$, т. е. ось ординат, является вертикальной асимптотой.

7) Найдем производную:

$$f'(x)=\frac{5(4-x)}{x^3};$$

она существует и конечна в области определения данной функции. Поэтому критическими точками функции $f(x)$ (по первой производной) будут $x_1=0$ и $x_2=4$.

Изучим поведение функции на интервалах $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$. Результаты исследования запишем в таблицу

x	$-\infty<x<0$	$0<x<4$	$x=4$	$4<x<+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	убывает	возрастает	максимум $\approx 0{,}6$	убывает

В точке $x=0$ функция не имеет экстремума, так как эта точка не принадлежит области определения данной функции.

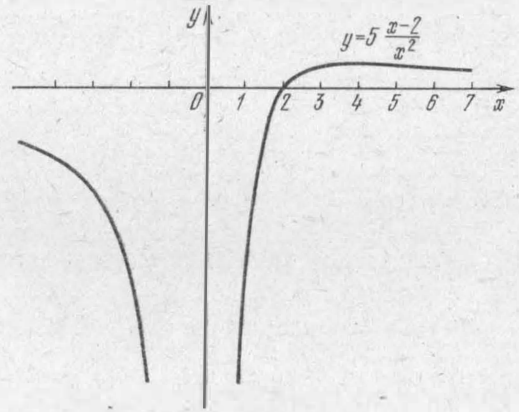


Рис. 126

8) Чтобы исследовать график функции на выпуклость и определить точки перегиба, найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{10(x-6)}{x^4}$$

и критические точки данной функции $f(x)$ (по второй производной): $f''(x)=0$ при $x=6$ и $f''(x)$ не существует в точке $x=0$. Так как точка $x=0$ не принадлежит области определения данной функции, то точкой перегиба может оказаться лишь точка с абсциссой $x=6$. Исследуем знак второй производной и результаты исследований запишем в таблицу

x	$-\infty<x<0$	$0<x<6$	$x=6$	$6<x<+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	выпуклость вверх	выпуклость вверх	точка перегиба	выпуклость вниз

9) Используя результаты исследования функции, строим ее график (рис. 126). ▲

Упражнения

7.24. Найдите асимптоты графиков функций:

1) $y=\frac{1}{x-2}$; 2) $y=\frac{x^3}{x-1}$; 3) $y=\sqrt{x^2-1}$;

4) $y=\frac{x^2+6x-5}{x}$; 5) $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$; 6) $y=\frac{1}{1-x^2}$.

7.25. Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $f(x)=x^3-3x^2-x+3$; 2) $f(x)=x^4-10x^2+9$;

3) $f(x)=-x^4+2x^2+3$; 4) $f(x)=\frac{x-1}{(2x+1)(2-x)}$;

5) $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-2)}$; 6) $f(x)=\frac{(x+1)(2-x)}{2x+3}$;

7) $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$; 8) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$;

9) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$; 10) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$; 11) $f(x)=x\ln x$.

§ 40. Решение задач на максимум и минимум

На практике часто приходится рассматривать задачи, связанные с нахождением наибольшего или наименьшего значения из всех тех значений, которые функция принимает на некотором отрезке. Если известно, что на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ монотонна, то наименьшее и наибольшее значения достигаются в концах отрезка, а именно, если $f(x)$ — возрастающая функция, то $f(a)$ — наименьшее значение, а $f(b)$ — наибольшее значение функции $f(x)$; если же $f(x)$ — убывающая функция, то $f(a)$ — наибольшее значение, а $f(b)$ — наименьшее значение функции $f(x)$. Например, функция $f(x)=x^2$, $x\in[0; 1]$, возрастает на отрезке

$[0; 1]$. Следовательно, $f(0)=0$ — наименьшее значение функции, а $f(1)=1$ — наибольшее значение (рис. 127).

Пусть теперь $f(x)$ не является монотонной на отрезке $[a; b]$, но известно, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную во всех точках отрезка $[a; b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, и имеет не более конечного числа стационарных точек. Тогда наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке функция принимает либо в одной из критических точек, принадлежащих $(a; b)$, либо на концах отрезка $[a; b]$.

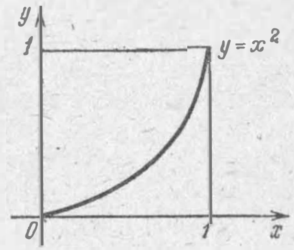


Рис. 127

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^{2/3}(x-2)$ на отрезках: а) $[-8; -1]$ и б) $[-1; 1]$.

△ Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет производную

$$f'(x)=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

на всей числовой прямой, кроме $x=0$.

Критическими точками данной функции будут $x=0$ и $x=0{,}8$.

а) На отрезке $[-8; -1]$ данная функция возрастает, так как $f'(x)>0$ для любого $x\in[-8; -1]$.

Следовательно, на отрезке $[-8; -1]$ функция принимает наименьшее значение при $x=-8$, а наибольшее значение при $x=-1$:

$$f_{\text{наим}}=f(-8)=-40,\quad f_{\text{наиб}}=f(-1)=-3.$$

б) Обе критические точки функции принадлежат отрезку $[-1; 1]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данной функции на отрезке $[-1; 1]$ находятся среди значений

$$f(-1)=-3,\ f(0)=0,\ f(0{,}8)\approx-1{,}03 \text{ и } f(1)=-1,$$

и поэтому $f_{\text{наиб}}=0$, $f_{\text{наим}}=-3$. ▲

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ на отрезке $[0; 3]$.

△ Решив уравнение $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$, найдем критические точки $x=1$ и $x=2$.

Наименьшее из чисел

$$f(0)=-3,\ f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=6$$

будет наименьшим значением, а наибольшее — наибольшим значением данной функции на отрезке [0; 3]. Поэтому $f_{\text{наим}}=-3$ и $f_{\text{наиб}}=6$. ▲

Рассмотрим несколько задач с конкретным содержанием, для решения которых необходимо найти наибольшее или наименьшее значение некоторой функции.

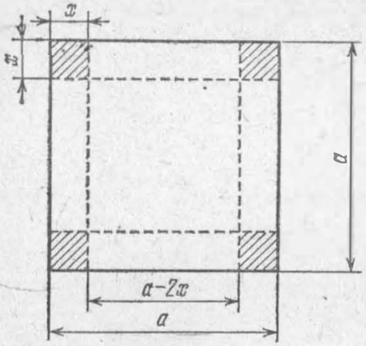


Рис. 128

Пример 3. Какой из прямоугольников с периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

△ Прямоугольников с периметром $2p$ имеется бесконечное множество. Наша задача — выделить из этого множества прямоугольников прямоугольник, площадь которого будет наибольшей.

Если через x обозначить длину одной из сторон прямоугольника, то длина другой стороны равна $p-x$, а площадь S такого прямоугольника равна $x(p-x)$.

Найдем критические точки функции

$$S=x(p-x),\quad x\in[0;\ p].$$

Так как $S'=p-2x$, то $x=p/2$ — критическая точка этой функции. На $[0;\ p/2]$ функция S возрастает, а на $[p/2;\ p]$ убывает. Следовательно, при $x=p/2$ площадь S будет наибольшей.

Ответ: из прямоугольников с периметром $2p$ наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $p/2$. ▲

Пример 4. Из квадратного листа жести со стороной a надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема.

△ Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата (рис. 128). Так как в основании бака квадрат, то $0\leqslant x\leqslant \frac{a}{2}$ и объем бака будет определяться по формуле

$$V(x)=(a-2x)^2x,\quad \text{где } 0\leqslant x\leqslant a/2.$$

Таким образом, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $V(x)$ на отрезке $[0;\ a/2]$.

Так как $V'(x)=a^2-8ax+12x^2$, то, решив уравнение $12x^2-8ax+a^2=0$, найдем стационарные точки функции $V(x)$: $x=a/6$ и $x=a/2$.

Рассмотрим далее значения функции V в точках $x_1=0$, $x_2=a/6$ и $x_3=a/2$. Так как

$$V(0)=0,\quad V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}\quad\text{и}\quad V\left(\frac{a}{2}\right)=0,$$

то функция $V(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[0;\ a/2]$ в точке $x=a/6$. Итак, при $x=a/6$ объем бака будет наибольшим.

Ответ: $V_{\text{наиб}}=V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$. ▲

Упражнения

7.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

1) $f(x)=x^3-3x$ на отрезках $[-0,5;\ 0,5]$ и $[-1,5;\ 2]$;
2) $f(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезках $[-1;\ 1]$, $[0;\ 3]$ и $[-3;\ 5]$;
3) $f(x)=-x^4+2x^2+3$ на отрезках $[-0,5;\ 0,7]$, $[-2;\ 0]$, $[-2;\ 2]$ и $[0;\ 4]$;
4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(2-x)}$ на отрезках $[-6;\ -1]$ и $[-2;\ 1]$.

7.27. Требуется сделать коробку, объем которой должен равняться 108 см³. Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?

7.28. Требуется огородить проволочной сеткой длиной a прямоугольный участок, прилегающий к стене. Найти размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.

7.29. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t)=5t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

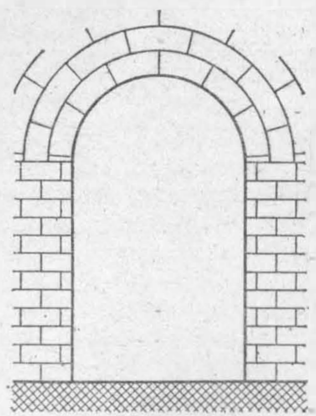


Рис. 129

7.30. Из куска картона 32 см × 20 см требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и затем загибая выступы для образования боковых сторон коробки. Найдите объем коробки.

7.31. Сечение туннеля (или шлюзового канала) имеет форму прямоугольника, завершаемого полукругом (рис. 129).

1) Зная периметр сечения $2p$, определите, при каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей.

2) Зная площадь сечения S, определите, при каких условиях периметр сечения будет наименьшим.

7.32. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

7.33. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

7.34. Найдите положительное число x, чтобы разность $x-x^2$ была наибольшей.

7.35. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.

7.36. Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $W=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E — электродвижущая сила элемента, r — внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия W была наибольшей?

7.37. Даны прямая и две точки C и D по одну сторону от прямой. Найдите такую точку K на этой прямой, для которой сумма расстояний $CK+KD$ была бы наименьшей.

7.38. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строками) S (см²). Ширина полей на странице слева и справа должна быть равна K (см), а сверху и снизу — d (см). Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

7.39. Определите сопротивление внешней цепи, при котором батарея из двух последовательно соединенных аккумуляторов сможет развить максимальную полезную мощность. ЭДС батареи 2,5 В, внутреннее сопротивление 0,16 Ом. Чему равна максимальная полезная мощность?

7.40. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вершины которого находятся в начале декартовой системы координат, на оси x, на оси y и на параболе $y=4-x^2$.

Глава 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 41. Неопределенный интеграл и его свойства

1. Первообразная и неопределенный интеграл. В дифференциальном исчислении мы решали задачу нахождения производной или дифференциала заданной функции. В математике и ее приложениях часто приходится решать обратную задачу: по заданной производной находить новую функцию, производная которой равна заданной функции. Например, если нам известна скорость $v=v(t)$, $t\in[a;\ b]$, прямолинейного движения материальной точки, а мы должны узнать путь s, пройденный этой точкой, то, зная, что $\frac{ds}{dt}=v$, мы как раз должны будем по заданной производной $\frac{ds}{dt}=v(t)$ найти функцию s. Нахождение функции по ее производной или дифференциалу рассматривается в интегральном исчислении. Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют первообразной.

√ Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x)=f(x).$$

Например, для функции $f(x)=3x^2$, $x\in\boldsymbol{R}$, первообразной во всех точках действительной оси будет функция $F(x)=x^3$, так как $F'(x)=3x^2=f(x)$ для каждого $x\in\boldsymbol{R}$. Заметим, что $F_1(x)=x^3+1$, или $F_2(x)=x^3-5$, или, вообще, $F_3(x)=x^3+C$, где C — произвольная константа, также являются первообразными для функции $f(x)=3x^2$, $x\in\boldsymbol{R}$, так как эти функции имеют одну и ту же производную, равную $3x^2$.

Таким образом, функция $f(x)=3x^2$, $x\in\boldsymbol{R}$, имеет бесконечное множество первообразных. Следующая теорема показывает, как найти все первообразные заданной функции, зная одну из них.

Теорема. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции f на этом промежутке задается формулой $F(x)+C$, $C \in R$.*

□ Любая функция вида $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная, является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Докажем теперь, что любая первообразная для f представима в виде $F(x)+C$, где C — некоторое число.

Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$ и покажем, что она является постоянной.

Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки рассматриваемого промежутка и пусть, например, $x_1<x_2$. По теореме Лангранжа найдется точка $c \in (x_1;\ x_2)$ такая, что

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(c)(x_2-x_1).$$

Так как $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ для всех x и, в частности, $\varphi'(c)=0$, то $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$. Итак, $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$ для любых x_1 и x_2. Следовательно, $\varphi(x)=C$, где C — некоторое число, т. е.

$$\Phi(x)=F(x)+C. \blacksquare$$

Из доказанной теоремы следует, что графики первообразных функции $y=f(x)$ получаются из графика какой-нибудь одной первообразной $F(x)$ параллельным переносом графика функции $y=F(x)$ вдоль оси ординат.

Пример. Для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0;\ +\infty)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(2;\ 2)$.

△ Так как при всех $x \in (0;\ +\infty)$ верно равенство $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, то $\ln x$ — одна из первообразных функции $f(x)=\frac{1}{x}$. По доказанной теореме искомая первообразная $F(x)$ должна иметь вид $F(x)=\ln x+C$, где C — некоторая постоянная. Постоянную C находим из условия $F(2)=2$, т. е. $\ln 2+C=2$, откуда $C=2-\ln 2$. Следовательно,

$$F(x)=\ln x+2-\ln 2=\ln\frac{x}{2}+2. \blacktriangle$$

Определение 2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ на некотором промежутке называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \tag{1}$$

Этот символ читается так: «интеграл от $f(x)$ по dx». Таким образом, согласно определению,

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}, \tag{2}$$

где $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная. Формулу (2) принято записывать без фигурных скобок, опуская обозначение множества

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования.*

Нахождение функции по ее производной или по ее дифференциалу называется *интегрированием функции.* Интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования можно проверить дифференцированием. Например,

$$\int (2x+3)\,dx=x^2+3x+C,$$

так как

$$(x^2+3x+C)'=2x+3.$$

2. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx. \tag{1}$$

□ Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, тогда, по определению,

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

где $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=d(F(x)+C)=dF(x)=f(x)\,dx. \blacksquare$$

2. Если $f(x)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+C, \quad \int df(x) = f(x)+C. \qquad (2)$$

□ Так как $df(x)=f'(x)dx$ и f является первообразной для своей производной f', то

$$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x)+C. \blacksquare$$

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то при $a \neq 0$ верно равенство

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Это свойство означает, что постоянный отличный от нуля множитель можно выносить за знак интеграла.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные, то

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \qquad (4)$$

Это свойство означает, что интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.

Доказательство свойств 3 и 4 аналогично доказательству первых двух свойств.

Формула (4) естественным образом обобщается на случай суммы $n\,(n>2)$ функций.

Пример. Найти $\int (2\sin x + 3e^{-x})\,dx$.

△ Согласно свойствам 4 и 3 неопределенного интеграла получаем

$$\int (2\sin x+3e^{-x})\,dx = \int 2\sin x\,dx + \int 3e^{-x}\,dx =$$
$$= 2\int \sin x\,dx + 3\int e^{-x}\,dx = -2\cos x - 3e^{-x} + C.$$

Последнее равенство следует из известных формул:

$$(-\cos x)' = \sin x \text{ и } (-e^{-x})' = e^{-x}. \blacktriangle$$

3. Таблица неопределенных интегралов. Из определения интеграла следует, что всякая формула для производной конкретной функции, т. е. формула вида

$$F'(x) = f(x),$$

может быть записана в виде интегральной формулы:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Используя это соображение и таблицу производных, составим таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int 0\,dx = C$, C — константа.
2. $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \quad a>0, \quad a\neq 1.$

В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \quad a\neq 0.$
10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C, \quad a\neq 0.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|}+C, \quad a\neq 0.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C, \quad a\neq 0.$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C, \quad a\neq 0.$

Каждая из формул 1—13 справедлива на каждом промежутке, принадлежащем области определения подинтегральной функции. Справедливость каждой из приведенных формул можно установить дифференцированием. Проверим, например, формулу 3.

Здесь надо рассмотреть два случая.

1) Пусть $x>0$; тогда $|x|=x$ и формула 3 примет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Дифференцируя, получим

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

$-\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$

a

2) Пусть $x<0$; тогда $|x|=-x$ и формула 3 имеет вид

$$\int \frac{dx}{x}=\ln(-x)+C.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$(\ln(-x)+C)'=\frac{-1}{-x}+0=\frac{1}{x}.$$

Интегралы, приведенные в рассмотренной выше таблице, получили название *табличных интегралов.*

Вопросы для контроля

1. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$, $x\in(a;\ b)$?
2. Что называется неопределенным интегралом функции $f(x)$?
3. Верны ли утверждения: а) первообразная суммы двух функций равна сумме первообразных этих функций; б) неопределенный интеграл разности двух функций равен соответствующей разности интегралов от этих функций?
4. Почему формула (3) неверна при $a=0$?
5. Докажите справедливость формул 10—12 для табличных интегралов.

§ 42. Методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования. *Непосредственным интегрированием* называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенных интегралов. При этом подынтегральную функцию обычно предварительно соответствующим образом преобразуют.

Пример 1. Найти $\int(1+\sqrt{x})^2\,dx.$

△ Преобразовав подынтегральную функцию и воспользовавшись свойствами 4 и 3 интеграла, находим

$$\int(1+\sqrt{x})^2\,dx=\int(1+2\sqrt{x}+x)\,dx=$$
$$=\int dx+2\int\sqrt{x}\,dx+\int x\,dx=x+\frac{4x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Последнее равенство получено с помощью табличного интеграла 2 соответственно при $\alpha=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha=1$. ▲

Пример 2. Найти $\int\frac{2+x^4}{x}\,dx.$

△ Интеграл сводится к табличным интегралам 3 и 2 ($\alpha=3$):

$$\int\frac{2+x^4}{x}\,dx=2\int\frac{dx}{x}+\int x^3\,dx=2\ln|x|+\frac{x^4}{4}+C. \ ▲$$

Пример 3. Найти $\int 3^x\cdot 4^{2x}\,dx.$

△ Преобразовав подынтегральную функцию, приводим интеграл к табличному интегралу 4 ($a=48$):

$$\int 3^x\cdot 4^{2x}\,dx=\int 3^x 16^x\,dx=\int 48^x\,dx=\frac{48^x}{\ln 48}+C. \ ▲$$

Пример 4. Найти $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx.$

△ Так как $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$, то

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C. \ ▲$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{25+4x^2}.$

△ Путем простых преобразований подынтегральной функции приходим к табличному интегралу 9 $\left(a=\frac{5}{2}\right)$:

$$\int\frac{dx}{25+4x^2}=\int\frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C. \ ▲$$

Пример 6. Найти $\int\frac{x^2\,dx}{3+x^2}.$

△ Интеграл приводится к табличному интегралу 9 ($a=\sqrt{3}$):

$$\int\frac{x^2\,dx}{3+x^2}=\int\frac{3+x^2-3}{3+x^2}\,dx=\int\frac{3+x^2}{3+x^2}\,dx+\int\frac{-3\,dx}{3+x^2}=$$
$$=\int dx-3\int\frac{dx}{3+x^2}=x-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C. \ ▲$$

Пример 7. Найти $\int\frac{dx}{3x^2-5}.$

△ Интеграл сводится к табличному интегралу 10 $\left(a=\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$:

$$\int \frac{dx}{3x^2-5}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{5}}{x\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right|+C. \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

△ Сводим интеграл к табличному интегралу 11 $\left(a=\frac{1}{3}\right)$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{3}\arcsin 3x+C. \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2+4}-4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}dx$.

△ Данный интеграл сводится к табличным интегралам 12 и 13 ($a=2$):

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}-4\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}-4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-4}|-4\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

△ Так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, то

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким образом, интеграл сводится к табличным интегралам 7 и 8:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C. \blacktriangle$$

2. Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки). В основе метода подстановки (или метода замены переменной) вычисления неопределенных интегралов лежит следующая формула, являющаяся простым следствием правила дифференцирования сложной функции:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=F(g(x))+C, \tag{1}$$

где $F(t)$ — какая-либо первообразная функции $f(t)$, $t=g(x)$.

Действительно, согласно этому правилу получаем

$$(F(g(x))+C)'=F'(g(x))\,g'(x)=f(g(x))\,g'(x).$$

Правую часть формулы (1) обычно записывают в виде

$$\int f(t)\,dt, \tag{2}$$

где $t=g(x)$.

Из формулы (1) следует, что если подынтегральное выражение имеет вид

$$f(g(x))\,g'(x)\,dx=f(g(x))\,dg(x) \tag{3}$$

или приводится к этому виду, то интеграл

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

можно свести к интегралу (2) с помощью замены переменной, положив $t=g(x)$.

Пример 1. Найти $\int \cos(5x+3)\,dx$.

