

А. Е. КАПЛЯНСКИЙ, А. П. ЛЫСЕНКО, Л. С. ПОЛОТОВСКИЙ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Под редакцией  
докт. техн. наук  
проф. А. Е. Каплянского

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов электротехнических  
и энергетических высших учебных заведений  
и факультетов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Москва — 1972

6П 2.1

К 20

УДК 6 21.3

Каплянский А. Е. и др.

К 20

Теоретические основы электротехники. Изд. 2-е. Учеб пособие для электротехнических и энергетических специальностей вузов. М., «Высшая школа», 1972.

448 с. с илл.

Перед загл. авт.: А. Е. Каплянский, А. П. Лысенко,  
Л. С. Подотовский

В книге рассматриваются элементы электрических цепей, их линейные и нелинейные параметры, основы теории источников и приемников, осуществляющих взаимное преобразование электромагнитной и механической энергии. Излагаются теория линейных и нелинейных цепей с сосредоточенными параметрами при постоянном и переменном токе, при переходных процессах, установившихся и переходные процессы в цепях с распределенными параметрами и теория постоянного и переменного электромагнитного поля.

3-3-8

6П2.1

96-72

*Рецензенты:*

Профессор  
Московского энергетического  
института,  
докт. техн. наук  
В. Е. Боголюбов

Кафедра теоретической  
электротехники  
Уральского политехнического  
института  
им. С. М. Кирова

Во втором издании предлагаемой книги авторы по-прежнему ставили себе задачу создать учебное пособие, отражающее современное состояние теоретической электротехники и соответствующее утвержденной программе курса.

Краткость изложения материала достигнута благодаря широкому использованию аналогий между полями и цепями различной физической природы, применению более простых выводов и доказательств, а также за счет исключения некоторых вопросов, входящих в программу специальных электротехнических и радиотехнических курсов, например технической электроники.

Большое внимание уделено связи теории с практикой — в самом общем виде рассмотрены электроизмерительные приборы различных систем, электрические машины, линии передачи, кабели, экраны и т. д. Изучение материала по электроизмерительной технике повысит качество лабораторных работ по теоретической электротехнике, проводимых до изучения курса электрометрии, но основанных на измерении электрических величин.

Первая часть книги посвящена элементам электрических и магнитных цепей — параметрам линейных и нелинейных цепей, источникам и приемникам, осуществляющим прямое и обратное преобразование механической энергии в электрическую. Здесь в инженерном аспекте используются и, следовательно, повторяются известные из курса физики законы электромагнетизма и физическая сущность указанных элементов цепей.

Во второй части книги излагаются методы расчета установившихся процессов в линейных цепях постоянного тока с сосредоточенными параметрами. Это концентрирует внимание учащегося именно на изучении методов расчета цепей в отличие от одновременного рассмотрения физической сущности и расчета цепей переменного тока.

Затем излагаются методы расчета нелинейных цепей постоянного тока. Это дает методические преимущества и сокращает объем по сравнению с распространенным сейчас изложением сравнительно простого раздела нелинейных цепей постоянного тока после изучения установившихся и переходных процессов в линейных цепях постоянного и переменного тока с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В аналогичной последовательности излагаются теория и расчет линейных и нелинейных магнитных цепей при постоянном потоке.

В третьей части книги, посвященной цепям переменного тока, выдержан тот же принцип — сначала излагаются теория и расчеты периодических процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, а на их основе — в нелинейных цепях. Затем в той же последовательности изучаются переходные процессы в этих цепях.

По сравнению с первым изданием расширены разделы нелинейных цепей с рассмотрением запоминающих элементов вычислительной техники, дана теория импульсного интеграла Дюамеля и обобщенная теория линейных цепей — их расчет методами определителей, матриц, ненаправленных и направленных графов. Расширен раздел синтеза электрических цепей — изложены методы цепных и простых дробей.

После теории цепей с сосредоточенными параметрами излагаются установившиеся и переходные процессы в цепях с распределенными параметрами.

Четвертая часть учебника посвящена теории электромагнитного поля. Рассмотрение методов расчета постоянных полей, независимо от их природы по виду уравнений, позволило значительно сократить объем этого раздела. Затем излагается теория переменного электромагнитного поля и на ее основе излучение волн, их распространение и поверхностный эффект. Изложен ряд новых вопросов, пока не входящих в программу курса ТОЭ. К ним относятся электромагнитное экранирование, переходные процессы в электромагнитном поле, электромагнитное поле в движущихся средах и основы магнитогидродинамики, являющиеся теоретической базой новых направлений электротехники — импульсной техники, прямого преобразования тепловой энергии в электрическую в магнитогидродинамических генераторах, электрореактивных двигателей, исследования околоземного и космического пространства и т. п.

Автором первой части книги является канд. техн. наук, доц. Л. С. Полотовский, второй и третьей — докт. техн. наук, проф. А. Е. Каплянский, четвертой — Л. С. Полотовский (главы 21, 26—30 и 32) и докт. техн. наук, проф. А. П. Лысенко (главы 22—25 и 31).

Авторы благодарят докт. техн. наук, проф. А. М. Бамдаса и канд. техн. наук, доц. О. Е. Гольдина за критические замечания по первому изданию, а также выражают признательность рецензентам рукописи второго издания — докт. техн. наук, проф. В. Е. Боголюбову, канд. техн. наук, доц. Ю. Е. Нитусову и кафедре теоретической электротехники Уральского политехнического института им. С. М. Кирова, руководимой докт. техн. наук, проф. А. А. Янко-Триницким, за ценные указания, способствовавшие улучшению книги.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания, особенно связанные с опытом использования учебного пособия в преподавании, посланные по адресу: г. Москва, К-51, Неглинная. 29/14, издательство «Высшая школа».

*Авторы*

## ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЕЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Одной из основных задач техники является преобразование природных энергетических запасов в используемые виды энергии — в механическую, тепловую, световую и т. п., что требует транспортировки энергетического сырья к месту его использования.

Электрическая энергия легко передается на большие расстояния и с высоким коэффициентом полезного действия преобразуется в другие виды энергии. Общеизвестным является преобразование природных энергетических запасов в электрическую энергию с помощью так называемых генераторов и ее передача посредством проводов к месту потребления, где в преобразователях и приемниках она преобразуется в нужный вид энергии. Беспроводная передача энергии осуществляется с помощью радиосвязи.

Преимущества генерирования, передачи, распределения и преобразования электрической энергии обеспечили широкое применение электротехники.

Новые производственные отношения в нашей стране, отсутствие частной собственности на запасы энергетического сырья, средства и орудия производства, государственное планирование являются мощным фактором развития электротехники и всеобъемлющего охвата ею всех отраслей нашего народного хозяйства, быта и культуры.

Составленный под руководством В. И. Ленина план ГОЭЛРО строительства 30 электростанций общей мощностью 1,75 млн. *квт* был выполнен в решающих позициях за 10 лет.

В послевоенные годы электрификация СССР развивается невиданными темпами: в 1960 г. мощность электростанций составила 66,7 млн. *квт*, а за пятилетку 1966—1970 гг. введены 54 млн. *квт*, в том числе самая мощная в мире Красноярская гидроэлектростанция (6 млн. *квт*) и Белоярская атомная электростанция (600 тыс. *квт*). В Директивах XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 гг. предусмотрено ввести в действие электростанции мощностью 65—67 млн. *квт*, в том числе 6—8 млн. *квт* на атомных электростанциях. Соответственно увеличилась и увеличится мощность потребителей — устройств, преобразующих электрическую энергию в другие виды.

Электрическая энергия — это энергия электромагнитного поля, являющегося видом материи. Поле имеет две составляющие — электрическое и магнитное поля, что можно показать на примере линии передачи постоянного тока (рис. В. 1). При передаче энергии провода линии, изолированные друг от друга, находятся под напряжением  $U$ . Следовательно, между проводами возникает электрическое поле, изображенное пунктиром на рис. В.1 в виде силовых линий. В проводах про-

текает ток  $I$ , следовательно, в проводах и вне их создается магнитное поле, показанное сплошными линиями. На рис. В.1 видно характерное различие между электрическим и магнитным полями: силовые линии электрического поля незамкнуты, они начинаются и оканчиваются на заряженных проводах; магнитные силовые линии всегда замкнуты; они не имеют ни начала, ни конца.

Как известно из курса физики, электрическое поле в каждой точке характеризуется вектором напряженности  $E$ , равным силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в эту точку, и вектором электрического смещения  $D = \epsilon E$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды.

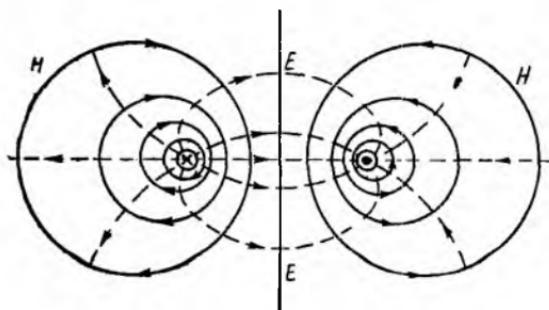


Рис. В.1

Электрическое поле в проводящей среде создает ток, характеризуемый в каждой точке поля вектором плотности тока

$$\delta = \gamma E,$$

где  $\gamma$  — удельная проводимость среды. Ток сопровождается появлением магнитного поля и переходом части энергии электромагнитного поля в тепло, причем мощность этого процесса в единице объема

$$P_0 = E\delta = \gamma E^2.$$

Магнитное поле в каждой точке характеризуется вектором магнитной индукции  $B$ , величина которого равна силе, действующей на движущийся единичный положительный заряд, скорость которого равна единице, а направление  $B$  — перпендикулярно этой силе и скорости, а также вектором напряженности

$$H = \frac{B}{\mu},$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

Передача, генерирование, преобразование и потребление электрической энергии, равной  $\int U I dt$  (где  $t$  — время), возможны лишь при наличии электрического и магнитного полей, т. е. при существовании электромагнитного поля. Примером могут служить рассмотренные поля линии электропередачи. При беспроводной передаче движение энергии также связано с существованием электромагнитного поля в пространстве между передающей и приемной антеннами.

В науке об электричестве связь электрических и магнитных явлений была установлена в двадцатых годах прошлого века, когда Ампер и Эрстед доказали, что электрический ток сопровождается возникновением магнитного поля; окончательно связь электрического и

магнитного поля была подтверждена Фарадеем, открывшим явление электромагнитной индукции (1831 г.).

Электротехника, зародившаяся в тридцатых годах прошлого века, вначале развивалась как техника постоянного тока. Только после создания М. О. Доливо-Добровольским системы трехфазного тока и трехфазного двигателя (1891 г.) переменный ток стал вытеснять постоянный. Передача электрической энергии стала осуществляться также трехфазным током.

Теория электромагнитного поля в законченной математической форме была создана Максвеллом в 1873 г. Подтвержденная многочисленными опытами ряда ученых, она была окончательно принята в начале нашего века.

Введенное Максвеллом представление об электромагнитных волнах, экспериментально подтвержденное работами Герца, позволило А. С. Попову в 1895 г. осуществить передачу сигнала без проводов, что послужило началом новой области электротехники — радиотехники.

Электротехника и ее теоретические основы непрерывно развиваются. Например, совершенствуются электронные, ионные и полупроводниковые приборы и аппараты, с помощью которых осуществляют прямые и обратные преобразования переменного тока в постоянный, усиление напряжения и мощности и создают электронные вычислительные машины. Увеличивается дальность и возможности проводной связи, радиотехники и телевидения, развивается электроавтоматика, в энергетике осуществляется переход к большим напряжениям (1500 кв) и мощностям генераторов (1 200 000 квт и выше), разрабатываются и испытываются магнитогиродинамические прямые преобразователи тепловой энергии в электрическую и т. д.

Так как все электротехнические устройства основаны на использовании электромагнитного поля их систем, состоящих из заряженных тел и контуров с токами, для решения многих задач необходимо привлечение теории этого поля со сложными математическими зависимостями. Однако в большинстве устройств используются ограниченные пути электрического тока и магнитного потока — изолированные проводники малого сопротивления и магнитопроводы из материала с высокой магнитной проницаемостью, называемые **э л е к т р и ч е с к и м и** и **м а г н и т н ы м и** **ц е п я м и**. Их расчеты могут быть значительно упрощены, так как не требуют знания составляющих поля в каждой точке устройств. Теория этих цепей основана на использовании интегральных величин: напряжения  $U = \int E dl$ , заряда  $Q = \int D dS$ , тока  $I = \int \delta dS$ , магнитного потока  $\Phi = \int B dS$ , намагничивающей силы (н. с.)  $F = \int H dl$  ( $l$  — длина,  $S$  — площадь) взамен **Е**, **D**,  $\delta$ , **H** и **B**, характеризующих поле. Взамен характеристик среды  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  используются интегральные характеристики носителей поля: электрического — емкость  $C = \frac{Q}{U}$ , магнитного — индуктивность  $L = \frac{\Psi}{I}$  ( $\Psi$  потокосцепление), а также преобразователя энергии поля

в тепловую энергию — сопротивление  $R = \frac{U}{I}$ . Эти величины можно называть параметрами цепей.

Если эти параметры не зависят от токов и напряжений, уравнения теории цепей, связывающие интегральные величины, будут линейными; такие цепи называют линейными. В ряде случаев, весьма важных для современной электротехники, эти параметры являются функциями напряжений и токов; тогда уравнения и цепи становятся нелинейными.

Осуществление грандиозных планов дальнейшей электрификации нашей страны, эксплуатация существующих и создание новых электротехнических устройств требуют от инженера-электрика глубокого понимания физических процессов и умения производить их технический расчет. Фундаментом электротехнического образования является курс теоретических основ электротехники (ТОЭ), базирующийся на сведениях, сообщенных в курсах физики, математики и механики.

Настоящее учебное пособие ТОЭ построено в соответствии с изложенным. Вначале даны параметры цепей, потом основы теории источников и приемников электрической энергии. Затем следует анализ электрических и магнитных цепей при постоянном и переменном токе — линейных и на их основе нелинейных. Курс завершается теорией постоянного и переменного электромагнитного поля.

В книге принята Международная система единиц СИ и рационализованная форма написания уравнений, предложенная Хевисайдом, в которой основные соотношения для электрического и магнитного полей имеют симметричный вид, а множители  $4\pi$  и  $2\pi$  входят лишь в те соотношения, где они соответствуют характеру симметрии — сферической ( $4\pi$ ) и осевой ( $2\pi$ ).

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НИХ

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

#### § 1.1. Общие определения цепей и их параметров

Электрической цепью называется совокупность устройств, состоящая из источников, преобразователей и приемников электрической энергии и соединяющих их проводов, образующих замкнутые пути для электрического тока.

Часть цепи, не содержащая источников электрической энергии, называется п а с с и в н о й, а часть цепи, содержащая источники, называется а к т и в н о й.

Как было показано во введении на примере линии передачи, электрическая цепь характеризуется тремя параметрами: сопротивлением  $R$ , емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ . Этими параметрами обладают все элементы цепей, например резисторы, в которых основную роль играет их сопротивление, конденсаторы с основным параметром — емкостью, и катушки индуктивности, в которых основной является их индуктивность.

Из изложенного во введении очевидно, что параметры линии передачи равномерно распределены по всей длине линии. Параметры распределены также в отдельных элементах цепи. Например, в катушке индуктивности сопротивление, индуктивность и емкость распределены по ее длине, так как каждый виток с током имеет сопротивление и создает магнитное поле, а отдельные витки изолированного проводника обладают друг по отношению к другу некоторой емкостью.

Этим свойством обладают все реальные электрические цепи — они являются цепями с р а с п р е д е л е н н ы м и п а р а м е т р а м и.

Так как в ряде технически важных задач не требуется знания электромагнитных процессов в каждой точке всей цепи и ее элементов, необходимо учесть только их интегральные свойства; такие цепи могут быть представлены в виде цепей с с о с р е д о т о ч е н н ы м и п а р а м е т р а м и, состоящих из сопротивлений, индуктивностей и емкостей. Например, катушка индуктивности может быть представлена в виде схемы с последовательным соединением сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и с параллельно подключенной к ним емкостью  $C$ .

При включении цепи на постоянное напряжение в течение короткого времени от источника потребляется энергия на создание электромагнитного поля. После этого запасенная в  $C$  и  $L$  энергия сохраняет свою величину неизменной и не отражается на работе цепи, а источ-

ники доставляют энергию только на покрытие тепловых потерь в сопротивлениях. Поэтому при расчете цепей постоянного тока следует учитывать только сопротивление  $R$ . В цепях переменного тока энергия, запасаемая в  $C$  и  $L$ , и мощность потерь в  $R$  непрерывно изменяются. Поэтому при расчете этих цепей необходимо учитывать все три параметра.

Многие электрические цепи нелинейны. Так, например, температура, а следовательно, и сопротивление проводника при прохождении по нему тока изменяются; индуктивность катушки со стальным сердечником зависит от тока, так как с величиной тока будет меняться магнитная проницаемость  $\mu$  сердечника, а следовательно, и индуктивность  $L$ . Однако в большинстве случаев цепи можно рассматривать как линейные, считая параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  постоянными.

В устройствах современной электротехники главным образом используется энергия магнитного поля, поэтому их основным параметром является индуктивность  $L$ . Для этих устройств вводится понятие магнитной цепи как совокупности тел, большей частью ферромагнитных, в которых создается магнитный поток.

При постоянном токе методы анализа магнитных цепей аналогичны методам расчета электрических цепей, содержащих лишь один параметр — сопротивление  $R$ . Его аналогом в магнитных цепях является магнитное сопротивление  $R_m$ .

Эта глава посвящена элементарным методам расчета параметров устройств, поля которых имеют простые виды симметрии. Более сложные случаи рассматриваются в теории электромагнитного поля.

## § 1.2. Емкость и ее расчет

### 1. Емкость

Для электрических цепей наибольший интерес представляет система двух проводящих тел в диэлектрической среде, заряды  $+Q$  и  $-Q$  которых отличаются только знаком, являющаяся по существу конденсатором. Емкость конденсатора равна отношению его заряда  $Q$ , под которым понимается абсолютное значение разноименных зарядов, к напряжению  $U$  между обкладками:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Емкость конденсатора, определяемая размерами и формой тел и их взаимным расположением, пропорциональна диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды между обкладками. Емкость измеряется в фарадах ( $\phi$ ), заряд в кулонах ( $k$ ), напряжение в вольтах ( $\phi$ ).

Для расчета емкости конденсатора по заряду и напряжению необходимо предварительно рассчитать его электрическое поле, исходя из общих соотношений для электрического поля.

Связь между зарядом и вектором смещения  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  определяется обобщенной теоремой Гаусса:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint \epsilon \mathbf{E} d\mathbf{S} = Q,$$

справедливой для линейных и нелинейных сред и являющейся основным соотношением для электрического поля. В правой части этого равенства стоит суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности, в левой — поток вектора смещения. Смещение измеряется в  $\kappa/\text{м}^2$ , напряженность электрического поля — в  $\text{в}/\text{м}$ , диэлектрическая проницаемость в  $\text{ф}/\text{м}$ .

Поле в каждой точке характеризуется потенциалом  $\varphi$ ; его производная по любому направлению со знаком минус равна составляющей напряженности поля по этому направлению.

Напряжение  $U_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$ , имеющими потенциалы  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ , равно:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Потенциал также измеряется в вольтах.

Так как сумма напряжений по замкнутому пути равна нулю, то

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

что является вторым основным соотношением для электрического поля.

## 2. Емкость коаксиального кабеля

Коаксиальный кабель представляет собой два проводящих соосных цилиндра с радиусом внутреннего цилиндра  $r_1$ , внутренним радиусом внешнего цилиндра  $r_2$ , длиной цилиндров  $l$  (рис. 1.1). Пусть внутрен-

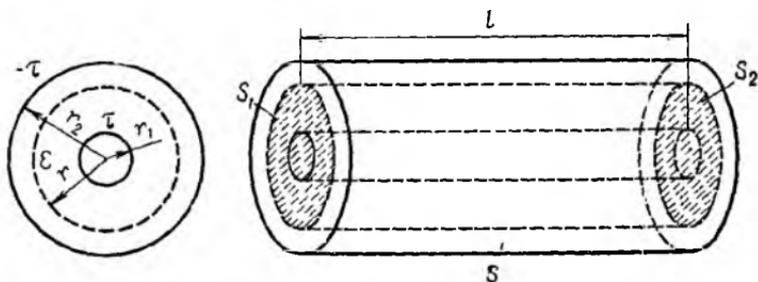


Рис. 1.1

ний цилиндр — жила кабеля — заряжен положительно и изолирован диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  от оболочки — обратного провода, являющегося внешним цилиндром и несущим заряд обратного знака, а напряжение между жилой и оболочкой равно  $U$ .

При выполнении условия  $l \gg r_2$ , можно пренебречь искажением поля у концов кабеля и считать, что заряды распределены равномерно

с линейной плотностью  $\tau = \frac{Q}{l}$ , а векторы напряженности поля и смещения направлены в каждой точке по радиусу и зависят от его величины;  $\tau$  измеряется в  $\kappa/м$ .

Для цилиндрической поверхности радиуса  $r$ , охватывающей заряженную жилу (на рис. 1.1 указана пунктиром), можно применить теорему Гаусса. Из-за радиального направления вектора смещения потока через основания цилиндра  $S_1$  и  $S_2$  равны нулю; остается лишь поток через боковую поверхность  $S$ .

Так как при неизменном радиусе смещение  $D$  остается постоянным, то

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_S D dS = D \int_S dS = D 2\pi r l = Q = \tau l,$$

откуда

$$D = \frac{\tau}{2\pi r} \quad \text{и} \quad E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon r}.$$

В последние выражения не входит радиус  $r_1$  жилы, благодаря чему поле вне ее может рассчитываться как поле электрической оси с тем же зарядом  $\tau$ , совпадающей с геометрической осью жилы.

Напряжение на кабеле

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi \epsilon r} dr = \frac{\tau}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

откуда емкость кабеля

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

После подстановки из предпоследнего равенства

$$\tau = \frac{2\pi \epsilon U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

в выражение для напряженности поля получим

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

т. е. напряженность поля обратно пропорциональна радиусу, а ее максимальное значение у поверхности жилы ( $r = r_1$ )

$$E_{\max} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Исследование на минимум показывает, что наименьшее значение максимальной напряженности при заданных напряжении и радиусе  $r_2$

внешней оболочки будет при

$$\frac{\partial E_{\max}}{\partial r_1} = -U \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} - 1}{\left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2} = 0,$$

т. е. при  $\frac{r_2}{r_1} = e = 2,718 \dots$ , так как вторая производная больше нуля.

При таком соотношении радиусов кабель, очевидно, обладает наибольшей электрической прочностью.

### 3. Емкость двухпроводной линии

Широко используемые в электротехнике двухпроводные линии передачи представляют собой систему двух прямых параллельных проводов кругового сечения (рис. 1.2). Провода оказываются заряженными разноименно, когда линия включена на напряжение.

Так как длина проводов  $l$  велика по сравнению с расстоянием  $d$  между их осями, искажением электрического поля у концов заряженных проводов можно пренебречь. Поэтому распределение поля в пространстве остается неизменным в любой плоскости, перпендикулярной осям проводов.

Пусть двухпроводная линия подвешена настолько высоко,

что влиянием земли можно пренебречь. Напряжение на линии равно  $U$ , величина заряда на единицу длины —  $\tau$ , радиус проводов —  $r_0$ .

В отличие от коаксиального кабеля, где вследствие равномерного распределения заряда по поверхности жилы ее электрическая ось совпадает с геометрической, плотность зарядов на проводах линии больше на частях их поверхностей, обращенных друг к другу из-за притяжения разноименных зарядов. Поэтому расстояние между электрическими осями проводов становится тем меньше расстояния между их геометрическими осями, чем меньше отношение  $\frac{d}{r_0}$ .

Для воздушных линий  $d \gg r_0$ , и электрические и геометрические оси можно считать совпадающими. В точке  $M$ , лежащей на линии центров сечений проводов на расстоянии  $r$  от оси левого провода, напряженности поля, создаваемые каждым из проводов, совпадают по направлению, поэтому суммарная напряженность в этой точке

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 (d-r)},$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость воздуха, а напряжение между ближайшими точками  $M_1$  и  $M_2$  на поверхностях проводов

$$U = \int_{M_1}^{M_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{d-r_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r} \right) dr = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

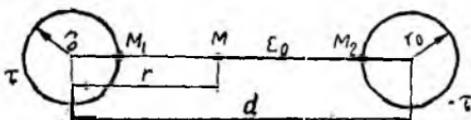


Рис. 1.2

Отсюда емкость двухпроводной воздушной линии

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi l}{U} = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d-r_0}{r_0}} \approx \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{r_0}} \quad (1.1)$$

### § 1.3. Взаимоемкость и ее расчет

#### 1. Взаимоемкость

Для многих технических задач представляет интерес рассмотрение электрического поля, созданного системой нескольких пар разноименно заряженных тел. Заряды этих тел и напряжения связаны между собой линейными уравнениями.

В системе из двух конденсаторов (1-1' и 2-2' на рис. 1.3) все четыре тела связаны электрическим полем, поэтому заряд каждого из конденсаторов зависит от их напряжений  $U_1$  и  $U_2$ ; поле на рис. 1.3 показано для случая, когда потенциал тела 1 больше потенциалов тел 2 и 2', а последние больше потенциала тела 1'. Если заряд одного конденсатора, обусловленный напряжением второго, совпадает по знаку с зарядом, создаваемым собственным напряжением, суммарные заряды обоих конденсаторов будут:

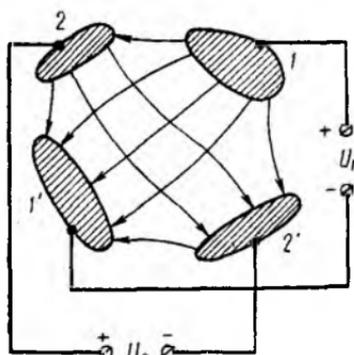


Рис. 1.3

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_1 U_1 + C_{12} U_2, \\ Q_2 &= C_2 U_2 + C_{21} U_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — собственные емкости конденсаторов;  
 $C_{12}$  — взаимоемкость между первым и вторым конденсатором;  $C_{21}$  — между вторым и первым; можно показать, что  $C_{12} = C_{21}$ .

Собственные емкости конденсаторов

$$C_1 = \left( \frac{Q_1}{U_1} \right)_{U_2=0} \quad \text{и} \quad C_2 = \left( \frac{Q_2}{U_2} \right)_{U_1=0}$$

определяются всеми четырьмя телами системы и отличаются от емкости каждого из этих конденсаторов, определенной при отсутствии другого.

При определении емкости  $C_1$  условие  $U_2 = 0$  означает, что второй конденсатор замкнут накоротко; при этом под воздействием поля первого конденсатора обкладки второго получили разноименные заряды. Соответственно, при определении  $C_2$  накоротко замыкается первый конденсатор.

Взаимоемкость

$$C_{12} = \left( \frac{Q_1}{U_2} \right)_{U_1=0} = C_{21} = \left( \frac{Q_2}{U_1} \right)_{U_2=0}$$

т. е. равна отношению заряда на обкладках накоротко замкнутого одного конденсатора, когда его заряд создается напряжением другого, к этому напряжению.

Взаимоемкость определяется конфигурацией тел, образующих конденсаторы, их взаимным расположением и пропорциональна диэлектрической проницаемости среды.

При несовпадении знаков собственных зарядов, обусловленных емкостью, и взаимных зарядов, обусловленных взаимоемкостью, знак перед вторыми членами в выражениях (1.2) будет отрицательным. Взаимоемкость также измеряется в фарадах ( $\phi$ ).

Для системы многих конденсаторов, соответственно, заряд  $Q_k$  конденсатора  $k$  определяется всеми напряжениями:

$$Q_k = C_k U_k + \sum_{k \neq p} C_{kp} U_p,$$

где  $C_k$  — собственная емкость конденсатора  $k$ ;

$C_{kp} = C_{pk}$  — взаимоемкость между конденсаторами  $k$  и  $p$ .

Взаимоемкость между конденсаторами  $k$  и  $p$  равна отношению заряда конденсатора  $k$ , созданного напряжением конденсатора  $p$ , к этому напряжению. При этом все конденсаторы, кроме  $p$ -того, замкнуты накоротко.

## 2. Взаимоемкость двух параллельных двухпроводных линий

Примером системы из четырех тел, рассматриваемой как совокупность двух конденсаторов, могут служить две параллельные линии, расположенные симметрично одна над другой (рис. 1.4). Пусть радиус проводов  $r_0$ , расстояния между проводами в каждой линии  $d_1$  и  $d_2$ , расстояние между плоскостями обеих линий  $d$ , длина линий  $l \gg r_0$ .

Заряды на проводах первой линии замкнутой накоротко ( $U_1 = 0$ ) можно найти как разность зарядов, создаваемых напряжением  $U_2$  через емкости  $C_a$  между парами проводов на одной стороне линий с расстоянием между этими проводами  $a = \sqrt{\frac{(d_2 - d_1)^2}{4} + d^2}$  и  $C_b$  между парами противоположащих проводов с расстоянием  $b = \sqrt{\frac{(d_2 + d_1)^2}{4} + d^2}$ . Каждая из пар одинаковых емкостей соединена последовательно и их общая емкость вдвое меньше.

Тогда, соответственно формуле (1.1), получается

$$(Q_1)_{U_1=0} = \frac{\pi \epsilon_0 l}{2 \ln \frac{a}{r_0}} U_2 - \frac{\pi \epsilon_0 l}{2 \ln \frac{b}{r_0}} U_2 = \frac{\pi \epsilon_0 l}{2} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{a}{r_0} \ln \frac{b}{r_0}} U_2.$$

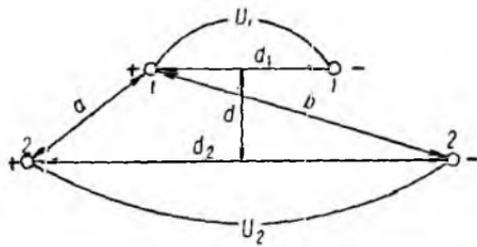


Рис. 1.4

Поэтому взаимемкость

$$C_{12} = \frac{(Q_1)_{U_1=0}}{U_2} = \frac{\pi \epsilon_0 l}{2} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{a}{r_0} \ln \frac{b}{r_0}},$$

а собственная емкость первой линии при учете второй линии равна

$$C_1 = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d_1}{r_0}} + \frac{\pi \epsilon_0 l}{2} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{a}{r_0} \ln \frac{b}{r_0}}.$$

Такая задача представляет технический интерес, позволяя определить влияние линии передачи 2 на линию связи 1 (рис. 1.4). Это влияние состоит в наведении на проводах линии связи заряда взаимемкости  $C_{12}U_2$ . Так как отношение этого заряда к собственному заряду  $C_1U_1$  равно

$$\frac{C_{12}U_2}{C_1U_1} = \frac{\ln \frac{d_1}{r_0} \ln \frac{\sqrt{(d_2+d_1)^2+d^2}}{\sqrt{(d_2-d_1)^2+d^2}}}{2 \ln \frac{\sqrt{(d_2-d_1)^2+d^2}}{2r_0} \ln \frac{\sqrt{(d_2+d_1)^2+d^2}}{2r_0} + \ln \frac{d_1}{r_0} \ln \frac{\sqrt{(d_2+d_1)^2+d^2}}{\sqrt{(d_2-d_1)^2+d^2}}} \cdot \frac{U_2}{U_1},$$

а напряжение  $U_2$  линии передачи во много раз превышает напряжение  $U_1$  линии связи, то для уменьшения наведенного заряда необходимо увеличивать расстояние  $d$  между линиями и уменьшать расстояние  $d_1$  между проводами линии связи.

## § 1.4. Линейные и нелинейные диэлектрики и конденсаторы

### 1. Общие сведения

В линейных диэлектриках диэлектрическая проницаемость не зависит от напряженности поля и характеристика  $D(E) =$

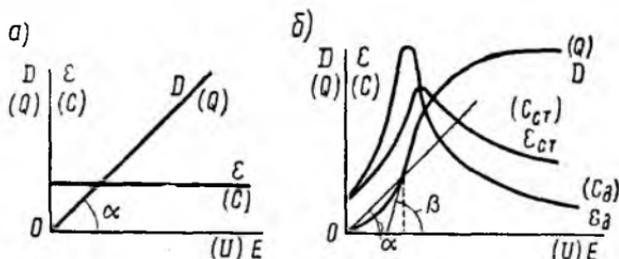


Рис. 1.5

$= \epsilon E$  для них изображается прямой линией (рис. 1.5, а). Тогда

$$\epsilon = \frac{D}{E} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

т. е. диэлектрическая проницаемость пропорциональна тангенсу угла наклона  $\alpha$  этой прямой; коэффициент  $k$  равен отношению масштабов по осям ординат и абсцисс.

Для линейных диэлектриков, к которым относится большинство используемых в технике материалов, диэлектрическая проницаемость лишь в несколько раз больше диэлектрической постоянной

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ (ф/м),}$$

равной диэлектрической проницаемости вакуума.

У большинства нелинейных диэлектриков проницаемость очень велика ( $\epsilon \gg \epsilon_0$ ) и зависит от напряженности поля. Первым из подобных материалов была сегнетова соль, детально исследованная в 1930—1934 гг. И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко и давшая название этой группе диэлектриков — сегнетоэлектрики.

Для образца, впервые подвергающегося воздействию электрического поля, зависимость  $D(E)$  — кривая первоначальной поляризации — представлена на рис. 1.5, б. Для нелинейных материалов возможны два определения диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_{ст} = \frac{D}{E} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

называемая статической проницаемостью и пропорциональная тангенсу угла  $\alpha$  наклона секущей в данной точке, и

$$\epsilon_d = \frac{dD}{dE} = k \operatorname{tg} \beta,$$

называемая дифференциальной проницаемостью и пропорциональная тангенсу угла  $\beta$  наклона касательной в той же точке. Обе величины являются функциями напряженности поля. Первая используется для расчета статических режимов при неизменном значении напряженности поля, вторая определяет изменение смещения с изменением напряженности поля и используется для расчета динамических процессов при достаточно медленных изменениях напряженности поля.

При быстрых изменениях поля характеристика  $D(E)$  называется динамической и отличается от приведенной на рис. 1.5, б статической характеристики. Проницаемость, определяемая значением производной  $\frac{dD}{dE}$  из динамической характеристики, называется динамической проницаемостью.

В периодически изменяющихся электрических полях в сегнетоэлектриках имеет место явление диэлектрического гистерезиса (рис. 1.6), заключающееся в несовпадении кривой  $D(E)$  при возрастании напряженности поля ( $abc$ ) с кривой при убывании поля ( $cda$ ). Кривая  $Oc$ , соединяющая вершины петель гистерезиса, соответствующих разной максимальной напряженности, называется основной кривой поляризации; кривая практически совпадает с кривой первоначальной поляризации. Сегнетоэлектрические свойства зависят от температуры и проявляются лишь в определенном ее интервале.

064431



Основным соотношением для конденсатора является зависимость заряда  $Q$  от напряжения  $U$ , называемая кулонвольтовой характеристикой.

В соответствии с используемым диэлектриком конденсаторы по виду кулонвольтовых характеристик делятся на линейные и нелинейные.

Кулонвольтовые характеристики  $Q(U)$  аналогичны кривым  $D(E)$ , так как  $Q \sim D$ , а  $U \sim E$ ; поэтому кривые рис. 1.5, а и б соответствуют также кулонвольтовым характеристикам при величинах, указанных в скобках.

Для нелинейных конденсаторов вводятся понятия статической емкости

$$C_{ст} = \frac{Q}{U} = k_1 \operatorname{tg} \alpha$$

и дифференциальной, а также динамической емкости

$$C_d = \frac{dQ}{dU} = k_1 \operatorname{tg} \beta,$$

являющихся функциями напряжения (см. рис. 1.5, б). Для линейных конденсаторов эти емкости совпадают.

Нелинейные конденсаторы находят все большее применение в автоматике, радиотехнике и т. д.

Аналогично нелинейным емкостям в нелинейных системах вводятся статическая взаимемкость

$$C_{12ст} = \left( \frac{Q_1}{U_2} \right)_{U_1=0}$$

и дифференциальная, а также динамическая взаимемкость

$$C_{12д} = \left( \frac{dQ_1}{dU_2} \right)_{U_1=0}.$$

## 2. Емкость плоского нелинейного конденсатора

Расчет емкости нелинейного конденсатора может быть произведен, если задана зависимость  $D(E)$  или  $\epsilon(E)$ . Так как эти зависимости теоретически не выводятся, то для приближенного решения подбирают по кривой  $D(E)$  аппроксимирующую функцию.

Далее приведен пример подобного расчета плоского конденсатора, для которого

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{и} \quad D = \frac{Q}{S},$$

где  $d$  — толщина диэлектрика;

$S$  — площадь пластин.

Пусть аппроксимирующая функция для характеристики (рис. 1.7) будет

$$D = \frac{Q}{S} = aE - bE^3,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные.

Для определения емкости, как функции напряжения, надо подставить в это уравнение  $E = \frac{U}{d}$ :

$$\frac{Q}{S} = a \frac{U}{d} - b \frac{U^3}{d^3}$$

откуда статическая емкость

$$C_{ст} = \frac{Q}{U} = \frac{S}{d} \left( a - b \frac{U^2}{d^2} \right),$$

а дифференциальная емкость

$$C_d = \frac{dQ}{dU} = \frac{S}{d} \left( a - 3b \frac{U^2}{d^2} \right).$$

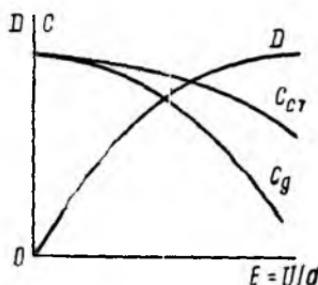


Рис. 1.7

Кривые обеих емкостей в функции напряжения представлены на рис. 1.7.

## § 1.5. Сопротивление и его расчет

### 1. Сопротивление

По закону Ома сопротивление проводящего тела равно отношению приложенного к нему напряжения  $U$  к проходящему по нему току  $I$ :

$$R = \frac{U}{I};$$

ток измеряется в амперах ( $a$ ), сопротивление — в омах ( $ом$ ).

Величина

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R},$$

т. е. обратная сопротивлению, называется проводимостью и измеряется в сименсах ( $сим$ ).

Сопротивление зависит от геометрических размеров тела и от его материала, характеризуемого удельным сопротивлением  $\rho$  [ $ом \cdot м$ ] или обратной величиной — удельной проводимостью  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  [ $сим/м$ ]. В простейшем случае проводника длиной  $l$  с постоянным сечением  $s$  его сопротивление будет

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{l}{\gamma s}.$$

В общем случае надо рассматривать сопротивление системы двух электродов, разделенных проводящей средой, с удельной проводимостью, значительно меньшей проводимости материала электродов. Для нахождения сопротивления необходимо предварительно рассчитать электрическое поле в проводящей среде исследуемой системы.

При постоянном электрическом поле в проводящей среде распределение в ней движущихся зарядов не зависит от времени, т. е. остается стационарным. Электрическое поле таких зарядов тождественно с полем неподвижных зарядов при том же распределении их в пространстве, т. е. с электростатическим полем. Поэтому электрическое поле в проводящей среде также потенциально:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

что является первым основным соотношением для этого поля.

Вторым основным соотношением является принцип непрерывности тока: сумма зарядов, входящих в любой объем, равна сумме зарядов, выходящих из него за тот же промежуток времени, т. е.

$$\oint \delta dS = 0,$$

где плотность тока  $\delta$  измеряется в  $a/m^2$ .

При расчете сопротивления сначала находят вектор напряженности поля  $\mathbf{E} = \frac{\delta}{\gamma}$  через ток  $I$ , проходящий через систему, из соотношения

$$\int \delta dS = \int \gamma \mathbf{E} dS = I.$$

По найденной напряженности поля как функции тока вычисляется напряжение между электродами  $A$  и  $B$  системы:

$$U = \int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

откуда сопротивление  $R = \frac{U}{I}$ .

## 2. Сопротивление заземления

В различных электрических установках земля часто используется в качестве проводника. Для соединения наземных устройств с землей служат заземления, состоящие из забитых в землю вертикальных металлических труб, в плане обычно занимающих площадь квадрата. В первом приближении такая группа труб эквивалентна зарытой в землю полусфере с диаметром  $2r_1$ , равным диагонали квадрата.

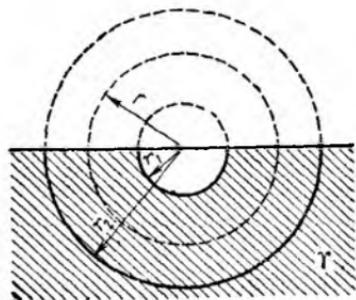


Рис. 1.8

Сопротивлением заземления является сопротивление между таким заземлителем и воображаемой концентрической с ним полусферой бесконечно большого радиуса. Тогда сопротивление заземления можно вычислять как удвоенное сопротивление между двумя концентрическими сферами радиусов  $r_1$  и  $r_2 \rightarrow \infty$ , разделенных землей с удельной проводимостью  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  (рис. 1.8). Пусть проходящий через систему ток равен  $I$ , а напряжение на электродах равно  $U$ .

Для промежуточной сферы радиуса  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) с поверхностью  $S = 4\pi r^2$  из-за сферической симметрии вектор плотности тока  $\delta$  зависит только от величины радиуса и совпадает с ним по направлению. Тогда согласно последовательности расчета сопротивления, изложенной в п. 1 § 1.5,

$$\int_S \delta dS = \int_S \delta dS = \int_S \gamma E dS = \gamma E \int_S dS = 4\pi \gamma E r^2 = I,$$

откуда

$$E = \frac{I}{4\pi \gamma r^2}.$$

Напряжение между двумя сферами

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{I}{4\pi \gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi \gamma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

а сопротивление

$$R_{сф} = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi \gamma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Таким образом, сопротивление заземления

$$R = 2(R_{сф})_{r_2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{2\pi \gamma r_1} = \frac{\rho}{2\pi r_1}.$$

### 3. Расчетная аналогия электрических полей в диэлектрической и проводящей средах

В табл. 1.1 сопоставлены соотношения, характеризующие электрическое поле в диэлектрической и в проводящей средах:

Таблица 1.1

Электрическое поле в диэлектрической среде	$U = \int E dl$	$\oint E dl = 0$	$D = \epsilon E$	$Q = \int D dS$	$\oint D dS = 0$ (если внутри поверхности $Q = 0$ )	$C = \frac{Q}{U}$
Электрическое поле в проводящей среде	$U = \int E dl$	$\oint E dl = 0$	$\delta = \gamma E$	$I = \int \delta dS$	$\oint \delta dS = 0$ (всегда)	$G = \frac{I}{U}$

Из этой таблицы видно, что если в рассматриваемом объеме сумма зарядов в диэлектрической среде равна нулю ( $\oint D dS = 0$ ), то соотношения для обоих полей математически аналогичны и одни могут быть получены из других при замене величин по табл. 1.2.

Таблица 1.2

Электрическое поле в диэлектрической среде	E	$\varphi$	U	D	$\epsilon$	Q	C
Электрическое поле в проводящей среде	E	$\varphi$	U	$\delta$	$\gamma$	I	G

Следовательно, решения ряда задач для одного вида поля могут быть использованы, как показано далее, для получения готовых решений аналогичных задач для другого вида поля. Вместе с тем следует помнить, что указанная аналогия является формальной, расчетной и не отражает различия в физических процессах. Так, в проводящей среде расходуется энергия на ее нагрев, тогда как в идеальном диэлектрике этих потерь нет.

#### 4. Сопротивление изоляции кабеля и линии передачи

Для коаксиального кабеля (см. рис. 1.1) с удельной проводимостью его несовершенной изоляции, равной  $\gamma$ , по аналогии с формулой для емкости коаксиального кабеля (п. 2 § 1.2) и на основе табл. 1.2 можно написать выражение для проводимости  $G$  изоляции этого кабеля:

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Отсюда следует, что сопротивление изоляции кабеля

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l}$$

обратно пропорционально его длине и может оказаться, что длинный кабель будет иметь относительно низкое сопротивление изоляции, несмотря на ее достаточно высокое удельное сопротивление  $\rho$ .

Для двухпроводной линии в воздухе (см. рис. 1.2) по аналогии с формулой емкости (1.1) можно написать выражение для проводимости изоляции линии при удельной проводимости воздуха  $\gamma_0$ :

$$G \approx \frac{\pi\gamma_0 l}{\ln \frac{d}{r_0}}$$

Сопротивление изоляции линии

$$R = \frac{\ln \frac{d}{r_0}}{\pi\gamma_0 l} = \frac{\rho_0 \ln \frac{d}{r_0}}{\pi l},$$

также обратно пропорционально длине линии.

### § 1. 6. Линейные и нелинейные резисторы

Основной характеристикой резистора является зависимость напряжения  $U$  от тока  $I$  — в о л т а м п е р н а я х а р а к т е р и с т и к а.

Вольтамперная характеристика линейного резистора, сопротивление которого не зависит от тока, представляет собой прямую, проходящую через начало координат (прямая  $a$  на рис. 1.9).

Для нелинейного резистора вольтамперная характеристика отлична от прямой, например кривая  $b$ ; такие резисторы характеризуются

статическим и дифференциальным, а при быстрых изменениях тока динамическим сопротивлением или обратными им проводимостями.

Статическое сопротивление (рис. 1.10)

$$R_{ст} = \frac{U}{I} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона секущей в заданной точке характеристики, а дифференциальное, а также динамическое сопротивление

$$R_{д} = \frac{dU}{dI} = k \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной в этой точке; здесь  $k$  — масштабный коэффициент. Эти сопротивления являются функциями тока или напряжения.

Примерами нелинейных резисторов могут служить лампы накаливания с нитью из вольфрама, имеющего положительный тем-

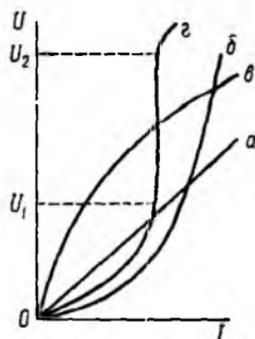


Рис. 1.9

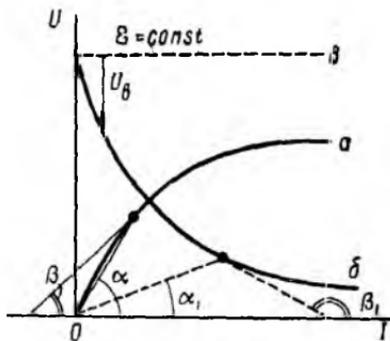


Рис. 1.10

пературный коэффициент сопротивления (см. кривую б на рис. 1.9), и из угля, температурный коэффициент сопротивления которого отрицателен (см. кривую в на рис. 1.9). Кривая г на рис. 1.9 является вольтамперной характеристикой ба р е т т е р а — железной нити, помещенной в сосуд, заполненный водородом. В определенных пределах изменения напряжения (от  $U_1$  до  $U_2$ ) ток не изменяется, что используется для стабилизации тока в цепях. Э л е к т р и ч е с к а я д у г а имеет падающую вольтамперную характеристику (см. кривую б на рис. 1.10). Важно отметить, что для падающей характеристики дифференциальное сопротивление  $R_{д} = k \operatorname{tg} \beta_1$  становится отрицательным, тогда как статическое сопротивление  $R_{ст} = k \operatorname{tg} \alpha_1$  всегда положительно.

В рассмотренных случаях вольтамперная характеристика симметрична относительно начала координат, т. е. при перемене знака напряжения и тока вид зависимости  $U(I)$  сохраняется. Примером несимметричной вольтамперной характеристики может служить характеристика полупроводникового вентиля (кривая

$a$  на рис. 1.11), пропускающего при том же значении напряжения в одном направлении большой, а в другом — малый ток. Несимметрична также характеристика двухэлектродной электронной лампы (кривая  $b$  на рис. 1.11), обратный ток которой равен нулю.

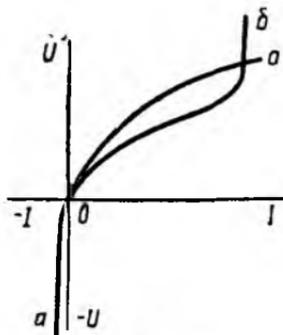


Рис. 1.11

Нелинейными являются и источники энергии, имеющие нелинейную внешнюю характеристику, т. е. зависимость напряжения от тока, например кривую  $b$  на рис. 1.10. Так как напряжение источника

$$U = \mathcal{E} - R_{в}I = \mathcal{E} - U_{в},$$

(где  $\mathcal{E}$  — его э. д. с., а  $U_{в}$  — падение напряжения на внутреннем сопротивлении  $R_{в}$ ), можно считать, что э. д. с. источника постоянна и равна напряжению при  $I = 0$ , а  $R_{в}$  — нелинейно. Вольтамперной характеристикой  $U_{в}(I)$  внутреннего сопротивления источника является, очевидно, та же кривая, но ординаты ее должны отсчитываться вниз от горизонтали  $\mathcal{E} = \text{const}$  до внешней характеристики.

Рис. 1.11

## § 1.7. Индуктивность и ее расчет

### 1. Индуктивность

Основным соотношением для магнитного поля является принцип непрерывности магнитного потока:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

т. е. поток, входящий внутрь замкнутой поверхности, равен потоку, выходящему из нее, поэтому линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты, не имея ни начала, ни конца.

Магнитное поле контура с током характеризуется его потокосцеплением  $\Psi$ , равным сумме произведений магнитного потока  $\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$  на число витков  $\omega_k$  контура, сцепляющегося с этим потоком:

$$\Psi = \sum \omega_k \Phi_k.$$

На рис. 1.12,  $a$  и  $b$  проиллюстрировано различие между потоком и потокосцеплением, причем число линий в условном масштабе равно величине потока.

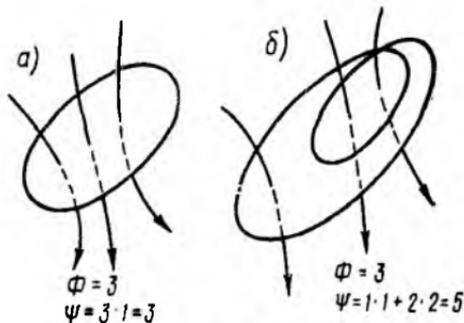


Рис. 1.12

Индукция измеряется в тесла ( $тл$ ), магнитный поток и потоко-сцепление — в веберах ( $вб$ ).

Индуктивность уединенного контура, равная отношению потоко-сцепления к току:

$$L = \frac{\Psi}{I},$$

пропорциональна магнитной проницаемости среды, в которой он находится, и определяется конфигурацией контура. Единицей индуктивности является генри ( $гн$ ).

Для расчета индуктивности контура необходимо предварительно рассчитать его магнитное поле по основному соотношению — за-кону полного тока:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

устанавливающему связь между напряженностью магнитного поля  $H = \frac{B}{\mu}$  и полным током  $I$  — алгебраической суммой токов, сцепляющихся с путем интегрирования. При этом положительное направление тока  $I$  связано с направлением  $d\mathbf{l}$  обхода правилом правого винта.

Напряженность магнитного поля измеряется в  $a/m$ , магнитная проницаемость — в  $гн/m$ .

Если потоко-сцепление контура изменяется во времени, то в контуре появляется э. д. с. индукции  $e$ , величина и направление которой определяется законом электромагнитной индукции:

$$e = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d\Psi}{dt},$$

где  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности наведенного в контуре электрического поля.

Таким образом, закон электромагнитной индукции связывает между собой изменение магнитного поля с возникающим электрическим полем.

Максвеллом было постулировано обобщение этого закона, заключающееся в том, что *электрическое поле возникает при изменении магнитного поля в любой среде*, а не только в проводящем контуре.

Закон электромагнитной индукции, открытый Фарадеем в 1831 г., был дополнен Ленцем в 1832—1834 гг. Им было установлено общее правило: *э. д. с. индукции всегда стремится создать ток, направленный так, чтобы препятствовать изменению потока, сцепляющегося с контуром*.

При изменении тока в контуре изменяется потоко-сцепление  $\Psi_L$ , созданное этим током, и в контуре наводится э. д. с. самоиндукции

$$e_L = - \frac{d\Psi_L}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

## 2. Индуктивность тороида и соленоида

Если на кольцевой сердечник — тороид, выполненный из материала проницаемостью  $\mu > \mu_0$ , нанести обмотку не по всей его длине (рис. 1.13), то только часть потока проходит по сердечнику, остальная часть — поток рассеяния — замыкается в воздухе. Тороид же, содержащий витки, плотно и равномерно распределенные по всей длине сердечника (рис. 1.14), замечателен тем, что практически весь магнитный поток сосредоточивается в сердечнике, т. е. потока рассеяния нет. Линии вектора напряженности поля представляют собой ок-

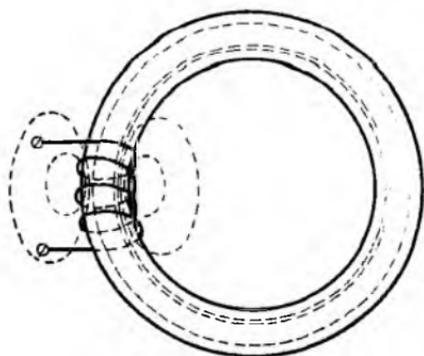


Рис. 1.13

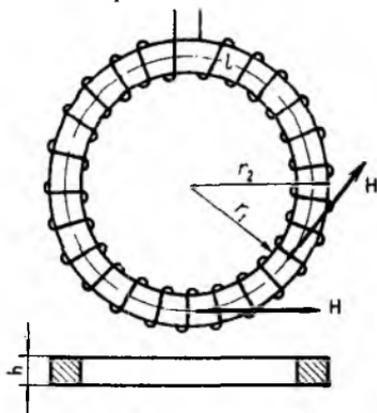


Рис. 1.14

ружности, сцепляющиеся со всеми витками. Ввиду симметрии напряженность поля в каждой точке окружности по величине постоянна; по направлению она совпадает с касательной к окружности.

Тороиды широко применяются в трансформаторах, магнитных усилителях и электроизмерительных приборах.

Пусть тороид имеет прямоугольное сечение высотой  $h$ , с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , магнитная проницаемость материала  $\mu$ .

По закону полного тока для окружности с радиусом  $r$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ )

$$\oint \mathbf{H} dl = \oint H dl = H \oint dl = H 2\pi r = \omega l,$$

откуда

$$H = \frac{\omega l}{2\pi r},$$

т. е. напряженность поля убывает по мере приближения к наружному краю тороида. Это в равной мере относится и к индукции

$$B = \mu H = \frac{\mu \omega l}{2\pi r}.$$

Поток в сердечнике тороида

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} B h dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu \omega l}{2\pi r} h dr = \frac{\mu h \omega l}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а потокосцепление

$$\Psi = \omega \Phi = \frac{\mu h \omega^2 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Отсюда индуктивность тороида

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu h \omega^2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Если расчет вести для средней линии  $l$  и приближенно считать поле в тороиде распределенным равномерно, то напряженность

$$H = \frac{\omega I}{l} = \omega_0 I,$$

где  $\omega_0$  — число витков на единицу длины, а магнитный поток и индуктивность, соответственно,

$$\Phi = \mu H S = \frac{\mu S \omega I}{l},$$

$$L = \frac{\omega \Phi}{I} = \frac{\mu \omega^2 S}{l}.$$

Обычно в реальных тороидах отношение  $\frac{r_2}{r_1} < 1,5$ , что приводит при этих приближенных формулах к погрешности, не превышающей 1,2%.

Последняя формула для индуктивности может быть применена и к длинному соленоиду, рассматриваемому как часть тороида бесконечно большого радиуса. Для соленоида конечной длины с  $\mu = \mu_0$

$$L = k \frac{\mu_0 \omega^2 S}{l},$$

где  $k < 1$  — коэффициент, учитывающий, что в таком соленоиде не весь поток пронизывает все витки.

Как показывает точный расчет, этот коэффициент зависит от отношения диаметра  $D$  катушки к ее длине  $l$  (рис. 1.15). При  $\frac{D}{l} = 0,1$  коэффициент  $k = 0,96$ , поэтому при  $\frac{D}{l} < 0,1$  приближенно принимают  $k = 1$ .

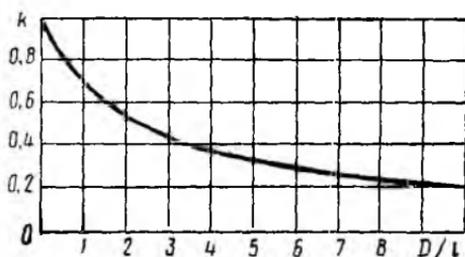


Рис. 1.15

### 3. Индуктивность двухпроводной линии

Двухпроводная линия (рис. 1.16, а) состоит из двух параллельных проводов одинакового радиуса  $r_0$ , имеющих большую длину  $l$  по сравнению с расстоянием  $d$  между ними. Магнитная проницаемость материала проводов  $\mu$ , окружающей среды —  $\mu_0$ . Токи  $I$  в прямом и обратном проводах отличаются лишь направлением; начало координат взято в центре сечения левого провода.

Для отдельного провода ввиду его осевой симметрии, при пренебрежении искажением поля у его концов, применение закона полного тока к окружности радиуса  $x \geq r_0$  дает:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint H dl = H \oint dl = H 2\pi x = I$$

и

$$H = \frac{I}{2\pi x}.$$

При интегрировании по окружности, лежащей внутри отдельного провода ( $x \leq r_0$ ), охватывается лишь часть  $I_x$  всего тока, протекающая внутри круга радиуса  $x$ , равная при равномерном распределении тока по сечению

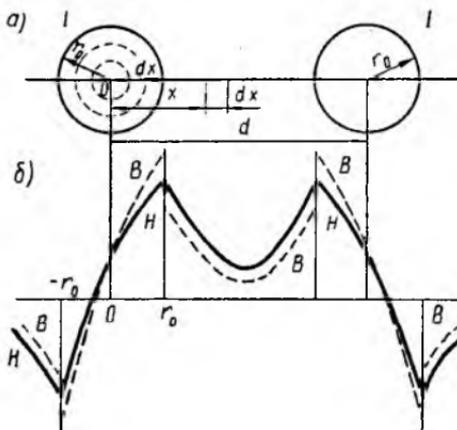


Рис. 1.16

$$I_x = I \frac{\pi x^2}{\pi r_0^2} = I \frac{x^2}{r_0^2}. \quad (1.3)$$

Тогда

$$H 2\pi x = I \frac{x^2}{r_0^2} \quad \text{и} \quad H = \frac{I}{2\pi r_0^2} x.$$

В воздухе между проводами на линии, соединяющей центры их сечений ( $r_0 \leq x \leq d - r_0$ ), направления полей, создаваемых обоими токами согласно

правилу правого винта, совпадают и напряженности поля и индукции складываются:

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right), \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Эти же формулы справедливы и для  $x \leq -r_0$  и  $x \geq d + r_0$ , т. е. снаружи линии, но здесь они дают разность полей.

Внутри левого провода линии ( $-r_0 \leq x \leq r_0$ ) напряженность поля и индукция от обоих проводов будут:

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{x}{r_0^2} + \frac{1}{d-x} \right), \quad B = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{x}{r_0^2} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Внутри правого провода ( $d - r_0 \leq x \leq d + r_0$ ), соответственно,

$$H = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{d-x}{r_0^2} \right), \quad B = \frac{\mu I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{d-x}{r_0^2} \right).$$

На рис. 1.16, б представлено распределение напряженности поля и индукции вдоль оси  $x$  для магнитной проницаемости материала проводов  $\mu > \mu_0$ . Посередине между проводами поле минимально, но в нуль не обращается. Поле также не равно нулю на осях проводов. На внутренней стороне проводов напряженность поля и индукция

больше, чем на внешней. В отличие от напряженности поля индукция имеет разрыв у поверхности проводов.

Для вычисления индуктивности линии необходимо найти потоко-сцепление. Элементарный поток, проходящий через площадку  $ldx$  в воздухе между проводами,

$$d\Phi_e = Bl dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx.$$

Весь поток между проводами — внешний поток

$$\Phi_e = \int_{x=r_0}^{x=d-r_0} d\Phi_e$$

одновременно является внешним потоко-сцеплением, так как сцепляется с контуром один раз. Поэтому

$$\Psi_e = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0},$$

а соответствующая ему внешняя индуктивность

$$L_e = \frac{\Psi_e}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

Для большинства линий расстояние  $d$  между проводами значи-тельно превышает радиус  $r_0$  проводов. В этом случае

$$L_e \approx \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}.$$

Для определения внутренней индуктивности, соответствующей внутреннему потоку, при  $d \gg r_0$  поле внутри провода линии может вычисляться как поле уединенного провода, так как поле, создаваемое вторым проводом внутри первого, по сравнению с полем первого, пренебрежимо мало. Тогда элементарный поток внутри провода

$$d\Phi_i = Bl dx \approx \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \frac{x}{r_0^2} l dx.$$

Так как поток  $d\Phi_i$  охватывает не весь ток, а только его часть [см. формулу (1.3)], элементарное потоко-сцепление

$$d\Psi_i = \frac{x^2}{r_0^2} d\Phi_i = \frac{\mu I l}{2\pi r_0^2} x^3 dx,$$

а все внутреннее потоко-сцепление в обоих проводах линии

$$\Psi_i = 2 \int_{x=0}^{x=r_0} d\Psi_i = \frac{\mu I l}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} x^3 dx = \frac{\mu I l}{4\pi}.$$

Соответственно, внутренняя индуктивность

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu l}{4\pi}.$$

Суммарная индуктивность линии

$$L = L_e + L_l = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \ln \frac{d}{r_0} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При медных или алюминиевых проводах ( $\mu \approx \mu_0$ ) в большинстве случаев вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым и тогда

$$L \approx \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}.$$

Для стальных проводов ( $\mu \gg \mu_0$ ) основной частью потока является внутренний поток и индуктивность

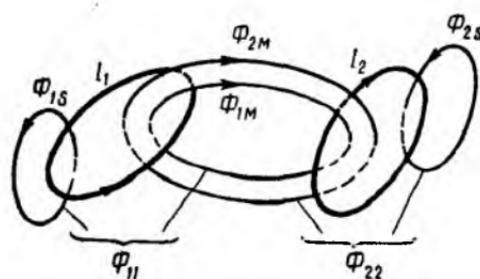
$$L \approx \frac{\mu l}{4\pi}$$

практически не будет зависеть от расстояния между проводами.

## § 1.8. Взаимоиндуктивность и ее расчет

### 1. Взаимоиндуктивность

Для двух контуров, имеющих  $\omega_1$  и  $\omega_2$  витков с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 1.17), поток первого контура, определяемый током этого контура, — поток самоиндукции  $\Phi_{11}$  — может быть разложен на поток рассеяния  $\Phi_{1S}$ , пронизывающий только этот контур, и поток взаимной индукции  $\Phi_{1M}$ , пронизывающий также и второй контур:



$$\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{1M}.$$

Рис. 1.17

Потокоцепление, соответствующее потоку  $\Phi_{11}$ , при условии, что этот поток пронизывает все витки первого контура, равно

$$\Psi_{11} = \omega_1 \Phi_{11} = L_1 I_1,$$

а потокоцепление рассеяния

$$\Psi_{1S} = \omega_1 \Phi_{1S}.$$

Аналогично для второго контура

$$\Phi_{22} = \Phi_{2S} + \Phi_{2M},$$

$$\Psi_{22} = \omega_2 \Phi_{22} = L_2 I_2,$$

$$\Psi_{2S} = \omega_2 \Phi_{2S}.$$

Потокоцепление второго контура, определяемое током первого,

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1,$$

а потокосцепление первого контура, определяемое токсом второго,

$$\Psi_{12} = M_{12}I_2.$$

Можно показать, что

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Величина  $M$  называется взаимной индуктивностью и определяется конфигурацией контуров, их взаимным расположением и магнитной проницаемостью среды. Взаимная индуктивность также измеряется в генри (гн).

Суммарный поток, пронизывающий первый контур,

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{2M} = \Phi_{1S} + \Phi_{1M} + \Phi_{2M}.$$

Суммарное потокосцепление первого контура

$$\Psi_1 = \omega_1 \Phi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$$

и соответственно для второго контура

$$\Psi_2 = \omega_2 \Phi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21} = L_2 I_2 + M I_1.$$

В этих алгебраических суммах первый член всегда положителен, а знак перед вторым членом определяется направлением токов в контурах; положительный знак соответствует случаю совпадения направлений потоков  $\Phi_{1M}$  и  $\Phi_{2M}$  (см. рис. 1.17).

Из изложенного видно, что

$$L_1 L_2 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} \cdot \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \frac{\omega_1 \omega_2 \Phi_{11} \Phi_{22}}{I_1 I_2},$$

а

$$M_{12} M_{21} = M^2 = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \cdot \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\omega_1 \omega_2 \Phi_{1M} \Phi_{2M}}{I_1 I_2} < L_1 L_2,$$

так как

$$\Phi_{1M} \leq \Phi_{11} \quad \text{и} \quad \Phi_{2M} \leq \Phi_{22}.$$

Таким образом, взаимная индуктивность и индуктивности всегда удовлетворяют неравенству

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2},$$

а используемый в технических расчетах коэффициент связи двух контуров

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1.$$

Аналогично, в системе многих контуров потокосцепление контура определяется токами всех контуров:

$$\Psi_q = L_q I_q + \sum_{q \neq p} M_{qp} I_p,$$

где  $L_q$  — индуктивность  $q$ -го контура,  $M_{qp} = M_{pq}$  — взаимная индуктивность  $q$ - и  $p$ -го контуров.

Общий прием расчета взаимной индуктивности контуров заключается в нахождении потокосцепления, пронизывающего контур  $q$ , но созданного током  $p$ -го контура, и делении его на этот ток.

## 2. Взаимная индуктивность двух параллельных двухпроводных линий

Пусть две параллельные двухпроводные линии расположены симметрично так, как это было показано на рис. 1.4. При условии  $d \gg r_0$  внутренним потоком в проводах по сравнению с внешним можно пренебречь.

Магнитный поток, пронизывающий первую линию и созданный током  $I_2$  второй, может быть найден как сумма потоков, создаваемых каждым из проводов второй линии в отдельности.

Тогда магнитный поток, пронизывающий первую линию,

$$\Phi = \int_a^b Bl \, dr - \int_b^a Bl \, dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} l \, dr - \int_b^a \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} l \, dr = \frac{\mu_0 I_2 l}{\pi} \ln \frac{b}{a},$$

где

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{(d_2 - d_1)^2 + 4d^2}, \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + 4d^2} -$$

расстояния от провода линии 1 до проводов линии 2.

Магнитный поток  $\Phi$  одновременно является потокосцеплением  $\Psi_{12}$  первой линии, так как сцепляется с ней один раз; поэтому

$$\Psi_{12} = \frac{\mu_0 I_2 l}{\pi} \ln \sqrt{\frac{(d_1 + d_2)^2 + 4d^2}{(d_2 - d_1)^2 + 4d^2}},$$

а взаимная индуктивность

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{(d_1 + d_2)^2 + 4d^2}{(d_2 - d_1)^2 + 4d^2}.$$

Для уменьшения коэффициента связи между линиями связи 1 и передачи 2 применяют т р а н с п о з и ц и ю линии связи, заключающуюся в перекрещивании проводов линии связи через равные расстояния; тогда суммарное потокосцепление  $\Psi_{12}$  будет равно нулю.

## § 1.9. Линейные и нелинейные катушки индуктивности

### § 1. Общие сведения

У л и н е й н ы х м а т е р и а л о в магнитная проницаемость  $\mu$  не зависит от напряженности поля и характеристика  $B(H) = \mu H$  для них изображается прямой линией (рис. 1.18, а). Магнитная проницаемость пропорциональна тангенсу угла  $\alpha$  наклона этой прямой:

$$\mu = \frac{B}{H} = k \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $k$  — масштабный коэффициент.

К нелинейным материалам относятся ферромагнетики — железо, никель, кобальт и гадолиний. Важное значение в электротехнике имеют первые три элемента, главным образом в виде сплавов. У нелинейных материалов магнитная проницаемость очень велика ( $\mu \gg \mu_0$ ) и зависит от напряженности поля.

Подобно нелинейным диэлектрикам по кривой первоначального намагничивания  $B(H)$  (рис. 1.18, б) могут быть определены статическая магнитная проницаемость

$$\mu_{ст} = \frac{B}{H} = k \operatorname{tg} \alpha$$

и дифференциальная, а при быстрых изменениях поля — динамическая магнитная проницаемость

$$\mu_d = \frac{dB}{dH} = k \operatorname{tg} \beta.$$

На рис. 1.18, б эти проницаемости представлены в функции напряженности поля. Максимальные значения магнитной проницаемости

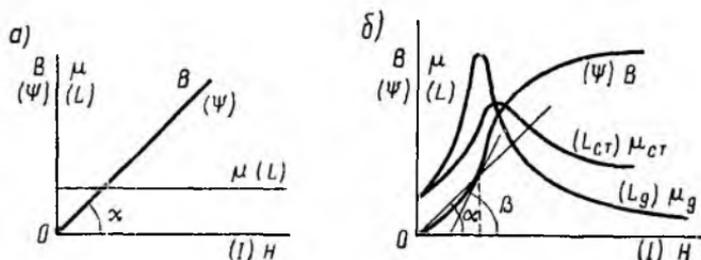


Рис. 1.18

в очень чистом железе и в некоторых сплавах, например в пермаллоэ (сплав железа и никеля с различными присадками), в сотни тысяч раз превышают магнитную постоянную

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м,}$$

равную магнитной проницаемости вакуума.

В переменных магнитных полях в ферромагнетиках имеет место явление магнитного гистерезиса (рис. 1.19), заключающееся в несовпадении кривой  $B(H)$  при возрастании напряженности поля с кривой при убывании поля. Кривая, соединяющая вершины петель гистерезиса, называется основной кривой намагничивания и практически совпадает с кривой первоначального намагничивания. Ферромагнитные свойства зависят от температуры и проявляются лишь в определенном ее интервале.

Для расчета индуктивности основной является зависимость потокосцепления  $\Psi$  от тока  $I$ , называемая веберамперной характеристикой.

В зависимости от материала сердечника тороиды по виду своей веберамперной характеристики будут также линейными или нелинейными. В качестве примера рассматривается нелинейный тороид.

Для тороида  $H = \frac{\omega I}{l}$  и  $B = \frac{\Psi}{\omega S}$  и веберамперные характеристики  $\Psi(I)$  в соответствующем масштабе совпадают с кривыми  $B(H)$ ; поэтому прямая и кривые на рис. 1.18 а и б соответствуют также веберамперным характеристикам при величинах, указанных в скобках.

Для нелинейных тороидов вводятся понятия статической индуктивности

$$L_{ст} = \frac{\Psi}{I} = k_1 \operatorname{tg} \alpha$$

и дифференциальной, а также динамической индуктивности

$$L_x = \frac{d\Psi}{dI} = k_1 \operatorname{tg} \beta,$$

являющихся функциями тока (см. рис. 1.18, б); для линейных тороидов эти индуктивности совпадают.

Аналогично индуктивностям в нелинейных системах контуров вводятся статическая взаимоиנדуктивность

$$M_{ст} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

и дифференциальная, а также динамическая взаимоиנדуктивность

$$M_x = \frac{d\Psi_{21}}{dI_1}.$$

## 2. Индуктивность нелинейного тороида

Расчет нелинейного тороида может быть произведен, если задана зависимость  $B(H)$  или  $\mu(H)$ . Так как эти зависимости теоретически не выводятся, то для приближенного решения подбирают по кривой  $B(H)$  аппроксимирующую функцию.

Пусть аппроксимирующая функция для характеристики  $B(H)$  (рис. 1.20) материала сердечника тороида будет

$$B = aH - bH^3,$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные.

Так как для тороида с ферромагнитным однородным сердечником нап-

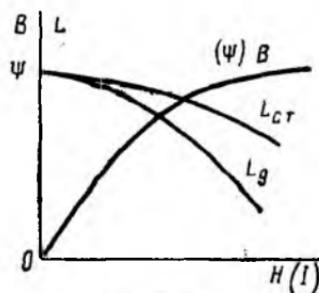


Рис. 1.20

ряженность поля по-прежнему определяется формулой (см. п. 2 § 1.7)

$$H = \frac{\omega I}{2\pi r},$$

то индукция будет равна

$$B = a \frac{\omega I}{2\pi r} - b \frac{\omega^3 I^3}{8\pi^3 r^3},$$

а потокосцепление

$$\Psi = \omega \Phi = \omega \int_{r_1}^{r_2} B h dr = \frac{\omega^2 h I}{2\pi} \left[ a \ln \frac{r_2}{r_1} - b \frac{\omega^2 I^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right],$$

откуда статическая индуктивность

$$L_{ст} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\omega^2 h}{2\pi} \left[ a \ln \frac{r_2}{r_1} - b \frac{\omega^2 I^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right],$$

а дифференциальная индуктивность

$$L_{д} = \frac{d\Psi}{dI} = \frac{\omega^2 h}{2\pi} \left[ a \ln \frac{r_2}{r_1} - 3b \frac{\omega^2 I^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right].$$

Кривые зависимости этих индуктивностей от тока представлены на рис. 1.20.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ЭНЕРГИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И ЕЕ ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В МЕХАНИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ

#### § 2.1. Общие сведения

В современной электротехнике используются процессы прямого и обратного преобразования электрической энергии — энергии электромагнитного поля — в другие виды энергии. В большинстве электротехнических устройств распределение энергии электромагнитного поля между электрическим и магнитным полями таково, что одним из этих полей можно пренебречь. Поэтому далее теория преобразования энергии электрического поля системы заряженных тел и энергии магнитного поля контуров с токами излагается отдельно применительно к наиболее важному преобразованию в механическую энергию.

Силы, возникающие в этих полях, используются для создания не только преобразователей энергии, но и измерительных приборов различных систем, а также служат для управления движением заряженных частиц, что широко используется в различных электротехнических устройствах — электронных осциллографах, различных вакуумных и ионных приборах, ускорителях различных систем, установках для нанесения различных покрытий, а также в новых прямых преобразователях тепловой энергии в электрическую.

## § 2.2. Энергия системы заряженных проводящих тел

### 1. Энергия линейной системы заряженных проводящих тел

Пусть в диэлектрической среде с постоянной проницаемостью  $\epsilon$  находятся  $n$  неподвижных проводящих тел (рис. 2.1); потенциал каждого из тел  $\varphi_k$ , заряд  $Q_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Для сообщения зарядов этой системе тел они подключаются к источникам электрической энергии; по соединительным проводам пойдут токи, прекращающиеся с окончанием зарядки.

Работа, совершаемая источниками, идет на сообщение зарядов телам системы, нагрев соединительных проводов и образование магнитного поля. Энергия, запасаемая в магнитном поле при возрастании тока, возвращается источникам при убывании тока, за исключением излученной в окружающее пространство, так как провод с изменяющимся током представляет собой антенну. Энергия, затраченная на сообщение зарядов, запасается в системе; нагрев и излучение являются потерями.

Так как величина энергии системы определяется потенциалами и зарядами тел и не зависит от скорости зарядки, для облегчения расчета предполагается, что зарядка системы совершается бесконечно медленно, т. е. токи зарядки бесконечно малы и постоянны. Это позволяет пользоваться зависимостями, установленными для электростатического поля, и пренебречь потерями и энергией магнитного поля, так как энергия тепловых потерь и энергия магнитного поля, пропорциональные квадрату тока, будут бесконечно малыми второго порядка, а излучение при постоянном токе отсутствует.

Тогда работа  $A$  источников равна энергии  $W$ , запасенной в системе заряженных тел.

При возрастании на величину  $dq_k$  промежуточного значения заряда  $q_k$  тела  $k$ , с промежуточным значением потенциала  $\varphi_k^*$ , согласно определению потенциала источником совершается работа  $\varphi_k^* dq_k$ . Эта работа равна увеличению энергии тела.

Для всей системы тел элементарная работа источников

$$dA = \sum \varphi_k^* dq_k,$$

а вся энергия, запасенная в системе,

$$W = A = \sum \int_0^{Q_k} \varphi_k^* dq_k.$$

Потенциал каждого из тел связан с зарядами всех тел линейной зависимостью:

$$\varphi_k^* = \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \dots + \alpha_{kn}q_n,$$

где  $\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn}$  — постоянные.

Согласно закону сохранения энергии, работа, затраченная на создание энергии системы, не зависит от порядка сообщения заряда отдельным телам системы. Если для расчета принять, что заряды всех тел изменяются пропорционально друг другу:

$$q_p = \beta_{kp}q_k,$$

где  $\beta_{kp}$  — постоянные, то потенциал тела

$$\varphi_k^* = (\alpha_{k1}\beta_{k1} + \alpha_{k2}\beta_{k2} + \dots + \alpha_{kn}\beta_{kn}) q_k = \gamma_k q_k,$$

где  $\gamma_k = \sum_p \alpha_{kp}\beta_{kp}$  — величина постоянная.

Подстановка равенства  $\varphi_k^* = \gamma_k q_k$  в выражение для энергии даст

$$W = \sum_k \int_0^{Q_k} \gamma_k q_k dq_k = \sum_k \frac{\gamma_k Q_k^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k Q_k.$$

В этом выражении для энергии под  $\varphi_k$  и  $Q_k$  понимаются значения потенциала и заряда по окончании зарядки.

Для уединенного тела

$$W = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

где  $C = Q/\varphi$  — емкость тела.

Для конденсатора, т. е. системы из двух тел  $Q_1 = -Q_2 = Q$ , напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  и энергия

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 Q_1 + \frac{1}{2} \varphi_2 Q_2 = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

является квадратичной функцией заряда  $Q$  или напряжения  $U$ .

Энергия системы из двух конденсаторов, связанных взаимоемкостью, заряды которых определены выражениями (1.2) п. 1 § 1.3,

$$W = \frac{Q_1 U_1}{2} + \frac{Q_2 U_2}{2} = \frac{(C_{11}U_1 + C_{12}U_2) U_1}{2} + \frac{(C_{21}U_1 + C_{22}U_2) U_2}{2} = \frac{C_{11}U_1^2}{2} + \frac{C_{22}U_2^2}{2} + C_{12}U_1 U_2$$

состоит из суммы собственных энергий каждого из конденсаторов и взаимной энергии  $C_{12}U_1 U_2$ , зависящей от расположения конденсаторов. Взаимная энергия может иметь разный знак; поэтому энергия системы будет больше суммы собственных энергий конденсаторов при совпадении знаков собственного и взаимного зарядов или меньше — при противоположных знаках этих зарядов. Однако суммарная энергия системы заряженных конденсаторов всегда положительна.

Энергия системы из нескольких конденсаторов, состоящая из суммы собственных и взаимных энергий конденсаторов,

$$W = \sum \frac{C_k U_k^2}{2} + \sum_{p \neq k} C_{kp} U_k U_p$$

также всегда положительна.

Энергия измеряется в джоулях (дж).

## 2. Энергия нелинейного конденсатора

Энергия линейного конденсатора  $\int_0^{Q_0} u dq = \frac{Q_0 U_0}{2}$  с зарядом  $Q_0$  и напряжением  $U_0$  равна площади заштрихованного треугольника на кулонвольтной характеристике (рис. 2.2, а).

Работа источника, затраченная на зарядку нелинейного конденсатора и равная запасенной в нем энергии, определяется заштрихованной площадью, также ограниченной кулонвольтной характеристикой

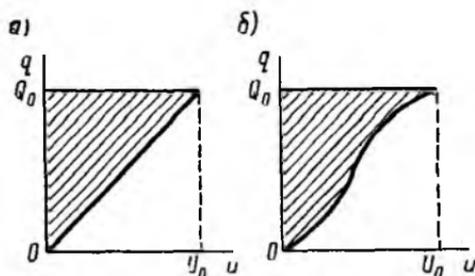


Рис. 2.2

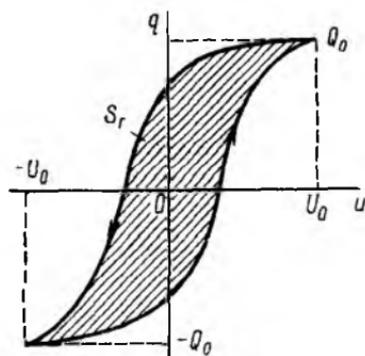


Рис. 2.3

кой (рис. 2.2, б). Эта площадь может быть больше, равна или меньше площади треугольника  $\frac{Q_0 U_0}{2}$  в зависимости от вида характеристики и от значения напряжения  $U_0$ , т. е. энергия нелинейного конденсатора не определяется конечными значениями  $Q_0$  и  $U_0$ .

При периодическом изменении напряжения в пределах от  $U_0$  до  $-U_0$  на нелинейном конденсаторе в нем проявляется диэлектрический гистерезис. Если петля гистерезиса построена в координатах  $q$  и  $u$  (рис. 2.3), то потеря энергии за один цикл

$$W_r = \oint u dq = S_r$$

равна площади петли гистерезиса. Эти потери, превращающиеся в тепло, в большинстве современных сегнетоэлектриков пока еще значительны. В настоящее время ведется большая работа по устранению этого недостатка,

### 3. Распределение энергии электрического поля

Энергия электрического поля всегда распределена в пространстве, занятом полем.

Энергия плоского конденсатора, поле которого однородно,

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \sigma S E d = \frac{1}{2} D S E d = \frac{1}{2} E D V,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, равная смещению  $D$ ;  $V = Sd$  — объем, занятый полем.

Энергия в единице объема — плотность энергии —

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{E D}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}.$$

В случае неоднородного поля эти выражения могут быть использованы для бесконечно малого объема  $dV$ , в пределах которого поле может считаться однородным. Для конечного объема  $V$  энергия поля

$$W = \frac{1}{2} \int E D dV.$$

Эти формулы, выведенные для однородной изотропной среды, где векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  совпадают по направлению, могут быть записаны и так:

$$W_0 = \frac{dW}{dV} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \mathbf{D} dV.$$

В таком виде выражение для энергии было постулировано Максвеллом для любых линейных и нелинейных сред и полей, как угодно изменяющихся во времени и пространстве. Это обобщение, используемое в теории электромагнитного поля, подтверждается совпадением выводов этой теории с опытом.

## § 2.3. Взаимные преобразования энергии электрического поля и механической энергии

### 1. Преобразование энергии и обобщенные силы

В системе подвижных заряженных тел энергия электрического поля изменяется, преобразуясь в другие виды энергии, в том числе в механическую. Если пренебречь тепловыми потерями и излучением, что теоретически справедливо при бесконечно медленном движении тел (аналогично п. 1 § 2.2), то, согласно закону сохранения энергии, работа внешних источников  $dA = \sum \varphi_k^* dq_k$  равна сумме изменения энергии системы  $dW$  и механической работы  $dA_{\text{мех}}$ :

$$\sum \varphi_k^* dq_k = dW + dA_{\text{мех}}.$$

Отдельные члены этого равенства могут иметь различные знаки в зависимости от характера преобразования энергии — электрической в механическую (двигатели) или механической в электрическую (генераторы).

Известно, что состояние системы тел, как механической системы, может быть описано с помощью обобщенных геометрических координат  $X$ , число которых равно числу степеней свободы. В соответствии с обобщенными координатами вводятся совпадающие с ними по направлению обобщенные силы  $F$ , умножение которых на изменение обобщенной координаты дает механическую работу, совершаемую при «перемещении» по обобщенной координате, так что

$$dA_{\text{мех}} = \sum F_k dX_k.$$

Если обобщенной координатой является обычная координата, то обобщенной силой — обычной силой; если  $X$  — угол поворота, то  $F$  — вращающий момент и т. п.

Пусть в рассматриваемой системе заряженных тел изменяется лишь одна из обобщенных координат, тогда основное соотношение примет вид

$$\sum \varphi_k^* dq_k = dW + FdX.$$

Это равенство, справедливое при любых соотношениях между зарядами и потенциалами тел, легко может быть исследовано лишь в двух частных случаях, рассматриваемых далее.

1. Если система отключена от источников, то заряды тел не изменяются ( $dq_k = 0$ ) и

$$dW + FdX = 0,$$

откуда

$$FdX = -dW.$$

Это означает, что механическая работа в системе совершается за счет уменьшения энергии, запасенной в ней. В реальных условиях механическая работа будет меньше энергии, отданной системой, так как часть этой энергии идет на покрытие неизбежных потерь.

Итак, можно сделать общий вывод, что система, отключенная от источников, всегда стремится занять положение, соответствующее возможному для этой системы минимуму ее энергии.

2. Для системы заряженных тел, подключенных к источникам постоянных потенциалов ( $\varphi_k = \text{const}$ ), из выражения энергии

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_k q_k$$

следует, что

$$dW = \frac{1}{2} \sum \varphi_k dq_k.$$

Тогда основное соотношение принимает вид:

$$dW + FdX = \sum \varphi_k dq_k = 2dW,$$

откуда

$$FdX = dW,$$

т. е. при совершении системой механической работы энергия системы возрастает на такую же величину, а работа, совершенная источниками

и равная сумме механической работы и увеличения энергии, вдвое больше. Следовательно, *система, подключенная к источникам с постоянными потенциалами, всегда стремится занять положение, соответствующее возможному для этой системы максимуму ее энергии, т. е. максимуму зарядов.*

Так как в реальной системе может быть сосредоточена лишь конечная энергия, то и в случае  $\varphi_k = \text{const}$  система не может служить для непрерывного преобразования энергии электрического поля в механическую.

Из приведенных соотношений могут быть вычислены обобщенные силы, действующие на тела, находящиеся в электрическом поле. При постоянстве зарядов обобщенная сила

$$F = - \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{Q = \text{const}}$$

Здесь взята частная производная, так как в рассматриваемом случае изменение энергии соответствует изменению лишь одной из обобщенных координат.

При постоянстве потенциалов обобщенная сила

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{\varphi = \text{const}}$$

Это выражение отличается от приведенного выше. Однако результаты вычисления по этим формулам всегда совпадают, так как сила в данный момент определяется значениями зарядов и потенциалов тел в этот момент и не зависит от характера их изменения в дальнейшем.

Силы в электрическом поле действуют не только на проводящие тела, но и на диэлектрические, если их проницаемость отличается от проницаемости окружающей среды. Это объясняется возникновением с обеих сторон поверхности раздела разноименных зарядов, разных по величине; силы определяются алгебраической суммой этих зарядов. Таким образом, силы в электрическом поле всегда проявляются у поверхности раздела различных сред: диэлектрик — проводник и диэлектрик — диэлектрик.

## 2. Вольтметр электростатической системы

Примером системы двух заряженных тел может служить вольтметр электростатической системы (рис. 2.4). Он состоит из соединенных между собой неподвижных пластин *A* и укрепленных на оси подвижных пластин *B*. С осью прибора связана стрелка *C*, перемещающаяся по шкале. Под действием измеряемого напряжения, приложенного к пластинам *A* и *B*, возникают силы притяжения и вращающий момент, поворачивающий подвижную часть.

Если угол поворота  $\alpha$  подвижной части прибора принять за обобщенную координату, то обобщенной силой будет вращающий момент:

$$F = M_{\text{вп}} = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_{U = \text{const}} = \left( \frac{d}{d\alpha} \cdot \frac{CU^2}{2} \right)_{U = \text{const}} = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{d\alpha}$$

Спиральной пружиной  $D$ , осуществляющей электрический контакт с подвижной частью прибора, создается также противодействующий момент, пропорциональный углу поворота:

$$M_{пр} = k\alpha.$$

Под действием вращающего момента подвижные пластины будут поворачиваться до тех пор, пока этот момент не уравновесится противодействующим моментом пружины:

$$M_{вр} = M_{пр} \quad \text{или} \quad \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{d\alpha} = k\alpha.$$

В измерительных приборах предпочтительна равномерная шкала, у которой  $\alpha = k_1 U$ , что приводит к уравнению

$$\frac{\alpha^2}{2k_1^2} \cdot \frac{dC}{d\alpha} = k\alpha \quad \text{или} \quad \frac{dC}{d\alpha} = \frac{2k_1^2 k}{\alpha},$$

откуда получается необходимая зависимость емкости от угла поворота:

$$C = 2k_1^2 k \ln \alpha + \text{const.}$$

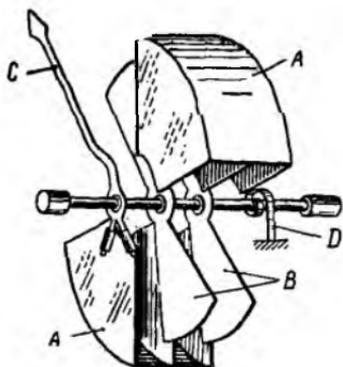


Рис. 2.4

Придав соответствующие формы пластинам, удастся получить равномерную шкалу, за исключением ее начала, так как по мере приближения  $\alpha$  к нулю  $|\ln \alpha|$  стремится к бесконечности.

Замечательной особенностью электростатического вольтметра при постоянном напряжении является отсутствие тока, потребляемого прибором в режиме установившегося отклонения.

Кроме вращающего и противодействующего моментов, во всех измерительных приборах создают момент успокоения  $M_{усп}$ . В электростатическом вольтметре используется магнитоиндукционный успокоитель (не показанный на рис. 2.4), состоящий из алюминиевой пластинки, закрепленной на оси прибора и расположенной в магнитном поле постоянного магнита. При движении подвижной части прибора в пластинке будут индуцироваться токи, тормозящие движение. Таким образом успокаиваются колебания подвижной части прибора, что ускоряет получение установившегося отклонения; тогда  $M_{усп} = 0$ .

### 3. Емкостная машина постоянного тока

Машины, в которых производится прямое и обратное преобразование механической энергии в электрическую через посредство электрического поля, можно назвать емкостными, так как их работа основана на периодическом изменении взаимоемкости.

Емкостная машина постоянного тока (рис. 2.5) состоит из двух дисков: статора  $S_1 S_2$  и ротора  $R_1 R_2$ , вращающегося относительно ста-

тора. Каждый диск содержит два полудиска, изолированных друг от друга. Статорные полудиски образуют систему возбуждения. На роторные полудиски наложены щетки  $a$ , с помощью которых ротор подключается к сети при работе двигателем или к нагрузке при работе генератором. Напряжения  $U_S$  на статоре и  $U_R$  на роторе принимаются постоянными.

Таким образом, емкостная машина состоит из двух конденсаторов  $R_1R_2$  и  $S_1S_2$  и подобна удвоенному электростатическому вольтметру, но без противодействующей пружины.

В соответствии с п. 1 § 1.3 заряды роторного  $q_R$  и статорного  $q_S$  полудисков будут:

$$\begin{aligned} q_R &= C_R U_R + C_{RS} U_S, \\ q_S &= C_S U_S + C_{RS} U_R, \end{aligned}$$

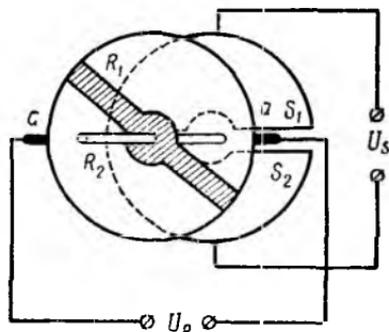


Рис. 2.5

где  $C_R$  — собственная емкость ротора при накоротко замкнутых полудисках статора (см. п. 1 § 1.3);

$C_S$  — собственная емкость статора при накоротко замкнутых полудисках ротора;

$C_{RS}$  — взаимоемкость между статором и ротором.

Энергия электрического поля машины (п. 1 § 2.2)

$$W = \frac{q_S U_S}{2} + \frac{q_R U_R}{2} = \frac{C_S U_S^2}{2} + \frac{C_S U_R^2}{2} + C_{RS} U_R U_S.$$

Пренебрегая влиянием изолирующего промежутка между полудисками, можно считать, что при вращении ротора емкости  $C_R$  и  $C_S$  остаются постоянными, а взаимоемкость  $C_{RS}$  будет периодически меняться. Поэтому появляющийся в машине вращающий момент

$$M_{\text{вр}} = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_{U=\text{const}} = U_R U_S \frac{dC_{RS}}{d\alpha},$$

где  $\alpha$  — угол поворота ротора.

В цепи ротора появляется ток

$$i_R = \frac{dq_R}{dt} = U_S \frac{dC_{RS}}{dt} = U_S \frac{dC_{RS}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = U_S \omega \frac{dC_{RS}}{d\alpha},$$

где  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  — угловая скорость вращения.

Как видно из выражений для вращающего момента и индуцированного тока машины, они сохраняют постоянный знак только при сохранении знака производной  $\frac{dC_{RS}}{dt}$ . Для этого взаимоемкость должна непрерывно монотонно изменяться, что физически невозможно. В машине рис. 2.5 взаимоемкость изменяется от нуля до максимального значения и от максимального до нуля дважды за один оборот

ротора. Для сохранения знаков вращающего момента и индуктированного тока необходимо использовать переключение — к о м м у т а ц и ю, осуществляемую с помощью двух щеток  $a$ , скользящих по ободу роторного диска и включенных в сеть.

Коммутация должна происходить при перемене знака производной  $\frac{dC_{RS}}{d\alpha}$ , т. е. при переходе взаимоемкости через максимум, в момент совпадения положения полудисков ротора с полудисками статора. При этом знак вращающего момента

$$M_{вр} = U_R U_S \frac{dC_{RS}}{d\alpha}$$

сохранится из-за одновременного изменения знака  $U_R$ , а ток ротора

$$i_R = U_S \omega \frac{dC_{RS}}{d\alpha}$$

хотя и изменит свой знак внутри машины, но из-за переключения сохранит во внешней цепи свое направление.

Сказанное не противоречит установленному в п. 1 этого параграфа положению о невозможности непрерывного преобразования энергии электрического поля в механическую энергию в системе тел с постоянными потенциалами (напряжениями). Возбуждаясь от внешнего источника постоянного напряжения, такая машина благодаря коммутации представляет собой систему с переменным напряжением ротора.

Емкостная машина может работать как в генераторном, так и в двигательном режиме, но независимо от режима в ней всегда возникает вращающий момент и ток в цепи ротора.

В генераторе используется ток в цепи ротора. Проходя по нагрузке, он создает напряжение  $U_R$  ротора, которое вместе с напряжением  $U_S$  создает вращающий момент. Этот момент в генераторе направлен против вращения, и его преодолевает первичный двигатель, вращающий генератор. Отдаваемая первичным двигателем механическая энергия преобразуется в генераторе в электрическую.

В двигателе, наоборот, используется вращающий момент, а ток, создаваемый машиной, преодолевается встречно направленным током сети и результирующий ток равен их разности. Электрическая энергия, отдаваемая сетью, преобразуется двигателем в механическую энергию.

Таким образом, емкостную машину постоянного тока независимо от того, будет ли она работать в режиме генератора или двигателя, осуществить без коммутации невозможно.

## § 2.4. Движение заряженной частицы в электрическом поле

В современной технике широко применяется управление движущимися заряженными частицами с помощью электрического поля. Сюда относятся электронные и газоразрядные лампы, электронно-ионные приборы, электронные осциллографы, устройства для окраски

в электрическом поле, для сепарации частиц электрическим полем и т. п.

Сила, действующая на частицу с зарядом  $Q$ , находящуюся в электрическом поле напряженности  $E$ , равна

$$f = QE.$$

В соответствии с этим уравнения движения заряженной частицы с массой  $m$  имеют вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = QE_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = QE_y, \quad \text{и} \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = QE_z,$$

где  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  — составляющие вектора напряженности поля по координатным осям  $XYZ$ .

Интегрирование этих уравнений при заданной напряженности поля как функции координат и заданных начальных условиях дает траекторию движущейся частицы.

В простейшем случае движения заряженной частицы вдоль однородного поля ( $E_x = E$ ,  $E_y = E_z = 0$ ) при начальной скорости  $v_0$ , совпадающей по направлению с вектором  $E$ , будет происходить вдоль оси  $X$ . Тогда уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = QE.$$

Интегрирование этого уравнения дает выражения:

$$v_x = v_0 + \frac{QE}{m} t \quad \text{и} \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{QE}{2m} t^2,$$

где  $x_0$  — координата заряженной частицы в начальный момент времени.

Иными словами, заряженная частица движется вдоль однородного поля равноускоренно.

Если однородное поле направлено перпендикулярно к направлению начальной скорости  $v_0$  (рис. 2.6), как это имеет место, например, в электронном осциллографе с электрическим отклоняющим полем, то уравнения движения при  $E_x = 0$ ,  $E_y = E$  и  $E_z = 0$  будут:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = QE \quad \text{и} \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Их интегрирование дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{Q}{m} Et \quad \text{и} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Таким образом, движение заряженной частицы совершается в координатной плоскости  $XOY$ .

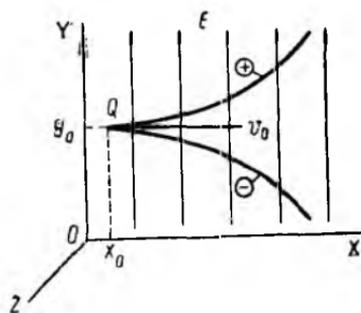


Рис. 2.6

Вторичным интегрированием получаются уравнения траектории в параметрической форме, где  $y_0$  — ордината частицы в начальный момент:

$$x = v_0 t + x_0 \quad \text{и} \quad y = y_0 + \frac{QE}{2m} t^2.$$

Исключение времени из этих уравнений дает уравнение траектории:

$$y - y_0 = \frac{QE}{2mv_0^2} (x - x_0)^2,$$

представляющее собой квадратичную параболу.

В электронном осциллографе движутся не положительно заряженные частицы, а электроны, что соответствует отклонению электронного луча не в направлении поля, а в обратном направлении, т. е. вниз на рис. 2.6.

Электронный осциллограф позволяет наблюдать и записывать на фотопленку кривые зависимости напряжения, подаваемого на отклоняющие пластины для создания электрического поля, от времени. Основной особенностью электронного осциллографа является возможность использования его для исследования весьма быстро протекающих процессов, так как электронный луч практически безынерционен.

## § 2.5. Энергия системы контуров с токами

### 1. Энергия линейной системы контуров с токами

При создании магнитного поля током контура лишь часть работы, совершаемой внешними источниками, переходит в энергию магнитного поля; остальная часть расходуется на нагрев проводов, на излучение, на механическую работу, совершаемую силами поля. Уже созданное постоянное магнитное поле не требует затраты энергии для своего существования и энергия источника постоянного тока расходуется лишь на покрытие джоулевых потерь в контуре.

Пусть в системе  $n$  неподвижных контуров, находящихся в среде с постоянной магнитной проницаемостью, каждый контур питается от своего источника с постоянным напряжением  $U_k$ . Это напряжение в процессе установления тока и потокосцепления должно равняться сумме напряжения на сопротивлении  $R_k$  контура и напряжения, преодолевающего э. д. с. индукции

$$e_k = - \frac{d\Psi_k^*}{dt},$$

определяемой скоростью изменения потокосцепления  $\Psi_k^*$  контура:

$$U_k = R_k i_k + \frac{d\Psi_k^*}{dt},$$

где  $i_k$  и  $\Psi_k^*$  — ток и потокосцепление контура  $k$  в процессе их установления до значений  $I_k$  и  $\Psi_k$ .

Тогда работа, совершаемая  $k$ -ым источником за бесконечно малое время  $dt$ , равна

$$U_k i_k dt = R_k i_k^2 dt + i_k d\Psi_k^*$$

Второй член определяет потери энергии на джоулево тепло, третий — работу  $dA_k$  источника, идущую на изменение потокосцепления. Вся работа, затраченная на создание установившихся значений потокосцеплений во всех контурах системы,

$$A = \sum \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k^*$$

При достаточно медленном изменении токов можно пренебречь излучением и считать, что вся работа  $A$  равна энергии  $W$ , запасенной в системе контуров. Связь между токами и потокосцеплениями определяется как при постоянных токах (п. 1 § 1.8):

$$\Psi_k^* = L_k i_k + \sum_{p \neq k} M_{kp} i_p$$

Согласно закону сохранения энергии, работа, затраченная на создание энергии системы, не зависит от порядка установления токов и потоков в контурах системы. Если для расчета выбрать порядок, когда токи всех контуров пропорциональны друг другу:

$$i_p = a_{pk} i_k,$$

где  $a_{pk}$  — постоянные, потокосцепление  $k$ -го контура будет равно

$$\Psi_k^* = L_k i_k + \sum M_{kp} a_{pk} i_k = b_k i_k,$$

где  $b_k = L_k + \sum M_{kp} a_{pk} = \text{const}$  и  $p \neq k$ .

Тогда энергия системы

$$W = \sum \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k^* = \sum b_k \int_0^{I_k} i_k di_k = \sum \frac{b_k I_k^2}{2} = \sum \frac{I_k \Psi_k}{2}.$$

Для уединенного контура потокосцепление  $\Psi = LI$  и энергия

$$W = \frac{\Psi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}$$

является квадратичной функцией тока или потокосцепления.

Энергия системы из двух контуров, связанных взаимной индукцией, потокосцепления которых определены в п. 1 § 1.8,

$$W = \frac{I_1 \Psi_1}{2} + \frac{I_2 \Psi_2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

состоит из суммы собственных энергий каждого из контуров и взаимной энергии  $M I_1 I_2$ , зависящей от расположения контуров. В зависимости от направления токов в контурах член  $M I_1 I_2$  может иметь разный знак, поэтому энергия системы будет больше суммы собственных

энергий контуров при совпадении потоков само- и взаимной индукции или меньше при встречном направлении потоков взаимной индукции. Однако суммарная энергия системы контуров с токами всегда положительна.

Энергия системы нескольких контуров, состоящая из суммы собственных и взаимных энергий контуров,

$$W = \sum_k \frac{L_k I_k^2}{2} + \sum_{k \neq p} M_{kp} I_k I_p$$

также всегда положительна.

## 2. Энергия нелинейного тороида

Аналогично энергии нелинейного конденсатора  $\int_0^{Q_0} u dq$  (см. п. 2 § 2.2) энергия тороида с сердечником из ферромагнитного материала, по обмотке которого проходит ток  $I_0$ ,

$$W = \int_0^{\Psi_0} i d\Psi^*,$$

где  $i$  — устанавливающийся ток до значения  $I_0$ .

В зависимости от характера веберамперной характеристики эта энергия может быть меньше, равна или больше энергии  $\frac{I_0 \Psi_0}{2}$  линейного тороида с теми же конечными значениями тока  $I_0$  и потокосцепления  $\Psi_0$ .

При периодическом изменении тока в обмотке нелинейного тороида от  $I_0$  до  $-I_0$  в нем проявляется магнитный гистерезис (см. рис. 1.19).

Если перематничиваемый сердечник тороида имеет среднюю длину  $l$  и площадь поперечного сечения  $S$ , то энергия, затраченная за один цикл перематничивания, т. е. за один обход по петле гистерезиса, построенной в координатах  $\Psi$  и  $i = \frac{Hl}{w}$ ,

$$W_r = \oint i d\Psi^* = \oint \frac{Hl}{w} d(wBS) = \oint lSH dB = V \oint H dB = VS_r,$$

где  $V = Sl$  — объем ферромагнетика;

$S_r$  — площадь петли гистерезиса.

Так как эта площадь аналитически не вычисляется, то в технике пользуются приближенной формулой, установленной Штейнмецом экспериментальным путем:

$$W_r = \eta B_{\max}^n V.$$

Коэффициент Штейнмеца  $\eta$  зависит от материала, показатель степени  $n$  — от материала и от величины максимальной индукции  $B_{\max}$ . Для электротехнической стали при  $0,25 < B_{\max} < 1$  тл принимают  $n = 1,6$ , а при  $1 < B_{\max} < 1,6$  тл показатель степени  $n = 2$ .

### 3. Распределение энергии магнитного поля

Энергия магнитного поля распределена по всему объему, занимаемому полем.

Энергия тороида, имеющего  $\omega$  витков, длину средней линии  $l$ , площадь поперечного сечения  $S$  (см. рис. 1.14), если считать поле в сечении однородным, будет

$$W = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} \frac{Hl}{\omega} \omega BS = \frac{1}{2} HBSl = \frac{HB}{2} V,$$

где  $V = Sl$  — объем тороида и одновременно объем, занятый полем. Тогда энергия на единицу объема — плотность энергии —

$$W_0 = \frac{W}{V} = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}.$$

В случае неоднородного поля эти выражения могут быть использованы для бесконечно малого объема  $dV$ , в пределах которого поле может считаться однородным. Для конечного объема  $V$  энергия поля

$$W = \frac{1}{2} \int HB dV.$$

Эти формулы, выведенные для однородной изотропной среды, где векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  совпадают по направлению, могут быть записаны и так:

$$W_0 = \frac{dW}{dV} = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}\mathbf{B} dV.$$

В таком виде выражение для энергии было постулировано Максвеллом для любых линейных и нелинейных сред и полей, как угодно изменяющихся во времени и в пространстве. Это обобщение, используемое в теории электромагнитного поля, подтверждается совпадением выводов этой теории с опытом.

## § 2. 6. Взаимные преобразования энергии магнитного поля и механической энергии

### 1. Преобразование энергии и обобщенные силы

В системе подвижных контуров с токами работа  $dA$  внешних источников равна сумме изменения энергии магнитного поля  $dW$  системы, механической работы  $dA_{\text{мех}}$  и энергии потерь  $dA_{\text{п}}$ , преобразуемой в другие виды (тепловую и энергию излучения):

$$dA = dW + dA_{\text{мех}} + dA_{\text{п}}.$$

Если принять, что движение контуров и изменение токов происходит бесконечно медленно, то энергия  $dA_{\text{п}}$  будет содержать только тепловые потери  $dA_{\text{тепл}}$ . Так как механическая работа совершается за счет магнитного поля, создаваемого источниками, а доля работы источников

$$dA - dA_{\text{тепл}} = dW + dA_{\text{мех}},$$

идущая на изменение поля, равна  $\sum i_k d\Psi_k^*$  (см. п. 1 § 2.5), то

$$\sum i_k d\Psi_k^* = dW + dA_{\text{мех.}}$$

Пусть в системе контуров, описываемой с помощью обобщенных координат, возможно изменение лишь одной из них, например  $X$ , тогда механическая работа, совершаемая в системе,

$$dA_{\text{мех.}} = FdX,$$

где  $F$  — обобщенная сила.

Исходное уравнение

$$\sum i_k d\Psi_k^* = dW + FdX$$

может быть исследовано лишь в двух частных случаях, рассматриваемых далее.

1. Если при изменениях, происходящих в системе, потокосцепления остаются постоянными ( $d\Psi_k = 0$ ), исходное уравнение принимает вид:

$$0 = dW + FdX.$$

Источники не совершают работы, связанной с изменениями в системе, они покрывают лишь расход энергии на нагрев контуров. В этом случае

$$FdX = -dW,$$

т. е. механическая работа совершается за счет убыли энергии системы.

Таким образом, при постоянных потокосцеплениях в системе она стремится под действием возникающих сил занять положение, соответствующее возможному в этой системе минимуму ее энергии.

2. Если источники поддерживают неизменными токи контуров ( $I_k = \text{const}$ ), то дифференцирование выражения для энергии системы дает:

$$dW = d\left(\frac{1}{2} \sum I_k \Psi_k^*\right) = \frac{1}{2} \sum I_k d\Psi_k^*.$$

Тогда исходное равенство

$$\sum I_k d\Psi_k^* = dW + FdX$$

может быть приведено к виду:

$$2dW = dW + FdX,$$

откуда

$$dW = FdX.$$

Это означает, что совершаемая системой механическая работа равна половине энергии, отдаваемой источниками; вторая половина идет на увеличение энергии системы.

Таким образом, система контуров с постоянными токами под действием возникающих в ней сил стремится занять положение, соответствующее возможному в этой системе максимуму ее энергии. Поскольку энергия при постоянных токах определяется величиной потокосцеплений, то система стремится занять положение, соответствующее максимуму потокосцеплений.

Так как в реальной системе может быть запасена лишь конечная энергия, то такая система при  $i_k = \text{const}$  также не может служить для непрерывного преобразования энергии магнитного поля в механическую.

Из приведенных соотношений могут быть вычислены обобщенные силы, действующие на контуры, находящиеся в магнитном поле. В случае постоянства потокосцеплений обобщенная сила

$$F = - \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{\Psi = \text{const}}$$

Здесь взята частная производная, так как рассматривается изменение энергии, соответствующее изменению лишь одной из обобщенных координат.

При постоянстве токов контуров выражение для обобщенной силы

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{I = \text{const}}$$

отличается от полученного выше. Однако результаты вычисления по этим формулам всегда совпадают, так как силы в системе в данный момент времени определяются значениями токов и потокосцеплений в этот момент времени и не зависят от того, каким изменениям они будут подвергаться в дальнейшем.

## 2. Прибор электромагнитной системы

Примером одиночного контура с током может служить прибор электромагнитной системы (рис. 2.7), состоящий из неподвижной катушки  $A$ , в которую при прохождении по ней тока втягивается ферромагнитный сердечник  $B$  в виде фигурной пластинки, установленной на оси; на этой же оси укреплен стрелка  $C$ , перемещающаяся по шкале. Противодействующий момент создается спиральной пружиной  $D$ . Успокоитель этого прибора — воздушный (на рис. 2.7 не показан). Он состоит из закрытой с одной стороны камеры, внутри которой может перемещаться легкий поршень, связанный с подвижной частью прибора. При ее повороте возникает разность давлений воздуха по обеим сторонам поршня, что оказывает тормозящее действие на колебания подвижной части и ускоряет получение установившегося отклонения; тогда момент успокоения  $M_{ycn} = 0$ .

Если в качестве обобщенной координаты взять угол поворота  $\alpha$  подвижной системы, то обобщенной силой будет вращающий момент

$$F = M_{вр} = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{I = \text{const}} = \left( \frac{d}{d\alpha} \frac{LI^2}{2} \right)_{I = \text{const}} = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL}{d\alpha},$$

где  $L$  — индуктивность неподвижной обмотки, возрастающая при втягивании сердечника.

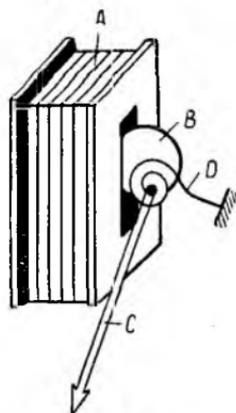


Рис. 2.7

Уравнение равновесия подвижной части прибора — равенство вращающего и противодействующего моментов — имеет вид:

$$\frac{I^2}{2} \cdot \frac{dL}{d\alpha} = k\alpha.$$

Требование равномерной шкалы  $\alpha = k_1 I$  приводит к уравнению:

$$\frac{\alpha^2}{2k_1^2} \cdot \frac{dL}{d\alpha} = k\alpha \quad \text{или} \quad \frac{dL}{d\alpha} = \frac{2kk_1^2}{\alpha}.$$

Следовательно, индуктивность должна изменяться в функции угла поворота по следующему закону:

$$L = 2kk_1^2 \ln \alpha + \text{const.}$$

Путем придания сердечнику соответствующей формы удастся получить равномерную шкалу, за исключением ее начала, так как по мере приближения  $\alpha$  к нулю  $|\ln \alpha|$  стремится к бесконечности.

Прибор электромагнитной системы может быть использован как амперметр, если его включить последовательно с приемником; тогда ток обмотки прибора равен измеряемому току. При использовании прибора в качестве вольтметра он включается параллельно приемнику; тогда ток обмотки и показания прибора пропорциональны измеряемому напряжению. При этом обмотка амперметра выполняется из относительно малого числа витков с сечением, рассчитанным на измеряемый ток, обмотка вольтметра — из большого числа витков малого сечения, рассчитанного на малый ток, обеспечивающий н. с. обмотки, равную н. с. обмотки амперметра.

Основным преимуществом прибора электромагнитной системы, наряду с простотой конструкции, является отсутствие токопровода в подвижную часть.

### 3. Прибор электродинамической системы

Примером системы из двух контуров с токами является прибор электродинамической системы (рис. 2.8), состоящий из неподвижной катушки *A* и подвижной катушки *B*, укрепленной на оси, с которой скреплена стрелка *C*, перемещающаяся по шкале. Ток в подвижную катушку подводится через спиральные пружины *D*, служащие также для создания противодействующего момента. Успокоитель этого прибора — воздушный (см. п. 2 этого параграфа). При повороте подвижной части индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  обеих катушек остаются постоянными, а взаимная индуктивность  $M$  изменяется.

Если принять угол поворота  $\alpha$  подвижной части прибора за обобщенную координату, то обобщенной силой будет вращающий момент

$$F = M_{\text{вр}} = \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)_{I = \text{const}} = \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 \right) \right]_{I = \text{const}} = I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha},$$

пропорциональный произведению токов обеих катушек. Он уравнивается противодействующим моментом  $M_{пр} = k\alpha$ .

Прибор электродинамической системы может быть использован в качестве амперметра и вольтметра. Например, в амперметре, предназначенном для измерения малых токов, неподвижная и подвижная катушки соединяются последовательно; тогда  $I_1 = I_2 = I$  и, следовательно,

$$I^2 \frac{dM}{d\alpha} = k\alpha.$$

Требование равномерной шкалы для амперметра  $\alpha = k_1 I$  определяет зависимость взаимоиндуктивности  $M$  от угла поворота, выводимую из уравнения равновесия подвижной части прибора:

$$\frac{\alpha^2}{k_1^2} \frac{dM}{d\alpha} = k\alpha \quad \text{или} \quad \frac{dM}{d\alpha} = \frac{k k_1^2}{\alpha},$$

откуда

$$M = k k_1^2 \ln \alpha + \text{const},$$

что невыполнимо в начале шкалы, так как  $|\ln \alpha| \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

При использовании этого прибора в качестве вольтметра он включается параллельно нагрузке через добавочное сопротивление; тогда ток прибора пропорционален напряжению и его шкала также не может быть выполнена равномерной.

Электродинамическая система используется также в ваттметрах; неподвижная катушка включается последовательно с нагрузкой, и ее ток  $I_1$  равен току нагрузки  $I$ , а подвижная — параллельно приемнику, и ее ток  $I_2$  пропорционален напряжению  $U$  цепи:  $I_2 = k_2 U$ ; тогда момент вращения будет пропорционален  $UI$ , т. е. мощности  $P$ .

Требование равномерной шкалы для ваттметра  $\alpha = k_1 P$  приводит к уравнению

$$k_2 U I \frac{dM}{d\alpha} = k k_1 P,$$

откуда

$$M = \frac{k k_1}{k_2} \alpha + \text{const},$$

что выполнимо для всей шкалы.

Так как момент вращения амперметров и вольтметров электромагнитной и электродинамической систем пропорционален квадрату измеряемой величины, полярность их включения, т. е. направление тока в них, безразлична, но, как видно из выражения для момента вращения, его знак для ваттметра зависит от направлений токов в обеих катушках. Поэтому для получения положительного отклонения ваттметр должен включаться по схеме рис. 2.9, где точками отмечены условные «начала» катушек, указанные на приборе\*.

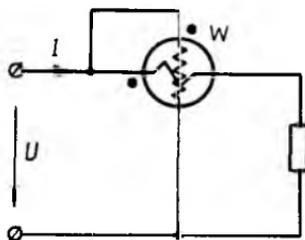


Рис. 2.9

\* На рис. 2.9 для наглядности катушки ваттметра изображены с отступлением от ГОСТ 2. 729 — 68.

#### 4. Индуктивная машина постоянного тока

В принципе обычная электрическая машина подобна рассмотренному в п. 3 этого параграфа прибору электродинамической системы, состоящему из неподвижной и подвижной катушек, но машина не имеет пружин, создающих противодействующий момент, и подвижная катушка (ротор) может вращаться. Так как процессы в этой системе вызваны изменением взаимной индуктивности, такая машина может быть названа **и н д у к т и в н о й**.

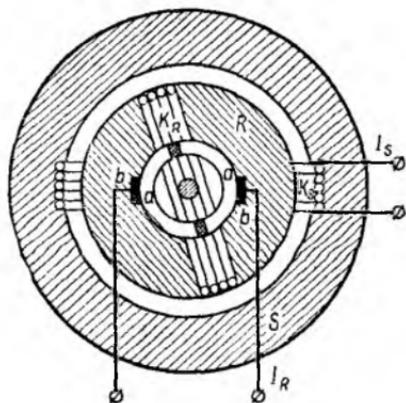


Рис. 2.10

Индуктивная машина постоянного тока, принципиальное устройство которой показано на рис. 2.10, имеет цилиндрические стальные магнитопроводы статора  $S$  и ротора  $R$  с минимальным зазором между ними, служащие для уменьшения магнитного сопротивления путей потока, благодаря чему увеличиваются потокосцепления при тех же токах.

Обмотка  $K_S$  образует поле возбуждения, обмотка ротора  $K_R$  подключена к сети или сопротивлению нагрузки.

Если обмотки статора  $K_S$  и ротора  $K_R$  обтекаются постоянными токами  $I_S$  и  $I_R$ , потокосцепление обмотки ротора  $\Psi_R$  и энергия  $W$  системы, соответственно, равны:

$$\Psi_R = L_R I_R + M I_S,$$

$$W = \frac{L_S I_S^2}{2} + \frac{L_R I_R^2}{2} + M I_S I_R.$$

При вращении ротора индуктивности  $L_S$  и  $L_R$  обмоток статора и ротора, если пренебречь влиянием пазов, в которые уложены обмотки, остаются неизменными, а взаимная индуктивность  $M$  между ними будет периодически меняться. Появляющийся в машине вращающий момент, равный производной энергии по углу  $\alpha$  поворота ротора,

$$M_{\text{вр}} = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)_{I = \text{const}} = I_S I_R \frac{dM}{d\alpha},$$

а э. д. с. индукции в обмотке ротора

$$e = - \frac{d\Psi_R}{dt} = - I_S \frac{dM}{dt} = - I_S \frac{dM}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = - I_S \omega \frac{dM}{d\alpha},$$

где  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$  — угловая скорость вращения.

Как видно из выражений для вращающего момента и э. д. с., они сохраняют постоянный знак только при сохранении знака производной  $\frac{dM}{d\alpha}$ . Для этого взаимная индуктивность  $M$  должна непрерывно моно-

тонно изменяться, что физически невозможно. В машине рис. 2.10 взаимдуктивность изменяется от нуля до максимального значения и от максимального значения до нуля дважды за один оборот ротора. Чтобы знаки вращающего момента и э. д. с. при этом не менялись, приходится применять переключение с помощью коммутатора, обычно выполняемого в виде коллектора. В машине рис. 2.10 он представляет собой соединенные с концами обмотки ротора два контактных полукольца  $a$ , по которым скользят щетки  $b$ , приключенные к сети.

Коммутация должна происходить при перемене знака производной  $\frac{dM}{d\alpha}$ , т. е. при переходе взаимдуктивности через максимум в момент совпадения осей обмоток статора и ротора. Как видно из выражений для вращающего момента и э. д. с., момент сохранит свой знак благодаря одновременному изменению знака  $I_R$ , а изменившая свой знак э. д. с. оказывается переключенной и относительно зажимов сети также сохранит свой знак.

Работа такой машины не противоречит установленному выше положению о невозможности непрерывного преобразования энергии магнитного поля в механическую в системе контуров с постоянными токами, так как такая машина, питаемая постоянным током от внешнего источника, из-за коммутации представляет собой систему контуров с переменными токами.

В соответствии с принципом обратимости Ленца индуктивная машина может работать и генератором и двигателем, но независимо от режима работы в ней всегда возникают вращающий момент и э. д. с. индукции.

В генераторе используется э. д. с. машины, вызывающая при включении нагрузки ток  $I_R$ , который вместе с током  $I_S$  создает вращающий момент. Этот момент в генераторе направлен против направления вращения и его преодолевает первичный двигатель, вращающий генератор. Отдаваемая первичным двигателем механическая энергия преобразуется генератором в электрическую энергию.

В электрическом двигателе, наоборот, используется вращающий момент, а э. д. с. машины преодолевается встречно направленным напряжением источника. Электрическая энергия, поступающая от источника, преобразуется в механическую работу.

Таким образом, индуктивная машина постоянного тока, независимо от того, работает ли она генератором или двигателем, без коммутации неосуществима.

### Б. Сравнение индуктивной и емкостной машин

В любой — индуктивной или емкостной — идеальной электрической машине без потерь при работе в двигательном режиме энергия  $W$ , запасенная в поле машины, полностью преобразуется в механическую работу за половину ее оборота. Тогда мощность машины

$$P = \frac{W}{T} = 2nW,$$

где  $T$  — период вращения;  $n$  — число оборотов в единицу времени.

Это выражение из-за обратимости машин остается справедливым и для генераторного режима.

Обычно, сравнивая между собой емкостные и индуктивные машины, сопоставляют плотности энергии электрического и магнитного полей в зазоре машин, где сосредоточена основная доля энергии поля. В емкостной машине удается достичь напряженности поля свыше  $600 \text{ кВ/см}$ , что соответствует плотности энергии электрического поля

$$W_0 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{(6 \cdot 10^7)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 16 \text{ кДж/м}^3.$$

Плотность энергии магнитного поля при индукции  $B = 1 \text{ тл}$

$$W_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 400 \text{ кДж/м}^3$$

в 25 раз превышает плотность энергии в емкостной машине. На этом основании делают вывод о преимуществе индуктивных машин над емкостными.

Однако нужно сравнивать не плотности энергии магнитного и электрических полей в зазоре машин, а отношения энергии, запасенной в рабочем объеме машин, к объему всей машины.

В индуктивных машинах значительную часть их объема занимает ферромагнитный потокопровод, служащий для замыкания непрерывного магнитного потока. Поток же вектора смещения прерывен, начинаясь и кончаясь на заряженных проводниках. Поэтому емкостная машина не имеет потокопровода, и рабочий объем между взаимодействующими поверхностями составляет значительную долю всего объема машины. Таким образом, даже при меньшей плотности энергии электрического поля емкостная машина может не уступать индуктивной по величине энергии и мощности, приходящихся на единицу полного объема машины.

В отличие от индуктивных машин, являющихся машинами относительно невысокого напряжения и больших токов, емкостные машины — машины высокого напряжения (сотни и тысячи киловольт) и малых токов.

Индуктивные машины широко применяются во всех отраслях техники. Емкостные машины, получившие сравнительно узкую область применения, используются при исследовании атомного ядра, для окраски в электрическом поле, в электронно-ионной технике, для электросепарации и т. п.

## § 2.7. Проводник с током в магнитном поле

### 1. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

Возникающие в системе контуров с токами силы нужно рассматривать как результат взаимодействия провода с током с магнитным полем других контуров. Это позволяет определить силы и в том случае, когда один из контуров в явном виде отсутствует, например в системах, содержащих постоянные магниты.

Пусть элемент  $dl$  провода, представляющего часть замкнутого контура с током  $I$  (рис. 2.11), находится в магнитном поле с индукцией  $B$ . Под действием возникающей силы  $df$  элемент занял новое положение, переместившись на величину  $dx$ .

Тогда механическая работа

$$dA = df dx = I d\psi = I d\Phi = I B dx = I [dx d\mathbf{B}],$$

откуда сила, действующая на элемент длины  $dl$  провода с током,

$$df = I [d\mathbf{B}].$$

В соответствии с векторным произведением  $[d\mathbf{B}]$  направление силы связано с направлением тока ( $d\mathbf{l}$ ) и поля ( $\mathbf{B}$ ) правилом правого винта: *вращение правого винта от тока к полю (по меньшему углу) дает направление силы, совпадающее с направлением поступательного движения винта.*

Для провода длиной  $l$

$$\mathbf{f} = I \int [d\mathbf{B}].$$

Если прямой провод длиной  $l$  находится в однородном поле, образуя угол  $\alpha$  с направлением поля, то

$$f = BIl \sin \alpha,$$

а в частном случае прямого провода, перпендикулярного направлению поля,

$$f = BIl.$$

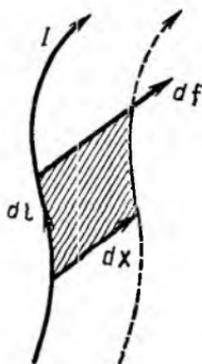


Рис. 2.11

Следует помнить, что магнитное поле действует непосредственно на ток, а не на провод. Передача действия на провод осуществляется за счет связи свободных электронов с веществом провода. Поэтому это выражение для силы сохраняется и в случае, когда ток существует без провода, как, например, ток переноса.

## 2. Прибор магнитоэлектрической системы

В приборе магнитоэлектрической системы (рис. 2.12, а) легкая рамка  $A$ , представляющая собой катушку из  $\omega$  витков, находится в магнитном поле постоянного магнита  $M$ , снабженного полюсными наконечниками и сердечником из мягкой стали. При прохождении тока через рамку последняя поворачивается вместе с укрепленной на оси стрелкой  $C$ , конец которой перемещается по шкале. Противодействующий момент создается спиральными пружинами  $D$ , одновременно служащими токоподводами в подвижную рамку. Для создания успокоения используется магнитоиндукционный принцип (см. п. 2 § 2.3): катушка прибора намотана на алюминиевый каркас, в котором во время поворота подвижной части магнитным полем магнита индуцируется ток, тормозящий движение.

Обычно в магнитоэлектрических приборах поле в воздушном зазоре радиально-однородно (рис. 2.12, б): в любом месте в пределах рабочей части индукция равна  $B$ .

В этом случае силы, действующие на рамку высотой  $l$  и шириной  $a$ ,

$$f = \omega l B l$$

направлены всегда по касательной к окружности с диаметром  $a$ .

Вращающий момент, действующий на рамку,

$$M_{\text{вр}} = fa = \omega l B a l = k l$$

пропорционален току рамки. Следовательно, такой прибор при противодействующем моменте  $M_{\text{пр}} = k_1 \alpha$  имеет равномерную шкалу.

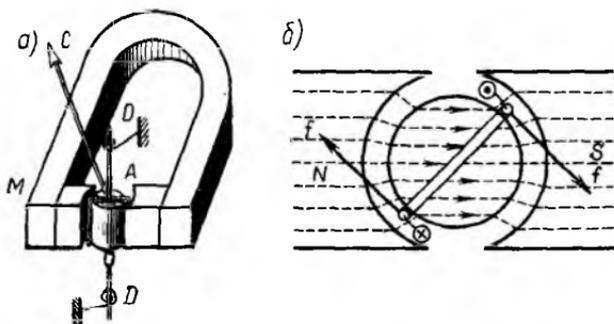


Рис. 2.12

Магнитоэлектрический прибор также может быть использован в качестве амперметра или вольтметра.

Как видно из выражения для момента вращения, его знак зависит от направления тока в катушке. Поэтому на зажимах прибора показана его полярность, обеспечивающая отклонение подвижной части в нужную сторону.

## § 2.8. Заряженная частица в магнитном поле

### 1. Сила, действующая на движущийся в магнитном поле заряд

Пусть заряд  $dq$  движется в магнитном поле индукции  $B$  со скоростью  $v = \frac{dx}{dt}$  в направлении оси  $x$ . Такой движущийся заряд эквивалентен току  $i = \frac{dq}{dt}$ , текущему в том же направлении. На элемент длиной  $dx$  этого тока действует сила

$$df = i [dx \mathbf{B}] = \frac{dq}{dt} [dx \mathbf{B}].$$

После введения  $dt$  под знак векторного произведения и замены  $\frac{dx}{dt}$  скоростью  $v$  получается выражение для силы Лоренца:

$$df = dq [\mathbf{v} \mathbf{B}],$$

действующей на движущийся в магнитном поле заряд. Эта сила направлена перпендикулярно плоскости, в которой расположены век-

торы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ . Так как на заряд может воздействовать только электрическое поле напряженностью  $E$ , из сопоставления силы этого воздействия  $d\mathbf{f} = dq\mathbf{E}$  с силой Лоренца  $d\mathbf{f} = dq[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  видно, что в движущемся проводнике возникает электрическое поле напряженностью

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Из этого выражения видно, что на неподвижный ( $v = 0$ ) заряд или заряд, движущийся вдоль магнитного поля, оно не действует, так как при этом  $\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{B}] = 0$ .

Направление вектора  $\mathbf{E}$  определяется правилом правого винта: *вращение винта от вектора скорости к вектору индукции дает направление электрического поля, совпадающее с направлением поступательного движения винта.*

Следовательно, в проводнике возникает э. д. с.

$$e = \int \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int [\mathbf{v}\mathbf{B}] d\mathbf{l}.$$

Это выражение является законом электромагнитной индукции в формулировке Фарадея.

В частном случае, широко используемом в технике, когда прямой провод движется в однородном магнитном поле перпендикулярно полю и самому себе, э. д. с. в нем

$$e = Blv.$$

## 2. Движение заряженной частицы в магнитном поле

Наряду с управлением движения заряженных частиц электрическим полем в электронно-ионной технике — электронных осциллографах, в ускорителях частиц, используемых при исследовании атомного ядра, фотоэлектронных умножителях и т. п. применяется также управление магнитным полем.

Если в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  под действием силы Лоренца движется заряженная частица с массой  $m$  и зарядом  $Q$ , то ее уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} = Q\mathbf{E} = Q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Раскладывая вектор скорости на две составляющие:  $v_{\parallel}$ , параллельную вектору магнитной индукции, и  $v_{\perp}$ , перпендикулярную  $\mathbf{B}$ , и учитывая, что  $[\mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{B}] = 0$ , а  $[\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{B}] = v_{\perp}\mathbf{B}$ , можно получить из уравнения движения два уравнения:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad m \frac{dv_{\perp}}{dt} = Qv_{\perp}B = \mathbf{f}.$$

Первое уравнение, решением которого является  $v_{\parallel} = \text{const}$ , описывает равномерное движение частицы, параллельное направлению вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Из второго уравнения следует, что частица движется в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , с постоянным ускорением

$$a = \frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{f}{m} = \frac{Qv_{\perp}B}{m},$$

направленным, как и сила  $f$ , перпендикулярно составляющей скорости  $v_{\perp}$ . Как известно, такое движение есть равномерное движение по окружности, радиус которой

$$R = \frac{v_{\perp}^2}{a} = \frac{mv_{\perp}}{QB}.$$

Таким образом, в однородном поле, когда величина и направление вектора магнитной индукции неизменны, заряженная частица движется по винтовой линии, расположенной по боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса  $R$ . Ось этого цилиндра совпадает по направлению с вектором  $\mathbf{B}$ .

В частном случае, когда  $v_{\perp} = 0$ , заряженная частица движется вдоль линии магнитной индукции — вдоль поля, причем последнее не оказывает никакого действия на движение частицы.

В неоднородном магнитном поле при движении заряженной частицы в направлении возрастания поля силовые линии будут сходящимися, и

движение происходит по винтовой линии с уменьшающимся радиусом (рис. 2.13). Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  имеет, кроме продольной  $B_{\parallel}$ , еще и поперечную составляющую  $B_r$ , направленную к оси винтовой линии.

Эта составляющая вектора магнитной индукции создает силу, равную  $Qv_{\perp}B_r$  и направленную против продольной составляющей скорости  $v_{\parallel}$ . Под действием этой силы уменьшается расстояние между соседними витками траектории — шаг винтовой линии. Если составляющая скорости, обусловленная действием этой силы, превысит величину  $v_{\parallel}$ , то частица, продолжая движение по винтовой линии, начнет двигаться в противоположном  $B_{\parallel}$  направлении с увеличением радиуса  $R$  витков, сохраняя направление вращения.

Изучение движения заряженных частиц в магнитном поле представляет также интерес для теории северных сияний, магнитных бурь, поведения космических частиц в магнитном поле Земли и образования радиационных поясов Земли.

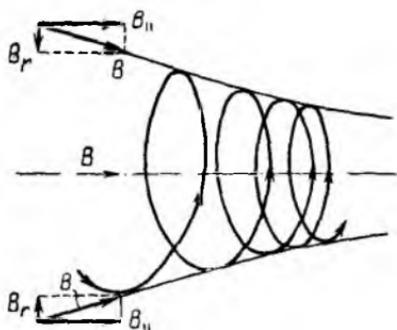


Рис. 2.13

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 3.1. Законы электрических цепей

Простая электрическая цепь состоит из источника и приемника электрической энергии. Если приемник представляет собой резистор, имеющий сопротивление  $R$  или проводимость  $G$  (рис. 3.1, а), то ток  $I$  и напряжение  $U$  источника связаны законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = GU \quad \text{или} \quad U = \frac{I}{G} = RI.$$

Для расчета электрических цепей необходимо учитывать направление токов и напряжений. Хотя в общем случае ток является движением электрических зарядов разных знаков в противоположные стороны, условным положительным направлением тока принято считать направление перемещения положительных зарядов, т. е. в приемнике — от положительного зажима источника к отрицательному.

Если ток идет в противоположном направлении, он получает отрицательный знак.

В соответствии с равенством  $U = RI$  положительное направление напряжения совпадает с положительным направлением тока, для встречного направления тока напряжение также получает отрицательный знак. Если направление тока (напряжения) неизвестно, его приходится выбирать произвольно и определять направление в результате расчета по знаку тока (напряжения).

В дальнейшем в большинстве случаев для краткости условное положительное направление называется просто направлением.

В цепи рис. 3.1, а источник расходует энергию, переходящую в сопротивлении в тепло; при этом мощность определяется законом Джоуля — Ленца:

$$P = UI = RI^2 = GU^2.$$

В системе СИ единицей мощности является  $\text{в} \cdot \text{а} = \text{вт}$  (ватт).

Примером приемников, преобразующих электрическую энергию в другие виды, может служить индуктивный электрический двига-

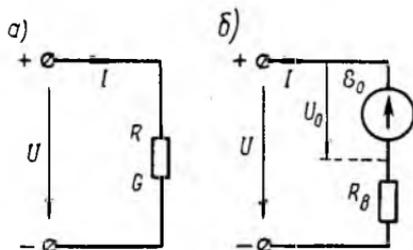


Рис. 3.1

тель. Как показано в п. 4 § 2.6, в двигателе возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}_0$ , направленная навстречу приложенному напряжению, а следовательно, и току; кроме того, двигатель имеет, очевидно, внутреннее сопротивление  $R_B$ . Такого рода приемник может быть представлен в виде схемы, показанной на рис. 3.1, б. Аналогичен случай зарядки аккумулятора, когда ток направлен против э. д. с. аккумулятора, за счет чего и происходит превращение электрической энергии в химическую.

