

Publikationer og mindre Meddelelser
fra Københavns Observatorium.

Nr. 133.

Über Konvektion in Sternatmosphären

von

Mogens Rudkjøbing.

Særtryk af Zeitschrift für Astrophysik Bd. 21, 254, 1942.

Publikationer og mindre Meddelelser
fra Københavns Observatorium.

Nr. 133.

Über Konvektion in Sternatmosphären

von

Mogens Rudkjøbing.

Særtryk af Zeitschrift für Astrophysik Bd. 21, 254, 1942.

ISBN 978-3-662-28065-2

ISBN 978-3-662-29573-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-29573-1

Sonderabdruck
aus der „Zeitschrift für Astrophysik“ 21, 254, 1942.
Springer-Verlag, Berlin, W 9.

Über Konvektion in Sternatmosphären.

Von **M. Rudkjöbing**, Kopenhagen.

(Eingegangen am 9. Februar 1942.)

Drei Sternatmosphären, die der Sonne, einem gelben Riesenstern und einem A 5-Stern entsprechen, werden mit Hinblick auf Instabilität gegenüber Konvektion untersucht, und zwar unter den beiden extremen Voraussetzungen: reines Strahlungsgleichgewicht und reines Konvektionsgleichgewicht in der Instabilitätszone. Die atmosphärische Absorption wird den negativen Wasserstoffionen und dem neutralen Wasserstoff allein zugeschrieben. — Unter der erstgenannten Voraussetzung werden Konvektionszonen von etwa $1^0/00$ der Radien gefunden, die nur bei dem A-Stern in der eigentlichen Photosphäre liegt. Im zweiten Falle erstrecken sich die Zonen bis in viel größere Tiefen. Die Festlegung der unteren Grenzen wird in diesem Falle hier nicht durchgeführt, sondern bleibt einer ergänzenden Untersuchung vorbehalten.

1. Indem man das negative Wasserstoffion als eine wesentliche Quelle der atmosphärischen Absorption der Sterne betrachtet, kommt man — wenn man mit Strahlungsgleichgewicht rechnet — bekanntlich zu einem Aufbau einer Sternatmosphäre, der von demjenigen beträchtlich abweicht, wozu man mit den älteren Vorstellungen vom Absorptionsmechanismus gelangte.

Die Modellatmosphären, die bis jetzt mit Rücksicht auf die Stabilität gegenüber Konvektion untersucht worden sind, haben alle eine Instabilitätszone in dem Gebiet, wo der Wasserstoff teilweise ionisiert ist.

Wenn man mit UNSÖLD [1] und SIEDENTOPF [2] Strahlungsgleichgewicht auch in dieser sogenannten Wasserstoffkonvektionszone annimmt, findet man eine Dicke der Zone — in der Sonnenatmosphäre — von etwa 500 km. Wenn man dagegen mit BIERMANN [3] Konvektionsgleichgewicht annimmt, findet man Wasserstoffkonvektionszonen, die sich zu wesentlich tieferen Schichten der Sterne erstrecken.

Es ist nun die Absicht der vorliegenden Arbeit, die Stabilität der Sternatmosphären gegenüber Konvektion und zwar unter Berücksichtigung der neuen Auffassung der Opazität zu untersuchen.

Weil die Theorie des konvektiven Energietransportes noch nicht imstande ist, die Art des Gleichgewichts in einer atmosphärischen Konvektionszone anzugeben, muß man die verschiedenen möglichen Fälle getrennt durchrechnen¹⁾. Spätere Untersuchungen zum Beispiel von Linienstärken oder vom Balmer-Sprung einerseits und von der Größe des konvektiven

¹⁾ *Anmerkung bei der Korrektur*: Bei der genaueren Berechnung des Energietransportes in der Konvektionszone muß man nach EDDINGTON, M. N. 101, 177, 1941 die Abweichungen der Ionisierungsverhältnisse von denjenigen im thermodynamischen Gleichgewicht berücksichtigen, die von den endlichen Einstellungsgeschwindigkeiten des Ionisierungsgleichgewichts herrühren. Die

Energietransportes andererseits mögen uns in den Stand setzen, uns genauere Vorstellungen vom Aufbau einer solchen Zone zu machen.

In der vorliegenden Abhandlung sind die beiden Grenzfälle: reines Strahlungsgleichgewicht und reines Konvektionsgleichgewicht, betrachtet.

Die untersuchten Modellatmosphären sind durch die folgende Wahl der Parameter T_0 und g , die Grenztemperatur und die Schwerebeschleunigung, charakterisiert:

$$\begin{array}{rcccl} \theta_0 = \frac{5040}{T_0} = & 1,041 & 1,041 & 0,700 \\ \log g = & 4,44 & 3,00 & 4,20 \end{array}$$

Die drei Modelle entsprechen der Sonne, einem gelben Riesenstern und einem A 5-Stern der Hauptserie.

Man kann zur Zeit nicht Modellatmosphären für beliebige Sterne durchrechnen. In den Sternen mit wesentlich tieferer Temperatur als die der Sonne wird die Absorption der chemischen Verbindungen sich geltend machen und in den Sternen mit hohen effektiven Temperaturen die Streuung an freien Elektronen.

Die Untersuchung ist in drei Abschnitte geteilt. In dem ersten Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen Temperatur, Elektronendruck, Gasdruck und Opazitätskoeffizient, im nächsten der Aufbau der Atmosphären im Strahlungsgleichgewicht und im dritten der Aufbau der Konvektionszonen im Zustand von Konvektionsgleichgewicht behandelt.

2. Der Vorgang bei der Berechnung der Tabellen der Opazität als Funktion von Druck und Temperatur ist der von B. STRÖMGREN [4] angegebene:

Man berechnet erst Tabellen von der gesamten Opazität und vom Gasdruck als Funktion von Temperatur und Elektronendruck und kombiniert dann die beiden Tabellen in eine. Diese resultierende Tabelle gibt den Opazitätskoeffizienten als Funktion von Gesamtdruck (Gasdruck) und Temperatur.