△ Подынтегральное выражение приводится к виду (3):

$$\cos(5x+3)\,dx=\frac{1}{5}\cos(5x+3)\,d(5x+3)$$

(здесь $f(x)=\cos(5x+3)$, $g(x)=5x+3$). Сделав замену переменной $t=5x+3$, получим

$$\int \cos(5x+3)\,dx=\frac{1}{5}\int \cos t\,dt=\frac{\sin t}{5}+C=\frac{\sin(5x+3)}{5}+C. \blacktriangle$$

Пример 2. Найти $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

△ Так как

$$(2x+1)^{10}\,dx=\frac{1}{2}(2x+1)^{10}\,d(2x+1),$$

то, положив $t=2x+1$, получим

$$\int (2x+1)^{10}\,dx=\frac{1}{2}\int (2x+1)^{10}\,d(2x+1)=\frac{1}{2}\int t^{10}\,dt=$$

$$=\frac{t^{11}}{22}+C=\frac{(2x+1)^{11}}{22}+C. \blacktriangle$$

Пример 3. Найти $\int xe^{x^2}\,dx$.

$\triangle$ Положив $t=x^2$, находим

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\int \frac{x^2\,dx}{4+3x^3}$.

$\triangle$ Подынтегральное выражение приводится к виду

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{d\,(4+3x^3)}{4+3x^3}.$$

Положив $t=4+3x^3$, получим

$$\int\frac{x^2\,dx}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\int\frac{d\,(4+3x^3)}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{t}=$$
$$=\frac{1}{9}\ln|t|+C=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+C. \blacktriangle$$

Пример 5. Найти $\int \frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx$.

$\triangle$ Положим $t=\frac{1}{x}$, тогда $x=\frac{1}{t}$ и $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Таким образом,

$$\int\frac{1}{x^2}e^{1/x}\,dx=\int t^2e^t\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int e^t\,dt=$$
$$=-e^t+C=-e^{1/x}+C. \blacktriangle$$

Пример 6. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}$.

$\triangle$ Так как $11+10x-x^2=36-(x-5)^2$, то с помощью замены переменной $t=x-5$ интеграл сводится к табличному интегралу:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{36-(x-5)^2}}=\int\frac{d\,(x-5)}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}}=$$
$$=\int\frac{dt}{\sqrt{6^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{6}+C=\arcsin\frac{x-5}{6}+C. \blacktriangle$$

Пример 7. Найти $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

$\triangle$ Сделаем подстановку $t=1-x^2$, тогда $dt=-2x\,dx$, т. е. $x\,dx=-\frac{dt}{2}$. Поэтому

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C. \blacktriangle$$

Пример 8. Найти $\int\sin x\cos^7x\,dx$.

$\triangle$ Положим $t=\cos x$, тогда $dt=-\sin x\,dx$. Следовательно,

$$\int\sin x\cos^7x\,dx=-\int t^7\,dt=-\frac{t^8}{8}+C=-\frac{\cos^8x}{8}+C. \blacktriangle$$

Пример 9. Найти $\int\frac{dx}{\sin x}$.

$\triangle$ Первый способ. Преобразовав подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{\sin x\,dx}{\sin^2x}=\frac{-d\cos x}{1-\cos^2x}$$

и положив $t=\cos x$, приходим к табличному интегралу 10:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C.$$

Второй способ. Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{d\,\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

и положим $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C. \blacktriangle$$

Пример 10. Найти $\int\frac{\arcsin^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

$\triangle$ Положим $t=\arcsin x$, тогда $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом,

$$\int\frac{\arcsin^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C. \blacktriangle$$

Пример 11. Найти $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$\triangle$ Сделаем замену переменной, положив $x=t^2$, $t\geqslant0$. Тогда, так как $dx=2t\,dt$, получим

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{t\,dt}{1+t}=2\int\frac{1+t-1}{1+t}\,dt=$$
$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{1+t}=2t-2\ln(1+t)+C=$$
$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C. \blacktriangle$$

Пример 12. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

$\triangle$ Положим $e^x - 1 = t^2$, $t > 0$, тогда

$$e^x\,dx = 2t\,dt, \quad dx = \frac{2t\,dt}{t^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C. \blacktriangle$$

Пример 13. Найти $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

$\triangle$ Положим $x = 2\sin t$, $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$, тогда $dx = 2\cos t\,dt$ и $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Следовательно,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cos t.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Так как

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$
$$= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},$$

то

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C. \blacktriangle$$

Пример 14. Найти $\int \sin ax\cos bx\,dx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\triangle$ Преобразовав произведение тригонометрических функций в сумму согласно известной формуле

$$\sin ax\cos bx = \frac{\sin(a-b)x + \sin(a+b)x}{2},$$

получим

$$\int \sin ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(a-b)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(a+b)x\,dx.$$

Если $a \pm b \neq 0$, то, положив $t = (a-b)x$ в первом интеграле и $u = (a+b)x$ во втором, найдем

$$\int \sin(a-b)x\,dx = \int \frac{\sin t}{a-b}\,dt =$$
$$= -\frac{\cos t}{a-b} + C_1 = -\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + C_1,$$
$$\int \sin(a+b)x\,dx = \int \frac{\sin u}{a+b}\,du =$$
$$= -\frac{\cos u}{a+b} + C_2 = -\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + C_2.$$

Следовательно, если $a \pm b \neq 0$, то

$$\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right) + C.$$

При $a \pm b = 0$ интеграл вычисляется еще проще:

$$\int \sin ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C. \blacktriangle$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\int \sin ax\sin bx\,dx, \quad \int \cos ax\cos bx\,dx, \quad a \neq 0, \ b \neq 0.$$

Пример 15. Найти интегралы от рациональных функций:

1) $\int \frac{3x+5}{x^2+3x-10}\,dx$; 2) $\int \frac{7x-1}{x^2+2x+1}\,dx$;

3) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$; 4) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x-2}\,dx$.

$\triangle$ В этом примере все подынтегральные функции имеют вид

$$\frac{P_n(x)}{x^2+px+q},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Способ интегрирования таких дробей зависит от того, имеет ли корни знаменатель дроби и является ли рациональная дробь правильной ($n < 2$) или неправильной ($n \geqslant 2$).

1) Здесь подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель имеет два корня: $x = 2$, $x = -5$. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

и найдем коэффициенты A и B. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{x^2+3x-10}.$$

Из этого равенства следует тождество

$$3x+5=A(x+5)+B(x-2).$$

Полагая в полученном тождестве $x=2$, находим $7A=11$, $A=\frac{11}{7}$. Полагая $x=-5$, получаем $-7B=-10$, $B=\frac{10}{7}$. Следовательно, подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{3x+5}{x^2+3x-10}=\frac{11/7}{x-2}+\frac{10/7}{x+5}.$$

Поэтому

$$\int\frac{3x+5}{x^2+3x-10}dx=\frac{11}{7}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{10}{7}\int\frac{dx}{x+5}=$$
$$=\frac{11\ln|x-2|+10\ln|x+5|}{7}+C.$$

2) В этом случае знаменатель рациональной дроби имеет кратный корень $x=-1$. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$

и найдем коэффициенты A и B. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{A(x+1)+B}{x^2+2x+1}.$$

Из полученного равенства следует тождество

$$7x-1=A(x+1)+B.$$

Полагая в нем $x=-1$, находим $B=-8$; полагая $x=0$, получаем $A+B=-1$, т. е. $A=7$. Следовательно,

$$\frac{7x-1}{x^2+2x+1}=\frac{7}{x+1}-\frac{8}{(x+1)^2}.$$

Поэтому

$$\int\frac{7x-1}{x^2+2x+1}dx=7\int\frac{dx}{x+1}-8\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}=$$
$$=7\ln|x+1|+\frac{8}{x+1}+C.$$

3) Знаменатель рациональной функции не имеет корней. Представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{3x-2}{x^2-4x+5}=A\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}+B\frac{1}{x^2-4x+5}.$$

Для определения коэффициентов A и B получаем тождество

$$3x-2=A(2x-4)+B.$$

Полагая здесь, например, $x=2$, а затем $x=0$, получим $B=4$ и $-4A+B=-2$, т. е. $A=\frac{3}{2}$. Следовательно,

$$\int\frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}=$$
$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$$

4) Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью, так как степень числителя равна 3. В таких случаях следует, разделив числитель на знаменатель, представить неправильную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. В данном случае, после деления многочлена x^3+1 на многочлен x^2+x-2, получим

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-2}=x-1+\frac{3x-1}{x^2+x-2}.$$

Многочлен $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ имеет два корня: $x=1$ и $x=-2$. Поэтому далее поступаем так же, как и при решении примера 1):

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2},$$
$$3x-1=A(x+2)+B(x-1);$$

при $x=1$ получаем $A=\frac{2}{3}$, при $x=-2$ получаем $B=\frac{7}{3}$. Таким образом,

$$\frac{x^3+1}{x^2+x-2}=x-1+\frac{2/3}{x-1}+\frac{7/3}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^3+1}{x^2+x-2}dx=\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C. \blacktriangle$$

3*. **Интегрирование по частям.** Согласно правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Поэтому

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получим

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du.$$

Используя свойство неопределенных интегралов

$$\int d(uv) = uv + C,$$

получим формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.*

Пример 1. Найти $\int xe^x\,dx$.

△ Положим

$$u = x, \quad dv = e^x\,dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = e^x.$$

Таким образом, используя формулу (1), будем иметь

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Замечание. Если при решении этого примера мы положили бы

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx$$

и, следовательно,

$$du = e^x\,dx, \quad v = \frac{x^2}{2},$$

то, применив формулу (1), получили бы

$$\int xe^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx,$$

т. е. интегрирование по частям привело бы к интегралу более сложному, чем исходный. ▲

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать

общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначать через u и какой через dv. Ограничимся поэтому следующими рекомендациями:

1) Применение формулы интегрирования по частям целесообразно в тех случаях, когда подынтегральное выражение удается представить в виде произведения двух множителей u и dv таким образом, чтобы интегрирование выражений dv и $v\,du$ было более простой задачей, чем интегрирование исходного выражения $u\,dv$.

2) При вычислении интегралов вида

$$\int P(x)\ln x\,dx, \quad \int P(x)\arcsin x\,dx, \quad \int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, за функцию u принимается соответственно $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ (см. примеры 2, 4).

3) При вычислении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}\,dx, \quad \int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx, \quad a \neq 0,$$

за u принимается многочлен $P(x)$ (см. примеры 1, 3).

Если многочлен $P(x)$ выше первой степени, то операцию интегрирования по частям следует применить несколько раз (см. пример 5).

4) При вычислении интегралов вида

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

формула интегрирования по частям применяется последовательно два раза, причем оба раза за u выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая. После двукратного интегрирования по частям получается линейное уравнение относительно искомого интеграла (см. пример 6).

Пример 2. Найти $\int \ln x\,dx$.

△ Положим

$$u = \ln x, \; dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Отсюда, согласно формуле (1),

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C. ▲$$

Пример 3. Найти $\int x\cos x\,dx$.

△ Положим
$$u=x,\quad dv=\cos x\,dx,$$
тогда
$$du=dx,\quad v=\sin x.$$
Поэтому, используя формулу (1), имеем
$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

△ Положим
$$u=\mathrm{arctg}\,x,\quad dv=x\,dx,$$
тогда
$$du=\frac{dx}{1+x^2},\quad v=\frac{x^2}{2}.$$
Следовательно,
$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$$
Вычислим отдельно последний интеграл:
$$\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\mathrm{arctg}\,x+C.$$
Итак,
$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C=$$
$$=\frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Найти $\int x(x-5)\sin 2x\,dx$.

△ Положим
$$u=x^2-5x,\quad dv=\sin 2x\,dx,$$
тогда
$$du=(2x-5)\,dx,\quad v=-\frac{\cos 2x}{2}.$$
По формуле (1) получаем
$$\int x(x-5)\sin 2x\,dx=$$
$$=-\frac{x^2-5x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int(2x-5)\cos 2x\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла еще раз применим интегрирование по частям, положив
$$u=2x-5,\quad dv=\cos 2x\,dx.$$
Так как $du=2dx$, $v=\frac{\sin 2x}{2}$, то
$$\int(2x-5)\cos 2x\,dx=\frac{2x-5}{2}\sin 2x-\int\sin 2x\,dx=$$
$$=\frac{2x-5}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}+C_1.$$
Таким образом,
$$\int x(x-5)\sin 2x\,dx=$$
$$=-\frac{x^2-5x}{2}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C=$$
$$=\frac{1+10x-2x^2}{4}\cos 2x+\frac{2x-5}{4}\sin 2x+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Найти $F(x)=\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

△ Положим
$$u=e^{3x},\quad dv=\sin 2x\,dx,$$
тогда
$$du=3e^{3x}\,dx,\quad v=-\frac{\cos 2x}{2}.$$
По формуле (1) получаем
$$F(x)=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx.$$

Для нахождения последнего интеграла применим еще раз формулу интегрирования по частям:
$$u=e^{3x},\quad dv=\cos 2x\,dx,$$
$$du=3e^{3x}\,dx,\quad v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$
Тогда
$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}F(x).$$
Таким образом, для $F(x)$ получаем уравнение
$$F(x)=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}F(x)\right),$$
из которого находим
$$F(x)=\frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 2x-2\cos 2x)+C. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Выше мы познакомились с некоторыми приемами вычисления неопределенных интегралов. Следует иметь в виду, что не у всякой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции f, яляется элементарной функцией, говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл можно найти или вычислить. Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл нельзя найти или что интеграл нельзя вычислить. В следующей главе будет доказано (см. п. 6 § 44), что для всякой непрерывной функции $f(x)$ первообразная существует, т. е. существует неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. Однако первообразная функции $f(x)$ может быть функцией неэлементарной. Так, например, для следующих функций

$$\sqrt{1+x^3},\quad e^{-x^2},\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{1}{\ln x}$$

первообразная существует на любом промежутке, где функция непрерывна. Но, как можно доказать, первообразная каждой из этих функций есть функция неэлементарная. Поэтому про интегралы

$$\int \sqrt{1+x^3}\,dx,\quad \int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

говорят, что они не выражаются через элементарные функции или что их нельзя найти, нельзя вычислить.

Упражнения

8.1. Докажите, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x)=2x^3+\frac{3}{4}x^4+5$, $\quad f(x)=3(x+2)x^2$;
2) $F(x)=2x+e^{2x}$, $\quad f(x)=2(1+e^{2x})$;
3) $F(x)=\sin x\cos x$, $\quad f(x)=\cos 2x$;
4) $F(x)=x-\ln(1+x^2)$, $\quad f(x)=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}$.

8.2. Докажите, что на указанном промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$:

1) $F(x)=x+\frac{1}{2x^2}$, $\quad f(x)=1-\frac{1}{x^3}$, $x>0$;
2) $F(x)=2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{3/2}$, $\quad f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $x>0$;

3) $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$, $\quad f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $|x|<\frac{\pi}{2}$;
4) $F(x)=\arccos\frac{1}{x}$, $\quad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$.

8.3. Является ли на всей числовой прямой функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$:

1) $F(x)=2\cos 2x-\cos 4x$, $\quad f(x)=8\sin x\cos 3x$;
2) $F(x)=2^{\sin x}$, $\quad f(x)=2^{\sin x}\cos x$;
3) $F(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$, $\quad f(x)=0$;
4) $F(x)=\operatorname{sign} x$, $\quad f(x)=0$?

8.4. Какая из функций

$$F_1=\frac{1}{2}\sin^2 x+1,\quad F_2=3-\frac{1}{2}\cos^2 x,\quad F_3=4-\frac{1}{4}\cos 2x$$

является первообразной для функции $f=\sin x\cos x$?

8.5. Найдите для функции $y=f(x)$ первообразную, график которой проходит через точку $(x_0;\ y_0)$:

1) $y=2x-3$, $(3;\ 3)$; 2) $y=\frac{1}{x-2}$, $x>2$, $(4;\ 0)$;
3) $y=x^2$, $(2;\ 3)$; 4) $y=\frac{1}{x^2}$, $x<0$, $(-3;\ 4)$;
5) $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin(1+x)$, $(1;\ 1)$; 6) $y=|x|$, $(-2;\ 4)$.

8.6. Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой. Верны ли следующие утверждения:

1) если $f(x)$ — периодическая функция, то $F(x)$ — периодическая;
2) если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная;
3) если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная?

8.7. Найдите какую-либо первообразную функции $f(x)$:

1) $f(x)=1+x^4$; 2) $f(x)=x^3(x^2-1)$;
3) $f(x)=(x^2-1)^2$; 4) $f(x)=2x^3-5x^2-7x-3$;
5) $f(x)=\frac{4+x^2}{x^5}$, $x>0$; 6) $f(x)=\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$, $x<0$;
7) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 8) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}$.

8.8. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (ax+b)\,dx$; 2) $\int (ax^2+bx+c)\,dx$;
3) $\int (7-3x-x^3)\,dx$; 4) $\int x(x+1)(x+2)\,dx$;
5) $\int \left(x^{10}-\frac{1}{x^{10}}\right)^2 dx$; 6) $\int \frac{x^8-3x^5-x^2+1}{x^3}\,dx$;
7) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2}\,dx$; 8) $\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x}\,dx$.

8.9. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; 4) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

8.10. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int (3e^x+5\cos x)\,dx$; 2) $\int (2\sin x+2^x)\,dx$;

3) $\int \left(\sqrt[7]{x}+7^x\right)dx$; 4) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx$;

5) $\int 2^x 3^{2x}\,dx$; 6) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$;

7) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 8) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

8.11. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{16+9x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{5-2x^2}$;

3) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+13}{x^2+5}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^4+4x^2}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}$;

7) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$; 8) $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx$.

8.12. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int (3x-1)^6\,dx$; 2) $\int (2x+7)^8\,dx$;

3) $\int \frac{x^3\,dx}{x+3}$; 4) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^{12}}$;

5) $\int \frac{dx}{x^2+10x+41}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+7x-8}$;

7) $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$; 8) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$.

8.13. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^2}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$;

3) $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+4}\,dx$; 4) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}\,dx$;

5) $\int \frac{x^5\,dx}{7x^6+1}$; 6) $\int \frac{x^2\,dx}{(3+5x^3)^7}$;

7) $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1}$; 8) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

8.14. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int \sqrt{2-5x}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+3}}$; 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$;

9) $\int x\sqrt{3x^2-1}\,dx$; 10) $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

8.15. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int xe^{-x^2}\,dx$; 2) $\int x^3e^{x^4}\,dx$;

3) $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}$; 4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

8.16. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int \left(\sin 7x+\cos\frac{x}{9}\right)dx$; 2) $\int \sin(\omega t+\varphi)\,dt,\ \omega\neq 0$;

3) $\int \sin x\sin 3x\,dx$; 4) $\int \cos 8x\cos 3x\,dx$;

5) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$; 6) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$;

7) $\int \sin\omega t\sin(\omega t+\varphi)\,dt,\ \omega\neq 0$; 8) $\int \sin^2 x\,dx$;

9) $\int \sin^3 x\,dx$; 10) $\int \cos^3 x\,dx$;

11) $\int \cos^5 x\sin x\,dx$; 12) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

13) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; 14) $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\,\sin x\,dx$;

15) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; 16) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

8.17. Применяя подходящие подстановки, найдите интегралы:

1) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

3) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; 4) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$;

5) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 6) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,dx$.

8.18. Найдите интегралы от рациональных функций:

1) $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$; 2) $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-4x+4}$;

3) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}$; 4) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

1/2

8.19*. Применяя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

1) $\int xe^{-2x}\,dx$; 2) $\int x2^x\,dx$;

3) $\int x\sin x\,dx$; 4) $\int x\cos(5x-7)\,dx$;

5) $\int (3x-4)\ln x\,dx$; 6) $\int \arcsin x\,dx$;

7) $\int \arccos x\,dx$; 8) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

8.20*. Применяя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

1) $\int x^2e^{-x}\,dx$; 2) $\int x^2\sin x\,dx$;

3) $\int \ln^2 x\,dx$; 4) $\int \arccos^2 x\,dx$;

5) $\int e^x\cos x\,dx$; 6) $\int e^{3x}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$.

8.21*. Применяя различные методы, найдите интегралы:

1) $\int x^3e^{-x^2}\,dx$; 2) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx$; 4) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$;

5) $\int x\operatorname{arctg} x^2\,dx$; 6) $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx,\ x>1$.

Глава 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 43. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим какую-нибудь неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$, $x\in[a;\,b]$.

Фигура $AabB$ (рис. 130), ограниченная отрезком оси абсцисс, отрезками вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$ и графиком заданной функции, называется *криволинейной трапецией*, определяемой графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a;\,b]$.

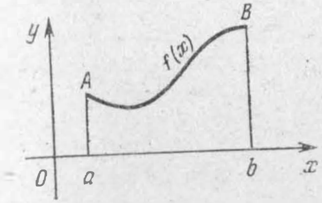


Рис. 130

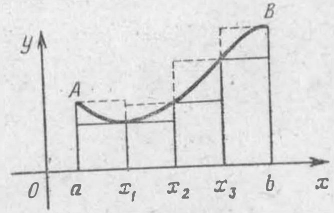


Рис. 131

Другими словами, криволинейная трапеция — это множество точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют условиям

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$

Найдем площадь этой криволинейной трапеции. Для этого отрезок $[a;\,b]$ точками

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков

$$[a;\,x_1];\ [x_1;\,x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\,b]$$

и проведем через точки вертикальные прямые. При этом криволинейная трапеция $AabB$ разобьется на n частей (рис. 131, $n=4$), причем площадь i-й части не меньше

$m_i(x_i - x_{i-1})$ и не больше $M_i(x_i - x_{i-1})$, где m_i и M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следовательно, площадь всей криволинейной трапеции $AabB$ не меньше суммы

$$m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

и не больше суммы

$$M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначив эти суммы соответственно s_n и S_n, получим, что площадь S_{AabB} криволинейной трапеции $AabB$ удовлетворяет неравенствам

$$s_n \leqslant S_{AabB} \leqslant S_n.$$

Здесь s_n — площадь ступенчатой фигуры, которая содержится в данной криволинейной трапеции, а S_n — площадь ступенчатой фигуры, которая содержит данную криволинейную трапецию. При достаточно мелком разбиении отрезка $[a;\ b]$, т. е. при достаточно большом n, площади этих фигур мало отличаются друг от друга и от площади криволинейной трапеции. Следовательно, можно считать, что последовательности (s_n) и (S_n) имеют один и тот же предел и этот предел равен площади фигуры $AabB$.

