

Zur Theorie
der
Zentrifugalpumpen

Von

Dr. techn. Egon R. v. Grünebaum
Ingenieur

Mit 89 Textfiguren und 3 Tafeln



Berlin
Verlag von **Julius Springer**
1905

ISBN 978-3-642-50523-2 ISBN 978-3-642-50833-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-50833-2

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Vorwort.

Die vorliegende Theorie der Zentrifugalpumpen entstand aus der Untersuchung der Ergebnisse von Versuchen, welche ich im Auftrage der Maschinenfabrik Andritz Aktien-Gesellschaft in Andritz-Graz seit dem Jahre 1902 vornahm, und war mit Ausnahme des den „Schwebezustand“ behandelnden Abschnittes (S. 66 f.) schon im Frühjahr 1904 abgeschlossen.

Die angeführten Versuchsergebnisse sind zum Teil an älteren Pumpen gewonnen; leider mußte ich es mir aus geschäftlichen Rücksichten der genannten Firma versagen, Ergebnisse neuester Pumpen von weit höheren Nutzeffekten als die mitgeteilten sowie konstruktive Details zu besprechen.

Ich fühle mich verpflichtet, auch an dieser Stelle Herrn Professor Budau für den mir freundlichst erteilten Hinweis auf die bestehende Analogie zwischen dem bei einer in Gang befindlichen Zentrifugalpumpe eintretenden Zustand, wenn die Förderflüssigkeit in der Rohrleitung bis zu einer gewissen Höhe steht, ohne auszutreten, und dem Schwebezustand in der Flugtechnik, sowie Herrn Ingenieur Karl Haiderer für dessen Mitarbeit bei

Herstellung der Versuchseinrichtung und Teilnahme an den Versuchen selbst meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Schließlich sei auch der Verlagsbuchhandlung für die gewohnt sorgfältige Ausstattung, welche sie auch dieser Schrift zuteil werden ließ, bestens gedankt.

Wien, im September 1905.

Dr. v. Grünebaum.

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|-----------------------------|-------|
| Einleitung | 1 |

Erster Abschnitt.

Aufstellung und Diskussion der allgemeinen Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung durch eine Zentrifugalpumpe.

| | |
|--|----|
| A. Aufstellung der Gleichung | 3 |
| B. 1. Diskussion der allgemeinen Gleichung | 15 |
| 2. Beispiele | 20 |
| 3. Konstante Tourenzahl | 23 |
| 4. Die Fälle: $h = 0$, $c_2 = 0$ | 28 |
| C. Aufstellung der allgemeinen Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung durch eine Zentrifugalpumpe auf dem Versuchswege | 31 |

Zweiter Abschnitt.

Stoßfreie Geschwindigkeiten und maximale Förderhöhen.

| | |
|--|----|
| A. Stoßfreie Geschwindigkeiten | 32 |
| B. Maximale Förderhöhen (Drücke) | 40 |
| C. Bedingungen für die Übereinstimmung der Punkte stoßfreier Geschwindigkeiten mit den Punkten maximalen Druckes | 44 |
| D. Beispiele | 48 |

Dritter Abschnitt.

Kraftbedarf und Wirkungsgrad.

| | Seite |
|---|-------|
| A. Aufstellung der allgemeinen Gleichung für den Kraftbedarf | 51 |
| B. Der Kraftbedarf und seine Einzelteile | 56 |
| C. Spezialfälle | 62 |
| 1. Geförderte Flüssigkeitsmenge gleich Null | 63 |
| 2. Maximale Flüssigkeitsmenge | 63 |
| 3. Maximale Förderhöhen | 64 |
| 4. Stoßfreie Geschwindigkeiten | 64 |
| D. Manometrischer (hydraulischer) Wirkungsgrad η_h | 65 |
| 1. Geförderte Flüssigkeitsmenge gleich Null | 66 |
| 2. Maximale Flüssigkeitsmenge | 71 |
| 3. Maximale Förderhöhen | 72 |
| 4. Stoßfreie Geschwindigkeiten | 72 |
| E. Volumetrischer und Gesamtwirkungsgrad | 75 |
| F. Aufstellung der allgemeinen Kraftbedarfsgleichung auf dem Versuchswege | 77 |
| G. Beispiele | 78 |

Vierter Abschnitt.

| | |
|-------------------------------------|-----------|
| Der Spaltüberdruck | 86 |
|-------------------------------------|-----------|

Fünfter Abschnitt.

Berechnung der Zentrifugalpumpen und anschließende Bemerkungen.

| | |
|--|-----|
| A. Die Umfangsgeschwindigkeit | 90 |
| 1. Berechnung der Umfangsgeschwindigkeit | 90 |
| 2. Diskussion der Gleichung der Umfangsgeschwindigkeit | 94 |
| I. Einfluß von $\frac{r_1}{r_2}$ | 95 |
| II. Einfluß der Winkel α und α_1 | 95 |
| a) Winkel α | 95 |
| b) Winkel α_1 | 99 |
| III. Einfluß der Geschwindigkeit c | 99 |
| IV. Einfluß der Winkel α_2 und α_3 | 101 |
| V. Einfluß von η_h und Winkel α_2 | 102 |
| 3. Kontrolle der Umfangsgeschwindigkeit | 104 |

| | Seite |
|-----------------------------|-------|
| B. Die Radbreiten | 105 |
| 1. Laufrad | 105 |
| 2. Leiträder | 108 |
| C. Kraftbedarf | 109 |

Sechster Abschnitt.

Versuchsergebnisse.

| | |
|---|------------|
| A. Versuchsanordnung | 110 |
| B. Versuchsergebnisse | 112 |
| 1. Kurven für Förderhöhe, Kraftbedarf, Wassermenge | 112 |
| 2. Vergleich von Laufrädern mit vor- bzw. rückgekrümmten Schaufeln | 115 |
| 3. Gleichgewichtszustand. Koeffizient ζ_0 | 115 |
| Literatur | 118 |

Einleitung.

Die Anwendung von Zentrifugalpumpen hat in jüngster Zeit dadurch stark zugenommen, daß man von der Gepflogenheit, dieselben nur für geringe Förderhöhen und meist nur größere Fördermengen zu bauen, abging und solche Pumpen jetzt bis zu Förderhöhen von 200 m und noch viel mehr ausführt. Die Erreichung dieser Höhen erzielt man einestheils durch rationellere Schaufelung, andernteils durch Vereinigung mehrerer Flügelräder in einem Gehäuse. Diese „Hochdruck“-Pumpen gewinnen durch ihre Einfachheit in Bau und Aufstellung, ihre Betriebssicherheit etc. immer größere Verbreitung.

Oft tritt nun die Aufgabe an den Konstrukteur heran, eine und dieselbe Pumpe verschiedenen Betriebsverhältnissen anzupassen, sei es, daß einmal das Flüssigkeitsquantum Q_1 in ein H_1 m hoch aufgestelltes Reservoir gefördert, dann wieder, etwa zu Feuerlöschzwecken, Q_2 lit/sek bei H_2 atm Druck geliefert werden sollen, sei es, daß die Pumpe zum Entleeren eines Trockendocks verwendet wird, wobei also die Förderhöhe fortwährend wechselt, sei es, daß sie verschieden hoch gelegene Behälter bedienen soll u. s. f. In allen diesen Fällen bleibt jedoch für gewöhnlich die Art des Antriebes, d. h. die Tourenzahl der Pumpe, unveränderlich. Eine Zentrifugalpumpe wird nun analog der Turbine derart berechnet, daß die Flüssigkeit „stoßfrei“ in das Laufrad eintritt und dasselbe „stoßfrei“ verläßt. Dies ist bei jeder Tourenzahl nur für eine, im folgenden „stoßfrei“ genannte Flüssigkeits-Geschwindigkeit und die derselben entsprechende Förderhöhe der Fall, für jede andere hört die Bewegung auf, stoßfrei zu sein. Die Folge ist ein Sinken des Wirkungsgrades, ein Mehrverbrauch an Kraft. Man

muß also bei Änderung einer der drei Größen: Flüssigkeitsmenge, Förderhöhe, Tourenzahl, an einer ausgeführten Pumpe die Änderung der beiden anderen Größen, daher auch eventuelle Stoßverluste und veränderten Kraftbedarf in Kauf nehmen.

Zweck der folgenden Untersuchung ist es nun, die allgemeinen, d. h. auch bei nicht stoßfreier Bewegung der Flüssigkeit zwischen den drei oben genannten Größen bestehenden Beziehungen zu bestimmen. Hieran anschließend werden die Änderungen des Kraftbedarfes und Wirkungsgrades berechnet, so daß man mit Hilfe unserer Gleichungen sich u. a. in speziellen Fällen ein Urteil darüber bilden kann, ob eine und dieselbe Pumpe zwei oder mehrere an sie gestellte Aufgaben noch mit genügend hohem Wirkungsgrad erfüllen kann.

Es ist bei den vorliegenden Berechnungen die Pumpe schon ausgeführt bezw. ihre Dimensionen schon bestimmt gedacht. Der Allgemeinheit wegen, ferner weil dies bei Hochdruckpumpen, an welche der Verfasser hauptsächlich denkt, unbedingt notwendig ist, sind Leitschaufeln angenommen, u. zw. sowohl am Eintritt in das Laufrad als auch beim Austritt aus demselben in den Diffuser. Es bietet keine Schwierigkeit, jene Vereinfachung an den Formeln zu vollziehen, welche das Entfallen der Leitschaufeln am Ein- oder Austritt oder an beiden Stellen mit sich bringt.

Da in der Praxis, wie erwähnt, die Tourenzahl der Pumpe sich meist nicht ändern läßt, ist im folgenden dieser Fall konstanter Tourenzahl hauptsächlich in Betracht gezogen. Doch enthalten die Formeln auch die Fälle veränderlicher Umdrehungszahl in sich.

Erster Abschnitt.

Aufstellung und Diskussion der allgemeinen Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung durch eine Zentrifugalpumpe.

A. Aufstellung der Gleichung.

Es seien bezeichnet mit:

- u_1 die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Eintrittsstelle,
- u_2 die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Austrittsstelle der Flüssigkeit,
- r_1 der Radius des Laufrades an der Eintrittsstelle,
- r_2 der Radius des Laufrades an der Austrittsstelle der Flüssigkeit,
- c_s die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Saugrohr, F_s dessen Querschnitt,
- c die absolute Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die inneren Leitkanäle verläßt, F der lichte Gesamtquerschnitt an dieser Stelle,
- c_1 die relative Eintrittsgeschwindigkeit in das Laufrad (bei stoßfreiem Eintritt), F_1 der lichte Gesamtquerschnitt an dieser Stelle,
- c_2 die relative Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufrade, F_2 der lichte Gesamtquerschnitt an dieser Stelle,
- c_3 die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Leitkanäle des Diffusers verläßt, F_3 der lichte Gesamtquerschnitt an dieser Stelle,

4 Aufstellung und Diskussion der allgemeinen Gleichung etc.

- | | |
|---|---|
| c_4 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Pumpengehäuse, | F_4 dessen Querschnitt, |
| c_5 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Druckleitung, | F_5 deren Querschnitt, |
| c_6 die Austrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit aus dem Druckrohr, | F_6 der Querschnitt der Austrittsmündung, |

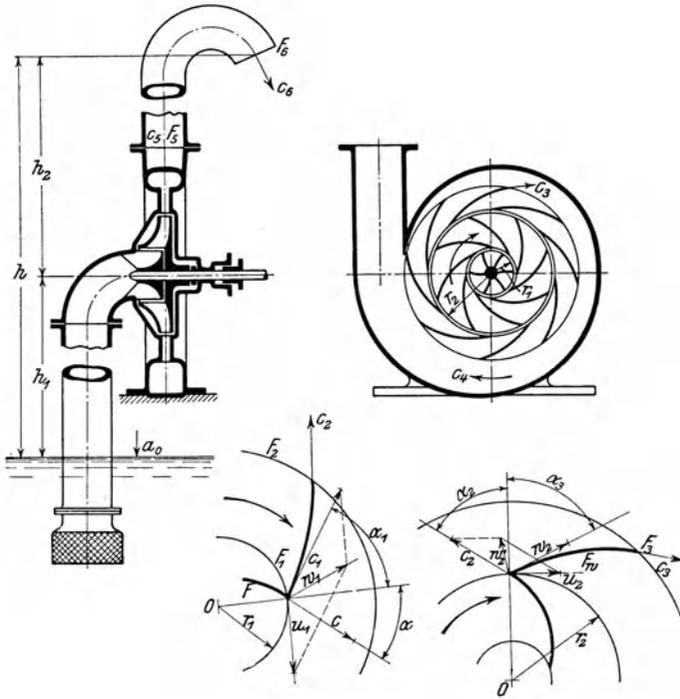


Fig. 1 (schematisch).

- | | |
|--|--|
| w_1 die Resultierende von u_1 und c_1 (für den stoßfreien Fall mit c identisch) (absolute Eintrittsgeschwindigkeit), | F_w der lichte Gesamtquerschnitt dieser Kanäle an ihrer Eintrittsstelle, |
| w_2 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit längs der Leitschaufeln des Diffusers, | |

- w_2' die Resultierende von u_2 und c_2 (bei stoßfreiem Austritt mit w_2 identisch) (absolute Austrittsgeschwindigkeit),
 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Winkel, stets vom Radius aus gemessen (siehe Figur 1, Seite 4),
 l_s die Länge der Saugleitung, d_s ihr Durchmesser,
 l_d die Länge der Druckleitung, d_d ihr Durchmesser,
 l_g die Länge des Wasserweges in der Pumpe exkl. der mit Schaufeln versehenen Teile derselben,
 Q das zu fördernde Flüssigkeitsvolumen per Sekunde,
 g die Beschleunigung der Schwere,
 h_1 die Saughöhe der Pumpe,
 h_2 die Druckhöhe der Pumpe,
 $h = h_1 + h_2$ ihre Gesamtförderhöhe,
 a_o der äußere Luftdruck,
 a_1 der Druck im Spalt zwischen den innern Leitschaufeln und dem Laufrad,
 a_1' der Druck unmittelbar nach der Eintrittsstelle in das Laufrad,
 a_2 der Druck im Spalt zwischen Laufrad und Diffuserkanälen,
 a_2' der Druck unmittelbar nach der Eintrittsstelle in die Diffuserleitkanäle,
 a_3 der Druck am Ende der Diffuserleitkanäle,
 a_4 der Druck im Pumpengehäuse,
 ζ_1 Reibungskoeffizient für die Flüssigkeitsbewegung längs der Eintrittsleitschaufeln,
 ζ_2 Reibungskoeffizient für die Flüssigkeitsbewegung längs der Laufradschaufeln,
 ζ_3 Reibungskoeffizient für die Flüssigkeitsbewegung längs der Diffuserleitschaufeln,
 ζ_g Reibungskoeffizient für die Flüssigkeitsbewegung längs der Pumpengehäusewände,
 ζ_r Rohrreibungskoeffizient,
 ζ, ζ' Eintrittskoeffizienten,
 ζ_o, ζ_o' Stoßkoeffizienten.

Die übrigen Bezeichnungen werden an der Stelle ihres Auftretens erklärt.

Die Aufstellung der Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung wird für eine Pumpe mit einem Laufrad vorgenommen, sind

mehrere Räder in einem Gehäuse vereinigt, so ist eine geringfügige Abänderung nach Bemerk. 2, S. 11 vorzunehmen.

Unter Benützung der Bezeichnungen S. 3 bis 5 gilt für die Flüssigkeitsbewegung vom Unterwasserspiegel bis zum Eintritt in das Laufrad (Fig. 1, S. 4)

$$a_o = a_1 + h_1 + \frac{c^2}{2g}(1 + \zeta_1) + \zeta_r \cdot \frac{c_s^2}{2g} \cdot \frac{l_s}{d_s} \dots 1)$$

Wir setzen

$$h' = \zeta_r \cdot \frac{c_s^2}{2g} \cdot \frac{l_s}{d_s} \dots \dots \dots 2)$$

und verstehen unter h' die Verlusthöhe infolge der Reibungen im Saugrohr bzw. bis zum Beginn des mit Leitschaufeln versehenen Teiles der Pumpe.

Dann ist:

$$a_o - a_1 - h_1 = (1 + \zeta_1) \frac{c^2}{2g} + h' \dots \dots \dots 3)$$

Analog ergibt sich für das Stück vom Ende der Leitkanäle im Diffuser bis zum Fuße des Steigrohres

$$a_3 - a_4 = \frac{c_4^2 - c_3^2}{2g} + h'' \dots \dots \dots 4)$$

wobei h'' die den Gehäusewiderständen entsprechende Reibungshöhe vorstellt. Versteht man weiter unter h''' die infolge der Reibungen in der Druckleitung und der Austrittsgeschwindigkeit c_6 verloren gehende Geschwindigkeitshöhe, also, da

$$F_6 c_6 = F_5 c_5 \dots \dots \dots 5)$$

$$h''' = \left[\left(\frac{F_5}{F_6} \right)^2 + \zeta_r \cdot \frac{l_d}{d_d} \right] \frac{c_5^2}{2g} \dots \dots \dots 6)$$

so gilt für die Bewegung durch das Steigrohr und den Austritt der Flüssigkeit aus demselben

$$a_4 - a_o - h_2 = h''' - \frac{c_4^2}{2g} \dots \dots \dots 7)$$

Die Addition von Gleichung 3), 4) und 7) gibt nach einfacher Reduktion

$$2g(a_3 - a_1) = 2g(h_1 + h_2 + h' + h'' + h''') + (1 + \zeta_1)c^2 - c_3^2 \dots 8)$$

$h_1 + h_2 = h$ ist die Förderhöhe; $h' + h'' + h'''$ die Verlusthöhe; diese auf c_3 bezogen schreibt sich

$$h' + h'' + h''' = \lambda \frac{c_3^2}{2g}, \dots \dots \dots 9)$$

wobei λ ein Koeffizient ist, der sich durch Umrechnung der Geschwindigkeiten im Saugrohr, in der Pumpe und im Steigrohr auf die Geschwindigkeit c_3 ergibt. (Vgl. hierzu noch Bemerk. 1, S. 10.)

Gleichung 8) läßt sich daher auch schreiben:

$$2g(a_3 - a_1 - h) = (1 + \zeta_1) c^2 - c_3^2 + \lambda c_3^2. \dots 10)$$

Nun gehen wir zur Betrachtung der Flüssigkeitsbewegung durch den ersten Spalt und das Laufrad über. Zu beachten

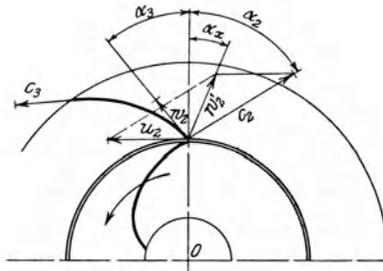


Fig. 2.

ist, daß wir für den allgemeinen Fall einen Eintritt „mit Stoß“ anzunehmen haben. Dann gelten (Zeuner, Vorlesungen über Theorie der Turbinen, 1899, S. 136) die Gleichungen:

$$(1 + \zeta_2) c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1' - a_2) + u_2^2 - u_1^2 \dots 11)$$

und

$$(\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1) = 2g(a_1' - a_1) \dots 12)$$

mit den S. 3 bis 5 angegebenen Bezeichnungen, wobei ferner

$$c_0 = c \cos(\alpha + \alpha_1) + u_1 \sin \alpha_1 \dots 13)$$

„die relative Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeitsmenge in der Richtung von c_1 , d. h. in der Richtung der Tangente zur Kanalkurve an der Eintrittsstelle“, bedeutet.

Zeuner nennt ζ_0 den Stoß-, ζ den Eintrittskoeffizienten, theoretisch sollten beide den Wert 2 haben (a. a. O. S. 134, 135).

Wir haben nunmehr noch den Durchgang der Flüssigkeit durch den zweiten Spalt und deren Bewegung längs der Diffuserleitschaufeln zu untersuchen. Hier lassen sich die von Zeuner (Vorlesungen über Theorie der Turbinen S. 85 f.) für die Reaktion strömender Flüssigkeiten in ruhenden Gefäßen abgeleiteten Gesetze anwenden, wobei für die Geschwindigkeit „der ankommenden Flüssigkeit“ die absolute Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufrade w_2' (Fig. 2), das ist die Resultierende von c_2 und u_2 , einzuführen ist.

Dann gilt in sinngemäßer Anwendung mit unseren Bezeichnungen:

$$2g(a_2' - a_3) = (1 + \zeta_3)c_3^2 - w_2'^2 \dots \dots \dots 14)$$

$$2g(a_2 - a_3) = (1 + \zeta_3)c_3^2 - w_3^2 - \zeta' w_2 [w_2' \cos(\alpha_x + \alpha_3) - w_2]. \dots 15)$$

Die Subtraktion von Gleichung 14) und 15) liefert:

$$2g(a_2' - a_2) = \zeta' w_2 [w_2' \cos(\alpha_x + \alpha_3) - w_2]. \dots \dots 16)$$

Diesen Ausdruck formen wir noch folgendermaßen um:

$$w_2' \cos(\alpha_x + \alpha_3) = w_2' \cos \alpha_x \cos \alpha_3 - w_2' \sin \alpha_x \sin \alpha_3.$$

Fig. 2 zeigt, daß

$$w_2' \cos \alpha_x = c_2 \cos \alpha_2, \dots \dots \dots 17)$$

ferner

$$w_2' \sin \alpha_x = c_2 \sin \alpha_2 - u_2, \dots \dots \dots 18)$$

somit ist:

$$w_2' \cos(\alpha_x + \alpha_3) = c_2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - (c_2 \sin \alpha_2 - u_2) \sin \alpha_3. \dots 19)$$

Damit geht Gleichung 16) über in:

$$2g(a_2' - a_2) = \zeta' w_2 [c_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + u_2 \sin \alpha_3 - w_2]; \dots 20)$$

hierin ist

$$c_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + u_2 \sin \alpha_3$$

die relative Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeit in der Richtung von w_2 gemessen; wir setzen:

$$w_0 = c_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) + u_2 \sin \alpha_3 \dots \dots \dots 21)$$

und erhalten damit eine der früheren Gleichung für den Eintritt ähnliche Beziehung

$$2g(a_2' - a_2) = \zeta' w_2 (w_0 - w_2). \dots \dots \dots 22)$$

Hiermit sind alle Abschnitte der Flüssigkeitsbewegung durch Pumpe und Leitung behandelt. Nunmehr addieren wir die Gleichungen 10), 11) und 14), wodurch wir erhalten:

$$2g(a_1' - a_1 + a_2' - a_2 - h) = (1 + \zeta_1) c^2 - c_1^2 + (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2 - w_2^2 - u_2^2 + u_1^2. \quad 23)$$

Ebenso addieren wir die Gleichungen 12) und 22), wobei wir uns die Annahme $\zeta_0 = \zeta' = \zeta$ erlauben, da alle drei Werte theoretisch gleich 2 sein sollten, und genaue Versuche über ihre Größe zurzeit unseres Wissens nicht vorliegen. Diese Addition liefert:

$$2g(a_1' - a_1 + a_2' - a_2) = \zeta_0 [c_0^2 - c_1^2 + w_2 w_0 - w_2^2]. \quad 24)$$

Wir setzen den Wert für die linke Seite in Gleichung 23) ein und erhalten unter Einführung der Werte von c_0 und w_0 aus Gleichung 13) bezw. Gleichung 21):

$$\begin{aligned} -2gh &= [1 + \zeta_1 - \zeta_0 \cos^2(\alpha + \alpha_1)] c^2 + (\zeta_0 - 1) [c_1^2 + w_2^2] + \\ &\quad (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2 - u_2^2 + u_1^2 [1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1] - \\ 2\zeta_0 c u_1 \sin \alpha_1 \cos(\alpha + \alpha_1) &- \zeta_0 w_2 c_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - \zeta_0 w_2 u_2 \sin \alpha_3 \end{aligned} \quad 25)$$

als allgemeine Gleichung für die vorliegende Flüssigkeitsbewegung. Das negative Zeichen bei h zeigt an, daß es sich um eine „Förderhöhe“ (kein „Gefälle“) handelt. Um die Gleichung übersichtlicher zu gestalten, und da wir, wie erwähnt, an eine Pumpe mit bekannten Dimensionen denken, führen wir die Querschnitte ein. Es ist wegen der Kontinuitätsbedingung

$$F c = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_w w_2 = F_3 c_3, \dots \quad 26)$$

ferner

$$u_1 = \frac{r_1}{r_2} u_2; \dots \quad 27)$$

unter Berücksichtigung von Gleichung 26) und 27) geht Gleichung 25) über in die Form:

$$-2gh = A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 \dots \quad 28)$$

wenn bedeutet

$$\begin{aligned} A &= [1 + \zeta_1 - \zeta_0 \cos^2(\alpha + \alpha_1)] \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + (\zeta_0 - 1) \left[\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2\right] + (1 + \zeta_2) + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 - \zeta_0 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \frac{F_2}{F_w} \end{aligned} \quad 29)$$

10 Aufstellung und Diskussion der allgemeinen Gleichung etc.

$$B = \zeta_o \left[2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1) + \sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w} \right] \dots \dots \dots 30)$$

$$C = 1 + (\zeta_o \sin^2 \alpha_1 - 1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dots \dots \dots 31)$$

Gleichung 28) im Vereine mit 29), 30) und 31) bildet unsere gesuchte allgemeine Beziehung zwischen Tourenzahl (bezw. Umfangsgeschwindigkeit u_2), Fördermenge (da Q stets gleich ist $F_2 c_2$) und Förderhöhe¹⁾ mit Berücksichtigung der Stoßverluste. (Man könnte in Gleichung 28) ff. auch direkt Q bezw. die Tourenzahl n einführen.)

Bemerkung 1. Wir schrieben S. 7, Gleichung 9) für

$$h' + h'' + h''' = \lambda \cdot \frac{c_3}{2g}$$

und verstanden darunter die infolge der Reibungen in den Leitungen und dem ungeschaukelten Teil des Pumpengehäuses ferner infolge der Austrittsgeschwindigkeit c_6 verloren gehende Geschwindigkeitshöhe.

Genauer ist daher zu setzen:

$$\lambda \cdot \frac{c_3^2}{2g} = \left(\frac{F_3}{F_6} \right)^2 \cdot \frac{c_3^2}{2g} + \zeta_r \frac{l_d}{d_d} \cdot \frac{c_5^2}{2g} + \zeta_r \frac{l_s}{d_s} \cdot \frac{c_s^2}{2g} + \sum \zeta_g \cdot \frac{U_g}{4 F_g} l_g \frac{c_g^2}{2g} \dots \dots \dots 32)$$

und somit

$$\lambda = \left(\frac{F_3}{F_6} \right)^2 + \zeta_r \cdot \frac{l_d}{d_d} \left(\frac{F_3}{F_5} \right)^2 + \zeta_r \cdot \frac{l_s}{d_s} \left(\frac{F_3}{F_s} \right)^2 + \sum \zeta_g \cdot \frac{U_g}{4 F_g} \cdot l_g \left(\frac{F_3}{F_g} \right)^2 \dots \dots \dots 33)$$

Das Glied

$$\sum \zeta_g \cdot \frac{U_g}{4 F_g} l_g \frac{c_g^2}{2g}$$

gibt die Verluste im Gehäuse an, wenn ζ_g den entsprechenden Reibungs-

¹⁾ Es sei hier erwähnt, daß Zeuner (Vorlesungen über Theorie der Turbinen, S. 336) eine ähnlich gebaute Gleichung für eine Zentrifugalpumpe ohne Leitschaufeln aufgestellt hat, doch benützt er dieselbe nur zur Diskussion des Zusammenhanges von u_2 und c_2 bei konstantem h.

koeffizienten, U_g den Umfang, F_g die Fläche, l_g die Länge, c_g die jeweilige Flüssigkeitgeschwindigkeit für jeden Gehäuseabschnitt verschiedener Form bedeuten.

Ist noch ein Schieber in der Druckleitung, ferner ein Fußventil in der Saugleitung eingebaut, so ist auch die diesen entsprechende Geschwindigkeits(verlust)höhe auf c_3 umgerechnet in Gleichung 32) einzuführen. $\lambda \frac{c_3^2}{2g}$ repräsentiert dann die Summe aller Verluste.

Bemerkung 2. Sind in einer Pumpe n Räder auf gemeinsamer Antriebswelle vereinigt, und beträgt die Gesamtförderhöhe der Pumpe H , so hat jedes Laufrad

$$\frac{H + h' + h'' + h'''}{n} = \frac{H}{n} + \frac{h' + h'' + h'''}{n} \dots 34)$$

zu übernehmen. Hierbei ist $\frac{H}{n} = h$ wie früher die Förderhöhe pro 1 Laufrad, welche der Gleichung 28) zugrunde zu legen ist. Ferner tritt in Gleichung 29) an Stelle von

$$(\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 \dots \dots \dots 35)$$

in diesem Falle:

$$\left(\frac{\lambda}{n} + \zeta_3 \right) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 \dots \dots \dots 36)$$

Sonst bleiben die Gleichungen ungeändert. Man sieht aus Gleichung 36), daß die mehrrädriige Pumpe geringere Verluste pro 1 Rad aufweist als die einrädriige. Es ist wohl kaum nötig zu betonen, daß hier und im folgenden bei mehrrädriigen Pumpen stets lauter gleich geschaufelte Räder von gleichen Abmessungen gedacht sind.

Bemerkung 3. Für dieselbe Pumpe bleiben die Koeffizienten B und C (Gleichung 30) und 31)) immer streng konstant, A (Gleichung 29)) hingegen kann infolge des Gliedes mit λ variabel sein, z. B. wenn die Veränderung von Q und h durch einen in der Druckleitung eingebauten Schieber geschieht. In diesem Falle ändert sich nämlich nebst allen Flüssigkeitgeschwindigkeiten auch das Verhältnis der offenen zur gesamten Schieberdurchgangsfläche, und damit auch der Koeffizient für den Geschwindigkeitshöhenverlust durch den Schieber. Dieser ist nämlich

$$\left(\frac{F_3}{m F_6} \right)^2 \cdot \zeta_{\text{Schieber}} \cdot \frac{c_3^2}{2g} \dots \dots \dots 37)$$

bezogen auf c_3 , wenn $(m F_6)$ den jeweils geöffneten Querschnitt des Schiebers, ζ_{Schieber} den hierfür geltenden jeweiligen Koeffizienten bezeichnet. Ferner

ist bekanntlich auch der Rohrreibungskoeffizient ζ_r eine Funktion der Durchflußgeschwindigkeit. Mit Rücksicht auf die für unsere Fälle relativ geringen Schwankungen desselben setzen wir nach Zeuner für Wasser $\zeta_r = 0.025$. Auch λ , und damit auch A , soll für die folgenden theoretischen Untersuchungen als streng konstant angesehen werden. Will man von den erwähnten Veränderlichkeiten unabhängig sein, so empfiehlt es sich, für Versuche etc. stets statt mit der nützlichen Förderhöhe $h = h_1 + h_2$ mit der sog. „manometrischen“ Förderhöhe (s. S. 65) zu rechnen.

In praktischen Fällen muß jedoch unter Umständen den hier angeführten Verhältnissen durch entsprechende Änderung von λ und A Rechnung getragen werden.

Bemerkung 4. In der allgemeinen Gleichung 25) bzw. in den Gleichungen 28) bis 31) ist das spezifische Gewicht γ der Förderflüssigkeit nicht enthalten, daher bei derselben Umfangsgeschwindigkeit, demselben c_2 und gleichen Reibungsverhältnissen für verschiedene Flüssigkeiten eine gleichgroße Förderhöhe erreicht wird. Hingegen ist der „Druck“ (kg/qcm) in der Pumpe sowie der nötige Kraftbedarf natürlich verschieden, da diese Größen auch von γ abhängig sind.

Unsere Gleichung 28)

$$A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 = -2gh$$

gibt uns die Möglichkeit, alle Fragen über c_2 bzw. Q , u_2 bzw. Tourenzahl n , und h zu beantworten.

Bevor wir in die Diskussion von Gleichung 28) eingehen, sei noch an Beispielen die Verwendung dieser Gleichung kurz gezeigt.

Bemerkung 5. Für die folgenden Beispiele setzen wir in Ermangelung genauer Versuchswerte nach Zeuner (Vorlesungen über Theorie der Turbinen) $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.1$, ferner, wie erwähnt, $\zeta_r = 0.025$ als mittleren Wert.

Beispiel 1¹⁾. Eine Pumpe mit einem Laufrad von 200 mm Durchmesser ist gebaut für $Q = 5$ lit/sek Wasser bei $u_2 = 15.7$ m/sek (1500 Touren pro Min.) entsprechend $c_2 = 3.5$ m/sek.

Diese erhielt die Dimensionen: $F = 31.25$ qcm, $F_1 = 5.4$ qcm, $F_2 = 14.3$ qcm, $F_w = 3.25$ qcm, $F = 36$ qcm, $\frac{r_1}{r_2} = 0.6$, ferner $\angle \alpha = \alpha_2 = 0^\circ$ (also radiale Leitschaufeln innen, ferner eine

¹⁾ Diese und die meisten folgenden Zifferrechnungen sind mit dem Rechenschieber ausgeführt, daher in den letzten Stellen nicht genau.

radial endigende Laufradschaufelung), $\alpha_1 = 80^\circ$, $\alpha_3 = 77^\circ$; $\lambda = 41$ entsprechend den Gehäusewiderständen und dem Widerstande einer ca. 100 m langen Rohrleitung von 60 mm lichter Weite.

Die Einsetzung dieser Ziffernwerte in unsere Gleichungen 28) bis 31) liefert $A = 11.82$, $B = 5.6$, $C = 1.0756$, daher:

$$11.82 c_2^2 - 5.6 c_2 u_2 - 1.0756 u_2^2 = -19.62 h \quad . . . \quad 38)$$

c_2 , u_2 , h in Metern bzw. m/sek.

Dem stoßfreien Falle ($u_2 = 15.7$ m/sek, $c_2 = 3.5$ m/sek) entspricht eine Förderhöhe von $h = 21.6$ m. Nun wollen wir wissen, ob dieselbe Pumpe 8 lit/sek Wasser in ein 14 m hoch gelegenes Reservoir schaffen kann, wenn sie nur 1400 Touren pro Min. macht.

$$u_2 = \frac{2 r_2 \pi n}{60} = 14.65 \text{ m/sek}, \quad c_2 = \frac{Q}{F_2} = \frac{8}{0.143} = 5.6 \text{ m/sek}$$

somit

$$11.82 \cdot 5.6^2 - 5.6 \cdot 5.6 \cdot 14.65 - 1.0756 \cdot 14.65^2 = -19.62 h$$

und daraus

$$h = 16.1 \text{ m/sek.}$$

Die Pumpe kann daher diese Aufgabe erfüllen. Der Wirkungsgrad wird hierbei allerdings geringer sein als bei Verwendung einer direkt für diese Verhältnisse gebauten Pumpe. (Hierüber in einem späteren Abschnitt.)

Beispiel 2. a) Eine Pumpe mit 4 Laufrädern von 200 mm Durchmesser ist für eine Lieferung von 12 lit/sek Druckwasser von 7.4 atm bei 1500 Touren pro Min. ($u_2 = 15.7$ m/sek) gebaut.

Die Dimensionen der Pumpe sind: $F = 61$ qcm, $F_1 = 14$ qcm, $F_2 = 27.4$ qcm, $F_w = 9.4$ qcm, $F_3 = 82.5$ qcm, ferner $\frac{r_1}{r_2} = 0.525$, $\angle \alpha = 0^\circ$, $\alpha_1 = 76^\circ 30'$, $\alpha_2 = 49^\circ$ (d. i. eine leicht nach rückwärts (d. h. konvexe Seite nach der Umdrehungsrichtung) gekrümmte Schaufelform), $\alpha_3 = 77^\circ$. $\lambda = 31$ entsprechend den Pumpenwiderständen und den Rohrreibungen einer etwa 75 m langen Leitung von 60 mm lichter Weite.