Die Tabellen 3, 4 und 5 sind abgekürzte Beispiele dieser Tabellen. Die resultierenden Tabellen sind für vier verschiedene Mischungsverhältnisse zwischen Wasserstoff und Metallen berechnet worden. Der Logarithmus der Anzahl A der Wasserstoffatome pro Metallatom ist in den vier Fällen bzw. 3,0, 3,4, 3,8 und 4,2 und die festen Mischungsverhältnisse der Metallatome sind die folgenden:

Wirkung besteht teilweise in einer Bremsung der Konvektionsströmungen und teilweise darin, daß die verschiedenen Absorptionskoeffizienten in den Gebieten mit auf- und abwärtsgerichteten Strömungen verschieden große Strahlungsströme hervorrufen. [Nach Referaten in V. J. S. 76, 4 (P. TEN BRUGGENCATE, K. O. KIEPENHEUER).]

Mg 0,30, Si 0,33, Fe 0,30, Ca 0,02, Al 0,03, Na 0,02.

Das mittlere Atomgewicht der Metalle ist 35,3.

Ein wesentlicher Punkt ist es, daß A so groß ist, daß die Anzahl und die Absorption der Metallatome im Vergleich zur Anzahl und zur Absorption der Wasserstoffatome vernachlässigt werden kann. Dagegen kann die Zahl der freien „Metallelektronen“ sehr wohl die der freien „Wasserstoffelektronen“ übersteigen.

Tabelle 1.

θ	$\bar{\kappa}_H$	$\bar{\kappa}_{H^-}$	θ	$\bar{\kappa}_H$	$\bar{\kappa}_{H^-}$	θ	$\bar{\kappa}_H$	$\bar{\kappa}_{H^-}$
0,20	4,47		0,42	2,48	6,95	0,64	0,00	7,11
0,22	4,26		0,44	2,30	6,97	0,66	- 0,25	7,12
0,24	4,06		0,46	2,09	6,99	0,68	- 0,50	7,13
0,26	3,88		0,48	1,88	7,01	0,70	- 0,75	7,13
0,28	3,70		0,50	1,66	7,03			
0,30	3,52	6,68	0,52	1,44	7,05	0,80	- 2,00	7,15
0,32	3,35	6,75	0,54	1,21	7,06			
0,34	3,19	6,81	0,56	0,97	7,08	0,90	- 3,24	7,15
0,36	3,02	6,85	0,58	0,73	7,09			
0,38	2,84	6,88	0,60	0,49	7,10	1,00	- 4,49	7,16
0,40	2,66	6,92	0,62	0,24	7,11			

Die Tabelle gibt den Opazitätskoeffizienten $\bar{\kappa}_H$ und $\bar{\kappa}_{H^-}$ pro Gramm/cm² als Funktion von θ .

Tabelle 2.

$\log \left(\frac{\bar{\kappa}_{H^-}}{\bar{\kappa}_H} \right)$	$\theta = 0,4$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
- 0,8	0,08	0,10	0,12	0,11	0,11	0,10	
- 0,4	0,17	0,20	0,23	0,22	0,22	0,21	
0,0	0,33	0,36	0,40	0,41	0,40	0,39	
+ 0,4	0,56	0,60	0,64	0,65	0,65	0,64	
+ 0,8	0,88	0,90	0,92	0,94	0,95	0,95	0,94

Die Tabelle gibt $\log \left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}_H} \right)$ als Funktion von θ und $\log \left(\frac{\bar{\kappa}_{H^-}}{\bar{\kappa}_H} \right)$.

Tabelle 3.

θ	$\log P_e = - 2,0$	- 1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0,2						3,30	4,30	
0,3			0,30	1,30	2,30	3,30	4,30	5,32
0,4			0,30	1,30	2,30	3,31	4,39	5,81
0,5			0,30	1,31	2,34	3,57	5,29	
0,6			0,31	1,42	2,91	4,79		
0,7			0,61	2,36	4,29	6,08		
0,8	- 1,58	- 0,07	1,81	3,71	5,29			
0,9	- 0,66	1,27	3,05	4,38	5,61			
1,0		0,67	2,24	3,41	4,57			

Die Tabelle gibt für $\log A = 3,4 \log P_g$ als Funktion von θ und $\log P_e$.

Tabelle 4.

θ	$\log P_e = -2,0$	$-1,0$	$0,0$	$1,0$	$2,0$	$3,0$	$4,0$	$5,0$
0,2							0,65	1,65
0,3			- 2,50	- 1,50	- 0,50	0,50	1,50	2,46
0,4			- 1,69	- 0,69	0,31	1,29	2,16	2,65
0,5			- 1,10	- 0,11	0,83	1,49	1,84	
0,6			- 0,75	0,08	0,53	0,93		
0,7			- 0,89	- 0,55	0,05	0,88		
0,8		- 1,97	- 1,56	- 0,84	0,09	1,09		
0,9	- 3,07	- 2,51	- 1,68	- 0,71	0,29			
1,0	- 3,42	- 2,51	- 1,52	- 0,52				

Die Tabelle gibt für $\log A = 3,0, 3,4, 3,8$ und $4,2 \log \bar{\kappa}$ (ohne Streuung) als Funktion von θ und $\log P_e$.

Tabelle 5.

θ	$\log P_g = 2,0$	$3,0$	$4,0$	$5,0$	$6,0$
0,2			0,35	1,35	
0,3	- 0,80	0,20	1,20	2,17	
0,4	0,01	0,99	1,88	2,44	2,68
0,5	0,54	1,26	1,60	1,79	2,00
0,6	0,30	0,55	0,76	1,00	
0,7	- 0,62	- 0,37	- 0,06	0,33	0,83
0,8		- 1,13	- 0,69	- 0,11	0,63
0,9		- 1,71	- 1,02	- 0,19	
1,0		- 1,89	- 1,00		

Die Tabelle gibt für $\log A = 3,4 \log \bar{\kappa}$ (ohne Streuung) als Funktion von θ und $\log P_g$.

Der Absorptionskoeffizient der negativen Wasserstoffionen ist der von MASSEY und BATES [5] angegebene mit der Abänderung, daß er hier auf der langwelligen Seite des Maximums als konstant betrachtet ist. Hierdurch entgeht man der Schwierigkeit bei der Berechnung des Opazitätskoeffizienten, daß der Absorptionskoeffizient in einem Intervall gleich Null ist, und man berücksichtigt gewissermaßen die Absorption durch die sogenannten „frei-frei“-Übergänge der Elektronen an neutrale Wasserstoffatome.

Die Tabelle 1 gibt den Opazitätskoeffizienten $\bar{\kappa}_H$ des neutralen Wasserstoffs und $\bar{\kappa}_{H-}$ der negativen Wasserstoffionen als Funktion von $\theta = \frac{5040}{T}$. $\bar{\kappa}_H$ ist nach dem gewöhnlichen Schema berechnet. $\bar{\kappa}_{H-}$ ist mittels numerischer Quadratur gefunden. (Nur für θ gleich 0,4, 0,5, 0,6, . . . , 1,0. Die übrigen Werte sind graphisch interpoliert bzw. extrapoliert.)

Nach der Methode von B. STRÖMGREN ist dann eine Additionstabelle berechnet worden, die $\log (\bar{\kappa}/\bar{\kappa}_H)$ als Funktion von $\log (\bar{\kappa}_{H-}/\bar{\kappa}_H)$ und θ gibt (Tabelle 2). $\bar{\kappa}$ bezeichnet hier den totalen Absorptionskoeffizienten.

Die Absorption der Metalle ist vernachlässigt ebenso wie die Streuung an den freien Elektronen. Dies ist in Tabelle 6 aufgetragen, und man sieht, daß es in gewissen Gebieten $\bar{\kappa}$ übersteigt. Man kann es jedoch nicht in einer Tabelle mit $\bar{\kappa}$ vereinigen, weil Streuung und Absorption nur im thermodynamischen Gleichgewicht in demselben Sinne wirken. Wo man Streuung und Absorption von neutralem Wasserstoff addieren muß, kann man die Additionstabelle von B. STRÖMGREN [4] benutzen, die ja mit einem frequenzunabhängigen „Absorptionskoeffizienten der negativen Wasserstoffionen“ berechnet ist.

Tabelle 6.

θ	$\log P_g = 2,0$	3,0	4,0	5,0
0,2	- 0,40	- 0,40	- 0,40	- 0,40
0,3	- 0,40	- 0,40	- 0,40	- 0,42
0,4	- 0,40	- 0,41	- 0,48	- 0,77
0,5	- 0,44	- 0,62	- 1,03	- 1,52

Die Tabelle gibt den Logarithmus des Streukoeffizienten s , der in diesem θ -log P -Gebiet von log A [$> 3,0$] unabhängig ist.

Die resultierenden Tabellen erwiesen sich als mit denen B. STRÖMGRENS so nahe übereinstimmend, daß sie im Intervall von θ gleich 1,04 bis 0,7 mit Hilfe dieser Tabellen unschwer auf das Intervall 0,02 in θ interpoliert werden konnten. Für $\theta < 0,7$ wurden sie mit dem Intervall von 0,02 in θ und für alle Werte von θ mit dem Intervall 0,2 in log P_g berechnet. (In den Tabellen bezeichnet P_g und P_e überall den gesamten Gasdruck bzw. den Elektronendruck.)

Bei den Ionisierungsrechnungen ist es überall angenommen (1), daß man in SAHAS Formel die Zustandssumme zu ihrem ersten Glied, nämlich dem statistischen Gewicht des Grundzustandes, reduzieren kann. Weiter ist es angenommen (2), daß die Stoffmischung sich wie ein ideales Gas (ohne Degeneration) verhält, so daß der gesamte Gasdruck sich zum Elektronendruck wie die totale Anzahl von Partikeln zur Zahl der Elektronen verhält. Schließlich (3) ist der Absorptionskoeffizient des neutralen Wasserstoffs, der eigentlich pro Atom im Grundzustand angegeben ist [6], als Absorptionskoeffizient pro Atom angewandt. Wie große Wirkungen diese drei Vernachlässigungen auf die Berechnung des Aufbaues der Sternatmosphären haben werden, können wir am besten in Verbindung mit den im nächsten Abschnitt besprochenen Ergebnissen diskutieren.

3. Die Differentialgleichung, die den Aufbau einer ebenen Sternatmosphäre bestimmt, lautet (Unsöld 39, 1)

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\bar{\kappa}}. \quad (1)$$

Hier bezeichnet P den Gesamtdruck, τ die optische Tiefe, g die Schwerebeschleunigung und $\bar{\kappa}$ den Opazitätskoeffizienten. Die optische Tiefe τ ist mit der Temperatur $T = \frac{5040}{\theta}$ durch die folgende Gleichung verbunden:

$$\theta_0^4 = \theta^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right), \quad (2)$$

wo θ_0 der Grenzwert von θ ist. $\theta_0 = \frac{5040}{T_0}$.

Die Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{d\tau}{d \log P} = \frac{P \cdot \bar{\kappa}}{g \log e}$$

(e ist die Grundzahl der natürlichen Logarithmen).