Это утверждение получено в предположении существования площади у рассматриваемой криволинейной трапеции, однако мы еще не дали определения этого понятия. Проведенные рассуждения делают естественным следующее определение.

Определение. Пусть задана непрерывная неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a;\ b]$. Тогда, если пределы последовательностей (s_n) и (S_n) существуют и равны, то их общее значение называется *площадью криволинейной трапеции*, заданной графиком этой функции.

В следующем параграфе будет сформулировано утверждение, из которого следует, что любая криволинейная трапеция имеет площадь.

Пример 1. Показать, что площадь прямоугольного треугольника (рис. 132) с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(a;\ 0)$ и $(a;\ b)$ согласно данному определению равна $\frac{1}{2}ab$, т. е. вычисляется по известной формуле.

$\triangle$ Данный треугольник является криволинейной трапецией, определяемой графиком функции

$$y = f(x) = \frac{b}{a}x, \quad x \in [0;\ a].$$

Отрезок $[0;\ a]$ точками $x_i = \frac{a}{n}i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, разделим на n отрезков длины $\frac{a}{n}$. Тогда (см. рис. 132, $n=4$)

$$m_i = f(x_{i-1}) = \frac{b}{n}(i-1),$$

$$M_i = f(x_i) = \frac{b}{n}i,$$

и поэтому

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}(i-1)\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} i \frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{ab}{2}.$$

Таким образом, доказано, что площадь данного треугольника равна $\frac{1}{2}ab$. ▲

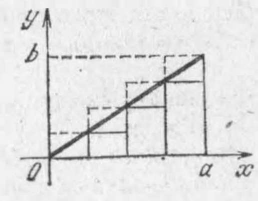


Рис. 132

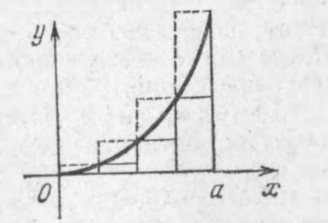


Рис. 133

Пример 2. Найти площадь S фигуры, ограниченной частью параболы $y = x^2$ и отрезками прямых $y = 0$ и $x = a$, $a > 0$ (рис. 133).

$\triangle$ Как и в примере 1, отрезок $[0;\ a]$ точками $x_i = \frac{a}{n}i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, разделим на n отрезков длины $\frac{a}{n}$.

Тогда

$$s_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2,$$

$$S_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2.$$

В п. 1 § 8 было доказано, что

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

$$s_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

и поэтому

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a^3}{3}\ \text{(кв. ед.)}.\ \blacktriangle$$

Замечание 1. Рассмотрим снова криволинейную трапецию $AabB$ и, как и обычно, отрезок $[a;\ b]$ точками x_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, разобьем на n отрезков равной длины. На каждом отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$ произвольным образом выберем некоторую точку и обозначим ее c_i.

Если, как и выше, m_i и M_i — наименьшее и наибольшее значения функции f на отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$, то, очевидно,

$$m_i\leqslant f(c_i)\leqslant M_i,$$

где $i=1,\ \ldots,\ n$. Умножим каждое из этих неравенств на $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ и полученные неравенства почленно сложим. Тогда получим следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\,\Delta x_i.$$

Отсюда следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,\Delta x_i$$

существует, не зависит от выбора точек c_i и всегда равен площади фигуры $AabB$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,\Delta x_i=S_{AabB}. \qquad (1)$$

Замечание 2. Выше отрезок $[a;\ b]$ разбивался на n равных по длине отрезков. Можно доказать, что формула (1) остается справедливой и в том случае, если отрезок $[a;\ b]$ разбивать на n отрезков произвольной длины, но таких, что наибольшая из длин этих отрезков стремится к нулю при $n\to\infty$.

Вопросы для контроля

1. Что называется площадью криволинейной трапеции, заданной графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$?

2. Изобразите криволинейную трапецию, заданную графиком функции

$$y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0],\\ \sin x, & \text{если } x\in(0;\ \pi].\end{cases}$$

3. Является ли фигура, определяемая неравенствами

$$0\leqslant x\leqslant\pi,\quad \sin x\leqslant y\leqslant x,$$

криволинейной трапецией?

Упражнения

9.1. Исходя из определения площади криволинейной трапеции, вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=e^x$, осью абсцисс и прямыми $x=0$ и $x=1$.

Указание. Воспользуйтесь формулой для суммы членов геометрической прогрессии.

9.2. Исходя из определения площади криволинейной трапеции, вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, $x\in[0;\ 1]$, осью абсцисс и прямой $x=1$.

Указание. Воспользуйтесь формулой

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}=\frac{\cos\frac{1}{2n}-\cos\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{2\sin\frac{1}{2n}}.$$

§ 44. Определенный интеграл

1. Определение интеграла. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a;\ b]$. Как и в § 43, отрезок $[a;\ b]$ точками

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков.

В каждом из этих отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i=1, \ldots, n$, произвольным образом выберем по одной точке и обозначим их c_i.

Тогда сумма

$$f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции f.

Очевидно, эта сумма зависит и от того, как разбит отрезок $[a; b]$, и от того, как выбраны точки c_i.

Определение. Если предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

существует и не зависит от выбора точек c_i, то функция f называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$, а предел (1) называется *определенным интегралом* от функции f на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Это обозначение читается так: «интеграл от a до b от функции $f(x)$ по dx» или, короче, «интеграл от a до b от $f(x)\,dx$».

Знак $\int$ называется *знаком интеграла*, функция f — *подынтегральной функцией*, переменная x — *переменной интегрирования*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*. Числа a и b называются *пределами интегрирования*, соответственно нижним и верхним.

Таким образом, согласно определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

Если $f(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, то, сравнивая формулу (2) с формулой (1) § 43, получаем

$$S_{AabB} = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (3)$$

т. е. задача о нахождении площади криволинейной трапеции $AabB$ (см. рис. 130) сводится к вычислению определенного интеграла.

Геометрический смысл интеграла для непрерывной неотрицательной функции $f(x)$ заключается в том, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$, $x \in [a; b]$.

Выше мы предполагали, что нижний предел интегрирования меньше верхнего. Такое ограничение иногда вызывает некоторые неудобства. Чтобы освободиться от этого ограничения, полагают по определению:

если $a=b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0; \qquad (4)$$

если $a>b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Последняя формула означает, что если в интеграле поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак. Формулы (4) и (5) позволяют нам всюду в дальнейшем считать, что нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Заметим еще, что интеграл не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, так что, например,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Приведем без доказательства следующую теорему, дающую достаточное условие интегрируемости функции на отрезке.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Заметим, что ограниченные функции, встречающиеся на практике, как правило, интегрируемы на любом отрезке, на котором они заданы.

Можно доказать, например, что

1) *если функция ограничена и непрерывна на некотором отрезке, за исключением конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке;*

2) *если функция монотонна на некотором отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.*

2*. Пример неинтегрируемой функции. На отрезке [0; 1] рассмотрим функцию Дирихле. Она равна 1 в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Поэтому, если в интегральных суммах в качестве точек c_i выбирать иррациональные точки, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$$

и, следовательно, предел этих сумм при $n\to+\infty$ равен 0. А если в качестве c_i выбирать рациональные точки, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 1$$

и, следовательно, предел этих сумм равен 1.

Таким образом, для функции Дирихле на отрезке [0; 1] предел интегральных сумм зависит от выбора точек c_i. Это и означает, что функция Дирихле не является интегрируемой.

3. Основные свойства определенных интегралов.

Свойство 1. *Для любого действительного числа* α

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a). \qquad (1)$$

□ В самом деле, для любой интегральной суммы функции $f(x)=\alpha$, $x\in[a;\,b]$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha\,\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \alpha(b-a),$$

и поэтому предел таких сумм при $n\to\infty$ равен $\alpha(b-a)$. ■

Свойство 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\,b]$, то для любого действительного числа α функция $\alpha f(x)$ также интегрируема на $[a;\,b]$ и*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (2)$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

□ Для любой интегральной суммы функции $\alpha f(x)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha f(c_i)\,\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha f(c_i)\,\Delta x_i = \alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \alpha\int_a^b f(x)\,dx,$$

а это и означает, что функция $\alpha f(x)$ интегрируема на $[a;\,b]$ и справедлива формула (2). ■

Свойство 3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;\,b]$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также интегрируема на $[a;\,b]$ и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \qquad (3)$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

□ Действительно,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(c_i)+g(c_i))\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \ ■$$

Свойство 4. *Если на отрезке $[a;\,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и*

$$f(x)\leqslant g(x),$$

то справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (4)$$

□ В самом деле, из неравенства $f(x)\leqslant g(x)$ следует, что для любых интегральных сумм для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i,$$

из которого в пределе при $n \to +\infty$ получается неравенство (4). ■

Следующее свойство приведем без доказательства.

Свойство 5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

4. Следствия из основных свойств определенных интегралов.

Следствие 1. *Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы и*

$$m\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x),$$

то

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

В частности, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{2}$$

□ Неравенство (1) является непосредственным следствием свойства 4 и свойства 2. Неравенство (2) следует из неравенства (1) при $\varphi(x)=g(x)=1$ и свойства 1. ■

Пример 1. Найти приближенное значение интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

△ На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ верно неравенство

$$0 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$

поэтому для подынтегральной функции справедлива оценка

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos x} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Положив в формуле (2) $f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$, $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, $m=\frac{1}{3}$, $M=\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, за приближенное значение интеграла можно взять число $\frac{\pi/6+\pi/4}{2}=\frac{5\pi}{24} \approx 0{,}65$. При этом погрешность не будет превышать

$$\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{24}=\frac{\pi}{24} \approx 0{,}13.$$

Точное значение данного интеграла, как будет показано в примере 5 п. 2 § 45, равно $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}60$. ▲

Следствие 2. *Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и*

$$|f(x)| \leqslant Mg(x),$$

то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

В частности, если $|f(x)| \leqslant M$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

□ Из неравенства $|f(x)| \leqslant Mg(x)$ следует, что

$$-Mg(x)\,dx \leqslant f(x)\,dx \leqslant Mg(x)\,dx$$

и поэтому (см. следствие 1 при $m\varphi(x)=-Mg(x)$)

$$-M\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx,$$

а это и означает, что выполняется неравенство (3). Неравенство (4) является частным случаем неравенства (3) при $g(x)=1$. ■

5. Теорема о среднем. Для непрерывной функции справедлива следующая теорема, которая называется *теоремой о среднем для определенного интеграла.*

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке существует такая точка c, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{1}$$

□ Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для любого $x \in [a;\ b]$, и поэтому

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Разделив почленно это неравенство на $b-a>0$, получим неравенство

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Отсюда и следует формула (1). Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то она принимает любое значение на отрезке $[m;\ M]$ и, в частности, значение, равное $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, т. е. существует такая точка $c \in [a;\ b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Для неотрицательной функции теорема о среднем имеет простое геометрическое истолкование: площадь криволинейной трапеции, соответствующей функции f, равна площади прямоугольника, у которого основание равно основанию трапеции, а высота равна одному из значений функции (рис. 134).

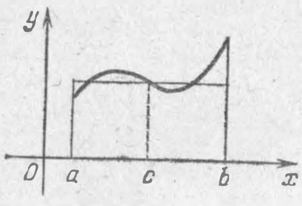


Рис. 134

Замечание. Формула (1) справедлива не только для интегралов, у которых нижний предел интегрирования меньше верхнего, но и для интегралов, у которых нижний предел больше верхнего. Для доказательства следует воспользоваться формулой (5) п. 1.

6. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a;\ x]$, где $x \in [a;\ b]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a;\ b]. \qquad (1)$$

Эта функция называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то функция (1) имеет производную на этом отрезке и*

$$\Phi'(x) = f(x), \text{ т. е. } \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \qquad (2)$$

Эта теорема называется *теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.*

Кратко ее можно сформулировать следующим образом: *производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу равна подынтегральной функции.*

□ Из определения функции $\Phi(x)$ и свойств интеграла (см. свойство 5) следует, что

$$\Phi(x)-\Phi(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

для любых x и x_0 из $[a;\ b]$. К последнему интегралу применим теорему о среднем (см. также замечание в конце п. 5). Тогда

$$\Phi(x)-\Phi(x_0) = f(c)(x-x_0),$$

где $c \in [x_0;\ x]$, если $x_0 < x$, и $c \in [x;\ x_0]$, если $x < x_0$.

Таким образом, для любого $x \neq x_0$ найдется такое c, лежащее между x и x_0, что

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = f(c).$$

По определению производной находим

$$\Phi'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c) = f(x_0).$$

Последнее равенство получено из предположения, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и, следовательно, непрерывна в точке x_0. Так как x_0 — произвольная точка отрезка $[a;\ b]$, то $\Phi'(x) = f(x)$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Следствие. *Для каждой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.*

□ В силу доказанной теоремы, если функция $f(x)$, $x \in [a;\ b]$, непрерывна, то первообразной для нее является функция

$$\int_a^x f(x)\,dx, \qquad x\in[a;\ b]. \blacksquare$$

Вопросы для контроля

1. Что называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a;\ b]$?

2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной неотрицательной функции?

3. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, покажите, что

$$1)\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}; \qquad 2)\ \int_0^2 |x-1|\,dx=1.$$

4. Какие из следующих утверждений верны:

а) если функция непрерывна на некотором отрезке, то она интегрируема на нем;

б) если функция интегрируема на некотором отрезке, то она непрерывна на этом отрезке;

в) если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем?

5. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

6. Докажите неравенства

$$5<\int_{-1}^{1}\sqrt{8+x^3}\,dx<6.$$

7. С помощью формулы (3) п. 4 докажите для любой интегрируемой функции $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля).

8. Сформулируйте теорему о среднем. В чем состоит геометрический смысл этой теоремы в случае неотрицательной функции?

9. Сформулируйте теорему о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.

Упражнения

9.3. Выясните, какой из интегралов больше:

$$1)\ \int_0^1 \sin x^2\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^{\sqrt{2}} \sin x^2\,dx;$$

$$2)\ \int_0^1 \sin x^2\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 \sin x\,dx;$$

$$3)\ \int_0^1 e^{x^2}\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{x}\,dx;$$

$$4)\ \int_1^2 e^{x^2}\,dx \quad \text{или} \quad \int_1^2 e^{x}\,dx.$$

9.4. Запишите в виде интеграла с переменным верхним пределом ту первообразную функции $y=f(x)$, которая проходит через заданную точку:

1) $y=x^3$, $(-1;\ 0)$; 2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $(1;\ 2)$.

9.5. Найдите производные:

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2\,dx; \qquad 2)\ \frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx;$$

$$3)\ \frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx.$$

§ 45. Методы вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона — Лейбница.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

□ Из теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу следует, что функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Так как и функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a;\ b]$, то разность $\Phi(x)-F(x)$ равна некоторой постоянной C на всем отрезке $[a;\ b]$, т. е.

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

Положив здесь сначала $x=a$, а затем $x=b$, получим

$$\Phi(a)=F(a)+C, \quad \Phi(b)=F(b)+C.$$

Так как $\Phi(a)=0$, то $C=-F(a)$, и поэтому

$$\Phi(b)=F(b)-F(a),$$

но

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \blacksquare$$

Разность $F(b)-F(a)$ часто записывают с помощью знака двойной подстановки: $F(x)|_a^b$, и тогда формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)|_a^b. \tag{2}$$

Как уже отмечалось, формула (1) называется формулой Ньютона—Лейбница. Она названа в честь двух великих создателей дифференциального и интегрального исчислений И. Ньютона и Г. Лейбница. Два исчисления, дифференциальное и интегральное, развиваемые независимо, с получением этой формулы оказываются тесно связанными и объединяются в единую теорию—математический анализ, так что формула Ньютона—Лейбница по праву может быть названа центральной теоремой математического анализа.

Формула Ньютона—Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы без интегральных сумм и предельного перехода в тех случаях, когда известна хотя бы одна первообразная подынтегральной функции. Формула Ньютона—Лейбница дает возможность вычислять определенные интегралы с помощью неопределенных. Методы нахождения неопределенных интегралов были рассмотрены в главе 8.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$.

$\triangle$ Для функции $\sin x$ первообразной является функция $F(x)=-\cos x$. По формуле Ньютона—Лейбница находим

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx=F(\pi)-F(0)=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

$\triangle$ Первообразной для подынтегральной функции является функция $F(x)=\ln(1+x)$. Применяя формулу (2), получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=F(x)\Big|_0^1=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2. \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$\triangle$ Так как

$$\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C,$$

то по формуле (2) находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C\Big|_0^1=\operatorname{arctg} 1+C-\operatorname{arctg} 0-C=\frac{\pi}{4}. \blacktriangle$$

Пример 4. Найти площадь S фигуры, ограниченной частью параболы $y=x^2$ и отрезками прямых $y=0$ и $x=a$, $a>0$ (см. рис. 133).

$\triangle$ Эта задача была решена в § 43 (пример 2) путем составления интегральных сумм с последующим предельным переходом. Развитая после этого теория позволяет решить эту задачу гораздо проще. Заданная фигура является криволинейной трапецией, и, следовательно, ее площадь равна определенному интегралу

$$S=\int_0^a x^2\,dx;$$

так как $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C$, то

$$S=\int_0^a x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{a^3}{3} \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^2 \frac{2+x^4}{x} dx$; 2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 3) $\int\limits_{-1}^0 xe^{x^2} dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{4+3x^3}$; 5) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$; 6) $\int\limits_1^e \ln x dx$.

$\triangle$ 1) В примере 2 п. 1 § 42 был найден неопределенный интеграл

$$\int \frac{2+x^4}{x} dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int\limits_1^2 \frac{2+x^4}{x} dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 + 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} + 2\ln 2.$$

2) Соответствующий неопределенный интеграл был вычислен ранее (см. пример 10 п. 1 § 42):

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Применяя формулу (2), получаем

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3) С помощью замены переменной в примере 3 п. 2 § 42 был найден интеграл

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^0 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_{-1}^0 = \frac{1-e}{2}.$$

4) Неопределенный интеграл был найден в примере 4 п. 2 § 42:

$$\int \frac{x^2 dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3| + C.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3|\Big|_0^1 = \frac{1}{9}\ln\frac{7}{4}.$$

5) Неопределенный интеграл был найден в примере 13 п. 2 § 42 с помощью замены переменной:

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

По формуле (2) вычисляем определенный интеграл

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\Big|_0^2 = 2\arcsin 1 = \pi.$$

Заметим, что с геометрической точки зрения полученный результат очевиден, так как данный интеграл равен площади четверти круга радиуса 2.

6) Неопределенный интеграл был уже найден методом интегрирования по частям (см. пример 2 п. 3 § 42):

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C.$$

По формуле Ньютона—Лейбница вычисляем определенный интеграл

$$\int\limits_1^e \ln x dx = x\ln x - x\Big|_1^e = e\ln e - e + 1 = 1. \blacktriangle$$

Пример 6. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{dx}{1+\cos x}$.

$\triangle$ Найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int d\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1. \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

△ Используя свойства 3 и 2 определенного интеграла и формулу Ньютона—Лейбница, находим

$$\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\,dx=\sqrt{2}\int_0^8 x^{1/2}\,dx+\int_0^8 x^{1/3}\,dx=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^8+\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^8=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}=$$

$$=\frac{64}{3}+12=\frac{100}{3}. \blacktriangle$$

Пример 8. Вычислить $\int_0^2 f(x)\,dx$, где

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{если } x\in[0;\ 1],\\ 2x, & \text{если } x\in(1;\ 2]. \end{cases}$$

△ Так как интеграл от 0 до 2 равен сумме интегралов от 0 до 1 и от 1 до 2 (согласно свойству 5 определенных интегралов), то

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^2 2x\,dx=e^x\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2=$$

$$=e-1+4-1=e+2. \blacktriangle$$

Пример 9. Доказать неравенства

$$\frac{1}{300}<\int_0^{100}\frac{e^{-x}\,dx}{x+100}<\frac{1}{100}.$$

△ На отрезке [0; 100] имеют место неравенства

$$\frac{1}{200}\leqslant\frac{1}{x+100}\leqslant\frac{1}{100}.$$

Поэтому для подынтегральной функции имеем оценку

$$\frac{e^{-x}}{200}\leqslant\frac{e^{-x}}{x+100}\leqslant\frac{e^{-x}}{100}.$$

Положив в формуле (1) п. 4 § 44

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x+100},\quad \varphi(x)=g(x)=e^{-x},$$

$$m=\frac{1}{200},\quad M=\frac{1}{100},\quad a=0,\quad b=100,$$

приходим к неравенствам

$$\frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}\,dx\leqslant\int_0^{100}\frac{e^{-x}\,dx}{x+100}\leqslant\frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}\,dx.$$

Так как $\int_0^{100} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{100}=1-e^{-100}$, то

$$\frac{1-e^{-100}}{200}\leqslant\int_0^{100}\frac{e^{-x}\,dx}{x+100}\leqslant\frac{1-e^{-100}}{100}.$$

Учитывая очевидные неравенства $\frac{1-e^{-100}}{100}<\frac{1}{100}$, $\frac{1-e^{-100}}{200}>\frac{1}{300}$, получаем

$$\frac{1}{300}<\int_0^{100}\frac{e^{-x}\,dx}{x+100}<\frac{1}{100}. \blacktriangle$$

2. Вычисление определенных интегралов методом подстановки. При вычислении определенных интегралов, как и неопределенных, широко используется метод подстановки или метод замены переменной интегрирования.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\ \beta]$, и пусть $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда, если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то справедлива следующая формула:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой замены переменной интегрирования в определенном интеграле.*

□ Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. Обозначим ее $F(x)$. Тогда сложная функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Вычислим теперь интегралы от функции $f(x)$ и функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)). \qquad (3)$$

По условию, $b=\varphi(\beta)$, а $a=\varphi(\alpha)$, и поэтому правые части в формулах (2) и (3) равны. Следовательно, равны и левые части, т. е. справедлива формула (1). ■

Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t). \tag{4}$$

Таким образом, при замене переменной интегрирования $x=\varphi(t)$ следует под знаком интеграла всюду заменить x на $\varphi(t)$ и соответствующим образом изменить пределы интегрирования.