Da die Pumpe 4 Räder hat, so ist statt $(\lambda + \zeta_3) \cdot \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2$ in A zu schreiben: $\left(\frac{\lambda}{4} + \zeta_3\right) \cdot \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2$ (S. 11, Bemerk. 2).

14 Aufstellung und Diskussion der allgemeinen Gleichung etc.

Wir erhalten unter Berücksichtigung hiervon und Einsetzung der Ziffernwerte als allgemeine Gleichung dieser Pumpe:

$$7.34 c_2^2 - 3.65 c_2 u_2 - 1.05 u_2^2 = -19.62 h \dots 39)$$

A = 7.34, B = 3.65, C = 1.05; h in Metern, u_2 und c_2 in m/sek.

Nun fragen wir, wie hoch dieselbe Pumpe 16 lit/sek bei 1700 Touren pro Min. ($u_2 = 17.8$ m/sek) fördern kann.

Hier ist $c_2 = \frac{16}{0.274} = 5.83$ m/sek, somit in Gleichung 39)

$$7.34 \cdot 5.83^2 - 3.65 \cdot 5.83 \cdot 17.8 - 1.05 \cdot 17.8^2 = -19.62 h$$

und daraus die gesuchte Höhe h pro 1 Rad = 23.5 m, die Gesamthöhe H = 4 h = 94 m.

b) Eine der Pumpe unter 2a) gleich dimensionierte Pumpe, jedoch nur mit einem Laufrad. Hier ist im Koeffizienten A wieder

$$(\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2$$

einzuführen, dadurch ergibt sich A = 9.88, und die allgemeine Gleichung dieser Pumpe

$$9.88 c_2^2 - 3.65 c_2 u_2 - 1.05 u_2^2 = -19.62 h \dots 40)$$

Frage 1. Wie viel Touren muß die Pumpenwelle machen, um 13 lit/sek 12 m hoch zu fördern?

$$c_2 = \frac{Q}{F_2} = \frac{13}{0.274} = 4.72 \text{ m/sek}$$

$$4.72^2 \cdot 9.88 - 3.65 \cdot 4.72 u_2 - 1.05 u_2^2 = -19.62 \cdot 12$$

und daraus $u_2 = 15.4$ m/sek bzw. die Tourenzahl = 1480 pro Min.

2. Wieviel Wasser gibt diese Pumpe bei diesen 1480 Touren pro Min. für eine Förderhöhe von nur 8 m?

$$9.88 c_2^2 - 3.65 \cdot 15.4 c_2 - 1.05 \cdot 15.4^2 = -19.62 \cdot 8$$

daraus $c_2 = 7.12$ m/sek und $Q = F_2 c_2 = 19.5$ lit/sek.

Bemerkung 6. Der Vergleich dieser theoretischen Resultate mit Versuchswerten wird zeigen, daß praktisch nicht das volle h erreicht wird,

da zwar die Verluste durch den unrichtigen Flüssigkeitsein- und -austritt, nicht aber auch diejenigen in Betracht gezogen werden konnten, welche infolge der endlichen Breite der Spalte (theoretisch ist jeder Spalt unendlich schmal) sowie sonstiger Undichtheiten der Pumpe entstehen. Es werden daher die theoretischen Förderhöhen gegenüber den praktisch möglichen durch einen Koeffizienten kleiner als 1 zu korrigieren sein, dessen Größe von der jeweiligen Pumpenkonstruktion abhängt.

B.

1. Diskussion der allgemeinen Gleichung.

Wir hatten Gleichung 28)

$$A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^3 = - 2 gh.$$

In dieser Gleichung sehen wir, wie erwähnt, A, B, C als Konstante, $u_2 = x$, $c_2 = y$, $h = z$ als Variable an. Dann schreibt sich:

$$A y^2 - B x y - C x^2 = - 2 g z. 41)$$

Diese Gleichung stellt ein hyperbolisches Paraboloid vor, dessen Scheitel im Koordinatenanfangspunkt liegt, dessen eine Hauptachse mit der z-Achse zusammenfällt, dessen Hauptebenen jedoch gegen die yz- bzw. zx-Ebene um einen Winkel φ , dessen Tangente m ist, verdreht sind, u. zw. ist

$$m = \text{tg } \varphi = - \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 + B^2}}{B}. . . . 42)$$

Wir wollen, um die Bedeutung der Gleichung 41) besser klarzulegen, die ebenen Schnitte des Paraboloides parallel zu je einer der drei Koordinatenebenen führen, also x, y, z, d. h. Tourenzahl, Fördermenge und Förderhöhe, abwechselnd als konstant ansehen.

Wir beginnen mit z (Förderhöhe konstant).

1. Konstante Förderhöhe, $z = h = \text{konstant}$ (Schnitte || zur x y-Ebene). Gleichung 41) geht über in

$$A y^2 - B x y - C x^2 = - 2 gh. 43)$$

Gleichung 43) stellt die Gleichung einer Hyperbel vor, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt

(Fig. 3), die Halbachsen derselben sind gegen die Koordinatenachsen um $\sphericalangle \varphi$ geneigt, wobei

$$m = \operatorname{tg} \varphi = - \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 + B^2}}{B} \dots \dots 44)$$

Die Länge der reellen und imaginären Halbachse ergibt sich zu

$$R = \sqrt{-\frac{2gh}{s}} \dots \dots \dots 45)$$

worin

$$s = \frac{1}{2}(A - C) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A + C)^2 + B^2} \dots \dots \dots 46)$$

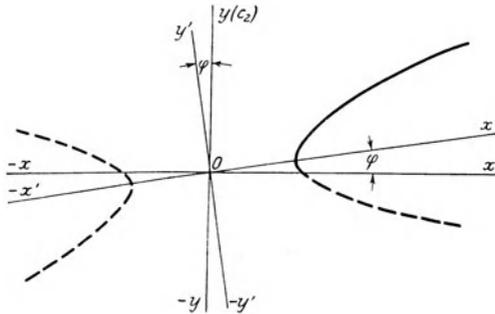


Fig. 3.

Vollzieht man die Drehung um $\sphericalangle \varphi$, so geht Gleichung 43) über in

$$a x'^2 - b y'^2 = + 2 g z \dots \dots \dots 47)$$

wenn x', y' die neuen auf das um $\sphericalangle \varphi$ gegenüber dem alten verdrehte Achsensystem bezogenen Koordinaten sind, (welche jedoch nicht mehr u_2 bzw. c_2 bedeuten,) und

$$\left. \begin{aligned} a &= -A \sin^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi \\ b &= -A \cos^2 \varphi - B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 48)$$

Zeuner hat (a. a. O. S. 336 f.), wie in Fußnote S. 10 bereits erwähnt, für eine Pumpe ohne alle Leitschaufeln eine allgemeine Gleichung analog Gleichung 28) aufgestellt und diese für den Fall $h = \text{konstant}$ einer kurzen Diskussion unterzogen, weshalb hier auf diesen Fall nicht weiter theoretisch eingegangen sei.

2. Konstante Fördermenge, $y = c_2 = \text{konstant}$ (Schnitte || zur $z x$ -Ebene).

Die allgemeine Gleichung geht über in:

$$C x^2 + B c_2 x = 2 g z + A c_2^2 \dots \dots \dots 49)$$

Gleichung 49) ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse der z -Achse parallel, und deren Höhlung der positiven z -Achse zugewendet ist (Fig. 4). Ihr Scheitel ergibt sich, wenn wir in Gleichung 49) den ersten Differentialquotienten gleich 0 setzen.

$$2 C x + B c_2 = 2 g \frac{d z}{d x} = 0$$

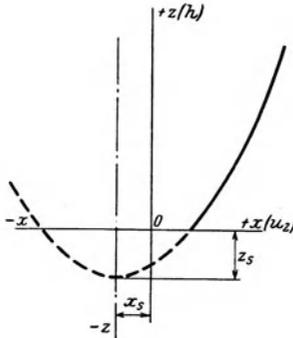


Fig. 4.

daraus die Koordinaten des Scheitels:

$$\left. \begin{aligned} x_s &= -\frac{B c_2}{2 C} \\ z_s &= -\frac{1}{2 g} \left[\frac{B^2}{4 C} + A \right] c_2^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 50)$$

Die Kurve gibt in dem Teile mit positiven Koordinaten den Zusammenhang von Förderhöhe und Umfangsgeschwindigkeit, wenn konstante Flüssigkeitsmenge verlangt wird. Auf eine nähere Diskussion soll hier nicht weiter eingegangen werden.

3. Konstante Tourenzahl, $x = u_2 = \text{konstant}$ (Schnitte || zur $y z$ -Ebene). Hier nimmt die allgemeine Gleichung die Form an:

$$A y^2 - B u_2 y - C u_2^2 = -2 g z \dots \dots \dots 51)$$

Gleichung 51) ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse zur z-Achse parallel ist, und deren Höhlung der negativen z-Achse zugekehrt ist (Fig. 5).

Die Koordinaten des Scheitels ergeben sich zu:

$$\left. \begin{aligned} y_s &= \frac{B u_2}{2 A} \\ z_s &= \frac{1}{2 g} \left[\frac{B^2}{4 A} + C \right] u_2^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 52)$$

Dieser Fall, welcher der in der Praxis häufigste ist, daß nämlich die Pumpe mit einer unveränderlichen Tourenzahl angetrieben wird, soll seiner Wichtigkeit wegen noch einer genaueren Diskussion unterzogen werden.

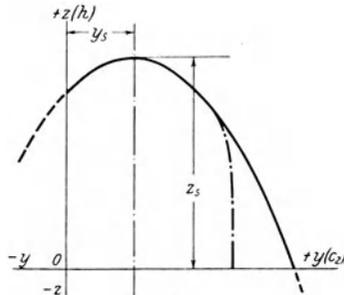


Fig. 5.

Vorher sei jedoch noch auf die perspektivische Skizze (Fig. 6, S. 19) des hyperbolischen Paraboloides, Gleichung 41), welches alle Spezialfälle in sich schließt, verwiesen, ferner führen wir noch für die früheren Beispiele 1 und 2 b (S. 12 f.) die Berechnung und graphische Darstellung der Gleichungen 43), 49), 51) durch.

Bemerkung. Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß vorstehende Gleichungen nicht unbeschränkt gelten. Wird nämlich bei einer Pumpe, z. B. durch fortgesetztes Verringern der Förderhöhe bei sonst gleichen Verhältnissen die Fördermenge und damit die Durchflußgeschwindigkeit c_2 fortwährend gesteigert, so kann schließlich ein Abreißen der Flüssigkeitsfäden eintreten, die Kontinuitätsgleichung verliert dann ihre Giltigkeit. Tatsächlich konnte Verfasser beobachten, daß bei vielen Pumpen, bei welchen für Versuchszwecke die Druckhöhe durch Drosseln eines Schiebers hergestellt wurde, bei allmählichem Öffnen desselben die Wassermenge bis etwa zum Doppelten der normalen den vorstehenden Gesetzen folgte, dann

aber bis zum vollen Öffnen des Schiebers (Druck 0) beinahe garnicht mehr zunahm (etwa nach der strichpunktierten Linie in Fig. 5), während gleichzeitig ein heftiges Geräusch („Singen“) in der Pumpe auf Diskontinuität der Flüssigkeitsbewegung hinwies.

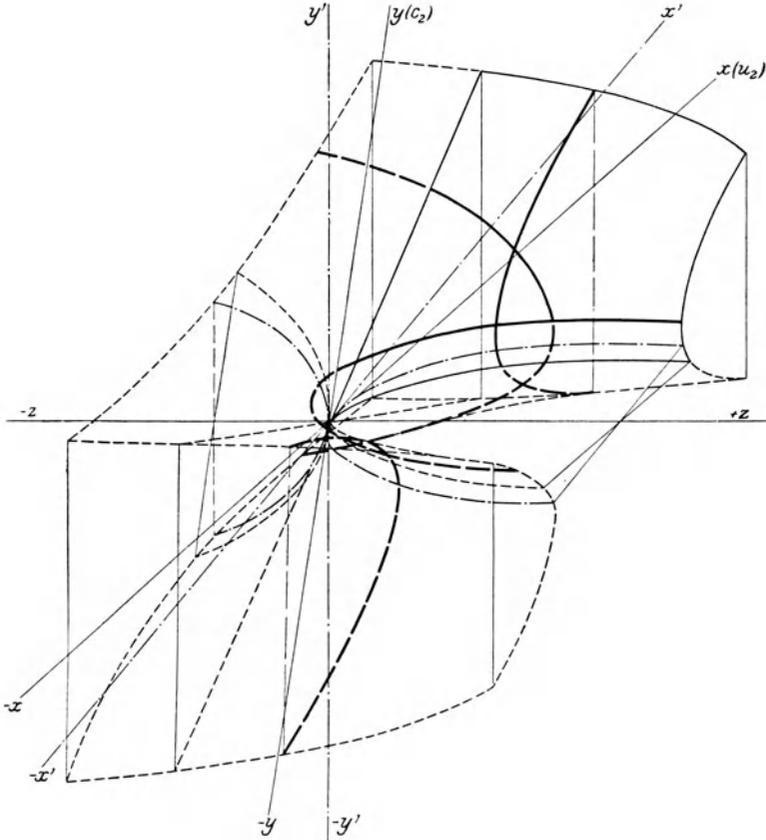


Fig. 6.

- Der Abschnitt des hyperbolischen Paraboloides, welcher technische Bedeutung besitzt, d. i. bis zum Schnitt mit jenen Teilen der $x y$ -, $y z$ -, $z x$ -Ebene, welchen positive Koordinaten zukommen.
- - - - Die übrigen Begrenzungslinien desselben und jener Teil der Schnittlinie mit der $x y$ -, $y z$ -, $z x$ -Ebene, welcher negative Koordinaten besitzt.
- · · · Die Schnitte des hyperbolischen Paraboloides mit der $x' z$ - und $y' z$ -Ebene.
- Die der $x y$ -, $y z$ -, $z x$ -Ebene parallelen Schnitte des hyperbolischen Paraboloides, soweit denselben technische Bedeutung zukommt, also die $u_2 c_2$ -, $c_2 h$ -, $h u_2$ -Kurven.
- - - - Die restlichen Teile dieser Schnitte.

2. Beispiele.

ad Beispiel 1 (S. 12)

1. Konstante Förderhöhe. Gleichung 44) gibt:

$$m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{11 \cdot 82 + 1 \cdot 0756 \pm \sqrt{12 \cdot 89^2 + 5 \cdot 6^2}}{5 \cdot 6}$$

daraus

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 11^\circ 40' \\ \varphi_2 &= 101^\circ 40' \end{aligned}$$

Die Längen der Halbachsen ergeben sich nach Gleichung 45)

$$R_1 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62}{1 \cdot 605} \cdot h}$$

für die reelle Halbachse

$$R_2 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62}{12 \cdot 345} \cdot h \sqrt{-1}}$$

für die imaginäre Halbachse

Die Verdrehung des Koordinatensystems um $\triangle \varphi_1$ ergibt nach Gleichungen 47) und 48)

$$1 \cdot 653 x'^2 - 12 \cdot 41 y'^2 = 19 \cdot 62 h$$

als Mittelpunktsleichung; daraus die Halbachsenlängen kontrolliert:

$$R_1 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62 \cdot h}{1 \cdot 65}} \quad , \quad R_2 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62 \cdot h}{12 \cdot 41} \sqrt{-1}}$$

(Die Differenzen infolge der Rechnung mit Rechenschieber.)

ad Beispiel 2 b (S. 14)

$$m = \frac{9 \cdot 88 + 1 \cdot 05 \pm \sqrt{10 \cdot 93^2 + 3 \cdot 65^2}}{3 \cdot 65}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 9^\circ 25' \\ \varphi_2 &= 99^\circ 25' \end{aligned}$$

Die Längen der Halbachsen ergeben sich nach Gleichung 45)

$$R_1 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62}{1 \cdot 36} \cdot h}$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62}{10 \cdot 19} \cdot h \sqrt{-1}}$$

Die Verdrehung des Koordinatensystems um $\triangle \varphi_1$ ergibt nach Gleichungen 47) und 48)

$$1 \cdot 342 x'^2 - 10 \cdot 21 y'^2 = 19 \cdot 62 z$$

als Mittelpunktsleichung; daraus die Halbachsenlängen kontrolliert:

$$R_1 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62 \cdot h}{1 \cdot 342}} \quad , \quad R_2 = \sqrt{\frac{19 \cdot 62 \cdot h}{10 \cdot 21} \sqrt{-1}}$$

(Die Differenzen infolge der Rechnung mit Rechenschieber.)

Die Asymptoten haben die Gleichung:

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1.653}{12.41}} \cdot x'$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1.342}{10.2069}} \cdot x'$$

also

$$y' = \pm 0.3775 x'$$

$$y' = \pm 0.362 x'$$

entsprechend einer Neigung gegen die x' -Achse von

$$\psi = 20^\circ 40'$$

$$\psi = 20^\circ$$

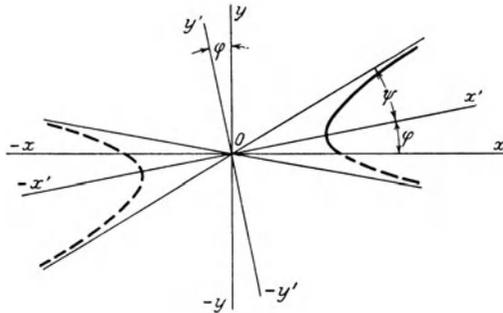


Fig. 7.

In Fig. 7 ist die Hyperbel für Beispiel 1 graphisch dargestellt.

2. Konstante Wassermenge.

Nach Gleichung 50) folgen die Scheitelkoordinaten der Parabel:

$$x_s = -4.85 c_2$$

$$x_s = -1.74 c_2$$

$$z_s = -0.97 c_2$$

$$z_s = -0.663 c_2$$

In Fig. 8 ist für Beispiel 1 diese Parabel dargestellt.

3. Konstante Tourenzahl u_2 .

Nach Gleichung 52) sind die Koordinaten des Scheitels

$$y_s = 0.236 u_2$$

$$y_s = 0.185 u_2$$

$$z_s = 0.0885 u_2^2$$

$$z_s = 0.071 u_2^2$$

In Fig. 9 ist diese Parabel für Beispiel 1 gezeichnet.

Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides

$$11.82 y^2 - 5.6 y x - 1.0756 x^2 = -19.62 z$$

$$9.88 y^2 - 3.65 y x - 1.05 x^2 = -19.62 z$$

geht für die Drehung um $\sphericalangle \varphi$

$$= 11^{\circ} 40' \quad | \quad = 9^{\circ} 25'$$

über in die Form:

$$1.653 x'^2 - 12.41 y'^2 = 19.62 z \quad | \quad 1.34 x'^2 - 10.21 y'^2 = 19.62 z.$$

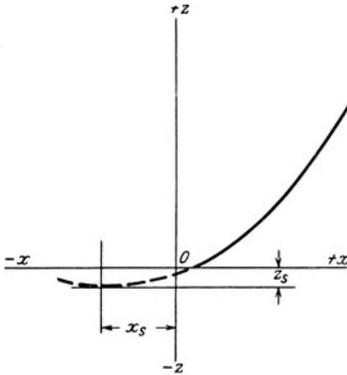


Fig. 8.

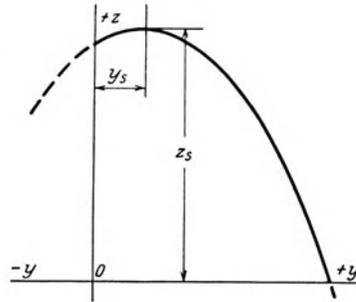


Fig. 9.

Der Schnitt dieses Paraboloides mit der

1. $x' y'$ -Ebene $z = 0$ gibt

$$1.653 x'^2 - 12.41 y'^2 = 0 \quad | \quad 1.34 x'^2 - 10.21 y'^2 = 0$$

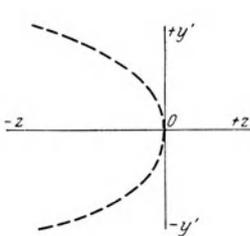


Fig. 10.

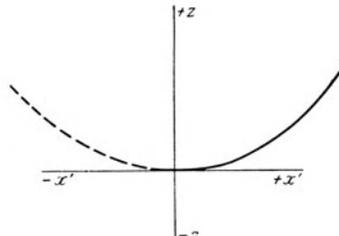


Fig. 11.

2. $y' z$ -Ebene $x' = 0$

$$12.41 y'^2 = -19.62 z \quad | \quad 10.21 y'^2 = -19.62 z$$

3. $z x'$ -Ebene $y' = 0$

$$1.653 x'^2 = 19.62 z \quad | \quad 1.34 x'^2 = 19.62 z$$

ad 1. Das sind 2 Gerade (Asymptoten) mit der Gleichung

$$y' = \pm \operatorname{tg} 20^\circ 40' \cdot x' \quad | \quad y' = \pm \operatorname{tg} 20^\circ \cdot x'$$

ad 2. Eine Parabel, Scheitel im Ursprung, Achse $|| -z$ -Achse

$$y'^2 = -1.58 z \text{ (Fig. 10)} \quad | \quad y'^2 = -1.92 z$$

ad 3. Eine Parabel, Scheitel im Ursprung Achse $|| +z$ -Achse

$$x'^2 = 11.9 z \text{ (Fig. 11)} \quad | \quad x'^2 = 14.65 z$$

x' , y' bedeuten nicht mehr u_2 bzw. c_2 , z dagegen wie früher h. Siehe die Lage dieser Schnitte auch in der allgemeinen Figur 6, S. 19.

3. Konstante Tourenzahl.

Nunmehr wollen wir den nach Ansicht des Verfassers für die Praxis wichtigsten Fall, nämlich den konstanter Tourenzahl (S. 17 Fall 3, Gleichung 51) näher betrachten (Fig. 12).

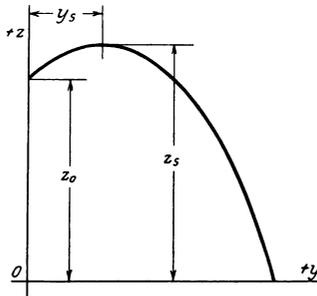


Fig. 12.

Die Gleichung gibt das vielleicht etwas überraschende Ergebnis, daß die größte Förderhöhe (größter Druck) nicht bei „ganz geschlossener“ Pumpe, (d. h. $Q = 0$) sondern bei einer Förderung von $Q = y_s \cdot F_2 > 0$ auftritt. Verfasser hält diesen Umstand für einen großen Vorteil, weil er die Zentrifugalpumpen dadurch u. a. zur Verwendung als „Akkumulator“-pumpen besonders befähigt, d. i. zur Erzeugung von Druckflüssigkeit, etwa zur Turbinenregulierung oder ähnlichen

Zwecken, ohne daß ein weiterer „Akkumulator“ nötig ist. Denn diese Pumpen halten (Fig. 12), wenn keine Flüssigkeit gefördert wird, den Druck z_0 , wird dagegen Flüssigkeit entnommen, so steigt dieser Druck noch auf z_s . Natürlich ist durch richtige Dimensionierung das Maß des Flüssigkeitsbedarfes mit y_s in Einklang zu bringen.

Wir wollen nunmehr die Größen, von denen dieses Ansteigen der Förderhöhen (Drücke) abhängt, näher betrachten.

$$\left. \begin{aligned} y_s &= \frac{B}{2A} u_2 \\ z_s &= \frac{1}{2g} \left[\frac{B^2}{4A} + C \right] u_2^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 53)$$

Wir bezeichnen (Fig. 12) diejenige Förderhöhe (Druck), den die Pumpe für Q bzw. $c_2 = 0$ gibt, mit z_0 . (Näheres über deren Bedeutung im folgenden S. 29 f.)

z_0 ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung 51), indem man $y = 0$ setzt, zu

$$z_0 = \frac{C u_2^2}{2g} \dots \dots \dots 54)$$

Somit ist das Maß, um welches die Förderhöhe steigt

$$z_s - z_0 = \frac{1}{2g} \cdot \frac{B^2}{4A} \cdot u_2^2 \dots \dots \dots 55)$$

Die bei der größten Förderhöhe gelieferte Flüssigkeitsmenge ist

$$Q_s = y_s \cdot F_2, \dots \dots \dots 56)$$

wobei

$$y_s = \frac{B}{2A} \cdot u_2 \dots \dots \dots 57)$$

Aus Gleichung 55) bzw. Gleichung 57) ist zu ersehen, daß die Umfangsgeschwindigkeit direkt proportional ist y_s bzw. Q_s , ihr Quadrat direkt proportional $z_s - z_0$, ferner, daß die Vergrößerung von B , die Verminderung von A zum Wachsen von $z_s - z_0$ und y_s beitragen.

Es war Gleichung 29)

$$A = \left[1 + \zeta_1 - \zeta_0 \cos^2 (\alpha + \alpha_1) \right] \cdot \left(\frac{F_2}{F} \right)^2 + (\zeta_0 - 1) \left[\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 + \left(\frac{F_2}{F_w} \right)^2 \right] + (1 + \zeta_2) + (\lambda + \zeta_3) \cdot \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 - \zeta_0 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \frac{F_2}{F_w}.$$

Ferner Gleichung 30)

$$B = \zeta_0 \left[2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cdot \cos (\alpha + \alpha_1) + \sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w} \right].$$

Zunächst den Ausdruck für B betrachtend ersieht man, daß für Hochdruckpumpen der Summand $\sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w}$ stets bedeutend größer ist als

$$2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1),$$

welch letzterer Ausdruck für $\alpha + \alpha_1 > 90^\circ$ negativ wird. Um dieses Überwiegen zu zeigen, schreiben wir

$$\sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w} = \sin \alpha_3 \cdot \frac{w_2}{c_2}$$

(w_2, c_2 sind die stofffreien Geschwindigkeiten nach S. 3 und 4). α_3 ist meist $\sim 60^\circ - 77^\circ$, also $\sin \alpha_3 \sim 0.866$ bis 0.974 , w_2 für Hochdruckpumpen stets viel $> c_2$.

$$2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1) = 2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{c}{c_2} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1).$$

Meist ist $\alpha = 0^\circ$ oder nahe daran, $\alpha_1 = \sim 75^\circ - 80^\circ$, also $\sin \alpha_1 = 0.984$ bis 0.9659 , $\cos \alpha_1 = 0.173$ bis 0.259 , ferner $\frac{r_1}{r_2} = 0.5$ bis 0.3 , c etwa 1 bis $3\frac{1}{2}$ m/sek.

Setzen wir nun für das 1. Glied die größten, für das 2. die kleinsten der hier angegebenen Zifferwerte, so ergibt sich für das Glied $2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1)$

$$\frac{2 \cdot 0.5 \cdot 3.5 \cdot 0.259 \cdot 0.966}{c_2} = \frac{0.84}{c_2}, \dots \dots \dots 58)$$

für $\sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w}$ dagegen

$$\frac{0.866}{c_2} \cdot w_2 \dots \dots \dots 59)$$

Der Vergleich von Gleichung 58) und Gleichung 59) zeigt, daß das 2. Glied das 1. tatsächlich bedeutend überwiegt, da w_2 für Hochdruckpumpen stets eine große Geschwindigkeit vorstellt, weshalb es für die Beurteilung von B ausschlaggebend ist. Es ist (Fig. 13)

$$\frac{F_2}{F_w} = \frac{w_2}{c_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_3}, \dots \dots \dots 60)$$

wobei w_2, c_2 die für die stoßfreie Flüssigkeitsbewegung gültigen Werte sind. (Da F_2 und F_w für diesen Fall dimensioniert sind, so gilt dieses Verhältnis, das ja bei der ausgeführten Pumpe konstant bleibt, allgemein.)

Somit ist

$$\sin \alpha_3 \frac{F_2}{F_w} = \sin \alpha_3 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_3} = \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3. \dots \dots 61)$$

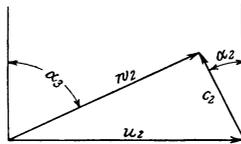


Fig. 13.

Gleichung 61) zeigt, daß B zunimmt, wenn α_2 abnimmt, dagegen α_3 wächst.

Die Winkel α_2 und α_3 sind auch in A enthalten, u. zw. in dem Glied

$$- \zeta_0 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{F_2}{F_w},$$

wir sahen, daß wachsendes A eine Verminderung von $z_s - z_0$ bzw. von y_s zur Folge hat. Das Wachsen von α_2 und α_3 bewirkt nun eine Vergrößerung von A, daher eine Abnahme in der Drucksteigerung $z_s - z_0$. Somit ist ein kleines α_2 infolge seines Einflusses auf A und B für die Zunahme der Drucksteigerung jedenfalls förderlich. Dagegen hat das Wachsen von α_3 zwar eine Vergrößerung des Zählers, aber auch eine Vergrößerung des Nenners zur Folge.

Da die Ausdrücke für B (Gleichung 30) und besonders der für A (Gleichung 29) sehr unübersichtlich sind, daher eine

allgemeine Behandlung nicht empfehlen, sei es gestattet, an einem Beispiele zu zeigen, daß diese Druckanschwellung $z_s - z_o$ bei „Hochdruckpumpen“ (d. s. solche, deren Räder für große Förderhöhen gebaut sind) bei gleicher Tourenzahl größer ist als bei Niederdruckpumpen.

Als Beispiel eines Hochdruckpumpen-Laufrades wählen wir das bereits mehrmals erwähnte Pumpenrad in Beispiel 2 b), S. 14 bei $u_2 = 15.7$ m/sek, d. i. 1500 Touren pro Min. (Fig. 14 a).

Es ergibt sich hier: $z_s = 17.2$ m, $z_o = 13.3$ m, also $z_s - z_o = 3.9$ m, ferner $y_s = 2.92$ m/sek, also $Q_s = F_2 \cdot y_s = 8$ lit/sek.

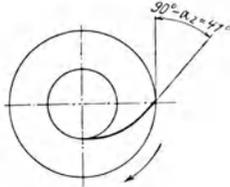


Fig. 14 a.

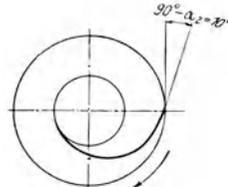


Fig. 14 b.

Nun das Niederdruckpumpen-Laufrad. (Fig. 14 b.) Sein Durchmesser sei ebenfalls $2r_2 = 200$ mm, ferner $\frac{r_1}{r_2} = 0.525$, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha_1 = 77^\circ$, $\alpha_3 = 77^\circ$ wie früher, dagegen $\alpha_2 = 80^\circ$. Die Pumpe sei wie die im Beispiel 2 b) für $Q = 12$ lit/sek Wasser stoßfrei gebaut. λ sei hier einer kurzen Rohrleitung entsprechend ~ 4 gesetzt. Die einzelnen Querschnitte sind $F = 63.5$ qcm, $F_1 = 14.3$ qcm, $F_2 = 31.3$ qcm, $F_3 = 80$ qcm, $F_w = 40.6$ qcm.

Die Zifferrechnung ergibt für diese Werte als allgemeine Gleichung:

$$4.365 c_2^2 - 1.09 c_2 u_2 - 1.051 u_2^2 = -19.62 h$$

für $u_2 = 15.7$ m/sek ist daher mit Berücksichtigung vorstehender Formeln:

$$y_s = 1.96 \text{ m/sek, also } Q_s = F_2 \cdot y_s = 6.1 \text{ lit/sek}$$

$$z_s = 14.75 \text{ m, } z_o = 13 \text{ m}$$

somit

$$z_s - z_o = 1.75 \text{ m.}$$

Der Vergleich zeigt, daß für die Hochdruckpumpen bei Entnahme von 8 lit/sek die Förderhöhe um 3·9 m (also der Druck um nahezu 0·4 atm) zunimmt, während bei der Niederdruckpumpe schon bei Lieferung von 6·1 lit/sek das Maximum der Höhensteigerung, u. zw. mit nur 1³/₄ m, erreicht ist. Der Umstand, daß bei den bisher zumeist gebauten (Niederdruck-) Pumpen die Druckanschwellung, wie das Beispiel ergibt, schon theoretisch sehr gering ist und praktisch infolge der endlichen Spaltbreite etc. noch mehr verschleiert wird, dürfte die Ursache sein, daß diese Vergrößerung $z_s - z_0$ der Förderhöhe (des Druckes), welche vom Verfasser auch an ausgeführten Pumpen konstatiert wurde, bisher seines Wissens nirgends beachtet wird.

4. Die Fälle: $h = 0, c_2 = 0.$

Es sind noch zwei Spezialfälle der allgemeinen Gleichung 28)

$$A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 = - 2 g h$$

hervorzuheben, u. zw.

1. der Fall $h = 0$
2. der Fall $c_2 = 0$, d. h. $Q = 0$.

ad 1. $h = 0$. (Schnitt des hyperbolischen Paraboloides mit der $x y$ -Ebene.) Die allgemeine Gleichung nimmt hier die Form an:

$$A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 = 0 \dots \dots \dots 62)$$

Diese Gleichung gibt die Flüssigkeitsmenge, welche die Pumpe für jedes u_2 liefert, wenn sie dieselbe ohne Druckhöhe, d. h. direkt auswirft, also die maximale Flüssigkeitsmenge.

Gleichung 62) ist die Gleichung zweier sich im Koordinatenanfangspunkt schneidenden Geraden (Fig. 15), die von einer Pumpe maximal geförderte Flüssigkeitsmenge ist daher der Fourenzahl direkt proportional. Die Gleichungen der Geraden ergeben sich aus Gleichung 62) für $c_2 \dots y$, für $u_2 \dots x$ gesetzt zu:

$$\left. \begin{array}{l} m y + x = 0 \\ n y - x = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots 63)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{B}{2C} + \frac{1}{2C} \sqrt{B^2 + 4AC} \\ n &= -\frac{B}{2C} + \frac{1}{2C} \sqrt{B^2 + 4AC} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 64)$$

Nur die eine der beiden Geraden, und diese nur für positive x und y , hat technische Bedeutung. In Fig. 6 (S. 19) sind diese zwei Geraden ebenfalls gezeichnet.

ad 2. $c_2 = 0, Q = 0.$ (Schnitt des hyperbolischen Paraboloides mit der xz -Ebene.) Hier wird keine Flüssigkeit gefördert, obwohl die Pumpe in Gang ist. Dieselbe steht in der Rohrleitung bis zur entsprechenden Höhe h , ohne weiter zu

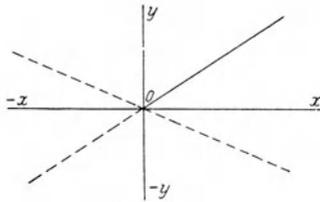


Fig. 15.

steigen und auszutreten, sie „schwebt“ gleichsam, oder das Druckrohr der Pumpe ist z. B. durch einen Schieber abgeschlossen, das Manometer der Pumpe zeigt einen Druck entsprechend einer Höhe h .

Die Geschwindigkeit u_2 (Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades), für welche die Flüssigkeit die Förderhöhe gerade erreicht, ohne jedoch auszutreten, nennt Zeuner „Gleichgewichtsgeschwindigkeit“.

Aus Gleichung 28) folgt unter Annahme von $c_2 = 0$, also für unseren Fall

$$C \cdot u_2^2 = 2gh \dots \dots \dots 65)$$

für $u_2 \dots x$, für $h \dots z_0$ eingeführt

$$x^2 = \frac{2g}{C} \cdot z_0 \dots \dots \dots 66)$$

Gleichung 66) zeigt die Abhängigkeit von x und z_0 in Form einer Parabel (Fig. 16) durch den Koordinatenanfangspunkt. (Siehe diesen Schnitt in der allgemeinen Skizze des hyperbolischen Paraboloides S. 19, Fig. 6.)