Dies ist die hier allein angewandte Form der Gleichung. P ist in den Rechnungen durchweg gleich dem Gasdruck gesetzt worden. Eine Untersuchung der gefundenen Atmosphärenmodelle zeigt sofort, daß die Abweichung P 's von P_g höchstens einige Prozent ausmacht.

In erster Näherung setzt man θ gleich θ_0 . Die Opazitätstabelle zeigt, daß, wenn P_g genügend klein gewählt ist, das Integral von $P_g \cdot \bar{\kappa} \cdot d \log P_g$ konvergiert, wenn man vom Anfangspunkt nach *außen* integriert.

Im Laufe der Integration von denjenigen Atmosphärenmodellen, deren Parameter in der Einleitung angegeben sind, wurde die Intervalllänge (in $\log P_g$) von 0,2 oder 0,1 in den äußersten Schichten bis zu 0,002 oder 0,001 und wieder zurück auf etwa 0,05 geändert. Obwohl die Opazitätstabellen für die vier Werte von $\log A$: 3,0, 3,4, 3,8 und 4,2 berechnet sind, sind nur die drei letzten bei den Integrationen angewandt, weil es sich inzwischen [4] gezeigt hatte, daß $\log A$ gleich 3,9 den wahrscheinlichsten Wert für die Sonnenatmosphäre darstellte.

Für die anderen hier betrachteten Sterne ist $\log A$ noch unbekannt. Sollte es sich zeigen, daß es etwa für A-Sterne einen Wert hat, der viel von dem der Sonne abweicht, wird seine genaue Größe doch ohne Bedeutung für den Aufbau der Atmosphäre des Sterns sein, weil der Wasserstoff hier bereits in den oberen Schichten der Atmosphäre den größten Teil der freien Elektronen liefern wird.

Aus demselben Grunde ist das Atmosphärenmodell mit $\theta_0 = 0,7$ nur mit einem Wert von $\log A$, nämlich 3,8, integriert worden, weil hier bereits kein wesentlicher Unterschied zwischen den Opazitätstabellen mehr vorhanden ist.

Die Integration der Atmosphärenmodelle mit $\theta_0 = 1,041$ wurde bis $\theta = 0,2$ fortgesetzt. Nur in einem Falle wurde die totale Zone der Konvektionsinstabilität nicht ganz von den Rechnungen umfaßt. Das Modell mit $\theta_0 = 0,7$ wurde bis $\theta = 0,28$ integriert.

Tabelle 7.

$\log P_g$	θ	$\log \bar{x}$	$\log P_g$	θ	$\log \bar{x}$	$\log P_g$	θ	$\log \bar{x}$
3,50	1,041	- 1,42	3,60	1,041	- 1,67	3,80	1,041	- 1,76
3,60	1,040	1,32	3,70	1,040	1,58	3,90	1,040	1,68
3,70	1,039	1,24	3,80	1,040	1,49	4,00	1,040	1,61
3,80	1,038	1,16	3,90	1,039	1,41	4,10	1,039	1,54
3,90	1,036	1,08	4,00	1,038	1,32	4,20	1,038	1,47
4,00	1,034	0,99	4,10	1,036	1,24	4,30	1,036	1,39
4,10	1,031	0,91	4,20	1,034	1,15	4,40	1,033	1,31
4,20	1,025	0,82	4,30	1,029	1,07	4,50	1,029	1,22
4,30	1,016	0,74	4,40	1,023	0,98	4,60	1,021	1,13
4,40	1,003	0,66	4,50	1,013	0,90	4,70	1,010	1,05
4,50	0,985	0,58	4,60	1,000	0,82	4,80	0,995	0,97
4,60	0,962	0,50	4,70	0,980	0,74	4,90	0,973	0,88
4,70	0,930	0,44	4,80	0,954	0,66	5,00	0,945	0,78
4,80	0,893	0,36	4,90	0,922	0,57	5,10	0,906	0,63
4,90	0,847	0,26	5,00	0,880	0,46	5,20	0,846	- 0,38
5,00	0,789	- 0,07	5,10	0,822	- 0,25			
						5,30	0,723	+ 0,30
5,10	0,696	+ 0,40	5,20	0,721	+ 0,28	5,31	0,700	0,43
5,11	0,680	0,51	5,21	0,704	0,38	5,32	0,671	0,63
5,12	0,663	0,61	5,22	0,685	0,50	5,33	0,635	0,86
5,13	0,644	0,74	5,23	0,662	0,65	5,34	0,586	1,13
5,14	0,621	0,89	5,24	0,633	0,84	5,35	0,500	1,85
5,15	0,589	1,12	5,25	0,596	1,11	5,36	0,328	2,64
5,16	0,548	1,44	5,26	0,539	1,53	5,37	0,279	2,36
5,17	0,477	1,99	5,27	0,428	2,37	5,38	0,261	2,23
5,18	0,361	2,60	5,28	0,313	2,50	5,39	0,251	2,16
5,19	0,308	2,39	5,29	0,283	2,31	5,40	0,242	2,10
5,20	0,289	2,27	5,30	0,268	2,20			
						5,50	0,205	+ 1,89
5,30	0,232	1,91	5,40	0,220	1,92			
5,40	0,209	1,83	5,50	0,198	+ 1,83			
5,50	0,195	+ 1,81						

Die Tabelle zeigt den Aufbau der Sonnenatmosphäre ($\theta_0 = 1,041$, $\log g = 4,44$), wenn Strahlungsgleichgewicht vorhanden ist, und zwar für $\log A = 3,4$, $3,8$ bzw. $4,2$.

Die Eigenschaften der Atmosphärenmodelle sind durch die Tabellen 7, 8 und 9 charakterisiert.

Es zeigt sich sofort, daß man sich überall im Gebiet des idealen Gases befindet. Weiter zeigt es sich, daß der Wasserstoff bei $\theta < 0,3$, wo die Zustandssumme praktisch zu divergieren beginnt, fast vollständig ionisiert ist.

Daß die Größe der Zustandssumme dann ohne Bedeutung für das Verhältnis zwischen Elektronendruck und totalem Gasdruck ist, sieht man folgendermaßen ein:

Der Druck von neutralen Wasserstoffatomen, Ionen und Elektronen sei gleich P_A , P_e bzw. P_e , die Zustandssumme u , die Ionisierungsspannung Z und die Temperatur T .

Wir haben dann:

$$\log \left[\frac{P_e}{P_A} \cdot P_e \right] = -\chi \cdot \theta + \frac{5}{2} \log T - 0,48 + \log \frac{1 \cdot 2}{u}. \quad (3)$$

Wenn θ gleich 0,2 ist, ist $T = 25200^{\circ}$ und $\log T = 4,40$; $\frac{5}{2} \log T = 11,00$, $\chi \cdot \theta = 13,54 \cdot 0,2 = 2,71$:

$$2 \log P_e - \log P_A = 8,11 - \log u.$$

Setzt man $\log P_e = \log P_g - 0,30$, bekommt man

$$2 \log P_g - \log P_A = 8,71 - \log u.$$

Tabelle 8.

$\log P_g$	θ	$\log \bar{\kappa}$	$\log P_g$	θ	$\log \bar{\kappa}$	$\log P_g$	θ	$\log \bar{\kappa}$
3,00	1,039	- 1,87	3,00	1,040	- 2,15	3,00	1,041	- 2,30
3,10	1,038	1,78	3,10	1,040	2,07	3,10	1,040	2,23
3,20	1,036	1,69	3,20	1,039	1,99	3,20	1,039	2,17
3,30	1,033	1,60	3,30	1,037	1,91	3,30	1,038	2,10
3,40	1,028	1,52	3,40	1,034	1,83	3,40	1,037	2,04
3,50	1,020	1,42	3,50	1,030	1,75	3,50	1,034	1,98
3,60	1,008	1,34	3,60	1,025	1,67	3,60	1,031	1,91
3,70	0,992	1,28	3,70	1,016	1,59	3,70	1,026	1,84
3,80	0,969	1,20	3,80	1,004	1,50	3,80	1,019	1,76
3,90	0,941	1,13	3,90	0,986	1,42	3,90	1,008	1,68
4,00	0,904	1,02	4,00	0,961	1,32	4,00	0,993	1,61
4,10	0,855	0,86	4,10	0,927	1,21	4,10	0,971	1,49
			4,20	0,880	1,01	4,20	0,940	1,34
4,20	0,778	0,48				4,30	0,889	1,08
4,21	0,766	0,40	4,30	0,794	0,56			
4,22	0,754	0,32	4,31	0,780	0,48	4,40	0,776	0,41
4,23	0,738	0,23	4,32	0,764	0,37	4,41	0,754	0,27
4,24	0,722	- 0,13	4,33	0,746	0,25	4,42	0,726	- 0,10
4,25	0,701	+ 0,03	4,34	0,724	- 0,11	4,43	0,688	+ 0,17
4,26	0,673	0,23	4,35	0,696	+ 0,08	4,44	0,632	0,58
4,27	0,637	0,50	4,36	0,656	0,37	4,45	0,467	1,94
4,28	0,575	1,02	4,37	0,590	0,91	4,46	0,314	1,77
4,29	0,400	2,09	4,38	0,375	2,11	4,47	0,289	1,58
4,30	0,330	1,74	4,39	0,315	1,70	4,48	0,276	1,49
			4,40	0,295	1,56	4,49	0,267	1,42
4,40	0,253	1,21				4,50	0,260	1,37
4,50	0,229	1,12	4,50	0,239	1,19			
4,60	0,212	1,08	4,60	0,218	1,13	4,60	0,224	1,17
4,70	0,199	+ 1,06	4,70	0,201	+ 1,08	4,70	0,204	+ 1,10

Die Tabelle zeigt — analog Tabelle 7 — den Aufbau der Riesensternatmosphäre ($\theta_0 = 1,041$, $\log g = 3,00$).

Wenn wir beispielsweise das Modell mit $\log A = 3,8$ und $\log g = 3,00$ betrachten, ist $\log P_g$ gleich 4,70. $\log P_A$ ist dann gleich $0,69 + \log u$. u ist von der Größenordnung 5–10. (Der mittlere Abstand zwischen den Atomen und Ionen ist etwa 500 Å.)

Tabelle 9.

$\log P_g$	θ	$\log \bar{\kappa}$	$\log P_g$	θ	$\log \bar{\kappa}$
2,00	0,700	- 0,62	3,90	0,496	1,60
2,20	0,700	0,58	3,91	0,473	1,75
2,40	0,699	0,53	3,92	0,448	1,86
2,60	0,699	0,47	3,93	0,425	1,90
2,80	0,697	0,39	3,94	0,407	1,85
3,00	0,694	0,32	3,95	0,392	1,80
3,20	0,690	0,23	3,96	0,382	1,77
3,40	0,680	- 0,09	3,97	0,374	1,73
			3,98	0,366	1,70
3,60	0,660	+ 0,13	3,99	0,358	1,66
3,70	0,641	0,31	4,00	0,353	1,63
3,80	0,604	0,67			
			4,10	0,317	1,45
			4,20	0,296	1,38
			4,30	0,278	1,33

Die Tabelle zeigt den Aufbau der Sternatmosphäre mit $\theta_0 = 0,7$ und $\log g = 4,20$.

Ganz gleichgültig, ob wir u mitnehmen oder nicht, ist P_A also im Vergleich mit P_e zu vernachlässigen. Es führt also zu keinem Widerspruch, wenn man P_g gleich $2 \cdot P_e$ setzt.