При вычислении определенных интегралов формулы (1) и (4) применяют не только слева направо, но и справа налево (см. пример 2).

Пример 1. Вычислить $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$.

△ Применим формулу (4), положив $x=t^2-1$, $t>0$. Находим $dx=2t\,dt$, $\sqrt{1+x}=t$, новые пределы интегрирования $\alpha=1$, $\beta=2$. Следовательно,

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx=2\int_1^2 t^2(t^2-1)\,dt=$$

$$=2\int_1^2 t^4\,dt-2\int_1^2 t^2\,dt=2\frac{t^5}{5}\Big|_1^2-2\,\frac{t^3}{3}\Big|_1^2=$$

$$=2\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=\frac{136}{15}. \ ▲$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} e^{\sin t}\cos t\,dt$.

△ Запишем подынтегральное выражение в виде

$$e^{\sin t}\cos t\,dt=e^{\sin t}\,d\sin t.$$

Полагая $\sin t=x$ согласно формуле (4), применяя ее справа налево, получим

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin t}\cos t\,dt=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1. \ ▲$$

Пример 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l;\ l]$. Доказать, что

1) если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=0; \tag{5}$$

2) если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_0^l f(x)\,dx. \tag{6}$$

△ Представим интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\int_0^l f(x)\,dx.$$

В интеграле по отрезку $[-l;\ 0]$ сделаем замену переменной, положив $x=-t$. Тогда получим

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx=-\int_l^0 f(-t)\,dt=\int_0^l f(-t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\int_0^l f(-x)\,dx+\int_0^l f(x)\,dx=\int_0^l (f(-x)+f(x))\,dx.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то $f(-x)+f(x)=0$ и формула (5) доказана. Если $f(x)$ — четная функция, то $f(-x)+f(x)=2f(x)$ и формула (6) доказана. ▲

Пример 4. Вычислить $\int_{-1}^{1} (x\cos x+\sin x+x^{10})\,dx$.

△ Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-1}^{1} (x\cos x+\sin x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1} x^{10}\,dx.$$

Первый интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечетная и отрезок интегрирования симметричен относительно точки $x=0$. Учитывая еще, что функция x^{10} — четная, находим

$$\int_{-1}^{1} (x\cos x+\sin x+x^{10})\,dx=2\int_0^1 x^{10}\,dx=2\,\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1=\frac{2}{11}. \ ▲$$

Пример 5. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

△ Для вычисления интеграла положим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

тогда

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x=2\operatorname{arctg} t, \quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Находим новые пределы интегрирования: $\operatorname{tg} 0=0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=2\int\limits_0^1\frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=2\int\limits_0^1\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1\frac{d\frac{t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \ ▲$$

Пример 6. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2\sqrt{9-x^2}$ и осью абсцисс.

△ Данная фигура является криволинейной трапецией, соответствующей графику функции

$$y=x^2\sqrt{9-x^2}, \quad x\in[-3;\ 3].$$

Поэтому

$$S=\int\limits_{-3}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Так как подынтегральная функция четная, то (см. пример 3)

$$S=2\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Для вычисления интеграла положим $x=3\sin t$, тогда $dx=3\cos t\,dt$, $\sqrt{9-x^2}=3\cos t$, новые пределы интегрирования: 0 и $\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$S=2\cdot3^4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{81}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{81}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{81}{4}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{81}{8}\pi \text{ (кв. ед.)}. \ ▲$$

3*. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$. Тогда, как известно, справедливо равенство

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Из него интегрированием по x от a до b находим

$$\int\limits_a^b (uv)'\,dx=uv\Big|_a^b=\int\limits_a^b u'v\,dx+\int\limits_a^b uv'\,dx.$$

Из последнего равенства получаем формулу

$$\int\limits_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,du. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Формула интегрирования по частям сводит вычисление одного интеграла к вычислению другого интеграла. При использовании формулы (1) следует иметь в виду все те рекомендации, которые были даны в п. 3 § 42 относительно применения формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

△ Положим

$$u=\ln(1+x^2), \qquad dv=dx,$$

тогда

$$du=\frac{2x}{1+x^2}\,dx, \qquad v=x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям для определенного интеграла, получаем

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \ln 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln 2 - 2 + 2\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$.

$\triangle$ Положим

$$u = x^2, \qquad dv = \cos x\,dx,$$

тогда

$$du = 2x\,dx, \qquad v = \sin x.$$

Согласно формуле (1) находим

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = x^2\sin x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin x\,dx = -2\int_0^\pi x\sin x\,dx.$$

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям. Положим

$$u = x, \quad dv = \sin x\,dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = -\cos x$$

и, следовательно,

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx =$$

$$= -\pi\cos\pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Таким образом,

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = -2\pi. \ \blacktriangle$$

16 | 3
12 | 4,1

16 | 3
15 | 5

16 × 4 = 64

Вопросы для контроля

1. Запишите формулу Ньютона — Лейбница.
2. Объясните, почему неверен следующий результат:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

3. В чем заключается формула замены переменной интегрирования в определенном интеграле?
4. Объясните, почему интеграл $\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx$ нельзя вычислить с помощью подстановки $x = \sin t$.
5. Объясните, почему верно равенство

$$\int_{-1}^{1} \frac{x\cos x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

6. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

Упражнения

9.6. Вычислите интегралы:

1) $\int_1^2 (2x+1)\,dx$; 2) $\int_0^2 x(3-x)\,dx$; 3) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

7) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 8) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

9.7. Вычислите интегралы:

1) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 2) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

4) $\int_{0,5}^2 \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$; 5) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$; 6) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; 8) $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

9.8. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 4x\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx$; 5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{tg} x\,dx$;

7) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

9.9. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{1} e^{2x}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} (e^x-1)^4 e^x\,dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^x\,dx}{e^x-1}$; 4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

9.10. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

3) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 4) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos \ln x}{x}\,dx$.

9.11*. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{1} (1-x)e^{-x}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\sin x\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$; 5) $\int\limits_{0}^{1} x\ln(1+x^2)\,dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \arccos x\,dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x\,dx$.

9.12. Вычислите интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin px \sin qx\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos px \cos qx\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin px \cos qx\,dx$, $p, q \in N$.

9.13. Докажите, что если $f(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, — непрерывная периодическая с периодом T функция, то для любого числа a верно равенство

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

9.14. Вычислите $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

9.15. Докажите неравенства:

1) $0 < \int\limits_{0}^{200} \frac{e^{-5x}}{20+x}\,dx < 0{,}005$; 2) $\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \frac{1}{20}$;

3) $\frac{\pi}{33} < \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(10+\sin x)(1+x^2)} < \frac{\pi}{30}$;

4) $\sqrt{\frac{3}{11}} < \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{10+\cos x \sin^2 x}} < \sqrt{\frac{3}{10}}$.

9.16. Найдите площадь криволинейной трапеции, соответствующей графику функций:

1) $y=\sin x$, $x \in [0; \pi]$; 2) $y=4x-x^2$, $x \in [0; 4]$;

3) $y=x(x-1)(x-2)$, $x \in [0; 1]$; 4) $y=\frac{1}{x}$, $x \in [1; e]$;

5) $y=e^{-x}$, $x \in [0; 1]$; 6) $y=\operatorname{tg} x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

§ 46. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

На практике часто требуется вычислять определенные интегралы от функций, для которых не удается найти первообразных. В таких случаях, как правило, ограничиваются нахождением лишь приближенного значения рассматриваемого интеграла.

В этом параграфе приведем две простейшие формулы приближенного вычисления определенных интегралов — формулу прямоугольников и формулу трапеций.

1. Формула прямоугольников. Пусть требуется вычислить интеграл от a до b от функции $f(x)$. Как обычно, отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

разобьем на n равных по длине отрезков. В каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ через c_i обозначим середину отрезка: $c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i). \tag{2}$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Поэтому при достаточно большом n интегральную сумму (2) можно принять за приближение искомого интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \qquad (4)$$

Для неотрицательных функций это означает (рис. 135, $n=4$), что интеграл по отрезку $[x_{i-1}; x_i]$, равный площади соответствующей криволинейной трапеции, заменяется площадью прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c_i)$. Поэтому формула (4) называется *формулой прямоугольников* для приближенного вычисления определенных интегралов.

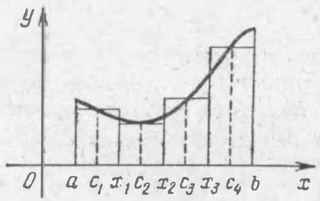


Рис. 135

Приведем без доказательства оценку для абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле прямоугольников, для функций, имеющих непрерывную вторую производную:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24n^2}, \qquad (5)$$

где M — наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$.

Из формулы (1) следует, что

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, формулу прямоугольников можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right). \qquad (6)$$

2. Формула трапеций. Пусть, как и выше, требуется вычислить интеграл от a до b от функции $f(x)$. Отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков и составим интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}), \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому при достаточно большом n каждую из интегральных сумм (1), (2) можно принять за приближение искомого интеграла. Однако в общем случае более точное приближение дает среднее арифметическое этих сумм:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}. \qquad (3)$$

Эта формула называется *формулой трапеций* для приближенного вычисления определенных интегралов.

Для неотрицательной функции $f(x)$ эта формула имеет простой геометрический смысл. Именно, отрезок $[a; b]$ разбивается на n равных по длине отрезков и площадь каждого кусочка криволинейной трапеции заменяется площадью трапеции с основаниями $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ и высотой $\frac{b-a}{n}$ (рис. 136, $n=4$).

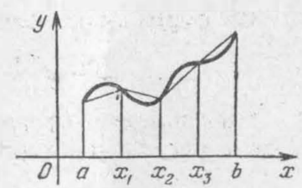


Рис. 136

Оценка абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле трапеций, дается неравенством

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \qquad (4)$$

где M — наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на отрезке $[a; b]$.

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

Таким образом, формулу трапеций можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\right). \quad (5)$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ по формуле прямоугольников и формуле трапеций с точностью до 10^{-2}.

$\triangle$ Применим сначала формулу прямоугольников. Определим с помощью неравенства (5) п. 1, на сколько частей нужно разделить отрезок $[0; 1]$ для достижения заданной точности. Вычислим вторую производную подынтегральной функции:

$$f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}.$$

Следовательно, на отрезке $[0; 1]$ имеем

$$|f''(x)| \leqslant 6e.$$

Поэтому n должно удовлетворять неравенству $\frac{6e}{24n^2} \leqslant 10^{-2}$. Решая это неравенство, находим

$$n \geqslant 5\sqrt{e} \approx 8{,}2.$$

Таким образом, для достижения нужной точности достаточно взять $n = 9$.

Согласно формуле (6) п. 1 получаем

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} f\left(\frac{1}{9}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left\{f\left(\frac{1}{18}\right) + f\left(\frac{3}{18}\right) + f\left(\frac{5}{18}\right) + f\left(\frac{7}{18}\right) + \right.$$
$$\left. + f\left(\frac{9}{18}\right) + f\left(\frac{11}{18}\right) + f\left(\frac{13}{18}\right) + f\left(\frac{15}{18}\right) + f\left(\frac{17}{18}\right)\right\}$$

с точностью до 10^{-2}.

Чтобы получить окончательный ответ, нужно еще вычислить значение функции $f(x) = e^{x^2}$ в указанных точках. С помощью микрокалькулятора в итоге получим 1,46.

Применим теперь формулу трапеций. В этом случае должно выполняться неравенство

$$\frac{6e}{12n^2} \leqslant 10^{-2},$$

т. е. $5\sqrt{2e} \approx 11{,}5$. По формуле (5) п. 2 при $n = 12$ находим

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left(\frac{1+e}{2} + \sum_{i=1}^{11} f\left(\frac{i}{12}\right)\right) \approx 1{,}46$$

с точностью до 10^{-2}. $\blacktriangle$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx$ по формуле прямоугольников и формуле трапеций с точностью до 10^{-2}.

$\triangle$ Здесь $f(x) = \sqrt{x^2+1}\sin x$. Находим

$$f''(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\cos x + \frac{x^4}{(1+x^2)^{3/2}}\sin x.$$

Далее,

$$|f''(x)| \leqslant \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1} + \frac{x^8}{(1+x^2)^3}} \leqslant \sqrt{4 - \frac{4}{x^2+1} + 1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{4 - 2 + 1} = \sqrt{3}.$$

Следовательно, в формуле прямоугольников n должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\sqrt{3}}{24n^2} \leqslant 10^{-2}, \quad \text{т. е.} \quad n \geqslant \frac{5}{\sqrt[4]{12}} \approx 2{,}7.$$

По формуле (6) п. 1 при $n=3$ с заданной точностью получаем

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{1}{3}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right\}\approx 0{,}56.$$

В формуле трапеций n должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\sqrt{3}}{12n^2}\leqslant 10^{-2},\quad \text{т. е.}\quad n\geqslant\frac{5}{\sqrt[4]{3}}\approx 3{,}8.$$

По формуле (5) при $n=4$ с точностью 10^{-2} находим

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx$$

$$\approx\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin 1+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\approx 0{,}56. \blacktriangle$$

Упражнения

9.17. Найдите приближенное значение интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле прямоугольников, разделив отрезок интегрирования на 10 частей.

9.18. Найдите приближенное значение интеграла

$$\int_0^1 (4x-3x^2)\,dx$$

по формуле трапеций, разделив отрезок интегрирования на 10 частей. Найдите точное значение интеграла.

9.19. Определите, на сколько частей достаточно разделить отрезок [0; 1], чтобы абсолютная погрешность при вычислении интеграла

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$$

по формуле прямоугольников не превысила 10^{-3}.

9.20. Определите, на сколько частей достаточно разделить отрезок [0; 1], чтобы абсолютная погрешность при вычислении интеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

по формуле трапеций не превысила 10^{-2}.

9.21. Вычислите с точностью до 10^{-2} интегралы:

1) $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

9.22. Вычислите с точностью до 10^{-3} интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

9.23. Вычислите с точностью до 10^{-4} интегралы:

1) $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2) $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

Глава 10

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 47. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Используя понятие определенного интеграла, дадим общий метод вычисления площадей плоских фигур. Как известно (§ 44), определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла, на этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

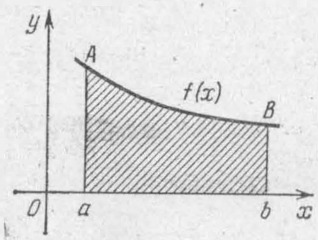


Рис. 137

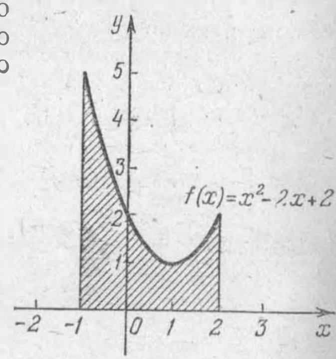


Рис. 138

В § 44 доказано, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 137), ограниченной графиком неотрицательной непрерывной функции $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1;\ 2]$ оси Ox (рис. 138).

$\triangle$ Данная фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому ее площадь вычисляется по формуле (1):

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6. \blacktriangle$$

Пусть теперь $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, — неположительная непрерывная функция. В этом случае график этой функции расположен под осью Ox (рис. 139) и

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0.$$

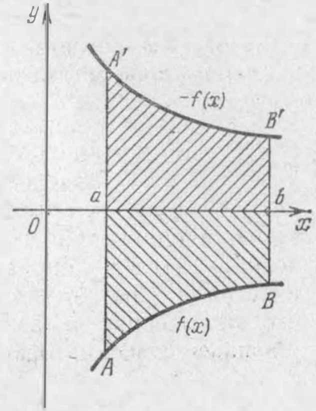


Рис. 139

Рассмотрим вспомогательную функцию $y=-f(x)$, $x\in[a;\ b]$. Площадь криволинейной трапеции $aA'B'b$, ограниченной графиком функции $y=-f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле (1), т. е.

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Так как фигуры $aA'B'b$ и $aABb$ симметричны относительно оси Ox, то их площади равны. Следовательно, площадь фигуры $aABb$ может быть вычислена по формуле (2).

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-1$ и $y=0$ (рис. 140).

$\triangle$ График функции $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in[-1;\ 0]$, расположен под осью Ox, поэтому для вычисления площади данной фигуры применим формулу (2):

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=-\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}. \blacktriangle$$

Пусть теперь $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, — непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция, график которой пересекает отрезок $[a;\ b]$ в конечном числе точек. Из формул (1) и (2) следует, что площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$

и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (3)$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной отрезком $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ оси Ox, графиком функции $y=\cos x$, отрезками прямых $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=\pi$ (рис. 141).

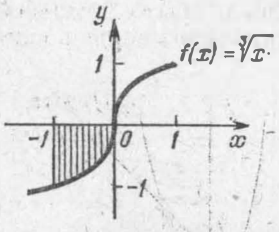


Рис. 140

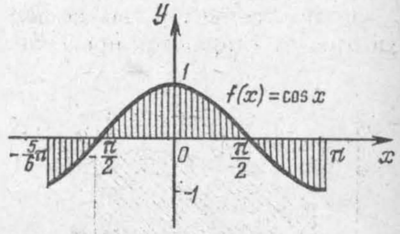


Рис. 141

△ График функции $y=\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ пересекает ось Ox в точках $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$.

По формуле (3) находим

$$S=\int_{-5\pi/6}^{\pi} |\cos x|\,dx=$$

$$=-\int_{-5\pi/6}^{-\pi/2}\cos x\,dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx=$$

$$=-\sin x\Big|_{-5\pi/6}^{-\pi/2}+\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{7}{2}.\ ▲$$

Рассмотрим теперь фигуру, ограниченную графиками неотрицательных непрерывных функций $f_1(x)$, $x\in[a;\ b]$, и $f_2(x)$, $x\in[a;\ b]$, и отрезками прямых $x=a$, $x=b$ (рис. 142). Площадь S этой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций $aABb$ и $aMNb$. Следовательно,

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,dx. \qquad (4)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f_1(x)=x+3$ и $y=f_2(x)=x^2+1$ (рис. 143).

△ Решая уравнение $x+3=x^2+1$, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций f_1 и f_2: $x_1=-1$ и $x_2=2$. Используя формулу (4), вычислим площадь фигуры:

$$S=\int_{-1}^{2}(x+3-(x^2+1))\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.\ ▲$$

Если требуется вычислить площадь более сложной фигуры, то стараются представить искомую площадь в виде

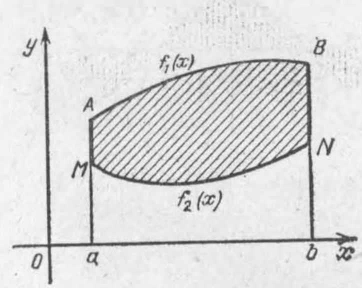


Рис. 142

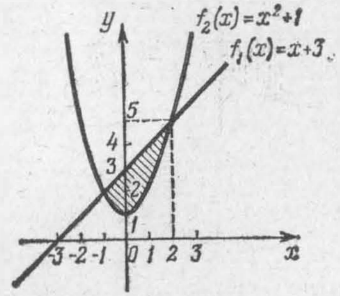


Рис. 143

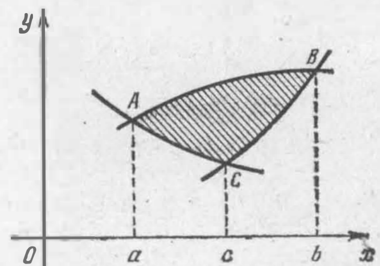


Рис. 144

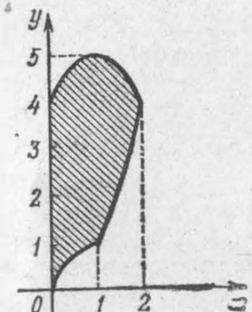


Рис. 145

алгебраической суммы площадей криволинейных трапеций. Так, например, площадь фигуры, изображенной на рис. 144, вычисляется по формуле

$$S=S_{aABb}-S_{aACc}-S_{cCBb}.$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 1]$, $y=x^2$, $x\in[1;\ 2]$, и $y=-x^2+2x+4$, $x\in[0;\ 2]$ (рис. 145).

$\triangle$ Для вычисления площади данной фигуры достаточно найти площадь криволинейной трапеции, соответствующей графику функции

$$y=-x^2+2x+4,\quad x\in[0;\ 2],$$

и вычесть из нее площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций $y=\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 1]$, и $y=x^2$, $x\in[1;\ 2]$. Поэтому

$$S=\int_0^2(-x^2+2x+4)\,dx-\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_1^2 x^2\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right)\Big|_0^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{19}{3}.\ \blacktriangle$$

Упражнения

10.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;
2) $y=6x-x^2$, $y=0$; 3) $y=x^3-4x$, $y=0$;
4) $y=\sqrt{x-2}$, $y=0$, $x=6$;
5) $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$, $x=8$;
6) $y=\arcsin x$, $y=0$, $x=\frac{1}{2}$.