Da besonders für die erwähnte Verwendung als Akkumulatorpumpen dieser Zustand, in welchem die Pumpe läuft, aber keine Flüssigkeit entnommen wird, von Wichtigkeit ist, wollen wir Gleichung 65) näher untersuchen, und führen wir zu diesem Behufe aus Gleichung 31) den Wert für C ein. Für z_0 setzen wir h_0 und haben dann zu schreiben:

$$h_0 = \frac{u_2^2}{2g} \left[1 + (\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 - 1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \dots 67)$$

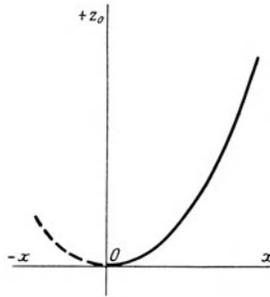


Fig. 16.

Diese Gleichung zeigt, daß die Höhe h_0 von den Winkeln α_2 und α_3 ganz unabhängig ist und nur von u_2 , ζ_0 , ferner von α_1 und $\frac{r_1}{r_2}$ abhängt.

h_0 wächst mit $\sin^2 \alpha_1$, also mit α_1 , somit für konstantes u_2 mit $\frac{r_1}{r_2}$, d. i. mit dem Verhältnis Laufradeintritts- und -austrittsradius.

$\frac{r_1}{r_2}$ und α_1 wachsen unter sonst ungeänderten Verhältnissen gleichzeitig; um hohes h_0 zu erhalten, ist daher ein großes $\frac{r_1}{r_2}$ günstig. In einem späteren Abschnitt wird nachgewiesen werden, daß wachsendes $\frac{r_1}{r_2}$ die nötige Umfangsgeschwindigkeit vergrößert, hierbei werden die Schaufeln jedoch immer kürzer, die Flüssigkeitsführung im Laufrad weniger sicher. Es wird sich daher empfehlen, von den allgemein üblichen Werten, $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ und kleiner, nicht abzugehen.

C. Aufstellung der allgemeinen Gleichung für die Flüssigkeitsbewegung durch eine Zentrifugalpumpe auf dem Versuchswege.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, daß man die allgemeine Gleichung 28) der Flüssigkeitsbewegung für eine ausgeführte Pumpe, deren Abmessungen jedoch nicht bekannt sind, auf dem Versuchswege finden kann.

Wir schreiben statt

$$c_2 \cdot \cdot \frac{Q}{F_2}, \quad u_2 \cdot \cdot \cdot \frac{2 r_2 \pi n}{60}$$

unter Q wie bisher die Flüssigkeitsmenge pro Sek., unter n die Tourenzahl pro Min. verstanden.

Dann gilt wegen Gleichung 28)

$$\frac{A}{F_2^2} \cdot Q^2 - \frac{B}{F_2} \cdot \frac{2 r_2 \pi}{60} \cdot n Q - C \left(\frac{2 r_2 \pi}{60} \right)^2 n^2 = -2 g h . \quad 68)$$

oder

$$\alpha \cdot Q^2 - \beta \cdot n Q - \gamma \cdot n^2 = -19 \cdot 62 \cdot h \quad \dots \dots \dots 69)$$

In Gleichung 69) sind α , β , γ die Unbekannten, Q, n, h zu messen. Aus mindestens 3 Messungsreihen läßt sich daher die allgemeine Beziehung Gleichung 69) ausrechnen.

Zweiter Abschnitt.

**Stoßfreie Geschwindigkeiten und
maximale Förderhöhen.**

A. Stoßfreie Geschwindigkeiten.

Die Gleichung des stoßfreien Durchganges der Flüssigkeit durch die Pumpe, bzw. deren Laufrad und Leitkanäle, für welche im allgemeinen jede Pumpe zu dimensionieren ist, erscheint als Spezialfall unserer allgemeinen Gleichung 28).

Hier ist

$$c_0 = c_1, \dots \dots \dots 70)$$

nach Größe und Richtung; denn die relative Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeit stimmt dann eben nach dem Begriff der „Stoßfreiheit“ der Bewegung mit der Eintrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit in das Laufrad überein; infolge Gleichung 70) ist in Gleichung 12) nunmehr $a_1' = a_1$, d. h. es findet keine Druckänderung beim Eintritt in das Laufrad statt.

Gleichung 11) ist daher jetzt zu schreiben:

$$(1 + \zeta_2) c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1 - a_2) + u_2^2 - u_1^2. \dots \dots 71)$$

Ebenso gilt am Laufradaustritt

$$w_2' = w_2, \quad \alpha_x = -\alpha_3 \dots \dots \dots 72)$$

(Fig 2, S. 7), denn jetzt ist nach dem Begriffe der stoßfreien Flüssigkeitsbewegung die absolute Austrittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit aus dem Laufrade mit der Eintrittsgeschwindigkeit derselben in die Diffuserleitkanäle identisch.

Daher gibt Gleichung 16)

$$a_2' = a_2, \dots \dots \dots 73)$$

auch hier findet keine Druckveränderung mehr statt.

Gleichung 14) geht über in:

$$2g(a_2 - a_3) = (1 + \zeta_3) \cdot c_3^2 - w_2^2. \dots \dots \dots 74)$$

Die Addition der Gleichungen 10), 71) und 74) ergibt jetzt:

$$-2gh = (1 + \zeta_1) c^2 - c_1^2 + (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2 - u_2^2 + u_1^2 - w_2^2. 75)$$

oder, da

$$F c = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_w w_2 = F_3 c_3, \dots \dots \dots 76)$$

$$-2gh = A_1 c_2^2 - C_1 u_2^2, \dots \dots \dots 77)$$

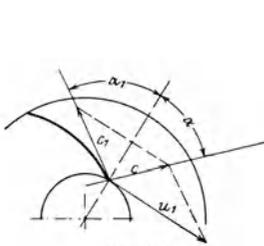


Fig. 17.

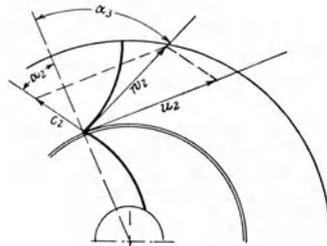


Fig. 18.

worin

$$A_1 = (1 + \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + (1 + \zeta_2) + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 78)$$

$$C_1 = 1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \dots \dots \dots 79)$$

In den Gleichungen 77), 78), 79) sind die Winkel indirekt enthalten, da für den stoßfreien Fall (Fig. 17 und 18) immer gilt:

$$c^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 c_1 u_1 \sin \alpha_1 \dots \dots \dots 80)$$

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2 \dots \dots \dots 81)$$

bezw.:

$$u_1^2 = c_1^2 + w_1^2 - 2 c_1 w_1 \cos (\alpha + \alpha_1) \dots \dots \dots 82)$$

$$u_2^2 = c_2^2 + w_2^2 - 2 w_2 c_2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3). \dots \dots \dots 83)$$

Gleichung 77) gibt die Beziehung der 3 Veränderlichen h, c₂, u₂ für alle Fälle stoßfreier Flüssigkeitsbewegung. Setzen wir für u₂ . . . x, c₂ . . . y, h . . . z, so ist

$$-2gz = A_1 y^2 - C_1 x^2. \dots \dots \dots 84)$$

Da A_1 in Gleichung 78) infolge Überwiegens der negativen Glieder über die positiven (siehe die späteren Beispiele) einen negativen Wert vorstellt, so schreiben wir $-A_1$ statt A_1 und erhalten dann in

$$2gz = A_1 y^2 + C_1 x^2 \dots\dots\dots 85)$$

die Gleichung eines elliptischen Paraboloides (Fig. 19), dessen Scheitel im Nullpunkt liegt und dessen Achse die $+z$ -Achse ist. Als Hauptschnitte ergeben sich mit der xz -Ebene:

$$C_1 x^2 = 2gz, \dots\dots\dots 86)$$

mit der yz -Ebene:

$$A_1 y^2 = 2gz, \dots\dots\dots 87)$$

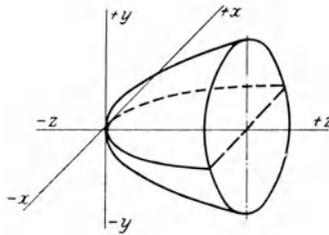


Fig. 19.

das sind Parabeln mit den Parametern

$$\frac{2g}{C_1} \text{ bzw. } \frac{2g}{A_1} \dots\dots\dots 88)$$

Den Eigenschaften des elliptischen Paraboloides zufolge sind alle Schnitte parallel zur xz -Ebene sowie jene parallel zur yz -Ebene Parabeln mit je gleichen Parametern. Die Schnitte parallel zur xy -Ebene sind Ellipsen mit der Gleichung

$$A_1 y^2 + C_1 x^2 = 2gh, \dots\dots\dots 89)$$

wenn h die jeweilige Entfernung der Schnittebene von der xy -Ebene bedeutet.

Wenn es gelänge, eine Pumpe derart zu konstruieren, daß man durch eine Regulierung die Stoßfreiheit im Sinne obiger Gleichungen für die Flüssigkeitsbewegung stets realisieren könnte, so würde für eine solche Pumpe Gleichung 85) an Stelle von Gleichung 28) die allgemeine Beziehung der 3 Größen u_2 , c_2 und h vorstellen.

Für unsere Zentrifugalpumpen ohne Regulierung gilt Gleichung 85) nur für die stoßfreien Geschwindigkeiten, deren es für jede Tourenzahl der Pumpe nur eine gibt. Um die allgemeinen Gleichungen für diese zu finden, haben wir nur Gleichung 84) und unsere allgemeine Gleichung 28) koexistieren zu lassen.

Wir haben in

$$\left. \begin{aligned} -2gz &= Ay^2 - Bxy - Cx^2 \\ -2gz &= A_1y^2 - C_1x^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 90)$$

die Gleichung der Schnittlinie beider Flächen (des hyperbolischen mit dem elliptischen Paraboloid), also alle Punkte stoßfreier Geschwindigkeit unserer Pumpe.

Da die Gestalt der Schnittlinie in der Form Gleichung 90) wenig hervortritt, wollen wir durch Subtraktion beider Gleichungen 90) eine weitere Beziehung ableiten und erhalten diese in

$$(A_1 - A)y^2 + Bxy - (C_1 - C)x^2 = 0 \dots\dots\dots 91)$$

Gleichung 91) mit einer der beiden Gleichungen 90) verbunden bestimmt die Schnittlinie ebenfalls. Da z in Gleichung 91) nicht mehr enthalten ist, so ist Gleichung 91) die Gleichung des auf die xy-Ebene „projizierenden Zylinders“ der Schnittlinie, und zwar geht dieser Zylinder hier in 2 sich in der z-Achse schneidende Ebenen über. Die Schnittlinie selbst besteht somit aus 2 ebenen Kurven.

Bevor wir zur Aufstellung der Gleichungen der beiden anderen Projektionen der Schnittlinie übergehen, wollen wir für A, A₁, B, C und C₁ aus den Gleichungen 29) bis 31) und 78) und 79) die bezüglichen Werte einsetzen. Berücksichtigt man hierbei gleichzeitig die Kontinuitätsgleichung 76), so geht Gleichung 91) nach Kürzung durch ζ₀ über in

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha + \alpha_1)c^2 - c_1^2 - w_2^2 + \cos(\alpha_2 + \alpha_3)c_2w_2 + \\ 2u_1c \sin \alpha_1 \cos(\alpha + \alpha_1) + w_2u_2 \sin \alpha_3 + \sin^2 \alpha_1 u_1^2 = 0 \dots\dots 92) \end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in:

$$\left. \begin{aligned} [c \cos(\alpha + \alpha_1) + u_1 \sin \alpha_1]^2 - c_1^2 &= 0 \\ w_2 [w_2 - \underbrace{\cos(\alpha_2 + \alpha_3)c_2 - u_2 \sin \alpha_3}_{-w_2}] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 93)$$

Diese Gleichungen 93) sind nun eben für den stoßfreien Fall erfüllt, dies dient zur Probe; man sieht, daß man Gleichung 75) aus Gleichung 25) durch Einführung der zwei Bedingungen Gleichung 93) direkt hätte ableiten können.

Fig. 18 (S. 33) liefert für den stoßfreien Fall auch:

$$c_2^2 = w_2^2 + u_2^2 - 2 w_2 \cdot u_2 \sin \alpha_3. \dots \dots \dots 94)$$

Dies schreiben wir mit Benutzung von $F_w w_2 = F_2 c_2$ in der Form:

$$c_2^2 \left[1 - \left(\frac{F_2}{F_w} \right)^2 \right] + 2 \frac{F_2}{F_w} \cdot \sin \alpha_3 \cdot c_2 \cdot u_2 - u_2^2 = 0 \dots 95)$$

oder allgemein:

$$y^2 \left[1 - \left(\frac{F_2}{F_w} \right)^2 \right] + 2 \frac{F_2}{F_w} \cdot \sin \alpha_3 \cdot x y - x^2 = 0 \dots \dots 96)$$

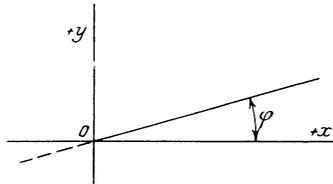


Fig. 20.

auch diese Gleichung ist frei von z, zeigt ebenfalls zwei sich (u. zw. in der z-Achse) schneidende Ebenen; da sie (gemäß ihrer Ableitung) auch die stoßfreien Punkte enthält, muß sie mit Gleichung 91) identisch sein.

Zur weiteren Diskussion wollen wir daher ihrer einfacheren Form wegen Gleichung 96) verwenden.

Gleichung 96) bestimmt somit, mit einer der beiden Gleichungen 90) verbunden, ebenfalls den Schnitt, welchen wir bereits als zwei ebene Kurven erkannt haben.

Daß in der Bedingungsgleichung der Stoßfreiheit Gleichung 91) und 96) die Förderhöhe h nicht vorkommt, erklärt sich daraus, daß die „Stoßfreiheit“ mathematisch lediglich eine rein geometrische Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten erfordert.

Aus Gleichung 96) folgen die Gleichungen der 2 auf die $x y$ -Ebene projizierenden Ebenen der Schnittlinie:

$$\left. \begin{aligned} \left[-\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 - \sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 \cos^2 \alpha_3} \right] y + x &= 0 \quad \dots 97) \\ \left[-\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 + \sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 \cos^2 \alpha_3} \right] y + x &= 0 \quad \dots 98) \end{aligned} \right\}$$

Von diesen beiden gibt nur Gleichung 97) Werte, die für uns Anwendbarkeit haben. Kürze halber sei bezeichnet

$$\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 + \sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 \cos^2 \alpha_3} = n \quad \dots \dots 99)$$

Dann gilt

$$n y - x = 0 \quad \dots \dots \dots 100)$$

Gleichung 100), mit einer der beiden Gleichungen 90) verbunden, definiert die gesuchte Schnittlinie. Der Neigungswinkel der projizierenden Ebene mit der $z x$ -Ebene folgt aus Gleichung 100) zu $\angle \varphi$, wobei $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{n}$ (Fig. 20).

Bemerkung: Für $\alpha_2 = 90^\circ$ fallen die beiden durch die Gleichungen 97) und 98) gegebenen Ebenen zusammen, wobei deren gemeinsame Gleichung lautet:

$$\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 \cdot y - x = 0 \quad \dots \dots \dots 101)$$

denn: Der Ausdruck unter der Wurzel

$$1 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 \cos^2 \alpha_3 = 1 - \left(\frac{w_2}{c_2}\right)^2 \cos^2 \alpha_3 = \frac{c_2^2 - w_2^2 \cos^2 \alpha_3}{c_2^2}$$

für $\alpha_2 = 90^\circ$ ist $c_2 = w_2 \cos \alpha_3$, somit der Wurzel Ausdruck $= 0$.

Nunmehr wollen wir die Gleichungen der auf die $x z$ - bzw. $z y$ -Ebene projizierenden Zylinder der Schnittlinie aufstellen und verbinden zu diesem Zwecke Gleichung 100) mit der für die stoßfreien Punkte giltigen Gleichung

$$2 g z = C_1 x^2 - A_1 y^2, \quad \dots \dots \dots 102)$$

welche, wie erwähnt, ein elliptisches Paraboloid vorstellt, da sich für A_1 negative Werte ergeben, somit alle 3 Glieder positives Vorzeichen erhalten.

Die Elimination von y aus den Gleichungen 100) und 102) liefert

$$x^2 = \frac{2g \cdot n^2}{n^2 \cdot C_1 - A_1} \cdot z \quad \dots \dots \dots 103)$$

als Gleichung des auf die xz -Ebene projizierenden Zylinders, d. i. die Gleichung eines parabolischen Zylinders, und als Projektion der Schnittlinie auf die xz -Ebene eine Parabel, welche durch den Koordinatenursprung geht. (Fig. 21.)

Um nun noch den dritten projizierenden Zylinder zu bestimmen, werde x aus den Gleichungen 100) und 102) eliminiert. Wir finden dadurch in

$$y^2 = \frac{2g}{n^2 \cdot C_1 - A_1} \cdot z \quad \dots \dots \dots 104)$$

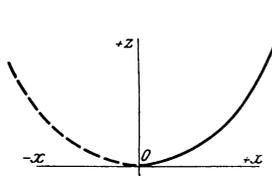


Fig. 21.

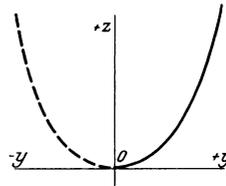


Fig. 22.

die gesuchte Gleichung. Auch diese stellt einen parabolischen Zylinder vor, dessen Schnitt mit der zy -Ebene ist daher eine Parabel, welche überdies durch den Ursprung gehen muß. (Fig. 22.)

Aus den Gleichungen 103) und 104) folgt, daß die gesuchte Schnittlinie, welche alle stoßfreien Punkte des hyperbolischen Paraboloides enthält, aus zwei (wie wir früher sahen) ebenen Kurven zweiter Ordnung besteht, und zwar aus zwei sich im Koordinatenanfangspunkt schneidenden Parabeln, von denen die eine in ihrem ganzen Verlauf, die andere in einem Aste nur mathematische Bedeutung hat.

Die Gleichung der Schnittlinie ergibt sich durch Koexistenz von je 2 der 3 Gleichungen 100), 103), 104).

Fig. 23 zeigt den Schnitt unseres allgemeinen hyperbolischen Paraboloides mit dem elliptischen Paraboloid und dadurch die Lage aller Punkte stoßfreier Geschwindigkeit.

Da diese Art perspektivischer Darstellung sich für Konstruktionszwecke nicht eignet, zeichnen wir uns die drei Projektionen der Schnittlinie auf die drei Hauptebenen; hierdurch

erhalten wir gleichzeitig die ebenen Kurven, in welche die Gleichungen 100), 103), 104) übergehen, wenn wir der Reihe nach z (Förderhöhe), y (Flüssigkeitsmenge), x (Umfangsgeschwindigkeit) analog dem Vorgang im ersten Abschnitt konstant setzen.

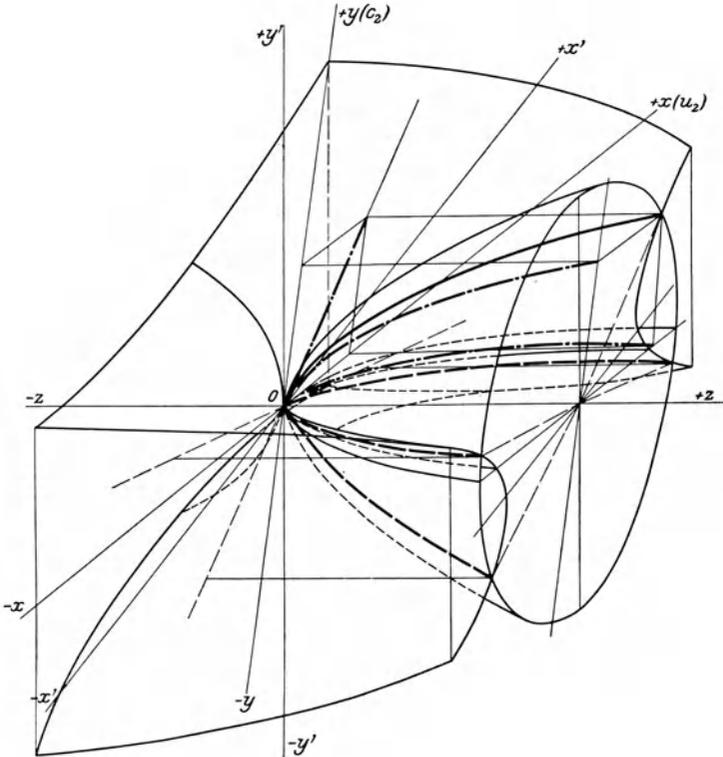


Fig. 23.

- Derjenige Teil des Schnittes der beiden Paraboloid, welchem technische Bedeutung zukommt,
- - - - der übrige Teil desselben;
- · · · die Projektionen der Schnittlinie auf die drei Hauptebenen.

1. Zunächst unser Hauptfall: konstante Tourenzahl. $u_2 = \text{konstant}$. (Fig. 24.) Gleichung 104) $y^2 = \frac{2g}{n^2 \cdot C_1 - A_1} \cdot z$ stellt jetzt eine ebene Kurve vor, wie erwähnt, eine Parabel. Um den Zusammenhang zu verdeutlichen, sind in Fig. 24 für einige Umfangsgeschwindigkeiten u_2 , die $h c_2$ -Kurven eingezeichnet, ebenso die Schnittkurven des elliptischen Para-

boloides mit der betreffenden Bildebene. Die Gleichung dieser Kurven folgt aus Gleichung 102) für $x = \text{konstant}$ zu

$$2gz = C_1 u_2^2 - A_1 y^2, \dots\dots\dots 105)$$

mithin, da $-A_1 y^2$ positiv ist, sind es Parabeln der gezeichneten Lage.

Für jede Umfangsgeschwindigkeit würde die hc_2 -Kurve, welche für die gewöhnliche Pumpe den Verlauf nach a zeigt (Fig. 24), bei stets „stoßfrei“ regulierter Pumpe (im Sinne der Bemerkung S. 34) den Verlauf b, also einen grundsätzlich verschiedenen annehmen, nämlich für wachsende Flüssigkeitsmengen auch wachsende Förderhöhen.

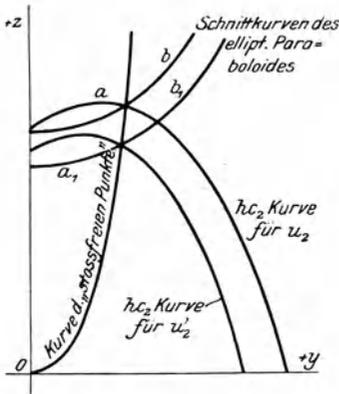


Fig. 24.

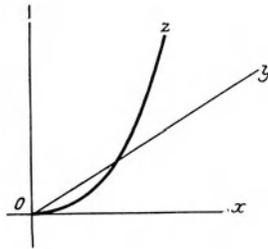


Fig. 25.

2. Die ebenen Kurven für c_2 (Flüssigkeitsmenge) = konstant und für h (Förderhöhe) = konstant.

Die bezüglichen Gleichungen ergeben sich: $\alpha)$ aus Gleichung 103) $x^2 = \frac{2gn^2}{n^2 C_1 - A_1} \cdot z$ für c_2 konstant (Parabel), $\beta)$ aus Gleichung 100) $ny - x = 0$ für h konstant (eine Gerade), siehe Fig. 25.

B. Maximale Förderhöhen (Drücke).

Außer den unter A. besprochenen Punkten des hyperbolischen Paraboloides, welche der stoßfreien Geschwindigkeit entsprechen, sowie den im ersten Abschnitt, S. 28f., abgehandelten

Punkten (Maximalförderung bzw. ganz geschlossene Pumpe) sind es noch die Punkte maximaler Förderhöhe (größten Druckes), welche unser Interesse in Anspruch nehmen.

Wir hatten (Gleichung 52), S. 18) (Fig. 26) die Koordinaten dieser Punkte für den Fall konstanter Tourenzahl bereits gefunden, u. zw.:

$$\left. \begin{aligned} y_s &= \frac{B u_2}{2 A} \dots\dots\dots 106) \\ z_s &= \frac{1}{2 g} \left[\frac{B^2}{4 A} + C \right] \cdot u_2^2 \dots\dots\dots 107) \end{aligned} \right\}$$

Nun wollen wir deren Lage auf der Paraboloidfläche, ähnlich wie unter A. für die „stoßfreien“ Punkte, untersuchen.

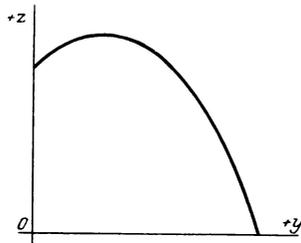


Fig. 26.

Zur allgemeinen Gleichung

$$- 2 g z = A y^2 - B x y - C x^2 \dots\dots\dots 108,$$

tritt hier eine der Gleichungen 106), 107) als zweite Bedingungsgleichung hinzu; z. B. die obere, wobei wir für $u_2 \dots x$ (da jetzt variabel) setzen, also:

$$y = \frac{B}{2 A} \cdot x \dots\dots\dots 109)$$

Gleichung 109) ist, da frei von z, zugleich die Gleichung des die Schnittlinie auf die x y-Ebene projizierenden Zylinders, der hier, wie ersichtlich, eine Ebene ist, die durch die z-Achse geht. Sämtliche Punkte „maximalen Druckes“ liegen daher auf einer Ebene, die durch die z-Achse geht und mit der x z-Ebene den $\sphericalangle \varphi_1$ bildet, wenn

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{B}{2 A} \dots\dots\dots 110)$$

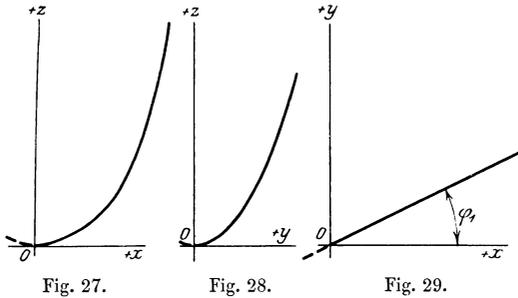
Wir erkennen mithin die Schnittlinie als ebene Kurve und wollen noch die Gleichung der beiden anderen projizierenden Zylinder suchen.

Durch Elimination von y bzw. x aus den Gleichungen 108) und 109) ergibt sich als Gleichung des auf die xz -Ebene projizierenden Zylinders:

$$x^2 = \frac{2g}{B^2 + 4AC} \cdot 4A \cdot z \dots\dots\dots 111)$$

des auf die zy -Ebene projizierenden Zylinders:

$$y^2 = \frac{B^2}{A} \cdot \frac{2g}{B^2 + 4AC} \cdot z \dots\dots\dots 112)$$



beide sind parabolische Zylinder, die Schnittlinie selbst daher eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar eine Parabel mit dem Scheitel im Koordinatenanfangspunkt. Ihre Achse fällt mit der positiven z -Achse zusammen, ihre Gleichung ist durch je zwei der Gleichungen 108), 111) und 112) gegeben.

Fig. 27—29 stellen die Projektionen der Schnittkurve auf die 3 Koordinatenebenen vor, hiervon sind zwei Parabeln, die dritte (Projektion auf die xy -Ebene) eine Gerade der gezeichneten Lage. In Fig. 30 ist die Lage der Punkte maximaler Förderhöhe als Schnitt der Ebene (Gleichung 109)) mit dem hyperbolischen Paraboloid perspektivisch gezeichnet.

Um zu einer bequemeren Darstellungsart zu gelangen, sei auch hier, analog dem Vorgang für die Punkte stoßfreier Geschwindigkeit, der Reihe nach z (Förderhöhe), y (Flüssigkeitsmenge), x (Umfangsgeschwindigkeit) konstant gesetzt. Wir erhalten dadurch die Gleichungen 109), 111) und 112) als

Gleichungen ebener Kurven (Projektionen der Schnittlinien auf die drei Koordinatenebenen).

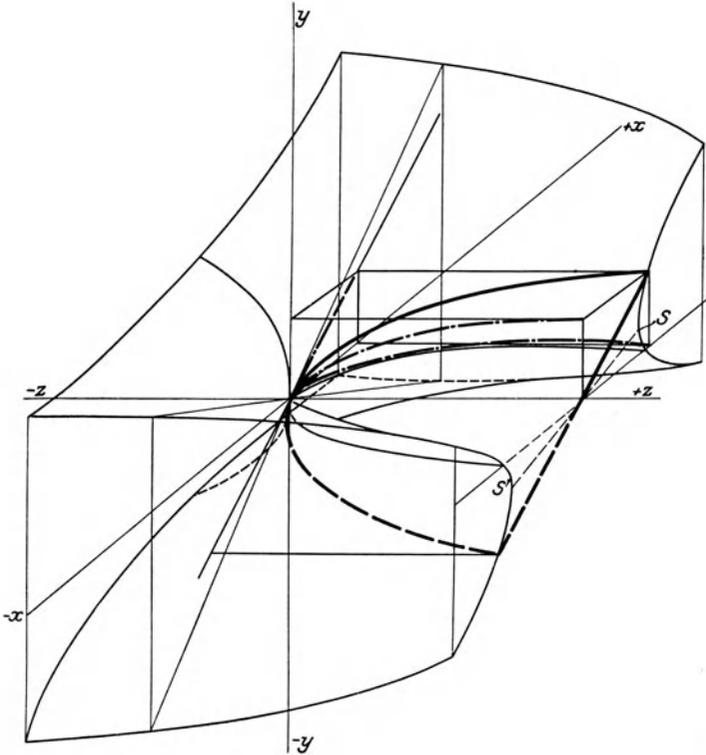


Fig. 30.

- Das hyperbolische Paraboloid,
- der Teil der Ebene Gleichung 109) und des Schnittes derselben mit dem Paraboloid, welchem technische Bedeutung zukommt;
- der übrige Teil der Ebene bzw. der Schnittlinie;
- - - - die Projektionen der Schnittlinie auf die drei Hauptebenen.

1. Förderhöhe konstant, $z = h = \text{konstant}$

$$y = \frac{B}{2A} \cdot x \dots \dots \dots 109)$$

(Fig. 31.)

2. Flüssigkeitsmenge konstant, $y = c_2 = \text{konstant}$

$$x^2 = \frac{2g}{B^2 + 4AC} \cdot 4A \cdot z \dots \dots \dots 111)$$

(Fig. 32.)

3. Tourenzahl konstant, $x = u_2 = \text{konstant}$

$$y^2 = \frac{2g}{B^2 + 4AC} \cdot \frac{B^2}{A} \cdot z \dots\dots\dots 112)$$

(Fig. 33.)

Diese Kurve gibt die größte erreichbare Förderhöhe für jede Flüssigkeitsmenge ($Q = F_2 \cdot y$) an. In Fig. 33 sind für

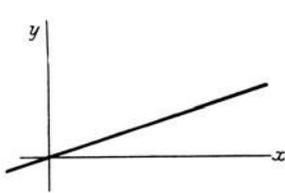


Fig. 31.

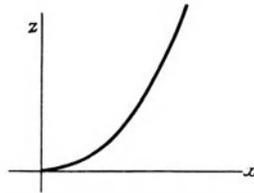


Fig. 32.

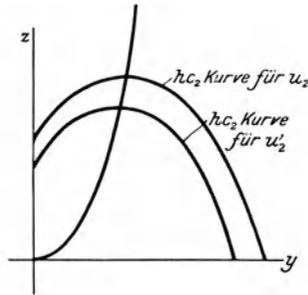


Fig. 33.

zwei Umfangsgeschwindigkeiten u_2 auch die h_{c_2} -Kurven eingezeichnet, durch deren Scheitel die Kurve der maximalen Drücke gehen muß.

C. Bedingungen für die Übereinstimmung der Punkte stoßfreier Geschwindigkeit mit den Punkten maximalen Druckes.

Aus der Ableitung der Punkte stoßfreier Geschwindigkeit als Schnitt des hyperbolischen Paraboloides mit einem elliptischen Paraboloid, der Punkte maximalen Druckes dagegen als Schnitt desselben mit einer Ebene ergibt sich, daß diese Punkte

für gewöhnlich nicht zusammenfallen können, wenn sie auch meist nicht weit voneinander liegen. Ihre Übereinstimmung würde praktisch die beste Ausnützung der Pumpe bedeuten. Im folgenden sollen nun die theoretischen, größtenteils konstruktiv unerfüllbaren, Bedingungen für diese Übereinstimmung aufgestellt werden.

Für die Punkte maximalen Druckes (Förderhöhe) fanden wir bei jeder Umfangsgeschwindigkeit

$$c_2 = \frac{B}{2A} \cdot u_2; \dots\dots\dots 109)$$

wir setzen

$$\frac{B}{2A} = p. \dots\dots\dots 113)$$

Für A und B die Werte aus Gleichung 29) und 30) eingeführt gibt:

$$\frac{y}{x} = p = \frac{B}{2A} = \frac{\zeta_0 \left(2 \frac{r_1}{r_2} \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1) + \right.}{2 \left\{ [1 + \zeta_1 - \zeta_0 \cos^2 (\alpha + \alpha_1)] \left(\frac{F_2}{F} \right)^2 + (\zeta_0 - 1) \left[\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 + \right. \right.}$$

$$\left. \left. \sin \alpha_3 \cdot \frac{F_2}{F_w} \right) \right\}}{\left(\frac{F_2}{F_w} \right)^2 + (1 + \zeta_2) + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 - \zeta_0 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{F_2}{F_w}}; \dots 114)$$

unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung geht der Zähler über in

$$\frac{\zeta_0}{c_2 u_2} [2 u_1 c \sin \alpha_1 \cos (\alpha + \alpha_1) + u_2 w_2 \sin \alpha_3], \dots 115)$$

der Nenner in

$$\frac{2}{c_2^2} \left\{ [1 + \zeta_1 - \zeta_0 \cos^2 (\alpha + \alpha_1)] c^2 + (\zeta_0 - 1) (c_1^2 + w_2^2) + (1 + \zeta_2) c_2^2 + \right.$$

$$\left. (\lambda + \zeta_3) c_3^2 - \zeta_0 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) c_2 w_2 \right\}. \dots\dots\dots 116)$$

Wir führen unsere Beziehungen aus dem I. Abschnitt:

$$c_1 = c \cos (\alpha + \alpha_1) + u_1 \sin \alpha_1 \dots\dots\dots 117)$$

$$w_2 = c_2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + u_2 \sin \alpha_3 \dots\dots\dots 118)$$

in den Zähler ein, der sich dann schreibt:

$$\frac{\zeta_0}{c_2 u_2} [c_1^2 - c^2 \cos^2 (\alpha + \alpha_1) - u_1^2 \sin^2 \alpha_1 + w_2^2 - w_2 c_2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3)]$$

Daher ist

$$\frac{y}{x} = p = \frac{\zeta_0 c_2^2 [c_1^2 - c^2 \cos^2(\alpha + \alpha_1) + w_2^2 - 2c_2 u_2 [\zeta_0 c_1^2 - \zeta_0 c^2 \cos^2(\alpha + \alpha_1) + \zeta_0 w_2^2 - \zeta_0 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) w_2 c_2 + \cos(\alpha_2 + \alpha_3) w_2 c_2 - u_1^2 \sin^2 \alpha_1]}{(1 + \zeta_1) c^2 - c_1^2 - w_2^2 + (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2} \dots \dots \dots 119)$$

Für die Punkte stoßfreier Geschwindigkeit war hingegen für jedes u_2

$$\left[\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 + \sqrt{1 - \left(\frac{F_2}{F_w}\right)^2 \cos^2 \alpha_3} \right] y - x = 0 \dots \dots \dots 100)$$

Gleichung 100) läßt sich auch schreiben:

$$\left[\frac{w_2}{c_2} \sin \alpha_3 + \sqrt{1 - \left(\frac{w_2}{c_2}\right)^2 \cos^2 \alpha_3} \right] y - x = 0,$$

also

$$\frac{y}{x} = \frac{c_2}{w_2 \sin \alpha_3 + \sqrt{c^2 - w_2^2 \cos^2 \alpha_3}} \dots \dots \dots 120)$$

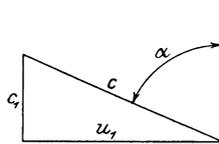


Fig. 34.