Daß man, wenn man den Opazitätskoeffizienten pro Atom im Grundzustand benutzt hat (Annahme 3), in diesem Gebiet gerade die Zustandssumme vernachlässigen muß, zeigt die folgende Überlegung:

Von der Anzahl, n_A , der nichtionisierten Wasserstoffatome ist der Bruchteil $2/u$ im Grundzustand. Wir haben also einen $u/2$ -mal zu großen Opazitätskoeffizienten benutzt. Umgekehrt sieht man aber (siehe das Beispiel oben), daß man, wenn man n_A ohne Berücksichtigung der Zustandssumme ausrechnet, eine $u/2$ -mal zu kleine Zahl bekommt. Ob man aber eine $u/2$ -mal zu kleine Zahl von Atomen einem $u/2$ -mal zu großen Opazitätskoeffizienten zuschreibt oder mit den richtigen Zahlen rechnet, ist ja gleichgültig.

Die integrierten Atmosphärenmodelle können also als recht genau betrachtet werden.

Der nächste Schritt ist die Untersuchung der Stabilität der Atmosphärenmodelle.

UNSOULD hat (93, 18) für den adiabatischen Gradienten einen Formel Ausdruck gegeben, welcher gilt, wenn man eine Mischung von gasförmigen Stoffen hat, wo nur der Ionisationsgrad eines Elements sich ändert. Zu diesem Element, das wir hier mit Wasserstoff identifizieren werden, gehört ein Bruchteil ν_1 der Atome. $1 - \nu_1$ ist gleich ν_2 . Ist der Ionisationsgrad vom

Wasserstoff x_1 , und der konstante mittlere Ionisationsgrad von den anderen Stoffen x_2 , wird der mittlere Ionisationsgrad $\bar{x} = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2$. Die Ionisationsenergie des Wasserstoffs ist gleich χ_1 .

Wenn man von den angeregten Atomen absehen kann, ist der adiabatische Gradient (UNSOELD 93, 18):

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{ad} = \left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{ad} = \frac{\left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1 - x_1)} + \frac{\nu_1}{\bar{x}}\right) + \nu_1 \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)}{\frac{5}{2} \left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1 - x_1)} + \frac{\nu_1}{\bar{x}}\right) + \nu_1 \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)^2}. \quad (4)$$

In unserem Falle ist $\nu_1 = \frac{A}{A+1} \sim 1$. \bar{x} ist nur von x_1 in dem Gebiet verschieden, wo x_1 kleiner oder von derselben Größe ist als $x_2 \nu_2 \sim \nu_2 \sim \frac{1}{A}$. In den getrennten Gebieten, die die Konvektionszonen begrenzen, ist es möglich, die oben angeführte Formel in verschiedener Weise zu vereinfachen.

In den Atmosphären mit $\theta_0 = 1,041$ zeigt es sich, daß x_1 an der äußeren Grenze der Konvektionszone so klein ist, daß $1 - x_1 \sim 1$ und $1 + \bar{x} \sim 1$. Man hat dann:

$$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{ad} = \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{\bar{x}}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)}{\frac{5}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{\bar{x}}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)^2}. \quad (5)$$

$\log P_e$ kann man mit Hilfe der Tabellen des Zusammenhanges zwischen θ , P_e und P_g finden. P_e ist in diesen Gebieten so klein im Vergleich mit P_g , daß \bar{x} mit großer Genauigkeit als P_e/P_g gesetzt werden kann. Mit derselben Genauigkeit kann man x_1 gleich $\frac{x_1}{1 - x_1}$, d. h. gleich der Größe, die man aus SAHAS Formel erhält, setzen.

An den tieferen Grenzen der Konvektionszonen kann man \bar{x} gleich x_1 (gleich x) setzen. Wir bekommen dann die folgende Formel (UNSOELD 93, 19):

$$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{ad} = \frac{2 + x(1 - x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)}{5 + x(1 - x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)^2}, \quad (6)$$

An den tieferen Grenzen der Konvektionszonen zeigt es sich übrigens, daß P_e gleich $\frac{1}{2} P_g$ ist.

θ ist so definiert, daß $\log(e^{-\chi_1/kT}) = -\theta \cdot \chi_1$ (Volt) $= \log e \left(-\frac{\chi_1}{kT}\right)$.

Also ist $\frac{\chi_1}{kT} = \frac{\chi_1 \text{ (Volt)}}{\log e} \cdot \theta = \frac{13,54}{0,4343} \cdot \theta = 31,18 \cdot \theta$.

Daß die Formel (4) unter der Voraussetzung hergeleitet ist, daß die angeregten Zustände zu vernachlässigen sind, hat in den hier betrachteten

Fällen keine große Einwirkung auf die Resultate. An der äußeren Grenze der Konvektionszone ist die Anzahl der angeregten Atome klein wegen der niedrigen Temperatur. An der tieferen Grenze der Konvektionszone ist sie klein, weil hier die Mehrzahl der Atome vollständig ionisiert ist. Weiter hat die $\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{ad}$ -Kurve in der Nähe der Schnittpunkte meist eine sehr kleine Neigung im Vergleich mit der $\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{str}$ -Kurve, so daß eine kleine Verschiebung der adiabatischen Kurve von kleiner Bedeutung für die Festlegung der Konvektionsgrenzen sein dürfte.