10.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=x^2-5x+6$, $y=0$;
2) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi$.

10.3. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой:
1) $y=2x-x^2$, $y=x$; 2) $y=2x-x^2$, $y=-x$;
3) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2-\frac{3}{2}x$; 4) $y=6x-x^2-7$, $y=x-3$;
5) $y=8+2x-x^2$, $y=2x+4$; 6) $y^2-4x=0$, $x-y=0$.

10.4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболами:
1) $y=-x^2$, $y=x^2-2x-4$;
2) $2y=x^2+x-6$, $2y=6+3x-x^2$;
3) $y=ax$, $x^2=by$, $a>0$, $b>0$.

10.5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:
1) $y=8-7x-x^2$, $y=2x+16$, $x=0$;
2) $y=x^3$, $x+y=2$, $y=0$;
3) $y=2x^2$, $y=\frac{x^3}{3}$; 4) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{1}{1+x^2}$;
5) $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$, $x=0$; 6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x+y=1$;
7) $y=\frac{2}{\pi}x$, $y=\sin x$, $x\geqslant 0$;

8) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$;
9) $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $x\in[0;\ \pi]$;
10) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

10.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+3$, касательной к ней в точке (3; 6) и осями координат.

10.7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке (3; 5) и осью ординат.

10.8. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $x=1$, гиперболой $y=1+\frac{1}{x}$ и касательной к ней в точке (2; 1,5).

§ 48. Применение определенного интеграла при решении физических задач

1. Задача о вычислении пути. Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой скоростью $v=v(t)$. Требуется найти путь, который пройдет эта точка за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$.

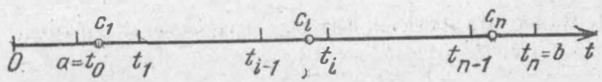


Рис. 146

В простейшем случае, если скорость постоянна, т. е. $v(t)=v_0=\text{const}$, то путь, пройденный точкой, равен (по определению, известному из курса физики) произведению скорости на время движения:

$$s=v_0(b-a).$$

В общем случае, когда скорость непостоянна, поступают следующим образом.

Промежуток времени $[a;\ b]$ разбивают точками $t_0=a$, t_1, ..., t_{n-1}, $t_n=b$ $(t_0<t_1<\ldots<t_n)$ на n отрезков одинаковой длины (рис. 146). Длина каждого отрезка равна

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}=\frac{b-a}{n},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Выбрав на каждом отрезке $[t_{i-1};\ t_i]$ произвольную точку c_i, составляют сумму

$$\sum_{i=1}^{n}v(c_i)\,\Delta t_i. \qquad (1)$$

Каждое слагаемое этой суммы дает приближенное значение пути, пройденного материальной точкой за время от $t=t_{i-1}$ до $t=t_i$. Следовательно, весь путь, пройденный точкой за время от $t=a$ до $t=b$, приближенно выражается суммой (1). Это приближение будет тем лучше, чем мельче отрезки разбиения. Поэтому путь s, пройденный точкой за отрезок времени $[a; b]$, определяется как предел суммы (1) при $n \to \infty$:

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(c_i)\,\Delta t_i.$$

Как известно (§ 44), этот предел есть определенный интеграл от функции $v(t)$ на отрезке $[a; b]$. Таким образом, путь s, пройденный за отрезок времени от $t=a$ до $t=b$ материальной точкой, движущейся прямолинейно со скоростью $v(t)$, вычисляется по формуле

$$s=\int_a^b v(t)\,dt. \qquad (2)$$

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(3t^2+4t+1)$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за первые 3 с.

△ По формуле (2) получим

$$s=\int_0^3 (3t^2+4t+1)\,dt=(t^3+2t^2+t)\Big|_0^3=48\text{ (м)}. \ ▲$$

Пример 2. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(t+6t^2)$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

△ По формуле (2) находим

$$s=\int_2^3 (t+6t^2)\,dt=\left(\frac{1}{2}t^2+2t^3\right)\Big|_2^3=40{,}5\text{ (м)}. \ ▲$$

Пример 3. Определить, на какую максимальную высоту поднимется камень, брошенный от поверхности Земли вертикально вверх со скоростью v_0, если не учитывать сопротивление воздуха.

△ В этом случае скорость камня равна $v(t)=v_0-gt$, где g — ускорение свободного падения. Камень будет лететь вверх, пока $v(t)\geqslant 0$, т. е. до момента времени $t=\frac{v_0}{g}$. Положив в формуле (2) $v(t)=v_0-gt$, $a=0$, $b=\frac{v_0}{g}$,

получим

$$s=\int_0^{v_0/g}(v_0-gt)\,dt=\left(v_0t-\frac{gt^2}{2}\right)\Big|_0^{v_0/g}=\frac{v_0^2}{2g}. \ ▲$$

2. Задача о силе давления жидкости. Пусть пластина в виде криволинейной трапеции погружена вертикально в жидкость с плотностью ρ так, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня соответственно на расстоянии a и b (рис. 147). Требуется определить силу давления жидкости на пластину.

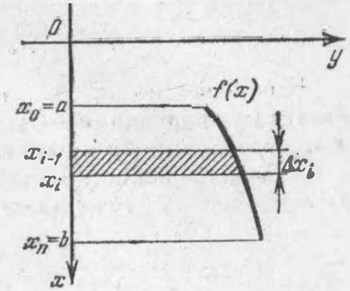


Рис. 147

Если пластина находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давления P жидкости в ньютонах на нее будет равна весу столба жидкости, имеющего основанием данную пластину, а высотой — глубину h, т. е.

$$P=g\rho hS, \qquad (1)$$

где S — площадь пластины.

Если же пластина погружена в жидкость вертикально, то по формуле (1) давление жидкости на нее не может быть вычислено, так как в этом случае давление жидкости на единицу площади пластины изменяется с глубиной погружения, т. е. зависит от расстояния площадки до поверхности жидкости.

При решении задачи будем учитывать тот факт, что по закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях, в том числе и на вертикальную площадку.

Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонтальных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т. е. параллельными оси Oy) и проходящими через точки $x_0=a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$, где

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i, \quad i=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Выделим одну из полосок (на рис. 147 она заштрихована), находящуюся на глубине x_i. Для достаточно узкой полоски давление во всех ее частях можно считать приближенно одинаковым, а саму полоску можно принять за прямоугольник с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ и основанием, равным нижнему основанию полоски. Легко видеть, что длина основания прямоугольника является функцией от x. Обозначим эту функцию через $f(x)$, $x \in [a;\ b]$. Таким образом, силу давления P_i на i-ю полоску можно приближенно вычислить по формуле (1), т. е.

$$P_i \approx g\rho f(x_i)\, x_i \Delta x_i.$$

Просуммировав силы давления жидкости на все полоски, найдем приближенное значение силы давления жидкости на всю пластину:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i)\, x_i\, \Delta x_i.$$

Точность приближенного равенства тем больше, чем короче отрезки, на которые разбит отрезок $[a;\ b]$.

Таким образом, точное значение силы давления жидкости на пластину определяется по формуле

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i)\, x_i \Delta x_i.$$

Как известно (§ 44), этот предел есть определенный интеграл от функции $g\rho x f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Таким образом, сила давления P жидкости на вертикально погруженную в нее пластину, имеющую форму криволинейной трапеции, соответствующей графику функции $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, вычисляется по формуле

$$P = g\rho \int_a^b x f(x)\, dx,$$

где g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости.

Пример 1. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м³), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м × 0,7 м.

△ Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и вертикальную стенку аквариума (рис. 148). Для нахождения силы давления воспользуемся формулой (2).

Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x) = 0{,}7$, $x \in [0;\ 0{,}4]$, пределы интегрирования $a = 0$ и $b = 0{,}4$. Следовательно,

$$P = 1000g \int_0^{0,4} 0{,}7 \cdot x\, dx = 700g\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4} = 56g.$$

Учитывая, что $g \approx 9{,}8$ м/с², получаем $P \approx 548{,}8$ Н. ▲

Пример 2. Определить силу давления масла (плотность масла 900 кг/м³) на вертикальную стенку, имеющую

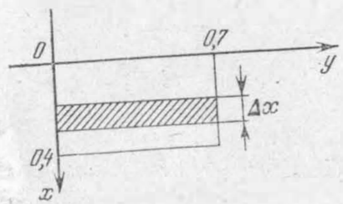


Рис. 148

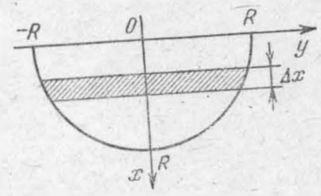


Рис. 149

...ому полукруга радиуса $R = 5$ м, диаметр которого на-...ится на поверхности масла.

△ Выберем систему координат так, как показано на ... 149. Так как стенка есть полукруг радиуса $R = 5$, ...$(x) = \sqrt{5^2 - x^2}$, $x \in [0;\ 5]$. Воспользуемся для нахож-...ия силы давления формулой (2). Для данного случая ... 900 кг/м³, $a = 0$, $b = 5$, поэтому

$$= 2g \cdot 900 \int_0^5 x\sqrt{5^2 - x^2}\, dx = 900g \cdot \frac{2}{3}(5^2 - x^2)^{3/2}\Big|_5^0 = 600g \cdot 5^3 = 75\,000\,g.$$

Так как $g \approx 9{,}8$ м/с², то $P \approx 735$ кН. ▲

3. Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа A этой силы F вычисляется по формуле

$$A = F \cdot s. \qquad (1)$$

Выведем формулу для подсчета работы A силы F в случае, когда сила не является постоянной. Пусть материальная точка движется по оси Ox под действием силы, проекция которой на ось Ox есть функция от x. Будем обозначать ее через $f(x)$ и предполагать, что f есть непрерывная функция. Пусть под действием силы F материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$ (рис. 150).

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ на n частей $[x_{i-1};\ x_i]$ одинаковой длины $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. На каждом отрезке $[x_{i-1};\ x_i]$ работу силы можно приближенно вычислять по формуле (1), т. е. считать ее равной $f(c_i)\Delta x_i$,

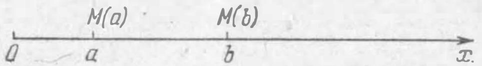


Рис. 150

где c_i — некоторая точка отрезка $[x_{i-1};\ x_i]$. Тогда работа силы на отрезке $[a;\ b]$ будет приближенно выражаться по формуле

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \qquad (2)$$

Точность приближения будет тем лучше, чем короче отрезки, на которые разбит отрезок $[a;\ b]$. Поэтому точное значение работы A определяется формулой

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Правая часть формулы (2) является интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Следовательно, переходя в равенстве (2) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Пример 1. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила в 1 Н растягивает ее на 0,01 м?

△ По закону Гука сила F, растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т. е. $F = kx$, где x — величина растяжения, k — коэффициент пропорциональности. Следовательно, в нашем случае $1\ \text{Н} = k \cdot 0{,}01$ м, откуда $k = 100$ и $F = f(x) = 100x$. Работу, которую необходимо затратить для растяжения пружины на 0,05 м,

находим по формуле (3):

$$A = \int_0^{0{,}05} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}05} = 0{,}125\ (\text{Дж}). \ ▲$$

Пример 2. Пружина имеет длину 20 см. Сила в 10 кг растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 см до 35 см.

△ Выразим данные задачи в единицах системы СИ: 2 см = 0,02 м, 20 см = 0,2 м, $F = 10$ кг = 98,1 Н, 25 см = 0,25 м и 35 см = 0,35 м. Используя условия задачи и закон Гука, получим $98{,}1\ \text{Н} = k \cdot 0{,}02$ м, т. е. $k = 4905$. Следовательно, $F = f(x) = 4905x$. Так как для данного случая $a = 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}05$ и $b = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$, то, используя формулу (3), получим

$$A = 4905 \int_{0{,}05}^{0{,}15} x\,dx = 4905 \frac{x^2}{2} \Big|_{0{,}05}^{0{,}15} \approx 49{,}05\ (\text{Дж}). \ ▲$$

Пример 3. Определить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h.

△ Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{x^2},$$

где M — масса Земли, x — расстояние от тела массы m до центра Земли, k — гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли $x = R$, $F = mg$, то

$$mg = k\frac{mM}{R^2}, \text{ откуда } kM = gR^2,$$

и, следовательно,

$$F = f(x) = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

Искомую работу находим по формуле (3), положив в ней $a = R$, $b = R + h$:

$$A = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = mgR^2 \frac{1}{x} \Big|_{R+h}^{R} = \frac{mgRh}{R+h}. \ ▲$$

10.9. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^2 + 1)$ (м/с). Найдите путь, пройденный телом за первые 5 с.

10.10. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^3 + 1)$ (м/с). Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ с до $t = 3$ с.

10.11. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t) = (12t - 3t^2)$ (м/с). Найдите путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

10.12. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении соответственно со скоростями $v_1(t) = (6t^2 + 4t)$ (м/с) и $v_2(t) = 4t$ (м/с). Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?

10.13. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (4t + a)$ (м/с). Найдите a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с от начала движения, равен 48 м.

10.14. Тело движется по прямой со скоростью $v(t) = (6t + 4)$ (м/с). Найдите длину пути, пройденного телом за третью секунду.

10.15. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t = 0$ с до $t = 5$ с, если точка двигалась прямолинейно со скоростью $v(t) = (9{,}8t - 0{,}003t^2)$ (м/с).

10.16. Скорость движущейся по прямой точки меняется по закону $v(t) = (Rt + a\sqrt{t})$ (м/с). Найдите путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от $t = 0$ с до $t = 4$ с.

10.17. Определите давление воды на стенку шлюза, длина которой 20 м и высота 5 м, считая шлюз доверху заполненным водой.

10.18. Вычислите давление воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно a, нижнее b $(a > b)$, высота h. Предполагается, что поверхность воды достигает верхнего края плотины. Подсчитайте давление для случая $a = 400$ м, $b = 200$ м, $h = 20$ м.

10.19. Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса $R = 6$ м, диаметр которого находится на поверхности воды.

10.20. Определите давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 10 м и высотой 6 м. Определите также давление на нижнюю половину шлюза.

10.21. Вычислите силу давления воды на треугольную пластину с основанием a и высотой h, вертикально в нее погруженную (основание совпадает с уровнем воды).

10.22. Вычислите силу давления воды на вертикальную заслонку, закрывающую трубу, если труба, лежащая горизонтально, наполовину наполнена водой. Известно, что поперечным сечением трубы является круг диаметром 6 м.

10.23. Вычислите работу, которую надо затратить на сжатие пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила в 78 Н.

10.24. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

10.25. Сила в 6 Н растягивает пружину на 2 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 6 см?

10.26. Электрический заряд e_0, сосредоточенный в точке $x = 0$, отталкивает заряд e из точки $x = a$ в точку $x = b$. Вычислите работу силы отталкивания.

Указание. По закону Кулона сила взаимодействия зарядов в вакууме равна $F = e_0 e / x^2$, где x — расстояние между зарядами.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1. $\{-3;\ -2;\ -1;\ 1\}$.

1.2. $\{0;\ -1;\ 1;\ -2;\ 2\}$.

1.3. -1.

1.4. $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{3;\ 4\}$, $\{3;\ 5\}$, $\{4;\ 5\}$, $\{3;\ 4;\ 5\}$.

1.5. 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) $2^5 = 32$; 5) $2^{10} = 1024$.

1.6. 1) $A \cap B = \{3;\ 5\}$; 2) $A \cap B = \{0\}$;
3) $A \cap B = \varnothing$; 4) $A \cap B = A = \{1;\ 2;\ 3\}$.

1.7. $M \cap A = \varnothing$, $M \cap B = \{0;\ -1\}$, $M \cap C = \{-1\}$.

1.8. 1) $A \cup B = \{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; 2) $A \cup B = \{-7;\ 0;\ 1;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$;
3) $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$; 4) $A \cup B = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

1.9. 1) $A \setminus B = \{4\}$, $B \setminus A = \{6\}$;
2) $A \setminus B = \{1;\ 7;\ 8\}$, $B \setminus A = \{-7;\ 6;\ 9\}$;
3) $A \setminus B = A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$, $B \setminus A = B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$;
4) $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{-1;\ 0\}$.

1.10. $A \setminus M = A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B \setminus M = \{1\}$, $C \setminus M = \{-2;\ 1\}$.

1.11. $(A \setminus M) \cup (B \setminus M) \cup (C \setminus M) = \{1;\ 2;\ 3;\ -2\}$.

1.12. 1) $\{0;\ 5\}$; 2) $\left\{\frac{1}{2};\ 0;\ 4\right\}$; 3) $\{-1;\ -2\}$.

1.13. $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$.

1.14. $A \cup B = \{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} = C$,
$A \cap B = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$,
$A \cup C = C$, $A \cap C = A$, $B \cup C = C$, $B \cap C = B$.

1.15. $A \cup B \cup C = C$, $A \cap B \cap C = A \cap B = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$

1.16. $A \cap \boldsymbol{N} = \{1;\ 2\}$, $B \cap \boldsymbol{Z} = B$, $B \cup \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$,
$\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$, $(A \cap B) \cap \boldsymbol{N} = \{1;\ 2\}$.

1.17. $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

1.18. $M = \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $E = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$.

1.19. $F_1 \cap F_2 = F_2$; $F_2 \cap F_3 = F_4$;
$F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_1 = F_1$; $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 = F_4$.

1.21. 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39.

1.22. 11; 13; 17; 19; 23; 29.

1.23. Не существует.

1.24. $-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$.

1.25. 1) $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{7}$; $\frac{139}{79}$; 2) $\frac{12}{5}$; $\frac{19}{30}$; $\frac{627}{1090}$.

1.26. 12; 24; 300.

1.27. 1) 100; 2) 60; 3) 12.

1.28. Дроби $\frac{17}{20}$, $\frac{27}{125}$ представимы конечными десятичными дробями.

1.29. 1) $\frac{1}{9}=0,(1)$; $\frac{4}{9}=0,(4)$; $\frac{3}{60}=\frac{1}{20}=0,05$; $-\frac{2}{3}=-0,(6)$; $\frac{13}{50}=0,26$;
2) $\frac{7}{30}=0,2\,(3)$; $\frac{11}{3}=3,(6)$; $\frac{13}{60}=0,21\,(6)$; $\frac{13}{11}=1,(18)$;
$\frac{11}{13}=0,(846153)$.

1.30. 1) $0,(51)=\frac{51}{99}=\frac{17}{33}$; $1,(13)=1\frac{13}{99}$; $-0,(25)=-\frac{25}{99}$;

$2,(125)=2\frac{125}{999}$; $-0,(113)=-\frac{113}{999}$;

2) $0,3\,(51)=\frac{351-3}{10\cdot 99}=\frac{348}{990}=\frac{116}{330}=\frac{58}{165}$;

$2,1\,(23)=2+\frac{123-1}{10\cdot 99}=2\frac{61}{495}$; $0,2\,(125)=\frac{2125-2}{10\cdot 999}=\frac{2123}{9990}$;

$-1,31\,(12)=-1-\frac{3112-31}{9900}=-1\frac{3081}{9900}$;

$1,25\,(13)=1+\frac{2513-25}{9900}=1\frac{2488}{9900}=1\frac{1244}{4950}=1\frac{622}{2475}$.

1.31. 1) $a+b=2,(1)$; $a-b=-1,(4)$;
2) $a+b=-0,(65)$; $a-b=-1,(76)$;
3) $a+b=2,2\,(6)$; $a-b=0,1\,(7)$.

1.32. 1) $ab=\frac{16}{27}$; $\frac{a}{b}=\frac{3}{16}$; 2) $ab=-\frac{200}{297}$; $\frac{a}{b}=-\frac{24}{11}$;

3) $ab=\frac{517}{405}$; $\frac{a}{b}=\frac{55}{47}$.

1.36. 1) $-0,34919756$; $-0,35102038$; $-0,38888887$; $-2,4142152$; $226,045$;
2) $3,6124434$; $1,3065388$; $1,3015873$; $1,0355339$; $6,0923893$.

1.40. 1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3,15$; $\sqrt{2}-\sqrt{3}\approx -0,32$;
2) $\sqrt{5}+0,(15)\approx 2,39$; $\sqrt{5}-0,(15)\approx 2,08$;
3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 3,97$; $\sqrt{3}-\sqrt{5}\approx -0,50$;
4) $\sqrt{6}+1,1\,(2)\approx 3,57$; $\sqrt{6}-1,1\,(2)\approx 1,33$.

1.41. 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 2,45$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\approx 0,82$;

2) $\sqrt{5}\cdot 0,(15)\approx 0,34$; $\frac{\sqrt{5}}{0,(15)}\approx 14,79$;

3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\approx 3,87$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\approx 0,77$;

4) $\sqrt{6}+1,1\,(2)\approx 3,57$; $\sqrt{6}-1,1\,(2)\approx 1,33$.

1.44. 1) $\Delta x=\frac{1}{15}$; $|\Delta x|=\frac{1}{15}$;

2) $\Delta x=-\frac{1}{150}$; $|\Delta x|=\frac{1}{150}$.

1.45. 1) $x=1,23\pm 0,002$;
2) $x=-0,127\pm 0,001$;
3) $x=2,865\pm 0,0004$.

1.46. 1) $22,5\leqslant x\leqslant 23,5$;
2) $1,49\leqslant x\leqslant 1,51$;
3) $-2,42\leqslant x\leqslant -2,22$;
4) $4,5\leqslant x\leqslant 4,6$.