Таким образом, в этих случаях в цепи действует напряжение  $U$  источника и встречная э. д. с.  $\mathcal{E}_0$  приемника, и выражение для тока по закону Ома получает вид:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_0}{R_B}.$$

Однако такой приемник можно заменить эквивалентным сопротивлением. Так как напряжение  $U_0$  на участке цепи с э. д. с.  $\mathcal{E}_0$  по величине равно  $\mathcal{E}_0$  и направлено ей навстречу, т. е.  $U_0 = -\mathcal{E}_0$ , эквивалентное сопротивление этого участка

$$R_0 = \frac{U_0}{I} = -\frac{\mathcal{E}_0}{I}.$$

Иногда расчет цепей упрощается, если произвести обратную замену какого-либо сопротивления  $R_0$ , по которому проходит ток  $I$  эквивалентной э. д. с., равной, очевидно,

$$\mathcal{E}_0 = -R_0 I = -U_0.$$

Отрицательный знак указывает на то, что эквивалентная э. д. с. направлена навстречу току.

Сложная электрическая цепь и ее графическое изображение, называемое с х е м о й, состоит из в е т в е й. Ветвью называется участок, по которому проходит один и тот же ток. Точки, в которых сходятся не менее трех ветвей, называются у з л а м и. В сложной цепи и ее схеме всегда имеются несколько замкнутых к о н т у р о в, состоящих из разных ветвей.

Для любого узла на основе принципа непрерывности тока может быть написан п е р в ы й з а к о н К и р х г о ф а:

$$\sum I_k = 0,$$

т. е. алгебраическая сумма токов в ветвях, образующих узел, равна нулю. При этом токи, уходящие от узла, считаются положительными, а токи, приходящие к узлу — отрицательными (или наоборот). Например, в параллельной цепи с одним источником (рис. 3.2) токи совпадают по направлению с напряжением и для каждого из двух узлов цепи можно написать:

$$-I + I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \text{или} \quad I_1 + I_2 + I_3 = I.$$

Деление этого равенства на общее для всех ветвей напряжение  $U$  дает:

$$\frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} = \frac{I}{U} \quad \text{или} \quad G_1 + G_2 + G_3 = G.$$

Следовательно, проводимость всей цепи равна сумме проводимостей параллельно соединенных приемников.

Если выразить напряжения на ветвях, образующих любой контур, через потенциалы  $\varphi$  узлов, к которым примыкают ветви, то сумма этих напряжений

$$U_{ab} + U_{bc} + \dots + U_{na} = (\varphi_a - \varphi_b) + (\varphi_b - \varphi_c) + \dots + (\varphi_n - \varphi_a) = 0.$$

Это и есть второй закон Кирхгофа:

$$\sum U_k = 0,$$

т. е. алгебраическая сумма напряжений на ветвях, образующих контур, равна нулю. При этом напряжения ветвей, у которых потенциал первого по направлению обхода узла выше, чем второго, считаются поло-

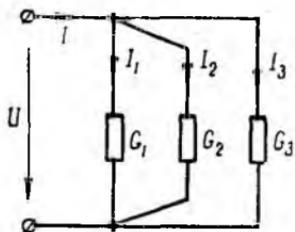


Рис. 3.2

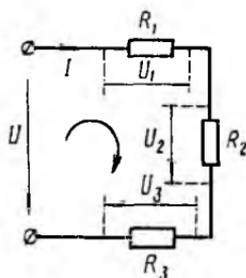


Рис. 3.3

жительными, остальные — отрицательными. Применяя это правило для последовательной цепи с одним источником и учитывая, что все напряжения совпадают по направлению с током, для указанного на рис. 3.3 направления обхода надо написать:

$$U_1 + U_2 + U_3 - U = 0 \quad \text{или} \quad U_1 + U_2 + U_3 = U.$$

Деление этого равенства на общий для всей цепи ток  $I$  дает

$$\frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} = \frac{U}{I} \quad \text{или} \quad R_1 + R_2 + R_3 = R.$$

Следовательно, сопротивление всей цепи равно сумме сопротивлений последовательно соединенных приемников.

Основной задачей расчета электрической цепи является ее анализ, который обычно заключается в определении токов, напряжений и мощностей ветвей цепи по заданным их сопротивлениям или проводимостям и по заданным источникам электрической энергии. Эти задачи имеют однозначное решение, которое для линейных цепей может быть получено составлением и решением системы алгебраических уравнений с учетом законов Кирхгофа, Ома и Джоуля—Ленца.

Второй важной задачей расчета цепей является синтез, т. е. создание цепи с заданными свойствами.

### § 3.2. Источники напряжения и тока и их эквивалентность

В зависимости от принципа действия источники электрической энергии можно разделить на источники напряжения (э. д. с.) и источники тока. Так, например, химические источники электрической энергии основаны на возникновении разности потенциалов между различными электродами, помещенными в электролит. Эта разность потенциалов, наибольшая при разомкнутой цепи, т. е. при холостом ходе, и называется э. д. с.  $\mathcal{E}$ . При нагрузке разность потенциалов становится меньше э. д. с.  $\mathcal{E}$  из-за появления встречной э. д. с. поляризации и падения напряжения во внутреннем сопротивлении и называется напряжением  $U$ .

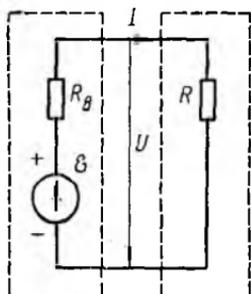


Рис. 3.4

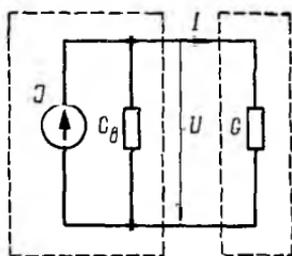


Рис. 3.5

Индуктивные генераторы основаны на возникновении э. д. с. индукции при изменении магнитного поля (см. п. 4 § 2.6). При нагрузке их напряжение  $U$  также становится меньше э. д. с.  $\mathcal{E}$  холостого хода, в частности из-за падения напряжения во внутреннем сопротивлении.

Таким образом, эти источники являются источниками напряжения; при расчете цепей источники напряжения обычно заменяются эквивалентной схемой (рис. 3.4), состоящей из последовательного соединения источника постоянной э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутреннего сопротивления  $R_b$ , величина которого учитывает все причины изменения напряжения при нагрузке.

Как было принято, направление напряжения  $U$  совпадает с направлением тока  $I$  во внешней цепи — от плюса к минусу, что может быть учтено индексом  $\pm$ , т. е.  $U_{\pm}$ . Тогда э. д. с. в источнике, также совпадающая по направлению с током, но текущим в источнике от минуса к плюсу, должна быть обозначена  $\mathcal{E}_{\mp}$ . При холостом ходе

$$U_{x,x\pm} = \mathcal{E}_{\mp}.$$

При нагрузке можно применить закон Ома, сложив внешнее  $R$  и внутреннее  $R_b$  сопротивления:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\mp}}{R + R_b},$$

откуда

$$RI = U_{\pm} = \mathcal{E}_{\mp} - R_b I.$$

Обычно это соотношение записывают без индексов:

$$U = \mathcal{E} - R_{в} I,$$

но при этом следует помнить о противоположных положительных направлениях  $U$  и  $\mathcal{E}$ .

При внешних сопротивлениях  $R$ , много больших, чем внутреннее сопротивление  $R_{в}$  ( $R \gg R_{в}$ ), напряжение  $U$  остается практически постоянным ( $U \approx \mathcal{E}$ ) при изменении  $R$ .

Емкостные генераторы основаны на возникновении тока при изменении электрического поля (см. п. 3 § 2.3). При коротком замыкании они отдают во внешнюю цепь весь генерируемый ими внутренний ток  $J$ .

При нагрузке, т. е. включении сопротивления, появляется напряжение, и ток внешней цепи  $I$  становится меньше  $J$ , в частности, из-за утечки через несовершенную изоляцию генератора.

Таким образом, этот источник электрической энергии является источником тока. При расчете цепей он обычно заменяется эквивалентной схемой (рис. 3.5), состоящей из параллельного соединения источника постоянного внутреннего тока  $J$  и внутренней проводимости  $G_{в}$ , величина которой учитывает все причины изменения внешнего тока при нагрузке. Тогда напряжение  $U$  и ток  $I$  в проводимости  $G$  нагрузки будут:

$$U = \frac{I}{G + G_{в}} \quad \text{и} \quad I = GU = J - G_{в}U.$$

При проводимостях  $G$  нагрузки, много больших, чем внутренняя проводимость  $G_{в}$  ( $G \gg G_{в}$ ), ток  $I$  нагрузки остается практически неизменным ( $I \approx J$ ) при изменении  $G$ .

При расчете цепей принцип действия реальных источников электрической энергии несуществен и источник напряжения может быть заменен источником тока, ему эквивалентным, т. е. таким, который не вызовет изменения напряжений и токов остальных участков цепи. Аналогично всякий источник тока может быть заменен эквивалентным ему источником напряжения. Такие замены в ряде случаев упрощают расчеты. Так как каждый из этих источников определяется двумя параметрами (см. рис. 3.4 и 3.5), условиями эквивалентности должны быть два равенства, например, равенство напряжений при холостом ходе  $U_{х. х}$  и токов при коротком замыкании  $I_{к. з}$ :

$$U_{х. х} = \mathcal{E} = \frac{J}{G_{в}} \quad \text{и} \quad I_{к. з} = \frac{\mathcal{E}}{R_{в}} = J,$$

откуда

$$G_{в} = \frac{1}{R_{в}}.$$

Таким образом, источник тока, эквивалентный источнику напряжения, должен генерировать ток, равный току короткого замыкания источника напряжения, и иметь параллельное внутреннее сопротивление, равное последовательному внутреннему сопротивлению источника напряжения. Положительное направление тока  $J$  выбирается таким, чтобы направление тока во внешней цепи осталось тем же.

При равенстве полезных мощностей  $P = UI$ , отдаваемых эквивалентными источниками во внешнюю цепь, полные мощности (т. е. вместе с потерями в их внутреннем сопротивлении)  $P_H$  источника напряжения и  $P_T$  источника тока

$$P_H = \mathcal{E}I, \quad P_T = JU = \frac{\mathcal{E}}{R_B} RI = \frac{R}{R_B} P_H$$

и их к. п. д., равные отношению полезной мощности к полной их мощности,

$$\eta_H = \frac{P}{P_H}, \quad \eta_T = \frac{P}{P_T} = \frac{R_B}{R} \cdot \frac{P}{P_H} = \frac{R_B}{R} \eta_H$$

в общем случае не равны между собой. К. п. д.  $\eta_H > \eta_T$  при  $R > R_B$ , а  $\eta_T > \eta_H$  при  $R < R_B$  и лишь при  $R = R_B$  полные мощности и к. п. д. эквивалентных источников становятся одинаковыми.

### § 3.3. Линия передачи и работа источника на нагрузку

В качестве первой, наиболее простой задачи на расчет цепи практический интерес представляет исследование передачи энергии постоянным током (рис. 3.6, а) от источника с постоянным напряжением

$U_1$  через постоянное сопротивление  $R_0$  обоих проводов линии к переменному сопротивлению  $R_2$  нагрузки. Если пренебречь током утечки между проводами линии через несовершенную изоляцию, то ток цепи

$$I = \frac{U_1}{R_2 + R_0}.$$

По мере уменьшения  $R_2$  ток  $I$  будет расти от нуля при холостом ходе ( $R_2 = \infty$ ) до максимального значения  $I_{к.з} = \frac{U_1}{R_0}$  при коротком замыкании ( $R_2 = 0$ ). В дальнейшем ток  $I$  принят за независимую переменную и отложен по оси абсцисс графика рис. 3.6, б.

Напряжение на сопротивлении  $R_0$  линии, часто называемое падением напряжения в линии и равное  $U_0 = R_0 I$ , растет линейно с током от нуля (холостой ход) до  $U_1$  (короткое замыкание).

Напряжение на приемнике

$$U_2 = U_1 - U_0 = R_2 I = \frac{R_2}{R_2 + R_0} U_1 = \frac{U_1}{1 + \frac{R_0}{R_2}}$$

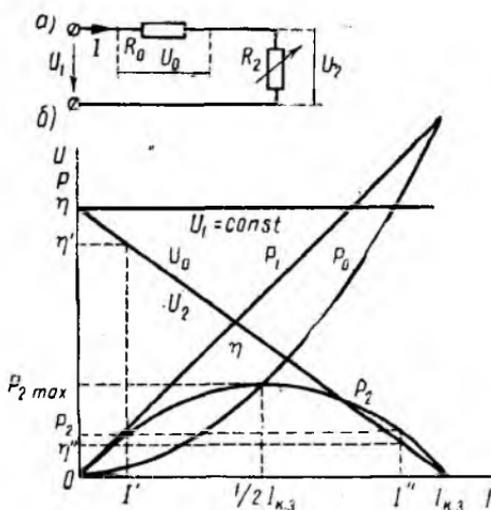


Рис. 3.6

при холостом ходе равно  $U_1$ ; с уменьшением  $R_2$  напряжение  $U_2$  тоже уменьшается до нуля при коротком замыкании. График изменения  $U_0$  и  $U_2$  представляет собой прямую, причем  $U_2$  отсчитывается от оси абсцисс, а  $U_0$  — от горизонтали  $U_1 = \text{const}$ .

Мощность, отдаваемая источником энергии в цепь,

$$P_1 = U_1 I$$

растет пропорционально току.

Мощность, расходуемая в линии (потери),

$$P_0 = U_0 I = R_0 I^2$$

возрастает пропорционально квадрату тока и при коротком замыкании становится равной мощности источника.

Мощность, потребляемая приемником (полезная мощность),

$$P_2 = U_2 I = P_1 - P_0 = U_1 I - R_0 I^2$$

равна нулю при холостом ходе ( $I = 0$ ) и при коротком замыкании ( $U_2 = 0$ ). Из исследования  $P_2(I)$  на максимум:

$$\frac{\partial P_2}{\partial I} = U_1 - 2R_0 I = 0$$

вытекает, что  $P_2$  имеет максимум при  $I = \frac{U_1}{2R_0}$ , т. е. при  $R_2 = R_0$ .

Следовательно, при равенстве сопротивлений приемника  $R_2$  и линии  $R_0$  полезная мощность получает максимальное значение:

$$P_{2 \max} = R_0 I_{R_2=R_0}^2 = \frac{R_0 U_1^2}{(2R_0)^2} = \frac{U_1^2}{4R_0}$$

Зависимости  $P_1(I)$ ,  $P_0(I)$  и  $P_2(I)$  также приведены на рис. 3.6, б.

К. п. д.  $\eta$  электропередачи равен отношению полезной мощности к мощности источника:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I}{U_1 I} = \frac{U_2}{U_1}$$

Он равен нулю при коротком замыкании и изменяется, как и  $U_2$ , по линейному закону, стремясь к единице при холостом ходе. При передаче максимальной мощности к. п. д. равен 0,5; при этом напряжение приемника равно половине напряжения источника.

Из рис. 3.6, б видно, что мощность  $P_2 < P_{2 \max}$  может быть передана при двух режимах, отмеченных одним и двумя штрихами, причем в первом режиме к. п. д. и напряжение на приемнике будут больше, а ток — меньше, чем во втором. Следовательно, из всех физически возможных режимов работы технически целесообразными будут режимы в левой части графика до  $P_{2 \max}$  при  $\eta \geq 0,5$ .

Режим передачи максимальной мощности применяется в маломощных линиях связи, так как там низкий к. п. д. роли не играет.

Передача больших мощностей осуществляется при высоких значениях к. п. д., причем величина оптимального к. п. д., а следовательно, потерь определяется экономическими расчетами. При этом допустимые потери  $P_0$  выражаются в долях полезной мощности  $P_2$ :

$$P_0 = kP_2,$$

где коэффициент потерь  $k$  равен  $2 \div 10\%$ . При передаче мощности  $P_1$  на расстояние  $l$  (длина проводов  $2l$ ) при напряжении  $U_2$  и, следовательно, токе  $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$  эти потери

$$P_0 = kP_2 = R_0 I^2 = \rho \frac{2l}{s} \left( \frac{P_2}{U_2} \right)^2,$$

откуда определяется необходимое сечение проводов

$$s = \frac{2\rho l P_2}{k U_2^2}.$$

Из этого выражения видно преимущество высокого напряжения: *при той же передаваемой мощности сечение провода обратно пропорционально квадрату напряжения*. Однако с ростом напряжения увеличивается стоимость изоляции линии. На практике применяют тем большее напряжение, чем больше передаваемая мощность  $P_2$  и дальность передачи  $l$ .

Потери в проводах превращаются в тепло и повышают их температуру. В нормах для всех типов и стандартных сечений проводов указан максимально допустимый ток по условиям нагрева. Поэтому полученное по расчету сечение, округленное до ближайшего стандартного, может быть применено лишь в том случае, когда допустимый для него ток равен или больше тока линии; в противном случае приходится выбирать большее сечение.

Первая передача электрической энергии постоянным током была осуществлена Ф. А. Пирочким в Петербурге в 1874 г. от генератора 6 л. с. на расстояние 200 м. В 1880 г. Д. А. Лачинов в статье «Электромеханическая работа» показал, что при больших расстояниях можно сохранить высокий к. п. д. передачи, если увеличить напряжение. В 1882 г. Депре построил линию передачи от гидроэлектростанции в Мисбах до Мюнхена длиной 57 км при напряжении около 1000 в, с полезной мощностью 0,25 л. с. и к. п. д. 60%.

В последующие годы линии постоянного тока получили распространение только для передачи небольших мощностей на малые расстояния; для дальних и мощных электропередач стал широко применяться переменный ток, позволяющий весьма просто в начале линии повышать, а в конце понижать напряжение с помощью трансформаторов. В некоторых случаях мощных передач оказалась целесообразной также передача энергии постоянным током, но при сверхвысоком напряжении. В СССР уже ряд лет работает электропередача постоянным током из Волгограда в Донбасс мощностью 720 000 квт при напряжении 800 кв.

Полученные выводы можно перенести на задачу о работе источника напряжения (см. рис. 3.4.) на переменную нагрузку, заменив напряжение  $U_1$  на э. д. с.  $\mathcal{E}$  источника, сопротивление  $R_0$  линии на внутреннее сопротивление  $R_v$  источника и обозначив переменную нагрузку  $R_2$  через  $R$ . Следовательно, источник будет отдавать приемнику максимальную мощность при  $R = R_v$ , но при этом такая же мощность будет расходоваться внутри источника. Обычно источники напряжения работают в более экономичном режиме, когда сопротивление нагрузки в несколько раз превышает внутреннее сопротивление источника.

### § 3.4. Расчет цепей методами преобразования и пропорционального пересчета

Метод преобразования заключается в замене участков цепи более простыми, им эквивалентными, т. е. не вызывающими изменения напряжений и токов в остальной части цепи.

При расчете цепи со смешанным, т. е. параллельно-последовательным соединением приемников, питаемой одним источником (например, рис. 3.7, а) группа приемников, соединенных параллельно, заменяется одним, им эквивалентным (рис. 3.7, б), с проводимостью

$$G_{12} = G_1 + G_2.$$

Группа приемников, соединенных

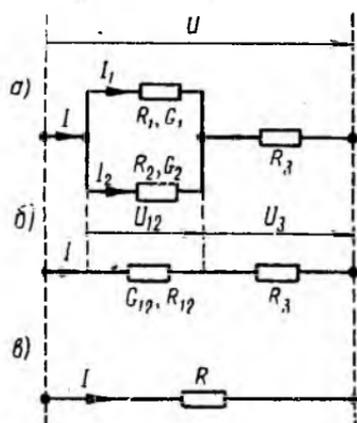


Рис. 3.7

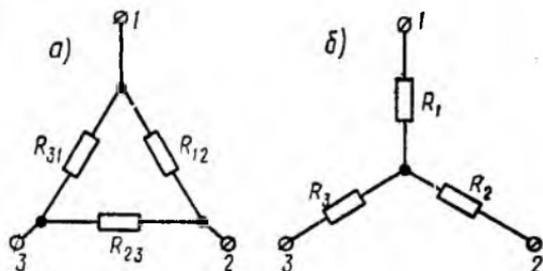


Рис. 3.8

последовательно, заменяется одним, им эквивалентным (рис. 3.7, в), с сопротивлением  $R = R_{12} + R_3$ , где  $R_{12} = \frac{1}{G_{12}}$ .

После замены всей цепи одним приемником определяется его ток  $I$  при заданном напряжении или напряжение при заданном токе. Затем схема постепенно разворачивается в первоначальную цепь с попутным определением напряжений и токов отдельных приемников:

$$U_{12} = R_{12}I, \quad U_3 = R_3I, \quad I_1 = G_1U_{12}, \quad I_2 = G_2U_{12}.$$

Эту же задачу можно решить методом пропорционального пересчета, задавшись током в одной из параллельных ветвей, что позволит определить напряжения и токи всех ветвей и напряжение всей цепи  $U'$ , отличное от заданного напряжения  $U$ . Так как в линейной цепи токи пропорциональны напряжениям, для получения правильного результата надо полученные значения умножить на  $U/U'$ .

Методы преобразования и пропорционального пересчета применимы для некоторых цепей, не являющихся сочетанием последовательных и параллельных соединений. Их схемы состоят из так называемых треугольников (рис. 3.8, а) и трехлучевых звезд (рис. 3.8, б). Примером может служить неуравновешенный мост (рис. 3.9, а). Контурь 1-2-3-1 и 2-3-4-2 этой цепи, состоящие из трех

ветвей, являются треугольниками, узлы 2 и 3 — нулевыми точками и звезд. Расчет такой цепи можно свести к задаче на смешанное соединение, если заменить один из треугольников эквивалентной ему звездой или одну из звезд эквивалентным ей треугольником. Так, треугольник  $R_{12}R_{23}R_{31}$  заменен на рис. 3.9, б звездой  $R_1R_2R_3$ , звезда  $R_{12}R_{23}R_{24}$  — треугольником  $R'_{14}R'_{43}R'_{31}$  на рис. 3.9, в. Получившиеся цепи являются уже сочетанием последовательно-параллельных соединений и решаются указанными выше путями; затем совершается обратный переход к исходной цепи.

Для эквивалентности треугольника и звезды (см. рис. 3.8) необходимо и достаточно, чтобы результирующее сопротивление между

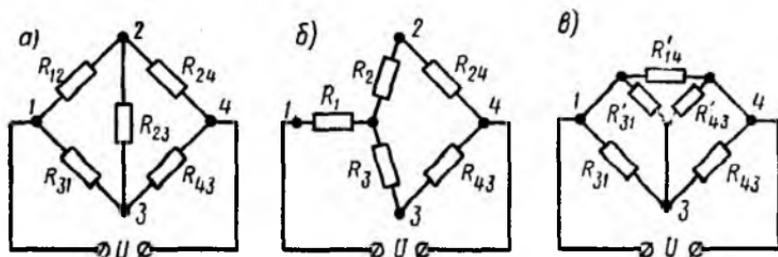


Рис. 3.9

каждой парой точек при отключенной третьей точке у обеих цепей было одинаковым. Так, для точек 1, 2 при отключенной точке 3

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23} + R_{31}}} = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.1)$$

Аналогичные уравнения для точек 2, 3 и 3, 1 можно написать, пользуясь круговой перестановкой индексов 1, 2, 3:

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (3.2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.3)$$

Складывая уравнения (3.1) и (3.3) и вычитая (3.2), можно получить переходные формулы от треугольника к звезде:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

и далее по круговой перестановке

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Для вычисления переходных формул от звезды к треугольнику удобно мысленно замкнуть у обеих цепей две одноименные пары точек и приравнять проводимости между этой общей точкой и третьей точкой. Так, между точкой 2, 3 и точкой 1 проводимости (рис. 3.10)

$$G_{12} + G_{31} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2 + G_3}} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (3.1')$$

и далее по круговой перестановке индексов

$$G_{23} + G_{12} = \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (3.2')$$

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}. \quad (3.3')$$

Решая аналогично предыдущему уравнения (3.1'), (3.2'), (3.3'), можно получить переходную формулу

$$G_{12} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

и далее по круговой перестановке

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

и

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Давая общую оценку методам преобразования и пропорционального пересчета в изложенном виде, можно указать на их простоту, однако их применение ограничено цепями с одним источником энергии.

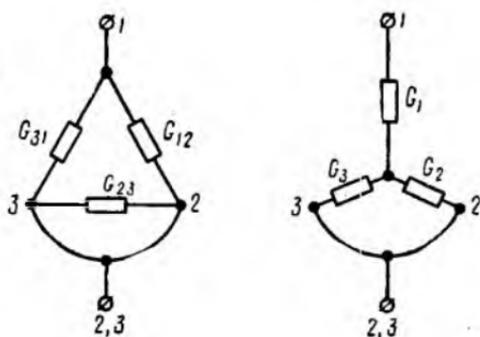


Рис. 3.10

## § 3.5. Расчет цепей по законам Кирхгофа

### 1. Две формы записи законов Кирхгофа

В § 3.1 были даны оба закона Кирхгофа: первый — для узлов и второй — для контуров в следующей симметричной форме записи:

$$\sum I_k = 0,$$

$$\sum U_k = 0,$$

т. е. алгебраическая сумма токов в ветвях, сходящихся в узле, равна нулю.

т. е. алгебраическая сумма напряжений на ветвях, входящих в контур, равна нулю.

Если между узлами цепи параллельно включены источник тока и приемник (рис. 3.11, а), можно объединить внутреннюю проводимость  $G_b$  с внешней  $G'$ :

$$G_b + G' = G.$$

Если в ветви последовательно включены источник напряжения и приемник (рис. 3.11, б), можно объединить внутреннее сопротивление  $R_b$  с внешним  $R'$ :

$$R_b + R' = R.$$

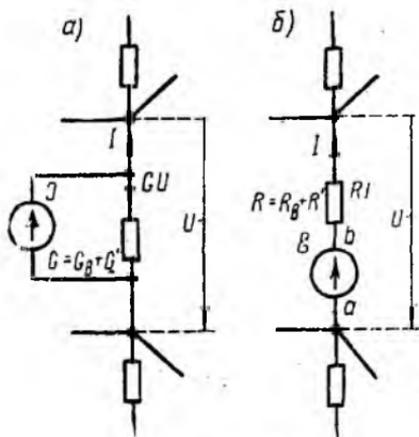


Рис. 3.11

Тогда для тока  $I$  в выходной ветви рис. 3.11, а и напряжения  $U$  на ветви рис. 3.11, б можно написать:

$$I = J - GU, \quad U = \mathcal{E} - RI.$$

Эти равенства следует понимать алгебраически: знак минус сохраняется, когда источники отдают энергию, т. е. когда при выбранных направлениях напряжений и токов и обходе контура  $J, G$  (рис. 3.11, а) совпадают действительные направления  $J$  и  $U$ , а на рис. 3.11, б совпадают направления  $\mathcal{E}$  и  $I$ .

Подставляя эти соотношения в первую форму записи законов Кирхгофа, можно получить вторую симметричную форму их записи:

$$\sum J_k = \sum G_k U_k, \quad \sum \mathcal{E}_k = \sum R_k I_k,$$

т. е. алгебраическая сумма внутренних токов источников тока в ветвях, сходящихся в узле, равна алгебраической сумме токов в проводимостях остальных ветвей этого узла.

т. е. алгебраическая сумма э. д. с. источников напряжения, входящих в контур, равна алгебраической сумме напряжений на сопротивлениях ветвей этого контура.

Так как обычно источники электрической энергии задаются в виде источников напряжения, первый закон Кирхгофа записывается в первой форме, а второй — во второй, и система этих уравнений получает следующий несимметричный вид:

$$\sum I_k = 0, \quad \sum \mathcal{E}_k = \sum R_k I_k.$$

## 2. Составление уравнений по законам Кирхгофа

Обычно заданными являются величины и направления всех э. д. с. источников напряжения и внутренних токов источников тока и значения всех внутренних и внешних сопротивлений или проводимостей цепи, а определяют токи и по ним — напряжения ветвей. Поэтому число неизвестных равно числу  $p$  ветвей схемы и, следовательно,

столько же независимых уравнений нужно составить по первому и второму законам Кирхгофа.

Так как при составлении уравнений необходимо учесть направления всех токов, направлениями токов следует задаться. Применяя первый закон в первой форме записи, токи, приходящие к узлу и уходящие от него, следует брать с разными знаками. Применяя второй закон во второй форме записи, э. д. с. и токи, направления которых совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, следует считать имеющими положительный знак, остальные — отрицательный, или наоборот.

Уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа для цепи с  $q$  узлами, будут независимыми лишь для  $q - 1$  узлов, так как уравнение для последнего узла  $q$  является следствием предыдущих. Следовательно, по второму закону Кирхгофа надо составить  $p - (q - 1) = p - q + 1$  независимых уравнений.

В большинстве случаев можно изобразить цепь на плоскости так, чтобы она была сочетанием элементарных контуров, не содержащих внутренних ветвей (рис. 3.12). Уравнения, составленные для элементарных контуров, будут, очевидно, независимыми, а их число равно необходимому (доказывается в топологии — разделе геометрии).

Уравнение для какого-либо другого контура будет, очевидно, следствием уравнений для элементарных контуров, охватываемых этим неэлементарным контуром. Поэтому выбор элементарных контуров для составления уравнений по второму закону Кирхгофа гарантирует от ошибок, возможных при использовании произвольных контуров цепи.

Например, для цепи рис. 3.12, имеющей  $p = 6$  ветвей,  $q = 3$  узла и  $p - q + 1 = 4$  элементарных контура, при указанных на схеме направлениях э. д. с., токов и обхода элементарных контуров, независимые уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 + I_6 &= 0, \\ -I_1 + I_2 - I_4 - I_5 &= 0, \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 &= R_1 I_1 + R_2 I_2, \\ \mathcal{E}_2 &= -R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4, \\ -\mathcal{E}_3 &= -R_3 I_3 - R_6 I_6, \\ 0 &= R_4 I_4 - R_5 I_5. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему уравнений любым известным из алгебры способом, находят все неизвестные токи ветвей. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление тока обратно выбранному.

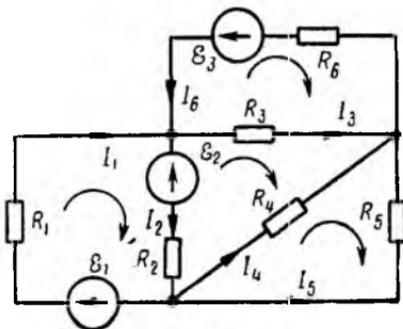


Рис. 3.12

После определения токов по закону Ома вычисляются напряжения, а по закону Джоуля—Ленца находят мощности.

Достоинством рассмотренного метода является его общность, а недостатком — громоздкость решения системы, состоящей из большого числа уравнений. Поэтому кроме непосредственного использования уравнений по законам Кирхгофа применяются основанные на них излагаемые далее методы расчета сложных цепей, упрощающие их схемы (методы наложения и эквивалентного источника энергии) и методы, уменьшающие число неизвестных (методы контурных токов и узловых напряжений).

### § 3.6. Метод наложения

Если для узлов и контуров любой электрической цепи, содержащей источники напряжения с э. д. с.  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ , написать уравнения по законам Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + \dots = 0, \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots,$$

получается система линейных уравнений, из которой ток каждой ветви определяется однозначно.

Если поочередно предположить, что в цепи существует только э. д. с.  $\mathcal{E}_1$ , а остальные равны нулю, затем — только э. д. с.  $\mathcal{E}_2$  и т. д., можно для каждой э. д. с. вычислить соответствующие ей токи ветвей, составив уравнения по законам Кирхгофа при тех же направлениях э. д. с. и токов:

$$I'_1 + I'_2 + \dots = 0, \quad I''_1 + I''_2 + \dots = 0, \dots, \\ R_1 I'_1 + R_2 I'_2 + \dots = \mathcal{E}_1, \quad R_1 I''_1 + R_2 I''_2 + \dots = \mathcal{E}_2, \dots$$

Сложение почленно этих уравнений

$$(I'_1 + I''_1 + \dots) + (I'_2 + I''_2 + \dots) + \dots = 0, \\ R_1 (I'_1 + I''_1 + \dots) + R_2 (I'_2 + I''_2 + \dots) + \dots = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots$$

даст систему, которая также имеет единственное решение для всех неизвестных  $(I'_1 + I''_1 + \dots)$ ,  $(I'_2 + I''_2 + \dots)$  и т. д. Из сравнения исходных и только что полученных уравнений, имеющих одинаковые коэффициенты и правые части, видно, что решения обеих систем должны совпадать и, следовательно,

$$I_1 = I'_1 + I''_1 + \dots, \quad I_2 = I'_2 + I''_2 + \dots,$$

*т. е. ток каждой ветви цепи равен алгебраической сумме токов этой ветви, протекающих под действием каждой э. д. с. в отдельности. Это частный случай известного принципа наложения.*

На принципе наложения основан метод наложения. Он состоит в определении и последующем суммировании, т. е. наложении, токов ветвей от каждой э. д. с. в отдельности. При этом остальные э. д. с. приравниваются нулю, т. е. нужно мысленно их удалить и представить замкнутыми накоротко каждую пару тех точек цепи, между которыми действуют эти э. д. с. (например, точки *a* и *b* на

рис. 3.11, б). Тогда от этих источников в цепи остаются только их внутренние сопротивления.

Напряжение на каком-либо участке цепи с сопротивлением  $R$

$$U = RI = R(I' + I'' + \dots) = RI' + RI'' + \dots = U' + U'' + \dots,$$

т. е. напряжение на участке цепи равно алгебраической сумме напряжений для каждой составляющей тока. Следовательно, и при определении напряжений может быть применен метод наложения.

Суммируя токи от отдельных групп э. д. с., можно прийти к заключению, что метод наложения справедлив также и для токов и для напряжений от отдельных групп э. д. с., на которые можно произвольно разбить все э. д. с., действующие в цепи.

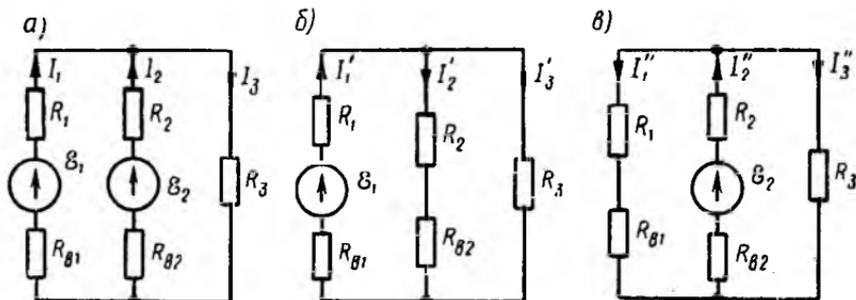


Рис. 3.13

Метод наложения целесообразно применять в том случае, если, приравнявая нулю все э. д. с., кроме одной (или их группы), упрощают цепь. Например, для цепи рис. 3.13, а при  $\mathcal{E}_2 = 0$  или  $\mathcal{E}_1 = 0$  получаются, соответственно, параллельно-последовательные цепи рис. 3.13, б и в, легко рассчитываемые методом преобразования. При этом действительное направление составляющих токов определяется направлением э. д. с. и, выбирая произвольно направления результирующих токов, при наложении следует совпадающие с ними по знаку составляющие брать положительными, и наоборот. Так, для направлений токов, указанных на рис. 3.13, а — в,

$$I_1 = I'_1 - I''_1, \quad I_2 = -I'_2 + I''_2 \quad \text{и} \quad I_3 = I'_3 + I''_3.$$

Принцип наложения, как видно из его доказательства, основан на линейном характере уравнений по законам Ома и Кирхгофа при постоянстве коэффициентов уравнений, т. е. сопротивлений цепи.

Очевидно, что принцип наложения справедлив и для случая, когда источниками энергии являются источники тока. Применяя метод наложения в этом случае и считая, например, несуществующим источник в какой-либо ветви, т. е. принимая его внутренний ток  $J = 0$ , следует представить себе цепь этого тока разомкнутой; тогда от источника тока в цепи остается только его внутренняя проводимость  $G_B$ .

Необходимо отметить, что наложение неприменимо для мощностей, так как они являются квадратичными функциями токов и напряжений.

### § 3.7. Метод взаимности

Пусть в первую ветвь Т-образной схемы, состоящей из трех разных сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , соединенных звездой (рис. 3.14, а), включена э. д. с.  $\mathcal{E}$ , а выходные зажимы замкнуты (рис. 3.14, б).

Направление токов всех ветвей определяется направлением э. д. с.  $\mathcal{E}$ .

Ток  $I_1$  распределится между параллельно соединенными второй и третьей ветвями обратно пропорционально их сопротивлениям. Тогда ток во второй ветви

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_3 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}.$$

Если поменять местами индексы 1 и 2, очевидно, получится значение тока  $I'_1$  в первой ветви при таком переносе э. д. с.  $\mathcal{E}$  во вторую ветвь, чтобы ее направление совпало с направлением тока  $I'_2$  (рис. 3.14, в).

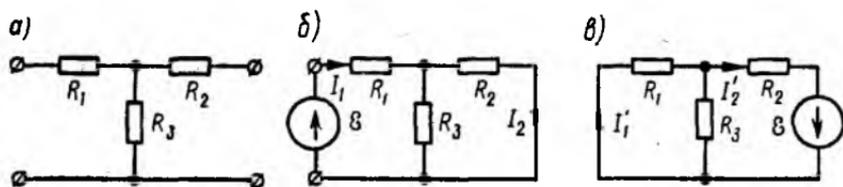


Рис. 3.14

Выражение  $I_2$  симметрично относительно этих индексов, поэтому  $I'_1 = I_2$ .

Как будет показано (см. § 9.3), Т-образная схема эквивалентна любой сложной цепи, не содержащей источников энергии и имеющей две пары зажимов. Следовательно, установленный принцип взаимности для Т-образной схемы имеет самый общий характер и может быть сформулирован следующим образом: *если э. д. с.  $\mathcal{E}$ , действуя в любой ветви сколь угодно сложной цепи, не содержащей других э. д. с., вызывает в другой ветви ток  $I$ , то перенесенная в нее та же э. д. с. вызовет в первой ветви такой же ток  $I$* . Принцип взаимности был установлен Кирхгофом.

На принципе взаимности основан метод взаимности. Этот метод удобно применять для расчета цепей с одной э. д. с., когда ее перенос упрощает цепь. Пусть, например, в неуравновешенном мосте рис. 3.15, а требуется определить ток в диагонали  $R$ , причем источник напряжения не имеет внутреннего сопротивления. Направление токов во всех четырех сторонах моста определяется направлением э. д. с.  $\mathcal{E}$ , направление тока  $I$  в диагонали выбрано произвольно. Перенос э. д. с.  $\mathcal{E}$  в эту диагональ (рис. 3.15, б) превращает сложную цепь в схему с последовательно-параллельным соединением сопротивлений. Так как в цепи рис. 3.15, а направление э. д. с. и тока в ветви источника совпадают, направление э. д. с., перенесенной в диагональ,

должно также совпадать с выбранным направлением тока  $I$  в диагонали (см. рис. 3.15, б). Тогда ток в ветви, где раньше был источник, по величине и знаку равен искомому току  $I$  в диагонали.

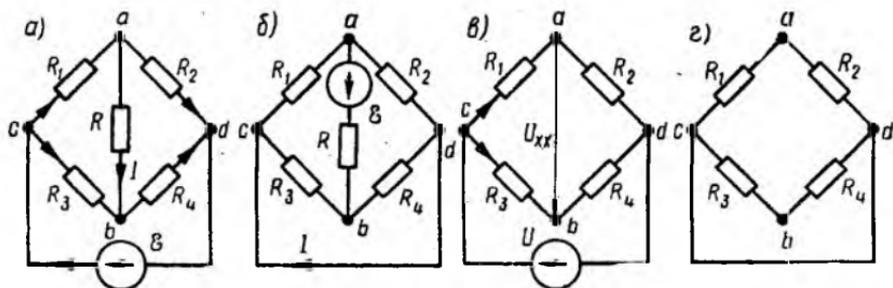


Рис. 3.15

### § 3.8. Метод эквивалентного источника энергии

Этот метод применяется для определения тока (или напряжения) в сопротивлении (проводимости) одной ветви сложной цепи. Если эта ветвь содержит источники энергии, их следует считать принадлежащими к остальной части сложной цепи.

Ветвь, не содержащая источников энергии, называется п а с с и в н ы м д в у х п о л ю с н и к о м, так как она включается в цепь с помощью двух зажимов. Цепь без этой ветви, условно показанная

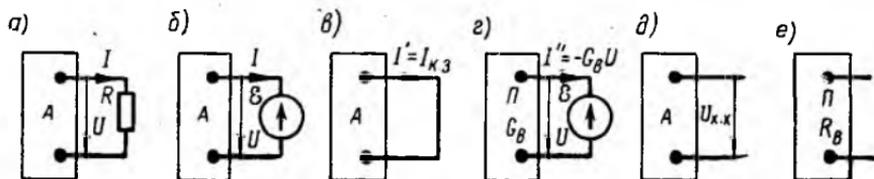


Рис. 3.16

на рис. 3.16, а прямоугольником А, имеет также два зажима и из-за наличия источников носит название а к т и в н о г о д в у х п о л ю с н и к а.

Для обоснования метода сопротивление  $R$  исследуемой ветви, согласно § 3.1, заменяется эквивалентной э. д. с.  $\mathcal{E} = -RI = -U$  (рис. 3.16, б), где  $I$  и  $U$  — искомые ток и напряжение, совпадающие по направлению, после чего применяется метод наложения в два этапа. Сначала принимаются в расчет все источники энергии активного двухполюсника, а э. д. с.  $\mathcal{E}$  замыкается накоротко (рис. 3.16, в). Тогда ток  $I'$  ветви равен, очевидно, току  $I_{к.з}$  короткого замыкания активного двухполюсника, и совпадает по направлению с током  $I$ . Затем учитывается только э. д. с.  $\mathcal{E}$ ; при этом в источниках напряжения, включенных в активный двухполюсник, замыкаются накоротко э. д. с., а в источниках тока — размыкаются цепи их внутренних

токов (§ 3.6). Активный двухполюсник превращается в пассивный  $\Pi$  (рис. 3.16, з). Он содержит только внутренние сопротивления источников и все остальные сопротивления своих ветвей. Пусть эквивалентная проводимость этого двухполюсника относительно его зажимов равна  $G_B$ . Тогда ток ветви для второго этапа, если считать его направление совпадающим с  $I'$ , равен

$$I'' = G_B \mathcal{E} = -G_B U.$$

Действительный ток исследуемой ветви с проводимостью  $G = \frac{1}{R}$  равен алгебраической сумме токов обоих этапов:

$$I = GU = I' + I'' = I_{к.з} - G_B U,$$

откуда

$$U = \frac{I_{к.з}}{G + G_B}. \quad (3.4)$$

Из аналогии этой формулы с выражением для напряжения источника тока (см. § 3.2) видно, что *активный двухполюсник эквивалентен источнику тока* (см. рис. 3.5) с *внутренним током  $J$ , равным току  $I_{к.з}$  короткого замыкания двухполюсника, и с внутренней проводимостью  $G_B$ , равной проводимости этого же двухполюсника, но без источников энергии.*

Из выражения (3.4) следует, что при холостом ходе, т. е. при  $G = 0$ , напряжение на выходных зажимах двухполюсника будет:

$$U_{x,x} = \frac{I_{к.з}}{G_B} = R_B I_{к.з}.$$

Искомый ток

$$I = \frac{U}{R} = \frac{I_{к.з}}{R(G + G_B)} = \frac{I_{к.з}}{1 + \frac{R}{R_B}} = \frac{R_B I_{к.з}}{R + R_B}.$$

или

$$I = \frac{U_{x,x}}{R + R_B}. \quad (3.5)$$

Из аналогии этой формулы с выражением для тока источника напряжения видно, что *активный двухполюсник эквивалентен также источнику напряжения* (см. рис. 3.4) с *э. д. с., равной напряжению  $U_{x,x}$  на зажимах разомкнутого двухполюсника* (рис. 3.16, д), *и внутренним сопротивлением, равным сопротивлению этого же двухполюсника, но без источников энергии* (рис. 3.16, е).

В замене сложной цепи со многими источниками энергии одним источником напряжения или тока и заключается метод эквивалентного источника энергии. Вместо обычного расчета заданной цепи решаются две более простые задачи — определение  $U_{x,x}$  при разомкнутой или  $I_{к.з}$  при короткозамкнутой ветви, что упрощает цепь, и определение  $R_B$  или  $G_B$  при отсутствии источников; затем найденные величины подставляются в выражения (3.4) или (3.5).

Примером применения метода эквивалентного источника напряжения может служить задача определения тока  $I$  в диагонали  $ab$  неуравновешенного моста; расчет упрощается при пренебрежении внутренним сопротивлением источника, питающего цепь; направление э. д. с. и выбранные направления токов ветвей указаны на рис. 3.15, а.

Размыкание ветви  $ab$  для определения напряжения  $U_{x,x}$  (см. рис. 3.15, в) превращает сложную исходную цепь в последовательно-параллельную, легко решаемую методом преобразования:

$$U_{x,x} = U_3 - U_1 = \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) U.$$

При замыкании накоротко зажимов  $c$  и  $d$  для определения сопротивления  $R_B$  цепи между точками  $a$  и  $b$  (см. рис. 3.15, г) цепь превращается в параллельно-последовательную, откуда

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Тогда искомым ток

$$I = \frac{U_{x,x}}{R_B + R} = \frac{\left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) U}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R}.$$

Ток в диагонали будет отсутствовать, если выражение, стоящее в скобках, обратится в нуль. Отсюда вытекает условие равновесия моста:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

Решая эту же задачу методом эквивалентного источника тока, нужно мысленно осуществить короткое замыкание ветви  $ab$ ; это превращает цепь в параллельно-последовательную, и вычисление тока  $I_{k,3}$  не представляет затруднений.

Методы эквивалентного источника напряжения или тока особенно удобны, если надо определить ток  $I$  или напряжение  $U$  одной ветви при нескольких значениях ее сопротивления  $R$  или проводимости  $G$ . Такая задача часто встречается в практике, так как нагрузка обычно бывает переменной. Тогда в формулах (3.4) и (3.5) изменяют лишь значения  $G$  и  $R$ , оставляя без изменения остальные вычисленные для этой цепи величины.

### § 3.9. Метод контурных токов

Этот метод, предложенный Максвеллом, можно обосновать, предполагая, что в ветвях цепи последовательно с приемниками включены источники напряжения (см. рис. 3.11, б). Примером может служить цепь рис. 3.17, рассчитанная в п. 2 § 3.5 по законам Кирхгофа. Здесь внутренние сопротивления источников объединены с сопротивлениями приемников и произвольно заданы направления токов ветвей. Чтобы



если два контура не имеют общей ветви, вместо соответствующего общего сопротивления надо также подставить нуль.

Таким образом, вместо системы из  $p$  уравнений по первому и второму законам Кирхгофа, по методу контурных токов составляется система из  $p - q + 1$  уравнений только по второму закону Кирхгофа. Так, для цепи рис. 3.17 вместо шести уравнений (двух по первому и четырех по второму законам Кирхгофа) по методу контурных токов составляется следующая система из четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2) I_A - R_2 I_B &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \\ -R_2 I_A + (R_2 + R_3 + R_4) I_B - R_3 I_C - R_4 I_D &= \mathcal{E}_2, \\ -R_3 I_B + (R_3 + R_6) I_C &= -\mathcal{E}_3, \\ -R_4 I_B + (R_4 + R_5) I_D &= 0. \end{aligned} \right\}$$

После определения контурных токов находят действительные токи ветвей. Ток внешней ветви совпадает с соответствующим положительным контурным током и противоположен отрицательному. Ток внутренней ветви, определяемый как разность контурных токов (см. формулу 3.6), совпадает с направлением большего контурного тока.

Приведенная выше общая система уравнений для контурных токов стандартна; поэтому без ее составления можно по схеме цепи сразу написать определитель системы уравнений и по нему найти контурные токи.

### § 3.10. Метод узловых напряжений

Этот метод, также предложенный Максвеллом, можно обосновать, предполагая, что между узлами цепи включены источники тока параллельно с приемниками (см. рис. 3.11, а). Примером может служить цепь рис. 3.18; здесь внутренние проводимости источников объединены с проводимостями приемников.

По аналогии с методом контурных токов вводятся новые понятия, что сделано далее на примере цепи рис. 3.18.

Узловой ток, равный алгебраической сумме внутренних токов источников тока в ветвях, сходящихся в узле:

$$J_A = J_1 + J_2 - J_3, \quad J_B = -J_1.$$

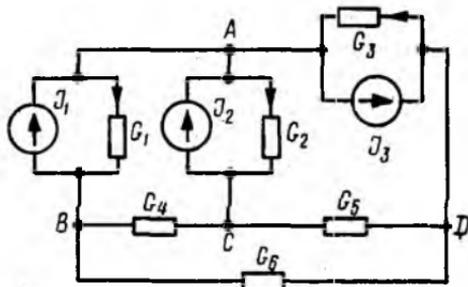


Рис. 3.18

Узловая проводимость, равная сумме проводимостей ветвей, сходящихся в этом узле:

$$G_A = G_1 + G_2 + G_3, \quad G_B = G_1 + G_4 + G_6.$$

Общая проводимость, равная проводимости ветви, соединяющей два узла:

$$G_{AB} = G_{BA} = G_1, \quad G_{AC} = G_{CA} = G_2.$$



Здесь, как и в методе контурных токов, по схеме цепи сразу может быть написан определитель системы уравнений и по нему вычислены узловые напряжения.

Уравнения, составленные методами контурных токов и узловых напряжений, аналогичны, но вместо напряжений в одних участвуют токи в других, и наоборот, а вместо сопротивлений — проводимости. Целесообразно применять метод, дающий меньшее число уравнений; так, при  $p - q + 1 < q - 1$ , т. е. при  $p < 2(q - 1)$ , следует применить метод контурных токов, при  $p > 2(q - 1)$  — метод узловых напряжений.

Вывод метода узловых напряжений был дан в предположении, что между узлами цепи включены источники тока параллельно с приемниками (см. рис. 3.11, а). Если же заданы источники напряжения, соединенные с приемниками последовательно (см. рис. 3.11, б), можно рассматривать каждую ветвь как источник напряжения с той же э. д. с.

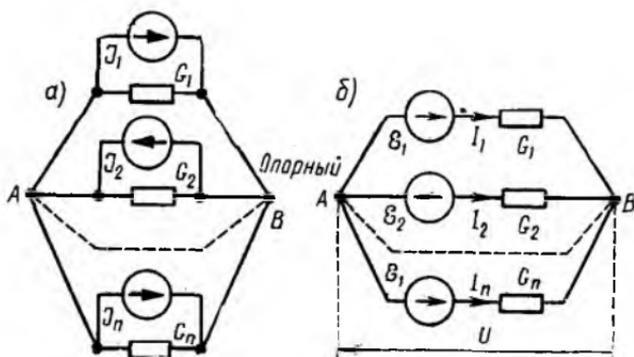


Рис. 3.19

$\mathcal{E}$ , но с внутренним объединенным сопротивлением  $R = R_n + R'$ . Этот источник напряжения может быть заменен эквивалентным ему источником тока с внутренним током  $J = \frac{\mathcal{E}}{R}$  и внутренней проводимостью  $G = \frac{1}{R}$  (см. § 3.2).

Тогда уравнения системы для всех  $M = q - 1$  независимых узлов получают вид, аналогичный уравнению для узла  $A$  в системе (3.8):

$$G_A U_A - G_{AB} U_B - \dots - G_{AM} U_M = \sum_A G_k \mathcal{E}_k,$$

где правая часть является алгебраической суммой произведений  $G_k \mathcal{E}_k$  для ветвей с источниками напряжения, сходящихся в узле  $A$ .

Особенно прост метод узловых напряжений для цепи с двумя узлами (рис. 3.19, а). В этом случае один из двух узлов, например  $B$ , будет опорным, члены с общими проводимостями отсутствуют и из системы уравнений останется одно:

$$G_A U_A = J_A.$$

Отсюда определяется узловое напряжение (оно же — напряжение всех ветвей)

$$U_A = \frac{J_A}{G_A} = \frac{\Sigma J_k}{\Sigma G_k},$$

а по нему — токи ветвей.

Если выразить все внутренние токи  $J_k$  источников тока через внутренние э. д. с.  $\mathcal{E}_k$  эквивалентных источников напряжения:

$$J_k = G_k \mathcal{E}_k,$$

получится узловое напряжение для схемы рис. 3.19, б:

$$U_A = \frac{\Sigma G_k \mathcal{E}_k}{\Sigma G_k},$$

после чего могут быть определены токи ветвей

$$J_k = G_k (\mathcal{E}_k - U_A).$$

#### ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### § 4.1. Основные сведения

Законы Кирхгофа в первой форме записи ( $\Sigma I_k = 0$  для узлов и  $\Sigma U_k = 0$  для контуров) могут быть использованы и для расчета нелинейных цепей. Аналитический расчет возможен на основе аналитически выраженных зависимостей  $U(I)$ . Связь между током и напряжением в некоторых случаях выводится теоретически, например зависимость  $I = aU^{3/2}$  в электронной лампе (см. § 23.3), или является аналитической аппроксимацией экспериментально полученных вольт-амперных характеристик. Трудность получения аналитических зависимостей заставляет широко применять графические методы расчета.

#### § 4.2. Приведение нелинейных цепей к линейным

Такое приведение можно сделать, если нелинейные элементы цепи работают в узком диапазоне напряжений и токов, где соответствующие участки вольтамперных характеристик близки к прямым. Пусть это, например, имеет место для участков  $ab$  и  $cd$  характеристик 1 и 2 (рис. 4.1) нелинейных резисторов  $R_1$  и  $R_2$  цепи рис. 4.2, а. Так как продолжения этих прямых составляют с осью токов углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и пересекают ось напряжений в точках  $U_{01}$  и  $-U_{02}$ , уравнения прямых получают следующий вид:

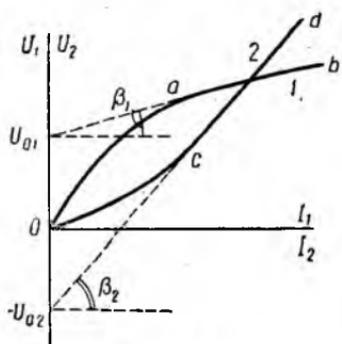


Рис. 4.1

$$U_1 = U_{01} + k \operatorname{tg} \beta_1 I_1 = U_{01} + R_{11} I_1,$$

$$U_2 = -U_{02} + k \operatorname{tg} \beta_2 I_2 = -U_{02} + R_{22} I_2,$$

где  $R_{д1}$  и  $R_{д2}$  — дифференциальные сопротивления этих резисторов, имеющие постоянные значения на участках  $ab$  и  $cd$ ;  $k$  — масштабный коэффициент.

Следовательно, каждый такой нелинейный элемент может быть представлен в виде эквивалентной схемы, состоящей из последовательного соединения — резисторов  $R_{д1}$  или  $R_{д2}$  и источника напряжения  $U_{01}$  или —  $U_{02}$ , включенного навстречу внешнему напряжению,

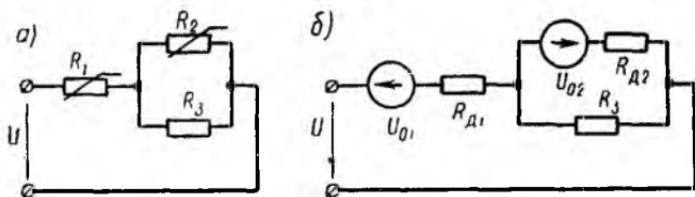


Рис. 4.2

так как последнее должно преодолеть напряжение этого источника. В результате нелинейная цепь рис. 4.2, а заменяется линейной цепью рис. 4.2, б. Так как при принятом положительном направлении напряжение  $U_{02}$  второго источника отрицательно, его направление совпадает с напряжением  $U$  всей цепи. Полученная цепь рис. 4.2, б рассчитывается обычными методами. Решение будет правильным только в том случае, если токи  $I_1$  и  $I_2$  не выйдут за пределы участков  $ab$  и  $cd$  (см. рис. 4.1).

### § 4.3. Графические методы расчета нелинейных цепей

Вольтамперная характеристика одиночного нелинейного резистора (см. рис. 1.9—1.11) сразу позволяет определить ток по заданному напряжению или напряжение по заданному току.

При последовательном соединении любого числа нелинейных и линейных резисторов вольтамперная характеристика всей цепи строится путем суммирования ординат характеристик отдельных резисторов в соответствии с зависимостью

$$U = U_1 + U_2 + \dots$$

На рис. 4.3 показано такое построение для двух последовательно соединенных резисторов. По характеристике всей цепи для заданного значения напряжения  $U'$  определяется соответствующий ему ток  $I'$ , а по нему — напряжения  $U'_1$  и  $U'_2$  участков цепи.

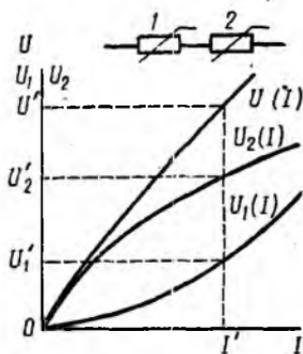


Рис. 4.3

Если нужно определить ток и напряжения на участках цепи из двух приемников только при одном значении напряжения  $U$  всей цепи, нет надобности строить вольтамперную характеристику всей цепи, следует лишь отложить горизонталь для заданного значения  $U$ ,

а от нее вниз — характеристику  $U_2(I)$  (рис. 4.4, а). Ее пересечение с характеристикой  $U_1(I)$  даст рабочую точку и определит тем самым ток  $I'$  цепи и напряжения  $U_1'$  и  $U_2'$  на участках.

Рис. 4.4, а иллюстрирует также графическое решение задачи определения тока и напряжения цепи при питании нелинейного резистора с вольтамперной характеристикой  $U_1(I)$  от источника напряжения с нелинейной внешней характеристикой  $U_2(I)$ .

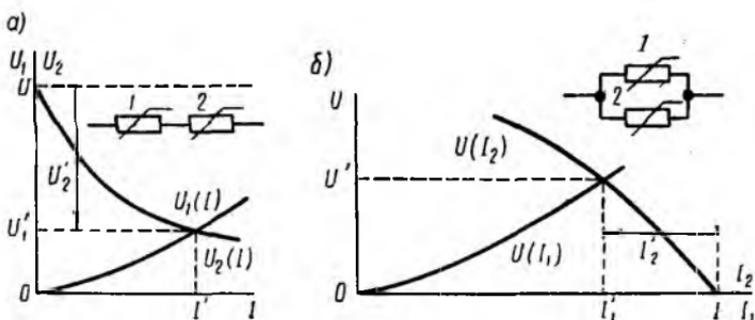


Рис. 4.4

При параллельном соединении нескольких линейных и нелинейных резисторов вольтамперная характеристика всей цепи строится путем суммирования абсцисс характеристик, т. е. токов отдельных резисторов:

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

На рис. 4.5 показано такое построение для двух параллельно соединенных резисторов. По характеристике для всей цепи для любого заданного тока  $I'$  определяется напряжение  $U'$ , а по нему — токи  $I_1'$  и  $I_2'$  участков цепи.

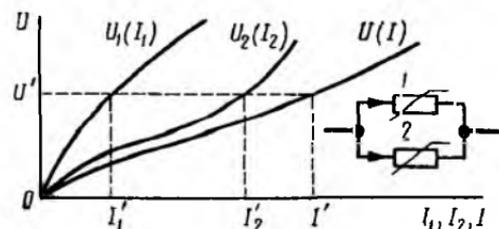


Рис. 4.5

Для определения токов ветвей только при одном значении тока  $I$  всей цепи можно применить упрощенное построение, аналогичное рис. 4.4, а и показанное на рис. 4.4, б для резисторов с теми же вольтамперными характеристиками. Характеристика  $U(I_2)$  строится влево от вертикали для заданного значения  $I$ . Ее пересечение с характеристикой  $U(I_1)$  определяет напряжение  $U'$  цепи и токи  $I_1'$  и  $I_2'$  на ее участках.

При смешанном соединении, например при расчете цепи рис. 4.6, а, также строится вольтамперная характеристика всей цепи по характеристикам отдельных резисторов (рис. 4.6, б). С помощью суммирования абсцисс, т. е. токов  $I_2$  и  $I_3$ , строится характеристика параллельного разветвления  $U_{23}(I_1)$ , затем, суммируя ординаты этой характеристики и характеристики  $U_1(I_1)$ , т. е. напряжения  $U_{23}$  и  $U_1$ , строят характеристику  $U(I_1)$  всей цепи. По этой характе-

ристике для заданного напряжения  $U'$  определяется ток  $I_1'$  цепи, после чего по характеристикам  $U_1(I_1)$  и  $U_{23}(I_1)$  находят напряжения  $U_1'$  и  $U_{23}'$  участков, а для напряжения  $U_{23}'$  по характеристикам  $U_2(I_2)$  и  $U_3(I_3)$  — токи  $I_2'$  и  $I_3'$ .

Совершенно аналогичны построения, если цепь со смешанным соединением, помимо линейных и нелинейных резисторов, содержит источники электрической энергии, например источники напряжения, вольтамперные характеристики которых без учета внутренних сопротивлений представляют собой прямые, параллельные оси абсцисс. Их ординаты и следует алгебраически просуммировать с ординатами вольтамперных характеристик участков (в том числе внутренних

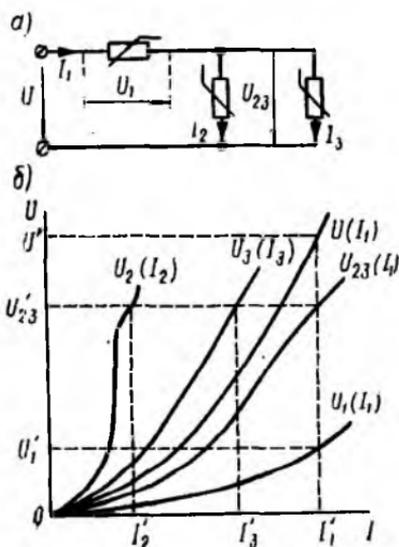


Рис. 4.6

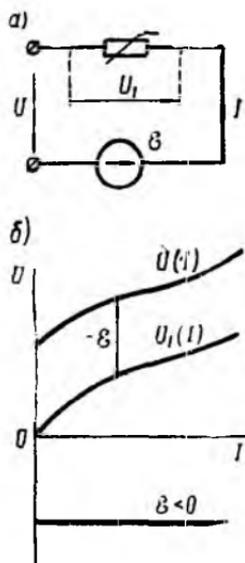


Рис. 4.7

сопротивлений), соединенных последовательно с этими источниками, чтобы получить полные характеристики ветвей. При этом необходимо соблюдать правило знаков. Так как напряжение всей ветви должно преодолевать э. д. с. включенного в ветвь источника, то при э. д. с., направленной навстречу току (рис. 4.7, а), нужно при суммировании брать ее с положительным знаком (рис. 4.7, б), и наоборот.

После построения аналогичных характеристик для всех ветвей подобно предыдущему постепенно строится характеристика всей цепи и по заданному ее напряжению обратным построением определяются напряжения и токи всех ветвей цепи.

Аналогичным образом решаются задачи при заданных источниках тока.

Если любая сложная цепь содержит одну нелинейную ветвь, для расчета может быть применен метод эквивалентного источника энергии: вся цепь, кроме нелинейной ветви, заменяется эквивалентным источником напряжения или тока, после чего задача сводится к только

что рассмотренной задаче последовательного или параллельного соединения двух элементов — нелинейной ветви и внутреннего сопротивления (проводимости) эквивалентного источника. Это позволит определить ток или напряжение нелинейной ветви, после чего может быть рассчитана линейная часть цепи.

#### § 4.4. Метод последовательных приближений

Этот метод, называемый также итерационным, является приближенным аналитическим способом решения нелинейных алгебраических уравнений.

В качестве примера рассматривается расчет простой цепи рис. 4.8, состоящей из резистора с нелинейным сопротивлением  $R(I)$  с заданной вольтамперной характеристикой, питаемого от источника напряжения с заданной постоянной э. д. с.  $\mathcal{E}$  и нелинейной внешней характери-

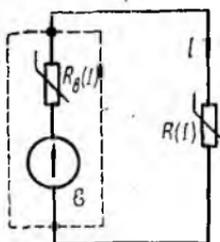


Рис. 4.8

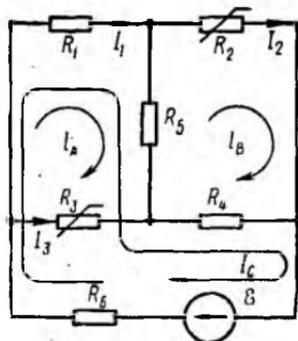


Рис. 4.9

стикой, из которой может быть получена вольтамперная характеристика его внутреннего сопротивления  $R_B$ . Вольтамперные характеристики могут быть заданы не графически, а аналитически.

Расчет этой цепи может быть произведен по уравнению

$$I_{n+1} = \frac{\mathcal{E}}{R(I_n) + R_B(I_n)},$$

где  $n$  — порядковый номер приближения.

Задавшись произвольно нулевым приближением тока  $I_0$ , по вольтамперным характеристикам находят соответствующие ему напряжения:  $U_0$  на внешнем сопротивлении  $R_0$  и  $U_{0в}$  на внутреннем сопротивлении  $R_{0в}$ . Затем определяют эти сопротивления и суммарное сопротивление цепи:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0}, \quad R_{0в} = \frac{U_{0в}}{I_0}, \quad R_0 + R_{0в},$$

а из исходного уравнения — первое приближение тока

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_{0в}}.$$

Исходя из этого значения тока, весь ход расчета повторяется для определения второго приближения  $I_2$  и так до тех пор, пока из-за

сходимости итерационного процесса результат не начнет практически повторяться.

Как известно из математики, итерация в зависимости от вида характеристик может дать расходящийся процесс. Тогда сходимость можно получить на основе исходного уравнения для другой величины, например для напряжения на приемнике:

$$U_{n+1} = \frac{R(I_n) \mathcal{E}}{R(I_n) + R_n(I_n)}.$$

В случае сложной цепи, например моста с двумя нелинейными резисторами (рис. 4.9), исходные уравнения могут быть составлены по методу контурных токов. При этом контуры должны быть выбраны так, чтобы контурный ток нелинейных ветвей одновременно был их действительным током. В противном случае действительный ток нельзя находить путем алгебраического суммирования проходящих по нелинейной ветви двух контурных токов, так как принцип наложения для нелинейных сопротивлений неприменим.

Правильный выбор контурных токов показан на рис. 4.9. Здесь токи нелинейных участков цепи

$$I_3 = -I_A, \quad I_2 = I_B.$$

Тогда система уравнений получает вид:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_3 + R_5) I_A - R_5 I_B + (R_1 + R_5) I_C &= 0, \\ -R_5 I_A + (R_2 + R_4 + R_5) I_B - (R_4 + R_5) I_C &= 0, \\ (R_1 + R_5) I_A - (R_4 + R_5) I_B + (R_1 + R_4 + R_5 + R_6) I_C &= \mathcal{E}. \end{aligned} \right\}$$

Если нелинейное сопротивление  $R_2(I_2)$  с увеличением тока убывает, а  $R_3(I_3)$  — возрастает, можно показать, что для обеспечения сходимости итерационного процесса из этой системы уравнений надо найти ток  $I_3 = -I_A$  и напряжение  $U_2 = R_2 I_B = R_2 I_2$ , выразив их через все постоянные заданные величины и нелинейные сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ . Результаты расчетов целесообразно вносить в табл. 4.1, из которой видны последовательность и способ получения отдельных величин.

Таблица 4.1

Номер приближения, $n$	$I_{3n}$	$U_{3n}$ из характеристики	$R_{3n} = \frac{U_{3n}}{I_{3n}}$	$U_{2n}$	$I_{2n}$ из характеристики	$R_{2n} = \frac{U_{2n}}{I_{2n}}$	$I_{3(n+1)}$	$U_{2(n+1)}$

Закончив вычисления после практической сходимости итерационного процесса и определив тем самым напряжения и токи нелинейных участков цепи, на основе законов Кирхгофа определяют напряжения и токи всех линейных участков, например ток  $I_1$  из уравнения

$$R_1 I_1 = \mathcal{E} - R_4(I_1 + I_2) - U_2.$$

**ГЛАВА ПЯТАЯ**  
**РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ**

**§ 5.1. Законы магнитных цепей**

Большинство электротехнических устройств (машины, трансформаторы, реле и др.) основано на использовании магнитного поля. Главной частью этих устройств является магнитная цепь, т. е. совокупность тел, большей частью ферромагнитных, в которых создается магнитный поток намагничивающей силой обмоток, обтекаемых током, или с помощью постоянных магнитов.

Расчет магнитной цепи заключается в установлении связи между магнитным потоком, током в обмотках, числом витков и геометрическими размерами цепи с учетом магнитных свойств материалов, из которых она выполнена. Если магнитная цепь состоит из участков с постоянными сечениями по их длине, применяется приближенный метод, основанный на допущении равномерного распределения потока по сечению магнитной цепи.

Самой простой магнитной цепью этого типа является тороид, средний диаметр которого значительно больше поперечных размеров магнитопровода (см. рис. 1.14). Поток тороида (см. п. 2 § 1.7)

$$\Phi = \frac{\mu S \omega l}{l} = \frac{\omega l}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}} = \frac{F}{R_m},$$

где  $F = \omega l$  — намагничивающая сила (н. с.),  $l$  — длина средней линии, а величина

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S},$$

аналогичная электрическому сопротивлению  $R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{s}$ , называется магнитным сопротивлением. Отсюда можно видеть аналогию между приведенным выше законом магнитной цепи  $\Phi = \frac{F}{R_m}$  и законом Ома для электрической цепи.

Подобно направлениям  $\mathcal{E}$  и  $I$  в электрических цепях нужно ввести положительные направления  $F$  и  $\Phi$  в магнитных цепях. За положительное направление потока принимается то, которое связано с направлением намагничивающего тока правилом правого винта. Положительное направление н. с. в рассмотренной простой магнитной цепи совпадает с направлением потока  $\Phi$ .

Для разветвленной магнитной цепи, например цепи рис. 5.1,  $a$ , могут быть получены зависимости, аналогичные законам Кирхгофа, если заменить токи  $I$  на потоки  $\Phi$ , э. д. с.  $\mathcal{E}$  на н. с.  $F$ , электрические сопротивления  $R$  на магнитные сопротивления  $R_m$ . Тогда для узлов магнитной цепи по аналогии с первым законом Кирхгофа алгебраическая сумма

$$\sum \Phi_k = 0$$

выражает принцип непрерывности магнитного потока. Для контуров по аналогии со вторым законом Кирхгофа

$$\sum F_k = \sum R_{mk} \Phi_k.$$

Здесь также должны быть учтены направления  $F_k$  и  $\Phi_k$ .

Расчетная аналогия между электрическими и магнитными цепями не распространяется на физические процессы. В отличие от э. д. с., которая движет в проводниках элементарные заряды, н. с. движения не вызывает. В соответствии с законом Джоуля — Ленца в электри-

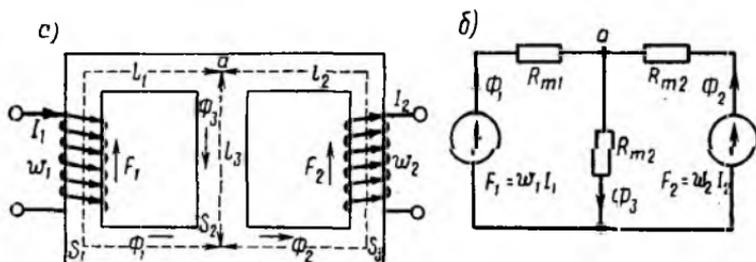


Рис. 5.1

ческой цепи происходит непрерывная затрата электрической энергии; постоянное магнитное поле, раз созданное, не требует энергии для своего поддержания. В электрической цепи возможно существование э. д. с. без тока, когда цепь разомкнута, т. е.  $R = \infty$ , в магнитной цепи при наличии н. с. всегда существует замкнутый магнитный поток, т. е.  $R_m$  в бесконечность не обращается.

Для магнитных цепей представляет интерес как прямая задача — нахождение потока по заданной н. с., так и обратная задача — определение потребных н. с. по заданному потоку в одном из участков.

## § 5.2. Расчет линейных магнитных цепей

В ряде устройств их магнитные цепи работают на практически прямолинейном участке основных кривых намагничивания, т. е. могут рассматриваться как линейные.

В линейной магнитной цепи магнитная проницаемость участков постоянна и, следовательно, их магнитное сопротивление также является величиной постоянной. Решение как прямой, так и обратной задачи требует предварительного определения магнитного сопротивления участков цепи.

Расчет неразветвленной магнитной цепи постоянного сечения выполняется аналогично тороиду (см. § 5.1); здесь  $l$  — также длина средней линии. Необходимо отметить, что наличие магнитного рассеяния приводит к неравномерному распределению потока вдоль магнитной цепи и расчет крайне затрудняется. В дальнейшем рассматривается только приближенный учет рассеяния.

Если разветвленная магнитная цепь (рис. 5.1, а и 5.2, а) представляет собой соединение призматических или цилиндрических участков, выполненных из материалов с различной  $\mu$ , вычисление магнитных сопротивлений участков производится однозначно. Если материал всей цепи один и тот же, разделение ее на участки в известных пределах произвольно; средние линии показаны пунктиром.

После определения сопротивлений участков можно весьма наглядно изобразить магнитную цепь наподобие электрической, как это сделано на рис. 5.1, б для магнитной цепи рис. 5.1, а с двумя н. с. и на рис. 5.2, б

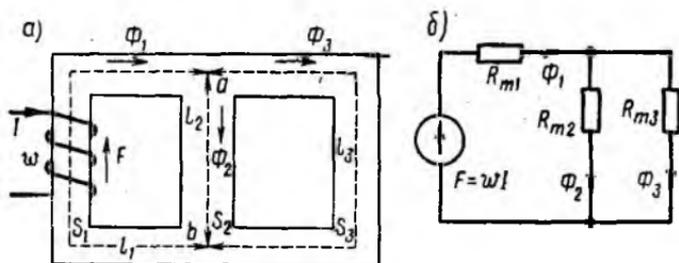


Рис. 5.2

для магнитной цепи рис. 5.2, а с одной н. с. В таких цепях должны быть указаны положительные направления н. с. и магнитных потоков. Если не все направления известны, ими следует задаться с тем, чтобы в результате расчета определить правильные направления.

Расчет линейной цепи как для прямой, так и для обратной задачи выполняется подобно расчету электрической цепи аналогичными методами — по зависимостям, аналогичным законам Кирхгофа, методами преобразования магнитных цепей, контурных потоков, наложения, взаимности и узловых магнитных напряжений. Так, для цепи рис. 5.2, пользуясь методом преобразования, можно написать:

$$\Phi_1 = \frac{F}{R_{m1} + \frac{R_{m2}R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}}$$

## § 5.3. Расчет нелинейных магнитных цепей

### 1. Неразветвленная нелинейная (ферромагнитная) цепь

В электротехнике самое широкое применение нашли магнитные цепи из ферромагнитных материалов, так как они имеют относительно малое магнитное сопротивление. Это позволяет при заданном магнитном потоке соответственно уменьшить н. с. при тех же размерах магнитопровода или размеры магнитопровода при той же н. с. Ферромагнитные цепи нелинейны, так как их магнитная проницаемость  $\mu$  является функцией напряженности поля. К таким цепям можно применять методы расчета, аналогичные тем, которые были изложены в гл. 4 для электрических нелинейных цепей.

Далее рассматривается наиболее простой, но весьма важный для практики графо-аналитический метод расчета обратной задачи для неразветвленной магнитной цепи.

Пусть задана та индукция  $B_B$ , которую надо получить в воздушном зазоре электромагнита с участками магнитопровода, выполненными из разных материалов (рис. 5.3). Требуется найти необходимую н. с.

По заданным размерам магнитопровода проводится средняя линия пути потока во всех участках и определяется длина каждого из них. Длина  $d$  воздушного зазора должна быть задана. Затем определяется полезный поток в воздушном зазоре

$$\Phi_B = B_B S_B,$$

где  $S_B$  — его сечение, принимаемое равным сечению полюсов, т. е. участков 1 и 5.

Поток  $\Phi_M$  в магнитопроводе за счет рассеяния у краев воздушного зазора несколько больше:

$$\Phi_M = \sigma \Phi_B,$$

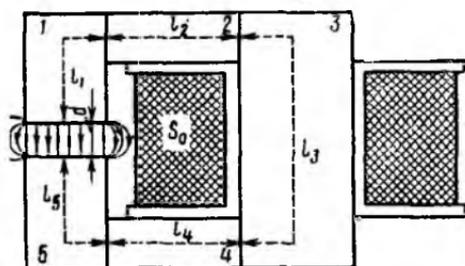


Рис. 5.3

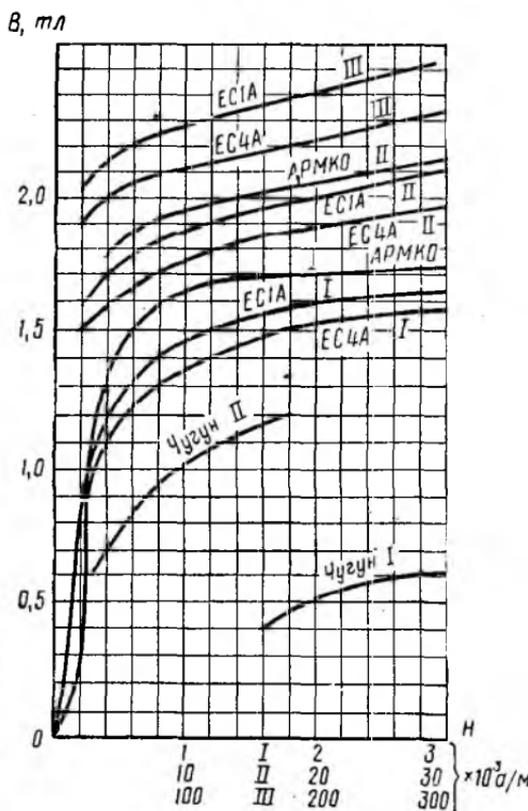


Рис. 5.4

где  $\sigma$  — коэффициент рассеяния; величина его зависит от формы магнитопровода и лежит в пределах от 1,1 до 1,4.

По индукции в каждом из  $k$  участков магнитопровода

$$B_k = \frac{\Phi_M}{S_k}$$

находят напряженность поля  $H_k$  для каждого из участков по основным кривым намагничивания  $B(H)$  соответствующих материалов (рис. 5.4). Для воздушного зазора напряженность поля

$$H_B = \frac{B_B}{\mu_0}.$$

Затем для отдельных участков магнитопровода и для воздушного зазора находят н. с.

$$F_k = H_k l_k, \quad F_B = H_B d$$

и их суммированием — полную н. с.  $F = \Sigma F_k + F_B$ . Для магнитной цепи рис. 5.3, так как участки 1 и 5, а также 2 и 4 одинаковы, полная н. с.

$$F = F_B + 2F_1 + 2F_2 + F_3.$$

По найденной н. с. и по заданному напряжению  $U$ , питающему обмотку, приближенно может быть найдено число витков  $\omega$ . Так как длина витков обмотки различна — внутренних меньше, наружных больше, то расчет начинается с определения длины среднего витка  $l_{cp}$  по известным размерам магнитопровода и выбранному расположению обмотки. Тогда из закона Ома

$$I = \frac{U}{\rho l_{cp} \omega},$$

(где  $\rho$  — удельное сопротивление материала обмотки) определяется сечение провода

$$s = \frac{I \omega \rho l_{cp}}{U} = \frac{F \rho l_{cp}}{U}.$$

По сортаменту проводов выбирают ближайшее большее сечение  $s_c$  провода и определяют сечение провода с изоляцией  $s_{из}$ . После этого можно найти число витков по отношению площади окна (за вычетом сечения каркаса катушки и пр.)  $S_0$  к сечению провода с изоляцией

$$\omega = \alpha \frac{S_0}{s_{из}},$$

где  $\alpha$  — коэффициент заполнения, учитывающий воздушные промежутки, остающиеся между проводами при намотке катушки; его величина лежит в пределах от 0,7 до 0,85 и зависит от формы сечения провода (для круглого меньше, для прямоугольного больше). Затем из приведенного выражения определяется плотность тока в обмотке:

$$\delta = \frac{I}{s_c} = \frac{U}{\omega \rho l_{cp}}.$$

Если полученная плотность тока превышает допустимую по нагреву, то это значит, что размеры магнитной цепи (площадь окна) не позволяют получить заданную индукцию.

Прямая задача расчета этой магнитной цепи — нахождение индукции в воздушном зазоре по заданной н. с. — решается графическим методом. В соответствии с указанной в § 5.1 аналогией, вольтамперным характеристикам  $U(I)$  электрических цепей соответствую ампервеберные характеристики  $F(\Phi)$  магнитных цепей.

Построение характеристик  $F_k(\Phi_k)$  для отдельных участков магнитной цепи производят по кривым намагничивания  $B_k(H_k)$  материала

участка. Для этого ординаты  $B_k$  кривой намагничивания умножают на площадь сечения участка  $S_k$  и откладывают  $B_k S_k = \Phi_k$  по оси абсцисс; абсциссы кривой намагничивания  $H_k$  умножают на длину участка  $l_k$  и откладывают  $H_k l_k = F_k$  по оси ординат. Для воздушного зазора получается прямая линия, в уравнении которой учитывается, что рассеяние увеличивает реальное сечение потока по сравнению с сечением  $S_B$  полюсов примерно в  $\sigma$  раз, т. е. ординаты прямой  $B_B = \mu_0 H_B$  умножают на  $S_B \sigma$  и откладывают  $B_B S_B \sigma = \Phi_B$  по оси абсцисс, а абсциссы  $H_B$  умножают на длину воздушного зазора  $d$  и откладывают  $H_B d = F_B$  по оси ординат.

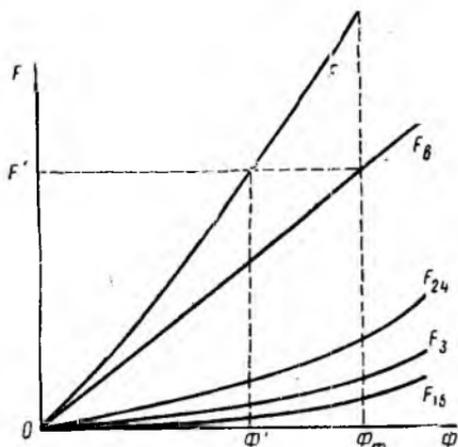


Рис. 5.5

Для магнитной цепи рис. 5.3 по ампервеберным характеристикам отдельных участков (одинаковые участки 1 и 5, а также 2 и 4 можно объединить), суммированием н. с.  $F$  (ординат) для разных значений потока (абсцисс) строится ампервеберная характеристика  $F(\Phi)$  всей цепи (рис. 5.5). При этом

целесообразно начать построение для предельного значения потока  $\Phi_m$ , которое можно вычислить для заданной н. с.  $F'$ , если пренебречь магнитным сопротивлением магнитопровода по сравнению с магнитным сопротивлением  $R_{мв}$  воздушного зазора:

$$\Phi_m = \frac{F'}{R_{мв}} = \frac{F' \mu_0 S_B \sigma}{d}.$$

Затем по кривой  $F(\Phi)$  для заданного значения н. с.  $F'$  находится значение  $\Phi'$ , а затем искомая индукция в воздушном зазоре

$$B'_B = \frac{\Phi'}{S_B \sigma},$$

а также индукция в любом участке цепи:

$$B'_k = \frac{\Phi'}{S_k}.$$

## 2. Разветвленная нелинейная (ферромагнитная) цепь

Пренебрегая рассеянием, решается обратная и прямая задачи расчета разветвленной магнитной цепи, изображенной на рис. 5.2, а. Каждый из трех участков этой цепи имеет свое сечение  $S_k$ , среднюю длину  $l_k$  и выполнен из своего материала. Выбранные направления потоков показаны на рис. 5.2, а.

Пусть в обратной задаче необходимо найти н. с.  $F$ , обеспечивающую заданное значение индукции  $B_3$  в третьем участке.

Сначала находят поток  $\Phi_3 = B_3 S_3$ , а по кривой намагничивания  $B_3(H_3)$  для материала третьего участка определяют напряженность поля  $H_3$  и н. с.  $F_3 = H_3 l_3$ . Так как участки 2 и 3 соединены параллельно, то  $F_3 = F_2 = H_2 l_2$ ; откуда вычисляют  $H_2 = \frac{F_2}{l_2}$ , а по кривой намагничивания  $B_2(H_2)$  находят соответствующее значение магнитной индукции  $B_2$  и поток  $\Phi_2 = B_2 S_2$ .

Затем по аналогу первого закона Кирхгофа определяют поток  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ , индукцию  $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$  и по кривой намагничивания

$B_1(H_1)$  — напряженность поля  $H_1$ , а по ней — н. с.  $F_1 = H_1 l_1$ . На основании аналога второго закона Кирхгофа искомая н. с.  $F = F_1 + F_2$ .

Прямая задача нахождения  $B_3$  по заданной н. с.  $F'$  решается построением ампервеберной характеристики всей цепи по характеристикам отдельных участков  $F_k(\Phi_k)$  (рис. 5.6), построенных аналогично указанному в п. 1 этого параграфа. Сначала сложением потоков  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  (абсцисс) параллельно соединенных участков для одинаковых значений н. с. (ординат) строят кривую  $F_{23}(\Phi)$ . Затем для последовательно соединенных участков 1 и 2, 3 складывают н. с. (ординаты)  $F_1$  и  $F_{23}$ , что дает ампервеберную характеристику  $F(\Phi)$  всей цепи. По этой кривой для заданной н. с.  $F'$  находят поток  $\Phi'$ , которому на кривой  $F_{23}(\Phi)$  соответствует н. с.  $F'_{23} = F'_1$ , а для нее по кривой  $F_3(\Phi)$  определяется поток  $\Phi'_3$ , откуда искомая индукция

$$B'_3 = \frac{\Phi'_3}{S_3}.$$

Аналогия с электрическими цепями может быть использована и для расчета более сложных магнитных цепей, например цепей с последовательно-параллельным соединением участков, имеющих несколько обмоток с токами (см. рис. 5.1). В этом случае должны быть применены построения, изложенные в § 4.3 для электрических цепей, содержащих источники напряжения.

Расчет потоков рассеяния можно выполнить для некоторых простых случаев методами теории электромагнитного поля (см. ч. IV).

## § 5.4. Расчет цепи с постоянным магнитом

Постоянные магниты применяются в измерительных приборах, магнето, электрических машинах без возбуждения постоянным током, поляризованных реле, устройствах автоматики и телемеханики и т. д.

Широкому применению постоянных магнитов способствуют большие успехи, достигнутые мировой техникой в деле изготовления высококачественных магнитотвердых материалов, имеющих большую коэрцитивную силу  $H_c$  и остаточную индукцию  $B_r$ .

При изготовлении тороидального магнита после снятия с ферромагнитного тороида намагничивающей его обмотки, в нем создают зазор  $d$ , получая таким образом постоянный магнит длиной  $l$  и сечением  $S$  (рис. 5.7). Основной характеристикой магнита является часть петли гистерезиса, лежащая во втором квадранте, — кривая размагничивания (рис. 5.8) в координатах  $B$  ( $H$ ) или пропорциональных им величинах  $\Phi$  ( $F$ ), так как  $\Phi = BS$ , а  $F = Hl$ .

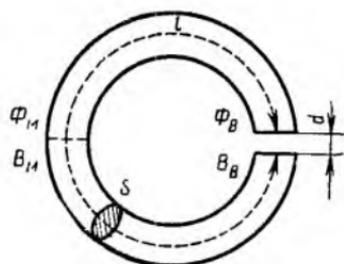


Рис. 5.7

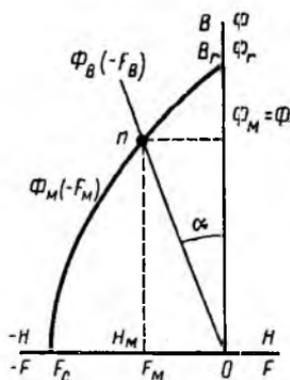


Рис. 5.8

При отсутствии зазора остаточный поток и индукция в тороиде равны соответственно  $\Phi_r$  и  $B_r$ , а напряженность поля  $H = 0$ , так как при отсутствии обмотки с током по закону полного тока

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = Hl = \omega l = 0.$$

При наличии воздушного зазора также

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = F_m + F_B = 0 \quad \text{или} \quad F_B = -F_m,$$

где  $F_m$  — н. с. магнита,  $F_B$  — н. с. воздушного зазора.

Предполагая сохранение однородности поля в магните и зазоре,

$$F_m = H_m l, \quad F_B = H_B d.$$

Тогда

$$H_m l = -H_B d \quad \text{и} \quad H_m = -H_B \frac{d}{l}.$$

Магнитное сопротивление при появлении зазора увеличивается. Из-за этого магнитный поток и индукция должны уменьшиться по сравнению с  $\Phi_r$  и  $B_r$ , т. е. рабочая точка на кривой размагничивания должна несколько опуститься, где ей будут соответствовать отрицательные значения н. с.  $F_m$  и напряженности поля  $H_m$  в сердечнике магнита.

Из-за постоянства магнитного сопротивления зазора

$$R_m = \frac{d}{\mu_0 S_B},$$

где  $S_B$  — сечение зазора; зависимость потока  $\Phi_B$  в нем от величины  $n$ . с.  $F_B = R_m \Phi_B$  изображается прямой линией, проходящей через начало координат (см. рис. 5.8) и образующей угол  $\alpha$  с осью ординат, определяемый соотношением

$$k \operatorname{tg} \alpha = R_m,$$

где коэффициент  $k$  равен отношению масштабов по осям абсцисс и ординат. Ее наклон  $k$  оси абсцисс тем больше, чем больше  $R_m$ , т. е. чем больше зазор  $d$ . При пренебрежении рассеянием потоки  $\Phi_B$  и  $\Phi_M$  равны между собой и рабочая точка  $n$ , определяющая искомым поток магнита, лежит на пересечении прямой  $\Phi_B$  ( $-F_B$ ) с кривой размагничивания  $\Phi_M$  ( $-F_M$ ).

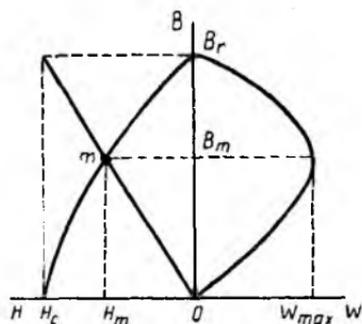


Рис. 5.9

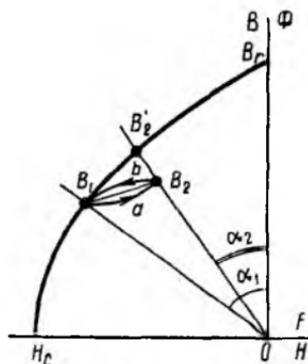


Рис. 5.10

Таким образом, поток магнита тем меньше остаточного потока  $\Phi_r$ , чем больше зазор  $d$ .

Энергия магнитного поля в зазоре, учитывая соотношение между  $H_B$  и  $H_M$ ,

$$W_B = \frac{B_B H_B}{2} S_B d = \frac{B_M H_M}{2} S_M l = W_M,$$

т. е. равна энергии внутри магнита.

Вопрос о наиболее выгодном положении рабочей точки  $n$  на кривой размагничивания определяется энергетическими соображениями — магнит должен работать в таком режиме, чтобы энергия магнитного поля в зазоре была максимальной.

Эта энергия, пропорциональная в каждой точке кривой размагничивания произведению ее ординаты на ее абсциссу, графически представлена как функция индукции в первом квадранте рис. 5.9, где по оси абсцисс отложена энергия. Для всех магнитотвердых материалов по данным опыта с достаточной степенью точности можно принять, что рабочая точка  $m$ , соответствующая максимуму энергии, лежит на пересечении кривой размагничивания с диагональю прямоугольника, построенного на  $B_r$  и  $H_c$ .

В технике применяются также магниты сложной формы с неоднородным полем и большим рассеянием, из-за чего их расчет значительно усложняется.

В реальных условиях использования постоянного магнита в его зазор вводятся дополнительные детали из магнитномягкого материала. Так, например, в зазоре постоянного магнита в измерительном приборе магнитоэлектрической системы (см. рис. 2.12) расположены ферромагнитные полюсные наконечники и цилиндрический сердечник. Введение этих деталей вызывает уменьшение зазора и его магнитного сопротивления. Магнитным сопротивлением самих деталей можно пренебречь.

Если магниту без деталей соответствовала индукция  $B_1$  (рис. 5.10) при  $k \operatorname{tg} \alpha_1 = R_{m1}$ , то введение деталей, уменьшив магнитное сопротивление до величины  $R_{m2} = k \operatorname{tg} \alpha_2$ , из-за гистерезиса увеличит индукцию не до точки  $B_2'$ , лежащей на кривой размагничивания, а до  $B_2$ , лежащей на той же прямой  $OB_2'$ , но ниже точки  $B_2'$ . Переход к новому значению индукции будет происходить по кривой  $B_1aB_2$ . Если эти детали удалить, обратный переход идет по кривой  $B_2bB_1$ . Кривая  $B_1aB_2bB_1$  называется частной петлей гистерезиса. Так как практически эта петля очень узка, то ее часто заменяют прямой возврата  $B_1B_2$ .

Такие переходы имеют место в электрических машинах с постоянными магнитами, в телефонных индукторах, магнето и т. п. Магнитное сопротивление воздушного зазора этих машин изменяется при вращении ротора, так как последний имеет сложную форму.

# ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

## ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### ГЛАВА ШЕСТАЯ

#### ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### § 6.1. Периодические напряжения и токи

Основное применение в электротехнике и радиотехнике имеют переменные напряжения и токи, являющиеся периодическими функциями времени. Мгновенные значения периодических напряжений  $u$  и токов  $i$  повторяются через промежуток времени  $T$ , называемый периодом:

$$u(t) = u(t + T), \quad i(t) = i(t + T),$$

где  $t$  — время; число периодов в единицу времени  $f = \frac{1}{T}$  называется частотой; в системе СИ единицей частоты является герц (гц), равный одному периоду в секунду.

Электротехника сильных токов использует в основном низкие частоты. Промышленной частотой в СССР и Европе является 50 гц, в Америке 60 гц, в некоторых областях техники применяют частоты в сотни герц и выше. Техника проводной и радиосвязи использует широкий диапазон частот от долей герц до  $10^{12}$  гц. Постоянные э. д. с. и токи можно рассматривать как частный случай переменных, частота которых равна нулю ( $f = 0$ ).

Простейшими и широко применяемыми в электротехнических и радиотехнических устройствах являются периодические напряжения и токи, изменяющиеся по закону синуса. Для случая синусоидального закона изменения функций разработаны простые методы расчета цепей, подобные методам расчета цепей постоянного тока. Если закон изменения периодического напряжения  $u(t)$  или  $i(t)$  отличен от синусоиды, эти функции могут быть разложены в ряд Фурье, т. е. представлены в виде суммы синусоид, что позволит при расчетах линейных цепей применить метод наложения и свести расчеты к синусоидальным функциям.

#### 1. Генератор синусоидального напряжения

Для получения синусоидальных переменных токов в линейных цепях э. д. с. также должны изменяться по синусоиде. Простейшим генератором синусоидальной э. д. с. может служить прямоугольная катушка, вращающаяся с постоянной угловой скоростью в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к направлению линий

магнитной индукции (рис. 6.1). При этом пронизывающий катушку магнитный поток изменяется, и в ней по закону электромагнитной индукции индуцируется э. д. с. Цепь нагрузки подключается к генератору с помощью щеток, наложенных на два кольца, соединенных с катушкой.

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  плоскость катушки будет перпендикулярна магнитным линиям (пунктир на рис. 6.2). Тогда магнитный поток, пронизывающий катушку, будет иметь максимальное (амплитудное) значение  $\Phi_m$ . Если угловая скорость вращения катушки с числом витков  $\omega$  равна  $\omega$ , то в момент

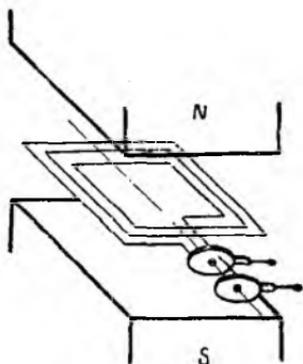


Рис. 6.1

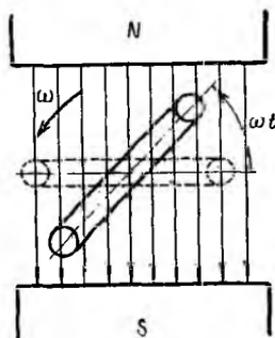


Рис. 6.2

времени  $t$  катушка окажется повернутой на угол  $\omega t$ , и мгновенные значения ее потока и потокосцепления будут равны

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad \Psi = \omega \Phi = \omega \Phi_m \cos \omega t = \Psi_m \cos \omega t,$$

где  $\Psi_m = \omega \Phi_m$  — максимальное значение потокосцепления.

Тогда мгновенное значение э. д. с. катушки

$$e = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d\Psi_m \cos \omega t}{dt} = \omega \Psi_m \sin \omega t.$$

Величина  $\omega \Psi_m = \mathcal{E}_m$  представляет собой максимальное значение э. д. с., которое она получает, когда  $\sin \omega t$  становится равным единице. Следовательно,

$$e = \mathcal{E}_m \sin \omega t.$$

## 2. Временные диаграммы

Временная диаграмма магнитного потока и электродвижущей силы катушки показана на рис. 6.3, а. Максимальная э. д. с. индуцируется в моменты, когда поток, пронизывающий катушку, равен нулю, так как тогда скорость изменения потока достигает наибольшего значения. Э. д. с. равна нулю в моменты, когда поток получает максимальное значение, так как при этом поток не меняет своей величины.

Как видно из рис. 6.3, *a*,

$$\omega T = 2\pi,$$

откуда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Величина  $\omega$ , пропорциональная частоте  $f$  и равная в данном случае угловой скорости вращения катушки, называется **угловой частотой**.

Общее выражение для синусоидальной функции времени имеет вид:

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $a$  — мгновенное значение функции;  $A_m$  — ее максимальное значение (амплитуда);  $\omega$  — угловая частота; угол  $(\omega t + \psi)$  — фаза,

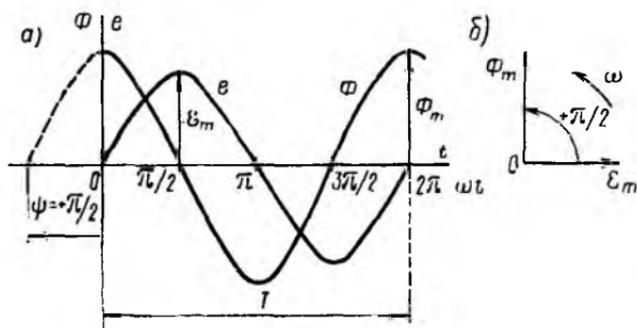


Рис. 6.3

а угол  $\psi$  — **начальная фаза**. Начальная фаза определяет значение функции для начального момента времени:

$$a(0) = A_m \sin \psi.$$

Так, для рассмотренного источника синусоидальной э. д. с.

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t = \Phi_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad e = \mathcal{E}_m \sin \omega t,$$

начальная фаза потока равна  $+\pi/2$ , э. д. с. — нулю, т. е. магнитный поток и э. д. с. сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

На временной диаграмме, как видно из рис. 6.3, *a*, положительная начальная фаза откладывается от начала координат влево, т. е. в сторону отрицательных значений  $\omega t$ , а отрицательную начальную фазу следует откладывать в сторону положительных значений  $\omega t$ .

### 3. Векторные диаграммы

Расчеты в цепях с синусоидальными напряжениями и токами весьма упрощаются, если вместо синусоид оперировать с их изображениями — **вращающимися векторами**.

Пусть  $NOM$  является прямоугольной системой осей координат и пусть положительные углы откладываются против направления вращения стрелки часов (рис. 6.4). Если нужно найти, например, мгновенные значения синусоиды э. д. с.  $e = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ , то для этого можно взять вектор  $\overline{OA}$ , длина которого равна в выбранном масштабе максимальному значению э. д. с.  $\mathcal{E}_m$ ; считать начальным положением вектора  $\overline{OA}_0$  такое, при котором он образует с осью  $ON$  угол, равный начальной фазе, т. е. в данном случае совпадает с  $ON$ ; вращать этот вектор в положительном направлении с постоянной угловой скоростью, равной угловой частоте  $\omega$ . Тогда угол, который вектор образует с осью  $ON$  в момент времени  $t$ , будет равен  $\omega t$  и мгновенное значение э. д. с.  $e$  для этого момента времени будет равно проекции  $Oa$  вектора  $\overline{OA}$  на ось  $OM$ :

$$Oa = \overline{OA} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \omega t \right) = \mathcal{E}_m \sin \omega t = e.$$

Проекция вектора  $\overline{OA}$  на ось  $OM$  для начального момента времени  $t = 0$  будет равна нулю, для момента времени  $t = \frac{T}{4}$ , когда вектор повернется на угол  $\pi/2$ , проекция будет равна  $\mathcal{E}_m$ ; полный цикл изменений э. д. с. получится за один полный оборот вектора  $\overline{OA}$ .

Таким же образом можно находить мгновенные значения потока  $\Phi = \Phi_m \sin (\omega t + \pi/2)$ , с той разницей, что для начального момента времени вектор  $\overline{OB}_0$ , изображающий в выбранном масштабе максимальное значение потока  $\Phi_m$ , необходимо направить по оси  $OM$ , так как он должен образовать с осью  $ON$  угол  $+\pi/2$ , равный начальной фазе потока.

Таким образом, можно условиться изображать синусоидальную функцию вектором, длина которого определяется максимальным ее значением, а направление — ее начальной фазой, при этом положительная начальная фаза откладывается от горизонтальной оси в сторону вращения векторов. В результате получается векторная диаграмма, показанная для рассмотренного примера потока и э. д. с. на рис. 6.3, б.

Векторы, изображающие синусоидальные функции времени, имеют совсем другой смысл, чем векторы, изображающие, например, силы в механике. Вектор силы дает ее величину и направление в пространстве, вектор, изображающий синусоиду, является вращающимся вектором, дающим своей проекцией на неподвижную ось мгновенное значение синусоиды. Такой вектор чертится в начальном своем положении, которое дает начальную фазу синусоиды, но, конечно, не направление изображаемой величины в пространстве. Подобным векто-

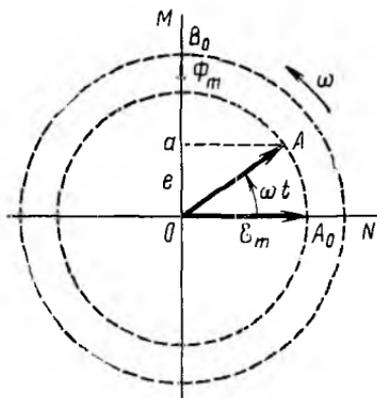


Рис. 6.4

ром можно изображать любую синусоидально изменяющуюся величину, в том числе скалярную — э. д. с., ток, поток и т. п.

Векторные диаграммы особенно удобны при сложении или вычитании синусоид одинаковой частоты. Как известно, результатом будет также синусоида той же частоты.

При сложении нескольких синусоид нужно складывать их мгновенные значения, т. е. проекции векторов, изображающих эти синусоиды, но так как сумма проекций векторов на какую-либо ось равна проекции геометрической суммы этих векторов на ту же ось, то эта геометрическая сумма и будет вектором, изображающим результирующую синусоиду. Длина вектора даст амплитуду результирующей синусоиды, угол с горизонтальной осью — ее начальную фазу.

Так, например, для двух синусоид (рис. 6.5)

$$e_1 = \mathcal{E}_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \text{и} \quad e_2 = \mathcal{E}_{m2} \sin(\omega t + \psi_2),$$

изображаемых векторами  $\overline{OA_1}$  и  $\overline{OA_2}$ , вектор  $\overline{OA}$ , изображающий суммарную синусоиду

$$e = \mathcal{E}_m \sin(\omega t + \psi),$$

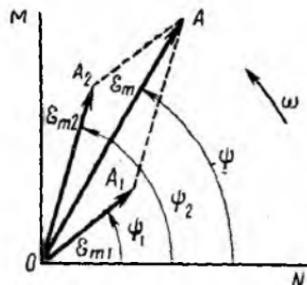


Рис. 6.5

будет геометрической суммой векторов  $\overline{OA_1}$  и  $\overline{OA_2}$ . Он имеет величину  $\mathcal{E}_m$  и составляет с осью  $ON$  угол  $\psi$ . Так как синусоиды  $e_1$  и  $e_2$  имеют одну и ту же частоту, изображающие их векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью, углы между ними не изменяются, и результирующий вектор сохраняет постоянную длину, вращаясь с той же угловой скоростью.

Аналогично, путем геометрического вычитания, может быть найден вектор, изображающий результирующую синусоиду разности двух синусоид. Следовательно, алгебраическому суммированию синусоид, т. е. суммированию их мгновенных значений, соответствуют геометрические действия над изображающими их векторами.

#### 4. Особенности цепей переменного тока

Для цепей переменного тока справедливы законы Ома, Кирхгофа и Джоуля — Ленца применительно к мгновенным значениям напряжений, токов и мощностей для одного и того же момента времени. Однако в отличие от пассивной цепи постоянного тока, в которой ток определяется приложенным к ней напряжением и ее сопротивлением, в пассивной цепи переменного тока возникают внутренние переменные э. д. с. самоиндукции и э. д. с. емкости, которые должны быть учтены, кроме приложенного напряжения, при составлении уравнений по основным законам.

Так же, как и в цепях постоянного тока, при составлении уравнений по этим законам для цепей переменного тока необходимо задаться условным положительным направлением напряжений и токов, хотя действительные их направления периодически меняются. По аналогии с цепями постоянного тока удобно принять, что положительные направ-

ления напряжения и тока всей цепи и каждого из ее элементов — резистора, катушки индуктивности и конденсатора — совпадают. Тогда мгновенная мощность  $p = ui$  всей цепи и каждого из ее элементов будет положительной, когда действительные направления их напряжения и тока совпадают, т. е. когда цепь или ее элементы являются потребителями энергии, что принято характеризовать положительной мощностью.

Выбранные положительные направления для мгновенных значений напряжений и токов сохраняются при переходе к векторам — сумме (разности) мгновенных значений соответствует геометрическая сумма (разность) изображающих их векторов.

Физические и энергетические процессы на участках цепи с сопротивлением, с индуктивностью, с емкостью весьма различны, поэтому предварительно они рассматриваются раздельно до изучения цепей с их сочетанием.

## § 6.2. Цепь с сопротивлением

Постоянный ток распределяется по всему сечению проводника равномерно, т. е. во всех точках его сечения плотность тока одинакова. Плотность переменного тока возрастает от оси проводника к его поверхности. Это явление называется *поверхностным эффектом*, рассматриваемым в ч. IV. Приблизительно можно считать, что переменный ток в проводнике использует только часть  $s'$  его сечения  $s$ .

Следовательно, сопротивление  $R$  постоянному току, называемое обычно *омическим*, будет меньше сопротивления  $r$  переменному току:

$$R = \rho \frac{l}{s} < \rho \frac{l}{s'} = r.$$

Сопротивление  $r$  получило название *активного сопротивления проводника*.

Поверхностный эффект проявляется тем сильнее, чем больше частота, сечение, удельная проводимость и магнитная проницаемость проводника. При промышленной частоте (50 *Гц*) и тонких медных или алюминиевых проводах поверхностным эффектом можно пренебречь и считать активное сопротивление равным омическому.

Пусть к активному сопротивлению (рис. 6.6, а) приложено синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin \omega t.$$

По закону Ома ток

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t.$$

Ток получает максимальное значение  $I_m$  при  $\sin \omega t = 1$ . Тогда

$$I_m = \frac{U_m}{r} \quad \text{и} \quad i = I_m \sin \omega t.$$

Следовательно, в цепи с сопротивлением  $r$  напряжение и ток совпадают по фазе (рис. 6.6, б.) На векторной диаграмме вектор напряжения

совпадает по направлению с вектором тока (рис. 6.6, в). Максимальные значения напряжения и тока также подчинены закону Ома.

Мгновенная мощность  $p$  равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = \\ = U_m I_m \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t.$$

Как видно из этого выражения, мгновенная мощность имеет постоянную составляющую  $\frac{U_m I_m}{2}$  и переменную составляющую, изменя-

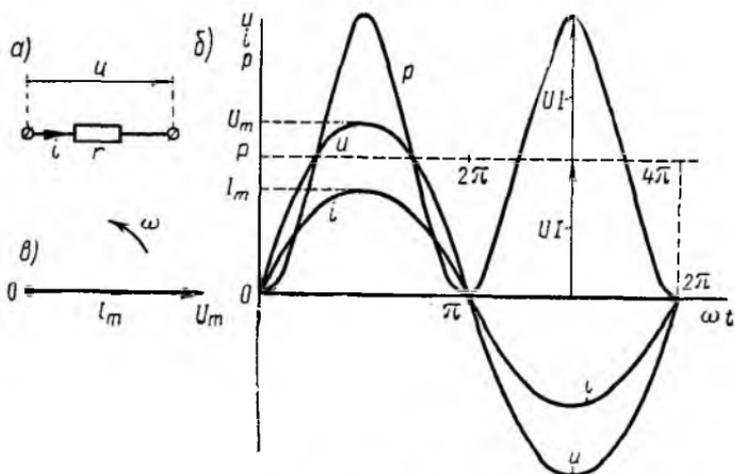


Рис. 6.6

ющуюся по косинусоиде двойной частоты  $2\omega$  с амплитудой  $\frac{U_m I_m}{2}$ . Кривая мощности также изображена на рис. 6.6, б. Мощность равна нулю при  $u = 0$  и  $i = 0$ , всегда положительна и получает максимальное значение в те моменты, когда напряжение и ток также максимальны.

Среднее значение мощности за период — средняя мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t dt = \frac{U_m I_m}{2},$$

т. е. равна постоянной составляющей мгновенной мощности.

Пользуясь зависимостью между максимальными значениями напряжения и тока, выражение для средней мощности можно переписать следующим образом:

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m = \frac{1}{2} r I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{r}.$$

Обычно величина переменного тока характеризуется действующим значением. Так называется значение постоянного тока  $I$ , которое дает ту же мощность  $P$  в том же сопротивлении  $r$ :

$$rI^2 = \frac{1}{2} rI_m^2,$$

следовательно,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично, действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, мгновенная мощность

$$p = UI - UI \cos 2\omega t,$$

средняя мощность

$$P = UI = rI^2 = \frac{U^2}{r}.$$

Энергия, поглощаемая активным сопротивлением,

$$W = \int ri^2 dt = \int r (I_m \sin \omega t)^2 dt = rI^2 t - \frac{rI^2}{2\omega} \sin 2\omega t$$

непрерывно растет. Эта энергия поставляется источником, питающим цепь.

### § 6.3. Цепь с индуктивностью и цепь с емкостью

Цепь с индуктивностью и цепь с емкостью являются накопителями энергии соответственно электрического и магнитного поля. Чтобы подчеркнуть эту аналогию, цепь с индуктивностью и цепь с емкостью

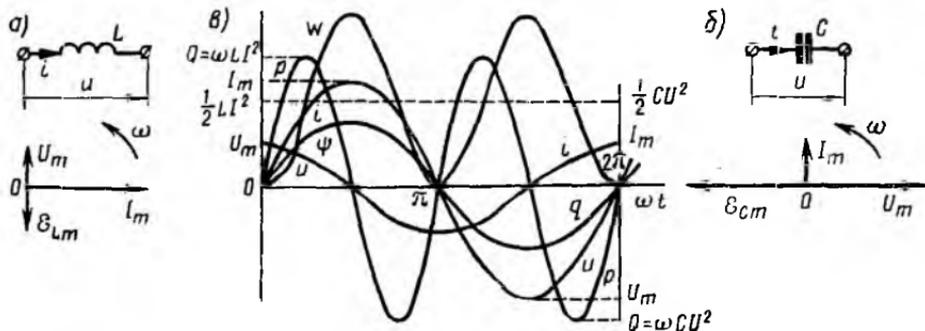


Рис. 6.7

рассматриваются одновременно. Величины, определяющие процессы в них, — ток в цепи с индуктивностью и напряжение на цепи с емкостью — задаются с одинаковой фазой.

Пусть ток цепи с индуктивностью  $L$  (рис. 6.7, а)

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Тогда потокосцепление

$$\Psi = Li = LI_m \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

т. е. совпадает по фазе с током.

Временная диаграмма этих и далее вычисляемых величин изображена на рис. 6.7, в, причем обозначения кривых показаны соответственно слева и справа.

Энергия, запасаемая в магнитном поле,

$$\begin{aligned} W &= \frac{Li^2}{2} = \frac{L(I_m \sin \omega t)^2}{2} = \\ &= \frac{LI^2}{2} - \frac{LI^2}{2} \cos 2\omega t \end{aligned}$$

пульсирует с двойной частотой  $2\omega$  около среднего значения  $\frac{LI^2}{2}$ . Увеличиваясь с ростом тока за счет энергии источника, энергия поля при уменьшении тока возвращается источнику.

Мгновенная мощность, равная производной энергии по времени,

$$p = \frac{dW}{dt} = \omega LI^2 \sin 2\omega t$$

также изменяется с двойной частотой, будучи положительной, когда энергия поступает в приемник, и отрицательной, когда приемник возвращает энергию источнику.

Средняя мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 0,$$

т. е. процесс колебаний энергии между источником и приемником не сопровождается потерями. Максимальное значение мощности

$$\omega LI^2 = Q_L$$

называется индуктивной мощностью.

Пусть напряжение цепи с емкостью  $C$  (рис. 6.7, б)

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Тогда заряд

$$q = Cu = CU_m \sin \omega t = Q_m \sin \omega t,$$

т. е. совпадает по фазе с напряжением.

Энергия, запасаемая в электрическом поле,

$$\begin{aligned} W &= \frac{Cu^2}{2} = \frac{C(U_m \sin \omega t)^2}{2} = \\ &= \frac{CU^2}{2} - \frac{CU^2}{2} \cos 2\omega t \end{aligned}$$

пульсирует с двойной частотой  $2\omega$  около среднего значения  $\frac{CU^2}{2}$ . Увеличиваясь с ростом напряжения за счет энергии источника, энергия поля при уменьшении напряжения возвращается источнику.

$$p = \frac{dW}{dt} = \omega CU^2 \sin 2\omega t$$

$$\omega CU^2 = Q_C$$

называется емкостной мощностью.

В системе СИ эти мощности измеряются в реактивных вольтамперах (*вар*).

Мгновенное значение напряжения

$$u = \frac{p}{i} = \frac{\omega LI^2 \sin 2\omega t}{I_m \sin \omega t} = \frac{\omega LI_m^2 \sin \omega t \cos \omega t}{2I_m \sin \omega t} = \omega LI_m \cos \omega t = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Векторная диаграмма цепи с  $L$  показана на рис. 6.7, а.

Следовательно, в цепи с  $L$  ток отстает от напряжения по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Так как направление отсчета этого угла от вектора тока к вектору напряжения совпадает с направлением вращения векторов, этот угол считается положительным, т. е.  $+\frac{\pi}{2}$ .

Максимальное значение напряжения

$$U_m = \omega LI_m,$$

отсюда частные

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \omega L = 2\pi fL = x_L$$

играют роль сопротивления применительно к максимальным и действующим значениям напряжения и тока. Они называются

*индуктивным сопротивлением*

и в системе единиц СИ измеряются в омах.

Индуктивное сопротивление прямо пропорционально индуктивности и частоте; при постоянном токе оно равно нулю.

В цепи с индуктивностью возникает э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{dI_m \sin \omega t}{dt} = -\omega LI_m \cos \omega t = U_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Она равна и противоположна по фазе напряжению цепи.

Мгновенное значение тока

$$i = \frac{p}{u} = \frac{\omega CU^2 \sin 2\omega t}{U_m \sin \omega t} = \frac{\omega CU_m^2 \sin \omega t \cos \omega t}{2U_m \sin \omega t} = \omega CU_m \cos \omega t = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Векторная диаграмма цепи с  $C$  показана на рис. 6.7, б.

Следовательно, в цепи с  $C$  ток опережает напряжение по фазе на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Так как направление отсчета этого угла от вектора тока к вектору напряжения противоположно направлению вращения векторов, этот угол считается отрицательным, т. е.  $-\frac{\pi}{2}$ .

Максимальное значение тока

$$I_m = \omega CU_m,$$

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = x_C$$

*емкостным сопротивлением*

Емкостное сопротивление обратно пропорционально емкости и частоте; при постоянном напряжении оно равно бесконечности.

В цепи с емкостью величина

$$e_C = -\frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{C} \int I_m \cos \omega t dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \sin \omega t = -U_m \sin \omega t$$

может быть названа э. д. с. емкости. Она равна и противоположна по фазе напряжению цепи.

Отсюда видно, что применять индуктивное или емкостное сопротивление в соотношениях между мгновенными напряжениями и токами нельзя, так как

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \text{и} \quad i \neq \frac{u}{x_L}, \quad u = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{и} \quad i \neq \frac{u}{x_C}.$$

Соотношения  $u = -e$ , полученные в предположении их одинакового положительного направления, аналогичны соотношениям для напряжения  $U$  и э. д. с.  $\mathcal{E}$  источника энергии без внутреннего сопротивления (см. § 3.2) при выборе для них одинакового направления ( $U_{\pm} = -\mathcal{E}_{\pm}$ ).

Итак, соотношения в цепи с индуктивностью и в цепи с емкостью аналогичны. От зависимостей в одной цепи к зависимостям в другой можно перейти, заменяя соответствующие величины по табл. 6.1.

Таблица 6.1

Цепь с индуктивностью	$L$	$\Psi$	$u$	$i$	$\omega$	$t$	$W$	$p$
Цепь с емкостью	$C$	$q$	$i$	$u$	$\omega$	$t$	$W$	$p$

#### § 6.4. Измерения в цепях переменного тока

Для измерения переменного тока и напряжения могут быть применены амперметры и вольтметры электромагнитной и электродинамической систем, рассмотренные в п. 2 и 3 § 2.6. При включении такого амперметра в цепь переменного тока его мгновенный момент вращения  $m_{вр}$  будет пропорционален квадрату мгновенного значения тока  $i$ , подвижная же часть прибора, очевидно, даст отклонение, пропорциональное среднему значению этого момента:

$$\alpha = k_1 \frac{1}{T} \int_0^T m_{вр} dt = k_2 \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = k_2 I^2,$$

т. е. прибор измерит действующее значение тока. Аналогично, вольтметры этих двух систем измеряют действующее значение напряжения.

Для измерения мгновенных значений переменных токов и напряжений применяется о с ц и л л о г р а ф, основным элементом которого является в и б р а т о р — прибор магнитоэлектрической системы (см. п. 2 § 2.7), подвижной частью которой является легкая петелька; ее момент вращения и угол отклонения пропорциональны измеряемой величине. Вместо стрелки на подвижной части укреплено зеркальце, отражающее луч света на движущуюся фотопленку, на которой записывается временная диаграмма тока или напряжения.

Для измерения средней мощности в цепях переменного тока применим ваттметр электродинамической системы. Как следует из п. 3 § 2.6, его мгновенный момент вращения  $m_{вр}$  будет пропорционален

мгновенной мощности  $p = ui$ . Тогда отклонение подвижной части пропорционально ее среднему значению:

$$\alpha = k_1 \frac{1}{T} \int_0^T m_{вп} dt = k_2 \frac{1}{T} \int_0^T p dt = k_2 P,$$

т. е. средней мощности.

Для получения положительного отклонения ваттметр следует включать по схеме рис. 2.9. В цепях только с индуктивностью и с емкостью ваттметр, очевидно, должен дать нулевое показание.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### § 7.1. Цепь с последовательным соединением участков с сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью

По закону Ома мгновенное значение тока в цепи с последовательно включенными активным сопротивлением  $r$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$  (рис. 7.1, а) зависит не только от приложенного напряже-

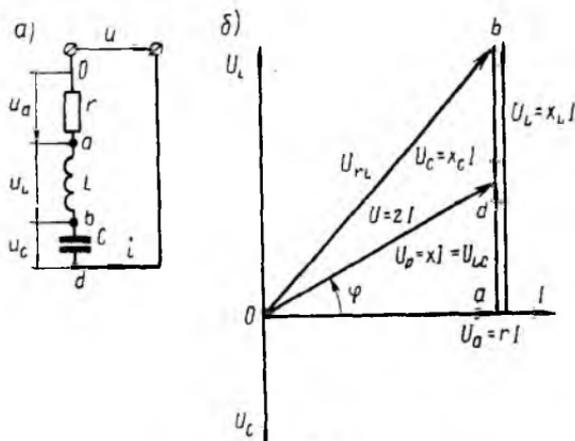


Рис. 7.1

ния  $u$ , но и от возникающих в цепи э. д. с. индуктивности  $e_L$  и э. д. с. емкости  $e_C$ :

$$i = \frac{u + e_L + e_C}{r} = \frac{u - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i dt}{r},$$

отсюда

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt,$$

т. е. приложенное напряжение распадается на три напряжения, из которых первое  $u_a = ri$  преодолевает активное сопротивление цепи, второе  $u_L = L \frac{di}{dt}$  уравновешивает противоположную ему по знаку э. д. с.

индуктивности  $e_L$  и третья  $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$  уравнивает противоположную ему по знаку э. д. с. емкости  $e_C$ .

Задавшись током цепи

$$i = I_m \sin \omega t$$

и подставив это выражение тока в уравнение напряжений:

$$u = rI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t,$$

можно видеть, что отдельные составляющие напряжения представляют собой синусоиды и, следовательно, суммарное напряжение также будет синусоидой, вектор которой равен геометрической сумме векторов составляющих синусоид.

Это построение сделано на рис. 7.1, б для векторов, равных по величине действующим значениям. Вектор активного напряжения  $U_a = rI$  совпадает по фазе с вектором тока  $I$ . Индуктивное напряжение

$$u_L = \omega LI_m \cos \omega t = U_{mL} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

опережает ток на  $\frac{\pi}{2}$  и, следовательно, вектор индуктивного напряжения  $U_L = \omega LI$  сдвинут относительно вектора тока по вращению векторов на тот же угол. Емкостное напряжение

$$u_C = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = U_{mC} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

и его вектор  $U_C = \frac{1}{\omega C} I$  противоположен по фазе вектору  $U_L$ . На рис. 7.1, б он отложен из конца вектора  $U_L$  в противоположную сторону. Замыкающий вектор и есть вектор полного напряжения  $U$ .

Необходимо отметить интересную особенность векторной диаграммы рис. 7.1, б. При ее построении векторы напряжений на участках цепи откладывались в той же последовательности, в какой эти участки включены в цепь рис. 7.1, а. Поэтому отдельным точкам векторной диаграммы (0, а, б, д) соответствуют одноименные точки цепи. Такая диаграмма может быть названа т о п о г р а ф и ч е с к о й. Она позволяет сразу найти векторы напряжений между любыми точками цепи, соединив их прямой линией. На рис. 7.1, б показаны векторы напряжений  $U_{rL}$  и  $U_{LC}$  на участках  $rL$  и  $LC$ .

В результате сложения векторов получается прямоугольный треугольник напряжения с гипотенузой, равной полному напряжению  $U$ , катетом, равным активному напряжению  $U_a$  и катетом  $U_p = U_L - U_C$ ; напряжение  $U_p$  называется р е а к т и в н ы м. На диаграмме рис. 7.1, б преобладает индуктивное напряжение ( $U_L > U_C$ ) и поэтому реактивное напряжение совпадает по фазе с индуктивным.

Из треугольника напряжений видно, что

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \\ = \sqrt{(rI)^2 + \left(\omega LI - \frac{1}{\omega C} I\right)^2} = I \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Тогда

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}}.$$

Сопротивление  $x_L - x_C$  называется реактивным и обозначается буквой  $x$ . Знаменатель выражения для тока

$$\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + x^2} = z$$

играет роль сопротивления и называется полным сопротивлением. В системе единиц СИ  $z$  также измеряется в омах.

Следовательно,

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{U}{z}.$$

Полученные выражения могут рассматриваться как аналог закона Ома для переменного тока. Необходимо подчеркнуть, что закон Ома в таком виде справедлив только для максимальных и действующих значений переменного тока и напряжения. Для мгновенных значений он в таком виде неприменим; написать  $i = \frac{u}{z}$  было бы грубой ошибкой, так как мгновенные значения тока и напряжения не находятся в линейной зависимости.

Здесь полезно сопоставить различные выражения закона Ома для этой цепи. Для мгновенных значений

$$i = \frac{u + e_L + e_C}{r}, \quad (7.1)$$

для векторов, очевидно, можно было бы написать:

$$\vec{i} = \frac{\vec{U} + \vec{\mathcal{E}}_L + \vec{\mathcal{E}}_C}{r}, \quad (7.2)$$

где  $\vec{\mathcal{E}}_L$  и  $\vec{\mathcal{E}}_C$  — векторы э. д. с. индуктивности и емкости, а для действующих значений аналог закона Ома:

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}}. \quad (7.3)$$

Отсюда видно, что физически существующие э. д. с. индуктивности и емкости, входящие в выражения (7.1) и (7.2), в выражении (7.3) формально учитываются через реактивные сопротивления  $x_L$  и  $x_C$ .

Вектор тока сдвинут по фазе относительно вектора напряжения

на острый угол  $\varphi$ ; на диаграмме рис. 7.1, б вектор тока отстает от вектора напряжения. Угол  $\varphi$  может быть определен из треугольника напряжений:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_p}{U_a} = \operatorname{arctg} \frac{xI}{rI} = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{r} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

Если разделить все стороны треугольника напряжений на общий множитель  $I$ , получится подобный ему треугольник сопротивлений с гипотенузой  $z$  и катетами  $r$  и  $x$  (рис. 7.2, а), откуда

$$r = z \cos \varphi, \quad x = z \sin \varphi,$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Мгновенная мощность цепи равна произведению мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p &= ui = (rI_m \sin \omega t + x_L I_m \cos \omega t - \\ &\quad - x_C I_m \cos \omega t) I_m \sin \omega t = \\ &= rI_m^2 \sin^2 \omega t + x_L I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t - \\ &\quad - x_C I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t. \end{aligned}$$

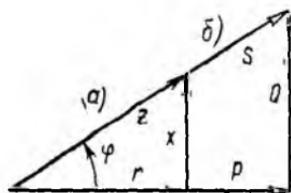


Рис. 7.2

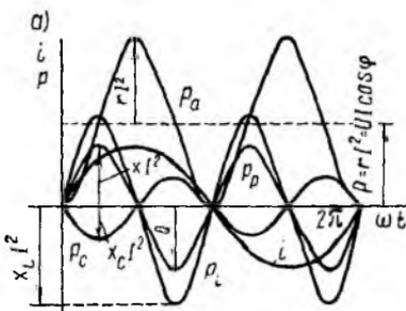


Рис. 7.3

После подстановки значений  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$  и  $\sin \omega t \times \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$  выражение для мгновенной мощности получает вид

$$p = (rI^2 - rI^2 \cos 2\omega t) + x_L I^2 \sin^2 \omega t - x_C I^2 \sin 2\omega t.$$

Первый член правой части есть мгновенная мощность активного сопротивления

$$p_a = rI^2 - rI^2 \cos 2\omega t.$$

После подстановки соотношений из треугольника напряжений

$$p_a = U_a I - U_a I \cos 2\omega t = UI \cos \varphi + UI \cos \varphi \sin \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Эта мощность (рис. 7.3, а) имеет постоянную составляющую

$$P = rI^2 = U_a I = UI \cos \varphi$$

и переменную — синусоиду двойной частоты с такой же амплитудой. Величина  $P$  является, очевидно, средней мощностью за период. Она называется **активной мощностью**. В системе СИ мгновенная и активная мощности измеряются в ваттах ( $вт$ ).

Второй и третий член дают мгновенную мощность индуктивности и емкости (см. рис. 7.3, а):

$$p_L = x_L I^2 \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t,$$

$$p_C = -x_C I^2 \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t.$$

Эти мощности изменяются по синусоидам двойной частоты противоположным по фазе, т. е. когда индуктивность отдает энергию, емкость ее получает, и наоборот. Среднее значение  $p_L$  и  $p_C$  равно нулю. В сумме они дают мгновенную мощность реактивных участков цепи:

$$p_p = p_L + p_C = (x_L - x_C) I^2 \sin 2\omega t = x I^2 \sin 2\omega t =$$

$$= U_p I \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

Амплитуда синусоиды этой мощности

$$x I^2 = U_p I = UI \sin \varphi = Q$$

называется **реактивной мощностью**. В системе СИ реактивная мощность измеряется в реактивных вольт-амперах ( $вар$ ).

Теперь выражение для мгновенной мощности всей цепи может быть преобразовано:

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t + UI \sin \varphi \sin 2\omega t =$$

$$= UI \cos \varphi + UI \sin \left( 2\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, мгновенная мощность  $p$  всей цепи имеет постоянную составляющую  $UI \cos \varphi$  и переменную составляющую — синусоиду с амплитудой  $UI$  (рис. 7.3, б);  $p$  равно нулю когда  $u = 0$  или  $i = 0$ . Так как амплитуда переменной части  $UI$  больше постоянной составляющей  $UI \cos \varphi$ , мощность в определенные промежутки времени становится отрицательной. Когда мощность положительна, цепь получает энергию от источника; когда мощность отрицательна, цепь отдает энергию источнику. Очевидно, возврат энергии источнику получается за счет энергии поля того из реактивных участков цепи, мощность которого больше (для рис. 7.3, б за счет индуктивности). Отдавая запасенную в своем поле энергию, индуктивность снабжает энергией емкость, отдает часть своей энергии безвозвратно активному сопротивлению, а остаток возвращает источнику. Промежутки времени, в течение которых мощность положительна, больше, чем те, при которых мощность отрицательна.

Амплитуда переменной части мгновенной мощности всей цепи

$$UI = z I^2 = S$$

называется **полной мощностью** и измеряется в системе СИ в вольт-амперах ( $ва$ ).

Если умножить все стороны треугольника сопротивлений на общий множитель  $I^2$ , получается подобный ему прямоугольный **треуголь-**

льник мощностей (см. рис. 7.2, б) с углом у вершины, равным  $\varphi$ , гипотенузой, равной полной мощности  $S = zI^2 = UI$ , катетом равным активной мощности  $P = rI^2 = UI \cos \varphi$  и другим катетом равным реактивной мощности  $Q = xI^2 = UI \sin \varphi$ . Из треугольника мощностей видно, что

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Полная мощность  $S$  является характерной величиной для всякой электрической установки, любой электрической машины, аппарата, линии передачи и т. п. Сечение их проводов рассчитывается на ток  $I$  таким образом, чтобы провода не перегревались от выделяемого в них тепла. Изоляция рассчитывается на напряжение  $U$ ; сердечник и н. с. обмотки электромагнитных механизмов рассчитываются на магнитный поток, который также пропорционален напряжению (см., например, формулу для  $\mathcal{E}_m$  в п. 1 § 6. 1). Другими словами, любая электрическая установка рассчитывается на напряжение и на ток, т. е. на полную мощность  $UI$ , средняя же мощность

$$UI \cos \varphi \leq UI,$$

так как  $\cos \varphi \leq 1$ . Следовательно, полная мощность есть та максимальная активная мощность, которая может быть получена при данных действующих значениях напряжения и тока. *Из-за сдвига фаз расчетная (полная) мощность установки используется неполностью.* Отсюда ясна важность высокого  $\cos \varphi$ , называемого коэффициентом мощности.

В общем случае напряжение  $u$  и ток  $i$  цепи записываются так:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi), \quad i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $\psi$  — начальная фаза напряжения;

$\varphi$  — разность фаз напряжения и тока.

Если в рассмотренной цепи  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , т. е.  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ , то  $\varphi > 0$ , и ток отстает по фазе от напряжения. Если  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ , т. е.  $x < 0$ , то  $\varphi < 0$ , и ток опережает напряжение.

Для цепи с последовательным соединением сопротивления  $r$  и индуктивности  $L$  аналог закона Ома и сдвиг по фазе могут быть получены из выведенных формул, если положить  $\frac{1}{\omega C} = 0$ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}} = \frac{U}{z}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r} = \arctg \frac{x_L}{r} > 0.$$

Аналогично, для цепи с последовательным соединением сопротивления  $r$  и емкости  $C$ , положив  $\omega L = 0$ :

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_C^2}} = \frac{U}{z},$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{r}\right) = -\arctg \frac{x_C}{r} < 0.$$

## § 7.2. Резонанс напряжений

В электрических цепях, содержащих индуктивности и емкости, возможно явление резонанса, при котором напряжение и ток цепи совпадают по фазе. В цепи с последовательным соединением сопротивления, индуктивности и емкости (см. рис. 7.1, а) будет резонанс напряжений, когда

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad \text{т. е.} \quad x_L = x_C,$$

так как в этом случае ток и разность фаз напряжения и тока

$$I_0 = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{r}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = 0.$$

Напряжения на участках цепи при резонансе

$$U_{a0} = r I_0 = r \frac{U}{r} = U, \quad U_{L0} = x_L I_0 = \frac{x_L}{r} U, \quad U_{C0} = x_C I_0 = \frac{x_C}{r} U,$$

т. е. активное напряжение равно полному, а индуктивное напряжение — емкостному напряжению, так как индуктивное сопротивление  $x_L$  равно емкостному  $x_C$ . Если  $x_L = x_C \gg r$ , то  $U_{L0} = U_{C0} \gg U_{a0} = U$ . Ток при резонансе, ограниченный лишь активным сопротивлением, при малом  $r$  также может получить большое значение.

На рис. 7.4 показана векторная диаграмма для случая резонанса. Как видно из этой диаграммы и приведенных соотношений, при резонансе цепь, несмотря на наличие в ней индуктивности и емкости, ведет себя как активное сопротивление. Ток совпадает по фазе с напряжением и получает наибольшее значение. Реактивное напряжение

$$U_{p0} = U_{L0} - U_{C0} = 0.$$

Так как условием резонанса является равенство  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , то для данных двух величин из трех ( $L$ ,  $C$ ,  $\omega$ ) резонанс может быть получен подбором третьей. Итак, резонанс будет при

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C} \quad \text{или} \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Индуктивное и емкостное сопротивления при резонансе

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

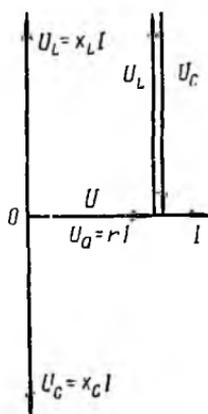


Рис. 7.4

Величина называется характеристическим сопротивлением цепи, а ее отношение к активному сопротивлению

$$\frac{\rho}{r} = Q_0$$

называется добротностью цепи (контура). Добротность равна также отношению индуктивного или емкостного напряжения при резонансе к напряжению всей цепи. Обратная величина

$$d = \frac{1}{Q_0} = \frac{r}{\rho}$$

называется затуханием цепи. Чем меньше  $r$ , а следовательно, и  $d$ , тем при резонансе больше активная (средняя) мощность

$$P_0 = \frac{U^2}{r}.$$

Мгновенные мощности индуктивности и емкости при резонансе равны по величине и обратны по знаку (рис. 7.5):

$$p_L = x_L I^2 \sin 2\omega t \quad \text{и} \quad p_C = -x_C I^2 \sin 2\omega t.$$

Индуктивная  $Q_L = x_L I^2$  и емкостная  $Q_C = x_C I^2$  мощности также равны друг другу. Следовательно, при резонансе мгновенная мощность  $p_p$  и реактивная мощность  $Q$  всей цепи будут

$$p_p = p_L + p_C = 0 \quad \text{и} \quad Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Этого следовало ожидать, так как при резонансе, как показано, цепь ведет себя как активное сопротивление.

Максимальное значение энергии индуктивности

$$\frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{U_{Cm}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \right)^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2,$$

т. е. равно максимальному значению энергии емкости. Тогда, если  $i = I_m \sin \omega t$ , то  $u_C = -U_{Cm} \cos \omega t$  и мгновенное значение суммарной энергии индуктивности и емкости равно:

$$W = \frac{L i^2}{2} + \frac{C u_C^2}{2} = \frac{L I_m^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{C U_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{L I_m^2}{2} = \frac{C U_{Cm}^2}{2} = \text{const.}$$

Отсюда видно, что при резонансе суммарная энергия, запасенная реактивными элементами цепи, постоянна и равна максимальной энергии индуктивности, равной, в свою очередь, максимальной энергии емкости. Колебания энергии индуктивности и емкости противоположны по фазе и в цепи происходит полный обмен энергиями между ними. Источник не участвует в этом обмене и доставляет лишь энергию активному сопротивлению цепи.

Таким образом, при резонансе происходит взаимная компенсация индуктивных и емкостных сопротивлений, напряжений и мощностей.

Далее рассмотрен режим, когда напряжение на зажимах цепи постоянно, а частота изменяется от 0 до  $\infty$ .

Ток  $I = 0$  при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  и максимален при резонансе, когда  $\omega = \omega_0$ . Аналогично изменяется активное напряжение  $U_a = rI$  и активная (средняя) мощность  $P = rI^2$ , но кривая  $P(\omega)$ , очевидно, имеет более острую форму, чем кривая  $I(\omega)$  (рис. 7.6).

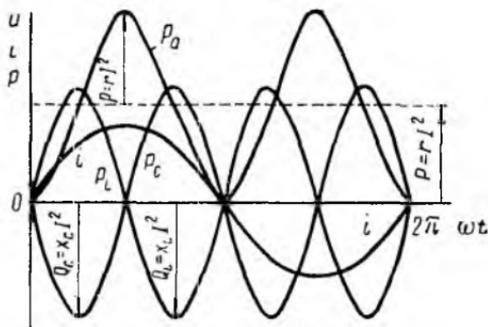


Рис. 7.5

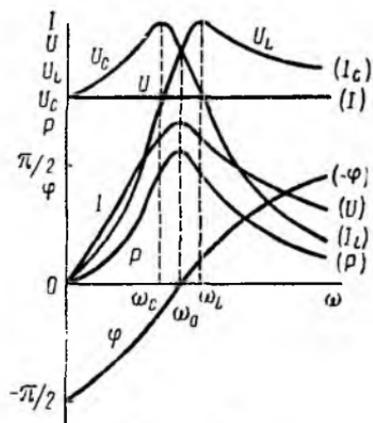


Рис. 7.6

Индуктивное напряжение  $U_L = 0$  при  $\omega = 0$ . При  $\omega = \infty$   $U_L = U$ , при резонансе  $U_{L0} = \frac{\omega_0 L}{r} U$ . Для определения частоты  $\omega_L$ , при которой  $U_L$  максимально, вместо исследования на максимум величины

$$U_L = \omega LI = \frac{\omega LU}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{r^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}}$$

проще исследовать подрадикальное выражение на минимум, взяв его производную по  $\omega$  и приравняв нулю:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \frac{r^2}{L^2} \omega^{-2} + \left(1 - \frac{\omega^{-2}}{LC}\right)^2 \right] = -\frac{2r^2}{L^2} \omega^{-3} + 2 \left(1 - \frac{\omega^{-2}}{LC}\right) 2 \frac{\omega^{-3}}{LC} = 0.$$

Отсюда

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{2LC - r^2 C^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sqrt{L/C}}\right)^2}} > \omega_0.$$

Значение  $U_{L \max}$  получится после подстановки значения  $\omega_L$  в общее выражение для  $U_L$ :

$$U_{L \max} = \frac{U_{L0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\sqrt{L/C}}\right)^2}} > U_{L0}.$$

Емкостное напряжение  $U_C = U$  при  $\omega = 0$ ;  $U_C = 0$  при  $\omega = \infty$ ; при резонансе  $U_{C0} = \frac{U}{r\omega_0 C} = U_{L0}$ . Определение частоты  $\omega_C$ , при кото-

рой  $U_C$  проходит через максимум, и значение  $U_{C \max}$  можно провести аналогично предыдущему:

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{r^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [r^2 \omega^2 C^2 - (\omega^2 LC - 1)^2] = 2r^2 C^2 \omega + 2(\omega^2 LC - 1) 2\omega LC = 0,$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{2L - r^2 C}{2L^2 C}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sqrt{\frac{L}{C}}}\right)^2} < \omega_0,$$

$$U_{C \max} = \frac{U_{C0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}\right)^2}} = U_{L \max}.$$

Таким образом, наибольшие значения напряжений на индуктивности и емкости равны между собой.

Графики зависимостей  $U_L(\omega)$  и  $U_C(\omega)$  показаны также на рис. 7.6. При увеличении активного сопротивления  $r$  цепи  $I_0$ ,  $U_{L0}$ ,  $U_{C0}$ ,  $U_{L \max}$  и  $U_{C \max}$  уменьшаются, а частоты  $\omega_L$  и  $\omega_C$  удаляются от резонансной частоты  $\omega_0$ ; при  $r > \sqrt{2\frac{L}{C}}$  максимумов нет.

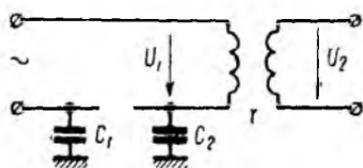


Рис. 7.7

Кривые на рис. 7.6 называются резонансными кривыми или частотными характеристиками цепи.

Явление резонанса имеет широкое применение в радиотехнике. Например, в ряде устройств используется зависимость режима работы цепи с последовательным соединением  $L$  и  $C$  от частоты и повышение тока этой цепи при резонансе.

В электротехнике резонанс напряжений часто является аварийным режимом; так при обрыве линии передачи, питающей отключенный со вторичной стороны трансформатор  $T$  (рис. 7.7), может наступить резонанс между емкостью

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

( $C_1$  и  $C_2$  — емкости на землю двух участков линии передачи) и индуктивностью  $L$  первичной обмотки трансформатора, что вызовет недопустимое для изоляции и безопасности установки повышение напряжения  $U_1$  в первичной и, следовательно,  $U_2$  во вторичной обмотках трансформатора.

## § 7.3. Цепь с параллельным соединением участков с сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью. Резонанс токов

### 1. Основные соотношения

При параллельном соединении сопротивления  $r$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 7.8, а) мгновенное значение тока  $i$  всей цепи, согласно первому закону Кирхгофа, равно алгебраической сумме мгновенных значений токов отдельных приемников:

$$i = i_a + i_L + i_C = \frac{u}{r} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}.$$

После подстановки в это выражение напряжения  $u = U_m \sin \omega t$  ток всей цепи представляется суммой синусоид:

$$i = \frac{U_m}{r} \sin \omega t + \frac{U_m}{\omega L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \omega C U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Следовательно, ток всей цепи также будет синусоидой, вектор которой может быть найден как геометрическая сумма векторов слагающих синусоид. Векторная диаграмма для действующих значений значений дана на рис. 7.8, б.

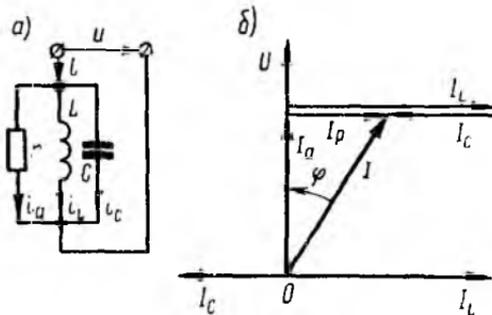


Рис. 7.8

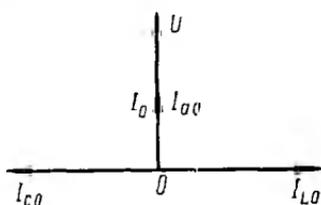


Рис. 7.9

Активный ток  $I_a = \frac{U}{r}$  совпадает по фазе с напряжением  $U$ , индуктивный ток  $I_L = \frac{U}{\omega L}$  отстает от напряжения на  $\pi/2$ , емкостный ток  $I_C = \omega C U$  опережает напряжение на  $\pi/2$ , реактивный ток  $I_p = I_L - I_C$ . Тогда действующее значение тока всей цепи

$$I = \sqrt{I_a^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{r}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega L} - \omega C U\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} U,$$

а разность фаз напряжения и тока

$$\varphi = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_a} = \arctg \frac{\frac{U}{\omega L} - \omega C U}{\frac{U}{r}} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{r}}.$$

Резонанс токов наступит при

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C = \sqrt{\frac{C}{L}},$$

т. е. при условии, аналогичном условию резонанса напряжений. Тогда

$$I_0 = \frac{U}{r} \quad \text{и} \quad \varphi_0 = 0,$$

т. е. цепь будет вести себя как активное сопротивление.

Токи ветвей цепи при резонансе:

$$I_{a0} = \frac{U}{r} = I_0, \quad I_{L0} = \frac{U}{\omega L} = \frac{r}{\omega L} I_0, \quad I_{C0} = \omega C U = r \omega C I_0.$$

Векторная диаграмма для случая резонанса изображена на рис. 7.9. Так как векторы  $I_{L0}$  и  $I_{C0}$  равны между собой и направлены противоположно, сумма их — реактивный ток — равна нулю. Ток цепи  $I_0$  равен активному току  $I_{a0}$  и совпадает по фазе с напряжением. При  $\frac{1}{\omega L} = \omega C > \frac{1}{r}$  токи  $I_{L0} = I_{C0} > I_0 = I_{a0}$ , т. е. токи в индуктивности и в емкости будут больше тока всей цепи, равного току в активном сопротивлении.

Энергетическая сторона процесса здесь такая же, как и при резонансе напряжений: суммарная энергия, запасенная в полях цепи, постоянно и равна максимальной энергии емкости, равной, в свою очередь, максимальной энергии индуктивности. Колебания энергии емкости и индуктивности противоположны по

фазе, и в цепи происходит полный обмен энергиями между ними. Источник не участвует в этом обмене, он доставляет лишь энергию активному сопротивлению.

Если в рассматриваемой цепи поддерживать неизменным напряжение  $U$  и увеличивать частоту  $\omega$ , активный ток  $I_a = \frac{U}{r}$  и активная мощность  $P = \frac{U^2}{r}$  останутся неизменными, индуктивный ток  $I_L = \frac{U_L}{\omega L}$  будет убывать, а емкостный ток  $I_C = \omega C U$  — возрастать; при резонансе  $I_{L0} = I_{C0}$ . Частотные характеристики цепи показаны на рис. 7.10. Ток всей цепи

$$I = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} U$$

получает при резонансе, когда  $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$ , минимальное значение  $I_0 = \frac{U}{r} = I_a$ . Фазный сдвиг  $\varphi$  положителен при  $\omega < \omega_0$ , равен нулю при  $\omega = \omega_0$  и отрицателен при  $\omega > \omega_0$ .

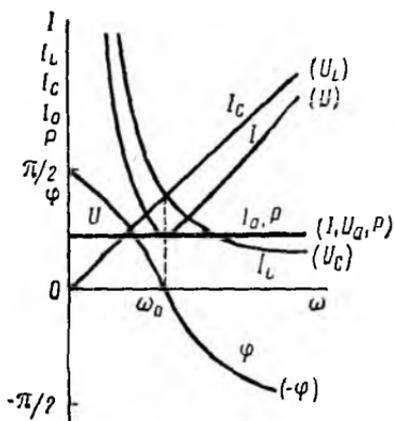


Рис. 7.10

В высокочастотных генераторах, усилителях и других радиотехнических устройствах используется зависимость режимов работы от частоты в цепи с параллельным соединением  $L$  и  $C$  и повышение напряжения этой цепи при резонансе токов.

## 2. Дуальные цепи

При сравнении уравнения, написанного для цепи с параллельным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 7.8,  $a$ ) на основе первого закона Кирхгофа,

$$i = \frac{u}{r} + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt$$

с уравнением для цепи с последовательным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 7.1,  $a$ ), написанного на основе второго закона Кирхгофа,

$$u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

видно, что оба уравнения имеют в качестве независимой переменной время  $t$  и совершенно аналогичны, причем одно получается из другого при взаимной замене схемы и величин по табл. 7.1.

Таблица 7.1

Параллельное соединение	$i$	$u$	$\frac{1}{r}$	$L$	$C$
Последовательное соединение	$u$	$i$	$r$	$C$	$L$

Две цепи, в которых напряжения первой цепи ведут себя, как токи второй и, наоборот, токи первой ведут себя, как напряжения второй, называются дуальными. Цепь с  $L$  и цепь с  $C$ , как видно из § 6.3, дуальны. Дуальными являются также цепи с последовательным и параллельным соединениями  $r$ ,  $L$  и  $C$ , и все выводы, сделанные для последовательной схемы, можно перенести на параллельную, если заменить величины так, как указано в приведенной таблице. Взаимная замена напряжения и тока должна, очевидно, производиться и для их действующих значений  $U$  и  $I$ , а частота  $\omega$  для обеих схем должна быть одинакова.

Так, например, результаты исследования последовательной схемы при  $U = \text{const}$  и  $\omega = \text{var}$ , изображенные на рис. 7.6, могут быть целиком перенесены на параллельную схему, работающую при  $I = \text{const}$  и  $\omega = \text{var}$ , причем кривая, изображающая изменение тока  $I$  цепи, будет изображать кривую изменения напряжения  $U$ , кривая  $U_L$  — кривую  $I_C$  и кривая  $U_C$  — кривую  $I_L$ . Зависимость активной (средней) мощности  $P = \frac{U^2}{r}$  от частоты будет такой же, зависимость  $\varphi(\omega)$  будет отличаться только знаком (рис. 7.6, обозначения кривых даны справа в скобках). Дуальными будут и векторные диаграммы, что можно видеть, например, из сравнения рис. 7.1,  $b$  и 7.3,  $b$ .

Общему выражению для емкостного напряжения последовательной схемы (см. § 7.2) будет соответствовать общее выражение для индуктивного тока параллельной схемы:

$$I_L = \frac{I}{\omega L \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}},$$

выражению для максимумов напряжений  $U_L$  и  $U_C$  будет соответствовать выражение для максимумов токов  $I_C$  и  $I_L$ :

$$I_{C \max} = I_{L \max} = \frac{I_{C0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \sqrt{\frac{C}{L}}}\right)^2}},$$

выражению для частоты  $\omega_C$ , при которой  $U_C$  проходит через максимум, будет соответствовать выражение  $\omega_L$ , при которой  $I_L$  проходит через максимум:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{C}{L}}}\right)^2}$$

и т. д.

Совершенно аналогичны между собой и режимы работы параллельной цепи при  $\omega = \text{var}$  и  $U = \text{const}$  (см. рис. 7.10) и последовательной — при  $\omega = \text{var}$  и  $I = \text{const}$ , если произвести указанную замену величин (обозначения кривых даны справа в скобках). Интересно отметить, что при неизменном

токе напряжение  $U$  последовательной цепи при резонансе, когда  $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ , получает минимальное значение.

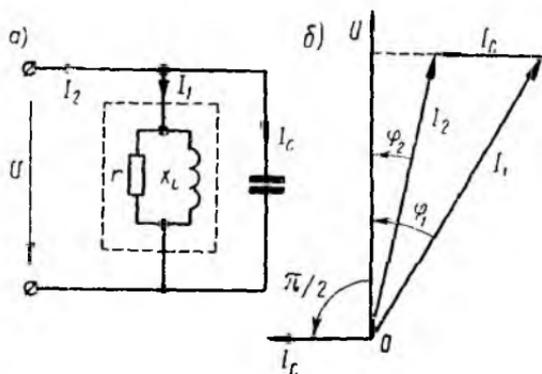


Рис. 7.11

### 3. Повышение коэффициента мощности

Схема, в которой возможен резонанс токов, используется в электротехнике для повышения коэффициента мощности. Обычно при-

емники электрической энергии имеют активно-индуктивный характер, т. е. работают со сдвигом фаз  $\varphi > 0$  между напряжением и током. Так, электрический двигатель переменного тока может быть представлен в виде схемы с параллельным соединением  $r$  и  $x_L$  (рис. 7.11, а), где активная мощность  $P$ , расходуемая в сопротивлении  $r$ , равна сумме

олезной мощности двигателя и всех потерь в нем, а реактивная мощность  $Q$  индуктивного сопротивления  $x_L$  равна индуктивной мощности двигателя, связанной с его магнитным полем.

Источник энергии, питающий такой приемник, а также линия передачи должны быть рассчитаны на полную мощность  $S = UI$ , превышающую среднюю мощность приемника  $P = UI \cos \varphi$ . Для уменьшения полной мощности источника и линии передачи путем повышения коэффициента мощности часто применяется параллельное подключение к приемнику батареи конденсаторов, т. е. схема, в которой возможен резонанс токов.

На рис. 7.11, б показана векторная диаграмма этой цепи. Здесь  $I_1$  — ток нагрузки,  $\varphi_1$  — фазный сдвиг,  $I_C$  — ток батареи конденсаторов, который при пренебрежении потерями в них опережает напряжение  $U$  по фазе на угол  $\pi/2$ ,  $I_2$  — ток источника,  $\varphi_2$  — новый фазный сдвиг. На основании этой диаграммы можно вычислить емкость  $C$  батареи конденсаторов, необходимой для уменьшения фазного сдвига  $\varphi_1$  до величины  $\varphi_2$ :

$$I_C = \omega C U = I_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - I_1 \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2),$$

где  $P$  — средняя мощность приемника.

Отсюда

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2),$$

при  $\varphi_2 = 0$  емкость

$$C_0 = \frac{P}{\omega U^2} \operatorname{tg} \varphi_1.$$

## § 7.4. Элементарные методы расчета простых цепей переменного тока

### 1. Эквивалентные схемы

При расчете цепи любой приемник может быть заменен эквивалентной схемой с сосредоточенными параметрами, имеющей равные ток и фазный сдвиг при том же напряжении и той же час-

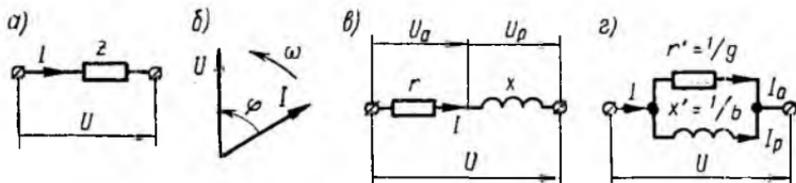


Рис. 7.12

тоте. Если приемник (рис. 7.12, а) при напряжении  $U$  и частоте  $f$  потребляет ток  $I$  с фазным сдвигом  $\varphi$  (рис. 7.12, б), то полное сопротивление  $z$  и полная мощность  $S$  этого приемника и его эквивалентной схемы будут:

$$z = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad S = UI = zI^2.$$

Первой простейшей эквивалентной схемой является последовательное соединение активного  $r$  и реактивного  $x$  сопротивлений (рис. 7.12, а для случая преобладания индуктивного сопротивления). Тогда активные и реактивные сопротивления, напряжения и мощности этой эквивалентной схемы соответственно равны:

$$\begin{aligned} r &= z \cos \varphi, & x &= z \sin \varphi, \\ U_a &= rI = U \cos \varphi, & U_p &= xI = U \sin \varphi, \\ P &= rI^2 = S \cos \varphi, & Q &= xI^2 = S \sin \varphi \end{aligned}$$

и могут быть представлены катетами подобных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых равны полным величинам:

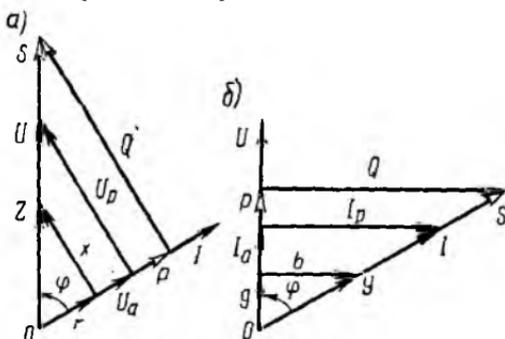


Рис. 7.13

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{r^2 + x^2}, \\ U &= \sqrt{U_a^2 + U_p^2}, \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2}. \end{aligned}$$

Треугольники сопротивлений, напряжений и мощностей изображены на рис. 7.13, а.

Второй простейшей эквивалентной схемой того же приемника является параллельное соединение активного  $r'$  и реактивного  $x'$  сопротивлений (рис. 7.12, б), не равных  $r$  и  $x$  эквивалентной ей последовательной схеме. Параллельную схему удобнее характеризовать проводимостями: активной  $g = \frac{1}{r'}$ , реактивной  $b = \frac{1}{x'}$  и полной  $y$ . Полная проводимость и полная мощность приемника и его параллельной эквивалентной схемы соответственно равны:

$$y = \frac{I}{U} \quad \text{и} \quad S = UI = yU^2.$$

Токи ветвей параллельной эквивалентной схемы, называемые активным и реактивным:

$$I_a = gU \quad \text{и} \quad I_p = bU,$$

изображены на векторной диаграмме рис. 7.13, б. Так как они сдвинуты между собой по фазе на угол  $\pi/2$ , полный ток

$$I = yU = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(gU)^2 + (bU)^2} = \sqrt{g^2 + b^2} U,$$

откуда

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

На рис. 7.13, б прямоугольный треугольник токов совмещен с треугольником проводимостей, а также с треугольником

ощностей, гипотенуза которого равна полной мощности  $S$ , а катеты — активной и реактивной мощностям:

$$P = UI_a = gU^2, \quad Q = UI_p = bU^2.$$

Все эти треугольники имеют у вершины угол  $\varphi$  и подобны.

Сопротивления и проводимости часто называют параметрами приемников. Это определение полностью справедливо для  $y$ , величины же  $r$ ,  $x$  и  $g$ ,  $b$  правильной называть параметрами эквивалентных схем.

Так как последовательная и параллельная схемы эквивалентны между собой, активные, реактивные и полные мощности их должны быть также между собой равны:

$$P = rI^2 = gU^2, \quad Q = xI^2 = bU^2, \quad S = zI^2 = yU^2.$$

Отсюда могут быть получены переходные формулы от сопротивлений последовательной схемы к проводимостям параллельной схемы:

$$g = \frac{rI^2}{U^2} = \frac{r}{z^2} = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{xI^2}{U^2} = \frac{x}{z^2} = \frac{x}{r^2 + x^2}, \quad y = \frac{zI^2}{U^2} = \frac{1}{z}.$$

Аналогичным образом могут быть получены переходные формулы от проводимостей параллельной схемы к сопротивлениям последовательной:

$$r = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad x = \frac{b}{y^2} = \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad z = \frac{1}{y}.$$

Таким образом, обратными друг другу являются только полные сопротивление  $z$  и проводимость  $y$ , активные и реактивные сопротивления и проводимости находятся в более сложной зависимости.

При анализе поведения какого-либо приемника при переменной частоте необходимо заменять его эквивалентной схемой, близкой физической сущности этого приемника, т. е. схемой, в которой сопротивления, индуктивности и емкости ее элементов могут быть приняты постоянными. Так, в некотором диапазоне частот можно пренебречь поверхностным эффектом, и, например, для кольцевого соленоида считать сопротивление  $r$  и индуктивность  $L$  независимыми от частоты, определяя их по формулам (см. п. 1 § 1.5 и п. 2 § 1.7):

$$r = \rho \frac{l_1}{S_1} \quad \text{и} \quad L = \mu \frac{\omega^2 S_2}{l_2},$$

где  $l_1$  и  $l_2$  — соответственно длины провода обмотки и сердечника,  $S_1$  и  $S_2$  — их сечения. Пренебрегая током через межвитковые емкости соленоида, что допустимо только при низких частотах, следует представить соленоид в виде последовательной эквивалентной схемы постоянными параметрами  $r$  и  $L$  (см. рис. 7.12, а). Тогда при постоянном токе ( $\omega = 0$ ) соленоид и его эквивалентная схема будут иметь сопротивление  $r$ , а с ростом частоты  $\omega$  его сопротивление  $z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$  будет возрастать, что соответствует действительности. Сопротивление параллельной схемы с постоянными параметрами  $r$  и  $L$  (см. рис. 7.12, б) при  $\omega = 0$  было бы равно нулю, при  $\omega = \infty$

стало бы равным активному сопротивлению, что не соответствует действительности. Поэтому параметры  $r'$  и  $L'$  параллельной эквивалентно схемы должны изменяться с частотой.

## 2. Цепи с последовательным и параллельным соединением приемников

При последовательном соединении нескольких приемников каждый из них удобно заменить эквивалентной схемой, состоящей из последовательного соединения активного  $r$  и реактивного  $x$  сопротивлений

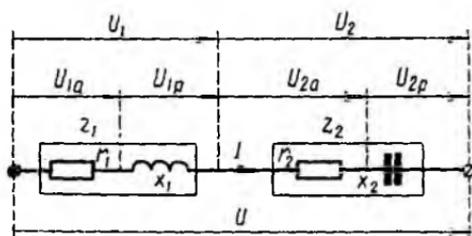


Рис. 7.14

Ток всех приемников такой цепи одинаков, а мгновенное значение напряжения, согласно второму закону Кирхгофа, равно алгебраической сумме мгновенных значений напряжений отдельных приемников. При переходе к векторам алгебраическая сумма заменяется геометрической.

В качестве примера на рис. 7.15, а показана векторная диаграмма для цепи рис. 7.14, состоящей из последовательного соединения двух приемников — одного с индуктивным характером нагрузки и другого с емкостным. Векторы напряжения приемников и всей цепи разлагаются на составляющие: активные  $U_a$  — по вектору тока и реактивные  $U_p$  — перпендикулярно вектору тока. Если разделить все напряжения (стороны треугольников напряжений:  $U_a = rI$ ,  $U_p = xI$ ,  $U = zI$ ) на  $I$ ,

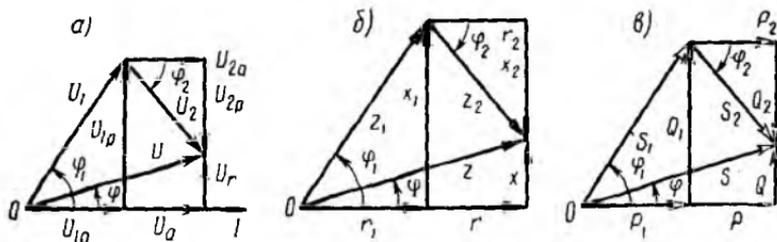


Рис. 7.15

получится подобный рис. 7.15, а многоугольник сопротивлений (рис. 7.15, б). При умножении напряжений на  $I$  получится подобный рис. 7.15, а многоугольник мощностей со сторонами  $P = rI^2$ ,  $Q = xI^2$ ,  $S = zI^2$  (рис. 7.15, в).

При параллельном соединении нескольких приемников каждый из них удобно заменить эквивалентной схемой, состоящей из параллельного соединения активной  $g$  и реактивной  $b$  проводимостей. Напряжение всех приемников такой цепи одинаково, а мгновенное значение тока цепи, согласно первому закону Кирхгофа, равно алгебраической сумме мгновенных значений токов отдельных приемников. При переходе к векторам алгебраическая сумма заменяется геометрической

В качестве примера на рис. 7.17 дана векторная диаграмма для цепи, состоящей из параллельного соединения приемника с индуктивным характером нагрузки и приемника с емкостной нагрузкой (рис. 7.16). Векторы тока приемников и всей цепи разлагаются на составляющие:

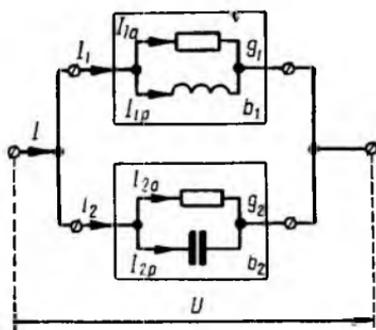


Рис. 7.16

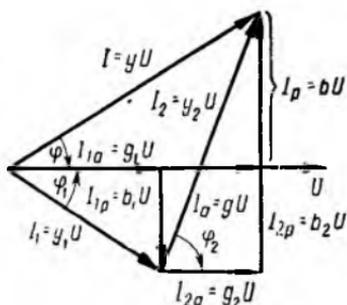


Рис. 7.17

активные  $I_a$  по вектору напряжения  $U$  и реактивные  $I_p$  — перпендикулярно вектору напряжения. Если разделить все токи (стороны треугольников токов:  $I_a = gU$ ,  $I_p = bU$ ,  $I = yU$ ) на  $U$ , получится подобный рис. 7.17 многоугольник проводимостей ( $g$ ,  $b$ ,  $y$ ), а при умножении токов на  $U$  — подобный многоугольник мощностей ( $P = gU^2$ ,  $Q = bU^2$ ,  $S = yU^2$ ).

Из многоугольников рис. 7.15 и 7.17 видно, что при последовательном соединении складываются сопротивления, напряжения и мощности, а при параллельном — проводимости, токи и тоже мощности. Активные величины складываются арифметически, реактивные — алгебраически, а полные — геометрически.

### 3. Расчет цепей со смешанным соединением приемников методами преобразования и пропорционального пересчета

При смешанном (параллельно-последовательном) соединении приемников с заданными параметрами, питаемых одним источником энергии, токи, напряжения и мощности ветвей цепи могут быть определены аналитически методом преобразования, заключающимся в постепенной замене сложной цепи более простой, ей эквивалентной. Ход решения подобной задачи показан на рис. 7.18. Группа приемников, соединенных параллельно, заменяется одним, активная проводимость которого равна арифметической сумме активных проводимостей приемников, а реактивная — алгебраической сумме реактивных. Группа приемников, соединен-

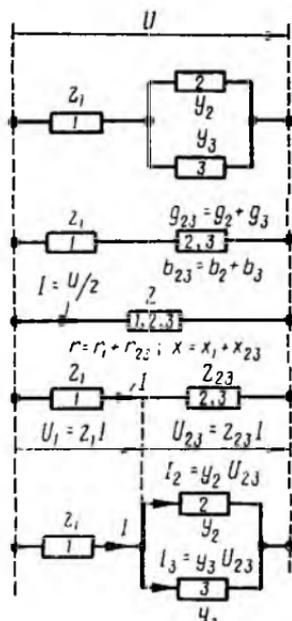


Рис. 7.18

ных последовательно, заменяется одним, активное сопротивление которого равно арифметической сумме активных сопротивлений отдельных приемников, а реактивное — алгебраической сумме. После замены всей цепи одним приемником определяется ток при заданном напряжении или напряжение при заданном токе и сдвиг фаз между ними. Затем схема разворачивается в первоначальную цепь с постепенным определением напряжений, токов и фазных сдвигов в отдельных приемниках.

В процессе решения этой задачи несколько раз приходится применять переходные формулы от сопротивлений к проводимостям и от проводимостей к сопротивлениям.

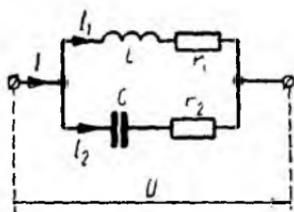


Рис. 7.19

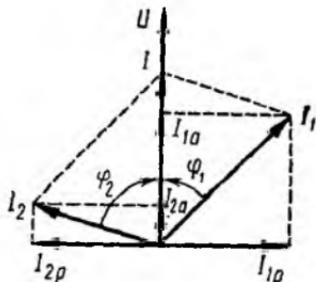


Рис. 7.20

В качестве примера далее решается важная для электротехники задача определения частоты  $\omega$ , при которой в схеме рис. 7.19 наступит резонанс токов, т. е. напряжение и ток всей цепи будут совпадать по фазе. Для этого, очевидно, реактивная проводимость всей цепи должна быть равна нулю:

$$b = b_L - b_C = \frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}.$$

Таким образом, в общем случае, когда  $r_1 \neq r_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$ , частота  $\omega$  резонанса в этой цепи отличается от частоты  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  резонанса при последовательном или параллельном соединении  $L$  и  $C$ . Векторная диаграмма для резонанса в цепи рис. 7.19 изображена на рис. 7.20. Реактивные составляющие токов ветвей в сумме дают нуль, и ток всей цепи равен сумме активных составляющих.

Так как в общем случае токи ветвей сдвинуты по фазе не на  $\pi/2$ , их мгновенные мощности, изменяющиеся с двойной частотой, будут сдвинуты по фазе на угол, отличный от  $\pi$ , т. е. они не находятся в противофазе. Это значит, что в общем случае резонанса полного обмена энергиями между индуктивной и емкостной ветвями не происходит.

Интересно отметить частные случаи:

1) при  $r_1 = r_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$  частота  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ;

2) при  $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $\omega = \frac{0}{0}$ , т. е. резонанс будет при любой частоте;

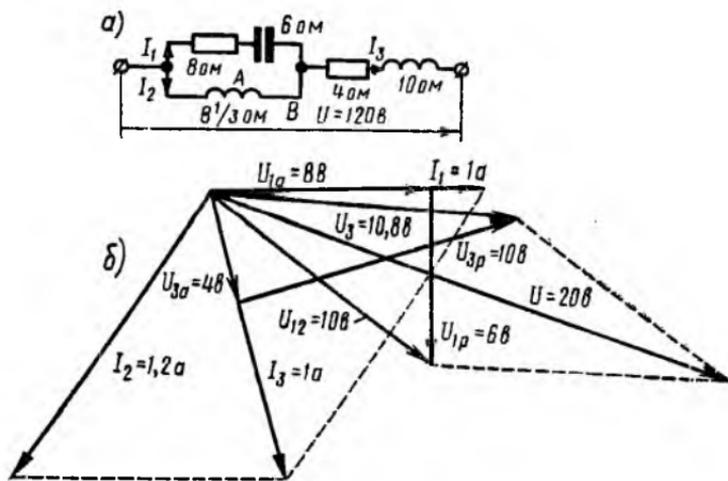


Рис. 7.21

3) при  $r_1 > \sqrt{\frac{L}{C}} > r_2$  или  $r_1 < \sqrt{\frac{L}{C}} < r_2$  резонансная частота будет мнимым числом, а это значит, что резонанс в этой цепи невозможен.

Расчет подобных цепей может быть произведен также графоаналитически — методом пропорционального пересчета. Он основан на том, что в линейной цепи токи пропорциональны напряжениям, следовательно, векторная диаграмма напряжений и токов, рассчитанная или построенная для одного значения питающего напряжения, сохранит свой вид при изменении этого напряжения, и лишь масштабы для напряжения и тока изменятся во столько же раз.

Например, для цепи рис. 7.21, а, решая задачу графоаналитически, целесообразно строить векторную диаграмму, задавшись током первой ветви  $I_1 = 1\text{a}$ . Затем последовательно вычисляются и в выбранном масштабе наносятся на диаграмму векторы в соответствии со своей

фазой, после чего они складываются графически (рис. 7.21, б):

$$U_{1a} = r_1 I_1 = 8 \cdot 1 = 8\text{ в}, \quad U_{1p} = x_1 I_1 = 6 \cdot 1 = 6\text{ в},$$

$$\bar{U}_{12} = \bar{U}_{1a} + \bar{U}_{1p} = 10\text{ в},$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{x_{12}} = \frac{10}{8 \frac{1}{3}} = 1,2\text{ а}, \quad I_3 = I_1 + I_2 = 1\text{ а},$$

$$U_{3a} = r_3 I_3 = 4 \cdot 1 = 4\text{ в}, \quad U_{3p} = x_3 I_3 = 10 \cdot 1 = 10\text{ в},$$

$$\bar{U}_3 = \bar{U}_{3a} + \bar{U}_{3p} = 10,8\text{ в}, \quad \bar{U} = \bar{U}_{12} + \bar{U}_3 = 20\text{ в}.$$

Таким образом, напряжение всей цепи оказалось равным 20 в вместо заданных 120 в. Следовательно, векторная диаграмма рис. 7.21, б остается действительной и для заданного напряжения, если увеличить масштабы для напряжений и токов в  $120/20 = 6$  раз.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

#### § 8.1. Символическое изображение синусоидальных функций

Символический метод, введенный в теорию переменных токов Штейнмецом, является аналитическим развитием векторных диаграмм. Он основан на изображении векторов в комплексной плоскости и на их записи комплексными числами. Это приводит к применению для цепей синусоидального переменного тока законов Ома и Кирхгофа и вытекающих из них методов расчета цепей в той же форме, что и для цепей постоянного тока. В России символический метод был введен В. Ф. Миткевичем.

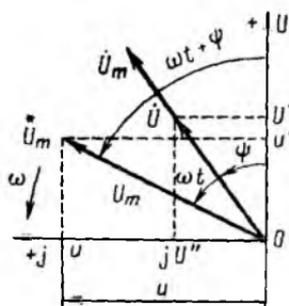


Рис. 8.1

В символическом методе принято исходную ось направлять вертикально и на ней откладывать вверх положительные вещественные числа, а по горизонтальной оси влево — положительные мнимые числа (рис. 8.1).

В дальнейшем эти оси называются осью вещественных и осью мнимых. Тогда, например, вращающийся вектор  $\dot{U}_m^*$ , изображающий синусоидальное напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

и составляющий с осью вещественных угол  $\omega t + \psi$ , может быть записан в виде комплексного числа в алгебраической, тригонометрической или показательной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m^* &= u' + ju = U_m [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)] = \\ &= U_m e^{j(\omega t + \psi)} = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{U}_m e^{j\omega t}; \end{aligned}$$

здесь  $j = \sqrt{-1}$ ,  $u'$  и  $u$  — составляющие, соответственно, по осям вещественных и мнимых,  $U_m$  — модуль (величина) вектора, угол  $(\omega t + \psi)$  — его аргумент, а  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Комплекс  $e^{j\omega t}$  называют множителем вращения, а  $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi}$  — комплексной амплитудой. Соответственно

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = U e^{j\psi} = U \cos \psi + j U \sin \psi = U' + j U''$$

называют комплексным действующим значением, в данном примере — напряжения, или комплексным напряжением. На комплексной плоскости оно изображается неподвижным вектором.

Для обратного перехода от комплекса  $\dot{U}_m^*$  к мгновенному значению  $u$  следует взять только мнимую часть комплекса (без  $j$ ), что записывается следующим образом:

$$u = \text{Im } \dot{U}_m^*$$

Тогда

$$u = \text{Im } U_m e^{j(\omega t + \psi)} = \text{Im} [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)] = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом, комплекс  $\dot{U}_m^*$  является также изображением (как бы символом) синусоиды  $u$ , откуда и получил свое название метод, заключающийся в замене оригиналов (синусоид) комплексными изображениями, в операциях над ними и затем в обратном переходе для искоемых величин от их изображений к оригиналам.

Геометрическому сложению и вычитанию векторов соответствует алгебраическое сложение и вычитание их проекций на оси комплексной плоскости, т. е. их вещественных и мнимых составляющих. Поэтому геометрическое сложение и вычитание векторов должно быть заменено вновь алгебраическим сложением и вычитанием их комплексов. Таким образом, алгебраический характер сложения и вычитания мгновенных значений синусоидальных величин сохраняется при замене оригиналов комплексными изображениями.

Так как проекция произведения двух векторов не равна произведению проекций этих векторов, изображение произведения двух синусоидальных функций не равно произведению их изображений, поэтому при умножении таких функций нельзя применять символический метод.

Производная синусоидальной функции  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$

$$\frac{du}{dt} = \omega U_m \cos(\omega t + \psi) = \omega U_m \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

имеет изображение

$$\omega U_m e^{j\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega U_m e^{j(\omega t + \psi)} = j \omega \dot{U}_m^*$$

так как  $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$ . Полученное изображение равно производной изображения исходной функции:

$$\frac{d\dot{U}_m^*}{dt} = \frac{d(\dot{U}_m e^{j\omega t})}{dt} = j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega \dot{U}_m^*.$$

Интеграл той же синусоидальной функции

$$\int u dt = -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi) = \frac{U_m}{\omega} \sin(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})$$

имеет изображение

$$\frac{U_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{U_m}{\omega} e^{j(\omega t + \psi)} = \frac{\dot{U}_m^*}{j\omega},$$

равное интегралу изображения исходной функции:

$$\int \dot{U}_m^* dt = \int \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{U}_m}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{\dot{U}_m^*}{j\omega}.$$

Таким образом, однозначное соответствие имеет место также между производными и интегралами оригинала и комплексного изображения.

Здесь получен еще один важный результат: дифференцированию оригинала соответствует умножение на  $j\omega$  его изображения, интегрированию — деление на  $j\omega$ . Следовательно, интегро-дифференциальному уравнению для мгновенных значений соответствует алгебраическое уравнение для изображений, т. е. применение символического метода приводит к алгебраизации этих уравнений, что крайне упрощает расчеты.

## § 8.2. Применение символического метода для расчета цепей переменного тока

Применение символического метода можно показать на примере. Так, для цепи с последовательным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  уравнению по второму закону Кирхгофа

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u$$

при синусоидальном законе изменения напряжения и тока соответствует алгебраическое уравнение

$$r\dot{I}_m^* + j\omega L\dot{I}_m^* + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m^* = \dot{U}_m^*, \quad (8.1)$$

откуда комплексное изображение тока

$$\dot{I}_m^* = \frac{\dot{U}_m^*}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{U}_m^*}{r + j(x_L - x_C)} = \frac{\dot{U}_m^*}{r + jx}. \quad (8.2)$$

От изображения можно сделать переход к оригиналу — мгновенному значению тока.

Выражение (8.2) можно рассматривать как закон Ома в символической форме. Тогда знаменатель

$$r + jx = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = ze^{j\varphi} = Z$$

может рассматриваться как комплексное полное сопротивление в л е н и е. Его модуль  $z$  равен полному сопротивлению цепи, его аргумент  $\varphi$  — сдвигу фаз между напряжением и током цепи. Графически  $Z$  изображается неподвижным вектором с составляющими — активным сопротивлением  $r$  по оси вещественных и реактивным  $x$  — по оси мнимых, что показано на рис. 8.2 для случая  $\varphi > 0$ . Соответствующий прямоугольный треугольник является треугольником сопротивлений.

Необходимо заметить, что знак плюс, стоящий в общем выражении комплексного сопротивления  $Z = r + jx$ , сохраняется в конкретном числовом выражении при преобладании индуктивного сопротивления ( $\varphi > 0$ ) и переходит в минус при преобладании емкостного сопротивления ( $\varphi < 0$ ).

Величина, обратная полному сопротивлению

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb = Y,$$

является комплексной полной проводимостью с модулем  $y$ , равным полной проводимости, и аргументом  $\varphi$ , равным сдвигу фаз между напряжением и током со знаком минус. Графически  $Y$  изображается неподвижным вектором и образует с составляющими — активной проводимостью  $g$  по оси вещественных и реактивной  $b$  по оси мнимых — треугольник проводимостей, что показано на рис. 8.2 для случая  $\varphi > 0$ . Вектор  $Y$  имеет направление, сопряженное с направлением обратного ему вектора  $Z$ . Знак минус, стоящий в общем выражении комплекса проводимости  $Y = g - jb$ , сохраняется в конкретном числовом выражении при  $\varphi > 0$  и переходит в плюс при  $\varphi < 0$ .

Если в символические выражения (8.1) для второго закона Кирхгофа и (8.2) для закона Ома подставить значения

$$\dot{I}_m = \sqrt{2} I e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad \dot{U}_m = \sqrt{2} U e^{j\omega t},$$

множитель вращения  $e^{j\omega t}$  и  $\sqrt{2}$  сократятся и выражения примут вид:

$$rI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I = \dot{U}, \quad (8.1')$$

$$I = \frac{\dot{U}}{r + jx}. \quad (8.2')$$

Следовательно, вместо комплексных изображений  $\dot{U}_m$  и  $\dot{I}_m$  вращающихся векторов можно применять комплексное напряжение  $\dot{U}$

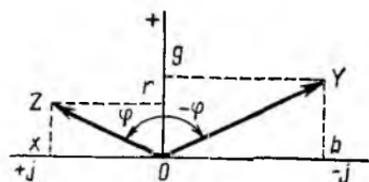


Рис. 8.2

и комплексный ток  $I$ , т. е. оперировать с неподвижными векторами. Это, очевидно, в равной степени относится к первому закону Кирхгофа, и его можно применять в виде:

$$\sum I_k = 0 \text{ вместо } \sum I_k^* = 0.$$

Таким образом, время  $t$  из уравнений выпадает, а закон Ома и оба закона Кирхгофа в символической форме для комплексных напряжений, токов, полных сопротивлений и полных проводимостей цепей синусоидального тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = YU, \quad \sum I_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum \dot{U}_k = 0$$

получают алгебраическую форму, как и для цепей постоянного тока. Необходимо подчеркнуть, что этот вывод сделан для цепи без взаимной индукции.

Отсюда следует, что для расчета линейных цепей синусоидального переменного тока без взаимной индукции можно применить все изложенные в гл. III методы расчета цепей постоянного тока, вытекающие из законов Ома и Кирхгофа: метод преобразования, метод уравнений Кирхгофа, метод наложения, методы контурных токов и узловых напряжений и метод эквивалентных источников напряжения или тока. При этом, как указывалось, необходимо оперировать с комплексными напряжениями, токами, полными сопротивлениями и проводимостями.

Алгебраические действия над этими комплексами следует производить в соответствии с выбранными для напряжений и токов положительными направлениями, совпадающими с положительными направлениями их мгновенных значений и изображающих их векторов. По окончании расчетов следует перейти к действующим значениям, равным, очевидно, модулям соответствующих комплексов и, если это необходимо, к мгновенным значениям искомых величин.

Символический метод применим также для цепей с взаимной индукцией. Особенности их расчета рассмотрены в гл. IX.

Развитие методов расчета цепей постоянного и переменного синусоидального тока может быть проиллюстрировано табл. 8.1.

Таблица 8.1

Род тока	Значения напряжений и токов	Учитываемые з. д. с.	Используемые сопротивления и проводимости	Операции
Постоянный	Действительные	Внешние	Омические	Алгебраические
Синусоидальный	Мгновенные	Внешние и внутренние	Активные	»
То же	Действующие	Внешние	Полные	Геометрические
»	Комплексные	»	Комплексные	Алгебраические

Непосредственное применение символического метода к вычислению по напряжению и току мощности, мгновенное значение которой является произведением их мгновенных значений ( $p = ui$ ), невозможно

(см. § 8.1). Однако для вычисления активной, реактивной и полной мощности по символическим изображениям напряжения и тока может быть использован искусственный прием. Для этого комплексное напряжение  $\dot{U} = Ue^{j\psi}$  должно быть умножено на комплекс  $\hat{I}$ , сопряженный с комплексным током  $\hat{I} = Ie^{j(\psi-\varphi)}$ ;

$$\dot{U}\hat{I} = Ue^{j\psi}Ie^{-j(\psi-\varphi)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = \hat{S}.$$

Таким образом, вещественная часть комплексной мощности  $\hat{S}$  равна активной мощности  $P$ , а мнимая — реактивной  $Q$ . При этом положительный знак сохраняется для индуктивной мощности и изменяется на отрицательный для емкостной. Полная мощность вычисляется, как модуль комплексной мощности:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

### § 8.3. Расчет цепей переменного тока символическим методом

При расчете цепей по законам Кирхгофа методика составления уравнений остается той же, что и при постоянном токе. Для заданных комплексных э. д. с. и токов должны быть также указаны их положительные направления, для искомого — ими надо задаться.

Например, для цепи рис. 7.21, а с двумя узлами и двумя элементарными контурами по первому закону Кирхгофа должно быть составлено одно уравнение

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0.$$

Два уравнения, составляемые по второму закону Кирхгофа, при обходе элементарных контуров  $A$  и  $B$  по часовой стрелке, будут

$$Z_1\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 = 0, \quad Z_2\dot{I}_2 + Z_3\dot{I}_3 - \dot{U} = 0.$$

При постоянном токе ответ со знаком минус указывал на встречное направление по сравнению с предположенным, а при переменном токе ответ в виде комплекса является окончательным для принятого направления искомой величины — напряжения или тока. При выборе обратного направления фаза (аргумент) искомого комплекса изменилась бы на угол  $\pi$ .

Аналогичным образом составляются и решаются уравнения при применении остальных методов, вытекающих из законов Кирхгофа. Так, уравнения по методу контурных токов для цепи рис. 7.21, а при обходе контуров  $A$  и  $B$  по часовой стрелке имеют вид:

$$Z_A\dot{I}_A - Z_{AB}\dot{I}_B = 0, \quad -Z_{BA}\dot{I}_A + Z_B\dot{I}_B = \dot{U},$$

где

$$Z_A = Z_1 + Z_2, \quad Z_B = Z_2 + Z_3, \quad Z_{AB} = Z_{BA} = Z_2,$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_3, \quad \dot{I}_A - \dot{I}_B = -\dot{I}_2.$$

Символический метод весьма удобен также для решения задач в общем виде.

В электроизмерительной технике широко применяется мост переменного тока (рис. 8.3). Условие равновесия моста постоянного тока имеет вид (см. § 3.8):

$$R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

По аналогии условие равновесия моста переменного тока:

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad \text{или} \quad z_1 e^{j\varphi_1} z_4 e^{j\varphi_4} = z_2 e^{j\varphi_2} z_3 e^{j\varphi_3}.$$

Это условие распадается на два — равенство модулей и аргументов левой и правой частей:

$$z_1 z_4 = z_2 z_3 \quad \text{и} \quad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Если модули и аргументы полных сопротивлений трех ветвей известны, из этих уравнений могут быть определены модуль и аргумент полного сопротивления четвертой ветви.

Вторым примером применения символического метода для решения задач в общем виде может служить задача поддержания в цепи изменяющейся нагрузки неизменного по величине и фазе тока. Например, при последовательном соединении ламп, применяемом при освещении

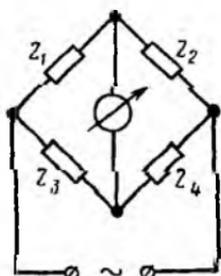


Рис. 8.3

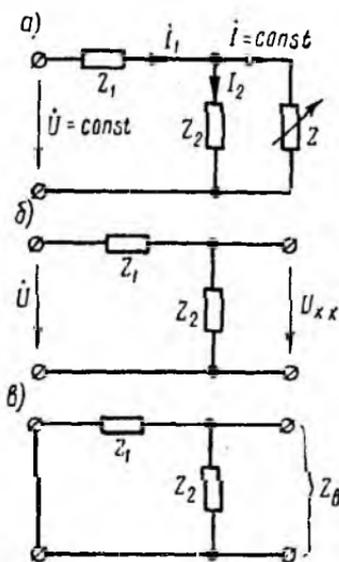


Рис. 8.4

аэродромов, должны автоматически замыкаться накоротко зажимы перегоревшей лампы, чтобы избежать разрыва цепи, но при этом ток остальных не должен измениться.

Пусть для схемы рис. 8.4, а, питаемой напряжением  $\dot{U} = \text{const}$ , требуется найти условие, при выполнении которого ток  $I$  в правой параллельной ветви не будет меняться по величине и по фазе при любом изменении сопротивления  $Z$  этой ветви.

Общее выражение для комплекса тока  $I$  может быть найдено методом эквивалентного источника напряжения. По аналогии с цепью постоянного тока

$$I = \frac{\dot{U}_{x,x}}{Z + Z_B}.$$

Здесь комплекс напряжения  $\dot{U}_{x,x}$  между зажимами разомкнутой ветви  $Z$  (рис. 8.4, б) и комплекс полного сопротивления  $Z_a$  цепи относительно зажимов ветви  $Z$  при источнике напряжения, замкнутом накоротко (рис. 8.4, в), соответственно равны:

$$\dot{U}_{x,x} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}, \quad Z_a = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

а искомый ток

$$I = \frac{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}}{Z + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_2 \dot{U}}{Z_1 Z_2 + Z(Z_1 + Z_2)}.$$

Для того чтобы ток  $I$  не зависел от сопротивления  $Z$  нагрузки, коэффициент при  $Z$  в выражении  $I$  должен быть равен нулю:

$$Z_1 + Z_2 = r_1 + jx_1 + r_2 + jx_2 = 0.$$

Это будет выполнено, если

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = -x_2,$$

т. е. сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$  должны быть чисто реактивными, равными

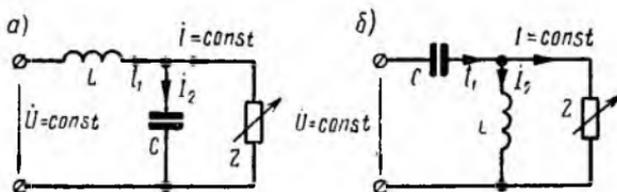


Рис. 8.5

по величине и противоположными по знаку. Одно из них будет индуктивным, а другое — емкостным:

$$Z_1 = j\omega L, \quad Z_2 = -j \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad Z_1 = -j \frac{1}{\omega C}, \quad Z_2 = j\omega L,$$

причем

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При этом ток нагрузки

$$I = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \text{const.}$$

Если в цепь до разветвления включено индуктивное сопротивление, а потом — емкостное (рис. 8.5, а), то ток

$$I = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = -j \frac{\dot{U}}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

отстает по фазе от приложенного к цепи напряжения на угол  $\pi/2$ . Если индуктивное и емкостное сопротивления поменять местами (рис. 8.5, б), то

$$I = \frac{\dot{U}}{-j \frac{1}{\omega C}} = j \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

т. е. ток  $I$  опережает приложенное к цепи напряжение на угол  $\pi/2$ .

При изменении  $Z$  ток  $I_1$  до разветвления изменяется и по величине и по фазе от значения  $I_1 = \frac{U}{Z_1}$  при  $Z = 0$  до  $I_1 = \infty$  при  $Z = \infty$  (резонанс напряжений).

### § 8.4. Метод дуальных цепей

Метод дуальных цепей, рассмотренный в п. 2 § 7.3 для частного случая резонансных цепей, является общим методом. Взаимная замена величин при их символической записи должна осуществляться по табл. 8.2, вытекающей из табл. 7.1.

Таблица 8.2

Последовательное соединение	Параллельное соединение	$\omega$	$\dot{U}$	$I$	$L$	$C$	$r$	$g$	$Z$	$Y$
Параллельное соединение	Последовательное соединение	$\omega$	$I$	$\dot{U}$	$C$	$L$	$g$	$r$	$Y$	$Z$

Отсюда можно получить соотношения для дуальной цепи, если они даны для цепи исходной. Так, если для исходной цепи в какой-либо ветви имеет место короткое замыкание ( $Z = 0$ ), то в дуальной цепи это соответствует холостому ходу ( $Y = 0$ ), и наоборот. При переходе от исходной цепи к дуальной уравнения по первому и второму законам Кирхгофа меняются местами.

Основным свойством дуальных цепей является неизменность их параметров  $r$ ,  $L$  и  $C$  при переменной частоте. Например, в дуальных цепях рис. 8.6, а и б численное равенство сопротивлений  $r_1 + j\omega L_1$  и проводимости  $g_2 + j\omega C_2$  сохраняется при изменении частоты. Этим дуальные цепи отличаются от эквивалентных последовательных и параллельных схем, в которых при изменении частоты и постоянстве параметров одной схемы параметры другой изменяются (см. § 7.4, п. 1).

Это свойство дуальных цепей позволяет, произведя исследование поведения какой-либо цепи при переменной частоте, перенести результаты на дуальную цепь, заменив напряжения токами и т. д., что и было сделано в п. 2 § 7.3 для резонансных цепей.

При переходе к дуальной цепи не изменяют своей величины мощности  $S$ ,  $P$  и  $Q$ , так как в их выражения входят произведения напря-

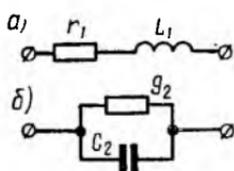


Рис. 8.6

жения и тока, и лишь у реактивной мощности  $Q = UI \sin \varphi$  изменяется знак: индуктивная мощность заменяется емкостной, и наоборот.

В качестве примера может быть решена задача создания схем преобразования неизменного по величине и фазе тока в неизменное по величине и фазе напряжение, т. е. схем, дуальных со схемами, рас-

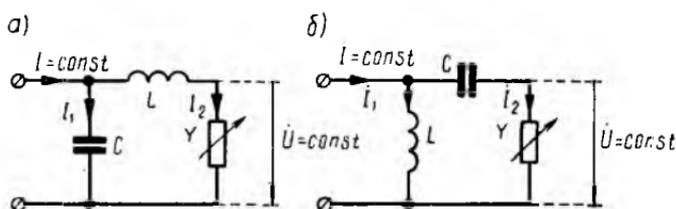


Рис. 8.7

смотренными в § 8.3. При замене схем и величин по табл. 8.2 получается схема рис. 8.7, а, дуальная схеме рис. 8.5, а, и схема рис. 8.7, б, дуальная схеме рис. 8.5, б. Если

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} = \sqrt{\frac{C}{L}},$$

то при неизменном токе  $I$  напряжение  $\dot{U}$  на изменяющейся проводимости  $Y$  будет постоянным, т. е.

$$\dot{U} = -j \frac{I}{\sqrt{\frac{C}{L}}} \quad \text{или} \quad \dot{U} = j \frac{I}{\sqrt{\frac{C}{L}}},$$

что получается путем перехода от формул для токов  $I$  исходных цепей, приведенных в § 8.3.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ФИЛЬТРОВ

#### § 9.1. Уравнения четырехполюсников

Электрическая цепь, имеющая два входных и два выходных зажима, называется **четыреполюсником**. Теория четырехполюсников в общем виде рассматривает основную проблему электротехники: передачу энергии от источника к приемнику через промежуточное звено — четырехполюсник.

Активные четырехполюсники содержат внутри себя также источники электрической энергии. Далее сначала рассматриваются пассивные четырехполюсники, не содержащие внутри себя источников энергии. Примером их могут служить линия передачи (рис. 9.1, а), трансформатор (рис. 9.1, б), мостовая

схема (рис. 9.1, а), а также Т-образная (рис. 9.1, з) и П-образная (рис. 9.1, д) схемы, к зажимам  $1'$ ,  $1''$  которых подключается источник, а к зажимам  $2'$ ,  $2''$  — приемник электрической энергии.

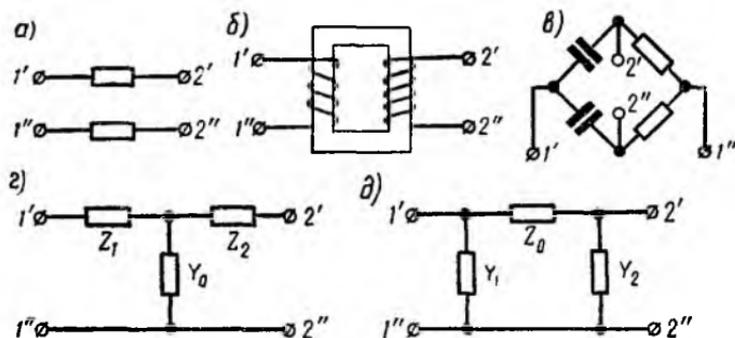


Рис. 9.1

На рис. 9.2, а изображена в общем виде схема четырехполюсника. Здесь  $\dot{U}_1$  и  $I_1$  — комплексные напряжение и ток на входе четырехполюсника,  $\dot{U}_2$  и  $I_2$  — комплексные напряжение и ток на его выходе,  $Z_2$  — комплексное сопротивление нагрузки, а также показаны выбранные положительные направления напряжений и токов.

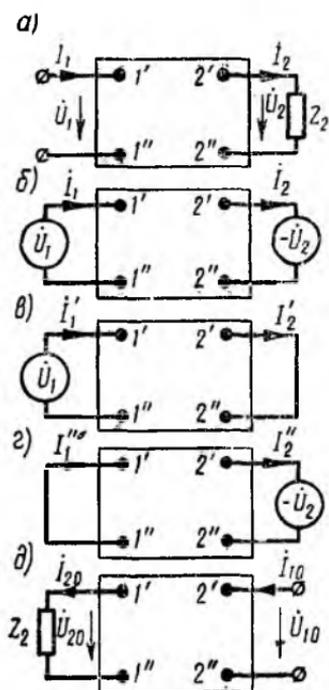


Рис. 9.2

Для вывода уравнений, связывающих входные и выходные напряжения и токи, удобно заменить приемник  $Z_2$  с напряжением  $\dot{U}_2$  эквивалентным источником напряжения без внутреннего сопротивления (рис. 9.2, б). Согласно § 3.1, э. д. с. последнего должна быть равна  $-\dot{U}_2 = -Z_2 I_2$ . Тогда можно применить метод наложения (см. § 3.6). Считая сначала существующим только источник  $\dot{U}_1$  и замыкая накоротко зажимы источника  $-\dot{U}_2$  (рис. 9.2, в), находят токи  $I_1'$  и  $I_2'$ , которые, очевидно, будут пропорциональны напряжению  $\dot{U}_1$ :

$$I_1' = Y_{11} \dot{U}_1, \quad I_2' = Y_{21} \dot{U}_1.$$

Аналогично, при наличии источника  $-\dot{U}_2$  и коротком замыкании  $\dot{U}_1$  (рис. 9.2, г)

$$I_1'' = -Y_{12} \dot{U}_2, \quad I_2'' = -Y_{22} \dot{U}_2.$$

Здесь  $Y_{11}$ ,  $Y_{21}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{22}$  — комплексные коэффициенты пропорциональности, имеющие размерность проводимости;  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$  называются входными, а  $Y_{12}$  и  $Y_{21}$  — взаимными проводимостями. Проводимости  $Y_{12}$  и  $Y_{21}$  определяют токи в короткозамкнутом выходном или входном контуре при заданном напря-

жении в другом контуре. При одинаковом напряжении  $U$  токи  $Y_{12}U$  и  $Y_{21}U$  по принципу взаимности (см. § 3.7) были бы равны между собой. Следовательно, взаимные проводимости

$$Y_{12} = Y_{21}.$$

Действительные токи на входе и выходе четырехполюсника

$$I_1 = I_1' + I_1'' = Y_{11}U_1 - Y_{12}U_2$$

и

$$I_2 = I_2' + I_2'' = Y_{21}U_1 - Y_{22}U_2,$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$U_1 = \frac{Y_{22}}{Y_{21}} U_2 + \frac{1}{Y_{21}} I_2,$$

$$I_1 = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}} U_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_2.$$

После введения обозначений

$$A = \frac{Y_{22}}{Y_{21}}, \quad B = \frac{1}{Y_{21}}, \quad C = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}} \quad \text{и} \quad D = \frac{Y_{11}}{Y_{21}}, \quad (9.1)$$

получаются уравнения четырехполюсника:

$$U_1 = AU_2 + BI_2, \quad I_1 = CU_2 + DI_2,$$

где комплексы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  называются параметрами четырехполюсника. Между ними существует следующая связь:

$$AD - BC = \frac{Y_{22}Y_{11}}{Y_{12}Y_{21}} - \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}^2} = 1.$$

Следовательно, из четырех параметров независимыми являются три.

Если входные и выходные зажимы поменять местами (рис. 9.2, д), т. е. осуществить обратное питание (индекс «о»), уравнения, очевидно, получатся аналогичными:

$$U_{10} = A'U_{20} + B'I_{20}, \quad I_{10} = C'U_{20} + D'I_{20},$$

а параметры  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  определяются из выражений (9.1), если индекс  $1$  заменить индексом  $2$  и наоборот:

$$A' = \frac{Y_{11}}{Y_{12}} = D, \quad B' = \frac{1}{Y_{12}} = B, \quad C' = \frac{Y_{22}Y_{11} - Y_{21}Y_{12}}{Y_{12}} = C,$$

$$D' = \frac{Y_{22}}{Y_{12}} = A.$$

Следовательно, уравнения четырехполюсника, питаемого со стороны выхода, получают вид:

$$U_{10} = D'U_{20} + B'I_{20}, \quad I_{10} = C'U_{20} + A'I_{20},$$

т. е. отличаются от основных уравнений четырехполюсника тем, что параметры  $A$  и  $D$  поменялись местами.

Отсюда следует, что в симметричном четырехполюснике, который со стороны выходных зажимов представляет ту же цепь, что и со стороны входных,  $A = D$  и  $A^2 - BC = 1$ .

С помощью уравнений четырехполюсника можно определить нагрузочный режим, т. е. найти  $\dot{U}_1$  и  $I_1$  для заданных  $\dot{U}_2$  и  $I_2$ . Очевидно, уравнения четырехполюсника могут быть использованы также для определения двух любых величин из указанных, если заданы две другие.

## § 9.2. Холостой ход и короткое замыкание четырехполюсника

При холостом ходе ток на выходе  $I_{2x,x} = 0$  и уравнения четырехполюсника дают

$$\dot{U}_{1x,x} = A\dot{U}_{2x,x}, \quad I_{1x,x} = C\dot{U}_{2x,x}.$$

При коротком замыкании напряжение на выходе  $U_{2к.з} = 0$  и из уравнений четырехполюсника вытекает, что

$$\dot{U}_{1к.з} = B\dot{I}_{2к.з}, \quad I_{1к.з} = D\dot{I}_{2к.з}.$$

Отсюда видно, что параметр  $A$  представляет собой отношение входного и выходного комплексных напряжений при холостом ходе четырехполюсника, а  $D$  — отношение входного и выходного комплексных токов при коротком замыкании.

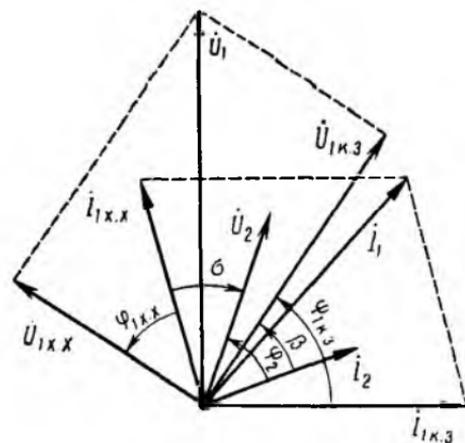


Рис. 9.3

Если при холостом ходе напряжение на выходе будет равно напряжению  $\dot{U}_2$  при нагрузке, а при коротком замыкании ток на выходе — току  $\dot{I}_2$  при нагрузке, уравнения четырехполюсника получают вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_{1x,x} + \dot{U}_{1к.з}, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_{1x,x} + \dot{I}_{1к.з}. \end{aligned}$$

Следовательно, напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  при любом заданном режиме ( $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ ) работы приемника могут быть определены путем наложения соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания.

Чтобы осуществить это наложение, надо знать, как расположить друг относительно друга векторные диаграммы холостого хода ( $\dot{U}_{1x,x}, \dot{I}_{1x,x}$ ) и короткого замыкания ( $\dot{U}_{1к.з}, \dot{I}_{1к.з}$ ). Для этой цели нужно измерить сдвиг фаз  $\sigma$  между векторами  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_{1x,x}$  при опыте холостого хода и сдвиг фаз  $\beta$  между векторами  $\dot{U}_{1к.з}$  и  $\dot{I}_2$  при опыте короткого замыкания.

После этого построение ведется в следующем порядке (рис. 9.3): строится заданная диаграмма  $\dot{U}_2, \dot{I}_2$ , затем под углом  $\sigma$  к вектору  $\dot{U}_2$

строится вектор  $I_{1x,x}$ , а под углом  $\varphi_{1x,x}$  к нему — вектор  $\dot{U}_{1x,x}$ ; под углом  $\beta$  к вектору  $I_{2к,з}$  строится вектор  $\dot{U}_{1к,з}$ , а под углом  $\varphi_{1к,з}$  к нему — вектор  $I_{1к,з}$ . После этого строятся векторы напряжения  $\dot{U}_1$  и тока  $I_1$  на входе как суммы напряжений и токов при холостом ходе и коротком замыкании.

Так как в симметричном четырехполюснике  $A = D$ , то

$$\frac{\dot{U}_{1x,x}}{I_{1к,з}} = \frac{A\dot{U}_2}{D I_2} = \frac{\dot{U}_2}{I_2} = Z_2 = z_2 e^{j\varphi_2},$$

т. е. угол сдвига фаз между векторами  $\dot{U}_{1x,x}$  и  $I_{1к,з}$  равен заданному углу  $\varphi_2$  сдвига фаз в нагрузке, что сразу определяет взаимное расположение векторных диаграмм холостого хода и короткого замыкания без добавочных измерений.

Указанное применение принципа наложения имеет большое значение при испытании мощных электротехнических устройств, описываемых линейными уравнениями, так как позволяет заменить опыт нагрузки, требующий источников большой мощности, опытами холостого хода и короткого замыкания при значительно меньшей мощности.

### § 9.3. Определение параметров четырехполюсника

Если известны конкретная схема и сопротивления (проводимости) ветвей четырехполюсника, то его параметры могут быть определены расчетным путем по входным и взаимным проводимостям. Можно также исходить непосредственно из зависимостей, устанавливаемых законами Кирхгофа.

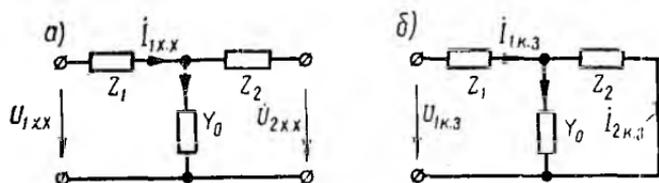


Рис. 9.4

Далее в качестве примера рассмотрены простейшие схемы четырехполюсников. Так как из четырех параметров четырехполюсника независимыми являются три, простейшие схемы должны содержать три ветви, т. е. представлять собой соединение звездой (Т-образная схема, рис. 9.1, а) или треугольником (Π-образная схема, рис. 9.1, б).

Для Т-образной схемы при режиме холостого хода (рис. 9.4, а) очевидны следующие соотношения:

$$\dot{U}_{1x,x} = \dot{U}_{2x,x} + Z_1 Y_0 \dot{U}_{2x,x} = A \dot{U}_{2x,x}, \quad I_{1x,x} = Y_0 \dot{U}_{2x,x} = C \dot{U}_{2x,x};$$

при коротком замыкании (рис. 9.4, б)

$$\dot{U}_{1к,з} = Z_2 I_{2к,з} + Z_1 (I_{2к,з} + Y_0 Z_2 I_{2к,з}) = B I_{2к,з},$$

$$I_{1к,з} = I_{2к,з} + Y_0 Z_2 I_{2к,з} = D I_{2к,з}.$$

Отсюда параметры этого четырехполюсника

$$\begin{aligned} A &= 1 + Z_1 Y_0, & B &= Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0, \\ C &= Y_0, & D &= 1 + Z_2 Y_0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Параметры П-образной схемы могут быть определены аналогичным расчетом (рис. 9.1, б). При холостом ходе

$$\dot{U}_{1x, x} = \dot{U}_{2x, x} + Z_0 Y_2 \dot{U}_{2x, x} = A \dot{U}_{2x, x},$$

$$\dot{I}_{1x, x} = Y_2 \dot{U}_{2x, x} + Y_1 Y_2 \dot{U}_{2x, x} \left( Z_0 + \frac{1}{Y_{21}} \right) = C U_{2x, x},$$

при коротком замыкании

$$\dot{U}_{1k, 3} = Z_0 \dot{I}_{2k, 3} = B \dot{I}_{2k, 3},$$

$$\dot{I}_{1k, 3} = \dot{I}_{2k, 3} + Y_1 Z_0 \dot{I}_{2k, 3} = D \dot{I}_{k, 3}.$$

Отсюда параметры П-схемы

$$\begin{aligned} A &= 1 + Y_2 Z_0, & B &= Z_0, & C &= Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0, \\ D &= 1 + Y_1 Z_0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Подобно тому, как при расчете цепей любой двухполюсник удобно заменить простейшим эквивалентным двухполюсником — последовательной или параллельной схемой, можно любой сложный четырехполюсник заменить простейшим эквивалентным ему, т. е. Т- или П-схемой. Решая уравнения (9.2) и (9.3), можно найти параметры этих эквивалентных схем, выразив их через параметры четырехполюсника.

Для Т-схемы

$$Y_0 = C, \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Для П-схемы

$$Z_0 = B, \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}, \quad Y_2 = \frac{A-1}{B}.$$

Из этих выражений видно, что схемы, эквивалентные симметричным четырехполюсникам, сами тоже симметричны, так как, если  $A = D$ , то  $Z_1 = Z_2$  и  $Y_1 = Y_2$ .

Если конкретная схема и параметры ветвей четырехполюсника неизвестны, его параметры могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания при питании и измерениях со стороны входа и со стороны выхода. Эти измерения позволяют определить комплексы сопротивлений короткого замыкания  $Z_{1k, 3}$  и холостого хода  $Z_{1x, x}$  при питании схемы со стороны входных зажимов  $1' - 1''$  и  $Z_{2k, 3}$  и  $Z_{2x, x}$  — при питании схемы со стороны выходных зажимов  $2' - 2''$ :

$$\left. \begin{aligned} Z_{1x, x} &= \frac{\dot{U}_{1x, x}}{\dot{I}_{1x, x}} = z_{1x, x} e^{j\varphi_{1x, x}} = \frac{A}{C}, \\ Z_{1k, 3} &= \frac{\dot{U}_{1k, 3}}{\dot{I}_{1k, 3}} = z_{1k, 3} e^{j\varphi_{1k, 3}} = \frac{B}{D}, \\ Z_{2x, x} &= \frac{\dot{U}_{2x, x}}{\dot{I}_{2x, x}} = z_{2x, x} e^{j\varphi_{2x, x}} = \frac{D}{C}, \\ Z_{2k, 3} &= \frac{\dot{U}_{2k, 3}}{\dot{I}_{2k, 3}} = z_{2k, 3} e^{j\varphi_{2k, 3}} = \frac{B}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Как видно из этих выражений, полные сопротивления при коротком замыкании и холостом ходе связаны между собой соотношением:

$$\frac{Z_{1x.x}}{Z_{1k.3}} = \frac{Z_{2x.x}}{Z_{2k.3}},$$

поэтому из четырех вышеупомянутых опытов необходимы лишь три, а четвертый может служить для контроля.

Параметры четырехполюсника находят по формулам, вытекающим из (9.4):

$$A = \sqrt{\frac{Z_{1x.x}}{Z_{2x.x} - Z_{2k.3}}}, \quad B = AZ_{2k.3}, \quad C = \frac{A}{Z_{1x.x}}, \quad D = \frac{B}{Z_{1k.3}}.$$

### § 9.4. Повторное сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника

В технике электросвязи часто применяются симметричные четырехполюсники и такое согласование их с сопротивлением нагрузки  $Z$ , при котором сопротивление между входными зажимами также равно  $Z$ , т. е.

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z.$$

Сопротивление  $Z$  получило название п о в т о р н о г о.

Уравнения симметричного четырехполюсника после подстановки  $\dot{U}_2 = Z\dot{I}_2$  примут вид:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \left(A + \frac{B}{Z}\right)\dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2 = (CZ + A)\dot{I}_2.$$

Деление первого уравнения на второе дает:

$$Z = \frac{A + \frac{B}{Z}}{CZ + A} Z,$$

откуда

$$Z = \sqrt{\frac{B}{C}},$$

и уравнения четырехполюсника, нагруженного повторным сопротивлением, будут иметь вид:

$$\dot{U}_1 = (A + \sqrt{BC})\dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = (A + \sqrt{BC})\dot{I}_2.$$

Как видно из этих уравнений, равные между собой отношения напряжений  $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$  и токов  $\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$  на входе и выходе являются комплексным числом. Последнее может быть представлено в показательной форме:

$$\dot{U}_1 : \dot{U}_2 = \dot{I}_1 : \dot{I}_2 = A + \sqrt{BC} = e^\gamma = e^{\alpha + j\beta} = e^\alpha e^{j\beta}.$$

Следовательно, у симметричного четырехполюсника, нагруженного повторным сопротивлением, выходные напряжение и ток меньше входных в  $e^\alpha$  раз, а их фазы — на угол  $\beta$ . Поэтому  $\alpha$  называется к о э ф -

коэффициентом затухания,  $\beta$  — коэффициентом фазы,  $\gamma = \alpha + j\beta$  — коэффициентом распространения. Коэффициент  $\beta$  измеряется в радианах,  $\alpha$  — в неперях; одному неперу соответствует затухание в  $e = 2,718\dots$  раз.

Так как

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{e^{\gamma}} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = \frac{A - \sqrt{BC}}{A^2 - BC} = A - \sqrt{BC},$$

$$\operatorname{ch} \gamma = \frac{1}{2} (e^{\gamma} + e^{-\gamma}) = A, \quad \operatorname{sh} \gamma = \frac{1}{2} (e^{\gamma} - e^{-\gamma}) = \sqrt{BC},$$

$$Z \operatorname{sh} \gamma = \sqrt{\frac{B}{C}} \sqrt{BC} = B, \quad \frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z} = \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{\frac{B}{C}}} = C,$$

уравнения симметричного четырехполюсника при произвольной нагрузке могут быть переписаны в другой форме:

$$\dot{U}_1 = \operatorname{ch} \gamma \dot{U}_2 + \operatorname{sh} \gamma Z \dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = \frac{\operatorname{sh} \gamma}{Z} \dot{U}_2 + \operatorname{ch} \gamma \dot{I}_2.$$

### § 9.5. Передаточные функции и обратные связи четырехполюсников

Как видно из предыдущего, четырехполюсник можно рассматривать как преобразователь входных величин  $\dot{U}_1$  или  $\dot{I}_1$  в выходные  $\dot{U}_2$  или  $\dot{I}_2$ . Тогда его можно характеризовать передаточной функцией  $\dot{K}$ , равной отношению выходной величины к входной. Например,

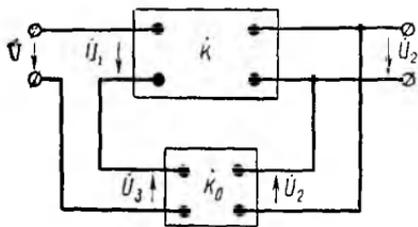


Рис. 9.5

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \quad \text{или} \quad \dot{K}_Z = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1},$$

$$\text{или} \quad \dot{K}_Y = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}.$$

Очевидно, что первая передаточная функция безразмерна, вторая имеет размерность сопротивления, третья — проводимости.

В ряде электротехнических и автоматических устройств необходимо, чтобы передаточная функция зависела от режима цепи на выходе. Для этого схема усложняется обратной связью — дополнительным четырехполюсником, питаемым выходной величиной основного четырехполюсника, например напряжением  $\dot{U}_2$ , а выходная величина дополнительного четырехполюсника, например напряжение  $\dot{U}_3$ , включается последовательно с источником первичного напряжения  $\dot{U}$  (рис. 9.5).

Пусть передаточная функция четырехполюсника обратной связи равна  $\dot{K}_0 = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2}$ . Тогда входное напряжение основного четырехполюс-

ника, передаточная функция которого  $\dot{K} = \frac{U_2}{U_1}$ ,

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{K}} = \dot{U} + \dot{U}_3 = \dot{U} + \dot{K}_0 \dot{U}_2,$$

откуда передаточная функция всей системы

$$\dot{K}' = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}} = \frac{\dot{K}}{1 - \dot{K}_0 \dot{K}}.$$

Из этого выражения видно, что передаточную функцию  $\dot{K}'$  системы можно изменять, регулируя передаточную функцию  $\dot{K}_0$  устройства обратной связи.

## § 9.6. Цепные схемы и электрические фильтры

Цепные схемы состоят из каскадно включенных четырехполюсников, называемых звеньями (рис. 9.6). При этом выходные зажимы каждого предыдущего звена соединяются с входными

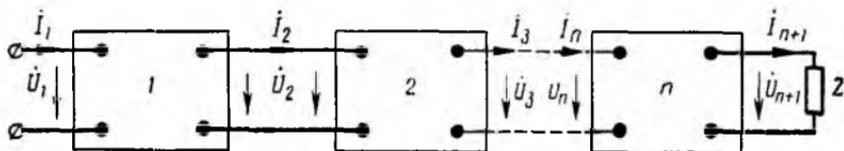


Рис. 9.6

последующего. Если все  $n$  четырехполюсники одинаковы и симметричны, а последний нагружен своим повторным сопротивлением  $Z$ , то оно будет также входным сопротивлением последнего звена, нагрузкой предпоследнего звена, его входным сопротивлением и т. д. Величина  $e^{\gamma}$  (где  $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$  — коэффициент распространения одного звена схемы), на которую надо умножать выходные величины каждого звена, чтобы получить входные, также одинакова для всех звеньев. В результате  $Z$  является повторным сопротивлением всей цепной схемы, а ее коэффициент распространения

$$\gamma = n\gamma_1 = n\alpha_1 + jn\beta_1 = \alpha + j\beta.$$

Тогда уравнения  $n$ -звенной цепной схемы будут:

$$\dot{U}_1 = \text{ch } n\gamma_1 U_{n+1} + \text{sh } n\gamma_1 Z \dot{I}_{n+1}, \quad \dot{I}_1 = \frac{\text{sh } n\gamma_1}{Z} \dot{U}_{n+1} + \text{ch } n\gamma_1 \dot{I}_{n+1}.$$

В различных электротехнических устройствах между источником энергии и приемником включают электрические фильтры в виде четырехполюсников или цепных схем, чтобы пропустить к приемнику только токи заданного диапазона частоты.

Фильтры различаются по диапазону пропускаемых частот: низкочастотные — от 0 до заданного значения  $\omega$ , высокочастотные — от  $\omega$  до  $\infty$ , полосные — от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , заграждающие — от 0 до  $\omega_1$  и от  $\omega_2$  до  $\infty$ , причем  $\omega_1 < \omega_2$ , т. е. они не пропускают частоты от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ .

Идеальным был бы фильтр, нагруженный сопротивлением, при всех частотах равным повторному. Кроме того, коэффициент затухания  $\alpha$  в области пропускания должен быть равен нулю, а вне этой области — бесконечности. При этом в области пропускания  $\dot{U}_1 : \dot{U}_2 = I_1 : I_2 = e^{\alpha+j\beta} = e^{j\beta}$  или  $U_1 = U_2$ ,  $I_1 = I_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , т. е. напряжение, ток и сдвиг фаз между ними и, следовательно, средняя мощность  $P_1$  на входе и  $P_2$  на выходе равны; вне области пропускания при  $\alpha = \infty$  напряжение  $U_2 = 0$  и ток  $I_2 = 0$ .

Так как в области пропускания  $P_1 = P_2$ , потери в идеальном фильтре должны отсутствовать, т. е. он должен состоять из чисто реактивных элементов.

Далее даны примеры простейших фильтров. На рис. 9.7, а показан низкочастотный фильтр. Так как для этого Т-образного симметричного четырехполюсника  $Z_1 = Z_2 = j\omega L$  и  $Y_0 = j\omega C$ , его параметры (в отличие от емкости параметр  $C$  дается со звездочкой):

$$A = 1 + Z_1 Y_0 = 1 - \omega^2 LC, \quad \tilde{C} = Y_0.$$

$$B = 2Z_1 + Z_1^2 Y_0 = 2j\omega L - j\omega^3 L^2 C.$$

В общем случае (см. § 9.4)

$$A = \operatorname{ch} \gamma = \operatorname{ch} (\alpha + j\beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta,$$

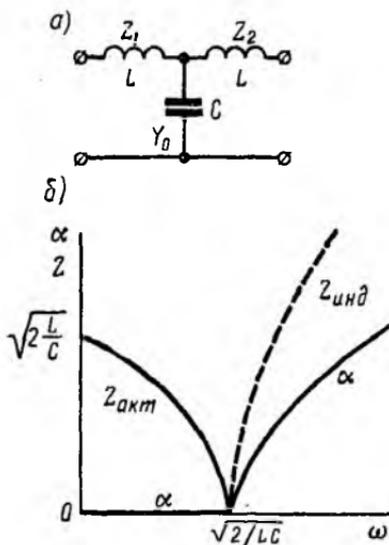


Рис. 9.7

но в данном случае  $A$  — вещественное число, следовательно,

$$A = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC. \quad (9.5)$$

Так как в области пропускания  $\alpha = 0$ ,  $\operatorname{ch} \alpha = 1$ , то  $A = \cos \beta$  может изменяться в пределах  $\pm 1$  и границы области пропускания определяются из неравенства

$$-1 \leq 1 - \omega^2 LC \leq +1.$$

Следовательно, фильтр будет пропускать без затухания частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ .

Повторное сопротивление фильтра (см. § 9.4)

$$Z = \sqrt{\frac{B}{\tilde{C}}} = \sqrt{\frac{2j\omega L - j\omega^3 L^2 C}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} (2 - \omega^2 LC)}$$

уменьшается с ростом частоты, начиная со значения  $\sqrt{2\frac{L}{C}}$  при  $\omega = 0$

до нуля в конце области пропускания при  $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ , оставаясь при этом вещественным, т. е. активным сопротивлением. Поэтому при нагрузке повторным сопротивлением входное сопротивление фильтра, равное повторному, будет также чисто активным, т. е. для всех частот

области пропускания фильтр работает в режиме резонанса. При большей частоте  $Z$  становится мнимым и носит индуктивный характер (рис. 9.7, б).

Если бы нагрузка  $Z_2$  на выходе фильтра в области пропускания měla бы ту же частотную характеристику, т. е. при всех частотах  $Z_2 = Z$ , то фильтр в области пропускания был бы идеальным. Однако такое согласование, очевидно, невозможно, и фильтр работает с  $\alpha = 0$  только при ограниченном числе частот.

Вне области пропускания коэффициент затухания  $\alpha$  может быть определен из уравнения (9.5); этот коэффициент от 0 при  $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$  нарастает постепенно, т. е. в области затухания фильтр не является идеальным.

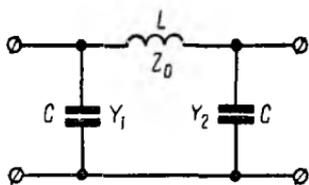


Рис. 9.8

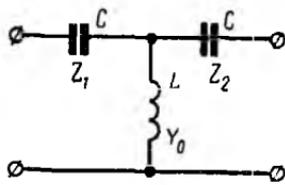


Рис. 9.9

Вторым примером может служить П-образный четырехполюсник, изображенный на рис. 9.8, у которого  $Y_1 = Y_2 = j\omega C$  и  $Z_0 = j\omega L$ . Его параметр

$$A = 1 + Y_1 Z_0 = 1 - \omega^2 LC$$

тот же, что и у рассмотренного Т-образного четырехполюсника, следовательно, он также является низкочастотным фильтром.

Простейший высокочастотный фильтр показан на рис. 9.9. Так как у этого Т-образного симметричного четырехполюсника

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{и} \quad Y_0 = \frac{1}{j\omega L},$$

его параметры

$$A = 1 + Z_1 Y_0 = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}, \quad \dot{C} = Y_0 = \frac{1}{j\omega L},$$

$$B = 2Z_1 + Z_1^2 Y_0 = \frac{1}{j\omega C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right).$$

Так же, как и в первом примере,  $A$  — вещественное число, поэтому в области пропускания  $A = \cos \beta$  изменяется в пределах

$$-1 \leq 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \leq +1.$$

Нижний предел соответствует  $\frac{1}{\omega^2 LC} = 2$ , верхний  $\frac{1}{\omega^2 LC} = 0$ , т. е. этот фильтр будет пропускать без затухания частоты от  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$  до  $\omega = \infty$  при нагрузке повторным сопротивлением.

Вне области пропускания коэффициент затухания  $\alpha$  может быть определен из уравнения

$$A = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}.$$

При  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$  коэффициент затухания  $\alpha = 0$ , а с уменьшением частоты становится отрицательным, возрастая по абсолютной величине, т. е. и этот фильтр в области затухания не является идеальным.

Повторное сопротивление этого фильтра

$$Z = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}$$

равно нулю при  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$  и увеличивается до  $\sqrt{2\frac{L}{C}}$  при  $\omega = \infty$ , оставаясь вещественным, т. е. активным сопротивлением. Тогда фильтр при нагрузке повторным сопротивлением работал бы в режиме резонанса. Однако такая частотная характеристика нагрузки, т. е.  $Z_2 = Z$ , при всех частотах невозможна, поэтому фильтр будет работать с  $\beta = 0$  только при ограниченном числе частот.

П о л о с н ы й ф и л ь т р можно получить путем последовательного соединения низкочастотного фильтра, пропускающего частоты до  $\omega_2$ , и высокочастотного, пропускающего частоты выше  $\omega_1$ , причем  $\omega_1 < \omega_2$ . Такой фильтр будет пропускать полосу частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , работая в ней при  $Z_2 = Z$  в режиме резонанса.

Обычно в фильтрах всех типов вместо одного звена применяют цепную схему. Приведенный расчет области пропускания не изменится, так как для цепной схемы  $\alpha = n\alpha_1$  и при  $\alpha_1 = 0$  коэффициент  $\alpha = 0$ . Чем больше число звеньев, тем больше и число частот, при которых  $Z_2 = Z$ , что вместе с увеличением  $\alpha$  в  $n$  раз вне области пропускания приблизит фильтр к идеальному. Усложнение схемы звена также может улучшить качество фильтра.

Кроме фильтров, рассчитанных на диапазоны пропускаемых частот, применяются фильтры, пропускающие или задерживающие определенные частоты. Они рассматриваются в § 13.4.

### § 9.7. Активные четырехполюсники

А к т и в н ы м и называются четырехполюсники, содержащие источники энергии. Примерами их могут служить усилитель и линия передачи, в разных точках которой включены дополнительные источники энергии.

Активный четырехполюсник условно изображается в виде прямоугольника с буквой  $A$  (рис. 9.10, а). Для вывода уравнений активного четырехполюсника удобно заменить приемник  $Z_2$  источником напряжения (см. § 3.1)

$$-\dot{U}_2 = -\dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

применить метод наложения в два этапа. Сначала принимаются в расчет только внешние источники  $\dot{U}_1$  и  $-\dot{U}_2$ , источники же э. д. с. внутри четырехполюсника считаются замкнутыми, а источники тока — разомкнутыми, причем от всех источников остаются только внутренние сопротивления. Тогда активный четырехполюсник превратится в пассивный, изображенный на рис. 9.2, б, который, в свою очередь, эквивалентен пассивному четырехполюснику рис. 9.2, а. Поэтому для первого этапа наложения

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}'_2, \\ \dot{I}'_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}'_2, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где  $A, B, C, D$  — параметры пассивного четырехполюсника.

Во втором этапе принимаются в расчет все внутренние источники, а источники  $\dot{U}_1$  и  $-\dot{U}_2$  замыкаются накоротко (рис. 9.10, б). Пусть токи во внешних ветвях при этом будут  $I'_{1к.з}$  и  $I'_{2к.з}$ . Тогда токи входа и выхода активного четырехполюсника оказываются равными

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + I'_{1к.з} \quad \text{и} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + I'_{2к.з}.$$

После подстановки найденных отсюда значений  $\dot{I}'_1$  и  $\dot{I}'_2$  в (9.6) получаются уравнения активного четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B(\dot{I}_2 - I'_{2к.з}), \quad \dot{I}_1 - I'_{1к.з} = C\dot{U}_2 + D(\dot{I}_2 - I'_{2к.з}).$$

Из этих уравнений видно, что активный четырехполюсник рис. 9.10, а эквивалентен пассивному, к входным и выходным зажимам которого подключены ветви с источниками тока  $I'_{1к.з}$  и  $I'_{2к.з}$  (рис. 9.10, б), заменяющими все внутренние источники четырехполюсника. Токи  $I'_{1к.з}$  и  $I'_{2к.з}$  эквивалентных источников тока определяются в каждом частном случае расчетом.

Таким образом, расчет цепей с активными четырехполюсниками сводится к расчету цепей с пассивными четырехполюсниками.

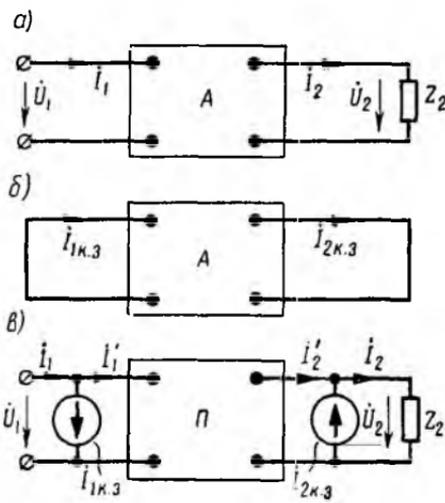


Рис. 9.10

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ЛИНЕЙНЫЕ И КРУГОВЫЕ ДИАГРАММЫ

#### § 10.1. Векторные уравнения

При изложении символического метода рассматривался расчет цепей с постоянными сопротивлениями или проводимостями. В этом случае поведение цепи иллюстрировалось векторными диаграммами

сопротивлений, проводимостей, токов и напряжений, все векторы которых были постоянными и по величине и по направлению (фазе).

Однако часты случаи, когда сопротивление или проводимость участка цепи изменяется. Например, линия передачи имеет постоянное сопротивление, сопротивление же нагрузки может изменяться от бесконечности при холостом ходе до нуля при коротком замыкании. Для практики наибольший интерес имеют случаи, когда изменяется модуль или аргумент сопротивления. В этих случаях переменное комплексное сопротивление может быть записано так:

$$Z = pze^{j\varphi} \quad \text{или} \quad Z = ze^{jq\varphi},$$

где  $p$  и  $q$  — безразмерные вещественные числа, в общем случае изменяющиеся в пределах

$$-\infty \leq p \leq +\infty, \quad -\frac{\pi}{\varphi} < q < +\frac{\pi}{\varphi}.$$

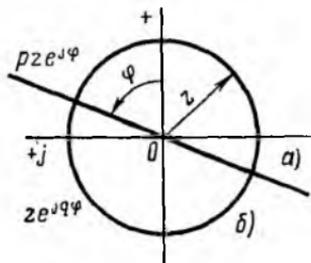


Рис. 10.1

Векторы, изображающие эти переменные сопротивления, будут также переменными.

Начинаясь в начале координат комплексной плоскости, они своим концом будут перемещаться по тому или иному геометрическому месту точек (г. м. т.). Очевидно, что г. м. т. сопротивления  $pze^{j\varphi}$  с переменным модулем  $pz$  будет прямой, проходящей через начало координат и образующей с осью вещественных угол  $\varphi$  (рис. 10.1, а), а г. м. т. сопротивления  $ze^{jq\varphi}$  с переменным аргументом  $q\varphi$  будет окружность радиуса  $z$  с центром в начале координат (рис. 10.1, б). Таким образом, в этих случаях г. м. т. получает вид линейной или круговой диаграмм.

Если модуль сопротивления  $pz < 0$  или абсолютное значение аргумента  $|q\varphi| > \frac{\pi}{2}$ , это сопротивление из потребителя энергии превращается в ее источник.

Если цепь содержит то или иное переменное сопротивление, то при заданном напряжении или токе всей цепи комплексы и векторы токов и напряжений ветвей будут также переменными.

Уравнения для комплексов искомых величин, содержащие постоянные и переменные величины, называются векторными уравнениями. Например, для цепи с параллельным соединением постоянной активной проводимости  $g$  и емкости  $C$  при переменной частоте  $\omega$  и неизменным током  $I$  всей цепи векторное уравнение для напряжения этой цепи имеет вид:

$$\dot{U} = \frac{I}{g + j\omega C}.$$

Из этого выражения видно, что для определения г. м. т. концов вектора  $\dot{U}$  нужно сложить постоянный вектор  $g$  с г. м. т.  $j\omega C$ , затем выполнить обращение, т. е. найти г. м. т. концов вектора

$\frac{1}{g + j\omega C}$  и результат умножить на постоянный вектор  $I$ . Из подобных

пераций состоит решение и более сложных задач. Поэтому далее в общем виде рассматриваются эти основные операции, причем векторы обозначены большими буквами без точек.

## § 10.2. Действия над кривыми

При суммировании г. м. т. с постоянным вектором исходное г. м. т. сдвигается в направлении постоянного вектора на его величину. Например, сумма постоянного  $F$  и переменного  $\rho G$  векторов, т. е. векторное уравнение

$$V = F + \rho G,$$

в общем случае представляет собой прямую, не проходящую через начало координат (рис. 10.2).

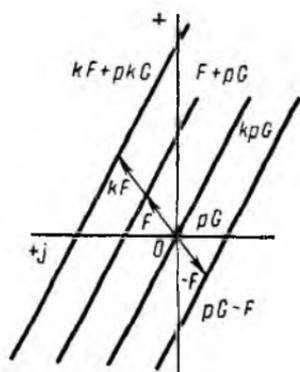


Рис. 10.2

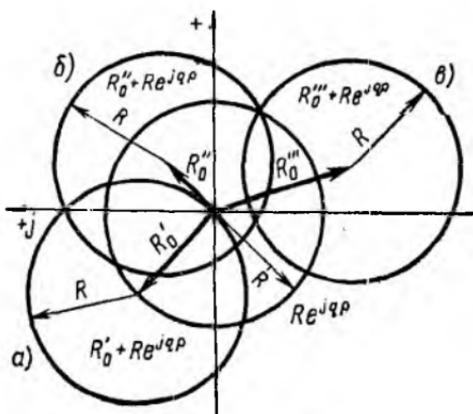


Рис. 10.3

Складывая постоянный вектор  $R_0$  с окружностью  $Re^{jq\rho}$ , следует переместить центр окружности в конец постоянного вектора  $R_0$ . Следовательно, векторное уравнение

$$V = R_0 + Re^{jq\rho}$$

представляет собой также окружность, причем при абсолютных значениях  $|R'_0| = |R|$  она, очевидно, проходит через начало координат (рис. 10.3, а); при  $|R'_0| < |R|$  начало координат лежит внутри окружности (рис. 10.3, б), а при  $|R'_0| > |R|$  — вне этой окружности (рис. 10.3, в).

Вычитание из г. м. т. постоянного вектора сводится к сложению г. м. т. с комплексом вектора, у которого знак изменен на обратный (см. рис. 10.2).

При умножении г. м. т. на вещественное число  $k$  каждый вектор исходного г. м. т. удлинится в  $k$  раз и даст подобный г. м. т. При умножении прямой  $\rho G$  на  $k$

$$V = \rho G k$$

получается та же прямая, проходящая через начало координат. При умножении прямой  $F + pG$  на  $k$

$$V = kF + pGk,$$

получается прямая, параллельная исходной и не проходящая через начало координат (см. рис. 10.2).

При умножении окружности  $Re^{jq\rho}$  на вещественное число  $k$

$$V = kRe^{jq\rho},$$

получается также окружность с центром в начале координат, но с радиусом, в  $k$  раз большим.

При умножении на  $k$  окружности  $R_0 + Re^{jq\rho}$ , центр которой не расположен в начале координат,

$$V = kR_0 + kRe^{jq\rho},$$

вектор центра окружности  $R_0$  и ее радиус  $R$  удлиняются в  $k$  раз (рис. 10.4). При этом обе окружности будут иметь общие касательные, исходящие из начала координат.

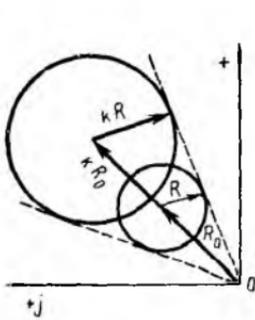


Рис. 10.4

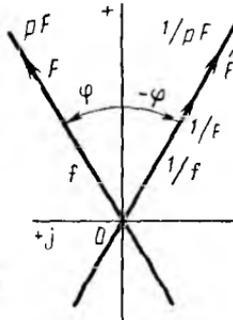


Рис. 10.5

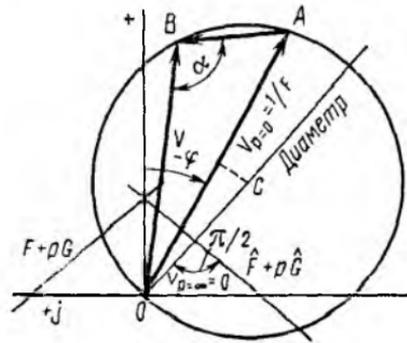


Рис. 10.6

При умножении г. м. т. на постоянный комплекс  $K = ke^{jx}$ , помимо умножения на модуль  $k$ , производится поворот вокруг начала координат на величину аргумента  $x$  в направлении, соответствующем знаку  $x$ ; в результате получается подобное г. м. т.

Деление г. м. т. на постоянный комплекс  $K = ke^{jx}$  сводится, очевидно, к умножению на обратный комплекс

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{ke^{jx}} = \frac{1}{k} e^{-jx},$$

что означает деление на модуль  $k$  и поворот в обратную сторону на величину аргумента  $x$ .

Обращение вектора  $F = fe^{j\varphi}$  дает вектор

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{fe^{j\varphi}} = \frac{1}{f} e^{-j\varphi},$$

модуль которого обратен модулю исходного вектора, а аргумент противоположен по знаку, т. е. направление обращенного вектора совпа-

дет с направлением вектора, сопряженного с исходным. Таким образом, операция обращения распадается на две, которые целесообразно выполнять в следующем порядке: нанести на график вектор  $\hat{F}$ , сопряженный с исходным вектором  $F$ , а затем в том же направлении отложить обратный вектор  $\frac{1}{\hat{F}}$ , величина которого равна  $\frac{1}{\hat{F}}$  (рис. 10.5).

При обращении прямой  $pF = pfe^{j\varphi}$ , проходящей через начало координат, получается векторное уравнение прямой, проходящей через начало координат и сопряженной с исходной прямой:

$$V = \frac{1}{pF} = \frac{1}{pfe^{j\varphi}} = \frac{1}{pf} e^{-j\varphi}.$$

Обращение прямой  $F + pG$ , не проходящей через начало координат (рис. 10.6), дает векторное уравнение:

$$V = \frac{1}{F + pG}.$$

На диаграмме рис. 10.6 изображены частные значения векторов:

$$V_{p=\infty} = 0 \quad \text{и} \quad V_{p=0} = \frac{1}{F} = \overline{OA},$$

а также вектор  $V = \overline{OB}$  при каком-то значении  $p$ . Вектор  $\overline{OA}$  образует с осью вещественных угол  $-\varphi$ .

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \frac{1}{F + pG} - \frac{1}{F} = \frac{-pG}{F(F + pG)}$$

и при  $G = ge^{j\gamma}$  отношение

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{-pG}{F(F + pG)} : \frac{1}{F + pG} = -p \frac{G}{F} = p \frac{g}{f} e^{j(\gamma - \varphi - \pi)} = p \frac{g}{f} e^{j\alpha}.$$

Аргумент  $\alpha = \gamma - \varphi - \pi$ , равный, очевидно, углу  $\alpha$  между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{OB}$ , при изменении  $p$  сохраняет свою величину постоянной, а это значит, что г. м. т. вектора  $V$  есть окружность, хордой которой является вектор  $\overline{OA} = V_{p=0}$ . Так как  $V_{p=\infty} = 0$ , эта окружность проходит через начало координат.

Если, согласно сказанному, нанести на график прямую  $\hat{F} + p\hat{G}$ , сопряженную с обращаемой прямой  $F + pG$ , то направление наибольшего обратного вектора, т. е. диаметра окружности, совпадает с наименьшим исходным вектором, т. е. с перпендикуляром к прямой  $\hat{F} + p\hat{G}$ .

Следовательно, обращение прямой, не проходящей через начало координат, дает окружность, проходящую через начало координат, вектор центра которой перпендикулярен прямой, сопряженной с исходной.

Из только что доказанного вытекает обратная теорема — обращение окружности, проходящей через начало координат, дает прямую, не проходящую через начало координат и перпендикулярную направлению, сопряженному с вектором центра исходной окружности.

Можно сделать вывод, что векторное уравнение окружности, проходящей через начало координат, может быть записано в двух видах:

$$V = R + Re^{jq\varphi} \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{F + pG}.$$

Если сдвинуть эту окружность путем сложения с каким-либо постоянным вектором  $K$ , получается два вида уравнения окружности, не проходящей через начало координат:

$$V = K + R + Re^{jq\varphi} = R_0 + Re^{jq\varphi}, \quad (10.1)$$

$$V = K + \frac{1}{F + pG} = \frac{KF + pKG + 1}{F + pG} = \frac{M + pN}{F + pG}, \quad (10.2)$$

где

$$R_0 = K + R, \quad M = KF + 1, \quad N = KG.$$

При обращении не проходящей через начало координат окружности, уравнение которой записано во второй форме, получается векторное уравнение

$$\frac{1}{V} = \frac{F + pG}{M + pN},$$

имеющее тот же вид, что и исходное уравнение и, следовательно, также представляющее окружность, не проходящую через начало координат.

В соответствии со сказанным удобно на диаграмме (рис. 10.7) вместо исходной окружности 1 нанести окружность 2, сопряженную с исходной, т. е. имеющую сопряженный вектор центра, но такой же радиус. Затем осуществляется собственно обращение, дающее окружность 3.

При этом взаимобратные точки  $a$  и  $a'$ ,  $b$  и  $b'$ ,  $c$  и  $c'$ ,  $d$  и  $d'$  будут находиться на тех же лучах, проведенных из начала координат, а исходная сопряженная 2 и обратная окружность 3 будут, очевидно, иметь общие касательные, проведенные из начала координат. Если обход исходных точек совершается по часовой стрелке ( $a, b, c, d$ ), обход обратных точек ( $a', b', c', d'$ ) происходит в обратном направлении. Более длинному вектору, например  $\vec{Ob}$ , соответствует более короткий  $\vec{Ob}'$ , а более короткому, например  $\vec{Od}$ , соответствует длинный вектор  $\vec{Od}'$ .

Выше шла речь о векторных уравнениях и диаграммах, связывающих отвлеченные величины, и, следовательно, изображаемых в одном масштабе. Применяя эти уравнения к цепям переменного тока, получают связь между физически разнородными величинами — напряжениями, токами, сопротивлениями и проводимостями, масштабы кото-

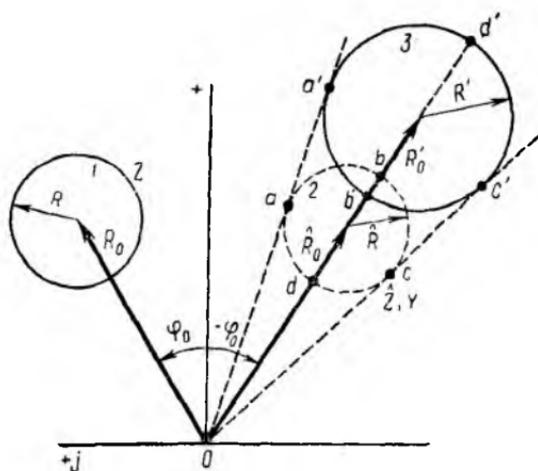


Рис. 10.7

рых при изображении на диаграмме не связаны друг с другом и могут выбираться совершенно произвольно. Так, например, если сопротивление  $Z$  какой-либо цепи изображается окружностью, не проходящей через начало координат, то обратная величина — проводимость  $Y$  изменяется также по окружности, не проходящей через начало координат и лежащей между теми же касательными, что и окружность  $\hat{Z}$ . Тогда выбором соответствующего масштаба можно совместить сопряженную окружность  $\hat{Z}$  с окружностью  $Y$ .

При решении задач следует сначала составить векторные уравнения для искомых величин. Если необходимо знать все промежуточные величины, нужно строить г. м. т. для каждой из них поочередно, например так, как указано в § 10.1. Если необходимо знать лишь г. м. т. искомой величины, его строят по ее векторному уравнению. В рассмотренных далее примерах применены оба метода построения.

### § 10.3. Диаграмма для линии передачи энергии к приемнику

В качестве примера применения линейных и круговых диаграмм рассматривается передача энергии от генератора с неизменным напряжением  $U_1$  по линии с постоянным сопротивлением  $Z_0 = r_0 + jx_0$

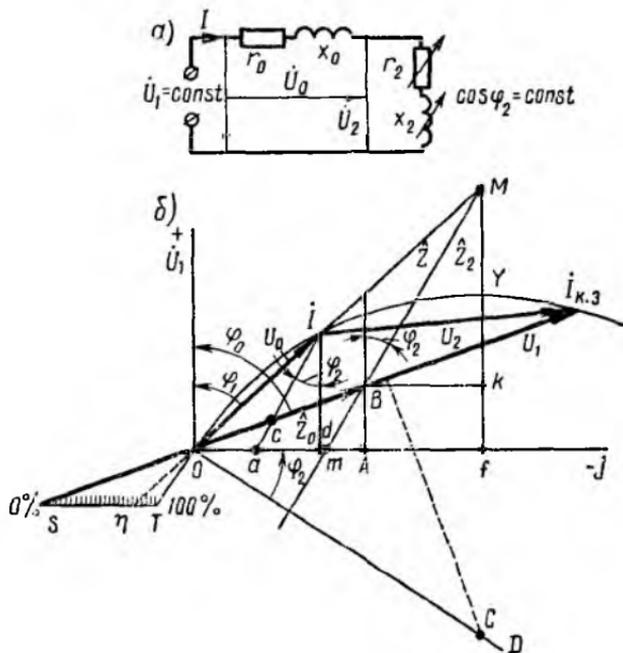


Рис. 10.8

к приемнику с изменяющимся сопротивлением  $Z_2$ , но при постоянном коэффициенте мощности  $\cos \varphi_2 = \frac{r_2}{z_2}$  (рис. 10.8, а). Векторное уравнение тока цепи:

$$I = Y \dot{U}_1 = \frac{1}{Z} \dot{U}_1 = \frac{1}{Z_0 + Z_2} \dot{U}_1.$$

Следовательно, для нахождения г. м. т. концов вектора тока  $I$  надо: 1) найти сопряженное сопротивление  $\hat{Z}$  всей цепи, сложив постоянное сопротивление  $\hat{Z}_0$  линии с переменным сопротивлением  $\hat{Z}_2$  приемника; 2) найти проводимость  $Y$  всей цепи, обратив сопротивление  $\hat{Z}$ ; 3) умножить  $Y$  на постоянную величину  $\dot{U}_1$ .

Построение показано на рис. 10.8, б. Напряжение  $\dot{U}_1$  откладывается по оси вещественных вверх. Комплекс  $\hat{Z}_0 = r_0 - jx_0$ , сопряженный с комплексным полным сопротивлением линии  $Z_0$ , изображен вектором  $\overline{OB}$  ( $\overline{OA} = -jx_0$ ,  $\overline{AB} = r_0$ ). Этот вектор образует с осью вещественных угол  $\varphi_0 = \text{arctg} \frac{x_0}{r_0}$ , откладываемый в данном случае по часовой стрелке.

Так как угол сдвига  $\varphi_2$  в приемнике остается постоянным, а изменяется только величина  $z_2$ , то диаграммой  $\hat{Z}_2$  будет прямая  $\overline{BM}$ , проходящая через конец вектора  $\hat{Z}_0 = \overline{OB}$  под углом  $\varphi_2$  к оси вещественных. Эта же прямая будет диаграммой  $\hat{Z} = \hat{Z}_0 + \hat{Z}_2$  относительно начала координат. При обращении этой прямой получается диаграмма проводимости  $Y$  всей цепи. Согласно доказанной теореме, это будет окружность, вектор центра  $\overline{OC}$  которой перпендикулярен прямой  $\overline{BM}$ , т. е. образует угол  $\varphi_2$  с осью мнимых величин. Умножая диаграмму  $Y$  на вещественное число  $U_1$ , получают также окружность — диаграмму тока цепи  $I = YU_1$ ; чтобы окружности  $Y$  и  $I$  совпадали, надо выбрать для тока масштаб в  $U_1$  раз больший, чем масштаб для проводимости.

Таким образом, при изменении сопротивления приемника конец вектора тока перемещается по окружности тока, образуя с вектором напряжения  $\dot{U}_1$  угол  $\varphi$ . При холостом ходе  $\hat{Z}_2 = \infty$  и ток  $I_{к. х} = 0$ , например при  $\hat{Z}_2 = \overline{BM}$  ( $r_2 = kM$  и  $-jx_2 = \overline{Bk}$ ) и сопротивлении всей цепи  $\hat{Z} = \overline{OM}$  конец вектора тока  $I = \overline{OI}$  будет на пересечении вектора  $\overline{OM}$  с окружностью тока. При коротком замыкании  $\hat{Z}_2 = 0$ , сопротивление всей цепи  $\hat{Z} = \hat{Z}_0 = \overline{OB}$  и конец вектора тока  $I_{к. з} = \frac{\dot{U}_1}{Z_0}$

будет на пересечении луча  $\overline{OB}$  с окружностью тока:  $I_{к. з} = \overline{OI}_{к. з}$ . Таким образом, вектор  $I_{к. з}$  является хордой окружности тока и образует с вектором напряжения  $\dot{U}_1$  угол  $\varphi_0$ .

Окружность тока может быть построена сразу по вектору тока короткого замыкания  $I_{к. з}$ ; из его середины проводится перпендикуляр и центр  $S$  искомой окружности получается на пересечении перпендикуляра с прямой  $\overline{OD}$ , проходящей через начало координат и составляющей угол  $\varphi_2$  с осью мнимых.

Векторное уравнение напряжения на линии

$$\dot{U}_0 = Z_0 I = z_0 e^{j\varphi_0} I.$$

Следовательно, диаграмма напряжения на линии получится в результате умножения окружности тока на  $z_0$  и поворота на угол  $\varphi_0$ , т. е. будет также окружностью. Если для напряжения взять масштаб в  $z_0$  раз больше масштаба тока, а вместо поворота диаграммы повернуть

а угол  $\varphi_0$  в обратном направлении вектор напряжения  $\dot{U}_1$ , то окружность напряжения  $\dot{U}_0$  совпадает с окружностью тока, а вектор напряжения  $\dot{U}_1$  — с вектором  $I_{к.з}$  тока короткого замыкания; тогда напряжение на приемнике  $\dot{U}_2$  может быть найдено на той же окружности, как  $\dot{U}_0 + \dot{U}_2 = \dot{U}_1$ . Так, для случая холостого хода  $\dot{U}_0 = 0$  и  $\dot{r}_2 = \dot{U}_1 = \overline{OI_{к.з}}$ , для тока  $I = \overline{OI}$ ,  $\dot{U}_0 = \overline{OI}$  и  $\dot{U}_2 = \overline{PI_{к.з}}$ , для короткого замыкания  $\dot{U}_0 = \dot{U}_1 = \overline{OI_{к.з}}$  и  $U_2 = 0$ .

Средняя мощность  $P_1 = U_1 I \cos \varphi_1$  всей цепи может быть изображена перпендикуляром  $\overline{Id}$  на ось мнимых из конца вектора тока  $I$ , так как  $\dot{U}_1 = \text{const}$ , а в масштабе тока  $\overline{Id} = I \cos \varphi_1$ ; при этом если  $n$  есть масштаб для тока, масштаб для мощности будет равен  $nU_1$ . Мощ-

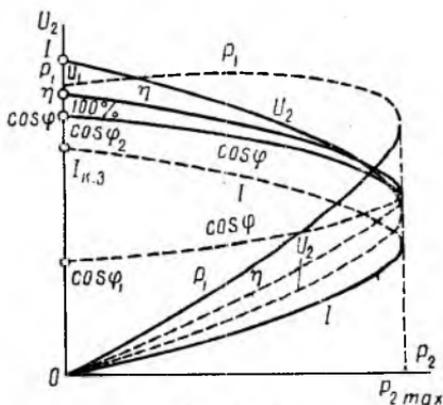


Рис. 10.9

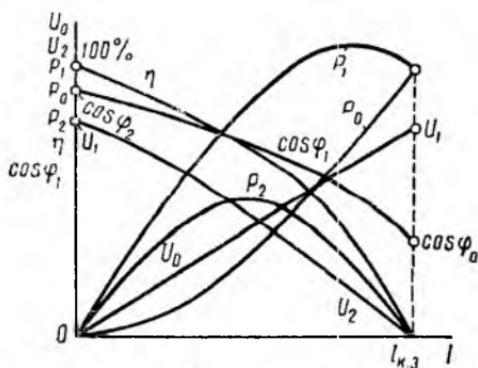


Рис. 10.10

ность всей цепи может быть изображена также отрезком  $\overline{Ia}$ , составляющим постоянный угол  $\varphi_2$  с перпендикуляром  $\overline{Id}$ , но так как  $\overline{Id} = \overline{Ia} \cos \varphi_2$ , то теперь масштаб мощности будет равен  $nU_1 \cos \varphi_2$ . Луч короткого замыкания  $\overline{OI_{к.з}}$  делит отрезок  $\overline{Ia}$  на две части:  $\overline{Ic}$  и  $\overline{ca}$ ; из рис. 10.8, б видно, что

$$\frac{\overline{Ic}}{\overline{ca}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{Bm}} = \frac{\overline{Mk}}{\overline{kf}} = \frac{r_2}{r_0} = \frac{I^2 r_2}{I^2 r_0} = \frac{P_2}{P_0}.$$

Следовательно, в том же масштабе отрезок  $\overline{Ic}$  равен средней мощности  $P_2$  приемника, отрезок  $\overline{ca}$  равен средней мощности  $P_0$  потерь в линии передачи, а отрезок  $\overline{Ia}$  равен средней мощности  $P_1$  всей цепи, г. е. мощности генератора.

Из рис. 10.8, б видно, что  $P_2 = 0$  при холостом ходе и коротком замыкании и имеет максимум в одной из промежуточных точек;  $P_0 = 0$  при холостом ходе и непрерывно растет по мере приближения к короткому замыканию;  $P_1 = 0$  при холостом ходе, проходит через максимум и равна  $P_0$  при коротком замыкании.

Для непосредственного получения на диаграмме к. п. д.  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\overline{Ic}}{\overline{Ia}}$  следует продолжить линии  $\overline{OI_{к.з}}$  и  $\overline{OI}$  в обратную сторону,

а также провести через начало координат прямую  $\overline{OT} \parallel \overline{Mm}$  и разделить любую горизонтальную линию  $ST$  на 100 частей. Тогда из подобия треугольников  $O\eta T$  и  $IOa$ , а также  $OSt$  и  $cOa$  следует

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{Ia}} = \frac{\overline{\eta T}}{\overline{Oa}}, \quad \frac{\overline{ac}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{Oa}}{\overline{ST}}, \quad \frac{\overline{ac}}{\overline{Ia}} = \frac{\overline{\eta T}}{\overline{ST}},$$

$$\frac{\overline{Ia} - \overline{ac}}{\overline{Ia}} = \frac{\overline{ST} - \overline{\eta T}}{\overline{ST}}, \quad \frac{\overline{Ic}}{\overline{Ia}} = \frac{P_2}{P_1} = \eta = \frac{\overline{S\eta}}{\overline{ST}},$$

т. е. продолжение луча тока дает на прямой  $ST$  непосредственно величину к. п. д., соответствующего этому току.

На основании круговой диаграммы могут быть построены рабочие характеристики в функции мощности приемника  $P_2$  (рис. 10.9) и тока (рис. 10.10). На рис. 10.9 часть характеристик от холостого хода до максимального значения  $P_{2 \max}$  показана сплошной линией, от максимального значения  $P_{2 \max}$  до короткого замыкания — пунктиром.

#### § 10.4. Диаграмма для четырехполюсника

Пусть приемник с переменным сопротивлением  $pZ = pze^{j\varphi}$  питается через пассивный четырехполюсник с параметрами  $A, B, C, D$  от источника неизменного напряжения  $\dot{U}_1$  (рис. 10.11, а).

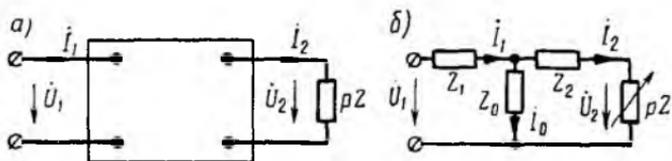


Рис. 10.11

Тогда напряжение на выходе  $\dot{U}_2 = pZ \dot{I}_2$  и уравнения четырехполюсника получают вид:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = (pZA + B)\dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = (pZC + D)\dot{I}_2.$$

Ток на входе четырехполюсника определяется делением второго уравнения на первое:

$$\dot{I}_1 = \frac{D + pZC}{B + pZA} \dot{U}_1.$$

Это векторное уравнение является уравнением окружности, н проходящей через начало координат (§ 10.2). Если направить  $\dot{U}_1$  по оси вещественных ( $\dot{U}_1 = U_1$ ), окружность токов можно построить по трем векторам (рис. 10.12):

$$\dot{I}_{1(p=0)} = \frac{D}{B} U_1, \quad \dot{I}_{1(p=\infty)} = \frac{C}{A} U_1, \quad \dot{I}_{1(p=1)} = \frac{D + ZC}{B + ZA} U_1.$$

Первые два вектора являются соответственно векторами токов короткого замыкания и холостого хода, а третий — вектором тока для одного из режимов нагрузки. Центр  $c$  окружности лежит на пересечении перпендикуляров к хордам в их средних точках, соединяющим концы этих векторов.

Пусть четырехполюсник представляет собой  $T$ -образную схему с сопротивлениями ветвей  $Z_1, Z_0, Z_2$  (см. рис. 10.11, б), и требуется найти диаграмму токов ветвей при переменном сопротивлении  $\rho Z$  нагрузки и постоянном напряжении  $\dot{U}_1$  источника. Вычислив токи ветвей

$$\dot{I}_1 = \frac{(Z_0 + Z_2) + \rho Z}{(Z_1 Z_0 + Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2) + \rho (Z_1 Z + Z_0 Z)} \dot{U}_1,$$

$$\dot{I}_0 = \frac{Z_2 + \rho Z}{(Z_1 Z_0 + Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2) + \rho (Z_1 Z + Z_0 Z)} \dot{U}_1,$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_0}{(Z_1 Z_0 + Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2) + \rho (Z_1 Z + Z_0 Z)} \dot{U}_1,$$

можно видеть, что г. м. т. концов векторов этих токов являются окружностями, причем окружности  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_0$  не проходят через начало координат, а окружность  $\dot{I}_2$  проходит через него. Все эти окружности могут быть также построены по трем точкам.

В случае питания сопротивления  $\rho Z$  через активный четырехполюсник его система уравнений (см. § 9.7) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + B \dot{I}_{2к.з} &= (\rho Z A + B) \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 - \dot{I}_{1к.з} + D \dot{I}_{2к.з} &= (\rho Z C + D) \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Ток  $\dot{I}_1$  на входе активного четырехполюсника может быть определен делением второго уравнения на первое:

$$\dot{I}_1 = \frac{D + \rho Z C}{B + \rho Z A} (\dot{U}_1 + B \dot{I}_{2к.з}) + \dot{I}_{1к.з} - D \dot{I}_{2к.з}.$$

Дробь в правой части равенства является уравнением окружности, не проходящей через начало координат (см. § 10.2). Умножение этого г. м. т. на постоянный вектор  $\dot{U}_1 + B \dot{I}_{2к.з}$  с последующим суммированием с постоянным вектором  $\dot{I}_{1к.з} - D \dot{I}_{2к.з}$  дает для г. м. т.  $\dot{I}_1$  также уравнение окружности, в общем случае не проходящей через начало координат.

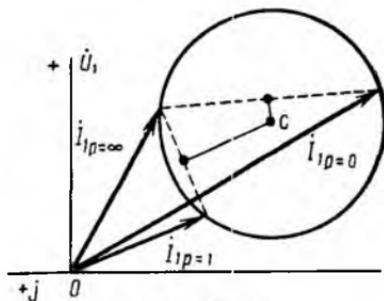


Рис. 10.12

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

### § 11.1. Основные соотношения

При рассмотрении цепей, отдельные ветви которых связаны между собой взаимной индуктивностью  $M$  (см. § 1.8), нужно ввести понятие об **о д н о и м е н н ы х з а ж и м а х** контуров. Зажимы двух конту-

ров называются одноименными, если при одинаковом направлении токов относительно этих зажимов магнитные потоки самоиндукции  $\Phi_L$  и взаимоиндукции  $\Phi_M$  в каждом контуре совпадают по направлению. Одноименность зажимов контуров, например катушек, зависит от их взаимного расположения и направления намотки.

Из рис. 11.1, а, например, видно, что в катушках 1 и 2 с одинаковым направлением намотки одноименными являются зажимы  $a$  и  $i$  (обозначены точками), а также зажимы  $b$  и  $d$ . Если сдвинуть катушку 2 в положение, показанное на рис. 11.1, б, потоки взаимоиндукции  $\Phi_{M1}$  и  $\Phi_{M2}$  при том же направлении токов окажутся направленными навстречу и одноименными должны стать зажимы  $a$  и  $d$  (соответственно  $b$  и  $c$ ).

Выбирая в обеих катушках положительные направления э. д. с., напряжений и токов относительно одноименных зажимов одинако-

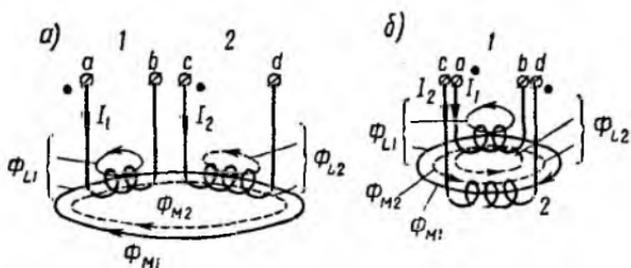


Рис. 11.1

выми, при мгновенном значении тока  $i_1$  в первом контуре и разомкнутом втором, мгновенные значения э. д. с. самоиндукции  $e_{L1}$  и напряжения  $u_{L1}$  первой катушки, пренебрегая ее активным сопротивлением:

$$e_{L1} = - \frac{d\Psi_{L1}}{dt} = - L \frac{di_1}{dt} = - u_{L1},$$

и аналогично э. д. с. взаимоиндукции  $e_{M2}$  и напряжение  $u_{M2}$  второй:

$$e_{M2} = - \frac{d\Psi_{2M}}{dt} = - M \frac{di_1}{dt} = - u_{M2}.$$

Здесь  $\Psi_{L1}$  и  $\Psi_{M2}$  — потокосцепления самоиндукции первой и взаимоиндукции второй катушек.

При синусоидальном токе для комплексных величин

$$\dot{U}_{L1} = - \dot{\mathcal{E}}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1, \quad \dot{U}_{M2} = - \dot{\mathcal{E}}_{M2} = j\omega M \dot{I}_1.$$

Величина  $\omega M$ , имеющая размерность сопротивления, называется сопротивлением взаимоиндуктивности  $x_M$ ; комплексное сопротивление взаимоиндуктивности  $Z_M = j\omega M = jx_M$ .

## § 11.2. Последовательное и параллельное соединения с взаимной индукцией

При последовательном соединении катушек (рис. 11.2, а и б) ток в них один и тот же, а приложенное напряжение должно преодолеть все э. д. с. и сопротивления цепи. При согласном включении катушек (см. рис. 11.2, а), когда магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в обеих катушках направлены одинаково, э. д. с. самоиндукции и взаимной индукции имеют одинаковые знаки.

При встречном включении катушек (см. рис. 11.2, б) магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены в противоположные стороны и э. д. с. взаимной индукции имеет знак, обратный знаку э. д. с. самоиндукции.

Тогда приложенное напряжение при обходе контура по принятому положительному направлению тока

$$\begin{aligned} u &= r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + \\ &+ r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} = r_1 i + \\ &+ (L_1 \pm M) \frac{di}{dt} + r_2 i + (L_2 \pm M) \frac{di}{dt} = \\ &= (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt}, \end{aligned}$$

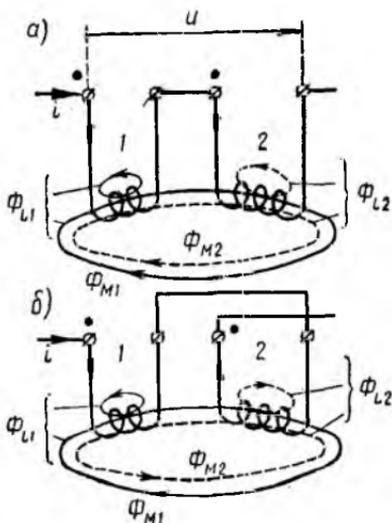


Рис. 11.2

где  $r_1$  и  $r_2$  — активные сопротивления первой и второй катушек;  $L_1$  и  $L_2$  — их индуктивности,  $M$  — взаимная индуктивность; верхний знак соответствует согласному, нижний — встречному включению. Для синусоидального напряжения и тока это же соотношение может быть записано в комплексной форме:

$$\dot{U} = (r_1 + r_2) \dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I}.$$

Следовательно, результирующие индуктивности катушек и всей цепи при согласном включении

$$L'_1 = L_1 + M, \quad L'_2 = L_2 + M, \quad L' = L_1 + L_2 + 2M,$$

при встречном включении

$$L''_1 = L_1 - M, \quad L''_2 = L_2 - M, \quad L'' = L_1 + L_2 - 2M.$$

С увеличением  $M$ , например при сближении катушек, результирующие индуктивности при согласном включении увеличиваются, при встречном — уменьшаются. При  $M > L_2$  результирующая индуктивность  $L''_2$  второй катушки при встречном включении становится отрицательной. Это значит, что вектор индуктивного напряжения  $\dot{U}_{2L}$  той катушки получает направление, противоположное векторам

индуктивного напряжения  $\dot{U}_{1L}$  первой катушки и  $\dot{U}_L$  всей цепи; при этом, очевидно,  $\dot{U}_{1L} > \dot{U}_{2L}$  и  $\dot{U}_{1L} > \dot{U}_L$  (рис. 11.3). Таким образом, вектор  $\dot{U}_{2L}$  отстает по фазе от вектора тока  $I$  на  $\pi/2$ , а на первом участке возникает повышенное напряжение, как будто вместо второй катушки включен конденсатор; это может быть названо случаем ложной емкости. При этом цепь в целом носит индуктивный характер.

Из выражений для результирующих индуктивностей всей цепи для согласного  $L'$  и встречного  $L''$  включения можно вычислить взаимоиנדуктивность

$$M = \frac{1}{4} (L' - L'').$$

В других схемах включения катушек, связанных взаимоиנדукцией, токи в них в общем случае сдвинуты по фазе; следовательно, часть периода потока самоиנדукции и взаимоиנדукции в обеих катушках будут согласными, остальную часть — встречными. Однако при-



Рис. 11.3

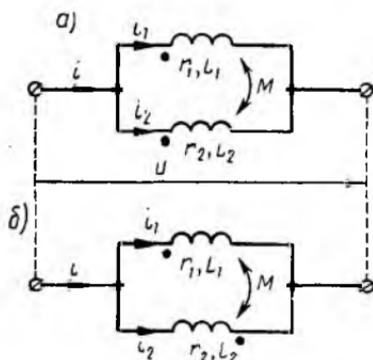


Рис. 11.4

нимаются, что включение является согласным, если относительно одноименных зажимов совпадают выбранные положительные направления токов.

При параллельном соединении катушек (рис. 11.4) их напряжение одинаково. Тогда уравнения равновесия напряжений для первой и второй катушек, соответственно, для мгновенных значений и комплексов имеют вид:

$$u = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad u = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt};$$

$$\dot{U} = r_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2, \quad \dot{U} = r_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1.$$

Здесь верхний знак относится к согласному включению (рис. 11.4, а), а нижний — к встречному (рис. 11.4, б).

Если пренебречь активными сопротивлениями катушек, из этиз

уравнений вытекает, что

$$\begin{aligned} u &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 \mp M} \cdot \frac{di_1}{dt}, & \dot{U} &= j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 \mp M} I_1, \\ u &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 \mp M} \cdot \frac{di_2}{dt}, & \dot{U} &= j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 \mp M} I_2, \\ u &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \cdot \frac{di}{dt}, & \dot{U} &= j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \dot{I}. \end{aligned}$$

Здесь  $i = i_1 + i_2$  — мгновенное значение, а  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$  — комплекс тока цепи до разветвления.

Следовательно, результирующие индуктивности первой и второй катушек и всей цепи при согласном и встречном включении будут:

согласное включение

встречное включение

$$L'_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M},$$

$$L''_1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 + M},$$

$$L'_2 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M},$$

$$L''_2 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + M},$$

$$L' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M},$$

$$L'' = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Пусть  $L_1 > L_2$ . В случае согласного включения результирующая индуктивность  $L'_1$  первой катушки при  $M = L_2$  делается равной



Рис. 11.5

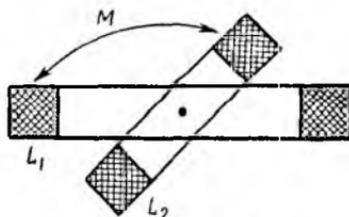


Рис. 11.6

бесконечности; это значит, что э. д. с. взаимной индукции уравновешивает приложенное напряжение, и ток первой катушки становится равным нулю. При  $M > L_2$  имеет место явление ложной емкости: индуктивность  $L'_1$  становится отрицательной, и вектор тока  $I_1$  этой катушки получает направление, противоположное векторам тока  $I_2$  второй катушки и  $I$  всей цепи (рис. 11.5); вектор  $I_1$  опережает по фазе вектор напряжения  $\dot{U}$  на  $\pi/2$ , как будто вместо первой катушки включен конденсатор, при этом, очевидно,  $I_2 > I_1$  и  $I_2 > I$ .

Для плавного изменения индуктивности применяют в а р и о м е т р ы, состоящие из двух катушек. Меньшая катушка помещена внутри большей и может поворачиваться (рис. 11.6). При совпадении их осей взаимная индуктивность максимальна:  $M = M_{\text{max}}$ . При повороте  $M$  уменьшается и при прямом угле между осями  $M = 0$ . Соединяя катушки параллельно и последовательно, можно получить плавное изменение результирующей индуктивности в пределах от минималь-

ного значения при параллельном встречном соединении до максимального при последовательном согласном включении, т. е. от

$$L_{\min} = \frac{L_1 L_2 - M_{\max}^2}{L_1 + L_2 + 2M_{\max}} \quad \text{до} \quad L_{\max} = L_1 + L_2 + 2M_{\max}.$$

Если уравнивать ее максимальное значение при параллельном согласном включении с минимальным значением при последовательном встречном включении, то

$$\frac{L_1 L_2 - M_{\max}^2}{L_1 + L_2 - 2M_{\max}} = L_1 + L_2 - 2M_{\max}.$$

### § 11.3. Расчет сложных цепей с взаимной индукцией

Расчет сложных цепей со взаимной индукцией можно вести символическим методом по законам Кирхгофа, так как последние справедливы для любых цепей, но в уравнениях по второму закону Кирхгофа в выражения для напряжений катушек должны быть добавлены комплексные напряжения взаимной индукции вида  $\pm j\omega M_{pq} I_q$ . В соответствии со сказанным в § 11.1 положительный знак у этого комплекса должен быть выбран при совпадении относительно одноименных зажимов направления обхода катушки  $p$  и направления тока в катушке  $q$ . При несовпадении указанных направлений комплекс должен получить отрицательный знак.

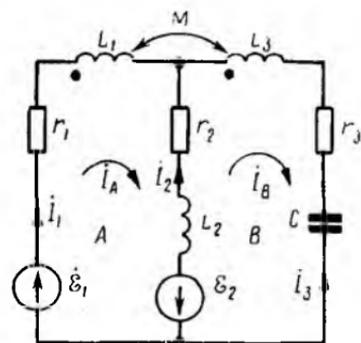


Рис. 11.7

рис. 11.7 в соответствии с указанными на схеме положительными направлениями э. д. с. и одноименными зажимами, а также выбранными направлениями токов ветвей и обхода контуров:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \\ r_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_3 - r_2 I_2 - j\omega L_2 I_2 &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2, \\ j\omega L_2 I_2 + r_2 I_2 - j\omega L_3 I_3 + j\omega M I_1 - r_3 I_3 + j \frac{1}{\omega C} I_3 &= -\dot{E}_2. \end{aligned}$$

Для расчета цепей со взаимной индукцией применим также метод контурных токов, так как его вывод (см. § 3.9) был основан на втором законе Кирхгофа, учитывающем э. д. с. взаимной индукции. Уравнения для контурных токов получают вид:

$$Z_A \dot{I}_A - Z_{AB} \dot{I}_B \pm j\omega M_{AB} \dot{I}_B - \dots - Z_{AN} \dot{I}_N \pm j\omega M_{AN} \dot{I}_N = \dot{E}_A.$$

где  $M_{AB}$  — взаимоиндуктивность катушек контуров А и В и т. п., а знак выбирается соответственно сказанному выше. Сопротивления

взаимной индукции удобно добавить к взаимным сопротивлениям контуров:

$$Z_A \dot{I}_A - (Z_{AB} \mp j\omega M_{AB}) \dot{I}_B - \dots - (Z_{AN} \mp j\omega M_{AN}) \dot{I}_N = \dot{\mathcal{E}}_A.$$

При этом правило знаков изменяется на обратное: при совпадении направлений обхода катушки контура  $A$  и тока в катушке контура  $B$  у комплекса  $j\omega M_{AB} \dot{I}_B$  должен быть выбран отрицательный знак, и наоборот. Тогда, например, система уравнений для контурных токов  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$  цепи рис. 11.7 получит вид:

$$\begin{aligned} [r_1 + r_2 + j(\omega L_1 + \omega L_2)] \dot{I}_A - [r_2 + j(\omega L_2 - \omega M)] \dot{I}_B &= \dot{\mathcal{E}}_1 + \dot{\mathcal{E}}_2, \\ -[r_2 + j(\omega L_2 - \omega M)] \dot{I}_A + [r_2 + r_3 + j(\omega L_2 + \omega L_3 - \frac{1}{\omega C})] \dot{I}_B &= -\dot{\mathcal{E}}_2. \end{aligned}$$

Метод наложения, основанный на линейности уравнений, составленных по законам Кирхгофа, также применим, так как и при наличии взаимной индукции уравнения остаются линейными. Это же относится к методу эквивалентного источника энергии при условии, что ток или напряжение определяются для ветви, не связанной взаимной индукцией с остальной частью цепи.

Метод узловых напряжений для цепей со взаимной индукцией неприменим, так как его вывод основан на первом законе Кирхгофа, который не позволяет непосредственно учесть э. д. с. взаимной индукции. В общем случае цепей со взаимной индукцией неприменим и метод преобразования, так как он основан на использовании кроме второго, также и первого закона Кирхгофа.

#### § 11.4. Трансформатор без стального сердечника

Широкое применение в электротехнике имеет трансформатор — статическое устройство, предназначенное для преобразования величины переменных напряжений и токов.

В простейшем случае он не имеет ферромагнитного сердечника и представляет собой две катушки с индуктивной связью (рис. 11.8); такие трансформаторы применяются в радиотехнике.

Напряжение  $u_1$  источника приложено к первичной катушке трансформатора, к вторичной катушке подключена нагрузка. Тогда уравнения по второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепей при показанных на рис. 11.8 одноименных зажимах и положительных направлениях токов, при которых потоки самоиндукции и взаимоиндукции складываются, получают следующий вид:

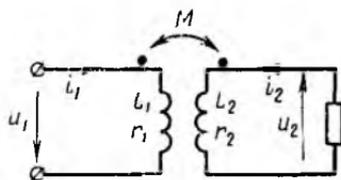


Рис. 11.8

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2, \end{aligned}$$

где  $u_2$  — напряжение на приемнике, а  $r_1$ ,  $L_1$  и  $r_2$ ,  $L_2$  — сопротивление и индуктивность, соответственно, первичной и вторичной катушек.

При холостом ходе вторичная катушка разомкнута и ток  $i_{1x}$  первичной цепи индуцирует во вторичной э. д. с. взаимной индукции  $e_{2x} = -M \frac{di_{1x}}{dt}$ . При синусоидальном законе изменения величин комплекс э. д. с. холостого хода

$$\dot{e}_{2x} = -j\omega M I_{1x}$$

При сопротивлении приемника  $Z_n = r_n + jx_n$  уравнения трансформатора в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + jx_1 \dot{I}_1 + jx_M \dot{I}_2, \\ 0 &= r_{2n} \dot{I}_2 + jx_{2n} \dot{I}_2 + jx_M \dot{I}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $x_1 = \omega L_1$ ,  $x_M = \omega M$ , а  $r_{2n} = r_2 + r_n$ ,  $x_{2n} = x_2 + x_n$  — суммарные активное и реактивное сопротивления вторичной цепи, где  $x_2 = \omega L_2$ . Из второго уравнения может быть определен комплекс вторичного тока:

$$\dot{I}_2 = -\frac{jx_M}{r_{2n} + jx_{2n}} \dot{I}_1.$$

Так как исходные уравнения были составлены в предположении, что потоки, пропорциональные токам, складываются, знак минус в этом выражении, связывающем комплексы токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , указывает на то, что векторы этих токов составляют тупой угол; в пределе, при  $r_{2n} = 0$ , токи находятся в противофазе. Полученный результат соответствует правилу Ленца о направлении индуцированного тока.

Переход от комплекса вторичного тока к его действительному значению дает:

$$I_2 = \frac{x_M I_1}{\sqrt{r_{2n}^2 + x_{2n}^2}} = \frac{x_M}{z_{2n}} I_1,$$

откуда может быть определен коэффициент трансформации тока

$$k_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{x_M}{\sqrt{r_{2n}^2 + x_{2n}^2}} = \frac{x_M}{z_{2n}}.$$

Из этих соотношений видно, что коэффициент трансформации тока не является постоянной величиной, а зависит от сопротивления приемника. Можно показать, что коэффициент трансформации напряжения  $k_U = \frac{U_2}{U_1}$  также зависит от сопротивления приемника.

После подстановки значения  $I_2$  в первое уравнение трансформатора получается выражение первичного тока:

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left( r_1 + \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} r_{2n} \right) + j \left( x_1 - \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} x_{2n} \right)},$$

откуда видно, как будет изменяться ток  $I_1$  при изменении сопротивления приемника.

В знаменателе выражения для  $I_1$  стоит результирующее полное сопротивление цепи, эквивалентной трансформатору. *Результирующее активное сопротивление*

$$r = r_1 + \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} r_{2n} = r_1 + r_2'$$

состоит из суммы активного сопротивления  $r_1$  первичной цепи и сопротивления, вносимого вторичной цепью,

$$r_2' = \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} r_{2n} = k_1^2 r_{2n}.$$

Средняя (активная) мощность, потребляемая трансформатором,

$$r I_1^2 = r_1 I_1^2 + r_2' I_1^2 = r_1 I_1^2 + r_{2n} \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^2 I_1^2 = r_1 I_1^2 + r_{2n} I_2^2,$$

т. е. равна сумме мощностей первичной и вторичной цепи, а к. п. д. трансформатора

$$\eta = \frac{r_{2n} I_2^2}{r I_1^2}.$$

*Результирующее реактивное сопротивление*

$$x = x_1 - \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} x_{2n} = x_1 - x_2'$$

состоит из разности реактивного сопротивления первичной цепи  $x_1$  и сопротивления  $x_2'$ , вносимого вторичной цепью. При индуктивном характере нагрузки  $x_{2n} > 0$  и вносимое реактивное сопротивление

$$x_2' = k_1^2 x_{2n} = \frac{x_M^2}{r_{2n}^2 + x_{2n}^2} x_{2n} = \frac{k^2 x_1 x_2}{\frac{r_{2n}^2}{x_{2n}} + x_2 + x_n} < k^2 x_1,$$

т. е.  $x_2' < x_1$ , так как коэффициент связи (см. п. 1 § 1.8)

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{x_M}{\sqrt{x_1 x_2}} < 1.$$

Следовательно, результирующее реактивное сопротивление  $x = x_1 - x_2'$  трансформатора при индуктивной нагрузке имеет также индуктивный характер и эффект ложной емкости невозможен.

При емкостной нагрузке  $x_{2n} = -x_C$ , и вносимое реактивное сопротивление

$$x_2' = k_1^2 (x_2 - x_C).$$

При  $x_C > x_2$  сопротивление  $x_2' < 0$ . Следовательно, результирующее реактивное сопротивление  $x > x_1$  и носит индуктивный характер. При  $x_C < x_2$  и достаточно большом значении коэффициента трансформации тока  $k_1$  сопротивление  $x$  может стать отрицательным, т. е. также получить емкостный характер.

Уравнения трансформатора могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= r_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \\ 0 &= r_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + j\omega M (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + Z_n \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Эти же уравнения по второму закону Кирхгофа являются уравнениями для двух элементарных контуров Т-образной цепи рис. 11.9 при принятых на ней направлениях токов; следовательно, трансформатор, т. е. цепь с индуктивной связью, может быть заменен эквивалентной схемой с кондуктивной связью контуров.

Если значение  $M$  лежит между  $L_1$  и  $L_2$ , например  $L_1 < M < L_2$ , то  $L_1 - M$  отрицательно, что эквивалентно емкости; получается схема, в которой возможно соотношение  $U_2 > U_1$ , что имеет место в трансформаторе, повышающем напряжение. При  $L_1 > M > L_2$

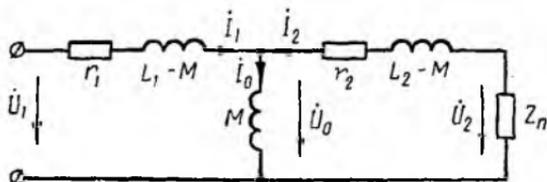


Рис. 11.9

емкостный характер получает элемент  $L_2 - M$ , что делает возможным соотношение  $I_1 < I_2$ , имеющее место в трансформаторе, понижающем напряжение.

В трансформаторе с одинаковым числом витков катушек ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ )  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$  пропорциональны соответственно полным потокам и потокам взаимоиндукции, создаваемым катушками. В этом случае разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл, являясь, очевидно, индуктивностями рассеяния первичной  $L_{s1}$  и вторичной  $L_{s2}$  катушек трансформатора (см. п. 1 § 1.8). В таком трансформаторе результирующая н. с.

$$\omega_1 \dot{I}_1 + \omega_2 \dot{I}_2 = \omega (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \omega \dot{I}_0$$

пропорциональна току и потоку на магнитивающей ветви  $M$  эквивалентной схемы, а напряжение  $\dot{U}_0 = j\omega M \dot{I}_0$  на зажимах этой ветви равно и обратно по знаку э. д. с.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ , индуцируемых потоком взаимоиндукции в обеих катушках.

## § 11.5. Трансформатор и катушка индуктивности со стальным сердечником

### 1. Трансформатор со стальным сердечником

В электротехнике обычно применяют трансформаторы со стальным сердечником — магнитопроводом эстержневого (рис. 11.10, а) или броневое (рис. 11.10, б) типа;

расположение первичной 1 и вторичной 2 обмоток (катушек) также показано на рис. 11.10.

При применении ферромагнитного магнитопровода та же взаимоиנדуктивность, благодаря большому значению магнитной проницаемости  $\mu$  стали по сравнению с  $\mu_0$ , может быть получена при меньших числах витков  $\omega_1$  и  $\omega_2$  первичной и вторичной катушек и меньших

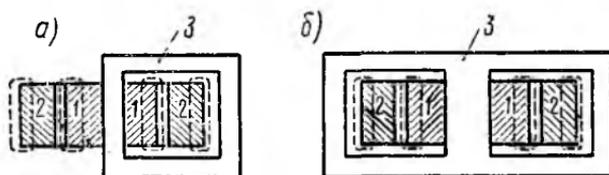


Рис. 11.10

размерах трансформатора, т. е. при малом расходе стали на магнитопровод и меди на его обмотки.

Потоки рассеяния, проходящие в основном по воздуху (пунктир на рис. 11.10), и соответствующие им индуктивности рассеяния  $L_{s1}$  и  $L_{s2}$  также уменьшатся при уменьшении размеров трансформатора. Поэтому коэффициент связи возрастет, что следует из его выражения для трансформатора с  $\omega_1 = \omega_2$ :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{\sqrt{(M + L_{s1})(M + L_{s2})}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L_{s1} L_{s2}}{M^2} + \frac{L_{s1} + L_{s2}}{M}}}$$

В трансформаторе со стальным сердечником может быть достигнут коэффициент связи, близкий к единице.

## 2. Потери в сердечнике на вихревые токи и гистерезис. Эквивалентная схема трансформатора

Периодическое перемагничивание стального сердечника вызывает потери на вихревые токи и гистерезис.

Вихревыми, или токами Фуко, называются токи, индуцируемые в магнитопроводе переменным магнитным потоком, созданным н. с. первичной и вторичной обмоток; следовательно, вихревые токи также являются следствием взаимоиנדукции. Для уменьшения потерь и размагничивающего действия от вихревых токов применяют чаще всего магнитопроводы, состоящие из листов специальной стали, изолированных друг от друга; их разделение следует производить так, чтобы плоскости листов были направлены вдоль линий магнитной индукции.

Далее приведен расчет потерь на вихревые токи в листе стали толщиной  $a$ , шириной  $h \gg a$  и длиной  $l$  (рис. 11.11), пронизываемом магнитным потоком, изменяющимся по синусоидальному закону. Максимальное значение индукции  $B_m$  во всех точках сечения листа принимается одинаковым и сопротивление путей вихревых токов

активным, что будет иметь место при пренебрежении размагничивающим действием вихревых токов, т. е. магнитным поверхностным эффектом (см. § 29.2).

Элементарный контур вихревого тока в виде полого цилиндра высотой  $l$  с прямоугольным основанием, имеющим длину  $2x$ , ширину,

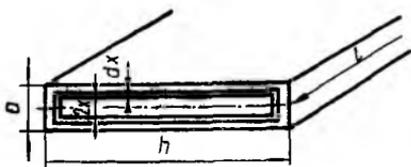


Рис. 11.11

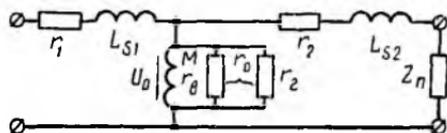


Рис. 11.12

принимаемую равной  $h$ , и толщину стенки  $dx$ , пронизывается магнитным потоком, максимальное значение которого

$$\Phi_{xm} = 2xhB_m.$$

Действующее значение э. д. с., индуцируемой в элементарном контуре,

$$\mathcal{E}_x = \frac{\mathcal{E}_{xm}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi_{xm} = 2\sqrt{2} \pi h B_m f x.$$

Активное сопротивление элементарного контура

$$r_x = \rho \frac{2h}{l dx}.$$

Тогда мощность, расходуемая в элементарном контуре на вихревые токи,

$$dP_v = \frac{\mathcal{E}_x^2}{r_x} = \frac{4\pi^2}{\rho} h l B_m^2 f^2 x^2 dx.$$

Мощность, расходуемая во всем листе,

$$P_v = \int_0^{a/2} dP_v = \frac{4\pi^2}{\rho} h l B_m^2 f^2 \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{a/2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{a^3}{\rho} B_m^2 f^2 V,$$

где  $V = hla$  — объем листа. Отсюда видно, что потери  $\frac{P_v}{V}$  в единице объема стали пропорциональны квадрату частоты и квадрату толщины листов, и, следовательно, разделение стали магнитопровода на тонкие листы приводит к уменьшению потерь на вихревые токи.

В эквивалентной схеме трансформатора необходимо учесть потери на вихревые токи добавлением ветви, потребляющей ту же мощность. Для этого дополнительное активное сопротивление  $r_v$  надо включить на напряжение  $U_0$  намагничивающей ветви  $M$  (рис. 11.12 для трансформатора с  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ), так как тогда потребляемая им мощность  $P'_v$  будет находиться в квадратичной зависимости от индукции и частоты, как и потери на вихревые токи:

$$P'_v = \frac{U_0^2}{r_v} = \frac{(\omega M I_0)^2}{r_v} = \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Psi_{Mm} \right)^2}{r_v} = \frac{\left( \frac{2}{\sqrt{2}} \pi f \omega_1 B_m S \right)^2}{r_v} = \frac{2\pi^2 \omega_1^2 B_m^2 f^2 S^2}{r_v}.$$

Величина сопротивления  $r_{\text{в}}$  должна быть такой, чтобы потери  $P'_{\text{в}}$  нем равнялись потерям  $P_{\text{в}}$  в стали на вихревые токи:

$$\frac{2\pi^2\omega_1^2 B_m^2 f^2 S^2}{r_{\text{в}}} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\alpha^2}{\rho} B_m^2 f^2 V,$$

откуда

$$r_{\text{в}} = \frac{12\rho\omega_1^2 S}{\alpha^2 b},$$

где  $V$ ,  $S$  и  $b$  — объем, сечение и средняя длина магнитопровода.

Мощность потерь на гистерезис  $P_{\text{г}}$  при частоте  $f$  легко получить из формулы Штейнмеца для энергии  $W_{\text{г}}$ , затраченной на один цикл перемагничивания:

$$P_{\text{г}} = W_{\text{г}} f = \eta B_m^{1,6} f^2 V,$$

где коэффициент  $\eta$  зависит от материала, а  $V$  — объем магнитопровода. Линейная зависимость этих потерь от частоты в отличие от квадратичной зависимости потерь на вихревые токи может быть использована для разделения суммарных потерь в стали, если они известны для двух частот при одной и той же индукции  $B_m$ .

В схеме, эквивалентной трансформатору, потери  $P_{\text{г}}$  на гистерезис учитываются сопротивлением  $r_{\text{г}} = \frac{U_{\text{г}}^2}{P_{\text{г}}}$ , включаемым также параллельно намагничивающей ветви (см. рис. 11.12).

Величина  $r_{\text{г}}$  определяется аналогично из равенства потерь в сопротивлении и в стали. Если принять последние пропорциональными  $B_m^2$ , то

$$\frac{2\pi^2\omega_1^2 B_m^2 f^2 S^2}{r_{\text{г}}} = \eta B_m^2 f V,$$

откуда

$$r_{\text{г}} = \frac{2\pi^2\omega_1^2 S}{\eta b} f,$$

т. е., помимо конструктивных данных,  $r_{\text{г}}$  зависит от частоты.

Обычно сопротивления  $r_{\text{в}}$  и  $r_{\text{г}}$  объединяются в сопротивление ветви потерь в стали  $r_0 = r_{\text{в}} r_{\text{г}}$ : ( $r_{\text{в}} + r_{\text{г}}$ ). Важно отметить, что при малых потерях в стали сопротивление  $r_0$  должно быть велико, так как оно включается в схему параллельно.

Специальные электротехнические стали с малыми удельными потерями на гистерезис и вихревые токи имеют толщину от 0,5 до 0,1 мм; более тонкие листы приходится применять при повышенной частоте. В радиоэлектронике и вычислительной технике применяются также сердечники из спрессованной смеси ферромагнитного порошка с изолирующим материалом и из ферритов, получаемых спеканием окислов магнитных и немагнитных материалов.

### 3. Векторная диаграмма трансформатора

Векторная диаграмма при активно-индуктивной нагрузке для эквивалентной схемы рис. 11.12 и тем самым для трансформатора с  $\omega_1 = \omega_2$  и со стальным магнитопроводом показана на рис. 11.13.

Нелинейность катушек со стальным сердечником (см. п. 1 § 1.9) приводит к тому, что при синусоидальном напряжении ток  $i_0$  намагничивающей ветви будет несинусоидальным (см. п. 2 § 14.1). Ввиду малости этого тока по сравнению с практически синусоидальными токами  $i_1$  и  $i_2$  при нагрузке трансформатора можно этим явлением

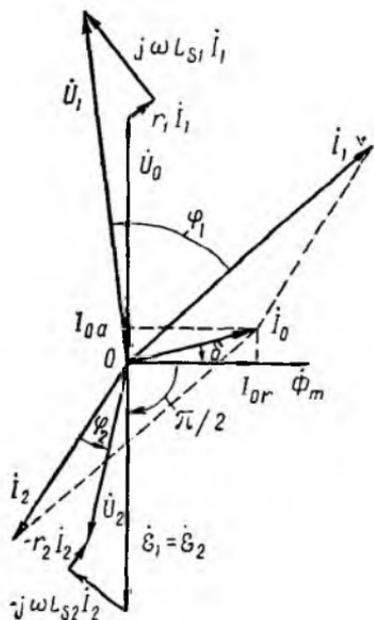


Рис. 11.13

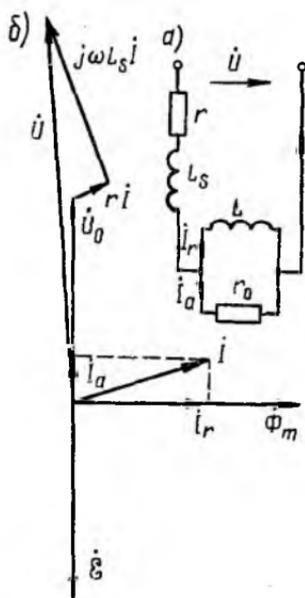


Рис. 11.14

пренебречь, считать все токи синусоидальными и изображать их векторами.

Векторная диаграмма строится в соответствии с положительными направлениями напряжений и токов, принятыми на схеме рис. 11.9. Исходным вектором удобно принять вектор потока взаимоиндукции  $\Phi_m$ ; затем строятся векторы э. д. с.  $\dot{\mathcal{E}}_1 = \dot{\mathcal{E}}_2$ , отстающие по фазе от  $\Phi_m$  на угол  $\pi/2$ . Напряжением  $\dot{U}_0 = -\dot{\mathcal{E}}_1$  определяется реактивный ток  $I_{0r}$  в намагничивающей ветви и активный  $I_{0a}$  — в ветви потерь. Эти токи в сумме дают вектор намагничивающего тока  $I_0$ , опережающий вектор потока  $\Phi_m$  на угол потерь  $\delta$ . Вторичный ток  $I_2$  отстает по фазе от своей э. д. с.  $\dot{\mathcal{E}}_2$ ; первичный ток находят из соотношения  $I_1 = I_0 - I_2$ . Первичное  $\dot{U}_1$  и вторичное  $\dot{U}_2$  напряжения определяются выражениями

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_0 + r_1 I_1 + j\omega L_{s1} I_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{\mathcal{E}}_2 - r_2 I_2 - j\omega L_{s2} I_2.$$

Как видно из диаграммы, в трансформаторе с  $\omega_1 = \omega_2$  напряжения и токи входа и выхода не равны друг другу ( $U_1 \neq U_2$  и  $I_1 \neq I_2$ ) и соотношения между ними определяются нагрузкой.

#### 4. Линейная теория катушки индуктивности со стальным сердечником

При холостом ходе трансформатора, т. е. при разомкнутой вторичной цепи, его эквивалентная схема упрощается (рис. 11.14, а). Очевидно, что трансформатор в этом режиме аналогичен катушке со стальным сердечником, часто применяемой в электротехнике. Тогда схема рис. 11.14, а является также эквивалентной схемой катушки, если намагничивающую ветвь характеризовать не взаимной индуктивностью  $M$ , а равной ей индуктивностью  $L = \frac{\omega^2}{R_m}$ , где  $R_m$  — магнитное сопротивление магнитопровода; в эквивалентной схеме катушки  $r$  — активное сопротивление обмотки,  $L_s$  — ее индуктивность рассеяния,  $r_0$  — сопротивление ветви потерь.

Здесь также часто пренебрегают нелинейностью  $L$  и строят векторную диаграмму; по сравнению со случаем нагруженного трансформатора погрешность получается большей.

За исходный вектор векторной диаграммы (рис. 11.14, б) удобно принять вектор потока  $\dot{\Phi}_m$  в магнитопроводе; вектор э. д. с.  $\dot{\mathcal{E}}$  отстает на  $\pi/2$  от  $\dot{\Phi}_m$ . Напряжение  $\dot{U}_0 = -\dot{\mathcal{E}}$  создает реактивный ток  $\dot{I}_r$  в ветви  $L$  и активный  $\dot{I}_a$  в ветви  $r_0$ , которые в сумме дают вектор  $\dot{I}$  тока катушки. Напряжение на зажимах катушки

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + r\dot{I} + j\omega L_s \dot{I}.$$

Из-за наличия потерь в меди и стали сдвиг  $\varphi$  по фазе между напряжением  $\dot{U}$  и током  $\dot{I}$  меньше  $\pi/2$ .

Теория катушки со стальным сердечником, учитывающая нелинейность  $L$ , дана в п. 2 § 14.1.

### § 11.6. Резонанс в двух индуктивно связанных цепях

Явление резонанса в связанных цепях широко используется в технике связи, в особенности в радиотехнике — в передающих и приемных устройствах.

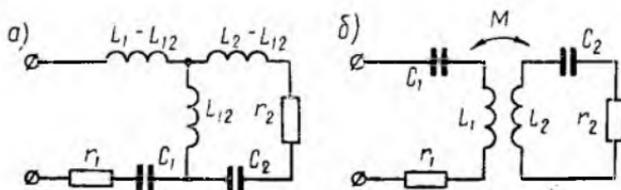


Рис. 11.15

С в я з а н н ы м и называются цепи, имеющие общую ветвь в действительной или эквивалентной схеме. Примером может служить индуктивная связь, осуществляемая при помощи общего индуктивного сопротивления (рис. 11.15, а) или путем электромагнит-

ной индукции — трансформаторная связь (рис. 11.15, б). Оба эти вида индуктивной связи будут эквивалентны друг другу, если полные индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  обоих контуров соответственно равны друг другу, а  $L_{12} = M$  (см. § 11.4).

Степень связи цепей характеризуется коэффициентом связи  $k$ , который в общем случае представляет собой отношение сопротивления общей ветви к корню квадратному из произведения одноименных с ним сопротивлений каждого из двух связанных контуров, причем в сопротивление контуров должно быть включено и сопротивление общей ветви. Тогда для простой индуктивной связи (рис. 11.15, а)

$$k_L = \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

для трансформаторной связи (рис. 11.15, б) получается известное выражение

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Пусть резонансная частота обеих цепей рис. 11.15, б одинакова:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Если пренебречь активным сопротивлением вторичной цепи ( $r_2 = 0$ ), то из § 11.4 следует, что реактивное сопротивление всей цепи рис. 11.15, б, а следовательно, и эквивалентной ей цепи рис. 11.15, а равно:

$$x = x_1 - \frac{x_M^2}{x_2} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}.$$

При частоте  $\omega = \omega_0$ ,  $x = -\infty$  и  $I_1 = 0$ , т. е. в разветвленной части схемы рис. 11.15, а, эквивалентной исследуемой цепи рис. 11.15, б, имеет место резонанс токов. При наличии во вторичном контуре небольшого активного сопротивления кривая  $I_1(\omega)$  при  $U_1 = \text{const}$  также проходит через минимум, но  $I_{1\text{min}} > 0$  (рис. 11.16).

В исследуемой цепи происходит резонанс напряжений, и ток получает максимальное значение при условии  $x = 0$ , откуда

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = \omega^2 M^2.$$

Если разделить обе части этого равенства на  $\omega L_1 \omega L_2$  и учесть выражения для резонансной частоты  $\omega_0$  обоих контуров и коэффициента связи  $k$ , условие резонанса напряжений получает вид:

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 = k^2,$$

откуда

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}, \quad \omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}.$$

Следовательно, имеются две частоты, при которых величина  $I_1$  максимальна; резонанс напряжений имеет место между левой и разветвленной правой частью схемы рис. 11.15, а; причем для меньшей из этих частот сопротивление левой части эквивалентной схемы носит емкостный характер, а правой — индуктивный, для большей частоты — наоборот.

Решение уравнений для этой цепи относительно тока  $I_2$  приводит к выводу, что кривая  $I_2(\omega)$  при  $U_1 = \text{const}$  и малом активном сопротивлении также имеет два максимума при тех же частотах  $\omega'$  и  $\omega''$ , в то время как минимума эта кривая достигает при частоте, несколько большей,  $\omega_0$  (рис. 11.16).

Следовательно, в отличие от кривой  $I(\omega)$  при  $U = \text{const}$  для уединенного контура с  $L$  и  $C$ , имеющей один максимум при последовательном соединении (см. рис. 7.6) или один минимум при параллельном соединении (см. рис. 7.10), резонансные кривые, т. е. частотные характеристики  $I_1(\omega)$  и  $I_2(\omega)$  цепи, состоящей из двух связанных контуров с малым активным сопротивлением, имеют два максимума и один минимум. Выражения для резонансных частот могут служить для нахождения коэффициента связи:

$$k = \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{\omega'^2 + \omega''^2} = \frac{f'^2 - f''^2}{f'^2 + f''^2}.$$

При больших активных сопротивлениях точки резонансов сливаются, и резонансные кривые будут иметь только по одному максимуму.

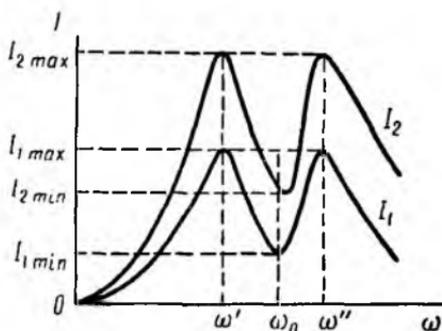


Рис. 11.16

## ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### § 12.1. Основные понятия

Многофазной системой называется совокупность электрических цепей, называемых фазами, в которой действуют синусоидальные напряжения одной частоты, отличающиеся друг от друга по фазе. Чаще всего применяются симметричные многофазные системы, напряжения которых равны по величине и сдвинуты по фазе на угол  $\frac{2\pi}{m}$ , где  $m$  — число фаз.

Наибольшее распространение имеет трехфазная система, созданная русским ученым М. О. Доливо-Добровольским (1891 г.); он изобрел и разработал все звенья этой системы — генераторы, трансформаторы, линии передачи и двигатели трехфазного тока.

Простейший трехфазный генератор (рис. 12.1) подобен рассмотренному в п. 1 § 6.1 источнику однофазного напряжения; он состоит из трех одинаковых плоских витков или катушек, называемых фазами генератора, вращающихся в однородном магнитном поле с равномерной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к направлению магнитных линий. В каждой фазе следует различать начало и конец. Считая, что все катушки намотаны в одном направлении, например по часовой стрелке, можно принять за начало начальный зажим катушки или, наоборот, конечный, но принятое условие должно быть одинаковым для всех фаз. Цепи нагрузки подключаются к генератору с помощью щеток, наложенных на кольца, соединенные с катушками аналогично рис. 6.1 (на рис. 12.1 они не показаны).

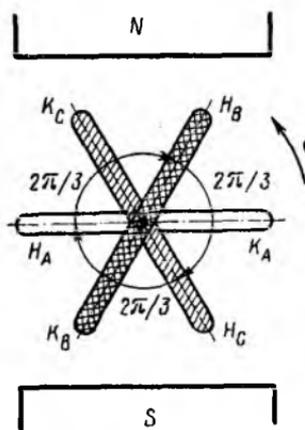


Рис. 12.1

соответствует полному максимальным значениям (амплитуды) э. д. с. фаз будут также одинаковы. Так как фазы сдвинуты друг относительно друга в пространстве на угол  $2\pi/3$ , т. е. на  $1/3$  полного оборота, их э. д. с. будут сдвинуты во времени на  $T/3$  — треть периода, что соответствует фазовому сдвигу, равному:

$$\omega \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Если за начальный взять момент времени, когда плоскость первой катушки перпендикулярна линиям магнитной индукции (см. рис. 12.1), э. д. с. (отсчитываемая, например, от конца к началу)

$$e_A = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

и э. д. с. двух других катушек (отсчитываемые в том же направлении), отставая по фазе на углы  $2\pi/3$  и  $2 \cdot 2\pi/3$ , будут равны:

$$e_B = \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{и} \quad e_C = \mathcal{E}_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Временная диаграмма э. д. с. изображена на рис. 12.2.

Если вектор э. д. с. первой фазы направить по оси вещественных комплексной плоскости (рис. 12.3), комплексы э. д. с. симметричной

системы будут иметь вид:

$$\dot{\mathcal{E}}_A = \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{E}}_B = \mathcal{E} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \mathcal{E} \left[ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] = \mathcal{E} \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\dot{\mathcal{E}}_C = \mathcal{E} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \mathcal{E} e^{+j\frac{2\pi}{3}} = \mathcal{E} \left( \cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3} \right) = \mathcal{E} \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Комплексный множитель

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,5 + j0,87$$

является оператором поворота вектора на угол  $2\pi/3$  в положительном направлении. Тогда

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^3 = e^{j\frac{6\pi}{3}} = 1, \quad a^4 = a, \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\dot{\mathcal{E}}_A = \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{E}}_B = a^2 \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{E}}_C = a \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{E}}_A + \dot{\mathcal{E}}_B + \dot{\mathcal{E}}_C = \mathcal{E} (1 + a + a^2) = 0,$$

т. е. сумма векторов симметричной системы равна нулю. Это значит, что равна нулю в любой момент времени и алгебраическая сумма мгновенных значений, что можно видеть и из рис. 12.2, если взять сумму ординат трех синусоид для любой абсциссы.

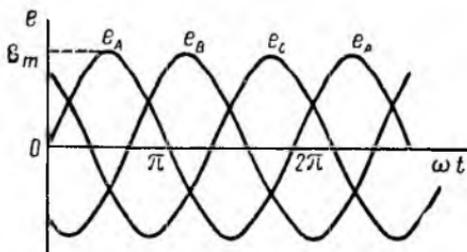


Рис. 12.2

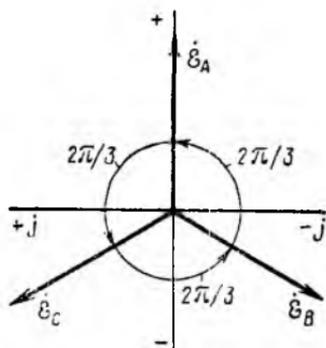


Рис. 12.3

Если в цепь каждой фазы генератора включить одинаковые по величине и характеру сопротивления (рис. 12.4), то токи фаз будут равны по величине и сдвинуты по фазе относительно своих напряжений на один и тот же угол  $\varphi$ :

$$i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right),$$

$$i_C = I_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi\right).$$

Они также образуют трехфазную симметричную систему векторов.

При неодинаковой нагрузке фаз максимальные значения токов и фазные сдвиги будут различны, и система токов будет несимметричной.

В электроизмерительной технике и автоматике применяется также двухфазная система, векторная диаграмма э. д. с. которой показана на рис. 12.5. Хотя э. д. с.  $\dot{\mathcal{E}}_1$  и  $\dot{\mathcal{E}}_2$  по величине равны, двухфазная система несимметрична, так как сумма  $\dot{\mathcal{E}}_1 + \dot{\mathcal{E}}_2 \neq 0$ .

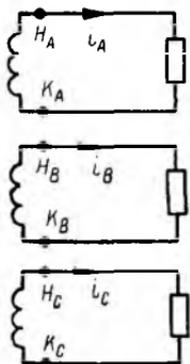


Рис. 12.4

Показанная на рис. 12.4 несвязанная трехфазная система,

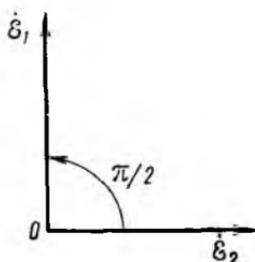


Рис. 12.5

при которой отдельные фазы не соединены между собой, на практике не применяется — генераторы и приемники связывают или в звезду, или в треугольник.

## § 12.2. Соединение звездой

При соединении генератора звездой вместе соединяются концы фаз, образуя нулевую (нейтральную) точку 0. К началам фаз генератора с помощью трехпроводной линии передачи присоединяется приемник. Если последний также соединен звездой,

нулевые точки генератора и приемника могут быть соединены нулевым (нейтральным) проводом (рис. 12.6).

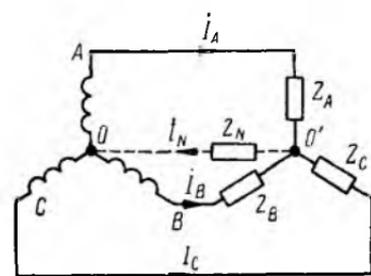


Рис. 12.6

Различают величины, относящиеся к фазам генератора и приемника — фазные напряжения и токи, и к линейным проводам — линейные напряжения и токи. Так как линейные провода соединены последовательно с фазами генератора и приемника, *линейные токи в звезде равны соответствующим фазным токам.*

Для получения симметричных соотношений между величинами следует выбирать положительные направления токов во всех фазах единообразно; обычно направляют токи от генератора к приемнику (см. рис. 12.6), т. е. в сторону движения энергии. В соответствии с аналогом закона Ома  $\dot{U} = \dot{Z}I$  положительные направления фазных напряжений совпадают с направлением токов. Положительные на-

равления линейных напряжений могут быть выбраны произвольно, но также единообразно. Произволен также выбор направления тока в нулевом проводе.

Если выбрать направление тока в нулевом проводе от нулевой точки приемника к нулевой точке генератора (см. рис. 12.6), мгновенное значение  $i_N$  и комплекс  $I_N$  этого тока в общем случае будут:

$$i_N = i_A + i_B + i_C, \quad I_N = I_A + I_B + I_C.$$

На рис. 12.7, а изображена диаграмма фазных напряжений на приемнике в соответствии с принятым на рис. 12.6 направлением токов, сходящихся в нулевой точке  $O'$  приемника. Эта диаграмма называется топографической, так как ее точкам  $A, B, C, O'$  соответствуют одноименные точки цепи. Векторы и комплексные линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$  направлены, как это обычно принято, от точки, соответствующей первому индексу, к точке, соот-

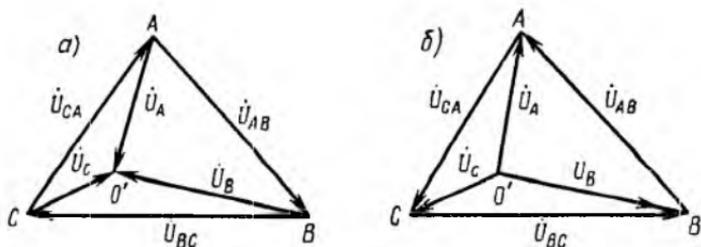


Рис. 12.7

ветствующей второму индексу; линейные напряжения равны разности соответствующих фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A,$$

а их мгновенные значения

$$u_{AB} = u_A - u_B, \quad u_{BC} = u_B - u_C, \quad u_{CA} = u_C - u_A.$$

Из этих соотношений вытекает, что *сумма линейных напряжений равна нулю*.

Топографическая векторная диаграмма рис. 12.7, а, в которой векторы фазных напряжений сходятся в одной точке, соответствующей нулевой точке приемника, обычно заменяется диаграммой рис. 12.7, б, где эти векторы выходят из этой же точки; так как при этом все векторы фазных и линейных напряжений изменяют свои направления на обратные, приведенные выше соотношения между напряжениями сохраняются.

При симметричной системе фазных напряжений векторы линейных напряжений образуют равносторонний треугольник; нулевая точка совпадает с его центром тяжести (рис. 12.8) и линейное напряжение

$$U_L = 2U_\phi \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_\phi,$$

т. е. по абсолютной величине линейные напряжения в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных.

Далее сначала рассматриваются цепи без взаимной индукции между фазами и между фазами и нулевым проводом.

В звезде с нулевым проводом (см. рис. 12.6), если пренебречь его сопротивлением ( $Z_N = 0$ ), а также сопротивлением линейных проводов, фазные напряжения приемника будут, очевидно, равны фазным напряжениям генератора; их векторные диаграммы совпадут (см. рис. 12.7, б). Следовательно, фазные комплексные токи будут определяться фазными комплексными напряжениями генера-

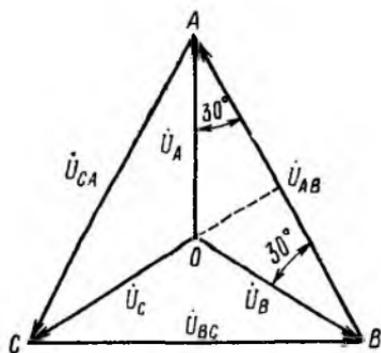


Рис. 12.8

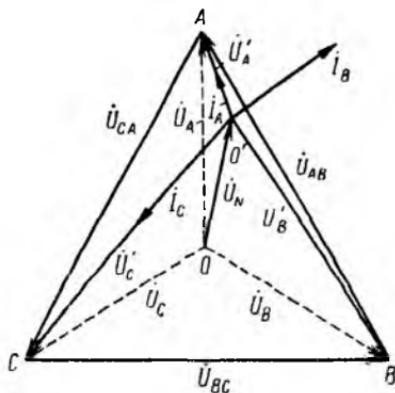


Рис. 12.9

тора и комплексными сопротивлениями или проводимостями тех же фаз приемника:

$$I_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = Y_A \dot{U}_A, \quad I_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B} = Y_B \dot{U}_B, \quad I_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = Y_C \dot{U}_C,$$

т. е. соединение звездой с нулевым проводом без сопротивления обеспечивает независимую работу фаз.

При симметричной системе фазных напряжений и одинаковой нагрузке фаз система фазных токов будет симметричной и ток  $I_N$  нулевого провода, равный сумме токов, будет также равен нулю независимо от величины сопротивления этого провода.

В звезде с нулевым проводом, имеющим сопротивление  $Z_N$ , в общем случае, когда  $I_N \neq 0$ , между нулевыми точками генератора и приемника возникает узловое напряжение  $\dot{U}_N = Z_N I_N$ , что вызывает на векторной диаграмме (рис. 12.9) смещение точки  $O'$ , соответствующей нулевой точке приемника, относительно точки  $O$ , соответствующей нулевой точке генератора. То, что вектор  $\dot{U}_N = Z_N I_N$  на рис. 12.9 направлен от  $O$  к  $O'$ , т. е. против направления  $I_N$ , объясняется указанным выше изменением направления векторов всех напряжений (см. рис. 12.7, а и б). В соответствии с методом узловых напряжений (см. § 3.10)

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N},$$

где  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  — фазные напряжения генератора;  $Y_A, Y_B, Y_C$  — проводимости фаз,  $Y_N$  — проводимость нулевого провода.

В звезде без нулевого провода  $Y_N = 0$  и

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Фазные напряжения на приемнике и токи (см. рис. 12.9) :

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_N, \quad \dot{U}'_B = \dot{U}_B - \dot{U}_N, \quad \dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_N;$$

$$\dot{I}_A = Y_A \dot{U}'_A, \quad \dot{I}_B = Y_B \dot{U}'_B, \quad \dot{I}_C = Y_C \dot{U}'_C.$$

Выражения для узлового напряжения показывают, что  $\dot{U}_N$  будет изменяться при изменении нагрузки в любой фазе; вместе с  $\dot{U}_N$  будут изменяться напряжения всех фаз приемника, а следовательно, и все токи. Таким образом, звезда без нулевого провода, а также звезда с нулевым проводом, имеющим сопротивление, не обеспечивает независимой работы фаз.

В случае звезды без нулевого провода фазные напряжения на приемнике могут быть выражены через линейные напряжения:

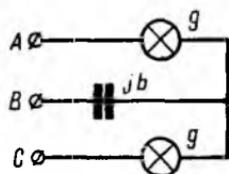


Рис. 12.10

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \dot{U}_A - \dot{U}_N = \dot{U}_A - \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \\ &= \frac{Y_B (\dot{U}_A - \dot{U}_B) - Y_C (\dot{U}_C - \dot{U}_A)}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{Y_B \dot{U}_{AB} - Y_C \dot{U}_{CA}}{Y_A + Y_B + Y_C}. \end{aligned}$$

Выражения для  $\dot{U}'_B$  и  $\dot{U}'_C$  можно получить, пользуясь круговой перестановкой индексов:

$$\dot{U}'_B = \frac{Y_C \dot{U}_{BC} - Y_A \dot{U}_{AB}}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

$$\dot{U}'_C = \frac{Y_A \dot{U}_{CA} - Y_B \dot{U}_{BC}}{Y_A + Y_B + Y_C}.$$

Приведенный вывод выражений для фазных напряжений на приемнике через фазные или линейные напряжения генератора справедлив для общего случая несимметричных систем фазных и линейных напряжений.

Примером неодинаковой нагрузки фаз может служить прибор для определения порядка следования фаз (рис. 12.10). Он представляет собой три одинаковые по величине проводимости, соединенные в звезду, — две лампы накаливания и конденсатор; тогда, считая, что проводимости ламп линейны,

$$Y_A = Y_C = g = \alpha, \quad Y_B = jb = j\alpha,$$

где  $\alpha$  — абсолютное значение проводимостей. При симметричной системе фазных напряжений генератора, если вектор  $\dot{U}_A$  направлен

по оси вещественных величин ( $\dot{U}_A = U$ ), узловое напряжение

$$\dot{U}_N = \frac{\alpha U + j\alpha U (-0,5 - j0,87) + \alpha U (-0,5 + j0,87)}{\alpha + j\alpha + \alpha} \approx U (0,62 - j0,13).$$

Тогда комплексные напряжения на лампах будут:

$$\dot{U}'_A = \dot{U}_A - \dot{U}_N = U - U (0,62 - j0,13) = U (0,38 + j0,13),$$

$$\dot{U}'_C = \dot{U}_C - \dot{U}_N = U (-0,5 + j0,87) - U (0,62 - j0,13) = U (-1,12 + j1)$$

На рис. 12.9 показана векторная диаграмма для рассматриваемой цепи. Векторы токов  $I_A$  и  $I_C$  совпадают по фазе с напряжениями  $\dot{U}'_A$  и  $\dot{U}'_C$ , ток  $I'_B$  опережает напряжение  $\dot{U}'_B$  по фазе на  $\pi/2$ .

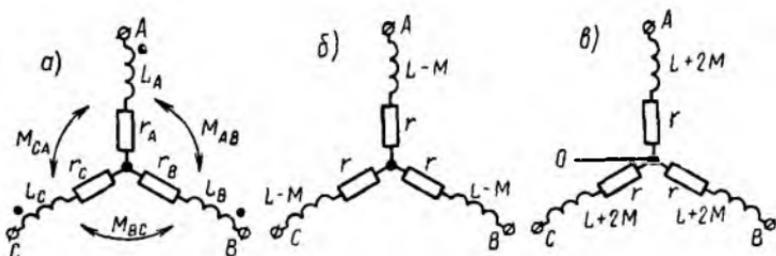


Рис. 12.11

Действующие значения напряжений на лампах и их отношение будут:

$$U_A = U \sqrt{0,38^2 + 0,13^2} \approx 0,4U,$$

$$U'_C = U \sqrt{1,12^2 + 1^2} \approx 1,5U, \quad \frac{U'_C}{U_A} = 3,75.$$

Поэтому лампа, включенная в фазу  $C$ , будет светиться ярче лампы, включенной в фазу  $A$ , т. е. фазы следуют друг за другом в следующем порядке: яркая лампа, тусклая лампа, конденсатор.

При индуктивных связях между фазами приемника и между его фазами и нулевым проводом должны быть учтены э. д. с. взаимной индукции. Так, например, для соединения звездой с нулевым проводом или без него по схеме рис. 12.11, а при взаимной индукции только между фазами уравнение по второму закону Кирхгофа для фазы  $A$  приемника будет иметь вид:

$$\dot{U}_A = (r_A + j\omega L_A) \dot{I}_A + j\omega M_{BA} \dot{I}_B + j\omega M_{CA} \dot{I}_C;$$

уравнения для второй и третьей фаз можно получить путем круговой перестановки индексов  $A, B, C$ .

Если нагрузка фаз одинакова, т. е.  $r_A = r_B = r_C = r$ ,

$$L_A = L_B = L_C = L, \quad M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M,$$

то

$$U_A = (r + j\omega L) I_A + j\omega M (I'_B + I'_C). \quad (12.1)$$

Если, кроме того, нулевой провод отсутствует или при его наличии система фазных напряжений симметрична, то сумма токов  $I_A + I_B + I_C = 0$ , и уравнение (12.1) получит вид:

$$\dot{U}_A = (r + j\omega L) I_A - j\omega M I_A = [r + j\omega(L - M)] I_A,$$

г. е. в этом случае цепь рис. 12.11, а эквивалентна схеме рис. 12.11, б без индуктивных связей, но с индуктивностью фаз приемника, равной  $L - M$ .

Для дальнейшего представляет интерес случай, когда есть нулевой провод, а все фазные напряжения генератора равны между собой и совпадают по фазе:  $\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C$  (так называемая нулевая система); тогда, очевидно, все токи также будут равны между собой:

$$I_A = I_B = I_C = I,$$

и уравнение (12.1) получит вид:

$$\dot{U} = (r + j\omega L) I + 2j\omega M I = [r + j\omega(L + 2M)] I.$$

Это значит, что в данном случае цепь рис. 12.11, а эквивалентна схеме рис. 12.11, в без индуктивной связи, но с индуктивностью фаз приемника, равной  $L + 2M$ . Ток нулевого провода будет, очевидно, равен  $3I$ .

### § 12.3. Соединение треугольником

Чтобы соединить генератор в треугольник, нужно связать конец каждой фазы с началом следующей; в результате фазы генератора образуют замкнутый контур. При таком соединении симметричного

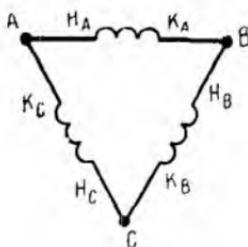


Рис. 12.12

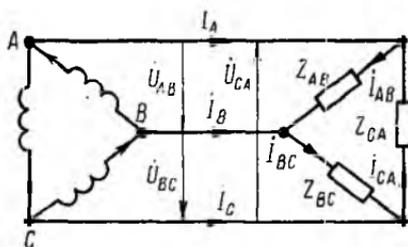


Рис. 12.13

генератора с отключенной нагрузкой (рис. 12.12) ток внутри него не возникает, так как сумма его э. д. с., образующих симметричную систему, равна нулю.

Соединив приемник также в треугольник (рис. 12.13), можно видеть, что фазные напряжения генератора и приемника одновременно являются и линейными, линейные же токи  $I_A, I_B, I_C$  — отличны от фазных токов  $i_{AB}, i_{BC}, i_{CA}$ . Для получения симметричных соотношений между линейными и фазными токами следует выбирать их положительные направления единообразно. Для всех линейных токов обычно выбирается направление от генератора к приемнику, для фазных — по направлению обхода контура, например, против часовой стрелки для приемника (рис. 12.13). Тогда по первому закону Кирх-

гофа для приемника получаются следующие соотношения для мгновенных значений и комплексных токов:

$$\begin{aligned} i_A &= i_{AB} - i_{CA}, & \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \\ i_B &= i_{BC} - i_{AB}, & \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \\ i_C &= i_{CA} - i_{BC}, & \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{aligned}$$

Для генератора соотношения между линейными и фазными токами аналогичны. Таким образом, *линейные токи равны разностям соответствующих фазных токов.*

Из полученных соотношений видно, что *сумма линейных токов равна нулю:*

$$i_A + i_B + i_C = 0, \quad \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Для симметричной системы фазных токов (рис. 12.14)

$$I_L = 2I_\phi \cos 30^\circ = 2I_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I_\phi,$$

т. е. по абсолютной величине линейные токи в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных.

Токи в фазах приемника будут определяться линейными напряжениями и сопротивлениями или проводимостями фаз приемника:

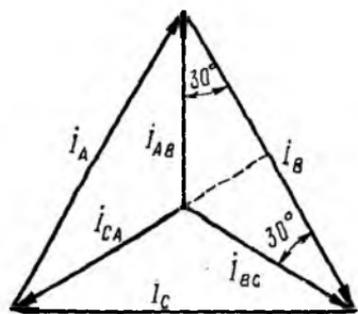


Рис. 12.14

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB}} = Y_{AB} \dot{U}_{AB},$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{BC}} = Y_{BC} \dot{U}_{BC},$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{CA}} = Y_{CA} \dot{U}_{CA}.$$

По приведенным соотношениям фазных токов могут быть определены линейные токи.

Если пренебречь сопротивлением проводов, напряжения генератора будут равны напряжениям приемника и *фазы будут работать независимо друг от друга:* всякое изменение сопротивления какой-либо фазы приемника вызовет изменение тока этой фазы и токов двух замыкающих к этой фазе линейных проводов, но никак не отразится на токах других фаз.

Если сопротивление линейных проводов не равно нулю (рис. 12.15, а), то из-за падения напряжения в них треугольник не обеспечивает независимой работы фаз. Изменение, например, сопротивления фазы АВ вызовет изменение фазного тока  $\dot{I}_{AB}$ , а следовательно, и линейных токов  $\dot{I}_A$  и  $\dot{I}_B$ . При этом изменятся падения напряжения в линейных проводах А и В, что при неизменных линейных напряжениях на зажимах генератора вызовет изменение напряжений на всех трех фазах приемника; следовательно, должны измениться также токи  $\dot{I}_{BC}$  и  $\dot{I}_{CA}$  тех фаз, сопротивление которых осталось неизменным.

Для расчета цепи рис. 12.15, а при заданных линейных напряжениях, помимо методов уравнений Кирхгофа, наложения, контурных

токов и узловых напряжений, при отсутствии взаимной индукции можно применить метод преобразования. Треугольник  $Z_{AB}$ ,  $Z_{BC}$ ,  $Z_{CA}$  преобразуют в эквивалентную звезду  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C$  по формулам, соответствующим § 3.4 (рис. 12.15, б):

$$Z_A = \frac{Z_{AB}Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}, \quad Z_B = \frac{Z_{BC}Z_{AB}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}},$$

$$Z_C = \frac{Z_{CA}Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Объединяя в каждой фазе сопротивление линии и приемника, приводят схему к звезде (рис. 12.15, в), после определения токов

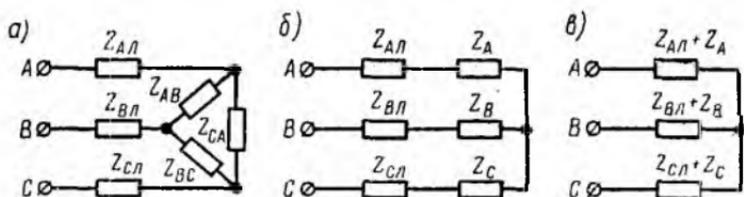


Рис. 12.15

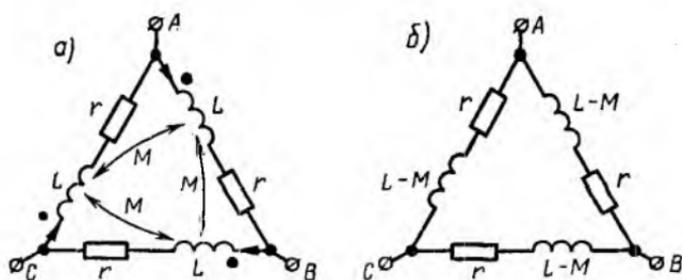


Рис. 12.16

которой возвращаются к цепи рис. 12.15, б, находя фазные и линейные напряжения на звезде  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C$ , а затем — к исходному треугольнику (см. рис. 12.15, а), чтобы найти его фазные токи.

Приведенные выше выражения для расчета соединения треугольником справедливы для общего случая несимметричной системы напряжений генератора.

При наличии взаимной индукции, одинаковой нагрузке фаз и симметричной системе напряжений (рис. 12.16, а) система фазных токов будет также симметричной, тогда

$$\dot{I}_{AB} + \dot{I}_{BC} + \dot{I}_{CA} = 0$$

и уравнение по второму закону Кирхгофа примет вид:

$$\dot{U}_{AB} = (r + j\omega L) \dot{I}_{AB} + j\omega M \dot{I}_{BC} + j\omega M \dot{I}_{CA} = [r + j\omega(L - M)] \dot{I}_{AB},$$

т. е. в этом случае цепь рис. 12.16, а эквивалентна схеме рис. 12.16, б без индуктивной связи, но с индуктивностью фаз приемника, равной  $L - M$ .

## § 12.4. Мощность трехфазных систем и ее измерение

Мгновенная мощность трехфазной системы, как и всякой сложной цепи, равна сумме мощностей отдельных приемников, т. е. сумме мощностей фаз. Мгновенная мощность симметричной и одинаково нагруженной трехфазной системы

$$\begin{aligned}
 p &= u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = U_{\phi m} \sin \omega t I_{\phi m} \sin (\omega t - \varphi_{\phi}) + \\
 &+ U_{\phi m} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) I_{\phi m} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_{\phi} \right) + \\
 &+ U_{\phi m} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) I_{\phi m} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_{\phi} \right) = \frac{1}{2} U_{\phi m} I_{\phi m} \left\{ 3 \cos \varphi_{\phi} - \right. \\
 &\left. - \left[ \cos (2\omega t - \varphi_{\phi}) + \cos \left( 2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_{\phi} \right) + \cos \left( 2\omega t - \frac{8\pi}{3} - \varphi_{\phi} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Сумма трех косинусоид, сдвинутых по фазе на угол  $\frac{4\pi}{3}$ , равна нулю, в чем можно убедиться, построив и сложив векторы, изображающие эти функции. Следовательно,

$$p = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = P = \text{const},$$

т. е. *мгновенная мощность симметричной одинаково нагруженной трехфазной системы постоянна*, тогда как мощность однофазной системы изменяется во времени с двойной частотой по сравнению с частотой напряжения и тока (см. § 7.1)

Многофазная система, мгновенная мощность которой постоянна, называется у р а в н о в е ш е н н о й. Интересно отметить, что несимметричная двухфазная система с равными напряжениями (см. рис. 12.5) в случае одинаковой нагрузки фаз также является уравновешенной:

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 + p_2 = U_m \sin \omega t I_m \sin (\omega t - \varphi) + \\
 &+ U_m \sin (\omega t - \pi/2) I_m \sin (\omega t - \pi/2 - \varphi) = U_m I_m \cos \varphi = \\
 &= 2UI \cos \varphi = P = \text{const}.
 \end{aligned}$$

Из-за уравновешенности трехфазные и двухфазные двигатели имеют постоянный вращающий момент, тогда как момент однофазных двигателей пульсирует с двойной частотой.

Выражение для мощности уравновешенной трехфазной системы может быть преобразовано. В симметричной звезде

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = 3 \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}} I_{\Delta} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\Delta} I_{\Delta} \cos \varphi_{\phi}.$$

В симметричном треугольнике

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = 3U_{\Delta} \frac{I_{\Delta}}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3} U_{\Delta} I_{\Delta} \cos \varphi_{\phi}.$$

В обоих случаях выражения для мощности получились одинаковыми.

Для измерения мощности трехфазной симметричной и одинаково нагруженной системы достаточен один ваттметр, включенный в одну из фаз и измеряющий ее мощность. Аналогично включается однофазный счетчик электрической энергии. Для получения мощности и, соответ-

ственно, энергии трехфазной системы показания этих приборов следует устроить.

В общем случае несимметричной системы и неодинаковой нагрузки мгновенная мощность  $p$  есть величина переменная, т. е. такая система является не уравновешенной. Средняя мощность этой системы равна сумме средних мощностей отдельных фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Следовательно, средняя мощность в данном случае может быть измерена тремя ваттметрами, включенными в каждую фазу, как это показано на рис. 12.17, а, для звезды с нулевым проводом (точками обозначены условные «начала» параллельных и последовательных цепей ваттметров, см. п. 3 § 2.6).

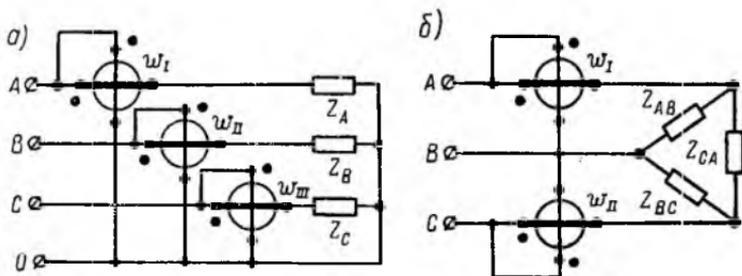


Рис. 12.17

В случае трехпроводной системы можно ограничиться двумя ваттметрами, включенными так, как показано на рис. 12.17, б для измерения средней мощности трехфазной системы, соединенной треугольником. Мгновенные мощности, усредняемые первым и вторым ваттметрами, соответственно равны:

$$p_I = u_{AB} i_A, \quad p_{II} = u_{CB} i_C.$$

Так как  $u_{CB} = -u_{BC}$ , сумма этих мощностей

$$\begin{aligned} p_I + p_{II} &= u_{AB} i_A + u_{CB} i_C = u_{AB} (i_{AB} - i_{CA}) - u_{BC} (i_{CA} - i_{BC}) = \\ &= u_{AB} i_{AB} + u_{BC} i_{BC} - (u_{AB} + u_{BC}) i_{CA} = u_{AB} i_{AB} + u_{BC} i_{BC} + u_{CA} i_{CA} = \\ &= p_{AB} + p_{BC} + p_{CA}. \end{aligned}$$

При переходе к средним мощностям получается, что сумма показаний ваттметров

$$P_I + P_{II} = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA},$$

т. е. равна мощности системы. Вывод справедлив и для звезды без нулевого провода, так как она может быть заменена эквивалентным треугольником.

Реактивная и полная мощности симметричной и одинаково нагруженной трехфазной системы равны суммам соответствующих мощностей всех фаз:

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta \sin \varphi_\phi, \quad S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3} U_\Delta I_\Delta.$$

В общем случае несимметричной и неодинаково нагруженной трехфазной системы суммирование реактивных и полных мощностей фаз не дает величин, характерных для нагрузки генератора в целом, как это было в однофазной цепи с одним источником энергии. Предлагаемые в литературе определения реактивной и полной мощностей трехфазной несимметричной и неодинаково нагруженной системы чисто условны и потому здесь не рассматриваются.

## § 12.5. Сравнение трехфазных и однофазной систем

Сопротивление линейных и нулевого проводов, соединяющих генератор и приемник, обычно мало по сравнению с сопротивлением фаз приемника, и выводы, сделанные по поводу независимости работы фаз при соединении звездой и треугольником, можно обобщить следующим образом:

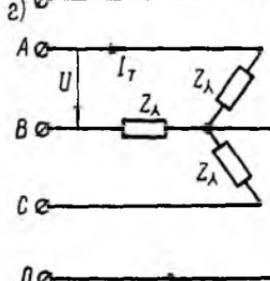
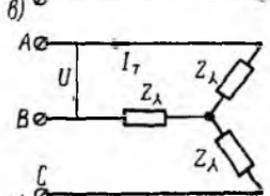
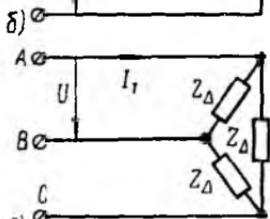
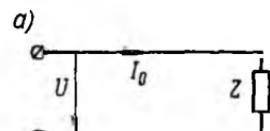


Рис. 12.18

1) в звезде с нулевым проводом и в треугольнике токи фаз практически мало зависят друг от друга и поэтому эти схемы следует применять при неодинаковой нагрузке фаз;

2) звезда без нулевого провода может применяться только при одинаковой нагрузке фаз.

Необходимо отметить, что схема соединений генератора и приемника может быть различной, и один из них может быть соединен треугольником, другой — звездой без нулевого провода.

Представляет интерес сравнение расхода металла с удельным сопротивлением  $\rho$  на провода однофазной и трехфазной линии передачи (рис. 12.18) той же мощности  $P$  на то же расстояние  $l$  при одинаковом  $\cos \varphi$  и том же к. п. д., т. е. тех же потерях в линии  $P_n = kP$ , где  $k$  — относительная потеря мощности, и одинаковом линейном напряжении  $U$ .

Для однофазной двухпроводной линии (рис. 12.18, а)  $P = UI_0 \cos \varphi$ ; отсюда ток  $I_0$ , потери  $P_n$  и сопротивление  $r_0$  одного провода:

$$I_0 = \frac{P}{U \cos \varphi},$$

$$P_n = kP = 2r_0 I_0^2, \quad r_0 = \frac{kP}{2I_0^2} = \frac{kU^2 \cos^2 \varphi}{2P}.$$

Следовательно, сечение  $s_0$  и объем  $V_0$  проводов соответственно равны:

$$s_0 = \rho \frac{l}{r_0} = 2 \frac{P \rho l}{kU^2 \cos^2 \varphi}, \quad V_0 = 2s_0 l = 4 \frac{P \rho l^2}{kU^2 \cos^2 \varphi}.$$

Отсюда видно, что формула для сечения двухпроводной линии переменного тока отличается от аналогичной формулы для линии

постоянного тока (см. § 3.3) наличием множителя  $\cos^2 \varphi$  в знаменателе, приводящему к тем большему увеличению расхода металла, чем ниже коэффициент мощности  $\cos \varphi$ .

Для трехфазной трехпроводной линии (рис. 12.18, б и в)  
 $P = \sqrt{3} U I_{\tau} \cos \varphi$  и аналогично

$$I_{\tau} = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi}, \quad P_{\pi} = kP = 3r_{\tau} I_{\tau}^2, \quad r_{\tau} = \frac{kP}{3I_{\tau}^2} = \frac{kU^2 \cos^2 \varphi}{P},$$

а сечение  $s_{\tau}$  и объем  $V_{\tau}$  проводов:

$$s_{\tau} = \rho \frac{l}{r_{\tau}} = \frac{P \rho l}{kU^2 \cos^2 \varphi}, \quad V_{\tau} = 3s_{\tau} l = 3 \frac{P \rho l^2}{kU^2 \cos^2 \varphi}.$$

В знаменателе этих выражений также присутствует множитель  $\cos^2 \varphi$ .

Из формул для  $s_0$  и  $s_{\tau}$  видна эффективность высокого напряжения и большого коэффициента мощности — сечения обратно пропорциональны квадратам этих величин. Вместе с тем очевидно, что стоимость изоляции проводов растет с ростом напряжения. В результате экономически оптимальное напряжение  $U$  оказывается тем выше, чем больше передаваемая мощность  $P$  и длина  $l$  линии.

Соотношение объемов металла линий: однофазной двухпроводной  $V_0$  и трехфазных — трехпроводной  $V_{\tau}$  и четырехпроводной с нулевым проводом половинного сечения  $V_{\tau N}$  (рис. 12.18, г) будет

$$V_0 : V_{\tau} : V_{\tau N} = 100 : 75 : 87,5.$$

Таким образом, при одинаковом линейном напряжении звезда без нулевого провода и треугольник, очевидно, дают одинаковый расход металла на линию передачи и экономию в 25% по сравнению с однофазной линией, а нулевой провод половинного сечения вызывает перерасход металла, но все же система остается легче однофазной на 12,5%.

Соединение звездой с нулевым проводом имеет важное преимущество: помимо трехфазных приемников, рассчитанных на линейное напряжение, оно позволяет включать однофазные приемники и на линейное, и на фазное напряжение.

Если приемники работают при одинаковом фазном напряжении, линейное напряжение звезды будет в  $\sqrt{3}$  раз больше, чем треугольника, что уменьшит расход металла в 3 раза.

Основным преимуществом трехфазной системы по сравнению с однофазной является возможность легко создавать вращающееся магнитное поле, используемое, в частности, в трехфазных асинхронных двигателях, наиболее простых по конструкции и в эксплуатации.

## § 12.6. Пульсирующее и вращающееся магнитные поля

Электрические индуктивные машины переменного тока в большинстве случаев имеют магнитопровод в виде двух коаксиальных цилиндров, набранных из стальных листов и разделенных воздушным

зором (рис. 12.19). Внешний цилиндр  $S$  является статором, внутренний  $R$  — ротором.

Если по обмотке статора, уложенной в его пазы и распределенной на части, например одной трети его окружности (рис. 12.19), будет проходить постоянный ток, магнитный поток, замыкающийся через статор, воздушный зазор и ротор будет постоян-

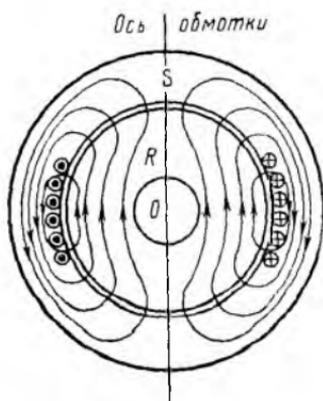


Рис. 12.19

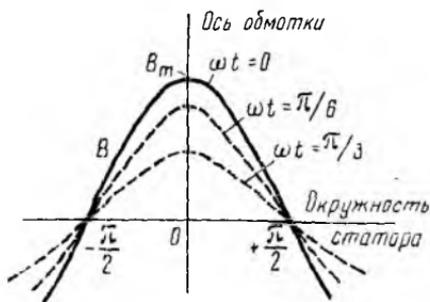


Рис. 12.20

ным. Приближенно магнитную индукцию можно считать распределенной по окружности статора по синусоидальному закону (сплошная линия на рис. 12.20); она имеет максимальные значения  $B_m$  по оси обмотки и равна нулю на нейтральной линии, перпендикулярной к оси обмотки. Такое синусоидально распределенное в зазоре машины поле можно условно изобразить

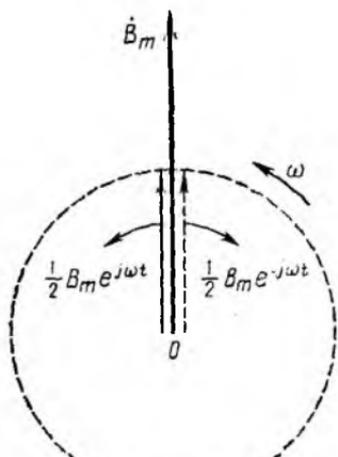


Рис. 12.21

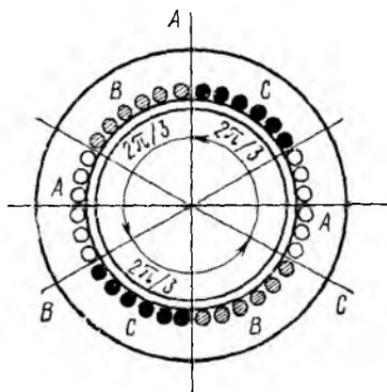


Рис. 12.22

постоянным вектором  $\vec{B}_m$  (рис. 12.21), аналогично тому, как ранее это было сделано для величин, изменяющихся по синусоиде во времени.

Если по обмотке статора пропускать переменный ток, синусоидальное распределение магнитного поля сохранится, но поле будет пульсирующим, т. е. изменяющимся во времени по синусоидальному закону (см. рис. 12.20). Принимая за начало счета времени момент, когда индукция по оси обмотки максимальна, пульсирующее

поле можно условно изобразить вектором  $\dot{B}_m \cos \omega t$ . Согласно формуле Эйлера,

$$\dot{B}_m \cos \omega t = \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\omega t}. \quad (12.2)$$

Это значит, что пульсирующее синусоидально распределенное поле может быть представлено в виде суммы двух также синусоидально распределенных полей  $\frac{1}{2} \dot{B}_m$ , постоянных во времени, но вращающихся с угловой скоростью  $\omega$  в разные стороны; последнее видно из противоположных знаков показателей степени множителей вращения. Поле  $\frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\omega t}$ , вращающееся в положительном направлении вращения векторов, называется п р я м ы м, поле  $\frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\omega t}$  — о б р а т н ы м. Вращающиеся векторы, условно изображающие эти поля, на рис. 12.21 показаны для момента начала счета времени.

Разложение пульсирующего поля на два вращающихся используется, например, в однофазных двигателях, где прямое поле, действуя на ротор, приводит его во вращение, а обратное поле экранируется.

В трехфазных машинах на статор наложены три обмотки, показанные в разрезе на рис. 12.22, занимающие каждая треть его окружности; следовательно, эти обмотки и их оси сдвинуты в пространстве на угол  $2\pi/3$ . Обмотки обтекаются токами, векторы которых образуют симметричную трехфазную систему. Тогда выражение для поля первой фазы  $A$  совпадает с выражением (12.2) при том же начале счета времени.

Пусть обмотка, обтекаемая током второй фазы  $B$ , т. е. током, отстающим от тока первой фазы на угол  $2\pi/3$ , сдвинута в пространстве вперед по направлению вращения прямого поля на тот же угол, что учитывается множителем  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ . Тогда выражение для поля фазы  $B$  получает вид:

$$\left[ \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right] e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

Аналогично записывается поле третьей фазы  $C$ , но так как она обтекается током, опережающим по фазе ток фазы  $A$  на угол  $2\pi/3$ , и сдвинута в пространстве на тот же угол назад, знаки всех углов  $2\pi/3$  изменяются на обратные.

Результирующее поле определяется наложением полей всех трех фаз:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\omega t} \right] + \left[ \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right] e^{j\frac{2\pi}{3}} + \\ & + \left[ \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2} \dot{B}_m e^{-j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)} \right] e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 1,5 \dot{B}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что все прямые поля трех обмоток арифметически складываются, тогда как обратные поля в сумме дают нуль и в машине возникает в р а щ а ю щ е с я поле, п о с т о я н н о е в о в р е м е н и. Амплитуда вращающегося поля в полтора раза превышает

амплитуду пульсирующего поля отдельных обмоток, а фаза совпадает с фазой прямого поля обмотки первой фазы  $A$ .

В трехфазных двигателях вращающееся поле также используется для приведения во вращение ротора; из-за постоянства мощности в трехфазных системах (см. § 12.4) и, следовательно, вращающего момента, а также отсутствия обратного поля эти двигатели имеют значительное преимущество перед однофазными.

### § 12.7. Основы метода симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих, предложенный Фортеस्कью, позволяет сравнительно просто рассчитывать несимметричные, в частности, аварийные режимы в трехфазных системах и машинах. До предложения этого метода для таких расчетов надо было решать дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами или оперировать с сопротивлениями, зависящими от токов.

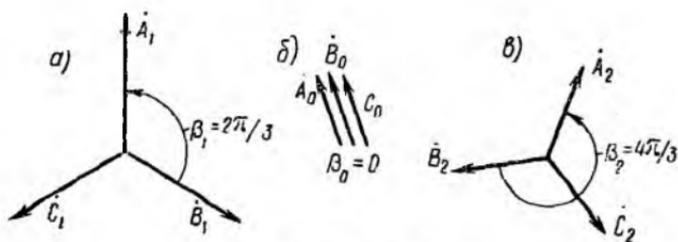


Рис. 12.23

В общем случае симметричной трехфазной системой векторов называется система, состоящая из трех равных по величине векторов, причем каждый вслед идущий вектор сдвинут относительно предыдущего на угол  $\beta_k = k2\pi/3$ , где  $k$  — любое целое число. Система  $\dot{A}_1, \dot{B}_1, \dot{C}_1$  (рис. 12.23, а), у которой угол сдвига между вслед идущими векторами  $\beta_1 = 2\pi/3$ , имеет прямой порядок следования фаз в направлении вращения векторов и называется прямой системой. Симметричные системы линейных и фазных напряжений и токов, рассмотренные выше, были именно прямыми системами. Система  $\dot{A}_2, \dot{B}_2, \dot{C}_2$  (рис. 12.13, в), в которой угол сдвига между вслед идущими векторами  $\beta_2 = 2 \cdot 2\pi/3 = 4\pi/3$ , имеет обратный порядок следования фаз и называется обратной системой. Система векторов  $\dot{A}_0, \dot{B}_0, \dot{C}_0$ , совпадающих по фазе ( $\beta_0 = 3 \cdot 2\pi/3 = 2\pi$ , т. е.  $\beta_0 = 0$ ) называется нулевой системой (рис. 12.23, б).

Система векторов, сдвинутых по фазе на угол  $4 \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ , является также прямой системой и т. д. Таким образом, все многообразие симметричных трехфазных систем сводится к трем системам, изображенным на рис. 12.23.

Пользуясь оператором  $a = e^{j \frac{2\pi}{3}}$  поворота вектора на угол  $2\pi/3$  в положительном направлении и приняв за основные вектор  $\dot{A}_1$  прямой

системы, вектор  $\dot{A}_2$  обратной системы и вектор  $\dot{A}_0$  нулевой системы, через них можно выразить остальные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{B}_1 &= a^2 \dot{A}_1, & \dot{B}_2 &= a \dot{A}_2, & \dot{B}_0 &= \dot{A}_0, \\ \dot{C}_1 &= a \dot{A}_1, & \dot{C}_2 &= a^2 \dot{A}_2, & \dot{C}_0 &= \dot{A}_0. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Пусть задана несимметричная система трех векторов  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$ ,  $\dot{C}$ . Далее доказывается, что каждый вектор этой системы может быть представлен в виде суммы трех векторов, являющихся составляющими прямой, обратной и нулевой систем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \\ \dot{B} &= \dot{B}_0 + \dot{B}_1 + \dot{B}_2, \\ \dot{C} &= \dot{C}_0 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Подстановка уравнений (12.3) в уравнения (12.4) дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2, \\ \dot{B} &= \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2, \\ \dot{C} &= \dot{A}_0 + a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Система уравнений (12.5) решается относительно  $\dot{A}_0$ ,  $\dot{A}_1$ ,  $\dot{A}_2$  однозначно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_0 &= 1/3 (\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}), \\ \dot{A}_1 &= 1/3 (\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}), \\ \dot{A}_2 &= 1/3 (\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C}). \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Отсюда и следует, что несимметричную систему векторов можно разложить на три симметричные системы.

Из первого уравнения системы (12.6) видно, что если сумма векторов несимметричной системы равна нулю, будут равны нулю и векторы нулевой системы. Следовательно, *несимметричные системы линейных напряжений и линейных токов при отсутствии нулевого провода содержат только прямую и обратную составляющие.*

Определение симметричных составляющих несимметричной системы векторов по выражениям (12.6) может быть выполнено также графически. Пусть задана несимметричная система векторов фазных напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$  (рис. 12.24, а). Во все три суммы напряжений (см. систему 12.6) вектор  $\dot{U}_A$  входит без изменений, а векторы  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  во второй и третьей суммах повернуты на угол  $2\pi/3$  или  $4\pi/3$ . Следует начертить вектор  $\dot{U}_B$ , из его конца (т. е. стрелки) — вектор  $\dot{U}_A$ , а из конца  $\dot{U}_A$  — вектор  $\dot{U}_C$  (рис. 12.24, б). Если вектор  $\dot{U}_B$  повернуть на угол  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$  вокруг его конца, примыкающего к началу вектора  $\dot{U}_A$ , а вектор  $\dot{U}_C$  — вокруг начала, совпадающего с концом вектора  $\dot{U}_A$ , суммы векторов по выражениям (12.6) будут

равны утроенным искомым векторам:

$$\begin{aligned} \dot{U}_B + \dot{U}_A + \dot{U}_C &= 3\dot{U}_{A0}, & a\dot{U}_B + \dot{U}_A + a^2\dot{U}_C &= 3\dot{U}_{A1}, \\ a^2\dot{U}_B + \dot{U}_A + a\dot{U}_C &= 3\dot{U}_{A2}. \end{aligned}$$

Далее очевидным построением определяются все векторы трех симметричных систем.

Аналогично производится разложение несимметричной системы токов.

Симметричные составляющие несимметричной трехфазной системы напряжений и токов могут быть определены экспериментально. Например, для измерения нулевой составляющей системы фазных напряжений надо однообразно включить на фазные напряжения

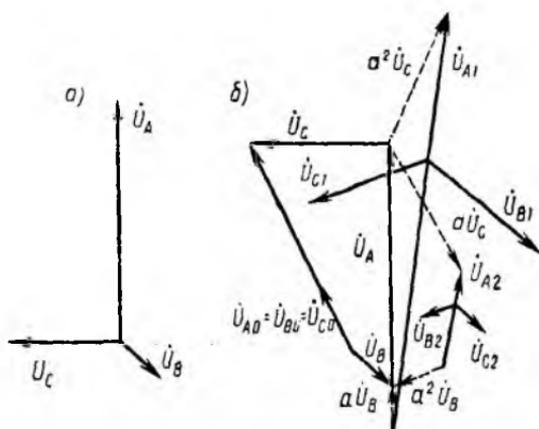


Рис. 12.24

трансформаторы малой мощности, вторичные обмотки которых и вольтметр соединяются последовательно (рис. 12.25). Тогда, считая для простоты, что у трансформаторов коэффициент трансформации напряжения равен единице, суммарное напряжение, измеряемое вольтметром,

$$\dot{U} = \dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 3\dot{U}_0,$$

т. е. пропорционально напряжению нулевой системы.

Для измерения напряжения прямой последовательности (рис. 12.26) транс-

форматоры включаются на одинаковые по величине полные сопротивления  $z$  — трансформатор фазы  $A$  на активное сопротивление

$Z_A = r$ , фазы  $B$  на активно-индуктивное сопротивление  $Z_B = ze^{j\frac{\pi}{3}}$ ,

фазы  $C$  — на активно-емкостное сопротивление  $Z_C = ze^{-j\frac{\pi}{3}}$ . Чтобы вторичные токи трансформаторов  $B$  и  $C$  были сдвинуты по фазе относительно напряжений  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  на дополнительные до  $\pi$  углы — соответственно  $+\frac{2\pi}{3}$  и  $-\frac{2\pi}{3}$ , что соответствует умножению на операторы

$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$  и  $a^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ , вторичные обмотки этих трансформаторов включаются так, как показано на рис. 12.26.

Цепи нагрузок всех трех трансформаторов соединяются параллельно и замыкаются на амперметр. Последний измеряет суммарный ток

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_A}{z} + a\frac{\dot{U}_B}{z} + a^2\frac{\dot{U}_C}{z} = \frac{\dot{U}_1}{z},$$

пропорциональный напряжению  $U_1$  системы прямой последовательности.

Если поменять местами нагрузки фаз  $B$  и  $C$ , суммарный ток

$$i_2 = \frac{\dot{U}_A}{z} + a^2 \frac{\dot{U}_B}{z} + a \frac{\dot{U}_C}{z} = \frac{\dot{U}_2}{z}$$

будет пропорционален напряжению  $U_2$  системы обратной последовательности.

Рассмотренные схемы называются фильтрами симметричных составляющих. Они применяются в схемах защиты трехфазных энергетических систем от аварийных режимов, вызывающих несимметрию токов и напряжений отдельных фаз.

Разложение на симметричные составляющие позволяет весьма просто решать задачи на расчет трехфазных цепей при одинаковой

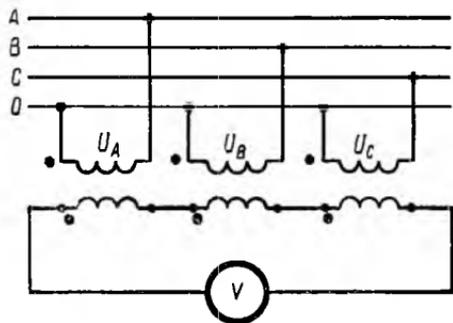


Рис. 12.25

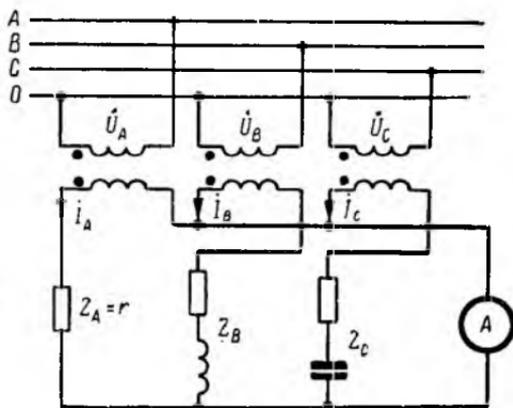


Рис. 12.26

нагрузке фаз с взаимной индукцией между ними при несимметричной системе напряжений, что широко используется в теории электрических машин. Система напряжений разлагается на симметричные составляющие, для каждой из них находят токи фаз и применяют метод наложения. При этом *сопротивление фаз приемника для каждой составляющей может быть различным*. Например, для цепи рис. 12.11, соединенной в звезду с нулевым проводом, сопротивление фаз для нулевой системы напряжений (см. § 12.2):

$$Z_0 = r + j\omega(L + 2M),$$

а для прямой и обратной составляющих, являющихся симметричными трехфазными системами, сопротивления

$$Z_1 = Z_2 = r + j\omega(L - M)$$

только для статических устройств, например для трансформаторов. Во вращающихся машинах прямая система токов создает магнитное поле, вращающееся в одном направлении с ротором, а обратная система токов — в противоположном; это приведет к неравенству  $Z_1 \neq Z_2$ . Таким образом, в общем случае

$$Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2.$$

После определения комплексных токов каждой составляющей они пофазно суммируются и дают систему действительных токов фаз.

При неодинаковой нагрузке фаз приемника расчет усложняется, так как тогда каждая из симметричных составляющих системы токов зависит от всех составляющих систем напряжений. Эти задачи рассматриваются в литературе, посвященной расчету аварийных режимов в трехфазных электрических сетях и системах.

Можно показать, что в самом общем случае несимметрии *средняя мощность всей цепи равна сумме средних мощностей нулевой, прямой и обратной составляющих*:

$$P = 3U_0 I_0 \cos \varphi_0 + 3U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3U_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

## ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

### ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

#### § 13.1. Разложение периодических функций в ряд Фурье

До сих пор рассматривались линейные цепи при постоянных и синусоидальных напряжениях и токах; синусоидальная форма кривых позволила применить векторные диаграммы и символический метод, весьма упростившие расчет цепей.

В электротехнике стремятся к синусоидальной форме периодических кривых, так как большинство устройств при этом работает лучше, однако на практике кривые несколько отличаются от синусоид. В устройствах электронной и вычислительной техники и во многих других по принципу их действия напряжения и токи должны быть несинусоидальными. В этих случаях можно использовать изложенные методы расчета цепей при постоянных и синусоидальных напряжениях и токах, если разложить периодические несинусоидальные кривые в ряд Фурье.

Как известно из математики, периодическая функция  $f(\omega t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть приближенно представлена тригонометрическим рядом  $F(\omega t)$ . Этот ряд состоит из суммы постоянной составляющей  $C_0$  и синусоид разных частот  $k\omega$ , где  $k$  — целые числа, начиная с единицы:

$$f(\omega t) \approx F(\omega t) = C_0 + \sum_1^n A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Ряд Фурье может быть записан в другой форме:

$$\begin{aligned} F(\omega t) &= C_0 + \sum_1^n (A_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + A_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t) = \\ &= C_0 + \sum_1^n B_{km} \sin k\omega t + \sum_1^n C_{km} \cos k\omega t, \end{aligned}$$

где

$$B_{km} = A_{km} \cos \psi_k \quad \text{и} \quad C_{km} = A_{km} \sin \psi_k.$$

Как было доказано Фурье, для получения наименьшей среднеквадратичной ошибки между действительными значениями функций  $f(\omega t)$  и соответствующими значениями ряда  $F(\omega t)$

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(\omega t) - F(\omega t)]^2 d\omega t},$$

коэффициенты ряда необходимо вычислять следующим образом:

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t \quad \text{и} \quad C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d\omega t.$$

Вычислив  $B_{km}$  и  $C_{km}$ , можно найти амплитуды  $A_{km}$  и начальные фазы  $\psi_k$  синусоид, называемых гармониками:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{C_{km}}{B_{km}}.$$

Ошибка  $\Delta$  уменьшается с увеличением числа  $n$  членов ряда, стремясь к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Постоянная составляющая  $C_0$  ряда является, очевидно, средним значением функции за период:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) d\omega t.$$

Следует отметить, что во всех приведенных интегралах пределы интегрирования можно было бы взять от 0 до  $2\pi$ .

Таким образом, периодическую несинусоидальную функцию времени, изображенную, например, на рис. 13.1, можно рассматривать как дискретные частотные спектры амплитуды  $A_{km}(k\omega)$  и начальной фазы  $\psi_k(k\omega)$ . Графически эти спектры изображаются в виде двух характеристик — амплитудно-частотной (рис. 13.2, а) и фазо-частотной (рис. 13.2, б).

Когда функция задана графически, разложение в ряд можно выполнить приближенно, заменив интегрирование суммированием подынтегральных выражений для конечного числа ординат  $f(\omega t)$  кривой.

Для  $n$ , равноотстоящих друг от друга на  $\frac{2\pi}{n}$  ординат (см. рис. 13.1), следует подставить  $\frac{2\pi}{n}$  вместо  $d\omega t$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_0 &\approx \frac{1}{n} \sum_1^n f(\omega t), & B_{km} &\approx \frac{2}{n} \sum_1^n f(\omega t) \sin k\omega t, \\ C_{km} &\approx \frac{2}{n} \sum_1^n f(\omega t) \cos k\omega t. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Заданная графически кривая может быть также разложена в ряд Фурье с помощью механических гармоникоанализаторов, основанных на том, что при обводе анализируемой кривой штифтом этого прибора точки его сменной шестерни, соответствующей данному номеру гармоники, описывают замкнутые траектории, площадь внутри которых пропорциональна коэффициентам  $B_{km}$  и  $C_{km}$  этой гармоники. Периодические напряжения и токи могут быть раз-

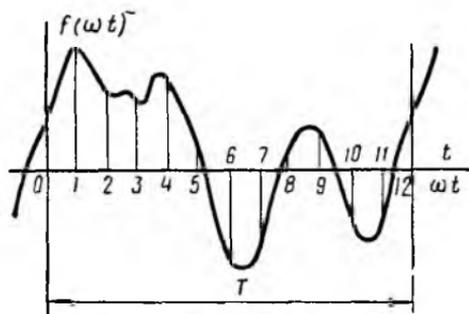


Рис. 13.1

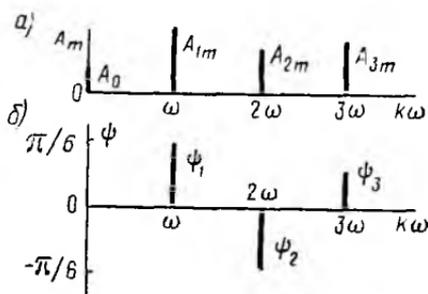


Рис. 13.2

ложены непосредственно электрическими гармоникоанализаторами, основанными на создании в их схеме резонансов для отдельных гармоник.

На практике часто встречаются симметричные кривые; аналитическое разложение их упрощается.

При симметрии относительно оси абсцисс (рис. 13.3) значения ординат кривой повторяются через половину периода с обратным знаком:

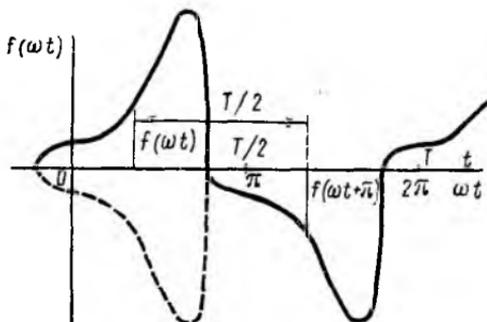


Рис. 13.3

Очевидно, что при сдвиге начала отсчета времени (начала координат) рассматриваемый вид симметрии сохраняется.

В соответствии с приведенным соотношением в первую форму ряда Фурье для подобных кривых могут входить только те гармоники, для которых

$$A_{km} \sin \left[ k\omega \left( t + \frac{T}{2} \right) + \psi_k \right] = A_{km} \sin (k\omega t + k\pi + \psi_k) = -A_{km} \sin (k\omega t + \psi_k),$$

а это имеет место только при нечетном  $k$ . Следовательно, кривые, обладающие указанной симметрией, могут содержать только нечетные

гармоники и не содержат четных гармоник и постоянной составляющей. В этом случае кривую полностью характеризует один ее полупериод, и для определения коэффициентов разложения достаточно произвести интегрирование за полупериод:

$$B_{km} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \, d\omega t, \quad C_{km} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \, d\omega t.$$

Приближенные формулы (13.1) сохраняют свой вид, но теперь  $n$  — число ординат для полупериода.

На практике часто встречаются кривые, симметричные относительно оси абсцисс, вид которых полностью характеризуется четвертью ее периода (рис. 13.4). Если выбрать начало координат в точке  $O_1$ , отно-

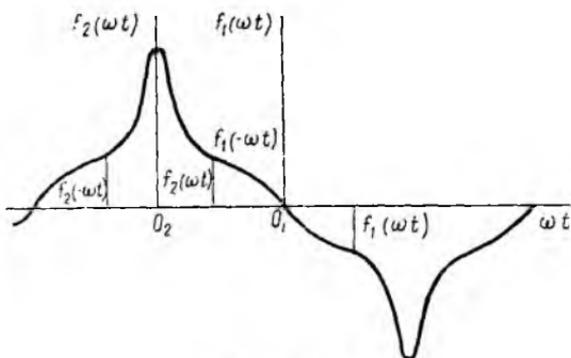


Рис. 13.4

сительно которой ординаты, соответствующие одинаковым по величине, но разным по знаку абсциссам, также равны между собой, но обратны по знаку:

$$f_1(\omega t) = -f_1(-\omega t),$$

то во вторую форму ряда Фурье для подобных кривых могут входить только те составляющие, для которых

$$B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t = -B_{km} \sin(-k\omega t) - C_{km} \cos(-k\omega t).$$

Так как в отличие от синусов косинусы не изменяют своего знака при изменении знака аргумента и, кроме того, рассматриваемая кривая симметрична относительно оси абсцисс, в ней не содержатся ни косинусы, ни постоянная составляющая, а могут содержаться только нечетные синусы:

$$F_1(\omega t) = B_{1m} \sin \omega t + B_{3m} \sin 3\omega t + B_{5m} \sin 5\omega t + \dots$$

Если для подобной кривой сдвинуть начало координат на  $\frac{\pi}{2}$  в точку  $O_2$  (см. рис. 13.4), кривая будет содержать только нечетные косинусы:

$$F_2(\omega t) = C_{1m} \cos \omega t + C_{3m} \cos 3\omega t + C_{5m} \cos 5\omega t + \dots$$

В этих случаях для определения коэффициентов разложения интегрирование достаточно произвести за четверть периода и умножить результат на  $4/\pi$ . Приближенные формулы (13.1) сохраняют свой вид, но теперь  $n$  — число ординат для четверти периода.

При сдвиге начала координат на угол, отличный от  $\pi/2$ , разложение этого вида кривых содержит и нечетные синусы, и нечетные косинусы.

Ряды Фурье для наиболее распространенных в электротехнике периодических функций даны в приложении 3.

### § 13.2. Действующее значение и мощность при несинусоидальных напряжениях и токах

Действующее значение несинусоидального тока определяется, как и для синусоидального тока, по равенству средней мощности переменного тока и мощности постоянного тока в том же сопротивлении  $r$ :

$$rI^2 = \frac{1}{T} \int_0^T ri^2 dt,$$

т. е. действующее значение периодического переменного тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

является его среднеквадратичным значением за период. После подстановки в это выражение значения тока  $i$  в виде ряда Фурье:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \dots + I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots]^2 dt}$$

интеграл может быть представлен в виде суммы интегралов вида:

$$1) \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt = I_0^2,$$

$$2) \frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} I_{km}^2 [1 - \cos 2(k\omega t + \psi_k)] dt = \\ = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2,$$

$$3) \frac{1}{T} \int_0^T 2I_0 I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) dt = 0,$$

$$4) \frac{1}{T} \int_0^T 2I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) I_{qm} \sin(q\omega t + \psi_q) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{km} I_{qm} \times \\ \times \{ \cos[(k-q)\omega t + \psi_k - \psi_q] - \cos[(k+q)\omega t + \psi_k + \psi_q] \} dt = 0.$$

Следовательно,

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

т. е. действующее значение тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей  $I_0$  и действующих значений токов всех гармоник, и не зависит от их начальных фаз  $\psi_k$ .

По аналогии действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots}$$

Важной характеристикой кривой является среднее значение ее абсолютной величины за период

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt.$$

Например, для синусоиды

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_m |\sin \omega t| dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} U \approx 0,9U.$$

Для характеристики кривых без постоянной составляющей пользуются несколькими коэффициентами. Коэффициент искажения  $k_u$  равен отношению действующего значения первой гармоники к действующему значению всей кривой:  $k_u = \frac{U_1}{U}$ ; в случае синусоиды  $k_u = 1$ . Коэффициент амплитуды  $k_a$  равен отношению максимального значения  $U_m$  к действующему  $U$ :  $k_a = \frac{U_m}{U}$ ; для синусоиды  $k_a = \sqrt{2}$ . Коэффициент формы равен отношению действующего значения  $U$  к среднему значению  $U_{\text{ср}}$  кривой:  $k_f = \frac{U}{U_{\text{ср}}}$ ; для синусоиды  $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$ .

Мгновенная мощность  $p$  после разложения напряжения  $u$  и тока  $i$  в ряды Фурье получает вид:

$$p = ui = (U_0 + \sum u_k) (I_0 + \sum i_k) = U_0 I_0 + \sum u_k i_k + \sum U_0 i_k + \sum u_k I_0 + \sum u_k i_q.$$

Таким образом,  $p$  имеет постоянную составляющую  $U_0 I_0$  и синусоидальные составляющие  $u_k i_k$ , имеющие частоту  $2k\omega$  и среднее значение  $U_k I_k \cos \varphi_k$ . Кроме того, в кривой  $p$  содержатся синусоидальные составляющие вида  $U_0 i_k$  и  $u_k I_0$ , имеющие частоту  $k\omega$ , и вида  $u_k i_q$ , представляющие собой сумму синусоидальных функций частоты  $(k - q)\omega$  и  $(k + q)\omega$ , среднее значение которых равно нулю. Следовательно, кривая мгновенной мощности имеет весьма сложную форму, но средняя мощность

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots$$

равна сумме средних мощностей, создаваемых одноименными гармониками напряжения и тока.

Если при синусоидальном напряжении и токе полная мощность  $S = UI$  и реактивная мощность  $Q = UI \sin \varphi$  имели определенный физический смысл как амплитуды синусоид соответствующих мгновенных мощностей (см. § 7.1), то при сложной форме кривых строгие определения  $S$  и  $Q$  дать невозможно, и они могут быть чисто условными. При отсутствии постоянных составляющих общепринято определение полной мощности как произведения действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI = \sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots)} \sqrt{(I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots)}$$

Если по аналогии с активной мощностью под реактивной мощностью понимать алгебраическую сумму реактивных мощностей отдельных гармоник

$$Q' = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots,$$

можно показать, что

$$S > \sqrt{P^2 + Q'^2};$$

тогда вводят понятие мощности искажения  $T$ , определяемой из соотношения

$$S = \sqrt{P^2 + Q'^2 + T^2}.$$

В приближенных расчетах при отсутствии в кривых напряжения и тока постоянных составляющих иногда оперируют с эквивалентными синусоидами, имеющими те же действующие значения напряжения  $U$  и тока  $I$ , что и заданные кривые. Эти синусоиды должны быть сдвинуты на угол  $\varphi$ , при котором средняя мощность будет той же, т. е.  $UI \cos \varphi = P$ . Тогда  $\cos \varphi$  называют коэффициентом мощности, а реактивную мощность определяют из треугольника мощностей как

$$Q'' = \sqrt{S^2 - P^2} = UI \sin \varphi.$$

### § 13.3. Расчет линейных цепей при несинусоидальных напряжениях и токах

Если напряжение, приложенное к цепи, имеет сложную форму:

$$u = \sum U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

то ток цепи с активным сопротивлением

$$i_a = \frac{u}{r} = \sum \frac{U_{km}}{r} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

ток цепи с индуктивностью  $L$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt = \sum \frac{U_{km}}{k\omega L} \sin\left(k\omega t + \psi_k - \frac{\pi}{2}\right),$$

ток цепи с емкостью  $C$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \sum \frac{U_{km}}{\frac{1}{k\omega C}} \sin \left( k\omega t + \psi_k + \frac{\pi}{2} \right).$$

Отсюда видно, что каждой гармонике напряжения соответствует своя гармоника тока, вычисляемая независимо от других гармоник.

При пренебрежении поверхностным эффектом активное сопротивление для всех гармоник одинаково. Индуктивное сопротивление  $k\omega L$  растет, а емкостное  $\frac{1}{k\omega C}$  убывает пропорционально порядку гармоники.

Таким образом, для расчета сложных линейных цепей может быть применен метод наложения: после разложения кривых заданных напряжений и токов в ряд Фурье они записываются в его первой форме и задача решается для каждой гармоники в отдельности; при этом сопротивления ветвей для каждой гармоники в общем случае будут различными. Задачи для отдельных гармоник решаются однотипно и при их решении может быть использован весь аппарат теории синусоидальных токов — векторные диаграммы, символический метод и т. д. Затем можно произвести наложение решений для мгновенных значений отдельных гармоник — напряжений и токов каждой ветви и вычислить их действующие значения и мощность.

Например, в цепи, состоящей из последовательного соединения сопротивления  $r$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (см. рис. 7.1, а), полное сопротивление и угол сдвига фаз для гармоники порядка  $k$  будут:

$$z_k = \sqrt{r^2 + \left( k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \right)^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{r}.$$

Для одной из гармоник эта цепь может оказаться в резонансе; тогда, если порядок этой гармоники  $n$ , то

$$n\omega L = \frac{1}{n\omega C}, \quad z_n = r, \quad \varphi_n = 0.$$

Для остальных гармоник:

при  $k < n$

$$k\omega L < \frac{1}{k\omega C}, \quad z_k > r, \quad \varphi_k < 0;$$

при  $k > n$

$$k\omega L > \frac{1}{k\omega C}, \quad z_k > r, \quad \varphi_k > 0.$$

Значение индуктивности, при которой происходит резонанс,

$$L_n = \frac{1}{n^2 \omega^2 C}.$$

Поэтому если в цепи, питаемой несинусоидальным напряжением, увеличивать  $L$ , начиная от нуля, в ней будет происходить резонанс

на отдельных гармониках, начиная с высшей. При достаточно малом  $r$  ток резонансной гармоники будет относительно большим, и кривая  $I(L)$  зависимости действующего значения тока от индуктивности, так как  $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 \dots}$ , будет иметь ряд максимумов, соответствующих отдельным гармоникам напряжения. Аналогичная зависимость получится и при изменении емкости.

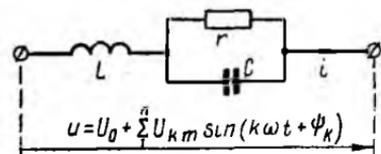


Рис. 13.5

Для расчета более сложной цепи при заданном в виде ряда Фурье напряжении или токе, например изображенной на рис. 13.5, целесообразно применять символический метод. Решая эту задачу методом преобразования, сначала подсчитывают комплексное сопротивление всей цепи для отдельных гармоник по заданным  $r$ ,  $L$  и  $C$  и основной частоте  $\omega$ ; для постоянной составляющей оно равно  $r$ , для гармоники  $k$

$$Z_k = jk\omega L + \frac{r \left( -j \frac{1}{k\omega C} \right)}{r - j \frac{1}{k\omega C}} = jk\omega L + \frac{r - jkr^2\omega C}{1 + (kr\omega C)^2}.$$

Затем по заданным комплексам гармоник напряжения всей цепи вычисляются комплексы  $I_k = \frac{\dot{U}_k}{Z_k}$  гармоник тока всей цепи, а после этого — комплексы гармоник напряжения правого участка

$$\dot{U}_{\text{пр } k} = \frac{r - jkr^2\omega C}{1 + (kr\omega C)^2} I_k$$

и токов в разветвлении. От символической записи легко перейти к мгновенным значениям для отдельных гармоник и к мгновенному значению всей величины — сумме гармоник, а также к действующему значению.

Средняя (активная) мощность рассматриваемой цепи равна  $rI_a^2$ , где  $I_a$  — действующее значение тока ветви с сопротивлением  $r$ .

### § 13.4. Влияние параметров цепи на форму кривой напряжения или тока. Резонансные фильтры

Гармоники тока  $i_n$  цепи с сопротивлением  $r$ , независящим от частоты, пропорциональны одноименным гармоникам напряжения и совпадают с ними по фазе; следовательно, результирующие кривые напряжения и тока  $i_n$  будут подобны (рис. 13.6).

Отношение амплитуды тока гармоники порядка  $k$  и амплитуды тока основной гармоники цепи с индуктивностью  $L$ :

$$\frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{U_{km}}{k\omega L} \cdot \frac{U_{1m}}{\omega L} = \frac{1}{k} \frac{U_{km}}{U_{1m}}$$

будет в  $k$  раз меньше отношения амплитуд гармоник напряжения. Следовательно, роль высших гармоник в кривой тока будет меньшей,

ем в кривой напряжения, и кривая индуктивного тока  $i_L$  будет ближе к синусоиде, чем кривая напряжения (рис. 13.6).

Отношение амплитуд гармоник тока цепи с емкостью  $C$ :

$$\frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{k\omega C U_{km}}{\omega C U_{1m}} = k \frac{U_{km}}{U_{k1}}$$

удет в  $k$  раз больше отношения амплитуд гармоник напряжения. Следовательно, роль высших гармоник в кривой тока будет больше, чем в кривой напряжения, и кривая емкостного тока  $i_C$  будет больше отличаться от синусоиды, чем кривая напряжения.

Свойство цепей переменного тока изменять форму кривой используется в электрических фильтрах.

Г-образный фильтр (рис. 13.7) предназначен для уменьшения переменной составляющей в напряжении и токе приемников, питаемых от электрических генераторов постоянного тока и выпрямителей, которые дают на выходе не постоянное, а пульсирующее напряжение (рис. 13.8).

Считая в первом приближении эти пульсации синусоидальными, форму кривой характеризуют коэффициентом пульсации  $k_p$ , равным отношению максимального значения переменной слагающей  $U_m$  напряжения к среднему его значению  $U_0$ , т. е.  $k_p = \frac{U_m}{U_0}$ .

Пренебрегая активным сопротивлением катушки фильтра и считая, что сопротивление конденсатора  $\frac{1}{\omega C}$  во много раз меньше сопротивления  $Z$  приемника, можно пренебречь переменной составляющей тока приемника и сделать расчет для холостого хода.

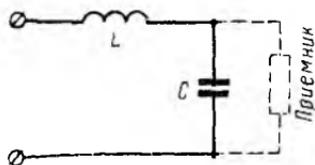


Рис. 13.7

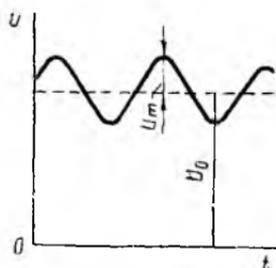


Рис. 13.8

Постоянные составляющие напряжения и тока сохраняются, так как для них сопротивление катушки равно нулю, а конденсатора — бесконечности. Амплитуда переменной составляющей напряжения на конденсаторе, а следовательно, и на приемнике

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = \frac{1}{\omega C} \frac{U_m}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{\omega^2 LC - 1}$$

Поэтому коэффициент пульсации напряжения приемника

$$k_{п} = \frac{U'_m}{U_0} = \frac{U_m}{(\omega^2 LC - 1)U_0} = \frac{k_n}{\omega^2 LC - 1}$$

т. е. уменьшится в  $\omega^2 LC - 1$  раз по сравнению с коэффициентом пульсации  $k_n$  у генератора; для высших гармоник фильтр будет уменьшать пульсации еще в большей степени.

Если сглаживающее действие одного Г-образного элемента недостаточно, можно включить последовательно несколько ступеней.

Для *ослабления* какой-либо гармоники в кривой тока по сравнению с кривой входного напряжения последовательно с приемником можно включить фильтр с параллельным соединением катушки индуктивности и конденсатора настроенных в резонанс на эту гармонику так как сопротивление фильтра для нее будет наибольшим.

Для *выделения* какой-либо гармоники в кривой тока по сравнению с кривой входного напряжения последовательно с приемником можно включить фильтр с последовательным соединением катушки индуктивности и конденсатора, настроенных в резонанс на эту гармонику, так как сопротивление фильтра для нее будет наименьшим.

На рис. 13.9 изображена схема фильтра, предназначенного для выделения гармоники порядка  $q$  и ослабления гармоники порядка  $s$ . В контуре  $bc$  должен иметь место резонанс токов для гармоники порядка  $s$ :

$$\frac{1}{s\omega L_2} = s\omega C_2,$$

а в участке цепи  $ac$  — резонанс напряжений для гармоники порядка  $q$ :

$$jq\omega L_1 + \frac{jq\omega L_2 \left( -j \frac{1}{q\omega C_2} \right)}{jq\omega L_2 - j \frac{1}{q\omega C_2}} = 0,$$

откуда

$$L_1 = \frac{L_2}{q^2\omega^2 L_2 C_2 - 1}.$$

### § 13.5. Высшие гармоники в трехфазных цепях

Здесь рассматривается случай, когда причиной появления высших гармоник в кривых напряжений и токов трехфазных цепей является источник электрической энергии, фазные э. д. с. которого несинусоидальны. Так как трехфазные генераторы имеют симметричное устройство, кривые их э. д. с. симметричны относительно оси абсцисс и поэтому содержат только нечетные гармоники.

Сложная форма кривых э. д. с. и токов в трехфазных системах как правило, ухудшает работу электродвигателей и других приемников, вызывает помехи в близлежащих линиях связи и т. п.

Пусть трехфазная цепь симметрична, т. е. кривые э. д. с. и, соответственно, токов всех трех фаз имеют одинаковую форму и лишь сдвинуты во времени на треть периода всей кривой. В этом случае одноименные гармоники всех трех фаз одинаковы по амплитуде, но сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол  $\beta_k = k \cdot 2\pi/3$ , где  $k$  — номер гармоники. Следовательно, первые гармоники сдвинуты на угол  $2\pi/3$ , третьи на  $3 \cdot 2\pi/3$ , т. е. совпадают по фазе, пятые на  $(5-1) 2\pi/3$ , что эквивалентно сдвигу на  $-2\pi/3$ , седьмые на  $(6+1) 2\pi/3$ , т. е. на  $2\pi/3$  и т. д. Поэтому гармоники 1, 7, 13, ... отдельных фаз, сдвинутые по фазе на угол  $2\pi/3$ , образуют прямые системы, как показано на рис. 13.10, а для первых гармоник э. д. с. трехфазной системы. Гармоники 5, 11, 17, ..., сдвинутые по фазе на угол  $-2\pi/3$ , образуют обратные системы (рис. 13.10, б для пятых гармоник). Гармоники 3, 9, 15, ..., кратные трем, совпадают по фазе и, следо-

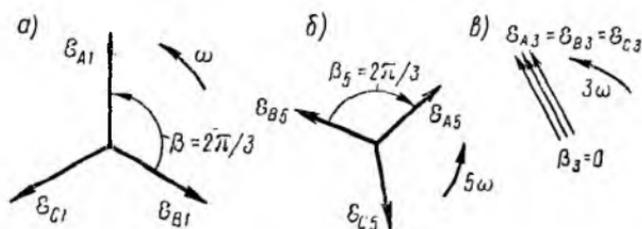


Рис. 13.10

вательно, образуют нулевые системы (рис. 13.10, в для третьих гармоник).

Не следует смешивать только что рассмотренные системы с симметричными составляющими несимметричной трехфазной цепи при синусоидальном токе (см. § 12.7); там векторы раскладываются на прямую, обратную и нулевую системы одной и той же частоты, а здесь же число систем каждого вида не ограничено, и каждая система имеет свою частоту. Эти системы имеют следующие свойства, вытекающие из рис. 13.10: 1) сумма векторов прямой и обратной систем равна нулю, нулевой системы — утроенному вектору; 2) разность двух векторов в прямой и обратной системах по величине равна вектору, умноженному на  $\sqrt{3}$ , в нулевой системе — нулю. Отсюда вытекает ряд важных свойств трехфазных цепей с напряжениями и токами сложной формы.

Если трехфазный генератор, фазные э. д. с. которого содержат все три вида гармоник, соединен звездой, гармоники нулевой системы  $e_3, e_9, e_{15}, \dots$  выпадают из линейных э. д. с., равных разности фазных, а следовательно, и из линейных напряжений. Тогда действующие значения фазных и линейных э. д. с. будут соответственно равны:

$$e_{\phi} = \sqrt{e_1^2 + e_5^2 + e_7^2 + e_{11}^2 + \dots},$$

$$e_{\lambda} = \sqrt{3(e_1^2 + e_5^2 + e_7^2 + e_{11}^2 + \dots)},$$

их отношение  $\frac{e_{\lambda}}{e_{\phi}} < \sqrt{3}$ .

Если генератор соединен треугольником, его фазы образуют замкнутый контур, в котором суммируются э. д. с. фаз. Прямые и обратные системы э. д. с. в сумме дадут нуль, сумма гармоник э. д. с. нулевых систем, равная  $3(e_3 + e_9 + e_{15} + \dots)$ , вызывает ток, потери и падение напряжения во внутреннем сопротивлении контура, в точности равно этой э. д. с. В результате в фазных напряжениях генератора, равных в схеме треугольника линейным напряжениям, гармоники нулевой системы будут также отсутствовать.

При соединении генератора и приемника треугольником или звездой без нулевого провода линейные токи трехпроводной линии также не могут содержать гармоник, кратных трем, так как по первому закону Кирхгофа сумма линейных токов должна быть равна нулю.

Это ограничение отсутствует при наличии нулевого провода (рис. 13.11, а), и в линейных токах появляются также гармоники,

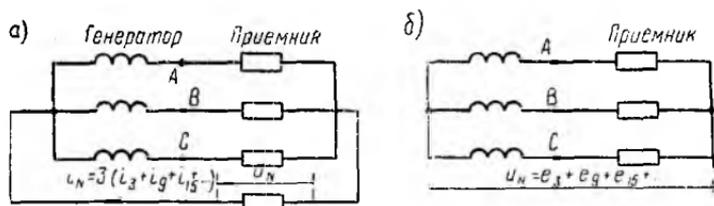


Рис. 13.11

кратные трем:  $i_3, i_9, i_{15}, \dots$ . Так как ток нулевого провода равен сумме линейных токов, то при одинаковой нагрузке фаз суммы токов прямой и обратной систем будут равны нулю и в нулевом проводе будут только токи нулевых систем. Мгновенное и действующее значение тока нулевого провода соответственно равны:

$$i_N = 3(i_3 + i_9 + i_{15} + \dots); \quad I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

При этом узловое напряжение, т. е. напряжение на сопротивлении нулевого провода, будет также состоять из гармоник, кратных трем.

В системе без нулевого провода (рис. 13.11, б) узловое напряжение, равное разности между напряжениями какой-либо фазы генератора и одноименной фазы приемника, будет равно:

$$u_N = e_3 + e_9 + e_{15} + \dots \quad \text{и} \quad U_N = \sqrt{e_3^2 + e_9^2 + e_{15}^2 + \dots},$$

так как в фазных напряжениях приемника гармоники, кратные трем, должны отсутствовать, потому что их нет в кривых тока.

Роль высших гармоник в трехфазных цепях видна на примере двигателя трехфазного тока, работающего на принципе вращающегося магнитного поля: гармоники токов обратных систем создают поля, вращающиеся в обратном направлении и тем самым уменьшающие полезный вращающий момент двигателя.

§ 14.1. Нелинейные элементы  
при переменном токе и методы анализа  
нелинейных цепей

1. Виды нелинейной зависимости

Нелинейные электрические и магнитные элементы переменного тока широко применяются для создания разнообразной аппаратуры. К ней относятся электронные, ионные, ферромагнитные и полупроводниковые приборы, используемые для генерирования, усиления, модуляции, прямого и обратного преобразования переменного тока в постоянный, умножения и деления частоты, а также многие другие устройства. В ряде случаев нелинейность цепей не используется, но должна быть учтена при расчетах.

Для электрических нелинейных цепей переменного тока остаются справедливыми законы Кирхгофа в их первой форме для мгновенных значений токов и напряжений ( $\sum i = 0$ ,  $\sum u = 0$ ), для нелинейных магнитных цепей — аналоги этих законов для мгновенных значений н. с. и магнитных потоков. Уравнения, составленные на основе этих законов, в общем случае будут нелинейными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения общего метода решения не имеют, поэтому для расчета нелинейных цепей приходится применять приближенные методы (аналитические, графические и графоаналитические).

В цепях переменного тока для всех нелинейных элементов основной интерес представляет зависимость между напряжением и током, причем она различна для мгновенных и действующих значений этих величин.

При переменном токе необходимо учитывать инерционность некоторых нелинейных элементов. Например, из-за тепловой инерции температура, а следовательно, и сопротивление лампы накаливания, даже при сравнительно низкой частоте (например, 50 Гц), в течение каждого периода тока остаются практически постоянными. Поэтому зависимость  $u(i)$  между мгновенными значениями напряжения и тока лампы линейна. Вместе с тем зависимость  $U(I)$  между действующими значениями напряжения и тока резко нелинейна — сопротивление накаливаемой лампы больше, чем холодной, примерно в 10 раз. Ввиду линейной зависимости  $u(i)$  при синусоидальном напряжении ток будет также синусоидальным, и в этом случае для действующих значений могут быть, с учетом связи  $U(I)$ , применены векторные диаграммы и символический метод, что крайне упрощает расчеты.

Однако большинство нелинейных элементов при не слишком высоких частотах безынерционны и зависимость  $u(i)$  оказывается нелинейной. Поэтому при периодических процессах кривые напряжения и тока них по форме различны, например при синусоидальном напряжении

ток оказывается несинусоидальным, и наоборот. В этом случае следуют оперировать непосредственно с мгновенными значениями, но когда несинусоидальность формы кривой имеет для данной задачи второстепенное значение, в качестве первого приближения применяют векторные диаграммы и символический метод для эквивалентных синусов или для первых гармоник, учитывая нелинейную связь  $U(I)$  и оперируя с некоторыми усредненными значениями параметров цепи. В этих случаях расчет подобен расчету цепей с инерционными элементами.

В некоторых устройствах применяются нелинейные элементы находящиеся под одновременным воздействием постоянного и переменного тока или напряжения. При этом расчеты усложняются, но и здесь оперируют с мгновенными значениями, если форма кривых существенна, в противном же случае ограничиваются соотношениями между действующими значениями.

Далее рассматриваются зависимости между мгновенными значениями и между действующими значениями напряжения и тока для индуктивных и емкостных нелинейных безынерционных элементов, а также некоторые явления и устройства, основанные на свойствах подобных элементов. Попутно на этих примерах рассматриваются приемы и методы анализа и расчета нелинейных цепей.

## 2. Методы анализа нелинейных цепей на примере катушки индуктивности со стальным сердечником

Основой большинства электрических машин и аппаратов, применяемых в электротехнике низких и повышенных частот, является катушка со стальным сердечником.

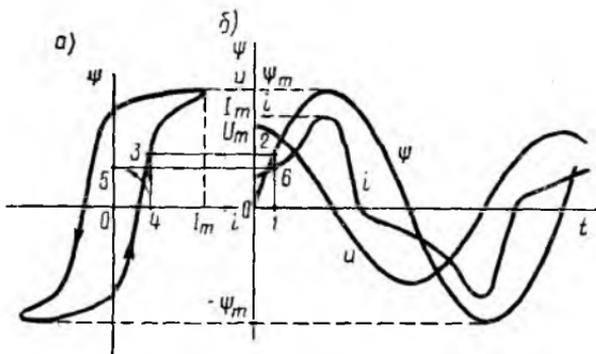


Рис. 14.1

Магнитная проницаемость  $\mu$  стали не является величиной постоянной, поэтому потокосцепление  $\Psi = \omega\Phi$  не будет пропорционально току  $i$ ; зависимость  $\Psi(i)$  подобна зависимости магнитной индукции  $B$  от напряженности поля  $H$  и изображается петлей, близкой к гистерезисной, но с несколько закругленными углами из-за влияния вихревых токов (рис. 14.1, а).

Если пренебречь активным сопротивлением обмотки катушки, при напряжении

$$u = U_m \cos \omega t = \frac{d\Psi}{dt}, \quad \Psi = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t,$$

е. потокосцепление  $\Psi$  изменяется по закону синуса с амплитудой  $\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}$  (рис. 14.1, б).

Кривую тока  $i(t)$  легко построить графическим методом, определяя для ряда ординат синусоиды  $\Psi$  соответствующие значения  $i$  по кривой  $\Psi(i)$  (рис. 14.1, построение 1—2—3—4—5—6). Так как кривая тока симметрична относительно оси абсцисс, она содержит только нечетные гармоники; чем больше насыщение, тем резче выражены в кривой  $i(t)$  высшие гармоники, в основном третья и пятая.

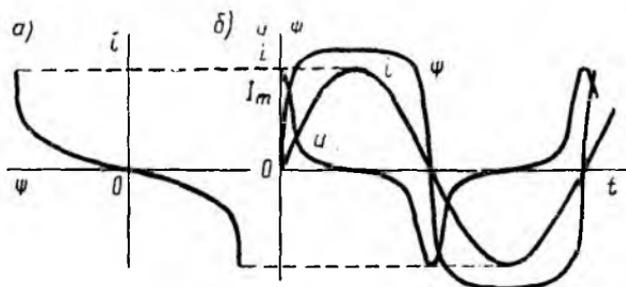


Рис. 14.2.

Кривую тока можно также рассчитывать аналитическим методом математической аппроксимации зависимости  $i(\Psi)$ . Если пренебречь гистерезисом и вихревыми токами, зависимость  $i(\Psi)$  совпадает с основной кривой намагничивания (рис. 14.2, а). Эту кривую можно приближенно представить, например, следующим выражением:

$$i = a\Psi + b\Psi^3,$$

которое при напряжении  $u = U_m \cos \omega t$  и, следовательно, синусоидальном потокосцеплении  $\Psi = \Psi_m \sin \omega t$  получает вид:

$$i = a\Psi_m \sin \omega t + b\Psi_m^3 \sin^3 \omega t.$$

После подстановки

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t),$$

$$i = \left( a\Psi_m + \frac{3}{4} b\Psi_m^3 \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} b\Psi_m^3 \sin 3\omega t = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t.$$

Таким образом, кривая тока содержит первую и третью гармоники; так как их максимальные значения суммируются, кривая  $i(t)$  имеет заостренную форму с амплитудой  $I_{1m} + I_{3m}$ .

Более точная аппроксимация кривой  $i(\Psi)$  многочленом с большим числом членов

$$i = a\Psi + b\Psi^3 + c\Psi^5 + d\Psi^7 + \dots$$

привела бы к появлению в кривой тока также и высших гармоник — пятой, седьмой и т. д., что и имеет место в действительности.

Если катушка питается синусоидальным током  $i = I_m \sin \omega t$  удобнее пользоваться зависимостью  $\Psi(i)$ , например представив ее аналитически на исследуемом участке выражением

$$\Psi = mi - nt^3,$$

после аналогичных преобразований получающим вид:

$$\Psi = \Psi_{1m} \sin \omega t + \Psi_{3m} \sin 3\omega t.$$

Так как максимальные значения гармоник потокосцепления вычитаются, кривая  $\Psi(t)$  имеет тупую форму (рис. 14.2, б). Напряжение катушки

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = \omega \Psi_{1m} \cos \omega t + 3\omega \Psi_{3m} \cos 3\omega t = U_{1m} \cos \omega t + U_{3m} \cos 3\omega t,$$

т. е. кривая  $u(t)$  заострена (см. рис. 14.2, б), причем отношение максимального значения третьей гармоники к первой для кривой напряжения в три раза больше, чем для кривой потокосцепления.

По формулам для действующих значений синусоидального напряжения  $U$  и тока  $I$  может быть определена эквивалентная индуктивность  $L_3$ ; при пренебрежении активным сопротивлением катушки

$$L_3 = \frac{U}{\omega I}.$$

Например, для синусоидального напряжения  $U_m \cos \omega t$  при пренебрежении гистерезисом и при принятой выше зависимости  $i = a\Psi + b\Psi^3$  эта эквивалентная индуктивность

$$\begin{aligned} L_3 = \frac{U}{\omega I} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Psi_m}{\frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(a\Psi_m + \frac{3}{4} b\Psi_m^3\right)^2 + \left(\frac{1}{4} b\Psi_m^3\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{3}{2} ab\Psi_m^2 + \frac{10}{16} b^2\Psi_m^4}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что с ростом  $U$ , а следовательно, и  $\Psi_m$  индуктивность  $L_3$  уменьшается, ток  $I = \frac{U}{\omega L_3}$  растет быстрее напряжения и вольт-амперная характеристика  $U(I)$  вначале почти прямолинейна, а затем угол, образуемый ею с осью тока, уменьшается (рис. 14.3).

Характеристика  $U(I)$ , снятая при синусоидальном токе, будет несколько отличаться от характеристики  $U(I)$  при синусоидальном напряжении, но вид ее сохранится.

Если сердечник имеет обмотку из  $\omega_0$  витков, обтекаемую постоянным током  $I_0$ , и обмотку из  $\omega$  витков, присоединенную к источнику сину-

оидального напряжения  $u = \omega \frac{d\Phi}{dt}$  (рис. 14.4), зависимость от времени магнитного потока  $\Phi$ , создаваемого обеими обмотками, должна иметь вид:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_m \sin \omega t.$$

Если мысленно заменить обмотку  $\omega_0$  постоянного тока эквивалентной, с числом витков  $\omega$ , приняв постоянный ток равным  $I'_0 = \frac{\omega_0}{\omega} I_0$ , потокоцепления обеих обмоток будут одинаковыми и равными:

$$\Psi = \omega \Phi = \omega \Phi_0 + \omega \Phi_m \sin \omega t = \Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t.$$

Тогда, приняв ту же зависимость  $i(\Psi)$ , можно получить выражение для мгновенного значения суммы  $i$  токов обеих обмоток:

$$\begin{aligned} i &= a\Psi + b\Psi^3 = a(\Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t) + b(\Psi_0 + \Psi_m \sin \omega t)^3 = \\ &= \left( a\Psi_0 + b\Psi_0^3 + \frac{3}{2} b\Psi_0\Psi_m^2 \right) + \left( a\Psi_m + 3b\Psi_0^2\Psi_m + \frac{3}{4} b\Psi_m^3 \right) \sin \omega t - \\ &\quad - \frac{3}{2} b\Psi_0\Psi_m^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{4} b\Psi_m^3 \sin 3\omega t = \\ &= I'_0 + I_{1m} \sin \omega t + I_{2m} \sin \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + I_{3m} \sin (3\omega t - \pi). \end{aligned}$$

Если считать, что в цепь постоянного тока включен фильтр, не пропускающий переменный ток, первый постоянный член полученного

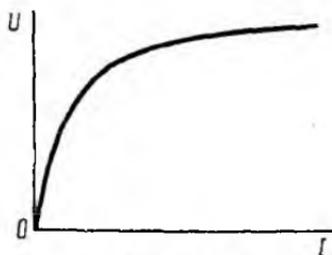


Рис. 14.3

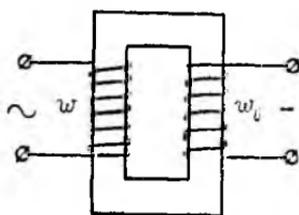


Рис. 14.4

выражения будет током  $I'_0$  этой обмотки, а три остальных члена — первой, второй и третьей гармониками тока обмотки  $\omega$ . Более точная аппроксимация дала бы также гармоники более высокого порядка.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

1) в цепи переменного тока, помимо нечетных, появились четные гармоники;

2) так как ток  $I'_0 = a\Psi_0 + b\Psi_0^3 + \frac{3}{2} b\Psi_0\Psi_m^2 = \text{const}$ , постоянная

составляющая  $\Psi_0$  потокоцеплений уменьшается с ростом переменной составляющей  $\Psi_m$ , что объясняется насыщением сердечника намагнивающей силой обмотки  $\omega$  переменного тока.

$$L_3 = \frac{U}{\omega I} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Psi_m}{\frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( a\Psi_m + 3b\Psi_0^2\Psi_m + \frac{3}{4} b\Psi_m^3 \right)^2 + \left( \frac{3}{2} b\Psi_0^2\Psi_m^2 \right)^2 + \left( \frac{1}{4} b\Psi_m^4 \right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 9b^2\Psi_0^4 + 6ab\Psi_0^2 + \frac{27}{4} b^2\Psi_0^2\Psi_m^2 + \frac{10}{16} b^2\Psi_m^4 + \frac{3}{2} ab\Psi_m^2}}$$

Отсюда видно, что:

1) характеристики  $L_3(\Psi_m)$ , а следовательно, и вольтамперные характеристики  $U(I)$  для цепи переменного тока имеют тот же вид

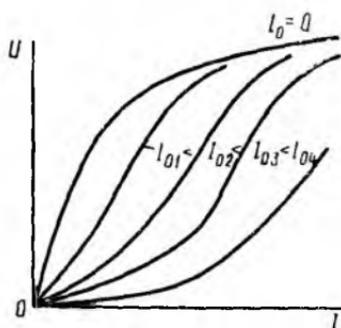


Рис. 14.5

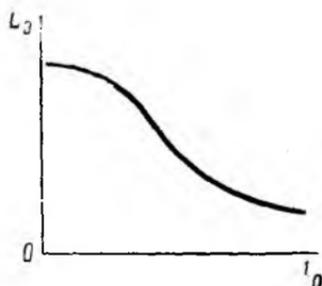


Рис. 14.6

что и без подмагничивания постоянным током, но чем больше  $\Psi_0$ , т. е.  $I_0$ , тем ниже лежит вольтамперная характеристика (рис. 14.5);

2) величиной индуктивности  $L_3$  цепи переменного тока можно управлять, изменяя  $\Psi_0$ , т. е. величину постоянного тока  $I_0$  (рис. 14.6).

Если задаться синусоидальным током обмотки  $\omega$ , а не напряжением, можно, пользуясь, например, аппроксимацией вида  $\Psi = mi - ni^3$ , аналогичным образом показать, что кривая потокосцепления  $\Psi(t)$  будет содержать постоянную составляющую, нечетные и четные гармоники. Очевидно также, что в общем случае напряжению и потокосцеплению любой другой сложной формы будет соответствовать ток  $i(t)$  также сложной формы, содержащий четные и нечетные гармоники, и наоборот.

Если активным сопротивлением  $r$  обмотки катушки пренебречь нельзя, нелинейное уравнение получает вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = u. \quad (14.1)$$

Для его приближенного решения может быть применен метод гармонического баланса в сочетании с аналитической аппроксимацией  $\Psi(i)$ .

Пусть приложенное напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ . Так как кривая  $\Psi(i)$  симметрична относительно осей координат и  $r = \text{const}$ , кривая  $i(t)$  будет симметричной относительно оси абсцисс, т. е. она може

держат только нечетные гармоники, причем в общем случае ряд будет бесконечным. Так как приходится ограничиваться несколькими гармониками (обычно двумя-тремя), метод и по этой причине является приближенным. Пусть, например,

$$i(t) \approx I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3),$$

да неизвестными будут две амплитуды ( $I_{1m}$  и  $I_{3m}$ ) и две начальные фазы ( $\psi_1$  и  $\psi_3$ ).

Подставив аппроксимацию

$$\Psi(i) = mi - ni^3$$

в исходное уравнение (14.1), после элементарных тригонометрических преобразований, аналогичных выполненным выше, исходное уравнение можно привести к виду:

$$i_m \cos \omega t = \sum A_{km} \sin k\omega t + \sum B_{km} \cos k\omega t, \quad (14.2)$$

где  $k$  — номер гармоники, а  $A_{km}$  и  $B_{km}$  — алгебраические суммы коэффициентов, соответственно, при всех  $\sin k\omega t$  и  $\cos k\omega t$ , являющиеся функциями всех четырех неизвестных.

На основе гармонического баланса теперь можно приравнять слева и справа коэффициенты при  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sin 3\omega t$  и  $\cos 3\omega t$ , т. е.

$$0 = A_{1m}, \quad U_m = B_{1m}, \quad 0 = A_{3m}, \quad 0 = B_{3m},$$

из этих четырех уравнений определить неизвестные  $I_{1m}$ ,  $I_{3m}$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_3$ , входящие в выражения для  $A_{km}$  и  $B_{km}$ , а следовательно, и в окончательное выражение для  $i(t)$ .

Необходимо заметить, что в уравнение (14.2) войдут гармоники высшего порядка, которые в дальнейшем не учитываются, что является еще одной причиной приближенности результата.

Очевидно, что метод гармонического баланса может быть применен для случая, когда  $i(t)$  представляет собой несинусоидальную периодическую кривую, т. е. сумму гармоник.

Эта же задача может быть приближенно решена методом кусочно-линейной аппроксимации нелинейной зависимости  $\psi(i)$ , соответствующей основной кривой намагничивания. Кривая  $\psi(i)$  заменяется ломаной прямой (рис. 14.7), и подстановка линейных уравнений для ее прямых участков в исходное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_m \sin \omega t \quad (14.3)$$

приводит к замене этого нелинейного уравнения системой линейных уравнений, число которых равно числу использованных прямых участков. Затем их общие решения припасовываются: величина потокосцепления  $\Psi$  для конца предыдущего участка приравнивается потокосцепле-

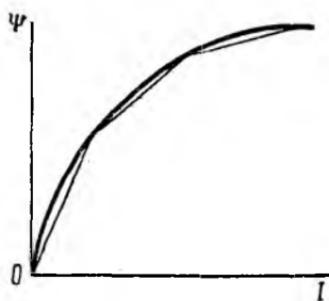


Рис. 14.7

нию для начала следующего участка, откуда определяются постоянные интегрирования этих линейных уравнений.

Все эти расчеты весьма упрощаются, если прямые участки кусочной линейной аппроксимации могут быть взяты совпадающими с осями координат. Далее эта задача решается для тороидальной катушки с сердечником из магнитномягкого материала, имеющего почти прямоугольную кривую намагничивания  $B(H)$  с узкой петлей гистерезиса (рис. 14.8, а). В первом приближении ей соответствует прямоугольная зависимость  $\Psi(i)$  с вертикальным 1-2 и двумя горизонтальными и 4-1 участками (рис. 14.8, б).

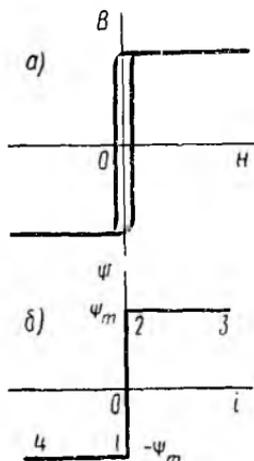


Рис. 14.8

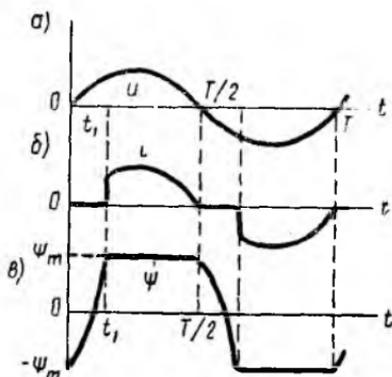


Рис. 14.9

На рис. 14.9, а показано заданное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ . Пусть при  $t = 0$  потокосцепление равно  $-\Psi_m$  (рис. 14.9, в). За время  $t_1$  его роста на участке 1-2 рис. 14.8, б до значения  $+\Psi_m$  ток  $i =$  (рис. 14.9, б); при этом уравнение (14.3) и его решение имеют вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_m \sin \omega t, \quad \Psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + A.$$

Постоянная интегрирования  $A$  определяется приравновкой при  $t = 0$

$$\Psi(0) = -\Psi_m = -\frac{U_m}{\omega} + A,$$

откуда  $A = \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m$  и окончательно

$$\Psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m.$$

Это выражение определяет закон изменения  $\Psi(t)$  от  $-\Psi_m$  до  $+\Psi_m$  (см. рис. 14.9, в). Тогда продолжительность  $t_1$  этого процесса может быть определена из зависимости:

$$\Psi(t_1) = \Psi_m = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t_1 + \frac{U_m}{\omega} - \Psi_m,$$

куда

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arccos \left( 1 - \frac{2\omega\Psi_m}{U_m} \right).$$

Позже  $t_1$  до конца полупериода в соответствии с участком 2-3 ис. 14.8, б)  $\Psi = \Psi_m = \text{const}$  и уравнение (14.3) получает вид:

$$ri = U_m \sin \omega t, \text{ откуда } i = \frac{U_m}{r} \sin \omega t.$$

График изменения тока показан на рис. 14.9, б. Из-за прямоугольной аппроксимации кривой намагничивания (см. рис. 14.8, б) в момент времени  $t_1$  получился скачок тока; в действительности будет иметь место быстрое, но плавное нарастание тока, соответствующее реальной кривой намагничивания (см. рис. 14.8, а).

Во втором полупериоде процесс повторяется с изменением знака.

### 3. Сегнетоэлектрический конденсатор

Зависимость заряда  $q$  сегнетоконденсатора от напряжения  $u$  подобна зависимости смещения  $D$  от напряженности поля  $E$  и изображается гистерезисной петлей (рис. 14.10, а). При синусоидальном токе

$$i = I_m \cos \omega t = \frac{dq}{dt}, \quad q = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = Q_m \sin \omega t,$$

т. е. заряд  $q$  изменяется по закону синуса с амплитудой  $Q_m = \frac{I_m}{\omega}$  (рис. 14.10, б).

Кривая напряжения может быть построена графически путем определения для ряда ординат синусоиды  $q$  соответствующих значений

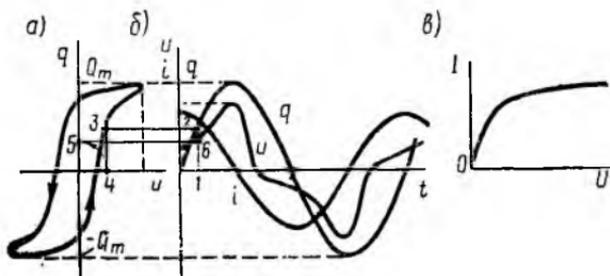


Рис. 14.10

$u$  по кривой  $q(u)$  (см. рис. 14.10, б построение 1—2—3—4—5—6). В кривой напряжения, симметричной относительно оси абсцисс, содержатся только нечетные гармоники.

Из сравнения кривых рис. 14.1, б и 14.10, б видно, что кривая  $i(t)$  катушки с сердечником подобна кривой  $u(t)$  сегнетоконденсатора, если подобны кривые  $u(t)$  катушки и  $i(t)$  конденсатора. Отсюда вытекает подобие вольтамперной характеристики  $I(I)$  катушки (см. рис. 14.3) и ампервольтной характеристики  $I(U)$  конденсатора (рис. 14.10, в). Следовательно, рассмотренные

цепи с нелинейной индуктивностью и с нелинейной емкостью дуальны как и линейные цепи с  $L$  и  $C$  (см. п. 2 § 7.3), что может послужить основанием для построения сегнетоэлектрической аппаратуры, аналогичной ферромагнитной. В соответствии с табл. 7.1 для этого нужно заменить индуктивности емкостями, и наоборот, последовательные соединения — параллельными, и наоборот, источники напряжения — источниками тока, и наоборот, активные сопротивления остаются без изменений. В таком дуальном сегнетоэлектрическом аппарате будучи себя заданным образом величина, дуальная аналогичной величине ферромагнитного аппарата; например, ферромагнитный стабилизатор напряжения превратится в сегнетоэлектрический стабилизатор тока.

## § 14.2. Устройства, основанные на нелинейной зависимости мгновенных значений напряжения и тока

### 1. Ферромагнитный и сегнетоэлектрический утроители частоты

Наличие высших гармоник в кривой тока катушек со стальным сердечником при синусоидальном напряжении используется для умножения частоты. В схемах, осуществляющих преобразование трехфаз-

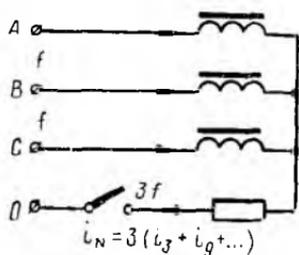


Рис. 14.11

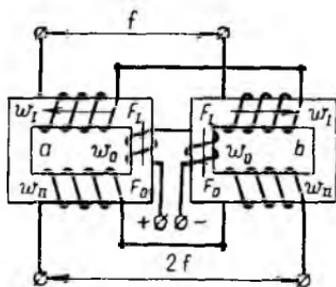


Рис. 14.12

ной системы напряжений основной частоты в однофазное напряжение утроенной частоты, применяют три одинаковые катушки, соединенные звездой (рис. 14.11).

При включенном нулевом проводе и пренебрежении его сопротивлением и сопротивлениями всех проводов фазные напряжения на катушках будут равны синусоидальным напряжениям фаз генератора, и форма кривой тока в каждой фазе будет такой же, как показано на рис. 14.1, б. Ток  $i_N$  нулевого провода, равный сумме линейных токов, будет содержать лишь гармоники, кратные трем:

$$i_N = 3(i_3 + i_9 + i_{15} + \dots), \quad I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \dots}$$

При размыкании нулевого провода из кривых линейных токов будут исключены гармоники, кратные трем, и форма кривой тока изменится; из-за этого э. д. с., а следовательно, и фазные напряжения:  $u_{\phi}$  на катушках перестанут быть синусоидальными, и в них появятся

высшие гармоники, которые не скажутся на синусоидальном законе изменения линейного напряжения, т. е. гармоники, кратные трем. Действующее значение напряжений на катушках будет:

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_9^2 + \dots}$$

несмотря на симметрию цепи, появится узловое напряжение

$$U_N = \sqrt{U_3^2 + U_9^2 + U_{16}^2 + \dots}$$

Если в нулевой провод будет включена нагрузка (см. рис. 14.11), формы кривых узлового напряжения и тока несколько изменятся по сравнению с вычисленными выше, но по-прежнему они будут содержать только гармоники, кратные трем.

Если в фазы схемы рис. 14.11 взамен катушек включить сегнето-конденсаторы, ток нагрузки, включенной в нулевой провод, будет также состоять из гармоник, кратных трем, т. е. и эта схема будет утроителем частоты.

## 2. Ферромагнитный удвоитель частоты

Ферромагнитный удвоитель частоты состоит из двух одинаковых однофазных трансформаторов со стальными сердечниками, работающих с подмагничиванием постоянным током ( $a$  и  $b$  на рис. 14.12). Каждый трансформатор имеет по три обмотки с числом витков  $\omega_1$ ,  $\omega_{II}$ ,  $\omega_0$ . Одинаковые обмотки обоих трансформаторов соединены последовательно. Обмотки  $\omega_1$  образуют первичную цепь удвоителя и питаются переменным током частоты  $f$  от сети, обмотки  $\omega_{II}$  являются вторичной цепью удвоителя, в которую включается нагрузка; обмотки  $\omega_0$ , обтекаемые постоянным током  $I_0$ , служат для подмагничивания.

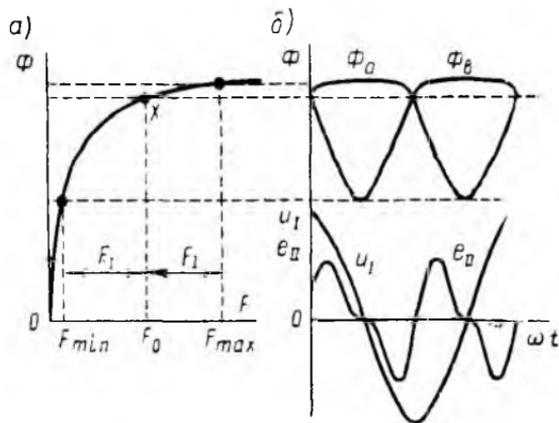


Рис. 14.13

Обмотки  $\omega_1$  и  $\omega_0$  трансформаторов соединены таким образом, что если в данный момент времени в первом трансформаторе переменная н. с. первичной обмотки  $\omega_1$  и постоянная н. с. обмотки  $\omega_0$  действуют огласно, то во втором трансформаторе они действуют встречно. Н. с. в каждом трансформаторе изменяется от  $F_{\min} = F_0 - F_1$ , т. е. разности н. с. обмотки  $\omega_0$  и максимального значения н. с.  $F_1$  обмотки  $\omega_1$ , до их суммы  $F_{\max} = F_0 + F_1$ . Соответствующие этим н. с. магнитные потоки  $\Phi_a$  и  $\Phi_b$  обоих трансформаторов могут быть определены графически по кривой  $\Phi(F)$ , аналогичной основной кривой намагничивания (рис. 14.13). Из-за несимметрии этой кривой относительно точки  $x$ ,

соответствующей среднему значению н. с.  $F_0$ , при синусоидальном токе обмоток  $\omega_1$ , а следовательно, и их н. с., определяемые по этим н. кривые  $\Phi_a(\omega t)$  и  $\Phi_b(\omega t)$  относительно их среднего значения несимметричны. Поэтому кривая  $\Phi_a(\omega t)$  потока трансформатора  $a$ , кроме постоянной составляющей  $\Phi_0$  и нечетных гармоник, должна содержать четные гармоники:

$$\Phi_a(\omega t) = \Phi_0 + \Phi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots$$

Ввиду обратного включения обмотки  $\omega_1$  в трансформаторе  $b$  ее переменная составляющая потока сдвинута по фазе на половину периода, т. е. на угол  $\pi$  для первой гармоники, откуда

$$\Phi_b(\omega t) = \Phi_a(\omega t + \pi) = \Phi_0 - \Phi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) - \dots$$

Суммарное потокоцепление вторичной цепи  $\omega_{11}$

$$\Psi_{11} = \omega_{11} \Phi_a + \omega_{11} \Phi_b = 2\omega_{11} [\Phi_0 + \Phi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \Phi_{4m} \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots]$$

и э. д. с. вторичной цепи

$$e_{11} = - \frac{d\Psi_{11}}{dt} = - 4\omega\omega_{11}\Phi_{2m} \cos(2\omega t + \psi_2) - 8\omega\omega_{11}\Phi_{4m} \cos(4\omega t + \psi_4) - \dots = \mathcal{E}_{2m} \sin\left(2\omega t + \psi_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{E}_{4m} \sin\left(4\omega t + \psi_4 - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

Следовательно, частота основной гармоники этой э. д. с. в два раза больше частоты напряжения, приложенного к зажимам первичной цепи, т. е. рассмотренное устройство является удвоителем частоты.

Потокоцепление первичной цепи

$$\Psi_1 = \omega_1 \Phi_a - \omega_1 \Phi_b = 2\omega_1 [\Phi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \Phi_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots]$$

и ее напряжение

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = 2\omega\omega_1\Phi_{1m} \cos(\omega t + \psi_1) + 6\omega\omega_1\Phi_{3m} \cos(3\omega t + \psi_3) + \dots = U_{1m} \sin\left(\omega t + \psi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + U_{3m} \sin\left(3\omega t + \psi_3 + \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

содержит только нечетные гармоники.

Обычно заданным является синусоидальное напряжение  $u_1$ , а не ток, но это не отразится на рассмотренном явлении удвоения частоты. Кривые первичного напряжения  $u_1(\omega t)$  и вторичной э. д. с.  $e_{11}(\omega t)$ , также показаны на рис. 14.13, б.

### 3. Выпрямление переменных токов

Для выпрямления, т. е. для получения из переменного тока — постоянного, должны применяться нелинейные резисторы с несимметричной вольтамперной характеристикой, имеющие одно

стороннюю проводимость (см. рис. 1.11). Таким свойством обладают меднозакисные, селеновые, германиевые, кремниевые и другие полупроводниковые вентили, ртутные вентили, газотроны и электронные лампы.

На рис. 14.14, *a* изображена типичная ампервольтная характеристика полупроводникового вентиля, на рис. 14.14, *б* — характеристика идеального вентиля, сопротивление которого равно нулю для прямого направления тока и бесконечности — для обратного.

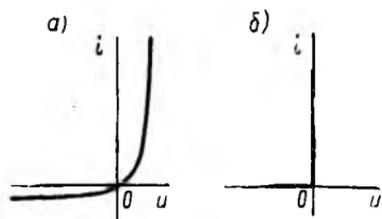


Рис. 14.14

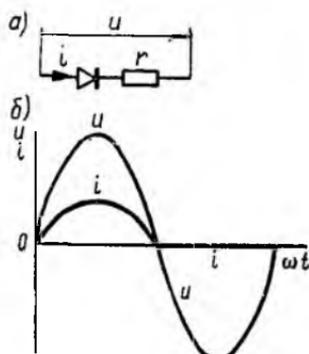


Рис. 14.15

Такую характеристику вентиля можно рассматривать, как кусочно-линейную аппроксимацию характеристики реального вентиля, что позволит применить приближенный аналитический метод для определения зависимости  $i(t)$ .

При включении идеального вентиля последовательно с нагрузкой, имеющей активное сопротивление  $r$  (на рис. 14.15, *a* показано условное

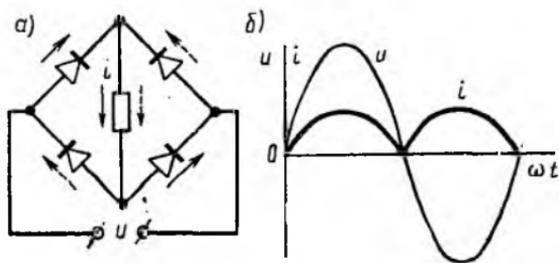


Рис. 14.16

изображение вентиля), для прямого полупериода напряжения  $u = U_m \sin \omega t$  ток

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

для обратного  $i = 0$  (рис. 14.15, *б*), т. е. по цепи идет ток одного направления. Рассмотренное выпрямление называется **о д н о п о л у п е р и о д н ы м**.

Мостовая схема из четырех вентиляей (рис. 14.16, *a*) осуществляет двухполупериодное выпрямление, так как через нагрузку, включенную в диагональ моста, протекает ток одного направления; в течение одного

полупериода ток идет через одну пару выпрямителей, включенных в противоположные плечи, во время второго полупериода — через вторую пару (рис. 14.16, а). Следовательно, полученное выражение для тока одного полупериода будет действительно и для второго полупериода.

Разложение кривой  $i(t)$  (рис. 14.16, б) в ряд Фурье (см. приложение 3) дает:

$$i(t) = \frac{2}{\pi} I_m - \frac{4}{3\pi} I_m \cos 2\omega t - \frac{4}{15\pi} I_m \cos 4\omega t - \frac{4}{35\pi} I_m \cos 6\omega t - \dots,$$

т. е. помимо постоянной составляющей  $\frac{2}{\pi} I_m$ , равной среднему значению, кривая тока содержит четные гармоники. Эти гармоники обычно стремятся удалить или уменьшить с помощью фильтров. При однополупериодном выпрямлении среднее значение тока, очевидно, будет вдвое меньше, т. е. равно  $\frac{I_m}{\pi}$ .

#### 4. Ферромагнитные элементы вычислительных машин

Основой ферромагнитных запоминающих элементов электронных вычислительных машин является тороидальный сердечник, выполненный из магнитных материалов, обладающих почти прямоугольной предельной (т. е. при очень больших  $\pm H_{\max}$ ) петлей гистерезиса  $B(H)$ .

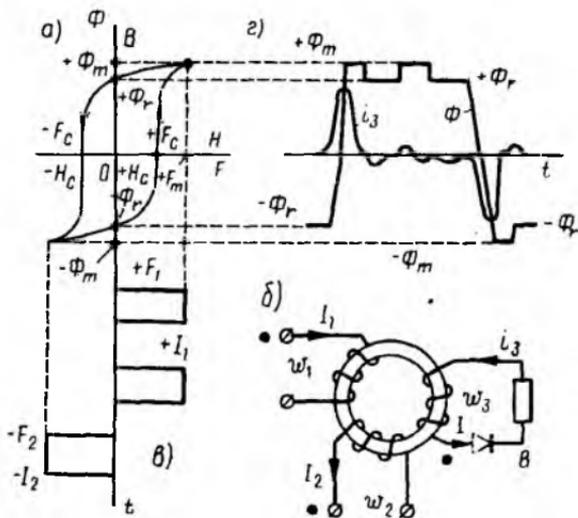


Рис. 14.17

Эта же петля в других масштабах дает зависимость магнитного потока  $\Phi$  от н. с.  $F$  (рис. 14.17, а). При  $F = 0$  в намагниченном ранее сердечнике будет остаточный магнитный поток  $+\Phi_r$ , или  $-\Phi_r$ .

В вычислительной технике одному из этих состояний, например  $+\Phi_r$ , приписывают значение цифры 1, а  $-\Phi_r$  — значение 0, т. е. такой элемент может «запомнить» одну из этих цифр. С помощью

набора подобных элементов можно в двоичном исчислении запомнить заданное число в виде ряда из цифр 1 и 0.

На сердечник наложены равномерно распределенные по нему обмотки, образующие тороидальную магнитную цепь, поток во всех сечениях которой одинаков. Одна из обмоток может представлять собой провод, расположенный по оси тороида, так как его н. с. также обеспечивает равенство магнитного потока во всех сечениях сердечника.

Пусть на тороид наложены две входные обмотки с одинаковым числом витков  $\omega_1 = \omega_2$  и одна выходная  $\omega_3$ , включенная на исполнительную цепь, причем в нее может быть включен клапан (рис. 14.17, б). На схеме точками показаны одноименные зажимы этих обмоток. Входные обмотки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  питаются равными по величине и продолжительности импульсами тока  $+I_1$  и  $-I_2$ , т. е. противоположного направления, в необходимой последовательности, например показанной на рис. 14.17, в. Эти токи создают пропорциональные им импульсы н. с.  $+F_1$  и  $-F_2$ , которые должны быть больше  $\pm F_c$ , соответствующих коэрцитивным силам  $\pm H_c$ .

Пусть под действием предыдущего импульса  $-F_2$  сердечник намагнитился в отрицательном направлении. Тогда его магнитный поток характеризуется точкой  $-\Phi_r$  на предельной петле гистерезиса. Следующий затем импульс  $+F_1$  перемагнитит сердечник до максимального значения  $+\Phi_m$  (рис. 14.17, г); при этом в выходной обмотке проиндуктируется импульс э. д. с.  $e_3 = -\omega_3 \frac{d\Phi}{dt}$ , посылающей в исполнительную цепь рабочий импульс тока  $i_3$ . Средние значения  $e_3$  и  $i_3$  пропорциональны изменению потока  $\Delta\Phi = \Phi_m - (-\Phi_r) = \Phi_m + \Phi_r \approx 2\Phi_r$ , так как из-за прямоугольного характера предельной петли гистерезиса  $\Phi_r$  лишь немногим меньше  $\Phi_m$ .

После окончания импульса  $F_1$  произойдет незначительное уменьшение потока  $\Phi_m$  до значения  $\Phi_r$ ; проиндуктированные при этом импульс э. д. с.  $e_3$  и импульс тока  $i_3$ , являющийся в этом режиме помехой, будут незначительными.

Так как следующим импульсом является опять импульс  $+F_1$ , сопровождающее его возрастание потока от  $+\Phi_r$  до  $+\Phi_m$  и затем убывание до  $+\Phi_r$  создает также незначительные помехи разных знаков.

Следующий импульс  $-F_2$  вызывает процесс, аналогичный рассмотренному при импульсе  $+F_1$ , но импульсы рабочего тока и помех изменят знаки.

Из изложенного видно, что магнитный элемент работает в режиме трансформатора. Поэтому н. с. первичных обмоток  $\omega_1$  и  $\omega_2$  должна быть рассчитана не только на перемагничивание сердечника, но и на компенсацию размагничивающего действия тока  $i_3$  в рабочей цепи, т. е. согласно закону полного тока

$$\omega_1 I_1 = \omega_2 I_2 = H_m l_c + \omega_3 I_{3m},$$

где  $H_m$  — максимальное значение напряженности поля;

$l_c$  — средняя длина сердечника;

$I_{3m}$  — максимальное значение рабочего тока.

Импульсы рабочего тока разного знака, соответствующие цифрам 1 и 0, воздействуют на последующие элементы вычислительной машины

Если в рабочую цепь включить вентиль  $B$  (см. рис. 14.17, б), по ней будет проходить ток только одного направления, соответствующий например, цифре 1. Тогда элемент работает в режиме нагруженного трансформатора. Цифре 0 будет соответствовать отсутствие рабочего тока, т. е. режим холостого хода трансформатора. Это приведет к возможности облегчения выходной и одной из входных обмоток и уменьшению средней мощности, потребляемой элементом, что позволит уменьшить его габариты. Кроме того, устранение тока обратного направления необходимо в тех случаях, когда его н. с. создает помехи в других элементах.

## § 14.3. Явление и устройства, основанные на нелинейной зависимости действующих значений напряжения и тока

### 1. Резонанс в нелинейных цепях

Резонанс в цепи, содержащей катушку индуктивности со стальным сердечником и линейный конденсатор, называется феррорезонансом. Для его качественного исследования можно пренебречь активным сопротивлением цепи, а кривые напряжения и тока сложной формы заменить эквивалентными синусоидами.

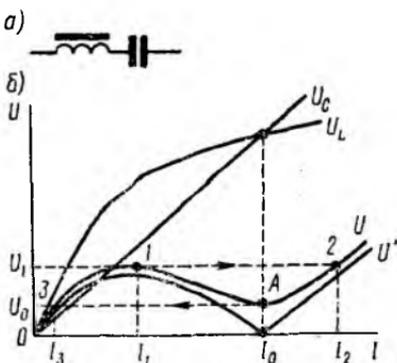


Рис. 14.18

Вольтамперная характеристика  $U'(I)$  цепи с последовательным соединением катушки со стальным сердечником и линейного конденсатора (рис. 14.18, а) может быть построена на основе кривой  $U_L(I)$  для катушки и прямой  $U_C(I)$  для конденсатора (рис. 14.18, б). Так как напряжения  $U_L$  и  $U_C$  находятся в противофазе, то

$$U' = |U_L - U_C|.$$

Феррорезонанс напряжений будет при  $U_L = U_C$ ; при этом  $U' = 0$ . Из-за наличия потерь в цепи и высших гармоник действительная вольтамперная характеристика  $U(I)$  расположена выше теоретической  $U'(I)$  и точка феррорезонанса будет вблизи точки  $A$ , соответствующей минимальному напряжению  $U_0$  и значению тока  $I_0$ . При токе, меньшем, чем  $I_0$ , в цепи преобладает индуктивное напряжение, при большем — емкостное.

Плавному повышению напряжения до значения  $U_1$  соответствует плавное увеличение тока до значения  $I_1$  (точка 1.) Дальнейшее увеличение напряжения будет сопровождаться скачком тока до значения  $I_2$  (точка 2). Последующее повышение напряжения сопровождается плавным увеличением тока. При плавном понижении напряжения до значения  $U_0$  ток снижается до значения  $I_0$  (точка  $A$ ), после чего следуе-

скачкообразное уменьшение его до значения  $I_3$ , отвечающего переходу из точки  $A$  в точку  $3$ . Очевидно, что скачки тока сопровождаются изменением знака угла сдвига фаз в цепи. Если же плавно изменять ток, можно получить все точки характеристики, в том числе и на ее падающем участке.

Таким образом, исследуемая линейная цепь в отличие от резонансной цепи с постоянными параметрами имеет следующие особенности: 1) резонанс в ней может быть достигнут изменением величины приложенного напряжения, что объясняется происходящим при этом изменением индуктивности; 2) при одном и том же напряжении на зажимах цепи ток в цепи может иметь три различных значения.

Однако режимы, соответствующие падающему участку 1- $A$  характеристики, будут неустойчивыми: при случайном увеличении тока падение напряжения в цепи станет меньше приложенного напряжения; ток будет возрастать до значения, соответствующего этому напряжению на правой поднимающейся части характеристики; при случайном уменьшении тока приложенное напряжение окажется недостаточным, и спад тока будет продолжаться до аналогичной точки на левой части характеристики.

Для цепи с параллельным соединением катушки индуктивности со стальным сердечником и линейного конденсатора (рис. 14.19,  $a$ ) надо построить ампервольтную характеристику  $I'(U)$  тока в неразветвленной части цепи по кривой  $I_L(U)$  катушки и прямой  $I_C(U)$  конденсатора (рис. 14.19,  $b$ ); ток

$$I' = |I_L - I_C|,$$

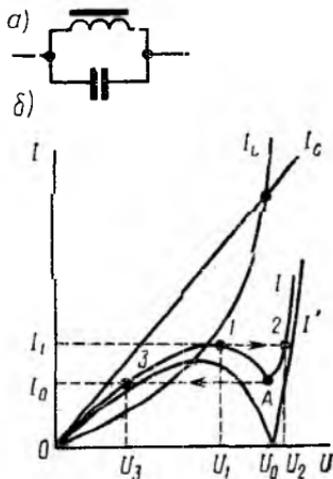


Рис. 14.19

так как токи в катушке и в конденсаторе находятся в противофазе. Точка, в которой кривая касается оси абсцисс ( $I' = 0$ ), соответствует феррорезонансу токов ( $I_L = I_C$ ).

Действительная кривая  $I(U)$  пройдет выше теоретической  $I'(U)$  из-за потерь в цепи и высших гармоник. Точка феррорезонанса токов близка к точке  $A$  минимального значения тока  $I_0$  при напряжении  $U_0$ . При напряжении  $U < U_0$  в цепи преобладает ток емкости, при напряжении  $U > U_0$  — индуктивности.

Плавному увеличению тока до значения  $I_1$  соответствует плавное повышение напряжения на зажимах цепи до значения  $U_1$  (точка 1). Дальнейшее увеличение тока будет сопровождаться скачком напряжения до значения  $U_2$ , соответствующего точке 2. В последующем с ростом тока напряжение будет увеличиваться плавно. Если теперь уменьшать ток в цепи, то изменение напряжения будет следовать за изменением тока до значения  $U_0$ , соответствующего точке  $A$ , после чего происходит скачкообразное уменьшение напряжения до значения  $U_3$ , соответствующего точке 3.

Из рис. 14.19, б видно, что при одном и том же токе на зажимах цепи могут быть три различных напряжения, из которых при неизменном токе цепи устойчивыми будут только режимы на поднимающихся участках ампервольтной характеристики. Если же плавно изменять величину питающего цепь напряжения, можно получить также все точки на падающем участке характеристики, так как тогда обе ветви цепи будут независимыми друг от друга.

Необходимо подчеркнуть, что упомянутые скачки имеют место на диаграммах для действующих значений, в действительности же происходит быстрое, но плавное изменение мгновенных значений этих величин.

Впервые явление феррорезонанса было исследовано П. Л. Калантаровым.

Аналогичные явления происходят при сегнеторезонансе в цепях с сегнетоконденсатором и линейной катушкой, дуальных феррорезонансным. Дуальными будут схемы феррорезонанса напряжений и сегнеторезонанса токов и схемы феррорезонанса токов и сегнеторезонанса напряжений.

## 2. Ферромагнитный стабилизатор напряжения

В ряде электрических установок при изменении напряжения питающей сети напряжение на приемнике необходимо поддерживать неизменным. Для этой цели служат различные по своему принципу действия стабилизаторы напряжения.

В простейшем ферромагнитном стабилизаторе напряжения (рис. 14.20) стабилизированное напряжение  $U_2$  снимается с зажимов

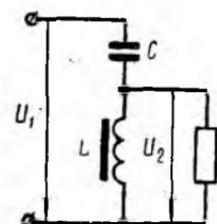


Рис. 14.20

катушки индуктивности со стальным сердечником, стабилизируемое напряжение  $U_1$  подается на зажимы всей схемы, состоящей из последовательного соединения конденсатора и параллельного разветвления катушки и цепи нагрузки.

При отключенной нагрузке цепь представляет собой схему феррорезонанса напряжений, процессы в которой поясняет рис. 14.21, аналогичный рис. 14.18. Ввиду различного наклона кривых  $U_1(I)$  и  $U_L(I) = U_2(I)$  для токов, больших резонансного, одному и тому же изменению тока  $\Delta I$  соответствует большое изменение  $\Delta U_1$  напряжения  $U_1$  и малое изменение  $\Delta U_2$  напряжения  $U_2$ .

По точкам кривых рис. 14.21 можно построить характеристику стабилизатора  $U_2(U_1)$ , определяя значения  $U_1$  и  $U_2$  для одних и тех же значений тока (рис. 14.22). Из этой кривой видно, что стабилизирующее действие схемы имеет место лишь при напряжениях сети, больших некоторого критического напряжения  $U_{1c}$ , соответствующего точке 2 рис. 14.18, б. При уменьшении напряжения  $U_1$  ниже критического происходит скачкообразное понижение напряжения  $U_2$ , и оно уже не стабилизируется.

Показателем качества работы стабилизатора является коэффициент стабилизации

$$k_{ст} = \frac{\frac{dU_1}{U_1}}{\frac{dU_2}{U_2}} \approx \frac{U_2 \Delta U_1}{U_1 \Delta U_2}$$

пределяемый из характеристики стабилизатора для номинального напряжения; чем больше коэффициент стабилизации, тем выше качество стабилизатора.

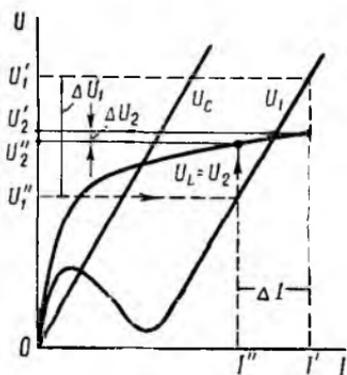


Рис. 14.21

Для получения хорошего стабилизирующего действия необходимо, чтобы рабочая часть вольтамперной

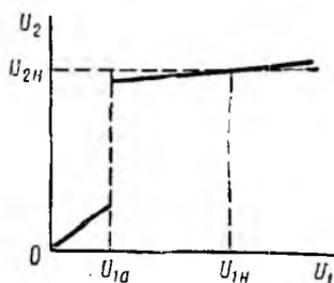


Рис. 14.22

характеристики катушки с ферромагнитным сердечником была возможно более пологой, другими словами, надо работать при большом напряжении, т. е. при значительном токе в обмотке катушки. В схеме рис. 14.20 большой реактивный ток полностью берется из сети, что нежелательно. Этот недостаток может быть устранен при использовании в схеме резонанса токов (рис. 14.23). Здесь  $L_1$  — катушка с ненасыщенным ферромагнитным сердечником, сопротивление которой линейно,  $L_2$  — катушка с насыщенным сердечником,

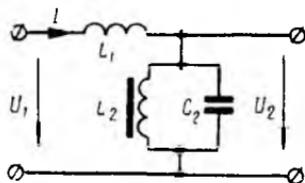


Рис. 14.23

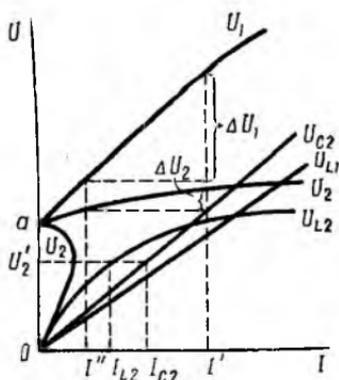


Рис. 14.24

образующая с линейным конденсатором  $C_2$  нелинейный участок схемы. В этой цепи ток  $I$ , потребляемый из сети, при холостом ходе стабилизатора значительно меньше тока нелинейной индуктивности  $L_2$ .

Построение кривых для этого стабилизатора при режиме холостого хода ведется в следующем порядке (рис. 14.24). Из характеристик  $I_{C2}(I_{C2})$  и  $U_{L2}(I_{L2})$  определяются токи, соответствующие одному

и тому же значению напряжения  $U_2$ , например  $U_2'$  (показано пунктиром), а по ним — ток  $I$  в неразветвленном участке цепи, т. е. в катушке  $L_1$ :

$$I = I_{L_2} - I_{C_2}.$$

Определив ток  $I$  для различных значений напряжения  $U_2$ , строя кривую  $U_2(I)$ . Точка  $a$  на этой кривой соответствует резонансу токов для меньшего напряжения преобладает емкостный ток, для большего — индуктивный. Этот последний участок и используется для стабилизации напряжения; ниже точки  $a$  происходит срыв стабилизации

Первичное напряжение

$$U_1 = U_{L_1} + U_2;$$

на графике оно показано для зоны стабилизации. Как видно из рис. 14.24, при увеличении тока от  $I''$  до  $I'$  значительному изменению

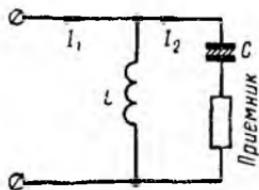


Рис. 14.25

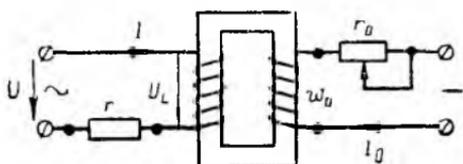


Рис. 14.26

$\Delta U_1$  напряжения  $U_1$  соответствует малое изменение  $\Delta U_2$  напряжения  $U_2$ .

Из кривых  $U_1(I)$  и  $U_2(I)$  можно вычислить коэффициент стабилизации и получить характеристику стабилизатора так, как это было показано выше. Все изложенное соответствует холостому ходу стабилизатора, нагрузка уменьшает стабилизирующее действие.

Общими недостатками всех ферромагнитных стабилизаторов является зависимость их работы от частоты, а также наличие высших гармоник в выходном напряжении.

Аналогичные стабилизаторы можно построить, используя линейные катушки и нелинейные сегнетоконденсаторы. Например, цепь рис. 14.25, дуальная схеме рис. 14.20 стабилизатора напряжения, будет стабилизировать ток  $I_2$  цепи нагрузки при изменениях входного тока  $I_1$ .

### 3. Ферромагнитный усилитель мощности

Под усилителем мощности подразумевают устройство, позволяющее управлять большой мощностью в рабочей цепи, расходуя малую мощность в управляющей цепи. В ферромагнитном усилителе цепь управления питается постоянным током.

Принципиальная схема простейшего ферромагнитного усилителя показана на рис. 14.26. Катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником включена в сеть переменного тока последовательно с приемником — активным сопротивлением  $r$ . На то-

ке сердечнике помещена управляющая обмотка  $w_0$ , питаемая постоянным током.

Если пренебречь высшими гармониками и активным сопротивлением катушки, ток в рабочей цепи при напряжении  $U$

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + x_L^2}},$$

де  $x_L$  — реактивное сопротивление катушки.

При включении постоянного тока в управляющую обмотку создается дополнительное подмагничивание сердечника, уменьшающее величину эквивалентной индуктивности  $L_s = \frac{U_L}{\omega I}$ , а следовательно, и величину реактивного сопротивления  $x_L = \omega L_s$ . Таким образом, включение постоянного тока вызовет при неизменном напряжении  $U$

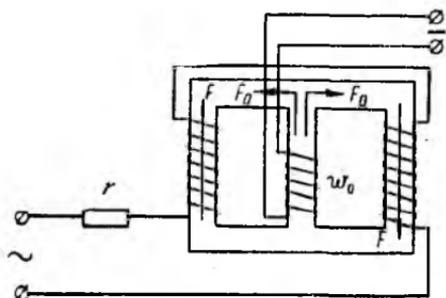


Рис. 14.27

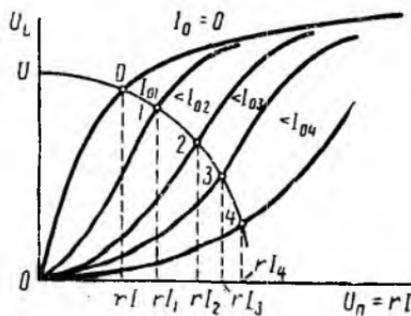


Рис. 14.28

увеличение переменного тока и перераспределение напряжения между сопротивлением  $r$  приемника и сопротивлением  $x_L$  катушки. При определенных соотношениях параметров нагрузки и усилителя мощность  $P = rI^2$  в рабочей цепи может значительно превышать мощность  $P_0 = r_0 I_0^2$ , расходуемую в цепи управления.

При воздействии на ферромагнитный магнитопровод переменной и постоянной н. с. в кривой переменного тока появляются четные гармоники (см. п. 2 § 14. 1), а переменный поток, создаваемый рабочим током, будет индуцировать переменную э. д. с. в цепи управления. Для устранения этих нежелательных явлений ферромагнитный усилитель выполняют по схеме рис. 14.27.

Обмотка управления, обтекаемая постоянным током, расположена на среднем стержне; ее н. с.  $F_0$  направлена в боковые стержни. Рабочая обмотка разделена на две одинаковые последовательно соединенные секции, расположенные на боковых стержнях; обе секции включаются в сеть так, что когда в одном стержне н. с., создаваемые обмотками постоянного и переменного токов, складываются, в другом — вычитаются. Поэтому симметрия кривой потокоцепления  $\Psi(F)$  обмотки переменного тока не нарушается, а четные гармоники в кривой тока не появляются. Такая схема устраняет также наведение переменной э. д. с. в управляющую обмотку током рабочей цепи, так как н. с.

в среднем стержне рабочей цепи, создаваемая переменным током, равна нулю.

Семейство характеристик усилителя  $U_L(I)$  при различной величине постоянного тока  $I_0$  в управляющей обмотке показано на рис. 14.28, где по оси ординат отложено напряжение на рабочей обмотке усилителя, а по оси абсцисс, в том же масштабе — произведение тока  $I$  на сопротивление  $r$ , т. е. напряжение на приемнике  $U_n = rI$ . Чем больше постоянный ток в цепи управления, тем характеристика будет более пологой, что соответствует меньшей величине магнитной проницаемости сердечника. Связь между реактивным напряжением  $U_L$  на рабочей обмотке усилителя, активным напряжением  $U_n$  на прием-



Рис. 14.29

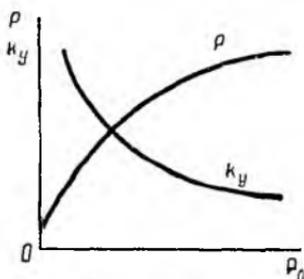


Рис. 14.30

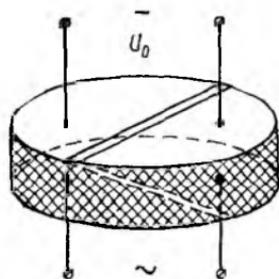


Рис. 14.31

нике и напряжением  $U$  сети переменного тока определяется уравнением

$$U_L^2 + U_n^2 = U^2.$$

Это уравнение является уравнением окружности радиуса  $U$  с центром в начале координат. Точки пересечения этой окружности с характеристиками усилителя дают связь между постоянным током  $I_0$  в обмотке управления и переменным током  $I$  в рабочей обмотке (рис. 14.29).

На рис. 14.30 показана зависимость  $P$  ( $P_0$ ), где  $P = rI^2$  — полезная мощность рабочей цепи, а  $P_0 = r_0 I_0^2$  — мощность цепи управления (масштаб  $P$  во много раз превышает масштаб  $P_0$ ). Отношение  $\frac{P}{P_0} = k_U$  называется коэффициентом усиления по мощности; величина его обычно тем меньше, чем больше полезная мощность  $P$ . При мощностях порядка долей ватта и сердечниках усилителя, выполненных из сплавов типа пермаллой, можно получить усиление, достигающее до  $10^3$  раз; если сердечник выполнен из обычной трансформаторной стали, то при мощностях порядка нескольких десятков ватт коэффициент усиления не превышает 100.

В принципе возможно также построить сегнетоэлектрический усилитель, например такой, как на рис. 14.31. Здесь верхний и нижний электроды сегнетоконденсатора разрезаны пополам, причем разрезы взаимно перпендикулярны. К верхним полудискам приложено управляющее постоянное напряжение  $U_0$ , нижние полудиски включаются в регулируемую цепь переменного тока. В сегнетоэлектрике происходит наложение постоянного электриче-

ского поля на переменное, благодаря чему диэлектрическая проницаемость и емкость конденсатора для цепи переменного тока изменяются.

## ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ И ИХ РАСЧЕТ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

### § 15.1. Общие сведения

Процессы в электрических цепях, рассматривавшиеся до сих пор, были установившимися процессами. В этой главе изучаются переходные процессы, которые происходят при всех изменениях режима электрической цепи — включении, выключении, коротком замыкании и т. п. Эти процессы не могут протекать мгновенно, так как *невозможны мгновенные изменения энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи.*

В цепях с сосредоточенными параметрами энергия запасается в емкостях в виде энергии  $\frac{1}{2} C u_C^2$  электрического поля и в индуктивностях в виде энергии  $\frac{1}{2} L i_L^2$  магнитного поля. Из невозможности мгновенных изменений энергии на конечную величину вытекает невозможность скачков напряжений  $u_C$  на емкостях  $C$  и токов  $i_L$  в индуктивностях  $L$ ; это определяет начальные условия для  $u_C$  и  $i_L$  при переходных процессах. Вместе с тем возможны скачки токов в емкостях и напряжений на индуктивностях, а также скачки напряжений и токов в сопротивлениях  $r$ , так как это сопротивление не запасает электромагнитную энергию.

Для расчета переходных процессов в цепях составляется система уравнений по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов. Эта система приводится к одному уравнению для одного из напряжений или токов, которое в общем случае линейных цепей будет линейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Порядок этого уравнения можно определить из упрощенной схемы цепи, объединяя индуктивности и, соответственно, емкости, соединения между которыми являются последовательными и параллельными или приводятся к ним. Тогда искомым порядком равен числу независимых начальных условий для токов индуктивностей и напряжений на емкостях упрощенной схемы. Например, если три индуктивности соединены в звезду, объединить их нельзя, но можно задать только два независимых начальных условия в виде токов двух индуктивностей, так как ток третьей определяется через первые два. Для цепи с последовательным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 7.1, а) уравнение, связывающее напряжение  $u$  цепи с током  $i$ , будет второго порядка, так как начальные значения  $i$  и  $u_C$  могут быть заданы независимо друг от друга:

$$L \frac{di}{dt} + ri + u_C = u \quad \text{или} \quad LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + rC \frac{du_C}{dt} + u_C = u,$$

так как  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

Как известно из математики, решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляет собой сумму двух решений, например,

$$i = i' + i'' = i' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots,$$

где  $i'$  — частное решение неоднородного уравнения, а  $i''$  — общее решение однородного уравнения, выраженное через постоянные интегрирования  $A_1, A_2, \dots$  и  $p_1, p_2, \dots$  — корни характеристического уравнения для случая, когда все корни различны.

Частное решение  $i'$  неоднородного уравнения определяется видом функции, стоящей в правой части уравнения, и поэтому называется **п р и н у ж д е н н ы м**. Для цепей с заданными постоянными или периодическими напряжениями (токами) источников энергии принужденное решение совпадает с установившимися значениями искомым величин и определяется известными из предыдущего методами расчета цепей.

Общее решение  $i''$  однородного уравнения описывает процесс, происходящий без воздействия внешних источников за счет изменения запаса энергии, накопленной в цепи до начала переходного процесса; оно имеет одинаковый вид для любого переходного процесса в данной цепи. Это решение называют **с в о б о д н о й с о с т а в л я ю щ е й п е р е х о д н о г о п р о ц е с с а**. Так как запасенная в цепи энергия при отсутствии внешних источников будет постепенно расходоваться, свободная составляющая с течением времени уменьшится до нуля. Математически это соответствует отрицательным вещественным корням или отрицательным вещественным частям комплексных корней  $p_k$  характеристического уравнения, что вызывает убывание во времени функций вида  $A_k e^{p_k t}$ .

Сумма принужденной и свободной составляющих  $i' + i'' = i$  представляет собой искомую величину, в данном примере ток; она называется **п е р е х о д н о й**.

Исходя из выражения для переходной величины, определяют постоянные интегрирования  $A_1, A_2, \dots$  из начальных условий — значений напряжений  $u_C(0)$  на емкостях и токов  $i_L(0)$  в индуктивностях, которые имели место до начала переходного процесса и, в соответствии со сказанным о невозможности скачков, будут теми же и в начальный момент переходного процесса.

Переходный ток превращается в принужденный, когда затухнет свободный ток. Математически строго это наступит при  $t = \infty$ , практически время переходных процессов в большинстве электрических цепей исчисляется долями секунды.

В переходном процессе при коротком замыкании цепи свободная составляющая равна переходной величине, так как тогда правая часть уравнения, например приложенное к цепи напряжение, а следовательно, и принужденная составляющая переходной величины будут равны нулю. Поэтому при изучении переходных процессов в различных цепях целесообразно сначала рассмотреть их короткое замыкание, а определенный при этом общий вид переходной величины использо-

вать, как свободную составляющую для других переходных процессов.

Таким образом, методика расчета переходных процессов, называемая классической, состоит в составлении дифференциальных уравнений для цепи, их решении и определении постоянных интегрирования из начальных условий.

## § 15.2. Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления и индуктивности

### 1. Короткое замыкание цепи

При коротком замыкании цепи с последовательным соединением  $r$  и  $L$  (рис. 15.1, а) уравнение переходного тока  $i$ , равно в этом случае свободному току  $i''$ , имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + r = 0$$

имеет корень  $p = -\frac{r}{L}$ , тогда

$$i = i'' = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{r}{L}t}$$

Если до момента короткого замыкания по цепи шел постоянный ток  $I_0 = \frac{U_0}{r}$ , где  $U_0$  — постоянное напряжение цепи (рис. 15.1, б), это значение тока сохранится и для первого мгновения после замыкания цепи, откуда определяется постоянная интегрирования:

$$i(0) = I_0 = A.$$

Следовательно,

$$i = I_0 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Это выражение изображается затухающей кривой — экспонентой, ордината которой при  $t = 0$  равна  $I_0$ . Уменьшение тока  $i$  происходит тем быстрее, чем больше коэффициент затухания  $\frac{r}{L}$  или чем меньше обратная величина  $\tau = \frac{L}{r}$ , имеющая размерность времени и называемая постоянной времени. По истечении времени  $\tau$  с любого момента  $t$  переходный ток

$$i(t + \tau) = I_0 e^{-\frac{r}{L}(t + \tau)} = I_0 e^{-\frac{r}{L}t} e^{-1} = \frac{I_0 e^{-\frac{r}{L}t}}{e},$$

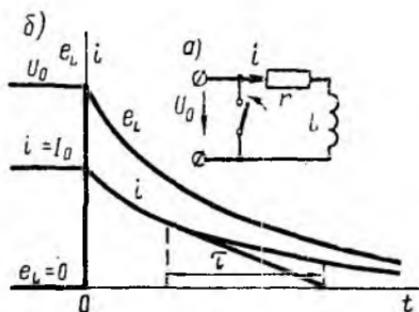


Рис. 15.1

т. е. в  $e = 2,718 \dots$  раз меньше своего первоначального значения. Так как

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau} \quad \text{или} \quad \tau = -\frac{i}{\frac{di}{dt}},$$

постоянная времени равна длине подкасательной в любой точке кривой  $i$  (см. рис. 15.1, б). За время, равное  $4,6 \tau$ , переходный ток затухает до значения  $I_0 e^{-4,6} \approx 0,01 I_0$ . Так как переходный ток при коротком замыкании равен свободному току и для других переходных процессов в этой цепи, для большинства инженерных задач можно считать, что переходный процесс за время  $4\tau \div 5\tau$  практически заканчивается. Постоянная времени цепей обычно невелика; для катушек без ферромагнитных сердечников она составляет десятые доли секунды.

В короткозамкнутой цепи появляется э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -LI_0 \left( -\frac{r}{L} \right) e^{-\frac{r}{L}t} = U_0 e^{-\frac{r}{L}t},$$

поддерживающая ток. Эта э. д. с. возникает при коротком замыкании цепи скачкообразно, принимая значение  $U_0$  при  $t = 0$  (см. рис. 15.1 б).

Энергия, расходуемая на нагрев сопротивления  $r$  цепи за время переходного процесса

$$W = \int_0^{\infty} r i^2 dt = r I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{L}t} dt = \frac{1}{2} L I_0^2,$$

равна энергии, запасенной в индуктивности до замыкания цепи.

Процессы будут протекать аналогично и при коротком замыкании цепи переменного тока, но тогда  $I_0$  будет мгновенным значением тока цепи в момент замыкания.

## 2. Замыкание цепи на добавочное сопротивление

Предполагается, что цепь  $r, L$ , отключаясь от источника напряжения  $U_0$ , замыкается на добавочное сопротивление  $R$  без предварительного размыкания цепи, что можно осуществить с помощью переключателя, схематически показанного на рис. 15.2, а. Для тока цепи после переключения может быть использовано полученное в п. 1 выражение, но сопротивление цепи теперь равно  $r + R$ :

$$i = I_0 e^{-\frac{r+R}{L}t}.$$

Из-за уменьшения постоянной времени ток будет затухать быстрее (рис. 15.2, б). Э. д. с. самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -LI_0 \left( -\frac{r+R}{L} \right) e^{-\frac{r+R}{L}t} = \frac{r+R}{r} U_0 e^{-\frac{r+R}{L}t}$$

поддерживает в цепи ток  $i = \frac{e_L}{r+R}$ . Значение э. д. с. в первый момент после переключения

$$e_L(0) = \frac{r+R}{r} U_0$$

больше напряжения  $U_0$  во столько раз, во сколько увеличилось сопротивление цепи. Это явление называется перенапряжением.

Казалось бы, что процесс размыкания цепи можно рассматривать как замыкание цепи на добавочное сопротивление  $R = \infty$ ; но при этом перенапряжение, а следовательно, и напряжение на вы-

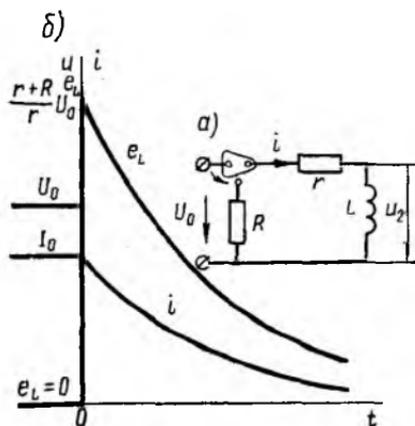


Рис. 15.2

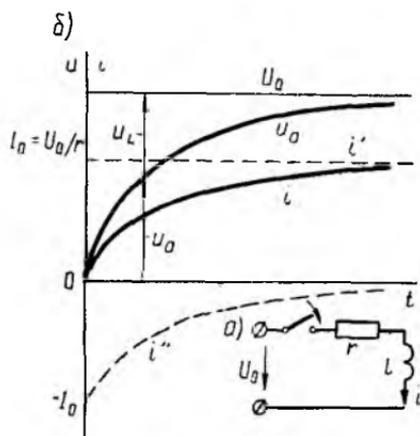


Рис. 15.3

ключателе должно в первый момент равняться бесконечности, чего быть не может. В действительности под воздействием возрастающего напряжения произойдет пробой промежутка между контактами выключателя, и в цепь окажется включенным увеличивающееся по мере разведения контактов сопротивление электрической дуги. Цепь и ее уравнение становятся нелинейными, и расчет не может быть выполнен элементарным путем. Эта задача является основной в теории выключающей аппаратуры.

### 3. Включение цепи на постоянное напряжение

При включении цепи  $r, L$  на постоянное напряжение  $U_0$  (рис. 15.3, а) принужденный ток  $i' = \frac{U_0}{r}$ , а переходный ток

$$i = i' + i'' = \frac{U_0}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Ток до переходного процесса, а следовательно, и в первый момент после включения равен нулю:

$$i(0) = \frac{U_0}{r} + A = 0,$$

отсюда

$$A = -\frac{U_0}{r}$$

и

$$i = \frac{U_0}{r} - \frac{U_0}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U_0}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}) = I_0 (1 - e^{-\frac{r}{L}t}),$$

т. е. переходный ток постепенно нарастает до своего окончательного значения  $I_0$  и тем медленней, чем больше постоянная времени  $\tau = \frac{L}{r}$  (рис. 15.3, б); здесь показаны также принужденная и свободная составляющие переходного тока.

Напряжения на участках цепи

$$u_r = ri = U_0 (1 - e^{-\frac{r}{L}t}); \quad u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Следовательно, в первый момент напряжение цепи целиком сосредотачивается на индуктивности и затем постепенно переходит на сопротивление.

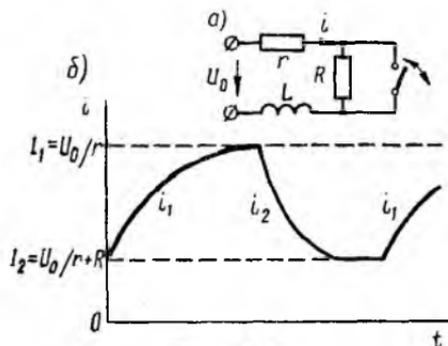


Рис. 15.4

#### 4. Изменение сопротивления цепи

Пусть в цепи  $r + R$ ,  $L$  (рис. 15.4, а) рубильник то замыкается, шунтируя резистор  $R$ , то размыкается, вновь включая этот резистор, причем промежутки между переключениями больше времени

практического установления процесса. Тогда принужденный ток меняется от значения

$$I_1 = \frac{U_0}{r} \text{ до } I_2 = \frac{U_0}{r+R},$$

и переходный ток после замыкания рубильника

$$i_1 = I_1 + A_1 e^{-\frac{r}{L}t}, \quad i_1(0) = I_1 + A_1 = I_2, \\ A_1 = -(I_1 - I_2).$$

Окончательно

$$i_1 = I_1 - (I_1 - I_2) e^{-\frac{r}{L}t}.$$

После размыкания переходный ток

$i_2 = I_2 + A_2 e^{-\frac{r+R}{L}t}$ ,  $i_2(0) = I_2 + A_2 = I_1$ , откуда  $A_2 = I_1 - I_2$ ,  
и окончательно

$$i_2 = I_2 + (I_1 - I_2) e^{-\frac{r+R}{L}t}.$$

График изменения тока в цепи изображен на рис. 15.4, б; процесс после размыкания рубильника устанавливается быстрее, так как остоянная времени цепи меньше, чем после замыкания.

### 5. Включение цепи на синусоидальное напряжение

Пусть цепь  $r, L$  включается на синусоидальное напряжение  $= U_m \sin(\omega t + \psi)$  (рис. 15.5, а). Тогда значение напряжения в момент включения  $u(0) = U_m \sin \psi$  определяется величиной начальной

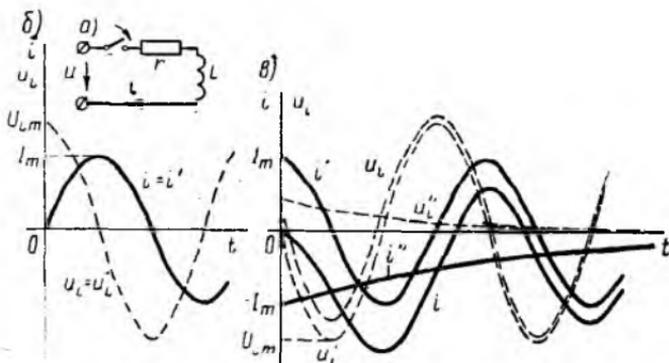


Рис. 15.5

фазы  $\psi$ , которая в этом случае называется также ф а з о й в к л ю ч е н и я. Принужденный ток

$$i' = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t + \psi - \arctg \frac{\omega L}{r}\right) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Переходный ток

$$i = i' + i'' = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{r}{L} t},$$

$$i(0) = \frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) + A = 0, \text{ откуда } A = -\frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi),$$

и окончательно

$$i = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L} t}.$$

Переходное напряжение на сопротивлении пропорционально току  $u_a = ri$ , а на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{\omega L}{z} U_m \sin\left(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r}{z} U_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L} t}.$$

При включении в момент, когда принужденный ток равен нулю, например при  $\psi - \varphi = 0$ ,

$$i = \frac{U_m}{z} \sin \omega t \quad \text{и} \quad u_L = \frac{\omega L}{z} U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. свободного тока и свободных напряжений на участках цепи нет, и сразу после включения наступает установившийся процесс (рис. 15.5, б).

В общем случае на синусоидальные установившиеся напряжения на участках цепи и ток налагаются свободные составляющие, значения

которых уменьшаются по показательному закону. В результате ток и напряжения  $u_a$  и  $u_L$  в течение некоторых промежутков времени могут превосходить их максимальные значения  $I_m$ ,  $U_{am}$  и  $U_{Lm}$  при установившемся режиме, т. е. могут возникнуть большой ток, называемый сверхтоком, и перенапряжения. Их величина зависит от фазы включения  $\psi$  и от постоянной времени  $\tau = \frac{L}{r}$ , определяющих соответственно, начальные значения свободных составляющих и скорость их уменьшения. Так, при включении в момент, когда принужденный ток получает максимальное значение  $I_m = \frac{U_m}{Z}$ , например при  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ,

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z} e^{-\frac{r}{L}t},$$

$$u_L = -\frac{\omega L}{Z} U_m \sin \omega t + \frac{r}{Z} U_m e^{-\frac{r}{L}t}.$$

При большой постоянной времени получается большой сверхток (рис. 15.5, в), однако он не может превзойти двойную амплитуду  $2I_m$  установившегося тока. Аналогично поведение  $u_a = ri$ ; перенапряжение же для  $u_L$  меньше, так как в этом случае  $r$  и  $u_L''$  малы.

### § 15.3. Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления и емкости

#### 1. Короткое замыкание цепи

При коротком замыкании цепи с последовательным соединением  $r$  и  $C$  (рис. 15.6, а)

$$ri + u_C = 0;$$

так как  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , уравнение для переходного емкостного напряжения  $u_C$ , равного в этом случае его свободному значению  $u_C''$ , будет

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$rCp + 1 = 0$$

имеет корень  $p = -\frac{1}{rC}$ , тогда

$$u_C = u_C'' = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{rC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $\tau = rC$  — постоянная времени этой цепи. Если начальное напряжение на емкости было равно  $U_0$ , оно сохранится и для первого мгновения после замыкания (см. § 15.1), откуда определится постоянная интегрирования:

$$u_C(0) = A = U_0.$$

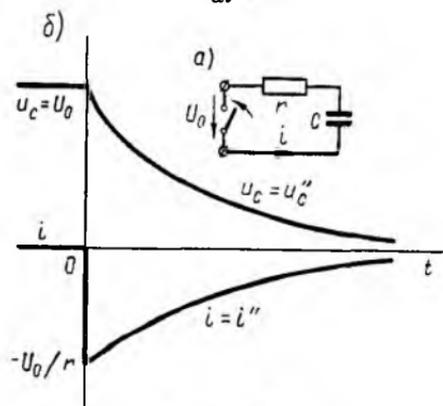


Рис. 15.6

Следовательно, напряжение на емкости убывает по экспоненте (рис. 15.6, б):

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Ток

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CU_0 \left( -\frac{1}{rC} \right) e^{-\frac{t}{rC}} = -\frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{rC}}$$

возникает при коротком замыкании цепи скачкообразно, принимая значение  $-\frac{U_0}{r}$ , а затем убывает по тому же экспоненциальному закону.

Так как это ток разряда, знак его отрицательный.

Энергия, расходуемая на нагрев сопротивления  $r$  за время переходного процесса,

$$W = \int_0^{\infty} ri^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{U_0^2}{r} e^{-\frac{2t}{rC}} dt = \frac{1}{2} CU_0^2,$$

т. е. равна энергии, запасенной в емкости до замыкания цепи.

## 2. Включение цепи на постоянное напряжение

При включении цепи  $r, C$  на постоянное напряжение  $U_0$  (рис. 15.7, а) емкость будет заряжаться до принужденного напряжения  $u_C = U_0$ . Тогда переходное напряжение

$$u_C = u_C' + u_C'' = U_0 + A e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Напряжение на емкости до переходного процесса, а следовательно, и в первый момент после включения равно нулю:

$$u_C(0) = U_0 + A = 0,$$

откуда  $A = -U_0$  и

$$u_C = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{rC}} = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right),$$

т. е. напряжение на емкости постепенно нарастает до своего окончательного значения и тем медленней, чем больше постоянная времени  $\tau = rC$  (рис. 15.7, б). Ток зарядки

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CU_0 \left( \frac{1}{rC} \right) e^{-\frac{t}{rC}} = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{t}{rC}}$$

при включении цепи возникает скачком и изменяется по тому же показательному закону, что и ток разряда, но имеет положительный знак. Следовательно, энергия, расходуемая на нагрев сопротивления за

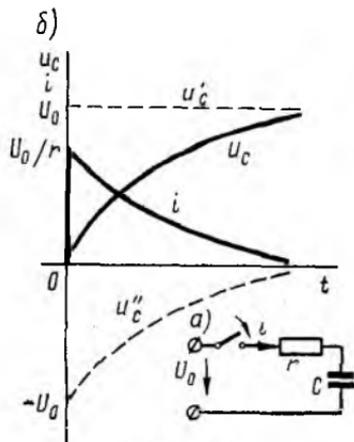


Рис. 15.7

время переходного процесса, независимо от величины  $r$  будет такой же как и в случае разряда, т. е.  $W = 1/2 CU_0^2$ , и равна энергии, которая запасается в емкости при ее зарядке.

Интересно отметить, что при зарядке конденсатора постоянным током  $I_0$ , например от источника тока с пренебрежимо малой внутренней проводимостью, время зарядки до заданного напряжения  $U$  было бы  $t = \frac{CU_0}{I_0}$ , т. е. конечным, а потери в сопротивлении  $W = rI_0^2 t$  при малом  $r$  будут малы.

### 3. Включение цепи на синусоидальное напряжение

При включении цепи  $r, C$  на синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , где  $\psi$  — фаза включения (рис. 15.8, а), при-

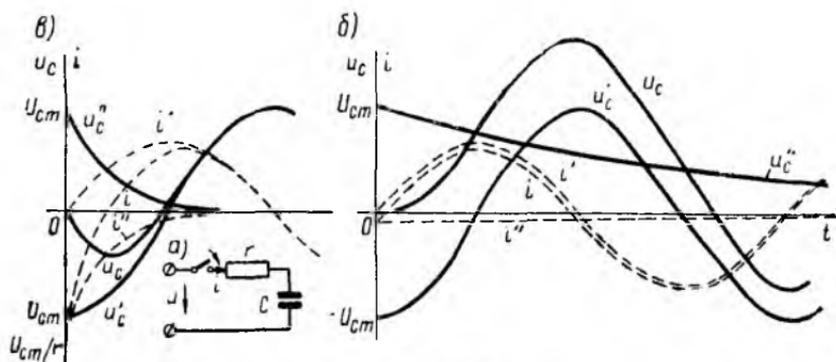


Рис. 15.8

нуженное напряжение на емкости

$$u_c = \frac{1}{\omega C} \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \psi + \arctg \frac{1}{r\omega C} - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Переходное напряжение

$$u_c = u_c' + u_c'' = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A e^{-\frac{t}{rC}},$$

$$u_c(0) = U_{Cm} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A = 0,$$

откуда постоянная интегрирования

$$A = -U_{Cm} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

окончательно

$$u_C = U_{Cm} \sin \left( \omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) - U_{Cm} \sin \left( \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{t}{rC}}.$$

переходный ток цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I_m \sin \left( \omega t + \psi - \varphi \right) + \frac{I_m}{r\omega C} \sin \left( \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{t}{rC}}.$$

При включении в тот момент, когда принужденное напряжение на емкости равно нулю, например при  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ,

$$u_C = U_{Cm} \sin \omega t \quad \text{и} \quad i = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. сразу после включения наступает установившийся процесс.

В общем случае на синусоидальные установившиеся напряжение на емкости и ток цепи налагаются свободные составляющие, значения которых уменьшаются по показательному закону. В результате ток  $i$  и напряжения  $u_a = ri$  и  $u_C$  в течение некоторых промежутков времени могут превосходить максимальные значения  $I_m$ ,  $U_{am}$ ,  $U_{Cm}$ . Величины сверхтока и перенапряжений зависят от фазы включения  $\psi$  и от постоянной времени  $rC$ , определяющих, соответственно, начальные значения свободных составляющих и скорость их уменьшения.

При включении в тот момент, когда принужденное напряжение на емкости получает максимальное значение  $U_{Cm}$ , а принужденный ток равен нулю, например при  $\psi - \varphi = 0$ ,

$$u_C = U_{Cm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + U_{Cm} e^{-\frac{t}{rC}},$$

$$i = I_m \sin \omega t - \frac{I_m}{r\omega C} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

В этом случае при большой постоянной времени  $rC$  получается большое перенапряжение на емкости, равное в пределе двойной амплитуде  $2U_{Cm}$  установившегося напряжения на емкости, но малый сверхток (рис. 15.8, б). При малой постоянной времени может получиться сверхток  $i(0) = \frac{U_{Cm}}{r}$ , во много раз превосходящий амплитуду  $I_m$  тока установившегося режима, но тогда перенапряжения на емкости практически не будет (рис. 15.8, в).

## § 15.4. Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления, индуктивности и емкости

### 1. Короткое замыкание цепи

Как было показано в § 15.1, решение задачи короткого замыкания до определения постоянных интегрирования дает выражение для свободной составляющей тока или напряжения в цепи.

Пусть емкость, заряженная до напряжения  $U_0$ , замыкается на цеп с последовательным соединением сопротивления и индуктивность (рис. 15.9, а). Тогда уравнение по второму закону Кирхгофа будет однородным:

$$ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0;$$

так как  $i = C \frac{du_C}{dt}$ ,

$$rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{du_C^2}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{r}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

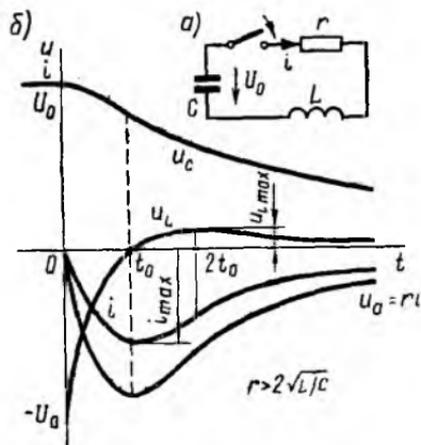


Рис. 15.9

Если  $\frac{r^2}{4L^2} \neq \frac{1}{LC}$ , т. е.  $r \neq 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , корни будут различными:  $p_1 \neq p_2$ . В этом случае решение дифференциального уравнения

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

а ток цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CA_1 p_1 e^{p_1 t} + CA_2 p_2 e^{p_2 t}.$$

В момент  $t = 0$  напряжение на емкости и ток индуктивности, равный току всей цепи, будут такими же, как и до замыкания:

$$u_C(0) = A_1 + A_2 = U_0, \quad i(0) = CA_1 p_1 + CA_2 p_2 = 0,$$

откуда постоянные интегрирования

$$A_1 = -\frac{p_2 U_0}{p_1 - p_2}, \quad A_2 = \frac{p_1 U_0}{p_1 - p_2}$$

и, следовательно, ток и напряжения на участках будут:

$$i = -\frac{p_1 p_2 C U_0}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{2L \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

$$\begin{aligned} u_a = r i, \quad u_C &= -\frac{p_2 U_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1 U_0}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} = \\ &= -\frac{U_0}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \end{aligned}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Характер переходного процесса зависит от соотношения между параметрами  $r$ ,  $L$  и  $C$  цепи.

1. Если  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , корни  $p_1$  и  $p_2$  будут вещественными, причем  $p_1 < 0$ ,  $p_2 < 0$ ,  $|p_1| < |p_2|$ . Это значит, что все вычисленные выше величины состоят из алгебраической суммы двух экспонент, имеющих разные знаки, причем первая экспонента затухает медленней, чем вторая. В результате (рис. 15.9, б) напряжение конденсатора, начиная с  $U_0$ , непрерывно убывает, оставаясь всегда положительным, так как его первая экспонента положительная и больше второй отрицательной. Ток  $i$  цепи и напряжение  $u_a = ri$  на сопротивлении, начинаясь с нуля, всегда отрицательны, что соответствует току разряда. Напряжение  $u_L$  на индуктивности возникает скачком, принимая значение  $-U_0$ ; проходит через нуль в момент  $t_0$  при равенстве значений своих экспонент, т. е. при  $p_1 e^{p_1 t_0} = p_2 e^{p_2 t_0}$ , откуда

$$t_0 = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2},$$

и затем становится положительным. Так как  $u_L$  пропорционально производной  $\frac{di}{dt}$ , в момент  $t = t_0$  абсолютное значение тока проходит через максимум. Приравняв производную  $\frac{du_L}{dt}$  нулю, можно видеть, что  $u_L$  имеет максимум при  $t = 2t_0$  (см. рис. 15.9, б). Рассмотренный вид разряда называется **а п е р и о д и ч е с к и м**.

Энергетическая сторона аperiodического процесса заключается в следующем.

Так как напряжение  $u_C$  непрерывно уменьшается, емкость отдает энергию. Индуктивность с ростом тока накапливает энергию, но, начиная с  $t = t_0$ , ток убывает и индуктивность постепенно отдает энергию. В течение всего процесса сопротивление рассеивает потребляемую им энергию.

2. Пусть  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Введя обозначения

$$\frac{r}{2L} = \beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \omega,$$

можно переписать выражение для корней характеристического уравнения следующим образом:

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = -\beta \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm j\omega.$$

Так как  $\omega$  — число вещественное, корни  $p_1$  и  $p_2$  будут комплексными.

После подстановки значений  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и очевидных преобразований выражения для тока и напряжений на участках получают вид:

$$i = -\frac{U_0}{2j\omega L} [e^{(-\beta + j\omega)t} - e^{(-\beta - j\omega)t}] = -\frac{U_0}{\omega L} e^{-\beta t} \sin \omega t,$$

$$u_R = ri, \quad u_C = -\frac{U_0}{2j\omega} [(-\beta - j\omega) e^{(-\beta + j\omega)t} - (-\beta + j\omega) e^{(-\beta - j\omega)t}] = \\ = U_0 e^{-\beta t} \left( \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right).$$

Пусть  $\frac{\beta}{\omega} = \operatorname{ctg} \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ , тогда

$$u_C = U_0 e^{-\beta t} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \omega t + \cos \omega t \right) = \frac{U_0}{\sin \theta} e^{-\beta t} \sin (\omega t + \theta).$$

Аналогично

$$u_L = -\frac{U_0}{2j\omega} [(-\beta + j\omega) e^{(-\beta + j\omega)t} - (-\beta - j\omega) e^{(-\beta - j\omega)t}] = \\ = \frac{U_0}{\sin \theta} e^{-\beta t} \sin (\omega t - \theta).$$

Ток и напряжения цепи, в которой  $r = 0$  и, следовательно,  $\beta = 0$ ,

$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , будут:

$$i = -\frac{U_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t, \quad u_R = ri, \quad u_C = U_0 \sin \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right), \\ u_L = U_0 \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Следовательно, если бы в цепи не происходило рассеяние энергии, ток и напряжения на участках были бы синусоидальными функциями времени, т. е. имели бы место так называемые собственные незатухающие колебания, угловая частота которых равна резонансной частоте этой цепи  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а период определяется по формуле Томсона:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Для незатухающих колебаний на рис. 15.10 изображены векторная диаграмма и график мгновенных значений тока и напряжений на индуктивности и емкости, которые аналогичны имеющим место при резонансе в цепи с последовательным соединением  $r$ ,  $L$  и  $C$  (см. рис. 7.4). Следовательно, и здесь происходит полный обмен энергиями между  $C$  и  $L$ .

Если в цепи есть сопротивление  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , разряд, как видно из приведенных выражений для тока и напряжений, также носит колебательный характер, но амплитуды тока и напряжений постепенно уменьшаются, так как  $e^{-\beta t}$  с ростом  $t$  стремится к нулю.

Угловая частота этих собственных затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} < \omega_0,$$

период собственных затухающих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0$ .

Отношение мгновенного значения какой-либо величины, например тока, к значению этой величины через период  $T$ :

$$\Delta = \left( \frac{U_0}{\omega L} e^{-\beta t} \sin \omega t \right) : \left[ \frac{U_0}{\omega L} e^{-\beta(t+T)} \sin \omega(t+T) \right] = e^{\beta T}$$

называется декрементом колебания.

На рис. 15.11 изображен график мгновенных значений тока и напряжений для затухающих колебаний.

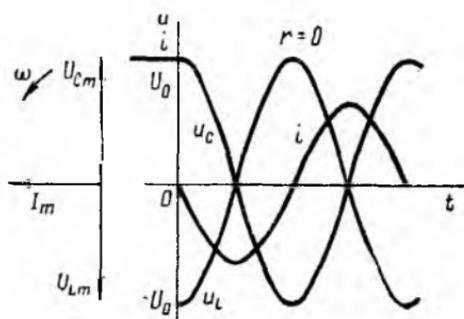


Рис. 15.10

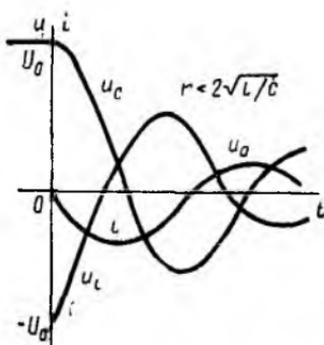


Рис. 15.11

Энергетический процесс заключается, в основном, в обмене энергиями между емкостью и индуктивностью с непрерывным рассеянием энергии сопротивлением. Переходный процесс закончится, когда энергия  $\frac{1}{2} CU_0^2$ , первоначально запасенная в емкости, будет целиком рассеяна.

3. Если  $r \rightarrow 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , частота  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} \rightarrow 0$  и стоящая в выражении тока в п. 2 дробь  $\frac{\sin \omega t}{\omega} \rightarrow \frac{0}{0}$ . Раскрытие неопределенности

$$\left( \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)_{\omega \rightarrow 0} = \left( \frac{t \cos \omega t}{1} \right)_{\omega \rightarrow 0} = t$$

дает для этого критического случая

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\frac{r}{2L} t}.$$

Характер разряда будет аperiодическим.

## 2. Включение цепи на постоянное и переменное напряжение

При включении цепи  $r, L, C$  на постоянное напряжение (рис. 15.12, а) конденсатор будет заряжаться, и его установившееся напряжение  $u_C = U_0$ . Тогда

$$u_C = u_C' + u_C'' = U_0 + A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t},$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CA_1 \rho_1 e^{\rho_1 t} + CA_2 \rho_2 e^{\rho_2 t}.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий:

$$u_C(0) = U_0 + A_1 + A_2 = 0 \quad \text{и} \quad i(0) = CA_1 \rho_1 + CA_2 \rho_2 = 0.$$

Выражение для  $u_C(0)$  отличается от выражения для  $u_C(0)$  при коротком замыкании (п. 1) только знаком перед  $U_0$ , выражения для  $i(0)$

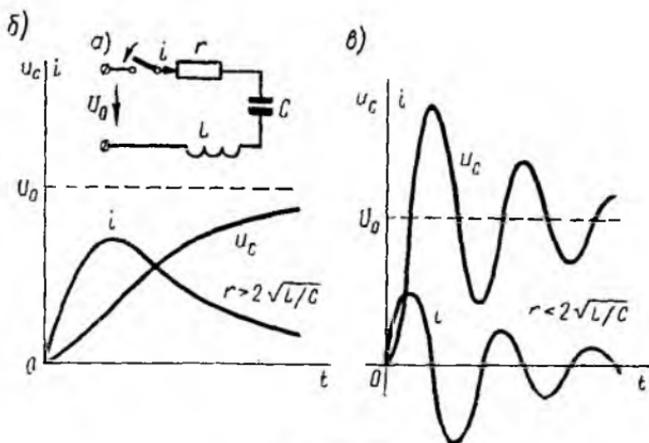


Рис. 15.12

совпадают. Тогда постоянные интегрирования будут такими же, но имеющими обратный знак, а следовательно, свободные составляющие тока и напряжений при включении также будут отличаться от случая короткого замыкания только знаком. Тогда  $i$  и  $u_L$  равны своим свободным составляющим  $i''$  и  $u_L''$ , напряжение же  $u_C$  на емкости представляет собой сумму принужденной  $U_0$  и свободной  $u_C''$  составляющих; поэтому на емкости в периодическом случае возникает перенапряжение, равное в пределе  $2U_0$ .

График мгновенных значений для аperiodического случая показан на рис. 15.12, б, для периодического — на рис. 15.12, в.

При включении той же цепи на синусоидальное напряжение частоты  $\omega_1$  ход решения остается тем же; переходные ток и напряжения на участках будут представлять собой сумму принужденных синусоидальных и свободных затухающих составляющих, носящих характер аperiodический или колебательный с собственной частотой  $\omega$ , в общем случае не равной частоте  $\omega_1$ . Переходный процесс в отличие от предыдущего случая будет зависеть также от момента включения.

## § 15.5. Переходные процессы в сложных цепях

### 1. Общий случай сложных цепей

Как было указано в § 15.1, в общем случае разветвленной цепи исчет переходных процессов заключается в составлении системы независимых уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов ветвей. Затем методом подстановки из одних уравнений в другие исключаются отдельные неизвестные с тем, чтобы конечное уравнение было дифференциальным уравнением с одним известным. Его целесообразно получить или для тока какой-либо индуктивности, или для напряжения на емкости. Это облегчит определение постоянных интегрирования из начальных условий и тогда напряжение на индуктивности и ток в емкости определяются путем дифференцирования, а не интегрирования, связанного с появлением новых постоянных.

Известно, что в общем случае дифференциальные уравнения с одним неизвестным, полученные для любого неизвестного системы, будут иметь одно и то же характеристическое уравнение. Для электрических цепей это ясно и из того, что уравнения по Кирхгофу должны соблюдаться для любого момента времени, что возможно, когда свободные составляющие имеют одинаковые показатели, т. е. одинаковую зависимость от времени, и отличаются только постоянными коэффициентами.

### 2. Пример расчета переходного процесса в сложной цепи

В качестве простого примера сделан расчет переходного процесса при включении цепи рис. 15.13 на постоянное напряжение  $U_0$ . Основным неизвестным выбирается напряжение  $u_C$  на емкости. Уравнения (одно по первому и два по второму законам Кирхгофа) имеют вид:

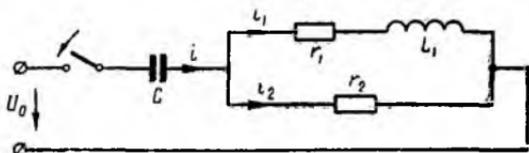


Рис. 15.13

$$i = C \frac{du_C}{dt} = i_1 + i_2, \quad (15.1)$$

$$u_C + r_2 i_2 = U_0, \quad (15.2)$$

$$u_C + r_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} = U_0. \quad (15.3)$$

Ток  $i_2$  определяется из (15.2) и результат подставляется в выражение для  $i_1$ , полученное из (15.1):

$$i_2 = \frac{U_0 - u_C}{r_2}, \quad (15.4)$$

$$i_1 = C \frac{du_C}{dt} - i_2 = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C - U_0}{r_2}. \quad (15.5)$$

Затем определяется

$$\frac{di_1}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{r_2} \frac{du_C}{dt}, \quad (15.1)$$

после чего выражения (15.5) и (15.6) подставляются в (15.3):

$$u_C + r_1 C \frac{du_C}{dt} + \frac{r_1}{r_2} u_C - \frac{r_1}{r_2} U_0 + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{r_2} \frac{du_C}{dt} = U_0.$$

Окончательно

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r_1 r_2 C + L}{r_2 LC} \frac{du_C}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{r_2 LC} u_C = \frac{r_1 + r_2}{r_2 LC} U_0.$$

Получилось уравнение второго порядка, что и следовало ожидать так как в цепь включены одна индуктивность и одна емкость.

Принужденное напряжение  $u'_C = U_0$ ; если характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{r_1 r_2 C + L}{r_2 LC} p + \frac{r_1 + r_2}{r_2 LC} = 0$$

имеет различные корни, переходное напряжение

$$u_C = u'_C + u''_C = U_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий:

$$u_C(0) = 0, \quad i(0) = \left| C \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U_0}{r_2}.$$

После определения  $u_C$  находят  $i$ , затем  $i_2$  из (15.4) и  $i_1 = i - i_2$ . В зависимости от соотношения параметров возможен аперiodический или колебательный процесс.

### 3. Переходные процессы в цепях со взаимной индукцией

В качестве простого примера рассматривается включение трансформатора без сердечника на постоянное напряжение  $U_0$ . Трансформатор нагружен индуктивностью и резистором (рис. 15.14). Система уравнений для первичной и вторичной цепи имеет вид (см. § 11.4):

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = U_0, \quad (15.7)$$

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0, \quad (15.8)$$

где  $r_2$  и  $L_2$  — суммарные сопротивление и индуктивность вторичной обмотки трансформатора и нагрузки.

Для получения дифференциального уравнения с одним неизвестным  $i_1$  необходимо продифференцировать оба уравнения по  $t$  и умножить первое полученное уравнение на  $L_2$ , а второе на  $M$ . Тогда вычитание второго из первого дает:

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + r_1 L_2 \frac{di_1}{dt} - r_2 M \frac{di_2}{dt} = 0,$$

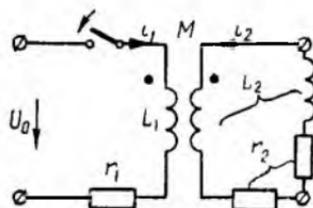


Рис. 15.14

после подстановки сюда из выражения (15.7)

$$M \frac{di_2}{dt} = U_0 - r_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt},$$

кончателно

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (r_1 L_2 + r_2 L_1) \frac{di_1}{dt} + r_1 r_2 i_1 = r_2 U_0.$$

Таким образом, получилось уравнение второго порядка. Хотя эквивалентная схема воздушного трансформатора содержит три объединяемых индуктивности  $L_1$ ,  $L_2$  и  $M$  (см. рис. 11.9), но так как токи в них связаны первым законом Кирхгофа, можно задать только два независимых начальных условия, что и определяет порядок уравнения.

Дальнейший ход решения ясен, поэтому можно ограничиться общими соображениями. Так как подрадикальная величина в выражении корней характеристического уравнения

$$(r_1 L_2 + r_2 L_1)^2 - 4(L_1 L_2 - M^2) r_1 r_2 = (r_1 L_2 - r_2 L_1)^2 + 4r_1 r_2 M^2 > 0,$$

то последнее имеет отрицательные вещественные корни, т. е. процесс протекает аperiodически. Это ясно также из того, что цепь носит индуктивный характер и не имеет емкостей, наличие которых необходимо для обмена энергиями, т. е. для колебательного процесса.

Начальные условия для токов из-за индуктивного характера цепи будут:  $i_1(0) = 0$  и  $i_2(0) = 0$ . Они позволяют определить постоянные интегрирования. Принужденные токи  $i_1' = \frac{U_0}{r}$ ,  $i_2' = 0$ , так как после установления в первичной цепи постоянного тока  $i_1'$  э. д. с. взаимной индукции  $e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$  во вторичной цепи индуцироваться не будет.

#### 4. Достоинства и недостатки классического метода

Классический метод расчета переходных процессов привычен, так как он является общепринятым в других областях науки и техники, и нагляден, потому что при преобразованиях видна соответствующая физическая картина.

Хотя постоянные интегрирования можно находить на основании заданных значений функций не только в начальный, но и в любые другие моменты времени, необходимость определения постоянных интегрирования усложняет использование классического метода. Оно особенно затруднительно для уравнений высоких порядков. Кроме того, как видно из приведенных примеров расчета переходных процессов в разветвленных цепях, при переходе от цепей, описываемых уравнением первого порядка, к системам второго порядка увеличиваются затруднения, связанные с преобразованием системы в уравнение с одним неизвестным. При дальнейшем повышении порядка отыскание нужных замен, связанное с промежуточным дифференцированием, еще более затрудняется.

Так как решение дифференциального уравнения приводит к решению алгебраического характеристического уравнения, естественно

стремление сразу представить систему исходных уравнений цепей в алгебраической форме, что и осуществляется в спектральном и операторном методах (см. гл. XVII).

## ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### § 16.1. Устойчивость режима в нелинейной цепи

Переходные процессы в линейных цепях постоянного и периодического тока заканчиваются установившимся режимом также постоянного или периодического тока. В нелинейных же цепях возможен периодический ток при постоянном напряжении (см. § 16.3), а также явление неустойчивости режима в цепях постоянного тока.

Пусть в установившемся режиме нелинейная цепь постоянного тока находится в равновесии — токи и напряжения ветвей цепи по-

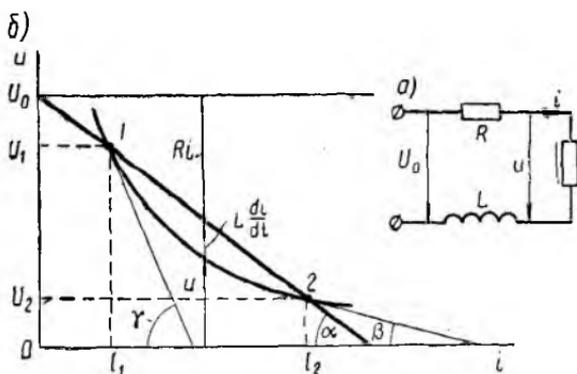


Рис. 16.1

стоянны. На практике в цепи возможны кратковременные внешние воздействия, выводящие ее из состояния равновесия. Если после прекращения этих воздействий цепь возвращается в исходное состояние, равновесие является устойчивым, если не возвращается — равновесие считается неустойчивым. В отличие от линейной цепи, в которой при заданных условиях возможен только один устойчивый режим, нелинейная цепь может иметь несколько состояний равновесия — устойчивых и неустойчивых.

Далее задача устойчивости рассматривается на простом примере цепи рис. 16.1, а с последовательным соединением участков с линейным сопротивлением  $R$ , линейной индуктивностью  $L$  и нелинейным сопротивлением с падающей вольтамперной характеристикой (рис. 16.1, б). Такую характеристику имеет, например, электрическая дуга. К цепи приложено постоянное напряжение  $U_0$ ; на рис. 16.1, б нанесена также прямая  $U_0 - Ri$ , пересекающая характеристику дуги в точках 1 и 2. Этим двум точкам соответствуют, очевидно, равновесные режимы по

янного тока  $I$ , когда по второму закону Кирхгофа

$$U_0 = RI + U, \quad (16.1)$$

е  $U$  — напряжение на дуге; для точки 1:  $I = I_1$ ,  $U = U_1$ , для точки 2:  $= I_2$  и  $U = U_2$ .

Пусть ток цепи получил кратковременное приращение  $\Delta_0 i$ . Ему отвечает приращение напряжения на дуге  $\Delta_0 u$ . Тогда начнется переходный процесс, во время которого приращения  $\Delta i$  и  $\Delta u$  изменятся. Ток цепи и напряжение на дуге будут  $i = I + \Delta i$ ,  $u = U + \Delta u$ .

а катушке возникает напряжение  $L \frac{di}{dt}$ , уравновешивающее ее э. д. с. самоиндукции. Тогда

$$U_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + u, \quad (16.2)$$

откуда

$$L \frac{di}{dt} = (U_0 - Ri) - u.$$

Если  $U_0 - Ri > u$ , что имеет место на участке 1—2 характеристики,  $L \frac{di}{dt} > 0$ , т. е. ток будет возрастать до значения  $I_2$  равновесного режима в точке 2. Если ток получит кратковременное значение, меньшее, чем  $I_1$ , или большее, чем  $I_2$ , то  $U_0 - Ri < u$ ,  $L \frac{di}{dt} < 0$ , т. е. ток будет уменьшаться в первом случае до нуля, во втором — до равновесного значения  $I_2$ . Таким образом, в точке 1 равновесие неустойчиво, в точке 2 — устойчиво.

Математический анализ устойчивости упрощается, когда возможны лишь малые отклонения  $\Delta i$  тока от положения равновесия. Это позволяет применить метод малых приращений, считая дифференциальное сопротивление  $R_x = \frac{du}{di}$  нелинейного элемента вблизи равновесных точек постоянным. Тогда

$$\Delta u = \left| \frac{du}{di} \right| \Delta i = R_x \Delta i$$

и так как  $\frac{di}{dt} = \frac{d\Delta i}{dt}$ , уравнение (16.2) получает вид:

$$U_0 = R(I + \Delta i) + L \frac{d\Delta i}{dt} + U + R_x \Delta i.$$

Вычитание из него уравнения равновесия (16.1) дает линейное уравнение для приращения тока вместо исходного нелинейного уравнения (16.2):

$$L \frac{d\Delta i}{dt} + (R + R_x) \Delta i = 0.$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$Lp + (R + R_x) = 0, \quad p = -\frac{R + R_x}{L},$$

и решение для  $\Delta i$  с учетом его начального значения  $\Delta_0 i$  будет:

$$\Delta i = \Delta_0 i e^{-\frac{R+R_d}{L} t}.$$

Для падающей вольтамперной характеристики нелинейного элемента  $R_d < 0$ . Если  $R + R_d > 0$ , т. е. угол  $\alpha$ , образуемый прямой  $U_0 - Ri$  с осью абсцисс, больше угла  $\beta$ , образуемого касательной к характеристике в точке 2 (см. рис. 16.1, б),  $\Delta i$  приближается к нулю с ростом времени  $t$ . Следовательно, точка 2 является точкой устойчивого равновесия.

Если  $R + R_d < 0$ , т. е. угол  $\alpha$  меньше угла  $\gamma$ , образуемого касательной к характеристике в точке 1,  $\Delta i$  с ростом  $t$  увеличивается, т. е. точка 1 является точкой неустойчивого равновесия. Даже весьма малое отклонение от нее приведет при  $\Delta i > 0$  к переходу в точку 2, а при  $\Delta i < 0$  к  $i = 0$ , т. е. к погасанию дуги.

Для анализа устойчивости в общем случае сложной цепи постоянного тока, содержащей участки с нелинейными сопротивлениями и с линейными  $R$ ,  $L$  и  $C$ , можно также пользоваться методом малых perturbаций.

## § 16.2. Методы расчета переходных процессов

В цепях с сосредоточенными параметрами энергия электрического поля в емкостях по существу определяется их зарядами  $q$ , энергия магнитного поля в индуктивностях — их потокосцеплениями  $\Psi$ . В линейных цепях эти величины пропорциональны соответственно напряжению  $u_C = \frac{q}{C}$  и току  $i_L = \frac{\Psi}{L}$ , откуда из невозможности скачков энергии, т. е. ее мгновенного изменения на конечную величину (см. § 15.1), вытекает невозможность скачкообразного изменения как  $q$  и  $\Psi$ , так и  $u_C$  и  $i_L$ . Последнее и использовалось в гл. XV для определения начальных условий при расчете переходных процессов.

В нелинейных цепях зависимости  $q(u_C)$  и  $\Psi(i_L)$  нелинейны; возможны, например при гистерезисе, нулевые значения  $u_C$  и  $i_L$  при ненулевых значениях  $q$  и  $\Psi$ , и наоборот. Поэтому для определения начальных условий на основе невозможности скачкообразного изменения энергии правильней исходить из невозможности скачков  $q$  и  $\Psi$ . Затем, определив зависимости  $q(t)$  и  $\Psi(t)$  и используя кривые  $q(u_C)$  и  $\Psi(i_L)$ , можно найти зависимости  $u_C(t)$  и  $i_L(t)$ .

Переходные процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения не имеют общего метода решения.

Для решения этих уравнений применяются приближенные аналитические, графоаналитические и графические методы. Далее на примерах, имеющих практическое значение, показывается применение следующих основных методов, частично использованных ранее при анализе установившихся режимов в нелинейных цепях:

1. Деление процесса на последовательные интервалы времени внутри которых нелинейное уравнение заменяется линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

2. Линеаризация второстепенных членов уравнения, превращающая уравнение в линейное, с возможностью применения последовательных приближений.

3. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейной характеристики оманой прямой, для прямолинейных участков которой составляются решаются линейные уравнения с последующим припасовыванием редыдущих и последующих участков.

4. Аналитическая аппроксимация нелинейной характеристики, позволяющая получить аналитическое решение дифференциального уравнения переходного процесса.

5. Графическое интегрирование кривой, построенной таким образом, чтобы ограниченная ею площадь была пропорциональной времени, соответствующему каждому значению исследуемой функции; этот метод применим для уравнений первого порядка, допускающих разделение переменных.

### § 16.3. Метод линеаризации интервалов на примере автоколебательной цепи

Автоколебательной цепью называется цепь, в которой возникают периодические незатухающие колебания (переменный ток), хотя она питается от источника постоянного напряжения. Подобное явление возможно только в нелинейной цепи. Например, периодический переменный ток может возникнуть в электрической цепи рис. 16.2. Здесь  $U_0$  — постоянное напряжение источника,  $r_1$  — постоянное сопротивление,  $C$  — конденсатор,  $N$  — газоразрядная неоновая лампа, которая зажигается при напряжении  $U_3$  и гаснет при меньшем его значении  $U_r$ .

В этой цепи периодически происходит зарядка конденсатора до напряжения  $U_3$  и затем разряд на лампу до напряжения  $U_r$ . Таким образом, сопротивление ветви с лампой меняется от некоторого значения  $r$ , когда она горит, до бесконечности при ее погасании; поэтому цепь является нелинейной. Однако задача может быть линеаризована, если разделить весь период на два интервала, для каждого из которых цепь может считаться линейной, — интервал зарядки и интервал разряда конденсатора. Напряжение конденсатора при его зарядке от источника  $U_0$  (см. п. 2 §15.3)

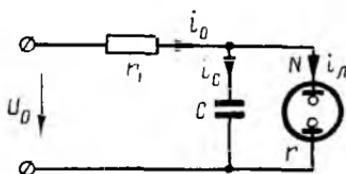


Рис. 16.2

$$u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}},$$

где  $\tau_1 = r_1 C$  — постоянная времени, а  $A$  — постоянная интегрирования. В начальный момент  $u_C(0) = U_r$ , тогда

$$U_0 + A = U_r \quad \text{и} \quad u_C = U_0 - (U_0 - U_r)e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

В конце зарядки

$$u_C(t_1) = U_0 - (U_0 - U_r) e^{-\frac{t_1}{\tau_1}} = U_3,$$

следовательно, время зарядки конденсатора

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{U_0 - U_r}{U_0 - U_3}.$$

В момент  $t = t_1$  лампа зажигается и начинается разряд конденсатора на лампу. Если для этого интервала пренебречь, ввиду относительно большой величины  $r_1$ , током  $i_0$  от источника  $U_0$  и в первом приближении считать сопротивление  $r$  горячей лампы постоянным напряжением на конденсаторе (см. п. 1 § 15.3

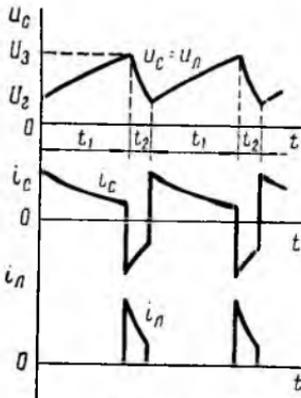


Рис. 16.3

$$u_C = U_3 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}},$$

где  $\tau_2 = rC$  — новая постоянная времени. Так как напряжение конденсатора становится равным  $U_r$  при  $t = t_1 + t_2$ , а

$$U_r = U_3 e^{-\frac{t_2}{\tau_2}},$$

время разряда конденсатора

$$t_2 = \tau_2 \ln \frac{U_3}{U_r}.$$

Период колебательного процесса

$$T = t_1 + t_2 = r_1 C \ln \frac{U_0 - U_r}{U_0 - U_3} + rC \ln \frac{U_3}{U_r}$$

можно регулировать, изменяя  $r_1$  и  $C_1$ .

На рис. 16.3 изображены кривые изменения напряжения на конденсаторе и на лампе ( $u_C = u_n$ ), токов  $i_C$  конденсатора и  $i_n$  лампы.

### § 16.4. Методы расчета переходных процессов на примере включения катушки индуктивности со стальным сердечником на постоянное напряжение

1. Эта задача далее решена методом частичной линеаризации основной кривой  $\Psi(i)$ , т. е. без учета гистерезиса, а также вихревых токов (рис. 16.4, а). При включении катушки на постоянное напряжение  $U_0$  уравнение по второму закону Кирхгофа имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0.$$

Если в зависимости  $i = \frac{\Psi}{L}$  считать, применительно ко второму члену уравнения, статическую индуктивность  $L$  постоянной, уравнение превращается в линейное:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L} \Psi = U_0.$$

Более точные результаты даст то значение  $L$ , которое приобретает индуктивность к концу процесса, когда второй член уравнения велик, например значение  $L_0 = \frac{\Psi_0}{I_0}$ , соответствующее принужденному току  $I_0 = U_0/r$  и потокосцеплению  $\Psi_0$  (рис. 16.4, а); вытекающая отсюда погрешность во втором члене для начальной части процесса не суще-

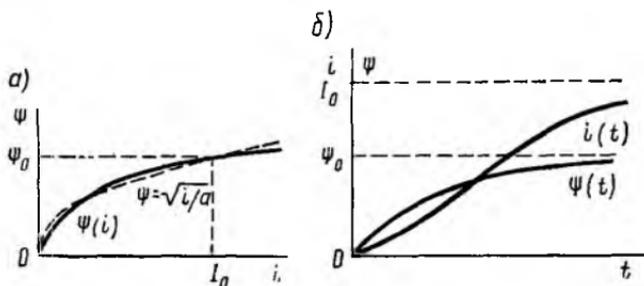


Рис. 16.4

ственно, так как тогда  $ri = \frac{r}{L_0} \Psi$  мало по сравнению с первым членом уравнения.

Тогда аналогично задаче включения линейной цепи  $r, L$  (см. п. 3 § 15.2) переходное потокосцепление будет:

$$\Psi = \Psi_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где постоянная времени  $\tau = \frac{L_0}{r}$ . Зависимость  $\Psi(t)$  показана на рис. 16.4, б; там же изображена соответствующая ей зависимость  $i(t)$ , построенная для отдельных значений  $\Psi$  по кривой  $\Psi(i)$  рис. 16.4, а.

2. Здесь возможно последующее уточнение решения методом графического интегрирования. Из исходного уравнения следует, что потокосцепление в каждый момент времени  $t$  равно

$$\Psi(t) = \int_0^t (U_0 - ri) dt.$$

Поэтому, отложив вниз от ординаты  $U_0$  кривую  $ri(t)$  (рис. 16.5), построенную на основе полученной зависимости  $i(t)$  (см. рис. 16.4, б), можно видеть, что ограниченная этой кривой и осью абсцисс заштрихованная площадь в принятом масштабе пропорциональна  $\Psi_1$  для выбранного момента времени  $t_1$ . Это позволит построить уточненную кривую  $\Psi(t)$  и, если она заметно отличается от исходной экспоненты рис. 16.4, б, положить ее в основу повторного построения искомой зависимости  $i(t)$ .

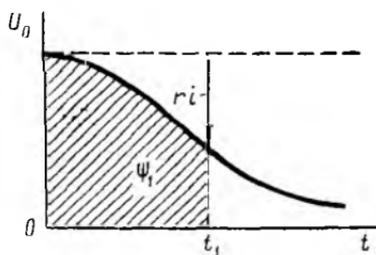


Рис. 16.5

3. Эта задача может быть решена также методом последовательных равных интервалов времени. Сначала

выбирается достаточно малый интервал  $\Delta t$  (чем он меньше, тем точность больше), например равный 5—10% постоянной времени  $\tau_0 = \frac{L_0}{r} = \frac{\Psi_0}{rI_0}$  цепи с параметрами, соответствующими установившемуся процессу.

Процесс характеризуется величинами потокосцепления  $\Psi$  и тока в начале и в конце каждого интервала. Величины для конца  $k$ -го интервала удобно давать с индексом  $k$ , тогда  $k - 1$  будет индексом величины для начала этого интервала, равных их значениям для конца предыдущего интервала.

Тогда дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0, \quad \text{т. е.} \quad d\Psi = (U_0 - ri) dt$$

для  $k$ -го интервала получит следующее приближенное решение для приращения потокосцепления за время каждого интервала:

$$(\Delta\Psi)_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} \approx (U_0 - ri_{k-1}) \Delta t.$$

При использовании основной кривой намагничивания в начале первого интервала ( $t=0$ )  $\Psi=0$  и  $i=0$ ; тогда для него

$$(\Delta\Psi)_1 = U_0 \Delta t = \Psi_1.$$

Соответствующий потокосцеплению  $\Psi_1$  ток  $i_1$  определяется из кривой намагничивания  $\Psi(i)$ . Приращение потокосцепления во втором интервале

$$(\Delta\Psi)_2 = \Psi_2 - \Psi_1 = (U_0 - ri_1) \Delta t,$$

тогда потокосцепление в конце второго интервала  $\Psi_2 = \Psi_1 + (\Delta\Psi)_2$ , для которого по кривой намагничивания определяется ток  $i_2$  и так далее до практического достижения током значения  $I_0 = \frac{U_0}{r}$  установившегося режима. Расчет удобно вести в табличной форме:

$k$	$i_{k-1}$	$U_0 - ri_{k-1}$	$(\Delta\Psi)_k$	$\Psi_k$	$i_k$

По отдельным точкам — значениям  $i_k$  из этой таблицы — может быть построена кривая  $i(t)$  переходного процесса.

4. Эту же задачу можно решить методом кусочно-линейной аппроксимации, заменив кривую  $\Psi(i)$ , соответствующую основной кривой намагничивания, ломаной, состоящей из прямых участков (рис. 16.6, а). Вместо нелинейного уравнения

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0$$

решается линейное, дающее экспоненциальный закон нарастания потокосцепления для каждого прямого участка зависимости  $\Psi(i)$  но с разными постоянными времени. В отличие от метода интервалов

котором конец предыдущего интервала сразу определяет начало ледующего, здесь приходится начало каждого участка припасовать концом предыдущего, откуда определяются постоянные интегрирования.

Пусть кривая  $\Psi(i)$  аппроксимируется ломаной, состоящей из трех частей 0—1, 1—2 и 2—3. Ток и потокосцепление в начале первого участка равны нулю, в его конце и начале второго участка  $I_1$  и  $\Psi_1$ , конце второго  $I_2$  и  $\Psi_2$  и т. д.

Дифференциальные индуктивности  $L = \frac{d\Psi}{di}$ , постоянные для каждого отрезка ломаной, пропорциональны тангенсу его угла  $\alpha$  с осью абсцисс. Следовательно,  $L_1 > L_2 > L_3$  (рис. 16.6, б). При переходе к следующему участку дифференциальная индуктивность изменяется скачком.

Сначала для постоянного тока конца переходного процесса  $I = \frac{U_0}{r}$  по ломаной  $\Psi(i)$  графически определяется соответствующее ему конечное значение потокосцепления  $\Psi_k$ .

Выражения для потокосцепления на участках 0—1, 1—2 и 2—3 линейной аппроксимации очевидны из рис. 16.6, а; соответственно

$$\Psi = L_1 i, \quad \Psi = \Psi_{10} + L_2 i, \quad \Psi = \Psi_{20} + L_3 i,$$

где  $\Psi_{10}$  и  $\Psi_{20}$  определяются пересечением продолжений отрезков 1—2 и 2—3 ломаной с осью ординат.

По второму закону Кирхгофа уравнение для промежутка времени  $0 < t < t_1$ , где  $t_1$  — время роста потокосцепления  $\Psi$  с момента включения цепи до значения  $\Psi_1$ :

$$\frac{d\Psi}{dt} + r \frac{\Psi}{L_1} = U_0.$$

Уравнения для промежутков времени от  $t_1$  до  $t_2$ , где  $t_2$  соответствует росту  $\Psi$  до значения  $\Psi_2$ , и от  $t_2$  до  $t = \infty$ , т. е. до конца переходного процесса, такие же, но в них вместо  $L_1$  стоят  $L_2$  и  $L_3$ . Так как принужденное значение потокосцепления для этой цепи равно  $\Psi_k$ , решения этих уравнений для отдельных участков и соответствующих промежутков времени будут:

для  $0 < \Psi < \Psi_1$  и  $0 < t < t_1$

$$\Psi = \Psi_k + A_1 e^{-\frac{r}{L_1} t} \quad (16.3)$$

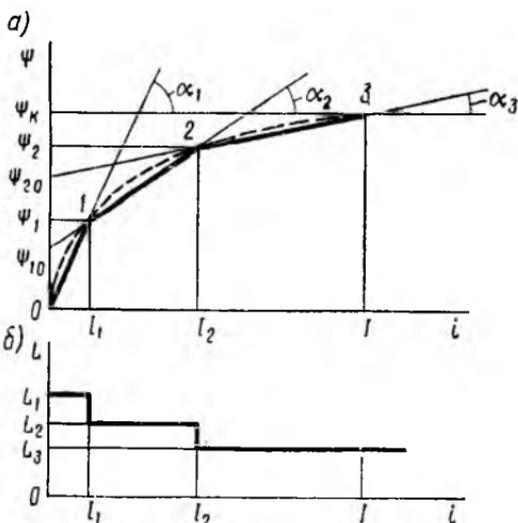


Рис. 16.6

для  $\Psi_1 < \Psi < \Psi_2$  и  $t_1 < t < t_2$

$$\Psi = \Psi_K + A_2 e^{-\frac{r}{L_2}(t-t_1)}, \quad (16.4)$$

для  $\Psi_2 < \Psi < \Psi_K$  и  $t_2 < t < \infty$

$$\Psi = \Psi_K + A_3 e^{-\frac{r}{L_3}(t-t_2)}. \quad (16.5)$$

Припасовка в точках 0, 1 и 2 из-за невозможности скачков  $\Psi$  позволяет определить постоянные интегрирования  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  путем приравнивания потокосцепления  $\Psi$  из уравнения (16.3) нулю для  $t = 0$ , и уравнения (16.4) — потокосцеплению  $\Psi_1$  для  $t = t_1$  и из уравнения (16.5) — потокосцеплению  $\Psi_2$  для  $t = t_2$

$$A_1 = -\Psi_K, \quad A_2 = -(\Psi_K - \Psi_1),$$

$$A_3 = -(\Psi_K - \Psi_2).$$

Тогда уравнения (16.3) и (16.4) после подстановки в них, соответственно,  $t = t_1$  и  $t = t_2$  получают вид:

$$\Psi(t_1) = \Psi_1 = \Psi_K \left(1 - e^{-\frac{r}{L_1} t_1}\right),$$

$$\Psi(t_2) = \Psi_2 = \Psi_K - (\Psi_K - \Psi_1) e^{-\frac{r}{L_2}(t_2 - t_1)}.$$

Отсюда определяются моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , когда потокосцепление получает значения  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ :

$$t_1 = \frac{L_1}{r} \ln \frac{\Psi_K}{\Psi_K - \Psi_1}, \quad t_2 = \frac{L_2}{r} \ln \frac{\Psi_K - \Psi_1}{\Psi_K - \Psi_2} + t_1.$$

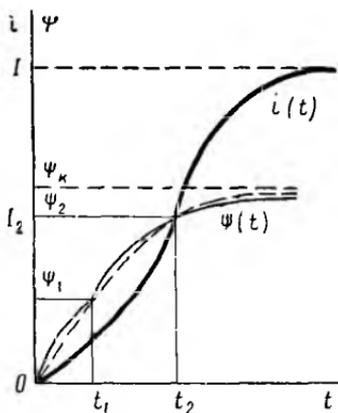


Рис. 16.7

По этим данным на рис. 16.7 построена зависимость  $\Psi(t)$  для всех трех участков кусочно-линейной характеристики. Эта кривая имеет изломы при  $t_1$  и  $t_2$  из-за изломов кусочно-линейной аппроксимации  $\Psi(i)$  в эти моменты времени. В действительности этих изломов ввиду плавности исходной кривой  $\Psi(i)$  не будет. Поэтому кривую  $\Psi(t)$  с изломами следует заменить усредненной плавной кривой, проходящей через точки излома, так как соответствующие им точки излома кусочно-линейной аппроксимации расположены на исходной кривой.

Затем по кривой намагничивания  $\Psi(i)$  можно определить значения тока  $i$ , соответствующие отдельным значениям кривой  $\Psi(t)$  и по ним построить плавную кривую нарастания тока  $i(t)$ .

5. Эта же задача может быть решена методом аналитической аппроксимации зависимости  $\Psi(i)$ . Наиболее простой аппроксимацией является

$$i = a\Psi^2.$$

Начальная точка этой зависимости, так же как и кривой  $\Psi(i)$ , совпадает с началом координат, вторую точку совпадения аналитической и графической зависимости удобно выбрать в точке  $\Psi_0, I_0$  (см. рис. 16.4, а). Тогда

$$a = \frac{I_0}{\Psi_0^2} = \frac{r}{L_0^2 U_0}.$$

График кривой  $i = a\Psi^2$  или  $\Psi = \sqrt{\frac{i}{a}}$  показан на рис. 16.4, а индуктивностью.

После подстановки  $i$  уравнение цепи получает вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r^2}{L_0^2 U_0} \Psi^2 = U_0,$$

о решение относительно  $t$  будет:

$$t = \frac{1}{U_0} \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{1 - \frac{r^2}{L_0^2 U_0} \Psi^2} = \frac{L_0}{r} \operatorname{arth} \frac{r\Psi}{L_0 U_0},$$

откуда находят искомые зависимости  $\Psi(t)$  и  $i(t)$ :

$$\Psi = \frac{L_0 U_0}{r} \operatorname{th} \frac{t}{\tau} \quad \text{и} \quad i = \frac{U_0}{r} \operatorname{th}^2 \frac{t}{\tau},$$

где  $\tau = \frac{L_0}{r}$ .

### § 16.5. Включение катушки индуктивности со стальным сердечником на синусоидальное напряжение

Уравнение цепи при включении катушки со стальным сердечником на синусоидальное напряжение имеет вид:

$$\frac{d\Psi}{dt} + r i = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $\psi$  — фаза включения. Если здесь применить метод линеаризации второстепенного члена уравнения, приняв  $i = \frac{\Psi}{L}$  аналогично п. 1 § 16.4 и зная на примере линейной цепи (п. 5 § 15.2), что здесь возможны сверхтоки, целесообразно в качестве постоянной статической индуктивности взять ее значение из кривой  $\Psi(i)$  по крайней мере для амплитудных значений потокоцепления и тока установившегося режима, т. е. принять  $L = \frac{\Psi_m}{I_m}$ . Тогда получается линейное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L} \Psi = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

аналогичное решенному в п. 5 § 15.2, и, следовательно, переходное потокоцепление

$$\Psi = \Psi' + \Psi'' = \Psi_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \Psi_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L} t},$$

т. е.

$$\Psi_m = \frac{L U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r}.$$

При включении в момент, когда  $\psi - \varphi = -\pi/2$  (рис. 16.8, а), при большой постоянной времени наибольшее значение потоко-

сцепления будет немногим меньше  $2\Psi_m$ . По отдельным точкам кривой  $\Psi(t)$  и по характеристике  $\Psi(i)$  (см. рис. 16.4, а) строится кривая  $i(t)$  (рис. 16.8, б). Если точка  $\Psi_m, I_m$  принужденного режима кривой  $\Psi(i)$  лежит за коленом кривой, сверхток  $I_{mm}$  может быть весьма значительным, превышая  $I_m$  в десятки раз. Это очень существенно при включении трансформатора с разомкнутой вторичной обмоткой, так как при этом он эквивалентен катушке. Включение в указанный и близкий момент может дать сверхток, превышающий ток при аварийном коротком замыкании вторичной цепи.

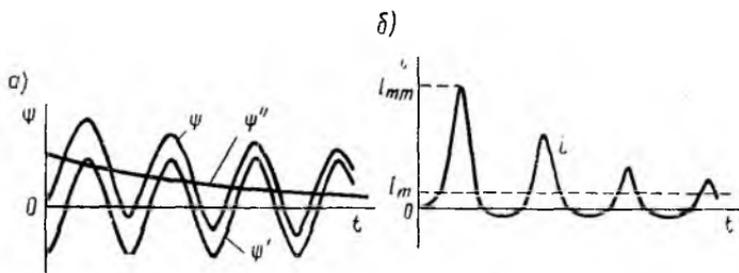


Рис. 16.8

Если в рассматриваемой цепи ее сопротивление  $r$  относительно велико, второй член  $ri$  уравнения может оказаться первостепенным и правильной линеаризовать не его, а второй член  $\frac{d\Psi}{dt} = L_a \frac{di}{dt}$ , считая динамическую индуктивность  $L_a = \text{const}$ . Тогда задача будет аналогична решенной в п. 5 § 15.2, и ток  $i(t)$  представится суммой экспоненты и синусоиды. Пользуясь графиком  $\Psi(i)$ , по точкам кривой  $i(t)$  можно построить кривую  $\Psi(t)$ , полуволны которой будут иметь более тупую форму.

### § 16.6. Изображение переходных процессов в фазовой плоскости

До сих пор переходные процессы в линейных и нелинейных цепях рассматривались в функции времени. Весьма наглядным является также изображение процессов в фазовой плоскости, по оси абсцисс которой откладывается исследуемая величина  $x$ , по оси ординат — скорость ее изменения  $y = \frac{dx}{dt}$ . Они определяют изображающую точку  $x, y$ , соответствующую данному состоянию цепи. При изменении состояния цепи точка перемещается по фазовой траектории  $x(y)$ .

Пусть, например, рассматривается процесс короткого замыкания линейной цепи  $r, L$  (см. рис. 15.1, а), описываемый дифференциальным уравнением

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0.$$

Если обозначить  $i = x$ ,  $\frac{di}{dt} = y$ ,  $\frac{L}{r} = \tau$ , уравнение принимает вид

$$rx + Ly = 0 \quad \text{или} \quad x + \tau y = 0,$$

его фазовая траектория изобразится прямой, проходящей через начало координат во втором или четвертом квадранте и составляющей ось абсцисс угол  $\alpha = \text{arctg} \frac{1}{\tau}$  (рис. 16.9). Стрелки показывают направление движения изображающей точки при переходном процессе. Координаты начальной точки  $i_{t=0} = I_0$  и  $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{I_0}{\tau}$  или, соответственно,  $-I_0$  и  $\frac{I_0}{\tau}$ .

Тот же процесс в нелинейной цепи с индуктивностью, зависящей от тока, описывается таким же уравнением, но в него вместо постоянной

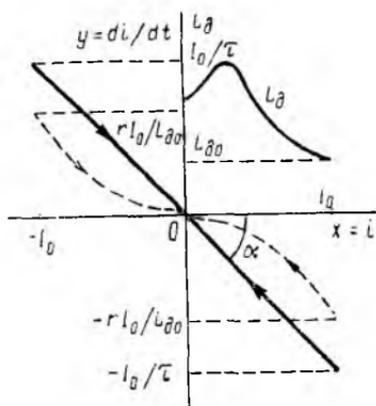


Рис. 16.9

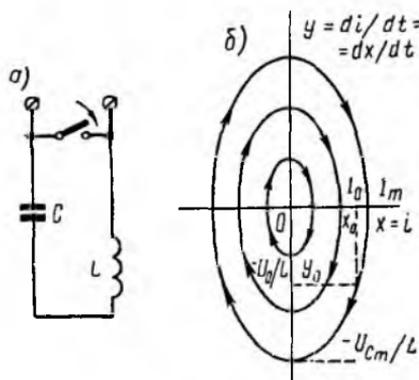


Рис. 16.10

индуктивности  $L$  нужно подставить динамическую индуктивность  $L_d$ . Если при токе  $I_0$  ее начальное значение  $L_{d0} > L$  и с уменьшением тока изменяется по кривой, показанной в первом квадранте на рис. 16.9, а сопротивление  $r$  цепи остается тем же, фазовая траектория будет иметь вид, показанный на том же рисунке прерывистой линией.

Процесс короткого замыкания линейной цепи с последовательным соединением индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 16.10, а) описывается уравнением

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

В результате дифференцирования этого уравнения и его деления на  $L$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

После введения обозначений

$$i = x, \quad \frac{di}{dt} = y \quad \text{и} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

вторая производная

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx},$$

и уравнение принимает вид:

$$\omega_0^2 x dx + y dy = 0,$$

а после интегрирования

$$\omega_0^2 x^2 + y^2 = A^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{A}{\omega_0}\right)^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1,$$

где  $A$  — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. Если начальные значения тока цепи  $i(0) = I_0 = x_0$  и напряжения на емкости  $u_C(0) = U_{C0}$ , и так как в начальный момент

$$u_L(0) = L \frac{di}{dt} = -U_{C0} \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{U_{C0}}{L} = y_0,$$

то

$$\omega_0^2 x^2 + y^2 = A^2 = \omega_0^2 I_0^2 + \frac{U_{C0}^2}{L^2}.$$

Как видно из уравнения, фазовая траектория представляет собой эллипс (рис. 16.10, б), тем самым изображая незатухающие колебания. Очевидно, что вертикальная и горизонтальная полуоси эллипса соответственно равны:

$$A = \sqrt{\omega_0^2 I_0^2 + \frac{U_{C0}^2}{L^2}} = \frac{U_{Lm}}{L} = \frac{U_{Cm}}{L},$$

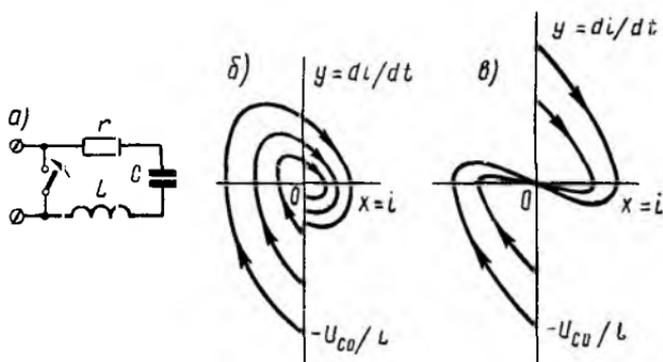
$$\frac{A}{\omega_0} = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{U_{C0}}{\omega_0 L}\right)^2} = I_m,$$

т. е. вертикальная полуось пропорциональна максимальным значениям напряжения на индуктивности и емкости, горизонтальная полуось равна максимальному значению тока, а их отношение — частоте  $\omega_0$  незатухающих колебаний.

Изображающая точка  $x_0, y_0$  есть точка начала процесса, который дальше идет в направлении, указанном стрелкой. В верхней полуплоскости  $y = \frac{dx}{dt} > 0$ , т. е.  $x$  увеличивается и изображающая точка движется слева направо, а в нижней — справа налево, так как  $y < 0$  и  $x$  убывает. При другой начальной точке, не лежащей на данном эллипсе, фазовая траектория будет также эллипсом, но с другими величинами полуосей. Начало координат в этом случае называется центром равновесия.

При разряде конденсатора с напряжением  $U_{C0}$  на цепь с  $r$  и  $L$  (рис. 16.11, а) и  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  происходит затухающий колебательный

процесс и фазовые траектории получают вид спиралей (рис. 16.11, б), по которым изображающая точка движется от точки  $i = 0$ ,  $\frac{di}{dt} = -\frac{U_{C0}}{L}$  к началу координат, называемому в этом случае устойчивым фокусом.



16.11

При  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  спирали превращаются в параболические кривые (рис. 16.11, в), также приходящие в начало координат — устойчивый узел.

Изображение процессов в фазовой плоскости позволяет решать многие задачи линейной и нелинейной электротехники по виду фазовой траектории без решения в общем виде дифференциальных уравнений.

## ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

### РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ НАЛОЖЕНИЯ, СПЕКТРАЛЬНЫМ И ОПЕРАТОРНЫМ

#### § 17.1. Метод наложения

##### 1. Интеграл Дюамеля

Расчет переходного процесса при включении линейной цепи на напряжение  $u(t)$ , являющееся любой функцией времени, может быть произведен методом наложения, если заменить кривую напряжения ступенчатой кривой (рис. 17.1). Тогда можно считать, что в момент времени  $t = 0$  цепь включается на постоянное начальное напряжение  $u(0)$ , а затем на ряд смещенных на равные промежутки времени  $\Delta x$  постоянных напряжений  $\Delta u$  в общем случае разной величины и имеющих положительный знак при возрастании напряжения и отрицательный при его убывании.

Ток или напряжение любой ветви при переходном процессе можно найти из суммы токов, вызываемых отдельными постоянными составляющими напряжения. Для применения этого метода необходимо предварительно рассчитать переходный ток или напряжение исследуемой ветви цепи по заданному постоянному входному напряжению

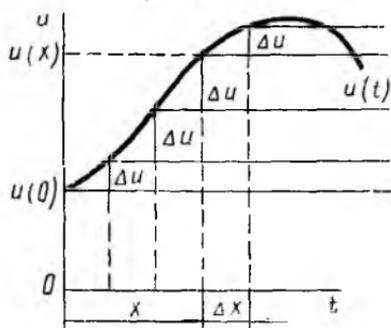


Рис. 17.1

В данном случае она имеет размерность проводимости и называется переходной проводимостью

$$Y(t) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где  $\tau = \frac{L}{r}$  — постоянная времени этой цепи.

Для постоянного напряжения, включенного позже на время  $x$ , переходная проводимость

$$Y(t-x) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{t-x}{\tau}} \right).$$

Аналогичным образом определяется любая переходная функция  $K(t)$ . Например, напряжение на индуктивности при включении цепи  $r, L$  на постоянное напряжение  $U_0$  и переходная функция соответственно равны:

$$u_L = U_0 e^{-\frac{r}{L} t}, \quad K(t) = e^{-\frac{r}{L} t}.$$

В этом случае переходная функция безразмерна. Переходная функция в принципе сразу определяет выходную величину, так как дает численное значение (но не размерность!) выходной величины, когда входная ( $U_0$  или  $I_0$ ) равна единице.

Составляющая переходного тока от напряжения  $u(0)$ , включаемого в начальный момент, равна  $Y(t) u(0)$ , а от скачка напряжения  $\Delta u$ , включаемого в момент  $x + \Delta x$ , равняется  $Y(t-x-\Delta x)$ . В результате приближенное значение искомого переходного тока будет:

$$i(t) \approx Y(t) u(0) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t-x-\Delta x) \Delta u.$$

$U_0$  или току  $I_0$  и найти зависимость от времени переходную функцию  $K(t)$ , связывающую искомую и заданную величины. Например, при включении цепи  $r, L$  на постоянное напряжение ток

$$i = \frac{U_0}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right).$$

Следовательно, переходная функция

$$K(t) = \frac{i}{U_0} = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right).$$

Точное значение тока  $i(t)$  получится при переходе  $\Delta x$  в пределе к бесконечно малым промежуткам времени  $dx$ .

Тогда

$$\Delta u \rightarrow du = u'(x) dx, \quad \text{где} \quad u'(x) = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=x},$$

и ток

$$i(t) = Y(t) u(0) + \int_0^t Y(t-x) u'(x) dx.$$

Это выражение называется интегралом Дюамеля. При определении напряжения какой-либо ветви в интеграле Дюамеля вместо переходной проводимости должна стоять соответствующая переходная функция.

Далее в виде примера определен ток при включении цепи  $r, L$  на затухающее по показательному закону напряжение  $u(t) = Ue^{-\frac{t}{T}}$ , где  $T$  — постоянная времени, характеризующая скорость затухания  $u(t)$ . Переходные проводимости для этого случая даны выше, а

$$u(0) = U, \quad u(x) = Ue^{-\frac{x}{T}}, \quad u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = -\frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}.$$

После подстановки этих величин в интеграл Дюамеля и интегрирования определяется искомый ток:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) U + \int_0^t \frac{1}{r} \left(1 - e^{-\frac{t-x}{\tau}}\right) \left(-\frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}\right) dx = \\ &= \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \frac{U}{r\tau} \left[ -Te^{-\frac{t}{T}} + T - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}} \left(e^{\frac{t}{\tau} - \frac{t}{T}} - 1\right) \right] = \\ &= \frac{U \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{r \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)}. \end{aligned}$$

В частном случае, когда  $\tau = T$ , получается неопределенность, которая после раскрытия дает:

$$i = \frac{U}{L} t e^{-\frac{r}{L} t}.$$

Во всех случаях переходный ток положителен и имеет максимум  $i_m$ , определяемый обычным образом. При  $\tau = T$

$$i_m = \frac{U}{er}.$$

Применение метода наложения удобно также в тех случаях, когда напряжение, на которое включается цепь, представляет собой кусочно-аналитическую кривую, имеющую разрывы. При этом переходный ток

определяется как сумма интегралов Дюамеля за время отдельных участков  $u(t)$ , причем в их первых членах  $Y(t)$  и  $u(0)$  напряжение  $u(0)$  равно разности приложенных напряжений после и до разрыва, с которого начинается данный участок.

## 2. Импульсный интеграл Дюамеля

Метод наложения может быть также применен, если заданное входное напряжение  $u(t)$  представить в виде следующих друг за другом прямоугольных импульсов напряжения  $u(x)$  малой длительности  $\Delta x$  (рис. 17.2) с последующим наложением выходной величины, например тока цепи, от каждого импульса напряжения с учетом его величины и сдвига во времени.

Прямоугольный импульс (рис. 17.3) характеризуется интенсивностью  $S = U_1 \Delta t$ , равной произведению амплитуды импульса  $U_1$  на

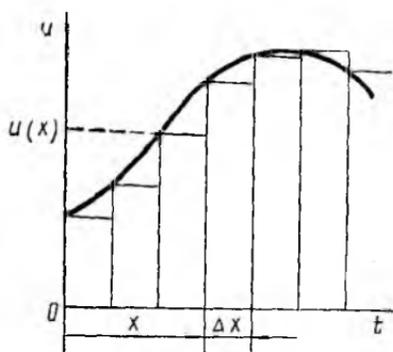


Рис. 17.2

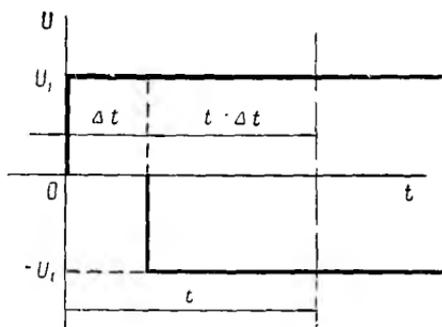


Рис. 17.3

его длительность  $\Delta t$ . Импульс с интенсивностью  $S = 1$  называется **единичным**.

Один прямоугольный импульс может быть представлен алгебраической суммой двух одинаковых скачков постоянного напряжения  $+U_1$  и  $-U_1$ , из которых второй возникает на время  $\Delta t$  позже первого. Тогда ток  $i_1(t)$  от рассматриваемого импульса напряжения в момент  $t$  определяется с помощью переходной проводимости, которая для первого скачка равна  $Y(t)$ , а для второго  $Y(t - \Delta t)$ :

$$i_1(t) = Y(t) U_1 - Y(t - \Delta t) U_1.$$

Если на цепь воздействует единичный импульс напряжения, т. е.  $U_1 \Delta t = 1$ , предыдущее выражение получает вид:

$$i_1(t) = \frac{U_1 \Delta t}{\Delta t} [Y(t) - Y(t - \Delta t)] = \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

При переходе к пределу  $\Delta t \rightarrow dt$  единичный импульс превращается в так называемую **единичную импульсную функцию**, а ток

$$i_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow dt} \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t} = Y'(t).$$

Таким образом, аналогично численному равенству переходной проводимости  $Y(t)$  току от единичного скачка напряжения, при единичной импульсной функции напряжения ток равен производной от  $Y(t)$ . Поэтому  $Y'(t)$  называется импульсной переходной проводимостью.

Для установления связи между искомым током  $i(t)$ , заданным напряжением произвольной формы, разбитым на элементарные импульсы  $u(x)$ , и импульсной переходной проводимостью, можно идти тем же путем, как и при выводе интеграла Дюамеля, но проще это сделать, интегрируя его по частям:

$$\begin{aligned} i(t) &= Y(t)u(0) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)dx = \\ &= Y(t)u(0) + Y(0)u(t) - Y(t)u(0) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx. \end{aligned}$$

Отсюда получается импульсный интеграл Дюамеля:

$$i(t) = Y(0)u(t) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx.$$

В общем случае в импульсный интеграл Дюамеля вместо  $u(x)$  следует подставить заданную входную величину, а взамен  $Y'(t-x)$  — соответствующую импульсную переходную функцию  $K'(t-x)$ .

Далее в виде примера решается та же задача — определение переходного тока  $i(t)$  при включении цепи  $r, L$  на напряжение  $u(t) = Ue^{-\frac{t}{T}}$ . Здесь

$$Y(t) = \frac{1}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right), \quad u(x) = Ue^{-\frac{x}{T}},$$

$Y'(t-x)$  есть производная функции  $Y(t-x)$  по ее аргументу  $t-x$ , или, что то же самое, ее производная по  $t$ :

$$Y'(t-x) = \frac{1}{L} e^{-\frac{t-x}{\tau}},$$

где  $\tau = \frac{L}{r}$  — постоянная времени цепи. Из-за наличия индуктивности  $Y(0) = 0$ , ток

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 \cdot Ue^{-\frac{x}{T}} + \int_0^t \frac{1}{L} e^{-\frac{t-x}{\tau}} Ue^{-\frac{x}{T}} dx = \\ &= \frac{U}{L} e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)x} dx = \frac{Ue^{-\frac{t}{T}}}{L\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)} \left[ e^{\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t}{T}\right)} - 1 \right] = \\ &= \frac{U \left( e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}{r \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом получен тот же результат, что и при применении первой формы интеграла Дюамеля, но вычисления в данном примере несколько упростились.

### 3. Область применения метода наложения

Из изложенного видно, что метод наложения позволяет найти выходную величину переходного процесса по заданной или полученной путем аппроксимации аналитической зависимости входной величины от времени. При этом следует применять ту форму интеграла Дюамеля, для которой подынтегральное выражение упрощается. Очевидно, что метод наложения применим только в случае интегрируемых функций.

## § 17.2. Спектральный метод

### 1. Прямое и обратное преобразование Фурье

В § 17.1 для расчета переходных процессов при включении цепи на непериодическое напряжение было применено его разложение на скачкообразные или импульсные напряжения с последующим применением принципа наложения. Эту задачу также можно решить, если представить непериодическую функцию в виде суммы гармоник.

Так как каждая гармоника ряда Фурье может быть записана в комплексной форме (см. § 8.1):

$$a_k = A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = \operatorname{Im} A_{km} e^{jk\omega t}$$

( $A_{km}$  — комплексная амплитуда), весь ряд Фурье может быть также записан в комплексной форме:

$$F(\omega t) = C_0 + \operatorname{Im} \sum_1^n A_{km} e^{jk\omega t}.$$

Коэффициенты этого ряда, т. е. комплексные амплитуды гармоник, могут быть определены из данных в § 13.1 выражений для  $B_{km}$  и  $C_{km}$ :

$$\begin{aligned} A_{km} &= A_{km} e^{j\psi_k} = A_{km} \cos \psi_k + j A_{km} \sin \psi_k = \\ &= B_{km} + j C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) (\sin k\omega t + j \cos k\omega t) d\omega t = \\ &= \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) (\cos k\omega t - j \sin k\omega t) d\omega t = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega t) e^{-jk\omega t} d\omega t. \end{aligned}$$

Комплексная амплитуда гармоники  $k$  периодической функции  $f_1(\omega_1 t) = f(t)$  с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$A_{km} = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\omega_1 t) e^{-jk\omega_1 t} d\omega_1 t = \frac{j\omega_1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической, у которой период  $T$  стремится к бесконечности. Тогда разница в частоте  $\Delta\omega$  между двумя соседними гармониками будет стремиться к  $d\omega$ . Так как частота основной (первой) гармоники  $\omega_1 = \Delta\omega$ , она также стремится к  $d\omega$ . Частота  $k\omega_1$  гармоники  $k$  должна быть обозначена через  $\omega$ . Тогда общее выражение комплексной амплитуды гармоники частоты  $\omega$  получает вид:

$$A_m(\omega) = \frac{j d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{j d\omega}{\pi} F(j\omega).$$

Таким образом, воздействие на цепь непериодической функции  $f(t)$  может быть заменено суммарным воздействием бесконечно большого числа бесконечно малых гармоник, т. е. спектра  $A_m(\omega)$ . Относительное значение амплитуд гармоник пропорционально комплексной функции частоты  $F(j\omega)$ , имеющей вид интеграла Фурье:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

и называемой спектральной характеристикой или спектральной плотностью функции  $f(t)$ . Эта характеристика может быть записана в показательной форме:

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\psi(\omega)}.$$

Тогда  $F(\omega)$  называется амплитудно-частотной, а  $\psi(\omega)$  — фазо-частотной характеристикой.

Преобразование  $f(t)$  в  $F(j\omega)$ , т. е. прямое преобразование Фурье, возможно, если интеграл Фурье имеет конечное значение. Так как  $|e^{-j\omega t}| = 1$ , для этого достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

чего, например, не будет, если  $f(t)$  — постоянная величина или синусоидальная функция.

Первым этапом спектрального метода расчета переходных процессов является преобразование оригинала  $f(t)$  в его изображение  $F(j\omega)$ . Если  $U(j\omega)$  является спектральной характеристикой напряжения, спектральная характеристика тока  $I(j\omega)$  может быть найдена из закона Ома по известному комплексному сопротивлению  $Z(j\omega)$  или проводимости  $Y(j\omega)$  цепи, в общем случае являющимися также комплексными функциями частоты. Тогда

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = Y(j\omega) U(j\omega).$$

В общем случае при задании какой-либо функции с характеристикой  $F_1(j\omega)$ , воздействующей на вход цепи, характеристика искомой функции выхода

$$F_2(j\omega) = K(j\omega) F_1(j\omega),$$

где  $K(j\omega)$  — так называемая передаточная функция. При изменении частоты  $\omega$  передаточная функция изменяется и по величине и по фазе. В отличие от аналогичной величины — переходной функции, которая характеризовала переходный процесс при воздействии на цепь постоянного напряжения (см. § 17.1), передаточная функция  $K(j\omega)$  характеризует у с т а н о в и в ш и й с я процесс при синусоидальном воздействии.

После определения спектральной характеристики, т. е. изображения искомой величины, должен быть найден оригинал. Для вывод формулы обратного преобразования  $F(j\omega)$  в  $f(t)$  может быть также использован переход от дискретного ряда к непрерывному.

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид:

$$f_1(\omega_1 t) = f(t) = C_0 + \operatorname{Im} \sum_0^{\infty} A_{km} e^{jk\omega_1 t}.$$

Учитывая, что мнимая часть любого комплексного числа  $\hat{F}$

$$\operatorname{Im} \hat{F} = \frac{\hat{F} - \hat{F}^*}{2j}$$

( $\hat{F}^*$  — сопряженный комплекс), после переходов  $T \rightarrow \infty$ ,  $k\omega_1 \rightarrow \omega$  и  $A_{km} \rightarrow A_m(\omega) = \frac{j d\omega}{\pi} F(j\omega)$  получают следующее значение неперерывной функции:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} \cdot \frac{j d\omega}{\pi} F(j\omega) e^{j\omega t} - \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} \cdot \frac{j d\omega}{\pi} F(-j\omega) e^{-j\omega t} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega - \int_0^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Постоянная составляющая ( $\omega = 0$ ) учтена тем, что нижний предел исходных интегралов взят равным нулю.

Это обратное преобразование Фурье служит для получения искомой функции времени по ее спектральной характеристике.

Необходимо отметить, что отрицательная частота имеет лишь математический смысл. Она возникла в результате замены синусоид показательными функциями  $e^{\pm j\omega t}$ .

## 2. Пример применения спектрального метода

В качестве примера рассматривается переходный процесс включения цепи  $r, L$  на прямоугольный импульс напряжения  $U$  продолжительностью  $\tau_0$ . После окончания импульса контур остается замкнутым.

Для упрощения удобно представить импульс существующим с момента времени  $-\frac{\tau_0}{2}$  до  $+\frac{\tau_0}{2}$  (рис. 17.4, а). Так как вне этого промежутка

ремени  $f(t) = 0$ , интеграл Фурье вычисляется только для  $-\frac{\tau_0}{2} \leq t \leq \frac{\tau_0}{2}$ :

$$U(j\omega) = \int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} U e^{-j\omega t} dt = \frac{U}{-j\omega} \left| e^{-j\omega t} \right|_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}} = \\ = \frac{2U}{\omega} \cdot \frac{e^{j\frac{\omega\tau_0}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_0}{2}}}{2j} = 2U \frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega}.$$

Это и есть спектральная плотность, которая в данном случае вещественна и изображается вектором, совпадающим с осью вещественных.

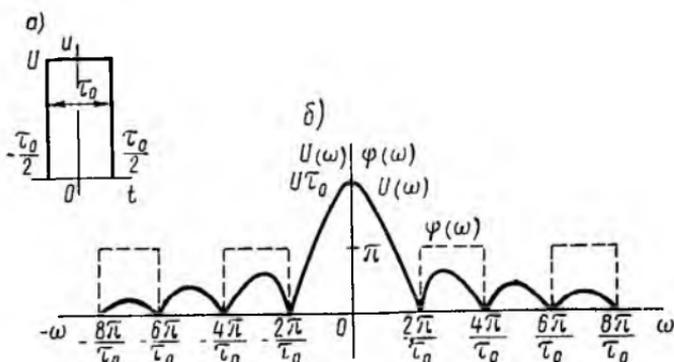


Рис. 17.4

Следовательно, фаза спектральной плотности равна нулю, когда дробь  $\frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega}$  положительна, и равна  $\pi$ , когда эта дробь отрицательна. Амплитудно-частотная характеристика, очевидно, равна:

$$U(\omega) = 2U \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega} \right|,$$

откуда  $U(0) = U\tau_0$ . Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика изображены на рис. 17.4, б.

Так как сопротивление цепи  $Z(j\omega) = r + j\omega L$ , спектральная характеристика тока

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{2U}{\omega(r + j\omega L)} \sin \frac{\omega\tau_0}{2}.$$

Переходный ток находят с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2U e^{j\omega t}}{\omega(r + j\omega L)} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} d\omega,$$

что требует вычисления интеграла сравнительно сложной функции. Решение этой же задачи методом наложения (включение цепи на напряжение  $U$  при  $t = 0$  и на  $-U$  при  $t = \tau_0$ ) значительно проще.

Если требуется найти напряжение  $u_L(t)$  на индуктивности, то, та как

$$\dot{U}_L = \frac{j\omega L}{r + j\omega L} \dot{U},$$

передаточная  $K(j\omega)$  и спектральная  $U_L(j\omega)$  функции получают ви,

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{r + j\omega L}, \quad U_L(j\omega) = K(j\omega) U(j\omega).$$

Определение искомого напряжения

$$u_L(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2jLUe^{j\omega t}}{r + j\omega L} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} d\omega$$

также связано с вычислением интеграла.

### 3. Область применения спектрального метода

Как видно из изложенного, непосредственное применение спектрального метода имеет следующие ограничения:

1) он может применяться только для абсолютно интегрируемых функций;

2) этот метод принципиально не учитывает начальных условий, поэтому он применим только для задач с нулевыми начальными условиями.

Некоторые искусственные приемы позволяют обойти эти ограничения, но при этом расчеты еще больше усложняются. Как было видно из рассмотренного примера, наиболее трудным этапом является обратное преобразование, связанное с интегрированием сложных функций. В ряде случаев интегралы не берутся и приходится прибегать к приближенным расчетам. Очевидно также, что спектральный метод как разновидность метода наложения применим только для линейных цепей.

Ценность спектрального метода заключается в том, что расчет переходных процессов сводится к расчету установившихся режимов в цепях синусоидального тока и, следовательно, к возможности получения ответа без составления и решения дифференциальных уравнений. Задачи могут быть решены при помощи определенных из опыта или заданных аналитически или графически амплитудно-частотных характеристик входных напряжений и токов цепи и передаточных функций. Этот метод в чистом или приближенном виде широко применяется в теории автоматического регулирования и радиотехнике.

## § 17.3. Операторный метод

### 1. Прямое и обратное преобразования Лапласа

Пусть функция  $f(t)$ , равная нулю при  $t < 0$ , не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Тогда преобразование Фурье к ней неприменимо. Если образовать вспомогательную функцию

$$\Phi(t) = f(t) e^{-\sigma t},$$

где  $\sigma$  — положительное вещественное число, и взять  $\sigma$  достаточно большим,  $\Phi(t)$  для большинства функций  $f(t)$  будет настолько быстро убывать на бесконечности, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t)| dt < \infty,$$

т. е. условие абсолютной интегрируемости будет выполнено. Тогда к  $\Phi(t)$  могут быть применены преобразования Фурье.

Прямое преобразование после подстановки значения  $\Phi(t)$  и замены нижнего предела  $-\infty$  на нуль, так как при  $t < 0$  функция  $f(t) = 0$ , получает вид:

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega).$$

Если обозначить через  $p$  комплексное число  $\sigma + j\omega$ , называемое оператором, предыдущее выражение будет:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p),$$

здесь в левой части стоит интеграл Лапласа. Полученное соотношение называется прямым преобразованием Лапласа. С его помощью находят операторное изображение  $F(p)$  оригинала  $f(t)$ .

Обратное преобразование Фурье для функции  $F(\sigma + j\omega)$  может быть получено из формулы для обратного преобразования  $F(j\omega)$ , если заменить  $F(j\omega)$  на  $F(\sigma + j\omega)$  и, соответственно, пределы  $\pm\infty$  на  $\sigma \pm j\infty$ :

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

После умножения левой и правой частей на  $e^{\sigma t}$ , замены  $d\omega$  на равное ему  $\frac{1}{j} d(\sigma + j\omega)$  и подстановки  $\sigma + j\omega = p$  получается обратное преобразование Лапласа

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t),$$

позволяющее найти оригинал по изображению. Связь между оригиналом и изображением условно записывается так:

$$f(t) \doteq F(p).$$

Как видно из вывода, преобразования Фурье являются частным случаем преобразований Лапласа для случая, когда комплекс  $p = \sigma + j\omega$  становится мнимым числом  $j\omega$ . Поэтому применимость интеграла Лапласа шире, чем интеграла Фурье, так как не накладывається требование абсолютной интегрируемости функции  $f(t)$ . Последняя должна лишь удовлетворять условиям Дирихле.

Прямое преобразование Лапласа весьма широко применяется для расчета переходных процессов, так как операции с изображениями, как будет видно далее, достаточно просты. Для обратного перехода от изображений к оригиналам в большинстве случаев не используется сложное обратное преобразование Лапласа, а применяется более простой прием, обоснованный далее.

Рассматриваемый метод получил название операторного. Первой работой, в которой применялись преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений, была монография Ващенко-Захарченко, опубликованная в 1862 г. В конце XIX века Хевисайд впервые успешно применил операторный метод к расчету электромагнитных переходных процессов, но не дал его обоснования. Дальнейшему развитию и обоснованию операторного метода были посвящены многочисленные работы зарубежных и советских ученых — Карсона, Вагнера, Эфроса и Данилевского, Лурье и др.

## 2. Операторные изображения простейших функций

Из основных свойств определенных интегралов вытекают следующие два следствия для изображений. Если известны изображения нескольких функций

$$f_1(t) \doteq F_1(p), \quad f_2(t) \doteq F_2(p), \quad \dots, \quad f_n(t) \doteq F_n(p),$$

то

$$\sum_1^n f_k(t) \doteq \sum_1^n F_k(p).$$

т. е. изображение суммы функций равно сумме их изображений.

При  $A = \text{const}$

$$Af(t) \doteq AF(p),$$

т. е. при умножении функции на постоянную величину изображение функции должно быть умножено на эту величину.

Изображение постоянной величины

$$A \doteq F(p) = \int_0^{\infty} Ae^{-pt} dt = -\frac{A}{p} \left| e^{-pt} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{p},$$

т. е. изображением постоянной является она сама, деленная на  $p$ .

## Изображение показательной функции

$$e^{at} \doteq F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Из этого соотношения могут быть найдены изображения следующих функций:

$$e^{-at} \doteq \frac{1}{p+a}, \quad 1 - e^{-at} \doteq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)},$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \doteq \frac{1}{p-j\omega} = \frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\sin(\omega t + \psi) = \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t \doteq \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2},$$

$$\begin{aligned} \sin \omega t e^{-at} &= \frac{1}{2j} [e^{(-at+j\omega)t} - e^{(-a-j\omega)t}] \doteq \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p+a-j\omega} - \frac{1}{p+a+j\omega} \right) = \\ &= \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \omega t e^{-at} &= \frac{1}{2} [e^{(-a+j\omega)t} + e^{(-a-j\omega)t}] \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p+a-j\omega} + \frac{1}{p+a+j\omega} \right) = \\ &= \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

В справочниках приведены изображения многих других функций.

### 3. Изображения производной и интеграла функции

Если известны начальное значение  $f(0)$  функции  $f(t)$  и ее изображение  $f(t) \doteq F(p)$ , то изображение производной  $f'(t)$  можно получить, интегрируя по частям:

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) =$$

$$= \left[ e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(0) = p \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} \right],$$

так как  $f(t) e^{-pt} \Big|_{t=\infty} = 0$ .

Изображение второй производной

$$f''(t) \doteq p [pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} \right]$$

и аналогично изображение производной  $n$ -го порядка:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left[ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right].$$

Особый интерес для практики представляет случай, когда начальные значения функции и ее производных равны нулю. Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p), \quad f''(t) \doteq p^2F(p), \quad \dots, \quad f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p).$$

Изображение  $\Psi(p)$  определенного интеграла

$$\int_0^t f(t) dt = \psi(t)$$

можно найти по известному изображению подынтегральной функции  $f(t) \doteq F(p)$  из следующего сопоставления:

$$\psi'(t) = f(t) \doteq F(p) \quad \text{и} \quad \psi'(t) \doteq p\Psi(p) - \psi(0).$$

Следовательно, так как начальное значение интеграла  $\psi(0) = 0$ ,

$$F(p) = p\Psi(p) \quad \text{и} \quad \int_0^t f(t) dt \doteq \Psi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Изображение неопределенного интеграла можно найти, выражая его через определенный с переменным верхним пределом  $t$ :

$$\varphi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \varphi(0) \doteq \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p}.$$

Таким образом, ненулевые начальные условия учитываются в выражениях для изображений. При нулевых начальных условиях дифференцирование и интегрирование оригиналов заменяются умножением и делением изображений на оператор  $p$ , подобно тому как умножение и деление чисел заменяется более простыми действиями — сложением и вычитанием логарифмов чисел.

#### 4. Законы электрических цепей в операторной форме

Пусть цепь с последовательным соединением  $r, L, C$  при ненулевых начальных условиях включается на напряжение  $u(t)$ . Тогда

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = u(t).$$

Переход от  $i(t)$  и  $u(t)$  к их изображениям  $I(p)$  и  $U(p)$  превращает интегро-дифференциальное уравнение в алгебраическое:

$$LpI(p) - Li(0) + rI(p) + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = U(p).$$

Отсюда

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{r + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

Это выражение представляет собой аналог закона Ома в операторной форме для переходного процесса при ненулевых начальных усло-

виях. В знаменателе стоит операторное сопротивление  $z$ :

$$Z(p) = r + Lp + \frac{1}{Cp} = \frac{LCp^2 + rCp + 1}{Cp}.$$

Оно может быть получено из комплексного полного сопротивления для синусоидального тока  $Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$  заменой  $j\omega$  на  $p$ , что соответствует переходу от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа.

В частном случае нулевых начальных условий, т. е. при  $i(0) = 0$  и  $u_C(0) = 0$ ,

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

В общем случае сложной цепи ее операторное сопротивление имеет аналогичный вид:

$$Z(p) = \frac{a_0 p^2 + a_1 p^{\alpha-1} + \dots + a_n}{b_0 p^\beta + b_1 p^{\beta-1} + \dots + b_m}.$$

Как показано далее (см. § 19.2), степени  $\alpha$  и  $\beta$  могут отличаться не больше, чем на единицу.

Операторное сопротивление  $Z(p)$  и операторная проводимость  $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$  также могут рассматриваться как операторные передаточные функции. При нулевых начальных условиях передаточной является операторная функция  $K(p)$ , на которую надо умножить функцию  $F_1(p)$  — напряжение или ток на входе, чтобы получить функцию  $F_2(p)$ , характеризующую выходную величину:

$$F_2(p) = K(p) F_1(p).$$

Вид функции  $K(p)$  совпадает с рассмотренной функцией  $K(j\omega)$ . Последняя является комплексной частотной характеристикой передаточной функции.

Законы Кирхгофа в их первой форме  $\sum i_k = 0$  и  $\sum u_k = 0$  могут быть записаны в операторном виде:

$$\sum I_k(p) = 0, \quad \sum U_k(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в операторном виде для второй формы его записи при нулевых начальных условиях и отсутствии взаимной индукции имеет вид:

$$\sum \mathcal{E}_k(p) = \sum Z_k(p) I_k(p).$$

В общем случае этот закон записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum \left[ \mathcal{E}_k(p) + L_k i_k(0) \pm M_{kq} i_q(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right] &= \\ &= \sum [Z_k(p) I_k(p) \pm M_{kq} p I_q(p)]_i, \end{aligned}$$

где  $L_k i_k(0)$  и  $M_{kq} i_q(0)$  — изображения начальных напряжений, уравновешивающих э. д. с. само- и взаимной индукции;

$\frac{u_{Ck}(0)}{p}$  — изображение начального напряжения на емкости;

$\pm M_{kq} p I_q(p)$  — изображения напряжений взаимной индукции.

Правило знаков дано в § 11.3.

При расчете переходных процессов в сложных цепях операторным методом составляется алгебраическая система уравнений для изображений по законам Кирхгофа или по методам, из них вытекающим: наложения, контурных токов, эквивалентного источника и т. д. При этом необходимо учесть ненулевые начальные условия. Решение системы уравнений дает изображения искомых токов и напряжений. Эти изображения, как видно из приведенного примера, имеют вид рациональных дробей.

Для перехода от изображений к оригиналам можно использовать таблицы, подобные приведенным в п. 2 этого параграфа. При отсутствии этих данных может быть применено обратное преобразование Лапласа, а для большинства функций, встречающихся в электротехнической практике, — более простое преобразование, основанное на теореме разложения.

### 5. Теорема разложения

В большинстве случаев изображение представляет собой такую рациональную дробь:

$$\frac{\Phi(p)}{F(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n},$$

у которой  $m < n$ ,  $a_k$  и  $b_k$  — вещественные числа, а корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  уравнения  $F(p) = 0$  не кратны и не равны корням уравнения  $\Phi(p) = 0$ . Тогда дробь может быть разложена на простые дроби:

$$\frac{\Phi(p)}{F(p)} = \frac{\Phi(p)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}.$$

Для определения коэффициента  $A_k$  следует обе части равенства умножить на  $p - p_k$ :

$$(p-p_k) \left( \frac{A_1}{p-p_1} + \dots + \frac{A_k}{p-p_k} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} \right) = (p-p_k) \frac{\Phi(p)}{F(p)}$$

и устремить  $p$  к  $p_k$ . Тогда левая часть превратится в  $A_k$ , а правая — в неопределенность  $\frac{0}{0}$ , раскрытие которой дает:

$$A_k = \Phi(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p-p_k)}{\frac{d}{dp} F(p)} = \frac{\Phi(p_k)}{F'(p_k)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi(p)}{F(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi(p_k)}{F'(p_k)} \cdot \frac{1}{p-p_k},$$

так как  $\frac{1}{p - p_k} \doteq e^{p_k t}$  (см. п. 2 § 17.3), то

$$\frac{\Phi(p)}{F(p)} \doteq \sum_1^n \frac{\Phi(p_k)}{F'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это и есть теорема разложения, позволяющая по изображению в виде рациональной дроби найти оригинал, равный сумме оказательных функций времени, умноженных на постоянные коэффициенты. Если при этом один из корней  $F(p)$  равен нулю, соответствующая показательная функция превращается в постоянную величину.

## 6. Примеры применения операторного метода

Далее приведен ряд примеров расчета переходных процессов с переходом от изображения к оригиналу по таблицам и теореме разложения. Некоторые из этих задач решены другими методами, что позволит оценить эффективность операторного метода.

1. При включении цепи  $r, L$  на затухающее по показательному закону напряжение  $u(t) = Ue^{-\frac{t}{T}}$  его изображение и операторное сопротивление цепи будут:

$$Ue^{-\frac{t}{T}} \doteq \frac{U}{p + \frac{1}{T}}, \quad Z(p) = r + Lp.$$

Изображение тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p + \frac{1}{T}}}{r + Lp} = \frac{\frac{U}{L}}{\left(p + \frac{1}{T}\right)\left(p + \frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\frac{U}{L}}{p^2 + \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right)p + \frac{1}{T\tau}}$$

представляет собой рациональную дробь. Корни знаменателя и его производная, соответственно, равны:

$$p_1 = -\frac{1}{T}, \quad p_2 = -\frac{1}{\tau}, \quad F'(p) = 2p + \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{\tau}\right),$$

$$F'(p_1) = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}, \quad F'(p_2) = -\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right),$$

и по теореме разложения оригинал

$$i(t) = \frac{\frac{U}{L}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{\frac{U}{L}}{-\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U \left( e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}{r \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right)},$$

что совпадает с решением методом наложения в п. 1 § 17.1.

2. При включении цепи  $r, L, C$  на постоянное напряжение  $U_0$  при нулевых начальных условиях

$$I(p) = \frac{\frac{U_0}{p}}{r + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \frac{\omega}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}.$$

Правая часть этого выражения совпадает с изображением  $\sin \omega t e^{-\alpha t}$  приведенным в п. 2 этого параграфа, если принять

$$\alpha = \frac{r}{2L}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2,$$

причем  $\omega$  — вещественное число. Следовательно, ток

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\frac{r}{2L}t} \sin \omega t,$$

что совпадает с результатом, полученным в § 15.4 классическим методом для случая  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Для случая  $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  полученное выражение можно преобразовать, подставив значение  $\omega$ , которое в этом случае будет мнимым числом.

Для перехода к оригиналу можно также применить теорему разложения. Здесь

$$\varphi(p) = \frac{U_0}{L}, \quad F(p) = p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}, \quad F'(p) = 2p + \frac{r}{L}.$$

Уравнение  $F(p) = 0$  имеет корни

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Тогда

$$F'(p_{1,2}) = 2 \left( -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \right) + \frac{r}{L} = \pm 2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

и оригинал по теореме разложения будет:

$$i(t) = \frac{\frac{U_0}{L} e^{p_1 t}}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} - \frac{\frac{U_0}{L} e^{p_2 t}}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} = \frac{U_0}{2L \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

что также совпадает с решением, полученным ранее классическим методом.

3. Примером расчета переходных процессов при ненулевых начальных условиях может служить задача на короткое замыкание цепи  $r, L, C$ , ранее включенной на синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ .

В момент замыкания при  $t = 0$  приложенное напряжение  $u(t)$  оказывается отключенным от цепи, т. е.  $u(0) = 0$  и  $U(p) = 0$ , а ток цепи

(напряжение на емкости, соответственно, равны:

$$i(0) = I_m \sin(\psi - \varphi),$$

$$u_C(0) = U_{Cm} \sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cos(\psi - \varphi).$$

огда изображение тока

$$I(p) = \frac{LI_m \sin(\psi - \varphi) + \frac{U_{Cm} \cos(\psi - \varphi)}{p}}{r + Lp + \frac{1}{Cp}} = \\ = \frac{pI_m \sin(\psi - \varphi) + \frac{U_{Cm}}{L} \cos(\psi - \varphi)}{p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{\Phi(p)}{F(p)}.$$

Знаменатель  $F(p)$  этой рациональной дроби и его корни  $p_1$  и  $p_2$  те же, что и в предыдущей задаче. Тогда по теореме разложения переходный ток цепи

$$i(t) = \frac{\left(-\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) I_m (\sin(\psi - \varphi) + \frac{U_{Cm}}{L} \cos(\psi - \varphi))}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{p_1 t} + \\ + \frac{\left(\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right) I_m \sin(\psi - \varphi) - \frac{U_{Cm}}{L} \cos(\psi - \varphi)}{2 \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}} e^{p_2 t}.$$

В зависимости от знака подкоренной величины ток будет иметь аperiodический или колебательный характер.

4. Примером расчета переходных процессов в цепях со взаимной индукцией может служить задача включения трансформатора на постоянное напряжение, решенная в п. 3 § 15.5 классическим методом.

Замена в системе уравнений трансформатора для синусоидального тока (см. § 11.4)  $j\omega$  на  $p$ , а комплекса приложенного напряжения  $\dot{U}$  на изображение  $\frac{U_0}{p}$  постоянного напряжения  $U_0$ , сразу дает систему уравнений для изображений:

$$(r_1 + L_1 p) I_1(p) + M p I_2(p) = \frac{U_0}{p},$$

$$(r_2 + L_2 p) I_2(p) + M p I_1(p) = 0.$$

Решение этой системы:

$$I_1(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{L_2 p + r_2}{(L_1 L_2 - M^2) p^2 + (r_1 L_2 + r_2 L_1) p + r_1 r_2} = \frac{\Phi(p)}{F(p)}.$$

Уравнение  $F(p) = 0$ , помимо отрицательных вещественных корней  $p_1$  и  $p_2$ , совпадающих с корнями характеристического уравнения при решении классическим методом, имеет корень  $p_0 = 0$ , который при под-

становке в формулу теоремы разложения даст принужденный ток  $I_0 = \frac{U_0}{r_1}$ . Две другие составляющие тока  $i_1(t)$  являются экспонентам с показателями  $p_1 t$  и  $p_2 t$ .

Знаменатель изображения тока

$$I_2(p) = \frac{-MU_0}{(L_1 L_2 - M^2)p^2 + (r_1 L_2 + r_2 L_1)p + r_1 r_2}$$

не имеет корня, равного нулю, следовательно, ток  $i_2(t)$  содержит только две экспоненты с теми же показателями.

5. Рассматривая включение цепи  $r, L$  на переменное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ , следует его заменить комплексом  $\dot{U}_m = U_m e^{j(\omega t + \psi)} = \dot{U}_m e^{j\omega t}$ , а последний — операторным изображением

$$U(p) = \frac{\dot{U}_m}{p - j\omega}.$$

Так как операторное сопротивление  $Z(p) = Lp + r$ , изображение тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\dot{U}_m}{(p - j\omega)(Lp + r)} = \frac{\dot{U}_m}{Lp^2 + (r - j\omega L)p - j\omega r} = \frac{\varphi(p)}{F(p)}.$$

Корни и производная знаменателя  $F(p)$  имеют вид:

$$p_1 = j\omega, \quad p_2 = -\frac{r}{L}, \quad F'(p) = 2Lp + r - j\omega L,$$

$$F'(p_1) = r + j\omega L, \quad F'(p_2) = -r - j\omega L.$$

В соответствии с этим теорема разложения дает

$$I(p) \stackrel{*}{=} \dot{I}_m(t) = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t}}{r + j\omega L} - \frac{\dot{U}_m e^{-\frac{r}{L}t}}{r + j\omega L} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \left[ e^{j(\omega t + \psi - \varphi)} - e^{j(\psi - \varphi)} e^{-\frac{r}{L}t} \right],$$

после чего можно перейти к мгновенному значению тока

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} \left[ \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} \right],$$

совпадающему с решением классическим методом в п. 5 § 15.2.

## 7. Применение операторного метода

Из теории и примеров видно, что операторный метод, как и классический, может применяться для расчета переходных процессов только в линейных цепях. Операторный метод имеет следующие достоинства:

- 1) он обобщает методику составления уравнений и расчета цепей при переходных процессах ( $p = \sigma + j\omega$ ) и установившихся режимах постоянного ( $p = 0$ ) и синусоидального переменного ( $p = j\omega$ ) токов;
- 2) благодаря алгебраизации дифференциальных уравнений или применению операторных изображений и известных из теории устано-



( $Z_{11}, Z_{22}, \dots$  — контурные сопротивления,  $Z_{12}, \dots, Z_{1N}$  — общие с сопротивлением соседних контуров), имеет однотипные решения для всех контурных токов. Например, контурный ток

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{11} \dot{\mathcal{E}}_1 + \Delta_{21} \dot{\mathcal{E}}_2 + \dots + \Delta_{N1} \dot{\mathcal{E}}_N).$$

Здесь определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix},$$

а  $\Delta_{ik}$  — алгебраические дополнения этого определителя с вычеркнутыми строкой  $i$  и столбцом  $k$ , умноженные на  $(-1)^{i+k}$ .

Далее приводится решение этим методом системы уравнений для контурных токов цепи рис. 7.21, а, решенной в § 8.3:

$$Z_A I_A - Z_{AB} I_B = 0, \quad -Z_{BA} I_A + Z_B I_B = \dot{U}.$$

Определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_A & -Z_{AB} \\ -Z_{BA} & Z_B \end{vmatrix} =$$

$$= Z_A Z_B - Z_{AB}^2 = (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1.$$

Алгебраические дополнения

$$\Delta_{11} = Z_B (-1)^{1+1} = Z_2 + Z_3, \quad \Delta_{22} = Z_A (-1)^{2+2} = Z_1 + Z_2,$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = -Z_{AB} (-1)^{1+2} = Z_2.$$

Искомые токи

$$I_1 = I_A = \frac{Z_2 + Z_3}{\Delta} 0 + \frac{Z_2}{\Delta} \dot{U} = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \dot{U},$$

$$I_3 = I_B = \frac{Z_2}{\Delta} 0 + \frac{Z_1 + Z_2}{\Delta} \dot{U} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \dot{U},$$

$$I_2 = -I_1 + I_3 = -\frac{Z_2}{\Delta} \dot{U} + \frac{Z_1 + Z_2}{\Delta} \dot{U} = \frac{Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \dot{U}.$$

### § 18.3. Матричный метод

Матричный метод, использующий матричную алгебру, позволяет получать и записывать системы уравнений электрической цепи в компактной и наглядной форме, удобной также для вычислительных машин.

Далее матричный метод изложен на основе системы уравнений контурных токов (18.1). В такую систему входят три группы величин: искомые величины  $I_i$ , свободные члены  $\dot{\mathcal{E}}_i$  и коэффициенты  $Z_{ik}$  при неизвестных. Индексы  $i$  и  $k$  принимают все значения от 1 до  $N$

е  $N$  — число уравнений, поэтому число коэффициентов  $Z_{ik}$  равно  $N^2$ . Первый индекс соответствует номеру строки, второй — номеру столбца.

Каждую из групп искомых и свободных величин можно записать в виде таблицы, называемой столбцовой матрицей, отчеркнутой двойными чертами с обеих сторон или ее условным символом в виде одной буквы жирным шрифтом:

$$\mathbf{i} = \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \mathbf{\xi} = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{array} \right\|.$$

Таблица коэффициентов  $Z_{ik}$  должна иметь столько же строк, сколько и столбцов, т. е. является квадратной матрицей:

$$\mathbf{Z} = \left\| \begin{array}{cccc} Z_{11}, & -Z_{12}, & \dots, & -Z_{1N} \\ -Z_{21}, & Z_{22}, & \dots, & -Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Z_{N1}, & -Z_{N2}, & \dots, & Z_{NN} \end{array} \right\|.$$

Хотя запись матрицы  $\mathbf{Z}$  подобна записи определителя  $\Delta$ , матрица является набором отдельных элементов, определитель же равен определенному числу при данных значениях его элементов.

В матричной алгебре показывается, что при умножении квадратной матрицы  $\mathbf{Z}$  на столбцовую  $\mathbf{i}$  с тем же числом строк каждый элемент произведения получается как сумма попарных произведений всех элементов строки  $i$  квадратной матрицы  $\mathbf{Z}$  на соответствующие элементы столбцовой матрицы  $\mathbf{i}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cccc} Z_{11}, & -Z_{12}, & \dots, & -Z_{1N} \\ -Z_{21}, & Z_{22}, & \dots, & -Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Z_{N1}, & -Z_{N2}, & \dots, & Z_{NN} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{array} \right\| = \\ & = \left\| \begin{array}{c} Z_{11}\dot{I}_1 - Z_{12}\dot{I}_2 - \dots - Z_{1N}\dot{I}_N \\ -Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 - \dots - Z_{2N}\dot{I}_N \\ \dots \\ -Z_{N1}\dot{I}_1 - Z_{N2}\dot{I}_2 - \dots + Z_{NN}\dot{I}_N \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_N \end{array} \right\|, \end{aligned}$$

т. е. уравнения по методу контурных токов в краткой матричной форме записи имеют вид:

$$\mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{\xi}.$$

то уравнение решается с помощью обратной матрицы  $\mathbf{Z}^{-1}$ , которая, будучи умножена справа или слева на  $\mathbf{Z}$ , дает единичную матрицу:

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{1},$$

т. е. матрицу, все диагональные элементы которой равны единице а все остальные — нулю. В матричной алгебре доказывается, что

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{N1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1N} & \Delta_{2N} & \dots & \Delta_{NN} \end{vmatrix},$$

где  $\Delta$  — определитель исходной матрицы, а  $\Delta_{ik}$  — его алгебраическое дополнение. Тогда

$$\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{1}\mathbf{i} = \mathbf{i} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E},$$

т. е. для получения матрицы токов надо умножить  $\mathbf{Z}^{-1}$  на  $\mathbf{E}$  по правилу умножения матриц:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Delta_{11}\dot{e}_1 + \Delta_{21}\dot{e}_2 + \dots + \Delta_{N1}\dot{e}_N \\ \Delta_{12}\dot{e}_1 + \Delta_{22}\dot{e}_2 + \dots + \Delta_{N2}\dot{e}_N \\ \dots \\ \Delta_{1N}\dot{e}_1 + \Delta_{2N}\dot{e}_2 + \dots + \Delta_{NN}\dot{e}_N \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаются все контурные токи путем приравнивания одноименных строк обеих матриц:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{11}\dot{e}_1 + \Delta_{21}\dot{e}_2 + \dots + \Delta_{N1}\dot{e}_N) \quad \text{и т. д.}$$

Аналогичным образом решается матричное уравнение  $\mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{J}}$ , составленное по методу узловых напряжений (см. § 3.10).

Матричный метод может быть применен и для составления, и для решения системы уравнений по законам Кирхгофа. Первые строки квадратной матрицы в зависимости от наличия токов и их знака, входящих в уравнения по первому закону Кирхгофа, состоят из элементов, соответственно равных 0, или +1, или -1. Остальные ее строки, соответствующие уравнениям по второму закону Кирхгофа, состоят из сопротивлений — коэффициентов при токах в этих уравнениях. Умножение квадратной матрицы на столбцовую матрицу токов дает правую столбцовую матрицу свободных членов всех уравнений, т. е. систему всех уравнений по обоим законам Кирхгофа.

Например, система уравнений цепи постоянного тока рис. 3.12, полученная в п. 2 § 3.5 по законам Кирхгофа обычным способом, в матричном методе имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & -R_6 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2 \\ -\mathcal{E}_3 \\ 0 \end{vmatrix},$$

ли, обозначая квадратную матрицу через  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{E}, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}.$$

Отсюда видно, что для определения токов ветвей нужно аналогично этому контурных токов составить обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$  из определителя и алгебраических дополнений, умножить на нее столбцовую матрицу  $\mathbf{E}$  и приравнять одноименные строки этого произведения и столбцовой матрицы токов  $\mathbf{I}$ .

### § 18.4. Топологический метод

Схема электрической цепи, состоящая из узлов и ветвей, представляет собой геометрическую фигуру, свойства которой не зависят от ее геометрических размеров и вида очертаний. Поэтому то л о г и я — раздел геометрии, посвященный свойствам таких фигур, может быть использован для анализа электрических цепей непосредственно по структуре их схем.

Топологический метод расчета цепей изложен далее без вывода основных формул на примере цепи синусоидального тока с источником напряжения  $\dot{U}$ , приключенным к одной паре узлов цепи. Тогда ток  $I$  любой ветви цепи может быть определен с помощью передачи

$$T = \frac{I}{\dot{U}} = \frac{\sum S'_k \Delta'_k}{\Delta}.$$

Значение числителя этой дроби будет разъяснено далее. Знаменатель  $\Delta$  — определитель системы уравнений, связывающих напряжения и токи исследуемой цепи (см. § 18.2) — в топологическом методе вычисляется без составления этих уравнений по формуле  $\Delta = \sum S_k \Delta_k$ . Тогда

$$T = \frac{\sum S'_k \Delta'_k}{\sum S_k \Delta_k},$$

где  $S_k$  — величина пути  $k$  по ветвям цепи между произвольно выбранной парой ее узлов, вдоль которого узлы данного пути встречаются не более одного раза, равная произведению проводимостей этого пути;  $S'_k$  — величина пути передачи, содержащего узлы источника и ветвь искомого тока, равная произведению проводимостей ветвей пути передачи;  $\Delta_k$  и  $\Delta'_k$  — соответственно алгебраические дополнения пути и пути передачи, равные определителям цепей, остающихся после короткого замыкания ветвей этих путей. Алгебраические дополнения равны единице, если путь содержит все узлы первоначальной схемы. При вычислении  $S_k$  и  $\Delta_k$  источник напряжения замыкается накоротко.

Произведения, суммируемые в знаменателе и числителе выражения для  $T$ , вычисляются, соответственно, для всех путей  $S_k$  и для всех путей передачи  $S'_k$ .

Далее для примера определяется передача в мостовой цепи переменного тока (рис. 18.1) от напряжения  $\dot{U}$  источника, подключенного к уз-

лам  $A$  и  $C$ , к току  $I_4$  в ветви с проводимостью  $Y_4$ . Положительное направление этого тока совпадает с заданным направлением напряжения источника.

В этой цепи два пути передачи от узлов  $A$  и  $C$  источника к ветви  $Y_4$ . Величина первого пути передачи по ветви  $Y_3$  равна  $S'_1 = Y_3 Y$ . При коротком замыкании этого пути передачи для определения алгебраического дополнения  $\Delta'_1$  узлы  $A, D, C$  соединяются вместе, образуя с узлом  $B$  одну ветвь, состоящую из параллельно соединенных проводимостей  $Y_1, Y, Y_2$ . Следовательно,

$$\Delta'_1 = Y_1 + Y + Y_2.$$

Величина второго пути передачи по ветвям  $Y_1$  и  $Y$  равна  $S'_2 = Y_1 Y Y_4$ . При коротком замыкании этого пути все четыре узла объединяются, а тогда алгебраическое дополнение этого пути передачи  $\Delta'_2 = 1$ .

Пути  $S_k$  и их алгебраические дополнения  $\Delta_k$  определяются для пары узлов  $B$  и  $D$ . При определении  $S_1$  узлы  $A$  и  $C$  источника должны быть закорочены. Тогда соединяются параллельно ветви  $Y_1$  и  $Y_2$  и ветви  $Y_3$  и  $Y_4$ . Следовательно, первый путь от узла  $B$  к узлу  $D$ , проходящий последовательно по этим двум параллельным разветвлениям, имеет величину

$$S_1 = (Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4).$$

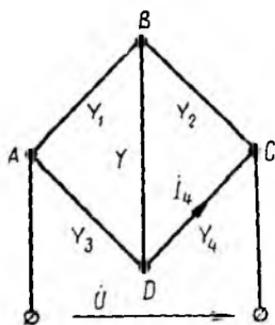


Рис. 18.1

Для определения алгебраического дополнения  $\Delta_1$  пути  $S_1$  его ветви закорачиваются, что приводит к объединению всех четырех узлов. Следовательно,  $\Delta_1 = 1$ .

Второй путь от узла  $B$  к узлу  $D$  проходит по ветви  $Y$ , поэтому его величина  $S_2 = Y$ . При закорачивании этого пути и при закороченных узлах источника все остальные ветви оказываются соединенными параллельно. Отсюда

$$\Delta_2 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4.$$

В результате передача

$$T = \frac{I_4}{\dot{U}} = \frac{\sum S'_k \Delta'_k}{\sum S_k \Delta_k} = \frac{Y_3 Y_4 (Y_1 + Y + Y_2) + Y_1 Y Y_4 \cdot 1}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) \cdot 1 + Y (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)},$$

будучи умножена на  $\dot{U}$ , дает искомый ток  $I_4$ .

В рассмотренном примере цель проста, из-за чего выгода применения топологического метода по сравнению с классическими методами расчета цепей, например методом эквивалентного источника напряжения, не ощущается. Экономия времени получается при расчете сложных цепей, и тем большая, чем сложнее цепь.

Из изложенного видны особенности топологического метода расчета электрических цепей:

1) расчет ведется на основе схемы цепи, ветви которой изображаются линиями, характеризующимися проводимостями;

2) расчет проводится по формулам для ряда величин, характеризующих топологические свойства цепи, без составления уравнений по законам Кирхгофа;

3) метод применим только для цепей с одним источником энергии; при наличии нескольких источников приходится использовать принцип наложения.

Топологический метод называется также методом **н е н а п р а в л е н н ы х г р а ф о в**.

### § 18.5. Метод направленных графов

Направленным графом или графом сигнала называется совокупность узлов и соединяющих их ветвей, имеющих направление, указываемое стрелкой. Граф не повторяет электрическую цепь, а представляет собой графическое изображение уравнений, связывающих величины, характеризующие данную цепь. Узел графа, к которому подключена одна уходящая ветвь, характеризуется вход-

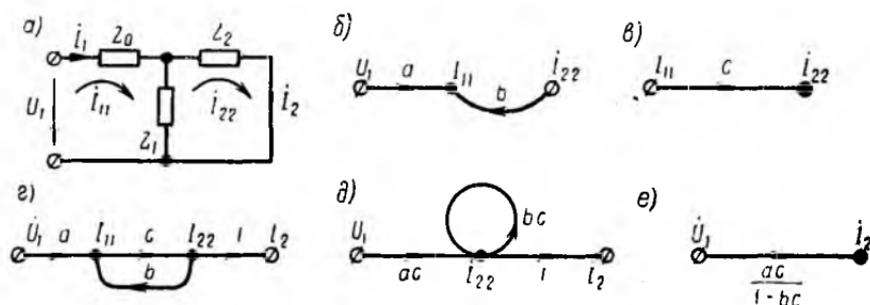


Рис. 18.2

ным с и г н а л о м — свободным членом системы уравнений (заданным напряжением или током), узел с одной входящей ветвью — выходным сигналом, т. е. искомой величиной, остальные узлы — другими неизвестными величинами, которые должны быть исключены в процессе решения задачи.

Каждая ветвь характеризуется **п е р е д а ч е й**, являющейся функцией коэффициентов уравнений и равной отношению сигналов выходного (по направлению ветви) узла к входному. К узлам графа может подходить и уходить по несколько ветвей. Тогда сигнал узла равен сумме сигналов, приходящих к этому узлу, уходящие сигналы не учитываются.

В качестве первого простого примера составлен граф цепи (рис. 18.2, а) на основе символического метода и системы уравнений по методу контурных токов. Искомым пусть будет ток  $i_2$ , проходящий по сопротивлению  $Z_2$ .

Уравнение для первого контура имеет вид:

$$(Z_0 + Z_1) \dot{i}_{11} - Z_1 \dot{i}_{22} = \dot{U}_1,$$

откуда

$$I_{11} = \frac{1}{Z_0 + Z_1} \dot{U}_1 + \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} I_{22}.$$

Таким образом, первая составляющая тока  $I_{11}$  создается сигнал  $\dot{U}_1$  через ветвь с передачей

$$\frac{1}{Z_0 + Z_1} = a,$$

имеющей размерность проводимости, а вторая — сигналом  $I_{22}$  через ветвь с передачей

$$\frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} = b,$$

являющейся безразмерной величиной. Тогда уравнение

$$I_{11} = a\dot{U}_1 + bI_{22}$$

изобразится графом рис. 18.2, б.

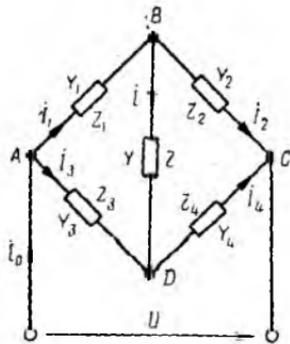


Рис. 18.3

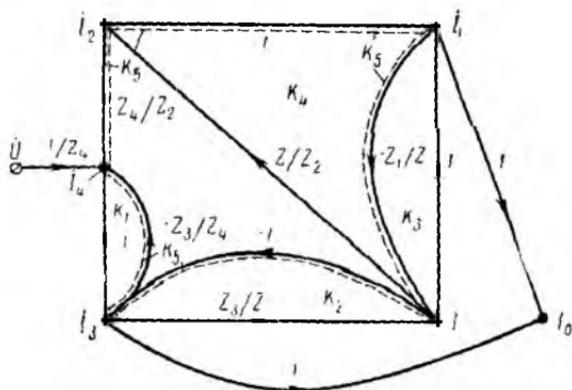


Рис. 18.4

Уравнение для второго контура

$$-Z_1 I_{11} + (Z_1 + Z_2) I_{22} = 0,$$

или

$$I_{22} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_{11} = c I_{11},$$

где передача

$$c = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

изобразится графом рис. 18.2, в. Граф цепи в целом показан на рис. 18.2, г. Так как искомый ток  $I_2 = I_{22}$ , передача выходной ветви равна 1.

Как пример составления графа для системы уравнений по законам Кирхгофа, рассматривается схема неравновесного моста переменного тока (рис. 18.3). В соответствии с выбранными положительными направ-

ениями напряжения  $\dot{U}$  и токов всех ветвей этой цепи, независимые уравнения по первому закону Кирхгофа имеют вид:

$$i_0 = i_1 + i_3, \quad i_1 = i_2 + i, \quad i_3 = i_4 - i.$$

По второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = Z_3 i_3 + Z_4 i_4 \quad \text{или} \quad i_4 = \frac{1}{Z_4} \dot{U} - \frac{Z_3}{Z_4} i_3,$$

$$0 = Z_1 i_1 + Z i - Z_3 i_3 \quad \text{или} \quad i = \frac{Z_3}{Z} i_3 - \frac{Z_1}{Z} i_1,$$

$$0 = Z_2 i_2 - Z_4 i_4 - Z i \quad \text{или} \quad i_2 = \frac{Z_4}{Z_2} i_4 + \frac{Z}{Z_2} i.$$

Граф, построенный по этой системе уравнений, показан на рис. 18.4. Его узлами являются сигналы: входной — напряжение  $\dot{U}$  цепи и выходные — все токи. Все узлы связаны между собой ветвями. Ветви имеют направление, показанное стрелкой, к узлу тока, определяемого его уравнением. Например, для тока  $i$  — ветви имеют направление от узлов токов  $i_3$  и  $i_1$ , стоящих в правой его части; коэффициенты при них  $\left(\frac{Z_3}{Z} \text{ и } -\frac{Z_1}{Z}\right)$  по величине и знаку равны передачам этих ветвей.

Граф неравновесного моста значительно упрощается, если его построить для системы уравнений по методу узловых напряжений. В общем случае число уравнений по этому методу меньше числа узлов на единицу (см. § 3.10). Но в схеме рис. 18.3, где за опорный принят узел  $C$ , узловое напряжение  $\dot{U}_A$  равно заданному напряжению источника  $\dot{U}$ , поэтому, хотя мост имеет четыре узла, необходимо составить лишь два уравнения для узлов  $B$  и  $D$ :

$$(Y_1 + Y_2 + Y) \dot{U}_B - Y \dot{U}_D - Y_1 \dot{U} = 0,$$

$$-Y \dot{U}_B + (Y_3 + Y_4 + Y) \dot{U}_D - Y_3 \dot{U} = 0.$$

Отсюда

$$\dot{U}_B = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y} \dot{U} + \frac{Y}{Y_1 + Y_2 + Y} \dot{U}_D,$$

$$\dot{U}_D = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4 + Y} \dot{U} + \frac{Y}{Y_3 + Y_4 + Y} \dot{U}_B$$

и граф цепи получает вид, изображенный на рис. 18.5, т. е. в отличие от графа рис. 18.4 с семью узлами и двенадцатью ветвями для той же цепи имеет всего три узла и четыре ветви.

Как видно из приведенных примеров, направленный граф цепи отличается от самой цепи как по схеме, так и по числу узлов и ветвей, и зависит от метода составления изображаемых им уравнений. Иногда

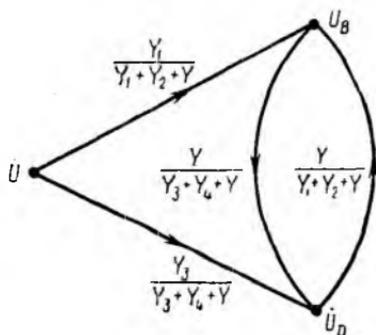


Рис. 18.5

граф удается построить по схеме цепи без составления и преобразования системы уравнений.

Граф цепи позволяет по заданному входному сигналу — напряжению (току) источника — найти выходной сигнал — ток (напряжение) приемника. Эта задача может быть решена или последовательным упрощением графа, или применением общего выражения для передачи сигнала.

При упрощении исходный граф преобразуется в эквивалентный граф с одной ветвью, непосредственно связывающей входной и выходной узлы. Например, в графе рис. 18.2, *г* сначала следует устранить контур *cb*. Исключение из приведенной выше системы контурных токов  $I_{11}$  дает

$$I_{22} = ac\dot{U}_1 + bcI_{22}.$$

Соответствующий граф показан на рис. 18.2, *д*. Как видно, он содержит петлю «обратной связи» с передачей *bc*. Так как передача выходной ветви равна 1, т. е.  $I_2 = I_{22}$ , из предыдущего выражения вытекает, что

$$I_2 = \frac{ac}{1-bc} \dot{U}_1,$$

т. е. петля исключается и получается простейший искомый граф (рис. 18.2, *е*), передача которого равна

$$\frac{ac}{1-bc}.$$

После подстановки значений  $a, b, c$ , выраженных через параметры цепи  $Z_0, Z_1, Z_2$ , передача получает вид:

$$\frac{Z_1}{Z_0 Z_1 + Z_0 Z_2 + Z_1 Z_2}.$$

Передача, умноженная на  $\dot{U}_1$ , дает искомый ток  $I_2$ .

В специальной литературе, кроме исключения контура и петли, излагаются способы упрощения графов, имеющих более сложную конфигурацию.

Общее выражение для передачи графа, позволяющее по графу цепи и заданному входному сигналу, например напряжению  $\dot{U}$  источника, непосредственно получить выходной сигнал, например ток  $I$  одной из ветвей цепи:

$$G = \frac{I}{\dot{U}} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta},$$

Мэзон вывел на основании теории определителей.

Правая часть этой формулы по структуре аналогична правой части передачи топологического метода, но значение членов числителя другое. Здесь  $P_k$  — величина пути по ветвям от узла источника к узлу тока по направлению стрелок, вдоль которого отдельные узлы встречаются не более одного раза, равная произведению передач ветвей этого пути. Например, для графа рис. 18.4 величина единственно

ути, соединяющего узел  $\dot{U}$  с узлом  $I_4$ ,  $P_I = \frac{1}{Z_4}$ . Величины двух путей, соединяющих узел  $\dot{U}$  с узлом  $I$ ,

$$P_{II} = \frac{1}{Z_4} \cdot 1 \cdot \frac{Z_3}{Z} = \frac{Z_3}{Z_4 Z}, \quad P_{III} = \frac{1}{Z_4} \cdot \frac{Z_4}{Z_2} \cdot i \cdot \left(-\frac{Z_1}{Z}\right) = -\frac{Z_1}{Z_2 Z}.$$

Знаменатель  $\Delta$  выражения для  $G$  — определитель исходной системы уравнений, который может быть непосредственно по графу вычислен по формуле

$$\Delta = 1 - \sum K_m + \sum K_m K_n - \sum K_m K_n K_p + \dots$$

здесь  $\sum K_m$  — сумма передач всех контуров графа, равных произведению передач ветвей, обходимых по направлению стрелок;  $\sum K_m K_n$  — сумма произведений  $K_m$  и  $K_n$  двух не соприкасающихся контуров графа;  $\sum K_m K_n K_p$  — сумма произведений  $K_m$ ,  $K_n$  и  $K_p$  трех также не соприкасающихся контуров графа и т. д. Например, передачи контуров графа, показанных на рис. 18.4, равны:

$$K_1 = -\frac{Z_3}{Z_4} \cdot 1, \quad K_2 = -1 \cdot \frac{Z_3}{Z}, \quad K_3 = -\frac{Z_1}{Z} \cdot 1, \quad K_4 = -\frac{Z_1}{Z} \cdot \frac{Z}{Z_2} \cdot 1 = -\frac{Z_1}{Z_2},$$

$$K_5 = \frac{Z_4}{Z_2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{Z_1}{Z}\right) (-1) \left(-\frac{Z_3}{Z_4}\right) = -\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z}.$$

Контур  $K_1$  не касается контуров  $K_3$  и  $K_4$ . Следовательно, определитель

$$\Delta = 1 - K_1 - K_2 - K_3 - K_4 - K_5 + K_1 K_3 + K_1 K_4 =$$

$$= 1 + \frac{Z_3}{Z_4} + \frac{Z_3}{Z} + \frac{Z_1}{Z} + \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z} + \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z} + \frac{Z_3 Z_1}{Z_4 Z_2}.$$

Определитель  $\Delta_k$  части графа, не касающегося  $k$ -го пути, вычисляется по формуле, аналогичной  $\Delta$ , но с учетом только тех контуров, которые не касаются  $k$ -го пути. Например, для графа рис. 18.4 путь  $P_I$  касается контуров  $K_1$  и  $K_5$ , поэтому

$$\Delta_I = 1 - K_2 - K_3 - K_4 = 1 + \frac{Z_3}{Z} + \frac{Z_1}{Z} + \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Так как пути  $P_{II}$  и  $P_{III}$  касаются всех контуров,  $\Delta_{II} = 1$  и  $\Delta_{III} = 1$ .

Произведения  $P_k \Delta_k$ , суммируемые в числителе выражения для передачи графа  $G$ , вычисляются для всех путей искомой передачи.

Выше в виде примеров были вычислены все величины, входящие в формулу Мэзона для передачи графа  $G_I = \frac{I_4}{\dot{U}}$  от узла источника  $\dot{U}$  к узлу  $I_4$  и для передачи  $G_{II} = \frac{I}{\dot{U}}$  от  $\dot{U}$  к  $I$ . Следовательно, ток ветви  $Z_4$  моста

$$I_4 = G_I \dot{U} = \frac{P_I \Delta_I}{\Delta} \dot{U},$$

после подстановки значений  $P_I$ ,  $\Delta_I$  и  $\Delta$

$$I_4 = \frac{Z Z_1 + Z Z_2 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3}{Z Z_1 Z_3 + Z Z_1 Z_4 + Z Z_3 Z_4 + Z Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4} \dot{U}.$$

Можно показать, что этот результат совпадает с решением той же задачи в § 18.4 топологическим методом.

Ток диагонали  $Z$  моста

$$I = G_{11} \dot{U} = \frac{P_{11} \Delta_{11} + P_{111} \Delta_{111}}{\Delta} \dot{U}.$$

Для получения окончательного результата в это выражение над- также подставить вычисленные значения входящих в него величин

Эта задача может быть решена также применением формулы Мэ- зона для графа рис. 18.5 системы уравнений, составленной для этой цепи по методу узловых напряжений.

Величины двух путей от узла источника  $\dot{U}$  к узлу напряжения  $\dot{U}_D$ , определяющего искомый ток  $I_4$ , равны

$$P_1 = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4 + Y}, \quad P_{11} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y} \cdot \frac{Y}{Y_3 + Y_4 + Y}.$$

Так как оба пути касаются обоих контуров графа,  $\Delta_1 = \Delta_{11} = 1$ .

Передача единственного контура, обходимого по направлению стрелок,

$$K = \frac{Y}{Y_1 + Y_2 + Y} \cdot \frac{Y}{Y_3 + Y_4 + Y}.$$

Следовательно, определитель

$$\Delta = 1 - K = 1 - \frac{Y^2}{(Y_1 + Y_2 + Y)(Y_3 + Y_4 + Y)}.$$

Тогда по формуле Мэсона передача

$$G = \frac{\dot{U}_D}{\dot{U}} = \frac{\frac{Y_3}{Y_3 + Y_4 + Y} \cdot 1 + \frac{Y_1}{(Y_1 + Y_2 + Y)} \cdot \frac{Y}{(Y_3 + Y_4 + Y)} \cdot 1}{1 - \frac{Y^2}{(Y_1 + Y_2 + Y)(Y_3 + Y_4 + Y)}}.$$

Передача, умноженная на  $\dot{U}$ , дает напряжение  $\dot{U}_D$ , которое после очевидного упрощения и умножения на  $Y_4$  определяет искомый ток

$$I_4 = \frac{(Y_1 + Y_2 + Y) Y_3 Y_4 + Y_1 Y Y_4}{(Y_1 + Y_2 + Y)(Y_3 + Y_4 + Y) - Y^2} \dot{U},$$

также совпадающий с решением этой задачи в § 18.4 топологическим методом. При этом вычисления по формуле Мэсона оказались более простыми, чем для графа рис. 18.4, составленного на основе системы уравнений по законам Кирхгофа.

Из изложенного видны особенности метода графов для расчета электрических цепей:

1. Граф строится по системе уравнений, связывающих напряжения и токи цепи или непосредственно по схеме цепи. Он состоит из узлов заданных и искомых напряжений и токов, связи между которыми изображаются ветвями, характеризуемыми соотношениями сопротивлений (проводимостей) ветвей цепи.

2. Вид графа для данной цепи отличается для разных методов составления уравнений; граф обычно упрощается при применении метода узловых напряжений.

3. Расчет цепи проводится по формулам для ряда величин, характеризующих схему графа.

Рассмотренные примеры расчета простых цепей не смогли показать преимущества применения метода направленных графов по сравнению классическими методами. Экономия времени получается при расчете сложных цепей, и тем большая, чем сложнее цепь.

## ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### § 19.1. Задачи синтеза

Кроме подробно рассмотренного анализа процессов в различных электрических цепях, весьма важной является обратная задача — синтез, т. е. построение такой электрической цепи, процессы в которой протекают заданным образом. Примером синтеза является построение схемы и определение параметров двухполюсника с заданным комплексным сопротивлением  $Z(j\omega)$  или заданным операторным сопротивлением  $Z(p)$ . Другим примером может служить синтез четырехполюсника, который при заданном законе изменения напряжения  $u_1(t)$  на входе дает на выходе также заданное напряжение  $u_2(t)$ , т. е. обладает заданной переходной  $K(t) = \frac{u_2(t)}{u_1(t)}$  или передаточной  $K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$  функциями. Задачи синтеза приходится решать в радиотехнике, автоматике, вычислительной технике и т. д.

Необходимо подчеркнуть, что задачи синтеза имеют неоднозначные решения, так как заданную характеристику может иметь ряд цепей, из которых надо выбрать простейшую. Некоторые задачи синтеза неразрешимы, потому что не все задаваемые характеристики могут быть осуществлены сочетанием элементов типа  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

В литературе, посвященной ряду областей техники, сложная теория синтеза рассматривается подробно. Она состоит из предварительного анализа возможности решения поставленной задачи по виду заданной функции  $Z(p)$  или  $K(p)$  и в положительном случае — из обоснования ряда методов ее реализации в виде электрических цепей.

Далее рассматривается только синтез двухполюсников по заданной функции  $Z(p)$  путем представления ее в виде цепной дроби или суммы простых дробей, дается понятие о синтезе четырехполюсников на примере дифференцирующих и интегрирующих цепей, а также приводятся некоторые соображения о синтезе нелинейных цепей.

### § 19.2. Синтез двухполюсников методом цепных дробей

Если искомым двухполюсник представить в виде цепной схемы (см. § 9.6), его операторное сопротивление может быть подсчитано методом преобразования и записано в виде цепной дроби. Так, для

схемы вида рис. 19.1, состоящей из чередующихся «продольных» ветвей  $Z_k(p)$  и «поперечных» ветвей  $Y_k(p)$ , операторное сопротивление

$$Z(p) = Z_1(p) + \frac{1}{Y_2(p) + \frac{1}{Z_3(p) + \frac{1}{Y_4(p) + \frac{1}{Z_5(p) + \frac{1}{Y_6(p)}}}}$$

Если читать это выражение снизу вверх, оно наглядно представляет схему цепи, ее ветви и весь ход преобразования.

Отсюда вытекает возможность синтезировать цепь по заданному операторному сопротивлению

$$Z(p) = \frac{a_0 p^\alpha + a_1 p^{\alpha-1} + \dots + a_n}{b_0 p^\beta + b_1 p^{\beta-1} + \dots + b_\beta},$$

если привести его к виду цепной дроби путем постепенного деления числителя на знаменатель. Частное от деления первого члена числителя на первый член знаменателя равно

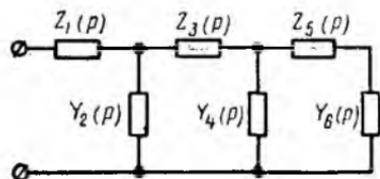


Рис. 19.1

равно  $\frac{a_0}{b_0} p^{\alpha-\beta}$ . Поэтому первый член частного физически осуществим, если степени полиномов числителя  $\alpha$  и знаменателя  $\beta$  равны или отличаются не больше, чем на единицу, так как только тогда этот член получает вид  $A$  или  $A\rho$ , или  $\frac{A}{\rho}$ , где

$A$  — постоянная, т. е. представляет собой осуществимое операторное сопротивление — активное  $r$  или индуктивное  $L\rho$ , или емкостное  $\frac{1}{C\rho}$ , или соответствующие проводимости.

Пусть, например, операторное сопротивление синтезируемой цепи

$$Z(p) = \frac{p^2 + 6p + 8}{0,01p^2 + 0,04p + 0,03}.$$

Здесь степени полиномов в числителе и знаменателе равны. Ход преобразования  $Z(p)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} Z(p) &= 100 + \frac{2p+5}{0,01p^2+0,04p+0,03} = 100 + \frac{1}{\frac{0,01p^2+0,04p+0,03}{2p+5}} = \\ &= 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{0,015p+0,03}{2p+5}} = 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{1}{\frac{2p+5}{0,015p+0,03}}} = \\ &= 100 + \frac{1}{0,005p + \frac{1}{\frac{400}{3} + \frac{1}{0,015p + \frac{1}{100}}}}. \end{aligned}$$

При сопоставлении этой цепной дроби с цепной дробью  $Z(p)$  для схемы рис. 19.1 видно, что  $100$ ,  $\frac{400}{3}$  и  $\frac{100}{3}$  являются активными сопротивлениями;  $0,005 p$  и  $0,015 p$  — операторными емкостными проводимостями, а цепь имеет схему рис. 19.2 с указанными на ней значениями параметров.

Вторым примером может служить синтез цепи, в выражении операторного сопротивления которой степени полиномов числителя и знаменателя отличаются на единицу:

$$Z(p) = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p}. \quad (19.1)$$

Важно отметить, что вид  $Z(p)$  в данном частном случае, когда показатели степени  $p$  в полиномах числителя и знаменателя отличаются на единицу и снижаются сразу на две, указывает на чисто реактивный характер цепи. В этом можно убедиться, подставив  $j\omega$  вместо  $p$  и получив мнимое значение  $Z(j\omega)$ .

Из преобразования

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{p^4 + 4p}{6p^2 + 9}} = p + \frac{1}{\frac{1}{6}p + \frac{12}{5} \frac{1}{p + \frac{5}{18}p}}$$

видно, что  $p$  и  $\frac{12}{5}p$  являются операторными индуктивными сопротивлениями,  $\frac{1}{6}p$  и  $\frac{5}{18}p$  — емкостными проводимостями, а цепь имеет

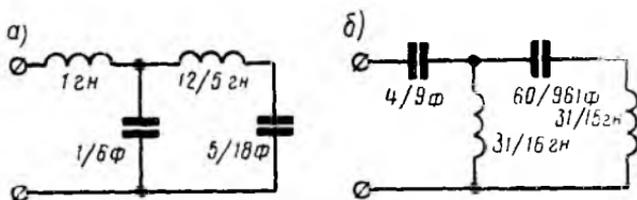


Рис. 19.3

схему, представленную на рис. 19.3, а с указанными на ней значениями параметров.

Если расположить полиномы числителя и знаменателя не по нисходящим, а по восходящим степеням  $p$ , ход преобразования в цепную дробь получит вид:

$$Z(p) = \frac{9 + 10p^2 + p^4}{4p + p^3} = \frac{9}{4p} + \frac{\frac{31}{4}p^2 + p^4}{4p + p^3} = \frac{9}{4p} + \frac{1}{\frac{16}{31p} + \frac{961}{60p} + \frac{1}{15}}$$

Отсюда видно, что  $\frac{9}{4p}$  и  $\frac{961}{60p}$  являются операторными емкостными сопротивлением,  $\frac{16}{31p}$  и  $\frac{15}{31p}$  — индуктивными проводимостями, а цепь имеет схему, представленную на рис. 19.3, б с указанными на незначениями параметров.

Таким образом, обе схемы рис. 19.3, а и б решают задачу синтеза цепи с заданным  $Z(p)$ , что подтверждает упомянутую выше неоднзначность решения задач синтеза.

### § 19.3. Синтез двухполюсников методом простых дробей

В этом методе синтезируемая цепь представляется в виде последовательного соединения элементарных участков. Тогда ее операторное сопротивление  $Z(p)$  будет равно сумме их операторных сопротивлений. Этими элементами цепи, изображенной на рис. 19.4, являются

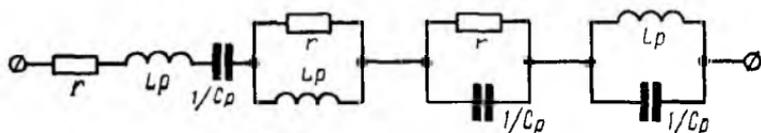


Рис. 19.4

участки с активным сопротивлением  $r$ , с индуктивным  $Lp$  и с емкостным  $\frac{1}{Cp}$ , а также участки с параллельным соединением  $r$  и  $L$ ,  $r$  и  $C$ ,  $L$  и  $C$ . Их операторные сопротивления, соответственно, равны:

$$\frac{rLp}{r+Lp} = \frac{rp}{p+\frac{r}{L}}, \quad \frac{\frac{r}{Cp}}{r+\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p+\frac{1}{rC}},$$

$$\frac{Lp \frac{1}{Cp}}{Lp+\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{p}{p^2+\frac{1}{LC}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Таким образом, синтезируемое сопротивление  $Z(p)$ , заданное в виде частного двух полиномов, должно быть преобразовано в сумму следующих простых дробей:

$$Z(p) = r + Lp + \frac{1}{Cp} + \frac{rp}{p+\frac{r}{L}} + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p+\frac{1}{rC}} + \frac{1}{C} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Некоторые члены суммы могут отсутствовать, а некоторые повторяться с другими параметрами.

Далее этот метод синтеза рассматривается на примере. Пусть заданное операторное сопротивление

$$Z(p) = \frac{p^6 + 2p^4 + 10p^3 + 14p^2 + 9p + 9}{p^4 + p^3 + 4p^2 + 4p}.$$

Так как степень числителя на единицу больше степени знаменателя, сначала из  $Z(p)$  выделяется составляющая, пропорциональная первой степени  $p$ . Для этого числитель делится на знаменатель, как это делалось в методе цепных дробей:

$$Z(p) = p + \frac{p^4 + 6p^3 + 10p^2 + 9p + 9}{p^4 + p^3 + 4p^2 + 4p} = p + Z_1(p).$$

Выделенная первая составляющая есть операторное индуктивное сопротивление  $Lp$ , т. е.  $L = 1$  гн. Теперь к оставшейся правой части  $Z_1(p)$  может быть применено разложение на простые дроби, обоснованное в п. 5 § 17.3 при выводе теоремы разложения:

$$Z_1(p) = \frac{\Phi(p)}{F(p)} = \frac{A_0}{p-p_0} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p-p_3} + \dots,$$

где  $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$  — корни уравнения  $F(p) = 0$ . В рассматриваемом примере

$$F(p) = p^4 + p^3 + 4p^2 + 4p = p(p^2 + 4)(p + 1),$$

т. е. уравнение  $F(p) = 0$  имеет корни  $p_0 = 0$ ,  $p_{1,2} = \pm j\omega = \pm j2$  и  $p_3 = -1$ .

Корень  $p_0 = 0$  позволяет выделить простую дробь  $\frac{A_0}{p}$ , причем

$$A_0 = \frac{\Phi(p_0)}{F'(p_0)} = \frac{9}{4}.$$

Следовательно, вторая составляющая равна  $\frac{9/4}{p}$ , т. е. представляет собой емкость  $C_0 = \frac{4}{9}$  ф.

Можно показать, что числители простых дробей, соответствующих мнимым корням  $p_1 = j\omega = j2$  и  $p_2 = -j\omega = -j2$ , вещественны и равны между собой, т. е.  $A_1 = A_2$ . Тогда сумма этих дробей

$$\frac{A_1}{p-j\omega} + \frac{A_2}{p+j\omega} = \frac{2A_1p}{p^2 + \omega^2}$$

дает третью простую составляющую. Из сопоставления с приведенными выше операторными сопротивлениями элементарных участков видно, что она представляет собой операторное сопротивление параллельного соединения  $L_1$  и  $C_1$ , равное

$$\frac{1}{C_1} \cdot \frac{p}{p^2 + \frac{1}{L_1 C_1}} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$\text{где } \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Следовательно,

$$C_1 = \frac{1}{2A_1} \quad \text{и} \quad L_1 = \frac{2A_1}{\omega^2}.$$

Числители соответствующих простых дробей в общем виде и в рассматриваемом примере после подстановки в выражение для  $Z_1(p)$  значения  $p_1 = j\omega = j2$ , а также третья составляющая, равны

$$A_1 = \frac{\varphi(p_1)}{F(p_1)} = \frac{15}{8}, \quad \frac{2A_1 p}{p^2 + \omega^2} = \frac{2 \frac{15}{8} p}{p^2 + 4},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \frac{15}{8}} = \frac{4}{15} \text{ ф}, \quad L_1 = \frac{2 \frac{15}{8}}{2^2} = \frac{15}{16} \text{ гн}.$$

Остается синтезировать  $Z_2(p)$ , определяемое вычитанием из  $Z_1(p)$  найденных второй и третьей составляющих:

$$Z_2 = \frac{p^4 + 6p^3 + 10p^2 + 9p + 9}{p^4 + p^3 + 4p^2 + 4p} - \frac{9/4}{p} - \frac{15/4p}{p^2 + 4} = \frac{p}{p+1}.$$

Из сравнения этой дроби с приведенным выше выражением операторных сопротивлений видно, что она представляет параллельное соединение  $r$  и  $L$ , причем

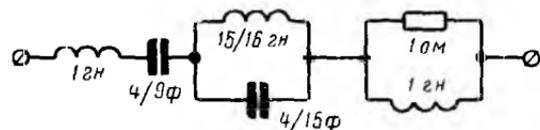


Рис. 19.5

$r = 1 \text{ ом}$ , а  $L = |r| = 1 \text{ гн}$ , т. е. является четвертой последней составляющей  $Z(p)$ . В результате схема синтезируемого двухполюсника получает вид, показанный на рис. 19.5.

Операторное сопротивление схемы, состоящей из первых трех составляющих цепи рис. 19.5,

$$Lp + \frac{9/4}{p} + \frac{15/4p}{p^2 + 4} = \frac{p^4 + 10p^2 + 9}{p^3 + 4p}$$

равно операторному сопротивлению  $Z(p)$  по формуле 19.1, синтезированному ранее в § 19.2 методом целных дробей. Таким образом, эта схема, отдельно показанная на рис. 19.6, а, является третьим вариантом синтеза  $Z(p)$ , но полученным методом простых дробей.

Во всех предыдущих примерах рассматривался синтез цепи по заданному ее операторному сопротивлению  $Z(p)$ , однако синтез может осуществляться и по проводимости этой цепи  $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$ . При этом

простые составляющие  $A$ ,  $Ap$  и  $\frac{A}{p}$ , будут не последовательно соединенными сопротивлениями, а параллельно включенными проводимостями, составляющая же  $\frac{2A_1 p}{p^2 + \omega^2}$  — не параллельно, а последовательно соединенными  $L$  и  $C$ .

Далее в качестве примера синтезируется методом простых дробей цепь с тем же  $Z(p)$ , что и в § 19.2 (см. выражение 19.1), но по ее заданной операторной проводимости

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{p^3 + 4p}{p^4 + 10p^2 + 9} = \frac{p^3 + 4p}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

Так как степень числителя меньше степени знаменателя, а знаменатель не имеет корня  $p_0 = 0$ , составляющие, пропорциональные  $p$  и  $\frac{1}{p}$ , будут отсутствовать. Знаменатель  $Y(p)$  имеет две пары мнимых

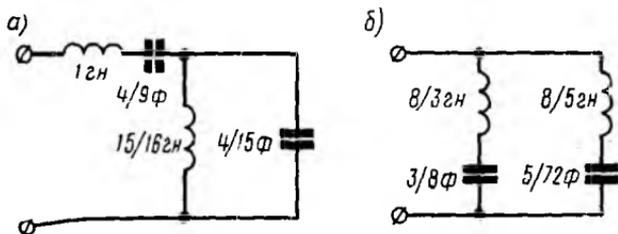


Рис. 19.6

корней  $p_{1,2} = \pm j$  и  $p_{3,4} = \pm j3$ , следовательно,  $Y(p)$  является суммой простых дробей

$$Y(p) = \frac{2A_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{2A_3 p}{p^2 + \omega_3^2},$$

где

$$A_1 = \frac{F(p_1)}{\varphi'(p_1)} = \left. \frac{p^3 + 4p}{4p^3 + 20p} \right|_{p=j} = \frac{3}{16}, \quad A_3 = \frac{F(p_3)}{\varphi'(p_3)} = \left. \frac{p^3 + 4p}{4p^3 + 20p} \right|_{p=j3} = \frac{5}{16},$$

$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_3^2 = 9.$$

Так как проводимость цепи с последовательным соединением  $L$  и  $C$  равна

$$\frac{1}{Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{p}{p^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

параметры обеих ветвей  $Y(p)$  будут:

$$L_1 = \frac{1}{2A_1} = \frac{8}{3} \text{ гн}, \quad C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1} = \frac{3}{8} \text{ ф},$$

$$L_3 = \frac{1}{2A_3} = \frac{8}{5} \text{ гн}, \quad C_3 = \frac{1}{\omega_3^2 L_3} = \frac{5}{72} \text{ ф}.$$

Следовательно, синтезируемая цепь имеет вид, показанный на рис. 19.6, б, — это четвертый вариант синтеза цепи с тем же заданным  $Z(p)$ .

Синтез цепи можно вести также комбинированным методом. Например, выделив первый элементарный участок методом простых дробей, остаток можно синтезировать дальше методом цепных дробей, причем полиномы числителя и знаменателя дроби, представляющей собой

$Z_1(p)$  или  $Y_1(p)$ , можно расположить по нисходящим или по восходящим степеням и т. п. Все эти различные ходы расчета могут дать новые варианты синтезируемой цепи. При реализации синтезируемой цепи из всех вариантов выбирается оптимальный — схема, состоящая из наиболее просто технически осуществимых  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

### § 19.4. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

В качестве простейшего примера синтеза четырехполюсников рассматривается задача создания дифференцирующих и интегрирующих цепей, напряжение  $u_2(t)$  на выходе которых пропорционально производной или интегралу напряжения  $u_1(t)$  на входе. Для упрощения задачи можно пренебречь выходным током по сравнению с током на

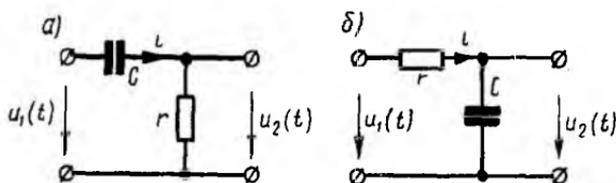


Рис. 19.7

входе, т. е. рассмотреть режим холостого хода синтезируемого четырехполюсника.

Напряжение и ток индуктивности и емкости связаны известными зависимостями

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad i = \frac{1}{L} \int u dt, \quad i = C \frac{du}{dt}, \quad u = \frac{1}{C} \int i dt,$$

которые и могут быть использованы для решения поставленной задачи. В большинстве случаев в качестве реактивных элементов применяются конденсаторы, так как катушки индуктивности обладают большими потерями, а также межвитковой емкостью.

Выходной величиной дифференцирующей цепи должно быть напряжение, а не ток  $i = C \frac{du}{dt}$ , поэтому приходится последовательно с емкостью  $C$  включить сопротивление  $r$ , кривая напряжения на котором повторяет форму кривой тока. С этого сопротивления и снимается напряжение выхода  $u_2(t) = ri$  (рис. 19.7, а). Величина  $r$  должна быть относительно малой, чтобы напряжение  $u_2(t)$  было пренебрежимо мало по сравнению с напряжением  $u_C(t)$  на конденсаторе. Тогда

$$u_2(t) = ri(t) = rC \frac{du_C(t)}{dt} \approx rC \frac{du_1(t)}{dt}$$

или при нулевых начальных условиях

$$U_2(p) \approx rCpU_1(p),$$

г. е. рассматриваемый четырехполюсник при сделанных допущениях является дифференцирующей цепью. Его передаточная функция

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \approx rCp.$$

В интегрирующей цепи необходимо последовательно : емкостью, с которой снимается напряжение выхода  $u_2 = u_C$ , включить сопротивление  $r$  (рис. 19.7, б). Величина  $r$  должна быть относительно большой, чтобы напряжение  $u_C$  на конденсаторе было пренебрежимо мало по сравнению с напряжением  $ri$  на сопротивлении. Тогда

$$u_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \approx \frac{1}{C} \int_0^t \frac{u_1(t)}{r} dt = \frac{1}{rC} \int_0^t u_1(t) dt$$

или

$$U_2(p) \approx \frac{1}{rC} \frac{U_1(p)}{p},$$

г. е. рассматриваемый четырехполюсник при сделанных допущениях является интегрирующей цепью. Его передаточная функция

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \approx \frac{1}{rCp}$$

обратна передаточной функции рассмотренной дифференцирующей цепи. Следует отметить, что в обеих цепях напряжения  $u_2(t)$  на выходе получаются значительно меньше напряжений  $u_1(t)$  на входе. Этот недостаток устраняется применением на выходе усилителей.

### § 19.5. О синтезе нелинейной цепи

В задачу синтеза нелинейной цепи обычно входит подбор нелинейного элемента, обладающего необходимой характеристикой, и построение цепи, в которой эта характеристика может быть использована.

Пусть, например, при синусоидальном входном напряжении  $u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t$  четырехполюсника на его выходе требуется получить пикообразное периодическое напряжение  $u_2(t)$ . Известно, что при синусоидальном напряжении ток катушки с насыщаемым стальным сердечником имеет пикообразную форму (см. рис. 14.1). Чтобы получить пикообразное напряжение выхода, его надо снимать с сопротивления  $r$ , включенного последовательно с катушкой (рис. 19.8), причем это сопротивление должно быть мало по сравнению с эквивалентным сопротивлением катушки.

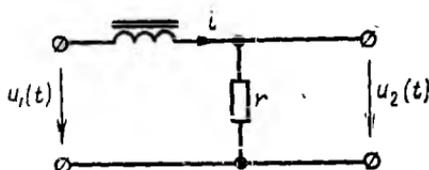


Рис. 19.8

Величина амплитуды тока цепи должна обеспечить насыщение стального сердечника. Из соотношения сопротивлений видно, что выходное напряжение будет значительно меньше входного.

Приведенные примеры дают лишь общее представление о синтезе электрических цепей, отнюдь не исчерпывая всего содержания этого нового и сложного раздела теории цепей.

## ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### § 20.1. Сосредоточенные и распределенные параметры цепей

Как было показано в гл. I, электрическое и магнитное поле, а также превращение электромагнитной энергии в тепло, имеют место в каждом элементарном участке любых электрических устройств — индуктивных катушках, обмотках электрических машин и трансформаторов, линиях передачи электрической энергии и т. п. Следовательно, все устройства являются цепями с распределенными индуктивностью, емкостью и сопротивлением.

Однако, когда эти устройства рассматриваются в целом, они обычно заменяются эквивалентными двухполюсниками или четырехполюсниками с сосредоточенными параметрами  $r$ ,  $L$  и  $C$ . Если устройство работает при одной частоте, эквивалентные схемы приводятся к простейшим — последовательному или параллельному соединению активного и реактивного сопротивлений для двухполюсника и к T-образной или П-образной схеме с теми же элементами для четырехполюсника.

Если необходимо провести анализ для некоторого диапазона частот, эквивалентная схема становится тем сложнее, чем шире этот диапазон. В общем случае приходится рассматривать цепь такой, какая она есть в действительности, т. е. как цепь с распределенными параметрами.

Необходимость рассмотрения устройств как цепей с распределенными параметрами возникает также в тех случаях, когда анализ должен выявить соотношения внутри устройства, например требуется определить напряжение и ток в разных точках линии передачи.

Далее методы расчета цепей с распределенными параметрами изучаются на примере однородных линий передач, широко применяемых в электроэнергетике и технике электрической связи.

### § 20.2. Уравнения однородной линии

В двухпроводных однородных линиях индуктивность и сопротивление линии, а также емкость и проводимость через несовершенную изоляцию между проводниками можно считать распределенными равномерно. Эти параметры на единицу длины двухпроводной линии, подсчитанные для линий различной конфигурации (см. § 1.2, 1.5, 1.7), в дальнейшем обозначены, соответственно,  $L$ ,  $r$ ,  $C$ ,  $g$ .

Бесконечно малый элемент двухпроводной линии длиной  $dx$  может быть заменен эквивалентной схемой с параметрами  $Ldx$ ,  $rdx$ ,  $Cdx$  и

$dx$ . На рис. 20.1 эта схема изображена жирными линиями и выбраны направления напряжений и токов. При этом индуктивность и сопротивление являются продольными параметрами линии, а емкость и проводимость — ее поперечными параметрами.

В каждом элементе  $dx$  линии происходит падение напряжения  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  и утечка тока  $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ , благодаря чему напряжение и ток в каждой точке линии будут функциями не только времени  $t$ , но и ее местоположения. В общем случае переменных напряжений и токов для элемента, рас-

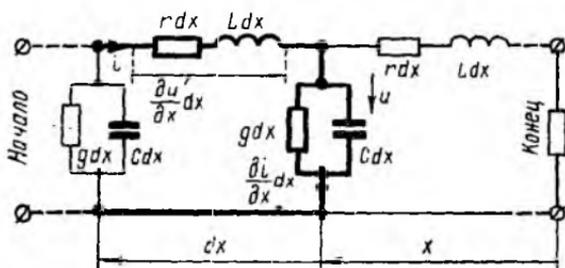


Рис. 20.1

положенного на расстоянии  $x$  от конца линии и отмеченного на рис. 20.1 жирными линиями,

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = r dx i + L dx \frac{\partial i}{\partial t},$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} dx = g dx u + C dx \frac{\partial u}{\partial t}.$$

После сокращения на  $dx$  получается система уравнений в частных производных для мгновенных значений напряжений и токов:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = r i + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = g u + C \frac{\partial u}{\partial t},$$

решение которой при заданных начальных и граничных условиях определит  $u$  и  $i$  в функции  $x$  и  $t$ .

При анализе процессов в трехфазной линии каждая ее фаза может рассматриваться, как однофазная двухпроводная линия. Не приводя вывода, можно, например, указать, что для симметричной трехфазной воздушной линии, провода которой расположены в вершинах равностороннего треугольника и удалены от земли, эквивалентная каждой фазе двухпроводная линия имеет индуктивность  $L$ , вдвое меньшую, а емкость  $C$ , вдвое большую, чем двухпроводная линия с таким же расстоянием между проводами, как и трехфазная линия. Сопротивление  $r$  эквивалентной двухпроводной линии равно сопротивлению провода одной фазы, а проводимость  $g$  — проводимости одной фазы по отношению к земле.

## § 20.3. Решение уравнений однородной линии для установившихся режимов

### 1. Режим постоянного напряжения

Если к началу линии приложено постоянное напряжение  $U_{01}$ , при установившемся режиме напряжения и токи в линии будут также постоянными. При подстановке в уравнения линии вместо переменных мгновенных значений  $u$  и  $i$  постоянных во времени  $U_0$  и  $I_0$  в каждой точке линии производные по  $t$  будут равны нулю и уравнения станут обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых независимой переменной является  $x$  — расстояние от конца линии:

$$\frac{dU_0}{dx} = rI_0, \quad \frac{dI_0}{dx} = gU_0.$$

Для получения из приведенной выше системы одного уравнения с одним неизвестным  $U_0$  надо взять производную по  $x$  от первого уравнения:

$$\frac{d^2U_0}{dx^2} = r \frac{dI_0}{dx}$$

и подставить сюда значение  $\frac{dI_0}{dx}$  из второго:

$$\frac{d^2U_0}{dx^2} = rgU_0.$$

Если положить, что  $rg = \alpha^2$ , то

$$\frac{d^2U_0}{dx^2} - \alpha^2 U_0 = 0.$$

Характеристическое уравнение и его корни имеют вид:

$$\rho^2 - \alpha^2 = 0, \quad \rho_{1,2} = \pm \alpha.$$

Общее решение для напряжения на расстоянии  $x$  от конца линии получает вид:

$$U_0 = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}.$$

Следовательно, ток в этой точке

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dU_0}{dx} = \frac{\alpha}{r} (A_1 e^{\alpha x} - A_2 e^{-\alpha x}) = \\ &= \sqrt{\frac{g}{r}} (A_1 e^{-\alpha x} - A_2 e^{\alpha x}) = \frac{A_1 e^{\alpha x} - A_2 e^{-\alpha x}}{\rho}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что однородную линию характеризуют две величины:  $\rho = \sqrt{\frac{r}{g}}$  — волновое сопротивление и  $\alpha = \sqrt{rg}$  — коэффициент распространения.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий, которыми могут быть две из четырех величин, например напряжение  $U_{01}$

ток  $I_{01}$  в начале линии или  $U_{02}$ ,  $I_{02}$  в конце линии. Пусть заданы напряжение  $U_{02}$  и сопротивление  $r_2$  нагрузки и тем самым ток  $I_{02} = \frac{U_{02}}{r_2}$ . Тогда для конца линии, т. е. при  $x = 0$ ,

$$U_{02} = A_1 + A_2, \quad \rho I_{02} = A_1 - A_2,$$

откуда

$$A_1 = \frac{1}{2} (U_{02} + \rho I_{02}), \quad A_2 = \frac{1}{2} (U_{02} - \rho I_{02}).$$

Следовательно, напряжение и ток на расстоянии  $x$  от конца линии будут:

$$U_0 = \frac{1}{2} (U_{02} + \rho I_{02}) e^{\alpha x} + \frac{1}{2} (U_{02} - \rho I_{02}) e^{-\alpha x},$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \left( I_{02} + \frac{U_{02}}{\rho} \right) e^{\alpha x} + \frac{1}{2} \left( I_{02} - \frac{U_{02}}{\rho} \right) e^{-\alpha x}.$$

Таким образом, напряжение и ток в любой точке линии определяются алгебраическими суммами ординат двух экспоненциальных

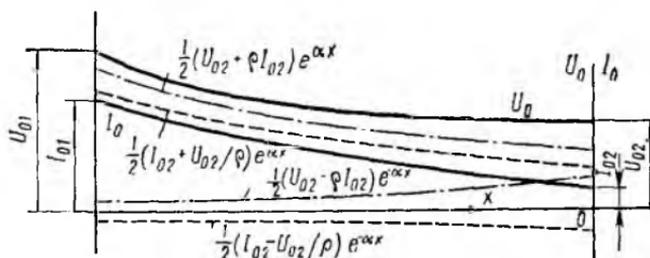


Рис. 20.2

кривых. Ординаты кривой с  $e^{\alpha x}$  уменьшаются от начала к концу линии, а ординаты кривой с  $e^{-\alpha x}$  — от конца к началу. На рис. 20.2 показаны составляющие и суммарные кривые  $U_0$  и  $I_0$  для случая  $r_2 > \rho$ . Если включенное в конце линии сопротивление равно волновому, т. е.  $r_2 = \rho$ , вторые члены выражений для  $U_0$  и  $I_0$  пропадают, и распределение  $U_0$  и  $I_0 = \frac{U_0}{\rho}$  вдоль линии представляется одной экспонентой.

Следовательно, в однородной линии постоянного тока происходит затухание напряжения и тока вдоль линии, определяемое коэффициентом распространения  $\alpha = \sqrt{rg}$ , который в данном случае является также коэффициентом затухания.

## 2. Режим синусоидального напряжения

Если к началу линии приложено синусоидальное напряжение постоянной угловой частоты  $\omega$ , при установившемся режиме напряжение и ток в каждой точке линии будут также синусоидальными функциями времени той же частоты. Так как синусоидальные напряжение и ток являются частным случаем переменных  $u$  и  $i$ , в расчетах надо учесть все параметры линии рис. 20.1, т. е.  $r$ ,  $L$ ,  $g$  и  $C$ .

Применяя символический метод, можно использовать результаты расчета для линии постоянного тока (п. 1), заменив продольное сопротивление  $r$  комплексным сопротивлением  $r + j\omega L$ , а поперечную проводимость  $g$  комплексной проводимостью  $g + j\omega C$ . Тогда характеристиками линии будут волновое сопротивление  $Z$  и коэффициент распространения  $\gamma$ :

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

Вещественная часть  $\alpha$  коэффициента распространения является коэффициентом затухания, а мнимая  $\beta$  называется коэффициентом фазы.

При указанном переходе от постоянного тока к синусоидальному комплексные напряжения и ток на расстоянии  $x$  от конца линии получают вид:

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + Z\dot{I}_2) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - Z\dot{I}_2) e^{-\gamma x},$$

$$\dot{I} = \frac{1}{2Z}(\dot{U}_2 + Z\dot{I}_2) e^{\gamma x} - \frac{1}{2Z}(\dot{U}_2 - Z\dot{I}_2) e^{-\gamma x}.$$

Если ввести гиперболические функции

$$\operatorname{ch} \gamma x = \frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} \gamma x = \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}),$$

выражения для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  будут:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + Z\dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x, \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma x.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям для однородных симметричных цепных схем (см. § 9.6), что и следовало ожидать, так как однородная линия рассматривалась как однородная цепная схема с бесконечно большим числом элементарных звеньев.

Однородная линия в целом является симметричным пассивным четырехполюсником (см. § 9.1). Его уравнения получают из последних выражений при  $x = l$ , где  $l$  — длина линии:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z\dot{I}_2 \operatorname{sh} \gamma l, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l.$$

Параметры этого четырехполюсника

$$A = D = \operatorname{ch} \gamma l, \quad B = Z \operatorname{sh} \gamma l, \quad C = \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{Z}$$

подчиняются условию  $A^2 - BC = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1$ .

Из уравнений линии видно, что напряжение и ток в любой точке линии являются также функцией частоты  $\omega$ , так как от нее зависят волновое сопротивление  $Z$ , коэффициент распространения  $\gamma$  и его составляющие  $\alpha$  и  $\beta$ . Это значит, что в случае сложной формы кривых напряжения и тока, имеющей место в линиях связи, отдельные гармоники будут передаваться с разным коэффициентом затухания  $\alpha$ ,

что вызывает нежелательные искажения. Чтобы их избежать, строят линии, у которых  $\frac{r}{L} = \frac{g}{C}$ . Тогда коэффициент распространения

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC \left(\frac{r}{L} + j\omega\right) \left(\frac{g}{C} + j\omega\right)} = \\ &= \sqrt{LC \left(\frac{g}{C} + j\omega\right)} = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{LC} = \alpha + j\beta \end{aligned}$$

и, следовательно, коэффициент затухания  $\alpha = \sqrt{rg}$  не зависит от частоты. Волновое сопротивление такой линии

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{\frac{r}{L} + j\omega}{\frac{C}{L} \left(\frac{g}{C} + j\omega\right)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

является вещественным числом, т. е. активным сопротивлением, также независимым от частоты. В результате передача будет осуществляться без искажения. Такая линия называется не искажающей.

#### § 20.4. Бегущие и стоячие волны

Уравнения линии для режима синусоидального напряжения могут быть преобразованы. После введения значения  $\gamma = \alpha + j\beta$  и обозначений

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + ZI_2) e^{\gamma x} = \dot{U}_{A_2} e^{\gamma x} = U_{A_2} e^{j\psi_A} e^{(\alpha + j\beta)x}, \\ \dot{U}_B &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - ZI_2) e^{-\gamma x} = U_{B_2} e^{-\gamma x} = U_{B_2} e^{j\psi_B} e^{-(\alpha + j\beta)x} \end{aligned}$$

комплекс напряжения в линии получает вид:

$$\dot{U} = \dot{U}_A + \dot{U}_B = U_{A_2} e^{\alpha x} e^{j(\psi_A + \beta x)} + U_{B_2} e^{-\alpha x} e^{j(\psi_B - \beta x)}.$$

Переходя к мгновенному значению напряжения  $u = u_A + u_B =$

$$= \sqrt{2} U_{A_2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_A + \beta x) + \sqrt{2} U_{B_2} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_B - \beta x),$$

его можно рассматривать как сумму двух составляющих  $u_A$  и  $u_B$ , зависящих от  $x$  и  $t$ .

В любой фиксированный момент времени первая составляющая  $u_A$  распределена вдоль линии по закону синуса с амплитудой, которая в соответствии с множителем  $e^{\alpha x}$  возрастает от конца линии к ее началу, т. е. затухает от начала линии к ее концу. Если в данный момент времени  $t'$  в точке  $x'$

$$u'_A = \sqrt{2} U_{A_2} e^{\alpha x'} \sin(\omega t' + \psi_A + \beta x'),$$

то в точке  $x'' < x'$  в момент времени  $t'' = t' + \frac{x' - x''}{v}$ , где  $v$  имеет

размерность скорости,

$$u_A'' = \sqrt{2} U_{A_1} e^{\alpha x''} \sin(\omega t'' + \psi_A + \beta x'') = \\ = \sqrt{2} U_{A_1} e^{\alpha x''} \sin\left[\omega t'' + \psi_A + \frac{\omega}{v} x'' + \left(\beta - \frac{\omega}{v}\right) x''\right].$$

При  $\beta - \frac{\omega}{v} = 0$ , т. е.  $v = \frac{\omega}{\beta}$ ,

$$u_A'' = \sqrt{2} U_{A_1} e^{\alpha x''} \sin(\omega t'' + \psi_A + \beta x'') = u_A' e^{-\alpha(x' - x'')},$$

т. е. значение напряжения  $u_A$  перемещается вдоль линии со скоростью  $v = \frac{\omega}{\beta}$ , одновременно затухая. Иными словами, является *прямой волной, бегущей от начала линии к ее концу* (рис. 20.3). Длина  $\lambda$  волны, т. е. расстояние, на котором фаза волны изменяется на  $2\pi$ , определяется соотношением  $\beta\lambda = 2\pi$ , откуда  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ .

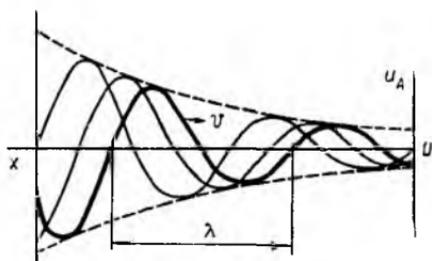


Рис. 20.3

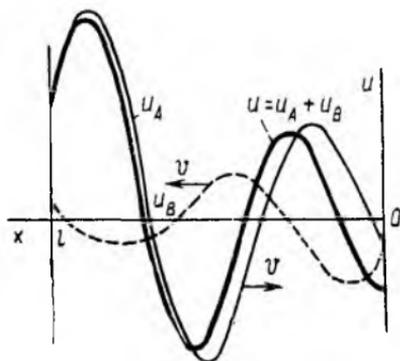


Рис. 20.4

Скорость  $v = \frac{\omega}{\beta}$  называется *ф а з о в о й с к о р о с т ь ю*, так как с такой скоростью движется точка, для которой фаза остается неизменной. Например, для неискажающей линии, для которой  $\beta = \omega\sqrt{LC}$ , фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Аналогично, вторая составляющая  $u_B$  является волной такой же длины  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ , но бегущей вдоль линии со скоростью  $v = \frac{\omega}{\beta}$  от конца к началу. Амплитуда этой *о б р а т н о й* волны в соответствии с множителем  $e^{-\alpha x}$  затухает по мере продвижения волны от конца линии к ее началу. На рис. 20.4 изображены прямая и обратная волны напряжения и их сумма  $u$  для одного и того же момента времени.

Так как выражение комплексного тока  $I$  имеет такой же вид, как и комплексного напряжения  $\dot{U}$ , ток  $i$  также можно рассматривать как наложение двух затухающих синусоидальных волн  $i_A$  и  $i_B$ , бегущих навстречу друг другу с той же скоростью  $v = \frac{\omega}{\beta}$  (рис. 20.5).

Подставив в выражение фазовой скорости для неискажающей воздушной линии значения ее емкости  $C$  (см. п. 3 § 1.2) и индуктивности  $L$  (см. п. 3 § 1.7) на единицу длины:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 : \sqrt{\frac{\mu_0 \ln \frac{d}{r_0} \cdot \pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r_0}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

т. е. фазовая скорость равна скорости света в пустоте. Длина волны при частоте  $f = 50$  гц

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6000 \text{ км.}$$

Следовательно, длина современных воздушных линий, служащих для передачи электрической энергии, меньше четверти длины волны.

В телефонных линиях связи при частоте  $f = 1000$  гц длина волны составляет 300 км, т. е. в телефонной линии может уложиться несколько длин волн. Линии, применяемые в радиоаппаратуре, работающей при высоких частотах, имеют длину, во много раз большую, чем длина волны.

В кабельных линиях фазовая скорость, а следовательно, и длины волны при тех же частотах будут примерно вдвое меньше, так как диэлектрическая проницаемость изоляции кабеля, которую надо подставить в формулу для  $v$ , близка к  $4\epsilon_0$ .

Комплексные полные сопротивления для прямых и обратных волн равны отношению комплексных действующих значений напряжений и токов одноименных волн:

$$Z_A = \frac{\dot{U}_A}{\dot{I}_A} = \frac{\frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z\dot{I}_2) e^{\gamma x}}{\frac{1}{2} (\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z}) e^{\gamma x}} = Z, \quad Z_B = \frac{\dot{U}_B}{\dot{I}_B} = \frac{\frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z\dot{I}_2) e^{-\gamma x}}{\frac{1}{2} (\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z}) e^{-\gamma x}} = -Z.$$

Следовательно, эти сопротивления равны волновому сопротивлению  $Z$  линии со знаком плюс или минус и не зависят от сопротивления приемника  $Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ , хотя амплитуды напряжения и тока от него зависят.

Обратные волны можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Тогда обратные волны называют отраженными, а прямые падающими. Коэффициенты отражения волны напряжения  $q_u$  и волны тока  $q_i$  равны отно-

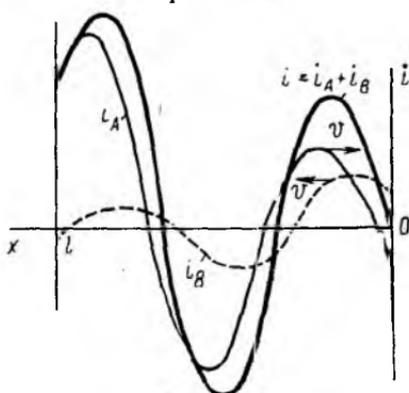


Рис. 20.5

шению соответствующих комплексных амплитуд отраженной и падающей волн в конце линии. Тогда из выражений для  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $I_A$  и  $I$  при  $x = 0$  и из соотношения  $\dot{U}_2 = Z_2 I_2$ :

$$q_u = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{U}_2 - Z I_2)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\dot{U}_2 + Z I_2)} = \frac{Z_2 - Z}{Z_2 + Z}, \quad q_i = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(I_2 - \frac{\dot{U}_2}{Z})}{\frac{\sqrt{2}}{2}(I_2 + \frac{\dot{U}_2}{Z})} = \frac{Z - Z_2}{Z_2 + Z},$$

т. е.  $q_u = -q_i$ . При разомкнутой линии  $Z_2 = \infty$ , тогда  $q_u = 1$ ;  $q_i = -1$ , т. е. волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменной знака. Для линии, замкнутой на конце накоротко,  $Z_2 = 0$ ; тогда  $q_u = -1$  и  $q_i = 1$ , т. е. волна напряжения отражается с переменной знака, а волна тока — без перемены знака. В этих двух случаях отражение происходит без изменения величины падающего напряжения и тока.

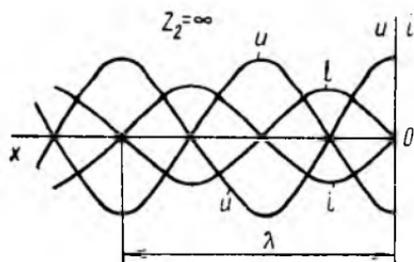


Рис. 20.6

Если замкнуть линию на сопротивление, равное волновому ( $Z_2 = Z$ ), отраженных волн не будет. Такое согласование параметров линии и нагрузки часто применяют в устройствах связи,

так как условие отсутствия отраженных волн близко к условию, при котором приемник получает максимальную мощность.

Интересен идеальный случай линии без потерь, когда  $r = 0$  и  $g = 0$ . Тогда  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = j\beta$ ,  $\beta = \omega\sqrt{LC}$ ,  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ . При холостом ходе  $Z_2 = \infty$ ,  $I_2 = 0$ , и уравнения линии получают вид:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 e^{j\beta x} + \dot{U}_2 e^{-j\beta x}) = \dot{U}_2 \cos \beta x,$$

$$I = \frac{1}{2\rho} (\dot{U}_2 e^{j\beta x} - \dot{U}_2 e^{-j\beta x}) = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin \beta x.$$

В этом случае распределения напряжения и тока вдоль линии представляют собой стоячие волны (рис. 20.6). В точках линии, где  $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ , имеют место пучности напряжения, так как  $\cos \beta x$  обращается в  $\pm 1$ , и узлы тока, так как  $\sin \beta x = 0$ . В точках линии, где  $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ , имеют место узлы напряжения и пучности тока (здесь  $\cos \beta x = 0$ , а  $\sin \beta x = \pm 1$ ).

Стоячие волны будут также при коротком замыкании линии без потерь, и при нагрузке индуктивным или емкостным сопротивлением, т. е. тогда, когда средняя мощность равна нулю. Во всех этих

лучаях не происходит передачи энергии вдоль всей линии, так как узлах, где  $u = 0$  или  $i = 0$ , мгновенная мощность равна нулю и энергия через эти узлы не передается. Если энергия расходуется в приемнике, в линии или в линии и приемнике, должны существовать бегущие волны напряжения и тока, обеспечивающие процесс передачи энергии вдоль всей линии.

### § 20.5. Распределение напряжения и тока вдоль линии

Разложение напряжения и тока на прямую и обратную волны при установившемся синусоидальном режиме облегчает анализ явлений. В действительности же в каждой точке в каждый момент времени существуют одно напряжение и один ток, являющиеся алгебраической суммой ординат падающей и отраженной волн для этого момента времени. Из рис. 20.4 и 20.5 видно, что распределение действительных мгновенных значений напряжения и тока носит волнообразный характер, и их значения вдоль линии могут отличаться не только по величине, но и по знаку.

Для практики основной интерес представляет распределение действующих значений напряжения  $U$  и тока  $I$  вдоль линии. Выражения для  $\dot{U}$  и  $\dot{I}$  через гиперболические функции (см. п. 2 § 20.3), если положить  $Z : Z_2 = \text{th } \sigma = \text{th } (\mu + j\nu)$ , можно привести к виду:

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \left( \text{ch } \gamma x + \frac{Z}{Z_2} \text{sh } \gamma x \right) = \dot{U}_2 \frac{\text{ch } (\gamma x + \sigma)}{\text{ch } \sigma},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \left( \text{ch } \gamma x + \frac{Z_2}{Z} \text{sh } \gamma x \right) = \dot{I}_2 \frac{\text{sh } (\gamma x + \sigma)}{\text{sh } \sigma}.$$

Квадраты модулей комплексных  $\text{ch } (\gamma x + \sigma)$  и  $\text{sh } (\gamma x + \sigma)$  равны:

$$|\text{ch } (\gamma x + \sigma)|^2 = |\text{ch}^2 (\alpha x + j\beta x + \mu + j\nu)| =$$

$$= \frac{1}{2} [\text{ch } 2(\alpha x + \mu) + \cos(2\beta x + \nu)],$$

$$|\text{sh } (\gamma x + \sigma)|^2 = |\text{sh}^2 (\alpha x + j\beta x + \mu + j\nu)| =$$

$$= \frac{1}{2} [\text{ch } 2(\alpha x + \mu) - \cos(2\beta x + \nu)].$$

Следовательно, квадраты действующих значений

$$U^2 = \frac{1}{2} \frac{U_2^2}{\text{ch}^2 \sigma} [\text{ch } 2(\alpha x + \mu) + \cos 2(\beta x + \nu)],$$

$$I^2 = \frac{1}{2} \frac{I_2^2}{\text{sh}^2 \sigma} [\text{ch } 2(\alpha x + \mu) - \cos 2(\beta x + \nu)].$$

Кривые  $\text{ch } 2(\alpha x + \mu)$  и  $\cos 2(\beta x + \nu)$  для некоторого частного значения  $Z : Z_2$ , от которого зависят  $\mu$  и  $\nu$ , а также сумма этих кривых, характеризующая распределение  $U^2$ , и их разность, характеризующая распределение  $I^2$ , приведены на рис. 20.7. Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как  $U$ , так и  $I$ , чередуются почти через четверть длины волны, причем максимумы  $U$  сдвинуты относительно максимумов  $I$  также почти на четверть длины волны. В линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при принятом соотношении  $Z : Z_2$  действующее значение тока возрастает, а действующее значение напряжения убывает в направлении от начала линии к ее концу.

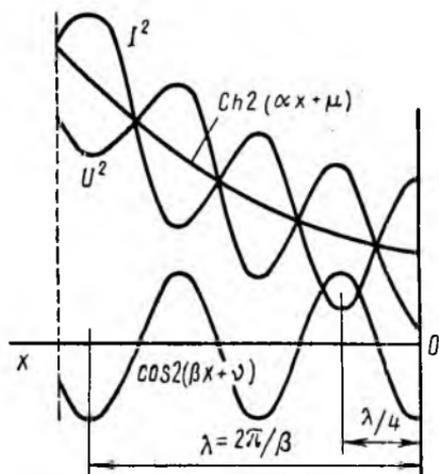


Рис. 20.7

## § 20.6. Переходные процессы в однородных линиях

### 1. Общее решение уравнений переходного процесса

При включении и выключении линий и изменениях нагрузки, а также под влиянием атмосферных разрядов в линиях возникают переходные процессы. Уравнения, связывающие напряжение  $u$  и ток  $i$  в любой точке линии, были выведены в § 20.2:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (20.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (20.2)$$

Если продифференцировать первое уравнение по  $x$ , а второе по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \quad (20.3)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = g \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (20.4)$$

и подставить в выражение (20.3) значения  $\frac{\partial i}{\partial x}$  из (20.2) и  $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$  из (20.4), получается дифференциальное уравнение в частных производных относительно напряжения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rgu + (rC + gL) \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

В общем виде решение этого дифференциального уравнения в частных производных весьма сложно. Сравнительно простое решение полу-

ается для неискажающей линии, у которой

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C} = a \quad \text{или} \quad r = aL \quad \text{и} \quad g = aC,$$

где  $a$  — постоянная. После подстановки значений  $r$  и  $g$  уравнение олучит вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 u \right). \quad (20.5)$$

Решение уравнения для напряжения можно искать в виде

$$u = F(x, t) e^{-at},$$

где  $F(x, t)$  — функция координаты и времени. После подстановки в (20.5) значения  $u$  и его производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-at}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial F}{\partial t} - aF \right) e^{-at}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2a \frac{\partial F}{\partial t} + a^2 F \right) e^{-at},$$

получается уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-at} = LC \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2a \frac{\partial F}{\partial t} + a^2 F + 2a \frac{\partial F}{\partial t} - 2a^2 F + a^2 F \right) e^{-at},$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Оно совпадает с уравнением колебаний струны, имеющим решение

$$F(x, t) = f_A(x + vt) + f_B(x - vt),$$

где скорость  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Правильность этого решения может быть проверена подстановкой.

Таким образом, для неискажающей линии напряжение вдоль линии изменяется в зависимости от места и времени следующим образом:

$$u = [f_A(x + vt) + f_B(x - vt)] e^{-at}.$$

Уравнение для тока можно получить из выражения (20.2), если подставить  $r = aL$ ,  $g = aC$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , и учесть, что

$$\frac{\partial f_A(x + vt)}{\partial t} = v \frac{\partial f_A}{\partial vt} = v \frac{\partial f_A}{\partial x}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial f_B(x - vt)}{\partial t} = -v \frac{\partial f_B}{\partial x};$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= \left[ aC (f_A + f_B) - aC (f_A + f_B) + Cv \left( \frac{\partial f_A}{\partial x} - \frac{\partial f_B}{\partial x} \right) \right] e^{-at} = \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \frac{\partial f_A}{\partial x} - \frac{\partial f_B}{\partial x} \right) e^{-at}, \end{aligned}$$

и окончательно после интегрирования

$$i = \frac{1}{\rho} [f_A(x + vt) - f_B(x - vt) + \Phi(t)] e^{-at},$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — волновое сопротивление неискажающей линии  $\Phi(t)$  — некоторая функция второй переменной — времени.

Подстановка последнего выражения в уравнение (20.1) после упрощений приводит к равенству:

$$\frac{\partial f_A}{\partial x} + \frac{\partial f_B}{\partial x} = \frac{L}{\rho} \left( \frac{\partial f_A}{\partial t} - \frac{\partial f_B}{\partial t} \right) + \frac{L}{\rho} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Перейдя к новым переменным  $x + vt = y$ ,  $x - vt = z$ , можно написать последнее уравнение в виде:

$$\frac{\partial f_A}{\partial y} + \frac{\partial f_B}{\partial z} = \frac{L}{\rho} v \left( \frac{\partial f_A}{\partial y} + \frac{\partial f_B}{\partial z} \right) + \frac{L}{\rho} \frac{d\Phi}{dt},$$

так как  $\frac{L}{\rho} v = \frac{L}{\sqrt{L/C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1$ , то  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ , т. е.  $\Phi(t) = \text{const}$ . Можно показать, что ток не содержит постоянной составляющей, следовательно,  $\Phi(t) = 0$  и окончательно

$$i = \frac{1}{\rho} [f_A(x + vt) - f_B(x - vt)] e^{-at}.$$

Здесь получен только общий вид функциональных зависимостей напряжения и тока от  $x$  и  $t$ . Конкретный вид функций  $f_A(x + vt)$  и  $f_B(x - vt)$  будет определяться условиями задачи.

Переходные процессы в однородных линиях можно рассчитать также операторным методом. Так как напряжение и ток являются функциями двух переменных  $t$  и  $x$ , их операторные изображения будут функциями и оператора  $p$  и  $x$ . Тогда уравнения для однородной линии (см. § 20.2) в операторной форме при нулевых начальных условиях имеют вид:

$$\frac{dU(p, x)}{dx} = (r + Lp) I(p, x), \quad \frac{dI(p, x)}{dx} = (g + Cp) U(p, x).$$

Таким образом, переход от мгновенных значений  $u(t)$  и  $i(t)$  к их операторным изображениям  $U(p, x)$  и  $I(p, x)$  превратил дифференциальные уравнения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. После решения этих уравнений для перехода к оригиналу можно применить обратное преобразование Лапласа.

## 2. Бегущие волны

Можно показать, что выведенные в п. 1 выражения для  $u$  и  $i$  представляют напряжения и ток линии в виде наложения прямой и обратной волн, бегущих со скоростью  $v$ .

В линии без потерь  $r = 0$ ,  $g = 0$ ,  $a = 0$  и  $e^{-at} = 1$ . Пусть в некоторый момент времени  $t = t_1$  составляющая напряжения  $u_A = f_A(x + vt_1)$  имеет распределение, показанное на рис. 20.8, а. Для всех точек, для которых  $x + vt = \text{const}$  или  $\frac{dx}{dt} + v = 0$ , напряжение этой слагающей имеет одно и то же значение, а это значит, что кривая

аспределения напряжения  $u_A$  перемещается со скоростью  $v = -\frac{dx}{dt}$ ,

е. в направлении конца линии, от которого ведется отсчет расстояний. Слагающая  $u_B = f_B(x - vt)$  представляет также волну, но зремищающуюся в обратную сторону (рис. 20.8, б). Действительное зспределение напряжения равно сумме прямой и обратной волн.

Как видно из выражения для тока, обе его составляющие полу-ются с помощью деления составляющих напряжения на волновое зпротивление  $\rho$ , соответственно со знаком плюс и минус и поэтому здут подобны последним, но действительное распределение тока авно арифметической разности прямой и обратной волн.

При наличии потерь в линии прямая и обратная волны также зществуют, но множитель  $e^{-\alpha x}$  указывает на затухание волн по мере

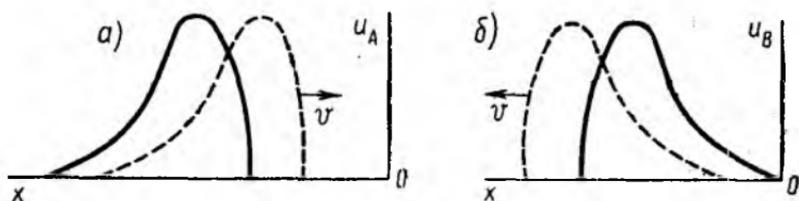


Рис. 20.8

их движения. Алгебраические суммы напряжений и токов падающей и отраженной волн у конца линии должны равняться напряжению  $u_2$  и току  $i_2$  приемника:

$$u_2 = u_{2A} + u_{2B}, \quad i_2 = i_{2A} + i_{2B} = \frac{u_{2A}}{\rho} - \frac{u_{2B}}{\rho},$$

откуда

$$2u_{2A} = \rho i_2 + u_2 = \rho i_2 + \rho_n i_2,$$

т. е. ток  $i_2$  в конце линии равен току эквивалентной схемы, состоящей из последовательного соединения сопротивления  $\rho$  и переходного сопротивления приемника  $\rho_n$ , включенной на напряжение  $2u_{2A}$ . После определения тока  $i_2$  отраженные волны напряжения и тока могут быть определены из соотношений:

$$u_{2B} = u_2 - \rho i_2 \quad \text{и} \quad i_{2B} = -\frac{u_{2B}}{\rho}.$$

Например, если линия замкнута на активное сопротивление  $r_2 = \rho_n$ ,

$$i_2 = \frac{2u_{2A}}{\rho + r_2}, \quad u_{2B} = u_2 - \rho i_2 = \frac{r_2 - \rho}{r_2 + \rho} u_{2A}, \quad i_{2B} = -\frac{u_{2B}}{\rho} = -\frac{r_2 - \rho}{r_2 + \rho} i_{2A}.$$

Мощность  $p_2$  в конце линии, т. е. мощность приемника

$$p_2 = u_2 i_2 = (u_{2A} + u_{2B}) \frac{u_{2A} - u_{2B}}{\rho} = \frac{u_{2A}^2}{\rho} - \frac{u_{2B}^2}{\rho} = p_{2A} - p_{2B},$$

авна разности мощностей падающих  $p_{2A}$  и отраженных  $p_{2B}$  волн. ри сопротивлении  $r_2$  приемника, равном волновому сопротивлению  $\rho$

линии,  $u_{2B}$ ,  $i_{2B}$  и  $p_{2B}$  становятся равными нулю, т. е. отраженные волны не возникают, в линии наступает установившийся режим, вся мощность падающих волн потребляется приемником.

Для разомкнутой линии  $r_2 = \infty$ , откуда  $u_{2B} = u_{2A}$ ,  $i_{2B} = -i_2$ ; для короткозамкнутой линии  $r_2 = 0$ , откуда  $u_{2B} = -u_{2A}$ ,  $i_{2B} = i_2$ ; т. е. в этих случаях отраженные волны имеют ту же величину, что падающие, причем с переменной знака в разомкнутой линии отражает волна тока, а в короткозамкнутой — волна напряжения

Энергии магнитного и электрического полей прямых волн  $u_A$  и на участке  $dx$  линии

$$\frac{1}{2} i_A^2 L dx = \frac{1}{2} u_A^2 C dx,$$

так как  $\frac{u_A^2}{i_A^2} = \frac{L}{C}$ . Таким образом, энергии магнитного и электрического полей прямой волны на участке линии, а следовательно, и во всей линии равны друг другу. Такое же соотношение имеет место и для обратной волны. Для результирующих электрического и магнитного полей равенства энергий нет.

### 3. Процесс включения линии

Когда длина линии  $l$  мала по сравнению с длиной волны  $\lambda = \frac{v}{f}$ , время пробега волны вдоль всей линии

$$t_1 = \frac{l}{v} \ll \frac{\lambda}{v} = T_s,$$

т. е. много меньше периода  $T_s$  синусоидального напряжения, на которое включается линия. Поэтому можно пренебречь изменением этого напряжения за время начальной стадии переходного процесса включения и ограничиться рассмотрением включения линии на постоянное напряжение  $U_0$ , равное в момент включения мгновенному значению напряжения  $u_1(0)$ . Таким образом, волновые процессы при включении линии на синусоидальное и на постоянное напряжение при  $l \gg \lambda$  будут аналогичными.

В качестве примера рассматривается включение на постоянное напряжение  $U_0$  линии без потерь на основе соотношений, полученных в п. 2 этого параграфа. При этом предполагается, что источник напряжения имеет относительно большую мощность, т. е. его внутренним сопротивлением можно пренебречь. Тогда волны напряжения и тока будут отражаться от начала линии так, как будто оно замкнуто на коротко.

После включения разомкнутой на конце линии, т. е. при режиме холостого хода, вдоль нее пойдут волны напряжения и тока, показанные на рис. 20.9, *a* со стрелкой в направлении их движения. Через время, равное  $\frac{l}{v}$ , волны дойдут до конца линии и тогда в любой точке напряжение будет равно  $U_0$ , а ток  $I_0 = \frac{U_0}{R}$ . Затем произойдет

тражение волны напряжения без перемены знака, а тока — с переменной знака. Отраженные волны пойдут к началу линии, увеличивая

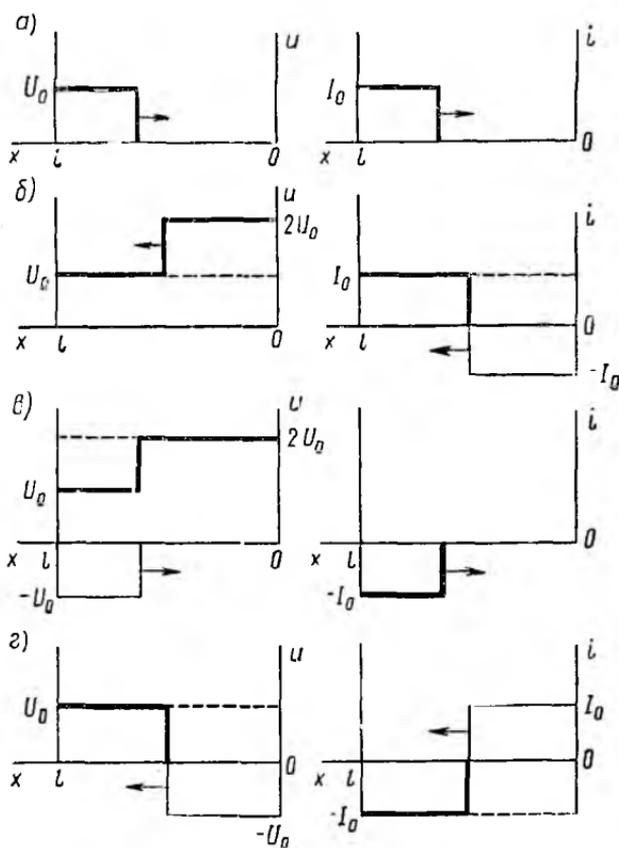


Рис. 20.9

напряжение до  $2U_0$  и уменьшая ток до нуля (рис. 20.9, б). В начале линии также произойдет отражение, но теперь волна напряжения  $U_0$  отразится с переменной знака, а тока —  $I_0$  без перемены. Отраженные волны пойдут опять вдоль линии, на которой напряжение станет равным  $U_0$ , а ток —  $I_0$  (рис. 20.9, в). В результате третьего отражения к началу пойдет отрицательная волна напряжения и положительная волна тока, уменьшающие напряжение и ток в линии до нуля (рис. 20.9, г). В момент прихода этих волн к началу линии вся линия будет без напряжения и тока, как и в начальном моменте, после чего процессы начнут повторяться. Время пол-

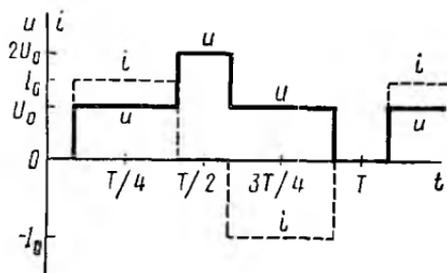


Рис. 20.10

$$T = 4 \frac{l}{v} = 4l \sqrt{LC}$$

называется периодом собственных колебаний линии

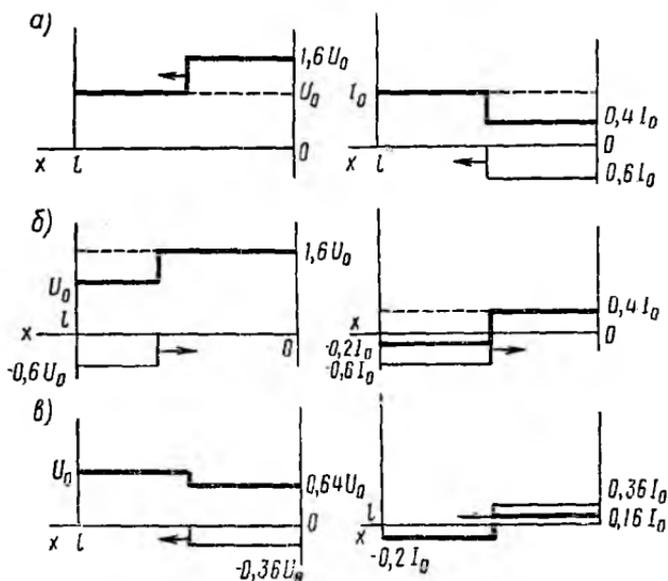


Рис. 20.11

Используя рис. 20.9, построен график изменения во времени напряжения и тока в точке, расположенной на расстоянии  $\frac{l}{3}$  от начала

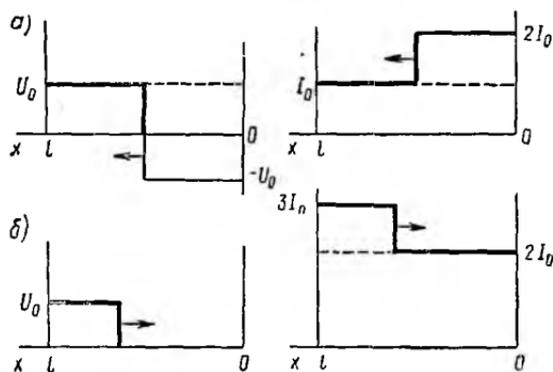


Рис. 20.12

линии (рис. 20.10); напряжение колеблется от нуля до  $2U_0$ , а ток изменяется от  $I_0$  до  $-I_0$ .

При включении той же линии, но к концу которой подключено активное сопротивление  $r_2$ , волны напряжения  $U_0$  и тока  $I_0$  при  $t \leq T/4$  будут такими же, как в предыдущем случае (см. рис. 20.9, а). Пусть  $r_2 > \rho$ , тогда коэффициент отражения  $n$  от конца линии равен отношению отраженной волны к падающей, вычисленному в п. 2:

$$n = \frac{r_2 - \rho}{r_2 + \rho} > 0,$$

т. е. волна напряжения  $U_0$  отразится от конца линии без перемен знака, а волна тока  $I_0$  с переменной знака. На рис. 20.11, а показан

напряжение и ток линии после отражения для  $r_2 = 4\rho$ , т. е. для  $\rho = 0,6$ . Отраженные волны  $0,6 U_0$  и  $-0,6 I_0$  увеличивают напряжение до  $1,6 U_0$  и уменьшают ток до  $0,4 I_0$ . После отражения от начала линии волна  $-0,6 U_0$  снизит напряжение линии до  $U_0$ , а волна  $-0,6 I_0$  снизит ток до  $-0,2 I_0$  (рис. 20.11, б). В результате второго отражения от конца линии напряжение на ней будет  $0,64 U_0$ , а ток  $0,16 I_0$  (рис. 20.11, в) и т. д.

При включении короткозамкнутой линии ее конец, как и начало, будут отражать волну напряжения с переменной знака, а волну тока — без перемены. При включении такой линии волны напряжения  $U_0$  и тока  $I_0$  при  $t < T/4$  будут такими же, как и в двух предыдущих случаях (см. рис. 20.9, а). Затем отраженная от конца линии волна  $-U_0$  понизит напряжение линии до нуля (рис. 20.12, а), но после отражения от начала волна  $U_0$  восстановит его значение (рис. 20.12, б) и т. д. Волна тока  $I_0$  после отражения от конца линии увеличит ток линии до  $2I_0$  (см. рис. 20.12, а), после отражения от начала — до  $3 I_0$  (см. рис. 20.12, б) и т. д.

В линии с потерями волны напряжения и тока постепенно затухают, а напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме.

# ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

## ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ

#### УРАВНЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

##### § 21.1. О теории электромагнитного поля

В любых электротехнических устройствах происходит преобразование и распространение энергии электромагнитного поля, поэтому изучение теории и методов расчета электромагнитного поля имеет большое практическое значение.

В теории электрических и магнитных цепей их параметры — сопротивление, индуктивность, емкость — считались заданными. Однако для вычисления этих параметров необходимо уметь рассчитывать электрические и магнитные поля. Для таких явлений, как излучение и распространение электромагнитных волн, поверхностный эффект, экранирование, понятия цепи теряют смысл, и они могут быть изучены только на основе теории электромагнитного поля.

Изучение сложных явлений в постоянном и переменном электромагнитных полях требует составления уравнений электрических и магнитных полей в дифференциальной форме и применения относительно сложного математического аппарата. Поэтому теория электромагнитного поля излагается на базе векторного анализа, упрощающего доказательства и получение следствий из основных уравнений поля.

Ограничиваясь задачей расчета электрических и магнитных полей, целесообразно, используя аналогию между уравнениями этих полей, изучать методы расчета одновременно, классифицируя их по виду исходных уравнений.

При решении конкретной задачи по расчету поля при заданных начальных и граничных условиях необходимо, выбрав наиболее подходящую для данной задачи систему координат, записать дифференциальные уравнения в этой координатной системе и затем их решить.

##### § 21.2. Электромагнитное поле

Электромагнитное поле, представляющее собой вид материи, окружает как неподвижные, так и движущиеся электрические заряды (токи). Однако электромагнитное поле может существовать, не будучи непосредственно связано с электрическими зарядами, например в виде излученной электромагнитной волны, движущейся со скоростью света.

Электромагнитное поле при макроскопическом рассмотрении, обычном для электротехники, непрерывно распределено в пространстве

При микроскопическом рассмотрении обнаруживается дискретность структуры электромагнитного поля, состоящего из фотонов.

Электромагнитное поле обладает энергией и массой, объемная плотность которой  $m_0$  связана с объемной плотностью энергии  $W_0$  отношением  $m_0 = \frac{W_0}{c^2}$ , где  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$  — скорость света в вакууме.

Наличие этой массы определяет давление света на освещаемую поверхность. Так как скорость света велика, то, несмотря на значительную величину плотности энергии используемых в технике электромагнитных полей, плотность их массы ничтожно мала по сравнению с плотностью массы любого вещества. Поэтому масса поля в большинстве случаев не учитывается. Однако существование массы электромагнитного поля имеет принципиальное значение как свидетельство материальности поля. Вторым фактом, подтверждающим материальность электромагнитного поля, является взаимное превращение фотона в пару электрон — позитрон, т. е. в частицы вещества.

Представление об электромагнитном поле как виде материи, характеризующейся приведенными выше свойствами, полностью соответствует материалистической концепции, введенной еще Фарадеем и Максвеллом. Согласно этой концепции, взаимодействие зарядов (токов) осуществляется через материю, окружающую заряды (токи). Этой материей является электромагнитное поле, все изменения в котором происходят с конечной скоростью.

Теория Максвелла (1873 г.) получила окончательное признание после работ Герца (1887 г.), доказавшего существование предсказанных Максвеллом электромагнитных волн, после изобретения радио А. С. Поповым (1895 г.) и обнаружения П. Н. Лебедевым давления света (1901 г.).

Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны между собой, являясь лишь двумя составляющими единого электромагнитного поля. Деление электромагнитного поля на эти две составляющие относительно, оно зависит от условий наблюдения и возможно только при макроскопическом рассмотрении явлений. При движении заряженного тела в окружающем пространстве возникает электромагнитное поле, и неподвижный наблюдатель обнаружит электрическое и магнитное поля по механическим силам, действующим на пробный заряд и магнитную стрелку. Однако наблюдатель с пробным зарядом и магнитной стрелкой, движущийся вместе с заряженным телом, не обнаружит отклонения магнитной стрелки, а отметит только воздействие на пробный заряд. Для такого наблюдателя существует только электрическое поле, а магнитное — отсутствует.

При микроскопическом рассмотрении всегда обнаруживаются обе стороны электромагнитного поля. Например, при рассмотрении неподвижного заряженного тела необходимо учесть также магнитное поле движущихся по своим орбитам электронов, из которых складывается общий заряд тела. Однако из-за хаотического расположения этих элементарных токов их магнитное поле чрезвычайно быстро убывает увеличением расстояния от тела. При макроскопическом подходе

вокруг неподвижного заряженного тела учитывается только электрическое поле.

Поскольку можно создать условия, при которых проявляется один из составляющих электромагнитного поля, возможно и раздельное изучение электрического и магнитного полей. Это соответствует такому целому ряду практических задач, когда в электротехническом устройстве представляет интерес определение только одного из полей.

### § 21.3. Электрическое поле в диэлектрической среде

Расчет электрического поля во многих случаях может быть упрощен введением скалярного потенциала  $\varphi$ , связанного с проекцией вектора напряженности  $\mathbf{E}$  на произвольное направление  $l$  соотношением

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

В декартовой системе координат

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

а вектор напряженности поля

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

или

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Градиент потенциала  $\text{grad } \varphi$  представляет собой вектор, численно равный производной потенциала по нормали к эквипотенциальной поверхности и направленный в сторону возрастания потенциала:

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \mathbf{n}^{\circ},$$

где  $\mathbf{n}^{\circ}$  — орт нормали.

Одним из основных соотношений, характеризующих электростатическое поле, является условие потенциальности поля:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

где  $d\mathbf{l}$  — элемент длины.

Это условие соответствует однозначности потенциала для электростатического поля, силовые линии которого начинаются и кончаются на поверхностях заряженных тел.

Для перехода от этой интегральной записи к дифференциальной необходимо уменьшить контур интегрирования, стягивая его в точку. Однако при этом, независимо от характера поля, интеграл по замкнутому контуру, так же как и поверхность  $\Delta S$ , ограничиваемая им, стремится к нулю. Поэтому поле в данной точке характеризуют пределом их отношения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta S}.$$

Из курса математики известно, что этот предел представляет собой проекцию в и х р я (р о т о р а) вектора  $\mathbf{E}$  на нормаль к поверхности  $\Delta S$ :

$$\text{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\Delta S}.$$

оложительное направление нормали связано с направлением обхода о контуру правилом правого винта.

В декартовой системе координат вихрь вектора

$$\text{rot } \mathbf{E} = i \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + j \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + k \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Условие потенциальности поля приводит к

$$\text{rot}_n \mathbf{E} = 0,$$

потому что числитель дроби, стоящий под знаком предела в выражении проекции вихря вектора, равен нулю при любом значении  $\Delta S$ . Это справедливо для любого направления нормали, поэтому всегда

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Равенство нулю вихря вектора свидетельствует о том, что линии этого вектора не замыкаются на себя, т. е. не образуют вихрей, а имеют начало и конец. Потенциальное поле и безвихревое поле — это одно и то же.

Вторым фундаментальным соотношением для электростатического поля является обобщенная теорема Гаусса, связывающая смещение  $\mathbf{D}$  с зарядом  $Q$ , находящимся внутри замкнутой поверхности  $S$ :

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q.$$

Для малого объема  $\Delta V$ , ограниченного поверхностью  $\Delta S$  и содержащего заряд  $\Delta Q$ , обобщенная теорема Гаусса примет вид:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \Delta Q.$$

Деление обеих частей равенства на объем  $\Delta V$  и переход к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$  дает:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Предел, стоящий в левой части равенства, как известно из курса математики, называется р а с х о ж д е н и е м ( д и в е р г е н ц и е й) вектора  $\mathbf{D}$ :

$$\text{div } \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} d\mathbf{S}}{\Delta V}.$$

В декартовой системе координат

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Предел, состоящий в правой части, представляет собой объемную плотность заряда  $\rho$ . Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме записывается так:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Если расхождение вектора в данной точке поля не равно нулю то это означает, что линии вектора расходятся из данной точки или сходятся в ней. Иными словами, эта точка является истоком (началом) или стоком (концом) линий вектора. Таким образом, последнее равенство говорит о том, что объемный положительный заряд является истоком вектора смещения, а отрицательный — стоком.

Если расхождение вектора равно нулю, то в данной точке линии вектора не начинаются и не кончаются.

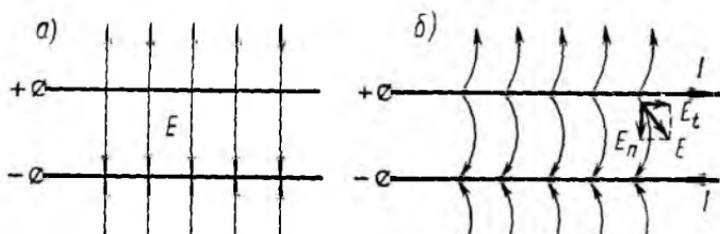


Рис. 21.1

Для полной характеристики электрического поля в данной точке необходимо привести известное выражение объемной плотности энергии

$$W_0 = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2}$$

и условия у поверхности раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ :

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad D_{n1} = D_{n2},$$

вытекающие из соотношений  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$  и  $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0$ .

Движущиеся заряды также создают электрическое поле. Это поле в диэлектрике, окружающем проводники с током, описывается теми же уравнениями, что и электрическое поле в пространстве, не занятом зарядами ( $\rho = 0$ ), т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad W_0 = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2}.$$

Различие между электростатическим полем и электрическим полем в окружающем проводники с током диэлектрике заключается в том, что в первом из них поверхности проводящих тел являются эквипотенциальными, во втором — нет. Это видно из рис. 21.1 для двухпроводной линии. Рис. 21.1, а соответствует электростатическому полю линии при холостом ходе, рис. 21.1, б — электрическому полю нагруженной линии. В первом случае поле нормально к эквипотенциальной поверхности провода, во втором, из-за падения напряжения вдоль провода,

роме нормальной составляющей  $E_n$ , поле имеет еще касательную оставляющую  $E_t$ . Эта составляющая определяется величиной сопротивления провода. Так как удельное сопротивление металлического провода весьма мало, то в практических задачах касательной составляющей пренебрегают ввиду ее малости по сравнению с нормальной, поле рассчитывают как электростатическое.

В случае однородного диэлектрика ( $\epsilon = \text{const}$ ) теорема Гаусса дифференциальной форме может быть представлена соотношением

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \text{ div } \mathbf{E} = \rho,$$

или

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Подстановка  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  приводит к уравнению (см. приложение 4)

$$-\text{div grad } \varphi = -\Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon},$$

или

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

называемому уравнением Пуассона. Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа. В декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \text{div grad } \varphi &= \frac{\partial}{\partial x} (\text{grad } \varphi)_x + \frac{\partial}{\partial y} (\text{grad } \varphi)_y + \frac{\partial}{\partial z} (\text{grad } \varphi)_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения Пуассона, как это может быть проверено подстановкой, имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dV}{r},$$

где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до элемента объема  $dV$  с зарядом  $\rho dV$ .

Для пространства, свободного от зарядов ( $\rho = 0$ ), уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0.$$

Значение уравнений Пуассона и Лапласа для расчетов поля в однородной диэлектрической среде заключается в том, что сложное решение уравнений для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  заменяется более простым решением одного уравнения в частных производных для скалярной величины  $\varphi$ .

## § 21.4. Электрическое поле в проводящей среде

Электрическое поле создает ток в проводящей среде. Вне источников энергии это поле потенциально, поэтому для него остаются в силе соотношения, выведенные выше:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

и для однородной среды, поскольку свободный заряд  $\rho = 0$ ,

$$\Delta\varphi = 0.$$

Равенство  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  может быть истолковано как дифференциальная форма записи второго закона Кирхгофа для контура, не содержащего источников. Действительно, в потенциальном поле при обходе по замкнутому контуру  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$ , т. е. сумма напряжений на участках равна нулю.

Вектор плотности тока  $\delta$  в среде с удельной проводимостью  $\gamma$  равен  $\gamma\mathbf{E}$ . Это выражение представляет собой закон Ома в дифференциальной форме. Кроме того, вектор  $\delta$  удовлетворяет соотношению  $\oint \delta d\mathbf{S} = 0$ , являющемуся интегральной формой записи принципа непрерывности тока.

По аналогии с изложенным в предыдущем параграфе это равенство приводит к дифференциальному соотношению  $\text{div } \delta = 0$ , которое интерпретируется как первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме, так как отсутствие истоков вектора плотности тока соответствует тому, что сумма токов (потоков вектора плотности тока), сходящихся в точке, равна нулю.

Применяя закон Джоуля — Ленца к бесконечно малому параллелепипеду длиной  $d\mathbf{l}$  и основаниями  $d\mathbf{S}$ , лежащими на соседних эквипотенциальных поверхностях, можно найти элементарную мощность тепловых потерь  $dP$ . Напряжение между основаниями параллелепипеда  $dU = \mathbf{E}d\mathbf{l}$ , ток через основание  $dI = \delta d\mathbf{S}$  и, соответственно

$$dP = dU dI = \mathbf{E}d\mathbf{l} \delta d\mathbf{S} = \mathbf{E}\delta dV,$$

где  $dV = d\mathbf{l}d\mathbf{S}$  — объем параллелепипеда.

Мощность в единице объема

$$\frac{dP}{dV} = P_0 = \mathbf{E}\delta = \gamma\mathbf{E}^2.$$

Последнее соотношение является законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Если рассматриваемый объем содержит также сторонние источники энергии, т. е. преобразователи различных видов энергии (химической, тепловой, механической и т. п.) в электрическую с э. д. с.  $\mathcal{E}_{\text{стор}} = \int \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l}$ , то электрическое поле постоянного тока не является потенциальным, так как при этом вместо  $\mathbf{E}$  следует рассматривать сумму  $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}$  и

$$\oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) d\mathbf{l} = \mathcal{E}_{\text{стор}}.$$

Теперь законы Ома и Джоуля — Ленца в дифференциальной форме примут вид:

$$\delta = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) \quad \text{и} \quad P_0 = (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) \delta = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}})^2.$$

Мощность, развиваемая сторонней э. д. с. и отнесенная к единице объема,

$$P_{0\text{стор}} = \mathbf{E}_{\text{стор}} \delta = \gamma\mathbf{E}_{\text{стор}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}).$$

У поверхности раздела двух сред с удельными проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют место соотношения:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{и} \quad \delta_{n1} = \delta_{n2}.$$

## § 21.5. Магнитное поле

Основными соотношениями для магнитного поля постоянных токов являются закон полного тока

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I$$

и принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0.$$

Замена  $I = \int \delta \, d\mathbf{S}$  в законе полного тока дает:

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int \delta \, d\mathbf{S}.$$

Аналогично предыдущему могут быть получены дифференциальные соотношения:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Когда вихрь вектора отличен от нуля, линии этого вектора замыкаются на себя. Густота линий (плотность вихрей) определяется величиной вихря вектора. Таким образом, первое равенство указывает на вихревой характер магнитного поля. Второе равенство указывает на отсутствие истоков (стоков) магнитного поля, т. е. на отсутствие магнитных масс и непрерывность линий магнитной индукции в любых средах.

Для области, не занятой токами, т. е. вне проводников с токами,  $\delta = 0$  и основные уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

аналогичны уравнениям электрического поля в диэлектрической среде при отсутствии объемного заряда. В этой области магнитное поле может рассматриваться как потенциальное и аналогично электрическому характеризуется скалярной величиной — магнитным потенциалом  $\varphi_m$ , причем

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \varphi_m.$$

Для однородной изотропной среды магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi_m = 0.$$

Однако и для области, содержащей токи, т. е. при вихревом характере магнитного поля ( $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$ ), можно получить уравнения, формально аналогичные уравнениям электрического поля, если ограничиться рассмотрением однородной изотропной среды ( $\mu = \text{const}$ ). Установление такой аналогии облегчает расчеты магнитного поля.

С этой целью вводят вспомогательную векторную величину — векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , определяя его соотношением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Такое введение векторного потенциала возможно потому, что для любого вектора (см. приложение 4)

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

и равенство  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  не противоречит основному соотношению  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Равенству  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  удовлетворяет бесчисленное множество векторов, отличающихся друг от друга на градиент произвольного скаляра  $\alpha$ . Если положить

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \alpha,$$

то

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \alpha = \text{rot } \mathbf{A},$$

так как всегда  $\text{rot grad } \alpha = 0$ . Поэтому для определенного выбора вектора  $\mathbf{A}$  должно быть наложено дополнительное условие, что будет сделано далее.

Подстановка  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  в закон полного тока в дифференциальной форме дает:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

Так как для любого вектора

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

то

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) = \delta.$$

В соответствии со сказанным на векторный потенциал  $\mathbf{A}$  целесообразно наложить условие:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Тогда для определения векторного потенциала получается уравнение Пуассона

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \delta,$$

аналогичное уравнению для потенциала в электрическом поле. Различие лишь в том, что в электрическом поле это уравнение связывает скаляры, а в магнитном — векторы и сводится к трем уравнениям для составляющих:

$$\Delta A_x = -\mu \delta_x, \quad \Delta A_y = -\mu \delta_y, \quad \text{и} \quad \Delta A_z = -\mu \delta_z.$$

Общее решение уравнения для векторного потенциала, по аналогии с приведенным в § 21.3, имеет вид:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta dV}{r}.$$

Отсюда следует, что по мере удаления от области, занятой токами, екторный потенциал убывает не медленнее, чем  $\frac{1}{r}$ .

Для линейного тока, равномерно распределенного по сечению проводника  $s$ , выражение для векторного потенциала может быть преобразовано:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta dV}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta s dl}{r} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I dl}{r},$$

где  $dl$  — элемент длины проводника с током.

С помощью векторного потенциала  $\mathbf{A}$  можно вычислить магнитный поток через поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

По теореме Стокса это выражение преобразуется к виду:

$$\Phi = \oint \mathbf{A} dl,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру  $l$ , ограничивающему поверхность  $S$ .

Плотность энергии магнитного поля

$$W_0 = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}.$$

Т а б л и ц а 21.1

Электрическое поле		Магнитное поле
в диэлектрической среде	в проводящей среде	
$\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (всегда)	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (вне источников)	$\text{rot } \mathbf{H} = \delta$ или $\text{rot } \mathbf{H} = 0$
$\text{div } \mathbf{D} = \rho$ или $\text{div } \mathbf{D} = 0$	$\text{div } \delta = 0$ (всегда)	$\text{div } \mathbf{B} = 0$ (всегда)
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\delta = \gamma \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
$E_{t1} = E_{t2}$	$E_{t1} = E_{t2}$	$H_{t1} = H_{t2}$
$D_{n1} = D_{n2}$	$\delta_{n1} = \delta_{n2}$	$B_{n1} = B_{n2}$
$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ или $\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m$
$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ или $\Delta \varphi = 0$	$\Delta \varphi = 0$ (вне источников)	$\Delta \mathbf{A} = -\mu \delta$ или $\Delta \varphi_m = 0$
$W_0 = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}$	$P_0 = \delta \mathbf{E}$	$W_0 = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}$

У границы двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  напряженность поля и магнитная индукция удовлетворяют равенствам:

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \text{и} \quad B_{n1} = B_{n2}.$$

Уравнения, полученные в результате рассмотрения различных полей, для наглядности сведены в табл. 21.1. Уравнения, стоящие в первых двух строках этой таблицы и определяющие вихри и расхождение полей, называются уравнениями Максвелла.

Из приведенной таблицы видно, что уравнения постоянных электрических и магнитных полей независимы друг от друга. Это подтверждает указанную возможность их отдельного изучения.

Аналогия и различия между уравнениями различных полей рассматриваются в следующей главе.

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ

### РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО УРАВНИЮ ЛАПЛАСА. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ

#### § 22.1. О расчете постоянных электрических и магнитных полей

Для расчета постоянных полей, обладающих плоской, осевой или сферической симметрией, с успехом можно применять теорему Гаусса и закон полного тока в интегральной форме. При расчете более сложных полей приходится обращаться к уравнениям в дифференциальной форме (см. табл. 21.1). Как видно из этих уравнений, при известных свойствах сред ( $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ) каждое из полей характеризуется одной из следующих величин:

электрическое поле в диэлектрике —  $E$ ,  $D$ ,  $\varphi$ ,  
электрическое поле в проводящей среде —  $E$ ,  $\delta$ ,  $\varphi$ ,  
магнитное поле —  $H$ ,  $B$ ,  $\varphi_m$ ,  $A$ .

Задача расчета поля состоит в определении одной из этих величин как функции координат. Для отдельных видов полей должно быть задано: распределение зарядов или потенциалы заряженных тел; ток или разность потенциалов в проводящей среде; распределение токов или разность магнитных скалярных потенциалов. Обратные задачи состоят в определении закона распределения зарядов или токов по заданному распределению напряженностей или потенциалов полей.

В каждой конкретной задаче должны быть также известны конфигурация, размеры и взаимное расположение тел, свойства ( $\epsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ) этих тел и окружающих их сред.

Если требуется рассчитать поле в однородной среде, то исходными соотношениями являются уравнения Лапласа или Пуассона. Для расчета полей в неоднородных средах пользуются уравнениями Максвелла.

Много практически важных задач сводится к расчету полей по уравнению Лапласа, которым описываются электрическое поле в диэлектрике вне зарядов, электрическое поле в проводящей среде вне источников э. д. с. и магнитное поле вне токов.

Задача расчета полей по уравнению Лапласа обычно состоит в определении потенциалов  $\varphi$  или  $\varphi_m$  как функции координат в некотором объеме по заданным значениям потенциалов на поверхностях, ограничивающих этот объем.

При подобных исходных данных, т. е. геометрическом подобии граничных поверхностей и аналогичном распределении потенциалов на этих поверхностях, решения уравнения Лапласа для различных полей будут также подобными. Поэтому результаты расчета одного поля можно перенести на расчет другого с подобными исходными данными. На основании табл. 21.1 можно составить таблицу соответствия величин для полей, описываемых уравнением Лапласа (табл. 22.1).

Таблица 22.1

Электрическое поле в диэлектрике	$E$	$D$	$\epsilon$	$\varphi$	$U$	$Q$	$C$
Электрическое поле в проводящей среде	$E$	$\delta$	$\gamma$	$\varphi$	$U$	$I$	$G$
Магнитное поле	$H$	$B$	$\mu$	$\varphi_m$	$U_m$	$\Phi$	$G_m$

Эту таблицу удобно назвать таблицей прямого соответствия величин, поскольку далее встретится таблица обратного соответствия.

При изучении полей часто пользуются их графическим изображением, называемым картиной поля. Такое изображение особенно удобно для часто встречающихся в практике плоскопараллельных и плоскомеридианных полей. При плоскопараллельном поле картина будет одинаковой для всех плоскостей, перпендикулярных прямой, вдоль которой потенциал остается неизменным, при плоскомеридианном — во всех плоскостях, проходящих через ось симметрии поля.

При расчете полей исходные уравнения необходимо записывать в координатной системе, которая должна быть выбрана так, чтобы координатные поверхности совпадали с граничными поверхностями задачи или были ближе всего расположены к ним. В частности, для расчета плоскопараллельных полей применяют декартовы или цилиндрические координаты, совмещая ось  $Z$  с прямой, вдоль которой потенциал оказывается неизменным. Для расчета плоскомеридианных полей применяют цилиндрические или сферические координаты.

Общий порядок расчета полей состоит в следующем. В зависимости от вида задачи выбирают исходное уравнение, записывают его в удобной системе координат и решают в общем виде. Затем по исходным данным и условиям на границе раздела двух сред определяют в случае обыкновенных дифференциальных уравнений постоянные интегрирования, а в случае уравнений в частных производных — функции, удовлетворяющие граничным условиям.

## § 22.2. Теорема единственности решения уравнения Лапласа

Для расчета полей большое значение имеет теорема единственности решения уравнения Лапласа, которая формулируется следующим образом: *из всего множества функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, существует только одна, удовлетворяющая заданным граничным условиям.*

Для доказательства следует предположить, что существуют две функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющие уравнению Лапласа во всем объеме  $V$  и имеющие одинаковые значения на поверхностях  $S$ , ограничивающих этот объем ( $\varphi_{1S} = \varphi_{2S}$ ). Тогда разностная функция  $\varphi^* = \varphi_1 - \varphi_2$  на поверхностях  $S$  равна нулю:

$$\varphi^*_{S} = \varphi_{1S} - \varphi_{2S} = 0,$$

а в объеме  $V$  также удовлетворяет уравнению Лапласа и, по предположению, не равна нулю. Если удастся показать, что эта функция и во всем объеме равна нулю, то теорема будет доказана. Применение теоремы Остроградского к вспомогательному вектору  $\varphi^* \text{grad } \varphi^*$  дает:

$$\int \text{div} (\varphi^* \text{grad } \varphi^*) dV = \oint \varphi^* \text{grad } \varphi^* dS.$$

Интеграл по поверхностям  $S$ , ограничивающим объем  $V$ , равен нулю, поскольку на этих поверхностях  $\varphi^*_S = 0$ . Следовательно,

$$\int \text{div} (\varphi^* \text{grad } \varphi^*) dV = 0$$

или в соответствии с формулой векторного анализа (см. приложение 4)

$$\int [(\text{grad } \varphi^*)^2 + \varphi^* \text{div grad } \varphi^*] dV = 0.$$

Но  $\text{div grad } \varphi^* = 0$ , поскольку  $\varphi^*$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Значит

$$\int (\text{grad } \varphi^*)^2 dV = 0.$$

Так как подинтегральное выражение положительно, то равенство выполняется только при условии

$$\text{grad } \varphi^* = 0 \text{ или } \varphi^* = \text{const.}$$

Таким образом, разностная функция имеет одно и то же значение во всем объеме, в том числе и на граничных поверхностях, где  $\varphi^*_S = 0$ . Следовательно, во всем объеме  $\varphi_1 = \varphi_2$ , что и требовалось доказать.

Из теоремы единственности вытекает важное свойство функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа: если две функции совпадают на поверхностях, ограничивающих некоторый объем, то они совпадают во всем объеме, независимо от того, что вне указанного объема эти функции могут быть существенно различны. Это свойство можно проиллюстрировать на следующем примере. Потенциал и напряженность поля коаксиального кабеля с линейной плотностью заряда  $\tau$  совпадают в объеме, ограниченном поверхностями жилы и оболочки, с полем заряженной оси с той же плотностью заряда  $\tau$ , поскольку потенциалы этих полей совпадают на граничных поверхностях. Вне этого объема поле кабеля отсутствует и аналогия между кабелем и

ряженной осью нарушается, так как поле заряженной оси существует во всем окружающем пространстве.

Теорема единственности позволяет обосновать возможность сведения сложной задачи к более простой при сохранении граничных ловий. Она позволяет также обосновать рассматриваемые далее тоды — разделения переменных и зеркальных изображений.

### § 22.3. Метод разделения переменных

Если удачным выбором системы координат удается представить потенциал в виде функции одной переменной, то уравнение Лапласа превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого трудностей не представляет. Если потенциал оказывается функцией двух или трех координат, то обычно для решения уравнения Лапласа применяют метод разделения переменных, иногда называемый методом Фурье.

Согласно этому методу решение уравнения Лапласа представляется в виде произведения или суммы произведений функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Благодаря этому уравнение Лапласа сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, число которых равно числу независимых переменных. После решения этих уравнений составляется решение исходного уравнения таким образом, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям.

Проще всего можно пояснить метод на примере плоскопараллельного поля в декартовых координатах. Подстановка функции  $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$  в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

дает

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0.$$

После деления на  $XY$  получается

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2}.$$

Так как левая и правая части этого уравнения зависят от разных переменных, обе части должны быть равны некоторой постоянной  $K$ .

Таким образом, уравнение Лапласа в этом случае сводится к следующим двум уравнениям:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \pm KX = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} \mp KY = 0.$$

Решения этих уравнений можно представить в показательной форме или в виде тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов. При первом сочетании знаков перед  $K$  решения имеют вид:

$$X = A \cos kx + B \sin kx, \quad Y = C \operatorname{ch} ky + D \operatorname{sh} ky,$$

где  $k = \sqrt{K}$ .

При втором сочетании знаков гиперболические и тригонометрические функции меняются местами.

Общее решение уравнения Лапласа выражается в виде суммы частных его решений:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i(x) Y_i(y).$$

При первом сочетании знаков

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} (A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x) (C_i \operatorname{ch} k_i y + D_i \operatorname{sh} k_i y).$$

Из теоремы единственности следует, что если удастся подобрать значения постоянных  $A_i, B_i, C_i, D_i$  и  $k_i$  таким образом, чтобы функция  $\varphi(x, y)$  удовлетворяла заданным граничным условиям, то задачу можно считать решенной. Следовательно, решение сводится к определению указанных коэффициентов по граничным условиям. Знак перед  $K$  также выбирается в зависимости от этих условий.

Если потенциал является функцией трех декартовых координат, то его представление в виде

$$\varphi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

приводит к трем обыкновенным уравнениям, общий вид решений которых также легко найти.

В других системах координат порядок решения уравнения Лапласа методом разделения переменных остается таким же.

## § 22.4. Цилиндр в однородном поле

Далее на примере цилиндра и экрана в однородном поле рассматривается расчет электрических и магнитных полей в цилиндрических координатах методом разделения переменных.

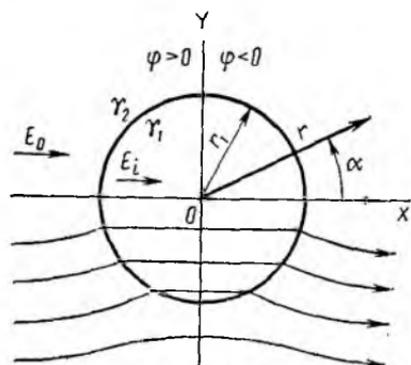


Рис. 22.1

Проводящий бесконечный цилиндр радиуса  $r_1$  с удельной проводимостью  $\gamma_1 = \text{const}$  помещен в проводящую среду  $\gamma_2 = \text{const}$ , где было однородное электрическое поле  $E_0$ , перпендикулярное оси цилиндра (рис. 22.1). Требуется найти поле внутри и вне цилиндра.

В практике такого рода задачи могут встретиться при изучении электрических полей, обусловленных блуждающими токами в земле вблизи зарытых в землю проводящих тел (заземлителей, кабелей, трубопроводов и т. п.).

Так как поле является плоскопараллельным, то уравнение Лапласа в цилиндрических координатах запишется в виде (см. приложение 5)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Подстановка  $\varphi(r, \alpha) = R(r) Q(\alpha)$  приводит к уравнению

$$\frac{Q}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \cdot \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} = 0,$$

или после умножения на  $r^2$  и деления на  $RQ$ :

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Q} \cdot \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} = 0.$$

Отсюда получают два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = k^2, \quad \frac{1}{Q} \cdot \frac{d^2 Q}{d\alpha^2} = -k^2.$$

Решением последнего уравнения является

$$Q = A \cos k\alpha + B \sin k\alpha.$$

Из условия симметрии картины поля относительно оси  $X$  следует, что  $\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, -\alpha)$ . Значит,  $Q(\alpha)$  должна быть также четной функцией, откуда  $B = 0$ .

Приняв ось  $Y$  за линию нулевого потенциала, можно заключить, что  $Q\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , так как  $\varphi\left(r, \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Это значит, что  $k = 1$ , поскольку при любом другом  $k$  нашлась бы линия, имеющая нулевой потенциал и наклоненная к оси  $X$  под углом  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2k}$ , что противоречит картине поля (слева от оси  $Y$   $\varphi > 0$ , справа  $\varphi < 0$ ).

Таким образом,

$$Q = A \cos \alpha.$$

С учетом  $k = 1$  уравнение для  $R$  имеет вид:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - \frac{R}{r^2} = 0.$$

Записав решение в виде степенного ряда

$$R = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n r^n$$

и подставив его в уравнение для  $R$ , получают соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (n^2 - 1) C_n r^{n-2} = 0,$$

откуда следует, что

$$n = \pm 1.$$

Таким образом,

$$R = Cr + \frac{D}{r},$$

и решением уравнения Лапласа будет

$$\varphi(r, \alpha) = A \left( Cr + \frac{D}{r} \right) \cos \alpha = \left( Mr + \frac{N}{r} \right) \cos \alpha.$$

Это выражение справедливо для всего пространства, занято полем, но значения  $M$  и  $N$  вне и внутри цилиндра будут различны. Внутри цилиндра ( $0 \leq r \leq r_1$ )

$$\varphi_1 = \left( M_1 r + \frac{N_1}{r} \right) \cos \alpha,$$

вне цилиндра ( $r_1 \leq r < \infty$ )

$$\varphi_2 = \left( M_2 r + \frac{N_2}{r} \right) \cos \alpha.$$

Постоянные  $M_1, N_1, M_2$  и  $N_2$  определяются из граничных условий. Из условия  $r = 0, \varphi_1(0, \alpha) = 0$  вытекает, что  $N_1 = 0$ . При  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $\varphi_2$  равен:

$$\varphi_2 = -E_0 x = -E_0 r \cos \alpha,$$

значит  $M_2 = -E_0$ .

Постоянные  $M_1$  и  $N_2$  находят из условий на границе раздела двух сред ( $r = r_1$ ):

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad \delta_{n1} = \delta_{n2},$$

имея в виду, что

$$E_t = E_a = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \delta_n = \gamma E_r = -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Тогда

$$E_{t1}(r_1) = E_{t2}(r_1), \quad M_1 \sin \alpha = \left( -E_0 + \frac{N_2}{r_1^2} \right) \sin \alpha,$$

$$M_1 = -E_0 + \frac{N_2}{r_1^2},$$

$$D_{n1}(r_1) = D_{n2}(r_1), \quad \gamma_1 M_1 \cos \alpha = \gamma_2 \left( -E_0 - \frac{N_2}{r_1^2} \right) \cos \alpha,$$

$$\gamma_1 M_1 = -\gamma_2 \left( E_0 + \frac{N_2}{r_1^2} \right).$$

Отсюда

$$M_1 = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0, \quad N_2 = E_0 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} r_1^2,$$

и окончательные выражения для потенциалов принимают вид:

$$\varphi_1 = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 r \cos \alpha = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0 x,$$

$$\varphi_2 = E_0 \left( \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{r_1^2}{r} - r \right) \cos \alpha.$$

Составляющие напряженности поля в самом цилиндре

$$E_i = E_{x1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} E_0,$$

$$E_{y1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0.$$

Аналогично можно найти составляющие напряженности вне цилиндра.

Интересно отметить, что во всех точках цилиндра напряженность  $E_i$  имеет одну и ту же величину и направление (см. рис. 22.1); при этом если  $\gamma_2 > \gamma_1$ , то  $E_i > E_0$ , и наоборот.

На основании аналогии уравнений результаты решения настоящей задачи легко перенести на соответствующие задачи расчета электрического поля в диэлектрике и магнитного поля заменой величин по табл. 22.1 прямого соответствия величин. Так, например, напряженность поля внутри диэлектрического цилиндра с проницаемостью  $\epsilon = \text{const}$ , помещенного в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$  в среде с проницаемостью  $\epsilon_2 = \text{const}$ , равна:

$$E_i = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0.$$

Поле внутри цилиндра однородно и совпадает по направлению с внешним полем.

Соответственно, для цилиндра в магнитном поле

$$H_i = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0.$$

## § 22.5. Магнитный цилиндрический экран

Магнитные экраны, представляющие собой оболочки из ферромагнитного материала, применяются в основном для защиты электротехнических устройств, например измерительных приборов, от влияния посторонних магнитных полей. Далее рассматривается расчет цилиндрического экрана.

Ферромагнитная труба с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  внесена в однородное магнитное поле  $H_0$ , направленное перпендикулярно оси трубы (рис. 22.2). Требуется найти напряженность поля  $H_i$  внутри трубы, если магнитная проницаемость трубы  $\mu_2 = \text{const}$ , среда вне и внутри трубы — воздух ( $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$ ) и искажением поля на концах трубы можно пренебречь.

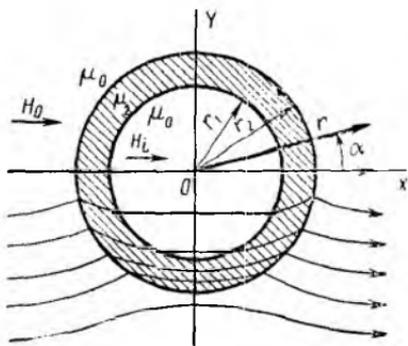


Рис. 22.2

Применяя метод разделения переменных, как и в предыдущем случае, легко установить, что выражение для скалярного магнитного потенциала имеет вид:

$$\varphi_m = \left( Mr + \frac{N}{r} \right) \cos \alpha.$$

Внутри трубы ( $0 \leq r \leq r_1$ )

$$\varphi_{m1} = \left( M_1 r + \frac{N_1}{r} \right) \cos \alpha.$$

В самой трубе ( $r_1 \leq r \leq r_2$ )

$$\varphi_{m2} = \left( M_2 r + \frac{N_2}{r} \right) \cos \alpha.$$

Вне трубы ( $r_2 \leq r < \infty$ )

$$\varphi_{m3} = \left( M_3 r + \frac{N_3}{r} \right) \cos \alpha.$$

Условия  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$  соответственно дают  $N_1 = 0$  и  $M_3 = -H$ .  
Остальные постоянные определяются из условий непрерывности касательных составляющих  $H$  и нормальных составляющих  $B$  в границах раздела сред, т. е. при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ .

Если учесть, что

$$H_t = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad H_n = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial r},$$

то

$$H_{t1}(r_1) = H_{t2}(r_1), \quad M_1 = M_2 + \frac{N_2}{r_1^2},$$

$$H_{t2}(r_2) = H_{t3}(r_2), \quad M_2 + \frac{N_2}{r_2^2} = \frac{N_3}{r_2^2} - H_0,$$

$$B_{n1}(r_1) = B_{n2}(r_1), \quad M_1 = \frac{\mu_2}{\mu_0} \left( M_2 - \frac{N_2}{r_2^2} \right),$$

$$B_{n2}(r_2) = B_{n3}(r_2), \quad \left( \frac{N_2}{r_2^2} - M_2 \right) \frac{\mu_2}{\mu_0} = H_0 + \frac{N_3}{r_2^2}.$$

Из полученных соотношений можно определить  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Однако для расчета поля внутри трубы, где  $\varphi_{m1} = M_1 \cos \alpha$ , достаточно знать лишь постоянную  $M_1$ :

$$M_1 = \frac{4H_0 \frac{\mu_2}{\mu_0}}{\left( \frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right)^2 \frac{r_1^2}{r_2^2} - \left( \frac{\mu_2}{\mu_0} + 1 \right)^2}.$$

Составляющие напряженности по осям  $X$  и  $Y$  внутри экрана

$$H_i = H_{x1} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial x} = -M_1,$$

$$H_{y1} = -\frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, поле внутри трубы однородно и направлено так же, как и внешнее.

Если считать  $\frac{\mu_2}{\mu_0} \gg 1$ , то

$$H_i = \frac{4}{\frac{\mu_2}{\mu_0} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} H_0.$$

Эффективность экрана обычно оценивается коэффициентом экранирования  $K$ , равным отношению напряженности поля в полости экрана к напряженности внешнего поля. В рассмотрен-

ом случае при относительной магнитной проницаемости экрана

$\mu_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} \gg 1$  коэффициент экранирования

$$K = \frac{H_i}{H_0} = \frac{4}{\mu_r \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} = \frac{4r_2^2}{\mu_r (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{4r_2^2}{\mu_r (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}$$

В практике обычно толщина экрана значительно меньше его габаритных размеров. Если обозначить толщину экрана  $r_2 - r_1 = d$ , принять  $r_2 + r_1 = 2r$ , где  $r$  — средний радиус экрана, то

$$K \approx \frac{2r}{\mu_r d}$$

Таким образом, полученная формула позволяет по заданным размерам экранируемой области  $r$  подобрать толщину  $d$  и магнитную проницаемость  $\mu_2$  экрана так, чтобы получить требуемое значение коэффициента экранирования.

Например, для ослабления поля в 100 раз ( $K = 0,01$ ) при  $r = 50$  мм можно взять  $d = 1$  мм и  $\mu_r = 10^4$  или  $d = 0,5$  мм и  $\mu_r = 2 \cdot 10^4$  и т. д.

## § 22.6. Моделирование полей

В тех случаях, когда конфигурация поверхностей, ограничивающих поля, настолько сложна, что рассчитать поле аналитическими методами не удастся, прибегают к графическому или экспериментальному построению картины поля и определению по этой картине искомых величин.

Графическое построение картины поля состоит в вычерчивании на глаз предполагаемой системы силовых и эквипотенциальных линий с последующей проверкой правильности этого построения. Такое построение обычно громоздко и весьма приближенно. Более эффективным и точным является экспериментальное построение картины поля.

Экспериментальные методы исследования и особенно моделирование полей за последнее время получили значительное распространение и развитие. В основе моделирования полей лежит аналогия их уравнений. Так как наиболее удобно и просто снимается картина электрического поля в проводящей среде, то с его помощью и моделируются как электрические, так и магнитные поля. По экспериментально снятой и графически обработанной картине поля можно определить напряженность поля в любой точке и интегральные характеристики моделируемых устройств: емкость, индуктивность, электрическое и магнитное сопротивления. Для моделирования обычно применяют проводящие листы или электролитические ванны.

### 1. Метод проводящего листа

Этот метод применяется для моделирования плоскопараллельных полей. Суть метода состоит в том, что к проводящему листу, изображающему область моделируемого поля, подводится напряжение с помощью двух электродов, конфигурация которых подобна гранич-

НЫМ линиям моделируемого поля, и снимается распределение потенциала по поверхности листа. Удельная проводимость электрода должна быть значительно больше удельной проводимости листа. Тогда очертания электродов на листе будут граничными эквипотенциальными линиями.

Для создания модели можно применить стальной лист и медные электроды. Однако целесообразней вместо стального листа использовать проводящую бумагу, имеющую значительно меньшую удельную проводимость, чем сталь, и любые металлические электроды. В этом случае изготовление модели не представляет особых затруднений,

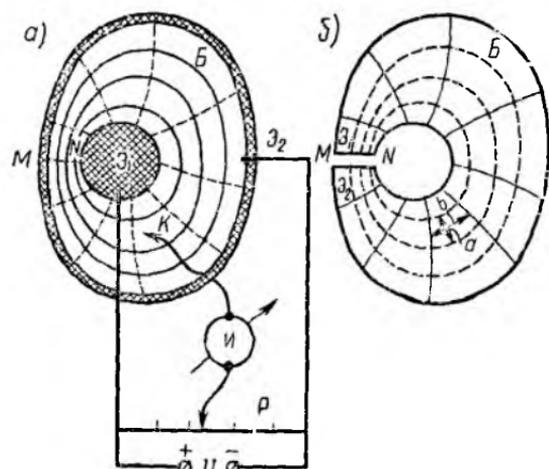


Рис. 22.3

моделирующая установка оказывается очень простой. Общий порядок моделирования полей и обработки экспериментальных данных рассматривается на примере моделирования электрического поля одножильного кабеля с деформированной оболочкой (рис. 22.3, а). Электроды  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , к которым подключено напряжение  $U$ , изображают жилу и оболочку кабеля, лист проводящей бумаги  $B$  — его изоляцию. При геометрическом подобии граничных эквипотенциальных линий модели (очертаний электродов) и граничных эквипотенциальных линий моделируемого кабеля (очертаний жилы и оболочки) распределение потенциала по поверхности листа  $B$  будет подобно распределению потенциала в изоляции кабеля.

Для снятия распределения потенциала схема содержит реохорд (или реостат со шкалой)  $P$ , индикатор (нулевой прибор)  $I$  и контактный щуп  $K$ . Чтобы построить эквипотенциальную линию, нужно при некотором положении движка реохорда найти щупом  $K$  на листе  $B$  серию точек, соответствующих нулевому показанию прибора  $I$ . Для удобства под проводящую бумагу следует подложить обыкновенную бумагу, на которую при нажатии щупа будут также нанесены точки. Повторяя эту операцию при различных положениях движка, можно построить систему эквипотенциальных линий. Чтобы разность потенциалов между любой парой соседних линий была одинаковой, движок следует устанавливать через равные промежутки.

По снятым эквипотенциальным линиям (на рис. 22.3, а — сплошные линии) силовые линии могут быть построены графически (пунктирные линии).

Однако силовые линии можно также снять экспериментально. Для этого лист проводящей бумаги необходимо обрезать в соответствии

эчертаниями сечения изоляции кабеля, и наложить новые электроды в соседние силовые линии, сделав разрез в бумаге между электродами. На рис. 22.3, б изображена модель для такого опыта, причем разрез сделан по линии  $MN$ , которая приближенно считается силовой линией. Теперь система эквипотенциальных линий на листе, построенная таким же способом, как и в предыдущем опыте (сплошные линии на рис. 22.3, б), будет соответствовать системе силовых линий моделируемого поля (пунктирные линии на рис. 22.3, а). По данным этого опыта можно построить графически эквипотенциальные линии моделируемого поля (пунктирные линии на рис. 22.3, б).

Как при графическом, так и при экспериментальном построении рекомендуется строить силовые линии таким образом, чтобы вместе с эквипотенциальными они образовали криволинейные квадраты, т. е. ячейки, у которых средняя ширина  $a$  равна средней длине  $b$ . Тогда по полученной картине поля можно определить напряженность поля в любой точке и емкость на единицу длины кабеля.

Если между жилой и оболочкой кабеля получилось  $n$  интервалов с равным приращением потенциала  $\Delta\varphi$ , то

$$\Delta\varphi = \frac{U}{n},$$

и напряженность поля в квадрате с шириной  $a$

$$E = \frac{\Delta\varphi}{a} = \frac{U}{na}.$$

Для определения емкости кабеля необходимо учесть, что согласно теореме Гаусса поток вектора  $\mathbf{E}$  на единицу длины кабеля равен отношению линейной плотности заряда  $\tau$  к диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  изоляции кабеля:

$$\Psi_E = \frac{\tau}{\epsilon}.$$

С другой стороны, из картины поля следует, что элементарный поток вектора  $\mathbf{E}$  на единицу длины кабеля между двумя силовыми линиями, среднее расстояние между которыми равно  $b$ , можно представить в виде

$$\Delta\Psi_E = Eb.$$

Если число интервалов между силовыми линиями равно  $m$ , то

$$\Psi_E = \Delta\Psi_E m = Ebm = \frac{U}{an} bm = \frac{\tau}{\epsilon}.$$

Отсюда с учетом  $a = b$  емкость на единицу длины кабеля

$$C' = \frac{\tau}{U} = \epsilon \frac{m}{n}.$$

На основании прямого соответствия (см. табл. 22.1) проводимость на единицу длины при моделировании поля в проводящей среде

определяется по формуле

$$G' = \gamma \frac{m}{n},$$

магнитная проводимость на единицу длины моделируемого устройст

$$G'_m = \mu \frac{m}{n}.$$

Если при моделировании ставится задача определения только емкости или магнитной проводимости моделируемых устройств, это можно сделать, не снимая картину поля, на основании очевидных соотношений:

$$\frac{C'}{\epsilon} = \frac{G'}{\gamma} = \frac{G'_m}{\mu}.$$

Тогда, измерив сопротивление  $R$  между электродами модели и зная толщину  $d$  проводящего листа, можно найти

$$G' = \frac{1}{R'} = \frac{d}{R},$$

и по известным  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  определить  $C'$  и  $G'_m$ .

Для моделирования полей в неоднородных средах модель можно изготовить, склеивая тушью или специальным клеем различные сорта бумаги с нужным соотношением удельных проводимостей.

## 2. Метод электролитической ванны

Метод применяется для моделирования как плоскопараллельных, так и трехмерных полей и состоит в снятии опытным путем картины распределения потенциала вокруг электродов, погруженных в ванну со слабо проводящей жидкостью (электролитом). Форма ванны и электродов и их взаимное расположение также выполняются в соответствии с граничными условиями моделируемого поля.

Особенность моделирования в электролитической ванне состоит в том, что измерения производятся на переменном токе, так как из-за явления электролитической поляризации, возникающей при постоянном токе, наблюдается искажение поля в электролите.

При моделировании плоскопараллельных полей электроды погружаются на всю глубину электролита. Если моделируется плоскомеридианное поле, то электроды, изображающие тела вращения моделируемого поля, погружаются в электролит так, чтобы ось симметрии поля лежала на поверхности электролита. В этих случаях порядок снятия системы эквипотенциальных линий не отличается от описанного способа для проводящей бумаги. Траектория контактного щупа (зонда) на поверхности электролита отмечается на специальной сетке или переносится с помощью пантографа на бумагу.

Если моделируется трехмерное поле, не обладающее осевой симметрией, то электроды погружаются в электролит полностью и система эквипотенциальных линий снимается в нескольких параллельных плоскостях. В этом случае контактный щуп представляет собой тонкий

таллический стержень, изолированный по всей длине, кроме небольшого участка на конце. При погружении в электролит щуп принимает потенциал той точки, в которой находится его открытый конец.

Для определения емкости  $C$  или магнитной проводимости  $G_m$  делируемых устройств можно, не снимая картины поля, измерить сопротивление  $R$  между электродами модели. Тогда искомые величины разделяются по формулам:

$$C = \frac{1}{R} \cdot \frac{\epsilon l_0}{\gamma l_m}, \quad G_m = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mu l_0}{\gamma l_m},$$

( $\frac{l_0}{l_m}$  — отношение линейных размеров оригинала и модели;  $\gamma$  — удельная проводимость электролита;

$\epsilon, \mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости сред моделируемых полей.

Для моделирования полей в неоднородных средах применяют ванны с различной толщиной слоя электролита.

При моделировании полей в электролитической ванне необходимо выбирать размеры электродов и расстояния между ними так, чтобы они были значительно меньше размеров ванны. Этим снижаются погрешности моделирования из-за искажения поля у стенок и дна ванны.

В заключение необходимо отметить, что методами проводящего листа и электролитической ванны можно моделировать и другие физические поля, например, тепловые, гидродинамические и т. д.

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ

### РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО УРАВНИЮ ПУАССОНА

#### § 23.1. О расчете полей по уравнению Пуассона

Уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{или} \quad \Delta A = -\mu \delta$$

применяется для расчета полей в однородных средах в случаях, когда задано распределение зарядов или токов.

Прямая задача состоит в определении потенциала  $\varphi$  или  $A$  как функции координат по известному распределению  $\rho$  или  $\delta$ . Обратная задача, состоящая в определении  $\rho$  или  $\delta$  по заданным  $\varphi$  или  $A$ , решается дифференцированием функции  $\varphi$  или  $A$ .

При решении прямой задачи в общем случае исходным соотношением является уравнение Пуассона, которое необходимо решить в удобной системе координат. Для частных случаев, когда заряды или токи распределены в конечном объеме, или для системы бесконечно длинных параллельных тел, когда их суммарный заряд или ток равен нулю, общее решение уравнения Пуассона известно (§ 21.3, 21.5):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV, \quad A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta}{r} dV.$$

Различие в расчетах электрических и магнитных полей по уравнению Пуассона состоит в том, что в первом случае в уравнение входит скалярная функция  $\varphi$ , через которую напряженность поля выражается как  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , а во втором случае — векторная функция связанная с магнитной индукцией выражением  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Одна для плоскопараллельных электрических и магнитных полей существование сходство между уравнениями и их решениями.

Действительно, плоскопараллельное магнитное поле может быть создано только в том случае, когда векторы плотности тока во всех точках параллельны между собой. Если в декартовых координатах имеет составляющую только вдоль оси  $Z$ , то и вектор  $\mathbf{A}$  будет иметь составляющую только вдоль этой оси. Следовательно, уравнение Пуассона в этом случае является скалярным:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu \delta_z.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением Пуассона для плоскопараллельного электрического поля

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

можно видеть, что при аналогичном распределении токов  $\delta_z(x, y)$  и зарядов  $\rho(x, y)$  решения будут аналогичны. Составляющие магнитной индукции с учетом  $A_x = A_y = 0$  в этом случае равны:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y},$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$B_z = 0.$$

Составляющие вектора напряженности электрического поля

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = 0.$$

Отсюда следует, что линии векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в соответствующих полях будут взаимно перпендикулярны, что наглядно иллюстрируется на примерах, рассматриваемых далее.

Если обозначить через  $C'$ ,  $\tau$ ,  $L'$  и  $\Phi'$ , соответственно, емкость, заряд, индуктивность и магнитный поток на единицу длины, то для плоскопараллельных электрических и магнитных полей, описываемых уравнением Пуассона, можно составить таблицу соответствия величин (табл. 23.1).

Таблица 23.1

Электрическое поле	$\rho$	$\varphi$	$\epsilon$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{D}$	$\tau$	$U$	$C'$
Магнитное поле	$\delta_z$	$A_z$	$\frac{1}{\mu}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{H}$	$I$	$\Phi'$	$\frac{1}{L'}$

Соответствие, устанавливаемое этой таблицей, существенно отличается от соответствия по табл. 22.1 и может быть названо обратным.

Принципиальная разница между таблицами прямого и обратного ответа состоит в том, что в первом случае предполагается подобие распределение потенциалов  $\varphi$  и  $\varphi_m$  на граничных поверхностях, во втором — зарядов  $\rho$  и токов  $\delta_z$  или, соответственно, потенциалов и  $A_z$ . Во втором случае имеет место также обратное соответствие (подобие) картин электрических и магнитных полей. Если плотности зарядов и токов, создающих плоскопараллельные поля, распределены в однородной среде аналогично, то картины полей подобны, однако иловым линиям магнитного поля соответствуют эквипотенциальные линии электрического, и наоборот.

Далее рассмотрен ряд примеров на расчет полей по уравнению Пуассона, а также проиллюстрировано положение об обратном соответствии картин плоскопараллельных электрических и магнитных полей.

## § 23.2. Электрическое поле цилиндра с объемным зарядом и магнитное поле цилиндра с током

### 1. Электрическое поле цилиндра с объемным зарядом

В бесконечном диэлектрическом цилиндре радиуса  $r_0$  (рис. 23.1) распределен объемный заряд по закону  $\rho = \rho_0 \frac{r}{r_0}$ . Требуется рассчитать электрическое поле внутри и вне цилиндра, если диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$  цилиндра и  $\epsilon_2$  окружающей среды постоянны.

Ввиду того, что граничная поверхность представляет собой цилиндр, задачу удобно решать в цилиндрических координатах. Поскольку заданное распределение заряда обладает осевой симметрией, то и поле этого заряда должно обладать осевой симметрией. При этом потенциал  $\varphi$  не зависит от координаты  $\alpha$ , так как  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ .

Цилиндр бесконечен, поэтому потенциал  $\varphi$  также не зависит от координаты  $z$ , так как  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ , т. е. поле является плоскопараллельным. Следовательно, уравнение Пуассона имеет вид (см. приложение 5):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon}.$$

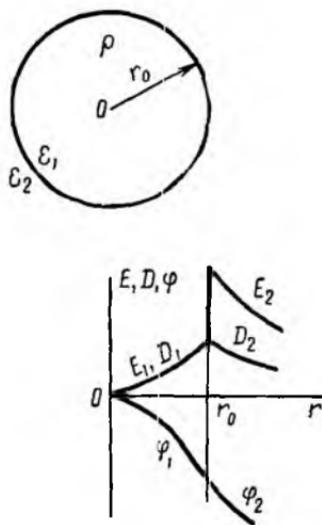


Рис 23.1

Это уравнение необходимо рассматривать для двух областей — в цилиндре и вне его.

1) Внутри цилиндра ( $0 \leq r \leq r_0$ )

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = - \frac{\rho_0}{\varepsilon_1 r_0} r,$$

откуда

$$\varphi_1 = - \frac{\rho_0}{9\varepsilon_1 r_0} r^3 + C_1 \ln r + C_2.$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  необходимо учесть, что на оси цилиндра напряженность поля  $E_{r=0} = - \left( \frac{d\varphi_1}{dr} \right)_{r=0} = 0$ , так как  $\rho_{r=0} = 0$ , кроме того, целесообразно принять  $\varphi_{r=0} = 0$ , откуда  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ .

Таким образом, потенциал внутри цилиндра

$$\varphi_1 = - \frac{\rho_0}{9\varepsilon_1 r_0} r^3.$$

Напряженность и смещение направлены по радиусу и равны

$$E_{r1} = - \frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_1 r_0} r^2, \quad D_{r1} = \varepsilon_1 E_{r1} = \frac{\rho_0}{3r_0} r^2.$$

2) Вне цилиндра  $r \geq r_0$ ,  $\rho = 0$  и уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0,$$

откуда

$$\varphi_2 = C_3 \ln r + C_4,$$

$$E_{r2} = - \frac{d\varphi_2}{dr} = - \frac{C_3}{r}, \quad D_{r2} = - \frac{C_3 \varepsilon_2}{r}.$$

Постоянные интегрирования  $C_3$  и  $C_4$  определяются из условий на границе раздела двух сред: непрерывности нормальных составляющих смещения

$$D_{r1}(r_0) = D_{r2}(r_0), \quad \frac{\rho_0}{3} r_0 = - \frac{C_3 \varepsilon_2}{r_0},$$

откуда

$$C_3 = - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_2} r_0^2,$$

и непрерывности потенциала

$$\varphi_1(r_0) = \varphi_2(r_0), \quad - \frac{\rho_0}{9\varepsilon_1} r_0^3 = C_3 \ln r_0 + C_4,$$

откуда

$$C_4 = - \frac{\rho_0}{9\varepsilon_1} r_0^3 + \frac{\rho_0}{3\varepsilon_2} r_0^2 \ln r_0.$$

Следовательно,

$$\varphi_2 = - \frac{\rho_0 r_0^2}{3} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{1}{3\varepsilon_1} \right),$$

$$E_{r2} = \frac{\rho_0 r_0^2}{3\varepsilon_2 r}, \quad D_{r2} = \frac{\rho_0 r_0^2}{3r}.$$

Кривые изменения  $\varphi$ ,  $E$ ,  $D$  в предположении  $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$  изображены на рис. 23.1. В этом случае вектор  $E$  при переходе из цилиндра в окружающую среду увеличивается скачком в два раза.

Интересно отметить, что поле вне цилиндра совпадает с полем заряженной оси

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2 r},$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда, в данном случае равная

$$\tau = \frac{2\pi\rho_0 r_0^2}{3}.$$

## 2. Магнитное поле цилиндра с током

Представляет интерес рассмотрение аналогичной задачи расчета магнитного поля. В однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  расположен бесконечный цилиндр радиуса  $r_0$  с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , по которому протекает ток с плотностью  $\delta = \delta_0 \frac{r}{r_0}$ . Требуется найти магнитное поле внутри и вне цилиндра.

Так как плотность тока и векторный потенциал имеют составляющие только вдоль оси  $Z$  ( $\delta = \delta_z$ ,  $A = A_z$ ), то внутри цилиндра поле описывается уравнением Пуассона:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_1 \delta = -\mu_1 \delta_0 \frac{r}{r_0},$$

а вне цилиндра — уравнением Лапласа:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0.$$

Эти уравнения полностью аналогичны уравнениям для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  предыдущей задачи и, следовательно, имеют аналогичные решения:

$$A_1 = -\frac{\mu_1 \delta_0}{9r_0} r^3 + K_1 \ln r + K_2,$$

$$A_2 = K_3 \ln r + K_4.$$

Постоянные интегрирования  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  и  $K_4$  определяются также из граничных условий.

В зависимости от выбора начала отсчета векторного потенциала его направление может совпадать с направлением тока или быть противоположным ему. В частности, если принять значение  $A_1$  на оси цилиндра равным нулю, то  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0$  и

$$A_1 = -\frac{\mu_1 \delta_0}{9r_0} r^3,$$

т. е. направления  $A_1$  и  $\delta_0$  противоположны.

Магнитная индукция имеет только составляющую  $B_z$ , равную (см. приложение 5)

$$B_z = \text{rot}_z A = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Так как  $A_r = 0$ , то

$$B_{a1} = -\frac{dA_1}{dr}, \quad B_{a2} = -\frac{dA_2}{dr}.$$

Напряженность магнитного поля также имеет только составляющую  $H_a$ , равную:

$$H_{a1} = \frac{B_{a1}}{\mu_1}, \quad H_{a2} = \frac{B_{a2}}{\mu_2}.$$

Сопоставляя эти выражения с соответствующими выражениям предыдущей задачи, можно видеть, что одни получаются из других заменой величин по табл. 23.1. Это значит, что и результаты расчета магнитного поля могут быть получены из окончательных формул для электрического поля. В частности, можно записать:

$$B_{a1} = \frac{\delta_0 \mu_1 r_2}{3r_0}, \quad B_{a2} = \frac{\delta_0 \mu_2 r_0^2}{3r}.$$

Интересно отметить, что в случае  $\mu_1 = 2\mu_2$  на границе раздела ( $r = r_0$ )

$$B_{a1} = 2B_{a2},$$

т. е. в отличие от  $E$  индукция  $B$  уменьшается скачком в два раза, что и следовало ожидать на основании соответствия  $\epsilon$  и  $\frac{1}{\mu}$ . Вне цилиндра поле совпадает с полем линейного тока:

$$I = \frac{2\pi\delta_0 r_0^2}{3}, \quad B_{a2} = \frac{\mu_2 I}{2\pi r}.$$

Как видно, между исходными уравнениями и их решениями в рассмотренных примерах существует соответствие по табл. 23.1. При этом в электрическом поле векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  направлены по радиусу, т. е. силовые линии представляют собой лучи, эквипотенциальные линии  $\varphi = \text{const}$  — концентрические окружности. В магнитном поле векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  направлены по касательным к концентрическим окружностям (силовым линиям), причем линии равных значений векторного потенциала также являются концентрическими окружностями. Следовательно,  $A_z = \text{const}$  представляет собой уравнение силовых линий магнитного поля как в проводнике с током, так и вне его.

Как упоминалось, вне цилиндра, где  $\delta = 0$ , можно ввести понятие скалярного магнитного потенциала  $\varphi_m$ . Тогда эквипотенциальные линии  $\varphi_m = \text{const}$  будут представлять собой лучи.

Таким образом, на этих примерах подтверждено обратное соответствие картин плоскопараллельных электрических и магнитных полей.

### § 23.3. Электрическое поле и ток в вакуумной лампе

Двухэлектродная вакуумная лампа состоит из цилиндрического анода  $A$  с внутренним радиусом  $r_0$ , длиной  $l$  и катода  $K$  в виде нити, расположенной на оси цилиндра (рис. 23.2). Требуется найти распре-

деление потенциала  $\varphi$  внутри цилиндра и ток  $I$  через диод, если между анодом и катодом приложено постоянное напряжение  $U$ . Искажением поля на краях цилиндра для упрощения задачи можно пренебречь.

В предположении нулевой начальной скорости электронов, отсутствия их столкновений и работы лампы в ненасыщенном режиме кинетическая энергия электрона в некоторой точке равна работе, совершенной полем при перенесении электрона от катода в данную точку:

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi,$$

где  $m$ ,  $e$ ,  $v$  — масса, величина заряда и скорость электрона,  $\varphi$  — потенциал поля в данной точке.

Если через диод протекает постоянный ток  $I$ , то плотность тока переноса между катодом и анодом

$$\delta = \frac{I}{2\pi r l},$$

плотность объемного заряда в лампе также постоянна во времени и равна:

$$\rho = -\frac{\delta}{v} = -\frac{I}{2\pi l r v} = -\frac{I}{2\pi l r \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}} = -\frac{al}{r\sqrt{\varphi}},$$

где

$$a = \frac{1}{2\pi l \sqrt{\frac{2e}{m}}}.$$

Знак минус в этих выражениях соответствует отрицательному заряду электронов. Внутри лампы поле описывается уравнением Пуассона:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{al}{\epsilon_0 r \sqrt{\varphi}}.$$

После подстановки в левую и правую части этого уравнения предполагаемого его решения  $\varphi = kr^n$  получается следующее равенство:

$$kn^2 r^{n-1} = \frac{al}{\epsilon_0 \sqrt{kr^n}}.$$

Последнее равенство справедливо только при условии выполнения двух следующих равенств:

$$kn^2 = \frac{al}{\epsilon_0 \sqrt{k}}, \quad n-1 = -\frac{n}{2},$$

откуда

$$n = \frac{2}{3}, \quad k = \left( \frac{9}{4} \cdot \frac{al}{\epsilon_0} \right)^{2/3}.$$

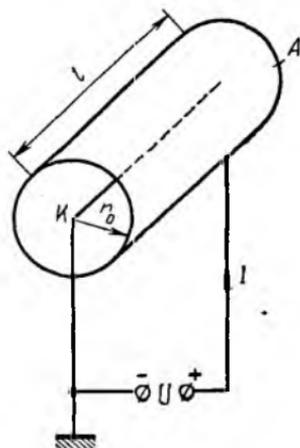


Рис. 23.2

Следовательно, потенциал между катодом и анодом распределен по закону

$$\varphi = \left( \frac{9}{4} \cdot \frac{aI}{\varepsilon_0} \right)^{2/3} r^{2/3},$$

причем потенциал катода равен нулю (катод заземлен). Так как в этом случае потенциал анода равен приложенному напряжению  $U$ , то

$$U = \left( \frac{9}{4} \cdot \frac{aI}{\varepsilon_0} \right)^{2/3} r_0^{2/3},$$

откуда

$$I = \frac{4}{9} \cdot \frac{\varepsilon_0}{ar_0} U^{3/2}.$$

Таким образом, ток в лампе пропорционален напряжению в степени три вторых.

### § 23.4. Магнитное поле двухпроводной линии из проводов прямоугольного сечения

Требуется рассчитать магнитное поле двух параллельных шин с постоянными токами  $I$  и  $-I$ , сечение шин  $ah$ , расстояние между ними  $b$  (рис. 23.3). Магнитная проницаемость шин и окружающей среды  $\mu = \text{const}$ .

Магнитное поле в шинах описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu \delta_z.$$

Вне шин правая часть этого уравнения равна нулю.

Следовательно, расчет сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных, что представляет значительные трудности. Однако можно сразу записать общее решение:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta_z}{r} dV,$$

поскольку алгебраическая сумма токов линии равна нулю.

Ток в каждой шине распределен по сечению равномерно, поэтому плотность тока в обеих шинах

$$\delta_z = \frac{I}{ah},$$

причем направление  $\delta$  в первой шине противоположно направлению во второй. Тогда в декартовых координатах решение принимает вид:

$$A_z = \frac{\mu \delta_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy \int_{-a-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \frac{\mu \delta_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy \int_{\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + z^2}}$$

или

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi ah} \int_0^\infty dz \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \left( \int_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \int_{\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right). \quad (23.1)$$

Здесь

$$r_1 = \sqrt{(X+x)^2 + (Y+y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$$

являются расстояниями от точки  $(X, Y, 0)$ , в которой определяется векторный потенциал  $A_z(X, Y)$ , до точек  $(x, y, 0)$  сечения, соответственно, первой и второй шины. Интегрирование производится по всему объему, занятому током: по  $x$  и  $y$  — в пределах сечения шин, по  $z$  — в пределах длины шин.

Интегрирование выражения (23.1) для расчета  $A_z(X, Y)$  в шинах или вблизи от них затруднительно. Если же рассматривать поле на расстояниях, значительно больших, чем поперечные размеры шин,  $r_1$  и  $r_2$  можно считать расстояниями до центров шин, тогда интегрирование по  $x$  и  $y$  дает, соответственно,  $a$  и  $h$ .

Таким образом,

$$A_z = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right) dz = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

или

$$A_z(X, Y) = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\left(X + \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + Y^2}}{\sqrt{\left(X - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + Y^2}}.$$

Отсюда можно определить составляющие магнитной индукции:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial Y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial X}, \quad B_z = 0.$$

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПО УРАВНЕНИЯМ МАКСВЕЛЛА

### § 24.1. О расчете полей по уравнениям Максвелла

Уравнения Максвелла являются универсальными и могут применяться для расчета любых полей. Однако они применяются в основном для расчета полей в неоднородных средах, так как поля в однородных средах проще рассчитываются по уравнениям Лапласа и Пуассона.

На практике задачи расчета полей в неоднородных средах встречаются весьма часто. Неоднородность сред может быть обусловлена неоднородностью их структуры и различными условиями по темпера-

туре, влажности, механическим напряжениям и т. д. Кроме того, при строгом подходе все задачи расчета полей в нелинейных средах должны рассматриваться как задачи в неоднородных средах, поскольку свойства нелинейных сред ( $\epsilon$ ,  $\gamma$  или  $\mu$ ) в зависимости от напряженностей в разных точках различны.

К характерным задачам, в которых приходится учитывать неоднородность сред, относятся расчеты электрических полей в несовершенной изоляции кабелей и проводов, расчеты токов вокруг заземляющих устройств, расчеты полей в ферромагнитных проводах и экранах и т. д.

Как и в предыдущих случаях, важно установить условия подобия электрических и магнитного полей в неоднородных средах.

В областях вне зарядов и токов электрические и магнитные поля описываются одинаковыми по виду уравнениями:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \boldsymbol{\delta} &= 0, & \boldsymbol{\delta} &= \gamma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

При выполнении условия геометрического подобия граничных поверхностей, одинаковом распределении векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  или  $\mathbf{D}$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  и  $\mathbf{B}$  на этих поверхностях и одинаковом распределении  $\epsilon$ ,  $\gamma$  и  $\mu$  решения уравнений будут аналогичными. Поэтому результаты расчета одного поля можно использовать для расчета другого, заменяя соответствующие величины по табл. 22.1.

Если требуется рассчитать электрическое или магнитное поле в неоднородной среде при заданном распределении зарядов или токов, то исходными уравнениями являются:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \boldsymbol{\delta}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Для плоскопараллельных полей в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= \rho, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \delta_z, & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

При одинаковом распределении  $\rho(x, y)$  и  $\delta_z(x, y)$  будут одинаковы решения для составляющих  $D_x$  и  $H_y$ , а также для  $D_y$  и  $-H_x$ . Если к тому же будут одинаковы зависимости  $\epsilon(x, y)$  и  $\frac{1}{\mu(x, y)}$ , то будет выполнено и соответствие между составляющими  $E_x$  и  $B_y$  и составляющими  $E_y$  и  $-B_x$ . Следовательно, табл. 23.1 и обратное соответствие картин плоскопараллельных полей оказываются также справедливыми и для неоднородных сред.

Таким образом, при расчете полей по уравнениям Максвелла можно переносить результаты расчета одного поля на расчет другого, заменяя величины по табл. 22.1 или 23.1 в зависимости от вида соответствия исходных данных.

## § 24.2. Электрическое и магнитное поле в неоднородной среде

Плоский конденсатор (рис. 24.1) имеет заряд  $Q$ , расстояние между пластинами  $d$ , площадь каждой пластины  $S$ . Требуется рассчитать поле и емкость, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика изменяется по закону  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + kx)$ , причем диэлектрик считается идеальным ( $\gamma = 0$ ), а искажением поля у краев пренебрегают.

В прямоугольных координатах исходное уравнение имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0.$$

Если плоскость  $YOZ$  совпадает с одной из пластин, то вектор  $\mathbf{D}$  направлен вдоль оси  $X$  и  $D_y = D_z = 0$ ,  $D_x = D$ . Следовательно,  $\frac{dD}{dx} = 0$ , откуда  $D = \text{const}$ , т. е. во всех точках поля  $D$  имеет одну и ту же величину и направление. Поскольку заряды в этом случае распределены по пластинам равномерно, то

$$D = \sigma = \frac{Q}{S}.$$

Значит, напряженность поля

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{S\epsilon_0(1+kx)}.$$

Вектор  $\mathbf{E}$  также направлен вдоль оси  $X$ , а его величина уменьшается с увеличением  $x$  (см. рис. 24.1).

Напряжение на конденсаторе

$$U = \int_0^d E dx = \frac{Q}{S\epsilon_0 k} \ln(1+kd),$$

откуда емкость

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S\epsilon_0 k}{\ln(1+kd)}.$$

Если  $k = 0$  (диэлектрик однородный), то после раскрытия неопределенности получается

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d}.$$

Полученные результаты можно использовать при решении соответствующих задач по расчету электрического поля в проводящей среде и магнитного поля. Так, если удельная проводимость изоляции плоского конденсатора изменяется по закону  $\gamma = \gamma_0 (1 + kx)$ , то в соответствии с табл. 22.1 плотность тока утечки  $\delta$ , как и  $D$ , будет одинакова во всех точках поля, напряженность  $E$  будет убывать с увеличением  $x$ , а проводимость утечки

$$G = \frac{S\gamma_0 k}{\ln(1+kd)}.$$

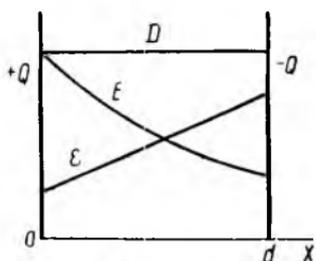


Рис. 24.1

Если в магнитопроводе имеется слой длиной  $d$  и сечением  $S$ , магнитная проницаемость которого изменяется по закону  $\mu = \mu_0 (1 + kx)$  то магнитная индукция  $B$  в предположении равномерного распределения магнитного потока по сечению в этом слое будет одинакова, на пряженность  $H$  будет изменяться так же, как  $E$  в электрическом поле а магнитная проводимость

$$G_m = \frac{S\mu_0 k}{\ln(1 + kd)}$$

Представляет интерес рассмотрение электрического поля в конденсаторе для случая, когда  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + kx)$ , а  $\gamma = \text{const}$ , т. е. для неидеального неоднородного диэлектрика с постоянной удельной проводимостью.

При постоянном поле и, следовательно, при постоянном токе  $I$  через конденсатор, плотность тока во всех точках поля будет одинакова и равна:

$$\delta = \frac{I}{S}$$

Напряженность поля  $E$  во всех точках также будет одинакова:

$$E = \frac{\delta}{\gamma}$$

Но тогда электрическое смещение

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 (1 + kx) E$$

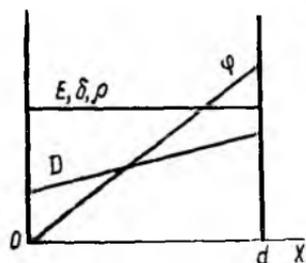


Рис. 24.2

увеличивается с увеличением  $x$ . Очевидно, в этом случае в диэлектрике имеются свободные заряды, объемную плотность которых можно определить путем решения обратной задачи: найти  $\rho(x)$  по известному  $D(x)$ . Решение исходного уравнения  $\rho = \text{div } D$  дает

$$\rho(x) = \frac{dD}{dx} = \epsilon_0 k E = \text{const.}$$

Следовательно, заряд распределен в диэлектрике равномерно, причем, если  $k > 0$ , то  $\rho > 0$ .

На рис. 24.2 изображены зависимости  $\phi$ ,  $E$ ,  $\delta$ ,  $\rho$  и  $D$  в функции  $x$  в предположении  $\rho > 0$ . В случае  $\rho < 0$  линия  $D$  имела бы обратный наклон.

Следует подчеркнуть, что при включении напряжения объемный заряд устанавливается очень медленно, а после отключения так же медленно растекается. Поэтому, если конденсатор отключить от источника и на короткое время соединить его обкладки проводником (разрядить), через некоторое время на обкладках вновь появится напряжение, обусловленное стеканием на них объемных зарядов из диэлектрика. Такое явление часто наблюдается в высоковольтных кабелях при постоянном напряжении.

## § 24.3. Магнитное поле ферромагнитной трубы с током и электрическое поле заряженной трубы

### 1. Магнитное поле ферромагнитной трубы

По ферромагнитной трубе (рис. 24.3) протекает постоянный ток плотностью  $\delta = \text{const}$ . Радиусы трубы  $r_1$  и  $r_2$ , ее магнитная проницаемость изменяется по закону  $\mu_2 = ar$ , окружающая среда — воздух. Требуется рассчитать магнитное поле тока  $I$ .

Исходное уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$  в цилиндрических координатах (см. приложение 5):

$$\text{rot}_r \mathbf{H} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = \delta_r,$$

$$\text{rot}_\alpha \mathbf{H} = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \delta_\alpha,$$

$$\text{rot}_z \mathbf{H} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (rH_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} = \delta_z.$$

Плотность тока в трубе имеет составляющую только вдоль оси  $z$ , т. е.  $\delta_r = \delta_\alpha = 0$ ,  $\delta_z = \delta$ . Так как поле является плоскопараллельным и имеет осевую симметрию, то  $H_z = 0$ ,  $H_r = 0$ ,  $H_\alpha = H$ , при этом  $H_\alpha$  зависит только от  $r$ . В результате три уравнения сводятся к одному:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (rH) = \delta,$$

откуда

$$rH = \frac{\delta r^2}{2} + C, \quad H = \frac{\delta r}{2} + \frac{C}{r}.$$

Это выражение в общем виде справедливо для всех трех областей, однако в каждой из них будут различны плотность тока  $\delta$  и постоянная интегрирования  $C$ , и, следовательно, различны законы изменения  $H$ . Во внутренней полости трубы ( $0 \leq r \leq r_1$ ) плотность тока равна нулю, поэтому  $H_1 = \frac{C_1}{r}$ , откуда

следует, что  $C_1 = 0$ , так как в противном случае при  $r \rightarrow 0$  напряженность устремлялась бы к бесконечности. Таким образом,  $H_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ .

В стенке трубы ( $r_1 \leq r \leq r_2$ )  $H_2 = \frac{\delta}{2} r + \frac{C_2}{r}$ .

Для определения  $C_2$  необходимо воспользоваться условиями на границе раздела двух сред — при  $r = r_1$  напряженность  $H_2(r_1)$  равна напряженности  $H_1(r_1)$ :

$$H_2(r_1) = \frac{\delta}{2} r_1 + \frac{C_2}{r_1} = H_1(r_1) = 0,$$

откуда  $C_2 = -\frac{\delta}{2} r_1^2$ .

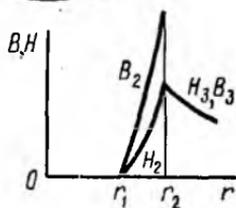
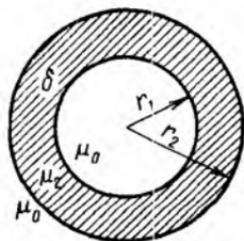


Рис. 24.3

Следовательно,

$$H_2 = \frac{\delta}{2} \left( r - \frac{r_1^2}{r} \right), \quad B_2 = \mu_2 H_2 = ar H_2 = \frac{\delta}{2} a (r^2 - r_1^2).$$

Вне трубы ( $r \geq r_2$ ) плотность тока равна нулю, поэтому

$$H_3 = \frac{C_3}{r}.$$

Постоянная  $C_3$  определяется из условия:

$$H_2(r_2) = H_3(r_2)$$

или

$$\frac{\delta}{2} \left( r_2 - \frac{r_1^2}{r_2} \right) = \frac{C_3}{r_2},$$

откуда

$$C_3 = \frac{\delta}{2} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{I}{2\pi}.$$

Следовательно,

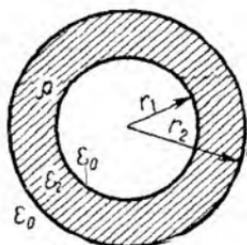
$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_3 = \mu_0 H_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Зависимости  $H(r)$  и  $B(r)$  показаны на рис. 24.3. При этом предполагается, что магнитная проницаемость материала трубы при  $r = r_2$  принимает значение  $\mu_2 = ar_2 > \mu_0$ , вследствие чего при переходе границы раздела  $r = r_2$  индукция скачком уменьшается от  $B_2(r_2) = \frac{aI}{2\pi}$  до  $B_3(r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$ .

## 2. Электрическое поле заряженной трубы

Представляет интерес рассмотрение аналогичной задачи расчета электрического поля.

Труба из диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon_2 = \frac{b}{r}$  и радиусами  $r_1$



и  $r_2$  заряжена объемным зарядом с плотностью  $\rho = \text{const}$  (рис. 24.4). Требуется рассчитать электрическое поле, если окружающая среда — воздух.

Исходное уравнение  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  в цилиндрических координатах имеет вид (см. приложение 5):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (rD_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho.$$

Так как поле является плоскопараллельным, обладает осевой симметрией и  $D_r = D_\alpha = D_z = 0$ , то

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(rD)}{dr} = \rho.$$

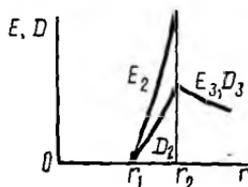


Рис. 24.4

Это уравнение аналогично исходному уравнению предыдущей задачи и может быть получено из него путем замены  $H$  на  $D$  и  $\delta$  на  $\rho$ .

Так как законы изменения  $\mu_2$  и  $\epsilon_2$  взаимно обратны, то выражения для электрического поля можно получить из выражений предыдущей

задачи замены в соответствии с табл. 23.1  $B$  на  $E$ ,  $\mu$  на  $\frac{1}{\epsilon}$  и  $I$  на  $\tau$ .  
Тогда

$$E_1 = D_1 = 0,$$

$$D_2 = \frac{\rho}{2} \left( r - \frac{r_1^2}{r} \right), \quad E_2 = \frac{\rho}{2b} (r^2 - r_1^2),$$

$$D_3 = \frac{\tau}{2\pi r}, \quad E_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Зависимости  $D(r)$  и  $E(r)$  показаны на рис. 24.4. При этом предполагается, что  $\frac{b}{r_2} < \epsilon_0$ , вследствие чего напряженность  $E$  на границе  $r = r_2$  делает скачок аналогично индукции  $B$  (см. рис. 24.3).

В рассмотренных примерах искомые векторы имели одну составляющую, зависящую от одной координаты. Поэтому задачи сводились к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае приходится иметь дело с системой дифференциальных уравнений в частных производных.

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ

### РАСЧЕТ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

#### § 25.1. Метод зеркальных изображений

На практике часто требуется рассчитывать электрические поля зарядов, расположенных вблизи поверхностей раздела двух или нескольких сред. Трудность этих расчетов состоит в том, что на поверхностях раздела появляются наведенные заряды, закон распределения которых неизвестен. Для задач с границами раздела сред в виде плоскости, цилиндра или сферы эту трудность удается преодолеть применением метода зеркальных изображений.

В соответствии с этим методом исходная сложная задача, в которой поле должно рассчитываться в нескольких средах, сводится к эквивалентным простым задачам расчета полей в однородной среде. Поскольку при замене сред устраняются наведенные на поверхностях раздела заряды, их действие учитывается введением фиктивных зарядов. Величина, знак и расположение фиктивных зарядов находятся из граничных условий исходной задачи. На основании теоремы единственности решения уравнения Лапласа при одинаковых граничных условиях распределение потенциалов (следовательно, и векторов напряженности и смещения) в соответствующих областях сложной и простых задач будет одинаково.

Метод зеркальных изображений применим и для расчета магнитных полей, создаваемых токами, расположенными вблизи поверхностей раздела двух или нескольких сред.

## § 25.2. Электрическое поле точечных зарядов, расположенных вблизи плоской поверхности раздела двух сред

### 1. Точечный заряд и плоская поверхность проводящей среды

Точечный заряд  $Q$  расположен в диэлектрической среде с проницаемостью  $\epsilon$  на расстоянии  $a$  от плоской поверхности бесконечной проводящей среды (рис. 25.1, а). На ней под действием заряда  $Q$  возникает заряд противоположного знака, распределенный неравномерно. Требуется определить поле в диэлектрике.

Согласно методу зеркальных изображений исходная задача (см. рис. 25.1, а) заменяется эквивалентной (рис. 25.1, б), в которой про-

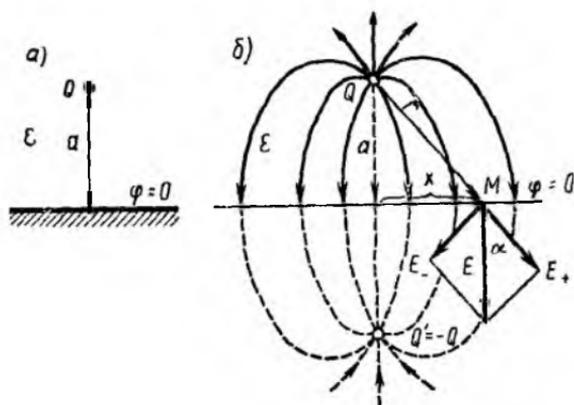


Рис. 25.1

водящая среда заменена диэлектриком. При этом проводящая плоскость должна быть заменена эквипотенциальной плоскостью с тем же самым значением потенциала. Ниже эквипотенциальной плоскости помещается заряд  $Q'$  такой величины и в такой точке, чтобы он вместе с заданным зарядом  $Q$  создавал в любой точке  $M$  этой плоскости один и тот же потенциал, который удобно принять равным нулю.

Для получения симметричной системы заряд  $Q'$  помещается также на расстоянии  $a$  от плоскости. Тогда его величина определяется из условия

$$\varphi_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon r} = 0,$$

откуда  $Q' = -Q$ . Таким образом, заряд  $Q'$  является как бы зеркальным изображением заряда  $Q$ .

Так как в исходной и эквивалентной задачах условия в точке расположения заряда  $Q$  и на поверхностях  $\varphi = 0$  совпадают, то на основании теоремы единственности решения уравнения Лапласа поля в верхних полупространствах этих задач одинаковы.

Исходная задача свелась к элементарной задаче расчета поля двух разноименных одинаковых по величине зарядов, находящихся на расстоянии  $2a$  друг от друга в однородной среде с проницаемостью  $\epsilon$ . Поле, изображенное на рис. 25.1, б для исходной задачи (см.

рис. 25.1, а), в верхнем полупространстве реально, а в нижнем — фиктивно.

Для определения поверхностной плотности заряда  $\sigma$  на проводящей плоскости вычисляется напряженность поля у этой плоскости, направленная по нормали к плоскости (на рис. 25.1, б — вниз):

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha,$$

где  $E_+ = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = E_-$  — абсолютные значения напряженности поля каждого из зарядов.

Так как

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

где  $x$  — расстояние от точки  $M$  до основания перпендикуляра, опущенного из точки расположения заряда  $Q$  на плоскость, то

$$E = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon (a^2 + x^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Qa}{2\pi\epsilon (a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Поверхностная плотность отрицательного заряда

$$\sigma = -\epsilon E = -\frac{Qa}{2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Сила притяжения заряда  $Q$  к проводящей плоскости равна силе притяжения между зарядами  $Q$  и  $Q'$ :

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon a^2}.$$

Полученные результаты представляют также и технический интерес. Например, электрон, вышедший из катода в вакуумной лампе на малое расстояние (порядка молекулярных размеров), при любой кривизне поверхности катода может рассматриваться как точечный заряд над проводящей плоскостью. Таким образом, видно, что на электрон, вышедший из катода, действует сила притяжения к зеркальному изображению, стремящаяся вернуть его на катод. При очень малых расстояниях  $a$  эта сила может быть значительной и преобладать над силой, создаваемой полем анода. Этим частично объясняется, почему даже при значительном анодном напряжении часть электронов возвращается на катод.

## 2. Точечный заряд и плоская поверхность раздела двух диэлектриков

Точечный заряд  $Q$  расположен в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon_1$  на расстоянии  $a$  от плоской поверхности раздела этого диэлектрика с другим однородным диэлектриком, имеющим проницаемость  $\epsilon_2$  (рис. 25.2, а). Требуется рассчитать электрическое поле в обеих средах.

В электрическом поле на поверхности раздела двух диэлектриков появляются связанные заряды, влияющие на поле в обеих средах.

Поскольку распределение этих зарядов неизвестно, рассчитать поле методом наложения невозможно. Так как связанный распределенный заряд обусловлен точечным зарядом  $Q$ , можно свести эту сложную задачу к простой, заменив связанные заряды фиктивными точечными зарядами, эквивалентными по своему влиянию на поле в обеих средах.

Величина, знак и расположение фиктивных точечных зарядов определяются из граничных условий исходной задачи. В рассматриваемом случае первая простая задача (рис. 25.2, б) отличается от исходной тем, что диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon_2$  заменен диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_1$ , а влияние исключенных при этой замене связанных зарядов учтено введением фиктивного заряда  $Q_1$ , расположенного зеркально заряду  $Q$ . Во второй простой задаче (рис. 25.2, в) произведена обратная замена сред, а влияние исключенных связан-

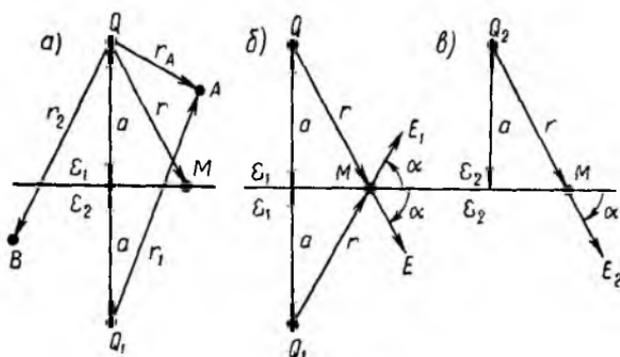


Рис. 25.2

ных зарядов учтено тем, что вместо заряда  $Q$  введен фиктивный заряд  $Q_2$ .

Так как в исходной задаче

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad D_{n1} = D_{n2},$$

то этим же условиям должны удовлетворять поля простых задач.

Напряженности от зарядов  $Q$  и  $Q_1$  в некоторой точке  $M$ , лежащей у плоскости, соответствующей поверхности раздела диэлектриков, в первой среде (см. рис. 25.2, б) равны:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_1 r^2}.$$

Следовательно, суммарная касательная составляющая в этой среде

$$E_{t1} = E \cos \alpha + E_1 \cos \alpha = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_1 r^2} \cos \alpha.$$

Касательная составляющая напряженности во второй среде в той же точке (см. рис. 25.2, в)

$$E_{t2} = E_2 \cos \alpha = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2 r^2} \cos \alpha.$$

Нормальные составляющие вектора  $\mathbf{D}$  в точке  $M$  равны:

$$D_{n1} = D \sin \alpha - D_1 \sin \alpha = \frac{Q - Q_1}{4\pi r^2} \sin \alpha,$$

$$D_{n2} = D \sin \alpha = \frac{Q_2}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

На основании равенств  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $D_{n1} = D_{n2}$  получаются два уравнения:

$$\frac{Q + Q_1}{\epsilon_1} = \frac{Q_2}{\epsilon_2}, \quad Q - Q_1 = Q_2,$$

из которых определяются

$$Q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad Q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q.$$

Таким образом, сложная задача сведена к двум простым. На основании теоремы единственности потенциал в верхнем полупространстве исходной задачи (см. рис. 25.2, *a*) совпадает с потенциалом в верхнем полупространстве первой простой задачи (см. рис. 25.2, *b*), поскольку эти поля имеют одинаковые граничные условия. По той же причине совпадают поля исходной и второй простой задач в нижнем полупространстве.

Следовательно, потенциал в точке  $A$  (первая среда) исходной задачи (см. рис. 25.2, *a*)

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r_A} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_1 r_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{1}{r_A} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{1}{r_1} \right),$$

а в точке  $B$  (вторая среда)

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_2 r_2} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r_2}.$$

Легко проверить, что в точке  $M$  на поверхности раздела, где  $r_A = r_1 = r_2$ , потенциалы во всех трех задачах одинаковы:

$$\varphi_M = \varphi_{1M} = \varphi_{2M} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r},$$

что и соответствует совпадению граничных условий.

Как следует из выражений для зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ , знак заряда  $Q_2$  всегда совпадает со знаком заряда  $Q$ , знак же заряда  $Q_1$  совпадает со знаком  $Q$ , когда  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , и противоположен ему, когда  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ . При  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  заряды  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = Q$ , а при  $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$  заряд  $Q_1 \approx -Q$ , что в частности, соответствует случаю, когда вторая среда является проводником ( $\epsilon_2 = \infty$ ).

### § 25.3. Электрическое поле линейных зарядов, расположенных параллельно поверхностям раздела сред

Полученные соотношения для поля точечного заряда позволяют сделать обобщения для более сложных полей. В частности, если вблизи плоской поверхности раздела двух диэлектриков расположены  $n$  точечных зарядов, то на основании принципа наложения потенциал

поля равен алгебраической сумме потенциалов этих зарядов и их зеркальных изображений. При этом фиктивные заряды (изображения) определяются для каждого реального заряда такими же соотношениями, как и для уединенного точечного заряда.

Поскольку любое распределение зарядов (по объему, поверхности или линии) может быть представлено как совокупность точечных зарядов, то методом зеркальных изображений можно воспользоваться и в этих случаях.

Большое практическое значение имеет расчет полей линейных зарядов, расположенных параллельно плоским поверхностям разделов сред (линии передачи вблизи земли или стен зданий и т. д.).

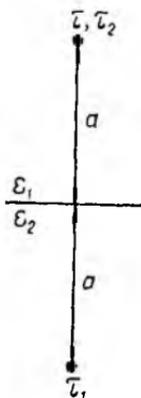


Рис. 25.3

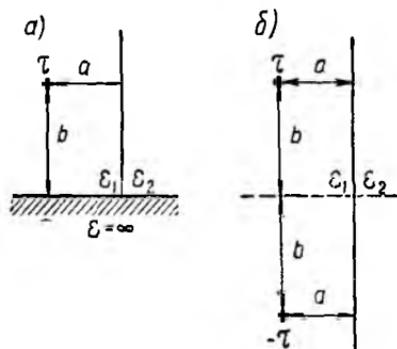


Рис. 25.4

Пусть бесконечно длинный провод с линейной плотностью заряда  $\tau$  расположен параллельно плоскости раздела двух однородных диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  на расстоянии  $a$  от этой плоскости (рис. 25.3).

Согласно методу зеркальных изображений, фиктивные заряды (изображения) будут также линейными, а их значения и знаки определяются по формулам, аналогичным формулам для точечного заряда:

$$\tau_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau, \quad \tau_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau.$$

Затем по формуле  $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}$  рассчитываются напряженности от  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

Дальнейший расчет проводится, как для поля точечного заряда.

Пусть линейный заряд  $\tau$  расположен параллельно плоским взаимно перпендикулярным поверхностям раздела между двумя диэлектриками и между ними и проводящей средой (рис. 25.4, а). Здесь метод зеркальных изображений применяется в два этапа. Сначала исходная задача сводится к более простой (рис. 25.4, б) заменой проводящей среды зеркальным изображением заряда ( $-\tau$ ) и диэлектриками  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Затем эта задача аналогично тому, как это делалось для точечного и линейного зарядов, сводится к двум простейшим.

## § 25.4. Магнитное поле линейных токов, расположенных параллельно плоским поверхностям раздела сред

Бесконечно длинный провод с током  $I$  расположен параллельно тоской поверхности раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на расстоянии  $a$  от этой поверхности (рис. 25.5, а). Требуется рассчитать поле в обеих средах.

Эта задача с помощью метода зеркальных изображений также может быть сведена к двум простым (рис. 25.5, б и в). При этом величину и направление фиктивных токов  $I_1$  и  $I_2$  можно получить, исходя из условий на поверхности раздела  $H_{t1} = H_{t2}$  и  $B_{n1} = B_{n2}$ . Однако выражения для этих токов можно записать и на основе подобия плоскопараллельных электри-

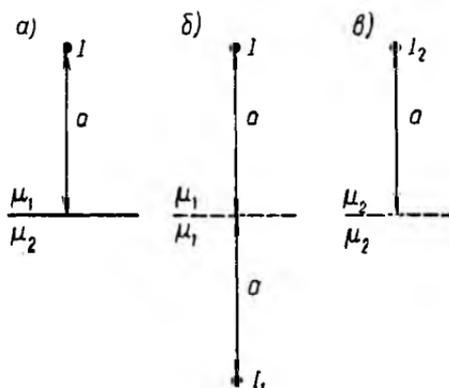


Рис. 25.5

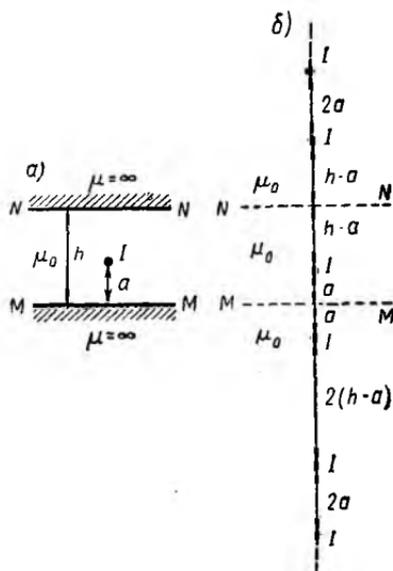


Рис. 25.6

ческих и магнитных полей, если в соответствии с табл. 23.1 в выражениях для линейных зарядов заменить  $\tau$  на  $I$  и  $\epsilon$  на  $\frac{1}{\mu}$ . Тогда

$$I_1 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I, \quad I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I.$$

Отсюда видно, что при  $\mu_2 > \mu_1$  ток  $I_1$  имеет то же направление, что и ток  $I$ ; при  $\mu_1 > \mu_2$  — обратное. Направление тока  $I_2$  всегда совпадает с направлением тока  $I$ .

Если провод с током расположен в воздухе вблизи плоской поверхности ферромагнитной среды ( $\mu_2 \gg \mu_1$ ), то для расчета магнитного поля следует ферромагнетик заменить фиктивным током (зеркальным изображением), практически равным по величине и совпадающим по направлению с током  $I$ . Например, при  $\mu_2 = 500 \mu_1$ ,  $I_1 = 0,9961 I \approx I$ .

Пусть провод с током  $I$  расположен в воздушном зазоре между двумя параллельными плоскостями  $NN$  и  $MM$ , являющимися поверхностями раздела воздуха со сталью (рис. 25.6, а). Для расчета поля в воздухе следует воспользоваться методом зеркальных изображений, при этом магнитную проницаемость стали можно положить равной

бесконечности. Тогда влияние стали учитывается введением систем фиктивных токов, равных по величине и совпадающих по направлению с током  $I$ . Расположение этих токов подбирается из следующих соображений.

Первый фиктивный ток располагается зеркально току  $I$  относительно одной из плоскостей (например,  $MM$ ), затем реальный ток его изображение отображаются во второй плоскости, а эти новые изображения — снова в первой плоскости и т. д. (рис. 25.6, б). Легко проверить, что в этом случае реальный ток и его изображения будут расположены симметрично как относительно плоскости  $MM$ , так относительно плоскости  $NN$ . Значит эти плоскости будут эквипотенциальными, что и соответствует граничным условиям исходной задачи.

Теоретически таких изображений будет бесконечное множество, однако практически для дальнейшего расчета достаточно взять ограниченное их число, так как по мере удаления от воздушного зазора влияние фиктивных токов на поле в зазоре уменьшается, и это влияние легко оценить.

Затем магнитное поле в воздушном зазоре определяется как сумма магнитных полей, рассчитанных по известным формулам для однородной среды от исходного тока и его изображений.

Рассмотренные примеры имеют практическое приложение при расчетах магнитных полей в электрических машинах и других устройствах, в которых обмотки располагаются вблизи ферромагнетиков.

В заключение следует отметить, что методом зеркальных изображений рассчитываются электрические и магнитные поля и в тех случаях, когда поверхности раздела сред представляют собой сферы, цилиндры или совокупность плоскостей.

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ

### УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### § 26.1. Постоянное электромагнитное поле

В любом электротехническом устройстве всегда существуют взаимно связанные электрические и магнитные поля. Если эти поля постоянны, то они образуют постоянное электромагнитное поле. При этом процесс преобразования и передачи энергии определяется не отдельно электрическим или магнитным полем, а их совокупностью, т. е. электромагнитным полем.

Расчет постоянных электрических и магнитных полей можно вести раздельно, так как их уравнения независимы друг от друга. Однако при анализе процессов передачи и преобразования электрической энергии необходимо рассматривать одновременно электрическое и магнитное поля.

В системе источник — линия передачи — приемник можно отметить следующие энергетические процессы. В источнике механическая, химическая или другой вид энергии преобразуется в энергию электромагнитного поля, вдоль линии происходит передача этой энергии

з самой линии она преобразуется в тепловую энергию потерь, в при-  
нике — в полезную механическую, тепловую или другие виды энер-  
и. Поэтому очень важно выяснить роль электромагнитного поля  
процессе преобразования и передачи энергии.

Для полей в однородных средах мощность тепловых потерь в еди-  
це объема проводника

$$P_0 = \gamma E^2,$$

объемные плотности энергии электрического поля в диэлектрике и  
магнитного поля, соответственно, равны:

$$W_{э0} = \frac{\epsilon E^2}{2}, \quad W_{м0} = \frac{\mu H^2}{2}.$$

Максвелл предположил, и это в дальнейшем подтвердилось, что  
плотность энергии электромагнитного поля

$$W_0 = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}.$$

Как видно, энергия электромагнитного поля в этом случае полно-  
стью характеризуется векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и свойствами среды. Однако  
эти выражения, характеризующие распреде-  
ление энергии, не дают никаких указа-  
ний относительно ее движения. Между  
тем ясно, что передача энергии от ис-  
точника к приемнику, как и выделение  
тепла в линии, связана с движением  
энергии электромагнитного поля. По-  
этому и движущаяся энергия электро-  
магнитного поля должна, очевидно, так-  
же определяться векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Выражение движущейся энергии че-  
рез векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  для переменного  
электромагнитного поля было получено  
английским физиком Пойнтингом. Однако это выражение можно  
получить также при рассмотрении преобразования и передачи энер-  
гии в постоянном электромагнитном поле.

Далее рассматривается процесс передачи энергии от генератора  
к приемнику сначала на примере идеализированного, а затем реаль-  
ного коаксиального кабеля; в них электромагнитное поле заключено  
только внутри объема, занимаемого кабелем.

Если при напряжении  $U$  по кабелю протекает ток  $I$  и сопротивле-  
нием жилы и оболочки кабеля по сравнению с сопротивлением прием-  
ника можно пренебречь, то передаваемая мощность

$$P = UI.$$

Пренебрежение сопротивлением жилы и оболочки означает, что  
электромагнитным полем в них можно пренебречь по сравнению с по-  
лем в диэлектрике между ними.

Пусть радиус жилы и внутренний радиус оболочки кабеля рис. 26.1  
равны, что  $r_2 - r_1 \ll r_1$ . Тогда приближенно можно считать, что

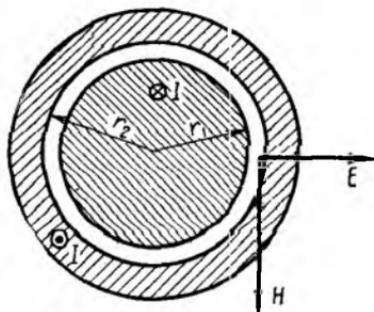


Рис. 26.1

напряженности  $E$  и  $H$  во всех точках диэлектрика имеют одинаковые значения и равны:

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}, \quad H = \frac{I}{\pi(r_2 + r_1)}.$$

Отсюда  $U = E(r_2 - r_1)$ ,  $I = H\pi(r_2 + r_1)$  и мощность

$$P = UI = EH\pi(r_2^2 - r_1^2) = EHS,$$

где  $S$  — площадь сечения диэлектрика.

Таким образом, произведение  $EH = \frac{P}{S}$  характеризует мощность передаваемую через единицу площади сечения диэлектрика.

Так как вектор  $E$  направлен по радиусу, вектор  $H$  перпендикулярен ему, а мощность передается вдоль оси кабеля, то произведение  $EH$  можно рассматривать как векторное.

Вектор

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

называют вектором Пойнтинга. Из выражения  $\mathbf{P} = \frac{P}{S}$  следует, что вектор Пойнтинга равен энергии электромагнитного поля в единицу времени (мощности), передаваемой через единицу площади сечения изоляции кабеля от генератора к приемнику.

С помощью вектора Пойнтинга можно описать процессы передачи и преобразования энергии электромагнитного поля в любом электротехническом устройстве.

Например, в реальном коаксиальном кабеле (рис. 26.2) поле неоднородно, и оба провода имеют сопротивление. В жиле и оболочке напряженности электрического поля направлены параллельно оси  $Z$  кабеля и равны:

$$E_{z1} = \frac{\delta_1}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi r_1^2}, \quad E_{z2} = \frac{\delta_2}{\gamma} = \frac{I}{\gamma\pi(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Напряженности магнитного поля

$$H_{a1} = \frac{I}{2\pi r_1^2} r, \quad H_{a2} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{(r_3^2 - r_2^2)} r$$

направлены перпендикулярно радиусу  $r$  в рассматриваемой точке и оси кабеля. В изоляции кабеля напряженность магнитного поля

$$H_a = \frac{I}{2\pi r},$$

а напряженность электрического поля имеет и радиальную, и осевую составляющие аналогично полю двухпроводной линии (§ 21.3). При этом радиальная составляющая представляет собой напряженность

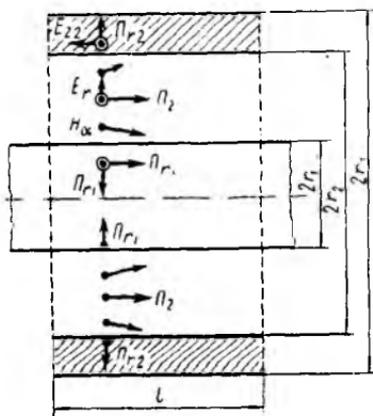


Рис. 26.2

тя цилиндрического конденсатора

$$E_r = \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Вектор Пойнтинга имеет в изоляции осевую  $\Pi_z$  и радиальную  $\Pi_r$ , составляющие, а в жиле и оболочке — только радиальную.

Осевая составляющая характеризует энергию, движущуюся от генератора к приемнику, а радиальная — энергию, поступающую жилу и оболочку и превращающуюся там в тепло. Таким образом, энергия от генератора к приемнику движется только в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Если в конце кабеля (у приемника) напряжение и радиальная составляющая напряженности электрического поля соответственно равны  $U$  и  $E_r$ , то потребляемую приемником мощность можно определить как поток вектора  $\Pi$ , имеющего осевую составляющую  $\Pi_z = E_r H_{\alpha 1}$ , через поверхность  $S$  сечения диэлектрика:

$$P = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \Pi_z r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{l}{2\pi r} r dr = Ul.$$

Мощность тепловых потерь в отрезке жилы длиной  $l$  определяется как поток вектора  $\Pi$ , имеющего радиальную составляющую  $\Pi_{r1} = E_{z1} H_{\alpha 1}$ , через боковую поверхность цилиндра  $S_1 = 2\pi r_1 l$ . Поскольку составляющая  $\Pi_{r1}$  во всех точках этой поверхности имеет одинаковые значения:

$$\Pi_{r1} = \frac{l}{\gamma \pi r_1^2} \cdot \frac{l}{2\pi r_1} = \frac{l^2}{2\gamma \pi^2 r_1^3},$$

то

$$P_1 = \Pi_{r1} 2\pi r_1 l = l^2 R_1,$$

где  $R_1 = \frac{l}{\gamma \pi r_1^2}$  — сопротивление отрезка жилы.

Если учесть, что при  $r = r_2$  напряженность  $H_{\alpha 2} = \frac{l}{2\pi r_2}$ , а при  $r = r_3$  она равна нулю, то мощность тепловых потерь в отрезке оболочки равна потоку вектора  $\Pi$ , имеющего радиальную составляющую

$$\Pi_{r2} = E_{z2} H_{\alpha 2} = \frac{l}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \frac{l}{2\pi r_2},$$

через боковую поверхность цилиндра  $S_2 = 2\pi r_2 l$ , т. е.

$$P_2 = \Pi_{r2} 2\pi r_2 l = l^2 R_2,$$

где  $R_2 = \frac{l}{\gamma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$  — сопротивление отрезка оболочки. Вне кабеля электромагнитное поле отсутствует, значит движения энергии там нет.

Проведенный анализ показывает, что энергия от источника к приемнику движется в диэлектрике между жилой и оболочкой кабеля, из диэлектрика энергия электромагнитного поля поступает также жилу и оболочку, где преобразуется в тепло. Аналогичным образом

для двухпроводной линии передачи можно прийти к выводу, что энергия движется не по проводам, а вдоль проводов в диэлектрике, окружающей эти провода. Провода определяют направление движения энергии и поглощают часть ее на нагрев.

Итак, движущаяся энергия электромагнитного поля характеризуется векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а именно: их векторным произведением  $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  — вектором Пойнтинга.

Из рассмотренного следует, что вектор Пойнтинга выражает поток энергии электромагнитного поля в единицу времени (поток мощности) через единицу поверхности, нормальной к направлению распространения энергии. Так как  $E$  измеряется в  $\text{в/м}$ , а  $H$  в  $\text{а/м}$ , то вектор Пойнтинга измеряется в  $\text{вт/м}^2$ .

Таким образом, зная распределение векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в пространстве, можно определить движущуюся энергию электромагнитного поля в каждой точке, а следовательно, и рассчитать передаваемую и затрачиваемую на нагрев проводников мощность в любом электротехническом устройстве. Это еще раз подчеркивает значение расчетов электрических и магнитных полей.

Нужно отметить, что простое наложение постоянных электрического и магнитного полей не создает электромагнитного поля. Например, если на электростатическое поле конденсатора наложить поле постоянного магнита, то, хотя в каждой точке некоторой области будут определенные значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , векторное произведение этих величин нельзя трактовать как вектор Пойнтинга, поскольку здесь нет движения и преобразования энергии. Поэтому понятие вектора Пойнтинга относится только к электромагнитному полю. Важное значение этого вектора становится еще более очевидным при рассмотрении переменного электромагнитного поля, с помощью которого возможна передача энергии без проводов.

## § 26.2. Полная система уравнений электромагнитного поля в дифференциальной форме

Уравнения электромагнитного поля были установлены Максвеллом путем обобщения соотношений для постоянных электрических и магнитных полей. Эти обобщения для переменных полей в любых средах были не выведены, а постулированы. Полученные таким образом уравнения автоматически обращаются в уравнения для постоянных полей, если встречающиеся в этих уравнениях производные по времени величин, характеризующих поле, приравнять нулю. В дальнейшем, за исключением гл. 32, электромагнитное поле рассматривается в неподвижных средах, для которых полная производная указанных величин по времени должна быть заменена частной производной.

Действительно, в системе неподвижных координат  $x, y, z$  любая из этих величин является функцией этих координат и времени  $t$ . Поэтому для каждой из этих величин, например магнитной индукции  $B$ , в общем случае справедливо выражение

$$\frac{dB(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial B}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial B}{\partial t},$$

:  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$  — составляющие по осям скорости движения среды. Я неподвижных сред эти составляющие обращаются в нуль и  $= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$ . Обобщение заключается в том, что под плотностью тока следует понимать сумму плотностей всех трех видов тока (проводимости, переноса и смещения), называемую плотностью полного тока. Ток смещения возникает при изменении электрического поля. Вектор плотности этого тока  $\delta_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ . Ток переноса

представляет собой движение заряженных частиц или заряженных тел. Вектор плотности этого тока  $\delta_{\text{пер}}$  определяется объемной плотностью заряда  $\rho$  движущихся частиц и вектором скорости  $\mathbf{v}$  их движения:  $\delta_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}$ . Так как ток смещения может существовать в любых средах, ток проводимости — только в проводящей среде, а ток переноса — только в диэлектрической среде или в пространстве, свободном от вещества, то первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме записывается в виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta + \delta_{\text{см}} = \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

где под  $\delta$  понимается плотность тока проводимости или переноса.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  (§ 1.7). Обобщение заключается в том, что при изменении во времени магнитного поля электрическое поле возникает в любой среде, а не только в проводящем контуре.

По теореме Остроградского — Стокса от выражения

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$$

легко прийти к дифференциальной форме записи второго уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Из обоих уравнений Максвелла, относящихся к одному и тому же электромагнитному полю, наглядно видна неразрывная связь магнитного и электрического полей — пространственно-временному изменению электрического поля соответствует пространственно-временное изменение магнитного поля.

Обобщение теоремы Гаусса и принципа непрерывности магнитного потока не изменяет формы записи этих соотношений по сравнению с установленными ранее для постоянных полей:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Помимо указанных четырех соотношений, к системе уравнений электромагнитного поля относятся выражения, связывающие между

собой величины, входящие в эти равенства:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \delta_{\text{пр}} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}), \quad \delta_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v}.$$

Система уравнений поля должна быть дополнена выражением  $W$  энергии электромагнитного поля. Согласно постулату Максвелл, плотность энергии электромагнитного поля определяется как сум плотностей энергии электрического и магнитного полей, прич каждая из них определяется по формулам, выведенным для постоянных полей:

$$W = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}.$$

К полной системе уравнений электромагнитного поля следует также отнести выражение тепловых потерь в единице объема проводящей среды — закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме:

$$P_0 = \delta \mathbf{E}.$$

Таким образом, полная система уравнений электромагнитного поля содержит следующие уравнения:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\delta_{\text{пр}} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}), \quad \delta_{\text{пер}} = \rho \mathbf{v},$$

$$W_0 = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2}, \quad P_0 = \delta \mathbf{E}.$$

Величины, характеризующие поле ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\delta$ ,  $\rho$ ) и среду ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ), являются функциями координат и времени. Они непрерывны и имеют производные во всех точках, за исключением поверхностей раздела двух сред. Условия на границе раздела двух сред в переменных полях для мгновенных значений величин остаются теми же, что и для постоянных.

Можно доказать, что приведенная система уравнений вместе с условиями у поверхностей раздела сред и граничными условиями однозначно определяют электромагнитное поле. Доказательство этой теоремы единственности здесь не приводится.

В постоянном поле в проводящей среде из уравнения  $\text{rot } \mathbf{H} = \delta$  вытекает принцип непрерывности тока проводимости  $\text{div } \delta = 0$ ; подобно этому в переменном поле из первого уравнения Максвелла вытекает равенство

$$\text{div} \left( \delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

являющееся принципом непрерывности полного тока. Это равенство может быть преобразовано к виду:

$$\text{div } \delta = - \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Уравнение

$$\operatorname{div} \delta = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

яется одним из фундаментальных соотношений теории электро-  
нитного поля. Его интегрирование по объему  $V$  дает:

$$\int \operatorname{div} \delta dV = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Так как по теореме Остроградского

$$\int \operatorname{div} \delta dV = \int \delta dS = i,$$

$$i = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Это равенство называется законом сохранения заряда и физически интерпретируется так: ток, выходящий из данного объема, сопровождается соответствующим уменьшением заряда, заключенного внутри этого объема.

Таким образом, в уравнениях Максвелла содержатся принцип непрерывности полного тока и закон сохранения заряда.

### § 26.3. Теорема Умова — Пойнтинга

В § 26.1 было показано, что в постоянном электромагнитном поле энергия, проходящая через единицу поверхности в единицу времени, равна вектору Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ . Далее это доказывается в самом общем виде для любого электромагнитного поля.

Понятие о потоке энергии в упругих средах впервые ввел Н. А. Умов в 1874 г. Применительно к электромагнитному полю представление о потоке энергии было использовано одиннадцать лет спустя Пойнтингом, доказавшим теорему, представляющую закон сохранения энергии в электромагнитном поле.

Пусть в произвольном объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , электромагнитное поле изменяется во времени. Часть объема  $V$  занимают сторонние источники и проводящие тела с постоянной проводимостью  $\gamma$ ; в остальной части объема — непроводящая однородная среда с  $\gamma = 0$ ,  $\epsilon = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$ .

Энергия электромагнитного поля в объеме  $V$

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) dV = \frac{1}{2} \int (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV,$$

а ее изменение

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV = \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dV = \\ &= \int \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV. \end{aligned}$$

Из первого и второго уравнений Максвелла вытекает, что

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \delta \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E},$$

тогда

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) dV - \int \delta \mathbf{E} dV.$$

Так как для любых векторов справедливо равенство (см. приложение 4)

$$\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} = \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

то первый интеграл преобразуется по теореме Остроградского к виду

$$\int (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) dV = \int \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] dV = \oint [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS.$$

Второй интеграл

$$\int \delta \mathbf{E} dV = \int \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) \mathbf{E} dV = \int \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}})^2 dV - \\ - \int \gamma \mathbf{E}_{\text{стор}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}) dV.$$

Первый член представляет собой тепловые потери  $P$  во всем объеме, второй — мощность  $P_{\text{стор}}$  сторонних источников в том же объеме. Таким образом,

$$\int \delta \mathbf{E} dV = P - P_{\text{стор}}.$$

Подстановка полученных результатов в исходное выражение для производной от энергии приводит к соотношению

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS - P + P_{\text{стор}}.$$

Введением вектора Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  и переносом всех членов, кроме  $P_{\text{стор}}$ , в правую сторону соотношение приводится к виду:

$$P_{\text{стор}} = P + \frac{\partial W}{\partial t} + \oint \mathbf{\Pi} dS.$$

Последнее равенство называется теоремой Умова — Пойнтинга. Это соотношение выражает закон сохранения энергии и говорит о том, что мощность сторонних источников, заключенных в объеме  $V$ , затрачивается на тепловые потери  $P$  в проводящей среде, на изменение энергии  $\frac{\partial W}{\partial t}$  электромагнитного поля в этом объеме, а часть этой мощности  $\oint \mathbf{\Pi} dS$  переносится через поверхность  $S$ , ограничивающую рассматриваемый объем, и определяется потоком вектора Пойнтинга. Эта мощность может быть направлена и внутрь объема. Так, например, если процесс стационарный ( $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ ) и в объеме  $V$  нет сторонних источников ( $P_{\text{стор}} = 0$ ), то

$$P + \oint \mathbf{\Pi} dS = 0.$$

Так как  $P > 0$ , то  $\oint \mathbf{\Pi} dS < 0$ . Иными словами, выделение тепла в объеме  $V$  в этом случае происходит за счет энергии, входящей через поверхность  $S$  внутрь объема  $V$ .

## § 26.4. Электродинамические потенциалы

### 1. Вывод уравнений для электродинамических потенциалов

Ранее было показано, что расчет постоянных полей во многих случаях упрощается путем введения скалярного  $\varphi$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов, являющихся функциями координат и удовлетворяющих соотношениям:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Расчет переменного электромагнитного поля в случае однородной изотропной среды ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ) также упрощается, если ввести так называемые электродинамические потенциалы, зависящие не только от координат, но и от времени.

Поскольку уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  сохраняется и для переменного поля, электродинамический векторный потенциал  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$  по-прежнему определяется равенством

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (26.1)$$

Тогда второе уравнение Максвелла может быть преобразовано:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

или

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Отсутствие вихрей в поле суммарного вектора позволяет, аналогично постоянному полю (см. § 21.3), положить

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi. \quad (26.2)$$

Задача расчета поля с помощью электродинамических потенциалов сводится к нахождению  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  по заданным  $\delta$  и  $\rho$ . Поэтому необходимо установить связь между электродинамическими потенциалами и плотностями заряда и тока.

Выражение в первом уравнении Максвелла векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  через электродинамические потенциалы:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

приводит к соотношению

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = \delta - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right)$$

или, используя выражение для  $\text{rot rot } \mathbf{A}$  (см. приложение 4),

$$\frac{1}{\mu} (\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}) = \delta - \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \epsilon \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Перенос членов, содержащих операцию grad, в одну сторону венства и умножение на  $\mu$  дает:

$$\text{grad} \left( \text{div} \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) - \Delta\mathbf{A} = \mu\delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Так как для однозначного определения векторного потенциала необходимо дополнительное условие, целесообразно положить

$$\text{div} \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

для постоянного поля  $\left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \right)$  это условие совпадает с установленным в § 21.5.

Тогда для векторного потенциала получается уравнение

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\delta,$$

называемое уравнением Даламбера.

Уравнение для скалярного потенциала получается подстановкой значения  $\mathbf{E}$  из соотношения (26.2) в третье уравнение электромагнитного поля:

$$\text{div} \mathbf{D} = \varepsilon \text{div} \mathbf{E} = -\varepsilon \text{div} \left( \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} - \varepsilon \text{div} \text{grad} \varphi = \rho.$$

Так как  $\text{div} \text{grad} \varphi = \Delta\varphi$  (см. приложение 4) и  $\text{div} \mathbf{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ , то для скалярного потенциала получается уравнение

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Таким образом, электродинамические потенциалы удовлетворяют уравнению Даламбера. Для постоянных полей производные по времени обращаются в нуль и уравнения Даламбера переходят в уравнения Пуассона.

Для области, где нет зарядов и токов ( $\rho = 0$ ,  $\delta = 0$ ), уравнения Даламбера упрощаются, переходя в волновые уравнения:

$$\Delta\mathbf{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Волновые уравнения для постоянных полей обращаются в уравнения Лапласа.

Таким образом, задача расчета электромагнитного поля может быть сведена к решению уравнения Даламбера или волнового уравнения для потенциалов. Напряженности поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  находят затем через  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  дифференцированием по формулам (26.1) и (26.2).

## 2. Решение волнового уравнения и уравнения Даламбера

Далее дается решение волнового уравнения на примере поля переменного точечного заряда  $q(t)$ . Расчет проводится для скалярного потенциала.

Так как поле точечного заряда обладает сферической симметрией, естественно воспользоваться сферической системой координат  $(r, \theta, \alpha)$ , поместив точечный заряд в начало координат. Из-за симметрии потенциал зависит лишь от одной координаты  $r$ , т. е.

$$\varphi = \varphi(r, t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.$$

Тогда оператор Лапласа в сферических координатах (см. приложение 5)

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2},$$

волновое уравнение

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2},$$

$$\text{где } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Подобно тому, как это было сделано в § 20.6 для аналогичного уравнения длинной линии, решение может быть представлено в виде суммы двух частных решений:

$$r\varphi = F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{r}{v}\right),$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — произвольные дважды дифференцируемые функции. Каждое из двух частных решений называется в о л н о в о й ф у н к ц и е й или в о л н о й.

Физический смысл частного решения  $F_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$  заключается в том, что для точки, движущейся вдоль  $r$  со скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ , функция  $F_1$  сохраняет свое неизменное значение. Действительно, для такой точки  $r = r_0 + vt$  и

$$F_1\left(t - \frac{r_0 + vt}{v}\right) = F_1\left(-\frac{r_0}{v}\right) = \text{const.}$$

Иными словами, значение  $F_1$  перемещается от заряда в направлении  $r$  со скоростью  $v$ . Это решение  $F_1$  соответствует прямой (падающей) волне. Обратная волна, возникающая лишь при отражении от границы раздела сред, определяется вторым решением  $F_2$  и движется с той же скоростью, но в обратном направлении — к заряду.

Таким образом, скалярный потенциал

$$\varphi = \frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} F_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

распространяется со скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ , зависящей от свойств среды и совпадающей со скоростью света в этой среде.

С той же скоростью, что и потенциал, распространяются значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также энергия электромагнитного поля. Иными словами, электромагнитное поле всегда движется в пространстве со скоростью

света, что послужило основанием для предположения Максвелла электромагнитной природе света, впоследствии подтвержденного о том.

Для определения функций  $F_1$  и  $F_2$ , зависящих от закона изменения заряда, можно воспользоваться тем, что формально уравнения электромагнитного поля переходят в уравнения статических полей, если положить  $v = \infty$ , так как при этом волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа. Поэтому и решения для переменного поля при  $v = \infty$  должны совпадать с решениями для статического поля.

При рассмотрении только прямой волны, т. е. при  $F_2 = 0$ , потенциал точечного заряда

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} F_1\left(t - \frac{r}{v}\right).$$

Из электростатики известно выражение для потенциала точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}.$$

Для совпадения последних двух выражений при  $v = \infty$  следует принять

$$F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r},$$

где  $q\left(t - \frac{r}{v}\right)$  есть функция  $t$  и  $r$ . Следовательно,

$$\varphi(r, t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r}.$$

Последнее выражение указывает на то, что значение потенциала на расстоянии  $r$  от заряда в данный момент времени  $t$  определяется значением заряда в предшествующий момент времени  $t - \frac{r}{v}$  ( $\frac{r}{v}$  — время, необходимое для распространения электромагнитной волны от заряда до точки наблюдения).

Иными словами, значение потенциала запаздывает по сравнению со значением заряда. Поэтому  $\varphi(r, t)$  называется **запаздывающим потенциалом**.

Для объемного распределения заряда в соответствии с известным выражением для потенциала в постоянном поле (см. § 21.3):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dV}{r},$$

запаздывающий потенциал определяется формулой

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{r},$$

где  $r$  — расстояние от элемента объема с зарядом  $\rho dV$  до точки наблюдения.

Аналогично для векторного запаздывающего потенциала вместо выражения для постоянного поля

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta dV}{r}$$

лучают

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\delta\left(t - \frac{r}{v}\right) dV}{rv}$$

Таким образом, с помощью запаздывающих потенциалов можно рассчитывать электромагнитное поле в однородной среде, если задано распределение в пространстве и изменение во времени зарядов или токов.

В случае неоднородной среды или заданий векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$  на граничных поверхностях расчет электромагнитного поля должен производиться непосредственно по основным уравнениям Максвелла.

### § 26.5. Основные уравнения электромагнитного поля в символической форме

Для синусоидально изменяющихся во времени электромагнитных полей целесообразно ввести символическую запись уравнений поля, перейдя от действительных векторов поля к их комплексным изображениям. Такой переход аналогичен описанному в § 8.1. Разница лишь в том, что в отличие от рассмотренных ранее скалярных величин — тока и напряжения, часть величин, характеризующих электромагнитное поле ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\delta$ ), является векторами. Мгновенное значение синусоидально изменяющегося вектора

$$\mathbf{H} = iH_{xm} \sin(\omega t + \psi_x) + jH_{ym} \sin(\omega t + \psi_y) + kH_{zm} \sin(\omega t + \psi_z)$$

определяется через комплексную амплитуду  $\mathbf{H}_m$  и временной множитель (множитель вращения)  $e^{j\omega t}$  соотношением

$$\mathbf{H} = \text{Im}(\dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}).$$

Комплексная амплитуда  $\dot{\mathbf{H}}_m$  вектора  $\mathbf{H}$  выражается через комплексные амплитуды составляющих по координатным осям:

$$\dot{\mathbf{H}}_m = i\dot{H}_{xm} + j\dot{H}_{ym} + k\dot{H}_{zm},$$

где

$$\dot{H}_{xm} = H_{xm} e^{j\psi_x}, \quad \dot{H}_{ym} = H_{ym} e^{j\psi_y} \quad \text{и} \quad \dot{H}_{zm} = H_{zm} e^{j\psi_z}.$$

Если  $\psi_x = \psi_y = \psi_z$ , т. е. составляющие вектора  $\mathbf{H}$  по координатным осям совпадают по фазе, то направление его с течением времени не изменяется. В общем случае составляющие вектора  $\mathbf{H}$  сдвинуты по фазе, т. е.  $\psi_x \neq \psi_y \neq \psi_z$ , и в данной точке конец этого вектора описывает некоторую кривую. Поэтому графическое изображение такого поля силовыми линиями и эквипотенциальными поверхностями имеет смысл лишь для данного момента времени.

Подстановка в основные уравнения поля взамен векторов их комплексных выражений и переход к действующим значениям, например

$\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{H}}_m}{\sqrt{2}}$ , приводит к уравнениям:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \delta_{\text{пр}} + \delta_{\text{см}} = \gamma \dot{\mathbf{E}} + j\omega \dot{\mathbf{D}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}},$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}, \quad \text{div } \dot{\mathbf{B}} = 0.$$

## § 26.6. Соотношение между токами проводимости и смещения

Деление сред на диэлектрические и проводящие относительно зависит от соотношения между токами смещения и проводимост. Отношение этих токов определяется не только свойствами среды ( $\epsilon$ ,  $\gamma$  но и скоростью изменения электромагнитного поля во времени. Так для однородной изотропной среды ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ) и синусоидально изменяющегося поля  $E = E_m \sin \omega t$  отношение действующих значений плотностей токов смещения  $\delta_{\text{см}} = \omega D$  и проводимости  $\delta_{\text{пр}} = \gamma E$  определяется свойствами среды и частотой  $f$ :

$$\frac{\delta_{\text{см}}}{\delta_{\text{пр}}} = \frac{\omega \epsilon E}{\gamma E} = \frac{\omega \epsilon}{\gamma} = \frac{2\pi f \epsilon}{\gamma}.$$

Для материалов, обычно используемых в технике в качестве изоляционных, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \approx (1 \div 10) \epsilon_0$ , а удельная проводимость  $\gamma \approx (10^{-16} \div 10^{-11}) \text{ см/м}$ . Поэтому даже при наименьшем значении  $\epsilon$ , наибольшем значении  $\gamma$  и частоте  $f = 50 \text{ гц}$  отношение плотностей токов составляет:

$$\frac{\delta_{\text{см}}}{\delta_{\text{пр}}} = \frac{2\pi \cdot 50}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-11}} = 278.$$

Таким образом, можно пренебречь током проводимости по сравнению с током смещения и рассматривать диэлектрик как идеальный ( $\gamma = 0$ ).

В металлах удельная проводимость является величиной порядка  $10^7 \text{ см/м}$ , а диэлектрическая проницаемость для переменных полей не превышает  $\epsilon = 10 \epsilon_0$ . Даже при очень высокой частоте  $f = 10^{11} \text{ гц}$  отношение плотностей токов

$$\frac{\delta_{\text{см}}}{\delta_{\text{пр}}} = \frac{2\pi \cdot 10^{11} \cdot 10}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^7} = 5,6 \cdot 10^{-6}.$$

Поэтому практически при любых используемых в технике частотах в проводниках можно учитывать только ток проводимости.

## ГЛАВА ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### § 27.1. Явление излучения. Опыты Герца и Попова

В предыдущей главе было установлено, что переменное электромагнитное поле непрерывно движется со скоростью  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$  и что с этой же скоростью движется энергия, характеризующаяся вектором

Пойнтинга. При возрастании и убывании тока в контуре вектор Пойнтинга в любой точке пространства вокруг контура меняет свое направление; при возрастании тока энергия движется от контура, при убывании — к контуру. Однако из решения уравнений Максвелла следует, что среднее значение вектора Пойнтинга не равно нулю, что характеризует явление излучения энергии электромагнитного поля, и, как говорят, излучение электромагнитных волн.

Мощность, излучаемая контуром, может быть определена как ток среднего значения вектора Пойнтинга через поперечную сечение контура.

Излучение связано с конечной скоростью распространения электромагнитных волн. При бесконечно большой скорости распространения ( $v = \infty$ ) не было бы явления запаздывания и энергия, уходящая от контура при возрастании тока в нем, полностью возвращалась бы обратно при уменьшении тока. При конечной скорости распространения за время  $t_1$  возрастания тока в контуре от нуля до максимального значения электромагнитная волна достигнет точки, отстоящей от контура на расстояние  $x_1 = vt_1$ . В это время энергия источника превращается в энергию поля и движется от контура. За время  $t_2$  уменьшения тока от максимального значения до нуля энергия частично возвращается, а электромагнитная волна продолжает свое движение и достигнет точки  $x_2 = x_1 + vt_2 = v(t_1 + t_2)$ . Вся энергия, запасенная в поле, не успеет возвратиться к источнику, так как для этого потребовалось бы время  $t_1 + t_2 > t_2$ . Поэтому часть энергии будет продолжать двигаться от контура вместе с электромагнитной волной. Чем выше частота этого процесса, тем излучение больше.

Величина излучаемой энергии, при тех же частоте и токе в контуре, зависит от конфигурации контура. Контур с сосредоточенными параметрами, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности, будет излучать энергию слабо, так как электрическое поле сосредоточено в основном в конденсаторе, а магнитное — в катушке индуктивности. Электромагнитное поле создается наложением полей рассеяния конденсатора и катушки и потому очень мало. Наоборот, контур с распределенными параметрами будет излучать энергию сильнее, так как его магнитное и электрическое поля распределены в одной и той же части пространства, образуя электромагнитное поле. Поэтому все антенны представляют собой контуры с распределенными параметрами.

Явление излучения, вытекавшее из теории Максвелла, было им предсказано, но на опыте не осуществлено. Герц, экспериментально подтвердивший в 1887—1889 гг. теорию Максвелла, использовал колебательный контур (вibrator Герца) в виде двух шаров, игравших роль обкладок конденсатора (рис. 27.1). Двумя проводниками шары были соединены с разрядником, состоявшим из двух маленьких шариков. К большим шарам подводилось высокое напряжение, и они заряжались до напряжения, при котором в разряднике создавался искровой разряд, имевший колебательный характер, и в проводниках возникал ток. На рис. 27.1 изображено электрическое (пунктирные линии) и магнитное (сплошные линии) поля вибратора. После разряда

возобновлялся процесс зарядки и т. д. Колебательный разряд в вибраторе Герца сопровождался излучением электромагнитных волн. В качестве приемного контура Герц использовал подобный же вибратор. По длине искры в приемном разряднике он судил об интенсивности электромагнитного поля.

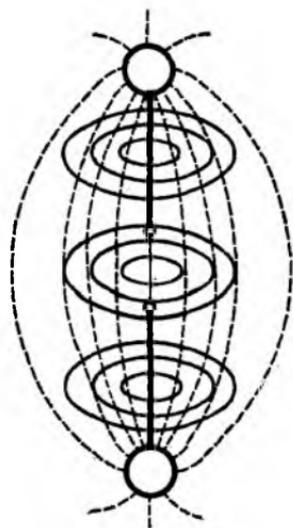


Рис. 27.1

Несовершенство метода приема электромагнитных волн послужило основанием для отрицательной оценки самим Герцем возможностей технического использования излучения. А. С. Попов в 1895 г. изобрел технически пригодный метод приема электромагнитных волн, тем самым положив начал радиосвязи.

В качестве индикатора проходящей электромагнитной волны Попов использовал когерер — трубку, наполненную металлическим порошком. Когерер включался в цепь источника э. д. с. В момент прохождения электромагнитной волны сопротивление когерера резко падало, и в цепи возрастал ток.

В своем устройстве А. С. Попов впервые ввел антенну в виде вертикального провода, одним концом соединенного с приемником. Это позволило увеличить дальность приема.

Помимо осуществления радиосвязи, Попов указал на возможность использования электромагнитных волн для радиолокации.

## § 27.2. Электромагнитное поле диполя Герца

Математическое описание явления излучения проводится на примере элементарного излучателя — электрического диполя.

Вибратор Герца можно рассматривать как диполь малой длины  $l$  (рис. 27.2) с переменными зарядами  $q$  и  $-q$ . Расположение диполя относительно выбранных декартовой и сферической систем координат ясно из рис. 27.2.

При расчете поля принимается: 1) мгновенное значение тока  $i = \frac{\partial q}{\partial t}$  одинаково по всей длине диполя; 2) поле определяется на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину диполя ( $r \gg l$ ); 3) диэлектрическая среда однородна и изотропна ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ).

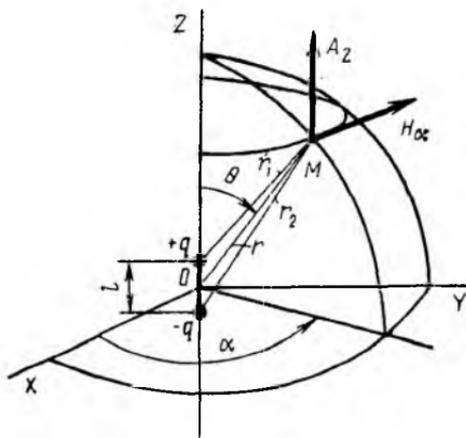


Рис. 27.2

Векторный потенциал линейного тока (см. § 21.5) с учетом запаздывания

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{i \left( t - \frac{r}{v} \right)}{r} d\mathbf{l}.$$

В дальнейшем обозначение аргумента  $\left( t - \frac{r}{v} \right)$  у функции  $i$  и, соответственно, у функции  $q$  для краткости опускается, т. е.

$$i \left( t - \frac{r}{v} \right) = i \text{ и } q \left( t - \frac{r}{v} \right) = q.$$

При условии постоянства тока вдоль длины диполя и при  $r \gg l$  можно принять, что векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\mu i l}{4\pi r}$$

и направлен параллельно оси диполя, т. е.

$$A_x = 0, A_y = 0 \text{ и } A_z = \frac{\mu i l}{4\pi r}.$$

В сферических координатах  $r, \theta, \alpha$

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu l \cos \theta}{4\pi r} i,$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu l \sin \theta}{4\pi r} i,$$

$$A_\alpha = 0.$$

Скалярный потенциал может быть найден из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon \mu} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{l}{4\pi \varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{i}{r} \right) = \\ &= -\frac{l}{4\pi \varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{i}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{l}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} - \frac{i}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned}$$

Производные  $i$  и  $q$  по  $r$  и  $t$  связаны между собой соотношением:

$$\frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{l \cos \theta}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{i}{r^2} + \frac{1}{rv} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \right).$$

После интегрирования по  $t$  получается выражение

$$\varphi = \frac{l \cos \theta}{4\pi \varepsilon} \left( \frac{q}{r^2} + \frac{i}{rv} \right).$$

В отличие от постоянного поля скалярный потенциал определяется не только зарядом, но и скоростью его изменения, т. е. током.

Напряженность магнитного поля определяется по формуле  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ . В сферических координатах (см. приложение 5)

$$H_r = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial (A_\alpha \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} \right] = 0,$$

так как  $A_\alpha = 0$  и  $\frac{\partial A_\theta}{\partial \alpha} = 0$ ;

$$H_\theta = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_\theta \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} \right] = 0,$$

так как  $\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = 0$ ;

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \\ &= -\frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\mu l \sin \theta}{4\pi} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} - \frac{\mu l}{4\pi r} \cdot \frac{\partial (\cos \theta)}{\partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

Замена производных по  $r$  производными по  $t$  дает окончательное выражение для единственной составляющей вектора напряженности магнитного поля:

$$H_\alpha = \frac{l \sin \theta}{4\pi r} \left( \frac{i}{r} + \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \right) = H.$$

Таким образом, напряженность магнитного поля определяется не только током, как это имело место для постоянного тока, но и скоростью изменения тока во времени. Направление вектора  $\mathbf{H}$  показано на рис. 27.2.

Напряженность электрического поля определяется через электродинамические потенциалы по формуле  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$ . Составляющие вектора  $\mathbf{E}$  в сферических координатах (см. приложение 5)

$$E_\alpha = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

так как  $A_\alpha = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ ;

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\mu l \cos \theta}{4\pi r} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{l \cos \theta}{4\pi \epsilon r} \left( \frac{1}{rv} \cdot \frac{\partial i}{\partial r} - \frac{i}{r^2 v} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{2q}{r^3} \right) = \frac{2l \cos \theta}{4\pi \epsilon r^2} \left( \frac{q}{r} + \frac{i}{v} \right), \end{aligned}$$

так как  $\frac{1}{v^2} = \epsilon \mu$ ;

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{\partial A_\theta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{\mu l \sin \theta}{4\pi r} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{l}{4\pi \epsilon r} \left( \frac{i}{rv} - \frac{q}{r^2} \right) \frac{\partial (\cos \theta)}{\partial \theta} = \\ &= \frac{l \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left( \frac{q}{r^3} + \frac{i}{r^2 v} + \frac{1}{rv^2} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

В отличие от электростатики напряженность электрического поля диполя зависит не только от величины заряда, но и от тока и его производной по времени.

Так как  $\mathbf{E}$  имеет составляющие по  $r$  и  $\theta$ , а  $\mathbf{H}$  — только по  $\alpha$ , то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  всегда взаимно перпендикулярны.

Наибольший интерес для практики представляет случай синусоидального изменения тока в диполе; тогда

$$i = I_m \sin \omega t, \quad q = \int i dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t,$$

длина волны  $\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}$ .

После подстановки указанных соотношений в выражения для составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получают:

$$H = H_\alpha = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi r^2} \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) + \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right],$$

$$E_r = \frac{I_m 2l \cos \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) - \frac{\lambda}{2\pi r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right],$$

$$E_\theta = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \left[ \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) + \left( \frac{2\pi r}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\pi r} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right].$$

Из приведенных выражений видно, что фаза этой электромагнитной волны зависит лишь от радиуса  $r$ . Такая волна называется сферической.

Анализ полученных точных выражений в общем виде представляет значительные трудности, поэтому далее исследуются приближенные более простые выражения.

### § 27.3. Ближняя и дальняя зоны

В ближней зоне при  $r \ll \lambda$  можно, пренебрегая малыми членами и запаздыванием, получить

$$H_\alpha = I_m \frac{l \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \omega t = \frac{l \sin \theta}{4\pi r^2} i,$$

$$E_r = I_m \frac{2l \cos \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \left( -\frac{\lambda}{2\pi r} \right) \cos \omega t = \frac{2l \cos \theta}{4\pi \epsilon r^3} q,$$

$$E_\theta = I_m \frac{l \sin \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \left( -\frac{\lambda}{2\pi r} \right) \cos \omega t = \frac{l \sin \theta}{4\pi \epsilon r^3} q.$$

Эти выражения для мгновенных значений полностью совпадают с выражениями для постоянных полей. Магнитное поле определяется током, электрическое — зарядом.

Так как ток изменяется по закону синуса, а заряд — по закону косинуса того же аргумента  $\omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$ , то  $E$  и  $H$  в любой точке ближней зоны сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

Величина вектора Пойнтинга при учете взаимной перпендикулярности в пространстве векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  равна  $\Pi = EH$  и изменяется во времени также синусоидально, но с двойной частотой. Так как в ближней зоне  $E \sim \frac{1}{r^3}$ , а  $H \sim \frac{1}{r^2}$ , то величина вектора Пойнтинга  $\Pi \sim \frac{1}{r^5}$ ,

т. е. чрезвычайно быстро убывает с увеличением расстояния. Среднее значение величины вектора Пойнтинга за период равно нулю, поэтому говорят, что в ближней зоне поле имеет реактивный характер, и излучение отсутствует.

Однако такой результат справедлив лишь при пренебрежении составляющими, определяющими запаздывание. В действительности и здесь имеет место излучение, но доля энергии, не возвращающейся к диполю, ничтожна по сравнению с энергией, успевающей возвратиться.

Размеры ближней зоны определяются частотой переменного тока в излучающем контуре, так как  $r \ll \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}$ .

Переменные поля, в которых запаздыванием и излучением можно пренебречь, называются квазистационарными полями. Эти поля можно рассчитывать методами, изложенными для постоянных полей.

Для дальней зоны  $r \gg \lambda$ , и пренебрежение малыми членами в формулах для  $H$  и  $E$  приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &= I_m \frac{l \sin \theta}{4\pi r^2} \cdot \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \\ E_r &= I_m \frac{2l \cos \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \\ E_{\theta} &= I_m \frac{l \sin \theta}{4\pi \epsilon v r^2} \cdot \frac{2\pi r}{\lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \end{aligned}$$

Величина радиальной составляющей  $E_r$  очень мала по сравнению с  $E_{\theta}$  (за исключением точек, близких к  $\theta = 0$ , где  $E_{\theta}$  обращается в нуль). Поэтому в дальнейшем учитывается только  $E_{\theta}$ .

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} H_{\alpha} &= H = \frac{I_m l \sin \theta}{2r\lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \\ E_{\theta} &= E = \frac{I_m l \sin \theta}{\epsilon v 2r \lambda} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \end{aligned}$$

т. е.  $E$  и  $H$  определяются производной от тока диполя и совпадают по фазе.

Вектор Пойнтинга имеет единственную составляющую

$$P_r = \Pi = E_{\theta} H_{\alpha} = \frac{I_m^2 l^2 \sin^2 \theta}{8r^2 \lambda^2 \epsilon v} \left[ 1 + \cos 2\omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right].$$

В отличие от ближней зоны  $E \sim \frac{1}{r}$  и  $H \sim \frac{1}{r}$ , а  $\Pi \sim \frac{1}{r^2}$ , т. е. убывает с увеличением расстояния значительно медленнее. Так как полученная величина вектора Пойнтинга всегда положительна, то энергия все время движется по радиусу от источника. Поэтому говорят, что в дальней зоне поле имеет в основном активный характер.

Отношение

$$\frac{E}{H} = \frac{1}{\epsilon v} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \rho$$

имеет размерность сопротивления и называется волновым сопротивлением среды. Для вакуума

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ ом.}$$

Из приведенного соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей следует, что для сферической волны справедливо равенство

$$\frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{\mu H^2}{2},$$

т. е. энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Из выражений для  $E$  и  $H$  видно, что напряженности поля пропорциональны синусу угла  $\theta$ :

$$E = E_0 \sin \theta, \quad H = H_0 \sin \theta,$$

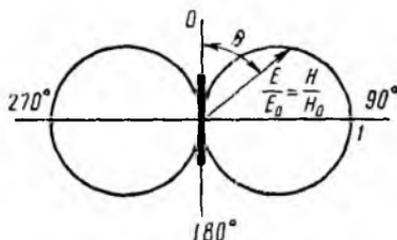


Рис. 27.3

где индекс 0 соответствует  $\theta = \pi/2$ . В направлении оси диполя ( $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ ) излучения нет, в направлении, перпендикулярном оси диполя ( $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 3\pi/2$ ), — излучение максимально.

Зависимость  $E$  или  $H$  от направления обычно изображают полярными диаграммами направленности, на которых длина радиуса-вектора, соответствующего углу  $\theta$ , равна отношению  $\frac{E}{E_0} = \frac{H}{H_0}$ . На рис. 27.3 представлена диаграмма направленности для диполя Герца в виде двух касающихся друг друга окружностей.

## § 27.4. Мощность и сопротивление излучения

Вычисляя мощность излучения диполя как поток среднего значения вектора Пойнтинга через поверхность сферы радиуса  $r$ , в центре которой расположен диполь, этот расчет удобно провести для дальней зоны. В соответствии с этим

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ср}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \Pi \, dT = \frac{I_m^2 \sin^2 \theta}{8Tr^2 \lambda^2 \epsilon_0} \int_0^T \left[ 1 + \cos 2\omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right] dt = \\ &= \frac{I_m^2 \sin^2 \theta}{8r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = I^2 \frac{\rho l^2}{4r^2 \lambda^2} \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

где  $I$  — действующее значение тока.

Учитывая, что вектор Пойнтинга направлен по радиусу  $r$ , а в сферических координатах элемент поверхности  $dS = r d\theta r \sin \theta d\alpha$ , средняя мощность излучения

$$P = \oint \Pi_{\text{ср}} \, dS = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi I^2 \rho \frac{l^2}{4\lambda^2} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \rho \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 I^2,$$

так как

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \int_1^{-1} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{4}{3}.$$

Средняя мощность излучения

$$P = I^2 R_{\text{изл}},$$

где  $R_{\text{изл}}$  — сопротивление излучения, характеризующее способность диполя к излучению:

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\pi}{3} \rho \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Реальная антенна, в которой ток по длине неодинаков, может быть разделена на отдельные участки, рассматриваемые как элементарные диполи. Тогда поле всей антенны находят путем наложения полей отдельных элементарных диполей.

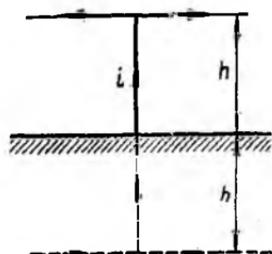


Рис. 27.4

Однако для простой длинноволновой антенны в виде вертикального провода, заканчивающегося системой горизонтальных проводов (рис. 27, 4), могут быть непосредственно использованы полученные выражения.

При условии высокой проводимости земля может быть заменена зеркальным изображением антенны. Емкостью вертикального провода пренебрегают. Ввиду встречного направления токов в горизонтальных проводах по отношению к их изображениям эти провода в земле практически энергии не излучают. Их назначение заключается лишь в увеличении емкости всей антенны. При высоте антенны  $h$ , значительно меньшей, чем длина волны  $\lambda$ , приближенно можно принять ток вдоль вертикального провода одинаковым. Тогда такая антенна вместе со своим зеркальным изображением соответствует диполю с длиной  $l = 2h$ , а ее сопротивление излучения

$$(R_{\text{изл}})_h = \frac{R_{\text{изл}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} \rho \left(\frac{2h}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi}{3} \rho \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2.$$

Так как для воздуха  $\rho = 120\pi$ , то

$$(R_{\text{изл}})_h = 160\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = 1580 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2.$$

Сопротивление излучения пропорционально квадрату отношения длины провода к длине волны, поэтому при низкой частоте  $f = 50$  гц длина волны  $\lambda = \frac{v}{f} = 6000$  км настолько велика по сравнению с длиной провода, что излучение практически отсутствует. Поэтому нижний предел частот, используемых в радиотехнике, лежит около 150 кгц.

### § 28.1. Плоская волна в диэлектрической среде

На большом расстоянии от источника, в малой области пространства, сферическую волну можно приближенно считать плоской волной, для которой в каждой точке плоскости, перпендикулярной направлению распространения, напряженности поля имеют одинаковые значения.

#### 1. Решение уравнений Максвелла для плоской волны

Пусть в однородной изотропной непроводящей среде ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = 0$ ) нет свободных зарядов, и поле создается синусоидальным током в антенне. Согласно изложенному, напряженности поля изменяются во времени также синусоидально.

Здесь удобнее выбрать декартову систему координат и расположить ее так, чтобы ось  $Z$  совпадала с направлением распространения волны. Тогда векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  являются функциями только от  $z$  и  $t$  и не зависят от координат  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

Уравнения Максвелла в символической форме (для действующих значений) при отсутствии объемных зарядов и проводимости среды имеют вид (см. § 26.5):

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \quad \text{и} \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}.$$

В принятой системе координат они переходят в систему уравнений:

$$-\frac{dH_y}{dz} = j\omega\epsilon\dot{E}_x, \quad \frac{dE_y}{dz} = j\omega\mu\dot{H}_x,$$

$$\frac{dH_x}{dz} = j\omega\epsilon\dot{E}_y, \quad \frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_y,$$

$$0 = j\omega\epsilon\dot{E}_z, \quad 0 = j\omega\mu\dot{H}_z.$$

Из последних двух уравнений вытекает, что

$$\dot{E}_z = 0, \quad \dot{H}_z = 0.$$

Следовательно, векторы напряженности поля лежат в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $XOY$ . Если поворотом координатной системы вокруг оси  $Z$  совместить ось  $X$  с вектором  $\dot{\mathbf{E}}$ , то  $\dot{E}_y = 0$ , а из уравнений приведенной системы вытекает, что тогда  $\dot{H}_x = 0$  и вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  направлен по оси  $Y$ . Таким образом, в плоской волне, так же как и в сферической, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг к другу.

Теперь из всей системы остались два уравнения:

$$\frac{d\dot{H}_y}{dz} = -j\omega\varepsilon\dot{E}_x \quad \text{и} \quad \frac{d\dot{E}_x}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_y.$$

Дифференцирование второго из них по  $z$  и исключение  $\dot{H}_y$  из обоих уравнений приводит к уравнению

$$\frac{d^2\dot{E}_x}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}\dot{E}_x,$$

где по-прежнему  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  — скорость распространения волны.

Решением этого уравнения является сумма

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz},$$

где  $k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ ,  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями.

Из уравнения

$$\frac{d\dot{E}_x}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_y$$

определяется

$$\begin{aligned} \dot{H}_y &= -\frac{1}{j\omega\mu} \cdot \frac{d\dot{E}_x}{dz} = \frac{1}{v\mu} \left( A_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - A_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( A_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - A_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} \right). \end{aligned}$$

Соответственно, мгновенные значения напряженностей поля имеют вид:

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{2} \left[ A_1 \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) + A_2 \sin \omega \left( t + \frac{z}{v} \right) \right], \\ H_y &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \left[ A_1 \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) - A_2 \sin \omega \left( t + \frac{z}{v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первые члены в этих выражениях представляют собой падающую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Z$  со скоростью  $v$ ; вторые — отраженную волну, движущуюся с той же скоростью в обратном направлении и возникающую при отражении от поверхности раздела двух сред.

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_x &= E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}, \\ H_y &= H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} = \frac{1}{\rho} (E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}), \end{aligned}$$

откуда видно, что напряженности поля в падающей и отраженной волнах связаны соотношениями:

$$E_{\text{пад}} = \rho H_{\text{пад}}, \quad E_{\text{отр}} = -\rho H_{\text{отр}}.$$

Из этих равенств следует, что как в падающей, так и в отраженной волнах плотности энергии электрического и магнитного полей равны друг другу:

$$\frac{\epsilon E_{\text{пад}}^2}{2} = \frac{\mu H_{\text{пад}}^2}{2}, \quad \frac{\epsilon E_{\text{отр}}^2}{2} = \frac{\mu H_{\text{отр}}^2}{2}.$$

Для синусоидального поля, состоящего из падающей и отраженной волн, равенство энергий электрического и магнитного полей не выполняется:

$$\frac{\epsilon E_x^2}{2} \neq \frac{\mu H_y^2}{2},$$

так как принцип наложения для энергии неприменим. В частности,

$$E_x^2 = (E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}})^2 \neq E_{\text{пад}}^2 + E_{\text{отр}}^2.$$

Как уже указывалось, постоянные  $A_1$  и  $A_2$  определяются заданием  $E$  или  $H$  на граничных поверхностях: для падающей волны при  $z = 0$ , для отраженной — на границе раздела двух сред, от которой происходит отражение падающей волны.

Если среда однородна и отраженной волны нет, то при  $z = 0$

$$\begin{aligned} (E_x)_{z=0} &= A_1 \sqrt{2} \sin \omega t = \\ &= E_0 \sqrt{2} \sin \omega t, \end{aligned}$$

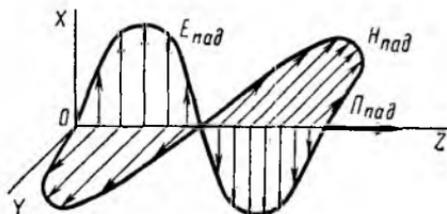


Рис. 28.1

где  $E_0$  — действующее значение напряженности электрического поля в начале координат. Тогда при  $z > 0$

$$E_x = E_0 \sqrt{2} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

$$H_y = \frac{E_0}{\rho} \sqrt{2} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

т. е. так же, как в дальней зоне диполя, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  совпадают по фазе.

Вектор Пойнтинга имеет лишь составляющую по оси  $Z$ :

$$\Pi_z = \Pi = E_x H_y = \frac{2E_0^2}{\rho} \sin^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = \frac{E_0^2}{\rho} \left[ 1 + \cos 2\omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] > 0,$$

со средним значением

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{E_0^2}{\rho}.$$

Для падающей волны

$$W_0 = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} = \epsilon E^2 = \mu H^2,$$

и величина вектора Пойнтинга может быть выражена через плотность энергии:

$$\Pi = EH = \rho H^2 = \frac{\rho}{\mu} W_0 = v W_0,$$

а в векторной форме

$$\Pi = \mathbf{v}W_0.$$

Это выражение еще раз показывает, что энергия электромагнитной волны движется в направлении оси  $Z$  со скоростью  $v$ .

Распределение  $E$ ,  $H$  и  $\Pi$  для падающей волны в некоторый момент времени представлено на рис. 28.1.

## 2. Преломление и отражение плоской волны у поверхности раздела двух сред

Пусть плоская электромагнитная волна движется из среды с проницаемостями  $\epsilon_1$ ,  $\mu_1$  в направлении среды с проницаемостями  $\epsilon_2$ ,  $\mu_2$  и падает нормально на плоскую поверхность их раздела.

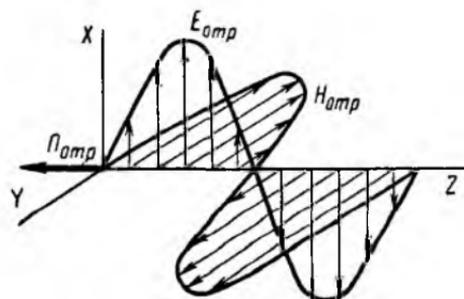


Рис. 28.2

Падающая волна ( $E_{\text{пад}}$ ,  $H_{\text{пад}}$ ) частью отражается от поверхности раздела ( $E_{\text{отр}}$ ,  $H_{\text{отр}}$ ), частью проникает во вторую среду в виде преломленной волны ( $E_{\text{пр}}$ ,  $H_{\text{пр}}$ ). Соотношения между касательными составляющими напряженностей поля этих трех волн можно установить из граничных условий:

$$E_{t1} = E_{t2} \text{ и } H_{t1} = H_{t2}.$$

Так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости раздела обеих сред, то

$$E_{t1} = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}, \quad E_{t2} = E_{\text{пр}},$$

$$H_{t1} = H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}}, \quad H_{t2} = H_{\text{пр}}.$$

Таким образом,

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}} \text{ и } H_{\text{пад}} + H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}}.$$

Напряженности поля в каждой из волн связаны друг с другом через волновое сопротивление среды:

$$E_{\text{пад}} = \rho_1 H_{\text{пад}}, \quad E_{\text{отр}} = -\rho_1 H_{\text{отр}}, \quad E_{\text{пр}} = \rho_2 H_{\text{пр}},$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \text{ и } \rho_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}.$$

Совместное решение этих пяти уравнений дает выражения, связывающие напряженности отраженной, преломленной и падающей волн:

$$E_{\text{отр}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} E_{\text{пад}}, \quad E_{\text{пр}} = \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} E_{\text{пад}},$$

$$H_{\text{отр}} = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} H_{\text{пад}}, \quad H_{\text{пр}} = \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} H_{\text{пад}}.$$

При  $\rho_2 > \rho_1$  напряженности  $E_{отр}$  и  $E_{пад}$  совпадают по фазе, а  $H_{отр}$  и  $H_{пад}$  сдвинуты по фазе на  $\pi$ ; при  $\rho_2 < \rho_1$ , наоборот, фаза  $H_{отр}$  сохраняется, а фаза  $E_{отр}$  изменяется на  $\pi$ . Вектор Пойнтинга для отраженной волны  $\Pi_{отр}$  в обоих случаях имеет направление, обратное  $\Pi_{пад}$ .

На рис. 28.2 представлены векторы  $E_{отр}$ ,  $H_{отр}$  и  $\Pi_{отр}$  отраженной волны для случая  $\rho_2 > \rho_1$ . В отличие от падающей волны (см. рис. 28.1) здесь изменился знак  $H_{отр}$  и  $\Pi_{отр}$ .

## § 28.2. Плоская волна в проводящей среде

В соответствии с относительностью деления на диэлектрики и проводники (см. § 26.6) здесь под проводящей средой понимается среда, в которой можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости.

### 1. Решение уравнений Максвелла для плоской волны

Плоская волна, распространяющаяся в диэлектрической среде, падает нормально на плоскую поверхность проводящей среды (рис. 28.3). Выбранная система декартовых координат показана на этом рисунке.

На границе диэлектрик — проводник имеет место преломление и отражение волны. Далее рассматривается только преломленная волна, т. е. волна, распространяющаяся в проводящей среде.

Пусть поле изменяется во времени синусоидально и заданы действующее значение  $H_0$  и фаза  $\psi_0$  напряженности магнитного поля при  $z = 0$ , т. е. у поверхности проводящей среды.

Уравнения Максвелла в символической форме для действующих значений

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \gamma \dot{\mathbf{E}} \quad \text{и} \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -\gamma \omega \mu \dot{\mathbf{H}}$$

или в декартовой системе координат, учитывая, что в плоской волне  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не зависят от  $x$  и  $y$ :

$$-\frac{d\dot{H}_y}{dz} = \gamma \dot{E}_x, \quad \frac{d\dot{E}_y}{dz} = j\omega\mu \dot{H}_x,$$

$$\frac{d\dot{H}_x}{dz} = \gamma \dot{E}_y, \quad \frac{d\dot{E}_x}{dz} = -j\omega\mu \dot{H}_y,$$

$$0 = \gamma \dot{E}_z, \quad 0 = j\omega\mu \dot{H}_z,$$

откуда по-прежнему  $\dot{E}_z = 0$  и  $\dot{H}_z = 0$ .

Совмещение оси  $X$  с вектором  $\dot{\mathbf{E}}$  приводит к  $\dot{E}_y = 0$  и  $\dot{H}_x = 0$ .

Следовательно, и в проводящей среде  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг другу.

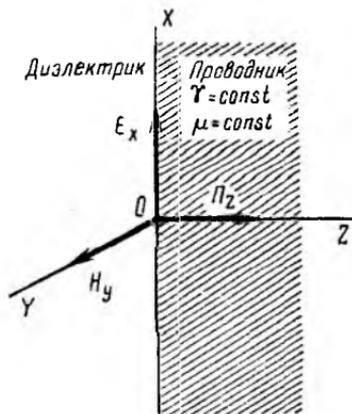


Рис. 28.3

Таким образом, остаются два уравнения:

$$\frac{dH_y}{dz} = -\gamma \dot{E}_x \quad \text{и} \quad \frac{d\dot{E}_x}{dz} = -j\omega\mu H_y,$$

из которых, исключив  $\dot{E}_x$ , получают уравнение

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} = j\omega\mu\gamma H_y = \rho^2 \dot{H}_y,$$

где  $\rho = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ .

Так как  $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ , то, вводя обозначение  $k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$ , можно выразить  $\rho$  через  $k$ :

$$\rho = (1+j)k.$$

Решением дифференциального уравнения для  $\dot{H}_y$ , как известно, является

$$H_y = A_1 e^{-\rho z} + A_2 e^{\rho z} = A_1 e^{-kz} e^{-jkz} + A_2 e^{kz} e^{jkz},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные, определяемые из граничных условий. Так как второй член растет беспредельно с  $z$ , что физически невозможно, то  $A_2 = 0$  и, следовательно,

$$\dot{H}_y = A_1 e^{-kz} e^{-jkz}.$$

Согласно заданному выше, при  $z = 0$

$$(\dot{H}_y)_{z=0} = A_1 = H_0 e^{j\psi_0}.$$

Таким образом,

$$H_y = H_0 e^{-kz} e^{j(\psi_0 - kz)}.$$

Из уравнения  $-\frac{d\dot{H}_y}{dz} = \gamma \dot{E}_x$  определяется  $\dot{E}_x$ :

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dH_y}{dz} = \frac{1}{\gamma} (1+j) k H_0 e^{j\psi_0} e^{-kz} e^{-jkz}.$$

От выражений для комплексных действующих значений  $\dot{H}_y$  и  $\dot{E}_x$  можно перейти к мгновенным значениям:

$$H_y = \sqrt{2} H_0 e^{-kz} \sin(\omega t + \psi_0 - kz),$$

$$E_x = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} H_0 e^{-kz} \sin\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz\right),$$

так как  $\frac{1+j}{\sqrt{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$ .

Из этих выражений видно, что в отличие от диэлектрической среды в проводящей среде напряженности поля убывают по мере проникновения в глубь среды по экспоненциальному закону. Величина  $k$  называется коэффициентом затухания. Начальные фазы напряженностей изменяются пропорционально  $z$ , а напряженность электрического поля в любой точке проводящей среды опережает по фазе напряженность магнитного поля на угол  $\pi/4$ .

На расстоянии в одну длину волны фаза волны изменяется на  $2\pi$ . Следовательно,

$$\lambda k = \lambda \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = 2\pi,$$

т.к.

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{f \mu \gamma}},$$

скорость распространения

$$v = \lambda f = 2 \sqrt{\frac{\pi f}{\mu \gamma}}.$$

Таким образом, в отличие от диэлектрической среды, где скорость распространения определяется только свойствами среды, в проводящей среде эта скорость зависит не только от удельной проводимости и магнитной проницаемости, но и от частоты.

Вектор плотности тока изменяется так же, как вектор напряженности электрического поля, так как  $\delta = \gamma E$ .

Волновое сопротивление проводящей среды

$$Z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{(1+j)k}{\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

оказывается комплексным числом.

Вектор Пойнтинга имеет одну составляющую (рис. 28.3)

$$P_z = E_x H_y = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_0^2 e^{-2kz} \sin(\omega t + \psi_0 - kz) \sin\left(\omega t + \psi_0 + \frac{\pi}{4} - kz\right),$$

а ее среднее значение за период

$$P_{cp} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} H_0^2 e^{-2kz} \cos \frac{\pi}{4}.$$

В среде с большой удельной проводимостью (например, в металлах) длина волны оказывается очень малой. Малым также оказывается и волновое сопротивление. Малая величина волнового сопротивления означает, что энергия электромагнитной волны в основном сосредоточена в магнитном поле, так как

$$\frac{W_{0H}}{W_{0E}} = \frac{\mu H^2}{\varepsilon E^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\zeta^2},$$

где  $\zeta$  — модуль волнового сопротивления.

Даже при очень большой частоте  $f = 10^{10}$  гц для меди ( $\gamma = 5,7 \times 10^7$  сим/м;  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  гн/м;  $\varepsilon \approx 10\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^8}$  ф/м)

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\pi f \mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi 10^{-7}}{5,7 \cdot 10^7}} = 3,74 \cdot 10^{-2} \text{ ом}$$

и

$$\frac{W_{0H}}{W_{0E}} = \frac{\mu}{\varepsilon \zeta^2} = \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi 9 \cdot 10^8 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 10^6,$$

т. е. энергия электрического поля исчезающе мала по сравнению с энергией магнитного поля. Поэтому при рассмотрении электромагнитного поля в проводящей среде основное внимание должно уделяться магнитному полю.

На расстоянии одной длины волны напряженность поля уменьшается в  $e^{2\pi} \approx 540$  раз. Энергия же уменьшается в 540 раз уже на расстоянии полуволны. Поэтому на практике считают, что волна проникает в толщу проводящей среды меньше, чем на  $\lambda/2$ .

Часто вводят условную величину — эквивалентную глубину проникновения  $\sigma$ , понимая под ней расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз. Тогда  $e^{-kz} = e^{-1}$ , и эквивалентная глубина проникновения

$$\sigma = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}$$

тем меньше, чем больше частота, магнитная проницаемость и удельная проводимость среды.

Из изложенного ясно, что все соотношения, выведенные для бесконечно протяженной проводящей среды, практически пригодны для проводника конечных размеров, если его протяженность в направлении распространения волны не меньше половины длины волны. Эти же соотношения могут быть использованы и для проводников с криволинейной поверхностью, если длина волны в проводнике во много раз меньше радиуса кривизны.

## 2. Преломление и отражение плоской волны у поверхности раздела диэлектрической и проводящей сред

Далее рассматриваются соотношения между падающей, преломленной и отраженной волнами для того же случая, что и в предыдущем пункте (см. рис. 28.3).

Для комплексных действующих значений падающей и отраженных волн в диэлектрической среде соотношения аналогичны установленным для мгновенных значений (см. п. 2 § 28.1):

$$\dot{E}_{\text{пад}} = \rho \dot{H}_{\text{пад}}, \quad \dot{E}_{\text{отр}} = -\rho \dot{H}_{\text{отр}},$$

где  $\rho$  — волновое сопротивление диэлектрической среды.

Для преломленной волны — волны в проводящей среде — было найдено

$$\dot{E}_{\text{пр}} = Z \dot{H}_{\text{пр}}.$$

Граничные условия по-прежнему выражают равенствами:

$$\dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}_{\text{отр}} = \dot{E}_{\text{пр}}, \quad \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}_{\text{отр}} = \dot{H}_{\text{пр}}.$$

Совместное решение последних пяти уравнений дает:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{отр}} &= \frac{Z-\rho}{Z+\rho} \dot{E}_{\text{пад}}, & \dot{E}_{\text{пр}} &= \frac{2Z}{Z+\rho} \dot{E}_{\text{пад}}, \\ \dot{H}_{\text{отр}} &= -\frac{Z-\rho}{Z+\rho} \dot{H}_{\text{пад}}, & \dot{H}_{\text{пр}} &= \frac{2\rho}{Z+\rho} \dot{H}_{\text{пад}}. \end{aligned}$$

Так как волновое сопротивление является функцией частоты, то в отличие от условий отражения и преломления в диэлектрических средах соотношения между падающей, отраженной и преломленной волнами у границы диэлектрической и проводящей сред также зависят от частоты.

В сверхпроводящую среду с бесконечной проводимостью ( $\gamma = \infty$ , следовательно,  $Z = 0$ ) падающая волна не проникает, полностью отражаясь от ее поверхности:

$$\dot{E}_{\text{отр}} = -\dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{E}_{\text{пр}} = 0.$$

Хотя на поверхности сверхпроводящей среды  $\dot{H}_{\text{пр}} = 2\dot{H}_{\text{пад}}$ , внутри напряженность магнитного поля на любом расстоянии  $z$  от поверхности раздела равна нулю, так как коэффициент затухания  $k =$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \infty \text{ и}$$

$$(\dot{H}_{\text{пр}})_z = \dot{H}_{\text{пр}} e^{-kz} e^{-ikz} = 2\dot{H}_{\text{пад}} e^{-kz} e^{-ikz} = 0.$$

### § 28.3. Плоская волна в полупроводящей среде

Для среды, в которой одновременно учитываются токи проводимости и смещения ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ), уравнения Максвелла в символической форме приобретают вид:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} + \gamma\dot{\mathbf{E}} \quad \text{и} \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}.$$

Если в правой части первого уравнения  $j\omega$  вынести за скобку, то

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega \left( \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} = j\omega \left( \epsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}};$$

введением комплексной диэлектрической проницаемости  $\dot{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\gamma}{\omega}$  это уравнение приводят к виду, аналогичному уравнению для диэлектрической среды (см. § 28.1):  $\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\dot{\epsilon}\dot{\mathbf{E}}$ . Поэтому результаты расчета, полученные для диэлектрической среды, могут быть применены и к полупроводящей среде, с заменой диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  комплексной проницаемостью  $\dot{\epsilon}$ , учитывающей потери в среде от токов проводимости.

Соответственно случаю диэлектрической среды

$$\dot{E}_x = E_0 e^{-jkz} = \frac{\dot{H}_y}{Z},$$

где теперь  $k = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}\mu}$  и  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\dot{\epsilon}}} = \zeta e^{i\psi}$ .

Представляя  $k$  в виде  $k = \beta - j\alpha$ , можно написать мгновенные значения напряженностей полей:

$$E_x = \sqrt{2} E_0 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z),$$

$$H_y = \sqrt{2} \frac{E_0}{Z} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z - \psi).$$

Из этих выражений видно, что в полупроводящей среде имеет место затухание амплитуды и изменение фазы волны, как и в чисто проводящей среде.

Возведя в квадрат выражение

$$\beta - j\alpha = \omega \sqrt{\left(\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}\right) \mu}$$

и приравняв вещественные части, можно видеть, что

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Из равенства квадратов модулей обеих частей исходного уравнения следует, что

$$\beta^2 + \alpha^2 = \omega^2 \mu \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}.$$

Отсюда

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right)}.$$

Соответственно,

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\mu \omega}{k} = \frac{\mu \omega}{\beta - j\alpha},$$

и после подстановки значений  $\beta$  и  $\alpha$  находят модуль

$$|\zeta| = \sqrt[4]{\frac{\mu^2}{\epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}}$$

и угол сдвига по фазе между  $E$  и  $H$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1}},$$

причем  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  в зависимости от значения  $\epsilon$  и  $\gamma$ .

Все эти формулы при  $\gamma = 0$  переходят в выведенные в § 28.1 зависимости для диэлектрической среды, а при  $\epsilon = 0$ , что соответствует пренебрежению токами смещения, — в уравнения, выведенные в § 28.2 для проводящей среды.

Введение комплексной диэлектрической проницаемости целесообразно также при рассмотрении электромагнитных волн в диэлектрической среде без проводимости ( $\gamma = 0$ ), но обладающей потерями энергии при изменении поляризации. В этом случае

$$\dot{\epsilon} = \frac{D}{E} = \epsilon e^{-\delta},$$

где  $\delta$  называется углом диэлектрических потерь.

Аналогично, потери на магнитный гистерезис, вихревые токи и т. п. могут быть учтены комплексной магнитной проницаемостью

$$\dot{\mu} = \frac{B}{H}.$$

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

§ 29.1. Явление поверхностного эффекта

Переменный ток в отличие от постоянного распределяется неравномерно по сечению провода — он имеет наименьшую плотность на оси провода и наибольшую у его поверхности. Аналогично распределяется еременный магнитный поток в проводящем теле.

С точки зрения теории электромагнитного поля оба эти случая, как будет показано, являются результатом по в е р х н о с т н о г о э ф ф е к т а (с к и н - э ф ф е к т а), заключающегося в неравномерном распределении электромагнитного поля в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны.

В гл. 28 было псказано, что переменное электромагнитное поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению провода, а следовательно, к неравномерному распределению тока и магнитного потока. В установившемся режиме эти величины имеют максимальное значение у поверхности провода.

Поверхностный эффект в большинстве случаев является вредным явлением, так как он увеличивает сопротивление провода переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. В некоторых случаях явление поверхностного эффекта используется, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки.

§ 29.2. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе

Для уменьшения потерь на вихревые токи и для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопроводы собираются из отдельных стальных листов, изолированных друг от друга.

Пусть в плоском листе толщиной  $a$ , высотой  $h$  и длиной  $l$  направление магнитного потока совпадает с осью  $Y$  (рис. 29.1), и магнитный поток изменяется во времени синусоидально. Как и в расчете при равномерном распределении потока по сечению (см. § 11.5), принимается, что  $h \gg a$ ,  $l \gg a$  и  $\gamma = \text{const}$ . Тогда искажением поля у краев пластины можно пренебречь и считать, что в пластину с двух сторон проникает плоская электромагнитная волна, для которой справедливы урав-

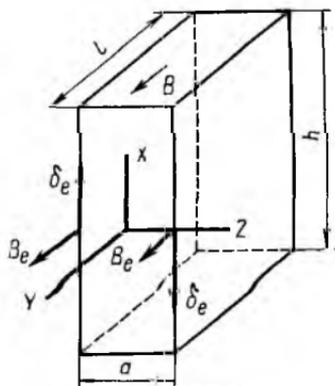


Рис. 29.1

нения § 28.2. Следовательно, опуская индексы  $x$  и  $y$ , можно написать

$$\dot{H} = A_1 e^{-\rho z} + A_2 e^{\rho z}, \quad \dot{E} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\dot{H}}{dz},$$

где по-прежнему  $\rho = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = (1+j)k$ .

Соответственно комплексное действующее значение индукции

$$\dot{B} = A_1 \mu e^{-\rho z} + A_2 \mu e^{\rho z}.$$

Так как электромагнитные волны входят в лист с двух сторон то значения индукции  $\dot{B}$  при  $z = \pm \frac{a}{2}$  равны между собой; это приводит к равенству  $A_2 = A_1$ .

Таким образом,

$$\dot{B} = A_1 \mu (e^{-\rho z} + e^{\rho z}) = 2A_1 \mu \operatorname{ch} \rho z = \dot{B}_0 \operatorname{ch} \rho z,$$

$$\delta = \gamma \dot{E} = -\frac{d\dot{H}}{dz} = -\frac{\dot{B}_0 \rho}{\mu} \operatorname{sh} \rho z,$$

где  $\dot{B}_0 = 2A_1 \mu$  — комплексное действующее значение индукции в середине сечения листа ( $z = 0$ ).

Среднее значение комплексного действующего значения вектора магнитной индукции

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \dot{B} dz = \frac{\dot{B}_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \operatorname{ch} \rho z dz = 2 \frac{\dot{B}_0}{\rho a} \operatorname{sh} \frac{\rho a}{2}.$$

Переход от комплексных к действительным значениям требует вычисления модулей комплексных  $\operatorname{sh} \rho z$ ,  $\operatorname{ch} \rho z$  и  $\rho$ :

$$|\operatorname{sh} \rho z|^2 = \operatorname{sh}(kz + jkz) \operatorname{sh}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2},$$

$$|\operatorname{ch} \rho z|^2 = \operatorname{ch}(kz + jkz) \operatorname{ch}(kz - jkz) = \frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2},$$

$$|\rho| = \sqrt{2} k.$$

Таким образом,

$$B = B_0 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz + \cos 2kz}{2}}, \quad \delta = \frac{k B_0}{\mu} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{2}},$$

$$B_{\text{ср}} = \frac{B_0}{ka} \sqrt{\operatorname{ch} ka - \cos ka}.$$

Наибольшее значение индукция имеет у поверхности листа:

$$B_e = B_0 \sqrt{\frac{\operatorname{ch} ka + \cos ka}{2}}.$$

Зависимости действующих значений вектора магнитной индукции и вектора плотности тока от координаты  $Z$  представлены на рис. 29.2.

При значении параметра  $ka = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} a = 2$ , что имеет место при  $f = 400$  гц,  $\mu = 1000\mu_0$ ,  $\gamma = 10^7$  сим/м и  $a = 0,5$  мм, отношение

$\varepsilon = 1,3$ , но уже при  $ka = 4$ , т. е.  $a = 1$  мм,  $\frac{B_e}{B_0} = 3,7$ . Поэтому не-  
 9  
 равномерность распределения магнитного потока по сечению может  
 считаться допустимой при значениях  $ka < 2$ .

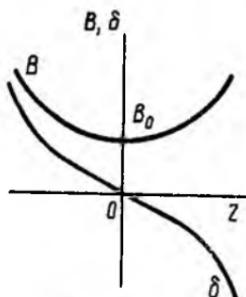


Рис. 29.2

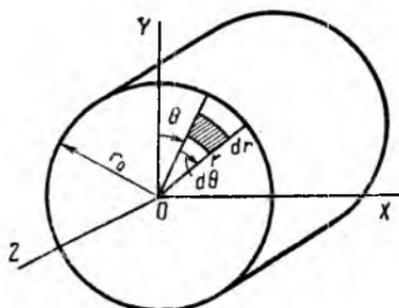


Рис. 29.3

Мощность потерь на вихревые токи в единице объема листа

$$P_0 = \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{\omega B_0^2}{2\mu} (\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz) = \frac{\omega k^2 a^2 B_{\text{ср}}^2}{2\mu} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2kz - \cos 2kz}{\operatorname{ch} ka - \cos ka}.$$

Потери во всем листе

$$P = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} P_0 l h dz = B_{\text{ср}}^2 \frac{\omega l h k a^2}{2\mu} \cdot \frac{\operatorname{sh} ka - \sin ka}{\operatorname{ch} ka - \cos ka},$$

а среднее значение потерь в единице объема

$$P_{\text{оср}} = \frac{P}{lha} = B_{\text{ср}}^2 \frac{\omega ka}{2\mu} \cdot \frac{\operatorname{sh} ka - \sin ka}{\operatorname{ch} ka - \cos ka}.$$

При  $ka \ll 1$  эти потери определяются формулой

$$P_{\text{оср}} = \frac{\pi^2}{3} f^2 \gamma a^2 B_{\text{ср}}^2,$$

совпадающей с выведенной в предположении равномерного распределе-  
 ния потока (см. § 11.5).

Так как  $ka = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} a$ , то при увеличении частоты для сохранения той же величины потерь приходится уменьшать толщину листа или применять прессованные сердечники из ферритов.

## § 29.3. Неравномерное распределение переменного тока в проводе кругового сечения

### 1. Расчет плотности тока

Пусть по прямому цилиндрическому проводу с радиусом  $r_0$  из однородного ферромагнитного материала ( $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ) протекает синусоидальный ток с действующим значением  $I$  и частотой  $\omega$  (рис. 29.3). Требуется найти распределение тока по сечению провода.

Исходные уравнения в символической форме (см. § 26.5)

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}$$

путем замены  $\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}}{\gamma}$  могут быть приведены к виду:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{\delta}} = -j\omega\mu\gamma\dot{\mathbf{H}}.$$

Исключение напряженности магнитного поля из этих уравнений приводит к уравнению для плотности тока:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{\delta}} = -j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{\delta}}.$$

Но (см. приложение 4)  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\delta}} - \Delta\dot{\boldsymbol{\delta}} = -\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}}$ , так как при отсутствии тока смещения  $\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\delta}} = 0$ . Следовательно,

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\delta}} = j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{\delta}}.$$

Вектор плотности тока направлен вдоль оси провода; в цилиндрических координатах он имеет единственную составляющую  $\delta_z = \dot{\boldsymbol{\delta}}$ , и из-за симметрии зависит только от координаты  $r$ .

Опуская в дальнейшем индекс  $z$  у плотности тока и используя выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах для симметричной задачи (см. приложение 5), можно написать исходное уравнение для комплексного действующего значения плотности тока:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\dot{\boldsymbol{\delta}}}{dr} \right) = j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{\delta}},$$

или

$$\frac{d^2\dot{\boldsymbol{\delta}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\boldsymbol{\delta}}}{dr} = j\omega\mu\gamma\dot{\boldsymbol{\delta}}.$$

Введя новую переменную  $x = r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ , уравнение приводят к виду

$$\frac{d^2\dot{\boldsymbol{\delta}}}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\dot{\boldsymbol{\delta}}}{dx} + \dot{\boldsymbol{\delta}} = 0,$$

являющемуся частным случаем уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Решением уравнения Бесселя будет линейная комбинация функций Бесселя первого  $J_n(x)$  и второго  $N_n(x)$  рода:

$$y = A_1 J_n(x) + A_2 N_n(x),$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — постоянные интегрирования. При  $n$  — целом числе функция Бесселя первого рода может быть представлена в виде ряда:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k};$$

значение  $n$  определяет порядок функций Бесселя.

В рассматриваемом случае  $n = 0$  и решение для плотности тока вы-  
 жается через функции Бесселя нулевого порядка:

$$\delta = A_1 J_0(x) + A_2 N_0(x).$$

При  $x = 0$  функция Бесселя  $J_0(0) = 1$ , а  $N_0(0) = \infty$ . Так как  
 плотность тока на оси провода ( $x = 0$ ) должна быть конечной, то  $A_2 = 0$

$$\delta = A_1 J_0(x) = \delta_0 J_0(x),$$

где  $A_1 = \delta_0$  — плотность тока на оси провода.

Функции Бесселя первого рода от комплексного аргумента явля-  
 ются также комплексными:

$$J_n(x) = b_n e^{j\beta_n};$$

значения модулей  $b_n$  и аргументов  $\beta_n$  табулированы.

Таким образом,

$$\delta = \delta_0 b_0 e^{j\beta_0}.$$

На рис. 29.4 представлены зависимости  $b_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$  и  $\beta_0(r\sqrt{\omega\mu\gamma})$ .

Первая из них для  $b_0 = \frac{\delta}{\delta_0}$  определя-  
 ет отношение действующих значений  
 плотностей токов в данной точке и на  
 оси провода, вторая — фазный сдвиг  
 между указанными плотностями тока.  
 Из этих кривых видно, что плотность  
 тока на оси провода может быть очень  
 малой по сравнению с плотностью тока  
 у поверхности провода, однако в нуль  
 никогда не обращается. Сдвиг по фазе  
 между этими плотностями может быть  
 любым, в том числе  $180^\circ$ , т. е. в проводе  
 могут существовать зоны, в которых  
 направление токов противоположно.

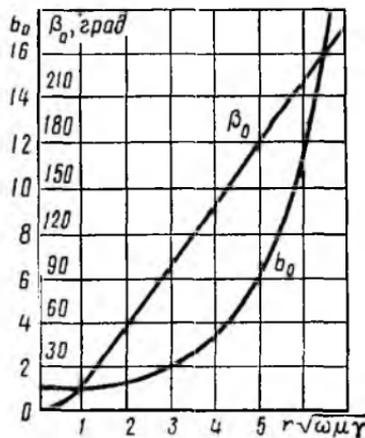


Рис. 29.4

Для установления связи плотности  
 тока с величиной тока в проводе  
 необходимо вычислить комплексное действующее значение тока:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \int_{\Sigma} \delta \, ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_0} \delta r \, dr = 2\pi\delta_0 \int_0^{r_0} J_0(r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}) r \, dr = \\ &= \frac{2\pi\delta_0}{-j\omega\mu\gamma} \int_0^{x_{r_0}} J_0(x) x \, dx, \end{aligned}$$

где  $x_{r_0} = r_0\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ .

Но  $\int J_0(x) x \, dx = xJ_1(x)$ ,

что легко проверить, заменив функции Бесселя соответствующими  
 рядами.

Использование этого соотношения приводит к выражению для комплексного тока:

$$I = \frac{2\pi\delta_0}{-j\omega\mu\gamma} x_{r_0} J_1(x_{r_0}) = \frac{2\pi\delta_0 r_0}{V-j\omega\mu\gamma} J_1(x_{r_0}).$$

Так как  $V-j = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ , то

$$\delta_0 = I \frac{V\omega\mu\gamma}{2\pi r_0} \cdot \frac{1}{b_{1r_0}} e^{-j(\beta_{1r_0} + \pi/4)},$$

и окончательно

$$\delta = \delta_0 b_0 e^{j\beta_0} = I \frac{V\omega\mu\gamma}{2\pi r_0} \cdot \frac{b_0}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_0 - \beta_{1r_0} - \pi/4)},$$

где  $b_{1r_0}$  и  $\beta_{1r_0}$  — значение модуля и аргумента функции Бесселя первого порядка у поверхности провода. Последнее выражение позволяет по заданному току, размерам и материалу провода определить плотность тока по модулю и по фазе в любой точке сечения провода.

## 2. Активное и внутреннее индуктивное сопротивления

Комплексное полное внутреннее сопротивление провода

$$Z = R + j\omega L_i,$$

где  $R$  в отличие от обозначения  $r$ , принятого в ч. III, — активное сопротивление, а  $L_i$  — внутренняя индуктивность провода (п. 3 § 1.7).

Напряжение на отрезке провода длиной  $l$  может быть выражено через напряженность поля на поверхности провода:

$$\begin{aligned} Zl &= (R + j\omega L_i) I = \dot{E}_{r_0} l = \frac{\delta_{r_0}}{\gamma} l = \\ &= j \frac{l}{\gamma} \cdot \frac{V\omega\mu\gamma}{2\pi r_0} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4)}, \end{aligned}$$

откуда после сокращения на  $l$ ,

$$\begin{aligned} R + j\omega L_i &= \frac{l}{\pi r_0^2 \gamma} \cdot \frac{r_0 V\omega\mu\gamma}{2} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4)} = \\ &= R_0 \frac{r_0 V\omega\mu\gamma}{2} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} e^{j(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4)}, \end{aligned}$$

где  $R_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 \gamma}$  — сопротивление постоянному току. Отсюда, приравняв вещественные и мнимые части, получают

$$\frac{R}{R_0} = \frac{r_0 V\omega\mu\gamma}{2} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} \cos(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4)$$

и

$$\frac{\omega L_i}{R_0} = \frac{r_0 V\omega\mu\gamma}{2} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} \sin(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4).$$

Для постоянного тока внутренняя индуктивность  $L_{oi} = \frac{\mu l}{8\pi}$  (см. § 1.7). Поэтому

$$\frac{L_i}{L_{oi}} = \frac{\omega L_i}{R_0} \cdot \frac{R_0}{\omega L_{oi}} = \frac{4}{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}} \cdot \frac{b_{0r_0}}{b_{1r_0}} \sin(\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} - \pi/4).$$

На рис. 29.5 представлены зависимости  $\frac{R}{R_0}$  и  $\frac{L_i}{L_{oi}}$  от параметра  $r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}$ .

Таким образом, для данного провода с ростом частоты активное сопротивление  $R$  и внутреннее индуктивное сопротивление  $\omega L_i$  увеличиваются, а внутренняя индуктивность  $L_i$  уменьшается.

Для сильно выраженного поверхностного эффекта  $r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma} \gg 1$ , тогда  $b_{0r_0} \approx b_{1r_0}$ ,  $\beta_{0r_0} - \beta_{1r_0} \approx \pi/2$  и можно пользоваться приближенными формулами:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{L_i}{L_{oi}} = \frac{2\sqrt{2}}{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}};$$

при  $r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma} = 10$  — погрешность не превышает 7%.

Рассчитывая активное сопротивление провода при больших значениях параметра  $r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}$ , можно принимать это сопротивление равным сопротивлению полого провода с тем же наружным диаметром, но равномерным распределением тока по сечению. Толщина стенки такого провода оказывается равной эквивалентной глубине проникновения. Действительно, сопротивление трубы длиной  $l$ , толщиной стенки  $c$  и внешним радиусом  $r_0$

$$R = \frac{1}{\pi r_0 c \gamma} = R_0 \frac{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2\sqrt{2}} = \frac{l}{\pi r_0^2 \gamma} \cdot \frac{r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma}}{2\sqrt{2}},$$

откуда после сокращения

$$c = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}} = \sigma.$$

В заключение следует отметить, что неравномерность распределения тока по сечению провода не сказывается на величине внешнего магнитного потока, а следовательно, и на величине внешней индуктивности  $L_e$ . Это положение следует из закона полного тока, согласно которому магнитное поле вне проводника определяется всем током провода.

Для уменьшения вредного влияния поверхностного эффекта на величину активного сопротивления при высокой частоте используется провод, свитый из большого числа тонких, изолированных друг от друга жил. Жилы скручены между собой так, что каждая из них последовательно занимает все положения в проводе. При этом каждая

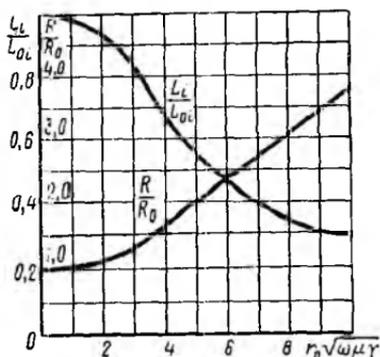


Рис. 29.5

из жил сцепляется практически с одинаковым магнитным потоком, несмотря на большое общее сечение провода, увеличение сопротивления из-за поверхностного эффекта незначительно.

## § 29.4. Эффект близости для двух параллельных шин

Рассмотренное неравномерное распределение магнитного потока тока по сечению проводника относится к уединенному проводнику. Если близко расположены несколько проводников с переменными токами, то неравномерное распределение тока в каждом из проводников будет определяться не только его собственным полем, но и полями остальных проводников. Это явление называется эффектом близости и имеет существенное значение для некоторых электротехнических устройств.

Пусть две плоские шины толщиной  $a$ , высотой  $h \gg a$  расположены параллельно друг другу на расстоянии  $b \ll h$  (рис. 29.6). Длина шин

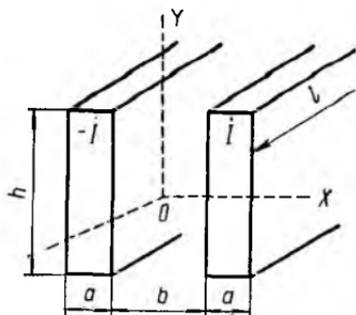


Рис. 29.6

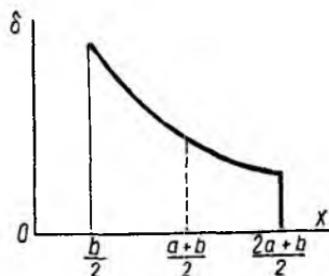


Рис. 29.7

$l \gg b$  и искажение поля у концов и краев шин в расчете не учитываются. Материал шин обладает постоянными магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\gamma$ . По шинам протекают в разных направлениях токи  $I$  частоты  $\omega$ , одинаковые по величине.

Оси координат указаны на рис. 29.6. Начало координат находится посередине между шинами.

При принятых условиях поле является плоскопараллельным и вектор  $\vec{H}$  имеет практически лишь одну составляющую  $\dot{H}_y = \dot{H}$ . Все величины являются функцией только одной координаты  $x$ .

Так же, как и в § 29.2, общее решение уравнения для комплексного действующего значения напряженности магнитного поля имеет вид:

$$\dot{H} = A_1 e^{-\rho x} + A_2 e^{\rho x},$$

где по-прежнему  $\rho = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ .

Из закона полного тока, примененного к двум контурам, один из которых охватывает одну шину, а другой — обе шины, следует, что напряженность поля между шинами неизменна и равна  $I/h$ , а на внешних поверхностях обеих шин — равна нулю из-за взаимной компенсации полей обеих шин.

Таким образом, для правой шины при  $x = b/2$

$$A_1 e^{-\rho \frac{b}{2}} + A_2 e^{\rho \frac{b}{2}} = \frac{i}{h},$$

и  $x = b/2 + a$

$$A_1 e^{-\rho \left(\frac{b}{2} + a\right)} + A_2 e^{\rho \left(\frac{b}{2} + a\right)} = 0.$$

Из этих уравнений находят постоянные интегрирования:

$$A_1 = \frac{i}{h} \cdot \frac{e^{\rho \frac{b}{2}}}{1 - e^{-2\rho a}} \quad \text{и} \quad A_2 = -\frac{i}{h} \cdot \frac{e^{-\rho \left(\frac{b}{2} + 2a\right)}}{1 - e^{-2\rho a}}.$$

Следовательно,

$$\dot{H} = \frac{i}{h} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\rho a}} \left[ e^{-\rho \left(x - \frac{b}{2}\right)} - e^{\rho \left(x - \frac{b}{2} - 2a\right)} \right].$$

Вектор плотности тока  $\delta$  имеет лишь одну составляющую  $\delta_z = \delta$ , поэтому

$$\delta = \frac{d\dot{H}}{dx} = -\frac{i}{h} \cdot \frac{\rho}{1 - e^{-2\rho a}} \left[ e^{-\rho \left(x - \frac{b}{2}\right)} + e^{\rho \left(x - \frac{b}{2} - 2a\right)} \right].$$

Для левой шины получаются аналогичные формулы.

Из выражения для плотности тока видно, что распределение тока по сечению шины несимметрично по отношению к оси симметрии ее сечения. Плотность тока больше у внутренней поверхности (рис. 29.7). При этом возрастает активное сопротивление шин. Из-за сближения прямого и обратного токов уменьшается площадь контура, а следовательно, и его индуктивность.

При одинаковом направлении токов в обеих шинах плотность тока будет наименьшей у внутренних поверхностей шин и наибольшей у наружных.

Эффект близости используется в индукционном поверхностном нагреве. Если контур с током высокой частоты (индуктор) приблизить к поверхности нагреваемого тела, то вблизи поверхности возникает индуцированный ток. Из-за эффекта близости путь индуцированного в теле тока повторяет форму индуктора, так как индуцированный в теле ток находится в противофазе с током индуктора, что качественно соответствует рассмотренному примеру. Тем самым создается нагрев поверхности в требуемых местах. Этот метод широко применяется для поверхностной закалки стальных изделий сложной формы.

## ГЛАВА ТРИДЦАТАЯ

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

#### § 30.1. О расчете электромагнитных экранов

Электромагнитные экраны применяются для защиты отдельных элементов электрических устройств (электронных ламп, электроизмерительных приборов, проводов, кабелей, и т. п.) от помехонесущего

переменного электромагнитного поля. Возможны два случая: 1) защищаемые элементы находятся внутри экрана, а источники этого поля — вне экрана; 2) защищаемые элементы находятся вне экрана, а источники — внутри экрана.

В обоих случаях в качестве электромагнитных экранов используются металлические оболочки, экранирующее действие которых обусловлено поглощением электромагнитного поля в толще экрана. Экранирующее действие растет с увеличением толщины стенки экрана, частоты, удельной проводимости и магнитной проницаемости материала экрана. При высоких частотах экран обычно изготавливается из хорошо проводящего материала (медь, алюминий), при низких — используется ферромагнитный материал. Теоретически толщина стенки экрана, согласно п. 1 § 28.2, должна быть того же порядка, что и длина волны  $\lambda_{пр}$  в материале экрана. Практически толщина стенки экрана всегда меньше длины волны  $\lambda_{пр}$  в проводящей среде, так как получаемое при этом ослабление поля вполне достаточно для технических целей.

При экранировании от электромагнитного поля основное значение имеет величина магнитного поля, наводящего э. д. с. помех. Поэтому качество экрана, как и для постоянных полей (см. § 22.4), характеризуют коэффициентом экранирования  $K$ , равным отношению напряженности магнитного поля  $H'$  в защищенной экраном области к напряженности первоначального поля  $H$ :

$$K = \frac{H'}{H}.$$

Чем сильнее экранирующее действие экрана, тем меньше коэффициент экранирования. Теоретически нельзя получить полного экранирования, поэтому всегда коэффициент экранирования удовлетворяет неравенству  $0 < K < 1$ .

Общий метод расчета экранов в обоих случаях состоит в расчете магнитного поля в трех областях: во внутренней полости экрана, в толще экрана и во внешней области. Как и в случае постоянного поля, общие решения уравнений Максвелла для указанных областей содержат шесть постоянных интегрирования; четыре из них определяются из граничных условий на двух поверхностях экрана, а две остальные — из дополнительных условий, зависящих от характера задачи.

При анализе экранирования от внешнего поля напряженность поля в полости экрана не должна обращаться в бесконечность, а вне экрана (при большом удалении от него) должна обращаться в выражение для заданного поля.

При экранировании от поля, создаваемого в полости экрана, значение напряженности поля для внешней области должно стремиться к нулю по мере удаления от экрана.

Так как в полости экрана и в области вне экрана среда принимается однородной, а ее проводимость равной нулю, то  $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = 0$ , и расчет магнитного поля можно производить как через векторный потенциал  $\dot{\mathbf{A}}$ , так и через скалярный магнитный потенциал  $\dot{\varphi}_m$  ( $\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_m$ ), для которого справедливо уравнение Лапласа.

В стенке экрана, где среда также однородна ( $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ), фактор напряженности магнитного поля удовлетворяет уравнению, получаемому из уравнений Максвелла путем исключения вектора  $\dot{E}$ :

$$\Delta \dot{H} = \rho^2 \dot{H},$$

где по-прежнему  $\rho = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ . Аналогичные уравнения получаются для векторов напряженности электрического поля, плотности тока и векторного потенциала. Далее дается пример расчета экрана.

### § 30.2. Тонкостенный цилиндрический экран в однородном поле

В однородном и синусоидально изменяющемся во времени магнитном поле  $\dot{H}_0$  помещен экран в виде прямого полого цилиндра внешнего радиуса  $r_0$  с толщиной стенки  $a$ , причем  $a \ll r_0$  (рис. 30.1). Ось экрана перпендикулярна направлению магнитного поля. Материал экрана обладает постоянной магнитной проницаемостью  $\mu$  и удельной проводимостью  $\gamma$ . Длина экрана велика и искажение поля у его концов в расчете не учитывается. Требуется определить напряженность поля в полости экрана. Подобная задача была рассмотрена в § 22.5 для постоянного магнитного поля. Как и там, здесь используются декартова и цилиндрическая системы координат.

Вектор напряженности магнитного поля совпадает по направлению с осью  $X$ . Следовательно,  $\dot{H}_{0y} = 0$ ,  $\dot{H}_{0z} = 0$  и  $\dot{H}_{0x} = \dot{H}_0$ . Так как поле при принятых условиях плоскопараллельно, то все величины, характеризующие поле, не зависят от  $z$ .

Для комплексного действующего значения магнитного потенциала справедливы те же уравнения, что и для постоянного магнитного поля, поэтому, согласно решенной задаче, магнитный потенциал вне экрана определяется выражением

$$\dot{\Phi}_{ma} = - \left( M_3 r + \frac{N_3}{r} \right) \cos \alpha,$$

где по-прежнему  $M_3$  и  $N_3$  — постоянные величины (см. § 22.5).

Так как при  $r \gg r_0$ , магнитный потенциал  $\dot{\Phi}_{ma} = M_3 r \cos \alpha = -\dot{H}_0 r \cos \alpha$  (см. § 22.5), то  $M_3 = \dot{H}_0$ . Для дальнейших расчетов удобно положить  $N_3 = \dot{H}_0 r_0^2 \kappa$ , где  $\kappa$  — безразмерный комплексный коэффициент обратного действия экрана. Как будет видно из дальнейшего, он учитывает влияние вихревых токов в стенке экрана на внешнее поле.

По окончательному выражению для магнитного потенциала вне экрана

$$\dot{\Phi}_{ma} = - \dot{H}_0 \left( r + \frac{r_0^2}{r} \kappa \right) \cos \alpha$$

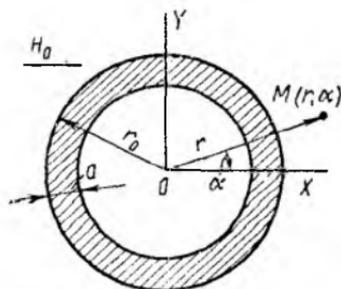


Рис. 30.1

легко определяются комплексные действующие значения составляющих вектора напряженности магнитного поля  $\dot{H}_a$  вне экрана:

$$\dot{H}_{ar} = -\frac{\partial \dot{\varphi}_{ma}}{\partial r} = \dot{H}_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \kappa\right) \cos \alpha,$$

$$\dot{H}_{a\alpha} = -\frac{\partial \dot{\varphi}_{ma}}{r \partial \alpha} = -\dot{H}_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \kappa\right) \sin \alpha.$$

В полости экрана исходное уравнение для потенциала остается тем же (см. § 22.5), меняются только постоянные интегрирования:

$$\dot{\varphi}_{mi} = -\left(M_1 r + \frac{N_1}{r}\right) \cos \alpha.$$

Так как потенциал на оси экрана не должен обращаться в бесконечность, то  $N_1 = 0$  и

$$\dot{\varphi}_{mi} = -M_1 r \cos \alpha = -\dot{H}_i r \cos \alpha,$$

где  $\dot{H}_i$  — комплексное действующее значение вектора напряженности магнитного поля в полости экрана; его составляющие равны:

$$\dot{H}_{ir} = \dot{H}_i \cos \alpha, \quad \dot{H}_{i\alpha} = -\dot{H}_i \sin \alpha.$$

Введение коэффициента экранирования  $K = \frac{\dot{H}_i}{\dot{H}_0}$  в последние уравнения приводит их к виду:

$$\dot{H}_{ir} = K \dot{H}_0 \cos \alpha, \quad \dot{H}_{i\alpha} = -K \dot{H}_0 \sin \alpha.$$

При расчете магнитного поля в стенке экрана ( $r_0 - a \leq r \leq r_0$ ) удобно сначала найти вектор напряженности  $\dot{E}$  электрического поля. Так как вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$  и не зависит от  $z$ , то из первого уравнения Максвелла следует, что вектор  $\dot{E}$  имеет единственную составляющую

$$\dot{E}_z = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}, \quad \dot{E}_x = 0, \quad \dot{E}_y = 0,$$

а в цилиндрических координатах  $\dot{E}_r = \dot{E}_\alpha = 0$  и  $\dot{E}_z = \dot{E}$ .

Для определения напряженности электрического поля в цилиндрической системе координат служит уравнение

$$\Delta \dot{E} = \rho^2 \dot{E}$$

или (см. приложение 5)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \alpha^2} = \rho^2 \dot{E}.$$

Для тонкостенного экрана ( $a \ll r_0$ ) можно пренебречь изменением  $r$  в толще экрана, принимая в любой точке радиус равным  $r_0$ . Тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \alpha^2} = \rho^2 \dot{E}.$$

Подстановка  $\dot{E} = F(r) \sin \alpha$  позволяет с помощью метода разделения переменных перейти от уравнения в частных производных к обыч-

овенному дифференциальному уравнению для функции  $F(r)$ :

$$\frac{d^2 F}{dr^2} - \left( p^2 + \frac{1}{r_0^2} \right) F = 0,$$

щее решение которого

$$F(r) = M_4 e^{-p_1 r} + N_4 e^{p_1 r},$$

де

$$p_1 = \sqrt{p^2 + \frac{1}{r_0^2}}.$$

Тогда напряженность электрического поля

$$\dot{E} = (M_4 e^{-p_1 r} + N_4 e^{p_1 r}) \sin \alpha.$$

Из второго уравнения Максвелла  $\text{rot } \dot{E} = -j\omega \mu \dot{H}$  находят составляющие вектора напряженности магнитного поля (см. приложение 5):

$$\text{rot}_r \dot{E} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \dot{E}_\alpha}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{E}}{\partial \alpha} = -j\omega \mu \dot{H}_{er},$$

$$\text{rot}_\alpha \dot{E} = \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{E}}{\partial r} = -j\omega \dot{H}_{e\alpha},$$

так как  $\dot{E}_\alpha = \dot{E}_r = 0$ .

Отсюда

$$\dot{H}_{er} = -\frac{1}{j\omega \mu r} (M_4 e^{-p_1 r} + N_4 e^{p_1 r}) \cos \alpha,$$

$$\dot{H}_{e\alpha} = \frac{p_1}{j\omega \lambda} (-M_4 e^{-p_1 r} + N_4 e^{p_1 r}) \sin \alpha.$$

Из граничных условий на поверхностях экрана при  $r = r_0$

$$\mu \dot{H}_{er} = \mu_0 \dot{H}_{ar} \text{ и } \dot{H}_{e\alpha} = \dot{H}_{a\alpha};$$

при  $r = r_0 - a$

$$\mu \dot{H}_{er} = \mu_0 \dot{H}_{ir} \text{ и } \dot{H}_{e\alpha} = \dot{H}_{i\alpha}.$$

После подстановки выражений для составляющих вектора напряженности магнитного поля и сокращения получается система уравнений:

$$-\frac{1}{j\omega r_0} (M_4 e^{-p_1 r_0} + N_4 e^{p_1 r_0}) = \mu_0 \dot{H}_0 (1 - \kappa),$$

$$\frac{p_1}{j\omega \mu} (-M_4 e^{-p_1 r_0} + N_4 e^{p_1 r_0}) = -\dot{H}_0 (1 + \kappa),$$

$$-\frac{1}{j\omega (r_0 - a)} [M_4 e^{-p_1 (r_0 - a)} + N_4 e^{p_1 (r_0 - a)}] = \mu_0 K \dot{H}_0,$$

$$\frac{p_1}{j\omega \mu} [-M_4 e^{-p_1 (r_0 - a)} + N_4 e^{p_1 (r_0 - a)}] = -K \dot{H}_0.$$

Введением новых обозначений

$$M_5 = \frac{M_4 e^{-p_1 (r_0 - a)}}{j\omega \mu_0 r_0}, \quad N_5 = \frac{N_4 e^{p_1 (r_0 - a)}}{j\omega \mu_0 r_0} \text{ и } m = \frac{\mu_0}{\mu} p_1 r_0$$

и заменой в знаменателе третьего уравнения  $r_0 - a \approx r_0$  систему преобразуют к виду:

$$\begin{aligned} M_5 e^{-\rho_1 a} + N_5 e^{\rho_1 a} &= -\dot{H}_0 (1 - \kappa), \\ -M_5 e^{-\rho_1 a} + N_5 e^{\rho_1 a} &= -\frac{\dot{H}_0}{m} (1 + \kappa), \\ M_5 + N_5 &= -K \dot{H}_0, \\ -M_5 + N_5 &= -\frac{K}{m} \dot{H}_0. \end{aligned}$$

Из этой системы находят коэффициент экранирования

$$K = \frac{1}{\operatorname{ch} \rho_1 a + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho_1 a}$$

и коэффициент обратного действия экрана

$$\kappa = \frac{\frac{1}{2} \left( m - \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho_1 a}{\operatorname{ch} \rho_1 a + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho_1 a}.$$

Для практически выполняемых экранов обычно удовлетворяется условие  $|p| r_0 = r_0 \sqrt{\omega \mu \gamma} \gg 1$ . В этом случае

$$\rho_1 = \sqrt{p^2 + \frac{1}{r_0^2}} \approx p, \quad m \approx \frac{\mu_0}{\mu} p r_0$$

и

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\operatorname{ch} \rho a + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho a}, \\ \kappa &= \frac{\frac{1}{2} \left( m - \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho a}{\operatorname{ch} \rho a + \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \operatorname{sh} \rho a}. \end{aligned}$$

Из приведенного расчета видно, что если первоначальное поле однородно, то ослабленное поле в полости экрана также однородно и совпадает по направлению с первоначальным, но сдвинуто от него по фазе, так как коэффициент экранирования — комплексное число.

С ростом частоты экранирование усиливается, т. е. коэффициент экранирования убывает. При  $\omega = 0$  и  $\mu = \mu_0$  он обращается в единицу и, следовательно, экранирования не будет; при  $\omega = 0$  и стальном экране, когда  $\mu \gg \mu_0$ ,  $K$  может быть значительно меньше единицы. Электромагнитное экранирование в этом случае переходит в магнитное, обусловленное преимущественным прохождением постоянного магнитного потока в толще экрана. Величины  $p$  и  $m$  одновременно с частотой стремятся к нулю, а коэффициент магнитного экранирования

ремится к пределу:

$$K_0 = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0}} \frac{1}{\operatorname{ch} pa + \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m}\right) \operatorname{sh} pa} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{a}{r_0}} \approx \frac{1}{2 \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{a}{r_0}}$$

Полученное выражение для коэффициента магнитного экранирования совпадает с выведенным выше (см. § 22.5) при  $\mu \gg \mu_0$  и  $a < r_0$ . Действительно, переход к обозначениям настоящего параграфа и пренебрежение малыми величинами приводят к

$$K_0 = \frac{4}{\frac{\mu}{\mu_0} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)} = \frac{4}{\frac{\mu}{\mu_0} \left[1 - \frac{(r_0 - a)^2}{r_0^2}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{a}{r_0}}$$

Коэффициент магнитного экранирования растет с увеличением магнитной проницаемости материала экрана и толщины его стенок.

## ГЛАВА ТРИДЦАТЬ ПЕРВАЯ

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

#### § 31.1. О расчете переходных процессов в электромагнитном поле

Вопросы исследования переходных процессов в электромагнитном поле приобретают в связи с развитием импульсной техники все большее практическое значение. Импульсные процессы широко используются в радиолокации, радионавигации, телевидении и многоканальной связи, а также в быстродействующих электронных вычислительных машинах, которые могут производить десятки тысяч вычислений в секунду.

В настоящее время длительность импульсов достигает  $10^{-8}$ — $10^{-10}$  сек. При столь кратковременных импульсах особое значение приобретает влияние вихревых токов на импульсный процесс. Расчет этого влияния связан с расчетом проникновения практически скачкообразно изменяющегося внешнего электромагнитного поля в проводящие тела, иначе говоря, с расчетом переходных процессов в электромагнитном поле.

Переходные процессы в электромагнитном поле можно рассчитывать как классическим методом, так и методами наложения, спектральным и операторным. Далее приведены два простейших примера, имеющих важное практическое значение.

В отличие от электрических цепей с сосредоточенными параметрами, где искомые величины (напряжения и токи) являются функциями только времени, в электромагнитном поле напряженности электрического и магнитного полей являются функциями и координат, и времени. Поэтому при использовании классического метода здесь приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных и определять вид решения и постоянные интегрирования на основании

начальных и граничных условий. В частном случае, когда напряженность зависит только от одной координаты, расчет переходных процессов в поле сходен с расчетом переходных процессов в длинных линиях (см. § 20.6).

### § 31.2. Установление магнитного потока в пластине

Пусть пластина (см. рис. 29.1), для которой был рассмотрен поверхностный эффект при синусоидальном внешнем поле, находится в поле, изменяющемся практически скачкообразно. На практике такой режим наблюдается в сердечниках импульсных трансформаторов, если считать, что скорость установления тока в обмотке и его поля значительно превышает скорость установления магнитного потока в сердечнике.

Для определения мгновенного значения магнитного потока в пластине необходимо знать индукцию в каждой точке пластины в любой момент времени. Удобней сначала рассмотреть процесс убывания магнитного потока, т. е. случай, когда до момента  $t = 0$  ток в обмотке, образующей поле, был постоянным, и напряженность в любой точке как вне, так и внутри пластины равна  $H_e$ , а в момент  $t = 0$  ток в обмотке, а значит и напряженность вне пластины, скачком изменились до нуля. В этом случае, очевидно, определяется свободная составляющая переходного процесса.

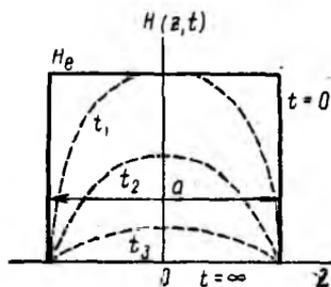


Рис. 31.1

При скачкообразном изменении тока поле в проводящей пластине скачком измениться не может, так как при изменении магнитного потока в пластине возникают вихревые токи, которые в соответствии

с правилом Ленца создают магнитный поток, препятствующий изменению внешнего потока. Поэтому в момент  $t = 0$  во всех точках пластины напряженность равна  $H_e$  и только на поверхности пластин равна нулю (рис. 31.1), поскольку вне пластины она стала равной нулю.

По окончании переходного процесса напряженность поля (принужденная составляющая) и поток в пластине будут равны нулю.

Для расчета  $H(z, t)$  в переходном процессе необходимо решить исходное уравнение, которое в этом случае будет таким же, как в § 28.2:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \gamma \mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Применяя метод разделения переменных и полагая  $H(z, t) = Z(z) \cdot T(t)$ , можно получить следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -m^2, \quad \frac{\gamma \mu}{T} \cdot \frac{dT}{dt} = -m^2.$$

Их решения соответственно равны:

$$Z = A \cos mz + B \sin mz,$$

$$T = C e^{-\frac{m^2}{\nu\mu} t}.$$

Тогда частное решение исходного уравнения будет (см. § 22.3):

$$H_k(z, t) = Z_k T_k = (A_k \cos m_k z + B_k \sin m_k z) C_k e^{-\frac{m_k^2}{\nu\mu} t}.$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  и  $m_k$  необходимо использовать граничные условия.

Из условия симметрии поля относительно плоскости  $XOY$  вытекает, что

$$H(z, t) = H(-z, t),$$

откуда следует, что  $B_k = 0$ .

Следовательно, общее решение

$$H(z, t) = \sum_k D_k e^{-\frac{m_k^2}{\nu\mu} t} \cos m_k z,$$

где  $D_k = A_k C_k$ . В момент  $t = 0$

$$H(z, 0) = \sum_k D_k \cos m_k z.$$

Распределение напряженности в момент  $t = 0$  изображается кривой прямоугольного вида, которая аналитически может быть представлена следующим рядом Фурье:

$$H(z, 0) = \frac{4}{\pi} H_e \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{a} \pi z,$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$ . В отличие от ряда Фурье, приведенного в приложении 3 для кривой прямоугольного вида, здесь из-за сдвига на  $\pi/2$  начала координат вместо синусов появились косинусы с чередованием знаков.

Значит, коэффициенты  $D_k$  и  $m_k$  равны:

$$D_k = \frac{4H_e}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad m_k = \frac{2n-1}{a} \pi.$$

Вводя обозначение

$$\beta = \frac{\pi^2}{a^2 \nu \mu},$$

искомое решение можно записать в виде:

$$H(z, t) = \frac{4H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \cos \frac{2n-1}{a} \pi z.$$

По этой формуле можно определить напряженность в каждой точке пластины для любого момента времени. На рис. 31.1 пунктир-

ными кривыми показан характер распределения  $H$  для некоторых моментов времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$ .

Мгновенное значение магнитного потока

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 2h\mu \int_0^{\frac{a}{2}} H(z, t) dz = \\ &= \frac{8h\mu H_e}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \frac{a}{\pi} \sin \frac{2n-1}{a} \pi z \Big|_0^{\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{8ah\mu H_e}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t} \sin \frac{2n-1}{2} \pi.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+1} \sin \frac{2n-1}{2} \pi = 1,$$

а магнитный поток, который был в пластине до начала переходного процесса,

$$\Phi_0 = \mu H_e ah,$$

можно записать

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t}$$

или

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0,81 \left( e^{-\beta t} + \frac{1}{9} e^{-9\beta t} + \frac{1}{25} e^{-25\beta t} + \dots \right).$$

Отсюда видно, что для  $\beta t \geq 0,5$  относительное убывание магнитного потока можно рассчитывать с погрешностью менее 1% по формуле

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 0,81 e^{-\beta t}.$$

По аналогии с переходным процессом в цепи  $r, L$  при ее коротком замыкании и включении на постоянное напряжение (см. § 15.2) относительное нарастание магнитного потока в пластине при скачкообразном изменении напряженности внешнего поля от нуля до  $H_e$  определится выражением

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 \beta t},$$

поскольку в этом случае установившийся поток будет равен  $\Phi_0$ . Для  $\beta t \geq 0,5$

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi_0} = 1 - 0,81 e^{-\beta t}.$$

При рассмотрении переходного процесса по упрощенной формуле коэффициент затухания условно можно принять  $\beta = \frac{\pi^2}{a^2 \gamma \mu}$ . Тогда из полученных выражений следует, что процесс установления магнитного потока определяется толщиной пластины, ее удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

Графики относительного убывания и нарастания магнитного потока представлены на рис. 31.2. Из них видно, что значение  $\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}$  равно 0,98 при нарастании и 0,02 при убывании, когда  $\beta t = 3,5$ . Следовательно, можно считать, что магнитный поток практически устанавливается за время

$$t_{уст} = 3,5 \frac{a^2 \gamma \mu}{\pi^2} = 0,35 a^2 \gamma \mu.$$

Поток достигает 0,5  $\Phi_0$  при  $\beta t = 0,5$ ,

т. е. за время  $t_{0,5} = \frac{1}{7} t_{уст}$ .

Для стальной пластины, имеющей  $a = 0,5$  мм,  $\gamma = 10^7 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$  и  $\mu = 1000 \mu_0$ ,

$$t_{уст} = 1,1 \text{ мсек}, \quad t_{0,5} = 0,157 \text{ мсек}.$$

Полученные выражения показывают, что время установления потока можно уменьшить за счет уменьшения толщины  $a$  пластины или удельной проводимости  $\gamma$  материала. Уменьшение магнитной проницаемости  $\mu$  невыгодно, поскольку это уменьшит поток в установившемся режиме. Поэтому в импульсных трансформаторах обычно выполняют сердечники из феррита, имеющего малую удельную проводимость, или из очень тонких стальных пластин.

### § 31.3. Установление тока в проводе кругового сечения

Провод кругового сечения радиуса  $r_0$ , длины  $l$  подключается к постоянному напряжению  $U_0$ . Требуется определить плотность тока в каждой точке провода в любой момент времени и закон установления тока, если магнитная проницаемость материала провода  $\mu = \text{const}$ , его удельная проводимость  $\gamma = \text{const}$ .

Можно считать, что в момент включения напряжения ( $t = 0$ ) напряженность электрического поля вне провода установится практически мгновенно по сравнению с процессом установления поля в проводе. Из условия равенства касательных составляющих  $E$  на поверхности провода ( $r = r_0$ ) напряженность  $E_0 = \frac{U_0}{l}$  и соответствующая ей плотность тока  $\delta_0 = \gamma E_0$  также установятся практически мгновенно.

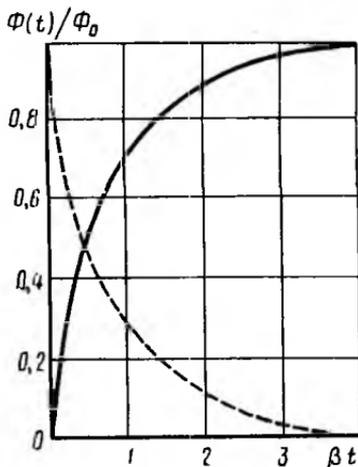


Рис. 31.2

Внутри провода ( $r < r_0$ ) в момент включения плотность тока равна нулю, поскольку мгновенное изменение тока на конечную величину сопровождалось бы мгновенным изменением магнитного потока и энергии на конечную величину, что невозможно.

По аналогии с § 29.3 можно записать уравнение, описывающее процесс установления электрического поля в проводе:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial r} = \gamma \mu \frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

Представив решение в виде

$$\delta(r, t) = R(r) T(t),$$

получают

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \cdot \frac{dR}{dr} = \frac{1}{T} \gamma \mu \frac{dT}{dt} = -m^2.$$

Отсюда

$$T = C e^{-\frac{m^2}{\gamma \mu} t}.$$

Полагая  $x = rm$ , уравнение для  $R$  можно свести к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dR}{dx} + R = 0,$$

решение которого

$$R = A_1 J_0(mr) + A_2 N_0(mr).$$

Так как при  $r \rightarrow 0$   $N_0(0) \rightarrow \infty$ , то  $A_2 = 0$ .

По окончании переходного процесса во всех точках провода установится плотность тока  $\delta_0$ . Поэтому общее решение можно записать в виде:

$$\delta(r, t) = \delta_0 + \sum_k R_k T_k = \delta_0 + \sum_k D_k J_0(m_k r) e^{-\frac{m_k^2}{\gamma \mu} t}.$$

Для определения постоянных интегрирования  $D_k$  и  $m_k$  необходимо обратиться к начальным и граничным условиям. В момент  $t = 0$

$$\delta(r, 0) = \delta_0 + \sum_k D_k J_0(m_k r).$$

На поверхности провода в этот момент  $\delta(r_0, 0) = \delta_0$ . Это значит, что при  $r = r_0$

$$\sum_k D_k J_0(m_k r_0) = 0,$$

откуда следует, что  $m_k r_0 = x_{0k}$ , где  $x_{0k}$  — корни функции Бесселя нулевого порядка.

Следовательно,

$$m_k = \frac{x_{0k}}{r_0}.$$

Во всех точках сечения  $0 \leq r < r_0$  в начальный момент плотность тока равна нулю (рис. 31.3). Значит

$$\sum_k D_k J_0(m_k r) = -\delta_0. \quad (31.1)$$

Для определения коэффициентов  $D_k$  ряда функций Бесселя необходимо воспользоваться следующим свойством этих функций.

Если  $x_{0p}$  и  $x_{0q}$  — корни функции  $J_0(x)$ , то при  $p = q$

$$\int_0^1 x J_0(x_{0p} x) J_0(x_{0q} x) dx = \frac{1}{2} J_1^2(x_{0p}),$$

при  $p \neq q$  значение этого интеграла равно нулю.

Кроме того,

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x).$$

Умножая на  $\frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right)$  обе части выражения (31.1) и интегрируя в пределах от 0 до 1, можно получить

$$\int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) \sum_k D_k J_0\left(x_{0k} \frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\delta_0 \int_0^1 \frac{r}{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

или с учетом указанных свойств

$$\frac{D_p}{2} J_1^2(x_{0p}) = -\frac{\delta_0}{x_{0p}} J_1(x_{0p}).$$

Отсюда

$$D_p = -\frac{2\delta_0}{x_{0p} J_1(x_{0p})}.$$

Таким образом

$$\delta(r, t) = \delta_0 \left[ 1 - 2 \sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right], \quad \text{где } \beta = \frac{1}{r_0^2 \gamma \mu}.$$

Характер распределения плотности тока в проводе для моментов времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$  показан на рис. 31.3.

Ток в проводе

$$\begin{aligned} i &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{r_0} \delta(r, t) r dr = 2\pi \delta_0 \int_0^{r_0} \left[ 1 - 2 \sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right] r dr = \\ &= 2\pi \delta_0 \left[ \frac{r_0^2}{2} - 2 \sum_p \frac{1}{x_{0p} J_1(x_{0p})} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \int_0^{r_0} J_0\left(x_{0p} \frac{r}{r_0}\right) r dr \right] = \\ &= \pi r_0^2 \delta_0 \left[ 1 - 4 \sum_p \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t} \right]. \end{aligned}$$

С учетом  $I_0 = \pi r_0^2 \delta_0$  относительное изменение тока в проводе

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 4 \sum_p \frac{1}{x_{0p}^2} e^{-x_{0p}^2 \beta t}.$$

Первые три корня функции Бесселя нулевого порядка равны  $x_{01} = 2,41$ ,  $x_{02} = 5,52$  и  $x_{03} = 8,65$ .

В соответствии с этим

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0,692e^{-5,78\beta t} - 0,131e^{-30,5\beta t} - 0,053e^{-75\beta t} - \dots$$

Для значений  $\beta t > 0,1$  можно принять

$$\frac{i}{I_0} = 1 - 0,692e^{-5,78\beta t}.$$

График относительного нарастания тока показан на рис. 31.4

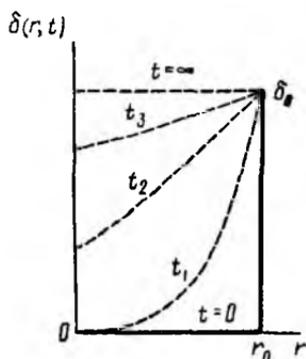


Рис. 31.3

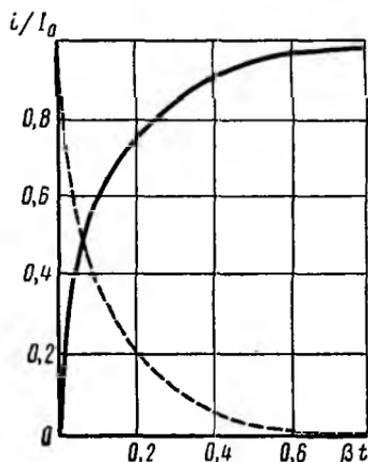


Рис. 31.4

сплошной кривой. При  $\beta t = 0,6$  ток достигает 98% установившегося значения. Значит, практически время установления тока можно принять

$$t_{уст} = \frac{0,6}{\beta} = 0,6r_0^2 \gamma \mu.$$

Для стального провода  $r_0 = 0,5$  мм,  $\gamma = 10^7 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ ,  $\mu = 1000\mu_0$ ,  $t_{уст} = 1,88$  мсек.

Для медного провода  $r_0 = 0,5$  мм, время  $t_{уст} = 0,107$  мсек.

Очевидно, относительное убывание тока после отключения напряжения (при сохранении замкнутого контура) определится выражением

$$\frac{i}{I_0} = 0,692e^{-5,78\beta t} + 0,131e^{-30,5\beta t} + 0,053e^{-75\beta t} + \dots,$$

что графически изображено на рис. 31.4 пунктирной кривой.

Интересно отметить, что при убывании тока плотность у поверхности провода равна нулю, а на оси — максимальна в течение всего переходного процесса.

Из рассмотренного следует, что процесс установления тока в проводе определяется его радиусом, удельной проводимостью и магнитной проницаемостью.

ГЛАВА ТРИДЦАТЬ ВТОРАЯ  
**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ  
 И ОСНОВЫ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ**

**§ 32.1. Электромагнитное поле в движущихся средах**

Как было указано в § 26.2, уравнения Максвелла для движущихся сред получаются из аналогичных уравнений для неподвижных сред путем замены частных производных по времени полными производными, определяющими изменение данной величины в точке, движущейся со скоростью  $v$  вместе со средой.

Из векторного анализа известно, что в так называемой символической векторной форме записи для любой скалярной величины  $a$ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + (v \text{ grad}) a,$$

для векторной величины  $A$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \text{ grad}) A.$$

В первом случае  $(v \text{ grad}) a = v \text{ grad } a$ , во втором  $(v \text{ grad}) A \neq v \text{ grad } A$ .

В большинстве технических задач выполняются следующие условия: 1) скорость движения среды  $v$  значительно меньше скорости света  $c$  ( $v \ll c$ ), что позволяет пренебречь членами высшего порядка малости и не требует привлечения теории относительности, 2) характеристики среды — диэлектрическая и магнитная проницаемости и удельная проводимость — являются постоянными величинами.

**1. Уравнения электромагнитного поля  
 в движущейся проводящей среде**

Для неподвижной проводящей среды уравнения Максвелла (см. § 26.2) имеют вид:

$$\text{rot } H = \gamma E, \quad \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } B = 0.$$

Для проводящей среды, движущейся со скоростью  $v$ , замена частных производных полными дает

$$\text{rot } H' = \gamma E', \quad \text{rot } E' = -\frac{dB'}{dt} = -\frac{\partial B'}{\partial t} - (v \text{ grad}) B', \quad \text{div } B' = 0,$$

где штрихованные значения векторов относятся к движущейся среде, т. е. к системе координат, движущейся вместе со средой.

В силу принятых условий

$$(v \text{ grad}) B' = v \text{ div } B' - \text{rot } [vB'],$$

и уравнения Максвелла принимают вид:

$$\text{rot } H' = \gamma E', \quad \text{rot } (E' - [vB']) = -\frac{\partial B'}{\partial t}, \quad \text{div } B' = 0.$$

Сопоставление этих уравнений с уравнениями для неподвижной среды показывает, что  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}' - [\mathbf{v}\mathbf{B}'] = \mathbf{E}$ ; следовательно уравнения Максвелла для движущейся проводящей среды могут быть записаны через величины вектор поля в неподвижной системе координат:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]), \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Из этих уравнений следует, что движение проводящей среды изменяет магнитного поля, а электрическое поле изменяется на величину  $\mathbf{E}_n = [\mathbf{v}\mathbf{B}]$  — поля, возникающего при движении проводящей среды в магнитном поле, в полном соответствии с выведенным в п. 1 § 2.8

## 2. Уравнения электромагнитного поля в движущейся диэлектрической среде

Уравнения Максвелла для неподвижной диэлектрической среды (см. § 26.2):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Для среды, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  и введении для нее штрихованных значений векторов, эти уравнения приобретают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}' &= \frac{d\mathbf{D}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{D}', \\ \text{rot } \mathbf{E}' &= -\frac{d\mathbf{B}'}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{B}', \\ \text{div } \mathbf{D}' &= \rho, \quad \text{div } \mathbf{B}' = 0. \end{aligned}$$

Преобразование, аналогичное приведенному в п. 1 этого параграфа, приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \text{rot } (\mathbf{H}' + [\mathbf{v}\mathbf{D}']) &= \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \rho \mathbf{v}, \\ \text{rot } (\mathbf{E}' - [\mathbf{v}\mathbf{B}']) &= -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D}' &= \rho, \quad \text{div } \mathbf{B}' = 0. \end{aligned}$$

Сопоставление с уравнениями для неподвижной среды приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}' - [\mathbf{v}\mathbf{B}'] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}' + [\mathbf{v}\mathbf{D}'] \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{v}\mathbf{B}'] \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \mu [\mathbf{v}\mathbf{D}'] \end{aligned} \right\}$$

Отсюда можно выразить штрихованные величины через нештрихованные:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{v}\mathbf{B}'] = \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \epsilon \mu [\mathbf{v} [\mathbf{v}\mathbf{D}']] = \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \\ &- \epsilon \mu \{ \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{D}') - \mathbf{v}^2 \mathbf{D}' \} = \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \{ \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{D}') - \mathbf{v}^2 \mathbf{D}' \}. \end{aligned}$$

Так как по принятому выше условию скорость света  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \gg v$ , последними членами, пропорциональными квадрату малого отношения  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , можно пренебречь, и тогда

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{vB}].$$

Аналогично получается соотношение

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \mu [\mathbf{vD}].$$

Таким образом, уравнения Максвелла для движущейся электрической среды, выраженные через значения векторов в неподвижной системе координат, получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{vB}] + \rho \mathbf{v} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{vD}] \end{aligned} \right\} \text{и} \left. \begin{aligned} \operatorname{div} (\mathbf{D} + \epsilon [\mathbf{vB}]) &= 0 \\ \operatorname{div} (\mathbf{B} - \mu [\mathbf{vD}]) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Появление новых членов в этих уравнениях означает, что магнитное поле создается не только изменением электрического поля во времени, но и движением намагниченной среды и движением вместе со средой свободных зарядов, а электрическое поле определяется, помимо изменения магнитного поля во времени, еще движением поляризованной среды.

### § 32.2. Магнитогидродинамические явления и их значение

В последние годы интенсивно развивается магнитогидродинамика — теория явлений, происходящих при движении проводящей жидкой или газообразной среды во внешнем магнитном поле.

Движение проводящей среды в магнитном поле, в отличие от рассмотренного в § 32.1 п. 1 движения без внешнего поля, сопровождается появлением токов, создающих дополнительное магнитное поле. Взаимодействие этих токов с суммарным магнитным полем обуславливает особый характер движения среды. Расчет этого движения и составляет основную задачу магнитогидродинамики.

Магнитогидродинамические явления имеют место в космосе, так как звезды, солнце и ядра планет представляют собой жидкие и газообразные среды, движущиеся в магнитном поле, в динамике межпланетных ионизованных газовых сред, например в ионосфере Земли, находящейся в земном магнитном поле. В условиях космоса даже малые силы электромагнитного характера могут вызвать заметные результаты, так как время действия этих сил весьма велико.

Последние годы характеризуются все большим использованием магнитогидродинамических явлений для прямого преобразования тепловой энергии в электрическую в магнитогидродинамических генераторах, не имеющих вращающихся частей и заменяющих систему котел — турбина — генератор. Магнитогидродинамические явления используются также в работах по созданию управляемой термоядерной

реакции, насосов для расплавленного металла, плазменных реактивных двигателей космических аппаратов и т. п.

Теория магнитогидродинамических явлений создается для общего случая сжимаемой среды, т. е. газа, плотность  $\rho$  (ранее этой же буквой обозначалась объемная плотность заряда) которого переменна; для жидкости используется та же теория при  $\rho = \text{const}$ .

Общая задача магнитогидродинамики требует совместного решения уравнений электромагнитного поля в движущейся проводящей среде (§ 32.1 п. 1) с уравнениями гидродинамики, дополненными членами соответствующими силам электромагнитного происхождения.

### § 32.3. Основные уравнения магнитогидродинамики

Выведенные в § 32.1 п. 1 уравнения электромагнитного поля в движущейся проводящей среде удобно записать в ином виде, исключив из них вектор напряженности электрического поля, так как в дальнейшем основной интерес будет представлять магнитное поле.

Применение операции  $\text{rot}$  для обеих частей первого уравнения и подстановки вектора  $\mathbf{E}$  из второго уравнения дают:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma} \text{rot rot } \mathbf{H} + \text{rot } [\mathbf{vB}] = -\frac{1}{\gamma} (\text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}) + \\ &+ \text{rot } [\mathbf{vB}] = \frac{1}{\gamma} \Delta \mathbf{H} + \text{rot } [\mathbf{vB}] \end{aligned}$$

при  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Так как  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , то

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \mathbf{H} + \text{rot } [\mathbf{vH}].$$

Основными уравнениями гидродинамики для среды с плотностью вещества  $\rho$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , являются уравнение непрерывности и уравнение движения.

У р а в н е н и е н е пр е р ы в н о с т и

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0$$

отражает закон сохранения массы — изменение ее в данном объеме равно массе, прошедшей через поверхность, ограничивающую этот объем.

У р а в н е н и е д в и ж е н и я (уравнение Навье — Стокса)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} + \rho \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}$$

отражает закон Ньютона — произведение массы на ускорение равно действующей силе. Здесь все члены отнесены к единице объема. Первый член правой части соответствует силе, возникающей из-за градиента давления, второй член — силе тяжести, где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести; третий член — силе вязкости, где  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости; четвертый член — силе  $\mathbf{F}$  электромагнитного происхождения.

Выражение для  $\mathbf{F}$  может быть получено из приведенного в § 2.7 п. 1 выражения для силы  $d\mathbf{f}$ , действующей в магнитном поле на элемент тока  $i d\mathbf{l}$ ; ток  $i = \delta dS$  протекает в объеме  $dV = d\mathbf{l}dS$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{f}}{dV} = \frac{[i d\mathbf{l} \mathbf{B}]}{d\mathbf{l}dS} = [\delta \mathbf{B}].$$

Для сжимаемой среды основные уравнения гидродинамики должны быть дополнены: уравнением состояния, связывающим между собой плотность  $\rho$ , давление  $p$  и температуру  $T$ :

$$\rho = \rho(\rho, T),$$

и уравнением теплового баланса, связывающим тепловую энергию  $W_T$  единицы массы, плотность  $\rho$  и полное количество тепла  $\alpha$  в единице объема, обусловленное теплопроводностью, вязкостью и электрическим током:

$$\rho \frac{dW_T}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \alpha.$$

В большинстве случаев основную роль играет теплопроводность. Тогда  $\alpha = \beta \Delta T$ , где  $\beta$  — коэффициент теплопроводности.

Последние два уравнения должны приниматься во внимание лишь тогда, когда изменение давления, плотности и температуры оказывают существенное влияние на движение проводящей среды, как это, например, имеет место при рассмотрении магнитогидродинамических явлений в плазме (см. § 32.5).

Таким образом, полная система уравнений магнитогидродинамики состоит из следующих уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \mathbf{H} + \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}],$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \text{grad} p + \rho \mathbf{g} + \rho \nu \Delta \mathbf{v} + [\delta \mathbf{B}],$$

$$\rho = \rho(\rho, T),$$

$$\rho \frac{dW_T}{dt} = \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \alpha.$$

## § 32.4. Электродинамические и механические следствия

Как видно из системы уравнений магнитогидродинамики, процессы зависят от скорости среды и от ее проводимости. Так как значения скорости и проводимости среды в различных устройствах меняются в весьма широких пределах, решение этой системы уравнений в общем виде крайне сложно. Далее рассматриваются два предельных случая, между которыми находятся действительные режимы.

## 1. Медленное движение среды

При очень медленном движении среды  $v \approx 0$  первое из приведенных выше уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \mathbf{H},$$

аналогичный уравнению теплопроводности или диффузии. Множитель  $\frac{1}{\gamma \mu}$  можно рассматривать как коэффициент диффузии магнитного поля.

Для простейшего случая, когда  $H$  зависит лишь от одной координаты, т. е.  $H = H(x, t)$ , общее решение этого уравнения, как сумма (интеграл) частных решений, имеет вид:

$$H(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\gamma \mu} t} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) dk,$$

где параметр  $k$  и постоянные интегрирования  $A_k$  и  $B_k$  определяются из начальных и граничных условий.

Из приведенного видно, что в медленно движущейся среде магнитное поле диффундирует (просачивается) через вещество от точки к точке, постепенно затухая в толще проводящей среды. Затухание магнитного поля может быть объяснено частичной взаимной компенсацией в данной точке полей, просачивающихся из разных точек и имеющих различные направления. Постоянная времени затухания  $\tau = \frac{\gamma \mu}{k^2}$ , т. е.

пропорциональна произведению  $\gamma \mu$ , кроме того,  $\tau$  пропорционально квадрату размера  $L$  области, занятой токами. Так, для однородной сферы радиуса  $R$  точный расчет дает постоянную времени  $\tau = \frac{\gamma \mu R^2}{\pi^2}$ .

Таким образом, в случае очень больших проводящих масс магнитное поле весьма медленно проникает через вещество. Поэтому в земных условиях, даже при большой удельной проводимости, постоянная времени затухания магнитного поля незначительна. Например, для медной сферы радиусом 1 м она составляет около 7,3 сек. Но в условиях космоса постоянная времени может достигать очень больших значений. Для магнитного поля Солнца по вычислениям Каулинга  $\tau = 10^{10}$  лет.

## 2. Среда с большой проводимостью

При  $\gamma \approx \infty$ , т. е. для движущейся среды с чрезвычайно большой (теоретически бесконечной) удельной проводимостью, исходное уравнение переходит в

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{vH}],$$

Раскрытие вихря векторного произведения

$$\text{rot} [\mathbf{vH}] = (\mathbf{H} \text{ grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{H} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{v}$$

ли  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  дает

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}$$

ли, согласно изложенному в § 32.1,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (32.1)$$

Преобразуя  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$  по формулам векторного анализа (см. приложение 4), можно записать уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\rho} \operatorname{grad} \rho.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (32.1) приводит к равенству

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt}.$$

Делением всех членов этого равенства на  $\rho$  и переносом последнего члена в левую часть равенства, можно прийти к уравнению

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}.$$

Пусть в движущейся жидкости выделена произвольная линия, все точки которой перемещаются вместе с частицами жидкости. Очевидно, что с движением жидкости длина такой линии изменяется. Если в начале элемента длины  $\delta l$  такой линии скорость жидкости равна  $\mathbf{v}$ , то скорость в точке, соответствующей концу элемента длины  $\delta l$ , будет  $\mathbf{v} + (\delta l \operatorname{grad}) \mathbf{v}$ . Следовательно, изменение элемента длины за время  $dt$  будет  $d(\delta l) = (\delta l \operatorname{grad}) \mathbf{v} dt$ , а скорость изменения

$$\frac{d}{dt}(\delta l) = (\delta l \operatorname{grad}) \mathbf{v}.$$

Из последних двух уравнений видно, что изменение векторов  $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$  и  $\delta l$  во времени происходит по одному и тому же закону. Если в начальный момент эти векторы совпадали по направлению, то они останутся параллельными друг другу и в дальнейшем, а величины их будут изменяться пропорционально друг другу. Иными словами, если две бесконечно близкие частицы жидкости в начальный момент времени находились на одной силовой линии, то они всегда останутся на ней. Величина  $\frac{\mathbf{H}}{\rho}$  будет изменяться пропорционально расстоянию между этими частицами.

Применительно к точкам, находящимся на любом конечном расстоянии, это означает, что каждая силовая линия перемещается вместе

с находящимися на ней частицами жидкости. Другими словами, движение магнитного поля сопровождается движением сверхпроводящей жидкости с той же скоростью.

Таким образом, в отличие от жидкости с конечной проводимостью скорость которой меньше скорости движения магнитного поля, в сверхпроводящей жидкости магнитное поле как бы «вморожено» в движущуюся сверхпроводящую жидкость, а величина  $\frac{H}{\rho}$  изменяется в каждой точке пропорционально растяжению силовой линии. Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$  и пропорционально растяжению силовой линии будет меняться сама напряженность поля  $H$ . В результате, при перемещении во времени «жидкого замкнутого контура» он не будет пересекать силовых линий. Следовательно, магнитный поток через любую поверхность, опирающуюся на жидкий контур при движении жидкости, остается неизменным, и в таком контуре не наводится э. д. с.

### 3. Понятие о магнитогидродинамических волнах

Из общих уравнений можно показать, что в проводящей среде с очень большой проводимостью, движущейся во внешнем магнитном поле напряженностью  $H_a$ , возникают магнитогидродинамические волны, распространяющиеся со скоростью

$$a = \pm H_a \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \pm \frac{B_a}{\sqrt{\mu\rho}}.$$

Положительный знак соответствует волнам, идущим в направлении внешнего поля, отрицательный — в обратном направлении. При заданном внешнем магнитном поле эта скорость зависит только от свойств среды — ее плотности и магнитной проницаемости — и не зависит ни от частоты, ни от амплитуды. Скорость распространения магнитогидродинамической волны весьма мала по сравнению со скоростью распространения электромагнитной волны. Так, например, при  $B_a = 1 \text{ тл}$ ,  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$  и  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$  скорость распространения магнитогидродинамической волны составляет всего лишь  $a = 28,2 \text{ м/сек}$ .

Возникновение магнитогидродинамических волн оказывает существенное влияние на работу магнитогидродинамических генераторов, двигателей и насосов.

## § 32.5. Плазма и эффект сжатия

### 1. Плазма и ее свойства

Плазма является своеобразной средой, свойства которой резко отличаются от свойств ранее рассматривавшихся проводящих и диэлектрических сред, и имеющей особое значение для всей магнитогидродинамики.

Плазма представляет собой сильно ионизованный газ и состоит из нейтральных молекул, положительных и отрицательных ионов, в боль-

инстве случаев электронов; суммарный объемный заряд практически равен нулю. Из-за большой концентрации положительных и отрицательных зарядов плазма обладает большой проводимостью.

Плазма возникает при разряде в газах и при нагреве газа.

Газоразрядная (неизотермическая) плазма возникает при различных видах разряда в газах и заполняет целые бласти разрядного промежутка, например все пространство между электродами в низковольтной дуге, главный канал в искровом разряде и молнии и др.

Степень ионизации в большинстве искусственно создаваемых разрядов не очень велика, однако в космических условиях ионизация может быть почти полной.

В газоразрядной плазме все заряженные частицы находятся в ускоряющем электрическом поле, создающем разряд и дающем энергию для их хаотического движения. Число столкновений электронов с частицами газа, при которых электроны отдают большую часть энергии, весьма мало по сравнению с числом упругих столкновений, при которых электроны из-за их малой массы могут отдать лишь ничтожно малую часть своей энергии. Поэтому средняя кинетическая энергия нейтральных частиц газа очень мала по сравнению со средней кинетической энергией электронов.

В газоразрядной плазме нет термодинамического равновесия, что вызывает неустойчивость плазмы. Состояние газа в виде неизотермической плазмы поддерживается лишь за счет энергии проходящего через нее разрядного тока. При исчезновении внешнего электрического поля газоразрядная плазма быстро исчезает — происходит деионизация газа.

Упорядоченная скорость заряженных частиц плазмы в электрическом поле очень мала по сравнению со скоростями хаотического движения. Поэтому вводят условное понятие о температуре  $T_e$  электронного газа, определяемой из условия, что средняя энергия хаотического движения электронов равна  $\frac{3}{2} kT_e$ , где  $k$  — постоянная Больцмана.

Изотермическая плазма возникает при очень высоких температурах, достаточных для термической ионизации газа. Такая плазма находится в термодинамическом равновесии и не исчезает, предоставленная самой себе. Число рекомбинирующих в единицу времени заряженных частиц равно числу частиц, возникающих в результате ионизации. В такой плазме средние энергии различных частиц одинаковы. Изотермическая плазма существует, например, в веществе звезд, обладающих высокой температурой.

Удельная проводимость ионизованного газа зависит от длины свободного пробега между двумя соударениями и, следовательно, определяется температурой, плотностью и степенью ионизации. Чем больше плотность, тем больше проводимость. Однако для полностью ионизованного газа удельная проводимость практически не зависит от плотности. Величина удельной проводимости в зависимости от указанных параметров лежит в пределах  $1 \div 10^6$  см/м.

## 2. Эффект сжатия

Тлеющий разряд при низком давлении газа и малом токе разряда заполняет все пространство между электродами. При больших давлениях и токах происходит «отшнуровывание» разряда, когда весь разрядный ток проходит по узкому каналу — «шнур», как это имеет место, например, при искровом разряде в воздухе при атмосферном давлении. Отшнуровывание разряда представляет собой сложное явление, до сих пор еще полностью не исследованное.

Одной из причин отшнуровывания разряда является его падающая характеристика  $u(i)$  или  $E(\delta)$ . Разряд стремится протекать при наименьшем напряжении и наибольшем токе, т. е. при наименьшей напряженности поля и наибольшей плотности тока. При том же значении разрядного тока напряженность поля будет меньше, когда ток сосредоточен в тонком канале — шнуре, чем в случае заполнения разрядом всего междуэлектродного пространства, так как шнуру соответствует большая плотность тока и, следовательно, меньшая напряженность поля.

Другой причиной является высокая температура газа в канале разряда, достигающая нескольких тысяч градусов, имеющая наибольшее значение на оси канала. Это обеспечивает наибольшую удельную проводимость на оси канала, где и сосредоточивается основная доля тока.

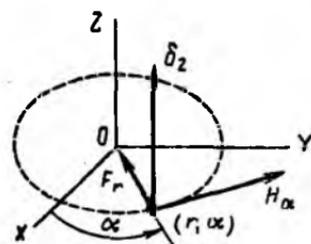


Рис. 32.1

Кроме указанных причин имеет место сжатие шнура тока собственным магнитным полем — эффект сжатия (пинч-эффект). Пусть разряд происходит в цилиндре, ось которого совпадает с осью  $Z$  цилиндрической системы координат (рис. 32.1). Плотность тока имеет единственную составляющую по оси  $Z$  и ввиду аксиальной симметрии зависит только от расстояния от оси:  $\delta_z = \delta_z(r)$ . Тогда, применяя закон полного тока к окружности радиуса  $r$ , при условии симметрии задачи, можно найти единственную составляющую напряженности магнитного поля:

$$H_\alpha = \frac{1}{r} \int_0^r \delta_z r dr, \text{ откуда } \delta_z = \frac{H_\alpha}{r} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial r}.$$

Согласно изложенному в § 32.3, сила, действующая на единицу объема, находящегося на расстоянии  $r$  от оси и равная

$$\mathbf{F} = \mu [\delta \mathbf{H}],$$

имеет единственную радиальную составляющую

$$F_r = \mu \delta_z H_\alpha = \mu \left( \frac{H_\alpha^2}{r} + H_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial r} \right),$$

направленную к оси  $Z$ .

Под действием этой силы все заряженные частицы приобретают составляющую скорости в направлении к оси  $Z$ . Поэтому давление газа

растет по мере приближения к оси. В равновесном состоянии

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -F_r = -\left(\frac{H_a^2}{r} + H_a \frac{\partial H_a}{\partial r}\right),$$

куда после интегрирования

$$p = p_0 - \mu \int_0^r \frac{H_a^2}{r} dr - \mu \frac{H_a^2}{2},$$

здесь  $p_0$  — давление на оси, так как при  $r = 0$  напряженность поля  $(H_a)_{r=0} = 0$ . Такое распределение давления влечет за собой увеличение плотности тока по мере приближения к оси  $Z$ . Таким образом, магнитное поле тока разряда концентрирует разряд около оси.

Движение заряженных частиц к оси приведет к возрастанию плотности час-

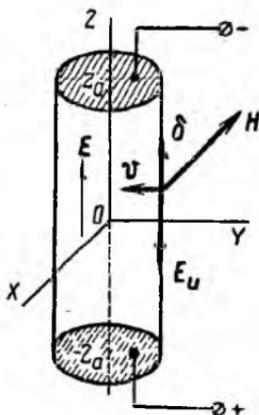


Рис. 32.2

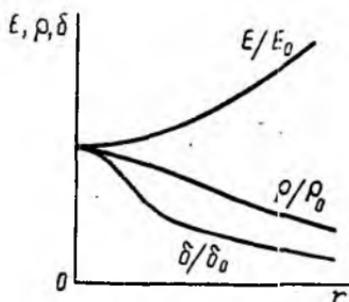


Рис. 32.3

тиц у оси, пока оно не скомпенсируется диффузией, направленной от оси и обусловленной градиентом плотности. При равновесии радиальная составляющая плотности тока будет равна нулю, а составляющая вдоль оси  $Z$  возрастает по сравнению с вызванной внешним электрическим полем, так как проводимость растет вместе с плотностью газа.

В полностью ионизованном газе, что соответствует условиям космоса, ввиду независимости проводимости от плотности, возрастание давления газа с уменьшением расстояния от оси не повлечет за собой увеличения плотности тока, создаваемого внешним электрическим полем.

В этом случае будет иметь место еще одно явление — обратный поверхностный эффект. Пусть газ ионизован внутри цилиндра радиуса  $r_a$  и двумя круглыми плоскими электродами ( $z = \pm z_0$ ) (рис. 32.2). При подключении постоянного напряжения к электродам между ними создается электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , но устанавливающийся ток из-за обычного поверхностного эффекта пойдет лишь в тонком слое у боковой поверхности цилиндра. Возникает магнитное поле и с ним сила, действующая на газ в направлении к оси  $Z$ . Движение газа со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле создает дополнительное электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_k = [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , направленное против внешнего поля.

Так как при сжатии магнитным полем температура газа растет по мере приближения к оси, то это влечет за собой дополнительное увеличение градиента давления, а следовательно, скорость  $v$  растет по мере приближения к оси. Поэтому встречное индуцированное поле  $E_{\text{и}}$  также растет с уменьшением расстояния от оси, а результирующее поле оказывается наименьшим на оси. Соответственно этому плотность тока будет наибольшей на оси, уменьшаясь с увеличением  $r$ . В этом и заключается явление обратного поверхностного эффекта. На рис. 32.3 представлены зависимости давления, плотности тока и напряженности электрического поля от радиуса. Кривые построены в относительных координатах, индекс «0» соответствует значениям величин на оси.

Эффект сжатия имеет большое значение для управляемой термоядерной реакции, для магнитогиродинамических двигателей и т. п.

### § 32.6. Магнитогиродинамический генератор и двигатель

Магнитогиродинамический генератор, принципиальная схема которого приведена на рис. 32.4, представляет собой канал  $K$  с двумя стенками из изоляционного материала; две другие стенки  $\mathcal{E}$  металлические и являются электродами. По каналу в магнитном поле возбуждения, направленном перпендикулярно оси канала, движется проводящая среда. При движении в магнитном поле в ней возникает электрическое поле  $E = [vB]$ , перпендикулярное направлению движения и направлению поля возбуждения.

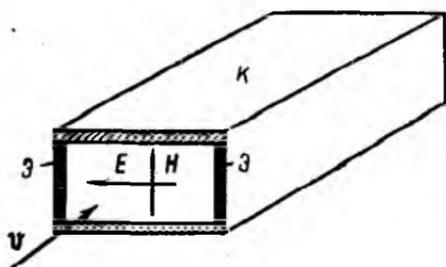


Рис. 32.4

Это индуцированное электрическое поле определяет э. д. с. генератора, снимаемую с электродов  $\mathcal{E}$ .

При работе с газообразной средой тепловая энергия предварительно преобразуется в энергию движения нагретого газа, а последняя преобразуется в генераторе в электрическую. Работа генератора на нагрузку связана с появлением силы на единицу объема  $F = [\delta B]$ , направленной против движения плазмы. Таким образом, увеличение нагрузки генератора сопровождается уменьшением скорости плазмы в канале.

Магнитное поле возбуждения, необходимое для работы магнитогиродинамического генератора, так же как и в обычных индуктивных генераторах, сохраняет свою энергию постоянной: в электрическую энергию она не преобразуется.

Магнитогиродинамический генератор обратим, т. е. при подаче напряжения постороннего источника на электроды  $\mathcal{E}$ , ток в проводящей среде взаимодействует с полем возбуждения и среда ускоряется; машина работает в двигательном режиме. Например, в электрореактивных двигателях космических аппаратов плазма выбрасывается в окружающее пространство, что создает тягу силой отдачи выбрасываемых частиц.

Для перекачки жидкого металла применяются также насосы трех-зного тока. В них, аналогично вращающемуся магнитному полю (гл. § 12.6), создается бегущее поле, увлекающее за собой индуцируемые им токи в жидком металле, а следовательно, и сам металл.

Подобные машины могут быть использованы и в генераторном режиме.

Аналогично магнитогидродинамическим машинам возможно создание электрогидродинамических машин, основанных на движении непроводящих сред в электрическом поле.

\* \* \*

Развитие теоретических основ электротехники тесно связано с решением проблем современной физики и развитием всех отраслей техники. Существует еще много теоретических вопросов, решение которых имеет важное значение для практических задач электротехники. Например, в связи с широким использованием в технике нелинейных элементов, в частности полупроводников, ферромагнитной и сегнетоэлектрической аппаратуры, первостепенное значение приобретает дальнейшая разработка теории нелинейных цепей и расчета электромагнитных полей в нелинейных средах. С развитием импульсной техники и быстродействующих вычислительных машин особую роль приобретают методы исследования переходных процессов как в линейных и нелинейных цепях, так и в электромагнитном поле. В связи с развитием теории автоматического регулирования и технической кибернетики необходимо дальнейшее развитие методов синтеза электрических цепей, а также методов исследования случайных процессов в электрических цепях.

Вопросы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую, создания управляемых термоядерных реакторов, электрореактивных двигателей космических аппаратов и т. п. требуют дальнейшего углубления теории электромагнитного поля в движущихся средах, магнитогидродинамических и электрогидродинамических процессов и методов их расчета.

Наличие вычислительных машин, позволяющих быстро решать сложные математические задачи, открывает новые возможности в разработке аналитических методов расчета. Вместе с тем сохраняет свое значение развитие методов электрического моделирования и экспериментального исследования электромагнитных и электромеханических процессов.

Одной из важнейших проблем современной науки является раскрытие строения электромагнитного поля, что, несомненно, должно вызвать революцию в технике.

Нет сомнения, что в ближайшие годы перечисленные проблемы получат значительное развитие. Поэтому будущим инженерам и научным работникам в области электро- и радиотехники для успешного решения стоящих перед ними задач необходимо непрерывно совершенствовать свои знания, что возможно только на базе глубокого изучения теоретических основ электротехники.

Связь между единицами в системах СИ, СГСЕ<sub>0</sub> и СГСМ<sub>0</sub>

Наименование величины	Система СИ		Число единиц, равное единице в системе СИ, в системах	
	наименование	обозначение	СГСЕ <sub>0</sub>	СГСМ <sub>0</sub>
Сила . . . . .	ньютон	<i>н</i>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>5</sup>
Энергия . . . . .	джоуль	<i>дж</i>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>
Мощность . . . . .	ватт	<i>вт</i>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>
Заряд . . . . .	кулон	<i>к</i>	3 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-1</sup>
Смещение . . . . .	—	<i>к/м<sup>2</sup></i>	3 · 10 <sup>5</sup>	10 <sup>-5</sup>
Потенциал, напряжение, э. д. с. . . . .	вольт	<i>в</i>	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$	10 <sup>9</sup>
Напряженность электрического поля . . . . .	—	<i>в/м</i>	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$	10 <sup>9</sup>
Емкость . . . . .	фарада	<i>ф</i>	9 · 10 <sup>11</sup>	10 <sup>-9</sup>
Диэлектрическая проницаемость . . . . .	—	<i>ф/м</i>	9 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-11</sup>
Ток . . . . .	ампер	<i>а</i>	3 · 10 <sup>9</sup>	10 <sup>-1</sup>
Сопротивление . . . . .	ом	<i>ом</i>	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10 <sup>9</sup>
Проводимость . . . . .	сименс	<i>сим</i>	9 · 10 <sup>11</sup>	10 <sup>-9</sup>
Напряженность магнитного поля . . . . .	—	<i>а/м</i>	12π · 10 <sup>7</sup>	4π · 10 <sup>-3</sup>
Магнитный поток . . . . .	вебер	<i>вб</i>	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$	10 <sup>8</sup>
Магнитная индукция . . . . .	тесла	<i>тл</i>	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-8}$	10 <sup>4</sup>
Индуктивность . . . . .	генри	<i>гн</i>	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	10 <sup>9</sup>
Магнитная проницаемость . . . . .	—	<i>гн/м</i>	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-13}$	10 <sup>7</sup>
Намагничивающая сила . . . . .	ампер	<i>а</i>	12π · 10 <sup>9</sup>	4π · 10 <sup>-1</sup>
Магнитный момент . . . . .	—	<i>вб · м</i>	12π	4π · 10 <sup>-10</sup>

## Дольные и кратные единицы

При пользовании единицами, большими или меньшими, чем основные, принято определять единицы в десятичной системе, т. е. соотношение с основной единицей выражается числом  $10^n$ , где  $n$  может принимать любые целые значения. Для производных единиц приняты обозначения в виде букв, которые ставят перед обозначением основной единицы.

Соотношение с основной единицей	Обозначения		Произношение	Соотношение с основной единицей	Обозначения		Произношение
	международные	русские			международные	русские	
$10^6$	<i>M</i>	<i>мг</i>	мега	$10^{-2}$	<i>с</i>	<i>с</i>	сантиметры
$10^3$	<i>k</i>	<i>к</i>	кило	$10^{-3}$	<i>т</i>	<i>м</i>	миллиметры
$10^2$	<i>h</i>	<i>г</i>	гекто	$10^{-6}$	<i>μ</i>	<i>мк</i>	микрон
10	<i>D</i>	<i>дк</i>	дека	$10^{-12}$	<i>p</i>	<i>п</i>	пикометры
$10^{-1}$	<i>d</i>	<i>д</i>	деци				

Разложение в ряд Фурье

График $f(\omega t)$	Разложение в ряд $f(\omega t)$	$A$	$A_{cp}$	$k_{\phi}$	$k_{\Sigma}$	$k_{\eta}$
	$f(\omega t) = A_m \sin \omega t$	$\frac{A_m}{\sqrt{2}}$	$\frac{2A_m}{\pi}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1
	$f(\omega t) = \frac{4\alpha_{max}}{\alpha\pi} \times$ $\times \left( \sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{1}{9} \times \right.$ $\times \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \times$ $\times \sin 5\alpha \cdot \sin 5\omega t + \dots +$ $\left. + \frac{1}{k^2} \sin k\alpha \sin k\omega t + \dots \right)$	$\alpha_{max} \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}$	$\alpha_{max} \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right)$	$\frac{\sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}}{1 - \frac{\alpha}{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}}$	$\frac{2\sqrt{2} \sin \alpha}{\alpha\pi \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}}$
	$f(\omega t) = \frac{8\alpha_{max}}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \right.$ $- \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \times$ $\times \sin 5\omega t - \dots +$ $\left. + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \sin k\omega t + \dots \right)$	$\frac{\alpha_{max}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\alpha_{max}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}$



## Формулы векторного анализа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a},$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}.$$

## Приложение 5

## Дифференциальные операции векторного анализа

Цилиндрические координаты  $(r, \alpha, z)$ 

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\alpha + \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты  $(r, \theta, \alpha)$ 

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial (a_\alpha \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_\theta}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_\alpha)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\alpha,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial (\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha},$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

# О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Словесное описание . . . . .	3
Введение. Электротехника и ее теоретические основы . . . . .	5

## Часть первая ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НИХ

<i>Глава первая. Параметры электрических и магнитных цепей . . . . .</i>	9
§ 1.1. Общие определения цепей и их параметров . . . . .	9
§ 1.2. Емкость и ее расчет . . . . .	10
§ 1.3. Взаимоемкость и ее расчет . . . . .	14
§ 1.4. Линейные и нелинейные диэлектрики и конденсаторы . . . . .	16
§ 1.5. Сопротивление и его расчет . . . . .	19
§ 1.6. Линейные и нелинейные резисторы . . . . .	22
§ 1.7. Индуктивность и ее расчет . . . . .	24
§ 1.8. Взаиминдуктивность и ее расчет . . . . .	30
§ 1.9. Линейные и нелинейные катушки индуктивности . . . . .	32
<i>Глава вторая. Энергия в электрических цепях и ее прямое и обратное преобразование в механическую энергию . . . . .</i>	35
§ 2.1. Общие сведения . . . . .	35
§ 2.2. Энергия системы заряженных проводящих тел . . . . .	36
§ 2.3. Взаимные преобразования энергии электрического поля и механической энергии . . . . .	39
§ 2.4. Движение заряженной частицы в электрическом поле . . . . .	44
§ 2.5. Энергия системы контуров с токами . . . . .	46
§ 2.6. Взаимные преобразования энергии магнитного поля и механической энергии . . . . .	49
§ 2.7. Проводник с током в магнитном поле . . . . .	56
§ 2.8. Заряженная частица в магнитном поле . . . . .	58

## Часть вторая ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

<i>Глава третья. Расчет линейных электрических цепей . . . . .</i>	61
§ 3.1. Законы электрических цепей . . . . .	61
§ 3.2. Источники напряжения и тока и их эквивалентность . . . . .	64
§ 3.3. Линия передачи и работа источника на нагрузку . . . . .	66
§ 3.4. Расчет цепей методами преобразования и пропорционального пересчета . . . . .	69
§ 3.5. Расчет цепей по законам Кирхгофа . . . . .	71
§ 3.6. Метод наложения . . . . .	74
§ 3.7. Метод взаимности . . . . .	76
§ 3.8. Метод эквивалентного источника энергии . . . . .	77
§ 3.9. Метод контурных токов . . . . .	79
§ 3.10. Метод узловых напряжений . . . . .	81
<i>Глава четвертая. Расчет нелинейных электрических цепей . . . . .</i>	84
§ 4.1. Основные сведения . . . . .	84
§ 4.2. Приведение нелинейных цепей к линейным . . . . .	84

§ 4.3.	Графические методы расчета нелинейных цепей . . . . .	
§ 4.4.	Метод последовательных приближений . . . . .	
<b>Глава пятая. Расчет магнитных цепей . . . . .</b>		
§ 5.1.	Законы магнитных цепей . . . . .	
§ 5.2.	Расчет линейных магнитных цепей . . . . .	
§ 5.3.	Расчет нелинейных магнитных цепей . . . . .	
§ 5.4.	Расчет цепи с постоянным магнитом . . . . .	

### Часть третья

## ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

<b>Глава шестая. Цепи переменного тока . . . . .</b>			100
§ 6.1.	Периодические напряжения и токи . . . . .		100
§ 6.2.	Цепь с сопротивлением . . . . .		105
§ 6.3.	Цепь с индуктивностью и цепь с емкостью . . . . .		107
§ 6.4.	Измерения в цепях переменного тока . . . . .		110
<b>Глава седьмая. Анализ и расчет простых цепей переменного тока . . . . .</b>			111
§ 7.1.	Цепь с последовательным соединением участков с сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью . . . . .		111
§ 7.2.	Резонанс напряжений . . . . .		117
§ 7.3.	Цепь с параллельным соединением участков с сопротивлением, с индуктивностью и с емкостью. Резонанс токов . . . . .		121
§ 7.4.	Элементарные методы расчета простых цепей переменного тока . . . . .		125
<b>Глава восьмая. Символический метод расчета цепей . . . . .</b>			132
§ 8.1.	Символическое изображение синусоидальных функций . . . . .		132
§ 8.2.	Применение символического метода для расчета цепей переменного тока . . . . .		134
§ 8.3.	Расчет цепей переменного тока символическим методом . . . . .		137
§ 8.4.	Метод дуальных цепей . . . . .		140
<b>Глава девятая. Основы теории четырехполюсников и фильтров . . . . .</b>			141
§ 9.1.	Уравнения четырехполюсников . . . . .		141
§ 9.2.	Холостой ход и короткое замыкание четырехполюсника . . . . .		144
§ 9.3.	Определение параметров четырехполюсника . . . . .		145
§ 9.4.	Повторное сопротивление и коэффициент распространения симметричного четырехполюсника . . . . .		147
§ 9.5.	Передаточные функции и обратные связи четырехполюсников . . . . .		148
§ 9.6.	Цепные схемы и электрические фильтры . . . . .		149
§ 9.7.	Активные четырехполюсники . . . . .		152
<b>Глава десятая. Линейные и круговые диаграммы . . . . .</b>			153
§ 10.1.	Векторные уравнения . . . . .		153
§ 10.2.	Действия над кривыми . . . . .		155
§ 10.3.	Диаграмма для линии передачи энергии к приемнику . . . . .		159
§ 10.4.	Диаграмма для четырехполюсника . . . . .		162
<b>Глава одиннадцатая. Цепи со взаимной индукцией . . . . .</b>			163
§ 11.1.	Основные соотношения . . . . .		163
§ 11.2.	Последовательное и параллельное соединения с взаимной индукцией . . . . .		165
§ 11.3.	Расчет сложных цепей с взаимной индукцией . . . . .		168
§ 11.4.	Трансформатор без стального сердечника . . . . .		169
§ 11.5.	Трансформатор и катушка индуктивности со стальным сердечником . . . . .		172
§ 11.6.	Резонанс в двух индуктивно связанных цепях . . . . .		177
<b>Глава двенадцатая. Трехфазная цепь . . . . .</b>			179
§ 12.1.	Основные понятия . . . . .		179
§ 12.2.	Соединение звездой . . . . .		182

3.	Соединение треугольником . . . . .	187
4.	Мощность трехфазных систем и ее измерение . . . . .	190
5.	Сравнение трехфазных и однофазной систем . . . . .	192
6.	Пульсирующее и вращающееся магнитные поля . . . . .	193
7.	Основы метода симметричных составляющих . . . . .	196
<i>и тринадцатая. Периодические несинусоидальные напряжения и токи в линейных цепях . . . . .</i>		200
1.	Разложение периодических функций в ряд Фурье . . . . .	200
2.	Действующее значение и мощность при несинусоидальных напряжениях и токах . . . . .	204
13.3.	Расчет линейных цепей при несинусоидальных напряжениях и токах . . . . .	206
13.4.	Влияние параметров цепи на форму кривой напряжения или тока. Резонансные фильтры . . . . .	208
§ 13.5.	Высшие гармоники в трехфазных цепях . . . . .	210
<i>Глава четырнадцатая. Нелинейные цепи переменного тока . . . . .</i>		213
§ 14.1.	Нелинейные элементы при переменном токе и методы анализа нелинейных цепей . . . . .	213
§ 14.2.	Устройства, основанные на нелинейной зависимости мгновенных значений напряжения и тока . . . . .	222
§ 14.3.	Явления и устройства, основанные на нелинейной зависимости действующих значений напряжения и тока . . . . .	228
<i>Глава пятнадцатая. Переходные процессы в линейных цепях и их расчет классическим методом . . . . .</i>		235
§ 15.1.	Общие сведения . . . . .	235
§ 15.2.	Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления и индуктивности . . . . .	237
§ 15.3.	Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления и емкости . . . . .	242
§ 15.4.	Переходные процессы в цепи с последовательным соединением сопротивления, индуктивности и емкости . . . . .	245
§ 15.5.	Переходные процессы в сложных цепях . . . . .	251
<i>Глава шестнадцатая. Переходные процессы в нелинейных цепях . . . . .</i>		254
§ 16.1.	Устойчивость режима в нелинейной цепи . . . . .	254
§ 16.2.	Методы расчета переходных процессов . . . . .	256
§ 16.3.	Метод линеаризации интервалов на примере автоколебательной цепи . . . . .	257
§ 16.4.	Методы расчета переходных процессов на примере включения катушки индуктивности со стальным сердечником на постоянное напряжение . . . . .	258
§ 16.5.	Включение катушки индуктивности со стальным сердечником на синусоидальное напряжение . . . . .	263
§ 16.6.	Изображение переходных процессов в фазовой плоскости . . . . .	264
<i>Глава семнадцатая. Расчет переходных процессов методами наложения, спектральным и операторным . . . . .</i>		267
§ 17.1.	Метод наложения . . . . .	267
§ 17.2.	Спектральный метод . . . . .	272
§ 17.3.	Операторный метод . . . . .	277
<i>Глава восемнадцатая. Обобщенные методы расчета линейных электрических цепей . . . . .</i>		287
§ 18.1.	Основные положения . . . . .	287
§ 18.2.	Метод определителей . . . . .	287
§ 18.3.	Матричный метод . . . . .	288
§ 18.4.	Топологический метод . . . . .	291
§ 18.5.	Метод направленных графов . . . . .	293
<i>Глава девятнадцатая. Синтез электрических цепей . . . . .</i>		299
§ 19.1.	Задачи синтеза . . . . .	299
§ 19.2.	Синтез двухполюсников методом цепных дробей . . . . .	299

§ 19.3.	Синтез двухполюсников методом простых дробей . . . . .	
§ 19.4.	Дифференцирующие и интегрирующие цепи . . . . .	
§ 19.5.	О синтезе нелинейной цепи . . . . .	
<b>Глава двадцатая. Цепи с распределенными параметрами . . . . .</b>		
§ 20.1.	Сосредоточенные и распределенные параметры цепей . . . . .	
§ 20.2.	Уравнения однородной линии . . . . .	
§ 20.3.	Решение уравнений однородной линии для установившихся режимов . . . . .	
§ 20.4.	Бегущие и стоячие волны . . . . .	
§ 20.5.	Распределение напряжения и тока вдоль линии . . . . .	
§ 20.6.	Переходные процессы в однородных линиях . . . . .	

## Часть четвертая ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

<b>Глава двадцать первая. Уравнения постоянных электрических и магнитных полей . . . . .</b>			<b>326</b>
§ 21.1.	О теории электромагнитного поля . . . . .		326
§ 21.2.	Электромагнитное поле . . . . .		326
§ 21.3.	Электрическое поле в диэлектрической среде . . . . .		328
§ 21.4.	Электрическое поле в проводящей среде . . . . .		331
§ 21.5.	Магнитное поле . . . . .		333
<b>Глава двадцать вторая. Расчет полей по уравнению Лапласа. Моделирование полей . . . . .</b>			<b>336</b>
§ 22.1.	О расчете постоянных электрических и магнитных полей . . . . .		336
§ 22.2.	Теорема единственности решения уравнения Лапласа . . . . .		338
§ 22.3.	Метод разделения переменных . . . . .		339
§ 22.4.	Цилиндр в однородном поле . . . . .		340
§ 22.5.	Магнитный цилиндрический экран . . . . .		343
§ 22.6.	Моделирование полей . . . . .		345
<b>Глава двадцать третья. Расчет полей по уравнению Пуассона . . . . .</b>			<b>349</b>
§ 23.1.	О расчете полей по уравнению Пуассона . . . . .		349
§ 23.2.	Электрическое поле цилиндра с объемным зарядом и магнитное поле цилиндра с током . . . . .		351
§ 23.3.	Электрическое поле и ток в вакуумной лампе . . . . .		354
§ 23.4.	Магнитное поле двухпроводной линии из проводов прямоугольного сечения . . . . .		356
<b>Глава двадцать четвертая. Расчет полей по уравнениям Максвелла . . . . .</b>			<b>357</b>
§ 24.1.	О расчете полей по уравнениям Максвелла . . . . .		357
§ 24.2.	Электрическое и магнитное поле в неоднородной среде . . . . .		359
§ 24.3.	Магнитное поле ферромагнитной трубы с током и электрическое поле заряженной трубы . . . . .		361
<b>Глава двадцать пятая. Расчет полей методом зеркальных изображений . . . . .</b>			<b>363</b>
§ 25.1.	Метод зеркальных изображений . . . . .		363
§ 25.2.	Электрическое поле точечных зарядов, расположенных вблизи плоской поверхности раздела двух сред . . . . .		364
§ 25.3.	Электрическое поле линейных зарядов, расположенных параллельно поверхностям раздела сред . . . . .		367
§ 25.4.	Магнитное поле линейных токов, расположенных параллельно плоским поверхностям раздела сред . . . . .		369
<b>Глава двадцать шестая. Уравнения электромагнитного поля . . . . .</b>			<b>370</b>
§ 26.1.	Постоянное электромагнитное поле . . . . .		370
§ 26.2.	Полная система уравнений электромагнитного поля в дифференциальной форме . . . . .		374

§ 26.3. Теорема Умова—Пойнтинга . . . . .	377
§ 26.4. Электродинамические потенциалы . . . . .	379
§ 26.5. Основные уравнения электромагнитного поля в символической форме . . . . .	383
§ 26.6. Соотношение между токами проводимости и смещения . . . . .	384
<i>Глава двадцать седьмая. Излучение электромагнитных волн . . . . .</i>	<i>384</i>
§ 27.1. Явление излучения. Опыты Герца и Попова . . . . .	384
§ 27.2. Электромагнитное поле диполя Герца . . . . .	386
§ 27.3. Ближняя и дальняя зоны . . . . .	389
§ 27.4. Мощность и сопротивление излучения . . . . .	391
<i>Глава двадцать восьмая. Распространение электромагнитных волн . . . . .</i>	<i>393</i>
§ 28.1. Плоская волна в диэлектрической среде . . . . .	393
§ 28.2. Плоская волна в проводящей среде . . . . .	397
§ 28.3. Плоская волна в полупроводящей среде . . . . .	401
<i>Глава двадцать девятая. Поверхностный эффект . . . . .</i>	<i>403</i>
§ 29.1. Явление поверхностного эффекта . . . . .	403
§ 29.2. Неравномерное распределение переменного магнитного потока в плоском листе . . . . .	403
§ 29.3. Неравномерное распределение переменного тока в проводе кругового сечения . . . . .	405
§ 29.4. Эффект близости для двух параллельных шин . . . . .	410
<i>Глава тридцатая. Электромагнитное экранирование. . . . .</i>	<i>411</i>
§ 30.1. О расчете электромагнитных экранов . . . . .	411
§ 30.2. Тонкостенный цилиндрический экран в однородном поле . . . . .	413
<i>Глава тридцать первая. Переходные процессы в электромагнитном поле. . . . .</i>	<i>417</i>
§ 31.1. О расчете переходных процессов в электромагнитном поле . . . . .	417
§ 31.2. Установление магнитного потока в пластине . . . . .	418
§ 31.3. Установление тока в проводе кругового сечения . . . . .	421
<i>Глава тридцать вторая. Электромагнитное поле в движущихся средах и основы магнитогидродинамики . . . . .</i>	<i>425</i>
§ 32.1. Электромагнитное поле в движущихся средах . . . . .	425
§ 32.2. Магнитогидродинамические явления и их значение . . . . .	427
§ 32.3. Основные уравнения магнитогидродинамики . . . . .	428
§ 32.4. Электродинамические и механические следствия . . . . .	429
§ 32.5. Плазма и эффект сжатия . . . . .	432
§ 32.6. Магнитогидродинамический генератор и двигатель . . . . .	436
<i>Приложение 1. Связь между единицами в системах СИ, СГС<sub>е</sub> и СГС<sub>м</sub> . . . . .</i>	<i>438</i>
<i>Приложение 2. Дольные и кратные единицы . . . . .</i>	<i>439</i>
<i>Приложение 3. Разложение в ряд Фурье . . . . .</i>	<i>440</i>
<i>Приложение 4. Формулы векторного анализа . . . . .</i>	<i>442</i>
<i>Приложение 5. Дифференциальные операции векторного анализа . . . . .</i>	<i>442</i>

Каплянский Александр Евсеевич,  
Лысенко Алексей Петрович,  
Полотовский Лев Соломонович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Редактор *В. В. Данилова*  
Художественный редактор *Т. М. Скворцова*  
Переплет художника *И. И. Карникова*  
Техн. редактор *Э. М. Чижевский*  
Корректор *С. К. Марченко*

Т-03004. Слано в набор 16/VII-71 г. Подп. к печати 25/I-72 г.

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Объем 28 печ. л. Уч.-изд. л. 23,67.

Изд. № ЭР-87. Тираж 72 000 экз. Цена 96 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов  
издательства «Высшая школа» на 1972 г. Позиция № 96

Издательство «Высшая школа»

Москва, К-61, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26. Зак. № 1813.