Der Vergleich von Gleichung 119) mit 120) ergibt, daß einige Annahmen gemacht werden müssen, um zur Übereinstimmung dieser Ausdrücke und damit auch der genannten Punkte zu gelangen.

Und zwar nehmen wir zunächst an: $\alpha_2 = 0$, dann geht Gleichung 120) (nach Bemerkung S. 37) über in

$$\frac{y}{x} = \frac{c_2}{w_2 \sin \alpha_3},$$

bezw. da dann $w_2 \sin \alpha_3 = u_2$ ist, in

$$\frac{y}{x} = \frac{c_2}{u_2} \dots \dots \dots 121)$$

Diese Form muß also auch Gleichung 119) annehmen. Wir müssen daher folgende weitere Annahmen machen:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \lambda = 0,$$

d. h. es dürfen keinerlei Reibungsverluste auftreten, ferner sei $\alpha_1 = 0^0$.

Dann erhält (mit Berücksichtigung von Fig. 34 und 35) Gleichung 119) die Form:

$$p = \frac{\zeta_0 c_2}{2 u_2} \frac{(c_1^2 - c^2 \cos^2 \alpha + w_2^2 - c_2^2)}{\left\{ \zeta_0 (c_1^2 - c^2 \cos^2 \alpha + w_2^2 - c_2^2) + c^2 - c_1^2 - w_2^2 + c_2^2 \right\}}$$

$$= \frac{\zeta_0 c_2}{2 u_2} \frac{u_2^2}{(\zeta_0 \cdot u_2^2 + u_1^2 - u_2^2)} \dots \dots \dots 122)$$

Weiters für ζ_0 seinen theoretischen Wert 2 eingeführt liefert

$$p = \frac{c_2}{u_2} \cdot \frac{u_2^2}{(u_2^2 + u_1^2)} = \frac{c_2 \cdot u_2}{u_2^2 + u_1^2} \dots \dots \dots 123)$$

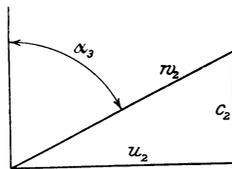


Fig. 35.

Um nun schließlich die volle Übereinstimmung mit Gleichung 121) zu erhalten, muß noch

$$u_1 = 0 \dots \dots \dots 124)$$

gesetzt werden, d. h. das Rad muß bis zum Mittelpunkt geschaufelt sein.

Die theoretischen Bedingungen der Übereinstimmung der Punkte stoßfreier Geschwindigkeit mit denen maximalen Druckes sind daher, kurz zusammengefaßt, folgende:

- | | | |
|---|---|------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (radiale Schaufel) 2. $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \lambda = 0$ (keine Reibung) 3. $\zeta_0 = 2$ (theoretischer Wert) 4. $r_1 = 0$ (die Schaufelung muß bis zur Radmitte reichen) | } | . . . 125) |
|---|---|------------|

Also beinahe lauter praktisch unerfüllbare Bedingungen.

D. Beispiele.

Im folgenden sollen für die Beispiele des ersten Abschnittes (S. 12 und 14) die Gleichungen der Kurven stoßfreier Geschwindigkeit und maximaler Förderhöhe, und zwar je für konstante Tourenzahl, Förderhöhe und Flüssigkeitsmenge, aufgestellt werden. Die bezüglichen allgemeinen Gleichungen lauten, nochmals zusammengestellt:

$$- 2 g h = A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2, \dots \dots \dots 126)$$

ferner

für maximalen Druck:

$$c_2 = \frac{B}{2A} \cdot u_2 \dots \dots \dots 127)$$

$$u_2^2 = \frac{2 g}{B^2 + 4 A C} \cdot 4 A \cdot h \quad 128)$$

$$c_2^2 = \frac{2 g}{B^2 + 4 A C} \cdot \frac{B^2}{A} \cdot h \quad 129)$$

für die stoßfreien Geschwindigkeiten:

$$2 g h = A_1 c_2^2 + C_1 u_2^2 \dots \dots 130)$$

(— A₁ statt A₁ geschrieben)

$$u_2^2 = \frac{2 g n^2}{n^2 C_1 + A_1} \cdot h \dots \dots 131)$$

$$c_2^2 = \frac{2 g}{n^2 C_1 + A_1} \cdot h \dots \dots 132)$$

ferner

$$n y - x = 0 \dots \dots 133)$$

Beispiel 1 (Pumpe 1, S. 12).

Beispiel 2 (Pumpe 2b, S. 14)

a) Stoßfreie Geschwindigkeiten.

Die Einsetzung der Zifferwerte in Gleichung 78) und 79) ergibt

$$A_1 = - 20.18$$

(also tatsächlich negativ)

$$C_1 = 0.64$$

$$A_1 = - 7.67$$

$$C_1 = 0.724$$

Somit nimmt Gleichung 130) die Form an

$$19.62 \cdot h = 20.18 c_2^2 + 0.64 u_2^2$$

$$19.62 h = 7.67 c_2^2 + 0.724 u_2^2$$

ferner

Gleichung 131) $u_2^2 = 11.31 h$
 - 132) $c_2^2 = 0.61 h$
 - 133) $c_2 = 0.232 u_2$

$$u_2^2 = 14.6 h$$

$$c_2^2 = 1.125 h$$

$$c_2 = 0.28 u_2$$

b) Maximaler Druck.

| | | |
|--|--|---|
| Gleichung 127) $c_2 = 0.236 u_2$ - 128) $u_2^2 = 11.3 h$ - 129) $c_2^2 = 0.63 h$ | | $c_2 = 0.185 u_2$ $u_2^2 = 14.15 h$ $c_2^2 = 0.482 h$ |
|--|--|---|

Die folgenden Figuren (Fig. 36, 37, 38) zeigen diese Kurven für das Beispiel 2 (Maßstab 1 m = 10 mm Zeichnung¹⁾).

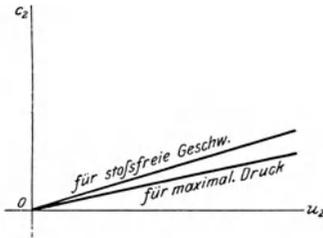


Fig. 36.

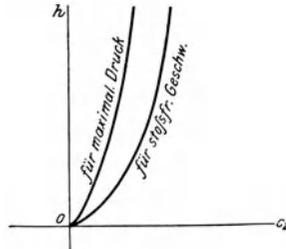


Fig. 37.

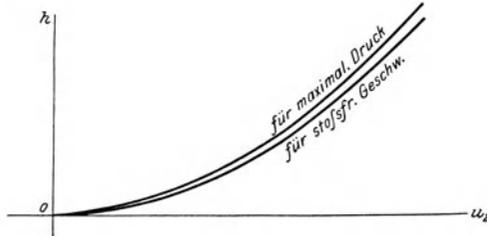


Fig. 38.

Wir sehen, daß im Beispiel 1 die Übereinstimmung der „stoßfreien“ Punkte mit den Punkten maximalen Druckes nahezu erreicht ist. Wir hatten unter den theoretischen Bedingungen für dieselbe (S. 47) auch tatsächlich die Bedingung $a_2 = 0$, die für Beispiel 1 erfüllt ist. Immerhin ist die hier so weitgehende Übereinstimmung nur zufällig; es soll an dem folgenden Beispiel gezeigt werden, daß trotz $a_2 = 0$ viel größere Differenzen unter den entsprechenden Kurven auftreten können.

¹⁾ Die Figuren 36—38 sind im Maßstabe 3:5 verkleinert wiedergegeben.

Wir wählen z. B. eine Pumpe mit 6 Laufrädern von 250 mm Durchmesser, stoßfrei gebaut für eine Förderung von 20 lit/sek auf ca. $6 \cdot 30 = 180$ m Förderhöhe bei 1380 Touren pro Min. ($u_2 = 18$ m/sek).

Die Dimensionen jedes Rades sind: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha_1 = 75^\circ 10'$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 77^\circ$, $\frac{r_1}{r_2} = 0.5$, $F = 84.2$ qcm, $F_1 = 21.5$ qcm, $F_2 = 48.3$ qcm, $F_w = 10.8$ qcm; ferner $\lambda \sim 60$, entsprechend einer etwa 480 m langen Leitung von 150 mm lichter Weite.

Die Einsetzung vorstehender Zifferwerte in unsere allgemeinen Gleichungen ergibt:

$$A = 8.76, \quad B = 5.65, \quad C = 1.0424,$$

dann

$$-A_1 = 21.34, \quad C_1 = 0.75 \text{ und } n = 4.35.$$

Somit lautet die allgemeine Gleichung dieser Pumpe:

$$8.76 c_2^2 - 5.65 c_2 u_2 - 1.0424 u_2^2 = -19.62 h$$

(c_2 , u_2 in m/sek, h in m); ferner ergibt sich

für die maximalen Drücke:

$$\begin{aligned} u_2^2 &= 10 h \\ c_2^2 &= 1.04 h \\ c_2 &= 0.323 u_2 \end{aligned}$$

für die stoßfreien Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} 19.62 h &= 21.34 c_2^2 + 0.75 u_2^2 \\ u_2^2 &= 10.5 h \\ c_2^2 &= 0.552 h \\ c_2 &= 0.23 u_2 \end{aligned}$$

Man ersieht aus diesen Gleichungen, daß hier die entsprechenden Kurven viel mehr divergieren als im Beispiel 1, daß also $\alpha_2 = 0^\circ$ allein praktisch noch keine weitgehende Übereinstimmung derselben gewährleistet, welche indes immer anzustreben ist.

Dritter Abschnitt.

Kraftbedarf und Wirkungsgrad.

A. Aufstellung der allgemeinen Gleichung für den Kraftbedarf.

Bei stoßfreier Flüssigkeitsbewegung schreibt sich das Drehmoment P , welches zur gleichförmigen Drehung jedes Laufrades einer Zentrifugalpumpe notwendig ist, wenn M die per Sekunde die Pumpe durchströmende Flüssigkeitsmasse vorstellt, und die übrigen Größen die im ersten Abschnitt angegebene Bedeutung haben:

$$P = M [(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) r_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) r_1] \dots 134)$$

(Zeuner, Vorlesungen über Theorie der Turbinen S. 131, Gleichung 149.)

Daß es sich bei Pumpen um aufzuwendende, nicht wie bei Turbinen um gewonnene Momente handelt, ändert an der Gleichung nichts, es ergibt sich nur am Schlusse der Rechnung ein negatives Vorzeichen.

Gleichung 134) gilt für alle stoßfreien Geschwindigkeiten; wir wollen nunmehr die für den allgemeinen Fall der Flüssigkeitsbewegung „mit Stoß“ nötigen Ergänzungen⁴ derselben vornehmen. Wir folgen hierbei Zeuners Vorgang (a. a. O. S. 133 ff.), welcher dieselben für die Eintrittsstelle des Laufrades berechnet hat. Für den Austritt aus dem Laufrade bzw. den Eintritt in die Diffuserkanäle werden wir einen ähnlichen Weg einschlagen.

a) Eintritt in das Laufrad. Zeuner gibt für die Laufradeintrittsstelle folgende Berechnung an, die hier kurz angedeutet sei (Fig. 39).

1. Infolge der gegen die stoßfreie nunmehr geänderten Geschwindigkeit erfolgt eine Veränderung des Drehmomentes um

$$M r_1 [c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1)] \dots \dots \dots 135)$$

Denn die Änderung der Flüssigkeitgeschwindigkeit normal zum Radius beträgt:

$$c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1),$$

die von der radialen Komponente der Geschwindigkeitsänderung erzeugte Kraft wird von der fest gelagerten Welle aufgenommen, kommt daher hier nicht weiter in Betracht.

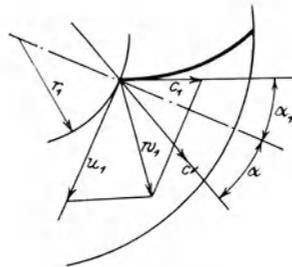


Fig. 39.

Der Änderung des Moments Gleichung 135) entspricht eine Änderung L' der Sekundenarbeit, welche sich durch Multiplikation mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ergibt, zu:

$$L' = M \cdot u_1 [c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1)] \dots \dots \dots 136)$$

2. tritt auch die schon im ersten Abschnitt erwähnte Druckänderung an der Laufradeintrittsstelle auf, und es beträgt die durch dieselbe bewirkte Arbeitsänderung pro Sekunde

$$L_1 = \frac{\zeta_0}{2g} \cdot F_1 \cdot c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin \alpha_1.$$

Hierin ist ζ_0 (Stoßkoeffizient) statt des theoretischen Wertes 2 gesetzt, g die Beschleunigung der Schwere, alle übrigen Größen mit der Bedeutung nach S. 3 bis 5, c_0 nach S. 7, somit $F_1 (c_0 - c_1)$

die bei außen in Ruhe gedachter Flüssigkeit durch Bewegung des Kanals F_1 verdrängte Flüssigkeitsmenge. Zu dieser Verdrängung ist eine Kraft nötig von

$$2 \cdot \frac{F_1 \cdot c_0}{2g} \cdot \gamma \cdot (c_0 - c_1);$$

(γ spezifisches Gewicht der Flüssigkeit); da der Weg in der Krafrichtung $u_1 \sin \alpha_1$ ist, und, um der Wirklichkeit näher zu kommen, statt $2 \dots \zeta_0$ gesetzt, ergibt sich der vorstehende Wert

$$L_1 = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} \cdot F_1 \cdot c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin \alpha_1 \dots \dots \dots 137)$$

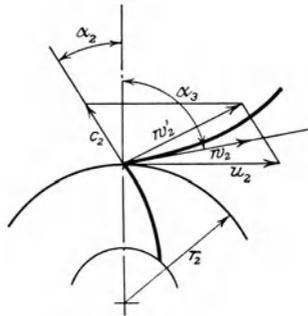


Fig. 40.

Zifferrechnungen zeigen, daß das Moment Gleichung 135) und das Gleichung 137) entsprechende Moment entgegengesetzt gerichtet sind, daher auch die Sekundenarbeiten L' und L_1 immer entgegengesetztes Zeichen erhalten.

b) Eintritt in die Diffuserleitkanäle (Fig. 40).

1. Die absolute Geschwindigkeit der längs der Leitschaufel wegströmenden Flüssigkeit senkrecht zum Radius ist $w_2 \sin \alpha_3$, in derselben Richtung hat die Flüssigkeit, aus dem Laufrad kommend, die Geschwindigkeit

$$- [c_2 \sin \alpha_2 - u_2],$$

die Geschwindigkeitsänderung beträgt daher

$$w_2 \sin \alpha_3 + (c_2 \sin \alpha_2 - u_2); \dots \dots \dots 138)$$

die radiale Komponente der Geschwindigkeitsänderung erzeugt eine Kraft, die von der festgelagerten Welle aufzunehmen, daher hier nicht in Rechnung zu ziehen ist. Die Veränderung des aufzuwendenden Drehmomentes folgt aus Gleichung 138) zu

$$- M r_2 [w_2 \sin \alpha_3 - u_2 + c_2 \sin \alpha_2], \quad \dots \dots \dots 139)$$

daher die Veränderung L'' der Sekundenarbeit

$$L'' = - M u_2 [w_2 \sin \alpha_3 - u_2 + c_2 \sin \alpha_2] \quad \dots \dots \dots 140)$$

das negative Zeichen, weil das Moment Gleichung 139) dem Moment Gleichung 135) entgegengesetzt gerichtet ist.

Bemerkung: Für Stoßfreiheit ist am Eintritt in den Diffuser $w_2 \sin \alpha_3 = u_2 - c_2 \sin \alpha_2$, am Laufradeintritt $c \sin \alpha = u_1 - c_1 \sin \alpha_1$, daher, wie es sein muß, die Momente Gleichung 135) und 139) gleich Null sind.

2. Auch an dieser Stelle entsteht eine Druckveränderung, für welche wir im ersten Abschnitt die Gleichung 22) aufgestellt haben:

$$2 g (a_2' - a_2) = \zeta' w_2 (w_0 - w_2) \quad \dots \dots \dots 22)$$

wobei nach Gleichung 21)

$$w_0 = c_2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + u_2 \sin \alpha_3.$$

Analog dem Vorgang unter a) 2. S. 52 denken wir uns den Querschnitt F_w mit der Geschwindigkeit w_0 in der Richtung des ersten Elementes der Diffuserleitschaufel gegen die im Laufrade befindliche Flüssigkeit bewegt, wodurch per Sekunde eine Verdrängung von $F_w (w_0 - w_2)$ Flüssigkeit stattfindet, da $F_w \cdot w_2$ doch in die Leitkanäle eintritt.

Die erforderliche Kraft ist hierbei:

$$\frac{2 \cdot F_w \cdot w_0 \gamma}{2 g} (w_0 - w_2), \quad \dots \dots \dots 141)$$

für 2 setzen wir, wie unter a), einen Stoßkoeffizienten ζ_o' , machen aber gleichzeitig wieder die Annahme $\zeta_o' = \zeta_o$; dann ergibt sich, da $u_2 \sin \alpha_3$ der Weg in der Kraftrichtung ist, als Sekundenarbeit L_2

$$L_2 = - \zeta_o' \cdot \frac{\gamma}{2 g} \cdot F_w \cdot w_0 (w_0 - w_2) u_2 \sin \alpha_3. \quad \dots \dots 142)$$

(Wir schreiben negatives Zeichen, weil L_2 entgegengesetzten Sinnes ist als L_1 .) Zifferrechnungen zeigen, daß die L' und L_2 entsprechenden Momente einander entgegengesetzt gerichtet sind; bezüglich der sich für L', L'', L_1, L_2 gleichzeitig ergebenden Vorzeichen siehe die Zusammenstellung S. 62.

Zunächst fügen wir nun zu unserem Hauptmoment P (Gleichung 134) die beiden Momente Gleichung 135) und 139) hinzu, die durch die geänderte Richtung der Flüssigkeitsbewegung allein entstehen. Wir erhalten unter Berücksichtigung des Drehungsinnes

$$P_o = -M [(c_1 \sin \alpha_1 - u_1) r_1 - (c_2 \sin \alpha_2 - u_2) r_2] + M r_1 [c \sin \alpha - u_1 + c_1 \sin \alpha_1] - M r_2 [w_2 \sin \alpha_3 - u_2 + c_2 \sin \alpha_3],$$

oder reduziert:

$$P_o = -M [r_2 w_2 \sin \alpha_3 - r_1 c \sin \alpha]. \dots \dots 143)$$

Die P_o entsprechende Arbeit per Sek. L_o ergibt sich durch Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit zu:

$$L_o = -M [u_2 w_2 \sin \alpha_3 - u_1 c \sin \alpha]. \dots \dots 144)$$

Bezeichne L_t die dem Momente P (Gleichung 134)) entsprechende Sekundenarbeit, so haben wir bisher

$$L_o = L_t + L' + L''$$

gebildet. L_t ist der Arbeitsbedarf der stoßfreien Pumpe pro Sekunde, entsprechend dem Moment Gleichung 134); L', L'', L_1, L_2 sind nach dem Vorangegangenen durch die Gleichungen 136), 137), 140), 142) definiert. $L' + L_1 = L_1'$ ist die Arbeitsvermehrung an der Laufradeintrittsstelle, $L'' + L_2 = L_2''$ an der Eintrittsstelle in die Leitkanäle des Diffusers beim Verlassen der stoßfreien Geschwindigkeit. In L_o (Gleichung 144) berücksichtigen wir nur L' und L'' , es kommen jedoch auch noch die durch die Druckänderungen bewirkten Arbeitsänderungen per Sek. L_1 und L_2 hinzu, daher ergibt sich die aufzuwendende Gesamtarbeit per Sekunde („Kraftbedarf“) einer Pumpe als algebraische Summe der einzelnen Arbeitsgrößen per Sekunde zu:

$$L = -M [u_2 w_2 \sin \alpha_3 - u_1 c \sin \alpha_1] + \frac{\zeta_o \gamma}{2g} [F_1 c_o (c_o - c_1) u_1 \sin \alpha_1 - F_w w_o (w_o - w_2) u_2 \sin \alpha_3]. \dots 145)$$

Wir haben daher, kurz zusammengestellt, folgende Ausdrücke für den Sekundenarbeitsbedarf erhalten:

$$L_t = M [(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) u_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) u_1] \dots 146)$$

$$L' = M u_1 [c \sin \alpha - u_1 + c_1 \sin \alpha_1] \dots 147)$$

$$L'' = -M u_2 [w_2 \sin \alpha_3 - u_2 + c_2 \sin \alpha_2] \dots 148)$$

$$L_1 = \frac{\zeta_0}{2g} \gamma \cdot F_1 \cdot c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin \alpha_1 \dots 149)$$

$$L_2 = -\frac{\zeta_0}{2g} \gamma \cdot F_w \cdot w_0 (w_0 - w_2) u_2 \sin \alpha_3 \dots 150)$$

$$L_0 = -M [u_2 w_2 \sin \alpha_3 - u_1 c \sin \alpha] \dots 151)$$

$$L = L_t + L' + L'' + L_1 + L_2 \dots 152)$$

$$L_0 = L_t + L' + L'' \dots 153)$$

$$L = L_0 + L_1 + L_2 \dots 154)$$

Das richtige Vorzeichen ergibt sich durch Einführung spezieller Werte von selbst, „minus“ bedeutet aufzuwendende, „plus“ gewonnene Arbeit.

B. Der Kraftbedarf und seine Einzelteile.

Zur genaueren Beurteilung des Arbeitsaufwandes per Sekunde L [Gleichung 152)] einer Pumpe bei der Flüssigkeitsbewegung mit Stoß wollen wir der Reihe nach die Einzelausdrücke L_t , L' , L'' , L_1 , L_2 , L_0 etc. einer Besprechung unterziehen, wobei wir dieselben mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung derart umformen, daß als Veränderliche außer dem jeweiligen L nur c_2 und u_2 vorkommen.

1. L_t , d. i. die Sekundenarbeit für den Fall der richtigen (stoßfreien) Geschwindigkeiten.

Nach Gleichung 146) ist

$$L_t = M [(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) u_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) u_1]$$

$$M = \frac{F_2 \cdot c_2}{g} \cdot \gamma.$$

Daher

$$L_t = \frac{F_2 c_2 \gamma}{g} \left[c_2 u_2 \sin \alpha_2 - c_2 u_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \sin \alpha_1 - u_2^2 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 u_2^2 \right]$$

schließlich:

$$L_t = \frac{F_2 \gamma}{g} \left[\sin \alpha_2 - \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \sin \alpha_1 \right] u_2 c_2^2 - \frac{F_2 \gamma}{g} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] u_2^2 \cdot c_2 \cdot 155)$$

(Das Einsetzen der Zifferwerte gibt L_t negativ, wie es sein muß.)

Für $u_2 = \text{konstant}$ ergibt sich als Ausdruck von L_t (Gleichung 155)) eine Parabel von der Lage Fig. 41.

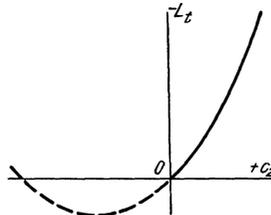


Fig. 41.

2. L' , Sekundenarbeit infolge der falschen Geschwindigkeit an der Laufr_adeintrittsstelle.

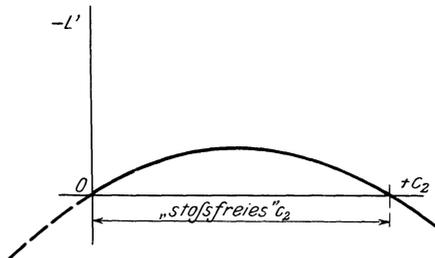


Fig. 42.

Es war Gleichung 147)

$$\begin{aligned} L' &= M u_1 [c \sin \alpha - u_1 + c_1 \sin \alpha_1] \\ &= \frac{F_2 c_2 \gamma}{g} \left[\frac{F_2}{F} c_2 \sin \alpha - \frac{r_1}{r_2} u_2 + \frac{F_2}{F_1} \sin \alpha_1 c_2 \right] \end{aligned}$$

und schließlich:

$$L' = \frac{F_2 \gamma}{g} \cdot \frac{r_1}{r_2} \left[\frac{F_2}{F} \sin \alpha + \frac{F_2}{F_1} \sin \alpha_1 \right] u_2 c_2^2 - \frac{F_2 \gamma}{g} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot u_2^2 \cdot c_2, \cdot 156)$$

für u_2 konstant stellt Gleichung 156) eine Parabel vor (Fig. 42), welche natürlich für $c_2 = 0$ und $c_2 =$ der stoßfreien Geschwindigkeit die Achse schneiden muß.

3. L'' , Sekundenarbeit infolge falscher Geschwindigkeit an der Eintrittsstelle in die Diffuserleitkanäle.

Gleichung 148)

$$L'' = -M u_2 [w_2 \sin \alpha_3 + c_2 \sin \alpha_2 - u_2].$$

Eine den früheren analoge Behandlung liefert

$$L'' = -\frac{F_2 \gamma}{g} \left[\frac{F_2}{F_w} \cdot \sin \alpha_3 + \sin \alpha_2 \right] u_2 c_2^2 + \frac{F_2 \gamma}{g} u_2^2 \cdot c_2, \dots 157)$$

für $u_2 = \text{konstant}$ haben wir als Bild von Gleichung 157) eine Parabel nach Fig. 43. Auch diese schneidet die c_2 -Achse außer für $c_2 = 0$ noch im Punkte $c_2 = \text{stoßfreie Geschwindigkeit}$.

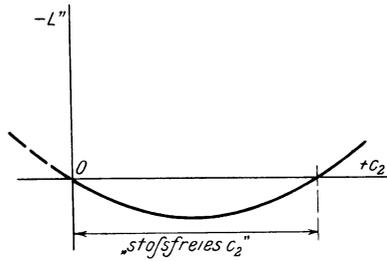


Fig. 43.

4. L_1 , Sekundenarbeit infolge der durch die unrichtige Geschwindigkeit an der Laufradeintrittsstelle hervorgerufenen Druckdifferenz.

Es war Gleichung 149)

$$L_1 = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin \alpha_1,$$

also

$$L_1 = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} \cdot F_1 \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot u_2 [c_0^2 - c_0 c_1], \dots 158)$$

hierbei ist

$$c_0^2 - c_0 c_1 = \left[\left(\frac{F_2}{F} \right)^2 \cos^2 (\alpha + \alpha_1) - \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{F_2}{F} \cos (\alpha + \alpha_1) \right] c_2^2 + \left[2 \cdot \frac{F_2}{F} \frac{r_1}{r_2} \cos (\alpha + \alpha_1) \sin \alpha_1 - \frac{F_2}{F_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha_1 \right] u_2 c_2 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot \sin^2 \alpha_1 \cdot u_2^2. \dots 159)$$

L_1 nimmt somit die Form an:

$$L_1 = m c_2^2 u_2 + n c_2 u_2^2 + p u_2^3, \dots \dots \dots 160)$$

m, n, p Konstante, aus Gleichung 159) und 160) abzuleiten.

Für u_2 konstant gibt Gleichung 160) eine Parabel mit der Lage nach Fig. 44.

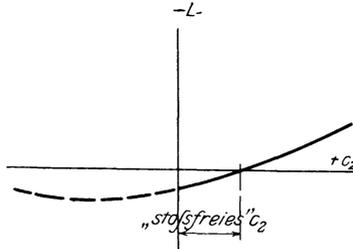


Fig. 44.

5. L_2 , Sekundenarbeit infolge der durch die unrichtigen Geschwindigkeiten an der Eintrittsstelle in die Diffuserkanäle entstehenden Druckdifferenz.

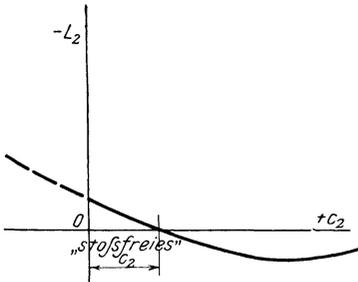


Fig. 45.

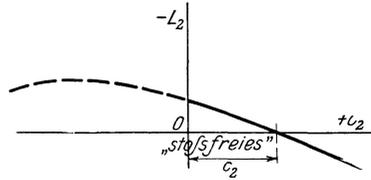


Fig. 46.

Gleichung 150)

$$L_2 = -\frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_w (w_0 - w_2) w_0 \cdot u_2 \sin \alpha_3,$$

daher

$$L_2 = -\frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_w \cdot \sin \alpha_3 u_2 \left[c_2^2 \left(\cos^2 (\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{F_2}{F_w} \cos (\alpha_2 + \alpha_3) \right) + c_2 u_2 \left(2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) \sin \alpha_3 - \frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 \right) + u_2^2 \sin^2 \alpha_3 \right], \dots \dots 161)$$

somit hat L_2 die Form:

$$L_2 = - [r c_2^2 u_2 + s c_2 u_2^2 + t u_2^3], \dots \dots \dots 162)$$

wobei r, s, t Konstante sind. Für $u_2 =$ konstant gelten als Bild von L_2 die Parabeln Fig. 45 oder 46, je nachdem das Glied mit c_2^2 , also $\cos(\alpha_2 + \alpha_3)$ negativ oder positiv, mithin je nachdem $\alpha_2 + \alpha_3 >$ oder $< 90^\circ$ ist.

6. $L_0 = L_t + L' + L''$. L_0 ist nur eine Rechnungsgröße, da es die Arbeit pro Sekunde bedeutet, falls nur durch falsche Geschwindigkeiten und nicht auch durch gleichzeitige Druckdifferenzen eine Kraftbedarfveränderung gegenüber L_t vorkäme

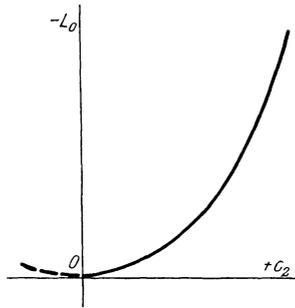


Fig. 47.

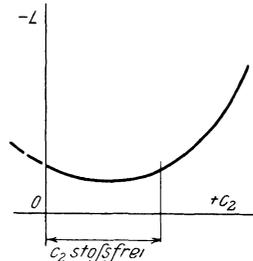


Fig. 48.

Gleichung 151) gab:

$$L_0 = - M [u_2 w_2 \sin \alpha_3 - u_1 c \sin \alpha]$$

oder umgeformt:

$$L_0 = - \frac{F_2 \gamma}{g} \left[\frac{F_2}{F_w} \sin \alpha_3 - \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{F_2}{F} \sin \alpha \right] u_2 c_2^2 \dots 163)$$

In Fig. 47 ist für $u_2 =$ konstant L_0 graphisch dargestellt. (Parabel mit dem Scheitel im Koordinatenanfangspunkt.)

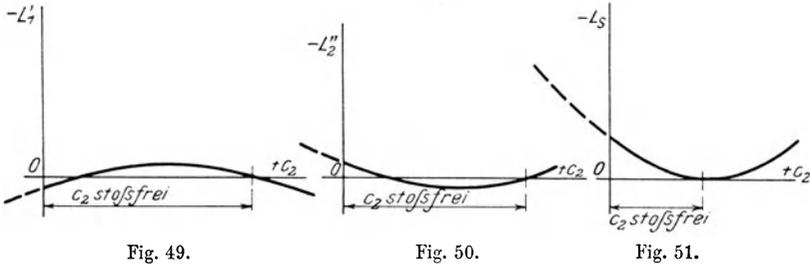
7. Die Gesamtarbeit pro Sekunde

$$L = L_t + L' + L'' + L_1 + L_2,$$

ergibt sich durch algebraische Addition der Einzelausdrücke. Sie ist bei konstanter Tourenzahl durch eine Parabel nach Fig. 48 dargestellt (s. Beispiele).

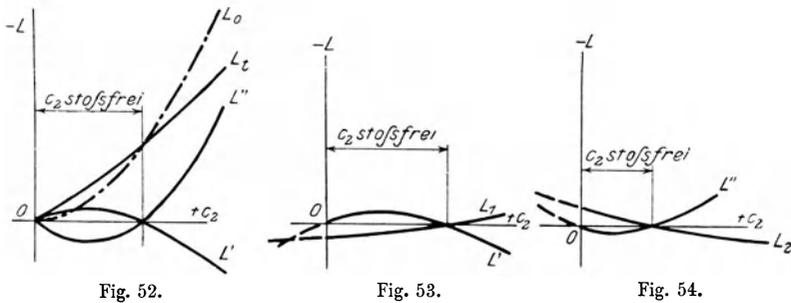
8. Um den Einfluß des „Stoßes“ am Laufradeintritt zu beurteilen, bilden wir die Sekundenarbeit $L_1' = L' + L_1$; für u_2 konstant ist der Ausdruck für L_1' eine Parabel nach Fig. 49.

9. Analog stellt $L_2'' = L'' + L_2$ den Einfluß des „Stoßes“ auf den Kraftbedarf an der Eintrittsstelle in die Diffuserleit-



kanäle vor. Für u_2 konstant ergibt sich hierfür durch Addition von L'' und L_2 eine Parabel nach Fig. 50.

10. Der Gesamteinfluß des Stoßes ist daher gegeben durch die Sekundenarbeit $L_s = L_1' + L_2''$ (es ist $L = L_t + L_s$). Für u_2



konstant ist die Kurve Fig. 51 der Ausdruck für L_s (Parabel, deren Scheitel im „stoßfreien“ Punkt liegen muß).

Schließlich sei noch in Fig. 52 die graphische Addition $L_t + L' + L'' = L_0$ durchgeführt, ferner in Fig. 53 und 54 für Laufradeintritt bzw. Eintritt in die Diffuserleitkanäle die durch falsche Geschwindigkeit und Druckdifferenz bewirkten Sekundenarbeiten zusammengezeichnet; im übrigen sei auf die weiter unten durch-

geführten speziellen Beispiele verwiesen. Hier ist noch in kurzer Tabelle zusammengestellt, wie sich die Vorzeichen für die Einzelausdrücke von L nach vorstehenden Kurven gleichzeitig ergeben, wobei wieder „minus“ aufzuwendende, „plus“ gewonnene Arbeit bedeutet.

Zusammenstellung der Vorzeichen.

| | | | |
|--------------------------------|---|---------|---------|
| | L_t | negativ | |
| Eintritt in das Laufrad . . . | $\left\{ \begin{array}{l} L' \\ L_1 \end{array} \right.$ | negativ | positiv |
| | $\left\{ \begin{array}{l} L' \\ L_1 \end{array} \right.$ | positiv | negativ |
| Eintritt in die Diffuserkanäle | $\left\{ \begin{array}{l} L'' \\ L_2 \end{array} \right.$ | positiv | negativ |
| | $\left\{ \begin{array}{l} L'' \\ L_2 \end{array} \right.$ | negativ | positiv |

Bemerkung 1. In keinem der Ausdrücke L kommt die Förderhöhe h vor. Für den Kraftbedarf sind eben nur die Geschwindigkeiten und die Pumpendimensionen maßgebend, h ist nur indirekt, da es eine Funktion von u_2 und c_2 ist, auch in L enthalten.

Bemerkung 2. Bisher war bei der Kraftbedarfsrechnung nur von einem Laufrade allein die Rede. Sind n (gleiche) Räder in einer Pumpe eingebaut, so entsteht jeder der Ausdrücke L_t, L' etc. „ n “-mal, es ist dann jedes Glied mit n zu multiplizieren, bzw. L mit n zu multiplizieren, um den Kraftbedarf für alle Räder, somit für die ganze Pumpe zu erhalten.

C. Spezialfälle.

Die allgemeine Gleichung für den Kraftbedarf soll im folgenden für einige Fälle spezialisiert werden, u. zw.

1. für die „ganz geschlossene“ Pumpe, d. i. für den Fall, daß die Pumpe zwar läuft, jedoch keine Flüssigkeit entnommen wird, sei es daß das Druckrohr abgeschlossen ist, oder die Flüssigkeit im Steigrohr in einer gewissen Höhe im Gleichgewicht steht,

2. für die Maximalförderung, d. i. für $h = 0$, die Pumpe wirft direkt aus,

3. für die maximalen Förderhöhen,

4. für die stoßfreien Geschwindigkeiten (für diese geht die allgemeine Gleichung in die bekannte Form über).