1.47. 1) $\frac{1}{15\cdot 1,6}=\frac{1}{3\cdot 8}=\frac{1}{24}$;

2) $\frac{1}{150\cdot 1,66}=\frac{1}{3\cdot 83}=\frac{1}{249}$.

1.48. 1) $\frac{0,002}{1,23}=\frac{0,2}{123}=0,001626$, $0,17\%$;

2) $\frac{0,001}{0,127}=\frac{1}{127}=0,007874$, $0,8\%$;

3) $\frac{0,0004}{2,865}=\frac{0,4}{2865}=0,0001396$, $0,02\%$.

1.49. 1) 0,55; 2) 0,13; 3) 2,37; 4) 0,00149.

1.52. 1) $x+y=11,2\pm 0,1$; 2) $x+y=-1,1\pm 0,03$;
3) $x+y=2,27\pm 0,07$; 4) $x+y=13,3\pm 0,2$.

1.53. 1) $x-y=4,4\pm 0,1$; 2) $x-y=-4,1\pm 0,03$;
3) $x-y=0,23\pm 0,07$; 4) $x-y=0,9\pm 0,2$.

1.54. 1) $xy\approx 7,52$ с точностью до $1,5\%$, $xy=6,52\pm 0,113$;
2) $xy\approx 4,305$ с точностью до $1,5\%$, $xy=4,3\pm 0,07$;
3) $xy\approx 1,849$ с точностью до $1,1\%$, $xy=1,85\pm 0,0204$.

1.55. 1) $\frac{x}{y}=1,36\pm 0,0204$; 2) $\frac{x}{y}=2,85\pm 0,05$;

3) $\frac{x}{y}=0,1\pm 0,0011$.

1.56. С точностью до $1,5\%$.

1.57. С точностью до $0,13\%$;
$2,97761\pm 0,00376=2,9776\pm 0,00377=2,978\pm 0,00417=$
$=2,978\pm 0,0042=2,98\pm 0,0062$.

1.58. С точностью до 0,02 см.

1.59. С точностью до $\frac{1}{3}\%$.

1.60. С точностью до 0,25 мм; три десятичных знака.

1.61. $5,23\cdot 10^{-1}$; $3,1\cdot 10^{-2}$; $3,0225\cdot 10^{2}$; $3,74\cdot 10^{4}$;
$3\cdot 10^{-3}$; $1,2\cdot 10^{-3}$.

1.62. -1; 0; 2; 1; 5; -3; -2.

1.63. 1) Цифры 1, 2 верные; цифры 5, 6 сомнительные;
2) все цифры верные;
3) цифры 0, 0, 3 верные; цифра 6 сомнительная;
4) все цифры верные.

1.64. $x=1,25\pm 0,01$; $y=(1,25\pm 0,01)\cdot 10^2=125\pm 1$;
$z=13,20\pm 0,01$; $u=(1,51\pm 0,01)\cdot 10^{-3}$.

1.65. $x=1,25\pm 0,005$; $y=(1,25\pm 0,005)\cdot 10^2=1,25\pm 0,5$;
$z=13,2\pm 0,005$; $u=(1,51\pm 0,05)\cdot 10^{-3}$.

1.66. 1) 3,64; 2) 10,0; 3) $2,1\cdot 10^3$; 4) $1,7\cdot 10^2$.

1.67. 1) $-0,96$; 2) $-1,4$; 3) $1,9\cdot 10^3$; 4) $1,7\cdot 10^2$.

1.68. У x все цифры значащие; у y все цифры значащие; у z цифры 2, 1, 0 значащие; у u цифры 1, 5, 0 значащие; у v цифры 2, 7, 0, 0, значащие.
1.69. 1) Цифры 2 и 1 значащие; 2) цифры 2, 0, 1 значащие; 3) цифры 1 и 5 значащие; 4) цифры 2 и 7 значащие.
1.70. 1) 26,5; 2) $3{,}6 \cdot 10^5$; 3) 31,6; 4) 6,4.
1.71. 1) 6,00; 2) 0,04; 3) 20,9; 4) $3{,}61 \cdot 10^4$.
1.72. 1) 0,162; 2) 0,04; 3) 0,0478; 4) $2{,}8 \cdot 10^{-5}$.

ГЛАВА 2

2.1. 1) Истинно; 2) ложно; 3) не является высказыванием; 4) истинно; 5) истинно; 6) истинно; 7) истинно.
2.2. $\bar{p}$ — «число 174 не делится на 3»; $\bar{q}$ — «нет дождя».
2.3. Роман, Юрий, Виктор, Сергей.
2.4. Черный.
2.5. 1) $\{3; 6; 9; 12\}$; 2) $\{3; 4; 5; 6\}$; 3) $\{4; 5; 7; 8; 10; 11\}$; 4) $\{7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.
2.6. 1) Не является высказыванием; 2) высказывание, ложно; 3) высказывание, истинно.
2.7. 1) $\alpha \neq -2/3$; 2) α — любое.
2.13. Если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Если четырехугольник — не ромб, то его диагонали не перпендикулярны. Первая теорема верна, вторая неверна.
2.14. Взаимно обратные теоремы 1 и 4, 2 и 5; взаимно противоположные 2 и 3, 4 и 6; противоположные обратным 1 и 6, 3 и 5. Теоремы 1 и 6 верны, остальные неверны.
2.16. Прямая и противоположная обратной верны; обратная и противоположная неверны.
2.17. Теорема неверна, обратная и противоположная теоремы верны, противоположная обратной неверна.
2.18. 1) Необходимо и достаточно; 2) необходимо, но недостаточно.
2.19. 1) Верно; 2) неверно ($n = 25$).

ГЛАВА 3

3.1. 1) 5; 6; 2) 11; 8; 3) 3; -11; 4) 4; -8; 5) -9; 15; 6) 3; $\frac{1}{5}$; 7) $-\frac{16}{3}$; 0; 8) -1; 5; 9) ± 2; $\pm\sqrt{3}$; 10) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; 11) $\pm\sqrt{2}$; 12) нет корней;
3.2. 1) Нет; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) нет;
3.3. 1) 3; 2) нет корней; 3) 6; $-2{,}2$; 4) -1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.
3.4. 1) 10; 2) 3; 3) 5; 4) $\frac{75}{7}$; 5) 4; 6) 6; 7) 4; 8) 3; 18; 9) 5; 10) 5; 17; 11) 10; 12) 4; 13) 5; 14) 0; $\frac{1}{2}$.

3.5. 1) ± 3; 2) ± 2; $\pm\sqrt{5}$; 3) $\pm\frac{1}{2}$; 4) ± 1; $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; 5) 4; 9; 6) $\frac{1}{9}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 1; 8) $-\frac{1}{2}$; 1.
3.6. 1) (3; 2); 2) (0; -5); (-3; 4); (3; 4); 3) (-5; -7); (7; 5); 4) (-3; -4); (4; 3); 5) (8; 12); (-8; -12); 6) (0,2; -1); (0,4; $-0{,}5$); 7) $\left(-\frac{1}{5}; 5\right)$; $\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$; 8) ($-5$; -3); (3; 5); 9) (1; 0); $\left(-\frac{6}{5}; \frac{11}{50}\right)$; 10) (1; -2); (-1; -2).
3.7. 1) 29; 2) 18; 3) 12; 4) 6; 5) 20; 6) -4.
3.8. 1) 9; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 9; 4) $-\frac{1}{2}$.
3.9. $k = -4$.
3.10. 1) -5; 3; 2) -4; 5; 3) 4; 5; 4) -2; -1.
3.11. 1) (3; 2); 2) (4; 1); 3) (5; 3); 4) (2; 2); 5) (3; 0); 6) $\left(x; \frac{1}{3}(4x-7)\right)$, где $x \in R$.
3.12. 1) (0; 0); 2) $\left(x; \frac{3x}{2}\right)$, где $x \in R$; 3) (0; 0); 4) (0; 0); 5) $\left(x; \frac{2x}{3}\right)$, где $x \in R$; 6) (0; 0).
3.13. 1) (4; 3); 2) (5; 4).
3.14. 1) (2; 1); 2) нет решений; 3) (3; -2); 4) $\left(x; \frac{3x-7}{4}\right)$, где $x \in R$.
3.15. 1) $k = -\frac{1}{2}$; 2) $k = \frac{1}{2}$.
3.16. 1) $-10{,}5$; 2) $k \in R$, $k \neq 9$.
3.17. При $\alpha \in R$, $\alpha \neq -3$, $\alpha \neq 2$ единственное решение; при $\alpha = -3$ бесконечное множество решений; при $\alpha = 2$ нет решений.
3.18. При $\alpha = -1$ нет решений; если $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq -1$, то $x = \frac{3-\alpha}{\alpha+1}$, $y = -\frac{2}{\alpha+1}$; если $\alpha = 2$, то $x = c$, $y = c - 1$, где $c \in R$.
3.19. 1) -18; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -92; 4) 165.
3.21. 1) $-\frac{11}{7}$; 2; 2) $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{11}{7}$; 2.
3.22. 1) 0; 2; 2) -3; 6.
3.24. 1; 2; 3.
3.25. -3; 0.
3.26. 1) (1; 4; 5); 2) (2; 3; 1); (1; y; $y-3$), где $y \in R$; 4) (2; 4; 1).
3.27. 1) (4; 3; 2); 2) (5; 3; 1); 3) (3; 5; 4); 4) (6; 2; 5).
3.28. 1) Имеет; 2) не имеет.
3.29. Проходит.
3.30. 1) (3; 1; 4; 6); 2) (0; 0; 0; 0); 3) (8; 6; 4; 2); 4) (1; 2; 3; 4).
3.31. $a \neq -1$.
3.32. $a = 2$; $a = -4$.
3.33. 1) $(-2{,}5; +\infty)$; 2) $(0{,}75; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4)$; 4) $(-\infty; -9{,}75)$.

3.34. 1) $x < -\frac{1}{2}$; 2) $x < 2$; 3) $1 < x < 4$; 4) $x < \frac{80}{3}$ и $x > \frac{40}{3}$; 5) $x > -\frac{1}{2}$; 6) $-1 < x < 4$.

3.35. 1) $x < -3$ и $x > 2$; 2) $x \in R$; 3) $\frac{1}{3} < x < 6$; 4) нет решений; 5) $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 1$; 6) $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 4$; 7) $x < \frac{1}{2}$ и $x > \frac{2}{3}$; 8) $-6 < x < 2$.

3.36. 1) $1 < x < 1{,}5$; 2) $-2{,}5 < x < 2$; 3) $x < \frac{5}{14}$ и $x > \frac{3}{8}$; 4) $0{,}5 < x < \frac{4}{3}$; 5) $-1{,}25 < x < 0{,}75$; 6) $x < 5{,}4$ и $x > 6$.

3.37. 1) $x < -2$; 2) $x > 4$; 3) $-5{,}25 < x < 2$; 4) $-\frac{26}{3} < x < \frac{28}{5}$.

3.39. $s = 21$.

3.40. $s = 12$.

3.41.

Хлебозавод	Населенный пункт		
	1	2	3
№ 1	20 т	20 т	0
№ 2	10 т	0	10 т

ГЛАВА 4

4.1. 1) 125; -1; $\frac{1}{27}$; $-9{,}261$; 2) 7; 1; $2\frac{1}{3}$; $-0{,}1$; 3) 51; 9; $-\frac{1}{3}$; 24,73; 4) $\frac{3}{4}$; $-1\frac{1}{2}$; $-\frac{30}{31}$.

4.2. 1) R; 2) R; 3) $R \diagdown \{3\}$; 4) $R \diagdown \{1\}$; 5) $R \diagdown \{1; 4\}$; 6) $[0; +\infty)$.

4.5. а, в.

4.6. 1) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; 2) $y = \frac{5+x}{x}$; 3) $y = \frac{4x+5}{x+2}$; 4) нет обратной функции; 5) нет обратной функции; 6) нет обратной функции.

4.7. 1) Четная; 2) ни четная, ни нечетная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) нечетная; 5) четная; 6) ни четная, ни нечетная; 7) ни четная, ни нечетная; 8) ни четная, ни нечетная.

4.8. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет.

4.9. 1) и 2).

4.10. 1) и 3).

4.11. а; в; д и е.

4.15. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет.

4.16. 1) $n = 2$; $n = 15$; 2) $n = 8$ и $n = 9$; 3) нет.

4.19. 1) $(2n+1)\,2^n$; 2) $\frac{n}{2^n}$; 3) $\frac{1}{n(n+1)}$; 4) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$; 5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

4.21. Монотонные: 1); 2); 5); 6); 7); 10); 11); немонотонные: 3); 4); 8); 9); 12).

4.24. Ограничены: 1); 2); 5); 6); 7); 8); 10); не ограничены: 3); 4); 9); 11).

4.30. $n > 9$; $n > 99$.

4.31. $n > 28$; $n > 2998$.

4.32. $n > 26$; $n > 251$.

4.33. Последовательности 1); 3); 6) сходящиеся; 2); 4); 5) расходящиеся.

4.34. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $-\frac{1}{27}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) 2; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{4}{3}$.

4.35. 1); 2).

4.36. Существует у 1); 2); 3); 4); 5); 6); 9); 10); не существует у 7); 8).

4.37. 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $-\frac{18}{5}$.

4.38. 1) $\frac{25}{24}$; 2) $-\frac{343}{6}$; 3) $\frac{8}{3}$; 4) $-\frac{27}{8}$.

4.39. $\frac{909}{1100}$; 2) $13\frac{919}{1100}$; 3) $8\frac{151}{330}$; 4) $-10\frac{67}{185}$; 5) $-32\frac{14}{55}$; 6) $3\frac{179}{1980}$.

4.41. 1) 253; 2) $-\frac{11}{13}$; 3) 12; 4) 4; 5) 3; 6) 0; 7) 10; 8) $\frac{10}{9}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $\frac{1}{3}$.

4.42. 1) Не существует в точке 0, существует в остальных точках; 2) не существует в точке 0, существует в остальных точках; 3) не существует ни в одной из данных точек; 4) не существует в точке 0, существует в остальных точках; 5) не существует ни в одной из данных точек; 6) не существует в точке 2, существует в остальных точках.

4.43. 0; 1.

4.44. $\frac{1}{2}$; 0.

4.45. $-\frac{3}{2}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) 1; 4) 0; 5) 1.

4.46. 3.

4.47. 1) 5; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$.

4.48. 1) Непрерывна в обеих точках; 2) разрывна в точке $x = 0$, непрерывна в остальных точках; 3) разрывна в точке $x = 0$, непрерывна в остальных точках; 4) непрерывна во всех данных точках; 5) разрывна в точке $x = -1$, непрерывна в остальных точках.

4.49. 1) -3; 2) 5; 3) $-\frac{1}{5}$; 4) 0; 5) 4; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) 2; 9) $\frac{3}{4}$; 10) $\frac{1}{4}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 3; 13) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$; 14) 4; 15) $-\sqrt{5}$; 16) $\frac{1}{4}$.

ГЛАВА 5

5.1. 1) 150; 2) 4800; 3) 60; 4) 180; 5) 30; 6) 0,3; 7) 5; 8) 0,06.

5.2. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 2; 6) 4; 7) 3; 8) 2; 9) 2; 10) 0,3.

5.3. 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 1,5; 5) 500; 6) 288; 7) 2; 8) $\frac{1}{12}$; 9) 2; 10) $\frac{1}{3}$.

5.4. 1) 5; 2) 3; 3) 2; 4) 2; 5) 8; 6) 5.

5.5. 1) 8; 2) 4; 3) 3; 4) 125; 5) $\frac{8}{27}$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) 4; 9) 108; 10) 216.

5.6. 1) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)$; 2) $5a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\left(3a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$; 3) $x^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{1}{4}}-z^{\frac{1}{4}}\right)$; 4) $5x^{-\frac{1}{3}}(2x-1)$.

5.7. 1) $x^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{\frac{2}{5}}$.

5.8. 1) $2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{b-a}$; 3) $\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{x+y}$; 4) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

5.9. 1) $9^{\frac{2}{5}} < 9^{\frac{4}{5}}$; 2) $2^{1,7} > 2^{0,8}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0,8}$;
4) $4^{\sqrt{62}} > 4^{\sqrt{57}}$; 5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{5}}$; 6) $3^{\pi} > 3^{3,14}$;
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,7} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$; 8) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{7}+2} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3\sqrt{8}-1}$;
9) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{8}-2} < 1$; 10) $\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\sqrt{7}-3} < 1$.

5.10. 1) 4; 2) 4; 3) 48; 4) $\frac{3}{25}$; 5) -6; 6) $\frac{48}{49}$.

5.11. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) -1; 4) 0; 5) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{3\pi}{5}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{9}$;
8) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 9) $\frac{8}{3}$; 10) нет корней; 11) 0; 12) 0.

5.12. 1) 2; 2) 4; 3) -4; 4) -4; 5) 3; 6) -4.

5.13. 1) 5; 2) $\frac{10}{3}$; 3) $-\frac{9}{2}$; 4) $\frac{7}{5}$; 5) 2; 6) 4; 7) 16; 8) $\frac{1}{9}$; 9) 25; 10) 200.

5.14. 1) 0; 2) $\frac{8}{3}$; 3) 2; 4) 1; 5) 2; 6) $\frac{3}{2}$.

5.15. 1) 0,682; 2) 2,322; 3) 0,307; 4) 0,352.

5.16. 1) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 4$; 2) $-\infty < x < \frac{1}{2}$; $2 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $-\frac{1}{3} < x < 6$;
4) $-\frac{3}{5} < x < \frac{7}{2}$.

5.19. 1) Область определения — R, множество значений — $[1; +\infty)$;
2) область определения — R, множество значений — $(-\infty; 0)$;
3) область определения — R, множество значений — $(0; +\infty)$;
4) область определения — R, множество значений — $[1; +\infty)$;
5) область определения — R, множество значений — $(-1; 0]$;
6) область определения — R, множество значений — $(-\infty; 1)$;
7) область определения — R, множество значений — $(-2; +\infty)$.

5.23. 1) Область определения $x \in R$, $x \neq 0$; множество значений — R;
2) область определения $x \in R$, $x \neq 0$; множество значений — R;
3) область определения — R_+; множество значений — $[0; +\infty)$;
4) область определения — R_+; множество значений — $[0; +\infty)$;
5) область определения — $(-\infty; 0)$; множество значений — R;
6) область определения — $(\infty; 0)$; множество значений — R_+.

5.26. Нет.

5.28. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 3; 5) 3; 6) 2; 7) 2,5; 8) $\frac{3}{4}$; 9) 0; -2; 10) -1.

5.29. 1) 9; 2) 1; $-\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) -2; 7; 5) -1; 6) 1,5; 7) -2; 8) 2;
9) $\log_2(a \pm \sqrt{a^2-1})$, где $a \geqslant 1$.

5.30. 1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) 0; 4; 5) $\pm\sqrt{3}$; 6) $\pm\sqrt{3}$; 7) -7.

5.31. 1) -1; 2) 0; 3) 1; 2; 4) $\frac{65}{33}$; 5) 5; 6) 1; 2; 7) 30; 100; 8) 1; 10;
9) $\sqrt{3}$; 9; 10) 2; 4.

5.32. 1) 1; 2) 10; $10^{-\frac{1}{2}}$; 3) $10^{\frac{1}{2}}$; 10^{-1}; 4) -2; 3; 5) 7; 6) $-\frac{1}{2}$;
7) 7; 8) 13; 9) 2; 10) 0,01; 10; 11) 2; 12) 30; $\frac{10}{3}$.

5.33. 1) $x > 3$; 2) $x > -1$; 3) $x > \log_6 13$; 4) $x < 1$ и $x > 3$; 5) $x < 0$ и $x > 1$; 6) $x < \log_2 3$; 7) $x < -1$ и $x > 2$; 8) $x \in R$.

5.34. 1) $(-\infty; 2]$; 2) $[1,5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2]$; 4) $(2; 3)$; 5) $(-1; 1)$; 6) $(0; 2)$.

5.35. 1) $x \leqslant -\frac{2}{5}$; 2) $1\frac{7}{24} \leqslant x < 1\frac{1}{3}$; 3) $x \leqslant \frac{11}{16}$; 4) $-5 \leqslant x < 7,5$;
5) $x \geqslant -0,05$; 6) $0,4 \leqslant x < 0,6$; 7) $2 \leqslant x < 2,5$; 8) $0,2 \leqslant x < 0,4$;
9) $-7 < x < 1\frac{1}{3}$; 10) $1,42 \leqslant x < 1,5$; 11) $-6 \leqslant x < -4$ и $2 < x \leqslant 4$; 12) $-\infty < x \leqslant -1$ и $4 \leqslant x < +\infty$; 13) $-0,58 < x \leqslant -0,4$; 14) $-1,25 < x \leqslant -1,23$ и $x > -1$.

5.36. 1) $x > 8$; 2) $x \geqslant 10$; 3) $1 < x < 2$; 4) $x > 4$;
5) $0 < x < 2$; 6) $0 < x < \frac{1}{32}$ и $x > 32$;
7) $2 < x < 3$; 8) $x > 1$; 9) $1 < x < 3$;
10) $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$ и $x > 1$; 11) $0 < x < \frac{1}{15}$ и $x > \frac{1}{3}$.

5.37. 1) 1,39; 1,13; 1,75; 2,79; 4,27; 2,55; 0,47; 0,75;
2) 22,5°; 108°; 229°; 89,9°; 36,7°; 208°.

5.38. 1) $(-1; 0)$; 2) $(0; -1)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
5) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

5.39. 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k \in Z$; 2) πk, $k \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$;
4) $\pi+2\pi k$, $k \in Z$; 5) πk, $k \in Z$; 6) πk, $k \in Z$.

5.40. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 4; 3) -3; 4) -1.

5.41. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$;

3) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in Z$.