$\left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{str}$ findet man leicht aus den Größen, die im Rechenschema der numerischen Integration eingehen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{str} &= -\frac{d \log \theta}{d \log P} = -\frac{d \log \theta}{d \tau} \cdot \frac{d \tau}{d \log P} = -\frac{d \theta \cdot \log e}{\theta \cdot d \tau} \cdot \frac{\bar{\kappa} \cdot P}{g \cdot \log e} \\ &= -\frac{P \cdot \bar{\kappa}}{\theta \cdot g} \cdot \frac{d \theta}{d \tau} = -\frac{P \cdot \bar{\kappa}}{\theta \cdot g} \cdot \left(-\frac{3}{8} \cdot \frac{\theta^5}{\theta_0^5}\right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{P \cdot \bar{\kappa}}{g \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß, wenn die Atmosphäre eine äußere Grenze hat, Strahlungsgleichgewicht dort herrschen wird, denn wir sahen (S. 259), daß $P \cdot \bar{\kappa}$ (proportional $\frac{d \tau}{d \log P}$) und auch das Integral gleich τ mit P gegen Null ging.

Die Tabelle 10 gibt die Grenzen der Konvektion in den Atmosphärenmodellen und zugleich die Temperatur, den Druck, die optische Tiefe und den Gradienten an den Grenzen an.

Man sieht, daß die Konvektion in den Sternen mit θ_0 gleich 1,041 erst in einer so großen Tiefe beginnt, daß es wohl keinen Einfluß auf die berechneten Linienstärken haben wird, ob man von hier mit Konvektionsgleichgewicht rechnet.

Die Größe des Balmer-Sprunges wird, wie die noch unpublizierten Rechnungen K. A. THERNÖES zeigen, bei den A-Sternen vom Zustand in den optischen Tiefen bis etwa 5 stark beeinflusst. Diese Schichten liegen fast ganz innerhalb der Konvektionszone.

Die Berechnung der geometrischen Dicke der Konvektionszonen verläuft wie folgt:

Wenn h die Tiefe in der Atmosphäre von einem gewissen Niveau aus bezeichnet, ist (vgl. UNSÖLD 39, 9)

$$dh = \frac{\text{const.}}{g \cdot \theta \cdot \mu} d \log P_g. \quad (8)$$

μ ist das mittlere Molekulargewicht.

Wenn man mit μ_M das mittlere Molekulargewicht der Metalle und mit μ_W das des Wasserstoffs bezeichnet, bekommt man, wenn man die Metalle als vollständig einmal ionisiert betrachtet:

$$\mu = \frac{\mu_W + \frac{1}{A} \cdot \mu_M}{1 + x_1 + \frac{1}{A}} = \frac{\mu_0}{1 + \bar{x}}$$

mit

$$\mu_0 = \frac{\mu_W + \frac{1}{A} \cdot \mu_M}{1 + \frac{1}{A}} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \frac{1}{A}}{1 + \frac{1}{A}}. \quad (9)$$

Wenn man den „Wasserstoff“ als reinen Wasserstoff betrachtet, ist $\mu_W = 1,0078$. Mit $\mu_M = 35,3$ (S. 256) wird μ_0 für $\log A$ gleich 3,4, 3,8 und 4,2 bzw. gleich 1,02, 1,013 und 1,01. Mit diesem μ_W -Wert bekommt man also eine maximale Dicke der Konvektionszone.

Der „Wasserstoff“ besteht jedoch teilweise aus Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenstoff. Das Vorhandensein dieser Stoffe ändert die Ionisationsenergie des „Wasserstoffs“ sehr wenig. (Ihre Ionisationsspannungen in Volt sind bzw. 13,55, 14,48 und 11,22). Man kann für jede Beimischung von diesen drei Elementen eine Approximation der gesamten Dicke der Konvektionszone bekommen, indem man die hier gefundenen mit der Größe μ_0/μ_* multipliziert, wo μ_* das neue mittlere Molekulargewicht ist.

Die Auswertung von \bar{x} wird sehr erleichtert durch die im nächsten Abschnitt näher besprochenen Tabellen, die u. a. den Zusammenhang zwischen \bar{x} und $\frac{x_1}{1-x_1} \cdot \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}}$ geben. Diese letzte Größe ersetzt $\frac{x_1}{1-x_1}$ in SAHAS Gleichung, wenn man mit totalem Gasdruck statt Elektronendruck rechnet.

Die totalen Dicken der Konvektionszonen sind in Tabelle 10 angeführt. Die angeführte dritte Dezimale dürfte unsicher sein. Wenn man den drei Sternen plausible Radien zuschreibt, findet man, daß diese Konvektionszonen in allen drei Sternen von der Größenordnung $10/100$ vom Radius sind.

Wir haben also keinen großen Fehler begangen, wenn wir in allen Fällen mit konstantem g gerechnet haben.

UNSÖLD gibt die Dicke der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne zu etwa 500 km an. Man sieht also (besonders wenn man das Vorhandensein von O, N und C betrachtet), daß die Berücksichtigung der negativen Wasserstoffionen keine wesentliche Änderung in der Größenordnung der Wasserstoffkonvektionszonen mit sich führt.

Tabelle 10.

log A =	log g = 4,44 v ₀ = 1,041			log g = 3,00 v ₀ = 1,041			log g = 4,20 v ₀ = 0,700
	3,4	3,8	4,2	3,4	3,8	4,2	3,8
Obere Grenze:							
θ.....	0,790	0,816	0,846	0,830	0,854	0,876	0,646
log P _g	5,00	5,11	5,20	4,14	4,24	4,32	3,67
τ.....	1,35	1,10	0,86	0,98	0,80	0,67	0,25
$\frac{d \log T}{d \log P}$	0,38	0,39	0,39	0,37	0,38	0,39	0,14
Untere Grenze:							
θ.....	0,210	0,200	—	0,234	0,222	0,214	0,312
log P _g	5,40	5,49	—	4,48	4,58	4,65	4,13
τ.....	400	500	—	260	325	375	16
$\frac{d \log T}{d \log P}$	0,39	0,39	—	0,39	0,40	0,40	0,33
Dicke der K.-Z. in km	722	727	—	15 600	16 800	17 400	990

Die Tabelle zeigt den physikalischen Zustand an den Grenzen der Konvektionszonen und die Dicke der Konvektionszonen.

4. Für die drei Modelle mit log A gleich 3,8 ist die Differentialgleichung (vgl. S. 263)

$$\frac{d \log T}{d \log P} = \frac{\left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1 - x_1)} + \frac{1}{\bar{x}}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)}{\frac{5}{2} \left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1 - x_1)} + \frac{1}{\bar{x}}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)^2}$$

numerisch integriert worden mit den Ausgangswerten von T und P, die durch die eben gefundenen oberen Grenzen der Konvektionszonen bestimmt sind.

Es ist zweckmäßig, den Bruch so zu schreiben:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \bar{x} + \frac{x_1(1 - x_1)}{\bar{x}}\right) + x_1(1 - x_1) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)}{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \bar{x} + \frac{x_1(1 - x_1)}{\bar{x}}\right) + x_1(1 - x_1) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT}\right)^2}, \quad (10)$$

denn er geht dann mit wachsendem x_1 direkt in Formel (6) über.

Als Hilfstabelle wurde eine Tabelle vom Zusammenhang zwischen x_1 , \bar{x} , $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \bar{x} + \frac{x_1(1 - x_1)}{\bar{x}}\right)$ und $\log \left(\frac{x_1}{1 - x_1} \cdot \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}}\right)$ berechnet. In diesen Rechnungen ist $\bar{x} = x_1 + \frac{1}{A}$ als eine zweckmäßige Approximation gesetzt.

Die gefundenen adiabatischen $\log P - \log T$ -Abhängigkeiten sind in der Tabelle 11 gegeben. Die Integration der Differentialgleichung dürfte wegen der Symmetrieeigenschaften des Formelausdrucks (10) ziemlich sicher sein. Eine Unbestimmtheit in x_1 hat keinen Einfluß auf $\frac{d \log T}{d \log P}$, wenn entweder das erste oder das letzte Glied des Zählers und Nenners zu vernachlässigen ist, d. h. wenn x_1 nahe an 1 oder 0 ist.

Tabelle 11.

$\log g = 4,44, \vartheta_0 = 1,041$		$\log g = 3,00, \vartheta_0 = 1,041$		$\log g = 4,20, \vartheta_0 = 0,700$	
$\log P$	$\log T$	$\log P$	$\log T$	$\log P$	$\log T$
5,11	3,79	4,24	3,77	3,67	3,89
5,50	3,92	4,50	3,86	4,00	3,93
6,00	4,02	5,00	3,96	4,50	3,99
6,50	4,10	5,50	4,03	5,00	4,04
7,00	4,17	6,00	4,09	5,50	4,09
7,50	4,24	6,50	4,15	6,00	4,14
8,00	4,31	7,00	4,21	6,50	4,20
8,50	4,40	7,50	4,28	7,00	4,26
9,00	4,49	8,00	4,35	7,50	4,33
9,50	4,60	8,50	4,44	8,00	4,41
10,00	4,73	9,00	4,55	8,50	4,52
10,50	4,89	9,50	4,67	9,00	4,66
11,00	5,07	10,00	4,83	9,50	4,83
11,50	5,26	10,50	5,01	10,00	5,02
12,00	5,45	11,00	5,20	10,50	5,22
12,50	5,65	11,50	5,40		

Die Tabelle gibt den adiabatischen Zusammenhang zwischen $\log P$ und $\log T$ in den Konvektionszonen der drei Sternatmosphären mit $\log A = 3,8$.

Die Kurven in der $\log P - \log T$ -Ebene haben sehr nahe denselben Verlauf wie die Kurven **BIERMANN'S**. Ihnen entsprechen doch nicht dieselben Atmosphärenparameter wie bei **BIERMANN**, weil in den zwei Fällen ganz verschiedene Atmosphärenabsorptionskoeffizienten benutzt sind.

Man kann also, wenn man mit Konvektionsgleichgewicht rechnet, im ganzen die Folgerungen **BIERMANN'S** bestätigen. Man muß jedoch mit **BIERMANN** eine Reihe von vernachlässigten Effekten mit Rücksicht auf ihre Einwirkung auf den Verlauf der $\log P - \log T$ -Kurven näher untersuchen [3].

Wenn man diese Kurven zu ganzen Sternmodellen vervollständigen will, muß man noch einen Parameter, zum Beispiel den Sternradius, einführen. Dann ist die Leuchtkraft und die Masse durch ihn und T_0 bzw. g bestimmt. Die geometrische Tiefe kann man mittels Formel (8) berechnen, wenn man die Variation von g berücksichtigt.

Um in diesem Falle die untere Grenze der Konvektionszone zu bestimmen, muß man den Absorptionskoeffizienten der Sternmaterie erst als Funktion von P und T kennen. Wenn man außerhalb des Gebiets des Sterns ist, wo die Energieerzeugung stattfindet, ist der Strahlungsstrom pro cm^2 ja bekannt. Die von P. MORSE [7] berechneten Absorptionskoeffizienten (für $T > 400\,000^\circ$) mögen hier sehr nützlich sein.

Literaturverzeichnis.

- 1] A. UNSÖLD, Phys. d. Sternatmosphären, Abschn. 93. — 2] H. SIEDENTOPF, A. N. **247**, 297, 1933; **249**, 53, 1933; **255**, 157, 1935. — 3] L. BIERMANN, ebenda **264**, 361, 1938. — 4] B. STRÖMGREN, On the chemical composition of the solar atmosphere, Festschrift für ELIS STRÖMGREN, S. 218, 1940. — 5] H. S. W. MASSEY u. D. R. BATES, Astrophys. Journ. **91**, 202, 1940. — 6] A. UNSÖLD, Phys. d. Sternatmosphären, S. 118. — 7] P. M. MORSE, Astrophys. Journ. **92**, 27, 1940.
-