1. Geförderte Flüssigkeitsmenge gleich Null.

In diesem Falle geht

$$L = L_t + L' + L'' + L_1 + L_2 \dots \dots \dots 146)$$

wegen $c_2 = 0$, da dann $L_t = L' = L'' = 0$ wird (siehe die bezüglichen Gleichungen), ferner in Gleichung 160)

$$L_1 = \frac{\zeta \circ \gamma}{2g} \cdot F_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \sin^2 \alpha_1 u_2^3 \dots \dots \dots 164)$$

und in Gleichung 162)

$$L_2 = - \frac{\zeta \circ \gamma}{2g} \cdot F_w \cdot \sin^3 \alpha_3 \cdot u_2^3 \dots \dots \dots 165)$$

wird, über in

$$L = - \frac{\zeta \circ \gamma}{2g} \left[F_w \sin^3 \alpha_3 - F_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \sin^2 \alpha_1 \right] u_2^3 \dots 166)$$

Dies der Kraftbedarf für den Fall, daß nicht gefördert wird, er beträgt im allgemeinen für mehrrädige Pumpen je nach deren Größe $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ und weniger des Kraftbedarfs für den normalen (stoßfreien) Gang und ist für die Beurteilung der Ökonomie von Kreiselpumpen als „Akkumulatoren“ zur Lieferung von Druckflüssigkeit sehr wichtig; die Sekundenarbeit ist im vorliegenden Fall der 3. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit proportional.

2. Maximale Flüssigkeitsmenge.

Hier ist nichts Besonderes zu erwähnen, c_2 ist aus der allgemeinen Gleichung

$$- 2gh = A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2, \dots \dots \dots 167)$$

die hier wegen $h = 0$ in $A c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 = 0$ übergeht, zu entnehmen; da dieses c_2 dem praktisch größten Wert für die Flüssigkeitsmenge entspricht (daher größer ist als das „stoßfreie“ c_2 , in Fig. 48 daher rechts vom Scheitel liegt), so geht die Gesamtarbeit L für jedes u_2 in ihren praktisch größten Wert über, ohne jedoch zu einem „Maximum“ in mathematischem Sinne zu werden.

3. Maximale Förderhöhen.

Auch für diesen Fall nimmt der Ausdruck für L keine besonders bemerkenswerte Form an. Aus der allgemeinen Gleichung 167) ist das c_2 , welches wir für die größten Förderhöhen durch $c_2 = \frac{B}{2A} u_2$ (S. 41, Gleichung 109)) definiert fanden, zu berechnen. Bezüglich der Lage dieses Punktes im $L c_2$ -Diagramm (für konstantes u_2) sei nur kurz auf die am Schlusse dieses Abschnittes durchgeführten Beispiele verwiesen, der Punkt für L liegt bei den maximalen Förderhöhen im allgemeinen in der Nähe des Scheitels der Kurve Fig. 48.

4. Stoßfreie Geschwindigkeiten.

Für diese ist

$$L' = L'' = L_1 = L_2 = 0,$$

daher

$$L = L_t = M [(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) u_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) u_1] \quad . \quad 168)$$

oder anders geschrieben:

$$L = -M [u_2^2 - u_1^2 - u_2 c_2 \sin \alpha_2 + c_1 u_1 \sin \alpha_1]. \quad . \quad 169)$$

α) für den speziellen Fall $\alpha = 0^0$ (keine Leitschaufeln, bzw. Schaufeln mit $\alpha = 0^0$ am Eintritt in das Laufrad) ist $u_1 = c_1 \sin \alpha_1$, somit

$$L = -M [u_2^2 - u_2 c_2 \sin \alpha_2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 170)$$

β) für $\alpha_2 = 0$ („Ritinger“schaufel) ist

$$L = -M [c_1 u_1 \sin \alpha_1 + (u_2^2 - u_1^2)]. \quad . \quad . \quad . \quad 171)$$

γ) für $\alpha = 0^0$ und $\alpha_2 = 0^0$ ist $L = L_t = -M u_2^2$, oder, wenn Q die sekundlich geförderte Flüssigkeitsmenge bedeutet

$$L = -\frac{\gamma}{g} Q \cdot u_2^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 172)$$

**D. Manometrischer (hydraulischer)
Wirkungsgrad η_h .**

Derselbe sei definiert als Verhältnis der nützlichen Förderhöhe h zu H , wobei H die Summe aus h und allen Verlusthöhen infolge Flüssigkeitsreibungen, Stößen infolge Geschwindigkeitsänderungen etc. in Pumpe und Leitung bedeutet. (H wird auch öfters als manometrische Förderhöhe bezeichnet.)

$$\eta_h = \frac{h}{H}, \dots\dots\dots 173)$$

Zähler und Nenner mit Mg (Gewicht der geförderten Flüssigkeit) multipliziert gibt

$$\eta_h = \frac{Mg h}{Mg H}, \dots\dots\dots 174)$$

somit ist dieser manometrische Wirkungsgrad gleich dem Verhältnis der Nutzarbeit zur gesamten für die Flüssigkeitsförderung tatsächlich verbrauchten Arbeit. Der Einfluß des Spaltverlustes, der ja auch ein „hydraulischer“ Verlust ist, ferner der mechanischen Reibungen wird in diesem Kapitel noch nicht berücksichtigt, hierüber weiter unten; mit Rücksicht auf den Spaltverlust wäre daher unser η_h als „reiner“ hydraulischer Wirkungsgrad zu bezeichnen.

Um nun η_h für jede (somit auch nicht stoßfreie) Geschwindigkeit angeben zu können, müssen wir das Verhältnis $\frac{h}{H}$ oder $\frac{Mg h}{Mg H}$ bilden; $Mg H$ ist nach der vorstehenden Auffassung nichts anderes als unsere Gesamtarbeit L Gleichung 145) bzw. 152) (alles auf die Sekunde bezogen, M ist ja auch die per Sekunde durchströmende Flüssigkeitsmasse); zur Bildung des Zählers ist für jedes c_2 aus der allgemeinen Beziehung das entsprechende h zu rechnen. Durch $Mg = F_2 c_2 \gamma$ kann entsprechend gekürzt werden. Es ist daher

$$\eta_h = \frac{F_2 c_2 \gamma h}{L} \dots\dots\dots 175)$$

Da dieses Verfahren zu weiteren Bemerkungen keinen Anlaß gibt, sei nur auf das Zahlenbeispiel am Schlusse des Abschnittes verwiesen.

Wir wollen indes η_h für die 4 (S. 62) angegebenen Spezialfälle näher betrachten.

1. Geförderte Flüssigkeitsmenge gleich Null.

Die Definition des manometrischen (reinen hydraulischen) Wirkungsgrades muß für diesen Spezialfall modifiziert werden. Denn derselben zufolge würde hier wegen $Q \gamma = Mg = 0$ nach

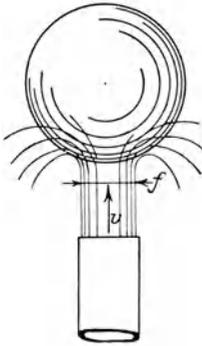


Fig. 55.

Gleichung 174) $\eta_h = \frac{0}{0}$, also unbestimmt; oder, da von „nützlicher“ Förderhöhe, weil nichts gefördert wird, nicht die Rede sein kann, wäre nach Gleichung 173) $\eta_h = 0$ zu setzen. Und doch hat die Pumpe auch jetzt eine Arbeit zu leisten, nämlich diejenige, welche nötig ist, um die Flüssigkeitssäule in der Höhe h_0 (Gleichung 65), Seite 29) „schwebend“ zu erhalten, sie muß die erforderliche sekundliche Schwebearbeit aufbringen. Der Wirkungsgrad ist daher hier zu setzen gleich dem Quotienten aus Schwebearbeit E durch die aufgewendete Arbeit der Pumpe L, d. i.

$$\eta_h = \frac{E}{L} \dots \dots \dots 176)$$

Der vorliegende Schwebestrom stellt sich als eine Aufeinanderfolge von Schwebeständen unendlich kleiner Dauer und Amplitude infolge von kontinuierlichen Stößen dar. Diese entstehen dadurch, daß die in dem Laufrad enthaltene Flüssigkeit in die Diffuserleitkanäle einzutreten sucht, woran sie das Gewicht der in der Rohrleitung und in der Pumpe rings um das Laufrad befindlichen Flüssigkeit hindert. Die Flüssigkeit im Laufrad übt auf letztere (nach der Benennungsweise Prof. Budaus¹⁾) einen „kinetischen“ Druck aus.

¹⁾ Ing. A. Budau, „Die mechanischen Grundgesetze der Flugtechnik“, Sonderabdruck aus der „Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und

Nun zur Berechnung von E. Zunächst werde ein (etwa aus einem Springbrunnen) vertikal nach oben mit der Geschwindigkeit v austretender Flüssigkeitsstrahl (Fig. 55) vom Querschnitte f betrachtet, welcher eine Kugel vom Gewichte G schwebend erhält. Bezeichnet γ das spezifische Gewicht dieser Flüssigkeit, so ist durch

$$m = \frac{f \cdot v \cdot \gamma}{g} \dots \dots \dots 177)$$

die sekundlich ausströmende Flüssigkeitsmasse gegeben. Damit die Kugel schwebt, ist erforderlich

$$G = m v \dots \dots \dots 178)$$

In dem austretenden Strahl ist die Energiemenge

$$E = \frac{m v^2}{2} \dots \dots \dots 179)$$

enthalten.

Die Verbindung von Gleichung 178) und 179) liefert

$$E = \frac{G v}{2} \dots \dots \dots 180)$$

als Arbeit per Sekunde (Schwebefeekt), welche nötig ist, um die Kugel schwebend zu erhalten.

Diese Formel stimmt mit der von Professor Budau (in der in der Fußnote zitierten Schrift) für die Sekundenschwebearbeit eines Körpers in der Luft aufgestellten Gleichung überein (nur hat v dort natürlich eine etwas andere Bedeutung).

Nun kehren wir zur Zentrifugalpumpe zurück. Statt der Kugel ist hier eine Flüssigkeitssäule vom Gewichte

$$G = f \cdot h_0 \cdot \gamma \dots \dots \dots 181)$$

vorhanden, wobei f deren Bodenfläche bezeichnet. h_0 und γ haben die schon wiederholt erwähnte Bedeutung. An Stelle des Flüssigkeitsstrahles tritt der Druck der im Laufrad befindlichen, (im Sinne der Auffassung des Vorganges als Schwingungserscheinung) um ein unendlich kleines Stück in die Diffuser-

Architekten-Vereines“ 1903 nebst einem Anhang (Erwiderung auf die gemachten Einwendungen).

kanäle austretenden Flüssigkeit. In Gleichung 177) ist daher für f , den Querschnitt des austretenden Strahles, der lichte Querschnitt an der Eintrittsstelle in die Diffuserleitkanäle senkrecht zur Bewegungsrichtung zu setzen, für welchen wir bisher die Bezeichnung F_w (s. S. 4) gebrauchten; ebenso ist F_w mit dem in Gleichung 181) auftretenden f identisch.

Daher schreibt sich das Gewicht der über dem Laufrad befindlichen Flüssigkeit nunmehr:

$$G = F_w \cdot h_o \cdot \gamma. \dots \dots \dots 182)$$

Das m in Gleichung 178) ist zu setzen:

$$m = \frac{F_w \cdot v \cdot \gamma}{g} \dots \dots \dots 183)$$

und damit

$$G = \frac{F_w \cdot v \cdot \gamma}{g} \cdot v. \dots \dots \dots 184)$$

v , das jetzt nur eine Rechnungsgröße ist, läßt sich als diejenige Geschwindigkeit vorstellen, welche ein sich vertikal nach aufwärts bewegendes Flüssigkeitsstrahl vom Querschnitt F_w haben müßte, um eine Kugel vom Gewicht G gleich dem Gewicht unserer Flüssigkeitssäule schwebend zu erhalten.

Die Verbindung von Gleichung 182) und 184) liefert

$$F_w \cdot h_o \cdot \gamma = \frac{F_w \cdot v^2 \cdot \gamma}{g}$$

somit

$$v^2 = h_o g, \dots \dots \dots 185)$$

für h_o die Beziehung 65) $h_o = \frac{C \cdot u_2^2}{2g}$ berücksichtigt, gibt

$$v = u_2 \sqrt{\frac{C}{2}}. \dots \dots \dots 186)$$

Mit Gleichung 65), 182), 186) geht unsere Schwebefeffektformel 180) schließlich über in

$$E = \frac{C \sqrt{2C}}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot F_w \cdot u_2^3. \dots \dots \dots 187)$$

Für $g = 9.80868$ m/sek ist

$$E = 0.0180226 \cdot C \sqrt{C} \gamma F_w u_2^3 \dots \dots \dots 187a)$$

(E in kgm/sek, alle anderen Größen in m bzw. m/sek und kg.)

Für Wasser als Förderflüssigkeit ($\gamma = 1000$) und $C \sim 1.05$ ist

$$E = 19.4 \cdot F_w \cdot u_2^3 \dots \dots \dots 187b)$$

(E in kgm/sek, F_w in qm, u_2 in m/sek) oder abgerundet, doch etwas zu groß

$$E \sim 20 \cdot F_w \cdot u_2^3 \dots \dots \dots 187c)$$

Nunmehr können wir den Wirkungsgrad $\eta_h = \frac{E}{L}$ rechnen, da L nichts anderes ist als die durch Gleichung 166) S. 63 dargestellte Sekundenarbeit

$$L = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} \left[F_w \cdot \sin^3 \alpha_3 - F_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \sin^2 \alpha_1 \right] u_2^3$$

Somit ergibt sich

$$\eta_h = \frac{C \sqrt{2C}}{4 \zeta_0} \frac{1}{\left[\sin^3 \alpha_3 - \left(\frac{F_1}{F_w} \right) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \sin^2 \alpha_1 \right]} \dots \dots 188)$$

oder, für C der Wert aus Gleichung 31) gesetzt,

$$\eta_h = \frac{\sqrt{2}}{4 \zeta_0} \frac{\left[1 + (\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 - 1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\sin^3 \alpha_3 - \left(\frac{F_1}{F_w} \right) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \sin^2 \alpha_1 \right]} \dots \dots 189)$$

als theoretischer manometrischer Wirkungsgrad für den vorliegenden Fall $Q = 0$.

Gleichung 189) liefert einen Wert für η_h , natürlich kleiner als 1. Der volumetrische Wirkungsgrad ist hier, da keine Flüssigkeit gefördert wird, daher, was übrigens nicht in voller Strenge zutrifft, auch keine Flüssigkeit verloren geht, gleich 1 zu setzen. Dagegen wird der effektive Wirkungsgrad eben wegen $Q = 0$ gleich Null.

Nun werde noch ein Beispiel für die Berechnung von η_h durchgeführt.

Beispiel. Eine Pumpe mit 4 Laufrädern von 200 mm Durchmesser hat die Dimensionen: $F = 0.488$ qdm, $F_1 =$

0·118 qdm, $F_2 = 0·197$ qdm, $F_3 = 0·341$ qdm, $F_w = 0·0642$ qdm,
dann $\frac{r_1}{r_2} = 0·5$, $\sphericalangle \alpha = 0^\circ$, $\alpha_1 = 77^\circ$, $\alpha_2 = 42^\circ$, $\alpha_3 = 75^\circ$.

Dieselbe ist „stoßfrei“ gebaut für eine Förderung von 10 lit/sek Wasser auf ca. 100 m bei 1670 Touren pro Min. ($u_2 = 17·49$ m/sek).

Als allgemeine Gleichung für die Wasserbewegung durch diese Pumpe ergibt sich, wenn h hier die manometrische Förderhöhe bedeutet:

$$6·22 c_2^2 - 3·83 c_2 u_2 - 1·0475 u_2^2 = -19·62 h$$

(alles in m bezw. m/sek).

Hierzu nach Gleichung 166) für die „ganz geschlossene“ Pumpe ($c_2 = 0$) die aufgewendete Sekundenarbeit L gerechnet, gibt

$$\begin{aligned} L &= \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} [F_w \sin^3 \alpha_3 - F_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \sin^2 \alpha_1] u_2^3 \\ &= \frac{\zeta_0 \cdot 1000}{19·62} [0·000642 \sin^3 75^\circ - 0·00118 \cdot 0·5^3 \cdot \sin^2 77^\circ] u_2^3 \\ L &= 0·02335 \cdot \zeta_0 \cdot u_2^3 \end{aligned}$$

Für $\zeta_0 = 1·25$, $u_2 = 17·49$ m/sek ist $L = 156$ kgm/sek pro 1 Lauf-rad, somit für die ganze Pumpe (ohne Berücksichtigung der mechanischen Verluste)

$$L_p = \frac{4 \cdot 156}{75} = 8·35 \text{ PS.}$$

Nun die Schwebearbeit pro Sekunde. $C = 1·0475$ für $\zeta_0 = 1·25$. Mit $u_2 = 17·49$ m/sek und den übrigen vorstehenden Angaben wird E pro 1 Rad nach Gleichung 187 a) gleich 66·2 kgm/sek; somit ist für 4 Räder und in PS die Gesamt-schwebearbeit per Sekunde $E = 3·55$ PS.

Daher

$$\eta_h = \frac{E_p}{L_p} = \frac{3·55}{8·35} = 42\frac{1}{2} \%.$$

Dieser (sehr geringe) Wert ist sofort anders zu beurteilen, wenn man bedenkt, daß der Koeffizient ζ_0 nicht genau bekannt ist. Rechnet man den Wert ζ_0 nach Gleichung 65) und 31) aus Versuchen zurück, so ergibt sich ζ_0 meist bedeutend kleiner

als 1·25 (siehe hierüber auch S. 116 f.). Speziell für vorliegendes Beispiel lieferte die praktische Erprobung einer Pumpe mit vorstehenden Dimensionen bei 1670 Touren pro Min. pro 1 Rad $h_0 = 14\cdot4$ m, daher

$$C = \frac{2g h_0}{u_2^2} = 0\cdot926$$

(statt 1·0475 mit $\zeta_0 = 1\cdot25$) und damit nach Gleichung 31)

$$\zeta_0 = 0\cdot74.$$

Dieser Wert, in den Formeln für L bzw. E eingesetzt, ergibt

$$L_p = \frac{0\cdot74}{1\cdot25} \cdot 8\cdot35 = 4\cdot95 \text{ PS}$$

und $E = 55 \text{ kgm/sek}$ nach Gleichung 187 a) pro 1 Rad, daher für die ganze Pumpe $E_p = 2\cdot96 \text{ PS}$.

Mit diesen Zahlen ist

$$\eta_h = \frac{E_p}{L_p} = 60 \%,$$

also bedeutend höher.

Der Versuch zeigte bei dieser Pumpe und 1670 Touren pro Min. einen Kraftbedarf von 5·6 PS gegenüber dem Rechnungsergebnis von 4·95 PS, ein Resultat, welches mit Rücksicht auf die Unsicherheit von ζ_0 , ferner auf die in 5·6 PS enthaltenen mechanischen Verluste (zur Zeit des Versuches waren die Lager und Stopfbüchsen noch nicht eingelaufen) als recht befriedigend bezeichnet werden kann.

Es muß eben beachtet werden, daß in dem Falle $c_2 = 0$, bei welchem in der allgemeinen Formel 145) für den Kraftbedarf L das erste von ζ_0 unabhängige Glied ganz wegfällt, ζ_0 eben als Faktor erscheint und daher wesentlichen Einfluß auf die Größe von L nimmt, weshalb die Kenntnis von ζ_0 hier besonders wichtig ist. Der Schwebeeffekt E ist zwar auch von ζ_0 abhängig, aber den Schwankungen dieses Wertes gegenüber viel unempfindlicher als L.

2. Maximale Flüssigkeitsmenge.

Da hier $h = 0$ ist, geht η_h über in Null.

$$\eta_h = 0 \dots \dots \dots 190)$$

3. Maximale Förderhöhen.

Hier sind in die Gleichung für η_h die sich aus der allgemeinen Beziehung ergebenden Größtwerte von h (S. 41, Gleichung 107)) einzuführen. Da dieser Fall zu weiteren Bemerkungen keinen Anlaß gibt, sei nur auf das Beispiel zum Schlusse des Abschnittes verwiesen.

4. Stoßfreie Geschwindigkeiten.

Für diesen Fall geht η_h wegen der hier auftretenden geringsten Verluste (nur Reibungsverluste bezw. Spaltverlust) in seinen größten Wert über.

Und zwar ist

$$\eta_h = \frac{M g h}{L} = \frac{M g h}{M [u_2^2 - u_1^2 + c_1 u_1 \sin \alpha_1 - u_2 c_2 \sin \alpha_2]} \quad 191)$$

Für den stoßfreien Fall war Gleichung 75)

$$-2gh = (1 + \zeta_1) c^2 - c_1^2 + (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2 - u_2^2 + u_1^2 - w_2^2 \quad 192)$$

ferner ist:

$$\left. \begin{aligned} w_2^2 &= c_2^2 + u_2^2 - 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2 \\ c^2 &= c_1^2 + u_1^2 - 2 c_1 u_1 \sin \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 193)$$

somit

$$2gh = 2(u_2^2 - u_1^2 + c_1 u_1 \sin \alpha_1 - u_2 c_2 \sin \alpha_2) - \zeta_1 c^2 - \zeta_2 c_2^2 - (\lambda + \zeta_3) c_3^2.$$

Dies in Gleichung 191) berücksichtigt, gibt die Gleichung

$$\eta_h = \frac{2 g h}{2 g h + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2} \dots \dots \dots 194)$$

es geht also hier der Nenner, wie es sein muß, in die Summe aus Förderhöhe und Reibungsverlusthöhen über.

Für den Spezialfall $\alpha = 0^0$ gilt mit Berücksichtigung von Gleichung 170)

$$\eta_h = \frac{g h}{u_2^2 - u_2 c_2 \sin \alpha_2} \dots \dots \dots 195)$$

was sich auch schreiben läßt:

$$\eta_h = \frac{g \cdot h}{u_2^2} \cdot \frac{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2} \dots \dots \dots 195a)$$

Für $\alpha_2 = 0^\circ$ ist

$$\eta_h = \frac{g h}{c_1 u_1 \sin \alpha_1 + (u_2^2 - u_1^2)} \dots \dots \dots 196)$$

und für $\alpha_2 = 0^\circ$ und $\alpha = 0^\circ$

$$\eta_h = \frac{g h}{u_2^2} \dots \dots \dots 197)$$

Anschließend soll noch gezeigt werden, daß η_h für die jeweiligen stoßfreien Geschwindigkeiten (d. i. bei wechselndem u_2) gleich bleibt.

Wir hatten

$$\eta_h = \frac{2 g h}{2 g h + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2} = \frac{2 g h}{2 g h + \left[\zeta_1 \left(\frac{F_2}{F} \right)^2 + \zeta_2 + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 \right] c_2^2}$$

Wir setzen

$$k = \zeta_1 \left(\frac{F_2}{F} \right)^2 + \zeta_2 + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 = \text{konstant.} \quad 198)$$

Somit

$$\eta_h = \frac{2 g h}{2 g h + k c_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{k}{2 g h}}$$

für $2 g h$ aus Gleichung 192) eingesetzt und Gleichung 198) berücksichtigt ergibt:

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \frac{k c_2^2}{2 (u_2^2 + u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_1^2 + u_1 c_1 \sin \alpha_1) - k \cdot c_2^2}}$$

Für die stoßfreien Fälle ist nach dem Sinussatz:

$$u_2 = c_2 \cdot \frac{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)}{\cos \alpha_3} \quad \text{und} \quad u_1 = c_1 \frac{\sin (\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha},$$

somit

$$u_2^2 - u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_1^2 + u_1 c_1 \sin \alpha_1 = c_2^2 \left[\frac{\sin^2 (\alpha_2 + \alpha_3)}{\cos^2 \alpha_3} - \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_3} \sin (\alpha_2 + \alpha_3) - \left(\frac{\sin^2 (\alpha + \alpha_1)}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin (\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right] = k_1 \cdot c_2^2,$$

wobei k_1 ein konstanter Wert ist.

Somit

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \frac{k}{2k_1 - k}} = \frac{2k_1 - k}{2k_1} \dots \dots \dots 199)$$

Daher ist η_h ein konstanter von c_2 unabhängiger Wert. Für dieselbe Pumpe und Leitung ist mithin η_h für alle stoßfreien Geschwindigkeiten gleich. Ändert sich dagegen die Leitungslänge, so ändert sich λ , damit auch k und η_h .

Bemerkung 1. Wenn es sich um genaue Bestimmung des Gütegrades einer Pumpe allein handelt, muß das Glied λc_3^2 in Gleichung 194) weggelassen werden, da dasselbe die Reibung der Rohrleitung enthält.

Bei langen Leitungen kann sich dasselbe schon sehr fühlbar machen, und zwar nimmt η_h mit wachsender Rohrreibung natürlich ab. Wird λc_3^2 in Gleichung 194) weggelassen, so ist η_h der Wirkungsgrad der Pumpe allein, bleibt λc_3^2 in Gleichung 194), so ist η_h als Wirkungsgrad der ganzen Anlage (Pumpe und Leitungen) aufzufassen.

Als Beispiel werde die theoretische Größe von η_h im stoßfreien Fall für unsere Pumpe (Beispiel 1, S. 12) ausgerechnet.

$$\eta_h = \frac{2gh}{2gh + c_2^2 \left[\zeta_1 \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 + \zeta_2 + (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 \right]}$$

für $\lambda \sim 31$ (d. i. entsprechend einer ~ 75 m langen Leitung von 60 mm l. W. ergibt sich (alle Dimensionen nach S. 12) bei $u_2 = 15.7$ m/sek und c_2 (stoßfrei) = 3.65 m/sek (wobei $h = 22$ m)

$$\eta_h = 84.5\% \text{ (Maximalwirkungsgrad).}$$

Lassen wir hingegen das Glied mit λ weg, so wird $\eta_h = 95\%$, also ein sehr bedeutender Unterschied, der für Garantievorsuche nicht mehr gleichgültig ist.

Bemerkung 2. Die Rohrreibung, welche in λ zum Ausdruck kommt, ist außer c_3^2 noch proportional $\frac{1}{d}$, ferner dem Koeffizienten ζ_r , den wir für Wasser 0.025 gesetzt haben; derselbe ist, wie schon früher erwähnt, nicht streng konstant, sondern von der Durchflußgeschwindigkeit, daher auch von c_2 abhängig, was unser Schlußergebnis, Gleichung 199) modifiziert.

Bemerkung 3. Wir hatten allgemein

$$\eta_h = \frac{Mg h}{L}$$

definiert; L die Gesamtarbeit pro Sekunde, h die jeweils aus Gleichung 28) sich ergebende Förderhöhe. Wir sahen, daß für dieselbe Pumpe η_h von $c_2 = 0$ bis $c_2 = \text{Maximum}$ starken Veränderungen unterliegt, eine wirklich zutreffende Beurteilung der Güte der Pumpenkonstruktion ist jedoch nur in dem Falle, für den sie gebaut ist, d. i. für gewöhnlich der stoßfreie Fall, möglich.

E. Volumetrischer und Gesamtwirkungsgrad.

Bisher haben wir nur jener Verluste gedacht, welche eine Verringerung der Förderhöhe zur Folge haben, und den durch diese erzielten Wirkungsgrad den (reinen) hydraulischen (η_h) genannt. Nun treten aber bei derartigen Pumpen noch andere Verluste auf, u. zw. in erster Linie der „Spaltverlust“ (Flüssigkeitsverlust durch den Spalt), welcher dadurch entsteht, daß bei den praktischen Ausführungen der Zwischenraum („Spalt“) zwischen Laufrad und Leitrad nicht unendlich schmal sein kann, wie es in der Theorie angenommen wird, daher eine gewisse Flüssigkeitsmenge, statt in die Leitkanäle einzutreten, an der Radaußenseite zurückzuströmen sucht. Auch dieser Verlust ist ein „hydraulischer“. Bezeichnen wir mit q das durch diesen Spaltverlust, ferner eventuell noch durch Undichtigkeiten und dergl. verloren gehende Flüssigkeitsvolumen, so ist, wenn mit Q das nützliche durch das Laufrad per Sekunde strömende Flüssigkeitsvolumen bezeichnet ist,

$$Q_1 = Q + q = Q + (1 - \eta_v) Q \dots \dots \dots 200)$$

die gesamte zu fördernde Flüssigkeitsmenge, wenn η_v der „volumetrische“ Wirkungsgrad der Zentrifugalpumpe genannt wird.

Da nun q Flüssigkeit mehr gefördert werden muß, als die nützliche Flüssigkeitsmenge beträgt, so gilt, wenn H die Gesamtförderhöhe und γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet, für den Arbeitsbedarf per Sekunde N der Pumpe in PS

$$\begin{aligned} N &= \frac{H Q \gamma}{\eta_h \cdot 75} + \frac{H q \gamma}{\eta_h \cdot 75} = \frac{H Q \gamma}{\eta_h \cdot 75} (1 + 1 - \eta_v) \\ &= \frac{H Q \gamma}{75} \cdot \frac{2 - \eta_v}{\eta_h} = \frac{H Q \gamma}{75} \cdot \frac{1}{\eta}, \dots \dots \dots 201) \end{aligned}$$

wobei der schließliche hydraulische Wirkungsgrad η gleich ist

$$\eta = \eta_h \cdot \frac{1}{2 - \eta_v} \dots \dots \dots 202)$$

Nun treten aber auch noch mechanische (Zapfen- etc.) Reibungen auf (u. a. auch infolge der (S. 52, 54) erwähnten radialen Komponenten der Geschwindigkeitsänderung); wenn daher mit η_m der „mechanische“ Wirkungsgrad der Pumpe bezeichnet wird, so ergibt sich als „effektiver“ oder „Gesamt“-wirkungsgrad η_e der Pumpe

$$\eta_e = \eta \cdot \eta_m \dots \dots \dots 203)$$

Daher ist schließlich der Gesamtkraftbedarf zur Förderung von Q Volumeinheiten Flüssigkeit per Sek. auf H m Höhe in PS

$$N = \frac{Q H \gamma}{\eta_e \cdot 75} \dots \dots \dots 204)$$

Diese allgemein übliche Formel hat den Nachteil, daß $N = 0$ wird, für $Q = 0$ und $H = 0$; wir sahen jedoch bei Aufstellung der Gleichungen für L (S. 63), daß auch für $Q = 0$ eine Leistung größer als Null aufzuwenden ist; es dürfte sich daher empfehlen, den Ausdruck Gleichung 204) folgendermaßen zu schreiben:

$$N = \frac{L}{75 \cdot \eta_m} + \frac{H \cdot q \cdot \gamma}{\eta_h \cdot \eta_m \cdot 75} = \frac{L}{75 \cdot \eta_m} + \frac{H Q \gamma (1 - \eta_v)}{75 \eta_m \cdot \eta_h} \dots 205)$$

Für L ist der im Vorstehenden gewonnene Ausdruck (in kgm) einzuführen; in Gleichung 205) verschwindet für $H = 0$ bzw. $Q = 0$ nur das zweite Glied. Zu bemerken ist, daß auch diese Formel den Tatsachen nicht ganz entspricht, weil auch für $H = 0$ oder $Q = 0$ noch Spaltverluste auftreten, die auch Gleichung 205) nicht anzeigt.

Im Falle der Verwendung von n Rädern in einem Gehäuse gelten die Formeln für jedes Rad, es ist die Sekundenarbeit aller Räder zusammen

$$L_{\text{gesamt}} = L \cdot n \dots \dots \dots 206)$$

im übrigen gelten die in diesem Abschnitte aufgestellten Gleichungen ungeändert, nur ist unter H stets die „Gesamtförderhöhe“, unter Q die „Gesamtflüssigkeitsmenge“ zu ver-

stehen. Sind z. B. bei einer sechsräderigen Pumpe mit doppeltem Flüssigkeitseintritte je 3 Räder „auf Druck“ „hintereinander geschaltet“, so ist $H = 3 h$, $Q = 2 q$, wenn h , q die Förderhöhe pro 1 Rad bzw. die durch ein Rad gehende Flüssigkeitsmenge bezeichnen. Zu bemerken ist, daß sich der Einfluß der mechanischen Reibungen bei mehrrädri gen Pumpen auf alle Räder verteilt, der Gesamtwirkungsgrad daher relativ günstiger ist als bei Pumpen mit einem Rad. Auch die bei Pumpen mit gerader Räderzahl leicht herzustellende (ganze oder teilweise) „Entlastung“ von achsialen Drücken, welche ebenfalls eine Hebung des Gesamtwirkungsgrades zur Folge haben kann, sei hiermit kurz erwähnt.

Bemerkung. In Gleichung 205) wurde in dem Glied mit L das η_h nicht mehr hinzugefügt, da die hydraulischen (Druck-)verluste in L schon enthalten sind; praktisch wird der Arbeitsbedarf mit dem theoretisch gerechneten nie ganz stimmen, weshalb man sich mit Koeffizienten wird behelfen bzw. das η_h überhaupt praktischen Erfahrungen gemäß wird annehmen müssen.

F. Aufstellung der allgemeinen Kraftbedarfsgleichung auf dem Versuchswege.

Ähnlich, wie die Beziehung von h , u_2 und c_2 im ersten Abschnitt, läßt sich auch die Kraftbedarfsgleichung einer ausgeführten Pumpe, deren Dimensionen man zwar nicht kennt, an welcher man jedoch L , u_2 und Q messen kann, aufstellen.

Der Gesamtkraftbedarf ergab sich nämlich in der Form:

$$L = r \cdot n \cdot Q^2 + s \cdot n^2 \cdot Q + t \cdot n^3 \dots \dots \dots 207)$$

(Q Flüssigkeitsmenge pro Sekunde, n Tourenzahl pro Min.), wenn für

$$c_2 \dots \dots \frac{Q}{F_2}, \text{ für } u_2 \dots \dots \frac{2 r_2 \pi}{60} \cdot n$$

eingeführt wird, und r , s , t die aus den Gleichungen 146) bis 150) herrührenden Konstanten bedeuten.

L , Q , n sind zu messen; aus mindestens 3 Versuchen lassen sich dann r , s , t berechnen, und nun läßt sich die gesuchte Gleichung aufstellen.

G. Beispiele.

Im folgenden sei für unsere Beispiele 1 (S. 12) und 2 b (S. 14) der Kraftbedarf berechnet.

Beispiel 1.

Die Einsetzung der Zifferwerte in unsere Gleichungen 155) bis 163) ergibt (u_3 und c_3 in m/sek) alles für $u_2 = 15.7$ m/sek (1500 Touren pro Min.)

$$\begin{aligned}
 1. \quad L_t &= \frac{F_2 \gamma}{g} \left[\sin \epsilon_3 - \frac{r_1}{r_3} \frac{F_2}{F_1} \sin \epsilon_1 \right] u_2 c_3^2 - \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_3} \right)^2 \right] u_2^2 c_2 \\
 &= - \frac{0.00143 \cdot 1000}{9.81} \cdot 0.6 \cdot 2.65 \cdot 15.7 \cdot 0.985 c_3^2 - \\
 &\quad \frac{1000 \cdot 0.00143}{9.81} [1 - 0.6^2] 246.5 c_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_t &= - 3.33 c_3^2 - 21.3 c_2 \text{ in kgm/sek} \quad \left. \vphantom{L_t} \right\} c_3 \text{ in m/sek} \\
 &= - 0.433 c_3^2 - 0.285 c_2 \text{ in PS}
 \end{aligned}$$

2. L' ergibt sich sich analog durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 L' &= 3.33 c_3^2 - 12.05 c_2 \text{ in kgm/sek} \\
 &= 0.433 c_3^2 - 0.161 c_2 \text{ in PS}
 \end{aligned}$$

Beispiel 2 b.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0.00274 \cdot 1000}{9.81} [0.755 - 0.525 \cdot 1.97 \cdot 0.972] 15.75 c_3^2 - \\
 &\quad \frac{0.00274 \cdot 1000}{9.81} (1 - 0.525^2) 15.75^2 \cdot c_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_t &= - 0.785 c_3^2 - 50.2 c_2 \text{ in kgm/sek} \quad \left. \vphantom{L_t} \right\} c_3 \text{ in m/sek} \\
 &= - 0.01045 c_3^2 - 0.67 c_2 \text{ in PS}
 \end{aligned}$$

2. Analog ergibt sich durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 L' &= 4.38 c_3^2 - 19.2 c_2 \text{ in kgm/sek} \\
 &= 0.0582 c_3^2 - 0.256 c_2 \text{ in PS}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3.} \quad L'' &= -9.25 c_3^2 + 33.3 c_3 \text{ in kgm/sek} & \text{3.} \quad L'' &= -15.8 c_3^2 + 69.2 c_3 \text{ in kgm/sek} \\
 &= -0.123 c_3^2 + 0.433 c_3 \text{ in PS} & &= -0.212 c_3^2 + 0.922 c_3 \text{ in PS}
 \end{aligned}$$

4. Als Kontrolle: a) L_0 aus der direkten Formel berechnet.

$$\begin{aligned}
 L_0 &= -\frac{F_2 \gamma}{g} \left[\frac{F_2}{F_W} \sin \alpha_3 - \frac{F_2}{F_1} \frac{r_1}{r_2} \sin \alpha \right] u_3 c_3^2 \\
 &= -9.25 c_3^2 \text{ kgm/sek} &&= -12.45 c_3^2 \text{ kgm/sek} \\
 &= -0.123 c_3^2 \text{ PS} &&= -0.166 \text{ PS}
 \end{aligned}$$

b) als Summe von $L_t + L' + L''$ berechnet.

$$\begin{aligned}
 \text{5.} \quad L_1 &= -0.006 c_2^2 - 0.68 c_3 + 2.53 \text{ kgm/sek} & \text{5.} \quad L_1 &= -0.064 c_2^2 - 4.6 c_3 + 21.2 \text{ kgm/sek} \\
 &= -0.00008 c_2^2 - 0.00905 c_3 + 0.0337 \text{ PS} & &= -0.000852 c_2^2 - 0.0612 c_3 + 0.282 \text{ PS} \\
 \text{6.} \quad L_2 &= +0.297 c_2^2 + 19.2 c_3 - 73.5 \text{ kgm/sek} & \text{6.} \quad L_2 &= -1.88 c_2^2 + 61 c_3 - 227 \text{ kgm/sek} \\
 &= 0.00395 c_2^2 + 0.256 c_3 - 0.98 \text{ PS} & &= -0.0251 c_2 + 0.811 c_3 - 3.02 \text{ PS}
 \end{aligned}$$

7. Gesamtarbeit: $L = L_t + L' + L'' + L_1 + L_2$.

$$\begin{aligned}
 L &= -8.959 c_2^2 + 18.52 c_3 - 70.97 \text{ kgm/sek} & L &= -14.394 c_2^2 + 56.4 c_3 - 206.8 \text{ kgm/sek} \\
 &= -0.119 c_2^2 + 0.246 c_3 - 0.942 \text{ PS} & &= -0.191 c_2^2 + 0.75 c_3 - 2.75 \text{ PS} \\
 & \quad (\text{für } c_2 = 0, L = -0.942 \text{ PS}) & & \quad (\text{für } c_2 = 0, L = -2.75 \text{ PS})
 \end{aligned}$$

In den folgenden Figuren 56—62 sind für das Beispiel 2 b die einzelnen L , deren Gleichungen wir berechnet, bei $u_2 = 15.7$ m/sek gezeichnet, wobei bemerkt sei, daß in diesen und den folgenden Figuren aufzuwendende (negative) Arbeiten

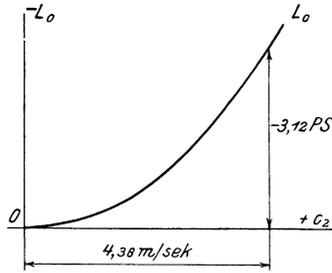


Fig. 56.

pro Sekunde nach oben aufgetragen sind. Abszisse ist überall das c_2 , ($c_2 F_2 = Q$, dem stoßfreien Punkt entspricht $c_2 = 4.38$ m/sek).

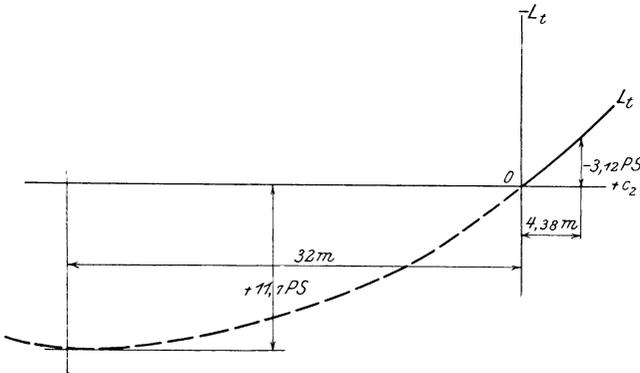


Fig. 57.

Aus Fig. 62 ist ersichtlich, daß der Scheitel der Parabel für L (Gesamtkraftbedarf pro Sek.) weder mit dem „stoßfreien“ noch mit dem Punkt „maximaler Förderhöhe“ zusammenfällt. Der größte Wirkungsgrad hingegen liegt beim stoßfreien Punkt (im Scheitelpunkt ist eben c_2 , d. h. die geförderte Flüssigkeitsmenge und daher auch der Kraftbedarf viel kleiner).

Wir bilden nun noch folgende Sekundenarbeiten:

$L_1' = L_1 + L'$ (der Gesamteinfluß der Geschwindigkeitsänderung für den Laufradeintritt)

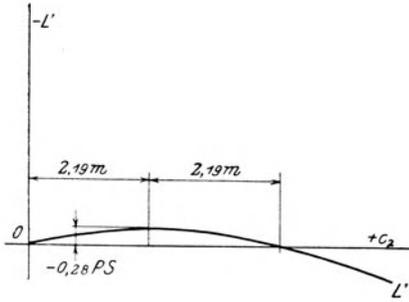


Fig. 58.

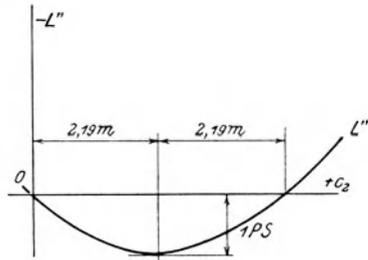


Fig. 59.

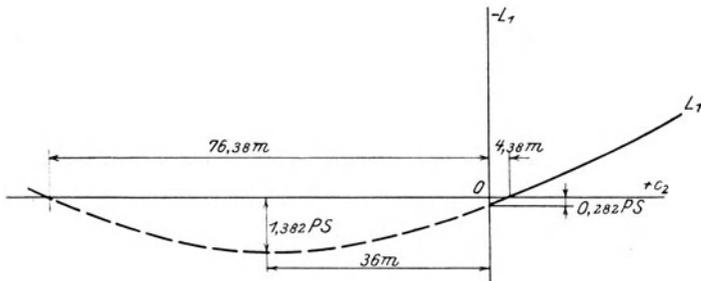


Fig. 60.

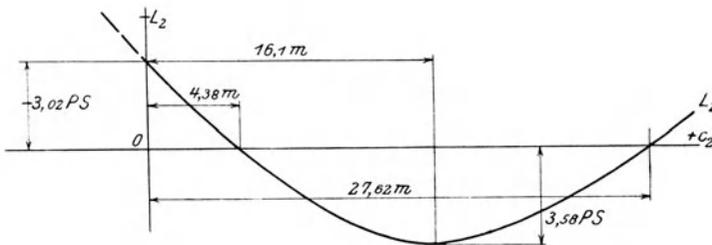


Fig. 61.

$L_2' = L_2 + L''$ (der Gesamteinfluß der Geschwindigkeitsänderung für den Austritt)

$L_s = L_1' + L_2'$ (Gesamteinfluß der Geschwindigkeitsänderungen überhaupt). (L daher = $L_t + L_s$.)

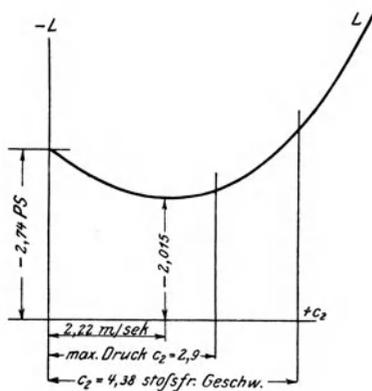


Fig. 62.

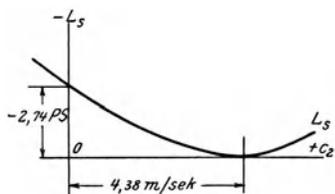


Fig. 65.

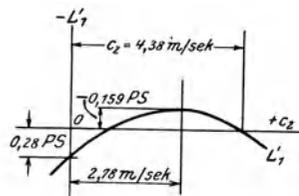


Fig. 63.

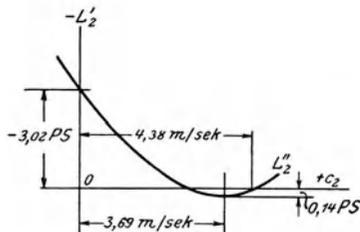


Fig. 64.

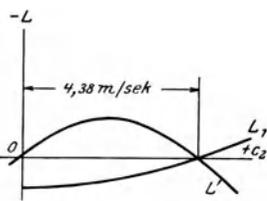


Fig. 66.

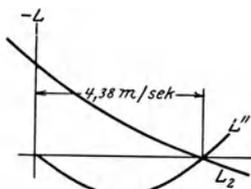


Fig. 67.

Für unser Beispiel 2 b ergibt sich bei $u_2 = 15,7$ m/sek

$$L_1' = 0,0573 c_2^2 - 0,317 c_2 + 0,282 \text{ in PS, } c_2 \text{ in m/sek (Fig. 63)}$$

$$L_2'' = -0,237 c_2^2 + 1,73 c_2 - 3,02 \text{ in PS (Fig. 64)}$$

$$L_3 = -0,1796 c_2^2 + 1,416 c_2 - 2,738 \text{ in PS (Fig. 65).}$$

In Fig. 66, 67 sind L' und L_1 bzw. L'' und L_2 je in ein Schaubild ebenfalls für Beispiel 2 b zusammengezeichnet.

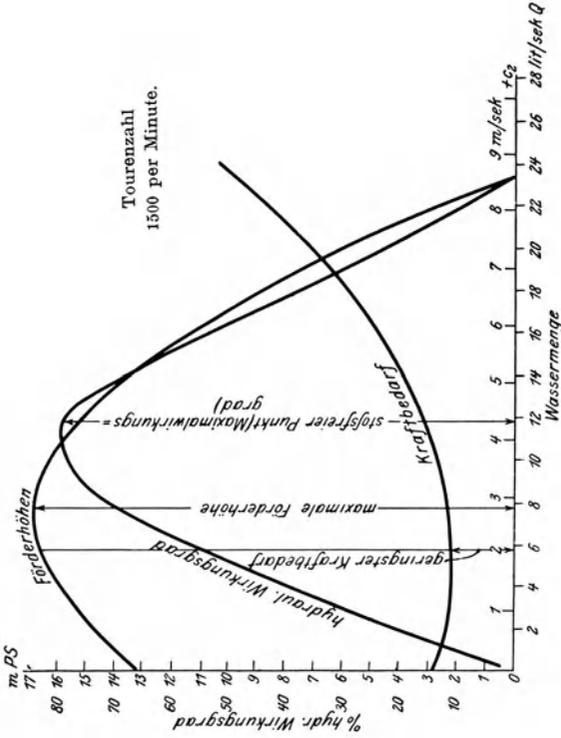


Fig. 69.

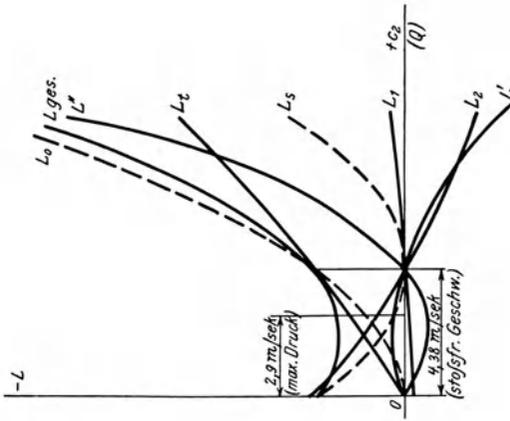


Fig. 68.

Maßstab 1):
 Abszissen: 5 mm = 1 m/sek Austrittsgeschwindigkeit c_2 aus dem Laufrad, oder 5 mm = 274 lit/sek geförderte Wassermenge.
 Ordinaten: 5 mm = 1 PS.

1) Fig. 68 ist im Maßstabe 3 : 4 verkleinert wiedergegeben.

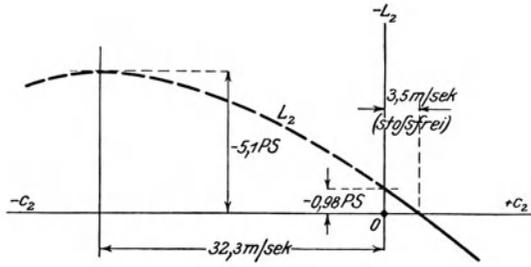


Fig. 70.

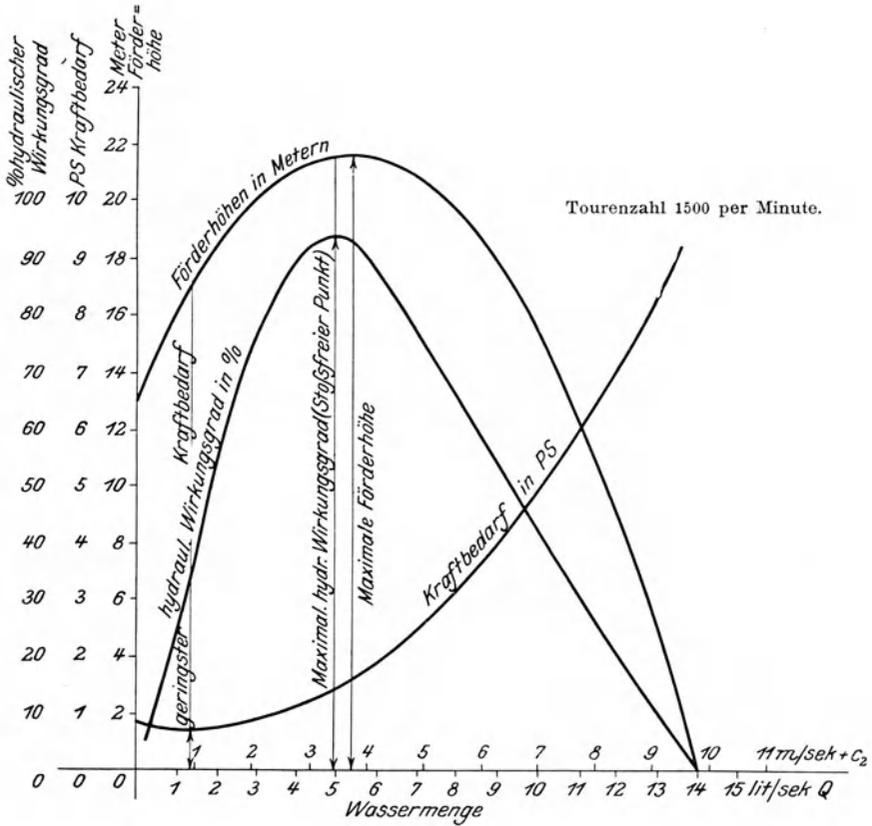


Fig. 71.

In Fig. 68 sind alle Einzelkurven unseres Beispiels 2b in gleichem Maßstabe dargestellt, sowie der Punkt stoßfreier Geschwindigkeit und derjenige maximaler Förderhöhe angegeben. Die Kurven sind für eine konstante Tourenzahl von 1500 pro Min. ($u_2 = 15.7$ m/sek) gezeichnet. (Die Abszissen geben für den Maßstab $5 \text{ mm} = 2.74 \text{ lit/sek}^1$) die Wassermenge direkt an.)

In Fig. 69 sind für dasselbe Beispiel und dieselbe Tourenzahl die hc_2 - (bzw. $h Q$ -) Kurve, die Kraftbedarf- und die Kurve des hydraulischen Wirkungsgrades zusammengestellt. Der Maximalwirkungsgrad ergibt sich, wie erwähnt, im Punkte der stoßfreien Geschwindigkeiten.

Die Kurven des Beispiels 1 (S. 78) haben prinzipiell denselben Verlauf, nur tritt hier (s. Bemerk. S. 60) der Fall ein, daß $\cos(\alpha_2 + \alpha_3)$ positiv ist (im Beispiel 2b war $\cos(\alpha_2 + \alpha_3)$ negativ), die Kurve L_2 daher die in Fig. 70 gezeichnete Form hat.

Fig. 71 zeigt für Beispiel 1 den theoretischen Gesamtkraftbedarf (exkl. Spaltverlust und mechanischer Reibungen), Förderhöhen und hydraulische Wirkungsgrade für die Tourenzahl 1500 pro Min. ($u_2 = 15.7$ m/sek); die Lage des stoßfreien Punktes, der maximalen Förderhöhe sowie des absolut geringsten Kraftbedarfes ist in derselben hervorgehoben. (Der relativ geringste Kraftbedarf ($\eta_h = \max$) tritt für den stoßfreien Punkt ein.)

¹⁾ Fig. 68 ist im Maßstabe 3:4 verkleinert wiedergegeben.

Vierter Abschnitt.

Der Spaltüberdruck.

Bezeichnet wie im ersten Abschnitt a_2 den Druck (Piezometerstand) im Spalt zwischen Laufrad und Diffuserkanälen, a_1 den Druck (Piezometerstand) am Laufradeintritt, so ist $a_2 - a_1$ der sogenannte Spaltüberdruck.

Ist $a_2 > a_1$, so sucht die Flüssigkeit aus dem Spalt zwischen Laufrad und (Diffuser-) Leitrad auszutreten und zur Laufradeintrittsstelle zurückzuströmen; für $a_2 < a_1$ („negativer“ Spaltüberdruck im Gegensatz zu „positivem“ bei $a_2 > a_1$) erfolgt hingegen ein Ansaugen nach dem Spalt am Laufradaustritt zu, die Flüssigkeit stört die Vorgänge im Spalt dann mehr als im 1. Fall; negativer Spaltüberdruck ist daher unbedingt zu vermeiden. Es werde nun untersucht, wie groß dieser Überdruck ist, und von welchen Größen er abhängt.

Wir beschränken uns hierbei auf den Fall stoßfreier Geschwindigkeiten.

Gleichung 71) S. 32 liefert uns die Größe des Spaltüberdruckes:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2g} [u_2^2 - u_1^2 + c_1^2 - (1 + \zeta_2) c_2^2], \dots 208)$$

was sich auch schreiben läßt in der Form:

$$2g(a_2 - a_1) = u_2^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] - c_2^2 \left[(1 + \zeta_2) - \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 \right]. \dots 208a)$$

Hieraus ergibt sich ein

$$\text{Spaltüberdruck} = 0 \text{ für } \left(\frac{u_2}{c_2} \right)^2 = \frac{1 + \zeta_2 - \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}, \dots 209)$$

ferner

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spaltüberdruck positiv} \\ \text{Spaltüberdruck negativ} \end{array} \right\} \text{für } \left(\frac{u_2}{c_2}\right)^2 \geq \frac{1 + \zeta_2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \dots 210)$$

In Gleichung 208 a) ist $\frac{F_2}{F_1} = \frac{c_1}{c_2}$, für Hochdruckpumpen ist (im allgemeinen) $c_1 > c_2$, infolgedessen das Glied mit c_2^2 positiv, da ferner $1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ bei den üblichen Werten von $\frac{r_1}{r_2}$ etwa um 0.75 liegt, und u_2 stets viel größer ist als c_2 , so dürfte bei ausgeführten Hochdruckpumpen der Spaltüberdruck wohl stets positiv ausfallen.

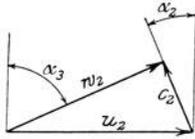


Fig. 72.

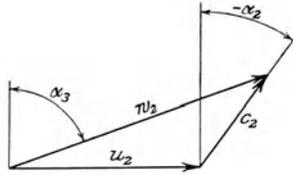


Fig. 73.

Nunmehr werde noch eine Beziehung für $a_2 - a_1$ aufgestellt, in welcher auch die Förderhöhe h vorkommt. Diese ergibt sich durch Verbindung der Gleichung 75) mit 208)

$$-2gh = (1 + \zeta_1)c^2 + (\lambda + \zeta_3)c_3^2 + (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - u_2^2 + u_1^2 - w_2^2. \quad 211)$$

$$2g(a_2 - a_1) = u_2^2 - u_1^2 - (1 + \zeta_2)c_2^2 + c_1^2$$

zu:

$$a_2 - a_1 = h + \frac{(1 + \zeta_1)c^2 + (\lambda + \zeta_3)c_3^2 - w_2^2}{2g} \dots 212)$$

Bezeichnen wir $h' = \frac{\lambda c_3^2}{2g} + h$ als „manometrische“ Förderhöhe, so läßt sich der Spaltüberdruck schreiben:

$$a_2 - a_1 = h' + \frac{1}{2g} \left[(1 + \zeta_1)c^2 + \zeta_2 c_2^2 - w_2^2 \right] \dots 213)$$

Diese Gleichung läßt den Einfluß der Winkel α_2 und α_3 erkennen.

Fig. 72 und 73 ergeben

$$c_2 : w_2 = \cos \alpha_3 : \cos \alpha_2$$

und damit

$$a_2 - a_1 = h' \left[1 + \frac{(1 + \zeta_1) c^2 + \zeta_3 c_3^2 - c_2^2 \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_3}}{2 g h'} \right] . \quad (214)$$

Unter sonst gleichen Verhältnissen ist daher der Überdruck kleiner, wenn α_2 abnimmt, α_3 dagegen zunimmt.

Wir wollen auch ein Ziffernbeispiel durchführen und wählen hierzu die Pumpe, Beispiel 1 (S. 12), mit einem Rad von 200 mm Durchmesser und berechnen deren Spaltüberdruck.

Es war $F_2 = 14.3$ qcm, $F_3 = 36$ qcm, $\frac{r_1}{r_2} = 0.6$, $\zeta_2 = 0.1$. Gleichung 208a) gibt:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{19.62} [u_2^2 (1 - 0.6^2) - c_2^2 (1.1 - 0.455^2)] = \\ \frac{1}{19.62} [0.64 u_2^2 - 0.9 c_2^2],$$

für $u_2 = 15.7$ m/sek (1500 Touren pro Min.) ist nach Früherem die stoßfreie Geschwindigkeit $c_2 = 3.5$ m/sek und daher

$$a_2 - a_1 = \frac{246 \cdot 0.64 - 12.3 \cdot 0.9}{19.62} = 7.5 \text{ m,}$$

der Spaltüberdruck also $\frac{3}{4}$ atm. (Die zu $c_2 = 3.5$ m/sek gehörige Förderhöhe ist nach Gleichung 38) S. 13 = 21.6 m).

Dies war der Überdruck; nun wollen wir noch die „Pressung“ im Spalt (absoluter Druck, Piezometerstand) rechnen. Zu diesem Zwecke müssen wir in der allgemeinen Gleichung der Pumpe (S. 13) $11.82 c_2^2 - 5.6 c_2 u_2 - 1.0756 u_2^2 = -19.62 h$ statt h die „manometrische“ Förderhöhe h' einführen, wobei $h' = h +$ Widerstände von Spalt bis Ende Steigrohr, es ist daher das Glied $(\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 c_2^2$ auf die rechte Seite der Gleichung (statt auf der linken im Ausdruck A) zu schreiben, somit

$$A' c_2^2 - B c_2 u_2 - C u_2^2 = -2 g h - (\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 \cdot c_2^2 = -2 g h',$$

für $\lambda = 31.3$ ist $(\lambda + \zeta_3) \left(\frac{F_2}{F_3} \right)^2 = 31.4 \cdot 0.4^2 = \text{ca. } 5$; daher $A' = A - 5 = 6.82$, und somit für $u_2 = 15.7$ m/sek und $c_2 = 3.5$ m/sek (stoßfrei)

$$6.82 \cdot 12.3 - 5.6 \cdot 3.5 \cdot 15.7 - 1.0756 \cdot 246.5 = -19.62 \text{ h'}$$

und daraus $h' = 25$ m (manometrische Förderhöhe).

Die der absoluten Geschwindigkeit w_2 , entsprechende Höhe $\frac{w_2^2}{2g}$ beträgt, da $w_2 = \frac{15.7}{\sin \alpha_3} = 16.2$ m/sek ($\alpha_2 = 0^\circ$ für den vorliegenden Fall) ist, 13.25 m; $\frac{w_2^2}{2g} = 13.25$ m; somit ist die „Pressung“ im Spalt $25 - 13.25 = 11.75$ m (1.175 atm).

Fünfter Abschnitt.

Berechnung der Zentrifugalpumpen und anschließende Bemerkungen.

Im allgemeinen ist, wie erwähnt, jede Kreiselpumpe für die stoßfreie Geschwindigkeit zu berechnen; gegeben sind für gewöhnlich Förderhöhe und Fördermenge. Hat man sich für die Räderzahl bezw. das System der Pumpe entschieden, welche Wahl u. a. von der Art des Antriebes, der erreichbaren Tourenzahl etc. abhängt, so handelt es sich vornehmlich um die Berechnung der nötigen Umdrehungszahl (Umfangsgeschwindigkeit), der Breitendimensionen der Lauf- und Leiträder, ferner des Kraftbedarfes. Eventuell ist auch die erreichbare Maximalsaughöhe der Pumpe zu untersuchen etc.

Obwohl für diesen „stoßfreien“ Fall die Hauptformel (Beziehung von Umfangsgeschwindigkeit und Förderhöhe) längst bekannt ist, soll doch der Vollständigkeit halber, und weil sich hierbei Gelegenheit zu verschiedenen Bemerkungen bietet, die Berechnung einer Pumpe für den Fall stoßfreier Flüssigkeitsbewegung, der sich als Spezialfall unserer allgemeinen Theorie darstellt, besprochen werden.

A. Die Umfangsgeschwindigkeit.

1. Berechnung der Umfangsgeschwindigkeit.

Wir hatten bei stoßfreier Flüssigkeitsbewegung Gleichung 75)

$$\begin{aligned} - 2gh &= (1 + \zeta_1) c^2 - c_1^2 + (1 + \zeta_2) c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2 \\ &\quad - u_2^2 + u_1^2 - w_2^2 \dots \dots \dots 215) \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\frac{\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + (\lambda + \zeta_3) c_3^2}{2g} = \Sigma h_w \dots \dots 216)$$

wobei Σh_w die gesamten Widerstandshöhen in Pumpe und Leitung sowie die infolge der Austrittsgeschwindigkeit aus dem Druckrohr verloren gehende Geschwindigkeitshöhe vorstellt, so schreibt sich Gleichung 215)

$$2gh + 2g \Sigma h_w = -c^2 - c_2^2 + c_1^2 + u_2^2 - u_1^2 + w_2^2 \dots 217)$$

Im vorliegenden Fall ist jedoch:

$$\left. \begin{aligned} c_1^2 &= u_1^2 + c^2 - 2cu_1 \sin \alpha. \\ w_2^2 &= u_2^2 + c_2^2 - 2u_2 c_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 218)$$

somit:

$$g [h + \Sigma h_w] = u_2^2 - u_2 c_2 \sin \alpha_2 - cu_1 \sin \alpha \dots 219)$$

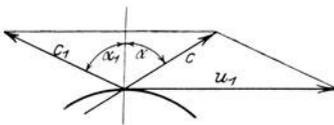


Fig. 74.

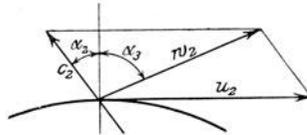


Fig. 75.

Der Sinussatz gibt ferner (Fig. 74, 75)

$$c_2 = \frac{\cos \alpha_3}{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)} \cdot u_2$$

$$c = \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \cdot u_1$$

Dies in Gleichung 219) berücksichtigt, gibt wegen

$$u_1 = \frac{r_1}{r_2} u_2$$

nunmehr

$$g (h + \Sigma h_w) = u_2^2 \left[\frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)} - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \right] \dots 220)$$

Daher die gesuchte Umfangsgeschwindigkeit

$$u_2 = \sqrt{(h + \Sigma h_w) g \frac{1}{\frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)} - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)}}} \dots 221)$$

Gleichung 221) ist die Beziehung zwischen u_2 und h für stoßfreie Flüssigkeitsbewegung unter Annahme von Leitschaufeln für den Eintritt in das Laufrad sowohl als in den Diffuser.

Ist $\alpha = 0^\circ$ (d. h. radial gestellte Leitschaufeln, oder gar keine Leitschaufeln am Laufradeintritt, wie in den Theorien beinahe durchwegs angenommen wird), so geht Gleichung 221) über in:

$$u_2 = \sqrt{(h + \Sigma h_w) g \cdot \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}} \dots \dots \dots 222)$$

Dies ist die bekannte Gleichung, die meist benutzt wird, selbst wenn die Leitschaufeln im Diffuser ebenfalls fehlen; wir setzen jedoch auch in diesem Abschnitt deren Vorhandensein voraus.

Da
$$u_2 = \frac{2 \pi r_2 \cdot n}{60} \dots \dots \dots 223)$$

(n die Tourenzahl), so gibt Gleichung 222) mit 223) verbunden die Beziehung von h und der nötigen Umdrehungszahl.

Wir halten es für angezeigt, statt

$$h + \Sigma h_w \dots \frac{h}{\eta_h}$$

zu schreiben;

$$h + \Sigma h_w = \frac{h}{\eta_h} \dots \dots \dots 224)$$

Hierbei ist η_h nichts anderes als der früher definierte manometrische (reine hydraulische) Wirkungsgrad.

Gleichung 222) nimmt dann die Form an:

$$u_2 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2} \cdot \frac{g}{\eta_h} \cdot h} \dots \dots \dots 225)$$

oder

$$u_2 = C_0 \cdot B_0 \cdot \sqrt{h}, \dots \dots \dots 226)$$

wobei

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}},$$

eine nur von den Winkeln abhängige Zahl ist, und

$$C_0 = \sqrt{\frac{g}{\eta_h}} \dots \dots \dots 227)$$

nur von der Güte der Konstruktion abhängt, da in h („manometrische Förderhöhe“) die Rohrreibungen einzurechnen sind. C_0 ist demnach für die ausführenden Firmen (wie auch η_h) als bekannte Zahl aufzufassen, die für größeres η_h kleiner wird.

Bemerkung 1. Für den Fall $\alpha \geq 0^\circ$ ist das Verhältnis der Radien am Laufradein- und -austritt $\frac{r_1}{r_2}$ für die Berechnung von u_2 (siehe Gleichung 221) zu berücksichtigen. Da die Leitschaufeln am Eintritt meist ganz fehlen und hierbei auf radialen Flüssigkeitseintritt gerechnet wird, oder, wenn sie vorhanden, meist radial ($\alpha = 0^\circ$) gestellt sind, so sei zunächst dieser Fall $\alpha = 0^\circ$ besprochen.

Um den Einfluß des von den Winkeln allein abhängigen Gliedes B_0 zu zeigen, ist in untenstehender Tabelle der Wert für B_0 bei einem konstanten α_3 (hier $\alpha_3 = 77^\circ$) berechnet worden. Die Tabelle zeigt den Einfluß des $\sphericalangle \alpha_2$ (Endelement der Schaufelform) auf B_0 .

Tabelle.
Für $\sphericalangle \alpha_3 = 77^\circ$

| | | | | | | | | |
|------------------|---------|--------|---------|---------|--------|---------|--------|---------|
| und $\alpha_2 =$ | 80° | 75° | 60° | 50° | 48° | 42° | 35° | 20° |
| ist $B_0 =$ | 1·5196 | 1·3962 | 1·2074 | 1·12925 | 1·1209 | 1·09905 | 1·0776 | 1·02825 |
| $\alpha_2 =$ | 10° | 0° | — 10° | — 20° | — 30° | | | |
| $B_0 =$ | 1·00206 | 1·00 | 0·97945 | 0·95706 | 0·931 | | | |

Da bei den ausführenden Firmen die Werte α_2 und α_3 für jedes System von Pumpen meist normalisiert sind oder wenigstens nur in verhältnismäßig engen Grenzen verschieden angenommen werden, so kann für diese sowohl B_0 als C_0 als bekannt betrachtet werden. Setzen wir

$$B_0 \cdot C_0 = A_0, \dots \dots \dots 228)$$

so hat man in

$$u_2 = A_0 \sqrt{h} \dots \dots \dots 229)$$

eine sehr einfache, auch dem Gedächtnis leicht einprägbare Formel, welche etwa für überschlägige oder Offertrechnungen rasch die Umfangsgeschwindigkeit zu bestimmen gestattet. Verfasser hat bei $\sphericalangle \alpha_2$ von 55° bis etwa 42° , dann von 0° mit $C_0 \sim 4\cdot11$ bis $4\cdot22$ bzw. $4\cdot34$ eine sehr gute Übereinstimmung der gerechneten mit den tatsächlich erreichten manometrischen Förderhöhen erzielt.

Bemerkung 2. Der manometrische Wirkungsgrad

$$\eta_h = \frac{h}{h + \Sigma h_w}$$

geht wegen Gleichung 225) für den stoßfreien Fall über in

$$\eta_h = \frac{h g}{u_2^2} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2} \dots \dots \dots 230)$$

η_h nach Gleichung 230) für andere h , als der stoßfreien Geschwindigkeit entsprechen, zu berechnen, ist, wie man sieht, theoretisch unrichtig, gibt jedoch einen ganz guten Anhaltspunkt. Der Verlauf einer so berechneten $\eta_h c_2$ -Kurve entspricht natürlich genau dem Verlaufe der $h c_2$ -Kurve.

Bemerkung 3. Es sei noch auf einen weiteren Spezialfall aufmerksam gemacht, der (siehe Tabelle S. 93) eintritt, wenn nebst $\alpha = 0^\circ$ noch $\alpha_2 = 0^\circ$ wird, d. h. die Laufradschaufel radial endet. In diesem Falle wird

$$B_0 = \sqrt{\frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}} = 1$$

für jeden Wert von α_3 , die Winkel fallen daher ganz aus der Gleichung für u_2 heraus und es bleibt:

$$u_2 = \sqrt{\frac{g}{\eta_h} \cdot h} \dots \dots \dots 231)$$

In dem idealen Fall $\eta_h = 1$ wäre dann $u_2^2 = gh$ und

$$h = \frac{u_2^2}{g}; \dots \dots \dots 232)$$

Gleichung 232) steht im Einklang mit der bekannten Gleichung für die theoretische Maximaldepression eines Ventilators

$$h = \frac{u_2^2}{g} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma}, \dots \dots \dots 233)$$

hierin bedeuten außer den bekannten Bezeichnungen h (Depression), u_2 (Umfangsgeschwindigkeit), g (Beschleunigung der Schwere), noch γ_0 das Gewicht von 1 m³ Luft, γ das Gewicht von 1 m³ Wasser.

2. Diskussion der Gleichung der Umfangsgeschwindigkeit.

Nun werde, zu Gleichung 221) zurückkehrend, der Einfluß von $\frac{r_1}{r_2}$ (Verhältnis der Radien am Schaufelbeginn und -ende), ferner der Einfluß der Winkel am Eintritt α und α_1 etc. auf u_2 untersucht. Wir sahen für $\alpha = 0^\circ$ diesen Einfluß von $\frac{r_1}{r_2}$, α , α_1 ganz verschwinden.

Jetzt sei α von 0° verschieden. Dann gilt

$$u_2 = \sqrt{\frac{h}{\eta_h} \cdot g} \sqrt{\frac{1}{\frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)} - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}}} \dots \dots \dots 234)$$

I. Einfluß von $\frac{r_1}{r_2}$.

Für die folgenden Betrachtungen sind $\alpha \dots x$, $\alpha_1 \dots y$ als unabhängig variabel, $u_1 = \frac{r_1}{r_2} u_2$ als von x , y abhängig anzusehen. $\frac{r_1}{r_2}$ kann frei gewählt werden, ist von α und α_1 unabhängig; der Einfluß von $\frac{r_1}{r_2}$ auf u_2 kann daher direkt bestimmt werden, und zwar ergibt Gleichung 234), daß $u_2 \geq$ wird, wenn $\frac{r_1}{r_2} \geq$ wird, d. h. abnehmendes r_1 bringt eine Abnahme der nötigen Tourenzahl mit sich. Da diese für Hochdruckpumpen ohnedies oft sehr hoch wird, so ist jede Möglichkeit ihrer Verringerung sehr wichtig. Auf S. 30 war gezeigt worden, daß hingegen, um hohen Druck im Gleichgewichtszustand zu erhalten, $\frac{r_1}{r_2}$ groß sein soll, man wird daher $\frac{r_1}{r_2}$ dem jeweiligen speziellen Falle entsprechend zu wählen haben, wobei noch zu erwägen ist, daß bei wachsendem $\frac{r_1}{r_2}$ die Schaufellängen (unter sonst gleichen Verhältnissen) abnehmen, was infolge der Wichtigkeit zuverlässiger Flüssigkeitsführung gerade bei höheren Tourenzahlen nachteilig werden kann. Es empfiehlt sich daher, den in der Praxis üblichen Wert $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}$ nicht zu verlassen, denn auch allzu kleines r_1 gegenüber r_2 bringt, besonders bei kleineren Flüssigkeitsmengen, den Nachteil mit sich, daß die Laufradaustrittsbreiten gegenüber den Radbreiten am Laufradeintritt sehr klein werden.

Der Einfluß der Sauggeschwindigkeit bzw. der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit in das Laufrad auf $\frac{r_1}{r_2}$ und daher auch auf u_2 wird weiter unten besprochen.

II. Einfluß der Winkel α und α_1 .a) Winkel α .

Es werde in Gleichung 234)

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} = z$$

gesetzt.

Für $\alpha \dots x, \alpha_1 \dots y$ geschrieben liefert

$$\frac{\sin x \cos y}{\sin (x + y)} = z. \dots \dots \dots 235)$$

Fig. 74 (S. 91) gibt:

$$\begin{aligned} u_1 &= c [\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha_1] \\ &= c [1 + \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1] \sin \alpha \dots \dots \dots 236) \end{aligned}$$

Es ist

$$z = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} x \operatorname{tg} y} \dots \dots \dots 237)$$

und daher auch

$$u_1 = \frac{c}{z} \sin \alpha. \dots \dots \dots 238)$$

Wir setzen $1 + \operatorname{cotg} x \operatorname{tg} y = t$, mithin

$$z = \frac{1}{t} \dots \dots \dots 239)$$

und untersuchen, wann z ein Maximum oder Minimum bezw. wegen Gleichung 239) t ein Minimum oder Maximum wird. Die Bedingung hierfür ist:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{tg} y}{\sin^2 x} = 0 \dots \dots \dots 240) \\ \frac{\partial t}{\partial y} &= \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos^2 y} = 0 \dots \dots \dots 241) \end{aligned} \right\}$$

hieraus folgt, daß $x = \alpha = 90^\circ, y = \alpha_1 = 0^\circ$ sein muß, der Wert des Maximums ist für

$$z = \frac{\sin 90^\circ \cos 0^\circ}{\sin (90^\circ + 0^\circ)} = +1. \dots \dots \dots 242)$$

z ist übrigens für jedes α_1 ebenfalls gleich $+1$, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, denn

$$\frac{\sin 90^\circ \cos \alpha_1}{\sin (90^\circ + \alpha_1)} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} = 1.$$

Gleichung 234) zeigt, daß für $z = +1$ (Maximalwert) unter sonst gleichen Verhältnissen u_2 seinen größten Wert annimmt, dieser Fall also praktisch zu vermeiden ist; da die Be-

dingung $\alpha = 90^\circ$ am Laufradeintritt tangentielle Leitschaufeln bedeutet, demnach praktisch unbrauchbar ist, so wird man sich von diesem Fall ohnedies in seinen Annahmen zu entfernen haben. Für $\alpha = 0^\circ$ sahen wir bereits, daß $z = 0$ ist, u_2 daher relativ klein wird. Auch sonst hat diese Annahme sowohl konstruktiv als mit Rücksicht auf die vereinfachte Berechnung viel für sich und wird daher in der Praxis in den weitaus meisten Fällen angetroffen.

z kann jedoch nicht nur vom Maximalwert $+1$ bis 0 schwanken, sondern auch negative Werte annehmen und dadurch die nötige Umfangsgeschwindigkeit u_2 (Gleichung 234) noch mehr verringern. z wird negativ, wenn $\triangle \alpha$ negativ ist, d. h. die Leitschaufeln am Laufradeintritt gegen die Drehrichtung des Laufrades gestellt sind (Fig. 76).

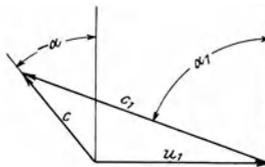


Fig. 76.

Eine der vorstehenden analoge Betrachtung zeigt, daß z auch für $\alpha = -90^\circ$ den Wert $+1$ annimmt, wobei α_1 jeden beliebigen Wert vorstellen kann, denn

$$\frac{\sin(-90^\circ) \cos \alpha_1}{\sin(-90^\circ + \alpha_1)} = +1.$$

Gleichung 242) lieferte uns das Maximum von z , wir können ebenso das Minimum von z ableiten. Aus Gleichung 240) und 241) folgt:

$$-\frac{\operatorname{tg} y}{\sin^2 x} = \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos^2 y} = 0. \dots \dots \dots 243)$$

Daraus

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y \cos^2 y &= -\sin^2 x \operatorname{cotg} x \\ \sin 2y &= -\sin 2x, \quad x = -y, \text{ d. h.} \\ \alpha &= -\alpha_1, \dots \dots \dots 244) \end{aligned}$$

mit diesen Werten ist

$$z = \frac{\sin(-\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha - \alpha)} = -\infty. \dots \dots \dots 245)$$

Hierfür wird aus Gleichung 238) $u_1 = 0$ und ebenso $u_2 = 0$. Der Wert $u_1 = 0$ folgt schon aus Fig. 76 für diesen Fall, denn bei $\alpha = -\alpha_1$ müssen sich, um eine geschlossene Figur zu erhalten, c und c_1 decken, was nur bei $u_1 = 0$ möglich ist; dieser Fall hat natürlich praktisch keinen Wert, er ist nur der theoretische Grenzfall. Fig. 76 zeigt, daß überhaupt negative Werte von α nur dann technische Bedeutung haben, wenn die Maßzahl von α kleiner ist als die von α_1 .

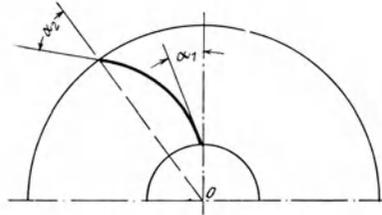


Fig. 77.

Man ersieht, daß z von $+1$ bis $-\infty$ alle Werte annehmen kann.

$$\text{(Für } \alpha = \alpha_1 \text{ ist } z = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}.)$$

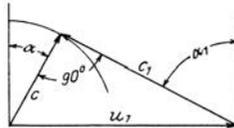


Fig. 78.

Der Winkel α hat daher einen wesentlichen Einfluß auf den Wert u_2 , durch Verringerung von α bzw. Negativsetzung läßt sich u_2 vermindern.

Wegen Gleichung 238) ist für

$$\begin{array}{lll} \alpha = \pm 90^\circ & z = 1 & u_1 = \pm c \\ \alpha = \alpha_1 & z = \frac{1}{2} & u_1 = 2c \sin \alpha \\ \alpha = -\alpha_1 & z = -\infty & u_1 = 0. \end{array}$$

b) Winkel α_1

Da aus Herstellungsrücksichten ein kleiner $\sphericalangle \alpha_1$ vorzuziehen ist, ferner bei gleich großem $\frac{r_1}{r_2}$ und gleichem Krümmungsradius der Schaufel ein kleinerer $\sphericalangle \alpha_1$ einen kleineren $\sphericalangle \alpha_2$ (Fig. 77) und daher (Tabelle für B_0 , S. 93) auch eine kleinere Umfangsgeschwindigkeit u_2 zur Folge hat, so wird es sich empfehlen, α_1 klein zu halten. Dies wird bei gleicher absoluter Eintrittsgeschwindigkeit c in das Laufrad bei jedem u_1 erreicht (Fig. 78), wenn $\alpha + \alpha_1 = 90^\circ$ ist.

Hierfür wird

$$z = \frac{\sin \alpha \cos (90 - \alpha)}{\sin (\alpha + 90 - \alpha)} = \sin^2 \alpha, \dots \dots \dots 246)$$

daher geht das betreffende Glied in Gleichung 234) über in

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sin^2 \alpha. \dots \dots \dots 247)$$

u_1 wird wegen Gleichung 238)

$$u_1 = \frac{c}{\sin \alpha}; \dots \dots \dots 248)$$

da dieselben Herstellungsgründe (Vermeidung zu spitz auslaufender Schaufeln) ebensowohl einen kleinen $\sphericalangle \alpha$ als einen kleinen $\sphericalangle \alpha_1$ verlangen, müßte die Bedingung

$$\alpha = \alpha_1 \dots \dots \dots 249)$$

gestellt werden, und da wir $\alpha + \alpha_1 = 90^\circ$ als günstig erkannt haben, müßte jetzt sein:

$$\alpha = \alpha_1 = 45^\circ. \dots \dots \dots 250)$$

und damit

$$u_1 = \frac{c}{\sin 45^\circ} = c\sqrt{2} \dots \dots \dots 251)$$

III. Einfluß der Geschwindigkeit c .

Was die Geschwindigkeit im Saugrohr bzw. die absolute Eintrittsgeschwindigkeit c in das Laufrad anbelangt, so muß die bekannte Beziehung gelten:

$$a_1 = a_0 - \left(h_1 + h' + \frac{c^2}{2g} \right) \geq 0, \dots \dots \dots 252)$$

wobei wie früher a_0 den äußeren Luftdruck, a_1 den Druck im Spalt am Laufradeintritt, h' die Reibungshöhe infolge der Widerstände bis zum Laufradeintritt, h_1 die Saughöhe, c die absolute Eintrittsgeschwindigkeit bedeuten. Gleichung (252) zeigt, daß für große Saughöhen (h' ist ebenfalls Funktion von c) eine große Sauggeschwindigkeit bezw. Eintrittsgeschwindigkeit c in das Laufrad nicht rationell, eventuell sogar unzulässig ist. Fließt dagegen die Flüssigkeit zu, oder ist die Saughöhe gering, so ist nach Ansicht des Verfassers ein größerer Wert von c , je nach Umständen bis $3\frac{1}{2}$ Meter pro Sek. und darüber angezeigt, u. zw. aus folgenden Gründen. Sei Q das zu fördernde Flüssigkeitsvolumen pro Sek, so muß (Fig. 79) sein:

$$Q = (r_1^2 \pi - r_2^2 \pi) c. \dots\dots\dots 253)$$

Da das Maß $2r$ (Wellen- bzw. Nabendurchmesser) von der Leistung und Tourenzahl nach Festigkeitsrückichten zu wählen ist, so hängt das Maß r_1 (Eintrittsradius) wesentlich von der Wahl von c ab. Größeres c ermöglicht daher bei gleichem r_2 ein kleineres $\frac{r_1}{r_2}$ und damit, wie wir sahen, eine geringere nötige Umfangsgeschwindigkeit u_2 oder bei fest gewähltem $\frac{r_1}{r_2}$ ein kleineres Rad, d. h. eine billigere Pumpe.

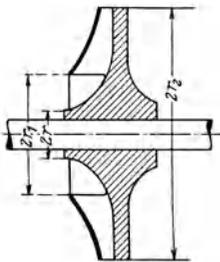


Fig. 79.
(schematisch.)

Die Vergrößerung von c bewirkt aber noch in anderer Weise eine Verminderung von u_2 . Wir sahen (Fig. 77), daß ein kleinerer $\angle \alpha_1$ bei gleicher Schaufelkrümmung u_2 verkleinert. Fig. 78 zeigt nun, daß bei sonst gleichen Verhältnissen eine Vergrößerung von c tatsächlich $\angle \alpha_1$ und somit die Umfangsgeschwindigkeit u_2 verringert.

Hierbei sei bemerkt, daß für gewöhnlich ein Fußventil am Saugrohr angebracht ist, und die Pumpe zur Inbetriebsetzung mit Flüssigkeit gefüllt wird. Sollte es sich in speziellen Fällen darum handeln, anzugeben, wie hoch die Pumpe ohne vorherige Füllung ansaugt, so ist die Depression, welche sie erzeugen kann, wie bei einem Ventilator bezw. bei mehrrädri gen Pumpen wie für Verbundventilatoren zu rechnen.

IV. Einfluß der Winkel α_2 und α_3 .

Nachdem nun die Einflüsse der Verhältnisse am Laufradeintritt auf u_2 besprochen sind, soll noch die Einwirkung der Laufradaustrittsverhältnisse, d. i. der Winkel α_2 und α_3 angegeben werden.

Die Gleichung 225)

$$u_2 = \sqrt{\frac{hg}{\eta_h} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_2}}$$

läßt sich auch schreiben:

$$u_2 = \sqrt{\frac{hg}{\eta_h} (1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cotg \alpha_3)} \dots \dots \dots 254)$$

254) läßt erkennen, daß u_2 größer sein muß für ein kleineres α_3 , es ist daher ein großes α_3 anzustreben, unser in Tabelle S. 93 mit 77° angenommener $\angle \alpha_3$ ist schon als groß anzusehen; die Grenze für α_3 bilden Herstellungsgründe (zu spitze Schaufeln) und die Rücksicht auf genügende lichte Weite der Diffuserleitkanäle.

Was den $\angle \alpha_2$ anbelangt, so zeigt Gleichung 254), daß seine Verminderung eine kleinere Tourenzahl zur Folge hat. Von diesem Standpunkte aus ist daher ein kleiner (eventuell negativer) Wert von α_2 , der schließlich zur „vorwärts gekrümmten“ Schaufel (III, Fig. 80) führt, günstig. Dieses Thema ist in der Literatur vielfach behandelt worden¹⁾. Daher soll hier auf diese Frage nicht weiter eingegangen und nur kurz erwähnt werden, daß von Prof. Bartl auf theoretischem, von Stanton auf dem Versuchswege gezeigt wird, daß der Wirkungsgrad für rückwärts gekrümmte Schaufeln (Fig. 80, I) sich wesentlich günstiger stellt als für vorwärts gekrümmte (Fig. 80, III), eine

¹⁾ Hermann, „Graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen“, 1900, S. 207 ff.; Prof. G. Lindner, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1895, S. 611 ff. „Ungleichmäßigkeit der Strömung in Ventilatoren“; Bartl, „Zur Auswahl der zweckmäßigsten Schaufelformen für Kreiselpumpen“, Zeitschr. des Vereines deutscher Ingenieure, 1891, S. 1046 ff.; Dr. R. Mollier, „Über Zentrifugalpumpen“, Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbefleißes, 1895, S. 211; Th. E. Stanton, D. Sc., „Centrifugal pumps“, Engineering, 1903, S. 745 ff.; ferner ebenda S. 719 ff. etc. etc.

Erscheinung, die auch der Verfasser zu beobachten wiederholt Gelegenheit hatte. Den Übergang von der vor- zur rückgekrümmten bildet die ebene Schaufel (Fig. 80, II). Theoretisch ist gegen diese Form nichts einzuwenden, auch ihre Herstellung ist einfacher als die einer gekrümmten Schaufel, sie hat jedoch den großen Nachteil, daß der Winkel α_2 nicht mehr frei wählbar, sondern infolge der geraden Form schon durch die Verhältnisse am Eintritt bestimmt ist. Man kann daher für verschiedene $\angle \alpha_1$ nicht dasselbe α_2 erhalten, was bei den anderen Formen durch Veränderung der Krümmungsradien in gewissen Grenzen möglich ist. Die ebene Schaufel ist daher zu einer Normalisierung ungeeignet. Hierin dürfte auch der Grund ihrer seltenen Anwendung in der Praxis zu suchen sein.

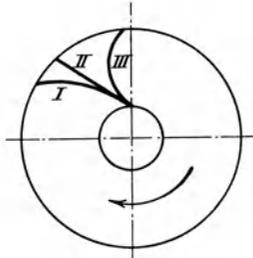


Fig. 80.

Die Schaufelkurve muß einen guten, allmählichen Übergang vom Eintritts- zum Austrittswinkel bilden, so daß ein sanfter Übergang der Flüssigkeitgeschwindigkeit erfolgen kann.

Bezüglich der Schaufellänge wurde schon hervorgehoben, daß sie im Vereine mit der Form der Schaufelkurve eine sichere Flüssigkeitsführung ermöglichen muß. Zu beachten ist, daß eine zu lange Schaufel die Reibungsverluste erhöht.

Leicht zurückgekrümmte Schaufeln scheinen sich in der Praxis am besten zu bewähren.

V. Einfluß von τ_h und Winkel α_2 .

Im Anschluß an die vorstehenden Bemerkungen sei an einem Ziffernbeispiel kurz der Einfluß des $\angle \alpha_2$ bzw. des manometrischen Wirkungsgrades η_h auf die Umfangsgeschwindigkeit u_2 gezeigt.

In Fig. 81 ist für $\alpha_2 = 48^\circ$ die Schaufel „eben“, für $\alpha_2 = 60^\circ$ rück-, für $\alpha_2 = 35^\circ$ vorgekrümmt.

Der Tabelle S. 93 entnehmen wir für diese rückgekrümmte Schaufelform $u_2 = C_0 \cdot 1.1209 \sqrt{h}$, für diese vorwärtsgekrümmte Schaufelform $u_2 = C_0 \cdot 1.0776 \sqrt{h}$, also eine Differenz des nötigen u_2 von $0.0433 \sqrt{h} \cdot C_0$; d. i. nur ca. 3.8% Geschwindigkeitsverminderung bei der schon ziemlich bedeutenden Winkeländerung von 25° (C_0 , h ungeändert).

Nun betrachten wir C_0 (Wirkungsgradsfunktion). Gleichung 227) S. 92 gibt für

$$\eta_h = 70\% \quad C_0 = 3.7455,$$

daher

$$u_2 = B_0 \cdot 3.7455 \sqrt{h}$$

analog für

$$\eta_h = 65\% \quad u_2 = B_0 \cdot 3.8869 \sqrt{h}.$$

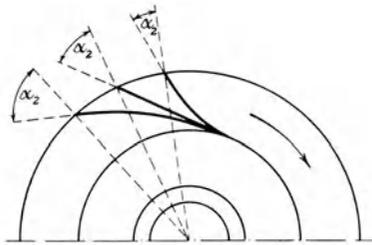


Fig. 81.

Das Zurückgehen des Wirkungsgrades um 5% ergibt hier eine nötige Tourenzahlsteigerung von $0.1434 B_0 \sqrt{h}$, d. i. ca. 3.75%.

Man ersieht, daß durch ungünstigeren Wirkungsgrad der Gewinn theoretisch geringerer Tourenzahl leicht wieder aufgewogen werden kann. Tatsächlich zeigen Versuch und Theorie (s. die S. 101 zitierte Literatur), daß die Vorwärtskrümmung der Schaufeln gegenüber der Rückwärtskrümmung größere hydraulische Verluste aufweist, daher in Gleichung $u_2 = B_0 \cdot C_0 \sqrt{h}$ zwar B_0 kleiner, jedoch C_0 größer wird als bei Rückkrümmung der Schaufelform (siehe Versuchsergebnisse S. 115 (Tafel III, Fig. 2)).

Hiermit sind alle Einzeleinflüsse auf die Größe der nötigen Umfangsgeschwindigkeit u_2 für den gewöhnlich vorliegenden einfachen Fall, daß von der Pumpe nur eine Aufgabe verlangt wird, besprochen. Soll jedoch eine Pumpe, wie in der Einleitung erwähnt, mehreren Zwecken dienen, so wird man nach Ausrechnung aller ihrer in Betracht kommenden Dimensionen für den stoßfreien Fall durch Anwendung unserer Gleichungen der früheren Abschnitte sich überzeugen können, ob und inwieweit dieselbe auch anderen an sie gestellten Anforderungen genügen kann, und eventuell ihre Dimensionen entsprechend abändern müssen.

3. Kontrolle der Umfangsgeschwindigkeit.

Es soll noch eine Kontrolle der Berechnung von u_2 für den stoßfreien Fall empfohlen werden, welche in der Berechnung der „Gleichgewichtsgeschwindigkeit“ (S. 29) besteht.

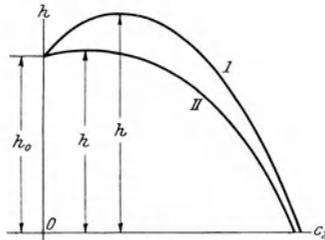


Fig. 82.

Wir fanden für diese Gleichung 65) S. 29

$$C u_2^2 = 2 g h_0 \dots \dots \dots 255)$$

h_0 der Druck (Förderhöhe), C Koeffizient nach Gleichung 31) S. 10; C ist nur von ζ_0 und α_1 abhängig, daher schnell berechnet. Man bestimme nun für die aus der gewöhnlichen Rechnung (Gleichung 221) bzw. 225)) sich ergebende Umfangsgeschwindigkeit u_2 das h_0 nach Gleichung 255) (Fig. 82) (d. i. die Druckhöhe für die „ganz geschlossene Pumpe“). Man kann dann bei einiger Übung leicht schätzen, ob die Differenz $h - h_0$ (der verlangten Förderhöhe und der nach Gleichung 255)

gerechneten Förderhöhe „Gleichgewichtshöhe“) eine genügende Sicherheit bietet. Hierbei soll nochmals erinnert werden, daß h_0 von α_2 und α_3 unabhängig ist, daß ferner für Hochdruckpumpen die hc_2 -Kurve etwa den Verlauf nach I, für Niederdruckpumpen hingegen nach II (Fig. 82) nimmt, was für die Beurteilung von $h - h_0$ zu beachten ist. Zeuner („Vorlesungen über Theorie der Turbinen“ S. 325, 330) empfiehlt u_2 für den Betrieb um 0.5 bis 1.5 m/sec größer zu wählen als die Gleichgewichtsgeschwindigkeit; dem Verfasser scheint dies unter Umständen, besonders für Niederdruckpumpen, eine zu geringe Sicherheit zu sein.

B. Die Radbreiten.

1. Laufrad.

Sind an der Laufradeintrittsstelle (Fig. 83, I) keine Leitschaufeln vorhanden, und ist ein Flüssigkeitsvolumen Q per Sekunde zu fördern, so ist aus

$$Q = c (r_1^2 \pi - r^2 \pi) \dots \dots \dots 256)$$

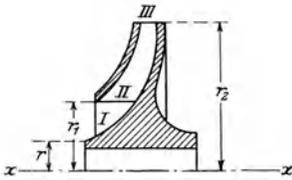


Fig. 83.

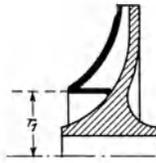


Fig. 84.

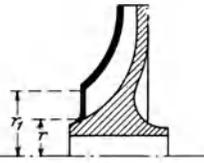


Fig. 85.

(schematisch.)

(c wie früher die absolute Eintrittsgeschwindigkeit) der Radius r_1 zu rechnen. Der Radius r ist durch die aufzuwendende Leistung (Wellen- und Nabenstärke) bei gegebener Tourenzahl bestimmt, (welche also zunächst wenigstens approximativ zu berechnen ist). Sind an dieser Stelle Leitschaufeln vorhanden, so ist je nach ihrer Anordnung analog zu verfahren und ihre Dicke zu berücksichtigen.

Nun zu der Eintrittsstelle in den geschaufelten Teil des Laufrades. Hier sei zunächst darauf hingewiesen, daß die Schaufelbegrenzung nach Fig. 84 vor der Fig. 85 den Vorteil hat, daß der Radius längs der ganzen Eintrittslinie konstant

bleibt, daher auch die Umfangsgeschwindigkeit u_1 und somit auch der $\triangle \alpha_1$; daher ist diese Schaufel wesentlich einfacher herzustellen als die Schaufel Fig. 85. Denn hier verändert sich der Eintrittsradius von r bis r_1 , mithin auch die Umfangsgeschwindigkeit, α_1 bleibt für die ganze Eintrittsstelle nicht mehr gleich. Es müßte eine Schaufelung ähnlich wie am Laufradaustritt der Francis-Turbinen (vergl. Speidel-Wagenbach, „Über Francis-Turbinenschaufelung, Zeitschr. des Vereines deutscher Ingenieure 1899, S. 581 f.) angebracht werden, die wesentlich komplizierter ist.

Soll nun zur Berechnung der Laufradbreiten geschritten werden, so muß die Schaufelkurve (Fig. 87), die ja nach dem

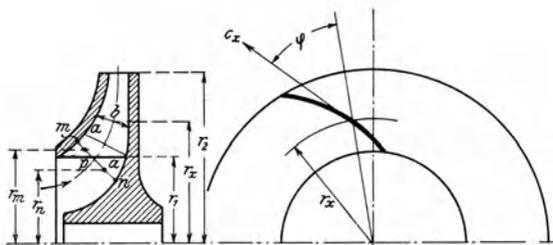


Fig. 86.

Fig. 87.

(schematisch.)

in diesem Abschnitt unter A. Gesagten zu rechnen ist, schon vorliegen.

Die Radbreiten b sind senkrecht zur Strömungsrichtung der Flüssigkeit gemessen. Soll nicht nur die Breite b_1 für den Eintritt und b_2 für den Austritt aus dem Laufrade berechnet werden, sondern auch die Breite eines dazwischenliegenden Schnittes, so ist noch eine Annahme über die Änderung der relativen Geschwindigkeit längs der Schaufel von c_1 für den Eintritt bis zu c_2 für den Austritt zu treffen.

So sei z. B. angenommen, daß dieser Übergang der relativen Geschwindigkeit von c_1 auf c_2 (für Hochdruckpumpen ist dies eine Abnahme) der Zunahme des Radius von r_1 zu r_2 verkehrt proportional sei. Ist c_x die relative Geschwindigkeit längs der Schaufel für den Radius r_x (Fig. 87), so heißt diese Bedingung:

$$- \int_{c_1}^{c_2} d c_x = \frac{c_1 - c_2}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} d r_x \quad \dots \dots \dots 257)$$

mithin

$$c_x = c_1 - (c_1 - c_2) \frac{r_x - r_1}{r_2 - r_1} \dots \dots \dots 258)$$

Gleichung 258) bestimmt somit c_x . Mitunter wird auch ein gerader Kranzquerschnitt vorgeschrieben, dann sind die Breiten der Zwischenschnitte schon durch geradlinige Verbindung der Endpunkte der Breiten am Eintritt und Austritt festgelegt.

Ist b die jeweilige Radbreite, i die „lichte Weite“ des Schaufelkanales senkrecht zu b und senkrecht zur Strömungsrichtung gemessen, φ der Winkel nach Fig. 87, e die Schaufeldicke, z die Schaufelzahl, so gelten die bekannten Gleichungen der Turbinentheorie:

$$i = \frac{2 \pi r}{z} \cos \varphi - e \dots \dots \dots 259)$$

$$\frac{Q}{\eta_v} = \text{b. z. i. } c_x \dots \dots \dots 260)$$

(Q Flüssigkeitsvolumen per Sek., η_v volumetrischer Wirkungsgrad). Mit Rücksicht auf den Flüssigkeitsverlust durch den Spalt etc. ist mit $\frac{Q}{\eta_v}$ statt mit Q zu rechnen.

Für die Ein- bzw. Austrittsstelle geht $\sphericalangle \varphi$ in α_1 bzw. α_2 über. Die auf diese Art erhaltenen Werte für die Breite gelten voll erst von a (Fig. 86) an, denn erst hier tritt die Gesamtmenge der Flüssigkeit in den geschaukelten Teil des Rades ein. Für die vorher liegenden Übergangsstellen, etwa den Querschnitt \overline{mn} , ist so zu rechnen, daß für \overline{pn} , etwa nach der Guldinschen Regel, der Querschnitt und die durch den Teil \overline{pn} des Schnittes \overline{mn} fließende Flüssigkeitsmenge q bestimmt wird, zu (Fig. 86)

$$q = 2 \pi \cdot r_n \cdot \overline{pn} \cdot c \dots \dots \dots 261)$$

Die für den übrigen Teil der Flüssigkeitsmenge, das ist $\frac{Q}{\eta_v} - q$, erforderliche Breite ist entsprechend dem mittleren Radius von \overline{mp} , d. i. r_m , nach den Gleichungen 259) und 260) zu berechnen.

Zu beachten ist, daß schließlich ein allmählicher Übergang von einer Breite zur nächsten herzustellen ist.

2. Leiträder.

Erst in den letzten Jahren werden Leitschaufeln am Eintritt in den Diffuser bei Zentrifugalpumpen für größere Förderhöhen beinahe allgemein angewendet, hingegen werden die Leitschaufeln vor dem Eintritt in das Laufrad auch jetzt, besonders bei kleinen Pumpen, der konstruktiven Komplikation halber meist weggelassen, oder unter $\alpha = 0^\circ$ gestellt.

Jedenfalls haben Leitschaufeln an der Radeintrittsstelle den Vorteil, daß sie das Mitrotieren der Flüssigkeit an der Nabe und der Eintrittsstelle überhaupt hemmen und dadurch das Einhalten der der Berechnung zugrunde gelegten Winkelwerte tatsächlich herbeiführen.

Weitaus wichtiger und nach Ansicht des Verfassers für Hochdruckpumpen unerlässlich sind die Leitschaufeln im Diffuser. Sie sind es, welche den Übergang von der großen absoluten Austrittsgeschwindigkeit aus dem Laufrade zu der normalen Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Gehäuse und im Druckrohr zu vermitteln haben. Sie sind daher mit großer Sorgfalt zu konstruieren, lang genug und in genügender Zahl anzubringen, so daß eine sichere und allmähliche Flüssigkeitsführung gewährleistet erscheint. Nur bei ihrer Verwendung können Kreiselpumpen genau gerechnet werden, da das früher ausschließlich übliche Spiralgehäuse, welches das Laufrad ohne Leitschaufeln direkt umschloß, nur eine rohe Schätzung des $\angle \alpha_3$ zuließ sowie Verluste mit sich brachte, die sich rechnermäßiger Behandlung vollständig entziehen. Tatsächlich zeigen auch Versuche den günstigen Einfluß der Leitschaufeln (vergl. die früher erwähnte Arbeit Stantons im Engineering 1903; auch der Verfasser konnte bei Pumpenerprobungen den Unterschied in der erreichten Druckhöhe bei Anwendung bzw. Hinweglassung von Diffuserleitschaufeln konstatieren).

Was die Berechnung der Leitschaufelbreiten anbelangt, so gilt hier analog den Gleichungen 259) und 260):

$$i = \frac{2 \pi r_x}{z} \cos \psi - e \dots \dots \dots 262)$$

$$Q = z \cdot b \cdot i \cdot w_x \dots \dots \dots 263)$$

i, z, b, e haben die den früheren entsprechende Bedeutung jedoch für die Leitschaufeln, ψ ist der Winkel, den die absolute Geschwindigkeit w_x mit dem Radius r_x bildet. Für die Leitrad-eintrittsstelle ist $\psi = \alpha_3$, $w_x = w_2$, $r_x = r_2$. Für das andere Ende des Leitrades ist $w_x = c_3$.

Bezüglich der allmählichen Abnahme von w_x von w_2 bis c_3 ist analog wie bei der relativen Geschwindigkeit längs der Laufradschaufel eine Annahme zu treffen, oder es ergibt sich dieser Übergang durch Anwendung konstanter Schaufelbreite oder einer anderen gewählten Breitenform.

Falls die Leitschaufeln im Durchmesser D radial enden, so rechnet sich die nötige Breite b an dieser Stelle aus

$$Q = (D \pi - z \cdot e) c_3 \cdot b \dots \dots \dots 264)$$

C. Kraftbedarf.

Bezüglich des Kraftbedarfs sei auf S. 75f. des III. Abschnittes verwiesen und nur wiederholt, daß der Kraftbedarf in PS sich schreibt:

$$N = \frac{Q \cdot H \cdot \gamma}{\eta_e \cdot 75} \dots \dots \dots 265)$$

(H manometrische Förderhöhe (Meter), Q Flüssigkeitsvolumen (m³/sek), γ spezifisches Gewicht (kg/m³), η_e effekt. Wirkungsgrad.)

Sechster Abschnitt.

Versuchsergebnisse.

Die vorangegangenen Abschnitte geben Mittel an die Hand, das Verhalten von Zentrifugalpumpen in allen Fällen klarzustellen. Es bleibt noch übrig zu erwähnen, daß die Ausführung den vollen Wert der theoretischen Ergebnisse nicht ganz erreichen wird, daher für die Rechnung Koeffizienten bedarf. Die Bestimmung der Größe derselben, als lediglich von Güte der Ausführung und Art der Konstruktion abhängig, muß dem Versuch überlassen bleiben, den jede ausführende Fabrik für ihre Erzeugnisse wird machen müssen.

Verfasser führte im Auftrage der Direktion der Maschinenfabrik Andritz A.-G. in Andritz-Graz vielfache Erprobungen und Versuche an Kreiselpumpen durch und wurde ihm von derselben gestattet, außer den S. 71 angegebenen Versuchsdaten noch nachstehende Resultate mitzuteilen, um die Übereinstimmung seiner Theorie mit dem Verhalten ausgeführter Pumpen zeigen zu können. Es sei vorausgeschickt, daß einzelne der angeführten Ergebnisse an Versuchspumpen erzielt wurden, deren relativ geringer Maximalwirkungsgrad eine Folge des zu Messungszwecken abnormal breit gehaltenen Spaltes war.

A. Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist im wesentlichen in Tafel I dargestellt. Die Versuchspumpen saugten Wasser aus einem Behälter, förderten dasselbe in kurzer Druckleitung in ein

3·5 m langes Holzgerinne, aus welchem es über einen aus Eisenblech hergestellten Überfall in das Reservoir zurückfloß. In der Saug- und in der Druckleitung war je ein Schieber eingebaut. Indes war bei allen nachstehend angeführten Versuchen der Saugleitungsschieber, welcher zur künstlichen Herstellung größerer Saughöhen diente, ganz geöffnet, daher nur die natürliche, etwa 0·5 m betragende, Saughöhe zu überwinden. Zur Druckmessung wurde hinter dem ersten Laufrad jeder Pumpe ein Quecksilbermanometer angeschlossen, ferner auf jeder Pumpe ein Bourdon-Manometer (Schäffer & Budenberg), und in der Saugleitung ein Vakuummeter angebracht. Behufs Bestimmung der Wassermenge war ca. 1 m vor der Überfallkante, wo das Wasser einerseits schon ruhig floß, ohne jedoch andererseits bereits eine Senkung des Spiegels zu zeigen, ein Maßstab befestigt, welcher die Wassermenge Q direkt abzulesen gestattete.¹⁾ Die Tourenzahl wurde mit einem Hornschen Tachometer gemessen und mit einem Tourenzähler kontrolliert. Der Antrieb der Pumpen erfolgte von einem Gleichstrom-Nebenschluß-Motor von 220 Volt Spannung, dessen Wirkungsgradkurve von der liefernden Fabrik bekannt gegeben worden war, mittels einfacher Riemenübersetzung; die Bestimmung des Kraftbedarfs geschah durch Messung von Spannung und Stromstärke mit Hilfe von Meßinstrumenten. Die Tourenzahlen wurden durch Verwendung verschieden großer Riemenscheiben variiert. Die Änderung der Druckhöhen und Wassermengen geschah durch den in der Druckleitung eingebauten Schieber.

Es wurden nun stets die zusammengehörigen Werte von manometrischer Förderhöhe, Wassermenge, Tourenzahl der Pumpe, ferner die Volt und Ampère abgelesen, dann der Kraftbedarf und Gesamtwirkungsgrad der Pumpe unter Berücksichtigung des Motorwirkungsgrades und des Verlustes durch die Riemenübertragung berechnet.

¹⁾ Für den vollkommenen Überfall gilt die bekannte Gleichung: $Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$, der Wert des Koeffizienten $\frac{2}{3} \mu$ wurde nach der Freseschen Formel (vgl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1890, S. 1285—1376) berechnet.

B. Versuchsergebnisse.

1. Kurven für Förderhöhe, Kraftbedarf, Wassermenge.

Auf diese Weise ergaben sich die Kurven, Tafel II, Fig. 1 bis 4, welche die theoretisch nachgewiesene Erscheinung, daß der maximale Druck bei Förderung (und nicht bei geschlossenem Druckrohr) auftritt, durchwegs zeigen. Dieselben wurden

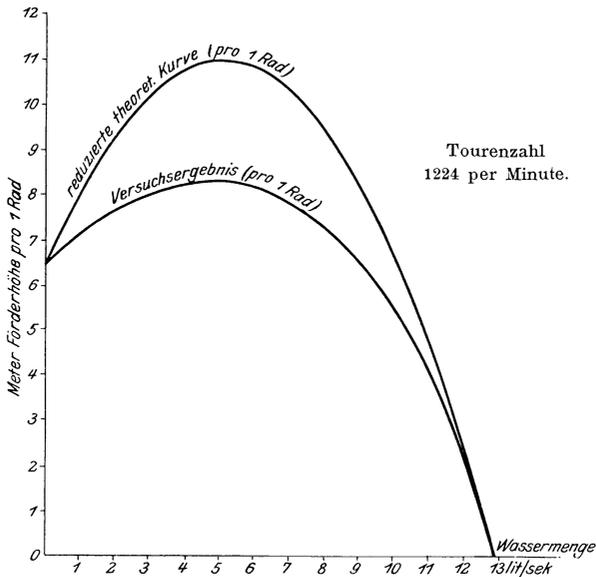


Fig. 88.

mit einer vierräderigen Versuchspumpe erzielt, deren Lauf-
raddimensionen denen unserer Pumpe in Beispiel 1, S. 12
genau gleich waren, demnach Räder mit radialem Schaufel-
ende. Zur Ermöglichung eines genaueren Vergleichs der theo-
retischen mit den praktischen Ergebnissen sei nunmehr zu je
einer praktisch gewonnenen Förderhöhen- und Kraftbedarf-
kurve die theoretische hinzugefügt.

a) Förderhöhen-Wassermengen-Kurve.

Als solche ist in Fig. 88 die Versuchskurve Tafel II Fig. 2 für $n = 1224$ T. p. Min. gezeichnet, u. zw. auf 1 Rad bezogen (also $\frac{1}{4}$ der Höhen bei gleichen Wassermengen). Bezüglich der theoretischen Kurve in Fig. 88 sei erwähnt, daß dieselbe mit dem Koeffizienten $A = 10.2$ gerechnet ist, bezüglich aller übrigen Werte sei auf Seite 12 f. (Beispiel 1) verwiesen, wo für ein gleiches Laufrad die Berechnung der entsprechenden Kurve durchgeführt worden ist. Es muß nur noch bemerkt werden, daß die Druckhöhe für den Gleichgewichtszustand (Wassermenge = 0) theoretisch sich zu ca. 8.9 m, praktisch zu 6.5 m pro 1 Laufrad ergibt; in diesem Verhältnis reduziert ist die theoretische Kurve in Fig. 88 eingezeichnet. Man sieht eine gute Übereinstimmung in der allgemeinen Form der Kurven, ferner eine gute Übereinstimmung der maximalen Wassermenge und der Wassermenge für den größten Druck (beide Kurven haben ihr Maximum bei gleicher Wassermenge), dagegen liegt der Druck unter dem theoretischen. Verfasser glaubt dies abgesehen davon, daß die Koeffizienten ζ nicht genau bekannt sind, dem, wie erwähnt, abnormal breit ausgeführten Spalt sowie dem Umstande zuschreiben zu sollen, daß die Laufradaustrittsbreite dieser Pumpe nur 3 mm betrug, was infolge der dadurch bewirkten weitgehenden Zerteilung der Wasserstrahlen bei relativ großer Oberfläche derselben nachteilig gewesen sein dürfte.

b) Kraftbedarf-Wassermengen-Kurve.

Dieser Vergleich werde mit der Kurve Tafel II Fig. 1 vorgenommen, das ist mit derselben 4-rädrigen Pumpe, jedoch bei 890 T. pro Min. ($u_2 = 9.3$ m/sek). Wir haben für diese Versuchspumpe (pro 1 Laufrad) S. 78 f. Beispiel 1 bei 1500 T. p. Min. die Kraftbedarfberechnung durchgeführt; analog erhalten wir bei 890 Touren (von mechanischen etc. Verlusten abgesehen) mit unseren früheren Bezeichnungen:

$$L_0 = -0.073 c_2^2 \text{ in PS, } c_2 \text{ in m/sek}$$

$$L_1 = -0.0000406 c_2^2 - 0.0032 c_2 + 0.0705$$

$$L_2 = +0.00235 c_2^2 + 0.0892 c_2 - 0.204$$

somit für die Gesamtsekundenarbeit in PS

$$L = 0.07 c_2^2 + 0.086 c_2 - 0.1235$$

für jedes Laufrad, und für die ganze Pumpe das Vierfache von L. Der stoßfreie Punkt liegt (da nach S. 48 $c_2 = 0.232 u_2 = 0.232 \cdot 9.3 = 2.16$ m/sek und $F_2 = 14.3$ qcm) für 890 Touren bei $Q = 3.1$ lit/sek Wasser. Die Gleichung für den Kraftbedarf bei 890 Umdrehungen pro Minute zeigt eine Parabel, deren Durchschnitt mit der L-Achse ($c_2 = 0$, $Q = 0$) ein $L = -0.1235$ PS entspricht, deren Scheitel die Ordinate (minimaler Kraftbedarf pro 1 Rad) = -0.0718 PS und die Abszisse $c_2 = 0.61$ m/sek ($Q = 0.825$ lit/sek) zukommt. Diese Zahlen

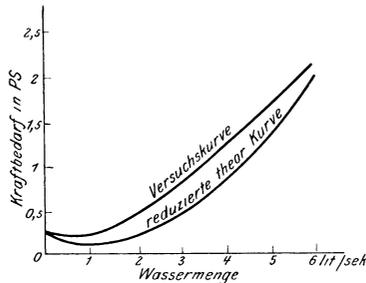


Fig. 89.

für L mit 4 multipliziert zeigen, daß die Versuchskurve (Fig. 89) noch unter der theoretischen Kurve liegt; dies erklärt sich daraus, daß eben bei dieser Pumpe durchwegs bedeutend weniger Arbeit/sek geleistet wurde, als theoretisch der Fall sein müßte; wir sahen ja, daß hier die theoretische Förderhöhe nicht erreicht wurde, daher das Produkt $Q \cdot H$, somit auch L praktisch viel kleiner ist, als es bei voller Erreichung der theoretischen Förderhöhe sein müßte; tatsächlich sind (Fig. 89) die Differenzen gegenüber der theoretischen Kurve dort am größten, wo auch die Förderhöhenkurve des Versuches am meisten unter der entsprechenden theoretischen Vergleichskurve liegt. Zum Vergleich der Form der Kraftbedarfskurven, wurde die theoretische Kurve mit Hilfe eines konstanten Faktors derart reduziert in Fig. 89 eingezeichnet, daß ihr Schnittpunkt mit der L-Achse mit dem entsprechenden Punkt der Ver-

suchskurve übereinstimmt. Wenn man bedenkt, daß bei dieser „reduzierten theoretischen Kraftbedarfskurve“ die mechanischen etc. Verluste nicht einbezogen sind, und daß diese, da für kleine Belastungen prozentuell größer als für große Belastungen, eine Verflachung der theoretischen Kurve bewirken, muß der allgemeine Charakter beider Kurven als gut übereinstimmend bezeichnet werden, umso mehr, als auch der Scheitel beider Kurven ca. dieselbe Abszisse aufweist.

In Fig. 1 (Tafel III) sind die Kurven für Wassermenge und Förderhöhe bei den 4 Tourenzahlen der Figuren Tafel II übersichtshalber zusammengestellt.

2. Vergleich von Laufrädern mit vor- bzw. rückgekrümmten Schaufeln.

Fig. 2 (Tafel III) zeigt die Beziehung der Wassermenge und Förderhöhe 1. für ein Versuchslaufrad mit radialen Schaufelenelementen, 200 mm Durchmesser, dessen Dimensionen nach Beispiel 1 (S. 12) gewählt waren, und 2. bei gleicher Tourenzahl die entsprechende Kurve für ein Rad desselben Durchmessers, für die gleiche Wassermenge konstruiert, bei dem jedoch $\sphericalangle a_2 = 42^\circ$ war (entsprechend einer leicht zurückgekrümmten Schaufelform). Man ersieht aus dieser Figur, daß das Rad mit Rückkrümmung der Schaufeln bei gleicher Tourenzahl die größere Förderhöhe aufweist, obwohl theoretisch das Verhalten umgekehrt sein sollte. Diese Erscheinung ist den geringeren hydraulischen Verlusten bei Rückkrümmung gegenüber Vorwärtskrümmung der Schaufeln zuzuschreiben (worauf S. 103 hingewiesen wurde). Dagegen erreicht das Rad mit radialem Schaufelende das Maximum der Förderhöhe bei einer größeren Wasserlieferung als das mit rückgekrümmten Schaufeln, was mit der Theorie im Einklang steht (S. 27 f.).

3. Gleichgewichtszustand. Koeffizient ζ_0 .

In Fig. 3 (Tafel III) wurden die auf dem Versuchswege erhaltenen Druckhöhen einer Pumpe mit 6 Rädern von 150 mm Durchmesser für den Gleichgewichtszustand (Druckrohr geschlossen) samt den zugehörigen Tourenzahlen verzeichnet.

Die bezügliche theoretische Kurve rechnet sich aus $C \cdot u_2^2 = 2 g h_0$ (S. 29, Gleichung 65) pro jedes Laufrad.

Hierbei ist

$$C = 1 + (\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 - 1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2$$

(Gleichung 31) S. 10).

Im vorliegenden Falle ist

$$\frac{r_1}{r_2} = 0.5 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 77^\circ 30';$$

mit

$$\zeta_0 = 1.25$$

wird $C = 1.0475$. Sei H_0 die Gleichgewichtshöhe für alle 6 Räder zusammen, n die Tourenzahl pro Minute, so ergibt sich aus:

$$6 \cdot C \left(\frac{2 r_2 \pi}{60} \right)^2 \cdot n^2 = 2 g H_0$$

nach Einsetzen vorstehender Ziffernwerte die Beziehung

$$n^2 = 51\,000 \cdot H_0$$

(H_0 in Metern). Diese theoretische Kurve ist in Fig. 3 (Tafel III) ebenfalls eingezeichnet und deckt sich fast vollkommen mit der auf dem Versuchswege erhaltenen Kurve, ein Beweis, daß der von Zeuner mit 1.25 angegebene Koeffizient ζ_0 für den obigen Fall richtig gewählt ist.

Berechnet man nämlich aus $C u_2^2 = 2 g h_0$ nach unseren Zahlen¹⁾ das C und aus diesem C das ζ_0 , so ergibt sich in der Tat als Mittelwert $\zeta_0 = 1.26$, mithin eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Zeunerschen Wert, welche, wie ein

¹⁾ Der Versuch ergab für diese Pumpe nachstehende Zahlen:

| Tourenzahl pro Minute | h_0 in m pro 1 Rad | Tourenzahl pro Minute | h_0 in m pro 1 Rad |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 2180 | 15.5 | 1375 | 6.03 |
| 2170 | 15.41 | 1250 | 5.3 |
| 2140 | 15.83 | 1125 | 4.3 |
| 2000 | 13.05 | 1000 | 3.3 |
| 1875 | 11.3 | 875 | 2.66 |
| 1750 | 10.3 | 750 | 2.0 |
| 1625 | 9.0 | 625 | 1.3 |
| 1500 | 7.5 | | |

früheres Beispiel (S. 70) zeigte, durchaus nicht in allen Fällen eintritt.

Es wurde ebendort (S. 71) schon darauf hingewiesen, daß der Ausdruck für die Gesamtsekundenarbeit bei $c_2 = 0$ mit $\zeta_0 = 1.25$ oft zu große Werte ergibt. Die folgenden zwei Beispiele mögen zeigen, daß der Koeffizient ζ_0 , aus der im Gleichgewichtszustand erreichten Höhe h_0 (nach Gleichung 65) und 31)) zurückgerechnet, ziemlich abweichende Werte annehmen kann.

Beispiel 1. Es ergab eine Pumpe mit 8 Laufrädern von 300 mm Durchmesser, deren $\sphericalangle \alpha_1 = 75^\circ$, $2 r_1 = 150$ mm, $2 r_2 = 300$ mm betrug, bei 1050 Touren p. M. ($u_2 = 16.5$ m/sek) eine Gleichgewichtshöhe von 109.6 m (d. i. pro Rad $h_0 \sim 13.7$ m), und damit aus $C u_2^2 = 2 g h_0$ zurückgerechnet,

$$C = 0.99$$

(für $\zeta_0 = 1.25$ wäre $C = 1.0412$).

Aus

$$C = 1 + (\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 - 1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0.99$$

folgt

$$\zeta_0 = 1.02.$$

Beispiel 2. Zwei gleich gebaute Pumpen mit je 6 Laufrädern von 250 mm Durchmesser hatten $\sphericalangle \alpha_1 = 75^\circ 30'$, $\frac{r_1}{r_2} = 0.5$. Bei einer Tourenzahl von 1240 p. M. ($u_2 = 16.25$ m/sek) war die Gleichgewichtshöhe jeder Pumpe ~ 75 m, daher $C \sim 0.925$ und

$$\zeta_0 = 0.74$$

(für $\zeta_0 = 1.25$ wäre $C = 1.0424$).

Man ersieht aus diesen Beispielen, wie sehr es zu wünschen wäre, über die Größe des Koeffizienten ζ_0 , der auch in der Turbinentheorie von großer Wichtigkeit ist, genaue Kenntnis zu erlangen; nur dann wäre es möglich, in allen Fällen zwischen theoretischer Vorausberechnung und praktischem Ergebnis volle Übereinstimmung zu erzielen.

Literatur.

a) Theorie.

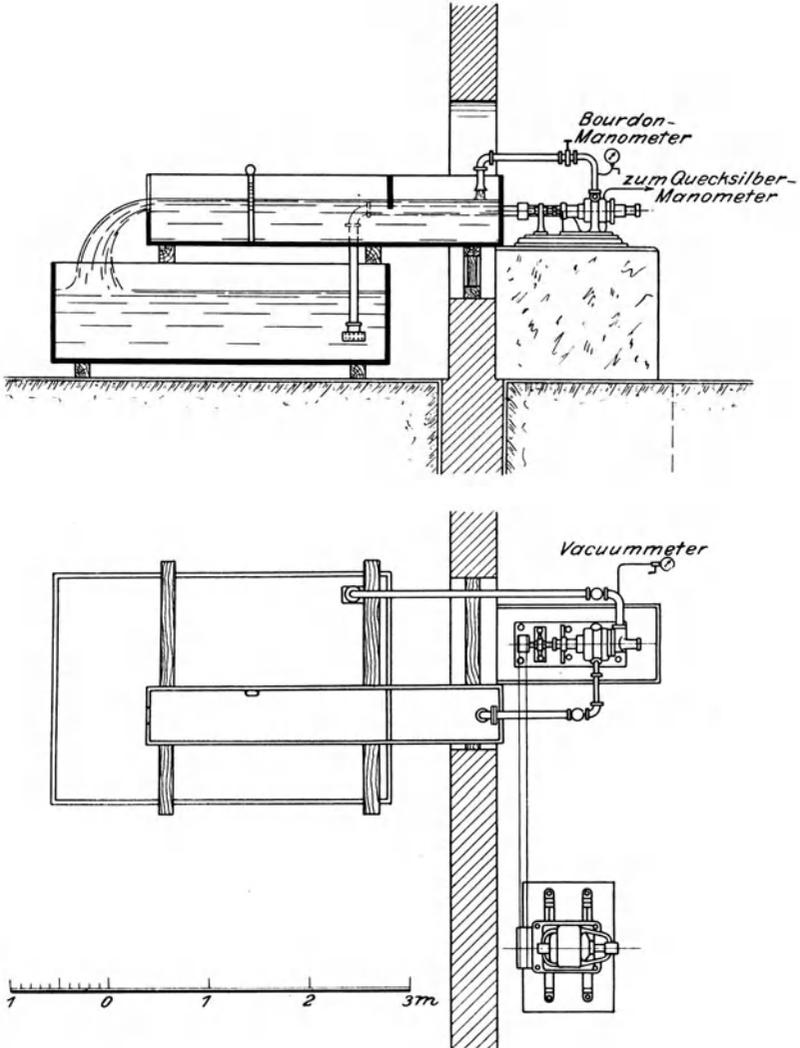
- Zeuner, „Vorlesungen über Theorie der Turbinen“ Leipzig, Arthur Felix, 1899.
- A. Linnenbrügge, „Beitrag zur Theorie der Zentrifugalpumpen“. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1870, S. 5 und 97.
- Dr. R. Pröll, „Über den hydraulischen Wirkungsgrad von Turbinen bei ihrer Verwendung als Kraftmaschinen und Pumpen“. Berlin, J. Springer, 1904.
- (Die beiden letztgenannten sind die einzigen dem Verfasser bekannten theoretischen Aufsätze, welche Zentrifugalpumpen mit Leitschaufeln voraussetzen.)
- Hermann-Weisbach, „Ingenieur- und Maschinenmechanik“. 2. Aufl. 1880, III. Teil, 2. Abt., S. 1001 f.
- Hermann, „Graphische Theorie der Turbinen- und Kreiselpumpen“ 2. Aufl. 1900.
- Hartmann-Knoke, „Die Pumpen“. Berlin, J. Springer, 2. Aufl.
- Müller, „Über Zentrifugalpumpen“. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure („Z. d. V. d. I.“) 1886, S. 787.
- Ebel, „Zur Theorie der Zentrifugalpumpen“. Z. d. V. d. I. 1887, S. 456.
- K. E., „Über Zentrifugalpumpen“. Z. d. V. d. I. 1887, S. 1071.
- R. R. Werner, „Überdruckturbinen und Kreiselpumpen“. Z. d. V. d. I. 1888, S. 263, 290.
- Lindner, „Theorie der Schleuderpumpen“. Z. d. V. d. I. 1891, S. 576, 977.
- Bartl, „Zur Auswahl der zweckmäßigsten Schaufelform der Zentrifugalpumpen“. Z. d. V. d. I. 1891, S. 1046.
- Pelzer, „Diffuser bei Ventilatoren und Zentrifugalpumpen“. Z. d. V. d. I. 1892, S. 189, 442.
- Lindner, „Ungleichmäßigkeit der Strömung in Ventilatoren“. Z. d. V. d. I. 1895, S. 611.
- Dr. R. Mollier, „Über Zentrifugalpumpen“. Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfließes 1895, S. 211

- Budau, „Die mechanischen Grundgesetze der Flugtechnik“. Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines 1903, nebst einem Anhang (Erwiderung auf die gemachten Einwendungen).
- E. Marchand, „Nouvelle théorie des pompes centrifuges“. Paris, E. Bernard, 1896.

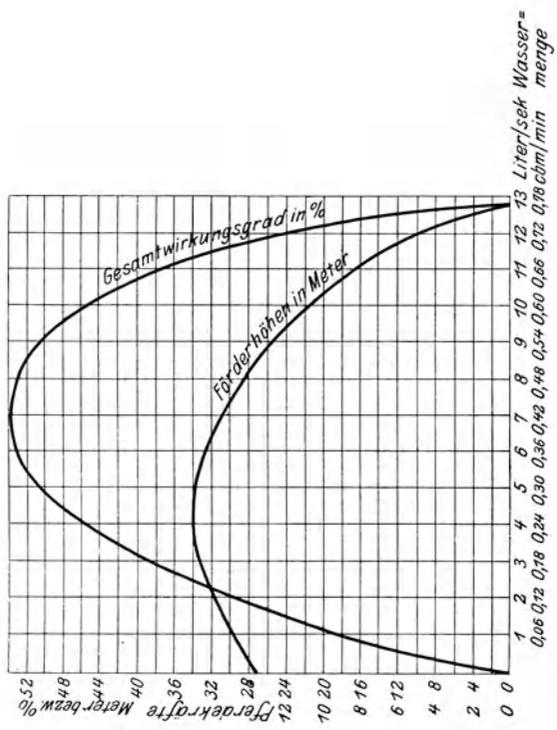
**b) Beschreibungen von Hochdruckzentrifugalpumpen
bezw. Versuche mit denselben.**

- Dr. F. Heerwagen, „Wasserhaltung der Compañia Minera y Metalurgica del Horcajo“. Z. d. V. d. I. 1901, S. 1549 f.
- Prof. Gutermuth, „Die Weltausstellung in Paris 1900“. Pumpen. Z. d. V. d. I. 1901, S. 1448 ff.
- Dr. Hoffmann, „Die Industrie- und Gewerbeausstellung in Düsseldorf 1902“, „Die Elektrizität im Berg- und Hüttenwesen“. Z. d. V. d. I. 1902, S. 1235 f.
- Rateau-Esser, „Zentrifugalpumpen und Ventilatoren für hohe Kompression“. Glückauf 1902, S. 353 f.
- Diviš, „Hochdruckkreiselumpen und Hochdruckventilatoren, System A. Rateau“. Österr. Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen 1904, S. 331 f.
- Dubbel, „Hochdruckkreiselumpen“. Z. d. V. d. I. 1904, S. 1003.
- Thomas E. Stanton, D. Sc., „Centrifugal pumps“. Engineering 1903, S. 745.
- „Efficiency of Centrifugal pumps“. (Diskussion zu vorstehender Abhandlung), Engineering 1903, S. 719.
- „Centrifugal pump tests“. Journal of the American Society of Naval Engineers. Vol. XVI, No. 2, 1904. (Deutsch in der „Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen“ 1904, S. 65, von Ing. Berg).
- „High pressure multistage turbine pumps with special balancing device“. Engineering News 1904, S. 324 f.
- „Some forms of Westinghouse Centrifugal pumps“ in „The Iron Age“ vom 21. 4. 1904, S. 8.
- Sosnowski, „Pompe centrifuge à haute pression système de Laval“. Mémoires et Compte rendu des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France 1904, S. 233 f.

Versuchsanordnung.

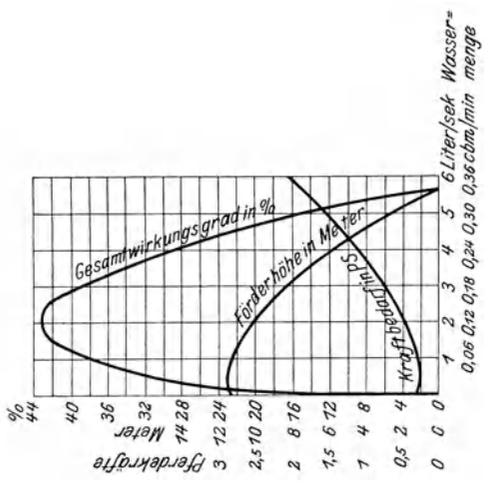


Tafel II.



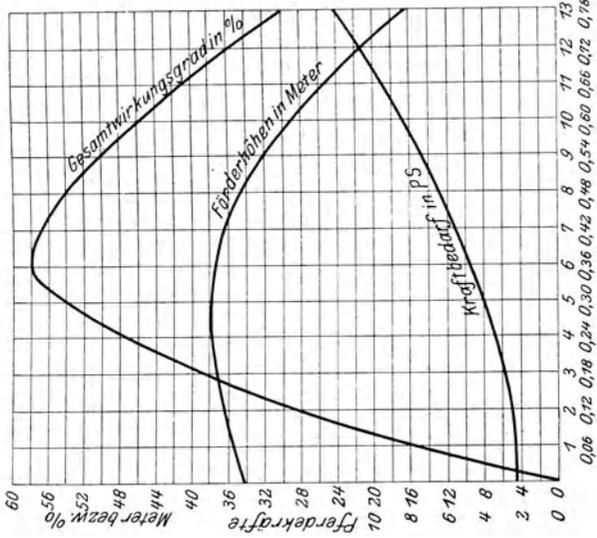
Mittlere Tourenzahl 1224 p. Min.

Fig. 2.



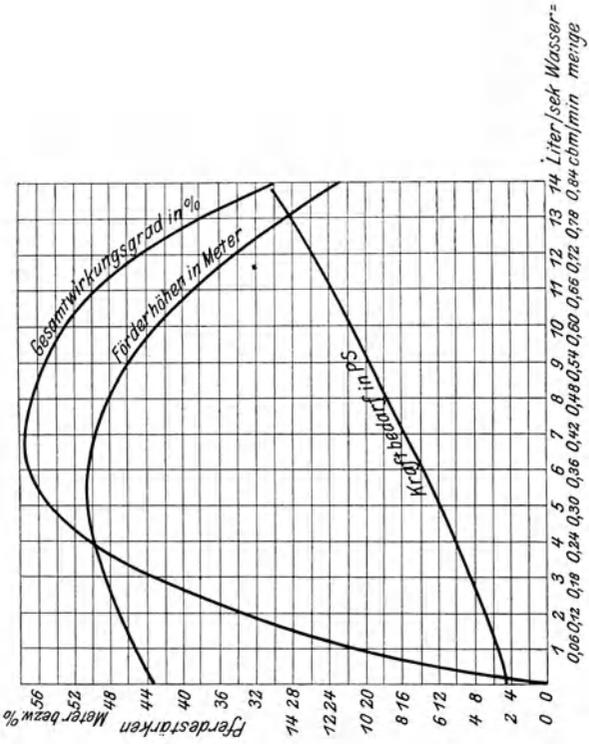
Mittlere Tourenzahl 890 p. Min.

Fig. 1.



Mittlere Tourenzahl 1355 p. Min.

Fig. 3.



Mittlere Tourenzahl 1530 p. Min.

Fig. 4.

Tafel III.

Mittlere Tourenzahl 1365 p. Min.

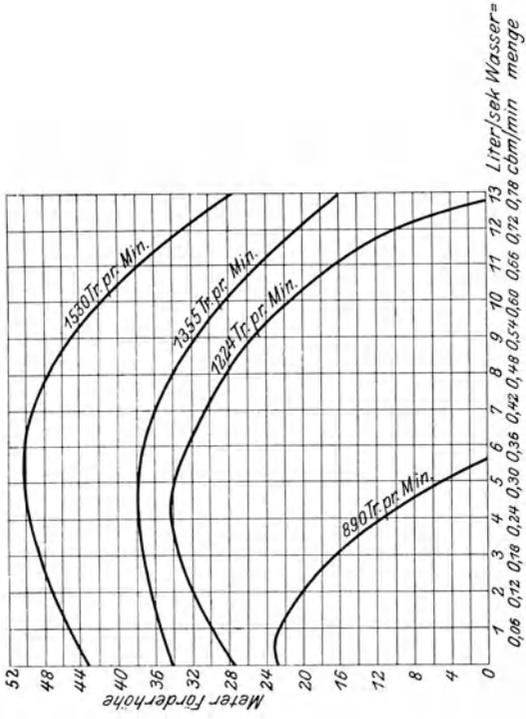


Fig. 1.

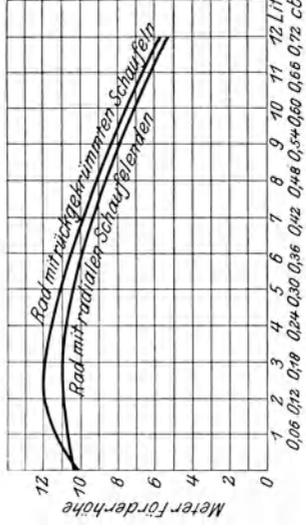


Fig. 2.

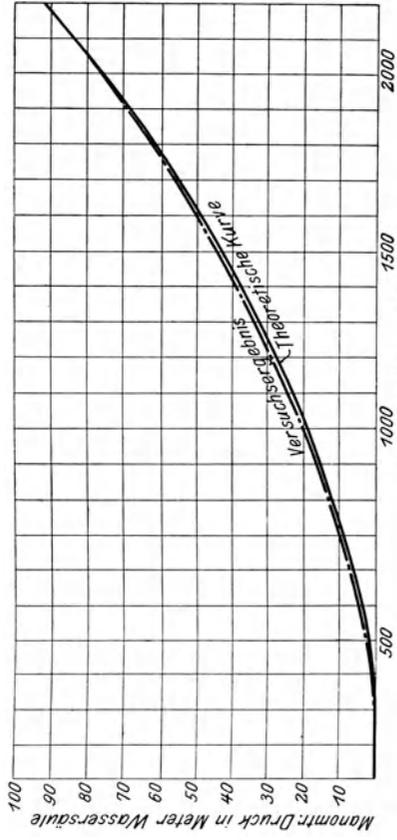


Fig. 8.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

- Die Pumpen.** Berechnung und Ausführung der für die Förderung von Flüssigkeiten gebräuchlichen Maschinen. Von Konr. Hartmann, Prof. an der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin und J. O. Knoke, Oberingenieur in Nürnberg. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage, herausgegeben von Prof. H. Berg. Unter der Presse.
- Die Kraftmaschinen des Kleingewerbes.** Von J. O. Knoke, Oberingenieur. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 452 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.
- Die Werkzeugmaschinen.** Von Hermann Fischer, Geh. Regierungsrat und Prof. an der Königl. Techn. Hochschule zu Hannover. I. Die Metallbearbeitungsmaschinen. Mit 1545 Textfiguren und 50 lithogr. Tafeln. Zweite, vermehrte u. verbess. Auflage. 2 Bände. In Leinwand gebunden Preis M. 45,—.
II. Die Holzbearbeitungsmaschinen. Mit 421 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 15,—.
- Die Gebläse.** Bau und Berechnung der Maschinen zur Bewegung, Verdichtung und Verdünnung der Luft. Von Albrecht von Ihering, Kaiserl. Regierungsrat, Dozent an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 522 Textfiguren und 11 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.
- Entwerfen und Berechnen der Dampfmaschinen.** Ein Lehr- und Handbuch für Studierende und Konstrukteure. Von Heinrich Dubbel, Ingenieur. Mit 388 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 10,—.
- Hilfsbuch für Dampfmaschinen-Techniker.** Von Joseph Hrabák, k. u. k. Hofrat, emer. Prof. an der k. k. Bergakademie zu Pöbbram. Vierte, vermehrte Auflage. In drei Teilen. Mit Textfiguren. Unter der Presse.
- Theorie und Berechnung der Heißdampfmaschinen.** Mit einem Anhang über die Zweizylinder-Kondensations-Maschinen mit hohem Dampfdruck. Von Joseph Hrabák, k. u. k. Hofrat, emer. Prof. an der k. k. Bergakademie zu Pöbbram. In Leinwand gebunden Preis M. 7,—.
- Die Steuerungen der Dampfmaschinen.** Von Karl Leist, Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Zweite, sehr vermehrte und umgearbeitete Auflage, zugleich als fünfte Auflage des gleichnamigen Werkes von Emil Blaha. Mit 553 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.
- Das Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren.** Handbuch für Konstrukteure und Erbauer von Gas- und Ölkraftmaschinen. Von Hugo Güldner, Oberingenieur in München. Zweite, bedeutend erweiterte Auflage. Mit 800 Textfiguren und 30 Konstruktionstafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 24,—.
- Zwangläufige Regelung der Verbrennung bei Verbrennungsmaschinen.** Von Dipl.-Ing. Carl Weidmann. Mit 35 Textfiguren und 5 Tafeln. Preis M. 4,—.
- Die Regelung der Kraftmaschinen.** Berechnung und Konstruktion der Schwungräder, des Massenausgleichs und der Kraftmaschinenregler in elementarer Behandlung. Von Professor Max Tolle. Mit 372 Textfiguren und 9 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 14,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

- Die Dampfkessel.** Ein Lehr- und Handbuch für Studierende Technischer Hochschulen, Schüler Höherer Maschinenbauschulen und Techniken sowie für Ingenieure und Techniker. Bearbeitet von F. Tetzner, Professor, Oberlehrer an den Königl. Verein. Maschinenbauschulen zu Dortmund. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 134 Textfiguren und 38 lithographierten Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.
- Kondensation.** Ein Lehr- und Handbuch über Kondensation und alle damit zusammenhängenden Fragen, einschließlich der Wasserrückkühlung. Für Studierende des Maschinenbaues, Ingenieure, Leiter größerer Dampfbetriebe, Chemiker und Zuckertechniker. Von F. J. Weiß, Zivilingenieur in Basel. Mit 96 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 10,—.
- Technische Messungen,** insbesondere bei Maschinenuntersuchungen zum Gebrauch in Maschinenlaboratorien und für die Praxis. Von Dipl.-Ing. Anton Gramberg. Mit 187 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 6,—.
- Technische Untersuchungsmethoden zur Betriebskontrolle,** insbesondere zur Kontrolle des Dampfbetriebes. Zugleich ein Leitfaden für die Arbeiten in den Maschinenbaulaboratorien technischer Lehranstalten. Von Julius Brand, Ingenieur, Oberlehrer der Königl. Verein. Maschinenbauschulen zu Elberfeld. Mit 168 Textfiguren, 2 Tafeln und mehreren Tabellen.
In Leinwand gebunden Preis M. 6,—.
- Die Dampfturbinen,** mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen und über die Gasturbine. Von Dr. A. Stodola, Prof. am Eidgenöss. Polytechnikum in Zürich. Dritte, bedeutend erweiterte Auflage. Mit 434 Figuren und 3 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.
- Neuere Turbinenanlagen.** Auf Veranlassung von Professor E. Reichel und unter Benutzung seines Berichtes „Der Turbinenbau auf der Weltausstellung in Paris 1900“ bearbeitet von Wilhelm Wagenbach, Konstruktionsingenieur an der Kgl. Techn. Hochschule Berlin. Mit 48 Textfiguren und 54 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 15,—.
- Die automatische Regulierung der Turbinen.** Von Dr. Jug. W. Bauersfeld. Mit 126 Textfiguren.
Preis M. 6,—.
- Hilfsbuch für den Maschinenbau.** Für Maschinentechner sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten. Von Fr. Freytag, Professor, Lehrer an den techn. Staatslehranstalten in Chemnitz. Mit 867 Textfiguren und 6 Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 10,—; in Leder gebunden M. 12,—.
- Die Hebezeuge.** Theorie und Kritik ausgeführter Konstruktionen mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Anlagen. Ein Handbuch für Ingenieure, Techniker und Studierende. Von Ad. Ernst, Prof. des Maschinen-Ingenieurwesens an der Kgl. Techn. Hochschule in Stuttgart. Vierte, neubearbeitete Auflage. Drei Bände. Mit 1486 Textfiguren und 97 lithographierten Tafeln.
In 3 Leinwandbände gebunden Preis M. 60,—.
- Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von Ed. Autenrieth, Oberbaurat und Prof. an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart. Mit 327 Textfiguren.
Preis M. 12,—; in Leinwand gebunden M. 13,20.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.