5.42. 1) $-0{,}6018$; 2) $-0{,}8660$; 3) $1{,}1578$; 4) $0{,}6494$; 5) $0{,}5878$; 6) $-0{,}8090$.

5.43. $\cos\alpha=-0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

5.44. $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=-0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

5.45. 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет.

5.46. $\pm 0{,}6572$.

5.47. $\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}$.

5.48. $-\frac{25}{12}$.

5.50. 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) 1.

5.51. 1) $\frac{\sqrt2}{2}$; 2) 1; 3) $\frac12$; 4) $\frac{\sqrt3}{2}$; 5) $\frac{\sqrt2+\sqrt6}{4}$; 6) $\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$.

5.52. 1) $\frac{\sqrt2}{2}$; 2) 0; 3) 1; 4) $\frac12$; 5) 1; 6) 0.

5.53. 1) $\cos 3\alpha$; 2) $\frac12$; 3) 1; 4) $\sqrt3\cos\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 6) $\cos 2\beta\cos 3\beta$.

5.54. $-\frac{36}{85}$.

5.55. $-\frac{56}{65}$.

5.56. $\frac{63}{65}$ и $\frac{33}{65}$.

5.58. 1) $\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$; 2) $\pi k,\ k\in Z$;

3) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

5.59. 1) $\sqrt3$; 2) $-\operatorname{tg}22^\circ\approx-0{,}4040$; 3) 1; 4) 1.

5.60. Не существует.

5.61. 1.

5.62. $\frac17$.

5.63. 1) $-\frac12$; 2) $-\frac{\sqrt3}{2}$; 3) 1; 4) -1; 5) $\frac12$; 6) $-\sqrt3$; 7) $-\frac12$;

8) 1; 9) 2; 10) 5.

5.65. $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\frac13$.

5.66. $\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac13$.

5.67. 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) 1.

5.69. 1) $\pi+2\pi k$ и $4\pi k,\ k\in Z$;
2) $4\pi k$ и $2\pi+8\pi k,\ k\in Z$;

3) $\frac{\pi}{4}(1+2k),\ k\in Z$; 4) $\pi k,\ k\in Z$.

5.70. 1) $\frac12(\cos10^\circ-\cos30^\circ)$; 2) $\frac12(\sin75^\circ+\sin15^\circ)$;

3) $\frac12(\sin60^\circ-\sin10^\circ)$; 4) $\frac12(\cos75^\circ+\cos35^\circ)$;

5) $\frac12(\cos2\alpha-\cos2x)$; 6) $\frac12(\sin2x+\sin2\alpha)$;

7) $\frac12(\cos2x+\cos2\alpha)$.

5.71. 1) $\frac{1+\sqrt2}{4}$; 2) $\frac{\sqrt2+\sqrt3}{4}$; 3) $\frac{\sqrt2+\sqrt3}{4}$; 4) $\frac{\sqrt2-1}{4}$;

5) $\frac{\sqrt3-2}{4}$; 6) $\frac{\sqrt3-1}{4}$.

5.72. 1) $\frac{\sqrt3}{4}$; 2) $\frac12$; 3) $\cos\alpha$; 4) $\sin2\alpha$.

5.74. 1) $\sqrt{2+\sqrt3}$; 2) 0; 3) $\frac{\sqrt6}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt2}{2}$; 5) $\sqrt{2+\sqrt3}$;

6) 0; 7) 0; 8) $-\sqrt{2-\sqrt3}$; 9) $-\frac{\sqrt2}{2}$; 10) $-\frac{\sqrt6}{2}$.

5.75. 1) $\sqrt3\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$; 4) $-\sqrt3\sin\alpha$;
5) $\operatorname{ctg}2\alpha$; 6) $\sin\alpha$.

5.76. 1) $4\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $4\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $4\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $2\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

6) $-2\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$;

7) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

5.78. 0.

5.79. 1) $\frac{\pi}{3}k$ и $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;

3) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k$ и $\pi+2\pi k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 6) $\pi+2\pi k,\ k\in Z$.

5.80. 1) $2\cos2\alpha$; 2) $2\cos\alpha$; 3) $-2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$;
5) $\sin\alpha$; 6) $\cos^2\alpha$; 7) $\sin^2\alpha$; 8) 0; 9) 0; 10) -1.

5.83. $\frac34$.

5.85. 1) πk, $k\in Z$; 2) $2\pi k$, $k\in Z$;
3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

5.86. 1) $\frac{1+\cos 30^\circ}{2}$; 2) $\frac{1-\cos 3\alpha}{2}$; 3) $\frac{1-\cos(90^\circ+\alpha)}{2}$;
4) $\frac{1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$.

5.87. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; 3) $2\pi k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

5.88. 1) $2\sin 27^\circ\cos 27^\circ$; 2) $\cos^2 53^\circ-\sin^2 53^\circ$; 3) $\frac{2\operatorname{tg} 34^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 34^\circ}$;
4) $2\sin 2\beta\cos 2\beta$; 5) $\cos^2 1{,}5\alpha-\sin^2 1{,}5\alpha$; 6) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 7) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)$; 8) $2\sin\frac{\alpha}{8}\times$ $\times\cos\frac{\alpha}{8}$; 9) $\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}$; 10) $2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

5.89. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $-\sqrt{3}$.

5.90. 1) $\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $\frac{24}{7}$; 4) $-\frac{3}{4}$.

5.91. $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{24}{7}$.

5.92. $\frac{16\sqrt{105}}{169}$.

5.93. $2\sin\alpha>\sin 2\alpha$.

5.94. 1) $\sin 80^\circ$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.96. 1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{4}$; 7) 0.

5.97. 1) π; 2) 0; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) $\frac{\pi}{2}$.

5.98. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) 0.

5.99. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{5\pi}{6}$.

5.100. 1) 55°18′; 2) −23°54′; 3) 24°6′; 4) 166°; 5) 65°30′; 6) −82°47′; 7) 15°6′; 8) 179°50′.

5.101. 1) 2π; 2) π; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\sqrt{3}$;
9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\frac{\pi}{4}$.

5.102. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$; 3) $-2\sqrt{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}-3}{3}$.

5.103. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{6}$.

5.104. $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{6}$.

5.106. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$;
4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 5) $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 6) $(-1)^{k+1}\times$ $\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 7) $(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 8) $(-1)^k\frac{2\pi}{3}+$ $+2\pi k$, $k\in Z$; 9) $(-1)^k\arcsin\frac{3}{5}+\pi k$, $k\in Z$; 10) $(-1)^{k+1}\times$ $\times\arcsin\frac{1}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

5.107. 1) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 2) $\frac{5\pi}{8}+\pi k$, $k\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$;
4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$; 6) $\pm\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$; 7) $1\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 8) $\frac{\pi}{2}\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$;
9) $\pm 4\arccos\frac{4}{5}+8\pi k$, $k\in Z$; 10) $\pm\frac{\pi-\arccos\frac{1}{4}}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$.

5.108. 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$;
4) $-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; 5) $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 6) $\frac{5\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$;
7) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 8) $45^\circ+90^\circ k$, $k\in Z$; 9) $\frac{\pi}{3}+\operatorname{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$;
10) $\frac{\pi}{6}+\operatorname{arcctg}2+\pi k$, $k\in Z$.

5.109. 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $-\operatorname{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}2+\pi k$ и $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$;
8) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$; 9) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; 10) $\pm\operatorname{arctg}2+\pi k$, $k\in Z$.

5.110. 1) πk, $k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}k$ и $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $k\in Z$; 5) $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k$ и $\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$;

6) $\frac{2\pi}{3}k,\ k\in Z$; 7) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ и $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$; 8) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$;
9) $\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$; 10) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

5.111. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 3) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}++\pi k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 5) $\frac{\pi}{4}++\pi k$ и $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\operatorname{arctg} 3+\pi k,\ k\in Z$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 9) πk и $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 10) πk и $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; 11) $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; 12) $\pi+2\pi k$ и $-2\operatorname{arctg} 0{,}75+2\pi k,\ k\in Z$.

5.112. 1) $\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}k$ и $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$ и $\frac{\pi}{6}++\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi-\arccos 0{,}75}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 6) $\pi k,\ k\in Z$; 7) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

5.113. 1) $\boxed{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;}$ 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 4) $\pi k,\ k\in Z$; 5) πk и $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 6) $2\pi k,\ k\in Z$; 7) $(-1)^k\times\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

5.114. 1) $\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in Z$; 5) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$.

5.115. 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$;
2) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$; 3) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in Z$;
4) $\pi(2k+1),\ k\in Z$; 5) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;
6) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\operatorname{arctg} 2+\pi k,\ k\in Z$;
7) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

5.116. 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$;
2) $\pi+2\pi k$ и $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;

3) $\frac{\pi}{3}+\pi k$ и $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;
4) πk и $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$;
5) $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; 6) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$;
7) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ и $\frac{\pi}{8}(4k+3),\ k\in Z$;
8) $2\pi k$ и $2(\pi k-\operatorname{arctg} 3),\ k\in Z$.

ГЛАВА 6

6.1. 720 км/ч.
6.2. 50 км/ч.
6.3. 1) v_0 м/с; 2) v_0+at_0 м/с.
6.4. 1) -2 м/с; 2) 28 м/с; 3) 10 м/с.
6.5. 1) $\frac{1}{\sqrt{t_0}}$; 2) $-\frac{1}{(3+t_0)^2}$; 3) $3t_0^2+\frac{1}{2\sqrt{t_0}}$.
6.6. 1) $2x_0$; 2; 10; 2) $4x_0$; 4; 20; 3) $2(x_0+3)$; 8; 16;
4) $3x_0^2+2$; 5; 77; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}}$;
6) $-3x_0^2$; -3; -75; 7) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}-2x_0$; $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}}-10$.
6.7. 1) 1; 2) $2x+1$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x$; 4) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$;
5) $3x^2+2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $4+3x^2$; 7) $3+2x+3x^2$.
6.8. 1) -8; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{4}{9}$; 4) $3+\frac{1}{2\sqrt{x}}-6x$;
5) $-5-9x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}$; 6) $2x-8$; 7) $4x^3-\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$;
8) $x^2-\frac{2}{7}\sqrt{x}$; 9) $1+26x-3x^2+36x^3-15x^4$.
6.11. 1) $\frac{17}{81}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -3; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $-\frac{5}{8}$; 6) $-\frac{11}{4}$.
6.13. $f(g)=\lg^2 x+9\lg x+17$,

$$f(h)=\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2+3\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)-1,$$

$$g(h)=\lg\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)+3,\quad g(f)=\lg(x^2+3x-1)+3,$$

$$h(f)=\sqrt{x^2+3x-1}+\frac{x^2+3x-2}{(x^2+3x-1)^2+1},\qquad h(g)=\sqrt{\lg x+3}+$$

$$+\frac{\lg x+2}{\lg^2 x+6\lg x+10}.$$

6.14. $y=f(g)$, где 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+3x+4$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2+5x+1$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $g(x)=\sqrt{x}$;

4) $f(x)=\lg x,\quad g(x)=3x^2+x+4$; 5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$,
$g(x)=3-\lg x$; 6) $f(x)=\frac{1}{\lg x}$, $g(x)=x^2+x^3$;
7) $f(x)=\frac{x^2+1}{3+x+\lg x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$;
8) $f(x)=\frac{x}{4-x+\lg(1+x^2)}$, $g(x)=\sqrt{x}$.

6.15. 1) $6(x^2+5)(x^3+15x+23)$; 2) $6x(x^2-3)^2$;
3) $\frac{2(1+x)(1-2x-x^2)}{(x^2-x)^3}$ 4) $\frac{3(x^2+x+1)^2(5+6x-5x^2-2x^3-x^4)}{(x^3-3x^2-5x)^4}$.

6.16. 1) $(x+2)e^x$; 2) $(2x^3+3x^2+2x)e^{x^2+3x}$;
3) $(2x-x^2-1)e^{-x}$; 4) $((2x^2+3x)\ln 2+1)\cdot 2^{3x+x^2}$;
5) $(3+10x+3x^2+(6x^2+10x^3+2x^4)\ln 4)\cdot 4^{x^2}$;
6) $(2-3x)e^{-x}-(2x+3)\ln 14\cdot 14^{x^2+3x+5}$;
7) $-2(x^2+3x)e^{-x^2}$; 8) $(2x+3x^2+(x^2+x^3-1)(5-2x)\ln 2)\times$
$\times 2^{-x^2+5x+\frac{4}{5}}$;
9) $(3x^2+2x+7+2x(x+18)(x^2+x+7)\ln 3)\,3^{x^2+36x+10}$.

6.17. 1) $6x\ln x+\frac{3(x^2-1)}{x}$;
2) $\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x}-\ln x\right)$; 3) $\frac{2x\ln x-x}{3\ln^2 x}$;
4) $a^{x^2}\left(2x\ln a\ln(x^2+4x+12)+\frac{2x+4}{x^2+4x+12}\right)$;
5) $e^{x+1}\left(\ln(x+5)+\frac{1}{x+5}\right)$;
6) $3\log_5(x+1+x^2)+\frac{(3x+4)(2x+1)}{(x^2+x+1)\ln 5}$.

6.18. 1) $100x^{99}$; 2) $-5x^4$; 3) $\frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$;
4) $\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+\sqrt{x})^4}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$; 5) $-\frac{1}{10x\sqrt{11x}}$;
6) $\frac{6x^8+7x^6+x^3+2x+3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; 7) $-\frac{29}{42x\sqrt[42]{x^{29}}}-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$;
8) $\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}$; 9) $\pi x^{\pi-1}$;
10) $5\left(2\sqrt[3]{x^2}+3x^3+x^7\right)^4\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}+9x^2+7x^6\right)$;
11) $3\left(\lg\sqrt{x}+x^{1/3}+12^{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{2x\ln 10}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$
12) $10\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)^9\left(\frac{1}{2x}+\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}-\frac{2}{x^3}\right)$.

6.19. 1) 5; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 4; 5) 2; 6) $\frac{1}{2}$.

6.20. 1) $2\cos 2x$; 2) $a\cos ax$; 3) $-3\sin 3x$;
4) $-a\sin ax$; 5) $2\cos 2x+3\sin 3x$;

6) $1+2\sin 2x$; 7) $6x^2+15\sin 10x$; 8) $\cos 3x$; 9) $-\cos 2x$.

6.21. 1) $\cos x-x\sin x$; 2) $\sin x+x\cos x$;
3) $\cos 2x$; 4) $2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$;
5) $a\cos ax\cos bx-b\sin ax\sin bx$; 6) $\sin 2x$;
7) $-3\cos^2 x\sin x$; 8) $-a\sin 2ax$;
9) $na\sin^{n-1}ax\cos ax$; 10) $-na\cos^{n-1}ax\sin ax$.

6.22. 1) $4+2\,\mathrm{tg}^2\,2x+2\,\mathrm{ctg}^2\,2x$; 2) $\mathrm{ctg}\,x-x(1+\mathrm{ctg}^2\,x)$;
3) $3\,\mathrm{tg}^2\,x(1+\mathrm{tg}^2\,x)+3(1+\mathrm{tg}^2\,3x)$; 4) $-2(1+\mathrm{ctg}^2\,2x)-$
$-4\,\mathrm{tg}\,2x(1+\mathrm{tg}^2\,2x)$; 5) $2\cos 2x$; 6) $2\sin 2x$;
7) $2a\,\mathrm{tg}\,ax(1+\mathrm{tg}^2\,ax)$; 8) $(4x-1)\cos(2x^2-x)$;
9) $-\sin 2x$; 10) $\cos x-2\sin 2x+3(1+\mathrm{tg}^2\,3x)$.

6.24. 1) $-\sin\frac{x}{3}$; 2) $\frac{3}{2}\cos 3x$; 3) $\cos ax$;
4) $2x\cos(x-1)-x^2\sin(x-1)$; 5) $2\cos(3+2x)-2\sin(3+2x)$;
6) $24\sin^2 4x\cos 4x$; 7) $1+\mathrm{tg}^2\,3x$; 8) $6(\mathrm{tg}^2\,3x-\mathrm{tg}^2\,2x)$;
9) $24\,\mathrm{tg}^2\,4x(1+\mathrm{tg}^2\,4x)$; 10) $-24\,\mathrm{ctg}^2\,2x(1+\mathrm{ctg}^2\,2x)$.

6.25. 1) $\frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$; 2) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; 3) $\frac{mn}{\sqrt{1-n^2x^2}}$.

6.26. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

6.27. $\frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$.

6.28. $\frac{6x^2\,|1-x^6|}{1-x^{12}}$.

6.30. $2x\arcsin x+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.31. 1) $-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$; 2) $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; 3) $-\frac{mn}{\sqrt{1-n^2x^2}}$.

6.32. $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

6.34. $2x\arccos x-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.35. 0.

6.37. 1) $\frac{3}{1+9x^2}$; 2) $\frac{m}{1+m^2x^2}$; 3) $\frac{m}{1+n^2x^2}$.

6.39. $-\frac{1}{1+x^2}$, $x\neq 0$.

6.40. $2x\,\mathrm{arctg}\,x^2+\frac{2x^3}{1+x^4}$.

6.41. $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

6.42. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

6.43. 1) $-\frac{2}{1+4x^2}$; 2) $-\frac{n}{1+n^2x^2}$; 3) $-\frac{mn}{1+n^2x^2}$.

6.44. $\frac{1}{1+x^2}$, $x\neq 0$.

6.45. $\frac{4\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}$.

6.46. $2x \operatorname{arcctg} x - \frac{x^2}{1+x^2}$.

6.47. $\frac{2(x^2-1)}{x^4+6x^2+1}$.

6.48. 0.

6.49. 1) $5x^4-24x^3-24x^2$;

2) $\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\left((56x^7+2x\sqrt{2})(\sqrt{x}-1)-\right.$

$\left.-\frac{1}{2\sqrt{x}}(7x^8+\sqrt{2}x^2+\sqrt{5})\right)$;

3) $(3-2x-10x^9)(\sqrt{x}+3x^7-8)+(3x-x^2-x^{10})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+21x^6\right)$;

4) $\left(10x^9+33x^{10}+\frac{2}{7}x^{-5/7}\right)\ln x+x^9+3x^{10}+x^{-5/7}$;

5) $\left(2t^2+2t\sqrt{t}+1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)e^{t^2-1}$;

6) $\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}+12t^2\left(\ln t+\sqrt[3]{t^2}\right)\right)e^{4t^3}$.

6.50. 1) $\left(\sin x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in N$; 2) $y'=4(x+3)^3$,

$y''=12(x+3)^2$, $y'''=24(x+3)$, $y^{IV}=24$, $y^{V}=y^{VI}=\ldots=0$;

3) $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in N$; 4) $y'=e^x+2x$, $y''=e^x+2$,

$y'''=y^{IV}=\ldots=e^x$; 5) $y'=5x^4+e^x$, $y''=20x^3+e^x$,

$y'''=60x^2+e^x$, $y^{IV}=120x+e^x$, $y^{V}=120+e^x$, $y^{VI}=y^{VII}=\ldots=e^x$;

6) $2^n e^{2x}+3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in N$.

6.51. 70.

6.54. 1) 3,003; 2) 1,4435; 3) 2,89; 4) 3,11; 5) 1,442; 6) 3,08.

6.55. 1) 4,0208; 2) 1,995; 3) 5,00177; 4) 0,484; 5) 0,05; 6) —0,0175; 7) 0,965; 8) 1,037; 9) —0,03.

Г Л А В А 7

7.1. $y=-4x-1$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$; $y=1$, $x=0$;

$y=4x-1$, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

7.2. $y=3x+1$, $y=-\frac{1}{3}x+1$; $y=\frac{7}{3}$, $x=1$; $y=1$, $x=3$.

7.3. 45°; 0°; 45°.

7.4. 1; 0.

7.5. (1; 0).

7.6. 45°.

7.7. 2; —2; 4; —4.

7.8. 45°; 0°; 135°.

7.9. $v(1)=4$ (м/с), $a(1)=2$ (м/с²); $v(3)=8$ (м/с), $a(3)=2$ (м/с²).

7.10. 54 (м/с²).

7.13. 210,25 (Дж).

7.14. 430 m.

7.16. $\omega=-2ct+b$; $\beta=-2c$; $t=\frac{b}{2c}$.

7.17. 23 А.

7.18. 1) 1,00201 Дж/(кг·°С); 2) 1,013 Дж/(кг·°С).

7.19. $v=-kAe^{-kt}$.

7.20. Возрастает на R; 2) убывает на R; 3) убывает на $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; 4) возрастает на $(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$; 5) убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и возрастает на $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 6) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; 7) убывает на $(-\infty; -1)$ и возрастает на $(-1; +\infty)$; 8) убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(0; 1)$, возрастает на $(-1; 0)$ и на $(1; +\infty)$; 9) возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 1)$; 10) возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ и убывает на $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$; 11) убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; +1)$; 12) возрастает на $(-\infty; 1)$ и на $\left(1; \frac{2}{3}\right)$, убывает на $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

7.21. 1) Максимум при $x=2$; 2) минимум при $x=3$; 3) минимум при $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$, максимум при $x=0$; 4) максимум при $x=\frac{1}{4}$; 5) максимум при $x=-4$, минимум при $x=4$; 6) нет экстремумов; 7) нет экстремумов; 8) минимум при $x=0$; 9) минимум при $x=0$; максимум при $x=2$; 10) минимум при $x=0$; 11) минимум при $x=\frac{1}{e}$; 12) минимум при $x=1$.

7.22. 1) Выпукла вверх на $(-\infty; 2)$, выпукла вниз на $(2; +\infty)$; 2) выпукла вниз на R; 3) выпукла вниз на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, выпукла вверх на $(-1; +1)$; 4) выпукла вниз на R.

7.23. 1) Убывает на $(-\infty; -1)$, возрастает на $(-1; +\infty)$, $x=-1$ — точка минимума, $f_{\min}=f(-1)=-4$; 2) убывает на $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, возрастает на $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, $x=\frac{3}{4}$ — точка минимума, $f_{\min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{37}{4}$; 3) возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$, $x=2$ — точка максимума, $f_{\max}=f(2)=7$; 4) возрастает на $(-\infty; 2)$, убывает на $(2; +\infty)$, $x=2$ — точка максимума, $f_{\max}=f(2)=0$; 5) возрастает на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$, убывает на $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x=\frac{1}{4}$ — точка максимума, $f_{\max}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$; 6) возрастает на $(-\infty; 5)$, убывает на $(5; +\infty)$, $x=5$ — точка максимума, $f_{\max}=f(5)=0$; 7) убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, возрастает на $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $x=-\frac{1}{2}$ — точка минимума, $f_{\min}=$

$= f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$; 8) убывает на $(-\infty; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$, $x=1$ — точка минимума, $f_{min} = f(1) = 2$.

7.24. 1) $x=2$; $y=0$; 2) $x=1$; 3) $y=-x$ при $x\to-\infty$ и $y=x$ при $x\to+\infty$; 4) $x=0$ и $y=x+6$; 5) $x=-1$ и $y=x-3$; 6) $x=1$, $x=-1$ и $y=0$.

7.25. 1) Область определения: R; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точках $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(3; 0)$ и ось ординат в точке $(0; 3)$; $f(x)>0$ на $(-1; 1)$ и $(3; +\infty)$, $f(x)<0$ на $(-\infty; -1)$ и $(1; 3)$; асимптот нет; возрастает на $\left(-\infty; 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, убывает на $\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; имеет максимум в точке $x=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $f_{max}\approx 3,06$, и минимум в точке $x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $f_{min}\approx -3,06$; выпукла вверх на $(-\infty; 1)$ и вниз на $(1; +\infty)$; $x=1$ — точка перегиба; 2) область определения: R; функция четная; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точках $(-3; 0)$, $(-1; 0)$; $(1; 0)$, $(3; 0)$ и ось ординат в точке $(0; 9)$; $f(x)>0$ на $(-\infty; -3)$, $(-1; 1)$ и $(3; +\infty)$, $f(x)<0$ на $(-3; -1)$ и $(1; 3)$; асимптот нет; возрастает на $(-\sqrt{5}; 0)$ и $(\sqrt{5}; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -\sqrt{5})$ и $(0; \sqrt{5})$; имеет максимум в точке $x=0$; $f_{max}=9$, и минимум в точках $x=\pm\sqrt{5}$, $f_{min}=-16$; выпукла вверх на $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и вниз на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}; +\infty\right)$; $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ — точки перегиба; 3) область определения: R; функция четная; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точках $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; 0)$ и ось ординат в точке $(0; 3)$; $f(x)<0$ на $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$, $f(x)>0$ на $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; асимптот нет; возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, убывает на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; имеет максимумы в точках $x=\pm 1$, $f_{max}=4$, и минимум в точке $x=0$, $f_{min}=3$; выпукла вверх на $(-\infty; -1/\sqrt{3})$ и $(1/\sqrt{3}; +\infty)$ и вниз на $(-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$; $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ — точки перегиба; 4) область определения: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}; 2\right)\cup(2; +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точке $(1; 0)$ и ось ординат в точке $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; $f(x)>0$ на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; 2)$, $f(x)<0$ на $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ и $(2; +\infty)$; вертикальные асимптоты: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=2$; прямая $y=0$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; воз-

растает на каждом интервале своей области определения; экстремумов нет; выпукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(x_0; 2)$ и вверх на $\left(-\frac{1}{2}; x_0\right)$ и $(2; +\infty)$, $x_0\approx 0,83$ — точка перегиба; 5) область определения: $(-\infty; -1)\cup(-1; 2)\cup(2; +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график не пересекает ось абсцисс и пересекает ось ординат в точке $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$; $f(x)>0$ на $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$, $f(x)<0$ на $(-1; 2)$; вертикальные асимптоты: $x+1=0$ и $x=2$, прямая $y=0$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; возрастает на $(-\infty; -1)$ и $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$, убывает на $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ и $(2; +\infty)$; имеет максимум в точке $x=\frac{1}{2}$, $f_{max}=-\frac{4}{9}$; выпукла вниз на $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$ и вверх на $(-1; 2)$; точек перегиба нет; 6) область определения: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая, график пересекает ось абсцисс в точках $(-1; 0)$ и $(2; 0)$ и ось ординат в точке $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; $f(x)>0$ на $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ и $(-1; 2)$, $f(x)<0$ на $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ и $(2; +\infty)$; вертикальная асимптота: $x=-\frac{3}{2}$, прямая $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; возрастает на $\left(-\frac{3+\sqrt{7}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ и $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-3+\sqrt{7}}{2}\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ и $\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$; имеет максимум в точке $x=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$, $f_{max}=\frac{4-\sqrt{7}}{2}$, и минимум в точке $x=-\frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $f_{min}=\frac{\sqrt{7}+4}{2}$; выпукла вниз на $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ и вверх на $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$; точек перегиба нет; 7) область определения: $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точках $(1; 0)$; $(2; 0)$ и не пересекает ось ординат; $f(x)>0$ на $(0, 1)$ и $(2; +\infty)$, $f(x)<0$ на $(-\infty; 0)$ и $(1; 2)$; вертикальная асимптота: $x=0$, прямая $y=x-3$ является асимптотой при $x\to\pm\infty$; возрастает на $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$, убывает на $(-\sqrt{2}; 0)$ и $(0; \sqrt{2})$; имеет максимум в точке $x=-\sqrt{2}$, $f_{max}=-(2\sqrt{2}+3)$, и минимум в точке $x=\sqrt{2}$, $f_{min}=2\sqrt{2}-3$; выпукла вниз на $(0; +\infty)$ и вверх на $(-\infty; 0)$, точек перегиба нет; 8) область определения: $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график не пересекает ось абсцисс и пересекает ось ординат в точке $\left(0;\ \frac{1}{6}\right)$; $f(x)>0$ на $(-\infty;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$, $f(x)<0$ на $(2;\ 3)$; вертикальные асимптоты: $x=2$ и $x=3$; прямая $y=0$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; возрастает на $(-\infty;\ 2)$ и $\left(2;\ \frac{5}{2}\right)$, убывает на $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)$ и $(3;\ +\infty)$; имеет максимум в точке $x=\frac{5}{2}$, $f_{\max}=-4$; выпукла вниз на $(-\infty;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$ и вверх на $(2;\ 3)$; точек перегиба нет; 9) область определения: $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; функция четная; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точках $(-3;\ 0)$ и $(3;\ 0)$ и ось ординат в точке $\left(0;\ \frac{9}{4}\right)$; $f(x)>0$ на $(-\infty;\ -3)$; $(-2;\ 2)$ и $(3;\ +\infty)$, $f(x)<0$ на $(-3;\ -2)$ и $(2;\ 3)$; вертикальные асимптоты: $x=-2$ и $x=2$; прямая $y=1$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; возрастает на $(0;\ 2)$ и $(2;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -2)$ и $(-2;\ 0)$; имеет минимум при $x=0$, $f_{\min}=\frac{9}{4}$; выпукла вниз на $(-2;\ 2)$ и вверх на $(-\infty;\ -2)$ и $(2;\ +\infty)$; точек перегиба нет; 10) область определения: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график не пересекает ни ось абсцисс, ни ось ординат; $f(x)>0$ на всей области определения; $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=1$ — асимптота при $x\to\pm\infty$; убывает на каждом интервале своей области определения, экстремумов нет; выпукла вверх на $(-\infty;\ -\ln\sqrt{2})$ и вниз на $(-\ln\sqrt{2};\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; $x=-\ln\sqrt{2}$ — точка перегиба; 11) область определения: $(0;\ +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция непериодическая; график пересекает ось абсцисс в точке $(1;\ 0)$ и не пересекает ось ординат; $f(x)<0$ на $(0;\ 1)$, $f(x)>0$ на $(1;\ +\infty)$; асимптот нет; убывает на $\left(0;\ \frac{1}{e}\right)$, возрастает на $\left(\frac{1}{e};\ +\infty\right)$; $x=\frac{1}{e}$ — точка минимума, $f_{\min}=-\frac{1}{e}$; выпукла вниз на всей области определения; точек перегиба нет.

7.26. 1) На $[-0{,}5;\ 0{,}5]$: $f_{\text{наиб.}}=f(-0{,}5)=1{,}375$, $f_{\text{наим.}}=f(0{,}5)=-1{,}375$; на $[-1{,}5;\ 2]$: $f_{\text{наиб.}}=f(-1)=2$, $f_{\text{наим.}}=f(1)=-2$; 2) на $[-1;\ 1]$: $f_{\text{наиб.}}=f(0)=-9$, $f_{\text{наим.}}=f(1)=f(-1)=-16$; на $[0;\ 3]$: $f_{\text{наиб.}}=f(3)=0$, $f_{\text{наим.}}=f(2)=-25$; на $[-3;\ 5]$: $f_{\text{наиб.}}=f(5)=416$, $f_{\text{наим.}}=f(-2)=f(2)=-25$; 3) на $(-0{,}5;\ 0{,}7)$: $f_{\text{наиб.}}=f(0{,}7)=3{,}7399$; $f_{\text{наим.}}=f(0)=3$; на $[-2;\ 0]$: $f_{\text{наиб.}}=f(-1)=4$, $f_{\text{наим.}}=f(-2)=f(2)=-5$; на $[-2;\ 2]$: $f_{\text{наиб.}}=f(1)=f(-1)=4$, $f_{\text{наим.}}=f(-2)=f(2)=-5$; на $[0;\ 4]$: $f_{\text{наиб.}}=f(1)=4$, $f_{\text{наим.}}=f(4)=-221$; 4) на $[-6;\ -1]$: $f_{\text{наиб.}}=f(-6)=8\sqrt[3]{36}$, $f_{\text{наим.}}=f(-1)=3$; на $[-2;\ 1]$: $f_{\text{наиб.}}=f(-2)=4\sqrt[3]{4}$, $f_{\text{наим.}}=f(0)=0$.

7.27. 6 см $\times$ 6 см $\times$ 3 см.

7.28. $\frac{a}{4}\times\frac{a}{2}$.

7.29. 1 с; 7 м/с.

7.30. 512 см^3.

7.31. 1) $\frac{2p}{\pi+4}$; 2) $\sqrt{\frac{2S}{4+\pi}}$.

7.32. $R\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.34. $\frac{1}{2}$.

7.35. $-\frac{1}{2}$.

7.36. Энергия, отдаваемая электрическим элементом, будет наибольшей, когда $R=r$.

7.37. Обе прямые CK и KD должны образовывать с данной прямой равные углы.

7.38. $x=2d+\sqrt{\frac{dS}{k}}$; $y=2k+\sqrt{\frac{kS}{d}}$.

7.39. $W=\frac{E^2R}{(R+r)^2}$; $R=r=0{,}16$ Ом, $W_{\max}=9{,}8$ Вт.

7.40. Наибольшая площадь равна $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ при $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

ГЛАВА 8

8.3. 1) Да; 2) нет; 3) да; 4) нет.

8.4. F_1, F_2 и F_3.

8.5. 1) x^2-3x+3; 2) $\ln\frac{x-2}{2}$; 3) $\frac{x^3+1}{3}$; 4) $\frac{11}{3}-\frac{1}{x}$; 5) $\sqrt{x}-\cos(x+1)+\cos 2$; 6) $\frac{x|x|}{2}+6$.

8.6. 1) Нет; 2) да; 3) нет.

8.7. 1) $x+\frac{x^5}{5}$; 2) $\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$; 4) $\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}-3x$; 5) $-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x^4}$; 6) $\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$; 7) $\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{3}{2}x^{2/3}$; 8) $\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}$.

8.8. 1) $a\frac{x^2}{2}+bx+C$; 2) $a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx+C$; 3) $7x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+C$; 4) $\frac{x^4}{4}+x^3+x^2+C$; 5) $\frac{x^{21}}{21}-2x-\frac{1}{19x^{19}}+C$; 6) $\frac{x^6}{6}-x^3-\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$; 7) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{x}-3\ln|x|+C$; 8) $\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$.

8.9. 1) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$; 2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+6\sqrt{x}+C$; 3) $\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^{15}}+C$; 4) $3\left(\frac{x^4}{13}-\frac{x^2}{7}-2\right)\sqrt[3]{x}+C$.

8.10. 1) $3e^x+5\sin x+C$; 2) $-2\cos x+\frac{2^x}{\ln 2}+C$; 3) $\frac{7x\sqrt[7]{x}}{8}+\frac{7^x}{\ln 7}+C$;
4) $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$; 5) $\frac{18^x}{\ln 18}+C$; 6) $2\sin x+C$; 7) $\frac{x-\sin x}{2}+C$;
8) $-x-\operatorname{ctg} x+C$.

8.11. 1) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{5}}{x\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right|+C$;
3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$; 4) $-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;
5) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right|+C$;
7) $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$;
8) $\ln(x+\sqrt{x^2+3})-3\ln|x+\sqrt{x^2-3}|+C$.

8.12. 1) $\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$; 2) $\frac{1}{18}(2x+7)^9+C$; 3) $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-$
$-27\ln|x+3|+C$; 4) $-\frac{(x+1)^{-10}}{10}-\frac{(x+1)^{-11}}{11}+C$;
5) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{4}+C$; 6) $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+8}\right|+C$; 7) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}+C$;
8) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x+5}{1-3x}\right|+C$.

8.13. 1) $\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1}+C$; 2) $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C$; 3) $\ln|3x^2+7x+4|+C$;
4) $\ln|x^3-x+1|+C$; 5) $\frac{1}{42}\ln(7x^6+1)+C$;
6) $-\frac{1}{90(3+5x^3)^6}+C$; 7) $\frac{1}{8}\operatorname{arctg} x^8+C$;
8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$.

8.14. 1) $-\frac{2}{15}(2-5x)^{3/2}+C$; 2) $\frac{3}{2}(1+x)^{2/3}+C$;
3) $\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{2x+3}+C$; 4) $-\frac{2}{15}(3x^2+8x+32)\sqrt{2-x}+C$;
5) $\arcsin\frac{x-3}{6}+C$; 6) $\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+7})+C$;
7) $\arcsin(2x-1)+C$; 8) $\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$;
9) $\frac{1}{9}(3x^2-1)^{3/2}+C$; 10) $\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}+C$.

8.15. 1) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{4}e^{x^4}+C$;
3) $x-\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})+C$; 4) $2e^{\sqrt{x}}+C$;

5) $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$; 6) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$.

8.16. 1) $9\sin\frac{x}{9}-\frac{\cos 7x}{7}+C$; 2) $-\frac{\cos(\omega t+\varphi)}{\omega}+C$;
3) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$; 4) $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 11x}{22}+C$;
5) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$; 6) $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$;
7) $\frac{\cos\varphi}{2}t-\frac{\sin(\omega t+\varphi)}{4\omega}+C$; 8) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$;
9) $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$; 10) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$;
11) $-\frac{\cos^6 x}{6}+C$; 12) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;
13) $\ln|\sin x|+C$; 14) $-\frac{3}{4}(1+\cos x)^{4/3}+C$;
15) $-e^{\cos x}+C$; 16) $-2\cos\sqrt{x}+C$.

8.17. 1) $\frac{\ln^3 x}{3}+C$; 2) $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C$;
3) $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$; 4) $\frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 2x)^{3/2}+C$;
5) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x+C$; 6) $-\frac{2}{3}(\arccos x)^{3/2}+C$.

8.18. 1) $3\ln|x-3|-2\ln|x-2|+C$; 2) $\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$;
3) $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;
4) $x+\frac{9}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$.

8.19*. 1) $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x}+C$; 2) $\frac{x\ln 2-1}{\ln^2 2}2^x+C$;
3) $\sin x-x\cos x+C$; 4) $\frac{x}{5}\sin(5x-7)+\frac{1}{25}\cos(5x-7)+C$;
5) $\left(\frac{3}{2}x^2-4x\right)\ln x-\frac{3}{4}x^2+4x+C$;
6) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 7) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;
8) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

8.20*. 1) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$; 2) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$;
3) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$;
4) $x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x+C$;
5) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)e^x+C$; 6) $\frac{\sin 2x-5\cos 2x}{13\sqrt{2}}e^{3x}+C$.

8.21*. 1) $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$; 2) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$;

3) $2(2-x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$;

4) $(\ln\ln x-1)\ln x+C$; 5) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$;

6) $\frac{1}{2}\left(x^2\arccos\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-1}\right)+C$.

ГЛАВА 9

9.1. $(e-1)$ кв. ед.

9.2. $(1-\cos 1)$ кв. ед.

9.3. 1) Второй; 2) второй; 3) второй; 4) первый

9.4. 1) $\int\limits_{-1}^{x} x^2\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{x}\frac{\sin x}{x}dx+2$.

9.5. 1) 0; 2) $\sin b^2$; 3) $-\sin a^2$.

9.6. 1) 4; 2) $\frac{10}{3}$; 3) $\frac{21}{8}$; 4) $\ln 2$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

7) $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; 8) $\ln\frac{4}{3}$.

9.7. 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{28}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1; 5) 12; 6) $4-2\ln 3$;

7) $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\pi}{6}$.

9.8. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) π; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 0; 6) 0; 7) $\frac{3}{2}$; 8) $\ln\frac{4}{3}$.

9.9. 1) $\frac{e^2-1}{2}$; 2) $\frac{(e-1)^5}{5}$; 3) $\ln(1+e)$; 4) $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$.

9.10. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\ln 2$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\sin 1$.

9.11*. 1) $\frac{1}{e}$; 2) 1; 3) $\pi-2$; 4) 2; 5) $\ln 2-1$; 6) 1;

7) $\frac{\pi}{2}-1$; 8) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$.

9.12. 1) 0, если $p\neq q$; π, если $p=q$; 2) 0, если $p\neq q$; π, если $p=q$; 3) 0.

9.14. $200\sqrt{2}$.

9.16. 1) 2 кв. ед.; 2) $\frac{32}{3}$ кв. ед.; 3) $\frac{1}{4}$ кв. ед.; 4) 1 кв. ед.;

5) $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ кв. ед.; 6) $\ln 2$ кв. ед.

9.17. 0,694.

9.18. 0,995; 1.

9.19. 11.

9.20. 4.

9.21. 1) 0,09; 2) 0,67.

9.22. 0,746.

9.23. 1) 3,2413; 2) 1,1184.

ГЛАВА 10

10.1. 1) $\frac{2}{3}$ кв. ед.; 2) 36 кв. ед.; 3) 8 кв. ед.; 4) $\frac{16}{3}$ кв. ед.;

5) $(22\ln 2-6)$ кв. ед.; 6) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ кв. ед.

10.2. 1) $\frac{1}{6}$ кв. ед.; 2) 4 кв. ед.

10.3. 1) $\frac{1}{6}$ кв. ед.; 2) $\frac{9}{2}$ кв. ед.; 3) $\frac{125}{12}$ кв. ед.;

4) $\frac{9}{2}$ кв. ед.; 5) $\frac{32}{3}$ кв. ед.; 6) $\frac{8}{3}$ кв. ед.

10.4. 1) 9 кв. ед.; 2) $\frac{125}{6}$ кв. ед.; 3) $\frac{ab}{3}$ кв. ед.

10.5. 1) $\frac{77}{6}$ кв. ед.; 2) $\frac{3}{4}$ кв. ед.; 3) 36 кв. ед.; 4) $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)$ кв. ед.;

5) $\frac{16}{3}$ кв. ед.; 6) $\frac{1}{3}$ кв. ед.; 7) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ кв. ед.;

8) $(\sqrt{2}-1)$ кв. ед.; 9) $\frac{\pi}{2}$ кв. ед.; 10) $(\sqrt{2}-1)$ кв. ед.

10.6. $\frac{9}{2}$ кв. ед.

10.7. 9 кв. ед.

10.8. $\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$ кв. ед.

10.9. $\frac{265}{3}$ м.

10.10. 42 м.

10.11. 32 м.

10.12. 5 с.

10.13. $a=20$.

10.14. 19 м.

10.15. 122,375 м.

10.16. $\left(8R+\frac{16a}{3}\right)$ м.

10.17. 2,45 МН.

10.18. $\frac{a+2b}{6}h^2$, 523 МН.

10.19. 1,4 МН.

10.20. 1,8 МН, 1,35 МН.

10.21. $\frac{ah^2}{2}$.

10.22. 1724,8 Н.

10.23. 39 Дж.

10.24. 0,16 Дж.

10.25. 0,54 Дж.

10.26. $e_0 e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

Мечислав Игнатьевич Каченовский,
Юрий Михайлович Колягин,
Александр Дмитриевич Кутасов,
Геннадий Лаврович Луканкин,
Вачаган Арташесович Оганесян,
Геннадий Николаевич Яковлев

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 1

Редактор **Т. А. Панькова**
Художественный редактор **Т. Н. Кольченко**
Технический редактор **А. П. Колесникова**
Корректоры **Г. В. Подвольская, Н. Б. Румянцева**

ИБ № 32325

Сдано в набор 23.12.86. Подписано в печать 05.06.87. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Печать высокая. Усл. печ. л. 24,36. Усл. кр.-отт: 24,57: Уч:-изд: л: 25,56: Тираж 370 000 экз. (1-й завод 1—150 000 экз.). Заказ № 7841. Цена 95 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первой Образцовой типографии» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано в типографии издательства «Коммуна», г. Воронеж, проспект Революции, 39.

Математика для техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть I