

**КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ**

К Л А С С И К И
Е С Т Е С Т В О З Н А Н И Я

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
физико-математической литературы

МОСКВА • 1961

Б. СЕН-ВЕНАН

МЕМУАР
О КРУЧЕНИИ ПРИЗМ

МЕМУАР
ОБ ИЗГИБЕ ПРИЗМ

Перевод с французского
А.А. ПАРИЙСКОГО

Под редакцией
и с вступительной статьей
Г.Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
физико-математической литературы

МОСКВА • 1961

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория упругости как самостоятельная дисциплина возникла в XIX веке в результате усилий ряда выдающихся ученых.

После установления Навье в 1821 г. основных уравнений и создания Коши теории напряжений и теории деформаций важнейшее значение для развития теории упругости имели исследования Барре де Сен-Венана (1797—1886).

Сен-Венан в классических работах по теории кручения и изгиба, опубликованных в 1855—1856 гг., дал на основе общих уравнений теории упругости решение задач изгиба и кручения призматических стержней. В этих исследованиях Сен-Венан создал полуобратный метод решения задач теории упругости, высказал знаменитый «принцип Сен-Венана», позволивший перейти к эффективному решению задач теории упругости, и разобрал большое число конкретных примеров.

Задаче Сен-Венана (о растяжении, кручении и изгибе стержня силами, приложенными на торцах) посвящена огромная литература. Однако замечательные исследования Сен-Венана, сохраняющие и ныне свое научное значение, практически недоступны широкому кругу читателей, а на русском языке они полностью никогда не публиковались.

В настоящей книге дается перевод двух мемуаров Сен-Венана:

1. *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, etc.*—*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, t. 14, 1856.

2. *Mémoire sur la flexion des prismes, etc.* — *Journal de mathématiques pures et appliquées*, publié par J. Liouville, 2^{me} série, t. 1, 1856.

При переводе работ Сен-Венана на русский язык переводчик и редактор пытались сохранить стиль и терминологию середины прошлого века. Поэтому не следует удивляться, читая о давлениях вместо напряжений, о неопределенных уравнениях вместо дифференциальных уравнений в объеме, об определенных уравнениях вместо граничных условий, о дифференциальных коэффициентах вместо производных и т. д.

Некоторые второстепенные рассуждения Сен-Венана сейчас имеют лишь историческое значение (например, соображения о четности и нечетности показателей на стр. 433 и далее), другие нуждаются в более четком изложении. Однако таких мест немного, и поэтому нет нужды на них останавливаться и делать специальные примечания.

Издаваемые в переводе работы составляют лишь часть обширного научного наследия Сен-Венана, охватывающего ставшими классическими исследования по гидравлике, термодинамике, общей механике и теории пластичности.

В списке трудов Сен-Венана, приложенном к настоящему изданию, работы перечислены в хронологическом порядке.

Г. Ю. Джанелидзе

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

ЖИЗНЬ
И НАУЧНАЯ
ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ
Б. Сен-Венана



ЖИЗНЬ И НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Б. СЕН-ВЕНАНА

22 августа 1797 г. во Франции в замке Фортуазо (департамент Сены и Марны), в семье крупного агронома, родился Барре де Сен-Венан — ученый и инженер, которого вполне обоснованно можно назвать творцом методов теории упругости и создателем теории пластичности.

Несколько лет Сен-Венан, рано проявивший выдающиеся математические способности, обучался дома. После смерти отца мать определила Сен-Венана в лицей г. Брюгге — бельгийского города, входившего тогда в состав Французской империи.

По окончании курса, в возрасте 16 лет, Сен-Венан поступил в 1813 г. в знаменитую Политехническую школу. Созданная еще в 1794 г. специальным декретом Конвента, Политехническая школа была основана по идеям Монжа для подготовки гражданских и военных инженеров; ее профессорами являлись Лагранж, Лаплас, Монж, Прони и др.

Детство и юность Сен-Венана прошли в бурные годы истории Франции — годы возвышения и падения империи Наполеона. Эти события оставили неизгладимый след на его жизненном пути.

В 1814 г., когда русские войска наступали на Париж и студенты Политехнической школы были мобилизованы, Сен-Венан отказался сражаться за Наполеона, считая его узурпатором. Этот смелый шаг Сен-Венана надолго закрыл ему дорогу в высшую школу: следующие восемь лет Сен-Венан работал учеником инженера на пороховых заводах.

Лишь 15 марта 1823 г. по специальному распоряжению министра внутренних дел он был принят в Школу дорог и

мостов, но и здесь обучающиеся не поддерживали с ним отношений. Сен-Венан стоически перенес всеобщее осуждение и в 1825 г. первым по успеваемости окончил Школу дорог и мостов.

Еще в период обучения в этой школе Сен-Венан принял участие в расчете моста через р. Крёз и в строительстве канала Арль-Пор-де-Бук. Затем идет период его инженерной деятельности — работа на строительстве канала в департаменте Ньевер (1826—1829 гг.), позднее на канале в Арденах и др.

В 1834 г. Сен-Венан опубликовал первую статью, посвященную примененному им способу построения ворот шлюза, и представил в Академию наук два исследования: по общей механике и по гидродинамике.

Эти работы сделали его известным в кругах французских ученых, и во время болезни профессора Кориолиса Сен-Венан был избран преподавателем сопротивления материалов (ноябрь 1837 г.), а затем адъюнкт-профессором (декабрь 1839 — январь 1842 гг.) в Школе дорог и мостов.

Представляющие значительный интерес для истории науки лекции Сен-Венана по сопротивлению материалов литографированы; в них сделана попытка рассмотрения новых достижений теории упругости: разобраны вопросы молекулярного строения, учтены касательные напряжения при изгибе (в предположении равномерности их распределения по сечению), предложен выбор размеров балки по наибольшим деформациям и др.

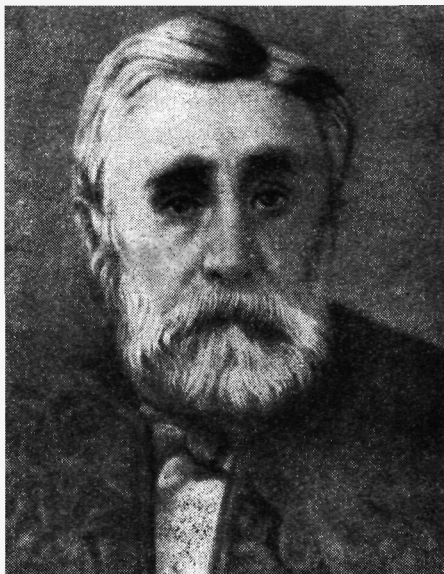
Преподавательскую работу Сен-Венан совмещал с инженерной деятельностью в муниципалитете г. Парижа, которую он прервал в 1843 г. в знак протеста против неодобрения некоторых его проектов.

В 1838 г. Сен-Венан совместно с Ванцелем установили ныне классическую формулу, связывающую скорость адиабатического истечения газа с давлением и плотностью газа в сосуде и противодавлением.

Вскоре внимание Сен-Венана привлекли вопросы гидравлики и ее практических применений в ирригации. Этот цикл исследований был удостоен золотой медали Французского общества земледелия.

В 1850—1852 гг. Сен-Венан был профессором механики в агрономическом институте в Версале. К этому времени

главным направлением научной деятельности Сен-Венана становится теория упругости. Правда, еще в 1843 г. он направил в Академию наук мемуар по изгибу кривых стержней и в 1847 г. первый мемуар о кручении, но действительное решение этих задач дано в замечательных мемуарах, пред-



Б. Сен-Венан
(1797—1886)

ставленных 13 июня 1853 г. и 20 июля 1855 г. в Академию и опубликованных в 1855—1856 гг. по рекомендациям Коши, Понселе и Ламе.

В этих работах*) Сен-Венан, основываясь на уравнениях теории упругости, дал общее решение поставленных еще Галилеем и Кулоном проблем изгиба и кручения стержней.

*) Перевод рассматриваемых статей дан в настоящем издании, поэтому на них можно детально не останавливаться.

Тем самым он положил начало инженерным приложениям теории упругости и открыл дорогу для решения других конкретных задач этой теории.

Успех исследования был обусловлен тремя идеями Сен-Венана: 1) созданием полуобратного метода; 2) переходом на торцах к интегральным граничным условиям и 3) установлением принципа, носящего имя Сен-Венана.

При применении полуобратного метода часть напряжений или перемещений задают, а оставшиеся напряжения и перемещения определяют из уравнений теории упругости. Этим достигается значительное облегчение решения задачи.

Переход от точных граничных условий на торцах к заданию лишь главного вектора и главного момента, распределенных там усилий, был введен не только для упрощения постановки задачи, но и потому, что инженер, как правило, не знает точного распределения нагрузок, действующих на конструкцию.

Наконец, наибольшее значение для последующего развития теории упругости имеет принцип Сен-Венана, согласно которому, если к небольшой части поверхности упругого тела приложена система сил, статически эквивалентная нулю, то в точках, достаточно далеких от загруженной части, эта система сил вызывает лишь пренебрежимо малые напряжения и деформации.

Благодаря этому принципу, обоснованному Сен-Венаном лишь ссылкой на простые опытные факты и доказанному в видоизмененной редакции лишь в последние годы (см. обзор истории доказательства принципа в статье [14]), напряжения в задачах кручения и изгиба практически не зависят от способа распределения усилий, эквивалентных заданному главному вектору и главному моменту (это неверно лишь вблизи торцов).

Используя указанные идеи, Сен-Венан создал теорию кручения призматических стержней, показав ошибочность теории Навье; разработал теорию изгиба стержней и решил большое число задач для конкретных профилей. Он разобрал также случай одновременного кручения и изгиба, решив тем самым задачу, ныне, по предложению Клебша, называемую задачей Сен-Венана.

Свои результаты Сен-Венан тщательно сопоставил с формулами элементарных теорий, в том числе с формулой

Д. И. Журавского для определения максимальных касательных напряжений при изгибе, и выяснил достаточную точность этого приближения.

Из других вопросов теории упругости Сен-Венан занимался: динамическим действием нагрузок, движущихся вдоль балок; продольным и поперечным ударами груза по стержню; выяснением числа упругих постоянных (он считал, что молекулярная теория позволяет уменьшить их число).

20 апреля 1868 г. Сен-Венан был избран членом Французской Академии наук.

Вскоре в круг его интересов под влиянием опытов Треска вошла проблема пластического течения. В этой области Сен-Венан получил фундаментальные результаты, положившие начало математической теории пластичности. Он не только определил напряжения в частично пластичном круглом цилиндре, подвергнутом кручению или изгибу (1870 г.) и в полностью пластической трубе, расширяющейся под действием внутреннего давления (1872 г.), но и сформулировал полную систему уравнений теории для плоской задачи.

Свои многочисленные исследования в области теории упругости Сен-Венан не суммировал в виде книги, а со свойственной ему скромностью изложил в форме примечаний к редактированному им изданию книги Навье «Конспект лекций . . .» и сделанному совместно с Фламаном переводу с немецкого книги Клебша «Теория упругости». В результате примечаний, дополнений и исторического обзора Сен-Венана объем книги Навье увеличился в десять раз, а книги Клебша в три раза.

В примечаниях к книге Навье Сен-Венаном даны знаменитые условия совместности деформаций.

Трудно переоценить значение этих изданий для последующего развития теории упругости, и по сей день с ними должен быть знаком всякий, кто хочет всерьез овладеть теорией упругости и ее методами.

Еще в период инженерной деятельности ярко проявились основные черты Сен-Венана: его работоспособность, любовь к своему делу, инициативность, независимость характера.

Когда научные исследования заняли основное место в деятельности Сен-Венана, то он работал каждый день

с 5 часов утра до 6—7 часов вечера, делая лишь небольшой перерыв на завтрак. Только немногие часы вечером Сен-Венан проводил с семьей или гостями, привлекая к себе всех как интересный, остроумный, живой и наблюдательный собеседник.

Сен-Венан женился в 1837 г. на Р. Флери, происходившей из известной французской семьи, из которой вышли артисты, археологи, военные и государственные деятели Франции. Супруги Сен-Венан, имевшие шесть детей — двух сыновей и четырех дочерей, вместе с семьей жили в Вандоме.

В 1885 г. скончалась жена Сен-Венана. Не оправившись от этого несчастья, он 27 декабря 1885 г. приехал в Париж по делам Академии наук и остановился в отеле, который не отапливался. Простудившись, Сен-Венан тяжело заболел, по-видимому, воспалением легких. Будучи болен, он продолжал работать — правил корректуру статьи. 2 января 1886 г. эта работа вышла из печати, а 6 января Сен-Венан скончался. Он похоронен в Сент-Уэне вблизи Вандома.

Сен-Венан создал большую научную школу механиков. Выдающиеся ученые и инженеры второй половины XIX века: Буссинеск, Леви, Матье, Резаль, Фламан — были его учениками.

Г. Ю. Джанелидзе



МЕМОАР
О КРУЧЕНИИ
ПРИЗМ





МЕМУАР О КРУЧЕНИИ ПРИЗМ

с рассмотрением их изгиба, так же как и внутреннего равновесия упругих твердых тел, и с практическими формулами для расчета их сопротивления одновременному действию различных сил

(Доложено Академии наук 13 июня 1853 г.)

ГЛАВА I

ПРЕДМЕТ И ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Прямые и обратные решения задач о твердых упругих телах

Общие формулы внутреннего равновесия упругих тел устанавливаются, как известно¹⁾, соотношения между перемещениями их точек и силами, вызывающими эти перемещения.

Благодаря этому, когда перемещения заданы, простое дифференцирование позволяет непосредственно узнать силы, способные их вызвать, при этом не только силы, которые действуют на все точки, например силы тяжести, но и те силы, которые действуют на поверхность как давления.

Обратная и значительно более важная задача, касающаяся *определения перемещений по заданным силам*, вообще еще не решена, так как мы еще не знаем, как интегрировать уравнения, в которые они входят, или как определять функции и произвольные постоянные, которые входят в их интегралы, чтобы удовлетворять условиям в различных случаях.

¹⁾ См. главу II.

Решая прямую задачу для ряда гипотез относительно перемещений, мы овладели бы тем самым решением подобного же числа частных случаев обратной задачи: ибо, найдя силы, соответствующие заданным перемещениям, мы всегда вправе взаимно заключить, что если силы заданы, то они произведут исходные перемещения.

Но, следуя подобным путем, мы, к сожалению, имели бы весьма мало шансов, даже после долгих попыток прийти к решениям, представляющим какой-либо практический интерес.

§ 2. Смешанный, или полуобратный, метод

Дело обстоит иначе, если применяют смешанный метод и идут как бы полуобратным, или промежуточным, путем между трудным или невозможным определением перемещений при заданных силах и непосредственным и легким определением сил по перемещениям, предполагаемым заданными. Этот метод состоит в том, что задаются *частью перемещений* и одновременно *частью сил* и, соответственно, определяют точным расчетом, какими должны быть другие перемещения и другие силы, убедившись, разумеется, в том, что выбранные данные согласуются между собой.

Действуя таким образом, можно встретиться только с доступными для решения интегралами, дающими легко вычисляемые выражения, и получить полное и точное решение задачи о перемещениях для большого числа частных случаев, которые встречаются на практике или дают как бы пределы, к которым практические данные, вообще говоря, достаточно хорошо приближаются.

Мы применим их специально к задачам о кручении и получим некоторые результаты, сообщенные Академии в 1847 г.¹⁾ относительно призм с прямоугольным или эллиптическим основанием, но распространим вычисление на случаи неравномерной упругости в различных направлениях, дадим

¹⁾ Они опубликованы только в виде выдержек в отчетах ее заседаний, т. XXIV, 22 февраля, 22 марта и 10 мая 1847 г., стр. 262, 485, 847. Сообщение о наших новых исследованиях, прочитанное в Société philomatique 26 февраля 1853 г., появилось также в «Бюллетене» этого общества и в номере от 16 марта 1853 г. журнала L'Institut.

практические таблицы, решим те же вопросы для криволинейных оснований различной формы, а также и для полых призм; мы изложим следствия, стараясь сделать их очевидными, и достигнем для условий сопротивления разрыву при кручении результатов совершенно новых и весьма отличающихся от тех, которые выведены из известных неточных гипотез.

Сначала мы применим этот метод, чтобы лучше понять его смысл, к самой простой задаче теории упругих тел — к равномерному растяжению призмы с произвольным основанием, растягиваемой в продольном и сжимаемой в боковом направлениях. Мы применим его также к изгибу призмы, чтобы на основании некоторых новых результатов оправдать в определенных границах полученные решения. Последние могут оставаться приближенными, хотя они и выведены без допущения о разделении твердых тел на волокна и на слои, ведущие себя особым образом.

Наконец, мы изучим, что происходит с призмой, когда она подвергается одновременно различного рода воздействиям, и особо определим условия сопротивления ее разрушению, когда она одновременно изгибается и скручивается или растягивается и срезается.

Предварительно, чтобы не отсылать читателя к другим сочинениям, мы выведем, насколько это возможно, геометрическим методом формулы равновесия, из которых должны будем исходить.





ГЛАВА II

ФОРМУЛЫ ВНУТРЕННЕГО РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

КРАТКОЕ НАПОМИНАНИЕ ОБ ИХ ОБОСНОВАНИИ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 3. Средние перемещения малых молекулярных групп

Когда внешние силы, приложенные к твердому телу, перемещают части этого тела и изменяют расстояния между ними, то происходит изменение в величинах и направлениях действий притяжения и отталкивания, которые эти части оказывают друг на друга. Из рассмотрения внутренних воздействий, которые должны обеспечивать равновесие внешних сил, устанавливают зависимости между последними и вызванными ими перемещениями.

Но обычно нет необходимости рассматривать действительные или индивидуальные перемещения молекул, перемещения, которые хотя и мало отличаются от перемещений соседних молекул, но обычно изменяются от одной молекулы к другой по весьма сложному закону вследствие большого разнообразия их размещений и их взаимодействий. Достаточно рассмотреть *средние перемещения*, которые представляют собой не что иное, как *перемещения центров тяжести групп некоторого числа молекул*. Каждая точка пространства, занятого телом, может рассматриваться как центр тяжести подобной группы, содержащейся в весьма малом, но конечном элементе этого пространства. Несмотря на малые размеры, приписываемые измерениям элемента, можно всегда предположить, что он содержит довольно значительное число молекул, чтобы взаимно компенсировать за их

счет беспорядочность индивидуальных перемещений, поэтому *средние перемещения изменяются обычно от одной точки тела к другой непрерывно и незначительно для малых расстояний, пропорционально расстояниям, пока они очень малы.*

Эти средние перемещения, единственные видимые и измеримые, являются, следовательно, единственными перемещениями, о которых мы будем говорить в дальнейшем, если не будет специальных оговорок.

§ 4. Удлинения. Сдвиги

Малые прямые линии, проведенные первоначально внутри тела, сделались бы извилистыми или *весьма волнистыми*, если их точки двигались бы соответственно законам, которые управляют действительными молекулярными перемещениями, но в соответствии с только что сказанным они останутся практически прямыми, испытывая только *средние* перемещения; и если они удлиняются или укорачиваются, то удлинения или укорочения будут для того же направления примерно пропорциональны их длинам. Линии Mx , na , yb , которые были параллельны и лежали в одной плоскости (рис. 1), останутся примерно параллельными в той же плоскости, превращаясь в M_1x_1 , n_1a_1 , y_1b_1 . Но эти линии, предполагаемые всегда чрезвычайно короткими и весьма близкими, *будут сдвинуты* относительно друг друга на величины M_1p , M_1q , так как точки n , y , которые проектировались первоначально в M на первой линии, теперь проектируются в точки p , q , отличные от M_1 . И одновременно малые линии Mu , oa , xb , которые были к ним перпендикулярны и обратились в M_1u_1 , o_1a_1 , x_1b_1 , будут также сдвинуты относительно друг друга, так что всегда будет в той же малой плоскости взаимное смещение двух систем малых прямых, которые ранее пересекались под прямым углом. Если мы отнесем взаимное смещение к единице действительного расстояния M_1n_1 , M_1u_1 или M_1o_1 , M_1x_1 точек, которые находились первоначально на этих линиях под прямым углом друг к другу, то, очевидно, получим для них одинаковую величину.

Итак, назовем:

удлинением в точке M тела в направлении прямой Mx , которая проходит через M , — относительное удлинение

(положительное или отрицательное), которое испытывает какая-либо очень малая часть этой прямой в результате средних перемещений тела, описанных в предыдущем параграфе;

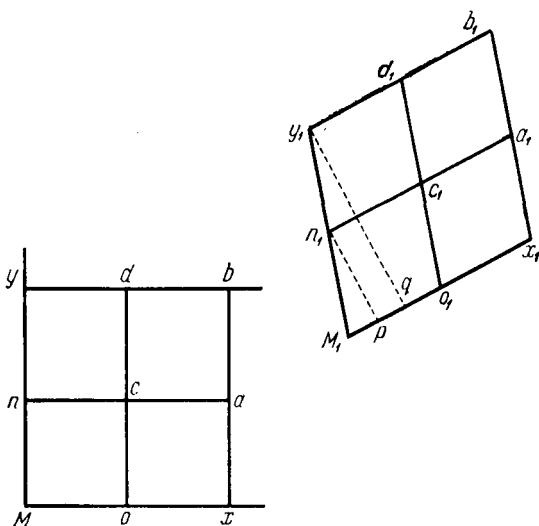


Рис. 1

сдвигом, отвечающим двум малым прямым Mx , Mu , расположенным первоначально под прямым углом, или отвечающим одной из них в плоскости, которую она образует с другой прямой, — проекцию на любую из прямых единицы длины, лежащей в направлении другой прямой (рис. 2).

Обозначим эту величину, которая численно есть не что иное, как косинус угла между двумя прямыми, через

$$g_{xy} \text{ или } g_{yx},$$

в зависимости от того, будем ли мы рассматривать ее как относительный сдвиг различных линий, параллельных Mx и расположенных в плоскости xMu , или как относительный сдвиг линий, параллельных Mu и расположенных в той же плоскости. Эта величина положительна, когда первоначально прямой угол yMx становится острым.

Обозначим также относительное удлинение вдоль Mx или x через ∂_x , рассматривая его как положительную величину при удлинении и как отрицательную при укорочении или *сжатии*.

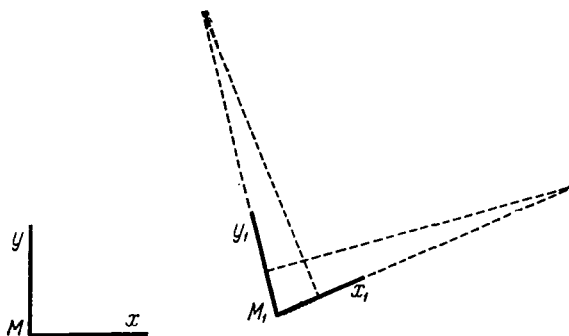


Рис. 2

Удлинения и сдвиги непрерывно изменяются вместе с точками и направлениями. Они примерно одинаковы для одних и тех же направлений в точках, принадлежащих той же чрезвычайно малой части тела.

§ 5. Условия, при которых даже значительные перемещения точек упругих тел не изменяют их связности. Очень малые сдвиги

Пример тонких полос, которые распрямляются после того, как их сгибают до соприкосновения обоих концов, или металлических проволок, скрученных в несколько витков, которые затем сами по себе возвращаются в их первоначальное состояние, доказывает, что можно значительно перемещать некоторые точки упругих твердых тел друг по отношению к другу и значительно изменять взаимные наклоны некоторых линий без разрушения и даже без опасения вызвать *остаточную деформацию*. Чтобы тела не потеряли *упругости* и во избежание изменения их структуры, предвещающего скорое *разрушение* материала, перемещения

должны осуществляться таким образом, чтобы расстояния между очень близкими точками, т. е. принадлежащими одной весьма малой части тела, не выходили бы за пределы некоторых значений, обычно очень малых и зависящих от природы тела.

Мы всегда будем предполагать, что последнее условие выполнено. В итоге из этого следует, что удлинения будут очень малыми величинами и то же самое будет со сдвигами, величина которых зависит, очевидно, также от изменения расстояния очень близких молекул, таких, как молекулы

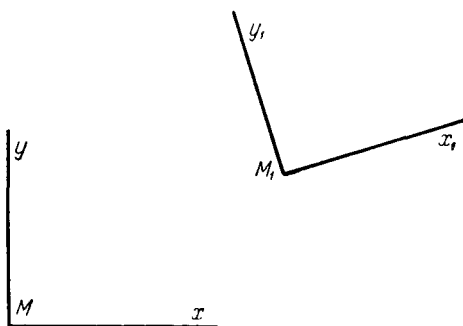


Рис. 3

в x , y , переместившиеся в x_1 , y_1 . Тогда угол $y_1M_1x_1$, образованный двумя малыми линиями Mx , Mu , первоначально составлявшими прямой угол, остается почти прямым (рис. 3), а сдвиг g_{xy} равен незначительному уменьшению этого угла, ставшего острым.

§ 6. Зависимости между сдвигами и удлинениями в различных направлениях. Изменение осей

Всякое удлинение ∂_x в некотором направлении Mx , происходящее в малой части тела, вызывает сдвиги по косым линиям к этому направлению; действительно, если после поступательного смещения и поворота тела мы предположим снова приведенными в первоначальные положения точку M , малую плоскость AMB , перпендикулярную к Mx ,

малую прямую AMB , расположенную в этой плоскости, то мы увидим, что концы r, r' двух малых линий Mr, Mr' , составляющих прямой угол (рис. 4), переместятся на величины $rr_1, r'r'_1$, равные ∂_x , умноженному, соответственно, на их расстояния до AB , так что угол между этими линиями, превратившись в $r_1Mr'_1$, перестанет быть прямым, и мы получим сдвиг $g_{rr'}$.

И наоборот, всякий сдвиг g_{xy} между двумя прямыми MBx, MDy , составляющими прямой угол, создает положительные или отрицательные относительные удлинения в наклонных направлениях, ибо, так же как и удлинение, он превращает сферический элемент $ADrBC$, имеющий свой центр в M (рис. 5), в эллипсоид $AD_1r_1BC_1$, наклоняя на тот же угол к диаметральной плоскости AMB , перпендикулярной к $CMDu$, все его ординаты gr , первоначально параллельные той же прямой.

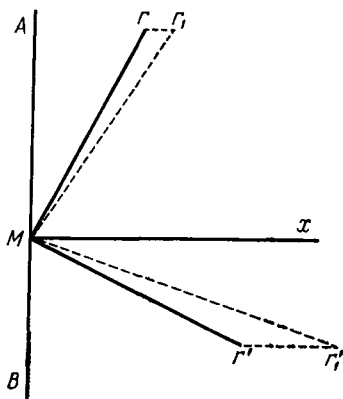


Рис. 4

Предположим в общем случае, что мы имеем в направлениях трех осей прямоугольных координат x, y, z три удлинения и три сдвига:

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z; g_{yz}, g_{zx}, g_{xy},$$

т. е. что три малые линии Mx, My, Mz , проведенные перед перемещением точки M тела параллельно этим неподвижным осям, *удлиняются* на малые величины $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ и *наклоняются* друг к другу, т. е. углы между ними уменьшаются (§ 5) на малые величины g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} , когда они превращаются в M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1 . Мы можем отсюда вывести удлинения и сдвиги в каких-либо других направлениях следующим образом.

Пусть Mr, Mr' или r, r' (рис. 6) — две малые прямые, составлявшие первоначально с Mx, My, Mz углы

$$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma',$$

так что, если взять их длины, предполагаемые равными, за единицу, то они соответственно дадут для проекций на линии Mx , $Mу$, Mz выражения

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma; \cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'.$$

При перемещениях эти две прямые превращаются в r_1, r'_1 , а прямоугольные параллелепипеды, в которых они

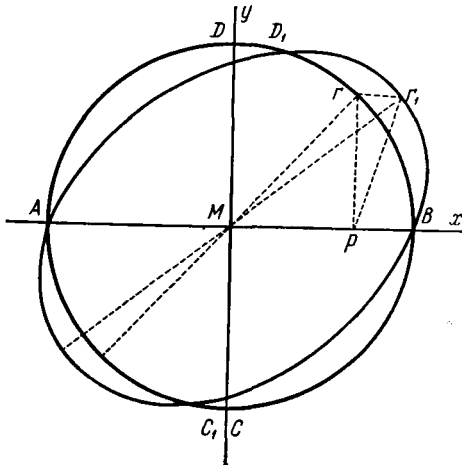


Рис. 5

были диагоналями и которые имели стороны $\cos \alpha, \cos \beta$ и т. д., — в два косоугольных параллелепипеда, имеющих, соответственно, стороны M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1 , которые мы назовем x, y, z и x', y', z' , так что получим:

$$\left. \begin{aligned} r_1 = 1 + \partial_r, \quad x = \cos \alpha (1 + \partial_x), \quad y = \cos \beta (1 + \partial_y), \\ \qquad \qquad \qquad z = \cos \gamma (1 + \partial_z), \\ r'_1 = 1 + \partial_{r'}, \quad x' = \cos \alpha' (1 + \partial_x), \quad y' = \cos \beta' (1 + \partial_y), \\ \qquad \qquad \qquad z' = \cos \gamma' (1 + \partial_z). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Найдем величину проекции второй диагонали r'_1 на направление первой r_1 . Для этого нужно только взять сумму проекций сторон x', y', z' на первую диагональ r_1 , так как r_1 является прямой, соединяющей те же две точки, как и

полигон, образованный этими последними линиями. Мы получим, таким образом, для этой проекции:

$$r'_1 \cos \widehat{r'_1} = x' \cos r_1 \widehat{x}_1 + y' \cos r_1 \widehat{y}_1 + z' \cos r_1 \widehat{z}_1. \quad (2)$$

Чтобы найти значение косинусов, которые входят во вторую часть уравнения, спроектируем сначала диагональ r_1 на

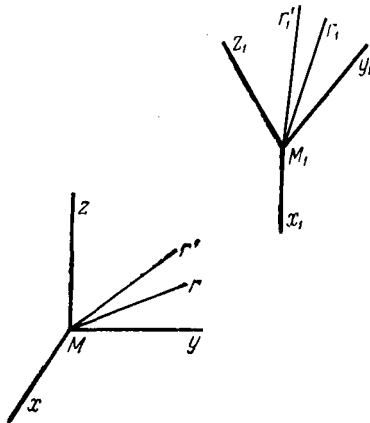


Рис. 6

направление x_1 ; проекция $r_1 \cos r_1 \widehat{x}_1$ будет суммой проекций трех сторон x, y, z косоугольного параллелепипеда, или $x + y g_{xy} + z g_{xz}$. Так выводится первое из следующих трех выражений, два других получаются таким же образом:

$$\begin{aligned} \cos r_1 \widehat{x}_1 &= \frac{x + y g_{xy} + z g_{xz}}{r_1}, \quad \cos r_1 \widehat{y}_1 = \frac{x g_{yx} + y + z g_{yz}}{r_1}, \\ \cos r_1 \widehat{z}_1 &= \frac{x g_{zx} + y g_{xy} + z}{r_1}. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (2) проекции r'_1 на r_1 и умножая на r_1 , получаем:

$$\begin{aligned} r_1 r'_1 \cos \widehat{r'_1} &= x x' + y y' + z z' + (y z' + z y') g_{yz} + \\ &+ (z x' + x z') g_{zx} + (x y' + y x') g_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эта формула (по отношению к которой известная формула квадрата диагонали какого-либо параллелепипеда только частный случай), в которую мы должны подставить вместо $r_1, r'_1, x, y, z, x', y', z'$ их выражения (1), применяется к произвольным величинам удлинений $\partial_r, \partial_{r'}, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ и косинусов g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} углов, образованных линиями, в которые превращаются линии x, y, z вследствие перемещений.

Но если после подстановки (1) мы припишем этим восьми величинам ∂, g очень малые значения, пренебрегая их квадратами и их произведениями, и если мы последовательно предположим, что: 1) направления r, r' совпадают; тогда левая часть в формуле (3) превращается в $(1 + \partial_r)^2 = 1 + 2\partial_r$; 2) эти направления образуют прямой угол; тогда левая часть формулы (3) превращается в $(1 + \partial_r)(1 + \partial_{r'}) g_{rr'} = g_{rr'}$, мы получаем, обращая внимание на то, что

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1, \\ \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

две формулы:

$$\left. \begin{aligned} \partial_r &= \partial_x \cos^2 \alpha + \partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \cos^2 \gamma + g_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \\ &\quad + g_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + g_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \\ g_{rr'} &= 2 \partial_x \cos \alpha \cos \alpha' + 2 \partial_y \cos \beta \cos \beta' + \\ &\quad + 2 \partial_z \cos \gamma \cos \gamma' + g_{yz}(\cos \beta \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \beta') + \\ &\quad + g_{zx}(\cos \gamma \cos \alpha' + \cos \alpha \cos \gamma') + \\ &\quad + g_{xy}(\cos \alpha \cos \beta' + \cos \beta \cos \alpha') \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$(\text{где } \alpha = \widehat{rx}, \beta = \widehat{ry}, \gamma = \widehat{rz}, \alpha' = \widehat{r'x}, \beta' = \widehat{r'y}, \gamma' = \widehat{r'z}),$$

в которых можно было бы найти каждый член в отдельности с помощью геометрических соображений, как в начале этого параграфа.

Если придавать прямым r, r' направления трех новых взаимно-перпендикулярных линий x', y', z' , то эти формулы служат для того, чтобы изменять по желанию систему осей,

соответственно которым мы берем удлинения и сдвиги¹⁾, подобно тому как изменяют в аналитической геометрии оси и плоскости координат.

В качестве одного из первых следствий, какими бы ни были новые взаимно-перпендикулярные линии, получаем:

$$\partial_{x'} + \partial_{y'} + \partial_{z'} = \partial_x + \partial_y + \partial_z,$$

что можно было принять а priori, так как легко видеть, что $\partial_x + \partial_y + \partial_z$ является величиной, характеризующей увеличение объема прямоугольного параллелепипеда, имеющего центр в точке M и стороны, параллельные x, y, z . Эта величина, представляющая собой *относительное объемное расширение*, должна быть независима от системы осей, по отношению к которым берут три линейных удлинения ∂ .

§ 7. Различные сдвиги относительно прямой или в различных направлениях относительно той же прямой. Главный сдвиг и т. д.

Если мы воспользуемся выражением (5) $g_{rr'}$, взяв за направление r' направление самой оси x , а за направление r — направление линии My' , составляющей с осью y угол β в плоскости zMy , то, имея теперь $\cos \alpha' = 1, \cos \alpha = \cos \beta' = \cos \gamma' = 0$, найдем:

$$g_{xy'} = g_{xy} \cos \beta + g_{xz} \sin \beta. \quad (6)$$

Это простое выражение можно получить непосредственно, если заметить, что Mx, My, Mz, My' превращаются в $M_1x_1, M_1y_1, M_1z_1, M_1y'_1$, а M_1p, M_1q, M_1p' являются проекциями

¹⁾ Первая формула, выражающая относительное удлинение малой кривой линии r , давно доказана Навье, но только для случая очень малых перемещений, т. е. таких, когда линия r изменяет, но очень немного не только величину, но и направление в пространстве, в его мемуаре от 14 мая 1821 г., где он впервые дал уравнения равновесия и движения упругих твердых тел как для точек внутри тела, так и для точек на его поверхности (Mémoires de l'Institut, т. VII, 1827, стр. 386 и Société philomatique, 1823, стр. 179. См. также Exercices de mathématiques Коши (Cochu), т. II, 1827, стр. 66, формула (31) и Пуассона (Poisson) в Journal de l'École polytechnique, тетрадь 20, § 19, стр. 37). Вторая формула является первой из формул на стр. 46 Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité Ламе (Lamé), 1852.

единичного отрезка, направленного по M_1x_1 , и M_1G — проекцией того же отрезка на плоскость $z_1M_1y_1$ (рис. 7). Тогда имеем:

$$M_1p = g_{xy}, \quad M_1q = Gp = g_{xz}, \quad M_1p' = g_{xy}'.$$

Так как углы GpM_1 , $Gp'M_1$ отличаются чрезвычайно мало от прямого угла, а угол $p'M_1p$ очень мало от угла β , то, пре-

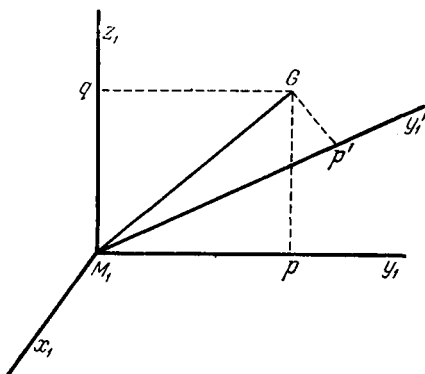


Рис. 7

небрегая очень малыми величинами второго порядка, получим $M_1p' = M_1p \cos \beta + Gp \sin \beta$, т. е. формулу (6).

Это выражение (6) g_{xy}' позволяет сравнивать величины различных сдвигов, относящихся к одной и той же линии x и изменяющихся в зависимости от направления второй линии y' , которая их определяет вместе с x (§ 4), или в зависимости от выбора плоскостей xu' , в которых имеют место эти сдвиги относительно оси x и параллельных ей линий, расположенных с разных сторон.

Наибольшим является то значение M_1G , которое принимает величина M_1p' при угле β , имеющем тангенс $\frac{g_{xz}}{g_{xy}}$.

Назовем *главным сдвигом* относительно направления x или относительно x наибольшее значение g_{xy} или проекцию M_1G на материальную плоскость (первоначально перпендикулярную к x) единицы длины, отложенной в направлении этой линии. Если мы обозначим его через g_x , то получим:

$$g_x^2 = g_{xy}^2 + g_{xz}^2. \quad (7)$$

Другие сдвиги относительно направления x — не что иное, как проекции главного сдвига $M_1G = g_x$ на различные направления y' , перпендикулярные к x . Всегда имеется нулевой сдвиг, т. е. такой сдвиг, при котором y' составляет прямой угол с M_1G .

В соответствии со взаимностью сдвигов (§ 4) главный сдвиг в направлении x является также наибольшим из всех сдвигов, которые происходят относительно направлений, перпендикулярных к x и расположенных в плоскостях, проходящих через эту прямую.

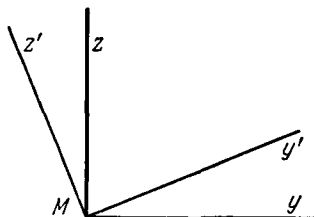


Рис. 8

Если z' новая прямая, перпендикулярная к x и y' (рис. 8), то выражение (5) $g_{r'}$ дает

$$g_{y'z'} = (\partial_z - \partial_y) \sin 2\beta + g_{yz} \cos 2\beta, \quad (8)$$

максимум которого равен самому g_{yz} , если $\partial_z - \partial_y = 0$.

Выражение (5) ∂_r для удлинения по той же линии y' , которую мы рассматривали, приводит к величине

$$\left. \begin{aligned} \partial_{y'} &= \partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \sin^2 \beta + g_{yz} \sin \beta \cos \beta, \\ \text{или } \partial_{y'} &= \frac{1}{2} g_{yz} \sin 2\beta \text{ (если } \partial_y = 0, \partial_z = 0), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

имеющей максимум при β , равном половине прямого угла.

Если в таком случае положить $\partial_x = 0$, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, так что в направлениях x , y , z будет только сдвиг g_{yz} , то для удлинений и сдвигов по новым осям x , y' , z' найдем:

$$\partial_{y'} = \frac{1}{2} g_{yz}, \quad \partial_{z'} = -\frac{1}{2} g_{y'z'},$$

(а ∂_x , $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ равны нулю).

Мы видим, что всякий сдвиг между двумя взаимно-перпендикулярными прямыми y , z эквивалентен удлинению и сжатию, вдвое меньшим, чем относительно их биссектрис y' , z' (рис. 9).

Мы могли бы, таким образом, заменить рассмотрение сдвигов рассмотрением положительных или отрицательных удлинений в направлениях, наклонных по отношению к

выбранным осям координат. Но сдвиги встречаются, разумеется, во всех формулах и их применение делает изложение значительно более простым и более элементарным¹⁾.

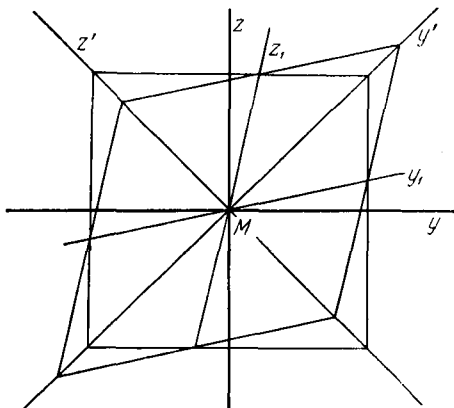


Рис. 9

§ 8. Зависимости удлинений и сдвигов от весьма малых перемещений

Если $x + u$, $y + v$, $z + w$ — координаты точки M в новом положении тела, а ее первоначальные координаты были x , y , z , то величины

$$u, v, w,$$

являющиеся функциями координат x , y , z , представляют

¹⁾ Я их рассмотрел в 1837 г. в «Лекциях по механике» (литографированных) в Школе мостов и дорог, а Понселе (Poncelet) их ввел в свой курс на факультете естественных наук. Ламе применил то же выражение в своей *Théorie de l'élasticité*, § 23, стр. 61. Навье (Navier) также использовал его после Вика (Vicat) в § 152 итогов (1833 г.) своих «Лекций о применении механики к сооружениям». Френель (Fresnel) заметил (*Société philomatique*, 1852, стр. 65), что *при сдвиге* друг относительно друга слои эфирной жидкости взаимно увлекаются.

Я рассмотрел в 1837 и в 1843 гг. (*Comptes rendus de l'Académie*, т. XVII, стр. 944 — мемуар, прочитанный 30 октября и одобренный 27 ноября) сдвиги плоскостей или на плоскостях. В этом случае такие величины, как g_{xy} , g_{xz} , являются составляющими сдвига g_x . Мне казалось более простым рассмотреть эти величины g_{xy} , g_{xz} непосредственно, как *сдвиги между линиями* в различных плоскостях, а g_x — как их наибольшие значения для данного направления.

собой проекции перемещения этой точки на неподвижные оси x, y, z , или ее перемещения по их направлениям.

Если предположить, что перемещения u, v, w очень малы, то легко видеть, что удлинения и сдвиги $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ (§ 6) можно просто выразить посредством их дифференциальных коэффициентов первого порядка. Но это верно лишь для средних перемещений молекулярных групп (§ 3), а не для действительных или индивидуальных перемещений. Последние перемещения могли бы быть представлены только сложными функциями, от которых следовало бы взять также производные высших порядков и в большом числе, чтобы получить извилистую или волнистую форму (§ 4), которую приобретают ранее прямые линии длиной в некоторое число молекулярных промежутков.

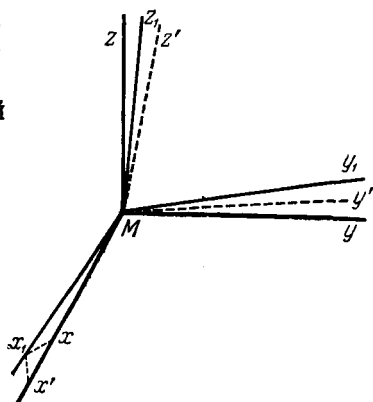


Рис. 10

Совместим новое положение точки M с ее первоначальным положением путем малого поступательного перемещения тела, равного, но противоположного перемещению этой точки. Пусть Mx_1, My_1, Mz_1 являются линиями, в которые при средних перемещениях превращаются линии Mx, My, Mz , параллельные трем осям координат (рис. 10). Тогда малый отрезок x_1x' , являющийся проекцией x_1x на продолжение линии Mx , будет представлять собой перемещение u точки x , уменьшенное на перемещение точки M , вызванное поступательным смещением. Его частное при делении на Mx будет $\frac{du}{dx}$, если Mx очень мало (§ 3), и будет выражать (§ 4) удлинение в направлении x . Так как можно сказать то же самое для направлений y и z , то получаем:

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \quad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \frac{dw}{dz}. \quad (10)$$

Что касается сдвигов, то угол y_1Mz_1 , плоскость которого образует с плоскостью yMz только чрезвычайно малый дву-

гранный угол, может рассматриваться как равный своей проекции $y'Mz'$ на плоскость yMz . Итак, малая линия yy' , проведенная параллельно Mz на последней плоскости между линиями My , My' , есть не что иное, как перемещение w точки $у$ за вычетом перемещения точки M при произведенном поступательном смещении. Следовательно, если мы принимаем $My = dy$, то получаем $yy' = \left(w + \frac{dw}{dy} dy\right) - w = \frac{dw}{dy} dy$. Отсюда малый угол $y'My$ равен $\frac{dw}{dy}$.

Мы также докажем, что малый угол $z'Mz$ равен $\frac{dv}{dz}$; отсюда вытекает, что после уменьшения, полученного прямым углом yMz , он стал слегка острым углом y_1Mz_1 и, следовательно (§ 5), сдвиг g_{yz} равен $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, т. е.

$$g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \quad (11)$$

Когда перемещения u , v , w не очень малы, то для относительных удлинений и сдвигов получаем менее простые выражения через перемещения, чем (10) и (11)¹⁾.

Ограничиваясь рассмотрением только малой части упругого тела, мы всегда можем посредством поступательного смещения добиться того, чтобы новые положения точек были весьма близки к прежним. Разумеется, при перемещениях должно выполняться условие незначительности изменения малых расстояний, указанное (§ 5) как необходимое для сохранения сплошности тела.

Таким образом, перемещения последовательно приводятся для каждой части тела к весьма малым. Это позволяет в большинстве случаев вычислять перемещения путем постепенного сложения, пользуясь только формулами (10) и (11); соответствующие примеры даны ниже.

¹⁾ Я нашел (Société philomatique, 26 марта 1844 г. или журнал L'Institut, № 537, 10 апреля и Comptes rendus de l'Académie, 22 февраля 1847 г., т. XXIV, стр. 261), что тогда получаются выражения $\partial_x = \frac{du}{dx} + \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{2 dx^2}$, $g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \left(\frac{du}{dy} \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy} \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{dw}{dz}\right)$, которые аналогичны формулам, данным Коши на стр. 62 второго тома Exercices de mathématique для других величин.

**§ 9. Давления. Их равнодействующая
на различных гранях элемента.
Их непрерывное изменение**

После рассмотрения вопросов чистой кинематики перейдем к изучению сил, которые действуют в теле (§ 3).

Вместо того чтобы изыскивать способы расчета индивидуальных и беспорядочно изменяющихся взаимодействий различных пар молекул, можно рассматривать только их равнодействующие, приложенные в очень большом числе на гранях раздела элементов тел и аналогичные давлениям в жидкостях.

Эти силы могут быть наклонены каким-либо образом к граням, а также могут быть силами притяжения, тогда как давления в жидкостях, находящихся в состоянии покоя, всегда являются силами отталкивания, нормальными к граням¹⁾.

Итак, мы будем в общем случае называть *давлением на одну из двух сторон малой плоской воображаемой грани внутри тела (или на границе раздела двух тел) равнодействующую всех воздействий молекул, расположенных с этой стороны, на молекулы, лежащие с противоположной стороны; при этом учитываются воздействия, направления которых пересекают грань; все эти силы предполагаются перенесенными параллельно самим себе в одну точку, чтобы составить одно целое (относительно их направления; см. § 29).*

Из этого определения давления непосредственно следует²⁾, что *равнодействующая давлений на различных гранях многогранного элемента является точно такой же, как и равно-*

¹⁾ Кроме, разумеется, капиллярных явлений.

²⁾ Я сравнивал его с другими определениями, которые даны в сообщении, напечатанном в Bulletin de la Société philomatique 30 декабря 1843 г., а также в № 524 журнала L'Institut и в другом сообщении, помещенном в Comptes rendus de l'Académie 7 июля 1845 г., т. XXI, стр. 24. То, что говорит Пуассон в конце § 19 его мемуара о кристаллических телах, о следствиях другого определения, которое он принял, подтверждает мой выбор (Mémoires de l'Institut, т. XVIII, стр. 56—57).

Коши первым рассмотрел *давления или напряжения* в твердых телах (мемуар от 30 сентября 1822 г. в Bulletin de la Société philomatique, 1823, стр. 10). Ламе называет их в настоящее время *упругими*

действующая возде́йствий, оказываемых на молекулы этого элемента внешними по отношению к нему молекулами, ибо, если давления заключают в себе, кроме того, действия внешних молекул на другие внешние молекулы, направленные по линиям, которые пересекают две грани элемента твердого тела, то эти посторонние действия уничтожаются попарно при составлении общей равнодействующей давлений на всех гранях, так что остаются только действия внешних молекул на молекулы внутренней части элемента тела.

Так как давления на гранях с ничтожными размерами всегда состоят из достаточно большого числа молекулярных действий, чтобы компенсировать беспорядочную неравномерность, имеющуюся при переходе от одной пары молекул к соседней паре, то можно считать, что:

1) давления на малые грани, расположенные в одной плоскости, с общим центром тяжести пропорциональны площади этих граней;

2) *давления на единицу поверхности* изменяются просто и непрерывно и поэтому для параллельных граней изменяются пропорционально расстояниям между их центрами тяжести, пока эти расстояния остаются очень малыми и отсчитываются в том же направлении.

§ 10. Соотношения между давлениями на различные грани, имеющие центр в одной точке

Коши, устанавливая уравнения равновесия при поступательном смещении элемента в виде тетраэдра и уравнения равновесия при повороте относительно своей оси элемента в виде призмы с ромбическим основанием, пришел, пренебрегая величинами, пропорциональными объему, при наличии величин, пропорциональных площадям, к двум весьма важным теоремам, применимым к давлениям как в твер-

силами (Leçons sur l'élasticité, § 5), что позволяет ему несколько легче отличать случаи, когда имеется напряжение или растяжение, т. е. равнодействующая сил притяжения, от случая, когда имеется равнодействующая сил отталкивания или, собственно говоря, давление (там же, § 23).

дых, так и в жидких телах, как в состоянии покоя, так и в состоянии движения¹⁾:

1) давление на малую плоскую грань является равнодействующей давлений, испытываемых ее тремя прямыми или косыми проекциями на три произвольные плоскости, проходящие через ее центр тяжести;

2) когда две малые плоские грани имеют одинаковую площадь и один и тот же центр, то проекция давления на первую на нормаль ко второй равна проекции давления на вторую на нормаль к первой.

Легко видеть правильность этих теорем, если заметить, что число и полная результирующая молекулярных действий, которые осуществляются параллельно прямой lm через различные малые грани aob , cod и т. д., имеющие общий центр o (рис. 11), являются одинаковыми для всех граней, если эти грани имеют одинаковую проекцию pq на плоскость, перпендикулярную к lm ; эта результирующая, пропорциональная к тому же площадям граней, которые могут образовать часть той же плоскости (см. предыдущий параграф), пропорциональна проекции pq , если эта проекция имеет неодинаковые размеры для этих различных граней. Из этого замечания выводим непосредственно:

1) воздействия, параллельные какой-либо прямой, передаваясь через грань A , имеют такую же полную результирующую, как и воздействия, передающиеся через ее проек-

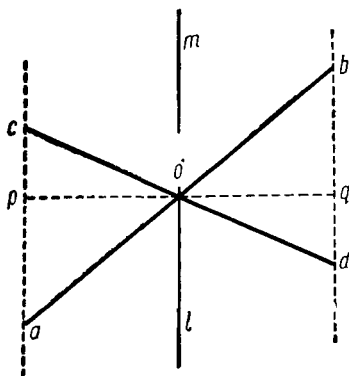


Рис. 11

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. II, 1827, стр. 48—49 и т. IV, 1829, стр. 41—42; распространение второй теоремы на случай двух взаимно-перпендикулярных плоскостей рассмотрено на год раньше его Ламе и Клапейроном (Équilibre des solides homogènes, Savants étrangers, 1829, стр. 490—491). В сообщении Коши 1822 г., упомянутом в предыдущем параграфе, уже излагается в скрытом виде первая теорема.

ции B, C, D на три какие-либо плоскости, ибо эти проекции, спроектированные на другую плоскость, всегда дают сумму проекций, равную проекции A на эту последнюю плоскость¹⁾; следовательно, поскольку давления являются общими равнодействующими воздействий, осуществляющихся во всех направлениях, то давление на A может быть заменено давлениями на B, C, D , что и является первой теоремой о проекциях плоскостей давлений;

2) если две грани $aob, a'ob'$ имеют одинаковую площадь, то результирующие воздействия, которые их пересекают параллельно линии lm (рис. 12), являются как бы косинусами

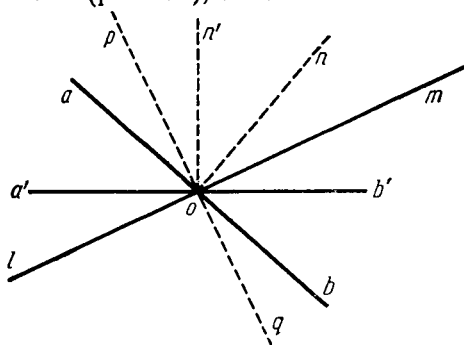


Рис. 12

углов, которые они образуют с плоскостью pq , перпендикулярной к lm , или, что то же самое, как бы косинусами углов $pot, n'ot$, которые образованы линиями n, n' , нормальными к этим граням, с линией lm . Эти два воздействия (или суммы сил), имеющих направление lm , будучи спроектированы: первое — на вторую нормаль n' , второе — на первую нормаль n , дадут, очевидно, один и тот же результат,

¹⁾ Напомним, что косые проекции площади A на три плоскости B, C, D выполняются на каждую прямыми, параллельными двум другим или их пересечениям, и что косые проекции прямой a на три другие b, c, d выполняются на каждую плоскостями, параллельными одновременно двум другим. Прямая и ее три косые проекции всегда могут рассматриваться как диагональ и три стороны того же параллелепипеда, исходящего из общей вершины; плоская поверхность и ее три проекции как четыре грани одного и того же тетраэдра, взятые первая — снаружи, три другие — внутри твердого тела, или наоборот.

так как мы будем иметь с двух сторон одну и ту же величину, умноженную на два косинуса, которые являются косинусами тех же двух углов pot , $p'ot$. Итак, взяв две общие равнодействующие этих проекций сил для всех направлений lm , получим совпадающие результаты; и, следовательно, имеется равенство между давлением на первую грань ab , спроектированным соответственно второй нормали op' , и давлением на вторую грань $a'b'$, спроектированным соответственно первой нормали op , что является второй теоремой взаимности составляющих давления.

§ 11. Следствия. Изменение плоскостей давления. Плоскости, слегка наклоненные друг к другу

Рассмотрим три плоскости, имеющие центр в одной и той же точке и перпендикулярные, соответственно, к трем прямым x , y , z , расположенным под прямыми или косыми углами друг по отношению к другу. Обозначим через

$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}; P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}; P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}$$

составляющие давлений на единицу поверхности в направлении тех же прямых; при этом первый индекс обозначает плоскость посредством указания ее нормали, а второй — направление составляющей. Тогда из второй теоремы предыдущего параграфа получаем три равенства:

$$P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{zx} = P_{xz}, \quad P_{xy} = P_{yx},$$

так что эти девять величин сводятся к шести:

$$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} \text{ и } P_{yz}, P_{zx}, P_{xy}. \quad (12)$$

Первые три называются *нормальными давлениями*.

Последние три являются *касательными давлениями*, когда прямые x , y , z взаимно-перпендикулярны, поскольку тогда z проходит на грани, перпендикулярной к y , и т. д.

Первая теорема позволяет получить составляющую в произвольном направлении давления, действующего на другую какую-либо грань, имеющую центр в той же точке тела, как функцию шести составляющих (12).

Действительно, пусть r — нормаль к этой грани; α , β , γ — углы, образованные r с прямоугольными осями x , y , z .

Если площадь этой грани равна единице, то площади ее проекций на три плоскости, перпендикулярные к x , y , z , будут $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Умножая эти площади на составляющие p_{xx} , p_{yx} , p_{zx} направленных по x давлений, которые испытывают единичные площадки каждой поверхности, получаем на этих гранях составляющие:

$$p_{xx} \cos \alpha, p_{yx} \cos \beta, p_{zx} \cos \gamma.$$

В соответствии с приведенной теоремой их сумма будет составляющей p_{rx} давления, испытываемого новой гранью; рассуждая подобным же образом в отношении осей y и z , получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} p_{rx} &= p_{xx} \cos \alpha + p_{yx} \cos \beta + p_{zx} \cos \gamma \\ p_{ry} &= p_{xy} \cos \alpha + p_{yy} \cos \beta + p_{zy} \cos \gamma \\ p_{rz} &= p_{xz} \cos \alpha + p_{yz} \cos \beta + p_{zz} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Если теперь мы спроектируем p_{rx} , p_{ry} , p_{rz} на направление прямой r' , составляющей углы α' , β' , γ' с осями x , y , z , сложим эти проекции (которые будут предыдущими выражениями, умноженными, соответственно, на $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$), то получим следующее выражение для составляющей в направлении r давления на единицу поверхности грани, перпендикулярной к r :

$$\begin{aligned} p'_{rr} &= p_{xx} \cos \alpha \cos \alpha' + p_{yy} \cos \beta \cos \beta' + p_{zz} \cos \gamma \cos \gamma' + \\ &+ p_{yz} (\cos \beta \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \beta') + \\ &+ p_{zx} (\cos \gamma \cos \alpha' + \cos \alpha \cos \gamma') + \\ &+ p_{xy} (\cos \alpha \cos \beta' + \cos \beta \cos \alpha')^1 \end{aligned} \quad (14)$$

(где $\alpha = \widehat{rx}$, $\beta = \widehat{ry}$, $\gamma = \widehat{rz}$, $\alpha' = \widehat{r'x}$, $\beta' = \widehat{r'y}$, $\gamma' = \widehat{r'z}$).

Нетрудно видеть, что это выражение пригодно и в случае, когда x , y , z не составляют прямых углов, а образуют между собой углы, несколько отличные от прямого, если только α , β , γ , α' , β' , γ' представляют в этом случае углы, составленные r и r' не с линиями x , y , z , а с линиями, несколько отличными от последних, линиями, по которым

¹⁾ Это выражение содержит шесть формул изменения плоскостей давления (7) и (8) стр. 32 четвертого тома Exercices de mathématiques Коши, или формулы (11) стр. 48 Théorie de l'élasticité Ламе.

пересекаются три плоскости, перпендикулярные к осям x, y, z^1).

Выражение (14) служит, как и формулы (5) § 6, дающие удлинения и сдвиги ∂_r и $g_{rr'}$, для замены давлений на трех плоскостях, которые могут образовывать между собой прямые или почти прямые углы, давлениями на других

¹⁾ Действительно, пусть x', y', z' — три пересечения или три общих перпендикуляра, а именно: x' к y и z , y' к z и x , z' к x и y . Пусть $A = 1$ является гранью, перпендикулярной к r , на которую действует давление. Обозначим, через A_x, A_y, A_z ее косые проекции на три плоскости, перпендикулярные к x, y, z . Так как косая проекция A_x грани A выполняется посредством линий, параллельных x' , то A и A_x будут иметь ту же самую прямую проекцию на плоскость, перпендикулярную к x' ; итак, поскольку углы наклона плоскостей такие же, как и углы их нормалей, то получим $A \cos \widehat{rx'} = A_x \cos \widehat{xx'}$, откуда $A_x = \frac{\cos rx'}{\cos xx'}$, так как $A = 1$. И таким же образом найдем $A_y = \frac{\cos ry'}{\cos yy'}$, $A_z = \frac{\cos rz'}{\cos zz'}$. Если мы спроектируем ортогонально на x прямую, представляющую по величине и направлению давление на площадку A_x , то мы получим $A_x p_{xx}$ в соответствии с определением p_{xx} ; если же мы спроектируем косо ту же прямую на оси x', y', z' , то ее косая проекция на x' будет выполнена теми же плоскостями, параллельными y' и z' и, следовательно, перпендикулярными к x (как и ортогональная проекция, которую мы только что построили); таким образом эта косая проекция на x' будет $\frac{A_x p_{xx}}{\cos xx'}$, а проекции на y' и z' будут $\frac{A_x p_{xy}}{\cos yy'}$, $\frac{A_x p_{xz}}{\cos zz'}$. Это три грани параллелепипеда, диагональю которого является давление на A_x . Если это давление на A_x разложить или спроектировать ортогонально на направление r_1 , то имеем $A_x \left(\frac{p_{xx}}{\cos xx'} \cos r' x' + \frac{p_{xy}}{\cos yy'} \cos r' y' + \frac{p_{xz}}{\cos zz'} \cos r' z' \right)$. Принимая для A_x его значение $\frac{\cos rx'}{\cos xx'}$ и составляя два подобных выражения для составляющих по r' давлений, действующих на A_y и A_z , получаем на основании первой теоремы Коши общую формулу

$$p_{rr'} = \frac{\cos rx'}{\cos xx'} \left(p_{xx} \frac{\cos r' x'}{\cos xx'} + p_{xy} \frac{\cos r' y'}{\cos yy'} + p_{xz} \frac{\cos r' z'}{\cos zz'} \right) +$$

$$+ \frac{\cos ry'}{\cos yy'} \left(p_{yx} \frac{\cos r' x'}{\cos xx'} + p_{yy} \frac{\cos r' y'}{\cos yy'} + p_{yz} \frac{\cos r' z'}{\cos zz'} \right) +$$

$$+ \frac{\cos rz'}{\cos zz'} \left(p_{zx} \frac{\cos r' x'}{\cos xx'} + p_{zy} \frac{\cos r' y'}{\cos yy'} + p_{zz} \frac{\cos r' z'}{\cos zz'} \right),$$

плоскостях, образующих между собой какие-либо близкие к прямым углы, которые обычно принимаются за прямые.

Отсюда можно получить большое число замечательных теорем, основные из которых составляют предмет пятой лекции Ламе по теории упругости.

§ 12. Зависимость составляющих давления от удлинений и сдвигов

Рассмотрим упругое тело в состоянии, принимаемом за *первоначальное*, когда никакое давление еще не действует на его поверхности и никакая внешняя объемная сила (например, сила тяжести) не воздействует на его точки, испытывающие только притяжения и отталкивания, с которыми они действуют друг на друга на незначительных расстояниях¹⁾. Разделяя тело на элементы каким-либо способом (см. § 20) и рассматривая эти элементы последовательно, начиная с поверхности, легко видеть, что равновесие каждого элемента требует, чтобы эти внутренние силы взаимно уничтожались по граням раздела, так что *в этом состоянии давления всюду равны нулю; подобное состояние рассматривается как первоначальное и называется иногда естественным состоянием тела.*

Как только к телу прикладываются внешние силы, его точки перемещаются, изменяется взаимодействие между ними и возникают давления.

Эти новые взаимодействия пар молекул или материальных точек зависят от относительных индивидуальных перемещений; но давления, которые являются равнодействующими весьма значительного числа сил взаимодействия между точками одной и той же малой части тела, должны зависеть единственно от средних конечных перемещений (§ 3), которые только и будут учитываться.

Итак, давления, которые проявляются на различных гранях с центром в данной точке M, обязательно являются

которая применима при любых взаимных наклонах осей x , y , z или при произвольных величинах трех косинусов в знаменателях. Эта формула сводится к выражению (14), когда при малых углах xx' , yy' , zz' можно заменить косинусы единицей, от которой они отличаются только на величины второго порядка.

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. III, 1828, стр. 167.

функциями трех относительных удлинений $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ и трех сдвигов g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} (§§ 4, 5, 6), имеющих место в той же точке в направлениях трех взаимно-перпендикулярных, произвольно выбранных осей x, y, z . Действительно, эти шесть величин представляют собой удлинения всех прямых, первоначально параллельных осям x, y, z в окрестности точки M , и углы наклона этих осей по отношению друг к другу. Они дают все необходимое для определения новых относительных положений соседних точек, первоначальное положение которых было задано. Эти шесть величин способны выражать воздействия через малые грани, имеющие центр в точке M . Это видно впрочем из выражений (5) для ∂_r и $g_{rr'}$ в § 6.

В неизвестные функции, определяющие давления через удлинения и сдвиги, величины $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ обязательно должны входить в одинаковой степени, так как они *очень малы* и могут бесконечно уменьшаться, сохраняя всегда тот же порядок величины, ту же степень влияния на относительные перемещения и давления (конец § 7). И не должно быть, чтобы из-за неравенства их показателей один член исчезал как ничтожная величина ранее других членов.

Остается узнать, будут ли эти функции линейными или однородными нелинейными. В этом отношении следует обратиться к опыту или выводимому на экспериментальной основе физическому закону (см. примечание на следующей странице), который мог бы нас наставить.

Растягиваем ли мы нить (что производит продольное удлинение, почти одинаковое во всех ее частях) или скручиваем полый цилиндр (что производит сдвиг, почти одинаковый повсюду), опыт свидетельствует, что *усилие пропорционально удлинению* в первом случае и сдвигу во втором, пока эти величины остаются очень малыми. Таким образом, удлинения и сдвиги входят в первых степенях, что не создает никаких *математических* затруднений.

Именно в этом состоит знаменитый закон *ut tensio sic vis*¹⁾, предложенный Гуком (Hooke)²⁾ и примененный Мариоттом (Mariotte)³⁾ почти два века назад.

¹⁾ Каково натяжение, такова и сила.

²⁾ Лекции *De potentia restitutiva* or of spring, 1678, небольшая статья, помещенная в *Philosophical tracts and collections* Роберта Гука.

³⁾ *Traité du mouvement des eaux*, 1680—1684, ч. 5, речь 2.

Итак, допустим вместе со всеми, что давления являются линейными функциями удлинений и сдвигов, пока эти величины очень малы. Тогда имеем (причем коэффициенты A_{xx} , A_{yy} , ... не зависят от удлинений и сдвигов):

$$p_{xx} = A_{xx} \partial_x + A_{yy} \partial_y + A_{zz} \partial_z + A_{yz} g_{yz} + A_{zx} g_{zx} + A_{xy} g_{xy}, \quad (15)$$

а для p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} — выражения того же вида с другими коэффициентами A^1).

¹⁾ Исходя из принципа, «что взаимодействие двух материальных точек на незначительных расстояниях является непрерывной функцией этих расстояний», принципа, который физики вывели на основе других явлений, кроме сцепления и упругости, можно высказать соображения о форме (15) выражений для p_{xx} , p_{yy} , ... и рассмотреть вопрос об относительных величинах коэффициентов A ; используем при этом способ, который учитывает в конечном счете незначительные, но неизвестные различия между действительными и средними перемещениями, сохраняет в формулах воздействия, из которых слагаются давления, без замены их эквивалентными величинами и свободен от поводов для критики, имеющихся в других аналогичных доказательствах.

Назовем величины $p_{xx'}$, $p_{yy'}$, $p_{zz'}$, $p_{yz'} = p_{zy'}$; $p_{zx'} = p_{xz'}$, $p_{xy'} = p_{yx'}$ давлениями на единицу площади слегка наклоненных плоскостей, в которые превратились в силу средних перемещений (§ 3) три малые взаимно-перпендикулярные плоскости, первоначально перпендикулярные к x , y , z и имеющие центр в точке M тела, причем эти давления разложены последовательно не по линиям пересечения M_1x_1 , M_1y_1 , M_1z_1 плоскостей, а по их трем действительным нормальям M_1x' , M_1y' , M_1z' .

r — первоначальное расстояние между двумя молекулами или элементарными материальными частичками m , m' , расположенными по обе стороны трех плоскостей, относительно которых мы пытаемся выразить давление.

\mathcal{R} — воздействие, каким бы оно ни было, m на m' , воздействие, которое зависит одновременно от r , массы этих молекул и даже от их природы (ибо тело может быть составлено из различных веществ, как весомых, так и невесомых, действующих друг на друга).

r_1 , \mathcal{R}_1 — значения величин r , \mathcal{R} после действительных перемещений m и m' .

α , β , γ — первоначальные углы, составленные r с осями x , y , z .

∂' , ∂'' , ∂''' — коэффициенты, на которые нужно умножить первоначальные прямоугольные проекции $r \cos \alpha$, $r \cos \beta$, $r \cos \gamma$ при $r = = mm'$ на x , y , z , чтобы получить косые проекции r_1 на соответствующие линии пересечения M_1x_1 , M_1y_1 , M_1z_1 трех малых плоскостей; эти линии образуют почти прямые углы $y_1M_1z_1$, $z_1M_1x_1$, $x_1M_1y_1$, косинусы которых равны трем сдвигам g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} .

∂_x , ∂_y , ∂_z — три относительных удлинения в той же точке M ; эти удлинения не что иное (§ 4), как ∂' , ∂'' , ∂''' , если действительные

§ 13. Соображения о числе отличных друг от друга коэффициентов

Из анализа, посредством которого Коши, рассматривая тела как системы точек, притягивающихся и отталкивающихся, получал либо шестичленные выражения (15): $A_{xx}\partial_x + A_{yy}\partial_y + A_{zz}\partial_z + A_{yz}g_{yz} + A_{zx}g_{zx} + A_{xy}g_{xy}$ — ше-

перемещения изменяются от точки к точке по простому и непрерывному закону, так как тогда наши средние перемещения маленьких молекулярных групп (§§ 3 и 8) идентичны действительным перемещениям; вообще же ∂' , ∂'' , ∂''' весьма мало отличаются от ∂_x , ∂_y , ∂_z , которые здесь являлись соответственно средними величинами, взятыми для очень малой части тела.

S_x , S_y , S_z — обозначения сумм, относящихся ко всем линиям r или r_1 , связывающим молекулы m , m' , оказывающие заметное воздействие друг на друга через три рассматриваемые грани. Эти суммы поделены на величины площадей, т. е. отнесены к единицам площадей этих граней.

Когда прямая проекция r_1 на нормаль M_1x' к плоскости $y_1M_1z_1$ образуется теми же двумя плоскостями (параллельными ей), что и ее косая проекция на M_1x_1 , она равна этой последней проекции $r \cos \alpha(1 + \partial')$, умноженной на косинус очень малого угла x_1M_1x' , который можно считать равным единице. Итак, получаем

$$\cos \widehat{r_1x'} = \frac{r \cos \alpha(1 + \partial')}{r_1}$$

и два аналогичных выражения для $\cos r_1y'$, $\cos r_1z'$, откуда в силу определения давления имеем:

$$p_{x'x} = S_x \frac{R_1}{r_1} r \cos \alpha(1 + \partial'); \quad p_{x'y'} = S_x \frac{R_1}{r_1} r \cos \beta(1 + \partial''),$$

$$p_{x'z'} = S_x \frac{R_1}{r_1} r \cos \gamma(1 + \partial''').$$

Итак, пренебрегая, как это мы будем делать постоянно, квадратами и произведениями очень малых величин ∂ , g , $r_1 - r$, получаем:

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R}{r} + (r_1 - r) \frac{dR}{dr}.$$

Если сослаться на известную теорему, которая дает выражение квадрата диагонали $r_1 = r + (r_1 - r)$ параллелепипеда через его стороны $r \cos \alpha(1 + \partial')$, $r \cos \beta(1 + \partial'')$, $r \cos \gamma(1 + \partial''')$ и косинусы g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} его углов, или если рассуждать подобно тому, как мы делали,

сти составляющих давлений, либо уравнения равновесия подобных систем, очень мало изменивших свое первоначальное расположение, следует, что если бы никакая внешняя

чтобы прийти к формуле (5): $\partial_r =$ и т. д., § 6, то имеем:

$$\frac{r_1 - r}{r} = \partial' \cos^2 \alpha + \partial'' \cos^2 \beta + \partial''' \cos^2 \gamma + g_{yz} \cos \beta \cos \gamma + g_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + g_{xy} \cos \alpha \cos \beta.$$

Подставляя это в выражение $\frac{\mathcal{R}_1}{r_1}$, затем в формулы для p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} и полагая

$$r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} = r \frac{d\mathcal{R}}{dr} - \mathcal{R} = R, \quad (a)$$

находим для этих трех составляющих давления выражения, содержащие шесть членов, зависящих от R , и два члена, зависящих от \mathcal{R} . Последние соответственно имеют вид:

$$S_x \mathcal{R} \cos \alpha + S_x \mathcal{R} \cos \alpha \partial', \quad S_x \mathcal{R} \cos \beta + S_x \mathcal{R} \cos \beta \partial'', \\ S_x \mathcal{R} \cos \gamma + S_x \mathcal{R} \cos \gamma \partial''''.$$

Но эти двучлены должны быть зачеркнуты, так как первые слагаемые в них $S_x \mathcal{R} \cos \alpha$, $S_x \mathcal{R} \cos \beta$, $S_x \mathcal{R} \cos \gamma$ представляют три составляющие p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} давления в первоначальном состоянии, которые, как сказано, равны нулю: вторые же слагаемые, такие, как $S_x \mathcal{R} \cos \alpha \partial'$, являются произведениями на величины ∂' (очень малые и мало отличающиеся друг от друга) параллельных сил $\mathcal{R} \cos \alpha$, сумма которых равна нулю, и поэтому сами должны быть равны нулю или быть пренебрежимо малыми.

Итак, остаются только члены с R или шестичленные выражения

$$\left. \begin{aligned} p_{x'x'} &= S_x R \cos^3 \alpha \partial' + S_x R \cos \alpha \cos^2 \beta \partial'' + S_x R \cos \alpha \cos^2 \gamma \partial'''' + \\ &+ g_{yz} S_x R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + g_{zx} S_x R \cos^2 \alpha \cos \gamma + \\ &+ g_{xy} S_x R \cos^2 \alpha \cos \beta, \\ p_{x'y'} &= S_x R \cos^2 \alpha \cos \beta \partial' + S_x R \cos^3 \beta \partial'' + S_x R \cos \beta \cos^2 \gamma \partial'''' + \\ &+ g_{yz} S_x R \cos^2 \beta \cos \gamma + g_{zx} S_x R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \\ &+ g_{xy} S_x R \cos \alpha \cos^2 \beta, \\ p_{x'z'} &= S_x R \cos^2 \alpha \cos \gamma \partial' + S_x R \cos^2 \beta \cos \gamma \partial'' + S_x R \cos^3 \gamma \partial'''' + \\ &+ g_{yz} S_x R \cos \beta \cos^2 \gamma + g_{zx} S_x R \cos \alpha \cos^2 \gamma + \\ &+ g_{xy} S_x R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma, \\ p_{y'x'}, p_{y'y'}, p_{y'z'} &= \text{трем таким же выражениям с } S_y \text{ вместо } S_x, \\ p_{z'x'}, p_{z'y'}, p_{z'z'} &= \text{трем таким же выражениям с } S_z \text{ вместо } S_x. \end{aligned} \right\} (b)$$

сила не действовала в первоначальном состоянии, а индивидуальные перемещения предполагались изменяющимися от одной точки к другой по простому и непрерывному закону, как наши *средние* перемещения (§§ 3 и 8), то между *тридцатью шестью коэффициентами* A существовало бы *двадцать одно* соотношение.

Из шести членов, которые получаем таким образом для каждой составляющей, три последних являются сдвигами, умноженными (как в выражении (15)) на коэффициенты, зависящие только от первоначального строения тела в направлениях осей x, y, z в окрестности точки M . Три первых члена являются суммами весьма значительного числа произведений таких множителей, как $R \cos^3 \alpha, R \cos \alpha \cos^2 \beta$, способных иметь любые величины, на величины $\theta',$ или $\theta'',$ или θ''' , которые, напротив, все соответственно равны $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ в ряде возможных случаев, когда каждая малая группа принимает участие только в деформации части тела, и которые во всех других случаях почти равны между собой или уклоняются очень мало в ту или другую сторону от $\partial_x, \partial_y, \partial_z,$ являющихся средними.

Итак, либо мы признаем, что можно вообще заменить $\theta', \theta'', \theta'''$ на $\partial_x, \partial_y, \partial_z,$ учитывая, что нет никакого основания предпочитать отклонений вверх от этих средних отклонения вниз, или что одни скорее чем другие соответствуют большим значениям множителей $R \cos^3 \alpha, R \cos \alpha \cos^2 \beta$ и т. д.; либо мы оспариваем эту возможность по отношению к некоторым телам с правильным кристаллическим строением, утверждая, что периодическое воспроизведение одних и тех же размещений атомов в группах, способных одинаково поворачиваться вокруг самих себя или деформироваться иначе, чем их совокупность, может тогда привести к совпадениям вышеуказанного рода; всегда получается, что величины $\theta,$ как и величины $g,$ входят только в первой степени в выражения составляющих $P_{x'x'}, P_{y'y'},$ и т. д. Если допустить, как сказано в тексте, что эти составляющие давления зависят только от средних $\partial_x, \partial_y, \partial_z,$ которые вместе с g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} определяют все наблюдаемые и измеряемые относительные перемещения, то увидим, что эти давления $P_{x'x'}, P_{y'y'}, \dots, P_{x'y'}$ на слегка наклоненные плоскости являются действительно линейными функциями шести малых величин

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$$

в той же точке.

В итоге мы получим функции такого же вида для составляющих P_{xx}, P_{yy}, \dots на взаимно-перпендикулярных плоскостях, чрезвычайно мало отличающихся от этих наклонных плоскостей, так как они выводятся из косых составляющих $P_{x'x'}, P_{y'y'}, \dots$ посредством простых проекций или по формуле (14) предыдущего параграфа, которая *изменяет коэффициенты при $\partial_x, \dots, g_{xy}$ только на величины, которыми можно пренебречь,* так как их произведения на θ, g будут величинами второго порядка.

Действительно, находим (вводя для симметрии два индекса как к ∂ , так и к g):

$$\left. \begin{array}{l} \text{коэффициенты } A, \\ \text{входящие в выра-} \\ \text{жение } p_{xx} \text{ при} \\ \text{величинах} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \partial_{yy} \\ g_{xy} \\ g_{yz} \end{array} \right\} \text{ соответственно равны} \\ \text{коэффициентам } A, \\ \text{входящим в выра-} \\ \text{жение } p_{xy} \text{ при} \\ \text{величинах} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} g_{xy} \\ \partial_{xx} \\ g_{zx} \end{array} \right\}, \end{array} \right\} (16) \\ \text{коэффициент } A \text{ в выражении } p_{xy}, \text{ который стоит при} \\ \partial_{zz}, \text{ равен коэффициенту в выражении } p_{xz} \text{ при } g_{yx}. \end{array}$$

Таким образом, если мы обозначим каждый коэффициент четырьмя индексами, из которых два первых были бы индексами составляющей давления p , а два последних индексами величин ∂ или g , то получим:

$$A_{xxxy} = A_{xyxy}, \quad A_{xxxy} = A_{yxxx}, \quad A_{xxyy} = A_{yxyx}, \quad A_{xyyz} = A_{xzyz}.$$

Таким образом, мы можем переставить по желанию не только оба первых или оба последних индекса (§§ 4 и 11), но также один или два первых с одним или двумя последними, не изменяя значений коэффициента. Поэтому число отличных друг от друга коэффициентов сокращается с *тридцати шести до пятнадцати*¹⁾.

Это также следует из весьма простого анализа примечания предыдущего параграфа, *если мы только допустим, что величины ∂' , ∂'' , ∂''' могут быть заменены тремя удлинениями ∂_x , ∂_y , ∂_z , которые им точно равны в случаях правильного распределения молекул, а в других случаях будут не чем иным, как средними значениями, от которых их индивидуальные значения отклоняются очень мало*²⁾.

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. IV, стр. 2 и т. III, стр. 226. Если на стр. 222 третьего тома и стр. 138 четвертого и имеется 21 коэффициент вместо 15, то это потому, что в этих местах Коши предполагал, что в первоначальном состоянии существуют давления, шесть составляющих которых являются именно шестью дополнительными коэффициентами. Можно заметить, что Пуассон, первый предложивший формулы с 36 независимыми коэффициентами (Journal de l'École polytechnique, 20-я тетрадь, стр. 83), сводит в своем последнем мемуаре (Mémoires (post.) de L'Institut, т. XVIII, §§ 36 и 37) их число к 15 даже для кристаллических тел.

²⁾ Действительно (формулы к этому примечанию см. в § 12), так как ∂' , ∂'' , ∂''' заменены на ∂_x , ∂_y , ∂_z , то из обозначений S_x вытекает, что коэффициенты при ∂_y , g_{xy} , g_{yz} в p_{xx} представляют собой

Однако были высказаны сомнения относительно принципа этого сокращения 36 коэффициентов до 15. Хотя эти сомнения имели в качестве главной причины другой способ установления и, по-видимому, распространялись лишь на тела с правильной кристаллической структурой, которыми мы не будем заниматься в дальнейшем в нашем мемуаре, и даже только на тела, где группы атомов испытывали бы повороты или деформации частного вида, когда деформируют их совокупность¹⁾, мы сохраним в общем случае, по

$S_x R \cos \alpha \cos^2 \beta$, $S_x R \cos^2 \alpha \cos \beta$, $S_x R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, как и коэффициенты при g_{xy} , ∂_x , g_{zx} в P_{xy} ; коэффициент при ∂_z в P_{xy} есть $S_x \cos \beta \cos^2 \gamma$, как и коэффициент g_{yz} в P_{xz} ; рассматривая таким же образом составляющие P_{yx} , ..., P_{zx} , ... на двух других плоскостях, первоначально перпендикулярных к осям y и z , и вспоминая, что $P_{zy} = P_{yz}$, $P_{xz} = P_{zx}$, $P_{yx} = P_{xy}$, действительно, приходим к 21 равенству между 36 коэффициентами, т. е. к сокращению числа коэффициентов до 15.

Между тем видно, что в упомянутом замечании мы сохранили материалу тела его *дискретность*, а суммам, названным S_x , S_y , S_z , их общность, не превращая их в интегралы, как делают некоторые авторы; этим мы не ввели никакой гипотезы относительно наибольшего или наименьшего размера малой сферы заметной активности молекулярных сил и не предполагали, как Пуассон, что сфера содержит всегда чрезвычайно большое число молекул (№ 3, 15, 16 его мемуара, помещенного в 20-й тетради *Journal de l'École polytechnique*); наконец, мы даже воздержались производить известное преобразование, посредством которого обычно заменяют суммы S_x , S_y , S_z действительных взаимодействий каких-либо молекулярных пар более простыми и эквивалентными суммами S фиктивных воздействий на ту же молекулу. Если, например, ρ является плотностью, то $S_x R \cos \alpha \cos^2 \beta$

заменяют на $\frac{\rho}{2} S R r \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$, а $S_y R \cos^3 \alpha$ — на $\frac{\rho}{2} S R r \cos^3 \alpha \cos \beta$ и т. д. (Exercices, т. III, стр. 215—216; мемуар Пуассона в 20-й тетради *Journal de l'École polytechnique*, § 16; другой мемуар того же автора о кристаллических телах в т. XVIII *Comptes rendus Академии наук*, стр. 50. Сообщение о давлении в *Comptes rendus Академии* от 7 июля 1845 г., т. XXI, стр. 26).

Таким образом, мы предлагаем 36 коэффициентов сократить до 15, вследствие возможности замены ∂' , ∂'' , ∂''' их средними значениями ∂_x , ∂_y , ∂_z ; это обычно допускается, по крайней мере, для тел с беспорядочной кристаллической структурой, т. е. тех, которые только употребляются как строительные материалы.

¹⁾ См. сообщение Коши в *Comptes rendus* от 3 марта 1851 г., т. XXXII, стр. 323 и 329. В действительности очевидно, что если тело имеет такое строение, что, например, ∂' для некоторых пар молекул равно сумме его среднего значения ∂_x и периодической функции, зависящей от общей деформации, т. е. содержащей ∂_y , ∂_z , ∂_{yz} и т. д. (предпола-

примеру Ламе, независимость коэффициентов, что, как он заметил, не делает более сложными аналитические решения задач.

§ 14. Однородные тела

Выражения (15), куда входят коэффициенты A , изменяющиеся обычно от одной точки M к другой вместе с координатами x, y, z , могут упрощаться также по причинам, зависящим от особенностей строения тела.

Следовательно (и это мы будем всегда предполагать), эти коэффициенты могут быть постоянными, или *одинаковыми во всех точках тела в одинаковых направлениях x, y, z* .

В таком случае мы говорим, что тело является *однородным*¹⁾ или что *упругость в нем одинакова в одних и тех же направлениях во всех его точках*, так как под *упругостью*, большей или меньшей, понимается или специфическое сопротивление, которое тело противопоставляет малому молекулярному перемещению в данном направлении, или (что сводится к тому же) более или менее значительное давление, которое здесь приводит к удлинению или сдвигу²⁾, точно измеряемому посредством различных коэффициентов A , каждый из которых выражает отношение составляющей давления к удлинению или к сдвигу, ею вызванному.

гается, что эти величины введены таким образом, чтобы не исчезнуть, когда берут сумму произведений $R \cos^3 \alpha \delta'$ или $R \cos^3 \alpha \cos \beta \delta''$ и т. д.), то это изменит соотношения между коэффициентами при $\partial_x, \partial_y, \dots, \partial_{xy}$; этой способности периодической части сохраняться можно было бы достигнуть, если бы $R \cos^3 \alpha, R \cos^2 \alpha \cos \beta$ и т. д. сами были бы периодически функциями координат пар молекул, поскольку произведение двух периодических функций *одинакового периода* может иметь среднее значение, отличное от нуля, хотя каждый множитель равнялся бы в среднем нулю. Тем не менее нет оснований считать, что изменения, определенные таким же образом в отношении коэффициентов A в выражениях, составляющих давления для некоторых тел с правильным строением, могли бы быть значительными.

¹⁾ Коши, Exercices, т. IV, стр. 2.

²⁾ Френель, Mémoire sur la double réfraction, 23 ноября 1821 г., т. VII l'Institut (nouv.), стр. 99, 101, 103, 107; Société philomatique, 1822, стр. 65; Навье, Résumé des leçons sur la résistance des matériaux и т. д. Следовало бы применять лучше слово жесткость (roideur), предложенное случайно Кориолисом (Coriolis) (Calcul de l'effet des machines) и Понселе (Introduction à la mécanique industrielle), если бы это слово не исключало, по общераспространенному мнению, понятия растяжимости или гибкости.

Однородность могла бы рассматриваться также и для направлений, изменяющихся от точки к точке. Допустим, например, что сгибают, изготовляя круглую трубу, плоскую полосу, обладающую *параллельной* однородностью, которую мы только что определили. Коэффициенты будут одинаковыми, если только мы примем, что составляющие давления имеют направления, образующие такие же углы с осью трубы, как и с ее радиусом; однородность становится при этом до некоторой степени *полуполярной*.

§ 15. Тело с тремя плоскостями симметрии или главными плоскостями упругости

В теле, как и во всех его точках M , часто имеется плоскость PMP (рис. 13), по отношению к которой *характеристики упругости* (см. предыдущий параграф) рас-

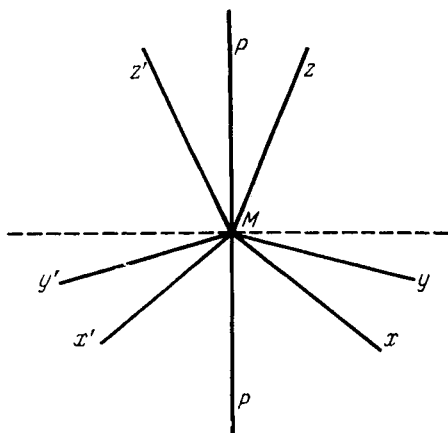


Рис. 13

пределены симметрично. Если Mx , Mu , Mz , Mx' , Mu' , Mz' являются двумя системами взаимно-перпендикулярных осей, расположенными симметрично по отношению к этой плоскости, то шесть составляющих давления p_{xx}, \dots, p_{xy} , соответствующие первым осям, выражаются через удлинения и сдвиги $\partial_x, \dots, g_{xy}$ в этих осях с теми же коэффициентами,

что и соответствующие вторым осям давления $p_{x'x'}$, ...
 ..., $p_{x'y'}$ — через удлинения и сдвиги $\partial_{x'}$, ..., $g_{x'y'}$.

Можно легко определить, не прибегая к гипотезе о распределении молекул с обеих сторон этой плоскости, при каком условии это соответствие будет иметь место для всех пар симметричных по отношению к этой плоскости систем координат. Достаточно, чтобы оно наблюдалось для случаев, когда, например, ось Mx взята перпендикулярно к плоскости PMR ; удлинения же давления и сдвиги для всякого другого направления, связанного с Mx , выражаются с обеих сторон плоскости путем умножения на те же косинусы (формулы (5) § 6 и (14) § 11) давлений, удлинений и сдвигов, относящихся к случаю перпендикулярности Mx к плоскости.

При этом особом положении оси Mx ось Mu' сольется с Mu и ось Mz' с Mz , так что получим

$$p_{y'y'} = p_{yy}, p_{z'z'} = p_{zz}, p_{y'z'} = p_{yz},$$

$$\partial_{y'} = \partial_y, \partial_{z'} = \partial_z, g_{y'z'} = g_{yz},$$

а ось Mx' будет продолжением оси Mx с другой стороны плоскости, что даст в силу определения тех же составляющих давления или скольжений соотношения:

$$p_{y'x'} = -p_{yx}, p_{z'x'} = -p_{zx}, g_{y'x'} = -g_{yx}, g_{z'x'} = -g_{zx},$$

и, следовательно, получим:

$$\partial_{x'} = \partial_x \text{ и } p_{x'x'} = p_{xx},$$

так как $p_{x'x'}$, p_{xx} являются суммами равных действий и противодействий, взятых в обоих случаях с одинаковыми знаками.

Итак, чтобы уравнения (15) $p_{xx} = A_{xx}\partial_x + A_{yy}\partial_y +$ и т. д. давали бы выражения давлений через удлинения и сдвиги с теми же коэффициентами A , когда мы подставляем x' , y' , z' вместо x , y , z , необходимо и достаточно, чтобы эти уравнения оставались прежними, когда мы просто изменяем знаки четырех величин p_{xy} , p_{zx} , g_{xy} , g_{zx} , или, что то же самое, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при g_{xy} , g_{zx} равнялись нулю в формулах для p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} и p_{yz} , а коэффициенты при ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} равнялись бы нулю в выражениях p_{zx} , p_{xy} .

Эти формулы (15) для составляющих давления в точке $M(x, y, z)$ приводятся, следовательно, когда плоскость симметрии проходит через эту точку перпендикулярно к оси x (нужно, чтобы эта плоскость весьма мало простиралась в окрестности рассматриваемой точки), к виду (17). Мы обозначили одними и теми же буквами коэффициенты, которые должны быть равными, если допустить сокращение 36 коэффициентов до 15 (см. предыдущий параграф), тогда

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + hg_{yz}, \\ p_{yy} &= f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z + kg_{yz}, \\ p_{zz} &= e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z + lg_{yz}, \\ p_{yz} &= h'\partial_x + k'\partial_y + l'\partial_z + dg_{yz}, \\ p_{zx} &= eg_{zx} + h''g_{xy}, \\ p_{xy} &= h'''g_{zx} + fg_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если кроме плоскости симметрии, перпендикулярной к оси x , есть еще плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y в той же точке, то эти уравнения должны будут по той же причине оставаться прежними при изменении значений для p_{yz} , p_{xy} , g_{xz} и g_{yz} , что приведет их к:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z, & p_{yz} &= dg_{yz}, \\ p_{yy} &= f''\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z, & \text{и} & & p_{zx} &= eg_{zx}, \\ p_{zz} &= e'\partial_x + d''\partial_y + c\partial_z, & p_{xy} &= fg_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

т. е. мы видим, что плоскость, перпендикулярная к z , будет тем самым также плоскостью симметрии или главной плоскостью упругости¹⁾.

¹⁾ Коши установил формулы (18) в Exercices, т. III, стр. 228, предполагая (см. также стр. 198), что молекулы равной массы и одинаковой природы распределяются симметрично по отношению к трем плоскостям uMx , zMx , xMy , причем он называл осями упругости три линии пересечения Mx , My , Mz (т. III, стр. 235 и т. IV, стр. 3 и 42). Теперь он называет эти плоскости главными плоскостями упругости, сохраняя название осей упругости для тех осей (см. ниже § 18), относительно которых упругости одинаковы по всем направлениям.

Мы привели в нашем Мемуаре доказательство тех же формул (18), не зависящее от всякой гипотезы о молекулярном распределении: мы считали необходимым заменить здесь это доказательство более простым, которое было затем дано Коши в Comptes rendus, т. XXXVIII, 20 февраля 1854 г., стр. 329.

§ 16. Выбор осей координат с целью приведения к одной двух касательных составляющих давления. Коэффициент упругости при сдвиге

Решения, которые мы дадим для задачи кручения, не требуют, чтобы имелись три плоскости симметрии, но они предполагают, что две касательные составляющие давления, такие, например, как p_{xy} и p_{xz} , даются *одночленными выражениями*, такими, как в последних формулах (18).

Можно иметь множество сочетаний величин 36 коэффициентов A при удлинениях и сдвигах $\partial_x \dots g_{xy}$ (формулы (15)), обеспечивающих выполнение этого условия или позволяющих при замене осей координат x, y, z на другие оси x', y', z' с помощью формул преобразований (5) и (14) свести путем надлежащего выбора новых осей выражений $p_{x'y'}$, $p_{x'z'}$ к виду

$$p_{x'y'} = f''' g_{x'y'}, \quad p_{x'z'} = e''' g_{z'x'}. \quad (19)$$

Если, например, имеется *только одна главная плоскость упругости* или плоскость симметрии, т. е. если давления p_{xy} , p_{xz} представляются в виде (формулы (17)):

$$p_{xy} = f g_{xy} + h''' g_{zx}, \quad p_{zx} = e g_{zx} + h'' g_{xy}, \quad (20)$$

то достаточно будет, чтобы между двумя коэффициентами существовало равенство

$$h'' = h''',$$

чтобы сделать возможным подобное сокращение.

Действительно, если предположить, что ось x сохраняет прежнее направление, перпендикулярное к главной плоскости, то оси y, z надо повернуть на угол β , чтобы они совпали с осями y', z' . Спроектировав на ось y' составляющую Ma давления (рис. 14), действующего на плоскость yz , т. е. составляющую, проекции которой на оси y и z суть p_{xy} и p_{xz} , мы получим первое из выражений (21), которое можно было бы получить также, применяя первую теорему § 10 к составляющим $p_{y'x}$, $p_{yx} \cos \beta$, $p_{zx} \sin \beta$ направленных по оси x давлений, приложенных к перпендикулярной оси y' грани единичной площади и к ее двум проекциям $\cos \beta$, $\sin \beta$ на плоскости, перпендикулярные к осям y и z , или просто полагая $\cos \alpha = 0$, $\cos \gamma = \sin \beta$ в первой формуле (13). Второе

выражение (21) выводится из первого, если к β прибавить прямой угол:

$$\left. \begin{aligned} p_{xy'} &= p_{xy} \cos \beta + p_{xz} \sin \beta, \\ p_{xz'} &= -p_{xy} \sin \beta + p_{xz} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Подставляя в (21) выражения (20) для p_{xy} , p_{xz} и для сдвигов

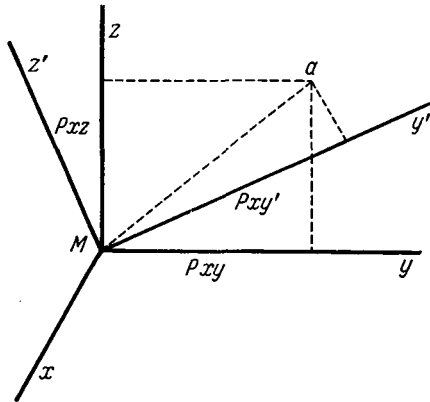


Рис. 14

g_{xy} , g_{xz} выражения, получаемые из соотношения (6) § 7:

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= g_{xy'} \cos \beta - g_{xz'} \sin \beta, \\ g_{xz} &= g_{xy'} \sin \beta + g_{xz'} \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

имеем следующие формулы для новых составляющих:

$$\left. \begin{aligned} p_{xy'} &= \left(\frac{f+e}{2} + \frac{f-e}{2} \cos 2\beta + \frac{h''+h'''}{2} \sin 2\beta \right) g_{xy'} + \\ &+ \left(\frac{h'''-h''}{2} - \frac{f-e}{2} \sin 2\beta + \frac{h''+h'''}{2} \cos 2\beta \right) g_{xz'}, \\ p_{xz'} &= \left(\frac{f+e}{2} - \frac{f-e}{2} \cos 2\beta - \frac{h''+h'''}{2} \sin 2\beta \right) g_{xz'} + \\ &+ \left(-\frac{h'''-h''}{2} - \frac{f-e}{2} \sin 2\beta + \frac{h''+h'''}{2} \cos 2\beta \right) g_{xy'}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Каждая из них приводится к одночлену, если положить

$$h'' = h'''$$

(равенство, которое, вероятно, всегда имеет место)¹⁾ и выбрать произвольный угол β из условия

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2h''}{f-e}.$$

Таким образом, получаем одночленные выражения:

$$p_{xy'} = f''' g_{xy'}, \quad p_{xz'} = e''' g_{xz},$$

где

$$f''' = \frac{f+e}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(f-e)^2 + 4h''^2}, \quad (24)$$

$$e''' = \frac{f+e}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(f-e)^2 + 4h''^2}.$$

Мы назовем коэффициенты d, e, f трех последних формул (18) или коэффициенты e''', f''' только что написанных формул *коэффициентами упругости при сдвиге*. Они являются отношениями касательных давлений к сдвигам тех же направлений, которые они определяют или вызывают, или специфическими сопротивлениями взаимному наклону материальных линий, пересекающихся в теле под прямым углом. Более известные коэффициенты упругости *при растяжении* являются функциями коэффициентов формул, дающих p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} ; мы их рассмотрим в §§ 24, 26, 30, 36.

§ 17. Тело с одинаковой упругостью сдвига во всех направлениях, перпендикулярных к одной прямой или относительно этой прямой и во всех проходящих через нее плоскостях

Если выражения касательных давлений p_{xy}, p_{xz} сводятся к одночлену для некоторых осей x, y, z , а упругость сдвига в теле одинакова для двух направлений y и z в плоскостях xy, xz , то мы имеем соотношения

$$p_{xy} = e g_{xy}, \quad p_{xz} = e g_{xz} \quad (25)$$

¹⁾ Оно не оспаривалось как равенство $f' = f$ в соответствии с экспериментами Вертгейма (Wertheim), результаты которых можно объяснить разными способами. Коэффициенты h'' и h''' выражаются оба (примечание § 12) посредством величины $S_x R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, если $\vartheta', \vartheta'', \vartheta'''$ вместе с $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ не дают заметных членов в выражениях g_{zy}, g_{xy} (последнее примечание § 13).

с одинаковым коэффициентом e для обоих выражений. Тогда легко видеть, что упругость сдвига тем самым является одинаковой во всех других направлениях y' (рис. 15), перпендикулярных к x , и в плоскостях, проходящих через x , или (принимая во внимание взаимность) одинаковой для всех сдвигов относительно x .

Действительно, подставляя (25) в выражение $p_{xy'} = p_{xy} \cos \beta + p_{xz} \sin \beta$ (формула (21) предыдущего параграфа), получаем:

$$p_{xy'} = e(g_{xy} \cos \beta + g_{xz} \sin \beta),$$

или (§ 7, формула (6))

$$p_{xy'} = e g_{xy'},$$

т. е. вновь соотношение с тем же коэффициентом e для направления y' .

В дальнейшем мы будем часто рассматривать этот случай. Но следует заметить, что он отвечает, между прочим, и совершенно произвольным сочетаниям других коэффициентов. Таким образом, вовсе не требуется, чтобы упругость удлинения или растяжения (зависящая от коэффициентов $p_{y'y'}$ или $p_{z'z'}$) была бы также равной во всех направлениях, перпендикулярных к той же прямой Mx , ни даже того, чтобы упругость при сдвигах в плоскостях, перпендикулярных к x (которая зависит от коэффициентов при $p_{y'z'}$), была бы равной для всех систем взаимно-перпендикулярных прямых y', z' , проведенных в этих плоскостях. Также не требуется, чтобы составляющая p_{xx} по этой прямой Mx зависела бы подобным же образом от $\partial_{y'}$, $g_{xz'}$ и т. д. при произвольных направлениях y' и z' .

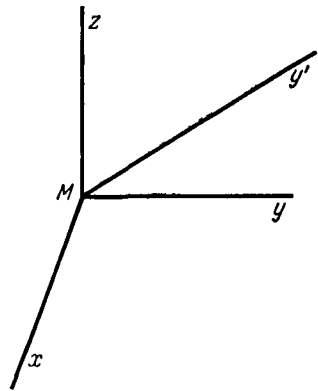


Рис. 15

§ 18. Тело, в котором имеется ось упругости

Когда все условия, о которых мы только что говорили, выполнены, и притом одинаково относительно прямой Mx в смысле сопротивлений заданным перемещениям, или когда (для большей точности) шесть формул, выражающих соста-

вляющие давления через удлинения и сдвиги в направлениях осей x, y, z , сохраняют те же коэффициенты при превращении осей y, z в какие-либо две другие прямые y', z' , перпендикулярные между собой и к оси x , тогда прямая x полностью соответствует тому, что можно назвать *осью упругости*.

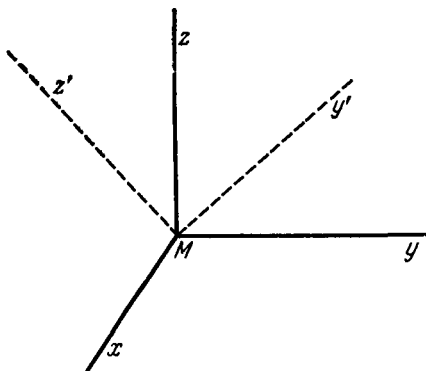


Рис. 16

Для этого необходимо сначала, чтобы коэффициенты не изменялись, когда заменяют только оси z или y их продолжениями, т. е. плоскости xu, xz должны быть двумя плоскостями симметрии (§ 15), или чтобы давления сводились к трехчленным или одночленным выражениям (18), а эти формулы, следовательно, оставались прежними при взаимной замене осей y и z , так что мы должны иметь

$$b = c, \quad f = e, \quad f' = e'', \quad f'' = e', \quad d'' = d'. \quad (26)$$

К этим равенствам следует добавить и другую зависимость

$$b = 2d + d', \quad (27)$$

доказываемую весьма просто.

Пусть My' — биссектриса угла yMz (рис. 16); тогда $p_{y'z'} = dg_{y'z'}$, где d — тот же коэффициент, что и в формуле $p_{yz} = dg_{yz}$. Тогда на основании формулы (8) при $\cos 2\beta = 0$, $\sin 2\beta = 1$ и общей формулы (14) имеем:

$$g_{y'z'} = \partial_z - \partial_y, \quad p_{y'z'} = \frac{P_{zz} - P_{yy}}{2}.$$

Итак, в соответствии с трехчленными выражениями давле-

ний (18), когда $f'' = e'$, $b = c$, $d' = d''$, получаем $p_{zz} - p_{yy} = (b - d')(\partial_z - \partial_y)$; следовательно, $p_{y'z'} = \frac{b-d'}{2} g_{y'z'}$, т. е. выражение, которое для приведения к $dg_{y'z'}$ требует справедливости соотношения (27): $b = 2d + d'$.

В результате для случая, когда ось упругости параллельна x , имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a\partial_x + e''\partial_y + e''\partial_z, & p_{yz} &= dg_{yz}, \\ p_{yy} &= e'\partial_x + (2d + d')\partial_y + d'\partial_z, & \text{и } p_{zx} &= eg_{zx}, \\ p_{zz} &= e'\partial_x + d'\partial_y + (2d + d')\partial_z & p_{xy} &= eg_{xy}. \end{aligned} \right\} (28)$$

Легко установить, что все коэффициенты останутся прежними, каким бы ни был угол β , составленный новыми осями y' , z' с осями y , z .

Общая формула преобразования (14) § 11 дает:

$$\begin{aligned} p_{y'y'} &= p_{yy} \cos^2 \beta + p_{zz} \sin^2 \beta + 2 p_{yz} \sin \beta \cos \beta, \\ p_{y'z'} &= (p_{zz} - p_{yy}) \sin \beta \cos \beta + p_{yz}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta), \end{aligned}$$

или после подстановки выражений (28) p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , которые мы только что написали, получаем:

$$\begin{aligned} p_{y'y'} &= e'\partial_x + d'(\partial_y + \partial_z) + \\ &\quad + 2d(\partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \sin^2 \beta + g_{yz} \sin \beta \cos \beta), \\ p_{y'z'} &= d [(\partial_z - \partial_y) 2 \sin \beta \cos \beta + g_{yz}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)]. \end{aligned}$$

С другой стороны, формулы преобразования (5) нам уже дали (формулы (9) и (8) § 7):

$$\partial_{y'} = \partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \sin^2 \beta + g_{yz} \sin \beta \cos \beta,$$

откуда

$$\partial_{y'} + \partial_{z'} = \partial_y + \partial_z,$$

$$g_{y'z'} = (\partial_z - \partial_y) 2 \sin \beta \cos \beta + g_{yz}(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta).$$

Отсюда следуют формулы:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= a\partial_x + e''(\partial_{y'} + \partial_{z'}), \\ p_{y'y'} &= e'\partial_x + d'(\partial_{y'} + \partial_{z'}) + 2d\partial_{y'}, \quad p_{y'z'} = dg_{y'z'}, \end{aligned}$$

идентичные формулам (28), за исключением штрихов при y и z .

§ 19. Изотропное тело

Если, следовательно, имеется ось упругости, параллельная y , то нужно по тем же соображениям, чтобы

$$e'' = e' = d', \quad a = 2d + d' = 2e + e'$$

и формулы будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= (2e + e') \partial_x + e' \partial_y + e' \partial_z, & p_{yz} &= eg_{yz}, \\ p_{yy} &= e' \partial_x + (2e + e') \partial_y + e' \partial_z, & \text{и } p_{zx} &= eg_{zx}, \\ p_{zz} &= e' \partial_x + e' \partial_y + (2e + e') \partial_z, & p_{xy} &= eg_{xy}. \end{aligned} \right\} (29)$$

Мы видим, что теперь имеется также ось упругости, параллельная третьей координате z .

Когда же заменяют оси y, z на две другие y', z' , но не изменяют ось x и формулы составляющих имеют те же коэффициенты, то видно, что Mu' также является осью упругости.

Следовательно, то же самое будет со всякой другой линией Mu'' , выбранной по желанию в плоскости Mx и Mu' .

Отсюда вытекает, что по отношению к трем взаимно-перпендикулярным осям, направленным совершенно произвольно и пересекающимся в точке M , выражения шести составляющих давления будут иметь такие же коэффициенты, как в только что написанных формулах (29).

Это свидетельствует, по Ламе, что тело обладает упругостью, постоянной или равной во всех направлениях относительно точки M , или, по Коши, что тело является *изотропным*.

Коэффициенты сводятся к двум e и e' и даже к одному, если

$$e = e',$$

как это давно принято, так как молекулы в изотропном теле не имеют периодических размещений, которые наблюдаются в кристаллах и которые единственно казалось могут помешать принять без всякого ограничения принцип равенства 21 коэффициента общих формул какому-либо одному из 15 других коэффициентов (§ 13).

Но изотропия проявляется редко. Не только волокнистые тела, такие, как древесина, прокатное или кованое

железо, но даже зернистые или стекловидные тела, охлажденные от поверхности к центру после их расплавления, могут обладать неодинаковыми упругостями в различных направлениях¹⁾.

§ 20. Соотношения между давлениями и внешними или объемными силами

В предыдущих параграфах (10—19) мы определили связи давлений, представляющих внутренние или взаимные силы, как между собой, так и с перемещениями. Нам остается установить их связи с внешними силами, действующими на тело.

Некоторые из этих сил действуют на отдельные точки или на поверхность. Мы ими займемся в § 22.

Другие силы, такие, как сила тяжести, проявляются во всех точках тела. Если мы рассмотрим только очень малый элемент его объема, то те силы, которые там действуют, должны уравнивать давления, испытываемые его различными гранями, так как (§ 9) эти давления заменяют действия молекул, окружающих этот элемент со всех сторон. Итак, пусть: X, Y, Z — составляющие, параллельные осям x, y, z внешних сил, действующих на единицу объема тела в точке с координатами x, y, z , от которых эти составляющие и зависят; x, y, z — малые размеры по осям x, y, z элемента твердого тела, который мы представляем в виде прямоугольного параллелепипеда, в котором точка M находится в центре; $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{yz} = P_{zy}, P_{zx} = P_{xz}, P_{xy} = P_{yx}$, как и в предыдущих параграфах, — шесть составляющих давления по координатным осям, отнесенных к единице поверхности трех плоских граней, перпендикулярных к осям, центр тяжести которых находится в той же точке M .

¹⁾ Реньо (Regnault), Relations des expériences sur la vapeur..., 1847, ч. 1, седьмой мемуар, стр. 432 (или Mémoires (nouveau) de l'Institut, т. XXI). Критика, которую высказал знаменитый физик по поводу способа вывода формул, относится только к первым исследованиям, где предполагали прежде всего изотропию, отсутствующую, по его наблюдениям, у большинства тел.

Ниже, в § 86 и № 234 l'Introduction á la mécanique industrielle Понселе (1839) можно видеть цитаты из работы Савара по этому вопросу.

Две грани xy этого элемента, перпендикулярные к z (рис. 17), испытывают противоположные давления, которые, будучи разложены, например, в направлении x , будут одно несколько больше, другое несколько меньше давления, испытываемого параллельной гранью, проходящей через M , и

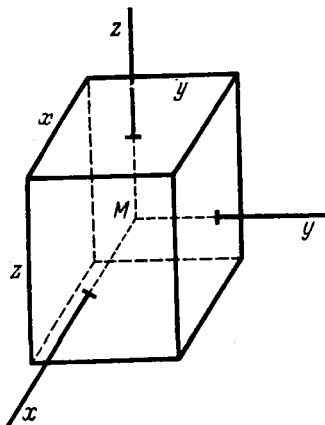


Рис. 17

которое равно на единицу площади p_{zx} . Разница составит дифференциальный коэффициент $\frac{dp_{zx}}{dz}$, умноженный на расстояние z между этими гранями, а также на их площади xy ; равнодействующая этих двух составляющих давления в направлении x будет равна $\frac{dp_{zx}}{dz} xyz$.

Так как можно применить то же рассуждение для разностей давлений, разложенных в том же направлении x и действующих на четыре попарно взятые грани элемента, то

мы получаем для равновесия при поступательном смещении элемента, испытывающего в противоположном направлении действие силы X xyz , уравнение, в котором можно разделить все члены на объем xyz элемента. Таким образом, получаем первое из трех следующих уравнений; два других получаются так же, когда мы выражаем условия равновесия при поступательных смещениях в направлениях y и z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} &= X, \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zy}}{dz} &= Y, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Эти три уравнения (30), данные впервые Коши¹⁾ и являю-

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. II, 1827, стр. 111.

щиеся обобщением уравнений гидростатики, устанавливают искомые соотношения между производными давлений и объемными силами, действующими на все точки тела, либо твердого, либо жидкого, силами, в число которых, если имеется движение, следует включить *силы инерции*, составляющие которых будут $-\rho \frac{d^2 u}{dt^2}$, $-\rho \frac{d^2 v}{dt^2}$, $-\rho \frac{d^2 w}{dt^2}$, где t — время, а ρ — масса единицы объема.

§ 21. Неопределенные дифференциальные уравнения, справедливые во всех точках тела

Имеется возможность установить по заданным силам перемещения точек упругих тел или силы, способные произвести заданные перемещения (§ 1).

Чтобы получить уравнения, применимые для всех точек тела или части тела, нужно только подставить вместо p_{xx} , p_{xy} , . . . в дифференциальные уравнения (30) предыдущего параграфа их выражения (§§ 12—19) через удлинения и сдвиги ∂_x , ∂_y , . . . , g_{xy} , заменив последние величины их выражениями (§ 8) через перемещения u , v , w точек в направлениях осей координат x , y , z .

Неизменно посредством поступательных смещений и поворотов перемещения к очень малым (§ 8) и ограничиваясь при этом только малыми частями тел, можем принять (тот же параграф, формулы (10) и (11))

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \quad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \quad \partial_z = \frac{dw}{dz}, \quad (10)$$

$$g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \quad (11)$$

Отсюда следуют, например, для случая трех главных плоскостей упругости (формулы (18)) выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \frac{du}{dx} + f' \frac{dv}{dy} + e'' \frac{dw}{dz}, & p_{yz} &= d \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{yy} &= f'' \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + d' \frac{dw}{dz}, & p_{zx} &= e \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \\ p_{zz} &= e' \frac{du}{dx} + d'' \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz}, & p_{xy} &= f \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

которые, будучи подставлены в три уравнения (30) $\frac{dp_{xx}}{dx} +$

+ $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = X$ и т. д., дают дифференциальные уравнения, относящиеся к этому случаю трех главных плоскостей упругости, пересекающихся по прямым, параллельным осям x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} a \frac{d^2 u}{dx^2} + f \frac{d^2 u}{dy^2} + e \frac{d^2 u}{dz^2} + (f + f') \frac{d^2 v}{dxdy} + (e + e'') \frac{d^2 w}{dzdx} &= X, \\ f \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^2 v}{dy^2} + d \frac{d^2 v}{dz^2} + (d + d') \frac{d^2 w}{dydz} + (f + f'') \frac{d^2 u}{dxdy} &= Y, \\ e \frac{d^2 w}{dx^2} + d \frac{d^2 w}{dy^2} + c \frac{d^2 w}{dz^2} + (e + e') \frac{d^2 u}{dzdx} + (d + d'') \frac{d^2 v}{dydz} &= Z. \end{aligned} \right\} (32)$$

Если бы не было не только трех главных плоскостей, но даже, может быть, и одной, и мы могли бы привести посредством изменения осей координат составляющие p_{xy}, p_{xz} к одночленной форме (19) или (24) § 16, то получили бы для трех составляющих давления на плоскость, перпендикулярную к оси x , выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \frac{du}{dx} + f' \frac{dv}{dy} + e'' \frac{dw}{dz} + h \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + \\ &\quad + i \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + j \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\ p_{xy} &= f \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), p_{xz} = e \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \end{aligned} \right\} (33)$$

(первое из них имеет самую общую форму).

Отсюда, подставляя в первое уравнение $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = X$ предыдущего параграфа, получим:

$$\begin{aligned} a \frac{d^2 u}{dx^2} + f \frac{d^2 u}{dy^2} + e \frac{d^2 u}{dz^2} + j \frac{d^2 u}{dxdy} + i \frac{d^2 u}{dxdz} + (f + f') \frac{d^2 v}{dxdy} + \\ + (e + e'') \frac{d^2 w}{dxdz} + h \left(\frac{d^2 v}{dxdz} + \frac{d^2 w}{dxdy} \right) + j \frac{d^2 v}{dx^2} + i \frac{d^2 w}{dx^2} = X. \end{aligned} \quad (34)$$

Это, как мы увидим, единственное уравнение, которое нам понадобится для решения задач о кручении.

Так как мы будем пренебрегать силой тяжести и заниматься только задачами равновесия, где силы инерции отсутствуют, то будем обычно полагать в этих уравнениях

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

§ 22. Определенные уравнения, справедливые только в некоторых точках

Имеются, как уже говорилось (§ 20), силы, действующие на некоторые точки тела, которые обычно являются точками внешней поверхности тела или граней раздела частей тела, рассматриваемых последовательно.

Пусть P — отнесенные к единице площади силы, действующие на различные элементы поверхности; n — направления нормалей к этим элементам, могущие изменяться от точки к точке, так же как и интенсивности P .

Силы P должны уравнивать внутренние давления, взятые в противоположном направлении, и они сами могут рассматриваться как *внешние давления*. Итак, в соответствии с теоремой (§ 10) о проекциях плоскостей давлений или в соответствии с тремя уравнениями (13) § 11 получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} \cos \hat{nx} + p_{xy} \cos \hat{ny} + p_{xz} \cos \hat{nz} &= P \cos \hat{Px}, \\ p_{yx} \cos \hat{nx} + p_{yy} \cos \hat{ny} + p_{yz} \cos \hat{nz} &= P \cos \hat{Py}, \\ p_{zx} \cos \hat{nx} + p_{yz} \cos \hat{ny} + p_{zz} \cos \hat{nz} &= P \cos \hat{Pz}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Это *определенные уравнения*, в которые мы подставим для составляющих p_{xx}, \dots, p_{xy} их выражения (15)—(29) через удлинения и сдвиги, а для этих величин их выражения (10) и (11) через перемещения, приведенные, как мы говорили, к очень малым.

Силами или давлениями P , часто задаваемыми во всех точках, где они действуют, мы будем иногда пренебрегать для части внешних поверхностей. Это обычно происходит тогда, когда эти силы сводятся к атмосферному давлению, которое безоговорочно вычитают, так же, впрочем, как и результаты его действия (см. § 30); в таком случае в уравнениях, относящихся к этим частям, принимаем

$$P = 0.$$

Но иногда, следовательно, эти силы, происходящие от взаимодействия двух тел, давящих друг на друга, будут неизвестными. Тогда мы их оставим неопределенными, а так как они войдут в уравнения, относящиеся к каждому из

двух тел, точки которых в месте соприкосновения будут испытывать одинаковые перемещения, то получим, в конечном счете, необходимое число уравнений для определения всех неизвестных.

§ 23. Применение этих уравнений. Прямые, обратные и смешанные задачи

Если перемещения даны повсюду как функции координат, то уравнения, как неопределенные (§ 21), так и определенные (§ 22), о которых мы говорили в начале этого мемуара, дадут, очевидно, в результате простых дифференцирований значения внешних сил X , Y , Z , P , так же как и давления или внутренние силы (см. § 1).

Если, наоборот, как это чаще бывает, силы заданы, а перемещения отыскиваются, то необходимо проинтегрировать общие или неопределенные уравнения (§ 21), находя постоянные или произвольные функции так, чтобы удовлетворить частным условиям, выраженным определенными уравнениями (§ 22).

Наконец, в смешанном случае, где будет задаваться а priori вместе с частью сил часть перемещений или их соотношения (§ 2), заданные значения или соотношения послужат для упрощения дифференциальных уравнений и сделают их более легкими для решения, как будет видно в следующих главах.

§ 24. Условия сопротивления последующему разрушению или прогрессирующему и опасному изменению строения тела

Основной способ вычисления перемещений, производимых силами в первые моменты после их приложения к твердому телу, состоит в определении сопротивления материала непрерывному действию этих сил.

Если удаления или сближения молекул, которые при этом происходят, незначительны, то они прекращаются немедленно или в иных случаях спустя определенное время, производя при этом некоторые незначительные остаточные деформации, которые создают либо только наклеп тела, либо делают более стабильным размещение его частей.

Если перемещения молекул велики, то они возрастают прогрессивно, что приводит к разрыву тела или к такому

изменению его строения и формы, что тело становится неспособным выполнять задачу, для которой оно предназначалось.

Для предотвращения этих явлений необходимо соблюсти условие, чтобы линейное растяжение, положительное или отрицательное (§ 4), нигде не превосходило некоторого предела, изменяющегося вместе с направлением в теле, строение которого неодинаково по всем направлениям.

Чтобы быть уверенным в том, что они не будут проявляться, даже с течением времени, под непрерывным действием сил и ввиду различного рода случайных неизбежных причин, которые расчет не может охватить, принятый предел, как доказывает наблюдение, должен быть весьма ограниченным, чтобы доля остаточных удлинений, если она имеется, была бы очень небольшой. И, таким образом, вышеуказанные формулы могут применяться с большей точностью для определения всех удлинений, которые лежат ниже этого предела или, в крайнем случае, равны ему.

Пусть в теле для данного направления: δ — указанный предел для положительных удлинений; δ' — предел, относящийся к сжатиям или к отрицательным удлинениям, взятым положительными; ϑ — действительное удлинение, вызванное приложенными силами.

Два условия прочности или стабильности сцепления частей тела состоят в том, чтобы во всех точках и по всем направлениям были справедливы соотношения $\delta \geq \vartheta$, $\delta' \geq -\vartheta$ или

$$1 \geq \max \frac{\vartheta}{\delta}, \quad 1 \geq \max \frac{-\vartheta}{\delta'}. \quad (36)$$

Предельному удлинению принято давать обозначение, предложенное математиками (еще до того, как Мариотт сделал наблюдение, «что разрушение тел зависит от степени растяжения»¹⁾), выражавшими сопротивление тел разрыву, ограничивая вместо удлинений усилия, выдерживаемые частями тела. Приведенные условия не всегда дают одинаковый результат. Итак, полагают, что

$$\delta = \frac{R}{E}, \quad (37)$$

¹⁾ Traité du mouvement des eaux, шестой и тринадцатый абзацы второй речи.

где E — величина, называемая *коэффициентом упругости при растяжении* в рассматриваемом направлении, т. е. (см. ниже § 30) отношение между силами на единицу площади поперечного сечения, приложенными в продольном направлении к малой призме, выделенной из тела в этом направлении, и очень малыми удлинениями, ими вызванными.

Такого рода обозначение не представляет затруднений, если мы не забываем, что R представляет попросту произведение $E \delta$, т. е. силу, способную сообщить (также на единицу поверхности) той же призме, предполагаемой изолированной, предельное удлинение δ , относящееся к ее положению в теле, но что R представляет только иногда и не всегда внутренние усилия или давление, передаваемое нормально ее поперечным сечениям, пока она составляет часть тела. Мы увидим даже, что постоянные, такие, как E , которые являются функциями коэффициентов в формулах давления, из которых выводятся действительные удлинения ϑ , довольно часто исчезают из уравнений сопротивления разрыву, содержащих, следовательно, только такие постоянные, как R , так что обозначение предела δ посредством $\frac{R}{E}$ обычно упрощает конечные выражения.

Итак, получаем условие прочности:

$$R \geq E\delta \text{ везде и во всех направлениях,} \quad (38)$$

или $1 \geq \max \frac{E}{R} \vartheta$, которым мы занимаемся и в дальнейшем будем заниматься только в части, относящейся к положительным удлинениям, так как это условие в отношении сжатий трактуется подобным же образом.

Если α, β, γ — углы, образованные с x, y, z направлением, соответственно которому удлинение составляет ϑ , то величина последнего как функция трех удлинений и трех сдвигов в направлениях x, y, z , вычисленная по формуле (5) § 6, дается выражением

$$\begin{aligned} \vartheta = \partial_x \cos^2 \alpha + \partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \cos^2 \gamma + g_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \\ + g_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + g_{xy} \cos \alpha \cos \beta, \quad (39) \end{aligned}$$

которое показывает, что удлинения ϑ распределяются около точки таким же образом, как и моменты инерции

твердого тела, т. е. что обратные величины $\frac{1}{\sqrt{\pm \delta}}$ их квадратных корней, отложенные на прямых, проведенных от этой точки, являются, по замечанию Коши¹⁾, радиусами-векторами эллипсоида, который заменяется двумя сопряженными гиперболоидами, когда одни значения δ положительны, а другие отрицательны.

Вследствие неизвестности закона, связывающего величины предельных удлинений δ в различных направлениях с удлинениями

$$\delta_x, \delta_y, \delta_z,$$

в направлениях x, y, z , которые могут быть единственными, определяемыми экспериментально, мы можем приближенно предположить, что для δ имеется тот же простой способ распределения, который будет мало отличаться от действительного, особенно, когда тело имеет три главные плоскости упругости, с обеих сторон которых строение тела симметрично (§ 15).

Мы примем, следовательно, что если оси x, y, z параллельны трем линиям пересечения этих плоскостей симметрии, существование которых мы всегда будем предполагать, то имеет место формула

$$\delta = \delta_x \cos^2 \alpha + \delta_y \cos^2 \beta + \delta_z \cos^2 \gamma. \quad (40)$$

Условие прочности $\delta \geq \delta$ геометрически будет таково, что эллипсоид $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ будет полностью заключен внутри эллипсоида $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

Аналитически это требует, чтобы значение $\frac{\partial}{\partial \delta}$, которое является наибольшим и для которого получаем, дифференцируя,

$$d \frac{\partial}{\partial \delta} = 0,$$

равнялось бы самое большее единице.

Если в это уравнение, которое сводится к

$$\delta d\delta - \partial d\delta = 0, \quad (41)$$

¹⁾ Exercices, т. II, 1827, стр. 68.

мы подставим вместо ∂ и δ их значения (39) и (40) и произведем дифференцирование по $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, рассматриваемым как три переменные, которые можно представить посредством трех букв a , b , c , то сможем исключить один из трех дифференциалов, например db , с помощью зависимости $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, которая дает $db = -\frac{ada + cdc}{b}$. Так как множители при каждом из двух остающихся дифференциалов da , dc равны порознь нулю, то мы получим два уравнения, которые сводятся к равенству трех дробей:

$$\begin{aligned} & \frac{(2\partial_x \cos \alpha + g_{xy} \cos \beta + g_{zx} \cos \gamma) \delta - 2 \delta_x \partial \cos \alpha}{\cos \alpha} = \\ & = \frac{(g_{xy} \cos \alpha + 2\partial_y \cos \beta + g_{yz} \cos \gamma) \delta - 2 \delta_y \partial \cos \beta}{\cos \beta} = \\ & = \frac{(g_{zx} \cos \alpha + g_{yz} \cos \beta + 2\partial_z \cos \gamma) \delta - 2 \delta_z \partial \cos \gamma}{\cos \gamma}. \end{aligned} \quad (42)$$

В соответствии с замечанием, сделанным Коши для случая, когда нужно получить только максимум ∂ , составляют четвертую дробь той же величины, взяв за ее числитель сумму трех числителей, а за знаменатель — сумму трех знаменателей, после того как числители и знаменатели умножены: в первой дроби на $\cos \alpha$, во второй на $\cos \beta$ и в третьей на $\cos \gamma$. Отсюда получается в знаменателе единица, и в соответствии с (39) и (40) $2 \partial \cdot \delta - 2 \delta \cdot \partial = 0$ для числителя. Каждая из наших трех дробей равняется, таким образом, нулю, что дает три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_x - \partial_x \right) \cos \alpha &= g_{xy} \cos \beta + g_{zx} \cos \gamma, \\ 2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_y - \partial_y \right) \cos \beta &= g_{yz} \cos \gamma + g_{xy} \cos \alpha, \\ 2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_z - \partial_z \right) \cos \gamma &= g_{zx} \cos \alpha + g_{yz} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Исключаем отсюда косинусы, перемножив все три равенства и заменив затем в таких членах, как

$$g_{yz}^2 \cos \beta \cos \gamma (g_{xy} \cos \beta + g_{zx} \cos \gamma),$$

куда один сдвиг входит во второй степени, скобку, которая не что иное, как правая часть одного из трех уравнений, соответствующей левой частью уравнения.

Отсюда следует уравнение третьей степени относительно $\frac{\partial}{\delta}$:

$$4 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_x - \partial_x \right) \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_y - \partial_y \right) \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_z - \partial_z \right) - g_{yz}^2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_x - \partial_x \right) - \\ - g_{zx}^2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_y - \partial_y \right) - g_{xy}^2 \left(\frac{\partial}{\delta} \delta_z - \partial_z \right) - g_{yz} g_{zx} g_{xy} = 0. \quad (44)$$

Оно становится, когда $\delta = \delta_x = \delta_y = \delta_z$, уравнением третьей степени для $\frac{\partial}{\delta}$, данным Коши для нахождения трех главных удлинений, или более известным уравнением для определения трех осей эллипсоида, уравнение которого задано по отношению к каким-либо взаимно-перпендикулярным плоскостям¹⁾.

Ему придают другую форму, замечая, что в случае, когда удлинения $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ равны нулю, так же как и два сдвига g_{yz} и g_{zx} , оно сводится к

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{g_{xy}}{2\sqrt{\delta_x \delta_y}}.$$

Отсюда видно, что когда δ является верхним пределом удлинения ∂ , то $2\sqrt{\delta_x \delta_y}$ является верхним пределом сдвига g_{xy} , который нельзя превысить, не подвергая опасности сплошность тела. Этот предел, так же как аналогичные пределы для g_{yz}, g_{zx} , можно было бы вывести из непосредственных экспериментов по разрушению от скольжения, так же как пределы $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ считаются выведенными из экспериментов по разрушению от удлинения. Если мы представим следующим образом три новых предела:

$$2\sqrt{\delta_y \delta_z} = \gamma_{yz}, \quad 2\sqrt{\delta_z \delta_x} = \gamma_{zx}, \quad 2\sqrt{\delta_x \delta_y} = \gamma_{xy}, \quad (45)$$

то уравнение (44), деленное на $\delta_x \delta_y \delta_z$, запишется так:

$$\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x} \right) \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y} \right) \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z} \right) - \frac{g_{zx}^2}{\gamma_{yz}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x} \right) - \\ - \frac{g_{zx}^2}{\gamma_{zx}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y} \right) - \frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z} \right) - 2 \frac{g_{yz} g_{zx} g_{xy}}{\gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy}} = 0. \quad (46)$$

На том же основании, как и в случае выражения (40) для δ , можно распространить это уравнение на случай, когда

¹⁾ Exercices, т. II, стр. 63 и т. III, стр. 5.

путем ряда наблюдений сдвигов, так же как и заключений, полученных из рассмотрения зданий или машин, части которых подвергаются соответствующим усилиям, конструкторы принимали для пределов $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ значения, мало отличающиеся от значений $2\sqrt{\delta_y \delta_z}, 2\sqrt{\delta_z \delta_x}, 2\sqrt{\delta_x \delta_y}$, данных зависимостями (45). Этими зависимостями можно, впрочем, всегда пользоваться для определения каких-либо из шести постоянных δ и γ через другие, если они все ранее не были предметом специальных опытов.

§ 25. Установление условий прочности. Опасные точки

Решая уравнение (46) относительно $\frac{\partial}{\delta}$, получаем максимум этой дроби для различных прямых, имеющих любые направления и пересекающихся в одной точке. Отыскивая затем среди различных точек тела такую точку, где этот относительный максимум имеет наибольшее значение, и *приравнивая это значение единице, получим необходимое и вполне достаточное условие сопротивления тела разрыву под действием сил, производящих удлинения $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ и сдвиги g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} .*

Это условие служит либо для подбора сил так, чтобы данное тело могло бы им сопротивляться, либо для назначения телу необходимых размеров, чтобы оно успешно сопротивлялось действию заданных сил.

Точка, о которой мы говорим, где получается максимум максимуму отношения $\frac{\partial}{\delta}$ между действительным удлинением и предельным удлинением в том же направлении, названа Понселе *опасной* точкой; в ней предел δ может быть превзойденным и разрушение станет неизбежным.

Эта опасная точка является просто точкой, в которой имеет место наибольшее удлинение, когда тело изотропное (§ 19), т. е. имеет одинаковое строение во всех направлениях, или когда только отношение (37) $\frac{R}{E} = \delta$ между двумя величинами R и E , из которых первая измеряет степень сцепления малых призм, выделенных из тела, а вторая — степень его жесткости, является постоянным. Это должно иметь место почти во всех случаях, если учесть, что самые жесткие

материалы, незначительно удлиняющиеся при заданных усилиях, оказываются весьма трудно разъединимыми.

Часто имеется несколько *опасных точек*, для которых наибольшее значение $\frac{\partial}{\delta}$ одинаково при данном способе приложения сил. Когда в продолговатом теле имеется подобная точка в каждом поперечном сечении, то его называют телом *равного сопротивления*; таковы призмы, растянутые или скрученные силами, приложенными к концам.

§ 26. Условия прочности, когда сдвиги равны нулю или пренебрежимо малы в трех направлениях x, y, z

В том случае, когда в уравнении (46) полагают $g_{yz} = 0$, $g_{zx} = 0$, $g_{xy} = 0$, то оно сводится к своему первому члену, равному нулю, т. е. к

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{\partial_x}{\delta_x}, \text{ или } \frac{\partial}{\delta} = \frac{\partial_y}{\delta_y}, \text{ или } \frac{\partial}{\delta} = \frac{\partial_z}{\delta_z}.$$

Одно из этих решений является подходящим, а именно: наибольшее из трех.

Если это, например, $\frac{\partial_x}{\delta_x}$, то условие прочности будет иметь вид:

$$1 \geq \max \frac{\partial_x}{\delta_x} \text{ или } R_x \geq E \partial_x, \quad (47)$$

где R_x, E_x — значения R и E в направлении x .

§ 27. Условия прочности, когда рассматриваются только сдвиги

В этом мемуаре, основным содержанием которого является кручение призм, мы будем часто рассматривать случаи, когда

$$\partial_x = 0, \quad \partial_y = 0, \quad \partial_z = 0, \quad g_{yz} = 0, \quad (48)$$

т. е. когда нет никакого удлинения ни в направлении x , ни в других перпендикулярных к нему направлениях (ибо выражение (9) $\partial_{y'} = \partial_y \cos^2 \beta + \partial_z \sin^2 \beta + g_{yz} \sin \beta \cos \beta$ § 7 показывает, что тогда $\partial_{y'}$ равно нулю при любом угле β , образованном y' с y).

Тогда уравнение (46) сводится к

$$\frac{\partial}{\delta} = \sqrt{\frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^2} + \frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^2}}, \quad (49)$$

а условие сопротивления разрушению должно выполняться для всех точек и имеет вид:

$$1 \geq \frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^2} + \frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^2}. \quad (50)$$

При построении эллипса, полуоси в направлениях осей y и z которого равны $OG' = \gamma_{xy}$, $OG'' = \gamma_{xz}$ (рис. 18),

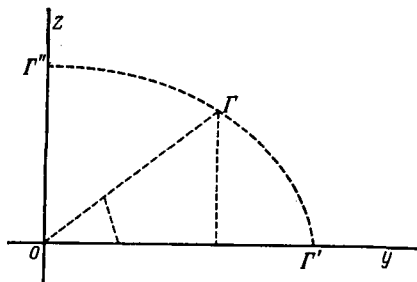


Рис. 18

главный сдвиг $g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ нигде не превышает радиус-вектор OG в том же направлении.

Опасная точка находится там, где величина $\frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^2} + \frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^2}$ имеет наибольшее значение. Это такая точка, где главный сдвиг наибольший, когда $\gamma_{xy} = \gamma_{xz}$ или когда $2\sqrt{\delta_x \delta_y} = 2\sqrt{\delta_x \delta_z}$, откуда $\delta_y = \delta_z$, т. е. когда (в соответствии с выражением (40) $\delta = \delta_x \cos^2 \alpha + \delta_y \cos^2 \beta + \delta_z \cos^2 \gamma$) пределы удлинения равны во всех направлениях, составляющих одинаковый угол с осью z , такой же, каким мы его будем предполагать в главах VI, VII, VIII, IX.

Подобно тому как границы удлинений выражались (§ 24) посредством дроби $\frac{R}{E}$, принято выражать пределы сдвигов по формулам:

$$\gamma_{xy} = \frac{T'}{G'}, \quad \gamma_{xz} = \frac{T''}{G''}, \quad (51)$$

где G' и G'' — не что иное, как коэффициенты упругости при сдвиге, обозначенные выше через f и e или f''' и e'''' (формулы (18) и (24) §§ 15 и 16), которые после умножения на сдвиги дают касательные напряжения, отнесенные к единице площади граней, где они действуют; T' , T'' — не что иное, как величины этих напряжений или составляющие давления $p_{xy} = G' g_{xy}$, $p_{xz} = G'' g_{xz}$, когда сдвиги достигают предельных значений γ_{xy} , γ_{xz} .

Таким образом, условие прочности при сдвиге выражается посредством формулы

$$1 \geq \left(\frac{G' g_{xy}}{T'} \right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''} \right)^2. \quad (52)$$

Когда прямые, параллельные x , являются осями симметрии, относительно которых строение тела одинаково как в отношении упругости, так и в отношении сцепления, или когда только предельные удлинения одинаковы относительно этих прямых, то это условие сводится к

$$T \geq \max G g_x, \quad (53)$$

где $\frac{T}{G}$ представляет собой общее значение $\frac{T'}{G'} = \frac{T''}{G''}$.

§ 28. Различные виды разрушений

Уравнения предыдущих параграфов не позволяют предвидеть или объяснить то, что может происходить при разрушениях, начиная с того мгновения, когда они начинают обнаруживаться. С этого мгновения напряжения меняются во всем теле; опасная точка занимает ряд новых положений, и разделение происходит *последовательно*; так же, как это заметил Вика для случая вырывания железного таврового стержня, жестко заделанного в камень, поверхность разрушения может быть совершенно отличной от поверхности, на которой сумма сил, необходимых для одновременного разрушения, была бы наименьшей. Это случается также, когда разрушение при кручении началось в какой-то точке; оно заканчивается для некоторых зернистых малосвязных материалов, которыми пользовался этот знаменитый инженер, некоторого рода изгибом относительно линий, сильно наклоненных к ребрам призм. Предыдущая теория имеет

целью предусмотреть *начало разрушения* и исключить подобные возможности, даже отдаленные. Нельзя ничего возразить против точности этой теории и против того, что она не учитывает ни обстоятельств, ни фазы процесса; это было бы так же трудно, как и бесполезно.

Заметим также, что раз всякий сдвиг относительно x в плоскости, проходящей через x и через перпендикулярную к нему линию y (рис. 19),

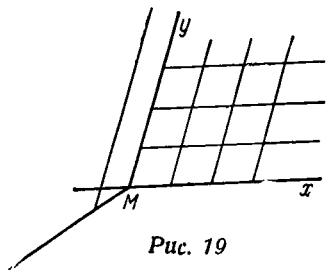


Рис. 19

сопровождается (§ 4) равным сдвигом относительно y и в той же плоскости, то вызываемое им разрушение может происходить либо параллельно первой, либо второй из этих двух линий.

Хотя сдвиг имеет и сохраняет до конца одинаковую величину как относительно x , так и относительно y , можно обнаружить в этом случае значительную разницу между силой, способной производить *разрушение* или *разъединение при сдвиге относительно друг друга* материальных линий, параллельных y , и силой, необходимой для *разъединения при сдвиге относительно друг друга* материальных линий, параллельных x .

Итак, что же произойдет? Разрушение, если оно имеет место при сдвиге, произойдет в том из двух соотносительных направлений, где оно наиболее возможно. Следовательно, призмы из дерева или из волокнистого железа, части которых при кручении или другой деформации подвергаются сдвигу по отношению друг к другу, разрушаются обыкновенно, *расщепляясь в продольном направлении*, т.е. сдвигом волокон по отношению друг к другу, а не при поперечном *разъединении сечений*, которое потребовало бы силу гораздо более значительную.





ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ В ПРОСТОМ СЛУЧАЕ РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ ПРИЗМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

§ 29. Постановка задачи.

**Предварительное решение другой задачи,
обратной по отношению к первой**

Возьмем призму или цилиндр с произвольным основанием, испытывающие в поперечном направлении только нормальное и постоянное давление — Q (им может быть атмосферное давление или давление всякой жидкости).

В то же время их основания испытывают на единицу поверхности, кроме указанного воздействия — Q , также *постоянное и нормальное растягивающее усилие P* .

Таким образом, поскольку *давления*, определенные в предыдущей главе, предположены действующими в положительном направлении прямых, перпендикулярных к граням, на которых они проявляются, то считают, что боковые грани испытывают нормальное давление — Q , а основания — нормальное давление $P - Q$ на единицу поверхности.

Нам предстоит определить перемещения точек этой призмы.

Хотя этот вопрос и является почти самым простым вопросом подобного рода, однако его трудно решить, исходя из неопределенных (32) и определенных (35) дифференциальных уравнений, даже для частного случая призмы с прямоугольным основанием, одинаковой упругостью во всех направлениях и при отсутствии бокового давления $Q = 0$;

решение задачи кажется совсем невозможным при произвольном контуре основания.

Но мы скоро узнаем, каково решение задачи о перемещениях, вызванных данными силами, изучив сначала задачу о силах, способных вызвать данные перемещения (§ 1).

И здесь нет даже необходимости использовать смешанный способ (§ 2) или задаваться одновременно перемещениями и силами.

Итак, задаемся такими перемещениями, чтобы удлинения в каждом из трех направлений x, y, z линий пересечения главных плоскостей упругости (§ 15) были бы одинаковыми во всей призме и представленными тремя постоянными $\partial_x, \partial_y, \partial_z$, причем направление x было бы параллельно ребрам призмы и чтобы сдвиги g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} повсюду равнялись бы нулю.

Трехчленные и одночленные формулы (18) § 15, давая общие выражения составляющих давления через удлинения и сдвиги для этого случая трех главных плоскостей, показывают нам, что тогда во всей призме:

- 1) нормальные составляющие p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} постоянны;
- 2) касательные же составляющие p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} равны нулю.

Результаты решения задачи прямого отыскания сил, которую мы положим в основу вместо поставленной обратной задачи, не противоречат друг другу, ибо, кроме того, что имеются, очевидно, значения u, v, w , соответствующие удлинениям и сдвигам, которыми мы задаемся, также удовлетворяются неопределенные уравнения, взятые, например, в виде (30) § 20: $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0$ и т. д.

Внешние растягивающие усилия или давления, которые отсюда последуют, будут значениями P , найденными из определенных уравнений (35), а именно давлением на торцы призмы, которые перпендикулярны к x , при $\cos nx = 1$, $\cos ny = 0$, $\cos nz = 0$ и давлением на боковую поверхность при $\cos nx = 0$, так как всякая нормаль n к этой поверхности перпендикулярна к оси x .

Отсюда для торцов получаем, что давление, которое можно скорее назвать напряжением или *растягивающим усилием*, должно быть постоянным и равным p_{xx} , т. е. $\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z$, что является очевидным.

Для внешнего давления Π на боковой поверхности получаем уравнения (см. формулы (35)):

$$0 = \Pi \cos \widehat{\Pi x}, \quad p_{yy} \cos \widehat{\Pi y} = \Pi \cos \widehat{\Pi y}, \quad p_{zz} \cos \widehat{\Pi z} = \Pi \cos \widehat{\Pi z},$$

которые дают:

$$\cos \widehat{\Pi x} = 0, \quad \operatorname{tg} \widehat{\Pi y} = \frac{p_{zz}}{p_{yy}} \operatorname{tg} \widehat{\Pi z},$$

$$\Pi = \sqrt{p_{zz}^2 \cos^2 \widehat{\Pi z} + p_{yy}^2 \cos^2 \widehat{\Pi z}},$$

т. е. обычно Π переменна по величине и по направлению, но если удлинения $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ таковы, что

$$p_{yy} = p_{zz},$$

то внешнее давление нормально к боковой поверхности и сводится к

$$\Pi = p_{yy} = p_{zz}. \quad (54)$$

§ 30. Полное решение поставленной задачи

Выводы из решения вопроса о силах дают нам все необходимые материалы для решения обратной задачи о перемещениях, поставленной в начале этой главы.

Мы удовлетворяем полностью, как это видно, общим неопределенным уравнениям и определенным уравнениям, выражающим то, что боковое усилие должно быть нормальным и равным $-Q$, а продольное растяжение, также нормальное, равно $P - Q$ на единицу площади, если берем давления такими, что три сдвига равняются нулю, а три удлинения определяются из трех уравнений (31): $p_{xx} = a \frac{du}{dx} + f' \frac{dv}{dy} + e'' \frac{dw}{dz}$ и т. д. Таким образом, мы берем u, v, w такими, чтобы при $p_{xx} = P - Q, p_{yy} = p_{zz} = -Q$ были справедливы выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{(bc - d' d'') p_{xx} - (cf' - d'' e'') p_{yy} - (be'' - f' d') p_{zz}}{abc + d' e' f' + d'' e'' f'' - ad' d'' - be' e'' - cf' f''}, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{-(cf'' - d' e') p_{xx} + (ca - e' e'') p_{yy} - (ad' - e'' f'') p_{zz}}{abc + d' e' f' + d'' e'' f'' - ad' d'' - be' e'' - cf' f''} = \\ &= \frac{-(cf'' - d' e') \frac{du}{dx} + c p_{yy} - d' p_{zz}}{bc - d' d''}, \end{aligned} \right\} (55)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-(be' - f'' d'') p_{xx} - (ad'' - e' f') p_{yy} + (ab - f' f'') p_{zz}}{abc + d' e' f' + d'' e'' f'' - ad' d'' - be' e'' - cf' f''} = \left. \begin{aligned} & - (be' - f'' d'') \frac{du}{dx} - d'' p_{yy} + b p_{zz} \\ & = \frac{- (be' - f'' d'') \frac{du}{dx} - d'' p_{yy} + b p_{zz}}{bc - d' d''} ; \end{aligned} \right\} (55)$$

$$\frac{dv}{dz} = - \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = - \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} = - \frac{dv}{dx}. \quad (56)$$

Перемещения u, v, w , решающие задачу, т. е. имеющие нужные первые производные, определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= \partial_x x + t_x + r_y z - r_z y, & v &= \partial_y y + t_y + r_z x - r_x z, \\ w &= \partial_z z + t_z + r_x y - r_y x, \end{aligned} \right\} (57)$$

где $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ (для сокращения) — правые части трех уравнений (55) или три только что найденные постоянные удлинения, а $t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z$ — шесть очень малых постоянных произвольных величин, которые представляют собой, как легко видеть, три поступательных смещения точек тела параллельно осям x, y, z и три поворота вокруг тех же осей.

Эти поступательные смещения и повороты равны нулю, когда призму считают закрепленной одним из ее концов так, чтобы одна из ее точек (например, та, которую принимаем за начало координат) оставалась неподвижной, так же как направления одной прямой и одной плоскости, которые проходят через эту точку.

Тогда получаем просто

$$u = \partial_x x, \quad v = \partial_y y, \quad w = \partial_z z, \quad (58)$$

где $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ представляют собой всегда правые части уравнений (55) при $p_{xx} = P - Q, p_{yy} = p_{zz} = -Q$. Перемещения точек призмы пропорциональны соответствующим координатам.

Таким образом, мы видим, что если $-Q$ сводится к атмосферному давлению, которым обычно пренебрегают, или, лучше сказать, если мы отыскиваем только перемещения, вызванные растягивающими усилиями без перемещений, уже произведенных усилием $-Q$, действующим со всех сторон на тела, находящиеся в атмосфере, то, отбрасывая в выражениях (55) все, что они дают для $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -Q$, или, что то же самое, взяв их значения при $p_{yy} = p_{zz} = 0$

и $p_{xx} = P$, получим следующие соотношения между продольным удлинением ∂_x и удлинениями ∂_y, ∂_z или, скорее, поперечными сжатиями $-\partial_y, -\partial_z$:

$$-\partial_y = \varepsilon \partial_x, \quad -\partial_z = \varepsilon' \partial_x, \quad (59)$$

полагая

$$\varepsilon = \frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''}, \quad \varepsilon' = \frac{be' - f'd''}{bc - d'd''};$$

продольное же растягивающее усилие, производящее удлинение ∂_x , ему пропорционально:

$$P = E\partial_x,$$

где

$$E = \frac{abc + d'e'f' + d''e''f'' - ad'd'' - be'e'' - cf'f''}{bc - d'd''}. \quad (60)$$

Эта величина E является, по Навье, коэффициентом упругости при растяжении, о чем мы уже говорили в §§ 16 и 24¹⁾.

Выражения (59) и (60) сводятся в случае, когда ось x является осью упругости (§ 19), $b = c = 2d + d', d' = d'', e' = f', e'' = f'', k$

$$\left. \begin{aligned} -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{2} \frac{e'}{d+d'} \partial_x, \quad E = a - \frac{e'e''}{d+d'}, \\ \text{или, если имеется изотропия, когда } d' = e' = e'', \\ d = e, \quad a = 2e + e', \text{ то к} \\ -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{2} \frac{e'}{e+e'} \partial_x, \quad E = e \left(2 + \frac{e'}{e+e'} \right), \\ \text{или, если } e' = e \text{ (§§ 13, 19), то к} \\ -\partial_y = -\partial_z = \frac{1}{4} \partial_x, \quad \varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5}{2} e. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

¹⁾ Ламе (Leçons sur l'élasticité, конец § 29, стр. 75) дает это название обратной величине того же коэффициента, т. е. числу $\frac{1}{E}$, на которое нужно умножить растягивающее усилие или продольное давление p_{xx} , чтобы получить удлинение $\partial_x = \frac{du}{dx}$, когда боковые давления равны нулю; это число, как сказал Комб (Combes, Exploitation des mines, гл. V, стр. 444), сводится к удлинению, которое получает призма при нагрузке в 1 кг на единицу площади ее сечения.

Эти выводы известны с давних пор, но некоторые ученые сомневались в их теоретической правильности и рассматривали их в некотором роде только как допустимые, так как им казалось, что они могут быть получены только посредством частных или неполных интегралов, в выборе которых имелись некоторые произвольные и гипотетические моменты. Мы видим, что они дают точное и полное решение вопроса для рассмотренного частного случая, т. е. в предположении постоянных P и Q , поскольку они удовлетворяют всем условиям, как неопределенным, так и определенным¹⁾.

Эти интегралы дают единственное решение задачи, так как перемещения полностью определяются, когда вместе с растягивающими усилиями и давлениями на всех точках поверхности тела задают положение одной из его точек, направление одной из его прямых и одну из его материальных плоскостей; ни прямым, ни косвенным путем нельзя получить другие значения перемещений, удовлетворяющие этим условиям, кроме найденных.

Следовательно, решения, которые Фурье дал задачам распределения тепла в различных частных случаях в зависимости от формы тел и температур их поверхности, рассматриваются как полные. Эти решения построены так, чтобы удовлетворять неопределенному условию, выраженному общим дифференциальным уравнением; они имеют коэффициенты, выбранные так, чтобы удовлетворить определенным условиям на границах; этих условий достаточно, чтобы сделать любую задачу полностью определенной.

Если мы, кроме того, хотим убедиться в единственности решения способом, кажущимся более аналитическим, то мы должны положить

$$\left. \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \text{найденным выражениям (58) плюс три неизвестные} \left\{ \begin{array}{l} u' \\ v' \\ w' \end{array} \right.$$

и подставить в уравнения задачи.

¹⁾ Ламе и Клапейрон первые получили их для случая одинаковой упругости простым способом, который состоит в выборе *a priori* для удлинений выражений некоторого вида, пригодных также и в других задачах подобного рода, в их прекрасном мемуаре о внутреннем равновесии однородных твердых тел, представленном в 1828 г. (*Savants étrangers*, 1829, § 40, стр. 407).

Мы увидим, что u' , v' , w' будут перемещениями точек призмы, вызванными нулевыми силами. Эти перемещения окажутся сами по себе равными нулю. Таким образом, наши выражения дают полное и единственное решение.

§ 31. Перемещения, не являющиеся очень малыми

Все выводы получены в предположении, что перемещения u , v , w очень малы, так как только подобные перемещения входят в дифференциальные уравнения главы I.

Однако они применяются к перемещениям, как продольным, так и поперечным, имеющим величины, могущие стать настолько значительными, как мы того пожелаем, сохраняя в то же время связи, необходимые для сохранения сплошности тела. Для этого достаточно, чтобы относительные перемещения были бы очень малы в каждой из малых частей, на которые можно разделить призму (§ 5).

Действительно, для каждой из этих частей, которые можно представлять разделенными гранями, перпендикулярными к осям x , y , z , удлинения $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ будут иметь выражения (55). Следовательно, малые перемещения, отнесенные к плоскостям координат, перемещенным на грани раздела и меняющимся от грани к грани, будут иметь выражения (58):

$$u = \partial_x x, \quad v = \partial_y y, \quad w = \partial_z z.$$

Складывая последовательно перемещения точек каждой грани раздела с малыми относительными перемещениями точек следующей части тела, мы получаем для абсолютных или полных перемещений те же выражения (58):

$$\partial_x x, \quad \partial_y y, \quad \partial_z z,$$

сложенные с такими общими поступательными смещениями и поворотами, которые нужно будет придать первой из малых частей призматического тела и которые добавляются к перемещениям всех других.

Найденные выражения предыдущего параграфа подходят, следовательно, к перемещениям любой величины, происходящим в пределах безграничного сохранения сплошности призмы. При этом имеется только это единственное

ограничение, которое касается лишь формы общих выражений перемещений (57), какими бы очень малыми ни были общие произвольные движения. Необходимо придать этим результатам выражения, отличающиеся от r_{yz} — r_{zy} и т. д., которые будут содержать тригонометрические линии конечных углов вращения. Нам нет необходимости заниматься здесь этими более сложными формулами, пример которых мы увидим в § 60, так как рассмотрение общих вращений обычно бесполезно, а способ их вычисления не относится к рассматриваемому вопросу.

§ 32. Более общая задача. Однородная призма без плоскости упругости

Решение, данное в этой главе, может распространяться с некоторым видоизменением на прямоугольную призму, *однородную*, но без главной плоскости упругости, основания или грани которой испытывают попарно нормальные и равные давления и могут выдерживать также касательные давления, составляющие которых p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} одинаковы на различных гранях. Оно пригодно даже при гораздо более общей постановке задачи, а именно при определении перемещений точек тела произвольной формы, поверхность которого испытывала бы давления P (уравнения (35)), имеющие повсюду одни и те же шесть составляющих: $p_{xx} = P$, $p_{yy} = P'$, $p_{zz} = P''$, $p_{yz} = Q$, $p_{zx} = Q'$, $p_{xy} = Q''$.

Действительно, если мы приравниваем эти шесть составляющих P , P' , P'' , Q , Q' , Q'' , полагаемых данными, шести-членным выражением (15): $p_{xx} = A_{xx} \partial_x + A_{yy} \partial_y + A_{zz} \partial_z + A_{yz} g_{yz} + A_{zx} g_{zx} + A_{xy} g_{xy}$; $p_{yy} = A'_{xx} \partial_x +$ и т. д., то получаем шесть уравнений первой степени, из которых можно найти значения величин ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} . Эти значения удлинений и сдвигов во всем теле удовлетворяют одновременно общим неопределенным уравнениям (30) и определенным уравнениям (35). Таким образом, перемещения u , v , w , дающие удлинения и сдвиги, постоянные во всем теле, можно выразить как функции первой степени от x , y , z и тем самым полностью решить поставленную задачу.

Если, например, для *призматического тела с произвольным основанием* имеем на торцах нормальные давления или растяжения $p_{xx} = P$ и не имеем никакого давления

на боковой грани, то необходимо в шести уравнениях (15): $p_{xx} = A_{xx} \partial_x + A_{yy} \partial_y +$ и т. д., положить $p_{xx} = P$, $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$, $p_{zx} = 0$, $p_{xy} = 0$, что даст при исключении сдвигов g , так же как и боковых удлинений ∂_y и ∂_z , и обозначении через E некоторой функции 36 (или 15) коэффициентов A_{xx} и т. д., т. е. некоторой постоянной, аналогичной той, которая представлена (§ 30) буквой E , выражение

$$\partial_x = \frac{P}{E}, \quad P = E \partial_x. \quad (62)$$

Следовательно, обозначая через ε , ε' , η , η' , η'' пять других функций тех же постоянных коэффициентов, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \partial_y &= -\varepsilon \partial_x, \quad \partial_z = -\varepsilon' \partial_x, \quad g_{yz} = \eta \partial_x, \\ g_{zx} &= \eta' \partial_y, \quad g_{xy} = \eta'' \partial_z. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Отсюда видно, что даже когда материал не имеет плоскостей симметрии или когда эти плоскости (как в деталях из слоистого материала или материала с косыми волокнами) не перпендикулярны и не параллельны ребрам, то однородная призма (§ 14), растянутая или сжатая в продольном направлении, одинаково нагруженная на ее основаниях и не подвергающаяся в боковом направлении никакому давлению (или единственно только атмосферному давлению, эффект которого безоговорочно исключают, как в § 30), будет испытывать, так же как призма, которая имеет три главные плоскости, из которых одна перпендикулярна к ее ребрам, продольное удлинение, пропорциональное растягивающим усилиям на основаниях¹⁾, а кроме того, *сдвиги*, которые также пропорциональны этим усилиям и превращают призму в слегка косоугольную.

§ 33. Применение этих выводов на практике

Все допускают возможность этого применения и обычно уверенно пользуются, чтобы получить продольное удлинение различных частей однородной призмы, выражениями (60) или (62): $\partial_x = \frac{P \omega}{E \omega} = \frac{P}{E}$. Здесь $P \omega$ — равные между

¹⁾ Коши, Exercices, т. IV, 1829, стр. 19.

собой равнодействующие сил, которые растягивают призму в направлениях, взаимно противоположных. Эти равнодействующие должны проходить, та и другая, приблизительно через центры тяжести сечений ω , считаемых по форме достаточно правильными. E — коэффициент, определенный по той же формуле посредством предварительных экспериментов, проделанных с другими призмами из того же материала.

Однако мы видели, что это выражение (60) является точным только при условии, что растягивающая сила $P\omega$ приложена к двум крайним основаниям призмы и равномерно распределена во всех точках каждого основания, что не всегда возможно.

Итак, отсюда следует, что выражение (60) довольно хорошо представляет действительное положение вещей и этого, следовательно, достаточно, чтобы считать, что равнодействующие должны быть только равными и направленными по оси фигуры, каким бы ни был способ приложения и распределения внешних растягивающих сил.

Если считать, что подобное состояние, представленное вышеуказанными формулами $p_{xx} = \text{const}$, $p_{xy} = p_{xz} = 0$, имеет место на двух каких-либо сечениях, крайних или некрайних, т. е. если растягивающие силы там равны и нормальны во всех точках, то такое же состояние будет тем самым иметь место на всех промежуточных сечениях, как это следует из предыдущего анализа. (При этом давления на боковых гранях в соответствии с гипотезой равны нулю или постоянны и нормальны на любом участке.) Отсюда можно заключить, что это состояние одинакового распределения растягивающих усилий в различных точках сечений является своего рода предельным состоянием, к которому сводится действительное внутреннее состояние призмы по мере того, как рассматривают сечения, все более и более удаленные от концов, где растягивающие силы могут быть приложены иначе. Для большого числа явлений, таких, как распределение тепла при действии постоянных источников и при наличии начальных условий, действительное и изменяющееся состояние также сводится более или менее быстро к конечному состоянию, способному удерживаться в неизменном виде. Тогда влияние начального состояния уже более не проявляется.

Опыт при отсутствии расчета (§ 1) показывает, что постоянство продольного удлинения устанавливается уже на малых расстояниях от точек приложения растягивающих сил¹⁾, даже когда последние действуют с боков, а не на основаниях.

Это предположение влечет за собой другие допущения, такие, как равенство нулю сдвигов и т. п., справедливые за исключением точек, очень близких к точкам приложения сил. Имеются только эти особые точки (здесь можно всегда усилить детали, если приходится опасаться разрушения), где перемещения происходят по сложным законам, которые мало полезно или вовсе бесполезно исследовать путем трудного и, может быть, невозможного интегрирования, связанного с неизвестным пока преодолением других трудностей, относящихся к численному решению интегралов, которое представляло бы, вероятно, серьезное осложнение, если судить по некоторым аналогиям.

Наш метод приведет также и в других случаях (§§ 41, 58, 73 и т. д.) к аналогичным условиям постоянства закона перемещений по всей призме или покажет, каким образом давления должны распределяться на двух сечениях, чтобы тем самым распределяться подобным же образом на всех сечениях части призмы. Это даст нам пределы применимости решения, достаточные для практических целей, без разыскания того, что происходит в очень малых объемах, начиная от точек, где действуют внешние силы. Не требуется также определения (что было бы тоже достаточно трудным) способа, посредством которого эти силы, приложенные обычно со стороны других твердых тел, распределяются на гранях контакта с рассматриваемым телом.

¹⁾ Понселе, Introduction à la mécanique industrielle, 1839, § 240, стр. 285.





ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К ИЗГИБУ ПРИЗМЫ

§ 34. Изгиб по дуге окружности. Смешанный, или подуобратный, метод, которым мы воспользуемся

Точное и общее определение перемещений точек призмы под действием сил, которые стремятся ее изогнуть, не удавалось до настоящего времени, несмотря на настойчивые исследования математиков.

Мы не можем применить, даже в самом простом случае, способ, состоящий в том, что задаются только перемещениями и производят лишь дифференцирования, как в предыдущей главе. Действительно, мы можем задать такие продольные перемещения, чтобы имелся изгиб, но мы не можем выбрать а priori выражения соответствующих поперечных перемещений такими, чтобы иметь какую-либо возможность для получения совокупности значений перемещений и сил, приближающейся к условиям задачи.

Но приняв промежуточный или смешанный путь, состоящий в том, что задаются частью перемещений или их соотношениями и частью сил (§ 2), чтобы отыскать другие силы и другие перемещения, мы точно решим, как это сейчас увидим, задачи изгиба, которым можно более и менее точно уподобить большинство практических задач.

Итак, мы предположим сначала, что упругая призма с произвольным основанием изогнута равномерно по всей своей длине, так что ее материальные линии, первоначально прямые и параллельные ребрам, превратились в дуги концентрических окружностей, и что прямые сечения остались

плоскими и нормальными к этим линиям — в этом и состоит способ задания части перемещений.

Предположим далее, что внешние боковые давления равны нулю (см. общий случай в § 37), т. е. зададимся частью сил. В условиях, в которых тела обычно находятся, как мы уже говорили, атмосферное давление производит только ничтожные действия или, вернее, заранее учтенные и безоговорочно исключаемые эффекты, которые не следует принимать во внимание (§ 30).

Будем искать *другие перемещения и другие силы*, т. е. определять, какими являются поперечные перемещения и какими должны быть силы, приложенные к различным точкам крайних оснований, чтобы производить равномерный изгиб, или *круговой изгиб*.

§ 35. Исследование выражений для перемещений

Возьмем за начало координат точку O одного из нормальных сечений AB призмы (рис. 20), ось x проведем параллельно ребрам, за ось Oy примем прямую, проведенную в плоскости этого сечения параллельно оси $O'O''$, на которой находятся центры всех дуг окружностей, в которые превращаются при перемещениях ребра и другие молекулярные волокна, параллельные оси x . Ось z будет прямой $O'Oz$, равным образом проведенной в плоскости поперечного сечения AB перпендикулярно к оси кривизны $O'O''$. Мы считаем, что материал призмы имеет три главные плоскости упругости (§ 15), перпендикулярных к этим трем осям координат.

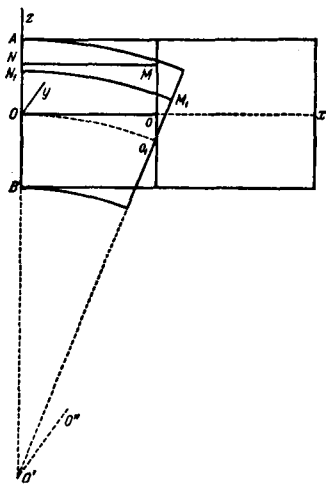


Рис. 20

Когда часть материальной линии $Oo = x$, сливающаяся первоначально с осью x , превратится в дугу окружности Oo_1 , то материальная точка M , координаты которой

были

$$x, y, z,$$

переместится в M_1 на сечении, которое теперь является плоскостью, проходящей через o_1 и через ось $O'O''$. И точка M будет иметь в этом новом своем положении координаты

$$x + u, y + v, z + w.$$

Итак, пусть v_0, w_0 — значения v и w при $x = 0$, т. е. для точки N — проекции точки M на плоскость поперечного сечения AB , которое является координатной плоскостью yOz ; ρ — радиус $O'O = O'o'$ дуги Oo' .

Так как эти перемещения превращают прямую NM в дугу окружности N_1M_1 , радиус которой равен $\rho + z + w_0$, а центральный угол будет $\frac{Oo'}{\rho}$, то получаем координаты M_1 , считая сначала, что ось призмы не изменяет своей длины (см. § 37):

$$x + u = (\rho + z + w_0) \sin \frac{x}{\rho}; \quad y + v = y + v_0;$$

$$z + w = z + w_0 - (\rho + z + w_0) \left(1 - \cos \frac{x}{\rho}\right).$$

Заменяя синус его дугой, а косинус — единицей минус полуквадрат той же дуги, так как перемещения, а следовательно, и кривизна этой дуги считаются очень малыми (см. далее § 39 для случая, когда они были бы большими), и пренебрегая по обыкновению очень малыми величинами второго порядка, т. е. квадратами и произведениями величин w_0 и $\frac{x}{\rho}$, получаем:

$$u = \frac{xz}{\rho}, \quad v = v_0, \quad w = w_0 - \frac{x^2}{2\rho}. \quad (64)$$

Остается определить значения v_0, w_0 или поперечные перемещения в сечении AB , плоскость которого остается неподвижной, при условии, что боковые давления на поверхности призмы равны нулю и выполняются определенные уравне-

ния (35) § 22 с $\Pi = 0$, $\cos \widehat{nx} = 0$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} \cos ny + p_{xz} \cos nz &= 0; \\ p_{yy} \cos ny + p_{yz} \cos nz &= 0, \quad p_{yz} \cos ny + p_{zz} \cos nz = 0 \end{aligned} \right\} (65)$$

и одновременно удовлетворяются три неопределенных уравнения (32) для случая трех главных плоскостей упругости. Если в трех определенных уравнениях (65), которые мы только что написали, подставить вместо составляющих давления p трехчленные и одночленные выражения (18) § 15 и если вместо производных $\frac{du}{dx}$ и т. д. подставить их значения, полученные из только что установленных нами выражений (64) для u , v , w , то первое из этих трех уравнений (65) удовлетворяется само собой, а два других, если учесть, что v_0 и w_0 являются функциями только y и z , а не x , принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(f'' \frac{z}{e} + b \frac{dv_0}{dy} + d' \frac{dw_0}{dz} \right) \cos ny + d \left(\frac{dv_0}{dz} + \frac{dw_0}{dy} \right) \cos nz &= 0, \\ d \left(\frac{dv_0}{dz} + \frac{dw_0}{dy} \right) \cos ny + \left(e' \frac{z}{e} + d'' \frac{dv_0}{dy} + c \frac{dw_0}{dz} \right) \cos nz &= 0. \end{aligned} \right\} (66)$$

Если, для удовлетворения этих уравнений мы приравняем нулю каждую из трех скобок, на которые умножают косинусы, что является попыткой узнать, могут ли считаться равными нулю порознь составляющие давления p_{yy} , p_{yz} , p_{zz} не только на поверхности, но также и внутри всей изогнутой призмы, то получаем, вводя для упрощения (как в § 30, формулы (59)) обозначения

$$\frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''} = \varepsilon, \quad \frac{be' - d''f''}{bc - d'd''} = \varepsilon', \quad (67)$$

выражения:

$$\frac{dv_0}{dy} = -\varepsilon \frac{z}{e}, \quad \frac{dw_0}{dz} = -\varepsilon' \frac{z}{e}, \quad \frac{dv_0}{dz} + \frac{dw_0}{dy} = 0. \quad (68)$$

Итак, неопределенные уравнения (32) подтверждают это предположение, так как при подстановке туда вместо u , v , w наших значений (64) первое уравнение удовлетворяется само собой, а два последних посредством только что приведенной

третьей зависимости $\frac{dv_0}{dz} + \frac{dw_0}{dy} = 0$ сводятся к выражениям:

$$b \frac{d^2 v_0}{dy^2} + d' \frac{d^2 w_0}{dydz} = 0, \quad c \frac{d^2 w_0}{dz^2} + \frac{e'}{e} + d'' \frac{d^2 v_0}{dydz} = 0,$$

которые удовлетворяются также при подстановке вместо $\frac{dv_0}{dy}$ и $\frac{dw_0}{dz}$ значений $-\varepsilon \frac{z}{e}$, $-\varepsilon' \frac{z}{e}$, получаемых из (68), так как $c \varepsilon' + d'' \varepsilon = e'$ в соответствии с выражениями (67) для ε , ε' .

Остается только найти из зависимостей (68) для $\frac{dv_0}{dy}$ и т. д. выражения v_0 и w_0 через y и z . Два первых уравнения после интегрирования и обозначения через F , \mathcal{F} произвольных функций дадут:

$$v_0 = -\varepsilon \frac{yz}{e} + F(z), \quad w_0 = -\varepsilon' \frac{z^2}{2e} + \mathcal{F}(y), \quad (69)$$

а третье, следовательно, даст:

$$-\frac{\varepsilon y}{e} + F'(z) + \mathcal{F}'(y) = 0.$$

Отсюда видно, что $F'(z)$ должно равняться нулю или постоянной величине, а $\mathcal{F}'(y)$ должно равняться величине $\frac{\varepsilon y}{e}$, уменьшенной на ту же постоянную. Обозначая постоянные через k , k' , k'' , получаем:

$$F(z) = kz + k', \quad \mathcal{F}(y) = \frac{\varepsilon y^2}{2e} - ky + k''.$$

Мы должны приравнять нулю постоянные k' и k'' , так как считаем точку O призмы, взятую за начало координат, неподвижной, и должны получить $v = v_0 = 0$, $w = w_0 = 0$ для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Можно приравнять нулю также постоянную k , которая представляла бы собой поворот материальной линии, взятой за ось z , вокруг оси x , так как мы можем считать ее направление фиксированным.

Итак, мы получаем окончательно, заменяя значения (64) $u = \frac{xz}{e}$, $v = v_0$, $w = w_0 - \frac{x^2}{2e}$ значениями (69) v_0 , w_0 , в кото-

рых, как мы только что видели, уничтожается функция $F(z)$, а вместо $\mathcal{F}(y)$ подставляется $\frac{\varepsilon y^2}{2\rho}$:

$$u = \frac{xz}{\rho}, \quad v = -\varepsilon \frac{yz}{\rho}, \quad w = -\frac{x^2}{2\rho} + \frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2\rho}. \quad (70)$$

§ 36. Давления. Изгибающий момент

Выражения (70) перемещений дают для продольных и поперечных удлинений формулы:

$$\frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{z}{\rho}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{z}{\rho}. \quad (71)$$

Первая формула показывает, что *волокна* (если мы так называем очень тонкие призматические элементы, на которые по нашим представлениям разделено тело в продольном направлении) растянуты в сторону положительного направления оси z и *сжаты* в сторону отрицательного направления оси z пропорционально их расстояниям до линии, называемой *нейтральной* или линией неизменяемых волокон, которая проведена в каждом сечении, параллельна оси y или перпендикулярна к плоскости изгиба и для которой $z = 0$, $\frac{du}{dx} = 0$.

Получая из формул (70) для перемещений шесть других производных, подставляя их в шесть формул (18) $p_{xx} = a \frac{du}{dx} + f' \frac{dv}{dy} + e'' \frac{dw}{dz}$, $p_{yy} =$ и т. д. и принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} a - f' \varepsilon - \varepsilon'' e' &= E, & f'' - b \varepsilon - d' \varepsilon' &= 0, \\ e' - d'' \varepsilon - c \varepsilon' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где E является коэффициентом упругости (§§ 24, 30, 35, выражения (60) и (59) или (67)), находим для шести составляющих давления выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= E \frac{du}{dx} = E \frac{z}{\rho}, & p_{yy} &= 0, & p_{zz} &= 0, \\ p_{yz} &= 0, & p_{zx} &= 0, & p_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Выражение p_{xx} показывает, что *волокна*, искривляясь, сопротивляются растяжению или сжатию независимо друг от друга, как если бы каждое из них было малой призмой,

отдельно подверженной продольному растяжению или сжатию.

Эти формулы показывают также способ распределения сил, создающих изгиб, на крайних основаниях: давления изменяются пропорционально поперечной координате, параллельной плоскости изгиба.

Равнодействующая $\int_0^{\omega} p_{xx} d\omega = \frac{E}{\varrho} \int_0^{\omega} z d\omega$ этих сил равна нулю, если ось x проходит, как мы это считаем, через центры тяжести площадей сечений, которые мы обозначаем ω .

Но равнодействующий момент M сил, создающих изгиб, который мы называем *изгибающим моментом*, не равен нулю. Так как его можно разложить на моменты $\int_0^{\omega} p_{xx} z d\omega$, $\int_0^{\omega} p_{xx} y d\omega$ относительно линий, параллельных осям y и z и проходящих через центр сечения, то получаем:

$$M = \frac{E}{\varrho} \sqrt{(\int z^2 d\omega)^2 + (\int yz d\omega)^2}. \quad (74)$$

Это выражение сводится, но только для единственного случая, когда плоскость xz изгиба параллельна одной из двух главных осей инерции сечения ω , к формуле

$$M = \frac{EJ}{\varrho}, \quad (75)$$

где J — момент инерции $\int z^2 d\omega$ сечения относительно перпендикуляра к плоскости изгиба, проходящего через центр тяжести сечения.

Мы увидим в § 42, что момент M в любом другом случае выражается просто посредством двух главных моментов инерции сечения.

§ 37. Обобщение для случая, когда имеются продольные растяжения, равнодействующая которых не равна нулю и является постоянной

Допустим, что на крайних основаниях вместо давления $E \frac{z}{\varrho}$, полученного по формуле (73), имеются давление или растяжение $p_{xx} = P_x + E \frac{z}{\varrho}$ помимо атмосферного давле-

ния — Q , которое одинаково воздействует на боковые грани и не принимается в расчет (§ 30). Чтобы получить перемещения u , v , w , как мы увидим в специальной главе (глава XII), относящейся к результатам одновременного действия различного рода усилий, достаточно прибавить, как это легко проверить, к значениям (70) значения (58) для случая, когда призма только растягивается в продольном направлении, но не изгибается. Тогда ось призмы испытывает удлинение. Оно зависит от постоянной P_x , а линия неизменяемых волокон, если она имеется на сечении, всегда перпендикулярна к плоскости изгиба, но уже не проходит через центр сечения.

§ 38. Решение предложенной задачи определения перемещений по силам (обратная или отчасти обратная задача по отношению к только что решенной)

Мы видим, что если перемещения u , v , w представлены формулами (70) $u = \frac{xz}{\rho}$, $v =$ и т. д., что требует, чтобы изгиб происходил по дуге окружности радиуса ρ для оси призмы, а сечения оставались бы плоскими и нормальными к этой оси, то на основаниях получаем давления или растягивающие усилия (73) $p_{xx} = E \frac{z}{\rho}$, а на боковых гранях давления, равные нулю.

Наоборот, если призма не испытывает никакого бокового давления и подвергается на элементах ее оснований воздействию нормальных сил, распределенных соответственно формуле (73) $p_{xx} = E \frac{z}{\rho}$, т. е. пропорциональных расстоянию z элементов сечения от одной и той же прямой, проведенной на основаниях через их центры тяжести и имеющей то же заданное направление на обеих основаниях, то мы уверены, что изгиб будет круговым и что дуга, в которую превратится линия центров, будет иметь радиус ρ , определенный формулой (74) или (75); перемещения точек оси будут представлены формулами (70) § 35.

Действительно, эти перемещения u , v , w удовлетворяют всем определенным и неопределенным уравнениям подобной задачи. Они единственные, которые им удовлетворяют, так как задача перемещений полностью определяется, если, задавая давления и растягивающие усилия во всех точках

поверхности, мы считаем фиксированными одну из точек призмы (точку O) и направления одного линейного элемента и одного плоского элемента, которые через нее проходят (элемент на оси z и элемент на плоскости yz), так что мы не можем прибавить ни поступательное смещение, ни поворот к перемещениям, вызванным изгибом. Можно также убедиться в этом аналитически, если определить u, v, w выражениями (70), сложенными с неизвестными u', v', w' , подставляя их в определенные и неопределенные уравнения. Мы увидим, что эти неизвестные представляют собой перемещения точек призмы, закрепленной на каком-либо конце и *нигде не подвергающейся воздействиям*. Итак, эти неизвестные равны нулю и нам нечего добавить к выражениям (70), которые, следовательно, дают единственное решение только что сформулированной задачи в перемещениях.

§ 39. Распространение этого решения на сколь угодно большой изгиб

Формулы (70), дающие u, v, w , применяются, так же как и дифференциальные уравнения, из которых они получены, только к малым перемещениям, производящим небольшой изгиб. Однако отсюда можно получить перемещения также сколь угодно значительной величины, такие, как перемещения длинного тонкого упругого стержня, который изгибают до такой степени (рис. 21), что концы его почти касаются друг друга (§ 5), что возможно без всякого изменения структуры материала, так как относительные перемещения и деформации могут оставаться малыми в каждой части длины, много меньшей, чем радиус ρ кривизны, той части длины, на которые можно мысленно разделить подобное тело. Их накопление производит на конце значительные перемещения.

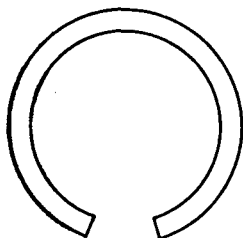


Рис. 21

Чтобы построить эти большие перемещения, мы должны изогнуть ось элемента в дугу радиуса ρ , определенного по формулам § 38 или по нижеприведенным формулам § 42,

затем надо нанести на каждой нормальной плоскости новые положения точек сечений после того, как они испытали поперечные перемещения v и w (см. § 43), равные перемещениям точек сечения AB , для которого $x = 0$.

§ 40. Неравномерный, или некруговой, изгиб

Как увидим в § 44, в более общем случае сечения не остаются ни плоскими, ни нормальными к волокнам. Наши последние исследования позволяют избавиться от имевшихся ранее сомнений. Мы доказали, что известные формулы § 36, хотя и полученные первоначально посредством теории, ошибочной по ряду пунктов, могли бы точно применяться в рассматриваемом случае, так же как и в частном случае равномерного, или кругового, изгиба, если только силы, создающие изгиб, всегда приложены и распределены определенным образом на крайних основаниях.

Мы обозначаем через x первоначальную ось призмы, а через xz — плоскость, по отношению к которой считаем призму симметричной. Силы действуют симметрично относительно этой плоскости, и она является плоскостью изгиба. Поместим начало координат в центре тяжести одного из крайних оснований призмы или части рассматриваемой призмы, причем считаем, что это основание остается после изгиба касательным к плоскости yz . Зададим внешние силы (§ 2). Они, как в предыдущих параграфах, производят поперечные давления p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , равные нулю на волокнах, а в сечениях ω — продольные давления p_{xx} , пропорциональные ординатам z ; полный момент последних $M = \int p_{xx} z d\omega$, вместо того чтобы быть постоянным от одного конца призмы до другого, *изменяется линейно вдоль x* , так что при постоянных значениях P и a он выражается формулой

$$M = P(a - x), \quad (76)$$

откуда следует $P(a - x) = \int \frac{p_{xx}}{z} z^2 d\omega = \frac{p_{xx}}{z} J$, где J — момент инерции $\int z^2 d\omega$. Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{P(a - x)}{J} z, & p_{yy} &= 0, \\ p_{zz} &= 0, & p_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

и далее (§§ 30 и 36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{P(a-x)}{EJ} z, & \frac{dv}{dy} &= -\varepsilon \frac{P(a-x)}{EJ} z, \\ \frac{dw}{dz} &= -\varepsilon' \frac{P(a-x)}{EJ} z, & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Но две другие составляющие давления p_{zx} и p_{xy} не будут равняться нулю, как в случае равномерного изгиба.

Составляющая p_{xz} должна даже быть такой, чтобы сумма $\int p_{xz} d\omega$ воздействий в направлении z части $A\omega$ (рис. 22) на часть

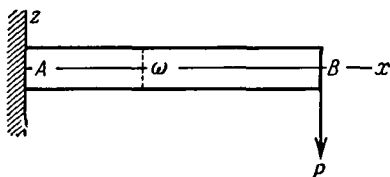


Рис. 22

ωB призмы через сечение ω создавала бы равновесие внешних сил, действующих на ωB . Эти внешние силы не сводятся больше к паре, так как их момент $P(a-x)$ является переменным, но они имеют в направлении z равнодействующую $-P$ на длине $AB = a$ от начала координат A , если никакая сила, способная создать момент M , не действует в призме между ее концами. Таким образом, мы должны получить

$$\int_0^a p_{xz} d\omega = -P. \quad (79)$$

Неопределенные дифференциальные уравнения (30) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} +$ и т. д., если в них подставить значения (77) величин p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} и p_{yz} , сводятся к

$$\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{J}, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0. \quad (80)$$

Третье уравнение, которое сводится к $\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = 0$ или $-\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d}{dz} \frac{du}{dx}$, показывает (если учесть, что $-\frac{d^2 w}{dx^2}$

является обратной величиной радиуса кривизны ρ , когда w очень мало), что вследствие сделанных допущений (77) и (78) относительно давлений и перемещений имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{P(a-x)}{EJ} = \frac{M}{EJ}, \quad (81)$$

откуда $M = \frac{EJ}{\rho}$, $\frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}$, $p_{xx} = E \frac{z}{\rho}$, как и при круговом изгибе (§ 36), который является, впрочем, только частным случаем рассматриваемого здесь изгиба; это соответствует $P = 0$, а плечо рычага равно $a = \infty$, но их произведение Pa — конечная величина, равная M ; тогда $\frac{EJ}{\rho}$ постоянно в пределах рассматриваемой части призмы, имеющей произвольную длину.

Необходимо найти значения u, v, w , которые удовлетворяют основным уравнениям, а также определенным уравнениям (35), относящимся к боковой поверхности призмы. Ввиду того что $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$, $\cos \hat{p}x = 0$, два последних уравнения сводятся к соотношениям $\Pi \cos \hat{\Pi}y = 0$, $\Pi \cos \hat{\Pi}z = 0$, откуда $\cos \hat{\Pi}x = 1$. Следовательно, первое уравнение, если обозначить через ds элемент криволинейного контура ω , сводится к формуле

$$\Pi = p_{xz} \frac{dy}{ds} - p_{xy} \frac{dz}{ds}, \quad (82)$$

и, таким образом, давление на боковую поверхность, если оно там имеется, сводится к некоторого рода *трению* в направлении ребер.

Для устранения этого воздействия необходимо, чтобы в точках контура сечений соблюдалось условие (см. также § 48)

$$\left. \begin{aligned} & p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0 \\ \text{или} & \left. \begin{aligned} & e \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) - f \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \frac{dz}{dy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (83) \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить сначала неопределенным уравнениям (80), так же как и уравнениям (77) или (78), выражающим заданные условия, и условию симметрии по отношению

к плоскости xz , необходимо принять для u , v , w выражения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P(2ax - x^2)z}{2EJ} + F(y, z), & v &= -\varepsilon \frac{P(a-x)yz}{EJ}, \\ w &= g_0 x - \frac{P}{2EJ} \left[ax^2 - \frac{x^3}{3} + (a-x)(\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

где g постоянно; $F(y, z)$ — функция, которая не изменяется при подстановке $-y$ вместо y и такова, что

$$F = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{для } y = 0, \quad z = 0,$$

а

$$f \frac{d^2 F}{dy^2} + e \frac{d^2 F}{dz^2} = \frac{P}{EJ} (E - \varepsilon f - \varepsilon' e) z.$$

Действительно, только что написанные значения величин u и v получаются непосредственно при интегрировании двух первых уравнений (78), если заметить, что симметрия требует, чтобы u оставалось таким же и чтобы изменялся знак, а не величина v , когда подставляют $-y$ вместо y . Что касается значения w , то интегрирование третьего уравнения (78) дает выражение $w = -\frac{\varepsilon' P(a-x)z^2}{2EJ} + f(x, y)$, которое, будучи подставлено, так же как и значение v , в четвертое уравнение $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$, дает $\frac{d}{dy} f(x, y) = \frac{\varepsilon P(a-x)}{EJ} y$, откуда $f(x, y) = \frac{\varepsilon P(a-x)y^2}{2EJ} + f_1(x)$. Таким образом, третье уравнение (80) $\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = 0$ дает $\frac{d^2}{dx^2} f_1(x) = -\frac{P(a-x)}{EJ}$, откуда $f_1(x) = -\frac{P}{EJ} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + g_0 x$, где g_0 — постоянная, которая представляет собой сдвиг g_{zx} в начале координат. Что же касается трех условий, относящихся к произвольной функции $F(y, z)$, добавленной к u , то первое следует из соображений симметрии, второе и третье вытекают из допущений, что центр и центральный элемент сечения ω в начале координат неподвижны, и последнее — из первого неопределенного уравнения (80).

Эта функция F , так же как постоянная g_0 , кроме того, должна быть такой, чтобы при подстановке u , v , w в условие (83) $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$, относящееся к контуру, оно удов-

летворялось бы, так как мы считаем, что боковые грани призмы между ее концами не испытывают никакого воздействия, ни поперечного, ни продольного. Тем самым уравнение (79) $\int p_{xz} d\omega = -P$, как мы отметили, будет также удовлетворено.

Мы отошли бы от нашей темы, если привели бы здесь определение этой функции $F(y, z)$ для различных форм сечения призмы¹⁾. Мы ограничимся упоминанием, что эта функция существует для всех сечений. Таким образом, всегда имеются значения u, v, w , удовлетворяющие вышеуказанным уравнениям, следовательно, и выражения p_{xy}, p_{xz} , дающие способ приложения и распределения сил на основании B призмы, при котором точно получаются формулы изгиба (81).

Это функция F для эллиптического сечения, представленного уравнением $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, такова:

$$\left. \begin{aligned} F(y, z) &= \frac{P}{2EJ} \left[(K - \varepsilon) y^2 z + (E - \varepsilon' e - fK) \frac{z^3}{3e} \right] \\ \text{и} \quad g_0 &= -\frac{Pc^2(E - fK)}{2EeJ}, \quad \text{где} \quad K = \frac{Ec^2 + 2\varepsilon eb^2}{3fc^2 + eb^2}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Та же функция F для прямоугольного сечения представляет собой весьма сложный тригонометрический ряд. Но мы можем составить примерное представление о ее значении, взяв в этом случае простое выражение (85) с $K = \frac{2\varepsilon eb^2}{2fc^2 + eb^2}$, что только в четырех точках контура сечения соответствует условию (83) равенства нулю бокового давления и удовлетворяет также условию (79) $\int p_{xz} d\omega = -P$.

Отсюда следует, так как $3J = \omega c^2$, что

$$\left. \begin{aligned} p_{xz} &= -\frac{3P}{2\omega} \left[1 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon e}{3E} \frac{3fb^2}{2fc^2 + eb^2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - 2\frac{y^2}{b^2} \right) \right], \\ p_{xy} &= \frac{2Pb}{\omega c} \frac{\varepsilon e}{E} \frac{3fb^2}{2fc^2 + eb^2} \frac{yz}{bc}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

¹⁾ Выдержка помещена в Comptes rendus, т. XXXIX, стр. 1027; ее скоро можно будет видеть в Mémoire sur la flexion, который мы только что представили Академии.

Давление, действующее на грани $2b$, дается посредством значения p_{xz} для $1 - \frac{z^2}{c^2} = 0$, а давление на грани $2c$ является значением p_{xy} при $\frac{y}{b} = \pm 1$. Равные нулю в точках посередине ширины этих граней, эти касательные давления малы во всяком другом месте, так как дроби $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ никогда не превышают единицы, так же как и дробь $\frac{3fb^2}{2fc^2 + eb^2}$ при $e = f$ и когда, как обычно, измерение $2c$ превышает $2b$. Наконец, дробь $\frac{ee'}{E}$ в случае изотропии имеет значение (§ 30) $\frac{e'}{4e + 6e'}$, т. е. $\frac{1}{10}$, если допустить (§ 13), что $e = e'$ или $e = \frac{1}{4}$, $\frac{e}{E} = \frac{2}{5}$. Во всех других случаях эта дробь должна быть малой.

Такого рода малые продольные трения компенсируются настолько, что вовсе не отражаются на изгибающем моменте M (вызванном всецело поперечной силой P , приложенной в крайнем сечении B , когда $\int p_{xz} d\omega = -P$), и должны, следовательно, очень мало влиять на величину перемещений. Практически можно допустить, что при их отсутствии p_{xz} внутри призмы точно представлено формулой (86) без члена $\frac{ee'}{E}$ (см. § 44 и гл. XII).

§ 41. Практические применения. Случай, когда сила или пара сил, изгибающая призму, действует в плоскости, параллельной одной из двух главных осей ее сечений

Никогда практически изгиб не производится посредством сил, действующих нормально или касательно на крайних основаниях призм и распределенных в их различных точках в соответствии с формулой (73) или (81) $p_{xx} = E \frac{z}{\rho}$ для нормальных сил или формулой (§ 40) для касательных сил p_{xz} , p_{xy} . Следовательно, вышеуказанные выводы неприменимы при строгом рассмотрении вопроса.

Предыдущий анализ доказывает, что если на двух каких-либо сечениях, крайних или не крайних, силы приложены и распределены подобным образом, то абсолютно то же будет

наблюдаться во всех промежуточных сечениях и перемещения в любой части призмы будут представлены ранее найденными выражениями. Таким образом, формулы определяют состояние (как в § 33), к которому сводится действительное внутреннее состояние призмы по мере того, как мы рассматриваем части, более удаленные от ее концов или от точек приложения сил, создающих изгиб.

Здесь в пространстве устанавливается род неизменного состояния, схожего с состоянием, обусловленным во времени непрерывным действием постоянных факторов, которые в конце концов сводят на нет действия постоянных начальных факторов большого числа явлений.

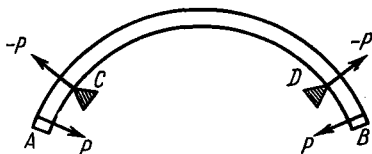


Рис. 23

Опыт устанавливает, что для этого не нужно удаляться на значительные расстояния от точек приложения. Он показывает, например, что изгиб по дуге окружности производится во всякой промежуточной части CD призматической детали $ACDB$ (рис. 23), подверженной в боковом направлении на двух крайних частях AC, BD действию сил, сводящихся к парам $P, -P$ и $-P, P$, равным, противоположно направленным и имеющим плоскость действия, параллельную ребрам призмы. Из этого простого случая, который наблюдается для всех точек, за исключением чрезмерно близких к C, D (где имеются некоторые необычные боковые сжатия, вызванные непосредственным действием приложенных сил), вытекают вышеуказанные выводы, и они могут быть приняты, по крайней мере, с большим приближением.

То же самое можно сказать, в соответствии с предыдущим параграфом, для случая неравномерного, или некругового, изгиба, вызванного силами, не создающими пар.

Пусть M — постоянный или переменный равнодействующий момент этих сил, взятый относительно центра тяжести какого-либо сечения ω ; предполагается, что силы не имеют никакой продольной равнодействующей (см. гл. XII). Допустим также сначала, что плоскость этого момента параллельна одной из главных осей инерции сечений, а ось x проходит через центры тяжести их сечений. Тогда получим (фор-

мулы (75) и (76) или (81)):

$$M = \frac{EJ}{\rho}, \quad \frac{du}{dx} = \partial_x = \frac{z}{\rho} = z \frac{M}{EJ}. \quad (87)$$

Следовательно, изгиб оси призмы будет происходить в плоскости действия сил, т. е. в плоскости, параллельной плоскости момента M , который изгибает призму. Радиус соприкасающегося круга изогнутой оси будет $\frac{EJ}{M}$, а удлинения волокон будут $z \frac{M}{EJ}$.

Так как $g_{yz} = 0$, если влияние сдвигов g_{xy} , g_{xz} на максимальное удлинение считается ничтожным, как это чаще всего и бывает (см. гл. XII), то условие прочности должно быть (§ 26) записано так, чтобы удлинение ∂_x , значительно большее, чем удлинения ∂_y , ∂_z , не превосходило предела, обозначенного через $\frac{R}{E}$, т. е. (формула (47))

$$R \geq \max z \frac{M}{J}, \quad (88)$$

или, обозначая через z' наибольшую ординату z контура сечения, имеем:

$$M \leq R \frac{J}{z'}. \quad (89)$$

Это представляет собой известное с давних пор уравнение прочности сцепления или сопротивления разрушению, которое следует применять только в рассматриваемом случае.

§ 42. Случай, когда плоскость действия изгибающих сил расположена косо по отношению к главным осям сечений.

Определение плоскости действительного изгиба и кривизны. Условие сопротивления

Если плоскость действия сил не параллельна одной из главных осей инерции сечений, мы получим другие выражения.

Действительно, предположим, что до изгиба координатные оси Oy , Oz , которые мы считаем взаимно-перпендикулярными и проведенными в сечении через его центр тяжести, параллельны главным осям сечения. Обозначим: φ — острый

угол POz , составленный плоскостью действия сил POP с осью Oz (рис. 24); ψ — угол $zOz_1 = yOy_1$, составляемый, следовательно, с Oz неизвестной плоскостью z_1OF , в которой изгибается ось призмы, т. е. такой же угол, составленный осью Oy с линией Oy_1 , проведенной в сечении ω перпенди-

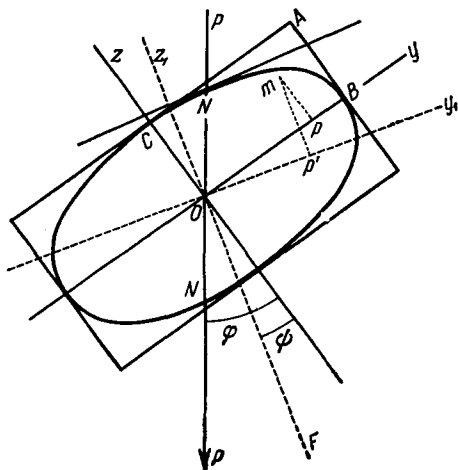


Рис. 24

кулярно к плоскости изгиба z_1OF ; z — расстояние tr_1 от этой линии Oy_1 до точки m с поперечными координатами $y = Or$, $z = tr$.

Для нормального давления в точке m сечения получим (формула (73)):

$$p_{xx} = E \frac{z_1}{\rho}, \quad \text{или} \quad p_{xx} = \frac{E}{\rho} (z \cos \psi + y \sin \psi). \quad (90)$$

Момент M должен уравновешивать равнодействующий момент сил $p_{xx} d\omega$, действующих на все элементы $d\omega$ сечения ω . Разложим его на два момента $M \cos \varphi$ и $M \sin \varphi$, действующих в плоскостях, перпендикулярных к осям Oy и Oz , и составим уравнения равновесия для поворота относительно этих двух осей. Мы получим, полагая

$$\int z^2 d\omega = J, \quad \int y^2 d\omega = J'$$

и учитывая, что $\int yz d\omega = 0$, когда Oy и Oz являются главными осями инерции:

$$\left. \begin{aligned} M \cos \varphi &= \int_0^{\omega} p_{xx} z d\omega = \\ &= \frac{E}{\varrho} (\cos \psi \int z^2 d\omega + \sin \psi \int yz d\omega) = \frac{EJ}{\varrho} \cos \psi, \\ M \sin \varphi &= \int_0^{\omega} p_{xx} y d\omega = \\ &= \frac{E}{\varrho} (\cos \psi \int yz d\omega + \sin \psi \int y^2 d\omega) = \frac{EJ'}{\varrho} \sin \psi. \end{aligned} \right\} (91)$$

Деля эти два уравнения почленно, получаем уравнение в другой форме; складывая квадраты уравнений, поделенные соответственно на J и J' , имеем еще одно уравнение. Таким образом, находим:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{J}{J'} \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{J^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{J'^2}}. \quad (92)$$

Первое уравнение дает положение плоскости изгиба, а второе — радиус постоянной или переменной кривизны оси призмы.

Легко видеть, что если контур сечения является эллипсом или если при любой форме сечения мы нанесем на плоскости сечения эллипс, полуоси которого OB , OC в направлениях y и z пропорциональны обратным величинам $\frac{1}{\sqrt{J}}$, $\frac{1}{\sqrt{J'}}$ квадратных корней из моментов инерции сечения относительно тех же осей, то плоскость действительного изгиба OF будет перпендикулярна к касательным, проведенным к этому эллипсу в точках N , N , где он пересекается плоскостью действия сил OP , так что линия нейтральных волокон Oy_1 является диаметром, сопряженным с NN .

Призма изгибается, как мы видим, в плоскости, составляющей угол $\varphi - \psi$ с плоскостью действия изгибающих сил, от которой она более или менее отходит, приближаясь к плоскости наиболее легкого изгиба, т. е. к плоскости Oz , если $J < J'$.

Это отклонение $\varphi - \psi$ плоскости изгиба является максимальным, когда плоскость действия сил проходит через одну

из диагоналей OA прямоугольника, описанного около эллипса; тогда линия нейтральных волокон, т. е. направление, относительно которого производится изгиб, будет не чем иным, как другой диагональю. То же самое имеет место, когда контур сечения является прямоугольником.

Условие прочности в этом общем случае косоуго изгиба (формула (47)) таково:

$$R \geq \max \frac{z_1}{\rho},$$

где z_1 — расстояние от точек сечения до линии нейтральных волокон Oy_1 . Так как (формула (91))

$$z_1 = z \cos \psi + y \sin \psi, \quad \frac{E \cos \psi}{\rho} = \frac{M \cos \psi}{J}, \quad \frac{E \sin \psi}{\rho} = \frac{M \sin \psi}{J'},$$

то это условие сводится к

$$M \leq \min \frac{R}{z \frac{\cos \psi}{J} + y \frac{\sin \psi}{J'}}, \quad (93)$$

которое переходит, когда сечение является прямоугольником со сторонами $2b, 2c$, соответственно параллельными осям y и z , в условие, весьма отличное от условия, которое мы находим в различных трудах, где считают, что плоскость изгиба всегда является плоскостью действия сил:

$$M \leq \frac{4Rb^2c^2}{3(b \cos \varphi + c \sin \varphi)} \quad ^1); \quad (94)$$

когда сечение является эллипсом с полуосями b и c , то

$$M \leq \frac{R \pi b^2 c^2}{4 \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (95)$$

§ 43. Новая форма контура сечения изогнутой призмы

Интересно узнать также, каковы изменения в контуре сечения вследствие поперечных сжатий и удлинений, которые непременно сопровождают продольные удлинения и сжатия волокон. Выражения (70) v и w или выражения

¹⁾ Часть этих выводов была помещена в Comptes rendus 30 октября и 6 ноября 1843 г., т. XVII, стр. 949 и 1024.

(84), добавленные к первому выражению (81), помогут нам выяснить этот вопрос. Они дают для сечения, где $x = 0$, при обозначении через y_1, z_1 новых координат какой-нибудь точки, первоначальные координаты которой были y, z , уравнения

$$y_1 - y = -\varepsilon \frac{yz}{e}, \quad z_1 - z = \frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2e}, \quad (96)$$

ко вторым членам которых следовало бы только соответственно добавить $-\varepsilon \frac{P_x y}{E}$, $-\varepsilon' \frac{P_x z}{E}$, если (§ 37) призма испытывает вместе с изгибом растяжение P_x на единицу площади своих оснований.

Исключая прежние координаты y, z из этих двух уравнений и уравнения прежнего контура сечения, мы получим уравнение нового контура в координатах y_1 и z_1 .

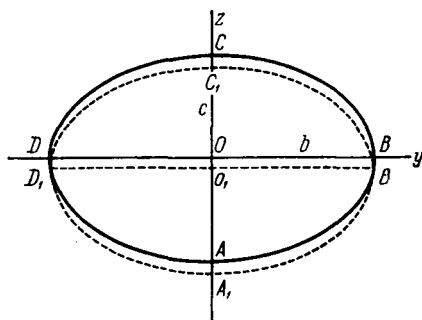


Рис. 25

Если, например, контур сечения эллипс $BCDA$ (рис. 25), определенный уравнением $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, то нужно будет для получения пунктирной кривой $B_1C_1D_1A_1$, в которую он превращается, исключить y и z из этого уравнения и из уравнений (96).

Исключение y^2 с помощью второго уравнения (96) дает сначала

$$z = \frac{e c^2}{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2} \left[1 - \sqrt{1 - (\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2) \left(\frac{2z_1}{e c^2} - \frac{\varepsilon b^2}{e^2 c^2} \right)} \right],$$

или, разлагая в ряд радикал и отбрасывая в конечном счете члены, имеющие в знаменателе радиус кривизны ρ в степени выше первой, имеем:

$$z = z_1 + \frac{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2}{2 \rho c^2} z_1^2 - \frac{\varepsilon b^2}{2 \rho},$$

$$y = y_1 \left(1 + \frac{\varepsilon z_1}{\rho} \right),$$

а при подстановке в уравнение эллипса получаем:

$$\frac{y_1^2}{b^2} \left(1 + \frac{2 \varepsilon z_1}{\rho} \right) + \frac{z_1^2}{c^2} \left(1 + \frac{\varepsilon b^2 + \varepsilon' c^2}{\rho c^2} z_1 \right) = 1 + \frac{\varepsilon b^2}{\rho c^2} z_1.$$

Это уравнение кривой $B_1 C_1 D_1 A_1$, когда $\varepsilon \frac{b^2}{c^2} + \varepsilon' = 2 \varepsilon$, включающее частный случай кругового сечения при одинаковой упругости в направлениях осей y и z , сводится к

$$\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{\left(z_1 + \frac{c^2 \varepsilon'}{2 \rho} \right)^2}{c^2} = 1,$$

если пренебречь $\frac{c^2}{\rho^2}$.

Таким образом, новая кривая $B_1 C_1 D_1 A_1$ является эллипсом, равным прежнему $ABCD$, но имеющим центр, расположенный ниже на $\frac{c^2 \varepsilon'}{2 \rho}$ (т. е. на $1/40$ радиуса c сечения, если оно является окружностью и если $\varepsilon' = \frac{1}{4}$, $\frac{c}{\rho} = \frac{1}{5}$).

При наложении нового эллипса на прежний материальная точка O , центр последнего, не изменила своего положения, но она не находится более в центре сечения, так как все другие материальные точки опустились и в то же время приблизились или удалились по отношению к вертикальной оси AC , смотря по тому, где они находились, выше или ниже горизонтали BD .

Мы получим контур сечения также приближенно посредством геометрического построения, основанного на том простом соображении, что все волокна, которые не оказывают в боковом направлении друг на друга никакого действия, так как повсюду $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, должны сжиматься или растягиваться в поперечных направлениях y и z в тех же

пропорциях $\pm \frac{\varepsilon z}{\rho}$, $\pm \frac{\varepsilon' z}{\rho}$, как если бы они были изолированными; отсюда можно заключить, что если на оси Oz , являющейся продолжением радиуса кривизны OO' , или на всякой параллельной линии взять точку K на расстоянии

$$OK = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

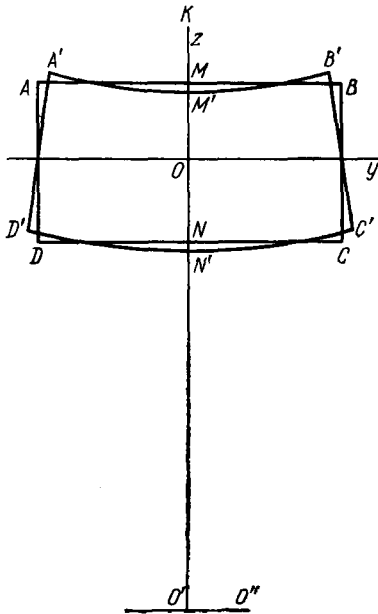


Рис. 26

от линии нейтральных волокон Oy , то все прямые, проведенные первоначально на сечении параллельно Oy , превратятся в дуги окружности, имеющей эту точку K в качестве центра, а все прямые, проведенные параллельно Oz , превратятся в радиусы этих дуг или в прямые, сходящиеся в K .

Действительно, возьмем, например, прямоугольное сечение $AMBCND$, в котором b и c — полустороны $AM = MB$ и $OM = ON$ (рис. 26). Перенесем $MM' = NN' = \frac{\varepsilon' c^2}{2\rho}$ в новое положение точек M, N на сторонах AB, DC , так чтобы (в соответствии со вторым уравнением (96) при $y = 0, z = \pm c$

или в соответствии с интегралом $OM' = \int_0^{\pm c} dz \left(1 - \frac{\varepsilon' z}{\rho}\right) = \pm c - \frac{\varepsilon' c^2}{2\rho}$) M' и N' лежали на прямой NOz , и из точки K как из центра опишем дуги окружности $M'A' = M'B' = b \left(1 - \frac{\varepsilon c}{\rho}\right)$ и $N'D' = N'C' = b \left(1 + \frac{\varepsilon c}{\rho}\right)$. Тогда линии $D'A', C'B'$, связывающие их концы, при продолжении будут сходиться в точке K , так как отношение $\frac{KN}{KM}$, весьма мало отли-

чающееся от отношения $\frac{KN'}{KM'}$ радиусов этих дуг, равно $\frac{\frac{\rho}{\varepsilon} - c}{\frac{\rho}{\varepsilon} + c}$, или точно равно отношению длин тех же дуг. Отсюда

следует (с помощью тех же соображений относительно различных прямоугольных элементов, на которые можно разделить до изгиба либо $ABCD$, либо *всякую другую фигуру* посредством параллелей и перпендикуляров к линии Oy нейтральных волокон), что четырехсторонник $A'M'B'C'N'D'$ представляет собой новую форму, принятую данным прямоугольным сечением; таким же путем, посредством ряда дуг окружности, мы получим различные точки нового контура для другого сечения какой-либо формы.

§ 44. Криволинейная форма и наклон к оси первоначально плоских и нормальных сечений при неравномерном, или некруговом, изгибе

Независимо от вида контура плоскость сечения превращается в криволинейную поверхность и наклоняется к оси, к которой она была нормальной, когда изгиб происходит иначе, чем по дуге окружности. Этот второй вид изменения сечений может оказывать в некоторых случаях значительное влияние на полученные выводы.

Действительно, в различных точках сечения ω призмы, подверженной неравномерному изгибу, имеются сдвиги

$$g_{xz} = \frac{\rho xz}{e}, \quad g_{xy} = \frac{\rho xy}{f},$$

которые наклоняют неодинаково к волокнам различные элементы сечений.

Для прямоугольного сечения можно приближенно принять, пренебрегая в выражениях (86) членами, оказывающими малое влияние, как мы говорили в конце § 40, что

$$g_{xz} = -\frac{3P}{2e\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad g_{xy} = 0. \quad (97)$$

Мы легко определим криволинейную форму, которую придают эти сдвиги плоскости сечения ω , рассматривая сече-

ние в виде плоскости NN , проведенной через центр сечения o нормально к изогнутой оси, по отношению к которой все волокна остались точно параллельными, и проводя в этой плоскости две взаимно-перпендикулярные оси координат ou' , oz' , первая из которых параллельна u (рис. 27).

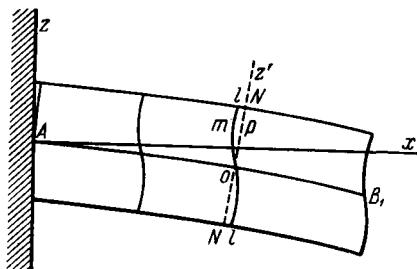


Рис. 27

Обозначим через u' перпендикуляр mp , опущенный из точки m сечения на эту плоскость NoN ; так как координаты u' , z' основания p этого перпендикуляра очень мало отличаются от первоначальных координат u , z той же точки m , то сдвиг $\frac{Pxz}{e}$ в этой точке будет (формула (97)):

$$-\frac{3P}{2e\omega} \left(1 - \frac{z'^2}{c^2}\right).$$

Приравнявая его $\frac{du'}{dz'}$ и интегрируя, находим уравнение поверхности, соответствующей сечению ω прямоугольной изогнутой призмы:

$$u' = -\frac{3Pc}{2e\omega} \left(\frac{z'}{c} - \frac{z'^3}{3c^3}\right).$$

Эта поверхность, как мы видим, цилиндрическая и разрезана плоскостями, параллельными плоскости изгиба zAx , по параболе третьей степени lol , изогнутой в виде гуська или в виде буквы S , у которой обе симметричные половины, нормальные в точках l, l' к двум граням призмы, перпендикулярны к той же плоскости zAx .

Сечения от одного до другого конца призмы наклоняются по отношению к изогнутой оси. Величина этого наклона,

обозначенная в § 40 через g_0 , равна $\frac{Px}{e}$ для $y = 0, z = 0$, т. е. приблизительно $-\frac{3}{2} \frac{P}{e\omega}$. Она в полтора раза больше той, которая была бы, если сечения наклонялись без искривления при действии поперечной силы P , равномерно распределенной на его поверхности.

Этот наклон в коротких призмах может привести к разрушению при сдвиге сечений или (§ 28) волокон друг относительно друга (см. гл. XII).

Из главы IV видно, что смешанный метод решения задач о равновесии упругих твердых тел может не только подтвердить известные выводы, указывая границы их применимости, но и дополнить их новыми сведениями относительно обстоятельств изгиба.





ГЛАВА V

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМ. ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 45. Постановка задачи. Условия, относящиеся как к перемещениям, так и к силам. Геометрическое определение движения при кручении

Чтобы решить задачу кручения, мы будем следовать промежуточному, или полуобратному, пути §§ 2 и 34.

Мы будем задаваться частью сил и считать, что внешние давления на боковые грани имеют только нормальные или поперечные направления, образующие прямые углы с ребрами призмы; они не имеют никакой составляющей в направлении ребер. Обычно эти боковые давления равны нулю или же постоянны и нормальны к граням.

Мы зададимся частью перемещений или их отношениями и будем считать, что эти перемещения вызвали кручение относительно оси, параллельной ребрам. Это кручение состоит в том, что поперечные перемещения различных точек, принадлежащих первоначально одному какому-либо сечению, перпендикулярному к оси, отличаются от перемещений соответственных точек другого сечения только поворотом на один и тот же угол относительно той же оси. Таким образом, точки, которые соответствовали друг другу первоначально на прямых, параллельных оси, могли бы быть снова приведены в соответствие, если их повернуть на угол, одинаковый для точек тех же двух сечений.

Заметим, что это характерное определение, которое мы даем кручению как изменению состояния призмы, вовсе не

влечет за собой необходимости, чтобы сечения, поворачиваясь друг относительно друга, сохраняли бы свою первоначальную форму, ни даже того, чтобы они все деформировались одинаковым образом. Достаточно, чтобы *поперечная* деформация (т. е. в направлении, перпендикулярном к оси) была бы одинаковой для всех сечений; к тому же продольные, т. е. параллельные оси перемещения соответствующих точек могут быть неодинаковы и, следовательно, их сечения могут иметь различную кривизну.

Далее мы найдем, какую величину будут иметь перемещения и какие силы упругой реакции они будут вызывать внутри тела, определим, какое кручение производится силами данной интенсивности, распределенными надлежащим образом, и выясним, какие пределы следует установить для этих сил, чтобы устранить всякую опасность разрушения материала призмы и разъединения ее волокон при взаимном сдвиге.

§ 46. Обозначения, используемые в дальнейшем
(вместе с обозначениями, приведенными в §§ 4, 6, 8, 11, 15, 18, 21, 22, 24, 27, 30, 36, 40)

Примем за ось кручения ось x и будем ее считать, так же как и оси y и z , взятой в таких взаимно-перпендикулярных направлениях, чтобы касательные составляющие давления p_{xy} , p_{xz} имели одночленные выражения $f g_{xy}$, $e g_{xz}$ (§ 16).

ω будет (как в §§ 33, 36, 40) любым поперечным сечением призмы, первоначально плоским и перпендикулярным к оси x и находящимся на расстоянии x от начала координат.

$d\omega$ — один из элементов поверхности сечения, имеющий центр с поперечными координатами y и z .

θ — угол кручения, отнесенный к единице длины призмы, для сечения ω , т. е. дуга поворота с радиусом, равным единице относительно ω другого сечения, которое находится от него на единице расстояния; таким образом, θdx было бы углом, на который нужно повернуть относительно оси x все материальные точки сечения ω , чтобы привести, как говорилось в предыдущем параграфе, в соответствие точки на параллелях к x с подобными же точками на параллелях другого сечения ω' , которое удалено на dx по этой оси.

Мы будем считать θ положительным, когда вращение направлено от y к z , т. е. когда наблюдатель, располагаясь вдоль оси x лицом со стороны ее положительного направления, видит малую дугу вращения смежного сечения ω' направленной от точки положительной полуоси y к точке положительной полуоси z .

M_x — крутящий момент для сечения ω или полный момент относительно оси x молекулярных действий, которые проявляются через это сечение, или, что то же самое (§ 9), полный момент давлений, которые имеют место для его различных элементов.

r и α — полярные координаты точки сечения ω , для которой y, z являются прямоугольными координатами, так что

$$y = r \cos \alpha, \quad z = r \sin \alpha, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{z}{y}, \quad (98)$$

$$J = \int_0^{\omega} z^2 d\omega, \quad J' = \int_0^{\omega} y^2 d\omega \quad (99)$$

— моменты инерции сечения относительно параллелей к осям y и z , проведенных на его плоскости, обычно через центр тяжести.

$$J_0 = J + J' = \int_0^{\omega} r^2 d\omega \quad (100)$$

— его полярный момент инерции или момент инерции относительно пересечения осей y и z .

$2b, 2c$ — два главных измерения сечения (или b, c — его полуоси, если это эллипс, и полустороны, если это прямоугольник), обычно в направлениях y и z .

G , как в § 27, — коэффициент упругости при сдвиге, когда он одинаков во всех направлениях, перпендикулярных к x , т. е. когда (§ 17) $e = f = G$ или (§ 16) $e''' = f''' = G$.

$g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ — главный сдвиг (§ 7) или наибольший из всех сдвигов относительно параллели к x , проведенной через центр элемента $d\omega$.

T , как в § 27, — касательная составляющая давления, которую не следует превышать, т. е. наибольшее значение Gg_x , неопасное для сцепления материала, когда это сцепле-

ние подобно упругости сдвига одинаково во всех поперечных направлениях.

n, n' — произвольные целые числа от единицы до бесконечности (рассмотренные в §§ 61, 65, 66, 90, 91).

m, a, A со штрихами или без штрихов или индексов, $\lambda, \mu, \mu', \gamma, \gamma_1, \gamma'_1$ (§§ 84, 88, 112), $\pi = 3,14159265\dots, e = 2,7182818\dots$	}	различные коэффициенты.
--	---	----------------------------

§ 47. Характеристические уравнения кручения или выражения для условий относительно перемещений

Точки двух бесконечно близких сечений ω, ω' , которые имели первоначально, та и другая, поперечные координаты y и z , получают после перемещений координаты

$$y + v \text{ и } z + w;$$

$$y + v + \frac{dv}{dx} dx$$

$$\text{и } z + w + \frac{dw}{dx} dx.$$

Действительное положение второй точки отличается в соответствии с гипотезой (см. предыдущий параграф) от положения первой только тем, что она

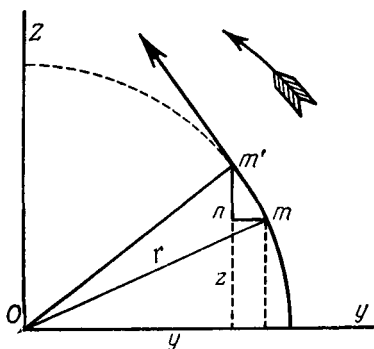


Рис. 28

повернута на угол θdx или на малую дугу $\theta r dx$. Так как эта дуга mm' составляет с осями y и z углы, косинусы которых соответственно равны $-\frac{z}{r}, \frac{y}{r}$ (рис. 28), то проекции nm, nm' на эти оси будут $-\theta z dx, \theta y dx$. Величины $\frac{dv}{dx} dx, \frac{dw}{dx} dx$ являются приращениями координат точки второго сечения по отношению к координатам соответствующей точки первого сечения. Итак, имеем:

$$\frac{dv}{dx} = -\theta z, \quad \frac{dw}{dx} = \theta y. \quad (101)$$

Эти уравнения выражают заданные нами условия относительно перемещений и характеризуют вообще движение при кручении. Кручение θ является или постоянной величиной или функцией только координаты x ¹⁾.

¹⁾ Все без исключения авторы, так же как и мы, поворачивают оси от y -к z , от z -к x , от x -к y в плоскостях, параллельных этим координатам, когда вращения или моменты, которые их производят, должны быть взяты положительными. Таким образом, наши формулы в части знаков находятся в соответствии со всеми имеющимися трудами.

Если это не всегда одинаково на наших рисунках, то происходит оттого, что авторы расходятся во мнениях относительно взаимного расположения положительных полуосей. Действительно, все авторы, когда они рассматривают только два измерения, или две координаты x , y или y , z , полагают, так же как и мы, полуось первой координаты, взятой направо от полуоси второй координаты, направленной снизу вверх. Отсюда следует, что *положительное вращение* относительно начала координат *происходит справа налево* для наблюдателя, стоящего в начале координат лицом от положительной стороны оси вращения. Но тогда как Коши сохраняет это расположение или это направление положительного вращения, используя в общем случае три измерения, или три оси (Application du calcul infinitésimal à la géométrie, 1826, введение, стр. 3 или Exercices de mathématiques, 1826, т. I, стр. 67—68), большинство других математиков принимают в таком случае противоположное расположение или направление, полагая таким образом три положительных вращения происходящими слева направо. Если это последнее направление является «направлением кажущегося дневного вращения солнца для наблюдателя, стоящего на северном полюсе» и если это также является «направлением, в котором рукой обычно поворачивают большинство приборов вращения» (Пуансо, Statique, восьмое издание, 1842, § 60), то направление справа налево является направлением действительного вращения земли и других небесных тел.

Мы расположим по Коши наши оси координат таким образом, чтобы сохранить при трех измерениях то же взаимное расположение

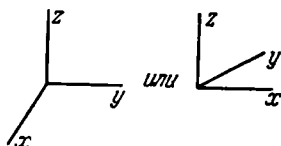


Рис. 29

как и при двух измерениях. Он помещает на чертеже координатную плоскость yz обычно первой из трех плоскостей, что дает всегда направление *справа налево* для прямого или *положительного* направления вращения (рис. 29).

§ 48. Выражения, относящиеся к силам, т. е. к внешним боковым давлениям

Что касается наших *сведений относительно сил*, состоящих в том, что внешние боковые давления имеют нулевые составляющие по ребрам призмы, т. е. не производят никакого продольного трения, то их можно выразить посредством первого общего определенного уравнения (§ 22, полагая

$$\cos \hat{\Pi} x = 0, \quad \cos \hat{n} x = 0, \quad \frac{\cos nz}{\cos ny} = -\frac{dy}{dz}.$$

Но можно также считать, что элемент боковой поверхности

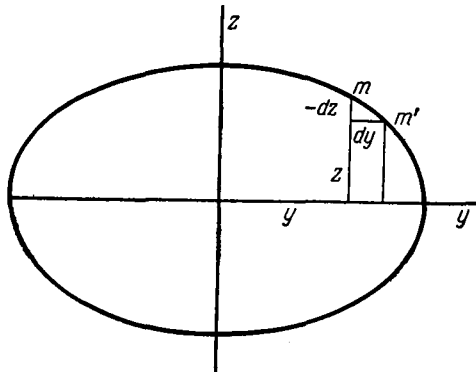


Рис. 30

призмы высотой dx и с основанием в виде элемента mm' (рис. 30), контура ω имеет соответственно проекции на плоскости, перпендикулярные к x , y , z :

$$0, \quad -dz dx, \quad dy dx,$$

так что в соответствии с первой теоремой Коши (§ 10) давление на этот элемент, разложенное параллельно x , является равнодействующей двух сил

$$-p_{yx} dz dx, \quad p_{zx} dy dx,$$

которые складываются, так как они одинаково направлены. Итак, ввиду того что это боковое давление по x считается

нулевым, получаем для выражения данных условий относительно сил (как в § 40):

$$p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0, \quad (102)$$

где dz, dy относятся к контуру сечения. Мы получили бы также это уравнение, считая, что всем молекулярным действиям, пересекающим элемент mm' поверхности края призмы, соответствуют равные и параллельные молекулярные действия, пересекающие ту или другую из его двух проекций dy и $-dz$.

§ 49. Предполагаемая неподвижность одной из точек оси и т. д. Приведение к случаю очень малых перемещений

Чтобы из этих уравнений и уравнений главы I определить перемещения, заметим сначала:

1) Мы всегда можем приписать неподвижность одной из материальных точек оси вращения, той, например, которая взята за начало координат, так же как направлению этой оси в пространстве и направлению какого-либо из плоских элементов, например направлению элемента, проходящего также через ось $у$.

Это допущение позволяет свести точку, линию и малую плоскую поверхность к их первоначальным положениям, если они отошли от них при поступательном смещении и общем повороте и если совершенно не изменяются ни относительные перемещения, ни силы, которые вызывают эти перемещения (конец § 8).

2) Кручение θ (хотя мы и предполагали его достаточно малым в каждом месте для того, чтобы относительные перемещения не вызывали бы изменений структуры материала) может, однако, произвести поворот на значительный угол, превышающий даже целую окружность, и, следовательно, очень большие поперечные перемещения одного конца относительно другого, если эта призма имеет очень большую длину сравнительно с размерами ее сечений. Но мы будем определять только малые перемещения, занимаясь пока лишь одной из очень коротких частей, на которые можно разделить мысленно призму, чтобы можно было поместить

на эту часть точку и неподвижные элементы, о которых мы говорили.

Таким образом, мы всегда сможем применить общие формулы главы I, в которых эти перемещения считаются очень малыми, кроме случая определения перемещений, когда мы суммируем перемещения, относящиеся к различным частям, для получения общих перемещений.

§ 50. Сдвиги. Крутящие моменты. Неопределенные и определенные уравнения

Итак, характеристические отношения (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$, подставленные в формулы (11)

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \quad g_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$$

сдвигов и в сведенные к одночленной форме выражения

$$p_{xy} = f g_{xy}, \quad p_{xz} = e g_{xz}$$

касательных составляющих давления (§ 16; штрихи опущены), дают:

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z, \quad g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y, \quad (103)$$

$$p_{xy} = f \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right), \quad p_{xz} = e \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right). \quad (104)$$

То, что мы назвали (§ 46) крутящим моментом и обозначили через M_x , не что иное, как сумма моментов относительно оси x составляющих давления или, лучше сказать, усилий $p_{xx}d\omega$, $p_{xy}d\omega$, $p_{xz}d\omega$, действующих на различные элементы $d\omega$. Первая составляющая имеет нулевой момент, так как она параллельна оси; две другие имеют плечи z и y , но последняя действует в направлении, противоположном тому, в котором, как мы полагаем, происходит кручение (§ 47).

Итак, получаем:

$$M_x = \int_0^{\omega} d\omega (p_{xz} y - p_{xy} z), \quad (105)$$

или, подставляя (104):

$$M_x = \int_0^{\omega} d\omega \left[e \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) y - f \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) z \right]. \quad (106)$$

Это выражение сводится к

$$\theta (e \int y^2 d\omega + f \int z^2 d\omega) = \theta (fJ + eJ'),$$

т. е. при $e = f$ к полярному моменту инерции $J_0 = \int r^2 d\omega$ сечения, умноженному на угол кручения θ и коэффициент упругости при сдвиге e , если продольные перемещения u равны нулю или постоянны на каждом сечении, т. е. если сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси. Это как раз то, что допускала прежняя теория кручения. Но это, как мы увидим, верно только в том случае, для которого Кулон разработал эту теорию, а именно для цилиндра с круговым основанием. Мы видим, что для определения столь важных величин, как момент M_x и сдвиг g , нужно знать продольные перемещения u молекул скрученной призмы.

Итак, те же отношения (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ сводят неопределенное дифференциальное уравнение (34) § 21 (самое общее из уравнений для тех случаев, когда p_{xy} , p_{xz} выражаются одночленами) к уравнению, которое содержит только перемещение u , в котором полагаем, как уже говорилось, $X = 0$:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + f \frac{d^2 u}{dy^2} + e \frac{d^2 u}{dz^2} + j \frac{d^2 u}{dx dy} + i \frac{d^2 u}{dx dz} + (iy - jz) \frac{d\theta}{dx} = 0.$$

Нам предстоит его проинтегрировать таким образом, чтобы выполнить для точек поверхности условие (102) $p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0$, которое путем подстановки значений (104) p_{xy} , p_{xz} превращается в

$$e \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) dy - f \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) dz = 0. \quad (107)$$

Это определенное уравнение, которое удовлетворяется во всех точках контура сечения призмы.

Мы проделаем интегрирование только для очень пространного случая, когда деформация или структура

тела такова, что

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad j \frac{d^2 u}{dxdy} = 0, \quad i \frac{d^2 u}{dxdz} = 0,$$

т. е. для случая, когда *продольное удлинение* $\frac{du}{dx}$ либо равно нулю, либо постоянно во всем теле, или для случая, в котором это удлинение постоянно лишь для каждой материальной прямой, параллельной оси кручения, и имеется главная плоскость упругости, перпендикулярная к той же оси (что дает $i = 0, j = 0$).

Следовательно, мы получим, считая, кроме того, что угол кручения θ постоянен от одного конца призмы до другого:

$$f \frac{d^2 u}{dy^2} + e \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad (108)$$

если i и j не равны нулю.

Это неопределенное уравнение относится ко всем точкам *скрученной призмы*.

Способ его интегрирования будет зависеть от формы контуров сечений, которые мы последовательно рассмотрим.

§ 51. Упрощения для первых решений.

Одинаковая упругость при сдвиге.

Равенство нулю изгибов, а также продольных и поперечных удлинений

Чтобы избежать осложнений, вносящих неясности в некоторые сложные вопросы, которые мы будем обсуждать, начнем с предположения, что

$$e = f = G$$

и что, следовательно, *упругость при сдвиге является одинаковой по всем направлениям, перпендикулярным к оси x в плоскостях, параллельных этой оси, или одинаковой вдоль x в тех же плоскостях*. Это не препятствует, как мы уже говорили, структуре тела быть весьма неоднородной в направлениях осей x, y, z . Таким образом, мы приведем неопределенное уравнение, подлежащее интегрированию, к виду

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \quad (109)$$

и определенное уравнение, относящееся к контурам сечений, запишем в форме

$$\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0. \quad (110)$$

В главе X мы увидим несложные изменения, которые должны быть внесены в формулы, чтобы охватить общий случай неравномерной упругости.

Итак, в главах VI, VII, VIII, IX мы будем предполагать (не в силу необходимости, а чтобы избежать включения посторонних элементов в кручение), что нет ни сжатия, ни удлинения в трех направлениях x , y , z , ни сдвига g_{yz} , стремящегося увеличить или уменьшить прямой угол между линиями, проведенными на сечениях, параллельных осям y и z , т. е.

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0,$$

что влечет за собой также отсутствие всякого изгиба, ибо призма не может изгибаться так, чтобы не было удлинений $\frac{du}{dx}$, неодинаковых в разных точках того же сечения.

Мы узнаем из анализа, совместимы ли эти гипотезы с гипотезой о перемещениях при кручении, и выясним, какие именно силы производят это кручение.

В специальной главе XII мы обсудим случаи, когда одновременно с кручением имеются растяжение, изгиб и др.





ГЛАВА VI

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМЫ ИЛИ ЦИЛИНДРА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

§ 52. Определение продольных перемещений

Случай, когда поперечное сечение призмы есть эллипс, является самым простым.

Так как уравнение контура

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

дает

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

то определенное условие (110) или (102) для случая одинаковой поперечной упругости будет:

$$\left. \begin{aligned} & b^2 z \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) + c^2 y \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) = 0 \\ & z = \pm c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \text{ или } y = \pm b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Посмотрим, можно ли удовлетворить его, взяв для u целый многочлен по отношению к y и z с конечным или бесконечным числом членов, т. е. положив

$$\left. \begin{aligned} u = & a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \text{и т. д.} \\ & a'_1 z + a'_2 yz + a'_3 y^2 z \\ & + a''_2 z^2 + a''_3 yz^2 \\ & + a'''_3 z^3, \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

где a_1, a'_1, \dots — постоянные числа, так как мы не предполагаем никакого продольного удлинения. Мы не прибавляем член, не зависящий от y и z , так как одна из точек оси считается неподвижной (§ 49).

Подставляя (112) в определенное уравнение (111), относящееся только к точкам контура, получаем уравнение

$$\begin{aligned} c^2 [a_1 y + (a'_2 - \theta) yz + 2 a_2 y^2 + 3 a_3 y^3 + 2 a'_3 y^2 z + a''_3 yz^2 + \dots] + \\ + b^2 [a'_1 z + (a'_2 + \theta) yz + 2 a''_2 z^2 + a'_3 y^2 z + 2 a''_3 yz^2 + \\ + 3 a'''_3 z^3 + \dots] = 0, \end{aligned}$$

которое можно удовлетворить бесчисленным числом способов при любых y или z . Его можно удовлетворить, например, приравнявая нулю все коэффициенты a , за исключением коэффициента a'_2 , который должен быть таким, чтобы

$$c^2(a'_2 - \theta) + b^2(a'_2 + \theta) = 0^1),$$

откуда

$$a'_2 = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta.$$

Таким же образом выясняют, что неопределенное дифференциальное уравнение (109) $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$ удовлетворяется также значением $u = a'_2 yz$, так как оно дает $\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$, $\frac{d^2 u}{dz^2} = 0$. Следовательно, в качестве решения уравнений задачи получаем:

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz. \quad (113)$$

¹⁾ Можно заметить, что члены первой степени $a_1 y$ и $a'_1 z$, если они имеются, представляют собой повороты вокруг осей z и y . Они должны равняться нулю, так как условия $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ установлены в предположении, что не имеется другого поворота, кроме поворота около оси x .

§ 53. Сдвиги и крутящий момент

Из этого значения u для сдвигов вытекают выражения

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= \frac{du}{dy} - \theta z = -\frac{2b^2\theta z}{b^2 + c^2}, \\ g_{xz} &= \frac{du}{dz} + \theta y = \frac{2c^2\theta y}{b^2 + c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Следовательно, для крутящего момента $G \int d\omega(g_{xz}y - g_{xy}z)$ (формулы (105), (106)) имеем:

$$M_x = 2G\theta \frac{b^2 \int z^2 d\omega + c^2 \int y^2 d\omega}{b^2 + c^2}.$$

Поскольку момент инерции круга радиуса c относительно своего диаметра представляет собой половину полярного момента инерции $\int_0^c r^2 2\pi r dr$ и, следовательно, равен $\frac{\pi c^4}{4}$, то для момента нашего эллипса относительно его оси $2b$ получаем (умножая на $\frac{b}{c}$) значение $\frac{\pi bc^3}{4}$ и, следовательно (§ 46):

$$J = \int z^2 d\omega = \pi \frac{bc^3}{4}, \quad J' = \int y^2 d\omega = \pi \frac{b^3 c}{4}. \quad (115)$$

Отсюда для крутящего момента имеем:

$$M_x = G\theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = G\theta \frac{4JJ'}{J + J'} = \frac{4G\theta}{\frac{1}{J} + \frac{1}{J'}}, \quad (116)$$

что равно коэффициенту упругости при сдвиге, умноженному на угол кручения и на удвоенную обратную величину полусуммы обратных величин моментов инерции сечения относительно его двух осей.

§ 54. Поперечные перемещения

Если хотят получить выражение для перемещений v, w , нужно проинтегрировать $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$, принимая во внимание, что, как предположено (§ 51), поперечные удли-

нения отсутствуют или $\frac{dv}{dy} = 0$, $\frac{dw}{dz} = 0$, это дает выражения

$$v = -\theta xz + F(z), \quad w = \theta xy + f(y),$$

где F и f являются двумя произвольными функциями. Поскольку мы считаем также (тот же § 51), что $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$, то будем иметь $F'(z) + f'(y) = 0$, так что производные от функций F , f могут быть только двумя постоянными, одинаковыми кроме знака, откуда получаем, если k , k' , k'' — три постоянные, что

$$v = -\theta xz - kz + k', \quad w = \theta xy + ky + k''.$$

Но эти три постоянные должны быть приняты равными нулю: постоянные k' и k'' — потому, что мы считаем неподвижным начало координат (§ 49), для которого $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; постоянная k , которая представляет собой малый поворот около оси x , — потому, что мы полагаем (тот же § 49) часть плоскости xy , близкую к началу координат, неповорачивающейся.

Итак, имеем для поперечных перемещений в соответствии со всеми нашими предположениями и заданными условиями выражения

$$v = -\theta xz, \quad w = \theta xy, \tag{117}$$

являющиеся результатом только кручения без какого-либо изменения в поперечном направлении в форме или в размерах сечений.

§ 55. Давления, которые при этом возникают

При значениях перемещений (113) и (117) получаем везде (§ 15):

$$p_{xx} = 0, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0,$$

т. е. отсутствует нормальная составляющая давления на крайних основаниях, равно и на других поперечных сечениях, так же как и давления на боковых гранях, так как три последних из написанных уравнений показывают, что имеются только равные нулю составляющие в направлениях, перпендикулярных к оси x ; определенное же уравнение

$g_{xz}dy - g_{xy}dz = 0$, которому удовлетворяют перемещения, точно выражает то, что эти давления имеют только равные нулю составляющие в направлении x (§ 48).

Поскольку это определенное уравнение может быть удовлетворено при любых y и z , не требуется подставлять взамен одной из этих координат, например z , ее значение $\pm c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ в функции другой, полученное из уравнения эллиптического контура сечения; если придать dz его значение $-\frac{c^2 y dy}{b^2 z}$, получаемое из того же уравнения, то мы увидим, что давление равно нулю не только на внешней боковой поверхности, но также внутри на всех цилиндрических поверхностях, имеющих одну и ту же ось и эллиптические основания, для которых отношение $\frac{b}{c}$ осей сохраняется, т. е. основания, подобные основаниям призмы (см. главу XI, в которой мы рассмотрим полые призмы).

Но касательные составляющие p_{xy} , p_{xz} давления в направлениях y , z на сечениях или в направлении x на гранях, параллельных оси вращения, не равны нулю. Тогда (см. выражения (114)) получаем:

$$p_{xy} = -G\theta \frac{2b^2 z}{b^2 + c^2}, \quad p_{xz} = G\theta \frac{2c^2 y}{b^2 + c^2}. \quad (118)$$

Все сечения, и особенно крайние основания, подвергаются в их плоскости действию сил, соответственно параллельных y и z и пропорциональных одновременно плечам z , y относительно оси и квадратам b^2 , c^2 полуосей, параллельных направлениям, в которых они действуют. Равнодействующая этих сил в каждой точке является касательной к эллипсу, концентрическому и подобному эллипсу контура.

Таковыми оказываются силы, вызывающие перемещения u , v , w .

§ 56. Решение задачи определения перемещений по данным силам

Если внешняя поверхность призмы или эллиптического цилиндра подвергается действию подобных сил, считаемых заданными, а именно сил, равных нулю на боковых гранях, продольных или нормальных сил, равных нулю на двух

крайних основаниях, и поперечных или касательных сил, распределенных на тех же основаниях, как только что говорилось относительно p_{xy} , p_{xz} , представленных формулами (118), то искомые перемещения u , v , w определяются по формулам (113) и (117) предыдущих параграфов, т. е.

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = \theta xy. \quad (119)$$

Действительно, в случае $e = f$ эти выражения удовлетворяют неопределенным уравнениям (32) или (34) § 21 и определенному уравнению

$$b^2 z \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) + c^2 y \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) = 0$$

подобной задачи. Они являются единственными, чтобы удовлетворить уравнениям, так как задача о перемещениях полностью решается, когда задаются силы, действующие на внешней поверхности, если пренебрегают действием веса и силами инерции, которые могут воздействовать на внутренние точки, и когда считают неподвижными точку, материальную линию и плоский элемент тела (§ 49), чтобы не было ни общих поворотов, ни поступательных смещений его точек. Можно также быть уверенным, как в §§ 30 и 38, что это решение единственное, если считать u , v , w равными выражениям (113) и (117), сложенным с тремя неизвестными функциями u' , v' , w' , которые после подстановки в уравнения станут перемещениями точек призмы, на которую ничто не воздействует и для которой кручение θ равно нулю, т. е. ничего не надо будет прибавлять к этим выражениям (113) и (117) или (119), чтобы получить u , v , w .

§ 57. Искривление сечения. Его влияние.

Случай кругового сечения, когда
искривление отсутствует

Выражение (113)

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz$$

доказывает, что первоначально плоское сечение ω не остается плоским. Оно становится *искривленной поверхностью*

или гиперболическим параболоидом, вершина которого находится в центре. Коэффициент при uz можно рассматривать как определяющий степень *искривления*. Он, как мы видим, пропорционален углу кручения θ и тем больше, чем более *неодинаковы* оси эллипса, однако он не превосходит

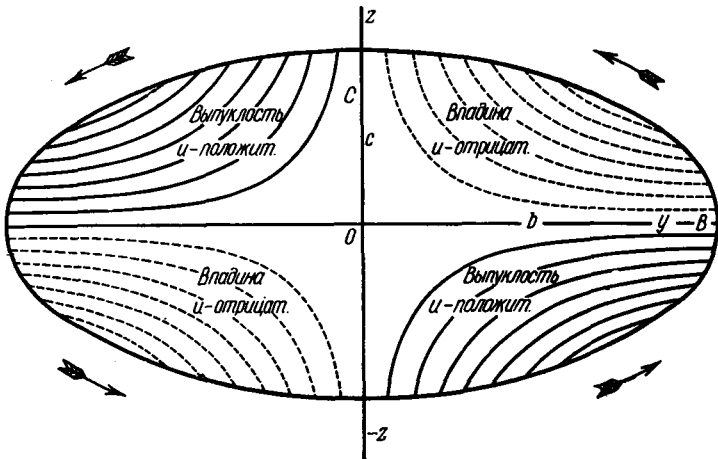


Рис. 31

величины θ . Ордината u , соответствующая оси, перпендикулярной к первоначальной плоскости сечения, отрицательна в области, где *либо* y и z *положительны*, *либо* y и z *отрицательны*, когда b больше, чем c , причем кручение в этих двух областях имеет место (как мы это предположили) от y к z для наблюдателя, расположенного со стороны *положительного* направления оси x . И u *положительно* в *двух других областях* или четвертях эллипса, так что *искривленное* сечение представляет собой две *выпуклости*, изображенные в виде *маленьких гиперболических сплошных кривых*, (рис. 31), являющихся *топографическими разрезами* плоскостями, перпендикулярными к оси кручения, и две *впадины*, или углубления, изображенные посредством *пунктирных разрезов* (см. в § 62 изображения скрученной призмы).

Когда

$$b = c,$$

т. е. когда сечение является кругом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, & g_{xy} &= -\theta z, & g_{xz} &= \theta y, \\ g_x &= \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2} = \theta r, \\ M_x &= 2GJ\theta = GJ_0\theta = G\frac{\pi b^4}{2}\theta. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Искривление равно нулю, так что круговые плоские сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси, как мы это могли предвидеть, так как ни одно из них в этом случае не имеет причин изгибаться больше в одном месте, чем в другом. Главные сдвиги (§ 7) сводятся к наклонам, которые принимают параллельные к оси призмы волокна или нити молекул, первоначально прямые и параллельные этой оси, но ставшие спиралями с одинаковым шагом $\frac{2\pi}{\theta}$. Наконец, крутящий момент (120) равен коэффициенту упругости при сдвиге, умноженному на полярный момент инерции $J_0 = \int r^2 d\omega$ сечения и на угол кручения θ .

Этот вывод, который сделал Кулон, был распространен различными авторами на призмы или цилиндры с произвольными основаниями. Но формула Кулона $M_x = GJ_0\theta$ является точной только в случае, для которого она дана, когда нет никакого искривления. Для всякого другого случая, кроме $b = c$, и в более общем случае для всякого другого сечения, кроме круга, она дает слишком большой момент. Таким образом, для эллипса, поскольку имеем:

$$\frac{4JJ'}{J+J'} = \frac{(J+J')^2 - (J'-J)^2}{J+J'} = J_0 - \frac{(J'-J)^2}{J_0},$$

мы действительно видим, что момент $M_x = G\frac{4JJ'}{J+J'}\theta$ всегда меньше, чем $GJ_0\theta$, и что если J очень мало по сравнению с J' или c^2 по сравнению с b^2 , то получаем:

$$M_x = 4GJ\theta,$$

значение которого очень мало сравнительно с $G(J+J')\theta$ по прежней теории, о которой мы упоминали и от которой нужно отказаться.

Это вытекает из того, что наклонение к искривленному сечению волокон, ставших винтообразными, в среднем гораздо меньше, чем наклонение к неискривленному сечению. Эти наклоны даже почти равны нулю у концов

большой оси $2c$ эллипса, если она очень велика по отношению к малой оси $2b$, как мы это увидим в § 61. Сопротивление кручению, вызванное этими наклонами, которые определяют главные сдвиги (§ 7), вследствие искривления, таким образом, действительно меньше, чем по прежней теории, где не принималось в расчет продольное неравномерное перемещение u^1).

Впрочем, выражение $GJ_0 \theta$ Кулона, относящееся к круговому цилиндру, как и наше выражение, относящееся к эллиптическому цилиндру, требует для точности, чтобы давления были приложены и распределены на крайних основаниях точно так же, как внутренние давления, или как величины p_{xy} , p_{xz} (§§ 55, 56), так как, когда $b = c$, имеем:

$$p_{xy} = -G \theta z, \quad p_{xz} = G \theta y, \quad (121)$$

что вытекает к тому же непосредственно из формы спирали, принимаемой волокнами, и из пропорциональности этих давлений сдвигам. Таким образом, нужно, чтобы эти силы, определяющие кручение кругового цилиндра, действовали во всех точках его оснований и были бы направлены по касательным к различным окружностям, которые можно концентрически расположить внутри контура, и имели бы величины, пропорциональные радиусам²⁾.

§ 58. Практический случай

Способ приложения и распределения сил, производящих кручение на крайних основаниях в их плоскости в соответствии с выражениями (118), никогда не имеет места на практике. И неизвестно ни для эллиптической, ни для круговой

¹⁾ Хотя упругое сопротивление кручению призмы всегда пропорционально полярному моменту инерции ее сечения, оно находится при той же площади сечения ω или при том же объеме материала в обратном отношении к величине этого момента J_0 для эллиптических призм; действительно, выражения $\omega = \pi bc$, $J_0 = \frac{\pi}{4} (bc^3 + b^3 c)$ и (116)

$M_x = G \theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$ дают $\frac{M_x}{G \theta} = \frac{1}{4 \pi^2} \frac{\omega^4}{J_0}$ при любом отношении осей $2b$, $2c$. Призма при равном объеме оказывает тем меньшее сопротивление, чем больше момент J_0 ее основания.

²⁾ В заметке о кручении призм, в которой знаменитый ученый пожелал благожелательно сослаться на нашу работу, Коши (Comptes

призм (см. § 1), как точно определить перемещения, когда этот способ иной, например такой, когда силы, приложенные и распределенные у концов, действуют на боковые грани непосредственно или через посредство других тел, таких, как рычаги.

gendus, 20 февраля 1854 г., т. XXXVIII, стр. 326—332) заметил, что когда ось кручения, т. е. ось x , является осью упругости, то θ не обязательно должно быть постоянным в различных точках каждого сечения, чтобы предположения (§ 47)

$$\frac{dv}{dx} = -\theta z, \quad \frac{dw}{dx} = \theta y \quad \text{и (§ 50)} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

приводили первое из трех неопределенных дифференциальных уравнений (32) § 21 к простому и интегрируемому виду $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$:

Для этого достаточно, как он заметил, чтобы θ было функцией направляющего радиуса $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, так как сумма двух последних членов этого дифференциального уравнения (32), которое сводится для случая оси упругости к $(e + e') \left(\frac{d^2 v}{dx dy} + \frac{d^2 w}{dx dz} \right)$, равна нулю, как

для случая $\frac{d\theta}{dy} = 0$, $\frac{d\theta}{dz} = 0$, так и тогда, когда только

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dy} = \frac{d\theta}{dr} \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dz} = \frac{d\theta}{dr} \frac{z}{r}.$$

Мы не будем пытаться обобщать наши решения сообразно этому интересному замечанию или считать θ переменным в поперечном направлении, так как легко видеть, что эта изменчивость требует наличия сил, которые обычно не приходится рассматривать.

Действительно, какой бы ни была при изменении θ в поперечном направлении величина перемещения u в зависимости от поперечных координат y и z , если считать ее всегда одинаковой для всех сечений, так что $\frac{du}{dx}$ равно нулю или же $\frac{du}{dx}$ независимо от y и z , то члены $\frac{d^2 u}{dx dy}$, $\frac{d^2 u}{dx dz}$ исчезают из второго и третьего неопределенных дифференциальных уравнений (32), и мы легко находим, что значения (117) $v = -\theta x z$, $w = \theta x y$ с θ , зависящей от r , при подстановке v в эти уравнения приводят их (так как § 18, $e = f$, $b = c = 2d + d'$, $d' = d''$, $e' = f''$) к виду

$$\frac{x}{r} \left(3 \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right) d = \frac{Y}{z} = \frac{-Z}{y}.$$

Отсюда следует, что изменение θ с расстоянием r до оси или предполагаемый сдвиг друг относительно друга различных колец, на которые можно разделить каждое сечение окружностями с центром на оси кручения, требует, чтобы элементы призмы подвергались дейст-

Но наше решение показывает, что если воздействия на два каких-либо сечения, крайние или не крайние, представлены формулами (118), то они будут совершенно одина-

вию сил $\sqrt{Y^2 + Z^2}$, которые все прилагались бы касательно к этим окружностям, что нельзя представить физически, или чтобы имелось

$$3 \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2\theta}{dr^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \theta = \theta_0 + \frac{K}{r^2}$$

(θ_0 и K — две постоянные), т. е. требуется, чтобы кручение составлялось из постоянной части и части, обратно пропорциональной квадрату радиуса-вектора, причем та и другая из этих частей могут равняться нулю.

Итак, если подставить значения $v = -\left(\theta_0 + \frac{K}{r^2}\right) xz$, $w = \left(\theta_0 + \frac{K}{r^2}\right) xy$, которые отсюда вытекают, вместо поперечных перемещений в формулы (28) для составляющих давления в случае, когда x является осью упругости, то, считая всегда $\frac{du}{dx} = 0$, получаем:

$$p_{yy} = -p_{zz} = \frac{4d}{r^2} K x y z, \quad p_{yz} = \frac{2d}{r^2} K x (z^2 - y^2).$$

Если подставить во второе и третье общие определенные уравнения (35), которые для боковой поверхности призмы с ребрами, параллельными x (считая $\cos \Pi x = 0$), сводятся к

$$p_{yy} \sin nz + p_{yz} \cos nz = -\Pi \cos \Pi y,$$

$$p_{yz} \sin nz + p_{zz} \cos nz = -\Pi \sin \Pi y,$$

и если сложить их квадраты и разделить друг на друга, то они соответственно дадут:

$$\Pi = \frac{2d}{r^2} K x, \quad \text{tg } \hat{\Pi} y = \text{tg}(\hat{n}z - 2\hat{r}z).$$

Отсюда следует, что боковая поверхность призмы должна была бы в каждой из ее точек подвергаться действию силы Π , которая, будучи отнесена к единице поверхности, была бы обратно пропорциональна радиусу-вектору этой точки и пропорциональна ее расстоянию x от неподвижного сечения или защемления, а направление этой силы определялось бы углом $\hat{\Pi}y =$ углу $\hat{n}z$, уменьшенному на удвоенный угол $\hat{r}z$, и было бы касательным к основанию, когда оно круговое.

Поскольку подобные воздействия, приложенные непрерывно на боковых гранях, не имеют места в природе, то мы будем продолжать изучение только таких задач, в которых кручение θ не зависит от y и z , т. е. одинаково для всех точек каждого сечения.

ковыми на всех промежуточных сечениях, а кручение будет одинаковым и представленным формулами (119) или (113) и (117). Итак, мы нашли постоянное состояние в различных точках призмы, аналогичное *непрерывному* состоянию в различные мгновения, которое устанавливается через непродолжительное время при протекании жидкостей под влиянием постоянного давления, при действии моторов на машины и т. д. Это предельное состояние осуществляется весьма точно в длинных призмах по мере удаления от их концов, как непрерывное состояние жидкости, с которым мы его сравниваем, совпадает все более и более с действительным состоянием по мере того, как мы удаляемся от начального момента времени, и сохраняется само по себе, если оно однажды возникло.

Опыт доказывает даже, что при любом способе распределения сил это постоянное состояние устанавливается даже очень близко от их точек приложения, если только у каждого конца они создают пары и приложены приблизительно симметрично по обе стороны от центра сечения призмы; выясняется, что происходит, начиная с едва заметных расстояний, равномерное кручение, превращающее в спирали материальные прямые, первоначально параллельные оси. Тождество действий для весьма различных по характеру приложения и распределения, но симметричных сил доказывает, что влияние способа распределения ощущается только в очень малом пространстве, на другой границе которого распределение составляющих воздействия на внутренние сечения приблизительно таково, как следует из наших выражений (118) p_{xy} , p_{xz} , и можно (исключая точки, расположенные близко к концам, т. е. две очень короткие части призмы, которые можно всегда усилить) принять для практики с желаемым приближением все вышеизложенные выводы.

Это уже применялось для случая растяжения призм, которое вычисляли посредством выражения (62) $\partial_x = \frac{P}{E}$ или путем деления на $E\omega$ продольной равнодействующей $P\omega$ сил растяжения, хотя эти силы и не были бы распределены одинаково в различных точках оснований (так что требовалось бы точное решение) и даже не были бы приложены к этим основаниям (§ 33). Это обычно делают также для изгиба,

при котором рассматривают как удовлетворительные формулы (71) и (75) или (81) $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$, $\partial_x = \frac{z}{\rho}$, хотя силы с постоянным или переменным моментом M и не прикладывались бы к крайним основаниям призмы; при этом — одни нормально и в соответствии с законом распределения составляющих $p_{xx} = E \frac{z}{\rho}$, другие — касательно или в соответствии с более сложным законом (§ 40) распределения составляющих p_{xz} , p_{xy} или сдвигов, которые сопровождают изгиб, когда он неравномерен, и даже если эти изгибающие силы были бы приложены в боковом направлении, а не на основаниях.

Наконец, так поступали с давнего времени также с кручением цилиндров с круговым основанием, так как выражение (120) $M_x = GJ_0 \theta$, данное Кулоном, допустимо вообще и рассматривается как бесспорно проверенное опытом, хотя бы оно и было, как мы видим, подчинено сходному, но никогда невыполнимому условию.

Наши выводы, относящиеся к кручению эллиптической призмы какими-либо парами сил, могут быть приняты на том же основании и с таким доверием, с каким принимают формулы либо простого растяжения, либо изгиба боковыми силами, и более близкую формулу для случая кручения круговых цилиндров. Формула, относящаяся к эллиптическим цилиндрам и основанная на тех же принципах, имеет такие же основания быть распространенной на случай приложения любого распределения пар, которые создают кручение, и должна рассматриваться для практики как приближенная.

Такое же замечание, о котором мы здесь говорим, будет применимо для всего мемуара. Это даст для кручения других призм *аналитически строгие* результаты в случае особого распределения сил, приложенных к концам. Этими результатами можно будет воспользоваться для приближенного решения в других случаях в соответствии с опытом, показывающим, что способ распределения и приложения этих сил в известной мере безразличен.

Итак, для получения величины угла кручения, вызванного в эллиптической призме какими-либо данными силами, подставим их момент вместо M_x в выражение (116) и получим отсюда θ . Это позволит определить (выражение (114) величины сдвигов и (выражение (119)) перемещений точек.

§ 59. Кручение может иметь место только относительно оси призмы

Следует заметить, что ось, относительно которой происходит кручение, будет проходить обязательно через центры эллиптических сечений, так как из условий равновесия составляющих воздействия $p_{xy}d\omega$, $p_{xz}d\omega$ (параллельных осям y и z) по сечению требуется в соответствии с выражениями (118), чтобы

$$\int z d\omega = 0, \quad \int y d\omega = 0$$

или чтобы начало координат y, z в каждом сечении было бы точно в его центре тяжести.

§ 60. Значительные перемещения, вызванные кручением

Значения (117) $v = -\theta xz$, $w = \theta xy$ подходят только для очень малых поперечных перемещений v, w и, следовательно, для очень короткой части призмы. Но если мы обозначим через a малую длину этой части в направлении x и если, наконец, мы представим себе другую часть, которая была бы полностью повернута на угол θa до кручения, то точка M этой второй части, которая имела до поворота θa , как сказано, координаты $a + x', y, z$, получит затем координаты x', y, z , если взять новое начало координат на оси x на расстоянии a от прежнего и новые оси y и z , составляющие с прежними угол θa . Когда величина x' очень мала, так как вторая часть призмы, как и первая, считается весьма короткой и становится в свою очередь скрученной, координаты той же точки M по отношению к новым осям даются формулами:

$$x' + u, \quad y - \theta x' z, \quad z + \theta x' y.$$

Следовательно, в силу известных формул преобразования прямоугольных координат x, y, z в другие, которые имеют ту же ось x , координатами этой точки M по отношению к прежним осям будут:

$$a + x' + u; \quad (y - \theta x' z) \cos \theta a - (z + \theta x' y) \sin \theta a;$$

$$(z + \theta x' y) \cos \theta a + (y - \theta x' z) \sin \theta a,$$

или, если $\theta x'$ заменить на $\sin \theta x'$, $a + x'$ на x и пренебречь очень малой разностью второго порядка $1 - \cos \theta x'$, то

$$x + u, \quad y \cos \theta x - z \sin \theta x, \quad z \cos \theta x + y \sin \theta x.$$

Мы нашли бы те же выражения для координат точки M' третьей части, перемещая также начало координат на конец второй части, или на расстояние $2a$ от первоначального начала координат, и относя временно эту точку M' к осям y и z , составляющим с прежними осями угол $2a\theta$, и т. д. Итак, получаем, *какой бы ни была величина x* , а следовательно, и величина поперечных перемещений v, w , следующие выражения (которые не что иное, как предыдущие второе и третье выражения без y и z):

$$\left. \begin{aligned} v &= -z \sin \theta x - y(1 - \cos \theta x), \\ w &= y \sin \theta x - z(1 - \cos \theta x). \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Можно, несомненно, установить эти выражения более точно; но мы хотели показать, как значительные перемещения могут быть получены вообще посредством накопления этих перемещений, которые находят из формул, где они считаются очень малыми, перемещая надлежащим образом оси координат (как сказано в § 49) в ряде малых частей призмы.

§ 61. Наибольший сдвиг. Опасные точки

Мы указывали (§ 24), что главное применение исследования относительных перемещений точек твердого тела состоит в определении условий его сопротивления разрушению; указывали, что (см. § 27) когда, как в настоящем случае, нет никакого удлинения в направлении оси x и в перпендикулярных к нему направлениях, нет необходимости устанавливать эти условия разыскания удлинений в косых направлениях, которые возникают вследствие сдвигов g_{xy}, g_{xz} , и что достаточно было бы установить предел для последних и даже только для главного сдвига $g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$, когда строение тела одинаково относительно оси x , как мы это и предполагаем.

Однако нужно разыскать сначала точку, где *главный сдвиг имеет наибольшее значение* и где, следовательно, сцепление подвергается наибольшей опасности.

В точке любого сечения ω с координатами y, z главный сдвиг g_x , соответствующий параллели к x , дается (§ 7) в соответствии с выражениями (114) его составляющих g_{xy}, g_{xz} формулой

$$g_x^2 = g_{xy}^2 + g_{xz}^2 = \left(\frac{2\theta}{b^2 + c^2} \right)^2 (b^4 z^2 + c^4 y^2). \quad (123)$$

Мы видим, что в ряде точек, принадлежащих одной и той же любой прямой, исходящей из центра, т. е. для точек, у которых отношение z^2 и y^2 постоянно, наибольший сдвиг g имеет место в точках, где z^2 и y^2 достигают наибольших значений, и, следовательно, в точках, где эта прямая встречается с контуром сечения.

Итак, опасную точку (§ 25) нужно искать на эллиптическом контуре.

Если подставим для z^2 в предыдущем выражении его значение $c^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)$, относящееся к точкам контура, то оно превращается в формулу

$$g_x^2 = \left(\frac{2\theta c}{b^2 + c^2} \right)^2 [b^4 - (b^2 - c^2)y^2], \quad (124)$$

которая при $b > c$ дает наибольшее возможное значение для $y = 0, z = \pm c$ и наименьшее для $z = 0, y = \pm b$.

Опасные точки, т. е. точки с наибольшим сдвигом, находятся, следовательно, на концах малой оси; на концах большой оси на контуре сечения — самый незначительный сдвиг, или наименьшая опасность разрушения при кручении.

§ 62. Сравнение с прежней теорией. Объяснение

Этот замечательный вывод противоположен обычной теории, в соответствии с которой сдвиг и опасность разрушения наибольшие в точках, наиболее удаленных от оси кручения.

Это происходит, как мы уже видели, оттого, что по обычной теории, когда предполагают, что сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси кручения, главный сдвиг в каждой из точек сечений — не что иное, как наклон к этой оси волокон или материальных линий, которые к ней

были первоначально параллельными и которые, став спиралями с одинаковым шагом, получают наклоны, прямо пропорциональные их расстояниям до оси.

По теории, только что сформулированной нами, это происходит иначе. Волокна и здесь всегда становятся спиралями, наклоненными к оси одинаковым образом. Но ввиду искривления элементы сечений и линии, которые на них проведены, также наклоняются. Если оба наклонения в одной и той же точке имеют согласующиеся направления и совместное их влияние нарастает, то главный сдвиг, представляющий собой результат их соединения, будет гораздо больше, чем в том случае, когда одно из двух наклонений (наклонение сечения) равно нулю; это происходит на концах малой оси эллипса. Если, наоборот, обе составляющие вычитаются друг из друга, то они дают при наложении (хотя величина того и другого наклона порознь больше) значительно меньший угол главного сдвига; это происходит на концах большой оси. Волокна при наклоне создают на соответствующих элементах поверхности и сечений воздействия, которые стремятся наклонить их взаимно так, чтобы сохранить перпендикулярность друг к другу вследствие сопротивления элементов твердого тела деформированию. В точках, наиболее удаленных от оси кручения, или на концах очень удлиненного сечения элементы поверхности подчиняются приблизительно без сопротивления этому действию волокон, так что элементы и волокна остаются почти перпендикулярными, а главный сдвиг почти равным нулю, так же как сопротивление и опасность разрушения.

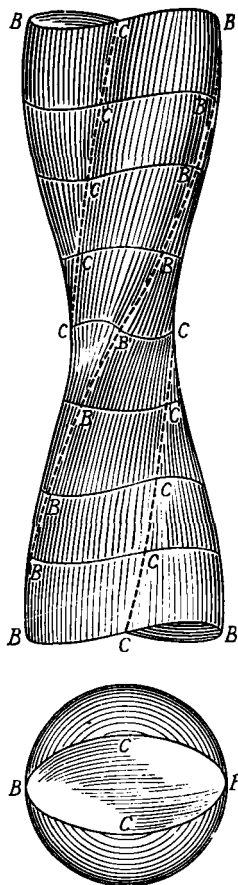


Рис. 32

В точках контура, наиболее близких к оси, иное положение: элементы поверхности, удерживаемые другими элементами, которые им предшествуют или за ними следуют, не только не уступают воздействию волокон, но даже стремятся наклониться в направлении, противоположном действию, которое они развивают в этом месте; это создает максимальный сдвиг, сопротивление и опасность разрушения.

На (рис. 32), представляющем в горизонтальной и вертикальной проекциях эллиптическую призму, которая чрезмерно закручена, так как ее повернули на пол-окружности на длине, в π (или 3,1416) раз превышающей большую ось $2b$ основания (так что $\theta = \frac{\pi}{\pi 2b} = \frac{1}{2b}$), обнаруживается это различие, еще более ясно замечаемое на рельефной семикратной модели, которая была построена. В точках C, C, C, \dots , т. е. на концах малых осей сечений, имеет место наибольший наклон волокна $ССС \dots$ к эллиптическим дугам $ВСВ$, которые первоначально были к нему перпендикулярны. В точках B, B, B волокно всего более подходит к такому положению, что остается под прямым углом к тем же дугам, так же как и к искривленной поверхности сечения.

Оба члена каждого из выражений (100)

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z, \quad g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y$$

показывают то же самое. Второй член $-\theta z$ или θy является частью, соответствующей наклонению волокна; он одинаков при любой форме сечения: круговой, эллиптической или какой-либо другой. Первый член является частью, вызванной искривлением сечения или наклонением его элементов или его контура.

На концах большой оси, параллельной y , получаем $g_{xy} = 0$ и, следовательно (формулы (114)),

$$g_x = g_{xz} = \mp \frac{2bc}{b^2 + c^2} \theta c.$$

Это наименьший главный сдвиг в точках контура.

На концах малой оси, считаемой параллельной z , имеем $g_{xz} = 0$ и (те же формулы)

$$g_x = g_{xz} = \pm \frac{2bc}{b^2 + c^2} \theta b. \quad (125)$$

Это *наибольший сдвиг на всем сечении*. Отношение его абсолютного значения к наименьшему значению равно $\frac{b}{c}$.

§ 63. Условие отсутствия разрушения или прочности сцепления

Наибольший главный сдвиг (125) нужно считать не бoльшим чем предел, полученный из опыта и обозначенный через (§ 27)

$$\frac{T}{G}.$$

Уравнение отсутствия разрушения или прочности сцепления нашей эллиптической призмы, следовательно, таково:

$$T \geq G \theta \frac{2b^2c}{b^2 + c^2}. \quad (126)$$

Отсюда получаем наибольший момент сил, производящих кручение, которому еще можно подвергнуть призму, заменяя $G \theta$ с помощью выражения (116) $M_x = G \theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2}$, полученного в § 53. Отсюда следует:

$$1 \text{ m } M_x \leq \frac{\pi b c^3}{2} T, \text{ или } \leq \frac{2J}{c} T. \quad (127)$$

Наибольший крутящий момент, который можно было бы без опасения сообщить эллиптической призме, равен численно величине T , определяющей допускаемое касательное напряжение, умноженной на удвоенный момент инерции сечения относительно его большой оси и разделенной на половину малой оси.

В соответствии с обычной теорией, которая не принимает в расчет искривления, получаем $M_x \leq \frac{J_0}{b} T$, т. е. число T ,

умноженное на полярный момент инерции $J_0 = J + J'$ и разделенное на половину большой оси. Отношение выражения (127) к этому неточному выражению равно

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

Значения этого отношения для различных величин отношения $\frac{b}{c}$ большой оси к малой таковы:

Для $\frac{b}{c} = 1$	$\frac{2bc}{b^2 + c^2} = 1$	
2	$\frac{4}{5}$	$= 0,8$
3	$\frac{3}{5}$	$\approx 0,6$
5	$\frac{5}{13}$	$= 0,3846$
очень большого ...	$\frac{2c}{b}$	$=$ очень малому.

Таким образом, за исключением случая кругового сечения, обычная теория ошибочно оценивает безопасность, указывая на M_x как на неопасный момент. В действительности он больше момента, которому можно подвергнуть призму, не опасаясь за сплошность ее материала¹⁾.

¹⁾ Эллиптическая призма с одинаковой площадью сечения или с одинаковым объемом материала тем меньше сопротивляется разрушению при кручении, чем больше отношение ее наибольшего измерения к наименьшему, так как уравнение (127) при учете формулы

$$\omega = \pi bc \text{ дает } \frac{M_x}{T} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{c}{b}}.$$





Г Л А В А VII

**ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ
И ВЫТЕКАЮЩИЕ ОТСЮДА ВЫРАЖЕНИЯ
СДВИГОВ И КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА**

**§ 64. Выражения в виде рядов показательных функций
и синусов**

Прежде чем перейти к решению задачи кручения для более сложных случаев, мы собираемся дать в различных формах общие интегралы неопределенного уравнения (109):

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \quad (128)$$

Начнем с выражений в виде трансцендентных рядов. Так же как решают и обычное линейное дифференциальное уравнение с x и y , беря для u сумму членов вида Ce^{mx} , можно решить, как известно, и уравнение в частных производных, подобное (128), полагая

$$u = \text{сумме членов вида } Ae^{my}e^{m'z},$$

где A , m , m' — постоянные, подлежащие определению. Подстановка одного из членов для u дает $m^2 + m'^2 = 0$, откуда

$$m' = \pm m \sqrt{-1}.$$

Таким образом, распространяя для полноты интеграла знак суммирования \sum на все возможные значения m , A' , A'' , получаем:

$$u = \sum e^{my} [A'(\cos mz + \sqrt{-1} \sin mz) + A''(\cos mz - \sqrt{-1} \sin mz)],$$

или, подставляя вместо A' , A'' величины частично вещественные, частично мнимые и сохраняя после умножений только вещественные части, имеем:

$$u = \sum e^{my} (A'_m \cos mz + A_m \sin mz). \quad (129)$$

Это тоже общий интеграл, так же как и предыдущий, но A'_m , A_m — уже другие коэффициенты.

§ 65. Случай, когда сечение симметрично, а силы распределены симметрично по отношению к одной из двух осей y или z или по отношению к обеим осям

В этом случае сначала можно упростить выражение (129) таким образом, чтобы облегчить разыскание его коэффициентов.

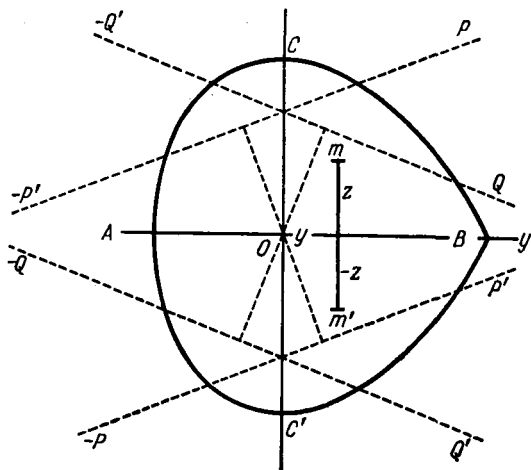


Рис. 33

Действительно, пусть сечение $ACBC'$ (рис. 33) симметрично относительно оси $y(Oy)$. Пусть, далее, будет симметрия и относительно сил, создающих кручение, так что каждой паре P , $-P$, приложенной в плоскости, расположенной несколько выше, соответствует в той же плоскости пара Q , $-Q$ равных сил, действующих на конце одинакового плеча

рычага относительно оси O и составляющих тот же угол с осью Oy , а на таком же расстоянии с другой стороны этого сечения имеются равные силы $P', -P', Q', -Q'$ по линиям, проекции которых на $ACBC'$ были бы направлены прямо противоположно проекциям сил $P, -P, Q, -Q$. Точки m верхней половины ACB сечения помещены по отношению к первым парам, действующим, например, на той стороне сечения, для которой считают перемещения u положительными, таким же образом, что и соответствующие точки m' нижней половины $AC'B$ по отношению ко вторым парам, которые действуют со стороны отрицательных u .

Если, следовательно (как мы это предполагали в § 51), эти продольные перемещения точек сечения вызываются только кручением, то u должно быть одинаково по величине в этих двух точках, соответствующих m и m' , координаты которых отличаются только знаком при z .

Итак:

1) Если имеется симметрия относительно оси y , то выражение для u должно сохранить ту же величину при изменении знака, когда в нем меняют z на $-z$.

Это условие уничтожает коэффициенты A'_m и сводит выражение (129) к

$$u = \sum A_m e^{my} \sin mz. \quad (130)$$

2) Если имеется симметрия относительно только одной оси z , то u должно также изменяться по знаку, а не по величине, когда подставляют $-y$ вместо y ; это требует, чтобы каждому члену $A_m e^{my} \sin mz$ соответствовал член $A_{m'} e^{m'y} \sin m'z$, где $m' = -m$ и $A_{m'} = A_m$, так что, объединяя их, имеем $A_m(e^{my} - e^{-my}) \sin mz$, и чтобы для каждого члена $A'_m e^{my} \cos mz$ имелся член $A'_{m'} e^{m'y} \cos m'z$, в котором $m' = -m$, а $A'_{m'} = -A'_m$; таким образом, получаем:

$$u = \sum (e^{my} - e^{-my})(A'_m \cos mz + A_m \sin mz). \quad (131)$$

Можно было бы принять также $u = \sum A_m \cdot e^{m'z} \sin m'y$.

3) Если имеется симметрия относительно двух осей одновременно, то u должно изменяться по знаку, но не по величине, когда подставляют либо $-y$ вместо y , либо $-z$ вместо z , и эти выражения должны иметь вид

$$u = \sum A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz. \quad (132)$$

Это выражение можно было бы, очевидно, записать следующим образом:

$$u = \sum A_m (e^{mz} - e^{-mz}) \sin my, \quad (133)$$

где A_m и m будут обычно иметь значения, отличные от предыдущих.

Равным образом можно видеть, что:

4) Если сечение симметрично относительно двух осей y и z или не симметрично, но *одинаково по y и по z* , так что оно совпадает с самим собой, когда его поворачивают на четверть оборота относительно центра O , в котором пересекаются оси, как это видно на рис. 34, и если приложенные силы одинаковы по y и по z , то u должно быть

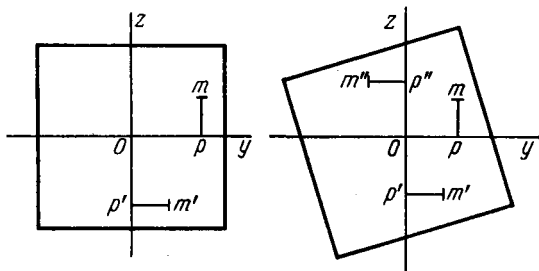


Рис. 34

одинаково в точках m' и m , если $Op' = Op$, $p'm' = pm$. Следовательно, выражение u не должно изменяться ни по величине, ни по знаку, когда мы заменим y на z , а z на $-y$ или y на $-z$, а z на y .

§ 66. Целое многочленное выражение.

Его запись в полярных координатах и распространение на произвольные показатели степени

Для исследования законов кручения призм разнообразной формы (гл. IX) необходимо будет рассмотреть некоторое число частных интегралов неопределенного уравнения, имеющих такой вид, который легко поддается вычислению. Итак, полагаем, как в § 52, u равным целому многочленному алгебраическому выражению, где будем считать сначала, что y и z входят только в целых и положительных степенях,

и подставим это выражение для u в (128) $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$.

Если мы приравняем нулю в соответствии с методом неопределенных коэффициентов то, что содержит y и z в одинаковых степенях, то получим между этими коэффициентами ряд соотношений, которые позволят нам уменьшить их число. Поэтому искомое неопределенное многочленное выражение будет таково:

$$\begin{aligned}
 u = & a_0 + a_1 y + a'_1 z + a_2(y^2 - z^2) + a'_2 2 yz + \\
 & + a_3(y^3 - 3 yz^2) + a'_3(3 y^2 z - z^3) + \\
 & + a_4(y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + a'_4(4 y^3 z - 4 yz^3) + \\
 & + a_5(y^5 - 10 y^3 z^2 + 5 yz^4) + a'_5(5 y^4 z - 10 y^2 z^3 + z^5) + \\
 & + a_6(y^6 - 15 y^4 z^2 + 15 y^2 z^4 - z^6) + \\
 & + a'_6(6 y^5 z - 20 y^3 z^3 + 6 yz^5) + a_7(y^7 - 21 y^5 z^2 + 35 y^3 z^4 - 7 yz^6) + \\
 & + a'_7(7 y^6 z - 35 y^4 z^3 + 21 y^2 z^5 - z^7) + \\
 & + a_8(y^8 - 28 y^6 z^2 + 70 y^4 z^4 - 28 y^2 z^6 + z^8) + \\
 & + a'_8(8 y^7 z - 56 y^5 z^3 + 56 y^3 z^5 - 8 yz^7) \quad \text{и т. д.} \quad (134)
 \end{aligned}$$

Его можно получить также, разлагая по степеням z , по теореме Тейлора (Taylor), произвольные функции φ , ψ , входящие в выражение решения, которое представляет собой, как мы знаем, общий интеграл дифференциального уравнения (128) $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$:

$$u = \varphi(y + z\sqrt{-1}) + \psi(y - z\sqrt{-1}),$$

и заменяя затем $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ рядами, расположенными по целым степеням y , или же (что еще проще) подставляя последовательно подобные ряды вместо φ и ψ в предыдущее выражение для u и разлагая затем по биномиальной формуле степени выражения $y \pm z\sqrt{-1}$.

Численные коэффициенты членов в скобках в выражении (134) такие же, как при степенях бинома, взятых не подряд, а через две.

Мы лучше понимаем закон и часто в то же время даем более удобную и поддающуюся обобщению форму, когда пользуемся полярными координатами, т. е. полагаем (§ 46)

$$y = r \cos \alpha, \quad z = r \sin \alpha. \quad (135)$$

Отсюда

$$u = \varphi [r(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)] + \psi [r(\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha)],$$

а заменяя функции φ , ψ разложениями по *целым или дробным* степеням n , n_1 , получаем общее выражение вида

$$u = \sum A_n r^n (\cos n \alpha + \sqrt{-1} \sin n \alpha) + \\ + \sum A_{n_1} r^{n_1} (\cos n_1 \alpha - \sqrt{-1} \sin n_1 \alpha),$$

где A_n и A_{n_1} — постоянные коэффициенты.

Мнимые члены исчезают, если показатели степени одинаковы в обеих суммах \sum и если положить $A_n + A_{n_1} = a_n$, $(A_n - A_{n_1}) \sqrt{-1} = a_{n'}$, что дает $u = \sum (a_n r^n \cos n \alpha + a_{n'} r^n \sin n \alpha)$. Но мы можем сделать n различными в двух членах в скобках, так как некоторое число коэффициентов a может равняться нулю. Таким образом, получаем следующее общее выражение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{где} \\ \text{или} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = \sum a_n r^n \cos n \alpha + \sum a_{n'} r^{n'} \sin n' \alpha, \\ r = \sqrt{y^2 + z^2}, \alpha = \arctg \frac{z}{y}, \\ y = r \cos \alpha, z = r \sin \alpha. \end{array} \quad (136)$$

Оно сводится тождественно к выражению (134) в частном случае, когда показателям n , n' дают только *целые и положительные значения*, заменяя кратные косинусы и синусы, такие, как $\cos n \alpha$ и $\sin n' \alpha$, известными разложениями, получаемыми при сравнении их с вещественной частью и коэффициентом при $\sqrt{-1}$ в мнимой части разложения $(\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha)^{n-1}$.

¹⁾ Легко видеть, что если мы заменяем независимые переменные y и z независимыми переменными r и α , то получаем:

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \cos \alpha, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \sin \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{z}{r^2} = -\frac{\sin \alpha}{r},$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{y}{r^2} = \frac{\cos \alpha}{r}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \cos \alpha - \frac{du}{d\alpha} \frac{\sin \alpha}{r},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr} \sin \alpha + \frac{du}{d\alpha} \frac{\cos \alpha}{r},$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dy} &= a_1 + 2 a_2 y + 2 a_2' z + 3 a_3 (y^2 - z^2) + \\ &+ 3 a_3' 2 yz + 4 a_4 (y^3 - 3 yz^2) + 4 a_4' (3 y^2 z - z^3) + \\ &+ 5 a_5 (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + 5 a_5' (4 y^3 z - 4 yz^3) + \dots, \\ \frac{du}{dz} &= a_1' - 2 a_2 z + 2 a_2' y - 3 a_3 2 yz + 3 a_3' (y^2 - z^2) - \\ &- 4 a_4 (3 y^2 z - z^3) + 4 a_4' (y^3 - 3 yz^2) - \\ &- 5 a_5 (4 y^3 z - 4 yz^3) + 5 a_5' (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + \dots, \end{aligned} \right\} (137)$$

или (замечая, что $\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{du}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy} = \frac{du}{dr} \cos \alpha - \frac{du}{rd\alpha} \sin \alpha$,

$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr} \sin \alpha + \frac{du}{rd\alpha} \cos \alpha$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \sum n a_n r^{n-1} \cos (n-1) \alpha + \\ &+ \sum n' a_{n'} r^{n'-1} \sin (n'-1) \alpha, \\ \frac{du}{dz} &= - \sum n a_n r^{n-1} \sin (n-1) \alpha + \\ &+ \sum n' a_{n'} r^{n'-1} \cos (n'-1) \alpha. \end{aligned} \right\} (138)$$

Подставляя эти результаты в выражение (103) $M_x = \int_0^\omega d\omega [e (\frac{du}{dz} + \theta y) y - f (\frac{du}{dy} - \theta z) z]$ при $e = f = G$, получаем:

$$\begin{aligned} M_x &= G \theta \int_0^\omega (y^2 + z^2) d\omega - G \int_0^\omega d\omega [a_1 z - a_1' y - 2 a_2 2 yz - \\ &- 2 a_2' (y^2 - z^2) + 3 a_3 (3 y^2 z - z^3) + 3 a_3' (y^3 - 3 yz^2) + \\ &+ 4 a_4 (4 y^3 z - 4 yz^3) - 4 a_4' (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + \dots], \end{aligned} \quad (139)$$

и неопределенное уравнение $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d^2 u}{r^2 d\alpha^2} + \frac{du}{rd r} = 0.$$

Итак, это дифференциальное уравнение действительно удовлетворяется при выражении (136) для u через r и α .

или в более общем виде

$$M_x = G \theta \int r^2 d\omega - G \sum n a_n \int d\omega r^n \sin n\alpha + \\ + G \sum n' a_{n'} \int d\omega r^{n'} \cos n'\alpha. \quad (140)$$

§ 67. Члены ряда, исчезающие при симметричном сечении.
Члены, исчезающие при сечении, одинаковом
в обоих направлениях y и z

В соответствии с тем, что мы установили в § 65, имеем:

1) Если сечение симметрично относительно оси y , то u должно оставаться одинаковым по величине при замене z на $-z$ или α на $-\alpha$. Следовательно, в таком случае необходимо принять в выражении (134) u в виде целого ряда по отношению к обычным координатам:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0.$$

Выражение (136) сводим в полярных координатах к

$$u = \sum a_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha.$$

2) Если сечение симметрично только относительно оси z , то u должно оставаться по величине тем же при замене y на $-y$ или α на $\pi - \alpha$. Таким образом, необходимо полагать в целом выражении (134)

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_4 = 0 \dots; \\ a'_1 = 0, \quad a'_3 = 0, \quad a'_5 = 0 \dots$$

Более общее выражение (136) сводим к членам, где n целое и нечетное, а n' целое и четное, так как $\sin(n\pi - n\alpha) = -(-1)^n \sin n\alpha$, $\cos(n\pi - n\alpha) = (-1)^n \cos \alpha$. Впрочем, n и n' могут быть положительными или отрицательными.

3) Если сечение симметрично относительно двух осей y и z одновременно, то выражение (134) сводим к членам, содержащим

$$a'_2, \quad a'_4, \quad a'_6, \quad a'_8 \dots,$$

т. е. к

$$u = a'_2 2yz + a'_4(4y^3z - 4yz^3) + a'_6(6y^5z - 20y^3z^3 + 6yz^5) + \\ + a'_8(8y^7z - 56y^5z^3 + 56y^3z^5 - 8yz^7) + \dots, \quad (141)$$

а выражение в полярных координатах (136) будет содержать только члены с четными значениями n' , т. е.

$$u = (a'_2 r^2 - a''_2 r^{-2}) \sin 2\alpha + (a'_4 r^4 - a''_4 r^{-4}) \sin 4\alpha + \\ + (a'_6 r^6 - a''_6 r^{-6}) \sin 6\alpha + \dots \quad (142)$$

4) Наконец, если *кроме симметрии* сечение должно быть *равным* относительно двух осей, то необходимо, чтобы выражение (141) и сохраняло свою величину и свой знак при замене y на z , z на $-y$, что приводит его к членам, содержащим $a'_4, a'_8, a'_{12}, \dots$, т. е. к

$$u = a'_4(4y^3z - 4yz^3) + a'_8(8y^7z - 56y^5z^3 + 56y^3z^5 - 8yz^7) + \\ + a'_{12}(12y^{11}z - 220y^9z^3 + 792y^7z^5 - 792y^5z^7 + \\ + 220y^3z^9 - 12yz^{11}) + a'_{16}(16y^{15}z - 560y^{13}z^3 + \\ + 4368y^{11}z^5 - 11440y^9z^7 + 11440y^7z^9 - 4368y^5z^{11} + \\ + 560y^3z^{13} - 16yz^{15}) + \dots \quad (143)$$

Более общее выражение (136) или (142) должно сохранить свою величину и свой знак, когда подставляем $\frac{\pi}{2} + \alpha$ вместо α , так что оно содержит только члены, в которых n' кратно 4, т. е. приводится к

$$u = \left(a'_4 r^4 - \frac{a''_4}{r^4}\right) \sin 4\alpha + \left(a'_8 r^8 - \frac{a''_8}{r^8}\right) \sin 8\alpha + \\ + \left(a'_{12} r^{12} - \frac{a''_{12}}{r^{12}}\right) \sin 12\alpha + \dots \quad (144)$$





ГЛАВА VIII
**КРУЧЕНИЕ ПРИЗМЫ
С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ**

§ 68. Состояние рассматриваемого вопроса

Вопрос о кручении призмы с прямоугольным основанием был разработан Коши в 1829—1830 гг.¹⁾ Он разыскивает перемещения, не считая вначале, что они соответствуют кручению; но он рассматривает как очень малые измерения $2b$, $2c$ основания, чтобы иметь возможность отбросить на различных этапах вычислений в целых рядах, посредством которых он представляет перемещения и внутренние давления, квадраты и высшие степени поперечных координат y и z . Мы воспроизвели в другом месте²⁾ его остроумный анализ, выводы которого, истолкованные геометрически, дали нам возможность заметить *искривление* сечений и были отправной точкой наших исследований. Коши дал для крутящего момента выражение³⁾

$$M_x = \frac{16}{3} \frac{b^3 c^3}{\frac{b^2}{f} + \frac{c^2}{e}} \theta,$$

которое тождественно выражению (116) $\frac{4G\theta}{\frac{1}{J} + \frac{1}{J'}}$, найденному

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. IV. О кручении и крутильных колебаниях прямоугольного стержня.

²⁾ Comptes rendus de l'Académie, 20 ноября 1843 г., т. XVII, стр. 1180.

³⁾ Exercices de mathématiques, т. IV, стр. 59, формула (105).

нами (§ 53) для эллиптической призмы, когда полагают $e = f = G$ и подставляют значения моментов инерции для прямоугольника

$$J = \int z^2 d\omega = \frac{4}{3} bc^3, \quad J' = \int y^2 d\omega = \frac{4}{3} cb^3. \quad (145)$$

Тот же анализ дает (при учете первых членов разложения)¹⁾

$$\frac{d^2 u}{dydz} = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta,$$

откуда можно получить значение $u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz$, также подобное выражению, найденному нами для эллипса.

Коши дает свои выводы только как приближенные. Однако мы увидим (§§ 74, 86 и 111), что предыдущее выражение для крутящего момента M_x , проверенное опытами Савара на очень тонких призмах, может рассматриваться как точное, когда одно из измерений основания очень велико сравнительно с другим. Им можно также пользоваться в других случаях, умножая его на численный коэффициент, который изменяется только в пределах от 0,84 до 1 (см. § 85).

Нас заставило настойчиво искать точное выражение для любого отношения этих двух измерений то обстоятельство, что в соответствии со второй из двух основных теорем теории давлений (§ 10) (данных тем же знаменитым математиком) $P_{xy} = P_{yx}$, $P_{xz} = P_{zx}$, поэтому равенство нулю составляющих P_{yx} , P_{zx} в продольном направлении x давлений на боковых внешних гранях, перпендикулярных соответственно к осям y и z , влечет за собой в местах, где грани пересекаются, одновременно равенство нулю двух поперечных составляющих P_{xy} , P_{xz} давления, испытываемого прямоугольным сечением призмы. Отсюда следует, что в этих углах (как вообще во всех выступающих углах, даже не прямых, которые могут быть в прямых сечениях призмы) давление может действовать только нормально к сечению, так что в этих точках нет никакого сдвига g_x , и сечение вынуждено искажаться, чтобы оставаться нормальным к четырем выступающим ребрам, которые становятся искривленными. Итак, это

¹⁾ Exercices de mathématiques, т. IV, стр. 50 (п. 2 этой страницы) и 55, формулы (55) и (81).

нельзя найти из выражения $u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz$, в соответствии с которым именно наибольшие сдвиги имеют место в четырех углах прямоугольных сечений; отсюда мы должны заключить, что к такого рода искривлению, на которое оно указывает, нужно добавить другое, которое проявляется особенно у углов сечений и которое существует, когда $b = c^1$.

§ 69. Неопределенные и определенные уравнения

Итак, рассмотрев общий случай кручения или задавая (§ 2) зависимости (101) $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$ между перемещениями, так же как производную $\frac{du}{dx} = 0$ (§ 51), что приводит всегда первое неопределенное уравнение к виду

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad (146)$$

мы старались проинтегрировать его точно²⁾ для данных условий относительно сил в предположении, что продольные составляющие давления равны нулю на боковых гранях, заметив при этом, что определенное уравнение (110) $\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0$, имеющееся для какого-либо контура, в случае прерывистого контура прямоугольника делится естественно на два других:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du}{dy} = \theta z \quad \text{для } y = \pm b, \text{ каким бы ни было } z \\ \quad \quad \quad \text{между } -c \text{ и } +c; \\ \frac{du}{dz} = -\theta y \quad \text{для } z = \pm c, \text{ каким бы ни было } y \\ \quad \quad \quad \text{между } -b \text{ и } +b. \end{array} \right\} (147)$$

Можно видеть, что задача, выраженная уравнениями (146) и (147), одинакова с задачей определения постоянных температур, которые были бы измерены в нашей прямоуголь-

¹⁾ Comptes rendus, 22 февраля 1847 г., т. XXIV, стр. 263.

²⁾ Comptes rendus, 22 марта 1847 г., т. XXIV, стр. 487.

ной призме или в одном из ее слоев конечной или бесконечно малой толщины, если бы при непроницаемых для тепла основаниях боковые грани пропускали нормально к ним потоки притекающего и уходящего тепла ff , ff (рис. 35), пропорциональные расстояниям $y = Bf$, $z = Cf$ от точек входа или выхода до линий B , C , находящихся посередине этих граней.

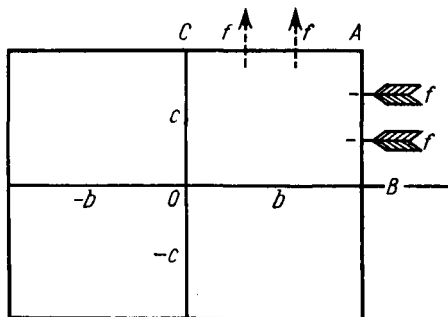


Рис. 35

Вантцель (Wantzel) натолкнул нас на мысль, что второе из двух определенных условий можно упростить, полагая

$$u = -\theta yz + u'. \quad (148)$$

Тогда неопределенное уравнение всегда остается такого же вида:

$$\frac{d^2 u'}{dy^2} + \frac{d^2 u'}{dz^2} = 0,$$

а определенные уравнения¹ будут:

$$\frac{du'}{dy} = 2\theta z \text{ для } y = \pm b \text{ и для всякого значения } z \text{ между } -c \text{ и } +c;$$

$$\frac{du'}{dz} = 0 \text{ для } z = \pm c \text{ и для всякого значения } y \text{ между } -b \text{ и } +b.$$

Интегрирование при условии этого преобразования может производиться с помощью известных приемов.

§ 70. Решение этих уравнений

Поскольку нельзя удовлетворить их точно, как мы это делаем в случае эллипса с алгебраическим выражением, мы должны применить трансцендентный ряд (132) (§ 65) для случая симметрии относительно каждой из двух осей y и z :

$$u' = \sum A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz.$$

Чтобы второе определенное условие $\frac{du'}{dz}$ удовлетворялось для всех членов, необходимо, чтобы

$$\cos mc = 0$$

или

$$mc = \frac{2n-1}{2} \pi,$$

где n — целое число большее нуля.

Отсюда следует:

$$u' = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_m \left(e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} \right) \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c}. \quad (149)$$

Остается определить ряд коэффициентов A_m так, чтобы для $y = \pm b$ получить $\frac{du'}{dy} = 2\theta z$, т. е. чтобы

$$\sum \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{c} A_m \left(e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} \right) \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} = 2\theta z.$$

Обозначим для краткости

$$\frac{A_m}{2\theta c} \frac{2n-1}{2} \pi \left(e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} \right) = A_n. \quad (150)$$

Величины A_n должны быть такими, чтобы

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} = z, \quad (151)$$

каким бы ни было z в пределах $\pm c$.

Известно, что для этого необходимо придать этим величинам значения, выраженные формулой

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^c z \sin \left(\frac{2n-1}{2c} \pi z \right) dz^1). \quad (152)$$

Но поскольку мы хотим сделать элементарной нашу теорию кручения, найдем эти значения простым методом, который был применен Лагранжем (Lagrange)²⁾ в задаче о колебаниях струн, а затем Эйлером³⁾ и Фурье⁴⁾ в других случаях, чтобы выразить какую-либо функцию в виде периодического ряда. Разложив уравнение (151) в ряд

$$z = A_1 \sin \frac{\pi z}{2c} + A_2 \sin \frac{3\pi z}{2c} + \dots + A_n \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} + \dots, \quad (153)$$

умножаем все его члены на $dz \sin \frac{2n-1}{2c} \pi z$ и интегрируем в пределах от 0 до c . Поскольку имеем обычно

$$\begin{aligned} \int dx \sin kx \sin k'x &= \int dx \frac{\cos(k-k')x - \cos(k+k')x}{2} = \\ &= \frac{\sin(k-k')x}{2(k-k')} - \frac{\sin(k+k')x}{2(k+k')} + \text{const} \end{aligned}$$

и

$$\int dx \sin^2 kx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2k} \sin kx \cos kx + \text{const},$$

¹⁾ Формула

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\int_0^l \varphi(x') \sin \frac{2i-1}{2l} \pi x' dx' \right) \sin \frac{2i-1}{2l} \pi x$$

приведена в конце стр. 649, § 326 второго издания Мécanique Пуассона.

²⁾ Mélanges de Turin, т. III, 1762—1763, стр. 251. Application aux cordes sonores.

³⁾ Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus, 1777, помещенная в т. XI, 1798, Nova acta acad. Petropolitanae.

⁴⁾ Théorie de la chaleur.

то находим:

$$\int_0^c dz \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \sin \frac{(2n'-1)\pi z}{2c} = 0,$$

если число n' отличается от n .

Таким образом, умножение и интегрирование в пределах от 0 до c уничтожают все члены правой части уравнения, за исключением n -го члена, который будет

$$A_n \int_0^c dz \sin^2 \frac{(2n-1)\pi z}{2c} = A_n \frac{c}{2},$$

и мы действительно получаем для неизвестного коэффициента A_n этого общего члена выражение (152)

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^c z dz \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c}.$$

Итак, чтобы вычислить определенный интеграл, входящий в выражение A_n , имеем:

$$\begin{aligned} \int z dz \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} &= -z \frac{2c}{(2n-1)\pi} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2c} + \\ &+ \left(\frac{2c}{(2n-1)\pi} \right)^2 \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} + \text{const}. \end{aligned}$$

Это выражение уничтожается на нижнем пределе $z = 0$ и сводится к $\left(\frac{2c}{(2n-1)\pi} \right)^2 (-1)^{n-1}$ на верхнем пределе $z = c$.

Следовательно, получаем:

$$A_n = \frac{8c(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad (154)$$

или (уравнения (151)—(153))

$$\begin{aligned} z &= \frac{8c}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} = \\ &= \frac{8c}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi z}{2c} - \frac{1}{9} \sin 3 \frac{\pi z}{2c} + \dots \right). \quad (155) \end{aligned}$$

Приравнивая найденное значение (154) A_n выражению (150), с которым оно совпадает, находим A_m . Подставляем его в выражение (149) для неизвестного u' . Затем, прибавляя $-\theta yz$, чтобы иметь $u = -\theta yz + u'$, получаем полный интеграл уравнения $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$, удовлетворяющий условиям $\frac{du}{dy} = \theta z$ для сторон $2c$ и $\frac{du}{dz} = -\theta y$ для сторон $2b$ прямоугольного сечения и, следовательно, всем необходимым условиям; в результате находим первое из двух следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 u &= \theta bc \left[-\frac{y}{b} \frac{z}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{c}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \right] = \\
 &= \theta bc \left[\frac{y}{b} \frac{z}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{b}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \right]. \quad (156)
 \end{aligned}$$

Второе выражение получается, очевидно, если вместо $u = -\theta yz + u'$ принять $u = \theta yz + u'$ (что превращает определенные уравнения (147) в $\frac{du'}{dy} = 0$, $\frac{du'}{dz} = -2\theta y$), а вместо (132) воспользоваться выражением (133) $u' = \sum A_m (e^{mz} - e^{-mz}) \sin my$. Внешне весьма различные, эти два выражения, когда определяют численные частные значения, дают одинаковые результаты, так что они в действительности тождественны.

И, несмотря на их форму, каждое из них симметрично относительно y и z или сохраняет одинаковое значение, когда в них меняют y на z и одновременно b на c и соответственно заменяют θ на $-\theta$.

Мы можем обозначить через sh и ch гиперболические синусы и косинусы Гудермана, так что

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Следовательно, эти выражения можно записать так:

$$\begin{aligned} u &= -\theta yz + \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{\theta c^2}{2} \times \\ &\times \sum \frac{(-1)^{n-1} \text{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{2c} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c}}{(2n-1)^3 \text{ch} \frac{(2n-1)\pi b}{2c}} = \\ &= \theta yz - \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \frac{\theta b^2}{2} \times \\ &\times \sum \frac{(-1)^{n-1} \text{sh} \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}}{(2n-1)^3 \text{ch} \frac{(2n-1)\pi c}{2b}}. \quad (157) \end{aligned}$$

§ 71. Сдвиги. Проверка

Дифференцируя по y и z выражения (156) и (157) для u , легко видеть, что они оба удовлетворяют неопределенному уравнению $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$. Получаем для каждого из сдвигов

$g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z$ и $g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y$ два выражения, а именно:

$$\begin{aligned} g_{xy} &= -\theta c \left\{ 2 \frac{z}{c} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c} \right\} = \\ &= -\theta c \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{b}{c} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \\ &\quad \times \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b}; \quad (158) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{xz} &= \theta b \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{c}{b} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \\
 &\quad \times \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi y}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi y}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2c} = \\
 &= \theta b \left\{ 2 \frac{y}{b} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi z}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi z}{2b}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \right\}. \quad (159)
 \end{aligned}$$

Если положить $y = \pm b$, то второе выражение для сдвига g_{xy} , очевидно, уничтожается, а первое становится

$$-2\theta z + \theta \frac{16c}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2c}$$

и также равно нулю, так как в соответствии с равенством (155) второй член имеет такое же значение, что и первый.

Первое условие, т. е. $g_{xy} = 0$ для $y = \pm b$ при всяком значении z , следовательно, удовлетворено¹⁾.

Когда полагаем $z = \pm c$, первое выражение (159) для сдвига g_{xz} , очевидно, уничтожается. Второе уничтожается также посредством того же равенства (155). Второе определенное условие (147), следовательно, также удовлетворено, и выражения (156), (157) решают поставленный вопрос.

§ 72. Касательные давления. Крутящий момент. Нормальные давления

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{xy} &= G, \text{ умноженному на одно из выражений (158)} \\
 &\quad \text{для } g_{xy}; \\
 p_{xz} &= G, \text{ умноженному на одно из выражений (159) для } g_{xz}.
 \end{aligned} \right\} (160)$$

¹⁾ По крайней мере, на протяжении сторон $2c$ прямоугольника или в пределах $z = \pm c$, так как в числе других доказательств видим (На вь е, *Résumé des leçons d'analyse*, 1840, n° 496), что ряды подобного рода, как в правой части равенства (155), являются сходящимися для положительных значений z между 0 и c , поэтому в этих пределах правая часть действительно имеет численно значения левой части, в чем можно убедиться, придавая различные значения отношению z/c .

Отсюда для крутящего момента $\int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz (p_{xz}y - p_{xy}z)$, пользуясь сначала первым выражением (158), а также первым выражением (159) и принимая во внимание, что

$$\int_{-c}^c dz \cos \frac{2n-1}{2c} \pi z = \frac{2}{\frac{2n-1}{2c} \pi} \sin \frac{2n-1}{2} \pi = \frac{4c(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi},$$

$$\int_{-c}^c z dz \sin \frac{2n-1}{2c} \pi z = \frac{8c^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \pi^2},$$

$$\int_{-b}^b e^{\pm my} dy = \frac{1}{m} (e^{mb} - e^{-mb}),$$

$$\int_{-b}^b y dy e^{\pm my} = \pm \frac{b}{m} (e^{mb} + e^{-mb}) \mp \frac{1}{m^2} (e^{mb} - e^{-mb}),$$

получаем следующее выражение:

$$M_x = G \theta \left[\frac{8bc^3}{3} + \frac{256bc^3}{\pi^4} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1024}{\pi^5} c^4 \sum \frac{1}{(2n-1)^5} \frac{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}{e^{\frac{(2n-1)\pi b}{2c}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \right].$$

Но мы имеем, как известно (это можно проверить численно):

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Второй член в квадратных скобках равен, следовательно, первому члену и может быть объединен с ним, так что получаем первое из двух следующих выражений; второе, оче-

¹⁾ Лакруа (Lacroix), Calcul différentiel et intégral, 1818, т. III, §§ 1005 и 1084 или же 1183.

видно, получили бы, приняв для g_{xy} , g_{xz} их вторые выражения (158), (159):

$$\begin{aligned}
 M_x &= G \theta b c^3 \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{c}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\frac{(2n-1)\pi b}{2c} - e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}}{\frac{(2n-1)\pi b}{2c} + e^{-\frac{(2n-1)\pi b}{2c}}} \right\} = \\
 &= G \theta b^3 c \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^5 \frac{b}{c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\frac{(2n-1)\pi c}{2b} - e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}}{\frac{(2n-1)\pi c}{2b} + e^{-\frac{(2n-1)\pi c}{2b}}} \right\}. \quad (161)
 \end{aligned}$$

Эти два выражения должны быть тождественными. Это просто доказывает, что вообще два следующих аналитических выражения не изменяют своей величины, когда в них подставляют $\frac{1}{t}$ вместо t^1) (первое получено при замене $\frac{b}{c}$ на t в фигурных скобках первого выражения M_x , умноженного на $\left(\frac{\pi}{4}\right)^5$, а второе — при подстановке $t\sqrt{-1}$ вместо t и $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$ вместо $\frac{\pi^4}{96}$):

$$\frac{\pi^5}{192t} - \frac{1}{t^2} \left(\frac{e^{\frac{\pi t}{2}} - e^{-\frac{\pi t}{2}}}{e^{\frac{\pi t}{2}} + e^{-\frac{\pi t}{2}}} + \frac{1}{3^6} \frac{e^{\frac{3\pi t}{2}} - e^{-\frac{3\pi t}{2}}}{e^{\frac{3\pi t}{2}} + e^{-\frac{3\pi t}{2}}} + \dots \right)$$

и

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi t}{2}}{t^2} + \frac{\operatorname{tg} 3 \frac{\pi t}{2} - 3 \frac{\pi t}{2}}{3^6 t^2} + \frac{\operatorname{tg} 5 \frac{\pi t}{2} - 5 \frac{\pi t}{2}}{5^5 t^2} + \dots$$

Последнее выражение меняет только знак.

1) Коши доказывает это в I и II томвх Exercices de mathématiques непосредственно путем вычисления вычетов на страницах, относящихся к формулам, которые он называет взаимными.

Если к условиям относительно перемещений, поставленным в § 69 в начале этой главы, мы добавляем условия § 51, относящиеся к общим упрощениям первых решений, то не только

$$\text{но также } \left. \begin{aligned} \frac{dv}{dx} = -\theta z, \quad \frac{dw}{dx} = \theta y, \quad \frac{du}{dx} = 0, \\ \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Тогда все другие составляющие давления равны нулю, или

$$p_{xx} = 0, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad (163)$$

т. е. давления полностью равны нулю на боковых гранях, а на основаниях равны нулю только давления в продольном или нормальном направлении.

§ 73. Задача о перемещениях при заданных силах. Случай из практики

Допустим, что призма не подвергается внутри действию такой силы, как вес. Если ее различные грани испытывают заданные давления, имеющие именно те значения, которые мы перечислили (все значения, как сказано, равны нулю, за исключением касательных), то перемещение u будет выражено тригонометрической формулой (156) или (157) и перемещения v , w будут такими, что их первые производные имеют значения (162).

Действительно, эти значения u , v , w удовлетворяют всем неопределенным и определенным условиям такой задачи, и легко видеть, что они являются единственными, если рассуждать, как в §§ 56, 38, 30.

Нам нет необходимости повторять сказанное в §§ 58, 41 и 33 относительно возможности применения на практике выводов, касающихся кручения прямоугольных призм, с той же уверенностью, как мы использовали известные формулы (§§ 58, 36, 41, 30), относящиеся к кручению круговых ци-

линдров, к изгибу и даже к простому растяжению любых призм.

Итак, заменим M_x в уравнении (161) моментом сил, который создает кручение, действуя симметрично или даже как-либо иначе на призму, либо непосредственно, либо через посредство других твердых тел. Мы определим угол закручивания θ , который имеет место по всей ее длине (за исключением весьма коротких частей у концов), а следовательно, и перемещения, и сдвиги, которые отсюда вытекают.

§ 74. Первый пример.

Случай, когда одна из сторон прямоугольника очень велика по сравнению с другой

Мы намерены уточнить выводы, чтобы получить правила и общепотребительные таблицы.

Предположим вначале, что призма очень тонкая, т. е. одна из ее сторон $2b$ основания очень велика сравнительно

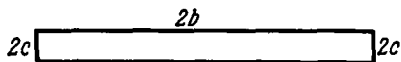


Рис. 36

с другой стороной $2c$ (рис. 36). Тогда в первом из двух выражений (161) крутящего момента M_x показатели степени при $e = 2,718\dots$ значительны, и показательные функции, имеющие знак минус в показателе, могут быть отброшены, что сводит это выражение к

$$M_x = G \theta bc^3 \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \frac{c}{b} \sum \frac{1}{(2n-1)^5} \right] = \\ = \frac{16}{3} G \theta bc^3 \left(1 - 0,630249 \frac{c}{b} \right).$$

Пренебрегая вторым членом в скобках, содержащим $\frac{c}{b}$, находим:

$$M_x = \frac{16}{3} G \theta bc^3. \quad (164)$$

Равным образом получаем его из второго общего выражения (161) для M_x , поскольку показатели степени $\frac{(2n-1)\pi c}{2b}$ в этом случае очень малы (по крайней мере, в первых членах суммы, которые оказывают наибольшее влияние) и дробь $\frac{e^+ - e^-}{e^+ + e^-}$ можно разложить по их степеням посредством разложения показательных функций, за которым следует алгебраическое деление, что дает для этой дроби

$$\frac{2n-1}{2b} \pi c - \frac{1}{3} \left(\frac{2n-1}{2b} \pi c \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{2n-1}{2b} \pi c \right)^5 - \dots$$

Таким образом, пренебрегая пятой и более высокими степенями, получаем выражение

$$M_x = G \theta b^3 c \left[\frac{16}{3} - 2 \left(\frac{4}{\pi} \right)^4 \sum \frac{1}{(2n-1)^4} + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{c^2}{b^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \right],$$

которое при учете того, что две суммы \sum имеют соответственно значения $\frac{1}{96} \pi^4$ и $\frac{1}{8} \pi^2$, действительно сводится к $\frac{16}{3} G \theta b c^3$.

Если пытаться получить также приближенное выражение для продольного перемещения u , то первая формула (156) дает $u = -\theta yz$, если пренебречь суммой, так как в нее входит отношение $\frac{c}{b}$, предполагаемое малым; мы получим то же самое из второй формулы (156), разлагая четыре показательные функции и сохраняя только два первых члена каждого разложения, так как при этом

$$u = \theta z \left[y - \frac{16b}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \right],$$

где второй член в квадратных скобках равен $-2y$ в соответствии с формулой (155).

Однако это приближение $u = -\theta yz$, давая представление о форме поверхности, недостаточно, чтобы получить значения сдвигов в различных ее точках, так как отсюда следует $g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z = -2\theta z$ и $g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = 0$. Последние выражения, будучи подставлены в (105) $M_x = \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz (Gg_{xz}y - Gg_{xy}z)$, дают $\frac{8}{3}G\theta bc^3$, т. е. величину, в двараза меньшую. Это происходит оттого, что Gg_{xz} имеют здесь плечи рычага y значительно более длинные, чем плечи z в Gg_{xy} , так что, несмотря на относительную малость сдвигов g_{xz} , их нельзя приравнять нулю без того, чтобы не сделать значительную ошибку.

Мы снова находим истинную величину (164) $\frac{16}{3}G\theta bc^3$ полного момента для изучаемого случая, если принимаем несколько более приближенно $u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\theta yz$, т. е. если мы предполагаем, что изогнутая поверхность, полученная прямоугольным сечением после кручения θ , такая же, как и поверхность, полученная сечением вписанного эллиптического цилиндра (§§ 52, 57). Действительно, это выражение u , которое сводится к $u = -\theta yz$, когда пренебрегают c^2 по сравнению с b^2 , при сохранении c^2 дает $g_{xy} = -\frac{2b^2\theta z}{b^2 + c^2}$, $g_{xz} = \frac{2c^2\theta y}{b^2 + c^2}$, как в § 53. Отсюда получаем выражение

$$M_x = 2G\theta \frac{c^2 \int y^2 d\omega + b^2 \int z^2 d\omega}{b^2 + c^2} = \frac{16}{3}G\theta \frac{b^3 c^3}{b^2 + c^2}, \quad (165)$$

которое действительно сводится к $\frac{16}{3}G\theta bc^3$, если пренебречь в конечном счете c^2 в знаменателе. Но нужно заметить, что выражения g_{xy} , g_{xz} , которые мы только что написали, всегда ошибочны для четырех углов, так как при $y = \pm b$, $z = \pm c$ они не дают нулевых сдвигов, как то получается по точным формулам (158), (159). Впрочем, имея в виду, что момент инерции равен $J = \int z^2 d\omega = \frac{4}{3}bc^3$, выражение (164) момента можно записать следующим образом:

$$M_x = 4GJ\theta. \quad (166)$$

Оно совершенно такое же, как и выражение (116) § 53 для

эллипса, когда $\frac{1}{J}$ в знаменателе ничтожно мало по сравнению с $\frac{1}{J}$.

Эта формула совпадет с выражением, данным Коши для прямоугольного сечения (§ 68).

Следовательно, результат анализа Коши является точным для весьма удлиненных прямоугольных сечений, т. е. для тонких призм¹⁾. Мы увидим, что он применим для всех прямоугольных призм при условии, что в него входят численные коэффициенты, заключенные между 0,84 и 1.

¹⁾ Мы быстро получаем формулу Коши, исходя из наших уравнений $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$, $\frac{du}{dy} - \theta z = 0$ при $y = \pm b$, $\frac{du}{dz} + \theta y = 0$ при $z = \pm c$ и стараясь удовлетворить их посредством целого ряда. Подобные ряды пробовал применить Коши. Этот ряд ввиду симметрии сечения должен представлять собой выражение (141) § 67

$$u = a'_2 2 yz + a'_4(4 y^3 z - 4 yz^3) + \dots$$

Произведя подстановку этого ряда u в два определенных уравнения и приравнявая нулю суммы членов с теми же степенями либо по z , либо по y , получаем следующий ряд уравнений для определения коэффициентов a :

$$2 a'_2 - \theta + 12 a'_4 b^2 + 30 a'_6 b^4 + \dots = 0,$$

$$2 a'_2 + \theta - 12 a'_4 c^2 + 30 a'_6 c^4 - \dots = 0,$$

$$a'_4 + 15 a'_6 b^2 + \dots = 0, \quad a'_4 - 15 a'_6 c^2 + \dots = 0.$$

Если мы вычеркиваем из двух первых уравнений члены с четвертыми степенями b и c , которые Коши считал очень малыми, и если исключаем из них a'_4 , то получаем значение

$$2a'_2 = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta,$$

которое, будучи подставлено в выражение u ; сведенное к его первому члену путем уничтожения членов четвертой и более высоких степеней, действительно дает

$$u = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz,$$

т. е. приближенное выражение (§ 68), которое сводится к $u = -\theta yz$, когда c^2 ничтожно по сравнению с b^2 .

§ 75. Второй пример.
Призма с основанием в виде квадрата (рис. 37)

Предположим, далее, что

$$b = c.$$

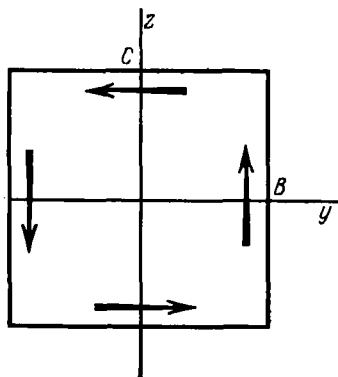


Рис. 37

Выражения (156) будут такими:

$$\begin{aligned}
 u &= -\theta yz + \frac{1}{2} \theta b^2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \times \\
 &\quad \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2b} \pi y} - e^{-\frac{2n-1}{2b} \pi y}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi}} \sin \frac{2n-1}{2b} \pi z = \\
 &= \theta yz - \frac{1}{2} \theta b^2 \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \times \\
 &\quad \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2b} \pi z} - e^{-\frac{2n-1}{2b} \pi z}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi}} \sin \frac{2n-1}{2b} \pi y. \quad (167)
 \end{aligned}$$

Мы вычислили с помощью таблицы гиперболических синусов и косинусов Гудермана¹⁾ значения этих двух выражений для последовательных значений $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{b}$, отличающихся на одну десятую. Они оказались согласованными. Достаточно взять три, четыре, шесть и восемь членов ряда до $\frac{y}{b} = 0,9$ включительно по первой формуле и $\frac{z}{b} = 0,9$ по второй. Что касается значений, соответствующих $\frac{y}{b}$ или $\frac{z}{b} = 1$, то мы упрощаем их вычисление, заменяя величину $\frac{e^+ - e^-}{e^+ + e^-}$ единицей во всех членах ряда после третьего.

Далее приводится таблица результатов.

Призма с основанием в виде квадрата

$\frac{z}{b} \backslash \frac{y}{b}$	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4
					Полусторона <i>b</i>	
1	0,03477	0	-0,03477	-0,06788	-0,09756	-0,12193
0,9	0,02562	0	-0,02562	-0,04959	-0,07019	-0,08560
0,8	0,01810	0	-0,01810	-0,03464	-0,04798	-0,05642
0,7	0,01214	0	-0,01214	-0,02286	-0,03065	-0,03399
0,6	0,00762	0	-0,00762	-0,01398	-0,01778	-0,01765
0,5	0,00437	0	-0,00437	-0,00766	-0,00878	-0,00661
0,4	0,00219	0	-0,00219	-0,00350	-0,00307	0
0,3	0,00088	0	-0,00088	-0,00110	0	0,00307
0,2	0,00022	0	-0,00022	0	0,00110	0,00350
0,1	0	0	0	0,00022	0,00088	0,00219
0	0	0	0	0	0	0
		Центр			Полумедиана	
-0,1	0		0	-0,00022	-0,00088	-0,00219
-0,2	-0,00022	0	0,00022	0	-0,00110	-0,00350
-0,3	-0,00088	0	0,00088	0,00110	0	-0,00307

¹⁾ Gudermann, Theorie der Potenzial, oder cyklisch-hyperbolischen Functionen. Напечатано, в Journal de Crellé, т. VI—IX. Он называет гиперболическими синусами и косинусами x , как мы сказали, функции $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

За исключением первого столбца и трех последних строк значений $\frac{u}{\theta b^2}$, помещенных для связи с четырьмя другими четвертями, эта таблица включает только точки приведенной здесь и разделенной на квадратики четверти сечения (рис. 38), для которой y и z положительны. Рассмотрение выражений (167) для u показывает, что такие же значения имеются в области отрицательных y и z и одинаковые по величине значения в двух других четвертях сечения.

Мы видим, что ордината u равна нулю не только на обеих медианах квадрата (что легко заметить из выражений (167), так как они обращаются в нуль при $y = 0$ или $z = 0$), но также на обеих диагоналях, которые остаются, следовательно,

$b = c$). Значения $\frac{u}{\theta b^2}$

0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
-0,13894	-0,14617	-0,14075	-0,11884	-0,07555	Угол	Полусторона $c \parallel b$
-0,09379	-0,09244	-0,07883	-0,04949	0	0	
-0,05809	-0,05090	-0,03245	0	0,04949	0,07555	
-0,03122	-0,02054	0	0,03245	0,07883	0,11884	
-0,01222	0	0,02054	0,05090	0,09244	0,14075	
0	0,01222	0,03122	0,05809	0,09379	0,14617	
0,00661	0,01765	0,03399	0,05642	0,08560	0,13894	
0,00878	0,01778	0,03065	0,04798	0,07019	0,12193	
0,00766	0,01398	0,02286	0,03464	0,04959	0,09756	
0,00437	0,00762	0,01214	0,01810	0,02562	0,06788	
0	0	0	0	0	0,03477	
-0,00437	-0,00762	-0,01214	-0,01810	-0,02562	-0,06788	
-0,00766	-0,01398	-0,02286	-0,03464	-0,04959	-0,09756	
-0,00878	-0,01778	-0,03065	-0,04798	-0,07019		

так же как и медианы, в первоначальной плоскости сечения, тогда как остальные точки перемещаются в ту или в другую сторону.

Последнее показывает, что выражения (167) обращаются в нуль при $y = z$ и что мы имеем в общем случае

(полагая $\frac{\pi y}{2b} = t$)

$$\frac{\pi t^2}{8} = \frac{e^t - e^{-t}}{\pi e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} \sin t - \frac{1}{3^3} \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{\frac{3\pi}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}} \sin 3t +$$

$$+ \frac{1}{5^3} \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{\frac{5\pi}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}}} \sin 5t - \text{ и т. д.}^1).$$

Это и должно было произойти, так как в случае, когда призма с двумя равными поперечными измерениями скручивается парами сил, приложенными симметрично к ее двум

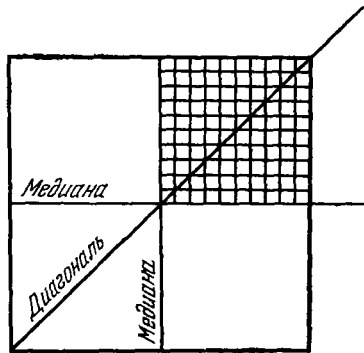


Рис. 38

концам, то нет никаких оснований к тому, чтобы диагонали сечений перемещались больше в сторону одного конца, чем другого.

Это замечание объясняет также, почему по обеим сторонам от диагоналей, как и по обеим сторонам от медиан,

¹⁾ Это равенство, если считать t очень малым и разложить в ряд показательные функции и синусы, дает выражение

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{\frac{\pi}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{3\pi}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}} + \frac{1}{5} \frac{1}{\frac{5\pi}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}}} - \text{ и т. д.,}$$

которое доказано иначе на стр. 267 второго тома (1827) Exercices de mathématiques Коши.

симметрично расположенные ординаты u одинаковы по величине. Оно также показывает равенство двух выражений (167) для u , которые изменяются только по знаку, но не по величине, когда в них заменяют y на z и наоборот.

§ 76. Искривленная поверхность сечений после кручения. Разрезы. Рельеф. Экспериментальное подтверждение

Искривленная поверхность сечений разделяется, как мы видим, на восемь симметричных частей (рис. 39). Четыре из них выступают над первоначальной плоскостью, а остальные

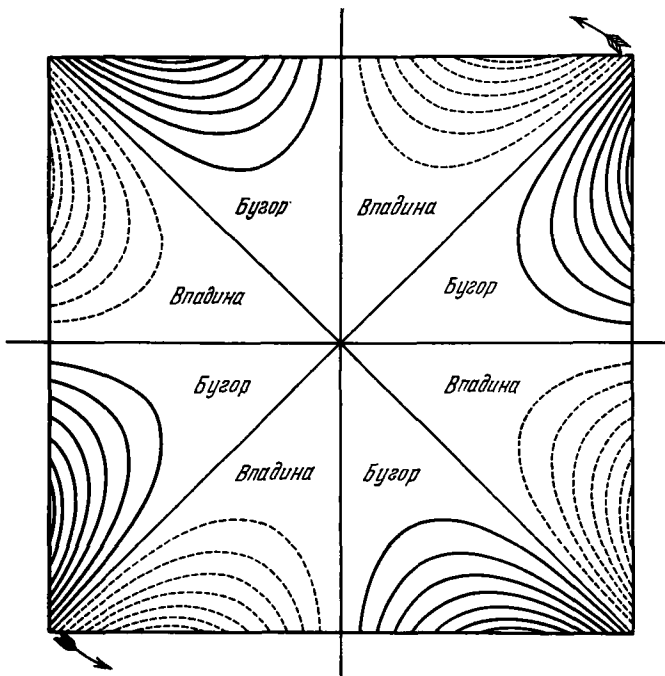


Рис. 39

четыре образуют впадины, или углубления, совпадающие с соседними выпуклостями, если их повернуть на два прямых угла относительно одной из полудиagonalей или одной из полумедиан.

Наши численные значения $\frac{u}{\theta b^2}$ дают возможность провести по точкам разрезы сечения плоскостями, параллельными оси кручения, а также параллельными осям z или y . Мы получим графически из их пересечений с линиями, параллельными осям z или y , *топографические разрезы*, перпендикулярные к x , размещенные через две сотые θb^2 , что дает до наибольших значений $u = \pm 0,146 \theta b^2$ семь разрезов для выпуклостей и столько же для впадин. Эти разрезы мы провели на рисунке в конце предыдущей страницы.

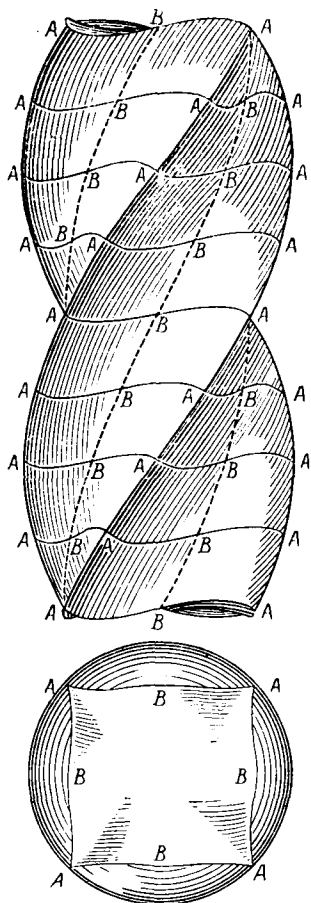


Рис. 40

Если бы вращение производилось в направлении, противоположном тому, которое указано стрелками, то вогнутые части стали бы выпуклыми и наоборот.

Полагая, например, что призма со стороной основания в два дециметра, т. е. у которой

$$b = c = 0,10 \text{ м,}$$

скручена таким образом, что $\theta = 5$ или что шаг спиралей составляет $\frac{2\pi}{5} = 1,2566 \text{ м}$, получаем:

$$\frac{u}{\theta b^2} = \frac{u}{0,05} = 20 u.$$

Таким образом, разрезы, для которых $\pm u = 0,02 \theta b^2; 0,04 \theta b^2; 0,06 \theta b^2; \dots; 0,14 \theta b^2$, образо-

ваны плоскостями, лежащими на 1, 2, 3, ..., 7 мм выше или ниже первоначальной плоскости сечения.

В результате мы смогли построить, наклеивая друг на друга листы картона № 9 толщиной 1 мм, выкроенные по

шаблону разрезов, указанных на чертеже, рельеф волнистой поверхности, возникшей вследствие кручения. Мы могли бы для этого воспользоваться и другими способами.

Проекции полученной поверхности на горизонтальную и вертикальную плоскости в масштабе 3 : 20 изображены на рис. 40.

Подобное кручение (на половину окружности на длине, равной $\pi = 3,1416$ стороны основания) значительно и таково, что вторыми степенями удлинений и сдвигов уже нельзя пренебрегать, так же как и разницей в удлинениях различных *волокон*. Поэтому найденные нами законы перестают соблюдаться точно. Но это чрезмерное кручение удобно для получения наглядной картины явления.

Впрочем, опыт дает результаты, соответствующие результатам нашего анализа. Если мы скручиваем каучуковую призму с квадратным основанием, то видим, что линии, проведенные на ее гранях, первоначально прямые и перпендикулярные к ребрам, становятся кривыми в виде S или в виде гуська подобно линиям АВА, которые сначала рассчитаны, а затем проведены на рисунке.

§ 77. Крутящий момент для квадратной призмы

В том же случае, когда $b = c$, два выражения (161) крутящего момента таковы:

$$M_x = Gb^4 \theta \left\{ \frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^6 \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3^6} \frac{e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}} + \frac{1}{5^6} \frac{e^{\frac{5\pi}{2}} - e^{-\frac{5\pi}{2}}}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}} + \dots \right) \right\}. \quad (168)$$

Тогда, вычисляя быстро сходящийся ряд и помня, что полярный момент инерции будет $J_0 = J + J' = \frac{8}{3} b^4$, находим:

$$M_x = 2,249233 Gb^4 \theta = 0,843462 GJ_0 \theta.$$

В соответствии с обычной теорией (и даже в соответствии с более точной теорией, по которой первоначально плоскому сечению (§ 68) придается параболоидальная форма) квадратное сечение оставалось бы плоским и крутящий момент был бы равен $GJ_0\theta$ для квадратной призмы, как и для круговой призмы или цилиндра.

Мы видим, что это обычное выражение $GJ_0\theta$ нужно умножить на коэффициент

$$0,843462.$$

Таким образом, чтобы сообщить одинаковое кручение двум брускам из одинакового материала, круглому и квадратному, сечения которых имеют одинаковый полярный момент инерции $J_0 = \int r^2 d\omega$, нужно, чтобы силы, приложенные к квадратному брусу, составляли бы (при одинаковом плече рычага момента) только 0,843 сил, приложенных к круглому брусу.

Это уменьшенное сопротивление квадратных брусков кручению происходит просто оттого, что их сечения, как и все сечения с выступающими углами, искажаются к этим углам (§ 68), тогда как круговые сечения не имеют никакой причины подвергаться подобному искажению, когда упругость по отношению к сдвигу одинакова во всех поперечных направлениях.

§ 78. Экспериментальное подтверждение

Эта формула подтверждена опытами Дюло (Duleau)¹⁾ и Савара (Savart)²⁾, результаты которых приведены ниже. Мы выводим из них, как это видно, значения коэффициента упругости при сдвиге G для каждого образца.

Мы действительно видим из этих опытов, что нельзя для крутящего момента M_x квадратных стержней брать выражение $GJ_0\theta$, как для круглых стержней, так как значения $\frac{M_x}{J_0\theta}$ значительно ниже для квадратных стержней и даже

¹⁾ Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, брошюра ин-квартио, 1820.

²⁾ Essai sur la réaction de torsion des verges rigides. Annales de chimie et de physique, т. XLI, 1829, стр. 373.

отношение общих средних 5 636 625 000 и 6 659 230 000 составляет

$$0,84644,$$

т. е. очень близко к отношению 0,843462, которое дает вышеуказанный анализ.

И принимая в расчет это отношение или сравнивая значения коэффициента упругости G , полученные из $G = \frac{M_x}{J_0 \theta}$ для круглых стержней и $G = \frac{M_x}{0,843462 J_0 \theta}$ для квадратных стержней, видим, что получаются числа, мало отличающиеся друг от друга; расхождения между ними меньше расхождений, устанавливаемых в опытах со стержнями одной и той же формы.

Итак, эти опыты могут рассматриваться как подтверждающие нашу теорию, так как она показывает уменьшение сопротивления для квадратных стержней с одинаковым моментом инерции сечения по сравнению с круглым.

Мы находим еще большее уменьшение сопротивления, если вместо того, чтобы пользоваться *общими средними*, сравниваем друг с другом *частные средние*, относящиеся к круглому и квадратному железу из одних и тех же стран. Мы видим, что, несмотря на деление на 0,843462, значения G , полученные из опытов с квадратными стержнями, будь они из железа Перигора или из английского железа, все же ниже значений, полученных из опытов с круглыми стержнями.

Для английского железа отношение средних значений $\frac{M_x}{J_0 \theta}$

$$\text{было бы даже только } \frac{\frac{1}{2}(60\,046 + 59\,681)}{\frac{1}{2}(72\,466 + 84\,499)} = 0,763. \text{ Но это}$$

число может рассматриваться как не имеющее существенного значения, так как для английского железа колебание в качестве не меньше, чем для французского железа. Итак, в соответствии с примечаниями в таблице Дюло железо по опыту 88, как и железо по опытам 98 и 99, было «очень гибким на холоде, красноломким, штампованным или прокатанным, кажущимся менее плотным, чем обычное кованое железо», так что эти два образца железа могут быть сравнимы. Но этого вовсе нельзя сказать относительно

Опыты
(углы закручивания, вызванные нагрузкой)

№ опытов	Название железа	Длина скрученной части	Диаметр круглого железа и сторона квадратного железа (вычисленные по весу)	Угол закручивания одного конца по отношению к другому неподвижному, градусы
1	2	3	4	5
86	Круглое железо	2,81	0,1052	13,4
	Перигора заводское	3,17	0,0196	6
87	То же.....	3,19	0,02205	3,32
91	То же.....	2,89	0,02303	3
92	То же.....	2,94	0,0265	1,82
94	То же.....	3,35	0,02673	1,87
95	То же.....	2,92	0,03572	0,625
97	Круглое железо			
89	Ариежа.....	3,57	0,02149	4,8
90	То же.....	2,89	0,02151	4,5
96	То же.....	2,77	0,02682	1,65
88	Круглое железо английское Дулейс	2,40	0,01983	4
93	Круглое железо английское.....	3,24	0,02352	2,34
	Общее среднее для круглого железа...
100	Квадратное железо	2,52	0,02035	3,08
	Перигора заводское.	3,39	0,03260	0,62
101	То же.....			
	Квадратное железо английское С ₁	4,12	0,01846	6,5
98	Тот же кусок.....	2,52	0,01846	4
99	Общее среднее для квадратного железа

¹⁾ Следовательно, в этих опытах $M_x = 3,2$. Мы видим в работе Дюло, что плечо рычага равно 0,31 только для опыта 86; но сравнение с результатами расчета Дюло доказывает, что следует читать 0,32. Моменты инерции для круглых стержней получаются при умножении на $\frac{\pi}{32}$ диаметров в четвертой степени, а для квадратного железа при умножении на $\frac{1}{4}$ стороны в четвертой степени. Угол закручивания θ получается при умножении на $\frac{2\pi}{360}$ числа градусов, деленного на длину скрученной части стержня.

Только для двух первых опытов (86 и 87) Дюло указал значения ряда углов закручивания, полученные при различных нагрузках. Установив пропорциональность между ними, он дает обычно только приведенный угол для нагрузки 10 кг.

Только для стержней в этих двух опытах, а также в опытах 98 и 99 он дает поперечные размеры *по обмеру*. По-видимому, лишь размеры, вычисленные по весу образцов, заслуживают у него доверия, ввиду неправильностей поверхностей или отсутствия очень точных средств измерения; следовательно, он избежал измерения других стержней, и мы должны были, как и Дюло, пользоваться для наших сравнительных вычислений только размерами, полученными по весу.

Впрочем, можно убедиться в том, что найденные нами значения $\frac{M_x}{J_0 \theta}$ пропорциональны коэффициентам, которые Дюло выводит из своих опытов (описанных

Дюло

10 кг, действовавшей на плече 0,32 м)¹⁾

$\frac{M_x}{J_0 \theta} = G$ только для круглых стержней	$\frac{M_x}{0,843462 J_0 \theta} = G$ для квадратных стержней	Средние частные значения коэффициента G	Примечания
6	7	8	9
7 336 700 000 6 685 800 000 7 590 900 000 6 395 500 000 6 117 400 000 6 553 600 000 5 359 600 000		Круглое железо Перигора 6 577 070 000	Диаметры по обмеру; 0,0142, опыт 86, и 0,0197, опыт 87
6 512 600 000 5 602 700 000 6 059 500 000			
7 246 600 000		Круглое железо Ариежа 6 058 270 000	
8 449 900 000			
6 659 230 000		Круглое железо английское 7 848 250 000	
5 248 300 000 5 325 500 000	6 222 400 000 6 313 900 000	Квадратное же- лезо Перигора 6 268 150 000	Стороны по об- меру: 0,020, опыты 98 и 99
6 004 600 000 5 968 100 000	7 119 000 000 7 075 700 000		
5 636 625 000	6 682 750 000	Квадратное же- лезо английское 7 097 350 000	

в лекциях Навье), за исключением опытов 91 и 101, где напечатано 11,99 вместо 12,99 и 15,40 вместо 15,49.

Эти коэффициенты, которые Дюло называет H для круглого железа и M для квадратного железа, имеют следующие значения:

$$H = \frac{LKS}{gD^4}, \quad M = \frac{DKS}{gC^4}.$$

если обозначить через L — длину скрученной части стержня; D — его диаметр, если он круглый; C — его сторона, если он квадратный; g — число градусов, на которое повернут один из концов (он употребляет иногда G); наконец, K — нагрузка, которая создает кручение, а S — ее плечо. В этих формулах следует выразить в миллиметрах, чтобы получить числа Дюло, не только поперечные размеры D и C , как он говорит, но также длину L и плечо рычага S , хотя он указал, что их следует выразить в метрах. Отсюда вытекает, что H нужно умно-

жить на $\frac{1000^4}{\pi \cdot 2\pi} = 583\,610\,100$, а M на $\frac{1000^4}{1 \cdot 2\pi} = 343\,774\,000$, чтобы получить наши

числа для $\frac{M_x}{J_0 \theta}$.

Мы считали необходимым дать эти подробности, без которых чтение книги Дюло является несколько затруднительным.

английского железа из опыта 93; даже из колонки цифр для $\frac{M_x}{J_0 \theta}$ мы видим, что эта цифра действительно выше, чем у всех других образцов, т. е. что это железо исключительного качества. Итак, если исключить из сравнения опыт 93 для круглого и для квадратного английского железа, то остается отношение

$$\frac{\frac{1}{2} (60\,046 + 59\,681)}{72\,466} = 0,8261,$$

которое все же не выше теоретического отношения и очень мало отличается от него. Мы видим, что значения G , полученные из опытов с медными квадратными стержнями, при делении $\frac{M_x}{J_0 \theta}$ на наш теоретический коэффициент 0,843462 точно равны значениям, полученным из опытов с круглыми прутьями из того же металла. В опытах Дюло худшее сопротивление квадратных прутьев даже более заметно, чем в теории, так как отношение средних значений $\frac{M_x}{J_0 \theta}$ составляет только 0,810603. Это легко объяснимо (как мы увидим в гл. IX) при слегка вогнутых гранях.

Что касается двух опытов с латунью, то мы могли бы их опустить, так как по первому опыту сопротивление этого сплава *меньше сопротивления меди*, а по второму опыту *гораздо больше*, так что второй опыт дает для сравнения сопротивлений двух материалов и независимо от наших формул отношение, почти вдвое большее, чем предыдущий, а это свидетельствует о какой-то ошибке или аномалии.

§ 79. Другой способ определения численного соотношения между сопротивлением квадратных призм и сопротивлением круговых цилиндров при одинаковом моменте инерции их оснований

Хотя нельзя сомневаться в точности известного метода интегрирования, которым мы пользовались для нахождения решения неопределенного уравнения $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$, удовлетворяющего определенным уравнениям $\frac{du}{dy} = \theta z$ при

Опыты Савара (дающие нагрузки, действующие на конце плеча рычага 0,11 м и закручивающие на $\frac{1}{400}$ окружности один из концов различных стержней относительно другого неподвижного конца)¹⁾

Обозначение	Длина прутьев	Диаметры круглых и стороны квадратных стержней, м	Усилие, создающее закручивание на $\frac{1}{100}$ прямого угла, кг	$\frac{M_x}{J_0 \theta} = G$ только для круглых стержней	$\frac{M_x}{0,843462 J_0 \theta} = G$ для квадратных стержней
Медь тянутая круглая .	0,649	0,0024	0,00297	4 144 200 000	
То же	0,649	0,00458	0,04117	4 131 500 000	
То же	0,649	0,00691	0,207	4 203 200 000	
То же	0,649	0,00904	0,580	4 020 400 000	
Среднее				<u>4 174 825 000</u>	
Медь тянутая квадратная	0,649	0,00468	0,0595		4 009 900 000
То же	0,649	0,00566	0,1275		4 016 500 000
То же	0,649	0,00918	0,880		4 006 000 000
То же	0,6567	0,00566	0,126		4 016 300 000
Среднее					<u>4 012 180 000</u>
Латунь тянутая круглая	0,649	0,00672	0,160	3 632 100 000	
Латунь тянутая квадратная	1,302	0,00572	0,101		6 119 300 000

¹⁾ Таким образом, кручение θ получается при делении $\frac{1}{400} 2\pi$ на длину стержней. Савар, как и Дюло, выяснив, что угол закручивания для каждого стержня пропорционален его весу, не приводит детали всех своих опытов и дает для большинства из них после вычисления отношения только значение нагрузки, скручивающей на один градус.

$y = \pm b \frac{du}{dz} = -\theta y$ при $z = \pm c$, однако интересно показать, что мы очень близко подходим к численному результату $M_x = 0,8435 GJ_0\theta$, полученному ранее (§ 77) совершенно иначе, когда мы пытались удовлетворить приближенно этим уравнениям полиномиальным выражением относительно y, z с ограниченным числом членов.

Это выражение ввиду симметричности квадрата и равенства его размеров в обоих направлениях может быть только формулой (143) § 67, гл. VII:

$$u = a'_4(4y^3z - 4yz^3) + a'_8(8y^7z - 56y^5z^3 + 56y^3z^5 - 8yz^7) + \dots \quad (169)$$

Если мы его продифференцируем, чтобы подставить в $g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z$, и положим

$$a'_4 = \frac{A_4\theta}{4b^2}, \quad a'_8 = \frac{A_8\theta}{8b^6}, \quad a'_{12} = \frac{A_{12}\theta}{12b^{10}}, \quad a'_{16} = \frac{A_{16}\theta}{16b^{14}} \text{ и т. д.}, \quad (170)$$

то, деля на θ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} g_{xy} = & -z + \frac{A_4}{b^2}(3y^2z - z^3) + \frac{A_8}{b^6}(7y^6z - 35y^4z^3 + \\ & + 21y^2z^5 - z^7) + \frac{A_{12}}{b^{10}}(11y^{10}z - 165y^8z^3 + \\ & + 462y^6z^5 - 330y^4z^7 + 55y^2z^9 - z^{11}) + \dots \quad (171) \end{aligned}$$

Этот сдвиг должен быть равен нулю при $y^2 = b^2$. Следовательно, для первого определенного уравнения, деля на z , получаем:

$$0 = \left. \begin{aligned} & (-1 + 3A_4 + 7A_8 + 11A_{12} + 15A_{16} + \dots) - \\ & - \frac{z^2}{b^2}(A_4 + 35A_8 + 165A_{12} + 455A_{16} + \dots) + \\ & + \frac{z^4}{b^4}(21A_8 + 462A_{12} + 3003A_{16} + \dots) - \\ & - \frac{z^6}{b^6}(A_8 + 330A_{12} + 6435A_{16} + \dots) + \\ & + \frac{z^8}{b^8}(55A_{12} + 5005A_{16} + \dots) - \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & - \frac{z^{10}}{b^{10}} (A_{12} + 1365 A_{16} + \dots) & + \\
 & + \frac{z^{12}}{b^{12}} (105 A_{16} + \dots) & - \\
 & - \frac{z^{14}}{b^{14}} (A_{16} + \dots) + & \text{и т. д.}
 \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Чтобы проверить это уравнение при всяком значении z , приравняем нулю выражения в скобках, стоящих при z^0, z^2, z^4, z^6 и т. д. Подставляя для численных коэффициентов вначале дробные выражения, которые они получают при разложении в ряд полных нечетных степеней бинорма, и затем уничтожая знаменатели, получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 -1 + 3A_4 + 7A_8 + 11A_{12} + 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 1 \cdot 2 \cdot 3A_4 + 5 \cdot 6 \cdot 7A_8 + 9 \cdot 10 \cdot 11A_{12} + 13 \cdot 14 \cdot 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7A_8 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11A_{12} + 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7A_8 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11A_{12} + 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11A_{12} + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11A_{12} + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \dots \dots \dots 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots \dots \dots 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \dots \dots 15A_{16} + \dots &= 0, \\
 & \text{и т. д.}
 \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Подставляя также ряд (169) вместо u во второе определенное уравнение $g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = 0$ при $z^2 = c^2$, получим те же уравнения (173) ввиду равенства размеров сечения в двух направлениях y и z .

Мы не будем, как это делал Фурье в другом случае, задерживаться на решении неограниченного числа уравнений первой степени¹⁾, когда можно найти общее выражение коэффициентов A , способных удовлетворить уравнениям (173), или выразить u в виде сходящегося ряда по целым степеням $\frac{y}{b}, \frac{z}{b}$ (что кажется маловероятным). Мы ограничимся получением последовательно неизвестного A_4 из первого из этих

¹⁾ Théorie de la chaleur, гл. III, § 208.

уравнений, сведенного к двум членам, затем двух неизвестных A_4, A_8 из двух первых, затем трех неизвестных из трех первых и т. д., считая все другие неизвестные равными нулю.

Таким образом, подставляя численные значения A_4, A_8, \dots в (170) $a'_4 = \frac{\theta}{4b^2} A_4$ и т. д., получим:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad a'_4 &= \frac{1}{3} \frac{\theta}{4b^2}, \\ 2) \quad a'_4 &= \frac{5}{14} \frac{\theta}{4b^2}, & a'_8 &= \frac{-1}{98} \frac{\theta}{8b^6}, \\ 3) \quad a'_4 &= \frac{55}{152} \frac{\theta}{4b^2}, & a'_8 &= \frac{-1}{76} \frac{\theta}{8b^6}, \\ & a'_{12} &= \frac{1}{1672} \frac{\theta}{12b^{10}}, \\ 4) \quad a'_4 &= \frac{54665}{150448} \frac{\theta}{4b^2}, & a'_8 &= \frac{-2145}{150448} \frac{\theta}{8b^6}, \\ & a'_{12} &= \frac{143}{150448} \frac{\theta}{12b^{10}}, & a'_{16} &= \frac{7}{150448} \frac{\theta}{16b^{14}}, \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

т. е. значения, которые следует подставить в (169) $u = a'_4(4y^3z - 4yz^3) +$ и т. д. или в (144) без членов с отрицательными показателями степени:

$$u = a'_4 r^4 \sin 4\alpha + a'_8 r^8 \sin 8\alpha + a'_{12} r^{12} \sin 12\alpha + a'_{16} r^{16} \sin 16\alpha. \quad (175)$$

§ 80. Продолжение. Общее целое выражение крутящего момента для прямоугольной призмы

С другой стороны, выражение (139)

$$M_x = G\theta \int (y^2 + z^2) d\omega - G \int d\omega [a_1 z - a'_1 y + 2a_2 yz - 2a'_2(y^2 - z^2) + \dots]$$

для общего случая прямоугольника при учете того, что

$$\int_{-b}^b dy \int_{-c}^c dz y^m z^{m'} = \frac{4b^{m+1}c^{m'+1}}{(m+1)(m'+1)}, \quad (176)$$

когда m и m' четные, и что равен нулю во всяком другом случае, дает

$$M_x = \frac{4}{3} G \theta (b^3 c + bc^3) + 4 G \left\{ \frac{2 a'_1}{3 \cdot 4} (4 b^3 c - 4 bc^3) + \right. \\ \left. + \frac{4 a'_4}{5 \cdot 6} (6 b^5 c - 20 b^3 c^3 + 6 bc^5) + \right. \\ \left. + \frac{6 a'_6}{7 \cdot 8} (8 b^7 c - 56 b^5 c^3 + 56 b^3 c^5 - 8 bc^7) + \dots \right\}, \quad (177)$$

или

$$M_x = \frac{2}{3} G \theta r_1^4 \sin 2 \alpha_1 + 4 G \left(\frac{2 a'_2}{3 \cdot 4} r_1^4 \sin 4 \alpha_1 + \right. \\ \left. + \frac{4 a'_4}{5 \cdot 6} r_1^6 \sin 6 \alpha_1 + \frac{6 a'_6}{7 \cdot 8} r_1^8 \sin 8 \alpha_1 + \right. \\ \left. + \frac{8 a'_8}{9 \cdot 10} r_1^{10} \sin 10 \alpha_1 + \dots \right), \quad (178)$$

где $\sqrt{b^2 + c^2} = r_1, \operatorname{arctg} \frac{c}{b} = \alpha_1,$
 $b = r_1 \cos \alpha_1, c = r_1 \sin \alpha_1.$

В нашем случае квадратного сечения $b = c, r_1^2 = 2b^2, \alpha_1 = \frac{\pi}{4},$ и это выражение сводится к

$$M_x = \frac{8}{3} G b^4 \theta + 8 G b^2 \left(- \frac{4 a'_4}{5 \cdot 6} 2^2 b^4 + \frac{8 a'_8}{9 \cdot 10} 2^4 b^8 - \right. \\ \left. - \frac{12 a'_{12}}{13 \cdot 14} 2^6 b^{12} + \frac{16 a'_{16}}{17 \cdot 18} 2^8 b^{16} - \dots \right). \quad (179)$$

Если мы подставим вместо $a'_4, a'_8, a'_{12}, a'_{16}$ найденные значения (174), то получим, принимая во внимание, что $\frac{8}{3} G b^4 \theta = G J_0 \theta:$

$$\begin{aligned} \text{1-е приближение } M_x &= \frac{13}{15} G J_0 \theta = 0,86667 G J_0 \theta; \\ \text{2-е } & \quad \frac{208}{245} = 0,84898 G J_0 \theta; \\ \text{3-е } & \quad \frac{967 \ 247}{1 \ 141 \ 140} = 0,84760 G J_0 \theta, \\ \text{4-е (с 4 коэффициентами } a') & \quad \frac{45 \ 435 \ 238}{53 \ 709 \ 936} = 0,84594 G J_0 \theta. \end{aligned}$$

Мы видим, что численный коэффициент все больше и больше приближается к найденному ранее отношению 0,8435 сопротивления квадратных призм и круговых призм при одинаковых моменте инерции J_0 основания, угле закручивания θ и коэффициенте упругости при сдвиге G^1).

§ 81. Относительные сдвиги волокон призмы с квадратным сечением

Мы вычислили g_{xy} , g_{xz} в различных точках контура сечений посредством тригонометрических формул (158) и (159). При этом для сокращения числа членов рядов было установлено, что члены с отрицательными показателями могут быть отброшены при наличии членов с положительными показателями, если множитель при π хотя бы немного превышает 2 или 2,5.

Помимо дальнейшей аналитической проверки была лишь необходимость в приближенном вычислении величины g для внутренних точек. Поэтому интерполяцией с помощью численных значений $\frac{u}{\theta b^2}$ (таблица § 75) мы нашли величины $\frac{du}{y}$ и $\frac{du}{z}$, заменяя участки кривых в сечениях поверхности

¹⁾ Покойный Вантцель (Wantzel) указал мне способ наиболее быстрого получения приближений. Он состоит в том, что после замены в уравнении (171) y^2 на b^2 , а g_{xy} на нуль мы подставляем $b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ вместо z , что придает ему вид

$$-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = A_4 \frac{\sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha} + A_8 \frac{\sin 7\alpha}{\cos^7 \alpha} + A_{12} \frac{\sin 11\alpha}{\cos^{11} \alpha} + \dots$$

Далее последовательно делают относительно α гипотезы, обращающие в нуль какой-либо член, и отбрасывают последующие члены. Если, например, полагают $\alpha = \frac{\pi}{15}$, $\alpha = \frac{2\pi}{15}$, $\alpha = \frac{3\pi}{15}$, то обращают в нуль

$A_{16} \frac{\sin 15\alpha}{\cos^{15} \alpha}$ и находят для A_4 , A_8 , A_{12} три уравнения первой степени, которые дают для этих трех неизвестных значения $A_4 = 0,36454$, $A_8 = 0,01521$, $A_{12} = 0,001298$. Отсюда $M_x = 0,8447 G J_0 \theta$, так что вывод, к которому мы приходим, используя три коэффициента, является лучшим приближением, чем тот, который мы получили другим способом при четырех коэффициентах.

Значения $\frac{-g_{xy}}{\theta c}$ для четверти сечения квадратной призмы

$\frac{z}{c} \backslash \frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
					Полусторона b						Угол
1,0	1,35063	1,34225	1,31686	1,27351	1,21060	1,12553	1,01435	0,87075	0,68377	0,43015	0
0,9	1,159	1,151	1,123	1,080	1,018	0,934	0,825	0,685	0,506	0,275	0
0,8	0,984	0,976	0,949	0,909	0,851	0,772	0,672	0,546	0,390	0,205	0
0,7	0,840	0,817	0,793	0,756	0,703	0,633	0,544	0,435	0,306	0,158	0
0,6	0,678	0,672	0,651	0,618	0,572	0,512	0,436	0,346	0,241	0,124	0
0,5	0,546	0,540	0,522	0,495	0,456	0,406	0,344	0,271	0,187	0,096	0
0,4	0,423	0,419	0,404	0,383	0,352	0,312	0,263	0,206	0,142	0,072	0
0,3	0,310	0,307	0,296	0,279	0,256	0,226	0,191	0,149	0,102	0,052	0
0,2	0,203	0,201	0,193	0,183	0,167	0,148	0,124	0,097	0,066	0,034	0
0,1	0,100	0,099	0,096	0,090	0,083	0,073	0,061	0,048	0,033	0,017	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Полумедиана										Полусторона $c = b$
	Центр				Полумедиана						

Значения $\frac{g_{xz}}{\theta b}$ для той же четверти сечения

$\frac{z}{c} \backslash \frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
					Полусторона b							Угол
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0,9	0	0,017	0,034	0,052	0,072	0,096	0,124	0,158	0,205	0,275	0,43015	
0,8	0	0,033	0,066	0,102	0,142	0,187	0,241	0,306	0,390	0,506	0,68377	
0,7	0	0,048	0,097	0,149	0,206	0,271	0,346	0,435	0,546	0,685	0,87075	
0,6	0	0,061	0,124	0,191	0,263	0,344	0,436	0,544	0,672	0,825	1,01435	
0,5	0	0,073	0,148	0,226	0,312	0,406	0,512	0,633	0,772	0,934	1,12553	
0,4	0	0,083	0,167	0,256	0,352	0,456	0,572	0,703	0,851	1,018	1,21060	
0,3	0	0,090	0,183	0,279	0,383	0,495	0,618	0,756	0,909	1,080	1,27351	
0,2	0	0,096	0,193	0,296	0,404	0,522	0,651	0,793	0,949	1,123	1,31686	
0,1	0	0,099	0,201	0,307	0,419	0,540	0,672	0,817	0,976	1,151	1,34225	
0	0	0,100	0,203	0,310	0,423	0,546	0,678	0,840	0,984	1,159	1,35063	
	Центр				Полумедиана							Полусторона $c = b$

Значения $\frac{1}{\theta b} g_x = \frac{1}{\theta b} \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ для четверти сечения квадратной призмы

$\frac{z}{c} \backslash \frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
					Полусторона b							Угол
1,0	1,3506	1,3423	1,3169	1,2735	1,2106	1,1255	1,0144	0,8707	0,6838	0,4302	0	
0,9	1,159	1,151	1,123	1,081	1,021	0,939	0,834	0,702	0,546	0,389	0,4302	
0,8	0,984	0,977	0,952	0,914	0,862	0,795	0,713	0,625	0,552	0,546	0,6838	
0,7	0,840	0,818	0,798	0,770	0,732	0,688	0,644	0,615	0,625	0,702	0,8707	
0,6	0,678	0,677	0,662	0,647	0,630	0,616	0,617	0,644	0,713	0,834	1,0144	
0,5	0,546	0,545	0,542	0,544	0,552	0,574	0,616	0,688	0,795	0,939	1,1255	
0,4	0,423	0,427	0,438	0,460	0,497	0,552	0,630	0,732	0,862	1,021	1,2106	
0,3	0,310	0,319	0,347	0,395	0,460	0,544	0,647	0,770	0,914	1,081	1,2735	
0,2	0,203	0,222	0,273	0,347	0,438	0,542	0,662	0,798	0,952	1,123	1,3169	
0,1	0,100	0,140	0,222	0,319	0,427	0,545	0,677	0,818	0,977	1,151	1,3423	
0	0	0,100	0,203	0,310	0,423	0,546	0,678	0,840	0,984	1,159	1,3506	
	Центр				Полумедиана							Полусторона $c = b$

(с координатами x, y, z) плоскостями, перпендикулярными к осям y и z , дугами парабол (мы интерполировали по параболу третьей степени в точках перегиба).

Далее приводятся таблицы полученных результатов, при этом мы ограничиваемся четвертью сечения, соответствующей положительным y и z , так как g_{xy} и g_{xz} остаются неизменными по величине, если мы меняем соответственно z на $-z$, а y на $-y$. Значения g_{xz} , как мы видим, равны с точностью до знака значениям g_{xy} (так как $b = c$). Так, например, при $\frac{y}{b} = 0,3$, $\frac{z}{c} = 0,7$ значение g_{xz} такое же, что и значение $-g_{xy}$ при $\frac{y}{b} = 0,7$, $\frac{z}{c} = 0,3$.

На контуре один из двух сдвигов g_{xy} , g_{xz} имеет нулевое значение, а другой — наибольшее. Это именно то, что следовало из второго выражения (158) g_{xy} и первого выражения (159) g_{xz} , так как (и это имеет место даже в случае неравных сторон $2b$ и $2c$) численные значения g_{xy} , очевидно, безгранично возрастают некоторым образом вместе с z при том же y , а значение g_{xz} также возрастает вместе с y при том же z .

Теперь составим по этим таблицам *таблицы главных равнодействующих сдвигов* $g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$.

Как мы предвидели, равнодействующие сдвиги g_x имеют, как и их составляющие g_{xy} , g_{xz} , наибольшие значения на контуре сечения, что мы уже выяснили для эллиптической призмы (§ 61).

§ 82. Опасные точки. Наибольший сдвиг

Итак, мы можем допустить наравне со всеми, что именно на контуре сечения нужно искать *опасную точку* (§ 25), в которой имеет место наибольший сдвиг, когда структура призмы одинакова относительно оси x . Предполагая это, легко узнать, где находится искомая точка. Предыдущая таблица показывает, что она соответствует точке C , для которой $y = 0$, $z = c = b$, и точке B , для которой $z = 0$, $y = b$ (рис. 41). Это можно получить и аналитическим путем. Так, например, на стороне, где находится точка C , имеем $g_{xz} = 0$, $g_x = -g_{xy}$. Следовательно, дифференцируя по y второе выражение (158) g_{xy} , мы выясним, что наибольшее значение $-g_{xy}$ при постоянном z действи-

тельно соответствует $y = 0$. Таким же образом первое выражение (159) g_{xz} показывает, что наибольший сдвиг при постоянном y соответствует $z = 0$.

Итак, именно на концах C, C', B, B' медиан сечения или посредине его сторон находятся опасные точки, для которых сдвиг является самым значительным.

Новая теория дает, следовательно, для квадратного основания, как и для основания эллиптического, результат, совершенно противоположный прежней теории.

В соответствии с последней наиболее подверженные опасности точки всякого сечения были самыми удаленными от оси кручения, т. е. четыре угла, а менее подверженные опасности точки контура были самыми близкими к оси, т. е. середины сторон.

В соответствии с новой теорией углы сечения не подвергаются никакой опасности (по крайней мере, пока действуют законы перемещений (§§ 5 и 24), на которых основываются формулы): ребра здесь остаются нормальными к искривленному сечению (§ 68), и сдвиг равен нулю во всех направлениях. Наиболее опасными являются точки посредине сторон, а именно точки контура, наиболее близкие к оси.

Действительно, в этих последних точках, несмотря на наименьший наклон к оси кручения волокон, ставших винтообразными, они наклоняются всего больше к нормали к сечению ввиду наклона последней в противоположном направлении. Мы это достоверно заметили на рельефной модели со стороной 20 см, о которой говорилось в § 76, или на оттененном чертеже (в том же параграфе). На чертеже представлены в масштабе 0,15 вертикальная и горизонтальная проекции. Рассмотрение точек встречи B, B, B пунктирных спиралей BVB с линиями ABA , представляющими стороны искривленных сечений, показывает справедливость предыдущих выражений.

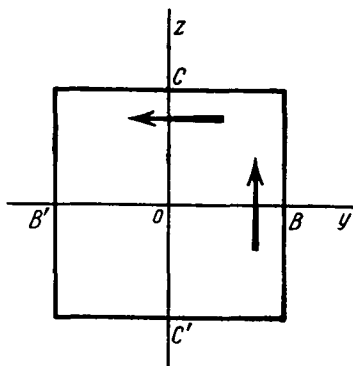


Рис. 41

Наибольший сдвиг дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mp g_{xy} (\text{при } y=0, z=\pm c) = \pm g_{xz} (\text{при } y=\pm b, z=0) = \\ = 2\theta b - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \theta b \left(\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}} + \frac{2 \frac{1}{3^2}}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{2 \frac{1}{5^2}}{e^{\frac{5\pi}{2}} + e^{-\frac{5\pi}{2}}} + \dots \right) = 1,350630 b \theta. \quad (180) \end{aligned}$$

§ 83. Условие прочности квадратной призмы. Экспериментальное подтверждение

Чтобы установить условие или, вернее, неравенство, подобное неравенству (53) § 27:

$$T \geq \max Gg_x,$$

выражающее то, что материал призмы не будет разрушаться под действием скручивающих его сил с моментом M_x , мы должны записать только, если $\frac{T}{G}$ — предел неопасного главного сдвига (§§ 27 и 63), что T есть предел, который не должна превышать касательная составляющая давления, отнесенного к единице поверхности:

$$T \geq 1,35063 G \theta b.$$

Отсюда, исключая $G\theta$ из (168) $M_x = 0,843462 G \theta J_0$, имеем:

$$M_x \leq \frac{0,843462}{1,35063} \frac{J_0}{b} T = 0,62450 \frac{J_0}{b} T = 1,66532 T b^3 \text{ } ^1).$$

¹⁾ Поскольку для кругового сечения ω радиуса r (§ 63, формула (127)) $M_x = T \frac{\pi r^3}{2}$ или $M_x = T \frac{\omega^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}$ является пределом крутящего момента, то момент сопротивления разрушению квадратной призмы при равной площади сечения или при одинаковом количестве материала составляет только 0,7379 того момента, который был бы при круговом основании, хотя (при одинаковой площади) полярный момент инерции квадратного сечения был бы в 1,04712 раза больше, а расстояния от самой удаленной точки находились в соотношении 1,253:1.

В соответствии с прежней теорией, которая не принимает в расчет искривления, т. е. предполагает, что квадратные сечения остаются плоскими, как и круговые сечения, наибольший сдвиг имел бы место в четырех углах. Отсюда $T \geq G\theta b \sqrt{2}$ и, следовательно, при исключении $G\theta$ из $M_x = G\theta J_0$ получим $M_x \leq 0,7071 \frac{J_0}{b} T = 1,8876 T b^3$. Итак, эта теория давала для крутящего момента слишком большой предел.

Единственное убедительное экспериментальное подтверждение формулы *сопротивления последующему разрушению* (записанной так, как это делают в настоящее время конструкторы; см. §§ 24 и 27, т. е. формулы, определяющей только предел для наибольшего удлинения или для наибольшего сдвига) состоит в том, чтобы узнать, действительно ли это максимальное удлинение (или сдвиг) имеет место в опыте там, где предсказывает теория, и имеет ли оно нужное значение (пока не превышен *указанный предел*).

Опыты с *непосредственным разрушением* хотя и полезны, однако дают, как известно, только косвенное подтверждение. Мы не можем, ввиду непригодности формул подобного вида, сделать какое-либо заключение, так как эти формулы заставляют придавать перемещениям величины, значительно превышающие пределы, которыми их следует ограничить.

Прямое подтверждение содержится в наших формулах, так как опыт с каучуковой призмой (§ 76) показывает, что *посредине боковых граней* волокно имеет наибольший наклон к пересекаемым им элементам поверхности сечения. Следовательно (§ 27), элементы объема испытывают в наивысшей степени ту деформацию, которая считается причиной разрывов, когда она становится значительной.

Что касается опытов с *непосредственным разрушением* при кручении, то некоторые из них также подтверждают (это наблюдают для квадратных деревянных или железных брусев), что края не разрываются, как при изгибе, но что волокна разделяются, скользя друг относительно друга, или что твердое тело *раскалывается* в различных местах (конец § 28), то поблизости от краев, то у середины боковых граней. Для зернистых материалов, таких, как известняк,

кирпич, гипс, Вика¹⁾ выяснил, что для квадратной призмы с длиной, по крайней мере вдвое большей ее толщины, момент сил, которые вызывают разрыв, меньше, чем для призмы *бесконечно короткой*, т. е. скручиваемой в самой плоскости защемления. Это действительно доказывает, что сопротивление меньше, когда сечение в месте разрыва обладает способностью изгибаться или *искривляться*, чем когда оно вынуждено в виде исключения оставаться плоским, каким его и предполагали всегда по прежней теории.

§ 84. Случай любого соотношения между двумя измерениями основания. Вычисление u при $\frac{b}{c} = 2$.

Границы случаев, когда искривленное сечение делится на четыре или на восемь частей

Когда стороны $2b$, $2c$ основания не равны (рис. 42), то выражения (156) для u в виде ряда показательных функций и

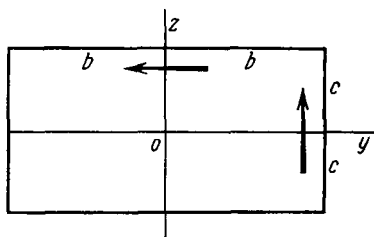


Рис. 42

синусов (которые всегда обращаются в нуль при $z=0$ или $y=0$ и изменяют знак, но не изменяют абсолютного значения вместе с y или z) показывают, что обе *медианы* Oy , Oz также остаются в первоначальной плоскости сечения и что поверхность *искривленного* сечения составляется, как в

случае эллипса, из четырех симметричных частей, двух в виде выпуклостей и двух в виде впадин.

Но u не обращается в нуль при $\frac{z}{y} = \pm \frac{c}{b}$, так что диагонали не остаются, как медианы, в плоскости, где находилось сечение до кручения. Это же показывает следующая таблица, относящаяся к случаю $\frac{b}{c} = 2$; конечно, цифры получаются одинаковыми по обоим выражениям (156).

¹⁾ Recherches expérimentales sur la rupture и т. д. Annales des ponts et chaussées, 1833, 2-е полугодие, стр. 228—234.

Призма с прямоугольным основанием. Значения $\frac{u}{\theta bc}$, когда $\frac{b}{c} = 2$, т. е. когда одна из сторон вдвое больше другой

$\frac{z}{c} \backslash \frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
					Полусторона						Угол
1	0	0,08578	0,17014	0,25153	0,32806	0,39738	0,45634	0,50060	0,52392	0,51657	0,45917
0,9	0	0,07596	0,15051	0,22213	0,28895	0,34867	0,39815	0,43317	0,44765	0,43242	0,37197
0,8	0	0,06648	0,13161	0,19391	0,25161	0,30247	0,34353	0,37081	0,37869	0,35926	0,30175
0,7	0	0,05733	0,11340	0,16683	0,21595	0,25870	0,29233	0,31323	0,31647	0,29560	0,24325
0,6	0	0,04850	0,09586	0,14081	0,18188	0,21718	0,24428	0,26002	0,26024	0,23989	0,19388
0,5	0	0,03995	0,07890	0,11576	0,14923	0,17768	0,19905	0,21065	0,20914	0,19065	0,15166
0,4	0	0,03165	0,06247	0,09155	0,11782	0,13995	0,15624	0,16456	0,16229	0,14660	0,11504
0,3	0	0,02355	0,04646	0,06803	0,08744	0,10366	0,11541	0,12110	0,11881	0,10655	0,08269
0,2	0	0,01561	0,03079	0,04505	0,05784	0,06848	0,07609	0,07962	0,07783	0,06943	0,05346
0,1	0	0,00778	0,01533	0,02243	0,02879	0,03405	0,03779	0,03949	0,03850	0,03424	0,02622
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Центр сечения				Полумедиана						Полусторона

Из разрезов, перпендикулярных к осям z и y , которые можно построить непосредственно по ординатам, пропорциональным числам в горизонтальных строках и вертикальных столбцах этой таблицы, находим путем графической интерполяции разрезы, перпендикулярные к оси x ,

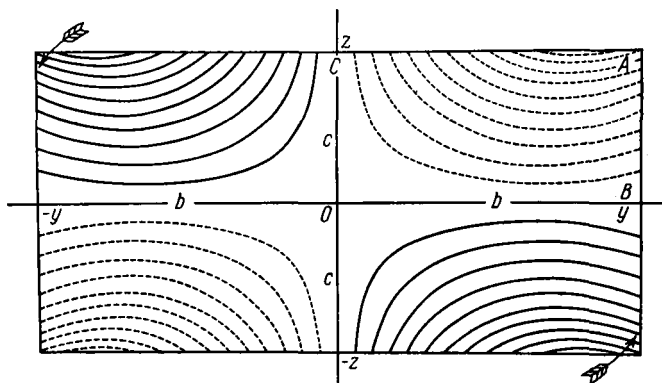


Рис. 43

проведенные через 0,04 величины θbc (что соответствует значениям u , возрастающим на 1 мм, когда стороны $2b$, $2c$ основания равны соответственно 2 и 1 дециметру, и имеем, как в § 54, $\theta = 5$ или шаг спиралей $\frac{2\pi}{5} = 1,2566$ м). Тогда получаем рис. 43 (в масштабе 2:5) и можем легко построить рельеф искривленной поверхности, в которую превращается первоначально плоское прямоугольное сечение (см. рис. 45, § 88).

Мы видим, что для $\frac{b}{c} = 2$ каждая из четырех четвертей сечения после искривления представляет собой или полностью выпуклость или полностью впадину, тогда как при $\frac{b}{c} = 1$ каждая из четырех четвертей имела частично выступ и частично углубление, а первоначальная плоскость разрезала сечение на восемь частей.

Чтобы узнать, какова величина отношения $\frac{b}{c}$, для которого еще имеется подобное деление на восемь частей, необ-

ходимо разыскать значение c , для которого $\frac{du}{dz} = 0$ в точке B , соответствующей $z = 0$, $y = b$; действительно, когда этот дифференциальный коэффициент становится положительным, образуется выступ между OB и A (рис. 39, § 76). Итак, прибавляя $-\theta y$ к g_{xz} , имеем $\frac{du}{dz}$, а взяв второе выражение (159) g_{xz} (как лучше сходящееся) и приравняв нулю $\frac{du}{dz}$ при $z = 0$, $y = b$, получаем уравнение

$$\frac{2}{e^{\frac{\pi c}{2b}} + e^{-\frac{\pi c}{2b}}} + \frac{1}{3^3} \frac{2}{e^{\frac{3\pi c}{2b}} + e^{-\frac{3\pi c}{2b}}} +$$

$$+ \frac{1}{5^3} \frac{2}{e^{\frac{5\pi c}{2b}} + e^{-\frac{5\pi c}{2b}}} + \dots = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3,$$

которое после численного решения дает

$$\frac{b}{c} = 1,4513.$$

Итак, в зависимости от того, будет отношение $\frac{b}{c}$ измерений сечения больше или меньше чем 1,4513, сечение будет делиться его первоначальной плоскостью на четыре или на восемь частей.

§ 85. Крутящий момент для прямоугольных призм

Мы легко вычисляем значение крутящего момента M_x для различных отношений $\frac{b}{c}$ сторон посредством выражений (161).

Если учесть, что $\sum \frac{1}{(2n-1)^5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \dots$ равна $\frac{31}{32} \cdot 1,0369277551 = \frac{31}{32} \frac{\pi^5}{295,125}$, а ее произведение на $\left(\frac{4}{\pi}\right)^5$ равно 3,361327, и обозначить через th гиперболический тангенс

(так что $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$), то первое выражение M_x может быть записано в форме

$$M_x = G \theta b c^3 \left\{ \frac{16}{3} - 3,361327 \frac{c}{b} + \right. \\ \left. + \frac{c}{b} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(\frac{1 - \operatorname{th} \frac{\pi b}{2c}}{1} + \frac{1 - \operatorname{th} \frac{3\pi b}{2c}}{243} + \frac{1 - \operatorname{th} \frac{5\pi b}{2c}}{3125} + \text{и т. д.} \right) \right\}. \quad (181)$$

В этом виде, когда $\frac{b}{c} > 1$, оно сходится быстрее, чем второе выражение (161), преобразованное таким же образом, и поэтому достаточно взять два или самое большее три члена ряда, развернутого в скобках.

Отсюда вытекают следующие выражения:

$$\text{где } \left. \begin{aligned} M_x &= G \theta b c^3 \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c}{b} \right), & M_x &= \mu G \theta b c^3, \\ \mu &= \frac{16}{3} - \lambda \frac{c}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Здесь λ и μ — численные коэффициенты, данные для различных значений $\frac{b}{c}$ от единицы до бесконечности в таблице, которая приведена в конце мемуара.

Коэффициенты μ изменяются от 2,249 до $5,333 = \frac{16}{3}$. Коэффициенты λ изменяются только между 3,084 и 3,36, от $\frac{b}{c} = 1$ до $\frac{b}{c} = 2,50$, и они сохраняют приблизительно постоянное значение 3,36 при $\frac{b}{c}$, большем 2,50.

При меньших значениях $\frac{b}{c}$ можно пользоваться другой формулой, в которой коэффициент μ' очень мало изменяется до $\frac{b}{c} = 2$:

$$M_x = \mu' G \theta \frac{\frac{16}{3} b^3 c^3}{b^2 + c^2}, \quad (183)$$

т. е. формулой Коши (§ 68) с коэффициентом μ' , численные значения которого также даны в заключительной таблице. Коэффициент μ' мало отличается от 0,85 при $\frac{b}{c}$, меньшем 2, но при больших значениях он увеличивается до 1¹⁾.

¹⁾ Если бы мы пользовались формулой прежней теории $M_x = G \theta J_0 = G \theta \frac{4bc}{3} (b^2 + c^2)$, то нужно было бы брать коэффициенты, изменяющиеся в чрезвычайно широких пределах — от 0,343 до нуля. Крутящий момент M_x при равной площади ω сечения вовсе не пропорционален полярному моменту инерции J_0 , а изменяется обратно пропорционально последнему, так как

$$M_x = G \theta \frac{\mu'}{36} \frac{\omega^4}{J_0}.$$

Если бы мы попытались получить алгебраическое выражение M_x при помощи приближенного целого выражения $u = a_2' 2yz + a_4'(4y^2z - 4yz^2)$ примечания к § 74, полагая $a_2' = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta$, $a_4' = \frac{\theta}{6(b^2 + c^2)}$, то нашли бы $\frac{16}{3} G \theta \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{b^2}{10c^2} + \frac{c^2}{10b^2} \right)$. Последнее выражение нужно было бы умножить на коэффициенты от 0,973 до нуля, так что оно совершенно бесполезно.

Чтобы иметь возможность выразить крутящий момент M_x посредством простой формулы с постоянными коэффициентами, нужно прибегнуть к экспериментальному методу и ограничиться приближенными результатами. Я установил, что приблизительно получается

$$\lambda = \frac{3,36}{1 + 0,09 \left(\frac{c}{b} \right)^4} \text{ или несколько менее точно, но более просто:}$$

$$\lambda = 3,36 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{c^4}{b^4} \right) = 0,28 \left(12 - \frac{c^4}{b^4} \right),$$

откуда, подставляя в $\mu = \frac{16}{3} - \lambda \frac{c}{b}$, получают для

$$\frac{b}{c} = 1 \quad 1,1 \quad 1,25 \quad 1,50 \quad 2,00 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad 50$$

значения

$\mu = 2,253 \quad 2,453 \quad 2,737 \quad 3,130 \quad 3,662 \quad 4,214 \quad 4,661 \quad 4,997 \quad 5,266$,
 достаточно близкие к значениям таблицы в конце мемуара, чтобы эмпирическая формула $M_x = G \theta bc^3 \left[\frac{16}{3} - 3,36 \frac{c}{b} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{c^4}{b^4} \right) \right]$ отвечала нуждам практики.

§ 86. Сравнение с опытными данными

Сравним результаты применения выражения (182) $\mu G \theta b c^3$ с результатами опытов Дюло и Савара для прямоугольных стержней, определяя коэффициент G из каждого опыта.

Опыты Дюло по кручению прямоугольных стержней (см. § 78)

№ опытов	Обозначения	Длина	Ширина (измеренная) $2b$, м	Толщина (вычисленная по весу) $2c$, м	Отношение b/c	Угол поворота одного из концов под действием нагрузки 10 кг на плече рычага 0,32 м, градусы	Коэффициент μ из 3-го столбца заключительной таблицы для каждого значения b/c	Значения G , или частные от деления $M_T = 3,2$ на $\theta b c^3$ и на коэффициент μ
102	Железо плоское английское	2,91	0,034	0,00856	3,97	11,40	4,486	7 840 800 000
103	Тот же кусок	1,55	0,034	0,00856	3,97	5,62	4,486	8 452 100 000
104	Железо плоское Перигора	2,91	0,034	0,01045	3,25	7,2	4,293	7 109 800 000
105	Железо английское марки В . . .	1,45	0,0678	0,01474	4,60	0,85	4,601	5 006 200 000

Отсюда видно (если исключить последний опыт, где получилось чрезвычайно слабое закручивание, при котором все формулы кажутся неправильными), что коэффициенты упругости при сдвиге, полученные для прямоугольного железа, при использовании формулы и численных коэффициентов μ предыдущего параграфа сопоставимы с коэффициентами, полученными из опытов того же автора (§ 78) и относящимися к круглому и квадратному железу одинакового происхождения. Это все, что мы могли ожидать от подобной экспериментальной проверки, сделанной с тянутым или кованым железом, упругость которого не могла быть совершенно одинаковой и должна была даже изме-

няться в различных направлениях и в различных точках сечения одного и того же стержня.

Савар был убежден в том, что неизбежные различия в упругости стержней разной величины и различной формы могут внести заметные отклонения при сравнении влияний неравных поперечных размеров. Поэтому он перестал пользоваться металлическими стержнями для подобных сравнений. Он остановился на применении *гипса*, который в соответствии со своими опытами над звуковыми вибрациями считал обладающим одинаковой упругостью во всех направлениях и, следовательно, единственно способным давать убедительные результаты, несмотря на малость углов закручивания, получавшихся из-за слишком узких границ прочности этого материала.

Произведя первый опыт со стержнем из этого материала, Савар уменьшил в нем поперечные размеры и вновь подверг его кручению. Он сделал то же самое с дубовыми рейками, но выразил мнение, что эти опыты хорошо сравнимы только тогда, когда отношение двух поперечных измерений одинаково до и после уменьшения сечения.

Наконец, он испробовал стеклянные пластинки, очень тонкие сравнительно с их шириной. Таблица его опытов¹⁾ приведена на стр. 204.

Два опыта с гипсовыми стержнями, у которых отношение поперечных измерений было соответственно 3,9 и 3,3, дают при их сравнении результат, всецело подтверждающий вышеуказанную теорию.

Сравнение двух первых опытов с дубом доказывает только, что сопротивления для подобных прямоугольных сечений изменяются как четвертые степени их соответственных измерений. Сравнение же двух первых опытов со стеклом показывает только, что угол вращения при одинаковом усилии и одинаковом сечении пропорционален длине пластинки.

Но третий и четвертый опыты с дубом подтверждают теоретический закон, относящийся к тонким пластинкам,

¹⁾ Мы не приводим два других опыта Савара со стальными и прокатанными или тянутыми латунными пластинками. Выводы, которые пытались получить отсюда подобным образом, не заслуживают никакого доверия.

Опыты Савара по кручению прямоугольных стержней (см. § 78)

Обозначения	Длина l	Ширина $2b$	Толщина $2c$	Отношение $\frac{b}{c}$	Усилие на плече 0,11 м, создающее закручивание одного конца на 1/100 прямого угла, кг	Коэффициент μ из 3-го столбца заключительной таблицы для каждого значения $\frac{b}{c}$	Значения G или частные от деления момента M_x усилия на коэффициент μ и на θbc^3
Гипс	0,3743	0,0271	0,00698	3,88	0,120	4,466	122 680 000
То же	0,3743	0,01721	0,00519	3,31	0,0303	4,312	122 830 000
Дуб	0,5235	0,046634	0,01059	4,40	0,3550	4,568	82 267 000
То же (та же рейка, но уменьшенная)	0,5235	0,023317	0,005295	4,40	0,022	4,568	81 591 000
Дуб	0,5764	0,096	0,00537	17,90	0,105	5,130	177 210 000
То же (та же рейка, но более тонкая)	0,5764	0,096	0,00254	37,80	0,0114	5,225	179 150 000
То же	0,5764	0,096	0,0017	56,50	0,00393	5,270	203 630 000
Оконное стекло	0,63	0,0544	0,00156	34,87	0,07	5,215	4 586 000 000
То же	0,315	0,0544	то же	34,87	0,140	5,215	4 586 000 000
То же	0,315	0,02546	то же	16,82	0,068	5,112	4 818 000 000

т. е. к очень удлиненным сечениям. Это также подтверждается при сравнении двух первых опытов со стеклом с третьим опытом над тем же материалом. Из пятого опыта с дубом, сопоставленного с двумя предыдущими, нельзя вывести никакого заключения, которое противоречило бы тому же закону; когда рейка из материала, волокнистого и недостаточно однородного, уменьшена посредством обстругивания, сопровождаемого обязательно сжатием, до толщины приблизительно полтора миллиметра, то ясно, что специфическое сопротивление взаимному сдвигу ее волокон может очень заметно измениться. И мы не должны удивляться тому, что коэффициенты сопротивления для призмы двух первых опытов с дубом были весьма отличны от коэффициентов для рейки трех последних опытов, когда мы применяем формулу, где предполагаем, что упругость одинакова в обоих поперечных направлениях, так как не знаем их соотношения упругостей, без чего мы не можем пользоваться более общими формулами, данными далее (гл. X) для случая неодинаковой упругости.

§ 87. Относительные сдвиги волокон для прямоугольных сечений.

Наибольшие сдвиги для точек каждой из их сторон

Если мы вычислим, как для квадратной призмы (§ 81), сдвиги g_{xy} , g_{xz} в различных точках прямоугольного сечения, для которого $\frac{b}{c} = 2$, т. е. точно по формулам (158), (159) для точек контура и приближенно посредством значений u из таблицы § 84 для внутренних точек, то получим числа, приведенные в двух таблицах на стр. 206 и 207.

Так же, как это мы заметили (§ 81) для квадратной призмы $\frac{b}{c} = 1$ и как это вытекает из выражений в виде ряда (158), (159) g_{xy} и g_{xz} , на сторонах прямоугольного контура сечения находятся наибольшие значения того из двух сдвигов, который не равен нулю.

Если мы умножим на $2 = \frac{b}{c}$ числа первой таблицы и прибавим их квадраты к квадратам чисел второй таблицы, то получим, извлекая корень, числа, пропорциональные результирующему сдвигу $g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ (таблица на стр. 208).

Значения $-\frac{\theta xy}{\theta c}$ в различных точках четверти сечения прямоугольной призмы, для которой $b = 2c$, т. е. у которой одно из измерений основания вдвое больше другого

$\frac{z}{c}$ \ $\frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
					Полусторона b							Угол
1,0	1,86012	1,85315	1,83153	1,79306	1,73377	1,64744	1,52457	1,35044	1,10044	0,72477	0	
0,9	1,662	1,655	1,631	1,592	1,533	1,466	1,323	1,148	0,896	0,521	0	
0,8	1,467	1,460	1,437	1,400	1,343	1,260	1,142	0,976	0,742	0,415	0	
0,7	1,275	1,269	1,248	1,213	1,159	1,082	0,973	0,821	0,612	0,334	0	
0,6	1,087	1,081	1,062	1,030	0,932	0,912	0,814	0,680	0,499	0,268	0	
0,5	0,901	0,896	0,879	0,852	0,810	0,749	0,665	0,550	0,400	0,213	0	
0,4	0,718	0,714	0,700	0,677	0,642	0,592	0,523	0,430	0,310	0,164	0	
0,3	0,537	0,533	0,522	0,505	0,478	0,440	0,387	0,317	0,227	0,119	0	
0,2	0,357	0,355	0,347	0,335	0,317	0,291	0,256	0,209	0,149	0,078	0	
0,1	0,179	0,177	0,173	0,167	0,158	0,145	0,127	0,104	0,074	0,039	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Центр сечения				Полумедиана						Полусторона c	

Значения $\frac{g_{xz}}{\theta b}$ в тех же точках

$\frac{z}{c}$ \ $\frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
					Полусторона b							Угол
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0,9	0	0,0035	0,007	0,012	0,018	0,025	0,036	0,051	0,074	0,113	0,22509	
0,8	0	0,007	0,014	0,024	0,035	0,050	0,071	0,100	0,144	0,216	0,36172	
0,7	0	0,010	0,021	0,035	0,051	0,074	0,104	0,146	0,208	0,303	0,46451	
0,6	0	0,013	0,027	0,045	0,066	0,095	0,134	0,187	0,263	0,375	0,54488	
0,5	0	0,016	0,033	0,054	0,080	0,114	0,160	0,223	0,310	0,434	0,60812	
0,4	0	0,018	0,038	0,061	0,091	0,130	0,182	0,252	0,348	0,480	0,65717	
0,3	0	0,020	0,042	0,067	0,100	0,143	0,199	0,275	0,378	0,514	0,69391	
0,2	0	0,021	0,044	0,072	0,107	0,152	0,212	0,292	0,399	0,538	0,71943	
0,1	0	0,022	0,046	0,075	0,111	0,159	0,220	0,303	0,412	0,554	0,73446	
0	0	0,022	0,047	0,076	0,112	0,160	0,223	0,306	0,416	0,559	0,73945	
	Центр				Полумедиана							Полусторона c

Значения $\frac{1}{\theta c} g_x = \frac{1}{\theta c} \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ в точках четверти сечения

$\frac{z}{c} \backslash \frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
				Полусторона b								Угол
1,0	1,8601	1,8532	1,8315	1,7931	1,7338	1,6474	1,5246	1,3504	1,1004	0,7248	0	
0,9	1,662	1,655	1,631	1,592	1,533	1,447	1,324	1,152	0,908	0,569	0,4502	
0,8	1,467	1,460	1,437	1,401	1,344	1,264	1,150	0,996	0,796	0,599	0,7234	
0,7	1,275	1,269	1,248	1,215	1,164	1,092	0,995	0,871	0,740	0,692	0,9290	
0,6	1,087	1,082	1,063	1,034	0,941	0,932	0,857	0,776	0,726	0,797	1,0898	
0,5	0,901	0,897	0,882	0,858	0,825	0,783	0,738	0,708	0,738	0,893	1,2162	
0,4	0,718	0,715	0,704	0,688	0,667	0,647	0,637	0,663	0,763	0,973	1,3143	
0,3	0,537	0,534	0,529	0,523	0,518	0,524	0,556	0,635	0,789	1,037	1,3878	
0,2	0,357	0,357	0,358	0,365	0,382	0,421	0,495	0,620	0,811	1,075	1,4389	
0,1	0,179	0,182	0,196	0,224	0,273	0,348	0,459	0,615	0,827	1,111	1,4689	
0	0	0,045	0,094	0,152	0,225	0,320	0,446	0,613	0,833	1,118	1,4789	
	Центр			Полумедиана								Полусторона c

Можно допустить, как это делают все, что точку с наибольшим сдвигом нужно искать на контуре сечения.

И на каждой из сторон $2b$, $2c$ этого контура она должна быть взята посередине. Это показывают не только цифры, но также и теория для всякого отношения между b и c , так как g_x сводится к $-g_{xy}$ на стороне $2b$ и к g_{xz} на стороне $2c$, а первое выражение (159) для g_{xz} , продифференцированное после того, как мы приняли $y = b$, действительно дает максимум при $z = 0$.

§ 88. Опасная точка, в которой имеет место наибольший сдвиг. Опыты

Где же сдвиг наибольший, посередине большой стороны $2b$ или посередине малой стороны $2c$ (рис. 44)?

Численный расчет нам показывает, что наибольший сдвиг имеет место посередине $2b$, т. е. посередине большой стороны. Это можно доказать с помощью теории.

Действительно, обозначая всегда через th гиперболический тангенс $\frac{e^+ - e^-}{e^+ + e^-}$, получаем соответственно для этих двух сдвигов (формулы (158), (159)):

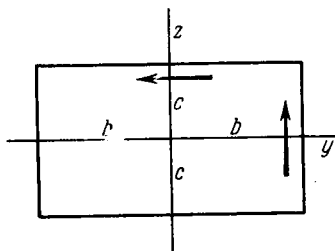


Рис. 44

$$-g_{xy} = \theta b \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \text{th} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0, \quad z = c, \end{array} \right\} \quad (184)$$

$$g_{xz} = \theta c \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \text{th} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \left. \begin{array}{l} \text{при } y = b, \quad z = 0. \end{array} \right\} \quad (185)$$

Частное от деления первого сдвига на второй можно записать так:

$$\frac{\frac{b}{c} \text{th} \frac{\pi}{2} \frac{c}{b} - \frac{1}{9} \frac{b}{c} \text{th} \frac{3\pi}{2} \frac{c}{b} + \frac{1}{25} \frac{b}{c} \text{th} \frac{5\pi}{2} \frac{c}{b} - \dots}{\text{th} \frac{\pi}{2} \frac{b}{c} - \frac{1}{9} \text{th} \frac{3\pi}{2} \frac{b}{c} + \frac{1}{25} \text{th} \frac{5\pi}{2} \frac{b}{c} - \dots} \quad (186)$$

Итак, легко видеть, что это отношение равно 1 при $\frac{b}{c} = 1$ и всегда больше 1 при $\frac{b}{c} > 1$.

Действительно, придавая $\frac{b}{c}$ возрастающие значения, получаем:

$$\begin{array}{r} \text{при } \frac{b}{c} = 1,05 \quad \frac{0,9501 - 0,1166 + 0,040 - \dots}{0,9285 - 0,1111 + 0,040 - \dots} \\ \\ 1,10 \quad \frac{0,980 - 0,1220 + 0,040 - \dots}{0,939 - 0,1111 + 0,040 - \dots} \\ \\ 1,20 \quad \frac{1,040 - 0,1332 + 0,040 - \dots}{0,955 - 0,1111 + 0,040 - \dots} \\ \\ 1,30 \quad \frac{1,083 - 0,1442 + 0,040 - \dots}{0,967 - 0,1111 + 0,040 - \dots} \end{array}$$

т. е. значения, которые превышают единицу, так как каждый член числителя сначала превышает соответствующий член знаменателя, а затем после второго члена становится ему равным: эти значения явно возрастают вместе с $\frac{b}{c}$. Следовательно, остается убедиться в том, что превышение числителя над знаменателем сохраняется, когда $\frac{b}{c}$ чуть больше единицы. Для этого достаточно сравнить их первые члены, которые всегда значительно превышают другие, или уста-

новить, имеет ли $\frac{\left(\frac{b}{c}\right) \operatorname{th} \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{c}\right)}{\operatorname{th} \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{c}\right)}$ (которое равно 1 при $\frac{b}{c} = 1$)

положительный дифференциальный коэффициент относительно $\frac{b}{c}$ для $\frac{b}{c} = 1$. Итак, этот дифференциальный коэффициент равен

$$1 - \frac{4\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = 0,45595.$$

Главный сдвиг волокон будет посредине большей стороны, следовательно, он всегда превышает главный сдвиг посредине меньшей стороны.

Значит, на концах малой медианы прямоугольника или посредине его двух больших сторон, т. е. в точках контура, наиболее близких к оси кручения, имеет место наибольшая опасность разрушения.

И это мы действительно видим на рис. 45, который представляет горизонтальную и вертикальную проекции призмы с прямоугольным основанием 30×15 мм.

Она сильно закручена, а именно на полуокружность по длине, в 3,14159 раза превышающей большую сторону основания. Волокна *СССС...* приобрели резко выраженный наклон к большим изогнутым сторонам *АСА*, тогда как волокна *ВВВ...* остались почти нормальными к малым сторонам *АВА*.

Это обнаруживает также и опыт с кручением прямоугольной каучуковой призмы, так как мы действительно замечаем, что посредине больших сторон имеет место наибольший сдвиг, который является причиной разрушения при кручении более твердых и более хрупких материалов, чем каучук.

Наблюдение за состоянием разрушения этих материалов несколько этому не противоречит, как сказано в § 83 для квадратной призмы.

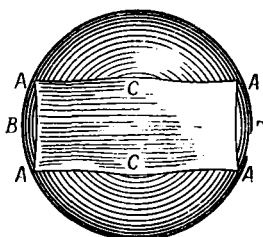
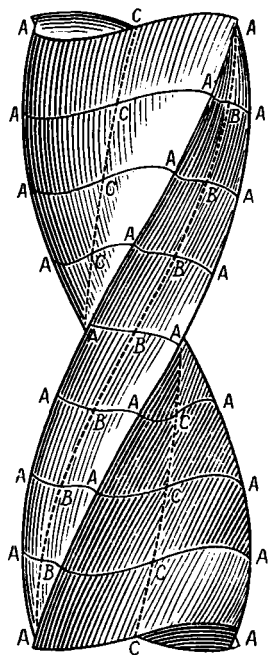


Рис. 45

**§ 89. Уравнение отсутствия разрушения
или прочности сцепления скрученной призмы.
Наибольшие сдвиги**

Общее уравнение прочности при сдвиге в случае, когда параллели к x являются осями симметрии во всех направлениях (§ 27, формула (53)), сводится к

$$T \geq G \text{ (наибольший главный сдвиг } g_x). \quad (187)$$

Мы нашли (§§ 82 и 87), что этот наибольший сдвиг, взятый положительным, равен $1,3506\theta c$, когда $\frac{b}{c} = 1$, и $1,8601\theta c$, когда $\frac{b}{c} = 2$. Если обозначить через γ его численный коэффициент или положить (см. предыдущий параграф)

$$\gamma = \max \frac{g_x}{\theta c} = \frac{-g_{xy}}{\theta c} \text{ (при } y = 0, z = c), \quad (188)$$

то первое выражение (158) g_{xy} , которое содержит быстрее сходящийся ряд, чем формула (142), выведенная из второго, дает

$$\gamma = 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3 \left(e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c}} \right)}.$$

Значения γ , вычисленные по этой формуле, изменяются от 1,35 до 2. Мы их находим в таблице в конце мемуара для различных значений $\frac{b}{c}$, которые нужно брать в столбце этой таблицы, озаглавленном

$$\frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G''}} \text{ или } \frac{b}{c},$$

так как таблица применима также в случае, когда коэффициент упругости при сдвиге имеет разную величину в направлениях y и z .

Если из условия прочности, которое вытекает отсюда:

$$T \geq G \gamma \theta c,$$

исключить $G\theta c$ посредством выражения (182), найденного в § 85:

$$M_x = \mu G \theta b c^3,$$

то получаем для предела момента M_x сил, производящих кручение без нарушения сплошности

$$\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} bc^2 T. \quad (189)$$

Отношение $\frac{\mu}{\gamma}$ изменяется между 1,665 и 2,667. Его значения находятся в той же таблице в конце мемуара. Мы замечаем, что предыдущее выражение можно написать так:

$$\lim M_x = \frac{3}{8} \frac{\mu}{\gamma} \frac{2J}{c} T.$$

Оно имеет тот же вид, как для эллиптической призмы (§ 63, выражение (127)), но с коэффициентом $\frac{3\mu}{8\gamma}$, который изменяется между 0,6245 и 1¹⁾.

¹⁾ Навье получил из теории Коши следующее выражение для предела крутящего момента (Resumé des leçons sur l'application de la mécanique, § 167, 2-е издание, стр. 108):

$$\lim M_x = \frac{8}{3} \frac{b^2 c^2 T}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

принимая во внимание, что в соответствии с этой теорией (§ 68 и примечание к § 74) $\frac{d^2 u}{dydz} = -\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta$, имеем

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} - \theta z = \frac{-2b^2 \theta z}{b^2 + c^2}, \quad g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = \frac{2c^2 \theta y}{b^2 + c^2}$$

и, следовательно, для наибольшего значения $G \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ получаем

$$Gg_x = G \frac{2\theta bc}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

это действительно дает для $M_x = \frac{16}{3} G \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \theta$ (§ 68) вышеуказанное значение $\lim M_x$, когда исключают $G\theta$, приравнявая T значению Gg_x , которое мы только что написали.

Но при выводе этого значения $\lim M_x$ предполагается, что сечение искривляется в виде гиперболического параболоида и что, следовательно, наибольший сдвиг g_x имеет место при $y = \pm b$, $z = \pm c$ или в четырех углах, т. е. именно там, где сдвиг в действительности равен нулю (§§ 68, 88). Чтобы получить отсюда правильную величину (189) для $\lim M_x$, нужно умножить ее на переменный численный коэффициент, который равен 0,8832, когда $\frac{b}{c} = 1$, но который уменьшается

до 0,8328, когда $\frac{b}{c} = 1,5$, и до 0,8247, когда $\frac{b}{c} = 2$. Он снова поднимается до 0,8710, когда $\frac{b}{c} = 4$, и до 0,9416, когда $\frac{b}{c} = 10$, равняясь 1 для $\frac{b}{c} = \infty$. Итак, предпочтительнее пользоваться выражением $\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} bc^2 T$, где коэффициент не слишком меняется и которое показывает истинное положение опасной точки.

Если мы хотим получить, хотя бы для приблизительного определения предела крутящего момента M_x , простую формулу, освобождающую нас от пользования таблицей, то нужно подобрать эмпирическую формулу для отношения $\frac{\mu}{\gamma}$, которое входит как коэффициент в (189). Получаем точный результат в точках $\frac{b}{c} = 1$ и $\frac{b}{c} = \infty$ и, по меньшей мере, точность порядка $\frac{1}{25}$ для других значений $\frac{b}{c}$, если положим

$$\frac{3\mu}{8\gamma} = \frac{1}{1 + 0,6 \frac{c}{b}};$$

что дает с достаточной для практики точностью

$$\lim M_x = \frac{40 b^3 c^2}{15 b + 9 c} T,$$

где b — всегда наибольшая из двух полусторон прямоугольного сечения.

При одинаковой площади ω сечения или при одинаковом объеме материала призма тем меньше сопротивляется разрушению при кручении, чем больше отношение ее большего измерения к меньшему, так как (189) и $\omega = 4bc$ дают $\frac{\lim M_x}{T} = \frac{1}{8} \frac{\mu}{\gamma} \omega^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{c}{b}}$, или приблизительно в соответствии с предыдущим эмпирическим выражением $\frac{3\mu}{8\gamma}$:

$$\lim M_x = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{5}{3 \sqrt{\frac{c}{b}} + 5 \sqrt{\frac{b}{c}}}.$$





ГЛАВА IX

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМ С ДРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ, НЕ В ВИДЕ ЭЛЛИПСА ИЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

§ 90. Бесконечность числа видов уравнения контура сечения и выражений для продольного перемещения u

Существует бесконечное число видов контура сечений призм, отличных от прямоугольника или эллипса, для которых можно полностью и точно решить задачи кручения силами, создающими определенный полный момент, приложенными и распределенными надлежащим образом на крайних основаниях, и, следовательно решить приближенно те же задачи, когда силы приложены к концам каким-то образом в виде пар (§§ 2, 33, 41, 58, 73).

Представляется даже возможным путем ряда попыток приблизить эти контуры, насколько это желательно, к контурам сечений данной формы. Это позволило бы определить при необходимости с желаемым приближением сопротивление кручению призм с произвольными основаниями.

В самом деле, напомним (начиная всегда со случая одинаковой упругости при сдвиге $\frac{p_{xy}}{g_{xy}} = \frac{p_{xz}}{g_{xz}} = G$) неопределенное дифференциальное уравнение (109) § 51:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad (190)$$

удовлетворяющееся во всех точках призмы, и определенное уравнение (110) § 51:

$$\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0,$$

или

$$\theta (y dy + z dz) + \frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dz = 0, \quad (191)$$

удовлетворяющееся на контуре сечения.

Возьмем на выбор какой-нибудь один из бесконечного числа интегралов, либо трансцендентной (§§ 64, 65), либо алгебраической (§§ 66, 67) формы, которые удовлетворяют неопределенному уравнению (190). Пусть этот интеграл будет

$$u = f(y, z).$$

Если его подставить вместо u в только что написанное определенное уравнение (191), то получим дифференциальное уравнение первого порядка для величин y и z , которое относится только к точкам контура. Будучи проинтегрировано, оно даст именно уравнение этого контура основания призмы, все точки которого будут испытывать продольные перемещения $u = f(y, z)$, когда призма будет закручиваться на угол θ на единицу длины.

Итак, интегрирование определенного уравнения первого порядка всегда возможно непосредственно без множителя, так как первый член является дифференциалом функции $\theta \frac{y^2 + z^2}{2}$, и, выписывая $Pdy + Qdz$ вместе с двумя последними членами $\frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dz$, получаем, очевидно, известное условие интегрируемости $\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dz}$, если u таково, что $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$.

Интеграл, или *общее уравнение кривой контура*, сечения будет

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \int dy \frac{du}{dz} - \int dz \left(\frac{du}{dy} + \int dy \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = \text{const.} \quad (192)$$

В нем член в скобках сводится сам собой к функции только переменной z , так как его дифференциал относительно y равен нулю, если u является такой функцией y, z , что $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$.

Интегрирование будет выполняться чаще всего непосредственно для дифференциального уравнения (191), без использования общей формы интеграла (192).

§ 91. Трансцендентные и алгебраические виды выражения u

Например:

1. Значению u самой общей трансцендентной формы (129) § 64

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} u &= \sum e^{my} (A'_m \cos mz + A_m \sin mz), \\ u &= \sum e^{mz} (B'_m \cos my + B_m \sin my), \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

соответствует уравнение контура

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \sum e^{my} (-A'_m \sin mz + A_m \cos mz) &= \text{const}, \\ \theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \sum e^{mz} (B'_m \sin my - B_m \cos my) &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Если сечение должно быть симметричным относительно оси z , то необходимо полагать (§ 65)

$$A'_m = 0.$$

Если оно симметрично относительно каждой из двух осей y и z , то значению u , которое тогда будет иметь вид (§ 65, выражение (132))

$$u = \sum A_m (e^{my} - e^{-my}) \sin mz, \quad (195)$$

соответствует уравнение контура

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \sum A_m (e^{my} + e^{-my}) \cos mz = \text{const}. \quad (196)$$

2. Если перемещение u выражено в виде целой рациональной функции y и z , т. е. если (§ 66, выражение (134))

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 y + a'_1 z + a_2 (y^2 - z^2) + a'_2 2 yz + \\ &+ a_3 (y^3 - 3 yz^2) + a'_3 (3 y^2 z - z^3) + \\ &+ a_4 (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + a'_4 (4 y^3 z - 4 yz^3) + \dots, \end{aligned} \quad (197)$$

то уравнение кривой контура будет

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} - a_1 z + a'_1 y - a_2 2yz + a'_2 (y^2 - z^2) - \\ - a_3 (3y^2 z - z^3) + a'_3 (y^3 - 3yz^2) - a_4 (4y^3 z - 4yz^3) + \\ + a'_4 (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4) - \dots = \text{const.} \quad (198)$$

3. Если вообще имеем

$$u = \varphi(y + z\sqrt{-1}) + \psi(y - z\sqrt{-1}),$$

где φ и ψ — две произвольные функции, то уравнение кривой контура будет

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \sqrt{-1} \varphi(y + z\sqrt{-1}) - \sqrt{-1} \psi(y - z\sqrt{-1}) = \text{const.}$$

4. Если перемещение u выражено в полярных координатах общей формулой (§ 66, выражение (136))

$$u = \sum (a_n r^n \cos n \alpha + a_{n'} r^{n'} \sin n' \alpha),$$

где

$$r \cos \alpha = y, \quad r \sin \alpha = z, \quad r^2 = y^2 + z^2, \quad \alpha = \text{arctg} \frac{z}{y},$$

то мы легко могли бы, подставляя это значение u в (192), получить общее уравнение контура, которое ему соответствует. Но проще взять определенное уравнение (191)

$$\theta(ydy + zdz) + \frac{du}{dz} dy - \frac{du}{dy} dz = 0$$

и выразить его полностью в полярных координатах, полагая в нем

$$ydy + zdz = r dr, \quad dy = dr \cos \alpha - r \sin \alpha d \alpha,$$

$$dz = dr \sin \alpha + r \cos \alpha d \alpha;$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dy} + \frac{du}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy} = \frac{du}{dr} \cos \alpha - \frac{du}{d\alpha} \frac{\sin \alpha}{r},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dz} + \frac{du}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dz} = \frac{du}{dr} \sin \alpha + \frac{du}{d\alpha} \frac{\cos \alpha}{r}.$$

После сокращений наше уравнение превращается в

$$\theta r dr - rd\alpha \frac{du}{dr} + dr \frac{du}{rd\alpha} = 0, \quad (199)$$

или, если подставить вместо $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\alpha}$ их значения, полученные из $u = \sum(\quad)$, то находим:

$$\theta r dr - \sum [a_n d(r^n \sin n\alpha) - a_{n'} d(r^{n'} \cos n'\alpha)] = 0.$$

Это уравнение интегрируется непосредственно, и мы получаем для криволинейных контуров оснований призм, в которых кручение производит продольные перемещения u , представляемые выражением

$$\left. \begin{aligned} u &= a_0 + a_1 r \cos \alpha + a'_1 r \sin \alpha + a_2 r^2 \cos 2\alpha + \\ &\quad + a'_2 r^2 \sin 2\alpha + a_3 r^3 \cos 3\alpha + a'_3 r^3 \sin 3\alpha + \dots, \\ \text{или в более общей форме} \\ u &= \sum (a_n r^n \cos n\alpha + a_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha), \end{aligned} \right\} (200)$$

полярное уравнение

$$\left. \begin{aligned} \theta \frac{r^2}{2} - a_1 r \sin \alpha + a'_1 r \cos \alpha - a_2 r^2 \sin 2\alpha + a'_2 r^2 \cos 2\alpha - \\ - a_3 r^3 \sin 3\alpha + a'_3 r^3 \cos 3\alpha - \dots = \text{const}, \\ \text{или в более общей форме} \\ \theta \frac{r^2}{2} + \sum (-a_n r^n \sin n\alpha + a_{n'} r^{n'} \cos n'\alpha) = \text{const}. \end{aligned} \right\} (201)$$

Развернутые уравнения, такие, как алгебраические уравнения (197) и (198), являются только частными случаями этих уравнений, выраженных посредством сумм. Мы их получаем, считая n , n' целыми и положительными и подставляя затем вместо синусов и косинусов их значения $\cos \alpha = \frac{y}{r}$, $\sin \alpha = \frac{z}{r}$.

Выбирая замкнутые кривые, которые могут быть представлены уравнениями, содержащимися в общей форме (194), или уравнениями (198), (201), получаем бесконечное множество оснований призм, для которых можно полностью решить задачу кручения, так как выражение для продоль-

ного перемещения u (193) или (197), (200) позволяет получить сдвиг g , крутящий момент M_x и т. д., как это сделано в двух предыдущих главах, относящихся к эллиптическим и прямоугольным призмам.

§ 92. Симметричные алгебраические кривые. Кривые, одинаковые в двух направлениях

Кривые, выраженные общим трансцендентным уравнением (194) или (196), в котором показательные функции и синусы обычных координат перемешаны, с трудом могут быть проведены по точкам. Поэтому мы направили наши исследования на алгебраические кривые, представленные в полярных координатах формулой (201) и в обычных координатах формулой (198).

Чтобы получить кривые, симметричные относительно двух осей y и z , нужно (§ 67) положить $a_n = 0$ и свести n' к целым и четным числам. Таким образом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum a'_{2n} r^{2n} \sin 2n\alpha, \\ \theta \frac{r^2}{2} + \sum a'_{2n} r^{2n} \cos 2n\alpha &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

(n — целое число, *положительное* или *отрицательное*), или, если ограничиваемся целыми и положительными показателями степени для r , то получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= a'_2 r^2 \sin 2\alpha + a'_4 r^4 \sin 4\alpha + \dots = \\ &= a'_2 2yz + a'_4 (4y^3z - 4yz^3) + \dots; \\ \theta \frac{r^2}{2} + a'_2 r^2 \cos 2\alpha + a'_4 r^4 \cos 4\alpha + \dots &= \theta \frac{y^2 + z^2}{2} + \\ + a'_2 (y^2 - z^2) + a'_4 (y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \dots &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Если же сечение должно быть *одинаковым в двух направлениях* y и z , то $2n$ следует умножить на 4 (§ 67).

Ограничим сначала наше исследование этими кривыми, симметричными и одинаковыми в двух направлениях.

Если мы возьмем за единицу длины их полудиаметры на осях y и z , то постоянная должна быть такой, чтобы для $z = 0$ мы имели $y = 1$, а для $y = 0$, $z = 1$ или для $\alpha = 0$

или $\frac{1}{2} \pi$ имели $r = 1$. Обозначая через a и a' коэффициенты, отличные от коэффициентов a_1, a'_1 , имеем для общего уравнения в полярных координатах таких кривых выражение

$$r^2 - (ar^4 + ar^{-4}) \cos 4\alpha + (a'r^8 + a'r^{-8}) \cos 8\alpha - (a''r^{12} + a''r^{-12}) \cos 12\alpha + \dots = 1 - a - a + a' + a' - a'' - a'' + \dots, \quad (204)$$

дающее перемещение

$$u = \frac{\theta}{2} [-(ar^4 - ar^{-4}) \sin 4\alpha + (a'r^8 - a'r^{-8}) \sin 8\alpha - (a''r^{12} - a''r^{-12}) \sin 12\alpha + \dots], \quad (205)$$

которое было бы одинаковым при любых постоянных в правой части (204), т. е. при $\alpha = 0$ оно не давало бы $r = 1$.

Уравнение в обычных координатах, если ограничимся постоянными показателями степени r , будет

$$y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + a'(y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8) - a''(y^{12} - 66y^{10}z^2 + 495y^8z^4 - 924y^6z^6 + 495y^4z^8 - 66y^2z^{10} + z^{12}) + \text{и т. д.} = 1 - a + a' - a'' + \text{и т. д.} \quad (206)$$

Оно дает следующее выражение для перемещения:

$$u = \frac{\theta}{2} [-a(4y^3z - 4yz^3) + a'(8y^7z - 56y^5z^3 + 56y^3z^5 - 8yz^7) - a''(12y^{11}z - 220y^9z^3 + 792y^7z^5 - 792y^5z^7 + 220y^3z^9 - 12yz^{11})] + \text{и т. д.} \quad (207)$$

§ 93. Способы, с помощью которых уравнениям придают определенную форму и делают их однородными

Если бы вместо членов правой части уравнения $1 - a - a + a' + a' - a'' - a'' + \dots$, которые таковы, что $r = 1$ при $\alpha = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, уравнение (204) имело бы в качестве правой части какую-нибудь численную постоянную K , то оставалось бы

только положить

$$K = r_0^2 - (ar_0^4 + ar_0^{-4}) + (a' r_0^8 + a' r_0^{-8}) - \text{и т. д.}$$

или вместо r взять r_0 , которое получается из того же уравнения при $a = 0$. Затем надо разделить это уравнение (204) на r_0^2 и ввести вместо r новую переменную $r' = \frac{r}{r_0}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} r'^2 - [(ar_0^2)r'^4 + (ar_0^{-6})r'^{-4}] \cos 4\alpha + \\ + [(a'r_0^6)r'^8 + (a'r_0^{-10})r'^{-8}] \cos 8\alpha - \dots = \\ = 1 - ar_0^2 - ar_0^{-6} + a'r_0^6 + a'r_0^{-10} - \dots \end{aligned} \quad (208)$$

Таким образом, выражение приведено к форме (204), т. е. в нем полудиаметр $r' = 1$ при $\alpha = 0$ или $\frac{1}{2}\pi$.

Достаточно рассмотреть кривые, представленные этим уравнением (204) с отрицательными величинами коэффициентов

$$-a, -a'' \dots, -a, -a'' \dots$$

при $\cos 4\alpha, \cos 12\alpha, \dots$, чтобы охватить случаи, в которых эти коэффициенты были бы положительными числами.

Действительно, если вместо (204) мы получили бы следующее уравнение, в котором коэффициенты при тех же членах были бы положительны:

$$\begin{aligned} r^2 + (ar^4 + ar^{-4}) \cos 4\alpha + (a'r^8 + a'r^{-8}) \cos 8\alpha + \\ + (a''r^{12} + a''r^{-12}) \cos 12\alpha + \dots = \\ = 1 + a + a + a' + a' + a'' + a'' + \dots, \end{aligned}$$

то следовало бы только повернуть новые оси Oy', Oz' (рис. 46) на 45° по отношению к прежним осям Oy, Oz , полагая

$$a = \frac{\pi}{4} + a',$$

чтобы превратить уравнение в другое:

$$r^2 - (ar^4 + ar^{-4}) \cos 4\alpha' - \dots = 1 + a + a + \dots,$$

в котором рассматриваемые коэффициенты отрицательны.

Правая часть уравнения не дает $r = 1$ при $\alpha' = 0$; но, заменяя переменную r на другую $r' = \frac{r}{r_0}$, как было сказано, мы приведем его полностью к форме (204).

Наконец, мы всегда можем сделать однородными уравнения и выражения (204) — (207) так, чтобы кривые контура имели в направлениях y и z полу диаметры, равные не 1, а какой-нибудь линейной величине r_0 . Для этого напомним во всех этих уравнениях $\frac{r}{r_0}$ вместо r и умножим правую часть уравнения, дающего u , на r_0^2 , так как по отношению к линейному размеру u имеет степень 1, а θ , частное от деления угла на линию, — степень —1. Таким образом, вместо (204) и (205) получаем:

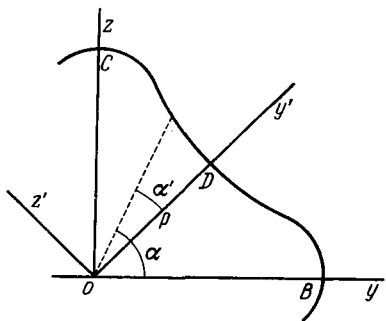


Рис. 46

$$\frac{r^2}{r_0^2} - \left(a \frac{r^4}{r_0^4} + a \frac{r^{-4}}{r_0^{-4}} \right) \cos 4\alpha + \left(a' \frac{r^8}{r_0^8} + a' \frac{r^{-8}}{r_0^{-8}} \right) \cos 8\alpha + \dots = 1 - a - a + a' + a' - \dots, \quad (209)$$

$$u = \frac{\theta r_0^2}{2} \left[- \left(a \frac{r^4}{r_0^4} - a \frac{r^{-4}}{r_0^{-4}} \right) \sin 4\alpha + \left(a' \frac{r^8}{r_0^8} - a' \frac{r^{-8}}{r_0^{-8}} \right) \sin 8\alpha - \dots \right]. \quad (210)$$

§ 94. Симметричные и равные замкнутые кривые четвертой степени

Посмотрим, какие замкнутые кривые могут представляться уравнением (206), сведенным к выражению

или
$$\left. \begin{aligned} y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) &= 1 - a, \\ r^2 - ar^4 \cos 4\alpha &= 1 - a, \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

где нам необходимо будет дать, как мы уже сказали, только

положительные значения для a , чтобы охватить все частные случаи.

Обозначим через ρ *полумедиану* или радиус-вектор, образующий угол 45° с осью y , т. е. положим

$$r = \rho \text{ при } a = \pm \frac{\pi}{4} \text{ или при } y^2 = z^2. \quad (212)$$

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 + a\rho^4 &= 1 - a, \\ \text{откуда} \quad \rho &= \sqrt{-\frac{1}{2a} + \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1-a}{a}}}. \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

Для того чтобы кривая была замкнутой, нужно, чтобы ρ имело действительное значение, т. е.

$$a < 1.$$

Но достаточно придать a значение даже меньшее $\frac{1}{2}$, чтобы получить все желаемые замкнутые кривые.

Действительно, когда мы полагаем $a = 0$ или $\frac{\pi}{2}$, то полярное уравнение (211), превратившееся в $r^2 - ar^4 = 1 - a$, можно записать в следующем виде:

$$(r^2 - 1)[1 - a(r^2 + 1)] = 0.$$

Таким образом, кривая пересекает оси y и z не только в точках $r = 1$, но также в точках

$$r = \sqrt{\frac{1}{a} - 1}.$$

Если эти точки более близки к центру, чем первые, т. е. если

$$\frac{1}{a} - 1 < 1 \text{ или, иначе, } a > \frac{1}{2},$$

то истинный радиус кривой равен не 1, как мы того хотим, а $\sqrt{\frac{1}{a} - 1}$. И нужно (см. предыдущий параграф), чтобы привести этот радиус к единице, взять новую переменную $r' =$

$= \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{a} - 1}}$ и положить, кроме того, $a = 1 - a'$, что превращает уравнение (211) $r^2 - ar^4 \cos 4a = 1 - a$ в уравнение такого же вида:

$$r'^2 - a' r'^4 \cos 4a = 1 - a',$$

где

$$a' < \frac{1}{2}.$$

Мы получим, как это видно, все замкнутые кривые четвертой степени, симметричные и равные, для которых перемещение u имеет целое выражение относительно y и z , если будем придавать a в уравнении (211) только значения, заключенные между 0 и $\frac{1}{2}$.

§ 95. Нахождение этих кривых

Итак, уравнение (211) дает

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{2a} + 3y^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2a} - 1\right)^2 + \frac{4}{a}y^2 + 8y^4}}. \quad (214)$$

1. Для $a = 0$ кривая (211) не что иное, как окружность единичного радиуса.

2. Для $a = 0,4$ выражение (214), которое мы только что написали, дает следующий ряд координат:

$y \backslash z$	С нижним из знаков \pm под корнем	С верхним знаком	$y \backslash z$	С нижним знаком
0	1,0	1,225	0,6	0,4027
0,025	0,9948	1,230	0,7	0,3105
0,05	0,9866	1,246	0,8	0,2219
0,075	0,9602	1,270	0,9	0,1336
0,1	0,9364	1,297	0,925	0,11045
0,2	0,8250	1,435	0,95	0,08585
0,3	0,7116	1,592	0,975	0,05745
0,4	0,6030	Значения, посторонние для замкнутой кривой	1,0	0,0000
0,5	0,500			

Это позволяет построить кривую по точкам с тем большей легкостью, что все эти значения взаимные, т. е. численные значения для y и z могут меняться местами.

Медиана под углом 45° , т. е.

$$2\rho = DOD' = 2\sqrt{(0,5)^2 + (0,5)^2},$$

находится с диагональю или с большим диаметром $BOB' = 2$

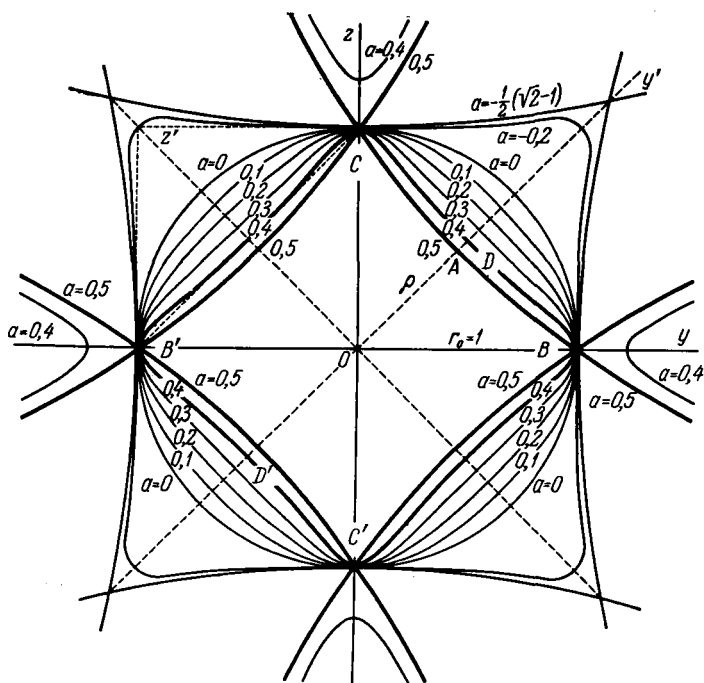


Рис. 47

в таком же соотношении $\frac{1}{2}\sqrt{2}:1$, как для квадрата. Но углы округлены и четыре стороны слегка вогнуты (рис. 47).

Значения, соответствующие верхнему из знаков \pm под корнем, дают четыре бесконечные ветви, отделенные от зам-

кнutoй кривой, которая единственно и представляет для нас интерес.

3. Для значений a между 0 и 0,40 имеем ряд промежуточных кривых между квадратом и описанной окружностью. Можно, не вычисляя их координаты, составить представление об их форме, определяя значение их полумедианы ρ или радиуса-вектора для $a = 45^\circ$. Выражение (213) дает

$$a = 0 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$$

$$\rho = 1 \quad 0,91124 \quad 0,8376 \quad 0,7710 \quad 0,70711 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad 0,64359451 =$$

$$= \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Легко видеть, что, начиная с $a = 0,2643$, стороны вогнуты к их середине, ибо при $y = z$ получаем $\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{2}{y} \frac{12ay^2 - 1}{4ay^2 + 1}$, и, таким образом, так как при этом $y^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a - 4a^2}}{4a}$, то

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{2}{y} \frac{-4 + 3\sqrt{1 + 4a - 4a^2}}{\sqrt{1 + 4a - 4a^2}};$$

это выражение из отрицательного становится положительным, когда

$$a > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{2} = 0,2643.$$

4. Когда a достигает наибольшего значения ($a = 0,5$), при котором медиана 2ρ наименьшая, выражение (214) дает:

$y \backslash z$	Нижний знак	Верхний знак	$y \backslash z$	Нижний знак
0	1,000	1,000	0,5	0,4109
0,1	0,8636	1,146	0,6	0,3177
0,2	0,7370	1,303	0,7	0,2307
0,3	0,6198	1,468	0,8	0,1493
0,4	0,5113	1,643	0,9	0,0726
0,45509	0,45509	Значения, по- сторонние для замкну- того контура	1,0	0,0000

Контур является квадратом с четырьмя острыми углами и вогнутыми сторонами, стрела которых равна

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}} = 0,04490,$$

или приблизительно $\frac{1}{22}$ хорды¹⁾. При $a = 1$ замкнутый контур обратился бы в точку, а при $a > 1$ он совсем не существует. Для отрицательного a мы получаем те же кривые, но повернутые на 45° относительно центра и увеличенные так, что радиус-вектор при 45° больше 1, радиус же при $a = 0$ остается постоянным ($r_0 = 1$), как это видно на рисунке для двух из этих кривых, а именно:

1) для квадрата с закругленными углами, представленного только что посредством уравнения $r^2 - 0,4 r^4 \cos 4a = 0,6$ и затем с помощью выражения

$$r^2 + 0,2 r^4 \cos 4a = 1,2; \quad (a = -0,2; e = \sqrt{2});$$

2) для квадрата с острыми углами, представленного здесь посредством уравнения

$$r^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2} r^4 \cos 4a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}; \quad (a = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1);$$

$$e = \sqrt{\sqrt{2}+1} = 1,5538).$$

§ 96. Кривые восьмой степени, симметричные и одинаковые в двух направлениях

В § 101 мы получили полезные выводы из рассмотрения двух кривых с вогнутыми сторонами и пришли к уравнению четвертой степени. И можно было бы получить другие уравнения кривых с выпуклыми сторонами, если нам пришлось бы рассчитывать кручение *призм, основания которых*

¹⁾ Тогда уравнение (211) может быть записано следующим образом: $(y^2 + 2yz\sqrt{2} + z^2 - 1)(y^2 - 2yz\sqrt{2} + z^2 - 1) = 0$; оно представляет собой две гиперболы, которые пересекаются в четырех точках $BCB'C'$ (март 1855 г.).

имели бы промежуточные формы между кругом и квадратом.

Но поскольку главной целью наших исследований призм с переменной формой было определение законов кручения деталей с лопастями или выступающими сторонами, представляющих четырехконечную звезду, какие часто применяют в чугунных конструкциях, то мы попытались узнать, даст ли уравнение (206), приведенное к восьмой степени:

$$\left. \begin{aligned} y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \\ + a'(y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8) = \\ = 1 - a + a', \end{aligned} \right\} (215)$$

или

$$r^2 - ar^4 \cos 4\alpha + ar^8 \cos 8\alpha = 1 - a + a',$$

замкнутые кривые, у которых наибольшие радиусы были бы более выступающими или полумедианы $\rho = r$ (при $\alpha = \frac{\pi}{4}$) меньшими, чем у кривых четвертой степени.

Мы детально рассмотрели это уравнение, и ниже приведем некоторые результаты.

Уравнение (215) не решается алгебраически относительно z или y , но, взяв его во второй форме, можно подставить

$$2 \cos^2 4\alpha - 1 \qquad \text{вместо } \cos 8\alpha$$

и решить его относительно $r^4 \cos 4\alpha$. Следовательно, получим полярный угол как функцию радиуса-вектора, что достаточно для проведения кривой по точкам. Но удобнее, имея $r^4 \cos 4\alpha$, определить координаты y и z , так как получаем:

$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1,$$

откуда, поскольку $r \cos \alpha = y$, имеем:

$$r^4 \cos 4\alpha = 8y^4 - 8r^2y^2 + r^4;$$

отсюда можно получить значение y^2 и, следовательно, значение $z^2 = r^2 - y^2$. Таким образом, получаем для значений

у и z, соответствующих каждому заданному значению r:

$$\text{и } \left. \begin{matrix} y^2 \\ z^2 \end{matrix} \right\} = \frac{r^2}{2} \pm \sqrt{\frac{r^4}{8} + \frac{r^4 \cos 4\alpha}{8}} \quad (216)$$

и

$$r^4 \cos 4\alpha = \frac{a}{4a'} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{4a'} - 1\right)^2 + \frac{1-r^2}{2a'} - \frac{1-r^8}{2}}. \quad (217)$$

Это позволяет вычислить сколь угодно много значений у и z, задаваясь произвольными значениями r.

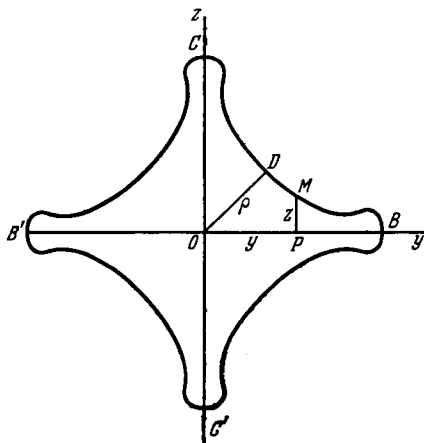


Рис. 48

Можно всегда выбрать один из двух параметров a, a' так, чтобы радиус-вектор $OD = \rho$ (рис. 48) при угле 45° имел бы определенное значение, так как из уравнения, которое следует из выражения (215) при $r = \rho, \alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\rho^2 + a\rho^4 + a'\rho^8 = 1 - a + a',$$

ВЫВОДИМ

$$a = a'(1 - \rho^4) + \frac{1 - \rho^8}{1 + \rho^4} \quad (218)$$

и, задаваясь a' , получаем a . Например,

$$\text{при } \rho = \frac{1}{2} \quad \text{имеем} \quad a = \frac{15}{16}a' + \frac{12}{17}. \quad (219)$$

§ 97. Условия, при которых эти кривые замкнуты

Для того чтобы восьми точкам

$$r = 1 \quad \text{при} \quad a = 0, \pi \quad \text{или} \quad \pm \frac{\pi}{2}$$

и

$$r = \rho \quad \text{при} \quad a = \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \pm \frac{3\pi}{4}$$

соответствовал непрерывный и замкнутый контур, необходимо:

1) чтобы кривая не пересекала оси y и z в точках, более близких к началу координат, чем точки, соответствующие $r = 1$, так как это были бы те точки, которые принадлежали бы к замкнутой части, у которой радиусы OB, OD от O до 45° не находились бы между собой в желательном соотношении;

2) чтобы в точках B и B', C и C' та же кривая поворачивалась своей вогнутостью соответственно к осям z и y , так как если бы она повернулась к ним своей выпуклостью, то эти точки (для предполагаемого случая, когда OD меньше OB) были бы вершинами ветвей бесконечных кривых.

Первое из этих условий будет выполнено, когда уравнение

$$r^6 + r^4 - \frac{a - a'}{a} r^2 + \frac{1 - a + a'}{a'} = 0, \quad (220)$$

которое мы получаем, полагая $a = 0$ и деля на $1 - r^2$, даст для r^2 только корни или большие единицы, или отрицательные.

Второе условие (условие вогнутости) будет выполнено, если при $y = 0$ значение $\frac{d^2 z}{dy^2}$, полученное из первого уравнения (215) кривой, отрицательно. Итак, находим:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} \quad (\text{при} \quad y = 0, z = 1) = - \frac{1 + 6a - 28a'}{1 - 2a + 4a'}, \quad (221)$$

или, подставляя вместо a его значение (218), выраженное через a' и ρ :

$$\frac{d^2 z}{dy^2} \quad (\text{при} \quad y = 0, z = 1) = - \frac{11 + 3e^4}{1 + e^4} \frac{(3 - e^2)^2 - 2}{a' - \frac{2 - (1 + e^2)^2}{2(1 + e^4)^2}} - a'$$

Этот дифференциальный коэффициент будет отрицательным, если мы возьмем для a' положительное значение, заключенное между значениями двух выражений:

$$\frac{(3 - \varrho^2)^2 - 2}{2(11 + 3\varrho^4)(1 + \varrho^4)} \text{ и } \frac{2 - (1 + \varrho^2)^2}{2(1 + \varrho^4)^2}. \quad (222)$$

Первое из этих выражений всегда положительно (так как $\varrho < 1$). Если при этом второе выражение также положительно, то справедлива вышеуказанная рекомендация для выбора a' . Если же второе выражение отрицательно, то за a' надо брать любую величину, меньшую первого из выражений. Мы не будем этого предполагать, так как тогда получили бы $1 + \varrho^2 > \sqrt{2}$, или $\varrho > 0,64359451$, и могли бы ограничиться уравнением четвертой степени, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Предположим, например, что $\varrho = \frac{1}{2}$. Тогда выражения (222) будут иметь значения:

$$\frac{8 \cdot 89}{17 \cdot 179} = 0,23397962 \text{ и } \frac{7 \cdot 8}{17^2} = 0,19377163.$$

Это и есть те пределы, между которыми должно выбираться значение a' .

Оба предела (222) сливаются или становятся одинаковыми, когда $1 - 4\varrho^2 - 4\varrho^4 - \varrho^8 = 0$, откуда

$$\varrho = 0,45473.$$

И поскольку общее значение обоих пределов равно тогда 0,25, то можно взять

$$a' = 0,25, \quad a = 1.$$

Но тогда *первое условие* не выполняется, так как уравнение (220) $r^6 + r^4 - 3r^2 + 1 = 0$ имеет действительный корень $r = \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0,64359$ и, следовательно, меньший единицы.

Итак, нельзя снизить до 0,45473 отношение ϱ наименьшего диаметра к наибольшему.

Другая попытка нам показала, что нельзя приравнять это отношение ϱ даже $\frac{7}{15} = 0,46667$.

**§ 98. Кривые восьмой степени,
у которых
наименьший диаметр равен половине
наибольшего**

Таким образом, ограничимся $\rho = \frac{1}{2}$.

В этом случае нельзя придавать a вышеуказанное значение его нижнего предела $\frac{7 \cdot 8}{17^2} = 0,19377163$, так как первое условие предыдущего параграфа не всегда выполнимо, и кривая пересекает оси на расстоянии 0,7787.

Нельзя, кроме того, приравнять его полностью высшему пределу 0,23397962, что дало бы $\frac{d^2 z}{dy^2} = 0$ при $y = 0$, $z = 1$, так как тогда нет полной связи между ветвями бесконечных кривых, обеспечивающей их замкнутость.

Итак, мы примем последовательно: $a' = 0,23$, тогда в соответствии с уравнением (219) имеем $a = 0,9215078$; $a' = \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} = 0,2304922$, тогда $a = 4 a' = \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} = 0,9219688$. Для второго из этих двух значений a' имеем в четырех вершинах кривой

$$\frac{d^2 r}{d a^2} = 0,$$

так как вообще

$$\frac{d^2 r}{d a^2} \left(\text{при } a = 0 \text{ или } \frac{\pi}{2}, r = 1 \right) = -8 \frac{a - 4 a'}{1 - 2a + 4 a'}.$$

Таким образом, при этом значении a' кривая имеет центр кривизны в центре фигуры, т. е. в точке, где пересекаются обе оси координат.

Приведем ряд систем значений y и z (см. стр. 234).

Системы значений y и z , получающиеся при нижнем из знаков \pm выражения (217) $r^4 \cos 4a$, дают замкнутые кривые с четырьмя выступающими сторонами, приблизительно такие, какие мы хотели бы получить. Значения, получающиеся при верхнем знаке, дают восемь бесконечных ветвей кривых, которые не касаются замкнутой части и нас не интересуют. Оба уравнения дают почти тождественные

Значения радиуса-вектора z	Кривая $a' = 0,23; a = 0,9215078$				Кривая $a' = \frac{12}{49} \cdot \frac{16}{17} = 0,2304922; a = 4a' = 0,9219688$			
	у		z		у		z	
	верхний из знаков \pm для значения (217) $z^2 \cos 4a$	нижний знак	верх- ний знак	нижний знак	верх- ний знак	нижний знак	верх- ний знак	нижний знак
1,20	1,191	1,118	0,1456	0,4365	1,191	1,118	0,1471	0,4361
1,10	1,094	1,058	0,1105	0,2985	1,094	1,0583	0,1134	0,2997
1,08	1,075	1,047	0,1072	0,2640
$\sqrt{1,06}$	1,055	1,036	0,1025	0,2232	1,055	1,0360	0,1021	0,22435
$\sqrt{1,06} = 1,02956$	1,024	1,0204	0,1040	0,13707
Замкн. 1,02 часть: 1,00	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое
0,996	То же	1,0000	То же	0,0000	То же	1,0000	То же	0,00000
0,99	То же	0,9967	То же	0,0529	То же	0,9945	То же	0,05413
0,98	То же	0,98827	То же	0,05848	То же	0,9882	То же	0,05983
0,97	То же	0,97815	То же	0,06020	То же	0,9781	То же	0,06124
0,96	То же	0,96820	То же	0,5916	То же	То же
0,92	То же	0,95864	То же	0,05070	То же	0,9582	То же	0,05814
0,85	То же	0,91876	То же	0,04785	То же	0,9187	То же	0,04879
0,75	То же	0,84912	То же	0,03860	То же	0,8490	То же	0,04183
0,70	То же	0,74661	То же	0,07120	То же	0,7469	То же	0,06760
0,60	То же	То же	То же	0,6931	То же	0,09818
0,55	То же	0,57547	То же	0,16979	То же	То же
0,51	То же	То же	То же	0,5030	То же	0,2224
0,50	То же	0,41714	То же	0,29343	То же	То же
		0,353553 =	То же	0,353553 =	То же	0,353553 =	То же	0,353553 =
		$= \frac{1}{4} \sqrt{2}$		$= \frac{1}{4} \sqrt{2}$		$= \frac{1}{4} \sqrt{2}$		$= \frac{1}{4} \sqrt{2}$

кривые. Однако второе уравнение

$$r^2 - \frac{48}{49} \frac{16}{17} r^4 \cos 4\alpha + \frac{12}{49} \frac{16}{17} r^8 \cos 8\alpha = 1 - \frac{36}{49} \frac{16}{17}, \quad (223)$$

откуда

$$\left. \begin{matrix} y \\ \text{и} \\ z \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{r^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+r^4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{49}{48} \frac{17}{16} (1-r^2) - \frac{1}{2} (1-r^8)}}}, \quad (224)$$

дает, как видим, для минимума z , соответствующего приблизительно $r = 0,85$, число $0,04183$, т. е. несколько большее,

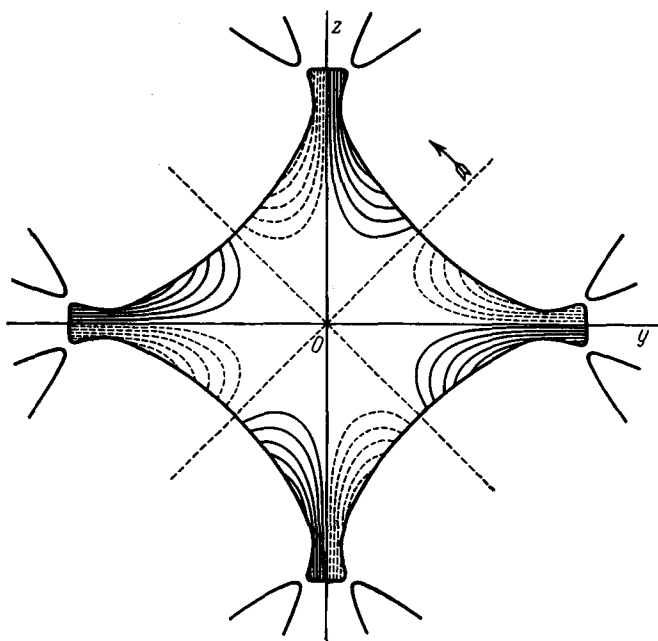


Рис. 49

чем значение $0,0386$, получаемое из первого уравнения, так что кривая, представленная вторым уравнением (223), имеет ребра менее заостренные.

Итак, мы приняли для наших исследований замкнутую кривую, представленную уравнениями (223) или (224) и изображенную на рис. 49. Тот же рисунок

дает представление о восьми бесконечных ветвях и о горизонтальных разрезах (см. далее) искривленной поверхности, в которую при кручении превращается первоначально плоское сечение с контуром в виде этой кривой.

§ 99. Кривые, представленные уравнениями, в которых радиус-вектор имеет отрицательные показатели степени.

Кривые двенадцатой и шестнадцатой степеней и т. д.

Легко видеть, что все кривые с отрицательными показателями степени, представленные общим уравнением (204) § 92:

$$r^2 - (ar^4 + ar^{-4}) \cos 4\alpha + (a'r^8 + a'r^{-8}) \cos 8\alpha - \dots = \\ = 1 - a - a + a' + a' - \dots,$$

проходят через центр или начало координат. Предположим, например, что высший отрицательный показатель степени r

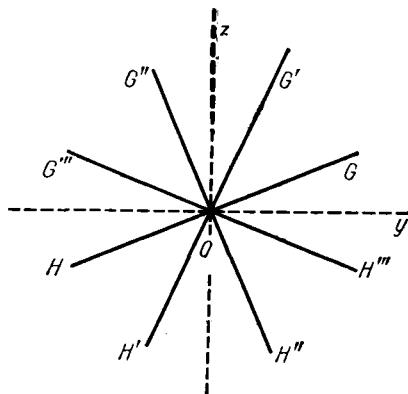


Рис. 50

равен — 4. Удаляя знаменатель, т. е. умножая на r^4 , получаем:

$$r^6 - (ar^8 + a) \cos 4\alpha + a'r^{12} \cos 8\alpha - \dots = \\ = (1 - a - a + a' - \dots)r^4.$$

Это уравнение удовлетворяется при $r = 0$, $\cos 4\alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \dots \frac{15\pi}{8}$.

Таким образом, в центре пересекаются четыре ветви кривой, которые имеют касательные $GH, G'H', G''H'', G'''H'''$, составляющие углы $\pm \frac{\pi}{8}$ и $\pm \frac{3\pi}{8}$ с осью Oy и ее продолжением (рис. 50).

Если высший отрицательный показатель степени равен -8 , то можно видеть, что уравнение удовлетворяется при

$$r = 0, \cos 8\alpha = 0, \text{ откуда } \alpha = \frac{\pi}{16}, 3\frac{\pi}{16}, 5\frac{\pi}{16} \dots 31\frac{\pi}{16}.$$

Таким образом, центр представляет собой кратную точку, в которой пересекаются восемь ветвей кривых, наклоненных под углами

$$\pm \frac{\pi}{16}, \pm \frac{3\pi}{16}, \pm \frac{5\pi}{16}, \pm \frac{7\pi}{16}$$

к оси Oy и ее продолжению.

Подобные кривые могут нам подойти, если только ветви, которые пересекаются в центре не являются бесконечными, а изгибаются розеткой и объемлются без касания другой замкнутой кривой, которая будет в таком случае единственной кривой, рассматриваемой как основание призмы.

Это имеет место для уравнения

$$r^2 - ar^4 \cos 4\alpha = 1 - a.$$

Но объемлющие кривые, которые можно получить из этого уравнения десятой степени относительно y и z , меньше отличаются от круга, чем кривые, которые мы могли получить (§§ 94, 95) из уравнения четвертой степени.

Впрочем, переплетения контуров являются причиной осложнений и трудностей.

Итак, мы считаем, что для получения кривых более разнообразных видов, чем описанные в §§ 94—98, например кривых с выступающими ребрами, у которых малый диаметр был бы меньше половины большего диаметра, следует придерживаться положительных показателей r и прибегать к уравнению двенадцатой степени

$$r^2 - ar^4 \cos 4\alpha + a' r^8 \cos 8\alpha - a'' r^{12} \cos 12\alpha = 1 - a + a' - a''$$

или к аналогичному уравнению шестнадцатой степени. Они могут быть сведены к третьей или четвертой степени относительно $\cos 4a$, если заменить $\cos 8a$ на $2 \cos^2 4a - 1$, $\cos 12a$ на $4 \cos^3 4a - 3 \cos 4a$ и $\cos 16a$ на $8 \cos^4 4a - 8 \cos^2 4a + 1$. Уравнение шестнадцатой степени сводится также к уравнению второй степени относительно $\cos 8a$, если члены $\cos a$ и $\cos 12a$ отсутствуют; но поскольку оно не изменяется при подстановке $\frac{2\pi}{8} + a$ вместо a , то дает восемь одинаковых точек вместо четырех.

§ 100. Сдвиги и крутящий момент в призмах, имеющих основания в виде кривых четвертой и восьмой степеней

Трех кривых четвертой и восьмой степеней, которые мы построили (§§ 95 и 98), будет достаточно, чтобы дать нам представление о законах кручения призм с основаниями либо в виде криволинейного квадрата с вогнутыми сторонами, либо в виде звезды с четырьмя концами, образованными выступающими ребрами.

Найдем крутящий момент и сдвиги в призмах с основаниями в виде кривых

$$\left. \begin{aligned} r^2 - ar^4 \cos 4a + a' r^8 \cos 8a - \dots &= 1 - a + a' - \dots, \\ &\text{или} \\ y^2 + z^2 - a(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + \\ + a'(y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8) - \dots &= \\ &= 1 - a + a' - \dots, \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

соответствующих продольным перемещениям (205) и (207):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\theta}{2} (-ar^4 \sin 4a + a' r^8 \sin 8a - \dots) = \\ &= \frac{\theta}{2} [-a(4y^3z - 4yz^3) + a'(8y^7z - 56y^5z^3 + \\ &\quad + 56y^3z^5 - 8yz^7) - \dots]. \end{aligned} \quad (226)$$

При сравнении коэффициентов с коэффициентами формул (134), (136) гл. VII видно, что в силу формул (137) — (140)

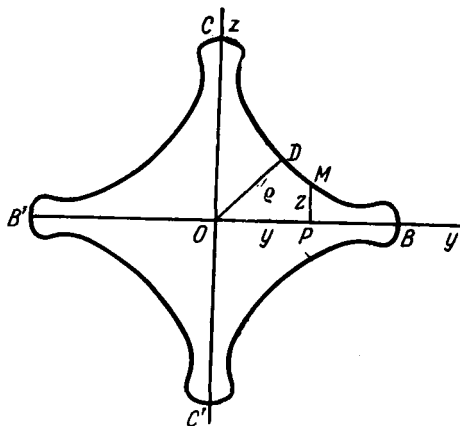


Рис. 51

той же главы для сдвигов и крутящего момента получим:

$$g_{xy} = -\theta r \sin \alpha + \frac{\theta}{2} (-4 ar^3 \sin 3\alpha + 8 a' r^7 \sin 7\alpha - \dots) =$$

$$= -\theta z + \frac{\theta}{2} [-4 a(3 y^2 z - z^3) +$$

$$+ 8 a'(7 y^6 z - 35 y^4 z^3 + 21 y^2 z^5 - z^7) - \dots], \quad (227)$$

$$g_{xz} = \theta r \cos \alpha + \frac{\theta}{2} (-4 ar^3 \cos 3\alpha + 8 a' r^7 \cos 7\alpha - \dots) =$$

$$= \theta y + \frac{\theta}{2} [-4 a(y^3 - 3 yz^2) +$$

$$+ 8 a'(y^7 - 21 y^5 z^2 + 35 y^3 z^4 - 7 yz^6) - \dots], \quad (228)$$

$$M_x = G \theta \int r^2 d\omega - \frac{G\theta}{2} \int d\omega (4 ar^4 \cos 4\alpha - 8 a' r^8 \cos 8\alpha + \dots) =$$

$$= G \theta \int (y^2 + z^2) d\omega - \frac{G\theta}{2} \int d\omega [4 a(y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) -$$

$$- 8 a'(y^8 - 28 y^6 z^2 + 70 y^4 z^4 - 28 y^2 z^6 + z^8) + \dots]. \quad (229)$$

Выражению момента M_x можно дать форму, более удобную для вычислений в случае наших кривых, симметричных

и равных в направлениях y и z , для которых обязательно
 $\int z^2 d\omega = \int y^2 d\omega$, $\int z^4 d\omega = \int y^4 d\omega$, $\int y^2 z^6 d\omega = \int y^6 z^2 d\omega$ и т.д.

Действительно, взяв элемент $d\omega = dydz$ и производя интегрирование только в четверти сечения BOC (рис. 51) и учитывая результат, получаем:

$$\int y^2 d\omega = 4 \int_0^1 y^2 dy \int_0^z dz = 4 \int_0^1 y^2 z dy,$$

$$\int y^4 d\omega = 4 \int_0^1 y^4 z dy, \quad \int y^8 d\omega = 4 \int_0^1 y^8 z dy,$$

$$\int y^2 z^2 d\omega = 4 \int_0^1 y^2 dy \int_0^z z^2 dz = \frac{4}{3} \int_0^1 y^2 z^3 dy,$$

$$\int y^6 z^2 d\omega = \frac{4}{3} \int_0^1 y^4 z^5 dy,$$

$$\int y^4 z^4 d\omega = 4 \int_0^1 y^4 dy \int_0^z z^4 dz = \frac{4}{5} \int_0^1 y^4 z^5 dy,$$

где z — положительная ордината PM , рассматриваемая как функция положительной абсциссы $OP = y$, наибольшее значение для y (величина OB) равно единице.

Таким образом, получим (учитывая то, что имели бы по уравнению (225) при сохранении двенадцатых степеней):

$$\begin{aligned} M_x = G \theta \left[8 \int_0^1 y^2 z dy - 16 a \int_0^1 dy (y^4 z - y^2 z^3) + \right. \\ \left. + 32 a' \int_0^1 dy \left(y^8 z - \frac{28}{3} y^6 z^3 + 7 y^4 z^5 \right) - \right. \\ \left. - 48 a'' \int_0^1 dy (y^{12} z - 22 y^{10} z^3 + 99 y^8 z^5 - 66 y^6 z^7) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (230)$$

Первый член в квадратных скобках — полярный момент инерции $\int r^2 d\omega = J_0$, который достаточно умножить на $G\theta$, чтобы получить момент M_x по прежней теории. Другие члены представляют собой то, что следует отнять, имея в виду искривление сечения, которое эта теория не принимала в расчет.

§ 101. Вычисление крутящих моментов. Ничтожность влияния выступов сечения или ребер призм

Для точного вычисления интегралов, содержащихся в этом выражении M_x , нужно было бы подставить вместо z значение z как функции y , полученное из уравнения (225) кривой контура сечения. Это невозможно сделать, когда уравнение — восьмой степени, и даже из уравнения четвертой степени мы получили бы значение z , которое после подстановки сделало бы интегрирование возможным не иначе, как только с помощью очень сложного ряда. Мы произвели все эти интегрирования по формуле квадратур Симпсона, которая дает любое желаемое приближение.

Например, для кривой $y^2 + z^2 - 0,5(y^4 - 6y^2z^2 + z^4) = 0,5$ (§ 95), обозначая через $z_0 = 1, z_{0,1}, z_{0,2} \dots z_1 = 0$ ординаты z , соответствующие $y = 0, y = 0,1, y = 0,2 \dots y = 1$, а также имея в виду известную формулу для площади

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^1 z dy = \\ &= \frac{0,1}{3} (0 \cdot z_0 + 4z_{0,1} + 2z_{0,2} + 4z_{0,3} + \dots + 4z_{0,9} + 1 \cdot 0), \end{aligned}$$

мы устанавливаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2 z^3 dy &= \frac{0,1}{3} [(0)^2 (z_0)^3 + 4(0,1)^2 z_{0,1}^3 + \\ &+ 2(0,2)^2 z_{0,2}^3 + \dots + 4(0,9)^2 z_{0,9}^3 + (1)^2 (0)^3] \quad (231) \end{aligned}$$

и аналогично для других интегралов.

Мы взяли для двух других кривых (§§ 95 и 98) большее число делений к концам ввиду сложности формы кривых в этих местах.

Вычисление было упрощенно проверено, когда мы произвели квадратуру по формуле прямолинейных трапеций, т. е. по формуле с меньшим приближением:

$$\frac{0,1}{2} [(0)^2 (z_0)^3 + 2(0,1)^2 (z_{0,1})^3 + 2(0,2)^2 (z_{0,2})^3 + \dots + (1)^2 (0)^3]$$

и достигли примерно тех же результатов.

Итак, мы получим, вновь восстанавливая однородность (§ 93) и вспоминая, что первый член в квадратных скобках

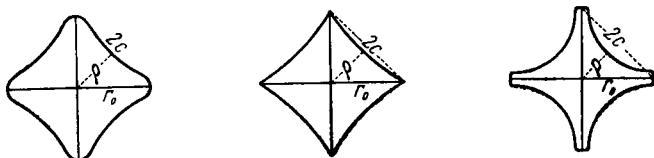


Рис. 52

выражения (230) M_x представляет собой полярный момент инерции J_0 каждого сечения (рис. 52):

для кривой $\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - 0,4 \frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{r_0^4} = 0,6$ (квадрат с закругленными углами)

$$\omega = 2,0636 r_0^2; \quad J_0 = 0,7174 r_0^4 = 1,0586 \frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0,5873 G \theta r_0^4 = 0,8186 G \theta J_0 = 0,8666 G \theta \frac{\omega^2}{2\pi};$$

для кривой $\frac{y^2+z^2}{r_0^2} - 0,5 \frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{r_0^4} = 0,5$ (квадрат с острыми углами)

$$\omega = 1,7628 r_0^2; \quad J_0 = 0,5259 r_0^4 = 1,0634 \frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0,4088 G \theta r_0^4 = 0,7783 G \theta J_0 = 0,8276 G \theta \frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$\begin{aligned} \text{для кривой } & \frac{y^2+z^2}{r_0^2} - \frac{48}{49} \frac{16}{17} \frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{r_0^4} + \\ & + \frac{12}{49} \frac{16}{17} \frac{y^8 - 28y^6z^2 + 70y^4z^4 - 28y^2z^6 + z^8}{r_0^8} = 1 - \frac{36}{49} \frac{16}{17} \end{aligned}$$

(звезда с четырьмя закругленными концами)

$$\omega = 1,2202 r_0^2; J_0 = 0,2974 r_0^4 = 1,2551 \frac{\omega^2}{2\pi};$$

$$M_x = 0,15983 G \theta r_0^4 = 0,5374 G \theta J_0 = 0,6745 G \theta \frac{\omega^2}{2\pi}.$$

Отсюда видно, что из величины $GJ_0\theta$, соответствующей прежней теории, нужно отнять 0,1814 этой величины, чтобы получить M_x , когда сечение представляет собой квадрат с закругленными углами и слегка вогнутыми сторонами. Мы видели, что для прямолинейного квадрата нужно (§ 77) взять $M_x = 0,84346GJ_0\theta$ или отнять из $GJ_0\theta$ только 0,15654 этой величины. Легкая вогнутость сторон оказывает большее влияние на уменьшение крутящего момента (при одинаковом моменте инерции), чем закругление четырех углов на его увеличение.

Для криволинейного квадрата с несколько вогнутыми сторонами и острыми углами нужно отнять 0,2217 величины $GJ_0\theta$. Достаточно, как мы видим, легкой вогнутости сторон основания (приблизительно $\frac{1}{22}$), чтобы довольно значительно уменьшить крутящий момент у квадратной призмы (§ 78).

Наконец, для призмы с выступающими ребрами нужно из $GJ_0\theta$ отнять весьма большую часть этой величины 0,4626, т. е. взять только 0,5374 $GJ_0\theta$ вместо $GJ_0\theta$, которое берут для кругового сечения, или вместо 0,84346 $GJ_0\theta$ для прямолинейного квадратного сечения.

Так как для кругового сечения $J_0 = \frac{\omega^2}{2\pi}$, $M_x = G \theta \frac{\omega^2}{2\pi}$, то призмы, имеющие основания в виде закругленного квадрата, острого квадрата и звезды, обладают соответственно только 0,867; 0,828 и 0,674 упругого сопротивления кручению, которое они имели бы при одинаковой площади ω сечения или при одинаковом количестве материала, если бы они были с круговым основанием, хотя моменты инерции их сечений были бы в 1,059; 1,063; 1,255 раза больше, чем моменты инерции круговых сечений с равной площадью.

Таким образом, четыре выступа, несмотря на их малую толщину, оказывают значительное влияние на величину

момента инерции, но весьма мало влияют на крутящий момент. Детали с ребрами, с такой пользой применяемые для уменьшения влияния изгиба, должны быть исключены из частей сооружений, которые подвергаются кручению, или, по крайней мере, не нужно принимать в расчет четырех ребер или выступов при определении сопротивления.

§ 102. Топографические разрезы и рельеф искривленных поверхностей, в которые превращаются сечения

Из построения эпюры или рельефа части скрученной призмы и искривленной поверхности можно узнать, какими становятся наши первоначально плоские сечения. Части, образующие выступ, т. е. расположенные близко к углам,

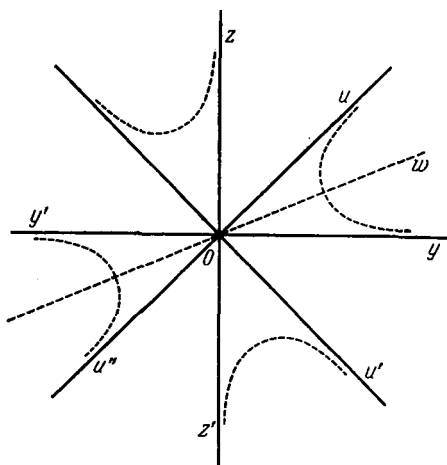


Рис. 53

почти нормальны к ребрам или к волокнам, которые превратились в спирали, и оказывают, следовательно, очень малое сопротивление кручению.

Эти искривленные поверхности могут быть изображены довольно просто посредством разрезов, перпендикулярных к оси призмы (см. рис. 49 § 98) подобно тому, как мы изображаем рельеф или топографию участков земли. В послед-

нем случае разрезы поддаются точному определению по точкам, тогда как разрезы поверхности, в которую превращаются сечения призмы с квадратным или прямоугольным прямолинейным основанием, могут быть получены (§§ 76 и 84) только путем графической или численной интерполяции¹⁾.

¹⁾ Для кривых четвертой степени выражение (226) перемещения u , сделанного однородным (§ 93) благодаря введению r_0 (значение r при $\alpha = 0$ было принято за единицу), сначала дает

$$-u = \frac{2 a \theta}{r_0^2} (y^2 z - yz^2) = \frac{\theta a r^4}{2 r_0^2} \sin 4 \alpha .$$

Желаемые разрезы получаются в том случае, когда мы в этом уравнении придаем $-u$ произвольные значения. Для построения этих кривых, составленных из четырех ветвей, имеющих в качестве асимптот две оси yOy' , zOz' и их биссектрисы uOu'' , Ou' (рис. 53), нужно было бы, применяя обычные координаты y, z , решить для каждой точки уравнение третьей степени. Но в полярных координатах имеем:

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{-2u}{a \theta r_0^2} \frac{1}{\sin 4 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}},$$

откуда легко получаем значения $\frac{r}{r_0}$, когда $a = 0,5$:

$\frac{-u}{\theta r_0^2} =$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
Грады, или $\frac{1}{100}$ прямого угла при $\alpha = 0^\circ$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0,94090	1,11892	1,23829
$2\frac{1}{2}$	0,71110	0,84565	0,93586	1,00565	1,06335	1,11293	1,15666
5	0,59982	0,71331	0,78940	0,84827	0,89694	0,93877	0,97565
10	0,51075	0,60739	0,67219	0,72231	0,76375	0,79937	0,83078
15	0,47155	0,56077	0,62059	0,66687	0,70513	0,73801	0,76701
20	0,45286	0,53854	0,59600	0,64044	0,67718	0,70876	0,73661
$25 = \frac{\pi}{8}$	0,44721	0,53183	0,58857	0,63246	0,66874	0,69993	0,72742
$50 = \frac{\pi}{4}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Нет необходимости вычислять значения $\frac{r}{r_0}$ для больших углов, так как ветвь кривой, имеющая в качестве асимптот ось Ou и бис-

§ 103. Сдвиги, опасные точки и условия прочности для криволинейных квадратов четвертой степени

Сдвиги для кривых четвертой степени $r^2 - ar^4 \cos 4\alpha = 1 - a$ (формулы (227), (228) при восстановлении однородности § 93) таковы:

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= -\theta r \sin \alpha - 2 a \theta \frac{r^3}{r_0^3} \sin 3 \alpha; \\ g_{xz} &= \theta r \cos \alpha - 2 a \theta \frac{r^3}{r_0^3} \cos 3 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

Отсюда для главного сдвига

$$g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2} = \theta r_0 \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 4 a \frac{r^4}{r_0^4} \cos 4 \alpha + 4 a^2 \frac{r^6}{r_0^6}}. \quad (233)$$

При одинаковом значении угла α , или на той же прямой,

сектрису Ou , симметрична относительно пунктирной прямой Ow , для которой $\alpha = 25^\circ = \frac{\pi}{8}$, и ветви получаются, если сделать четверть оборота по отношению к этой прямой.

Что касается кривых, соответствующих положительным значениям u , то они получаются при половине четверти оборота, и мы их не отмечали.

Если считать, как в §§ 76 и 88, кручение $\theta = 5$ или шаг спиралей $\frac{2\pi}{5} = 1,256637$ м и $r_0 = 0,1$ м, то имеем $\frac{u}{\theta r_0^3} = \frac{u}{0,05}$, так что разрезы $\frac{u}{\theta r_0^3} = \pm 0,02; \pm 0,04; \pm 0,06; \pm 0,07$ соответствуют $u = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 3\frac{1}{2}$ мм.

Для нашей кривой восьмой степени, уравнение которой (225) дает перемещение, представленное выражением (226) и записываемое при условии однородности в таком виде:

$$-u = \frac{\theta r_0^2}{2} \left(a \frac{r^4}{r_0^4} \sin 4 \alpha - a' \frac{r^8}{r_0^8} \sin 8 \alpha \right),$$

получаем, решая это равенство относительно $\frac{r}{r_0}$, формулу

$$\frac{r}{r_0} = \left[\frac{a}{4 a' \cos 4 \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{4 a' \cos 4 \alpha} \right)^2 + \frac{u}{\theta r_0^2 a' \sin 8 \alpha}} \right]^{\frac{1}{4}},$$

или

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{a}{4 a' \cos 4 \alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 a' u}{a^2 \theta r_0^2 \operatorname{tg} 4 \alpha}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

проходящей через центр, сдвиг тем больше, чем больше r , так как корень представляет собой третью сторону треугольника, две другие стороны которого, образующие угол 4α ,

Полагая $a = 4a' = \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17} = 0,9219688$ и замечая, что для $\alpha = 50^\circ = \frac{\pi}{4}$ отношение $\frac{r}{r_0}$ принимает форму $\frac{0}{0}$, имеем истинное значение $\left(\frac{-2u}{\theta ar_0^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Находим следующий ряд значений:

Значения для $\frac{r}{r_0}$ топографических разрезов поверхности

$$-u = \frac{\theta r_0^2}{2} \left(\frac{ar^4}{r_0^4} \sin 4\alpha - a' \frac{r^8}{r_0^8} \sin 8\alpha \right) \text{ при } a = 4a' = \frac{48}{49} \frac{16}{17}$$

α	$\frac{-u}{\theta r_0^2}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
Грады, или $\frac{1}{100}$ прямо-го угла							
при $\alpha = 0$	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое
0,69	1,0902	То же	То же	То же	То же	То же	То же
1	0,81620	То же	То же	То же	То же	То же	То же
1,38	1,08094	То же	То же	То же	То же	То же
2,06	1,00210	То же	То же	То же	То же
2,50	0,62206	0,75888	0,87457	То же	То же	То же	То же
2,74	1,00372	То же	То же	То же
3,40	1,00576	То же	То же
4,05	1,01755	То же
5	0,51929	0,62366	0,69802	0,76009	0,81688	0,87366	То же
10	0,43999	0,52533	0,58382	0,63379	0,66945	0,70418	То же
15	0,40547	0,46318	0,53574	0,57703	0,61149	0,64147	То же
20	0,38896	0,46297	0,51281	0,55160	0,58376	0,61154	То же
25	0,38378	0,45639	0,50508	0,54274	0,57388	0,60065	То же
30	0,38828	0,46133	0,51013	0,54771	0,57858	0,60510	То же
35	0,40387	0,47938	0,52596	0,56797	0,59951	0,62637	То же
40	0,43671	0,51752	0,57080	0,61139	0,64447	0,67249	То же
45	0,50166	0,61321	0,66273	0,70768	0,74398	0,73770	То же
$50^\circ = \frac{\pi}{4}$	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое	Мнимое

Первые значения $\frac{-u}{\theta r_0^2}$ в каждом столбце дают точки, где каждый разрез является касательным к радиусу-вектору (так как эти разрезы

соответственно равны $\frac{r}{r_0}$ и $2a \frac{r^3}{r_0^3}$, т. е. увеличиваются вместе с r . Следовательно, наибольший сдвиг находится на контуре сечения.

Так как на контуре имеем:

$$\frac{r^2}{r_0^2} - a \frac{r^4}{r_0^4} \cos 4\alpha = 1 - a,$$

то после исключения a выражение (233) превращается в

$$g_x = \theta r_0 \sqrt{4(1-a) - \frac{r^2}{r_0^2} \left(3 - 4a^2 \frac{r^4}{r_0^4}\right)}.$$

И так как $\frac{r}{r_0}$ и $2a$ никогда не превышают 1 (§§ 94, 95), то величина $3 - 4a^2 \frac{r^4}{r_0^4}$ всегда положительна, так что на контуре g_x тем больше, чем меньше r .

Следовательно, опасными точками, как в эллипсе и прямоугольнике, являются точки контура, наиболее близкие к оси кручения, т. е. концы малых диаметров, составляющих углы 45° с осями y или z .

не имеют асимптот, в отличие от разрезов, вычисленных в другой таблице). Приравнивая корень нулю, получаем угол α , соответствующий этой точке контакта, что дает

$$\operatorname{tg} 4\alpha = -\frac{16 a' u}{a^2 \theta r_0^2}, \quad \frac{r}{r_0} = \left(\frac{a}{4 a' \cos 4\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Для нижних значений α отношение $\frac{r}{r_0}$ было бы мнимым, т. е. радиус-вектор не встречал бы кривую.

Все значения $\frac{r}{r_0}$, внесенные в последнюю таблицу, соответствуют нижнему из знаков \pm в выражении $\frac{r}{r_0}$. Верхний знак давал бы другие точки встречи радиусов-векторов с кривыми, для которых r значительно превышает r_0 и которые, следовательно, расположены вне нашей замкнутой кривой.

Деля на 20 значение $\frac{-u}{\theta r_0^2}$, получаем в долях метра значения u , или высоты топографических разрезов для $\theta = 5$, $r = 0,10$ м, что позволяет построить рельефную модель (см. рис. 49 § 98).

Так как мы всегда обозначали эти малые диаметры через 2ρ , то, подставляя ρ и 45° вместо r и a в выражение (233) для g_x , получим для наибольшего главного сдвига

$$g = \theta r_0 \left(\frac{\rho}{r_0} + 2a \frac{\rho^3}{r_0^3} \right) = \theta \rho \left(1 + 2a \frac{\rho^2}{r_0^2} \right). \quad (234)$$

Наименьший главный сдвиг, соответствующий $a = 0$, $r = r_0$, будет

$$g = \theta r_0 (1 - 2a).$$

Если $a = 0,4$ (квадрат с закругленными углами), то получаем (см. § 95) для наименьшего радиуса-вектора или полу диаметра

$$\rho = \frac{1}{2} r_0 \sqrt{2},$$

откуда для наибольшего сдвига на концах малых диаметров

$$\theta r_0 \cdot 0,7 \sqrt{2} = 0,98995 \theta r_0 = 1,400 \theta \rho$$

(или 1,400 от того, что имели бы в этих точках, если сечение оставалось бы плоским), а для наименьшего сдвига на концах больших диаметров

$$0,2 \theta r_0.$$

Если $a = 0,5$ (квадрат с вогнутыми сторонами и острыми углами), то получаем (см. § 95) для наименьшего радиуса-вектора

$$\rho = r_0 \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Подставляя в (234), находим для наибольшего сдвига

$$\theta \rho \sqrt{2} = \theta r_0 \sqrt{2\sqrt{2} - 2} = 0,91017 \theta r_0$$

и нуль для наименьшего, так как в выступающих углах мы обычно видели, что (см. § 68 и ниже последний параграф гл. XI) ребра, став винтообразными, остаются нормальными к сечениям, которые искривляются.

Следовательно, условиями прочности для квадрата с закругленными углами (если исключить $G\theta$ из выражений

$$T \geq Gg_x = 0,98995G\theta r_0 \quad \text{и} \quad M_x = 0,8186GJ_0\theta,$$

которые мы нашли в § 101) являются

$$\lim M_x = \frac{0,8186 J_0 T}{0,98995 r_0} = 0,8269 \frac{J_0}{r_0} T;$$

для криволинейного квадрата с острыми углами

$$\lim M_x = \frac{0,7783 J_0 T}{0,91017 r_0} = 0,85514 \frac{J_0}{r_0} T.$$

Так как для круга (см. § 63, формулу (127)) имеем:

$$\lim \frac{M_x}{T} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi}},$$

то, подставляя в два предыдущих выражения $\lim M_x$ вместо J_0 и r_0 их значения через функции ω , получаем:
для квадрата с закругленными углами

$$\lim M_x = 0,7064 \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi}} T,$$

для квадрата с острыми углами

$$\lim M_x = 0,6812 \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi}} T.$$

Отсюда видим, что призмы с основаниями подобного вида дают только 0,7064 и 0,6812 того *сопротивления разрушению при кручении*, которое они имели бы, если при той же величине ω , т. е. при том же объеме материала, они имели бы круговые основания.

Для призмы с основанием в виде обыкновенного квадрата это отношение равно 0,7379 (см. примечание § 83).

§ 104. Те же сдвиги и т. д. для криволинейного основания восьмой степени с выступающими ребрами

Выражения (227), (228), в которых мы берем дополнительно еще один член, чтобы можно было их применять при уравнениях выше восьмой степени:

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= \theta(-r \sin \alpha - 2r^3 \sin 3\alpha + 4a'r^7 \sin 7\alpha - \\ &\quad - 6a''r^{11} \sin 11\alpha - \dots), \\ g_{xz} &= \theta(r \cos \alpha - 2ar^3 \cos 3\alpha + 4a'r^7 \cos 7\alpha - \\ &\quad - 6a''r^{11} \cos 11\alpha - \dots), \end{aligned} \right\} (235)$$

показывают, что в каждой точке главный сдвиг g_x , который представляет собой результирующую g_{xy} и g_{xz} , является также равнодействующей отрезков прямых

$$+ \theta r, - 2a\theta r^3, + 4a'\theta r^7, - 6a''\theta r^{11},$$

соответственно образующих с положительным направлением оси у углы

$$\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} - 3\alpha, \frac{\pi}{2} - 7\alpha, \frac{\pi}{2} - 11\alpha, \dots$$

Так как все эти отрезки удлиняются вместе с r , то следует, что при одинаковой величине угла сдвиг g_x является наибольшим возможным на контуре сечения и что опасную точку или точку с наибольшим сдвигом всегда следует искать на этом контуре.

В общем случае для значения его квадрата получаем:

$$\begin{aligned} g_x^2 &= g_{xy}^2 + g_{xz}^2 = \theta^2(r^2 + 4a^2 r^6 + 16a'^2 r^{14} + 36a''^2 r^{22} + \dots - \\ &\quad - 4ar^4 \cos 4\alpha + 8a'r^8 \cos 8\alpha - 12a''r^{12} \cos 12\alpha + \dots - \\ &\quad - 16aa'r^{10} \cos 4\alpha + 24aa''r^{14} \cos 8\alpha + \dots - \\ &\quad - 48a'a''r^{18} \cos 4\alpha - \dots) \end{aligned} \quad (236)$$

Если для кривой восьмой степени ($a'' = 0$) мы заменяем $a'r^8 \cos 8\alpha$ его значением $1 - a + a' - r^2 + ar^4 \cos 4\alpha$, полученным из уравнения (225) этой кривой, то имеем:

$$\begin{aligned} g_x^2 &= \theta^2 [8(1 - a + a') - 7r^2 + r^6(4a^2 + 16a'^2 r^8) + \\ &\quad + (4a - 16aa'r^6)r^4 \cos 4\alpha]. \end{aligned}$$

Вычисляя значения в различных точках контура при $a = 4a' = \frac{48}{49} \cdot \frac{16}{17}$ (см. § 98), мы нашли:

для $r = 1,00$	$r^4 \cos 4\alpha = 1,00000$	$\frac{g^2}{\theta^2} = 0,006067$
0,996	0,96094	0,001077
0,99	0,93262	0,000571
0,98	0,89377	0,002075
0,96	0,82459	0,004790
0,92	0,70032	0,006427
0,85	0,51191	0,011794
0,75	0,29353	0,055847
0,70	0,20304	0,111532
0,55	-0,00860	0,414095
0,50	-0,06250	0,544896

Наименьший сдвиг имеет место при $r = 0,99$, т. е. в закругленных углах E, F , которые образованы каждой стороной (рис. 54), а наибольший сдвиг и, следовательно, опасная точка — в точке D контура, наиболее близкой к центру, как и для других сечений.

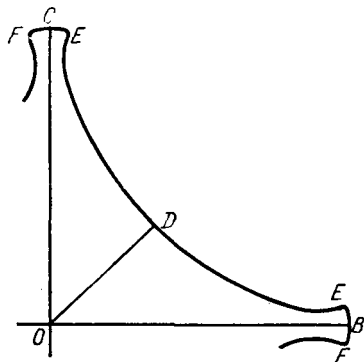


Рис. 54

Мы получим общее выражение этого наибольшего сдвига, применимое для всех кривых, полагая $a = \frac{\pi}{4}$, $r = \rho$ в (236), откуда тогда можно извлечь квадратный корень (делая его однородным посредством множителя r_0):

$$\max g_x = \theta r_0 \left(\frac{\rho}{r_0} + 2a \frac{\rho^3}{r_0^3} + 4a' \frac{\rho^7}{r_0^7} + 6a'' \frac{\rho^{11}}{r_0^{11}} + \dots \right). \quad (237)$$

Отсюда для кривой восьмой степени $a = 4a' = \frac{48}{49} \frac{16}{17}$, $\frac{\rho}{r_0} = \frac{1}{2}$ получим:

$$\max g_x = 0,737695 \theta r_0 = 1,47539 \theta \rho$$

(или в 1,475 раза больше того, что имели бы в точке D , если сечение оставалось бы плоским).

Подставляя это значение g в условие прочности $T \geq Gg$ и исключая $M_x = 0,5374GJ_0\theta$ из уравнения (см. § 101), для подобной призмы получаем:

$$\lim M_x = \frac{0,53741}{0,7377} \frac{J_0 T}{r_0} = 0,7285 \frac{J_0 T}{r_0}.$$

Этот предел, как мы видим, составляет приблизительно 0,73 предела, соответствовавшего прежней теории.

§ 105. Контуры, неодинаковые относительно осей y и z . Несимметричные контуры. Призма с основанием в виде равностороннего треугольника. Заключение к главе

Как уже сказано в § 99, мы получили бы кривые, также симметричные и равные в направлениях y и z , взяв соотношения более разнообразными и доводя уравнения (206) или (226) до двенадцатой и шестнадцатой степеней.

И (§ 92), сохраняя в уравнениях члены второй, шестой, десятой степеней с четными степенями y и z , такие, как $a'_2 r^2 \cos 2\alpha = a'_2 (y^2 - z^2)$, $a'_6 r^6 \cos 6\alpha = \dots$ и т. д., мы получим множество кривых, симметричных относительно *каждой* из двух осей y и z , но не равных в их двух направлениях, частным случаем которых является эллипс¹⁾.

¹⁾ Например, полное уравнение четвертой степени контура, вдвойне симметричного, легко будет рассмотреть в этой форме, которую мы получаем, обозначая через b и c большую и малую *полуоси* и определяя, следовательно, a'_2 , a'_4 и постоянную, входящую в (203), так, чтобы $y = \pm b$ при $z = 0$ и $z = \pm c$ при $y = 0$:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + a \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) (y^2 - z^2) - a \frac{y^4 - 6y^2z^2 + z^4}{b^2c^2} = 1 - a.$$

Здесь число a изменяется в пределах от $\frac{c^2}{b^2 + c^2}$ до $-\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, для этих пределов кривая имеет кратные точки и близка к тому, чтобы перестать быть замкнутой. Контур представляет собой при втором из этих двух пределов прямоугольник с вогнутыми сторонами, образованными двумя гиперболами, пересекающимися в четырех точках, координаты которых получены из уравнений: $y^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{1}{8} (3b^2 + c^2) \sqrt{2}$ и $z^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{8} (b^2 + 3c^2) \sqrt{2}$. Мы получим для продольного перемещения

Если мы, кроме того, оставим в более общем уравнении (201) или (198) члены с нечетными степенями, такие, как $a_3' r^3 \cos 3\alpha = a_3'(y^3 - 3yz^2)$, или члены с четными степенями, такие, как $a_2 r^2 \sin 2\alpha = 2a_2 yz$, $a_4 \sin 4\alpha = a_4(4y^3z - 4yz^3)$, то построим сколько угодно других контуров, несимметричных относительно одной из двух или относительно обеих осей¹⁾.

при кручении θ всякой призмы подобными основаниями выражение

$$u = -(1 + 2a) \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \theta yz - \frac{4a\theta}{b^2 + c^2} (y^3 z - yz^3).$$

Посмотрите на рис. 58 два контура подобного рода, которые даже в предположении $c^2 = 0$ дают кривую в виде знака ∞ , а при отрицательном значении c^2 дают два отдельных контура.

¹⁾ В момент напечатания мемуара (март 1855 г.) мы установили некоторые следствия, которые показались интересными, и мы не считаем возможным их опустить.

Заметим сначала, что даже несимметричные контуры могут быть равными в различных направлениях, косых по отношению к осям, но равным образом наклоненных по отношению друг к другу, так как всякое уравнение (201) $\theta \frac{r^2}{2} - \sum a_n r^n \sin n\alpha + \sum a_n' r^{n'} \cos n'\alpha = \text{const}$, где различные численные коэффициенты n , n' при полярном угле α будут кратны целому числу m , останется неизменным, так же как соответствующее значение (200) перемещения u , если заменить α на $\frac{2\pi}{m} + \alpha$. Таким образом, сечение, контур которого это уравнение представляет, так же как и искривленная поверхность, в которую превращается плоскость после кручения, приобретут такие формы, что они снова будут совпадать сами с собой, если их заставить повернуться на m -ю часть оборота относительно центральной точки $r = 0$.

Например, уравнение третьей степени

$$\theta \frac{r^2}{2} + a_3' r^3 \cos 3\alpha = \text{const},$$

или

$$\theta \frac{y^2 + z^2}{2} + a_3'(y^3 - 3yz^2) = \text{const},$$

написанное так, чтобы $y = r = 1$, когда $z = 0$ или $\alpha = 0$:

$$y^2 + z^2 - a(y^3 - 3yz^2) = 1 - a \quad \text{или} \quad r^2 - ar^3 \cos 3\alpha = 1 - a, \quad (a)$$

даст нам, если придать числу a положительные значения меньшие $\frac{2}{3}$, ряд замкнутых кривых с тремя отростками или вершинами, одинаково выступающими и равномерно расположенными. Эти кривые заключены между окружностью единичного радиуса и вписанным

Таким образом, мы могли бы посредством установленных нами принципов определить весьма точно законы кручения призмы с каким-либо данным основанием, сравнивая

равносторонним треугольником. Придавая тому же параметру a отрицательные значения от 0 до $-\frac{1}{3}$, мы получили бы те же кривые, но заключенные между окружностью и описанным равносторонним треугольником.

Уравнение шестой степени $r^2 - ar^3 \cos 3\alpha - a'r^6 \cos 6\alpha = 1 - a - a'$ дало бы аналогичные кривые, но более разнообразные по форме. Если положить $a = 0$, то эти кривые будут иметь шесть подобных вершин, превращающихся в шесть тупых углов с вогнутыми и равными сторонами, когда $a' = \frac{1}{3}$.

Если мы сохраним в уравнении третьей степени член во второй степени $a_2'(y^2 - z^2)$ или $a_2'r^2 \cos 2\alpha$, то кривая, которую оно представляет, не будет более совпадать сама с собой при трети оборота, и мы легко придадим этому уравнению следующую форму, обозначая через $-b$, b' и $\pm c$ полуоси кривой или значения y при $z = 0$ и z при $y = 0$ и определяя, следовательно, значения постоянной и коэффициентов a_2' , a_3' :

$$\left[1 + \frac{3c^2}{bb'} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right) y \right] z^2 = \left(1 + \frac{y}{b} \right) \left(1 - \frac{y}{b'} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right) y \right]. \quad (b)$$

Получаем все замкнутые контуры, которые может дать это уравнение, изменяя b' только в пределах от b до $2b$, а c только от нуля до

$\sqrt{\frac{b'}{3 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right)}}$. Это кривые в виде яйца или груши (как на рис. 33

§ 65), у которых малый конец заостряется, когда $b' = 2b$, и которые становятся эллипсами, когда $b' = b$, и смешанным контуром, образованным ветвью гиперболы и прямой $y = -b$, параллельной ее мнимой

оси, когда $c = \sqrt{\frac{b'}{3 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'} \right)}}$. Но параметры b , b' , c должны находиться между собой в определенном соотношении для того, чтобы

$\int g_{xz} d\omega = 0$ (кроме $\int g_{xy} d\omega = 0$, что уже обеспечено) или чтобы (§ 59) внешние силы, производящие кручение относительно оси x , сводились на каждом конце к парам.

Кручение равносторонней треугольной призмы. Когда коэффициент a уравнения (а) $r^2 - ar^3 \cos 3\alpha = 1 - a$ приближается к $\frac{2}{3}$, замкнутый и непрерывный контур, который оно представляет, приближается сколь угодно близко к равностороннему треугольнику, впи-

ее контур с одной из кривых, представленных этими уравнениями, в которых параметры a определили бы так, чтобы эта кривая возможно более приближалась к этому контуру.

санному в круг $r = 1$. Полагая $a = \frac{\alpha}{3}$ и написав $\frac{z}{2b}$ вместо z , чтобы восстановить однородность, или же полагая в уравнении (b) $b' = 2b$, $c = \frac{2b}{\sqrt{3}}$, получаем

$$\left(\frac{r}{2b}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{2b}\right)^3 \cos 3\alpha = \frac{1}{3},$$

или

$$(y+b)\left(z - \frac{2b-y}{\sqrt{3}}\right)\left(z + \frac{2b-y}{\sqrt{3}}\right) = 0. \quad (c)$$

Представленный им контур является не чем иным, как равносторонним треугольником с высотой $3b$ и, следовательно, со сторонами $k = 2b\sqrt{3}$ (рис. 55).

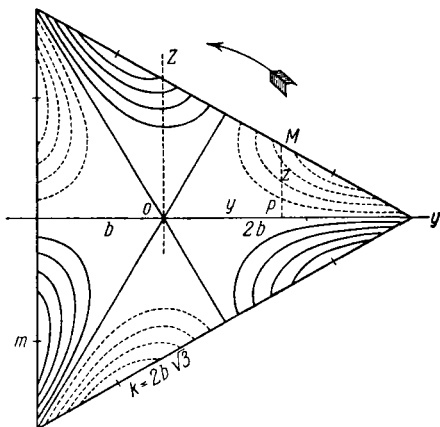


Рис. 55

Сравнивая это уравнение с уравнением (201) $r^2 + \frac{2a'_3}{\theta} \cos 3\alpha = \text{const}$, получаем $a'_3 = -\frac{\theta}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{2b} = -\frac{\theta}{6b}$ и, следовательно, выражение (200) $u = a'_3 r^3 \sin 3\alpha$ продольного перемещения, произведенного кручением θ призмы с основанием в виде этого треугольника, обра-

Но примеры, которые мы полностью рассмотрели, всегда достаточны, чтобы показать, что детали с выступающими ребрами, сделанными для противодействия изгибу, очень

тятся в следующее:

$$u = -\frac{\theta}{6b} r^3 \sin 3\alpha = -\frac{\theta}{6b} (3y^2 z - z^3). \quad (d)$$

Если мы обозначим через u_m наибольшее значение u , которое на стороне $y = -b$ контура находится, например, в точке $z = -b$, то имеем $u_m = \frac{\theta b^2}{3}$, и предыдущее выражение для u , написанное, следовательно, в виде

$$\frac{u}{u_m} = -\frac{r^3}{3b^3} \sin 3\alpha,$$

легко дает (примечание к § 102) для разрезов плоскостями $u = \pm 0,2 u_m, \pm 0,4 u_m, \pm 0,6 u_m$ и $\pm 0,8 u_m$ криволинейной поверхности, в которую превращается после кручения первоначально плоское треугольное сечение, различные кривые, приведенные на рис. 55. Пунктирные кривые соответствуют отрицательным значениям u , а три прямые медианы треугольника являются разрезом той же поверхности первоначальной плоскостью сечения при $u = 0$.

Выражение (241) для u дает величины

$$g_{yx} = \frac{du}{dy} - \theta z = -\theta \left(z + \frac{yz}{b} \right), \quad g_{xz} = \frac{du}{dz} + \theta y = \theta \left(y - \frac{y^2 - z^2}{2b} \right);$$

удовлетворяющие условиям (§ 59) $\int g_{xy} d\omega = 0, \int g_{xz} d\omega = 0$.

Крутящий момент (105) $G \int d\omega (g_{xz} y - g_{xy} z)$ будет

$$M_x = G \theta \left(\int y^2 d\omega + \int z^2 d\omega + \frac{3}{2b} \int yz^2 d\omega - \frac{1}{2b} \int y^3 d\omega \right). \quad (e)$$

Так как ордината MP верхней стороны треугольника, соответствующая какой-либо абсциссе $OP = y$, равна $\frac{1}{3} \sqrt{3} (2b - y)$, то получаем:

$$\int_0^{\omega} z^2 d\omega = 2 \int_{-b}^{2b} dy \int_0^{\frac{1}{3}(2b-y)\sqrt{3}} z^2 dz = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-b}^{2b} \frac{(2b-y)^3}{3} dy = \frac{3}{2} b^4 \sqrt{3},$$

$$\int y^2 d\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-b}^{2b} y^2 (2b-y) dy = \frac{3}{2} b^4 \sqrt{3},$$

плохо сопротивляются кручению. И особенно в частях, образующих выступ на остальной части детали, первоначально плоские сечения изгибаются так, что материальные

$$\int yz^2 d\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-b}^{2b} y \frac{(2b-y)^3}{3} dy =$$

$$= -\frac{3}{5} b^4 \sqrt{3}, \quad \int y^3 d\omega = 2\sqrt{3} \int_{-b}^{2b} y^3 (2b-y) dy = \frac{3}{5} b^5 \sqrt{3}.$$

Отсюда полярный момент инерции (ввиду того, что $\omega = 3b^2\sqrt{3}$) будет

$$J_0 = \int z^2 d\omega + \int y^2 d\omega = 3b^4\sqrt{3} = \frac{1}{48} k^4 \sqrt{3} = \frac{\omega^2}{3\sqrt{3}},$$

а крутящий момент равен

$$M_x = G\theta \left(J_0 - \frac{2}{5} J_0 \right) = 0,6 GJ_0\theta = \frac{G\theta\omega^2}{5\sqrt{3}} = \frac{G\theta\omega^4}{45J_0}. \quad (f)$$

Численный коэффициент, на который нужно умножить выражение $GJ_0\theta$ прежней теории и который, как мы видели, составляет 0,84 для квадратного сечения и 0,537 для звезды с четырьмя закругленными углами восьмой степени, для сечения в виде равностороннего треугольника равен 0,60.

Что касается сопротивления разрушению от кручения, то наибольший сдвиг имеет место посредине сторон треугольного основания, так как здесь $y = -b$. Тогда

$$g_{xy} = 0, \quad g_{xz} = -\frac{3b^2 - z^2}{2b} \theta,$$

откуда $g_x = \frac{3b^2 - z^2}{2b} \theta$, т. е. максимум g_x соответствует $z = 0$. Таким образом, условие прочности (53) будет

$$T \geq \frac{3}{2} Gb\theta,$$

откуда, исключая $G\theta$ с помощью $M_x = 0,6 GJ_0\theta = 0,6 G\theta 3b^4\sqrt{3}$, имеем:

$$\lim M_x = 0,4 \frac{J_0}{b} T = 1,2 T b^3 \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{15} T \omega^{\frac{3}{2}},$$

т. е. 0,8 от значения $\frac{J_0}{2b} T$, которое получили бы по прежней теории.

Отсюда видно, что после кругового сечения самые простые результаты дает сечение в виде равностороннего треугольника.

линии, первоначально ортогональные, остаются почти ортогональными, и имеются только слабые сдвиги, так что эти части мало способствуют сопротивлению сечения¹⁾.

¹⁾ Мы также нашли для M_x весьма малое значение $0,01857GJ_0\theta$, когда сечение составлено из двух отдельных контуров (рис. 56), полученных из уравнения четвертой степени первого примечания к этому параграфу, при $c^2 = -\frac{1}{16}b^2$, $a = -\frac{1}{6}$.

Таким образом, сопротивление кручению относительно одной промежуточной оси двух параллельных цилиндров, скрепленных так,

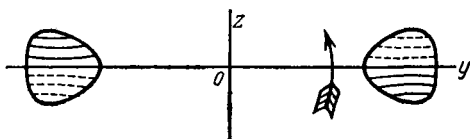
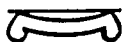


Рис. 56

что их овоидальные основания всегда обращены друг к другу одинаковыми вершинами, и расположенных приблизительно на расстоянии четырех диаметров этих оснований (почти одинаковых по высоте и ширине), составляет только $\frac{1}{64}$ того сопротивления, которое получилось бы по прежней теории, когда сечения остаются плоскими и нормальными к оси, относительно которой происходит кручение. И это неудивительно, если принять во внимание, что сдвиг равен нулю в точках $z = 0$, $y = \pm b\sqrt{\frac{23}{32}}$, т. е. весьма близко к центру тяжести каждого сечения (март 1855 г.).





ГЛАВА X

СЛУЧАЙ, КОГДА УПРУГОСТЬ ПРИ СДВИГЕ НЕОДИНАКОВА В НАПРАВЛЕНИЯХ ДВУХ ПОПЕРЕЧНЫХ ОСЕЙ

§ 106. Общие уравнения для продольного перемещения u

Для того чтобы получить более ясные представления, как сказано в § 51, мы ранее полагали

$$e = f = G,$$

т. е. считали одинаковой упругость при сдвиге (§ 17) относительно оси кручения, т. е. оси x .

Мы руководствовались также желанием дать в самом простом виде формулы, которые можно было бы применять на практике, так как еще не найдено экспериментально соотношение между обоими коэффициентами поперечного сдвига e и f для различных материалов; поэтому эти коэффициенты обычно считают одинаковыми. Но формулы можно также легко установить и для неодинаковых e и f . Действительно, полагаем для симметрии

$$f = G', \quad e = G''.$$

Тогда неопределенное дифференциальное уравнение (108), которому нужно удовлетворить во всех точках призмы, будет

$$G' \frac{d^2 u}{dy^2} + G'' \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad (238)$$

а определенное уравнение (107) для боковых граней или для точек контура сечений будет

$$G'' \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) dy - G' \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) dz = 0. \quad (239)$$

Отсюда видно, что все решения, относящиеся к этому общему случаю, можно получить из решений для случая, когда G' и G'' исчезают по причине их равенства, полагая

$$\frac{y}{\sqrt{G'}} = y', \quad \frac{z}{\sqrt{G''}} = z'.$$

Но это преобразование, как мы увидим, даже не является необходимым для вывода всех формул.

Две взаимно-перпендикулярные поперечные линии y и z , соответственно которым (§ 16) составляющие давления приводятся к одночленным выражениям fg_{xy} , eg_{xz} , всегда будут считаться также направленными по двум главным осям сечения.

§ 107. Применение формул в случае эллиптического цилиндра или призмы.

Частный случай, когда длина осей пропорциональна корням квадратным из упругостей при сдвиге в направлениях этих осей

Для эллиптической призмы вместо уравнения (111) § 52 получим следующее определенное уравнение:

$$\frac{b^2}{G'} z \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) + \frac{c^2}{G''} y \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) = 0.$$

Подставляя сюда ряд (112) для u , получим те же результаты, что и в § 52, за исключением того, что вместо b^2 , c^2 будут $\frac{b^2}{G'}$, $\frac{c^2}{G''}$. Решение, следовательно, будет таким (см. формулу (113)):

$$u = - \frac{\frac{b^2}{G'} - \frac{c^2}{G''}}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} \theta yz. \quad (240)$$

Поверхность искривленного сечения всегда является гиперболическим параболоидом.

Сдвиги вместо (114) равны

$$g_{xy} = \frac{-2 \frac{b^2}{G'} \theta z}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}, \quad g_{xz} = \frac{2 \frac{c^2}{G''} \theta y}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}}. \quad (241)$$

Следовательно, крутящий момент (105) или (106) $\int d\omega (G'' g_{xz} y - G' g_{xy} z)$ представляет собой вместо (116) выражение

$$M_x = \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 \frac{c^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} \theta = \frac{4 \theta}{\frac{1}{G' J} + \frac{1}{G'' J'}}. \quad (242)$$

Оно весьма отличается от выражения, которое дала бы при распространении на случай неодинаковой упругости прежняя теория, считающая, что сечения остаются плоскими или что $g_{xy} = -\theta z$, $g_{xz} = \theta y$, что дало бы $M_x = \theta (G' J + G'' J')$ для призмы с любым основанием.

Если $b = c$, т. е. если сечение круговое, то плоские сечения всегда превращаются в искривленные поверхности.

Но если имеем

$$\frac{b}{\sqrt{G'}} = \frac{c}{\sqrt{G''}},$$

т. е. если оси эллипса пропорциональны корням квадратным из коэффициентов упругости в их направлениях, то плоские сечения останутся плоскими, и мы получим, как по прежней теории, $u = 0$, $g_{xy} = -\theta z$, $g_{xz} = \theta y$, откуда $M_x = 2 G' J \theta = 2 G'' J' \theta$, так как тогда $G' J = G'' J'$.

§ 108. Продолжение. Условие прочности для такой же эллиптической призмы с неодинаковой упругостью

Мы нашли для общего условия (§ 27, формула (52))

$$1 \geq \left(\frac{G' g_{xy}}{T'} \right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''} \right)^2, \quad (243)$$

где $\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ — допускаемые пределы для сдвигов g_{xy} , g_{xz} , при которых не нарушается сплошность материала.

Если подставить в это уравнение вместо g_{xy} , g_{xz} их значения (241), то оно принимает вид

$$\left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}\right)^2 \geq 4 \theta^2 \left(\frac{b^4 z^2}{T'^2} + \frac{c^4 y^2}{T''^2}\right).$$

Правая часть уравнения тем больше (для точек, расположенных на одной прямой, проходящей через центр, и

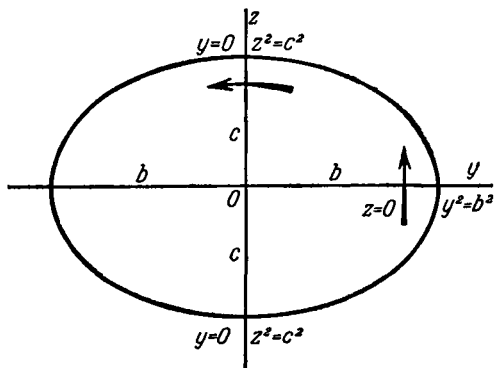


Рис. 57

имеющих координаты z и y в постоянном соотношении), чем более значительны z^2 и y^2 . Точки, наиболее подверженные опасности разрушения, расположены на контуре сечения.

Если подставить вместо z^2 его значение в функции y^2 , полученное из уравнения $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ этого контура (рис. 57), то увидим, что правая часть уравнения, которая принимает вид

$$4 \theta^2 c^2 \left[\frac{b^4}{T'^2} - \left(\frac{b^2}{T'^2} - \frac{c^2}{T''^2} \right) y^2 \right],$$

имеет наибольшее значение при $y = 0$, $z^2 = c^2$, если $\frac{b}{T'} > \frac{c}{T''}$ или если $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$, и при $y^2 = b^2$, $z = 0$, если $\frac{b}{c} < \frac{T'}{T''}$.

Опасными точками, следовательно, являются концы малой оси эллиптического основания, если только отношение большой оси к малой не меньше, чем отношение попереч-

ных усилий, способных разъединить на части материал при сдвиге в соответствующих направлениях, так как тогда опасные точки были бы на концах большой оси.

По первому предположению $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$ условием прочности является

$$\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \geq \frac{2\theta b^2 c}{T'}$$

или, исключая θ с помощью выражения (242) для M_x ,

$$\lim M_x = \pi \frac{bc^2}{2} T' = \frac{2J}{c} T', \quad (244)$$

т. е. момент крутящих сил не должен превышать число T' , умноженное на двойной момент инерции относительно оси $2b$ и разделенное на длину половины другой оси.

Это условие прочности тождественно условию (127) § 63, которое мы имеем в случае одинаковой упругости и одинакового сопротивления разрушению при сдвиге во всех поперечных направлениях, если подставить вместо T , которое представляло коэффициент сопротивления для всех направлений, T' , характеризующее сопротивление в плоскости, параллельной большой оси $2b$.

§ 109. Изменения в общих выражениях интегралов неопределенного уравнения главы VII, когда упругость при сдвиге неодинакова

В таком случае, поскольку уравнением, подлежащим удовлетворению, является

$$G' \frac{d^2 u}{dy^2} + G'' \frac{d^2 u}{dz^2} = 0,$$

то, подставляя в него $Ae^{qy}e^{q'z}$ вместо u , получаем зависимость $G' q^2 + G'' q'^2 = 0$, $q' = \pm q \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sqrt{-1}$. Отсюда, полагая $q \sqrt{G'} = m$, имеем вместо (129) общий интеграл в виде трансцендентного ряда

$$u = \sum e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} \left(A'_m \cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} + A_m \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}} \right), \quad (245)$$

который принимает следующий вид вместо (132), когда сечение симметрично относительно двух осей y и z :

$$u = \sum A_m \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}}. \quad (246)$$

Интеграл в виде целого многочленного выражения с конечным или бесконечным числом членов, полученный (§ 66) либо по методу неопределенных коэффициентов, либо при подстановке целых рядов вместо двух произвольных функций φ и ψ в

$$u = \varphi \left(\frac{y}{\sqrt{G'}} + \frac{z}{\sqrt{G''}} \sqrt{-1} \right) + \psi \left(\frac{y}{\sqrt{G'}} - \frac{z}{\sqrt{G''}} \sqrt{-1} \right),$$

равен

$$\begin{aligned} u = & a_0 + a_1 \frac{y}{\sqrt{G'}} + a'_1 \frac{z}{\sqrt{G''}} + a_2 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) + \\ & + a'_2 \frac{2yz}{\sqrt{G'} G''} + a_3 \left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}} - 3 \frac{yz^2}{\sqrt{G'} G''^2} \right) + a'_3 \left(3 \frac{y^2 z}{\sqrt{G'^2 G''}} - \frac{z^3}{\sqrt{G''^3}} \right) + \\ & + a_4 \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) + a'_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'^3 G''}} - 4 \frac{yz^3}{\sqrt{G' G''^3}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (247)$$

Он тождествен с выражением для случая одинаковой упругости, когда в него подставляют $\frac{y}{\sqrt{G'}}$, $\frac{z}{\sqrt{G''}}$ вместо y и z .

В других координатах находим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum a_n e^{n\beta} \cos n\beta + \sum a_{n'} e^{n'\beta} \sin n'\beta, \\ e &= \sqrt{\frac{y^2}{G'} + \frac{z^2}{G''}}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{G'}}{y\sqrt{G''}}, \\ \frac{y}{\sqrt{G'}} &= e \cos \beta, \quad \frac{z}{\sqrt{G''}} = e \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

В этом выражении показатели степени n и n' могут быть отрицательными или дробными, но оно продолжает удовлетворять дифференциальному уравнению $G \frac{d^3 u}{dy^3} + G'' \frac{d^3 u}{dz^3} = 0$ или уравнению

$$\frac{d^2 u}{d e^2} + \frac{d^2 u}{e^2 d \beta^2} + \frac{du}{e d e} = 0,$$

в которое оно превращается, когда переходят к новым координатам, аналогичным полярным для случая $G' = G''$ (примечание § 66). Вместо выражений (137) и (138) получаем из (247):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{G'}} \left\{ a_1 + 2 a_2 \frac{y}{\sqrt{G'}} + 2 a_2' \frac{z}{\sqrt{G'}} + \right. \\ &+ 3 a_3 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G'} \right) + \dots \left. \right\} = \frac{1}{\sqrt{G'}} \sum n a_n e^{n-1} \cos (n-1) \beta + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{G'}} \sum n' a_{n'} e^{n'-1} \sin (n'-1) \beta, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{G''}} \left\{ a_1' - 2 a_2 \frac{z}{\sqrt{G''}} + 2 a_2' \frac{y}{\sqrt{G''}} - 3 a_3 \frac{2 y z}{\sqrt{G''} G''} + \dots \right\} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{G''}} \sum n a_n e^{n-1} \sin (n-1) \beta + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{G''}} \sum n' a_{n'} e^{n'-1} \cos (n'-1) \beta. \end{aligned} \right\} (249)$$

Вместо (140) и (139) для момента $\int d\omega \left[G'' \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) - G' \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) \right]$ (выражение (106) § 50) имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= G' G'' \theta \int_0^\infty \rho^2 d\omega + \\ &+ \sqrt{G' G''} \sum \int d\omega \left(-n a_n e^n \sin n \beta + n' a_{n'} e^{n'} \cos n' \beta \right) = \\ &= \theta \left(G' \int z^2 d\omega + G'' \int y^2 d\omega \right) - \sqrt{G' G''} \int_0^\infty d\omega \times \\ &\times \left[a_1 \frac{z}{\sqrt{G'}} - a_1' \frac{y}{\sqrt{G'}} + 2 a_2 \frac{2 y z}{\sqrt{G'} G''} - 2 a_2' \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) + \right. \\ &+ 3 a_3 \left(3 \frac{y^2 z}{\sqrt{G'}^2 G''} - \frac{z^3}{\sqrt{G''}^3} \right) - 3 a_3' \left(\frac{y^3}{\sqrt{G''}^3} - 3 \frac{y z^2}{\sqrt{G'} G''^2} \right) + \\ &+ 4 a_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'}^3 G''} - 4 \frac{y z^3}{\sqrt{G'} G''^3} \right) - 4 a_4' \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) + \\ &+ 5 a_5 \left(5 \frac{y^4 z}{G'^2 \sqrt{G''}} - 10 \frac{y^2 z^3}{G' \sqrt{G''}^3} + \frac{z^5}{\sqrt{G''}^5} \right) - \\ &\left. - 5 a_5' \left(\frac{y^5}{\sqrt{G''}^5} - 10 \frac{y^3 z^2}{\sqrt{G''}^3 G''^2} + 5 \frac{y z^4}{G''^2 \sqrt{G'}} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (250)$$

§ 110. Прямоугольная призма с неодинаковой упругостью. Перемещения. Сдвиги. Крутящий момент

Чтобы получить значение u при кручении призмы с прямоугольным основанием, упругость которой при сдвиге характеризуется коэффициентом G' в плоскости xu и коэффициентом G'' в плоскости xz , положим, как в случае с равномерной упругостью (§ 69), $u = -\theta yz + u'$ и примем для u' выражение (246) $\sum A_m \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}}$.

Тогда узнаем, что обращение в нуль $\frac{du'}{dz}$ для $z = \pm c$ требует выполнения условия $m \frac{c}{\sqrt{G''}} = \frac{2n-1}{2} \pi$. Отсюда вместо (149) получаем

$$u' = \sum A_m \left(e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} \right) \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c},$$

причем коэффициенты A_m должны быть такими, чтобы, полагая вместо (150)

$$A_m \frac{2n-1}{4\theta c} \pi \sqrt{\frac{G''}{G'}} \left(e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} \right) = A_n,$$

имели бы всегда по (151) в пределах от $z = -c$ до $z = c$ равенство

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \frac{2n-1}{2c} \pi z = z.$$

Это дает вместо первого выражения (156) первое из двух следующих выражений, из которых второе получается как и второе выражение (156):

$$u = \theta bc \left[-\frac{yz}{bc} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^3 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} - e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} \right] =$$

$$= \theta bc \left[\frac{yz}{bc} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} - e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{b} \right]. \quad (251)$$

Отсюда вместо (158) и (159) получим:

$$g_{xy} = -\theta c \left[2 \frac{z}{c} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} \right] = \\ = -\theta c \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \\ \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} - e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{b} \quad (252)$$

и

$$g_{xz} = \theta b \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G''}{G'}} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \\ \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} - e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} =$$

$$= \theta b \left[2 \frac{y}{b} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}}} \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{b} \right]. \quad (253)$$

Обозначая гиперболический тангенс через th, вместо (161) получаем:

$$M_x = G' b c^3 \theta \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sum \frac{\text{th} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G'}{G''}}}{(2n-1)^2} \right] = \\ = G'' b^3 c \theta \left[\frac{16}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \sum \frac{\text{th} \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}}}{(2n-1)^2} \right]. \quad (254)$$

§ 111. Случай, когда $c \sqrt{G'}$ очень мало сравнительно с $b \sqrt{G''}$

Имеем выражения:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\theta yz, \quad g_{xy} = -2\theta z, \quad g_{xz} = 0, \\ M_x &= \frac{16}{3} G' \theta b c^3 = 4 G' \theta J, \end{aligned} \right\} \quad (255)$$

тождественные или аналогичные выражениям, которые мы нашли в § 74, когда c считали малым сравнительно с b .

Они обычно пригодны для плоских призм с неодинаковой упругостью, так как довольно редким будет такое неравенство между G' и G'' , чтобы $\frac{c \sqrt{G'}}{b \sqrt{G''}}$ не было бы очень мало при очень малом отношении $\frac{c}{b}$.

Тогда видно, что, как и в случае с одинаковой упругостью, выражение для крутящего момента, данное Коши (§ 68), является точным и что параболаидальная форма, полученная для сечения из теории, соответствует действительности.

§ 112. Случай, когда $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}}$

Выражение (167) для u , данное в § 75 для призмы с квадратным основанием, у которой упругость одинакова во всех поперечных направлениях, и числовая таблица (в том же параграфе), полученная для значений этого перемещения, одинаково пригодны, когда

$$b\sqrt{G''} = c\sqrt{G'} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}}$$

(но при этом $G' \neq G''$ и $b \neq c$), т. е. когда стороны прямоуг-гольника пропорциональны корням квадратным из коэф-фициентов упругости при сдвигах в их направлениях.

В подобном прямоугольном сечении u равно нулю на двух диагоналях, как и на двух медианах, точки которых остаются, таким образом, в первоначальной плоскости сечения.

Эпюрой и рельефом, указанными в § 76, можно пользо-ваться, если уменьшить одно из измерений в соотно-шении $\frac{\sqrt{G''}}{\sqrt{G'}}$.

В том же случае $\frac{b}{\sqrt{G'}} = \frac{c}{\sqrt{G''}}$ имеем (вместо $M_x = 0,843462 \frac{8}{3} Gb^4\theta$ в § 77):

$$M_x = 0,843462 \frac{8}{3} \sqrt{G' G''} b^2 c^2 \theta = 0,843462 \frac{8}{3} G' b c^3 \theta. \quad (256)$$

Прежняя теория дает тогда $\frac{8}{3} \sqrt{G' G''} b^2 c^2 \theta$ (так как $G' J = G'' J'$). Следовательно, новая теория дает для прямоуголь-ников, где $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}}$, как и в более частном случае квадра-тов, где $b = c$, $G' = G''$, 0,843462 того, что дает преж-няя теория.

Что касается сдвигов в нашем случае $b\sqrt{G''} = c\sqrt{G'}$, то для $\frac{-g_{xy}}{\theta c}$ и $\frac{g_{xz}}{\theta b}$ имеем те же цифры, что и для $\frac{-g_{xy}}{\theta c}$ и $\frac{g_{xz}}{\theta b}$, которые мы дали в таблицах § 81.

Что же касается последней таблицы того же параграфа, то она дает для рассматриваемого сейчас случая вместо значений $\frac{1}{\theta b} \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ значения

$$\frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{g_{xy}^2}{c^2} + \frac{g_{xz}^2}{b^2}} = \frac{1}{\theta b \sqrt{G''}} \sqrt{G' g_{xy}^2 + G'' g_{xz}^2}. \quad (257)$$

Несомненно, что ввиду возможного неравенства $\frac{\sqrt{G'}}{T'}$ и $\frac{\sqrt{G''}}{T''}$ эта величина не может быть пропорциональна

$$\sqrt{\frac{G'}{T'^2} G' g_{xy}^2 + \frac{G''}{T''^2} G'' g_{xz}^2},$$

т. е. корню квадратному из правой части общего уравнения сопротивления разрушению от кручения (52) или (243), или из величины, наибольшее значение которой характеризует *опасную точку*.

Но если сравнить числа, пропорциональные соответственно $g_{xy} \sqrt{G'}$, $g_{xz} \sqrt{G''}$, которые получаются из двух первых числовых таблиц § 81, главным образом на диагонали, которая проходит сверху слева вниз направо, то мы увидим при всяком соотношении между двумя величинами $\frac{\sqrt{G'}}{T'}$, $\frac{\sqrt{G''}}{T''}$, на которые следует умножить эти числа перед тем, как сложить квадраты чисел каждой клеточки первой таблицы с квадратами чисел подобных клеточек второй таблицы, что сумма будет всегда иметь наибольшее значение либо на одном, либо на другом из двух концов этой диагонали таблиц, т. е. в клеточках, относящихся к точкам на середине сторон $2b$, $2c$ прямоугольника.

Стало быть, в одном или в другом, если не в обоих этих местах, находится *опасная точка*, что можно показать аналитическим путем, если допустить сначала, как обычно, что *эта точка может быть взята только на контуре сечения*, так как g_{xz} равно нулю на сторонах $2b$, а g_{xy} — на сторонах $2c$, и действительно в этих двух точках имеет место максимум того из двух сдвигов, который не обращается в нуль (§ 81).

§ 113. Общий случай, когда стороны 2b, 2c прямоугольника с неодинаковой упругостью находятся между собой в любом соотношении

Если сравнить формулы (156), (158), (159), (161) гл. VIII для перемещения u , сдвигов g_{xy} и g_{xz} и крутящего момента M_x с формулами (251), (252), (253), (254), посредством которых мы только что выразили те же величины, то видим, что там, где числители первых формул содержат показатель-ные функции, которые можно написать так: $e^{\pm \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \frac{y}{b}}$, $e^{\pm \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c}{b} \frac{z}{c}}$, вторые формулы содержат показательные функции $e^{\pm \frac{2n-1}{2} \pi \frac{b \sqrt{G'} y}{c \sqrt{G'} b}}$, $e^{\pm \frac{2n-1}{2} \pi \frac{c \sqrt{G'} z}{b \sqrt{G'} c}}$ и что везде отношения $\frac{b}{c}$ в первых формулах заменены на отношения $\frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G'}}$ во вторых.

Таким образом, для одинаковых значений $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ имеем одинаковые значения $\frac{u}{\theta bc}$, $\frac{g_{xy}}{\theta c}$, $\frac{g_{xz}}{\theta b}$ и $\frac{M_x}{G' \theta bc^3}$, $\frac{M_x}{G'' \theta b^3 c}$, когда упругость различна в направлениях y и z , как и тогда, когда она одинакова (т. е. $G' = G'' = G$), при условии, что эти значения для случая одинаковой упругости относятся к тому же значению отношения $\frac{b}{c}$ сторон, а для случая неодинаковой упругости к тем же значениям $\frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G'}}$, т. е. имеем произведения этого отношения на обратную величину корня квадратного из отношения упругостей при сдвиге для соответствующих направлений.

Отсюда следует, что с этим единственным ограничением (а следовательно, за исключением третьей таблицы § 87) формулы, числовые таблицы или эпюры, которые мы дали в §§ 84, 85, 87, 89, пригодны также здесь, если взять $G'bc^3$, $G''b^3c$ и $\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}$ вместо Gbc^3 , Gb^3c и $\frac{b^2 + c^2}{G}$ в формулах для крутящего момента.

Опасная точка, т. е. точка, для которой (§ 50, выражение (108)) $\left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2$ наиболее значительно, всегда нахо-

дится на контуре сечения и, следовательно, посредине стороны $2b$ или посредине стороны $2c$, так как всегда именно в этих местах тот из двух сдвигов g_{xy} , g_{xz} , который не равен нулю, имеет наибольшее значение. Но хотя g_{xy} посредине большой стороны $2b$ всегда превосходит g_{xz} посредине малой стороны $2c$ при $b\sqrt{G''} > c\sqrt{G'}$, однако возможно, что опасная точка находится тогда посредине $2c$. Это будет иметь место, если отношение $\frac{G''}{T''}$ превосходит отношение $\frac{G'}{T'}$ настолько, чтобы компенсировать действие сдвига с более значительной величиной посредине $2b$.

Впрочем, сдвиги g_{xz} на малой стороне существенны, когда кроме сдвигов имеются продольные удлинения (см. гл. XII, §§ 130, 132, 133).

Мы даем в конце мемуара общую таблицу, которая послужит для того, чтобы определить при различных значениях отношения $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$:

1) момент, производящий кручение θ :

$$M_x = \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \right) G' \theta bc^3 = \mu G' \theta bc^3 = \mu' \frac{16 b^3 c^3 \theta}{3 \left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \right)}; \quad (258)$$

2) наибольшие сдвиги — $\gamma c \theta$ и $\gamma_1 b \theta$ на сторонах $2b$ и $2c$, полагая

$$\gamma = \frac{-g_{xy} \text{ (при } y=0, z=c)}{c \theta}, \quad \gamma_1 = \frac{g_{xz} \text{ (при } y=b, z=0)}{b \theta}; \quad (259)$$

3) допускаемые пределы для момента M_x , при которых эти сдвиги не превосходят соответственно значений $\frac{T'}{G'}$, $\frac{T''}{G''}$ и должны оставаться меньше их; этими пределами (если исключить θ из $M_x = \mu G' \theta bc^3$ последовательно с помощью соотношений $\frac{T'}{G'} = \gamma c \theta$ и $\frac{T''}{G''} = \gamma_1 b \theta$) являются

$$\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} bc^2 T' \quad \text{и} \quad \lim M_x = \left(\frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^3 G'}{b^2 G''} \right) b^2 c T''; \quad (260)$$

если частные $\frac{\mu}{\gamma}$, $\frac{\mu c^3 G'}{\gamma_1 b^2 G''}$ полностью вычислены в таблице, то легко будет узнать в каждом случае, каков предел, кото-

рый надлежит принять и который должен быть наименьшим из двух пределов¹⁾;

4) в этой таблице имеется последняя часть, применение которой мы увидим в гл. XII, когда вопрос главным образом будет касаться *одновременного сопротивления изгибу и кручению*. Эта часть озаглавлена: *главные сдвиги в других точках сторон 2b, 2c, кроме сдвигов посредине*. Чтобы получить эти сдвиги по формулам $-g_x = -g_{xy}$ (при $z = c$) $= \gamma' c \theta$, $g_x = g_{xz}$ (при $y = b$) $= \gamma'_1 b \theta$, эта часть таблицы дает отношения $\frac{\gamma'}{\gamma}$, $\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}$ чисел γ' , γ'_1 к их наибольшим значениям γ , γ_1 , известным из первой части той же таблицы для различных значений $\frac{y}{b}$ или $\frac{z}{c}$ и $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$.

Эти числа γ' и γ'_1 в соответствии с первым выражением (252) и вторым (253) определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} \frac{y}{b}\right)}{(2n-1)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}\right)}, \\ \gamma'_1 &= 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \frac{z}{c}\right)}{(2n-1)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (261)$$

где частное от деления двух гиперболических косинусов,

¹⁾ Числа γ_1 и $\frac{\mu b^2 G''}{\gamma_1 c^2 G'}$ должны быть взяты вместо γ и $\frac{\mu}{\gamma}$ только для значений $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$, меньших единицы. Мы можем также представить числа $\frac{\mu b^2 G''}{\gamma_1 c^2 G'}$ посредством тех же эмпирических формул, что и числа $\frac{\mu}{\gamma}$ (примечание § 89), так что можно взять приблизительно

$$\frac{\mu}{\gamma} = \frac{8}{3 \left(1 + 0,6 \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}\right)}, \quad \frac{\mu b^2 G''}{\gamma_1 c^2 G'} = \frac{8}{3 \left(1 + 0,6 \frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}\right)}.$$

обозначенных через sh , может сводиться к частному от деления их показательных функций с положительными показателями степени, как только числа в скобках превышают $2,5 \pi$.

§ 114. Призмы с другими основаниями (кроме эллипса и прямоугольника), аналогичными рассмотренным в главе IX

Когда упругость при сдвиге неодинакова в направлениях y и z или когда G' не равно G'' , то вместо алгебраического уравнения (198) § 91 получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\theta \sqrt{G' G''}}{2} \left(\frac{y^2}{G'} + \frac{z^2}{G''} \right) - a_1 \frac{z}{\sqrt{G''}} + a'_1 \frac{y}{\sqrt{G'}} - \\ - a_2 \frac{2yz}{\sqrt{G' G''}} + a'_2 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) - a_3 \left(3 \frac{y^2 z}{\sqrt{G'^2 G''}} - \frac{z^3}{\sqrt{G''^3}} \right) + \\ + a'_3 \left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}} - 3 \frac{yz^2}{\sqrt{G' G''^2}} \right) - a_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'^3 G''}} - 4 \frac{yz^3}{\sqrt{G' G''^3}} \right) + \\ + a'_4 \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) - \text{и т. д.} = \text{const}; \end{aligned} \quad (262)$$

им можно представить криволинейные контуры бесконечного множества сечений призм, в которых кручение производит перемещения u , данные другим алгебраическим уравнением вместо (197):

$$\begin{aligned} u = a_0 + a_1 \frac{y}{\sqrt{G'}} + a'_1 \frac{z}{\sqrt{G''}} + a_2 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) + a'_2 \frac{2yz}{\sqrt{G' G''}} + \\ + a_3 \left(\frac{y^3}{\sqrt{G'^3}} - 3 \frac{yz^2}{\sqrt{G' G''^2}} \right) + a'_3 \left(3 \frac{y^2 z}{\sqrt{G'^2 G''}} - \frac{z^3}{\sqrt{G''^3}} \right) + \\ + a_4 \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) + a'_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'^3 G''}} - 4 \frac{yz^3}{\sqrt{G' G''^3}} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (263)$$

которое в других координатах (и даже в более общем виде, так как показатели степени n , n' могут быть дробными или отрицательными) сводится к следующим двум уравнениям, заменяющим (201) и (202):

$$\theta \sqrt{G' G''} \frac{e^2}{2} - \sum a_n e^n \sin n \beta + \sum a_{n'} e^{n'} \cos n' \beta = \text{const} \quad (264)$$

и

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum a_n e^n \cos n \beta + \sum a_{n'} e^{n'} \sin n' \beta, \\ \text{где} \quad e &= \sqrt{\frac{y^2}{G'} + \frac{z^2}{G''}}, \quad \frac{y}{\sqrt{G'}} = e \cos \beta, \quad \frac{z}{\sqrt{G''}} = e \sin \beta. \end{aligned} \right\} (265)$$

Симметрия одновременно по отношению к двум осям y и z требует, как в § 67, чтобы

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 0, & a_2 &= 0, & a_3 &= 0, & a_4 &= 0, & a_5 &= 0, & \dots \\ a'_1 &= 0 & & & a'_3 &= 0, & & & a'_5 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ограничиваясь положительными показателями степени, имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{\theta \sqrt{G' G''}}{2} \left(\frac{y^2}{G'} + \frac{z^2}{G''} \right) + a'_2 \left(\frac{y^2}{G'} - \frac{z^2}{G''} \right) + a'_4 \left(\frac{y^4}{G'^2} - 6 \frac{y^2 z^2}{G' G''} + \frac{z^4}{G''^2} \right) + \\ &\quad + a'_6 \left(\frac{y^6}{G'^3} - 15 \frac{y^4 z^2}{G'^2 G''} + 15 \frac{y^2 z^4}{G' G''^2} - \frac{z^6}{G''^3} \right) + \\ &+ a'_8 \left(\frac{y^8}{G'^4} - 28 \frac{y^6 z^2}{G'^3 G''} + 70 \frac{y^4 z^4}{G'^2 G''^2} - 28 \frac{y^2 z^6}{G' G''^3} + \frac{z^8}{G''^4} + \dots \right) = \text{const}, \end{aligned} \quad (266)$$

и продольное перемещение равно

$$\begin{aligned} u &= a'_2 \frac{2yz}{\sqrt{G' G''}} + a'_4 \left(4 \frac{y^3 z}{\sqrt{G'^3 G''}} - 4 \frac{yz^3}{\sqrt{G' G''^3}} \right) + \\ &\quad + a'_6 \left(6 \frac{y^5 z}{\sqrt{G'^5 G''}} - 20 \frac{y^3 z^3}{\sqrt{G'^3 G''^3}} + 6 \frac{yz^5}{\sqrt{G' G''^5}} \right) + \\ &\quad + a'_8 \left(8 \frac{y^7 z}{\sqrt{G'^7 G''}} - 56 \frac{y^5 z^3}{\sqrt{G'^5 G''^3}} + 56 \frac{y^3 z^5}{\sqrt{G'^3 G''^5}} - 8 \frac{yz^7}{\sqrt{G' G''^7}} \right) + \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (267)$$

Равенство относительно двух осей невозможно, когда упругость неодинакова в их направлениях. Но если кривая совпадает сама с собой, когда после $1/4$ ее оборота вокруг ее центра увеличивают все ее ординаты z или уменьшают все ее абсциссы в отношении $\sqrt{\frac{G'}{G''}}$ корней квадратных из

упругостей, то ее уравнение не должно изменяться, когда в нем заменяют $\frac{y}{\sqrt{G}}$ на $\frac{z}{\sqrt{G}}$ и наоборот, что уничтожает $a'_2, a'_6, a'_{10}, \dots$ и сохраняет только члены с $a'_4, a'_8, a'_{12}, \dots$, как в уравнениях, рассмотренных главным образом в гл. IX. В обратном случае контур следует сравнить с *неравными*, хотя и симметричными кривыми (§ 105 и первое примечание к нему). Мы ограничимся здесь этим указанием.

§ 115. Нормальность сечений, ставших искривленными, к ребрам, превратившимся в спирали

Мы собираемся показать здесь в общем виде и даже для случаев, когда касательные составляющие давления не сводились бы к одночленной форме, то, о чем мы говорили несколько раз (§ 68), а именно то, что во всех выступающих углах сечений, даже тупых, поверхности сечений непременно искривляются так, что остаются нормальными к ребрам призм, превратившимся в спирали (с постоянным или переменным шагом), когда считают, как мы это всегда делали, что *внешние* давления равны нулю или нормальны к боковым граням, или, по крайней мере, они не имеют никакой составляющей в направлении ребер x .

Действительно, предположим только для составляющих p_{xy}, p_{xz} двучленную форму, которую они имеют, когда ортогональное сечение призмы является просто главной плоскостью упругости, а именно (§§ 15, 16, формулы (17) и (16)):

$$p_{xy} = fg_{xy} + h'' g_{zx}, \quad p_{xz} = eg_{zx} + h'' g_{xy}. \quad (268)$$

Мы получим на двух боковых гранях призмы с нормальными y' и y'' , составляющими некоторые углы β, β' с осью y (первое выражение (21) § 16):

$$\left. \begin{aligned} p_{y'x} &= \cos \beta (fg_{xy} + h'' g_{zx}) + \sin \beta (eg_{zx} + h'' g_{xy}), \\ p_{y''x} &= \cos \beta' (fg_{xy} + h'' g_{zx}) + \sin \beta' (eg_{zx} + h'' g_{xy}). \end{aligned} \right\} (269)$$

Так как соответственно гипотезе имеем $p_{y'x} = 0, p_{y''x} = 0$, то эти два уравнения дают, какими бы ни были углы β и β'

и каким бы ни был, следовательно, угол между двумя боковыми гранями, нормальными к y' и y'' :

$$g_{xy} = 0, \quad g_{xz} = 0,$$

откуда

$$g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2} = 0;$$

следовательно, нет никакого сдвига на пересечении этих граней, и оно остается нормальным к сечению. Вышеизложенное позволит в некоторых случаях определить приблизительно криволинейную форму, которую придает кручение призмы ее сечениям.



ГЛАВА XI
О КРУЧЕНИИ ПОЛЫХ ПРИЗМ

§ 116. Полая эллиптическая призма

Когда цилиндр, эллиптическое основание которого имеет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{откуда} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

подвергается кручению θ , то выражение (240) продольного перемещения

$$u = -\frac{\frac{b^2}{G'} - \frac{c^2}{G''}}{\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''}} \theta yz, \quad (270)$$

которое удовлетворяет, как всякое другое выражение Kyz , неопределенному дифференциальному уравнению (238) $G' \frac{d^2 u}{dy^2} + G'' \frac{d^2 u}{dz^2} = 0$, удовлетворяет также определенному уравнению (239).

$$G'' \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) dy - G' \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) dz = 0,$$

или

$$G'' b^2 z \left(\frac{du}{dz} + \theta y \right) + G' c^2 y \left(\frac{du}{dy} - \theta z \right) = 0,$$

не только в точках на боковой поверхности, но также во всех точках внутри призмы, так как нет необходимости полагать $z = \pm c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ или $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$ для того,

чтобы проверить это уравнение, подставляя вместо u его значение (270).

Мы видим, что когда давление на внешней поверхности не имеет продольной составляющей, отсутствует такое же давление на всякой внутренней цилиндрической поверхности с основанием, для которого имели бы также $\frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$, т. е. с эллиптическим основанием, оси которого находились бы между собой в таком же отношении $\frac{2c}{2b}$, как и оси основания данного цилиндра.

Отсюда следует, что если этот цилиндр имеет полость в виде подобного цилиндра, основание которого имеет тот же центр и то же расположение, как у первого цилиндра, и если он подвергается изнутри, как и снаружи, только атмосферному давлению или давлению любой жидкости, находящейся в состоянии покоя, то продольные перемещения u и его точек будут выражены посредством (270), как в сплошном цилиндре.

Отсюда находим:

1) что крутящий момент M_x будет ($2b'$, $2c'$ — оси основания полости) разностью двух выражений, подобных выражению (242) § 107, т. е. получим:

$$M_x = \left(\frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + \frac{c^2}{G'}} - \frac{\pi b'^3 c'^3}{b'^2 + \frac{c'^2}{G''}} \right) \theta = \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + \frac{c^2}{G'}} \left(1 - \frac{b'^4}{b^4} \right); \quad (271)$$

2) что точками, наиболее всего подвергающимися опасности разрыва, будут, как в сплошном цилиндре, концы оси $2c$, если (§ 108) $\frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}$, и условием прочности всегда будет уравнение

$$\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \geq \frac{2\theta b^2 c}{T'},$$

посредством которого мы исключим θ из предыдущей формулы, дающей допускаемый предел M_x .

Мы не получили бы этих простых выражений для u , крутящего момента M_x и условий сопротивления, если бы оси $2b'$, $2c'$ основания полости не находились между собой в таком же соотношении, что и оси $2b$, $2c$ внешнего основания, если бы мы, например, установили с последними только

отношение равно разности, чтобы придать сплошной части постоянную толщину.

Но если эта толщина была бы незначительна сравнительно с осями основания, то понятно, что эти выражения могли бы быть приняты в качестве приближенных.

§ 117. Полая прямоугольная призма

Это последнее замечание применимо к прямоугольным призмам, в которых находились бы полости в виде других подобных или не подобных прямоугольных призм. Выражения (158) и (252), данные в §§ 71 и 110 для сдвига g_{xy} в случае одинаковой или неодинаковой упругости, обращаются в нуль, каким бы ни был z , только при $y = \pm b$, а выражения (159) и (253) g_{xz} обращаются в нуль, каким бы ни был y , только при $z = \pm c$.

Таким образом, кручение всякой прямоугольной призмы с полостью в виде второй прямоугольной призмы дало бы другие выражения кроме тех, которые мы получили для u и, следовательно, для крутящего момента и условий сопротивления, а эти выражения неизвестны.

Но мы можем в прямоугольной призме сделать полость в виде призмы с *непрямоугольным* основанием, таким, чтобы выражение для перемещения u всегда было бы выражением (251), полученным в § 110.

Действительно, если подставить вместо u в общее определенное уравнение (239) § 106

$$G'' \frac{du}{dz} dy - G' \frac{du}{dy} dz + \theta(G'' y dy + G' z dz) = 0$$

выражение (251), относящееся к прямоугольной призме и имеющее форму

$$\left. \begin{aligned} &u = -\theta yz + \sum A_m \left(e^{\frac{m y}{\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{m y}{\sqrt{G'}}} \right) \sin \frac{mz}{\sqrt{G''}}, \\ &\text{где} \\ & \quad m = \frac{2n-1}{2} \pi \frac{\sqrt{G''}}{c} \\ &\text{и} \\ & A_m = \theta \frac{bc}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \frac{c}{b} \sqrt{\frac{G'}{G''}} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2 \left(e^{\frac{m b}{\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{m b}{\sqrt{G'}}} \right)}, \end{aligned} \right\} (272)$$

то найдем:

$$2\theta G' z dz + \sqrt{G' G''} \sum A_m \left[\left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) d \left(\cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} \right) + \right. \\ \left. + \cos \frac{mz}{\sqrt{G''}} d \left(e^{\frac{my}{\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{my}{\sqrt{G'}}} \right) \right] = 0. \quad (273)$$

Интегрируя, деля на $\theta G' c^2$ и снова подставляя вместо m и A_m их значения (272), получаем следующее уравнение, в котором $1 + K$ является произвольной постоянной:

$$\frac{32}{\pi^3} \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \frac{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{y}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}}{e^{\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}} + e^{-\frac{2n-1}{2} \pi \frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}}}} \cos \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{c} = \\ = 1 - \frac{z^2}{c^2} + K. \quad (274)$$

Оно представляет прямоугольный контур, если постоянная K равна нулю, так как удовлетворяется при любом значении y и при $z = \pm c$. Но если мы дадим K ряд конечных и положительных значений, то уравнение будет представлять в плоскости yz ряд кривых. Легко видеть, что на них z^2 не достигает значения c^2 . Эти кривые, будучи приняты за границы основания призм, образующих полость в прямоугольной призме, приведут к полым призмам, для которых u получит значение (251), так что мы сможем по формулам и с помощью методов предыдущих глав вычислить крутящий момент M_x и условия сопротивления.

Кривые, которые представляет это трансцендентное уравнение (274), к сожалению, слишком громоздки, так как для заданного численного значения y нужно искать соответствующее значение z посредством длительного подбора. Но для малых значений постоянной K они будут мало отличаться от прямоугольника, так что, если мы имеем полую призму с малой толщиной (квадрат или прямоугольник как изнутри, так и снаружи), то к ней применимы с известным приближением все формулы гл. VIII и X.

Внутренние призмы или цилиндры с основаниями в виде этих концентрических кривых, для точек которых определенное уравнение полностью удовлетворяется, как и на поверхности, могут рассматриваться как имеющие некоторую аналогию с изотермическими поверхностями Ламе.

§ 118. Полые призмы с другими основаниями

Для призм, имеющих сечения в виде алгебраических кривых, среди которых эллипс, квадрат и различные криволинейные многоугольники (выпуклые или звездчатые), прямолинейный равносторонний треугольник и т. д. являются частными случаями (гл. IX), уравнение в полярных координатах имеет следующий вид (§ 91):

$$\theta \frac{r^2}{2} - a_1 r \sin \alpha + a' r \cos \alpha - a_2 r^2 \sin 2\alpha + a'_2 r^2 \cos 2\alpha - \\ - a_3 r^3 \sin 3\alpha + a'_3 r^3 \cos 3\alpha - \dots = \text{const}, \quad (275)$$

а выражение перемещения (если точки этих призм будут испытывать кручение θ) в полярных координатах будет

$$u = a_1 r \cos \alpha + a'_1 r \sin \alpha + a_2 r^2 \cos 2\alpha + a'_2 r^2 \sin 2\alpha + \\ + a_3 r^3 \cos 3\alpha + a'_3 r^3 \sin 3\alpha + \dots \quad (276)$$

Последнее выражение будет также удовлетворять определенному условию, относящемуся ко всем призмам, основания которых представлены уравнениями с той же левой частью, как и уравнение (275), но с другими какими-либо постоянными в правой части (§ 92). Это также очевидно, поскольку определенное уравнение содержит только дифференциалы, полученные из уравнения (275) контура основания, а постоянная в правой части уравнения исчезает при дифференцировании.

Итак, если мы имеем полую призму, внутреннее и наружное основания которой составлены из этих кривых с одинаковой левой частью уравнения, то перемещение u при ее кручении получит выражение (276), найденное для сплошной призмы, и мы сможем определить по формулам и правилам главы IX крутящий момент и условия ее сопротивления.

Кривые, отличающиеся только постоянной в правой части уравнений вида (275), являются геометрически *подобными* в единственном случае, когда эти уравнения имеют только члены второй степени, т. е. когда кривые являются эллипсами с центром в начале координат. Действительно, уравнения имеют во всех случаях член второй степени $\theta \frac{r^2}{2}$; если они содержат также член с другой степенью r , то одно

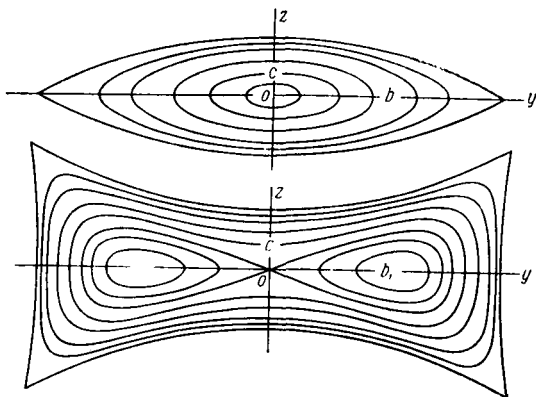


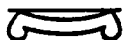
Рис. 58

из них не может быть сделано тождественным другому путем умножения r во всех членах на одинаковое число и, следовательно, радиусы-векторы различных кривых, соответствующих тому же углу α , не могут быть в постоянном отношении.

Два примера подобных кривых изображены на рис. 58. Кривые, которые охватывают другие кривые, представлены уравнением четвертой степени $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \dots = 1 - a$ из первого примечания § 105 при $b = 4c$. Они характеризуются предельными положительными и отрицательными значениями $a = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{1}{17}$ для верхнего рисунка и $a = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ для нижнего рисунка. Внутренние кривые имеют одинаковые уравнения, но с другими постоянными в правой части.

Наименьшие из кривых на верхнем рисунке стремятся превратиться в эллипсы, оси которых находятся между собой в отношении $\sqrt{(1-a)b^2+ac^2}$ к $\sqrt{(1-a)c^2+ab^2}$. То же самое имело бы место для кривых нижнего рисунка, если $\frac{b}{c}$ было бы менее $\sqrt{1-\frac{1}{a}} = 1 + \sqrt{2}$. Но при $\frac{b}{c} = 4$ наименьшие кривые на втором рисунке разделяются на два контура.

Если взять какую-либо одну из этих кривых для внутреннего основания полой призмы, у которой наружным основанием является одна из больших кривых, то крутящий момент M_x будет дан в виде разности крутящих моментов двух сплошных призм с соответствующими основаниями и т. д.





ГЛАВА XII

СЛУЧАЙ ОДНОВРЕМЕННОГО КРУЧЕНИЯ, ИЗГИБА, УДЛИНЕНИЙ И ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИХ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

§ 119. Определение перемещений.

**Самое простое геометрическое сложение перемещений,
вызванных различного рода усилиями**

Мы допустили для упрощения (§ 51), что кручение производилось без какого-либо растяжения или сжатия призм в продольном и поперечном направлениях, а также без изгиба и без внешнего сдвига.

Анализ показал нам, что для этого было достаточно, чтобы не было ни нормального или касательного давления на боковых гранях, ни продольного растяжения на крайних основаниях и что в точках этих оснований прилагались бы только поперечные воздействия, распределенные как и воздействия p_{xy} , p_{xz} , о которых мы говорили после главы V¹).

¹) Ребра и волокна, которые из прямых и параллельных, какими они были, становятся наклоненными и спиральными, испытывают тем самым удлинение. Но если кручение θ , умноженное на расстояние от оси до самого отдаленного ребра, дает *очень малое* произведение, как это всегда считают, то это удлинение является *весьма малой величиной второго порядка*, так что, сохраняя только величины первого порядка, как мы это постоянно делаем в теории упругих тел, можно всегда сказать, что волокна или ребра не испытывают удлинения, если не растягивается сама ось.

Впрочем, можно следующим образом вычислить приблизительно влияние второго порядка, которое оказывает на сопротивление

Если имеются одновременно, кроме сил, производящих кручение, силы, способные растягивать в продольном направлении или сжимать в поперечном направлении призму, и силы, стремящиеся ее изогнуть или произвести другие действия, то легко определить малые перемещения, произведенные их одновременным действием.

Для этого следует только *сложить вместе геометрически перемещения, вызванные силой каждого вида, т. е. взять соответственно для значений перемещений и в направлении*

кручению θ такое неодинаковое удлинение волокон, послужившее причиной явлений, ставших предметом опытов Вертгейма. Их анализ появился 19 февраля 1855 г. в Comptes rendus de l'Académie, т. XL, стр. 411.

Рассмотрим круговой цилиндр, радиус которого равен R , а одно из его волокон находится на расстоянии r от оси кручения. Все элементы этого волокна получают по отношению к оси наклон θr , когда она при искривлении станет спиралью, так что часть, заключенная между двумя сечениями цилиндра, находящимися на единичном расстоянии друг от друга, получит затем длину $\sqrt{1 + \theta^2 r^2}$, если эти сечения останутся на прежнем расстоянии, и длину $(1 - \eta) \sqrt{1 + \theta^2 r^2}$, если они сблизятся на очень малую величину η . Итак, эта длина, если пренебречь малыми величинами высшего порядка, становится $1 - \eta + \frac{\theta^2 r^2}{2}$. Стало быть, на расстоянии r от оси получаем следующее значение для удлинения волокна:

$$\partial_x = \frac{\theta^2 r^2}{2} - \eta,$$

и растягивающее усилие будет $E d \omega \left(\frac{\theta^2 r^2}{2} - \eta \right)$, если $d \omega$ — элемент сечения, а E — коэффициент упругости удлинения волокна, считаемого изолированным. Сближение η , если основания могут испытывать его свободно, должно определяться из условия, что все силы уравновешиваются в продольном направлении или что их сумма равна нулю. Взяв элементы $d \omega$, образующие кольцо шириной dr , поверхность которого равна $2\pi r dr$, и, суммируя усилия, получаем:

$$\int_0^R 2 \pi E r dr \left(\frac{\theta^2 r^2}{2} - \eta \right) = 0, \text{ откуда } \eta = \frac{\theta^2 R^2}{4}.$$

Растягивающее усилие для всякого кольцевого сечения $2\pi r dr$ будет

$$E \cdot 2 \pi r dr \left(\frac{\theta^2 r^2}{2} - \frac{\theta^2 R^2}{4} \right).$$

Чтобы получить проекцию этой силы на плоскость, перпендикулярную

х, перемещений v в направлении y , перемещений w в направлении z суммы их значений в предположении, что каждая сила действует самостоятельно.

Действительно, как мы часто говорили (§§ 5, 8, 39 и т. д.), всегда можно восстановить посредством поступательного смещения и поворота перемещения молекул каждой весьма малой части тела. Полное изменение длины линии связи двух каких-либо молекул, вызванное различием перемещений их концов, почти всегда равно сумме изменений, которые были бы вызваны каждым перемещением в отдельности. Следовательно, сила или полное (или действительное) давление, которое является общей равнодействующей воздействий, направленных по этим линиям связи и пропорциональных их малым полным изменениям, является также равнодействующей давлений, которые были бы вызваны их частичными изменениями или составляющими перемещениями. Мы приходим к тому же заключению, рассматривая линейную форму выражений (15) $p_{xx} = A \frac{du}{dx} + A_1 \frac{dv}{dy} + \dots$; $p_{yy} = \dots$

к оси, нужно умножить ее на θr — косинус угла, который волокна составляют с площадкой ω , и нужно еще умножить на r , чтобы получить ее момент относительно оси. Итак, полный момент этих растягивающих сил, слегка наклоненных к оси, равен

$$\int_0^R E \pi \theta^3 \left(r^5 - \frac{R^2 r^3}{2} \right) dr = \frac{E(\theta R)^3 \pi R^4 \theta}{12 \cdot 2}.$$

Если бы мы приняли в расчет то, что эти волокна сжимаются в боковом направлении при удлинении, то получили бы подобное выражение, в котором только E было бы заменено другим коэффициентом E' , мало от него отличающимся.

Мы видим, что отношение части момента сил, сопротивляющихся кручению, вызванной сопротивлением, которое оказывают волокна их продольному удлинению, к части $GJ_0\theta = G \frac{\pi R^4 \theta}{2}$, вызванной сопротивлением, которое они оказывают их взаимному сдвигу (или что сводится к тому же самому, см. § 7, сопротивлению растяжениям и сжатиям, которые возникают в направлениях под углом 45°), равно

$$\frac{E'}{12 G} (\theta R)^3.$$

Это отношение совершенно ничтожно, если наибольший сдвиг θR мал, как мы постоянно предполагаем в настоящем мемуаре.

и т. д. шести составляющих давления через девять дифференциальных коэффициентов трех перемещений u, v, w , так как, если принять $u = u' + u'' + u''' + \dots, v = v' + v'' + v''' + \dots, w = w' + w'' + w''' + \dots$ и $A \frac{du'}{dx} + A_1 \frac{dv'}{dy} + \dots = p'_{xx}$, $A \frac{du''}{dx} + A_1 \frac{dv''}{dy} + \dots = p''_{xx}$ и т. д., то, очевидно, получаем $p_{xx} = p'_{xx} + p''_{xx} + \dots$ и также для других составляющих давления. И наоборот, если имеем $p_{xx} = p'_{xx} + p''_{xx} + \dots$ и $p'_{xx} = A \frac{du'}{dx} + \dots, p''_{xx} = A \frac{du''}{dx} + \dots$ и т. д., то выражения $p_{xx} = A \frac{du}{dx} + \dots$ и т. д. полных составляющих сил, которые воздействуют в каждом направлении на различные части упругого тела, удовлетворяются посредством $u = u' + u'' + \dots, v = v' + v'' + \dots$ и т. д., что и является подтверждением сказанного.

§ 120. Наложение перемещений, вызванных силами, производящими одновременно растяжение, изгиб и кручение призмы

Возьмем, например, эллиптическую призму § 107 (общий случай неодинаковой упругости). Допустим, что она подвергается на своих обоих крайних основаниях ω нормальному давлению (или растяжению) P , одинаковому во всех ее точках, как в главе III, где мы изучали простое растяжение (§§ 29, 30); кроме того, давлениям, также нормальным, но переменным по закону $E \frac{z}{e}$ (где e вначале допущено постоянным), т. е. давлениям, способным (§ 36, формула (73)) производить круговой изгиб в плоскости, параллельной одной из двух осей оснований, и также касательным давлениям p_{xy}, p_{xz} , имеющим значения, полученные из выражений (241), умноженных на G' и G'' , вызывающим, следовательно, кручение θ ; те же основания, как и боковые грани, могут подвергаться атмосферному давлению, которое не нужно учитывать, разыскивая только новые перемещения по отношению к им произведенным (§ 30).

Мы получим перемещения u, v, w , складывая выражения (58) § 30, относящиеся к простому растяжению и сводя-

щиеся, принимая во внимание (59), (60), к $u = \frac{P}{E}x$, $v = -\varepsilon \frac{P}{E}y$, $w = -\varepsilon' \frac{P}{E}z$, с выражениями (70) § 35 $u = \frac{xz}{e}$ и т. д., относящимися к призме, изогнутой по дуге окружности, и с выражениями (240) и (117), относящимися к скрученной призме. Мы получим, следовательно, подставляя (§ 106) f и e вместо G' и G'' :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P}{E}x + \frac{xz}{e} - \theta \frac{\frac{b^2}{f} - \frac{c^2}{e}}{\frac{f}{f} + \frac{c^2}{e}} yz, \\ v &= -\varepsilon \frac{P}{E}y - \varepsilon \frac{yz}{e} - \theta xz, \\ w &= -\varepsilon' \frac{P}{E}z - \frac{x^2 - \varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2}{2e} + \theta xy. \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

Можно проверить, подставляя эти значения в выражения (18):

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \frac{du}{dx} + f' \frac{dv}{dy} + e'' \frac{dw}{dz}, & p_{yy} &= f'' \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + d' \frac{dw}{dz}, \\ p_{zz} &= e' \frac{du}{dx} + d'' \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz}, & \dot{p}_{yz} &= d \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ p_{zx} &= e \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), & p_{xy} &= f \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

что они при учете выражений (59), (60) или (67) для E , ε , ε' или зависимости (72) § 36 дают:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= P + \frac{Ez}{e}, & p_{yy} &= p_{zz} = 0, & p_{yz} &= 0, \\ p_{zx} &= \frac{2c^2 \theta y}{b^2 + \frac{c^2}{e}}, & p_{xy} &= \frac{-2b^2 \theta z}{\frac{b^2}{f} + \frac{c^2}{e}}, \end{aligned} \right\} \quad (279)$$

т. е. приводят именно к давлениям, действующим на поверхности призмы.

Мы обнаружили бы, как в §§ 30, 38, 56, что выражения (278) для u , v , w являются единственными, удовлетворяющими задаче, если закреплены точка и два линейных эле-

мента оснований, чтобы избежать всякого поступательного смещения или общего поворота.

В соответствии с тем, что мы видели в § 40, задача может быть распространена на случай неравномерного или некругового изгиба и на случай действия поперечных сил, производящих одновременно с изгибом другие сдвиги, кроме тех сдвигов, которые создают кручение, если пользоваться при этом выражениями (84) для u , v , w вместо выражений (70) для перемещений, происходящих только вследствие изгиба.

§ 121. Общие условия прочности при различных воздействиях

Исследование перемещений в общем случае одновременного действия разного рода сил, вычисление действий которых порознь нам известно, не доставляет, как видно, никакой трудности.

Но определение условий сопротивления разрушению требует особого внимания и применения аналитического метода §§ 24—27.

Этот метод, как говорилось, состоит в том, чтобы ни в какой точке и ни в каком из направлений удлинение ∂ не превосходило бы некоторого предела $\delta = \frac{R}{E}$, относящегося к этому направлению; он может быть численно различным для положительных и отрицательных значений ∂ ; рассматривая же здесь и в последующем для полной ясности только его положительные значения, следует потребовать

$$l = \max \frac{\partial}{\delta} = \max \frac{E}{R} \partial.$$

Для этого следует найти отношение $\frac{\partial}{\delta}$ из уравнения (см. (46) § 24)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x} \right) \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y} \right) \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z} \right) - \frac{g_{yz}^2}{\gamma_{yz}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x} \right) - \\ & - \frac{g_{zx}^2}{\gamma_{zx}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y} \right) - \frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^2} \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z} \right) - 2 \frac{g_{yz}g_{zx}g_{xy}}{\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}} = 0. \end{aligned} \quad (280)$$

Здесь ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} — удлинения и сдвиги для точки x , y , z (они меняются вместе с координатами); δ_x , δ_y , δ_z ,

$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ — предельные значения предыдущих величин, одинаковые для всего тела ввиду предположения об его однородности (§ 14). Затем следует найти точку, названную *опасной точкой* (§ 25), где определенное отношение $\frac{\partial}{\delta}$ имеет большее значение, чем во всякой другой точке, и *приравнять единице это наибольшее значение* $\frac{\partial}{\delta}$.

Чтобы избежать решения уравнения третьей степени (280) относительно $\frac{\partial}{\delta}$, мы могли бы заменить в нем $\frac{\partial}{\delta}$ единицей, затем продифференцировать его последовательно по каждой из трех переменных x, y, z и исключить эти переменные из четырех полученных таким образом уравнений, так как три последние будут теми же уравнениями, которые мы получили бы, дифференцируя само уравнение (280) и полагая

затем $\frac{d \frac{\partial}{\delta}}{dx} = 0, \frac{d \frac{\partial}{\delta}}{dy} = 0, \frac{d \frac{\partial}{\delta}}{dz} = 0$ как условие максимума для $\frac{\partial}{\delta}$ в различных точках тела, а затем и $\frac{\partial}{\delta} = 1$ как условие действительного сопротивления.

Но этот способ замены при решении уравнения (280) будет чаще всего ошибочным, так как, кроме того, что условия, на которых он основывается, могут давать только чисто относительный максимум или даже минимум вместо абсолютного максимума $\frac{\partial}{\delta}$, который мы ищем, они давали бы значения x, y, z бесконечные или за пределами тела, когда опасная точка находилась бы в тех же пределах, т. е. на одном из крайних сечений или на контуре сечения. Иногда будут иметь место, кроме того, на том же непрерывном контуре случаи прерывности в изменении $\frac{\partial}{\delta}$ (см. § 134), которые будут мешать чисто аналитическому исследованию максимума для различных его точек.

Лучше из этого уравнения третьей степени получить $\frac{\partial}{\delta}$ либо численно, либо тригонометрически, выбирая именно наибольший из трех корней, и попробовать еще найти в сечении, наиболее подверженном опасности и обычно известном *a priori*, точку, где корень имеет наибольшее значение.

§ 122. Более частные и более простые условия

В некоторых случаях, наиболее часто встречающихся на практике, уравнение сводится ко второй степени и метод может быть значительно упрощен:

1) Когда материал имеет в каждой точке ось упругости или симметрии строения (§ 18), параллельную x , что влечет за собой равенство удлинений во всех перпендикулярных направлениях, если твердое тело призматическое и подвергается на его боковых гранях только нулевому или нормальному и постоянному давлению или если в более общем виде имеем, каким бы ни было это тело, что

$$\delta_y = \delta_z, \gamma_{xy} = \gamma_{xz}, \partial_y = \partial_z, g_{yz} = 0, \quad (281)$$

то общее уравнение (280) (если написать γ_x вместо $\gamma_{xy} = \gamma_{xz}$ и полагать при этом, что главный сдвиг (§ 7) $\sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2} = g_x$) сводится к

$$\left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_x}{\delta_x}\right) \left(\frac{\partial}{\delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) = \frac{g_x^2}{\gamma_x^2}. \quad (282)$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_x}{\delta_x} + \frac{\partial_y}{\delta_y}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\partial_x}{\delta_x} - \frac{\partial_y}{\delta_y}\right)^2 + \frac{g_x^2}{\gamma_x^2}}. \quad (283)$$

Поскольку продольные удлинения продолговатых тел, которые чаще всего рассматривают, сопровождаются малыми поперечными сжатиями, то полагаем (§§ 24, 26, 27, 30)

$$\frac{-\partial_y}{\delta_x} = \varepsilon, \delta_x = \frac{R_x}{E_x}, \delta_y = \frac{R_y}{E_y}, \gamma_x = \frac{T}{G}, \varepsilon \frac{\delta_x}{\delta_y} = \varepsilon \frac{E_y R_x}{E_x R_y} = \varepsilon_1. \quad (284)$$

Мы получим для условия прочности $1 = \max \frac{\partial}{\delta}$ выражение

$$1 = \max \frac{1 - \varepsilon_1}{2} \frac{E_x \partial_x}{R_x} + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon_1}{2} \frac{E_x \partial_x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{G g_x}{T}\right)^2}. \quad (285)$$

Сохраняем только верхний знак корня, чтобы оно сводилось, когда сдвиг g_x равен нулю, к $1 = \max \frac{E_x \partial_x}{R_x}$, а не к величине

$-\varepsilon_1 \frac{E_x \partial_x}{R_x} = \frac{E_y \partial_y}{R_y}$, которая всегда предполагается меньшей.

2) Если материал согласно допущению всегда однородный, без оси симметрии и если, кроме того, $g_{yz} = 0$, то мы

имеем несомненно или $g_{xz} = 0$, или $g_{xy} = 0$ в опасной точке; это случается, например, когда тело является прямоугольной призмой, боковые грани которой испытывают только давление жидкости, и если часть сдвигов g_{xy} , g_{xz} , вызванных другими причинами, но не кручением, или пренебрежимо мала, или распределена равномерно по наиболее подверженному опасности сечению (см. § 125), так что опасная точка обязательно находится на его контуре; тогда для этой точки имеем:

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_x}{\partial_x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_y}{\partial_y} \right) = \frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^3}, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_x}{\partial_x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_z}{\partial_z} \right) = \frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (286)$$

если она находится на стороне, где $g_{xz} = 0$, и

если она находится на стороне, где $g_{xy} = 0$.

Отсюда получаем условия сопротивления такого же вида, что и уравнение (285), относящееся к случаю оси упругости или симметрии, параллельной x . Опасная точка будет в действительности на стороне, где найдем наибольшее значение для $\max \frac{\partial}{\partial \delta}$ при заданных размерах сечения.

3) Если, наконец, g_{yz} всегда равно нулю, $\frac{-\partial_y}{\delta_y}$ и $\frac{-\partial_z}{\delta_z}$ не равны, но мало отличаются друг от друга и если ограничиться приближенным решением, то, обозначая через $\epsilon_1'' \frac{\partial_x}{\delta_x}$ некоторое среднее между двумя этими отношениями, можно заменить в общем уравнении (280) произведение $\left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y} \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z} \right)$ квадратом величины $\frac{\partial}{\partial \delta} + \epsilon_1'' \frac{\partial_x}{\delta_x}$ и разделить все его члены на этот двучлен, что приведет (если пренебречь алгебраической суммой произведений величин $\frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^3}$, $\frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^3}$ на две очень малые величины с противоположным знаком, на которые частные от деления $\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_y}{\delta_y}$ и $\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_z}{\delta_z}$ на $\frac{\partial}{\partial \delta} + \epsilon_1'' \frac{\partial_x}{\delta_x}$ превышают единицу) к следующему виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial_x}{\partial_x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \delta} + \epsilon_1'' \frac{\partial_x}{\delta_x} \right) - \frac{g_{xy}^2}{\gamma_{xy}^3} - \frac{g_{xz}^2}{\gamma_{xz}^3} = 0. \quad (287)$$

Отсюда можно получить еще отношение $\frac{\delta}{\delta}$ и условие прочности.

Все уравнения, относящиеся к различным случаям, содержатся в общей форме

$$1 = \max \left. \begin{aligned} & \frac{1 - \varepsilon_1'' E_x \partial_x}{2 R_x} + \\ & + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon_1'' E_x \partial_x}{2 R_x} \right)^2 + \left(\frac{G' g_{xy}}{T'} \right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''} \right)^2}, \end{aligned} \right\} (288)$$

где берем

$$\varepsilon_1'' = \frac{\varepsilon_1 \left(\frac{G' g_{xy}}{T'} \right)^2 + \varepsilon_1' \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''} \right)^2}{\left(\frac{G' g_{xy}}{T'} \right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''} \right)^2},$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{-\partial_y}{\partial_x} \right) \frac{E_y R_x}{E_x R_y}, \quad \varepsilon_1' = \left(\frac{-\partial_z}{\partial_x} \right) \frac{E_z R_x}{E_x R_z},$$

т. е. в форме, которую мы получаем из (287) для третьего случая, заменяя δ и γ на $\frac{R}{E}$, $\frac{T}{G}$. Будучи в последнем случае только приближенным, это условие прочности является точным для других случаев, так как, если $\frac{E_y}{R_y} = \frac{E_z}{R_z}$, $\frac{G'}{T'} = \frac{G''}{T''}$, то оно сводится к уравнению (285), а если g_{xz} или g_{xy} обращается в нуль, — то к одному из уравнений, которые мы получили бы из (286). Наконец, если положить либо g равным нулю, либо $\partial_x = 0$, то оно снова приводится к простому уравнению (47) $R_x \geq E \partial_x$ или к уравнению (52), приведенным в главе II.

Что касается данных значений для постоянных, то напомним, что, если a, b, c, d' и т. д. — 12 коэффициентов формул давлений (18) § 15, а боковые грани согласно допущению при этом испытывают только атмосферное давление, которое не принимают в расчет, то получаем (§§ 30, 24, 27, формулы (45), (51)) выражения:

$$E_y = E_x \frac{bc - d'd''}{ca - e'e''}, \quad E_z = E_x \frac{bc - d'd''}{ab - f'f''},$$

$$\varepsilon = \frac{cf'' - d'e'}{bc - d'd''}, \quad \varepsilon' = \frac{be' - f''d''}{bc - d'd''},$$

$$G' = f, \quad G'' = e, \quad \frac{T'}{G'} = 2 \sqrt{\frac{R_x R_y}{E_x E_y}}, \quad \frac{T''}{G''} = 2 \sqrt{\frac{R_x R_z}{E_x E_z}},$$

которые при наличии изотропии становятся такими:

$$\left. \begin{aligned} G' = G'' = G = e, \quad E_y = E_z = E_x = G \frac{2e + 3e'}{e + e'}, \\ \varepsilon = \varepsilon' = \frac{e'}{2e + 2e'}, \quad \frac{T}{G} = 2 \frac{R}{E}, \end{aligned} \right\} \quad (289)$$

откуда

$$\frac{E}{2G} = 1 + \varepsilon, \quad T = \frac{R}{1 + \varepsilon} = \frac{2e + 2e'}{2e + 3e'} R.$$

И если допустить, что (§§ 13, 19) $e = e'$, то

$$E = \frac{5}{2} G, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}, \quad T = \frac{4}{5} R. \quad (290)$$

Это отношение $\frac{4}{5}$ между T и R представляется существующим до непосредственного разрушения и, следовательно, по ту сторону предела применимости формул теории упругости, так как в соответствии с опытами Гуэна (Gouin)¹⁾ на квадратный сантиметр требуется усилие 3200 кг, чтобы разрушить при поперечном сдвиге или срезе стержни, которые разрушались при растяжении нагрузкой 4000 кг.

Что касается величин $\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{E_y R_x}{R_y E_x}$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon \frac{E_z R_x}{R_z E_x}$, то они не должны будут значительно отличаться от ε и ε' , если, как мы сказали в § 25, отношения $\frac{R_x}{E_x}$, $\frac{R_y}{E_y}$, $\frac{R_z}{E_z}$ мало отличаются друг от друга, несмотря на значительное различие, которое может иметь место между E_x и E_y , или E_z , и между R_x и R_y , или R_z . В соответствии с тем, что увидим в § 128, мы никогда не совершим заметную ошибку в выводах, если примем

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon''_1 = \frac{1}{4}. \quad (291)$$

§ 123. Простой и непосредственный вывод этих формул

Прежде чем дать применение формулам и указать способ их обычного использования, покажем, как можно их просто и непосредственно вывести. Пусть mn (рис. 59) — отрезок в плоскости главного сдвига g_x (§ 7) для чрезвычайно малой части сечения ω тела плоскостью,

¹⁾ Морен (Morin), *Léçons de mécanique pratique. Résist. des matériaux*, 1853, стр. 37.

перпендикулярной к x , согласно допущению совпадающей, так же как точки n , со своим первоначальным положением. Материальная линия очень малой длины $nr = x$, направленная первоначально по x и ставшая nr_1 , удлинится на $rs = r_1t = x\partial_x$ и наклонится (§ 5) на малый угол $mr_1 = g_x$.

Если удлинение в поперечном направлении mn равно $-\varepsilon\partial_x$, то mn укорачивается на $mm_1 = \varepsilon\partial_x mn$, а косая линия, такая, как mr , становится m_1r_1 .

Вычислим удлинение получит эта малая линия mr , угол m_1rn которой с осью x мы обозначаем через α .

Проектируя $mm_1 = mn \varepsilon \partial_x = x \operatorname{tg} \alpha \varepsilon \partial_x$ на линию mr , получаем $x \operatorname{tg} \alpha \varepsilon \partial_x \sin \alpha$. Проектируя $rs = x\partial_x \dots$ на ту же линию, получаем $x\partial_x \cos \alpha$. Проектируя $sr_1 = xg_x \dots$ на ту же линию, получаем $xg_x \sin \alpha$. Итак, $m_1r_1 = mr + x(\partial_x \cos \alpha + g_x \sin \alpha - \varepsilon \partial_x \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha)$.

Вычитая первоначальную длину mr и деля на $mr = \frac{x}{\cos \alpha}$, находим для искомого удлинения формулу

$$\partial_r = \partial_x \cos^2 \alpha - \varepsilon \partial_x \sin^2 \alpha + g_x \sin \alpha \cos \alpha,$$

которая не что иное, как выражение (5) § 6 или (39) § 24, определенное для $\cos \gamma = 0$, $\partial_y = -\varepsilon \partial_x$ и $g_{zx} = 0$, откуда $g_{xy} = g_x$.

Написав его в виде

$$\partial_r = \frac{1-\varepsilon}{2} \partial_x + \frac{1+\varepsilon}{2} \partial_x \cos 2\alpha + \frac{g_x}{2} \sin 2\alpha$$

и продифференцировав по α , находим, что максимум имеет место, когда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{g_x}{(1+\varepsilon)\partial_x},$$

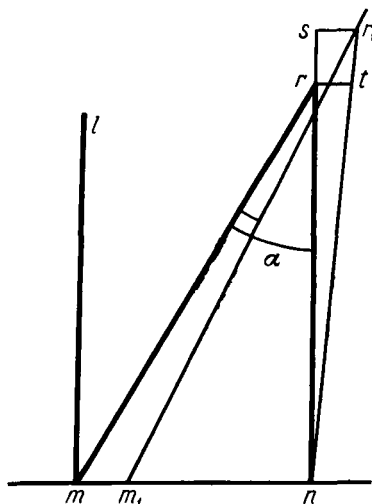


Рис. 59

и, следовательно, равен

$$\partial_r = \frac{1-\varepsilon}{2} \partial_x + \sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon}{2} \partial_x\right)^2 + \left(\frac{g_x}{2}\right)^2}. \quad (292)$$

Отсюда выводим формулу (285) для случая изотропии, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon$, приравнивая единице максимум его произведения на $\frac{E_x}{R_x} = \frac{1}{\delta}$ и заменяя во втором члене под корнем $\frac{E_x}{2R_x}$ на отношение $\frac{G}{T}$, которое (выражение (289)) ему тогда равно¹⁾.

Путем аналогичного рассуждения получаются формулы, относящиеся к случаям анизотропии, когда g_{xx} или g_{xy} равны нулю. Отсюда выводят более общую формулу (288), заменяя ε и $\frac{G^2 g_x^2}{T^2}$ таким образом, чтобы она точно применялась в различных крайних случаях, и сохраняя ту же форму, которая должна ее делать приближенно применимой в промежуточных случаях.

§ 124. Формулы сопротивления в случае замены удлинений и сдвигов их выражениями через внешние силы, действующие на тело

Пусть для одного или для другого конца призмы, кроме атмосферного давления, которое не нужно принимать в расчет (§ 30): P_x, P_y, P_z — суммы составляющих внешних сил параллельных оси x , проходящей через центры тяжести сечений, и параллельных y и z , направления которых совпадают (как в § 42) с направлениями *главных осей инерции*. $M_x = M''$, $M_y = M' \cos \varphi$, $M_z = M' \sin \varphi$ — их полные моменты: 1) — относительно оси призмы, 2) и 3) — относительно двух осей инерции произвольного сечения ω , так что M' представляет собой наибольший из моментов сил относительно прямых, проведенных на ω через его центр, а φ — угол, который составлен осью этого момента с осью y

¹⁾ Я дал ее в таком виде в 1837 г. в лекциях (литографированных) по механике в Школе мостов и дорог, §§ 26 и 27 и в *Comptes rendus*, 30 октября 1843 г., т. XVII, стр. 947 и 948.

или угол, который составлен плоскостью xz и *плоскостью действия сил при изгибе* (§ 42).

$$J = \int z^2 d\omega, \quad J' = \int y^2 d\omega$$

— моменты инерции ω относительно главных осей, параллельных y и z ; J , согласно допущению, — наименьший момент инерции, так что плоскость xz является плоскостью *наиболее легкого изгиба* (§ 42).

g'_{xy}, g'_{xz} — сдвиги g_{xy}, g_{xz} , которые имели бы место в какой-либо точке сечения ω при действии только поперечных составляющих P_y, P_z или в случае равенства нулю крутящего момента $M_x = M''$.

g''_{xy}, g''_{xz} — сдвиги, которые имели бы место при действии только одного крутящего момента $M_x = M''$ или при $P_y = 0, P_z = 0$.

В соответствии с тем, что мы только что видели в §§ 119 и 120, продольное удлинение $\partial_x = \frac{du}{dx}$ имеет в рассматриваемой точке сечения ω такое же значение, как если бы призма была просто растянута и изогнута, но не скручена, и его выражение (§ 42) будет

$$\partial_x = \partial'_x + \frac{\cos \psi}{e} z + \frac{\sin \psi}{e} y. \quad (293)$$

В этой формуле постоянная часть ∂'_x являлась бы удлинением растянутой, но неизогнутой призмы, а остальное—не что иное, как величина $\frac{z_1}{e}$ (§ 42, формула (90)), пропорциональная расстоянию z_1 рассматриваемой точки от некоторой линии, проведенной на сечении ω через его центр и составляющей неизвестный угол ψ с осью инерции y . Но достаточно вспомнить, что ∂_x является *линейной функцией поперечных координат* y, z , и величины $\partial'_x, \frac{\cos \psi}{e}, \frac{\sin \psi}{e}$ можно рассматривать как три неизвестные постоянные и исключить их путем определения.

Эти постоянные определяются посредством трех из шести условий равновесия части призмы, заключенной между сечением ω и одним из ее концов. Принимая во внимание, что молекулярные воздействия, проявляющиеся нормально че-

рез каждый элемент $d\omega$, имеют в сумме (§§ 30, 36) величину

$$p_{xx} d\omega = E \partial_x d\omega,$$

и что в соответствии со свойствами центра тяжести и осей инерции

$$\int z d\omega = 0, \quad \int y d\omega = 0, \quad \int yz d\omega = 0,$$

получаем соответственно для равновесия при поступательном смещении по x и (как в § 42) для равновесия при повороте относительно каждой из этих осей, проведенных параллельно y и z на сечениях ω , условия:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \int_0^{\omega} E \partial_x d\omega = E \omega \partial'_x, & \text{откуда } \partial'_x &= \frac{P_x}{E \omega}; \\ M_y &= \int_0^{\omega} E \partial_x z d\omega = E \frac{\cos \varphi}{\rho} \int z^2 d\omega, & \text{откуда } \frac{\cos \varphi}{\rho} &= \frac{M_y}{EJ}; \\ M_z &= \int_0^{\omega} E \partial_x y d\omega = E \frac{\sin \varphi}{\rho} \int y^2 d\omega, & \text{откуда } \frac{\sin \varphi}{\rho} &= \frac{M_z}{EJ}; \end{aligned} \right\} (294)$$

следовательно, подставляя в (293), имеем:

$$E \partial_x = \frac{P_x}{\omega} + \frac{M_y}{J} z + \frac{M_z}{J'} y = \frac{P_x}{\omega} + M' \left(\frac{z \cos \varphi}{J} + \frac{y \sin \varphi}{J'} \right). \quad (295)$$

Отсюда, заменяя $E_x \partial_x$ в общем условии (288) прочности, получаем:

$$\begin{aligned} 1 \geq \max & \frac{1 - \varepsilon_1''}{2R} \left(\frac{P_x}{\omega} + \frac{M' \cos \varphi}{J} z + \frac{M' \sin \varphi}{J'} y \right) + \\ & + \left\{ \left[\frac{1 + \varepsilon_1''}{2R} \left(\frac{P_x}{\omega} + \frac{M' \cos \varphi}{J} z + \frac{M' \sin \varphi}{J'} y \right) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{G' g'_{xy} + G' g''_{xy}}{T'} \right)^2 + \left(\frac{G'' g'_{xz} + G'' g''_{xz}}{T''} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (296) \end{aligned}$$

Чтобы иметь возможность определить и исключить, так же как $E \partial_x$, другие неизвестные силы $G' g'_{xy}$, $G' g''_{xy}$, $G'' g'_{xz}$, $G'' g''_{xz}$

посредством трех следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_y &= G' \int_0^{\omega} g'_{zy} d\omega, & P_z &= G'' \int_0^{\omega} g'_{xz} d\omega, \\ M_x &= G'' \int_0^{\omega} g''_{xz} y d\omega - G' \int_0^{\omega} g''_{xy} z d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

которые вместе с (294) дополняют шесть условий равновесия при поступательном смещении и повороте, нужно знать способ распределения сдвигов в различных частях сечения ω .

Это распределение получается для разного рода сечений по отношению к сдвигам g''_{xy} , g''_{xz} , возникающим вследствие кручения, по формулам (114), (158) и (159), (227) и (228), (241), (253) предыдущих глав, которые дают те же сдвиги, выраженные как функции координат, если подставить кручение θ , которое туда входит, из формул (116), (161), (230), (242), (254), выведенных для крутящего момента M_x .

По отношению к g'_{xy} , g'_{xz} или к частям сдвигов, происходящих от поперечных сил, которые производят одновременно неравномерный изгиб, мы сказали (конец § 40), что можно взять приблизительно для $p_{xz} = G'' g'_{xz}$, $p_{xy} = G' g'_{xy}$ в призме с прямоугольным сечением выражения (86) без членов с $\frac{\varepsilon\varepsilon}{E}$, т. е. — $\frac{3P}{2\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$ вместо p_{xz} и нуль вместо p_{xy}^1 , если сила — P , которая их вызывает, параллельна z . Таким образом, когда согласно допущению силы действуют в двух направлениях y и z , а сечение является прямоугольником $2b \cdot 2c$, мы должны взять

$$G' g'_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P_y}{\omega} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad G'' g'_{xz} = \frac{3}{2} \frac{P_z}{\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right). \quad (298)$$

Если сечение — круг радиуса r и $e = f = G' = G'' = G = \frac{2}{5} E$, $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}$, то мы можем получить также, но

¹⁾ То же самое мы находим равным образом посредством точных выражений в виде тригонометрического ряда из мемуара, указанного в примечании к § 40, вычеркивая члены, содержащие $\frac{\varepsilon\varepsilon}{E}$ и оказывающие малое влияние, когда $c > b$, но которые мы, впрочем будем принимать в расчет в числовых таблицах § 136.

ничего не отбрасывая, точные выражения (85), относящиеся к эллиптическому сечению:

$$\left. \begin{aligned} Gg'_{xy} &= \frac{7}{5} \frac{P_y}{\omega} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{z^2}{7r^2} \right) - \frac{6}{5} \frac{P_z}{\omega} \frac{yz}{r^2}, \\ Gg'_{xz} &= \frac{7}{5} \frac{P_z}{\omega} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} - \frac{y^2}{7r^2} \right) - \frac{6}{5} \frac{P_y}{\omega} \frac{yz}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (299)$$

§ 125. Видоизменения, касающиеся сдвигов, для некоторых особых сечений

Выражения (298), (299) для $G'g'_{xy}$, $G''g'_{xz}$ и выражения предыдущих глав, на которые мы ссылаемся, чтобы получить $G'g''_{xy}$, $G''g''_{xz}$, предполагают, что сечения призмы, первоначально плоские, могут свободно изгибаться или принимать одновременно искривления (§§ 57, 76, 84, 102), которые стремится сообщить им кручение, и изгиб в виде гуська (§ 44) вследствие сдвига, вызванного поперечным воздействием.

В таком случае некоторые сечения должны оставаться плоскими. Подобные сечения Вика называет *полностью заземленными*. Они не только поддерживаются, но и *заземлены или плотно соединены* с более жестким материалом. Эти сечения зажаты и подвергаются в боковом направлении, в самой их плоскости, действию сил, стремящихся их срезать. Это случается в сечениях заклепок в плоскости контакта с соединяемыми ими листами или в основаниях скрученных призм с *ничтожной длиной*, как отмечает этот знаменитый инженер.

Имеются, как заметил Вика¹⁾, некоторые другие сечения, которые, будучи изгибаемы силами, действующими на расстоянии, но симметрично и в противоположных направлениях, не получают, очевидно, никакого изгиба, имея возможность свободно искривляться за счет кручения. Таким является сечение посередине призмы с опорами на ее концах и с силой, действующей перпендикулярно к длине призмы, также посередине ее.

И наоборот, некоторые сечения при симметричном воздействии сил, получив при кручении два противо-

¹⁾ См. Annales des ponts et chaussées, 1833, 2-е полугодие. стр. 243, 232, 247.

ложных искривления, не получают никакого искривления, но имеют возможность получить изгиб, вызванный поперечными действиями. Таким является сечение, которое, не будучи ни зажатом, ни защемленным, стеснено так, что не может поворачиваться относительно самого себя, тогда как остальная часть призмы оказывается скрученной с обеих сторон одинаково и в различных направлениях.

Для этих сечений, неизогнутых и неискривленных (для них легко оценить оба вида сдвига, считая, что *волокна*, которые были к ним перпендикулярны, должны оставаться смежными), можно приблизительно предположить, что под действием поперечной силы все они наклоняются к плоскостисечений и при кручении они получают наклонения, пропорциональные их расстояниям до центра, подобно спиральям с одинаковым шагом. Тогда нужно считать g постоянными в первых двух уравнениях (297), что дает

$$G'g'_{xy} = \frac{P_y}{\omega}, \quad G''g'_{xz} = \frac{P_z}{\omega}, \quad (300)$$

и принять просто в третьем уравнении $g''_{xy} = -\theta z$, $g''_{xz} = \theta y$ (§ 47), откуда $M_x = \theta(G' \int z^2 d\omega + G'' \int y^2 d\omega)$ и, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} G'g''_{xy} &= \frac{-G'M_x}{G'J+G''J} z, & G''g''_{xz} &= \frac{G''M_x}{G'J+G''J} y, \\ \text{или} & & & \\ G'g''_{xy} &= \frac{-M_x z}{J_0}, & G''g''_{xz} &= \frac{M_x y}{J_0}, \quad \text{когда } G' = G''. \end{aligned} \right\} (301)$$

Но не нужно забывать, что эти выражения (300) и (301) относятся только к особым сечениям. Эти сечения нет необходимости рассматривать, когда следует только выразить условия сопротивления разрушению от одного кручения, так как при одном только кручении на сечениях, остающихся плоскими, никогда не имеет место наибольший сдвиг и наибольшая опасность разрушения, как это доказывают наши формулы предыдущих глав, сопоставленные с формулами (301), вытекающими из прежней теории кручения.

В случае изгиба и кручения или одновременных сдвигов нужно будет рассмотреть эти особые сечения, и там, где вычисление покажет, что они требуют несколько больших размеров, чем другие сечения, нужно укрепить их, соединяя

небольшую по длине часть с остальной частью детали, менее широкой и менее толстой, чтобы, тем не менее, эта деталь не была бы очень короткой, как в случае, который мы рассмотрим в § 127.

§ 126. Первое применение. Призма, испытывающая одновременно изгиб и поперечный сдвиг.

Случай, когда наиболее подверженное опасности сечение может изгибаться

Мы видели (§§ 40, 42, 44), что если призма изогнута неравномерно или не по дуге окружности, как, например, при защемлении одним концом, когда она подвергается действию поперечной силы на другом конце, то, кроме изгиба, возникают одновременно поперечные сдвиги.

Так как эти сдвиги одинаковы во всех сечениях, то опасная точка находится в месте защемления, где изгибающий момент наибольший.

Если призма недостаточно прочно закреплена (см. предыдущий параграф), чтобы воспрепятствовать этому сечению изогнуться подобно другим сечениям в виде гуська (§ 44), то сдвиги в ней будут представлены выражениями (298), (299).

Итак, предположим, что основанием является прямоугольник $2b \cdot 2c$; длина призмы равна a ; сила, действующая на конец параллельно z или $2c$, равна P .

Нужно будет принять в общем уравнении сопротивления (296), ограничиваясь приближением (§ 124):

$$G'' g'_{xz} = \frac{3}{2} \frac{P}{\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad g'_{xy} = 0, \quad g''_{xy} = g''_{xz} = 0,$$

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = P, \quad \varphi = 0, \quad M' = Pa, \quad \varepsilon''_1 = \varepsilon,$$

что дает

$$1 = \max \frac{1 - \varepsilon Paz}{2R} \frac{1}{J} + \frac{1 + \varepsilon}{2R} \sqrt{\left(\frac{Paz}{J}\right)^2 + \left[\frac{3P}{\omega} \frac{R}{(1 + \varepsilon) T''} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)\right]^2}, \quad (302)$$

или, допуская, как при наличии изотропии (конец § 122), $T'' = \frac{R}{1 + \varepsilon}$ и $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и замечая, что $J = \frac{\omega c^2}{3}$, имеем:

$$1 = \max \frac{3P}{R\omega} \frac{a}{c} \left[\frac{3}{8} \frac{z}{c} + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{z^2}{c^2} + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2} \right]. \quad (303)$$

Опасная точка соответствует значению $\frac{z}{c}$, при котором величина в квадратных скобках максимальна. Итак, получаем:

$\frac{2c}{a} \backslash \frac{z}{c}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	Значения величины в квадратных скобках (303)										
3	0,9375	0,968	0,984	0,986	0,976	0,957	0,933	0,911	0,903	0,928	1,000
3,2	1,000	1,029	1,043	1,038	1,026	1,000	0,950	0,934	0,916	0,931	1,000
4	1,250	1,277	1,281	1,265	1,229	1,176	1,109	1,036	0,973	0,948	1,000
5	1,5625	1,586	1,580	1,547	1,486	1,401	1,293	1,172	1,052	0,974	1,000
6	1,875	1,895	1,879	1,829	1,745	1,635	1,482	1,314	1,140	1,003	1,000

Мы получим те же цифры при отрицательных значениях $\frac{z}{c}$, давая в таком случае корню знак —, если примем $R = T''(1 + \epsilon)$ при сжатиях, так же как при растяжениях.

Мы видим, что примерно до отношения $\frac{2c}{a} = 3,05$ толщины $2c$ к длине или выступу a призмы максимум соответствует $\frac{z}{c} = 1$, т. е. опасная точка находится на грани $z = c$, а именно там, где сдвиг равен нулю, так что наклоны волокон к сечениям не вызывают никакой опасности, и сопротивление призмы может быть вычислено, как если бы она была только изогнутой.

Когда $\frac{2c}{a}$ больше 3,05, максимум резко переходит от точек $\frac{z}{c} = 1$ к точкам, при которых приблизительно $\frac{z}{c} = 0,2$, и приближается все более и более к точкам $z = 0$, так что наибольшее значение правой части уравнения (303) чрезвычайно мало отличается от значения, относящегося к этим последним точкам, которые являются точками на линии неизменяемых волокон, где изгиб не оказывает никакого действия.

Мы видим даже, что для отношения $\frac{2c}{a} = 3,2$ между толщиной и выступом все точки сечения подвергаются примерно одинаковой опасности разрушения, и сопротивление может быть вычислено независимо от разрушения при изгибе и от

разрушения при поперечном сдвиге. С другой стороны, например, для $\frac{2c}{a} = 4$ доля участия изгиба в создании такой опасности становится почти равной нулю, и сопротивление может быть вычислено, как если бы призма испытывала только сдвиги сечений или (§ 28) своих волокон друг по отношению к другу.

Аналогичные выводы можно получить из формулы (303), составленной в соответствии с точными выражениями (299) для кругового цилиндра при $P_y = 0$, $P_z = P$, так как численный расчет доказывает, что точка максимума, соответствующая при этом $y = 0$, опускается внезапно на $\frac{2r}{a} = 4,3$, от положения $z = r$ к положению приблизительно $z = 0,2r$.

Мы можем это обобщить и установить, что для короткой призмы с любым симметричным основанием, *наиболее подверженное опасности сечение которой зажато довольно слабо и способно изгибаться*, можно вычислить сопротивление последовательно, как если бы она подвергалась только изгибу или только действию поперечного сдвига со свободным изгибом, и взять для поперечных размеров наибольший из результатов этого двойного расчета. Мы повторим это подробно в § 136 в выражениях от (e^*) до (e_1^V) и от (d_1) до (d_1^{VII}) и дадим для прямоугольного и эллиптического сечений таблицы (d_1^{VIII}) , основанные на точных выражениях сдвигов.

§ 127. Та же призма. Случай, когда наиболее подверженное опасности сечение вынуждено оставаться плоским. Сомнительный случай

Дело обстоит совершенно иначе, когда наиболее подверженное опасности сечение не изгибается (§ 125), например, если мы предположим, что призма на двух опорах подвергается действию силы $2P$ в плоскости ее сечения посредине пролета (рис. 60). Это сечение останется обязательно плоским, не имеющим причины изгибаться к одной стороне больше, чем к другой, и заменит полностью защемленное сечение или плотно заделанный конец, если рассматривать эту призму длиной $2a$ образованной из двух других призм с длиной a , каждая из которых на другом конце подвержена действию реакции P одной из опор. Тогда следует принять, *какой бы*

ни была форма сечения (формула (300)), что

$$G'g'_{xy} = \frac{P_y}{\omega}, \quad G''g'_{xz} = \frac{P_z}{\omega}. \quad (304)$$

Так как эти величины постоянны, то опасная точка определяется в предположении, как если бы имел место только изгиб, или из условия (§§ 124 и 42, формула (93)), чтобы $\frac{\cos \varphi}{J} z + \frac{\sin \varphi}{J'} y$ было наибольшим, что обязательно имеет место в одной из точек контура сечения. Общее условие (296) прочности, если предположить, что призма подвергается воздействию в направлении z , так что $\varphi = 0$, $g'_{xy} = 0$, и обозначить через z' наибольшее значение ординаты z этого контура, сводится к

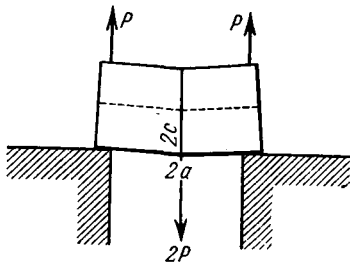


Рис. 60

$$1 = \frac{1 - \varepsilon_1''}{2} \frac{M'z'}{RJ} + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon_1''}{2} \frac{M'z'}{RJ}\right)^2 + \left(\frac{P_z}{T''\omega}\right)^2} \quad (305)$$

или, если ограничиться прямоугольной призмой и принять

$$\omega = 4bc, \quad J = \frac{4}{3}bc^3, \quad P_z = P, \quad M' = Pa, \quad \varepsilon_1'' = \frac{1}{4}, \quad z' = c, \quad \text{то}$$

$$1 = \frac{3}{8} \frac{3Pa}{4Rbc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{3Pa}{4Rbc^2}\right)^2 + \left(\frac{P}{4T''bc}\right)^2}. \quad (306)$$

Обозначим через b' , c' значения размеров b , c призмы, если бы она подвергалась разрушению только от изгиба, т. е. в результате действия пары с моментом Pa ; b'' , c'' — значения, которые им следовало бы придать, если бы призма подвергалась разрушению только от поперечного сдвига, произведенного силой P , действующей без плеча или в самой плоскости опасного сечения.

Мы получим для предварительного расчета два уравнения, легко устанавливаемых непосредственно. Они могут также выводиться из только что написанного уравнения (306), а именно: первое в предположении $P = 0$ и конечном

момента Pa , а второе, если положить $a = 0$:

$$1 = \frac{3Pa}{4Rb'c'^2}, \quad 1 = \frac{P}{4T''b''c''}. \quad (307)$$

Получая отсюда $\frac{3Pa}{4R}$ и $\frac{P}{4T''}$ для подстановки их в уравнение действительного сопротивления (306), имеем очень простое отношение между размерами призмы, подверженной одновременно изгибу и сдвигу, и размерами, которые ей дали бы только при том или другом воздействии:

$$1 = \frac{3}{8} \frac{b'c'^2}{bc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc}\right)^2}. \quad (308)$$

Оно должно служить для определения одного из двух размеров b, c , если другое измерение задается произвольно. Предположим, во-первых, что была бы дана полутолщина $c = c' = c''$; тогда для полуширины немедленно следовало бы

$$b = \frac{3}{8} b' + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b'\right)^2 + b''^2}. \quad (309)$$

Отсюда выводим следующие значения $\frac{b}{b'}$ или $\frac{b}{b''}$ при различных предположениях для найденного отношения между шириной $2b''$, которая была бы дана для одного сдвига, и шириной $2b'$ для одного изгиба или же для отношения $\frac{2c}{2a}$ между толщиной и длиной призмы (отношение равно $\frac{3T''}{R} \frac{b''}{b'}$ в соответствии с уравнениями (307), или $\frac{12}{5} \frac{b''}{b'}$, если $\frac{T''}{R} = \frac{4}{5}$ (выражение (290)):

			Для $\frac{b''}{b'} =$		
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1
			имеем $\frac{b}{b'} =$		
1,000	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554
			и $\frac{2c}{2a} =$		
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	1,697	2,4

		Для $\frac{b'}{b''} =$				
1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	
		имеем $\frac{b}{b''} =$				
1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1,000	
		и $\frac{2c}{2a} =$				
2,4	3,394	4,8	7,2	9,6	∞	

Предположим, во-вторых, что давалась бы полуширина $b = b' = b''$; тогда отношение (308) дает

$$c^2 = \frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2 + \sqrt{\left(\frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2\right)^2 + \left(\frac{c'^2}{2}\right)^2}. \quad (310)$$

Отсюда выводим:

		Для $\frac{c'^2}{c''^2} =$					
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	
		имеем $\frac{c^2}{c''^2} =$					
1,000	1,102	1,207	1,425	1,575	1,651	1,883	
		Для $\frac{c'^2}{c''^2} =$					
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	
		имеем $\frac{c^2}{c''^2} =$					
1,883	1,645	1,571	1,419	1,201	1,097	1,000	

Из этих двух таблиц мы узнаем, что то из двух воздействий, изгиб или сдвиг, которое оказывает наименьшее влияние в каждом случае, вовсе не ничтожно по отношению к другому, так как его доля влияния на величину b или c^2 измеряется любым из тех табличных значений $\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b''}$, $\frac{c^2}{c'^2}$, $\frac{c^2}{c''^2}$,

которые превышают единицу. *Итак, нельзя принять для искомого измерения наибольшее из тех измерений, которые вытекают бы либо только из условий для изгиба, либо только из условий для сдвига*, когда сдвиг на наиболее подверженном опасности сечении производится по допущенному в предыдущем параграфе способу, т. е. при свободном изгибе сечения.

Мы видим также по значениям $\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b''}$, что сдвиг начинает оказывать заметное влияние при значении $\frac{2c}{2a} = \frac{1}{2}$ и что изгиб влияет до $\frac{2c}{2a} = 10$, причем формулы для изгиба можно считать применимыми до подобного отношения между толщиной и длиной¹⁾.

¹⁾ Навье во втором издании (1833) своих «Лекций по механике в Школе мостов и дорог» (стр. 98, § 154), несомненно, чтобы ответить на обвинение, выдвинутое Вика против теории сопротивления твердых тел в отношении возможности принимать в расчет силу, которую он называет *поперечной*, создал следующую формулу, удовлетворяющую, как формула (306) или (308), двум крайним случаям; но Навье дает ее только как эмпирическую для промежуточных случаев

$$P = \frac{4bc}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + \frac{9a^2}{R^2c^2}}},$$

что сводится к

$$1 = \sqrt{\left(\frac{Pac}{RJ}\right)^2 + \left(\frac{P}{T\omega}\right)^2} \quad \text{или} \quad 1 = \sqrt{\left(\frac{b'c'^2}{bc^2}\right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc}\right)^2}.$$

Она дает $b = \sqrt{b'^2 + b''^2}$, когда $c = c' = c''$, откуда выводим:

Для $\frac{b'}{b''} =$					и для $\frac{b'}{b''} =$						
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
получаем $\frac{b}{b'} =$					и $\frac{b}{b''} =$						
1	1,031	1,054	1,118	1,255	1,414	1,414	1,225	1,118	1,054	1,031	1

Таким образом, она дает отношения слишком малые или менее надежные, чем наша формула (306) или (308), основанная на принципе (§§ 14, 21) ограничения наибольших удлинений в косых направлениях, вызванных комбинируемыми воздействиями.

Когда имеется сомнение, может ли изгибаться сечение, в котором изгибающий момент M' является наиболее значительным, нужно выбрать наибольшее из измерений, данных формулой (305) одновременного изгиба и сдвига, которая отвлекается от кривизны этого наиболее подверженного опасности сечения, и формулами и таблицами для случая только сдвига от (d_1) до (d_1^{VIII}) , о которых мы говорили в конце предыдущего параграфа, формулами, которые предполагают существование той же кривизны и которые дают в центре сечения максимальный сдвиг, превышающий в 1,3—1,5 раза сдвиг в том случае, когда сечение остается плоским и когда сдвиг одинаков во всех точках.

§ 128. Цилиндр с круговым основанием, одновременно изгибаемый, скручиваемый и растягиваемый

Мы предполагаем, что материал имеет ось симметрии, параллельную образующим цилиндра, т. е. оси x или одинаковое строение в различных поперечных направлениях. Мы берем ось z параллельно плоскости изгибающего момента и в соответствии с тем, что мы видели в § 126, пренебрегаем влиянием поперечных сдвигов, не вызванных кручением, влиянием, которое для сечений, могущих изгибаться, остается обычно ничтожным до того, как оно становится доминирующим, что случается только для чрезвычайно коротких призм.

Нужно в общей формуле сопротивления (296) принять

$$\omega = \pi r^2, \quad J = \frac{\pi r^4}{4}, \quad \varphi = 0, \quad g'_{xy} = 0, \\ g'_{xz} = 0, \quad G' = G'' = G, \quad T' = T'' = T.$$

И так как нам известно (§ 57), что кручение не искривляет круговые сечения, получаем, согласно вышеуказанной формуле (301), так же как по формулам (120), приведенным в главе VI, учитывая, что $2J_0 = \pi r^4$, выражение

$$G \sqrt{g_{xy}''^2 + g_{xz}''^2} = \frac{2M''}{\pi r^4} \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Отсюда (формула (296)), если наибольшее значение z и

$\sqrt{y^2 + z^2}$ равно r , находим уравнение

$$1 = \frac{1 - \varepsilon_1}{2R} \left(\frac{P_x}{\pi r^2} + \frac{4M'}{\pi r^3} \right) + \sqrt{\left[\frac{1 + \varepsilon_1}{2R} \left(\frac{P_x}{\pi r^2} + \frac{4M'}{\pi r^3} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{T} \frac{2M''}{\pi r^3} \right)^2}, \quad (311)$$

которое можно написать так:

$$(R \pi r^3 - P_x r - 4M')(R \pi r^3 + \varepsilon_1 P_x r + 4\varepsilon_1 M') = 4 \left(\frac{R}{T} \right)^2 M''^2. \quad (312)$$

Оно определит значение радиуса r цилиндра, способного сопротивляться одновременно: 1) изгибу, вызванному парой M' ; 2) кручению, вызванному парой M'' ; 3) растяжению, вызванному продольной силой P_x .

Назовем r' , r'' , r''' значения, которые нужно было бы соответственно дать r , если призма подвергалась бы только изгибу, только кручению, только растяжению. Можно предварительно и легко определить их по трем уравнениям:

$$1 = \frac{1}{R} \frac{4M'}{\pi r'^3}, \quad 1 = \frac{1}{T} \frac{2M''}{\pi r''^3}, \quad 1 = \frac{1}{R} \frac{P_x}{\pi r'''^2}, \quad (313)$$

поддающимся непосредственному выводу без вывода уравнения (311). Тогда

$$1 = \frac{1 - \varepsilon_1}{2} \left(\frac{r'''^2}{r^2} + \frac{r'^3}{r^3} \right) + \sqrt{\left[\frac{1 + \varepsilon_1}{2} \left(\frac{r'''^2}{r^2} + \frac{r'^3}{r^3} \right) \right]^2 + \left(\frac{r''^3}{r^3} \right)^2}, \quad (314)$$

или

$$(r^3 - r'''^2 r - r'^3) (r^3 + \varepsilon_1 r'''^2 r + \varepsilon_1 r'^3) = r''^6. \quad (315)$$

Именно в этой последней форме оно будет легко решаться относительно r посредством численного подбора.

Обычно члены, содержащие P_x или r'''^2 , которые возникают из-за продольного растяжения, равны нулю или очень малы. Если их зачеркнуть и принять соотношение (289)

$\frac{R}{1 + \varepsilon_1} = T$, то, обозначая через M равнодействующий или главный момент сил $\sqrt{M'^2 + M''^2}$, получаем:

$$R \frac{\pi r^3}{4} = \frac{1 - \varepsilon_1}{2} M' + \frac{1 + \varepsilon_1}{2} M. \quad (316)$$

Несмотря на чрезвычайную простоту этого выражения¹⁾, из него можно получить ясное представление об одновременном действии изгиба и кручения, если пользоваться уравнением (314), которое после вычеркивания r'''^2 сводится к

$$r^3 = \frac{1 - \varepsilon_1}{2} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon_1}{2} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}, \quad (317)$$

и обратиться к помещенной на стр. 314 таблице значений отношения куба искомой величины r к предварительно вычисленным значениям r'^3 и r''^3 для различных численных значений $\varepsilon_1 = \frac{-\partial_y E_y R_x}{\partial_x R_y E_x}$ (§ 122).

Очевидно, что никогда не следует ε_1 приравнять нулю, так как это предполагало бы отсутствие какого-либо поперечного сжатия. Не нужно, кроме того, полагать $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ или большей величине, так как, когда объемное расширение равно (§ 6) $\partial_x + \partial_y + \partial_z = \partial_x (1 - \varepsilon - \varepsilon')$, то отсюда вытекает, что при пренебрежении различиями между ε и ε_1 , ε' и ε'_1 (§ 122) продольное растяжение не увеличивало бы объема, чего нельзя допустить.

Следовательно, мы считаем, что ε_1 можно изменять только от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{3}$.

Итак, приведенный выше расчет показывает нам, что в этих пределах и даже немного за ними результаты очень мало отличаются друг от друга. Следовательно, не опасаясь ошибки, можно принимать обычно, как мы сказали в конце § 122,

$$\varepsilon_1 \text{ и даже } \varepsilon_1'' = \frac{1}{4}.$$

Отсюда следует формула

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}, \quad (318)$$

по которой проделано полное вычисление и результаты которого даны в приведенной выше таблице, в строке, соответствующей $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$. Эти цифры показывают, насколько нужно увеличить наибольшее значение куба радиуса, вычисленного

¹⁾ Я его дал в Comptes rendus, 30 октября 1843 г., т. XVII, стр. 948.

	Для $\frac{r'^3}{r^3} =$						и для $\frac{r^3}{r'^3} =$					
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
Если $\varepsilon_1 = 0$	получаем $\frac{r^3}{r'^3} =$						и $\frac{r^3}{r'^3} =$					
1	1,059	1,101	1,207	1,366	1,618	1,618	1,414	1,281	1,181	1,133	1	
$\frac{1}{5} = 0,20$	1	1,050	1,086	1,181	1,327	1,566	1,566	1,369	1,244	1,153	1,111	1
$\frac{1}{4} = 0,25$	1	1,0481	1,0833	1,1754	1,3187	1,5542	1,5542	1,3584	1,2352	1,1465	1,1059	1
$\frac{1}{3} = 0,333$	1	1,045	1,079	1,167	1,305	1,535	1,535	1,341	1,221	1,136	1,097	1
$\frac{1}{2} = 0,5$	1	1,041	1,071	1,151	1,281	1,500	1,500	1,309	1,193	1,114	1,068	1
1	1	1,031	1,054	1,118	1,225	1,414	1,414	1,225	1,118	1,054	1,031	1

по сопротивлению изгибу или кручению, чтобы получить такое значение, при котором цилиндр способен сопротивляться деформациям этих двух типов, считая, что они имеют место одновременно.

§ 129. Вращающийся вал, изгибаемый и скручиваемый посредством двух шестерен или двух приводных ремней.

Консоль переменного диаметра, удовлетворяющая условию равного сопротивления

Начинаем рассмотрение с последней. Считаем, что она горизонтальна и закреплена в *A*, а в *B* на нее действует

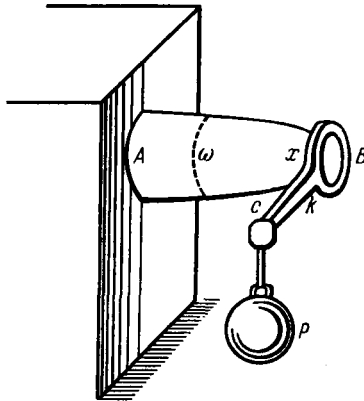


Рис. 61

нагрузка *P*, приложенная к концу горизонтального поперечного рычага $Bc = k$ (рис. 61). Для сечения ω на расстоянии *x* от точки *B* получим $M' = Px$, $M'' = Pk$. Условие сопротивления (311)

$$1 = \frac{3}{8} \frac{4 M' r}{\pi R r^4} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{4 M' r}{\pi R r^4}\right)^2 + \left(\frac{2 M'' r}{\pi T r^4}\right)^2}$$

обратится в

$$2 \frac{R \pi r^3}{P} = 3x + 5 \sqrt{x^2 + k^2}, \tag{319}$$

если положить $\frac{T}{R} = \frac{4}{5}$. Это позволит получить путем построения ряд значений радиуса *r*.

Что касается трансмиссионного вала (рис. 62), то пусть: a — его длина между двумя цапфами, т. е. между центрами опор с подшипниками, которые их поддерживают;

P — сила, которая действует по касательной к окружности зубчатого колеса или шкива, укрепленного на этом

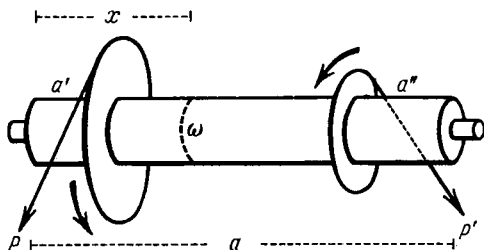


Рис. 62

валу, и в перпендикулярной плоскости, чтобы заставить его вращаться;

P' — сила сопротивления, приложенная таким же образом ко второму шкиву (величина которой определяется по P в соответствии с отношением радиусов шкивов путем известного расчета трения);

a, a' — углы, которые образуют в противоположном направлении с вертикалью направления этих двух сил;

Π — вес вала; $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$ — веса первого и второго шкивов;

a' — расстояние от первой цапфы до шкива, на который действует сила P ;

a'' — расстояние от шкива, на который действует сила P' , до второй цапфы;

x — расстояние от первой цапфы до какого-либо сечения ω части $a - a' - a''$ вала, заключенной между двумя шкивами (единственная часть, которая была бы скручена заметным образом, так как части между каждым шкивом и ближайшим концом вала будут скручиваться только в силу трения в цапфах).

Силы, которые стремятся вызвать изгиб вала в сечении ω , действуют с одной стороны этого сечения, т. е.: 1) сила P' ; 2) вес второго шкива $\tilde{\omega}'$; 3) вес $\frac{\Pi}{a}(a - x)$ части вала между ω и второй цапфой; 4), 5) наконец, реакция подшипника,

на который опирается цапфа; эта реакция получается просто при разложении каждой из сил $P, P', \tilde{\omega}, \tilde{\omega}', \Pi$ на две другие, параллельные и проходящие через два подшипника, что дает на втором подшипнике силу $P \frac{a'}{a}$, параллельную и противоположную P , и силу $P' \frac{a-a''}{a}$, параллельную и противоположную P' ; 6) вертикальную силу, действующую снизу вверх: $\tilde{\omega} \frac{a'}{a} + \tilde{\omega}' \frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}$. Эти различные силы создают относительно перпендикуляров к их направлениям и к оси вала, проведенным через центр ω , моменты, плечи рычагов которых равны $a-x$ для реакций, $a-a''-x$ для сил $P', \tilde{\omega}'$, наконец, $\frac{a-x}{2}$ для веса $\frac{\Pi}{a}(a-x)$ части вала за сечением ω , который можно рассматривать как сосредоточенный в центре тяжести. Стало быть, если обозначим через m, m', m'' моменты, заключенные в плоскостях, соответственно параллельных силе P , силе P' и вертикали, и введем для краткости обозначения

$$\left. \begin{aligned} m &= P \frac{a'}{a} (a-x), & m' &= P' \frac{a''}{a} x, \\ m'' &= \tilde{\omega} a' \frac{a-x}{a} + \tilde{\omega}' a'' \frac{x}{a} - \frac{\Pi x}{2} \frac{a-x}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (320)$$

то изгибающий момент, который проистекает от их сложения, равен

$$M' = \sqrt{m^2 + m'^2 + m''^2 + 2m'm'' \cos \alpha' + 2m''m \cos \alpha + 2mm' \cos (\alpha + \alpha')}. \quad (321)$$

Это выражение действительно имеет минимум на участке между двумя шкивами, но оно имеет аналитический максимум только в виде бесконечности, так что его наибольшее значение имеет место у одного или другого шкива, т. е. для $x = a'$ или для $x = a - a''$.

Крутящий момент M'' — не что иное, как момент силы сопротивления P' , сложенный с моментом трения второй цапфы. Таким образом, обозначая через ρ' радиус второго шкива, ρ'' — радиус соответствующей цапфы, R — реакцию подшипника, т. е. равнодействующую трех сил: $P \frac{a'}{a}$, $P' \frac{a-a''}{a}$ и $\tilde{\omega} \frac{a'}{a} + \tilde{\omega}' \frac{a-a''}{a} + \frac{\Pi}{2}$ (пп. 4, 5, 6), выражение которой

будет иметь тот же вид, что и выражение (321) момента M' , и f — коэффициент трения, получаем:

$$M'' = P'e' + \frac{fe''}{\sqrt{1+f^2}} R. \quad (322)$$

Если эти моменты M' , M'' , при вычислении которых в первом приближении можно пренебречь еще неизвестным весом вала или назначить его произвольно, уже получены, то формула (318)

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2},$$

где $r'^3 = \frac{4M'}{\pi R}$, $r''^3 = \frac{M''}{\pi T}$, даст радиус r , который должен иметь вал.

Если для M' мы получили наибольшее из двух значений (321), соответствующих $x = a'$, $x = a - a''$, то найденное таким путем значение r будет радиусом цилиндрического вала постоянного сечения.

Но если мы подставим вместо этого изгибающего момента M' его общее выражение (321) в виде функции от x , то радиус r будет функцией x , и тело будет обладать *равным сопротивлением*. Когда угол $a + a'$ будет малым, а произведения Pa' , $P'a''$ будут мало отличаться друг от друга, то M' и, следовательно, r будут мало изменяться. Но если этот угол равен, например, двум прямым углам или если две силы P , P' параллельны и противоположны и мы пренебрегаем нагрузками $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, Π , то момент M' , который сводится к $Pa \frac{a-x}{a} - P'a'' \frac{x}{a}$, обращается в нуль в точке, где

$$x = a \frac{Pa'}{Pa' + P'a''},$$

и вал не испытывает никакого изгиба в этом месте, так что можно, особенно в данном случае, получить заметную экономию материала.

§ 130. Прямоугольная призма, одновременно изогнутая и скрученная. Общие формулы

Возьмем, как в § 113, оси y и z параллельными сторонам $2b$, $2c$ сечений, называя $2b$ наибольшую сторону, если $G'' = G'$, а вообще ту, для которой

$$b \sqrt{G''} > c \sqrt{G'};$$

и обозначим, как в том же параграфе и в последней части таблицы (§ 138) конца мемуара, через γ' и γ'_1 числа, которые для какой-либо точки сторон $2b$ и для какой-либо точки сторон $2c$ определяются соответственно формулами:

$$-g_{xy} \left(\text{при } \frac{z}{c} = 1 \right) = \gamma' c \theta, \quad g_{xz} \left(\text{при } \frac{y}{b} = 1 \right) = \gamma'_1 b \theta;$$

эти числа превращаются в γ и γ_1 пятого и шестого столбцов первой части той же заключительной таблицы, когда указанные точки находятся посередине сторон. Так как имеем (тот же § 113, формула (258) или та же таблица) соотношение

$$M_x = M'' = \mu G' \theta b c^3,$$

то, исключая кручение θ , находим:

$$-G' g_{xy} = \gamma' \frac{M''}{\mu b c^2}, \quad G'' g_{xz} = \gamma'_1 \frac{b^2 G''}{c^2 G'} \frac{M''}{\mu b^2 c}. \quad (323)$$

Подставляя в общую формулу прочности (296) или, что то же самое, последовательно в формулы, которые получаем из (286), подставляя в них также общее значение (293) $E \partial_x$ и пренебрегая, как только что сделали, влияниями растяжения и сдвигов, вызванных составляющими P_x, P_y, P_z , полу-

чим, принимая во внимание $J = \frac{4}{3} b c^3, \quad J' = \frac{4}{3} b^3 c$, то или другое из следующих двух условий прочности, соответственно чему опасная точка, еще неизвестная, будет находиться на стороне $2b$, для которой $z = c, g_{xz} = 0$, или на стороне $2c$, для которой $y = b, g_{xy} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \max \left. \begin{aligned} &\frac{1 - \epsilon_1}{2R} \frac{3M'}{4bc^2} \left(\cos \varphi + \frac{c}{b} \frac{y}{b} \sin \varphi \right) + \\ &+ \sqrt{\left[\frac{1 + \epsilon_1}{2R} \frac{3M'}{4bc^2} \left(\cos \varphi + \frac{c}{b} \frac{y}{b} \sin \varphi \right) \right]^2 + \left(\frac{\gamma'}{T'} \frac{M''}{\mu bc^2} \right)^2}, \end{aligned} \right\} \\ 1 &= \max \left. \begin{aligned} &\frac{1 - \epsilon'_1}{2R} \frac{3M'}{4bc^2} \left(\frac{z}{c} \cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi \right) + \\ &+ \sqrt{\left[\frac{1 + \epsilon'_1}{2R} \frac{3M'}{4bc^2} \left(\frac{z}{c} \cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi \right) \right]^2 + \left(\frac{\gamma'_1}{T''} \frac{bG''}{cG'} \frac{M''}{\mu bc^2} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (324)$$

Так как имеется два неизвестных размера b и c , то нужно задаться произвольно одним из них или их отношением.

Допустим, что мы выбрали их отношение $\frac{b}{c}$.

Таблица в конце мемуара и в случае надобности формула в виде ряда (261) § 113 дадут для отношения $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$, которое отсюда последует, значения γ' , соответствующие каждому из значений $\frac{y}{b}$, и значения γ'_1 , соответствующие каждому из значений $\frac{z}{c}$, так что можно будет вычислить численными пробами (см. ниже примеры §§ 132, 133) два максимума правых частей уравнений. Мы возьмем как выражение для условия сопротивления то из двух только что написанных уравнений, для которого максимум будет наибольшим, т. е. дающим для произведения bc^2 наибольшее значение.

Мы можем этим уравнениям дать другую форму, называя, как в предыдущем параграфе, b' , c' и b'' , c'' значения для b , c , если имеется только изгиб и если имеется только кручение. Они дают сначала, полагая $M'' = 0$, $y = b = b'$, $z = c = c'$,

$$b' c'^2 = \frac{3M'}{4R} (\cos \varphi + \frac{c'}{b'} \sin \varphi) \quad (325)$$

и, полагая $M' = 0$, $\gamma' = \gamma$, $\gamma'_1 = \gamma_1$, которые являются наибольшими значениями γ' и γ'_1 , и $b = b''$, $c = c''$,

$$b'' c''^2 = \frac{M''}{\mu} \times \left(\text{наибольшее из двух отношений } \frac{\gamma}{T'} \text{ и } \frac{\gamma_1 b'' G''}{T'' c'' G'} \right).$$

Предположим, что это было бы первое из двух отношений в скобках $\frac{\gamma}{T'}$, которое имело бы наибольшее значение, или что опасная точка, когда имеется только кручение, была бы посередине стороны $2b$, что случится почти всегда, так что

$$b'' c''^2 = \frac{\gamma}{\mu} \frac{M''}{T'}. \quad (326)$$

Если получить $\frac{M'}{R}$, $\frac{M''}{T'}$ из выражений (325), (326) и подста-

вить их в (324), то последние принимают вид

$$bc^2 = \max \frac{1 - \varepsilon_1}{2} \frac{\cos \varphi + \frac{c}{b} \frac{y}{b} \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{c'}{b'} \sin \varphi} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon_1}{2} \frac{\cos \varphi + \frac{c}{b} \frac{y}{b} \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{c'}{b'} \sin \varphi} b' c'^2 \right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma} b'' c''^2 \right)^2},$$

$$bc^2 = \max \frac{1 - \varepsilon'_1}{2} \frac{\frac{z}{c} \cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{c'}{b'} \sin \varphi} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon'_1}{2} \frac{\frac{z}{c} \cos \varphi + \frac{c}{b} \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{c'}{b'} \sin \varphi} b' c'^2 \right)^2 + \left(\frac{G'' T'}{G' T''} \frac{\gamma_1 b}{\gamma c} \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} b'' c''^2 \right)^2}.$$

(327)

Нужно взять наибольшее из двух значений bc^2 , даваемых этими формулами. Если материал имеет ось упругости, параллельную оси x , то мы заменим во второй из этих двух формул ε'_1 на ε_1 и $\frac{G'' T'}{G' T''}$ на 1.

Если одно из сечений с наибольшим изгибающим моментом M' не может искривляться (§ 125), то нужно будет вычислить приблизительно его размеры, подставляя вместо $G' g''_{xy}$, $G'' g''_{xz}$ их значения (301) в общую формулу (296), что даст, ввиду того что опасная точка или максимум обязательно будет соответствовать тогда $y = b$, $z = c$ или одному из углов сечения, выражение

$$1 = \frac{1 - \varepsilon'_1}{2} \frac{b' c'^2}{bc^2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \varepsilon'_1}{2} \frac{b' c'^2}{bc^2} \right)^2 + \frac{9 M''^2 \left(\frac{G''^2 c^2}{T''^2} + \frac{G''^2 b^2}{T''^2} \right)}{16 b^2 c^2 (G' c^2 + G'' b^2)^2}}, \quad (328)$$

которое сводится к формуле

$$bc^2 = \frac{3}{8} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b' c'^2 \right)^2 + \left(\frac{3 M'' c}{4 T' \sqrt{b^2 + c^2}} \right)^2} \quad (329)$$

при $G' = G''$, $T' = T''$, $\varepsilon'_1 = \frac{1}{4}$. Имея в виду уравнение

(326) $b'' c''^2 = \frac{\gamma M''}{\mu T}$, где b'' , c'' представляют собой всегда размеры, полученные для случая кручения, когда сечение может свободно искривляться, приходим к выражению

$$bc^2 = \frac{3}{8} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b' c'^2\right)^2 + \frac{9}{16} \frac{\left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^2}{b^2} (b'' c''^2)^2}, \quad (330)$$

где коэффициент $(b'' c''^2)^2$ имеет значения 0,780; 0,591; 0,435; 0,257 при $\frac{b}{c} = 1; 1,5; 2$ и 3 в соответствии с заключительной таблицей. Возьмем для b , c , если они должны быть одинаковыми во всех сечениях, наибольшие из размеров, даваемых этим выражением и выражениями (327). Если даже сечение, вынужденное оставаться плоским, наиболее подвергается опасности в отношении изгиба и имеет наибольшее значение M' и, следовательно, $b' c'^2$, то всегда имеются поблизости другие сечения, в которых M' изменяется мало и которые могут изгибаться почти свободно.

§ 131. Та же прямоугольная призма. Случай ее изгибания в плоскости наиболее легкого изгиба, т. е. в плоскости, параллельной наименьшим сторонам $2c$ (см. § 133)

Этот случай будет иметь место (§ 42): 1) если плоскость действия сил или момента M' сама параллельна $2c$, т. е. угол $\varphi = 0$; или 2) если призма плоская, т. е. c чрезвычайно мало по сравнению с b , а угол φ не слишком близок к прямому углу, так что можно пренебречь величиной $\frac{c}{b} \operatorname{tg} \varphi$ по сравнению с 1.

Первое выражение (324) или (327) при $\gamma' = \gamma$ и $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}$ сводится к формуле

$$\begin{aligned} bc^2 &= \frac{3}{8} \frac{3M'}{4R} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{3M'}{4R}\right)^2 + \left(\frac{\gamma M''}{\mu T'}\right)^2} = \\ &= \frac{3}{8} b' c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b' c'^2\right)^2 + (b'' c''^2)^2}. \quad (331) \end{aligned}$$

Эта формула пригодна не только в случае заданного отноше-

ния $\frac{b}{c}$ двух размеров, но даже и тогда, когда задают тот или другой из них или какую-нибудь зависимость между ними, если только последнее значение, подобранное для $\frac{\gamma}{\mu}$, будет соответствовать согласно заключительной таблице (§ 138) последнему значению, найденному для $\frac{b}{c}$.

Что касается второго выражения (327), то его почти никогда не будем принимать в расчет, так как член вне корня и первый член под корнем достигают значений соответствующих членов первого выражения только для $\frac{z}{c} = 1$, что обращает в нуль γ'_1 , т. е. второй член под корнем. Для другого какого-либо значения $\frac{z}{c}$ этот член будет почти всегда меньше, чем $(b''c''^2)^2$ первого выражения (327), так как $\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} < 1$, $\frac{\gamma_1 b \sqrt{G''}}{\gamma c \sqrt{G'}} < 1$, а $\frac{G'' T'}{G' T''}$ мало отличается от единицы.

Итак, за исключением случая весьма сильных различий структуры в поперечных направлениях, нужно пользоваться первым выражением (327) или только что написанной формулой (331). Эта формула уже известного нам вида дает те же численные отношения между величинами bc^2 , $b'c'^2$, $b''c''^2$, как и между кубом радиуса r^3 и величинами r'^3 , r''^3 в случае кругового цилиндра, только изогнутого или только скрученного.

Мы не будем повторять ни здесь, ни в следующих параграфах ранее сказанного о расчете в тех случаях, когда одно из наиболее подвергающихся опасности сечений вынуждено оставаться плоским, и о возможном увеличении в таких случаях размеров сечения либо по всей призме, либо на участке малой длины.

§ 132. Призма с квадратным основанием, изогнутая в любой плоскости и одновременно скрученная

Когда основание квадратное, нужно в формулах (327) принять $b = c$, $b' = c'$, $b'' = c''$, $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma'_1 = \gamma'$ и, если мы считаем структуру одинаковой в двух поперечных направлениях, положить $\frac{G'' T'}{G' T''} = 1$. Можно ограничиться первой из

этих двух формул, условившись взять ось z параллельной стороне, составляющей наименьший угол с плоскостью действия сил, так чтобы φ не превышало 45° . Следовательно, имеем:

$$\frac{b^3}{b'^3} = \max \frac{3}{8} \frac{1 + \frac{y}{b} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{1 + \frac{y}{b} \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} \right)^2 + \left(\frac{y'}{\gamma} \frac{b'^3}{b^3} \right)^2}. \quad (332)$$

В таблице на стр. 325 приведены различные значения правой части этого выражения.

По наибольшим цифрам каждой горизонтальной строки мы замечаем, где будет иметь место наибольшее значение правой части уравнения (331), и чему оно будет равняться. Взяв его за значение $\frac{b^3}{b'^3}$, получаем для определения стороны квадратной призмы, подвергнутой одновременно изгибу и кручению, таблицу (стр. 326), первая строка которой, соответствующая $\varphi = 0$, была уже вычислена в §§ 127 и 128.

§ 133. Призма с прямоугольным основанием, одна из сторон которого вдвое больше другой, изогнутая в любой плоскости, параллельной или наклоненной к ее граням, и одновременно скрученная

Если в формулах (327) § 130, выражающих условия сопротивления прямоугольной призмы (рис. 63) для различ-

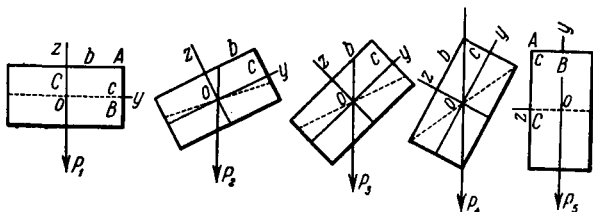


Рис. 63

ных положений OP_2, OP_3, OP_4, OP_5 плоскости действия сил по отношению к сторонам основания (расчет, относящийся к положению OP_1 , уже сделан), положить $b = 2c$, а также $G' = G'', T' = T'', \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \frac{1}{4}$, то, взяв $\frac{y'}{\gamma}$ в столбце $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$ последней части таблицы в конце мемуара, получим для пра-

Одновременный изгиб и кручение квадратной призмы со стороной $2b$

Для $\frac{b^3}{b'^3} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1	Для $\frac{b^3}{b'^3} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
когда призма подвергается изгибу параллельно двум ее боковым граням ($\operatorname{tg} \varphi = 0$):													
$\frac{b^3}{b'^3} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	$\frac{b^3}{b'^3} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1
когда она подвергается действию сил в плоскости, делящей противоположные стороны оснований в отношениях 3 : 1 и 1 : 3 ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$):													
$\frac{b^3}{b'^3} =$	1	1	1	1,000	1,106	1,350	$\frac{b^3}{b'^3} =$	1,350	1,226	1,146	1,093	1,047	1
когда она подвергается изгибу параллельно одной из диагоналей оснований ($\operatorname{tg} \varphi = 1$):													
$\frac{b^3}{b'^3} =$	1	1	1	1,000	1,033	1,269	$\frac{b^3}{b'^3} =$	1,269	1,167	1,112	1,069	1,050	1
и если наиболее подверженное опасности сечение вынуждено оставаться плоским, то мы получаем (формула (330), полагая $b = c$), каким бы ни было φ :													
$\frac{b^3}{b'^3} =$	1	1,038	1,066	1,140	1,254	1,457	$\frac{b^3}{b'^3} =$	1,457	1,253	1,124	1,032	0,991	0,883

вой части первой из формул (327) значения, указанные в таблице на стр. 328 и 329.

До положения, когда плоскость изгиба имеет направление OP_4 , т. е. до $\operatorname{tg} \varphi = 2$ включительно, можно не вычислять по второй формуле (327). Действительно, как видно по пунктиру, который представляет на каждом рисунке линии нейтральных волокон, образующие с медианой, параллельной большим сторонам, углы ψ , тангенс которых равен

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{J}{J'} \operatorname{tg} \varphi = \frac{c^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{4}$$

в соответствии с формулой (92) § 42, удлинения ∂_x волокон, вызванные только изгибом, больше или, по крайней мере, такие же в различных точках полустороны $CA = b$, как и в точках, расположенных таким же образом на полустороне $BA = c$; так что когда сдвиги более значительны на CA , то опасная точка должна находиться там, а не на BA .

Иначе обстоит дело для случая на пятом рисунке, где плоскость изгиба OP_5 параллельна большим сторонам и призма подвергается действию изгиба, как мы сказали, в положении на ребро. Вычисление по второй формуле (327), которая сводится тогда к

$$\frac{bc^2}{b'c'^2} = \frac{3}{8} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(2\frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{b''c''^2}{b'c'^2}\right)^2}, \quad (333)$$

дает, принимая во внимание, что (заключительная таблица

§ 138) $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{0,73945}{1,86012}$:

Для $\frac{b''c''^2}{b'c'^2} =$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
$\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1,116	1,212	1,386	1,661	2,084

И эти числа, превышающие соответственно 1,000; 1,000; 1,127; 1,492; 2,050, которые являются наибольшими из чисел, данных в предыдущей таблице для $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, показывают, что когда наша призма подвергается действию сил в положении на ребро или параллельно большой

$$\text{Значения } \frac{bc^2}{b'c'^2} = \frac{3}{8} \frac{\cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi} +$$

В точках		$\frac{y}{b}$	0	0,1	0,2	0,3
		Значения $\frac{\gamma'}{\gamma}$	1,000	0,9963	0,9846	0,9640
Положение OP_3 или $\text{tg } \varphi = \frac{1}{2}$	$\frac{b''c''^2}{b'c'^2} = \frac{1}{2}$	1,007	1,035	
	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1,166	1,187	1,190	
	1	1,418	1,428	1,431	1,426	
	$\sqrt{2}$	1,800	1,807	1,803	
	2	2,362	2,533	
	$\frac{b''c''^2}{b'c'^2} = \frac{1}{2}$	0,901	0,948	
	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1,068	1,108	
	1	1,333	1,350	1,361	1,363	
	$\sqrt{2}$	1,724	1,741	
	2	2,293	2,303	2,297	
	$\frac{b''c''^2}{b'c'^2} = \frac{1}{2}$	0,777	0,847	
	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,935	1,016	
1	1,235	1,260	1,279	1,290		
$\sqrt{2}$	1,636	1,667		
2	2,212	2,228	2,230		
OP_3 или $\text{tg } \varphi = \infty$; $\cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1$	$\frac{b''c''^2}{b'c'^2} = \frac{1}{2}$	0,500	0,540	0,583	0,630	
	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,707	0,745	0,782	0,819	
	1	1,000	1,036	1,068	1,094	
	$\sqrt{2}$	1,414	1,448	1,473	1,488	
	2	2,000	2,031	2,048	2,050	

$$\sqrt{\left(\frac{5 \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{y}{b} \sin \varphi}{8 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \frac{b''c''^2}{b'c'^2}\right)^2}$$

0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,9321	0,8857	0,8196	0,7260	0,5916	0,3896	0,000
1,051	1,053	1,051	1,029	1
1,188	1,161	1,091	1
1,414	1,387	1,346	1,286	1,203	1,093	1
1,758	1,639	1,389	1
2,274	2,082	1,710	1
0,983	1,004	1,004	1
1,127	1,118	1,068	1
1,358	1,330	1,307	1,256	1,181	1,081	1
1,710	1,604	1,370	1
2,289	2,051	1,669	1
0,902	0,946	0,973	1
1,054	1,066	1,039	1
1,292	1,283	1,260	1,218	1,154	1,064	1
1,651	1,562	1,345	1
2,177	2,014	1,647	1
0,678	0,729	0,780	0,831	0,881	0,933	1
0,855	0,887	0,915	0,937	0,952	0,964	1
1,115	1,127	1,126	1,110	1,074	1,022	1
1,492	1,478	1,443	1,378	1,275	1,125	1
2,031	1,986	1,907	1,779	1,584	1,299	1

стороне $2b$, опасная точка находится в B , посредине малой стороны $2c$.

Взяв наибольшие численные значения, найденные таким образом для $\frac{bc^2}{b'c'^2}$, и выводя отсюда значения $\frac{bc^2}{b''c''^2}$, когда $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}$ больше единицы, получаем следующую таблицу (стр. 331; первая строчка цифр этой таблицы уже получена в §§ 127 и 128). Таким образом, когда призма подвергается действию сил плашмя, сечение, вынужденное оставаться плоским, имеет размеры не большие, чем у сечений, которые могут свободно искривляться.

§ 134. Одновременный изгиб и кручение призм с другими основаниями (кроме круга и прямоугольника).

Эллиптический цилиндр

Общая формула (296) § 124 будет всегда применима к различным призмам, которые могут одновременно подвергаться растяжению и поперечному сдвигу силами P_x, P_y, P_z .

Мы приведем в *заключительном резюме* (§ 136) выражения для сдвигов, вызванных кручением, которые соответствуют уравнениям сечений третьей, четвертой и восьмой степеней.

Рассмотрим здесь только цилиндр с эллиптическим основанием, большая и малая оси которого $2b$ и $2c$ параллельны осям y и z . В соответствии с выражениями § 107 (формулы (241) и (242))

$$G'g''_{xy} = -\frac{M_x}{2J}z,$$

$$G''g''_{xz} = \frac{M_x}{2J'}y$$

формула (296) превратится при $\varepsilon_1'' = \frac{1}{4}$ в

$$1 = \max \frac{3}{8R} \frac{4M'}{\pi bc} \left(\frac{\cos \varphi}{c^2} z + \frac{\sin \varphi}{b^2} y \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8R} \frac{4M'}{\pi bc} \left(\frac{\cos \varphi}{c^2} z + \frac{\sin \varphi}{b^2} y \right) \right]^2 + \left(\frac{2M''}{\pi bc} \right)^2 \left(\frac{z^2}{c^4 T'^2} + \frac{y^2}{b^4 T''^2} \right)}, \quad (334)$$

Одновременный изгиб и кручение призмы с прямоугольным основанием с полусторонами b и c .
Случай, когда $b = 2c$

Для $\frac{b^{\prime}c^{\prime\prime 2}}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} =$ = 0,707	1	Для $\frac{b^{\prime}c^{\prime 2}}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} =$ = 0,707	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
<p>когда призма подвергается действию сил плашмя, т. е. когда плоскость действия изгибающих сил параллельна малым сторонам ($\varphi = 0$):</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1,000
<p>когда плоскость действия изгибающих сил перпендикулярна к одной из диагоналей ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$):</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,053	1,190	1,431	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,431	1,278	1,181	1,000
<p>когда плоскость действия сил одинаковым образом наклонена (т. е. на 45°) к обеим сторонам основания ($\operatorname{tg} \varphi = 1$):</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,004	1,127	1,363	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,363	1,231	1,151	1,000
<p>когда плоскость действия сил параллельна одной из диагоналей, так что изгиб производится относительно другой диагонали ($\operatorname{tg} \varphi = 2$):</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,000	1,066	1,292	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,292	1,179	1,115	1,000
<p>когда призма подвергается действию сил в положении на ребро, т. е. когда плоскость действия изгибающих сил параллельна большим сторонам ($\operatorname{tg} \varphi = \infty$):</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,116	1,212	1,386	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,386	1,175	1,042	1,000
<p>и если наиболее подверженное опасности сечение является одним из сечений, которые не могут искривляться при кручении (формула (330) для $b = 2c$), каким бы ни было φ:</p>													
$\frac{bc^2}{b^{\prime}c^{\prime 2}} =$	1	1,033	1,058	1,125	1,231	1,413	$\frac{bc^2}{b^{\prime\prime}c^{\prime\prime 2}} =$	1,413	1,201	1,074	0,980	0,937	0,687

если пренебречь отношением $\frac{P_x}{\omega}$, так же как частями g'_{xy} , g'_{xz} сдвигов, вызванными поперечными воздействиями, и подставить вместо J , J' их значения и M'' вместо M_x . Максимум надо искать относительно двух переменных y , z , связанных соотношением

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

так как опасная точка находится на контуре сечения.

Если мы берем один из двух самых простых случаев, когда $\sin \varphi = 0$ или $\cos \varphi = 0$, то дифференцирование правой части уравнения (334) действительно приведет к уравнению первой степени, дающему значение z или y , которое обращает дифференциал в нуль; мы легче получим подобное уравнение, если будем дифференцировать только после того, как приравняем выражение (334) неопределенной величине и перенесем члены, чтобы исключить корень, принимая затем неопределенную величину равной единице, а ее дифференциал нулю.

Но мы выясним вскоре, что найденные таким образом значения z или y не относятся к вопросу о максимуме, который нужно определить. И это неудивительно, так как выражение (334) для $\sin \varphi = 0$ или $\cos \varphi = 0$ в крайних случаях при $M'' = 0$ или $M' = 0$ имеет первую степень относительно z и y , а его квадрат первую степень относительно z^2 и y^2 ; но известно, что нельзя получать посредством дифференцирования максимум функции первой степени, если ее аргумент может принимать только ограниченные значения (§ 121).

Следовательно, в каждом случае, т. е. для каждого значения угла φ , отношения $\frac{M''}{M'}$ изгибающих и крутящих моментов и т. д., лучше будет разыскать максимум путем численного приближения, так же как мы советовали в § 121.

Мы воздерживаемся от этого, когда при $T' = T''$ призма подвергается изгибу плашмя или параллельно малой оси $2c$ оснований, т. е. когда $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$, так как опасная точка соответствует тогда, очевидно, $y = 0$, $z = c$ или одному из концов этой малой оси, что дает, когда $b'c'^2$ и $b''c''^2$ явля-

ются значениями bc^2 при $M'' = 0$ и $M' = 0$, формулу

$$bc^2 = \frac{3}{8} b'c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b'c'^2\right)^2 + (b''c''^2)^2}. \quad (335)$$

Из нее получаем те же следствия (§§ 131, 127), что и из полностью подобной формулы (331), пригодной для прямоугольной призмы, подвергнутой действию сил, приложенных плашмя.

Но если эллиптическая призма подвергается воздействию сил *в положении на ребро*, то уже необходимы попытки, чтобы путем приближения определить опасную точку и условие сопротивления. В самом деле, полагая $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$, $T' = T'' = T$ и имея в виду, что в крайних случаях $M'' = 0$, $M' = 0$, соответственно получаем

$$1 = \frac{4M'}{R\pi b'^2c'}, \quad 1 = \frac{2M''}{T\pi b''c''^2} \quad (336)$$

и, учитывая, что на контуре $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, приводим уравнение (333) к виду

$$1 = \max \frac{3}{8} \frac{b'^2c'}{b^2c} \frac{y}{b} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{b'^2c'}{b^2c} \frac{y}{b}\right)^2 + \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}\right] \left(\frac{b''c''^2}{bc^2}\right)^2} \quad (337)$$

или

$$bc^2 = \max \frac{3}{8} \frac{y}{b} b'c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{y}{b} b'c'^2\right)^2 + \left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}\right] (b''c''^2)^2}, \quad (338)$$

если для того, чтобы избавиться от неопределенности, мы зададимся отношением осей $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''}$, т. е. положим $\frac{b'^2c'}{b^2c} bc^2 = b'c'^2$.

Пока $\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) (b''c''^2)^2 < \left(\frac{5}{8} b'c'^2\right)^2$, т. е. $\frac{b''c''^2}{b'c'^2} < \frac{0,625}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}}$,

это выражение (338) возрастает вместе с $\frac{y}{b}$; его максимум или

опасная точка соответствует $\frac{y}{b} = 1$ или вершине, которая находится на конце большой оси $2b$, как если бы имел место изгиб. Но максимум может получиться при $y < b$ и в другом месте, а не в этой вершине; это является тем скачком, о котором мы говорили в § 121 и который является причиной того, что максимум не может быть найден дифференцированием.

Пусть, например, $\frac{b}{c} = 2$.

В таблице на стр. 335 представлены различные значения правой части уравнения (338).

Отсюда следует, что когда призма с эллиптическим основанием, ось которого $2b$ вдвое больше оси $2c$, должна сопротивляться одновременно усилию, изгибающему ее в положении на ребро, т. е. параллельно ее большому размеру $2b$, и усилию, ее скручивающему, то, вычислив значения $b'c'^2$, $b''c''^2$ произведения bc^2 в предположении, что призма подвергалась бы действию только изгибающего усилия, и в предположении, что призма подвергалась бы действию только скручивающего усилия, получаем для определения произведения bc^2 большой полуоси на квадрат малой полуоси следующую таблицу, которая также дает абсциссу y точки, где может произойти разрушение:

Для $\frac{b'c'^2}{b'c'^2} =$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	1
имеем $\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1	1,048	1,093	1,104	1,182
и $\frac{y}{b} =$	1	1	1	1	0,9
и для $\frac{b''c''^2}{b''c''^2} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{bc^2}{b''c''^2} =$	1,182	1,059	1,032	1,011	1
$\frac{y}{b}$	0,9	0,45	0,2	0,1	0

Значения отношения $\frac{y}{b}$ показывают, что опасная точка остается на конце большой оси $2b$, пока отношение $\frac{b''c''^2}{b'c'^2}$, оценивающее относительное влияние кручения и изгиба, не превышает $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$ (что немного превосходит нижний предел $\frac{0,625}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}} = 0,7217$), что затем эта точка перемещается

последовательно через все точки каждой четверти эллиптической окружности, но достигает концов малой оси $2c$ только тогда, когда усилие при изгибе становится пренебрежимо малым по сравнению с усилием при кручении.

Мы видим также из сравнения с предпоследней строчкой цифр последней таблицы § 133, что влияние одновременности приложения двух видов воздействий проявляется в меньшей степени для призмы с эллиптическим основанием, *подвергающейся действию сил в положении на ребро*, чем для прямоугольной призмы, подвергающейся такому же действию и имеющей то же соотношение 2 : 1 между двумя поперечными размерами.





ГЛАВА XIII

РЕЗЮМЕ ЭТОГО МЕМУАРА, КРАТКОЕ ПОВТОРЕНИЕ ФОРМУЛ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА, ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

§ 135. Общее резюме

Можно подытожить то, что детально установлено в этом мемуаре:

1) Уравнения внутреннего равновесия упругих твердых тел, выведенные элементарно в главе II для любых величин перемещений (§§ 3—22), очень легко дают силы, когда известны перемещения (§§ 1, 23, 29). Но их нельзя интегрировать обычным способом для получения перемещений, когда эти силы известны (§§ 1, 23, 29, 34 и т. д.). Эти уравнения могут дать, однако, много полезных результатов, если воспользоваться смешанным, или полуобратным, методом, который состоит (§§ 2, 23, 30, 32, 34—51) в том, что задаются частью сил (или соотношениями между ними) и одновременно частью перемещений и отыскивают посредством точных вычислений, каковы другие перемещения и другие силы.

2) Таким образом, отпадает сомнение относительно известного решения простой задачи о продольном растяжении призм с любым основанием силами, равномерно распределенными на двух основаниях (§§ 29, 30, 32). Мы равным образом проверяем, не прибегая к безосновательным и даже ложным гипотезам, обычную формулу $M_y = \frac{EJ}{e}$ для изгибающего момента призмы (§§ 36, 39—41), заменяя ее двучленной формулой (§ 42), когда плоскость изгиба должна

отличаться от плоскости действия изгибающих сил. Мы показываем, что эти формулы строго справедливы только для особого способа приложения сил, которые создают изгиб, и даем средство для оценки влияния сдвигов и кривизны сечений (§§ 40, 43), которые не учитываются этими формулами.

Мы проверяем тем же самым способом (§ 57) формулу Кулона $M_x = G \frac{\pi R^4}{2} \theta$ для крутящего момента прямого цилиндра с круговым сечением, показывая (§ 57), что она также требует, чтобы быть точной, особого способа распределения сил на основаниях и в их плоскостях.

Наконец, мы приходим главным образом для кручения призм с различными формами поперечных сечений ко многим другим еще неизвестным ранее результатам, которые являются точными и неоспоримыми в аналогичных условиях, относящихся к способу приложения сил к основаниям в их плоскостях.

3) Хотя силы, которые растягивают, изгибают или скручивают призмы, могли бы быть фактически приложены и распределены на концах не по этому способу, результаты всегда могут быть использованы с любой желаемой точностью. Опыт это показывает по отношению к уже известным формулам растяжения и изгиба любых призм и к формуле кручения кругового цилиндра. Это доказывает, что на очень малых расстояниях от точек приложения сил распределение усилий внутри твердого тела естественно устанавливается приблизительно желаемым способом и затем остается неизменным в других частях тела, так что это распределение быстро приближается к предельному состоянию, представленному нашими формулами. По той же причине можно принять новые формулы, основанные на тех же принципах, и применить их с той же уверенностью, с какой пользуются прежними формулами, относящимися либо к растяжению и изгибу, либо к кручению кругового цилиндра (§§ 2, 33, 41, 58).

4) Прежняя теория кручения призм основана на предположении, что сопротивление их волокон пропорционально расстоянию до оси или что их плоские ортогональные сечения остаются плоскими. Она дает, следовательно, для момента сил произведение $G J_0 \theta$ коэффициента упругости при сдвиге G на кручение θ и на полярный момент инерции сече-

ния J_0 и верна только для единственного случая, рассмотренного Кулоном, когда сечение является кругом (и притом упругость предполагается одинаковой во всех поперечных направлениях). Для всякой другой формы контура плоскость сечения превращается в искривленную поверхность. Если, например (§ 57), сечение эллиптическое, то плоскость становится гиперболическим параболоидом, так что сечение испытывает *искривление*, вызванное неравенством двух его размеров. Если сечение квадратное, то оно испытывает (§ 76) другого рода искривление, вызванное наличием выступающих частей и углов, *поблизости от которых всякое сечение должно обязательно наклоняться так, чтобы оставаться нормальным к острым ребрам* (§§ 68, 115), превращающимся в спирали. Если это сечение прямоугольное, то оно испытывает одновременно искривление этих двух видов (§ 84), и его уравнение может выражаться только в виде ряда из показательных функций и синусов (§ 70).

5) Из наличия этой кривизны или искажения следует (§§ 57, 62, 71, 76, 88), что при данном кручении волокна или продольные элементы призмы наклоняются в среднем меньше к поверхностным элементам сечений или сдвигаются в среднем меньше друг по отношению к другу, чем в том случае, когда сечения остаются плоскими. Сопротивление или упругая реакция призмы кручению, следовательно, меньше, чем по прежней теории, распространенной на некруговые основания. Таким образом, выражение $M_x = GJ_0\theta$, которое дает эта теория для момента реакции (здесь θ — кручение на единицу длины, а J_0 — момент инерции сечения относительно его центра), слишком велико не только для прямоугольного сечения, как это выяснил Коши, но даже и для квадратного сечения.

В случае призмы с квадратным сечением нужно для получения правильного значения момента M_x умножить выражение $GJ_0\theta$ на 0,843 (§ 77). Если сечение прямоугольное, то нужно было бы его умножить на число, бесконечно уменьшающееся вместе с уменьшением отношения меньшей стороны к большей (§ 85 или заключительная таблица § 138), или нужно умножить на число между 0,843 и 1 формулу Коши, которая сводится к $M_x = \frac{4G\theta}{\frac{1}{J} + \frac{1}{J'}}$, где J и J' — мо-

менты инерции этого сечения относительно его двух медиан или осей фигуры. Коэффициент 1 подходит для случая тонких или плоских призм (§ 74), когда один из двух членов знаменателя пренебрежимо мал по сравнению с другим. Последняя формула является совершенно точной и не требует поправочного коэффициента для сечения в виде эллипса (§ 53).

Эти результаты для квадратных или прямоугольных сечений подтверждаются опытами Дюло и Савара (§§ 78, 86).

Они, разумеется, применимы *только при очень малых значениях максимального наклона волокон к сечениям*, так что даже в пределах постоянства структуры их нельзя применять в случае значительного наклона.

б) Имеется бесконечное множество оснований, кроме эллипса и прямоугольника, для которых можно точно и простым способом определить законы кручения призм. Можно даже выбрать по желанию среди частных интегралов некоторого уравнения $\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0\right)$ выражение продольного перемещения u , определяющее искривление и сдвиги, и вывести непосредственно (§ 91) форму контура основания призмы, точки которой испытывали бы это перемещение при кручении.

Ограничиваясь основаниями, уравнения которых являются алгебраическими и конечными, и сначала теми из них, которые симметричны и одинаковы в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, мы нашли следующие результаты.

Рассматривая уравнение четвертой степени, которому соответствует основание в виде квадрата со слегка вогнутыми криволинейными сторонами (образованными двумя гиперболами), установили, что M_x составляет только (§ 101) $0,78GJ_0\theta$, а рассматривая уравнение восьмой степени, нашли, что если основание представляет звезду с четырьмя закругленными остриями, у которой два малых диаметра равны половине больших, то M_x равняется только $0,54GJ_0\theta$, так что при одинаковом моменте инерции основания подобная призма оказывает вдвое меньшее сопротивление кручению, чем круговой цилиндр.

Малость этого результата объясняется, если принять во внимание, что четыре выступа деформируются и изгибаются

так, чтобы оставаться приблизительно перпендикулярными к волокнам. Отсюда следует, что не нужно полагаться на детали в виде ребер или нервюр в частях конструкций, испытывающих кручение.

Переходя к сечениям, несимметричным и не равным в двух направлениях, находим в числе других многочисленных выводов (§ 105, примечания) с помощью уравнения третьей степени, что *если основание является равносторонним треугольником*, то $M_x = 0,6GJ_0\theta$, а посредством уравнения четвертой степени, если основание составляется из двух отдельных контуров, отдаленных друг от друга на четыре их диаметра, получаем $M_x = 0,0186GJ_0\theta$, т. е. $\frac{1}{54}$ произведения $GJ_0\theta$.

Упругое сопротивление заданному кручению для различных сечений далеко не пропорционально их полярному моменту инерции. *При одинаковом количестве материала или одинаковой площади ω сечения* оно приблизительно обратно пропорционально моменту J_0 , и мы имеем обычно $\frac{M_x}{G\theta} = \left(\text{от } \frac{1}{39} \text{ до } \frac{1}{45} \right) \frac{\omega^4}{J_0}$. Стало быть, при данном количестве материала круговое сечение имеет большее сопротивление.

7) Переходя от оценки реакции или упругого сопротивления данному кручению к отысканию сопротивления разрушению или разъединению волокон при кручении, выясняем, что точки, названные Понселе *опасными* (§ 25), т. е. точки, где всего более рискует проявиться разъединение, не являются точками, наиболее удаленными от оси кручения, как это получается по прежней теории, а наоборот, *являются точками контура сечения, наиболее близкими к этой оси*.

Следовательно, для эллиптического сечения (§ 61) опасные точки находятся на концах меньшей из двух осей фигуры.

Для прямоугольного сечения (§§ 82, 88) они находятся посредине двух больших сторон. Для криволинейного квадрата четвертой степени (§ 103) и для звезды восьмой степени (§ 104) они находятся на концах двух меньших диаметров, а для равностороннего треугольника — посредине сторон. Причина этого заключается в том, что сечения, изогнутые настолько, чтобы оставаться в общем перпендикулярными или почти перпендикулярными к наиболее удаленным от оси ребрам призмы, должны тем самым принимать наибольший наклон к наиболее близким ребрам. Ибо этот взаимный

наклон, приобретенный линиями к поверхности, первоначально расположенными под прямым углом, является мерой относительной опасности разъединения при сдвиге сечений друг по другу, а также волокон друг относительно друга.

Этот наибольший наклон волокна или ребра к искривленному сечению легко вычислить в каждом случае. Он обычно в 1,35—2 раза больше наклона в той же точке сечения, остающегося плоским. Следовательно, можно составить таблицу численных коэффициентов, которые нужно придать упрощенным выражениям, чтобы получить, не прибегая к рядам или другим сложным формулам, допускаемый предел для момента сил, создающих кручение, чтобы нигде не подвергать опасности целостность тела.

Это положение опасной точки ясно показано (§§ 62, 76, 88) посредством эпюр и рельефов¹⁾. Оно подтверждается опытом, так как кручение нарушает целостность брусков железа или дерева, вызывая продольные трещины; если мы скручиваем прямоугольную или квадратную каучуковую призму, то видим, что прямые линии, проведенные в поперечном направлении на ее гранях, искривляются в виде буквы S настолько, что остаются нормальными к четырем выступающим ребрам, и наклоняются к промежуточным ребрам настолько, что получают максимальный наклон к тем из них, которые проходят через середины больших сторон оснований.

По мере увеличения полярного момента J_0 сопротивление разрушению от кручения при одинаковом количестве материала или при одинаковой площади сечения уменьшается еще сильнее, чем упругое сопротивление заданному кручению.

8) Эти выводы совсем не зависят от отношения, которое может существовать между продольной и поперечной упругостями призмы (§ 50). Их можно распространить на случай, когда упругости при сдвиге неодинаковы, так же как и сцепления в различных поперечных направлениях; для

¹⁾ Мой старый друг Барден (Bardin), руководитель графических работ в Политехнической школе, должен скоро присоединить к своей прекрасной коллекции гипсовых моделей пять рельефов, представляющих собой части скрученных призм и криволинейную поверхность их первоначально плоских сечений.

этого достаточно заменить в формулах упругого сопротивления (§§ 106—114) отношение двух главных размеров сечений отношением этих же размеров, деленных на корень квадратный из упругостей в соответственных направлениях, и ввести аналогичным способом два *главных сцепления* в формулы сопротивления разрыву (§§ 108, 113, 138). Отсюда вытекает, что когда поперечная упругость непостоянна, сечения круговых цилиндров искривляются при кручении подобно сечениям эллиптических цилиндров.

9) Законы кручения полых призм получаются по таким же формулам, что и законы кручения сплошных призм при условии (§§ 116—118), что уравнения внешнего контура сечения и внутреннего контура сечения или границы полости отличаются только значением постоянной.

10) Когда призма подвергается одновременно продольному растяжению, поперечному сдвигу, изгибу в двух перпендикулярных направлениях и кручению, то для получения полных перемещений в ее точках следует (§§ 119, 120) просто *сложить* вместе перемещения, которые имели бы место в том случае, когда она подвергалась бы только одному из этих четырех воздействий.

11) Чтобы получить тогда условие сопротивления ее материала этим одновременным действиям, нужно (§§ 24—27) полагать, что нигде и ни в каком направлении относительное удаление или приближение молекул не превышает некоторого предела, за которым имела бы опасность близкого или последующего разрушения и который может изменяться вместе с направлением, если тело (к тому же однородное) не обладает одинаковым строением во всех направлениях.

Вытекающее отсюда аналитическое выражение (§ 121) для обычных случаев (§ 122) упрощается и может тогда доказываться непосредственно простым способом (§ 123). Отсюда выводим в числе других практических следствий, что для получения куба диаметра кругового цилиндра, способного одновременно сопротивляться изгибающему и скручивающему усилиям (как для вращающего вала машины, на который насажены два зубчатых колеса или два шкива для ременного привода), нужно (§§ 128, 129) взять три восьмых значения, которое мы дали бы этому кубу, если цилиндр испытывал бы только первое усилие, и прибавить к корню квадратному из суммы вторых степеней пяти восьмых того

же куба и значения, которое мы ему приписывали бы, если цилиндр испытывал второе усилие. Это дает результат, превосходящий иногда больше чем наполовину наиболее значительный из тех результатов, которые получаем, рассматривая усилие изгиба и усилие кручения, как проявляющиеся изолированно и последовательно. То же правило применяется для определения площади сечения болта или заклепки, подвергающихся одновременно растяжению и срезу. Оно применяется также для получения произведения ширины на квадрат толщины прямоугольной призмы, одновременно изгибаемой *платьем* и скручиваемой (§ 131). Но в том случае, когда она подвергнута действию сил *в положении на ребро* или косо по отношению к ее боковым граням, это правило несколько изменяется, так как *опасная* точка может находиться в другом месте, а не посередине одной из сторон основания (§ 132). Отсюда выводим другие правила для *коротких призм*, подвергающихся разрушению одновременно от изгиба и сдвига без кручения (§ 126), выделяя случаи, когда сечение, наиболее подверженное опасности, не может изгибаться (§§ 125, 127).

§ 136. Краткое повторение формул и практические правила

Пусть :

a — длина твердого призматического или почти призматического элемента¹⁾, прямолинейная ось которого проходит через центры тяжести сечений и перпендикулярна к ним;

ω — площадь одного из этих поперечных сечений;

J и J' — *наименьший и наибольший моменты инерции* площади ω относительно прямых, которые проведены через ее центр, т. е. моменты инерции относительно двух *главных осей*;

y и z — поперечные координаты какой-либо точки или центра какого-либо элемента $d\omega$ сечения относительно этих

¹⁾ Хотя в главах II—XI мы занимались только призмами, можно с известным приближением распространить выводы в целях практики на детали или части деталей, сечение которых изменяется постепенно и непрерывно, что позволит нам дать некоторые формулы *равного сопротивления*.

двух главных осей инерции, которые согласно допущению имеют одинаковые направления на всех сечениях. Таким

$$\text{образом, } J = \int_0^{\omega} z^2 d\omega, \quad J' = \int_0^{\omega} y^2 d\omega;$$

x — продольная координата, отсчитываемая по оси элемента;

$J_0 = J + J'$ — *полярный* момент инерции ω , или ее момент инерции относительно центра тяжести;

$$r — \text{радиус-вектор, равный } \sqrt{y^2 + z^2}, \text{ так что } J_0 = \int_0^{\omega} r^2 d\omega;$$

r — в частном случае радиус сечения ω , если оно является кругом;

$2b$ и $2c$ — его бóльшая и меньшая стороны сечения, если оно является прямоугольником, или его бóльшая и меньшая оси, если оно имеет форму эллипса или аналогичную ему.

Пусть согласно предположению тело или часть тела подвергается воздействию различных внешних сил *только на концах или очень близко к концам* (боковые грани в промежутке подвергаются только действию атмосферного давления, которое не принимают в расчет, если на основании также действует атмосферное давление и если учитывают только перемещения, не связанные с атмосферным давлением);

P_x, P_y, P_z — суммы составляющих в направлениях осей x, y, z сил, которые действуют на один из концов (такие же суммы для сил, действующих на другой конец, должны быть для равновесия равными и противоположными);

$M_x = M'', M_y = M' \cos \varphi, M_z = M' \sin \varphi$ — три суммы моментов этих сил: 1) относительно оси x или оси тела; 2) и 3) относительно двух главных осей сечения ω , параллельных осям y и z .

Таким образом, M_x или M'' является *крутящим моментом*, а $M' = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$ — *изгибающим моментом*, которым должны быть равны и противоположны момент относительно продольной оси x тела и наибольший момент относительно поперечных линий, проведенных на ω через его центр, внутренних воздействий или *давлений*, которые проявляются через различные элементы $d\omega$ того же сечения;

$\varphi = \arctg \frac{M_z}{M_y}$ — угол, образованный плоскостью действия изгибающих сил или плоскостью момента M' с плоскостью наиболее легкого изгиба, т. е. с плоскостью xz .

Вследствие перемещений, испытанных точками твердого элемента под действием этих сил, возникают:

ψ — угол (отличный от φ во всех случаях, когда не имеем $J = J'$, либо $\varphi = 0$ или $\frac{\pi}{2}$), который образует с той же плоскостью xz наиболее легкого изгиба плоскость действительного изгиба или плоскость, в которой будет происходить искривление оси тела;

ρ — радиус кривизны этой оси в том месте, где она пересекает сечение ω ;

ρ_y, ρ_z — радиусы кривизны в том же месте проекций искривленной оси на плоскости xy, xz ;

θ — кручение тела или очень малый угол, на который повернулось соседнее к ω сечение по отношению к сечению ω в направлении от y к z , угол, разделенный на малое расстояние между этими двумя сечениями; этот угол определяется дугой на единице расстояния от оси кручения; таким образом, если θ постоянно от одного конца до другого и если a — выраженный в градусах угол, на который поворачивается одно из крайних сечений относительно другого, то имеем:

$$\theta = \frac{1}{a} \frac{2\pi}{360} a;$$

∂_x — продольное удлинение или очень малое относительное увеличение длины (положительной или отрицательной) малой части волокна или призматического элемента, имеющего прямое сечение в виде элемента $d\omega$;

g_{xy}, g_{xz} — сдвиги в плоскостях xy, xz в центре элемента $d\omega$ или очень малые уменьшения (положительные или отрицательные), испытанные первоначально прямыми углами, образованными до перемещений малой материальной линией, параллельной x , и малыми материальными линиями, параллельными положительным y и z , пересекающимися в центре $d\omega$;

$g_x = \sqrt{g_{xy}^2 + g_{xz}^2}$ — главный сдвиг в этом месте или уменьшение первоначально прямого угла между малой линией x и плоскостью элемента $d\omega$;

g — наибольший главный сдвиг в различных точках сечения;

γ — число (в пределах от 1 до 2), на которое нужно умножить наклон к оси при кручении наиболее близкого к ней ребра призмы, чтобы получить наибольший сдвиг g или наклон того же ребра к элементу сечения, которое при кручении также наклонилось.

Пусть, наконец, для материала, из которого состоит тело:

E_x или просто E — коэффициент упругости при продольном растяжении или такое число, при котором $E\partial_x d\omega$ — сила растяжения, способная придать удлинение ∂_x волокну, имеющему основание в виде элемента $d\omega$ сечения и не испытывающему никакого бокового воздействия в направлении, перпендикулярном к его длине;

R_x или просто R — такое число, что $\frac{R}{E}$ выражает наибольшее значение, которое могли бы сообщить этому удлинению ∂_x без опасения произвести с течением времени разрушение или разъединение (см. § 24);

G', G'' — коэффициенты упругости при сдвиге в плоскостях xy, xz или такие числа, при которых $G'g_{xy}d\omega, G''g_{xz}d\omega$ были бы усилиями, приложенными касательно к элементу $d\omega$ в направлениях y и z , чтобы произвести сдвиги g_{xy}, g_{xz} (полагаем, что материал однородный, но неравномерного строения в различных направлениях, имеет три плоскости симметрии строения, которые обязательно являются главными плоскостями упругости, пересекающимися по линиям, параллельным осям x, y, z);

T', T'' — такие числа, что $\frac{T'}{G'}, \frac{T''}{G''}$ представляют пределы сдвигов g_{xy}, g_{xz} , при которых удлинения в косых направлениях, являющиеся их следствием, не подвергают материал опасности нарушения сплошности;

G — значения G' и G'' , если они равны;

T — значения T' и T'' , если они равны.

Поэтому, если нет удлинения в направлениях осей x , y , z , то условие сопротивления разрушению просто будет

$$T \geq Gg.$$

Получим следующие формулы:

А. Общая формула сопротивления разрушению твердого тела, подвергнутого одновременно растяжению или сжатию в продольном направлении, изгибу, кручению и деформирующегося при поперечных сдвигах, наклоняющих его волокна к сечениям.

З а м е ч а н и е. Эта формула является точной: 1) когда одновременно $g_{xy} = 0$, $g_{xz} = 0$; 2) когда $\partial_x = 0$; 3) когда $g_{xy} = 0$ или $g_{xz} = 0$ в точке максимума (например, когда призма прямоугольная и имеет боковые грани, перпендикулярные к осям y и z); 4) когда $G' = G''$, $T' = T''$, и приближенной в других случаях.

$$1 \geq \max \frac{1 - \epsilon_1''}{2} \frac{E \partial_x}{R} + \sqrt{\left(\frac{1 + \epsilon_1''}{2} \frac{E \partial_x}{R}\right)^2 + \left(\frac{G' g_{xy}}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g_{xz}}{T''}\right)^2}. \quad (\text{a})$$

В этой формуле нужно полагать ϵ_1'' от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{3}$ (см. §§ 122, 128); можно без заметной погрешности в результатах принимать постоянно эту неизвестную величину равной $\frac{1}{4}$, или

$$\frac{1 - \epsilon_1''}{2} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1 + \epsilon_1''}{2} = \frac{5}{8}; \quad (\text{a}')$$

$$E \partial_x = \frac{P_x}{\omega} + M' \left(\frac{\cos \varphi}{J} z + \frac{\sin \varphi}{J'} y \right); \quad (\text{a}'')$$

R последовательно равно его значению, относящемуся собственно к удлинениям или к положительным ∂_x , и его значению, относящемуся к сжатиям или к отрицательным ∂_x , если изменить знак члена вне корня, чтобы сделать его положительным;

$$g_{xy} = g'_{xy} + g''_{xy}, \quad g_{xz} = g'_{xz} + g''_{xz}, \quad (\text{a}''')$$

где g'_{xy} и g'_{xz} — части сдвигов (обычно пренебрежимо малые), вызванные поперечными воздействиями $P_y = G' \int g'_{xy} d\omega$, $P_z = G'' \int g'_{xz} d\omega$, части, даваемые формулами, относящимися к случаю только одного сдвига (см. далее пункт D,

формулы от (d_1) до (d_1''')), когда сечения могут свободно изгибаться;

g_{xy}'' и g_{xz}'' — части сдвигов, вызванные кручением, зависящие от θ и, следовательно от момента $M_x = M''$, даваемые формулами, относящимися к случаю только одного кручения (см. далее пункты G и H, формулы (g_1'') , (g_2'') и т. д., (h_1') , (h_2')), когда сечения могут искривляться свободно;

$$G'g'_{xy} = \frac{P_y}{\omega} \quad \text{и} \quad G''g'_{xz} = \frac{P_z}{\omega}, \quad (a^{IV})$$

если *любой формы* сечение ω находится в тех исключительных положениях, когда оно не может изгибаться в виде гуська под влиянием поперечных воздействий (см. § 125);

$$G'g''_{xy} = \frac{-M_x G'}{G'J + G''J'} z \quad \text{и} \quad G''g''_{xz} = \frac{M_x G''}{G'J + G''J'} y, \quad (a^V)$$

если это сечение находится в одном из тех исключительных положений, когда не может осуществиться искривление, которое кручение стремится придать всякому некруговому сечению.

V. Одно лишь продольное растяжение.

$$P_x = E \omega \partial_x; \quad \partial_x = \frac{P_x}{E \omega}. \quad (b)$$

Условие сопротивления разрыву:

$$\lim P_x = R \omega, \quad \text{или} \quad \omega \geq \frac{P_x}{R}. \quad (b')$$

S. Одно лишь продольное сжатие.

(с), (с'). Те же выражения (b), (b'), но при других значениях R . Мы дали бы другое значение E , если должны были заметно превысить предел, после которого получают остаточные деформации. Разумеется также, что P_x остается меньше силы, способной вызвать изгиб при сжатии.

D. Один лишь сдвиг сечений друг перед другом в поперечном направлении (срез) или волокон друг относительно друга (продольная трещина).

D₁. Плоское сечение может свободно изгибаться в виде гуська (§§ 124, 125).

1) Когда это сечение является эллипсом, если $P_y = 0$ (§ 40, формулы (84), (85)):

$$\left. \begin{aligned} g'_{xy} &= -\frac{P_z}{G'\omega} \frac{yz}{c^2} \frac{4 + 8 \frac{\varepsilon G'}{E} \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}{3 + \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}, \\ g'_{xz} &= \frac{4}{3} \frac{P_z}{G''\omega} \left[1 - \frac{z^2}{c^2} + \frac{\left(1 - 6 \frac{\varepsilon G'}{E}\right) \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}{6 + 2 \frac{b^2 G''}{c^2 G'}} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - 3 \frac{y^2}{b^2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} (d_1)$$

Примечание. Если P_y не равно нулю, следует только сложить выражения, в которые входят P_y , y , z , b , c , G' , G'' , ε , ε' , с выражениями, содержащими P_z , z , y , c , b , G'' , G' , ε' , ε .

2) Когда это сечение становится кругом, т. е. когда

$$b = c = r, \quad G' = G'' = G, \quad \frac{\varepsilon G'}{E} = \frac{\varepsilon' G''}{E} = \frac{1}{10};$$

$$\left. \begin{aligned} g'_{xy} &= -\frac{6}{5} \frac{P_z}{G\omega} \frac{yz}{r^2} + \frac{7}{5} \frac{P_y}{G\omega} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{7} \frac{z^2}{r^2}\right), \\ g'_{xz} &= \frac{7}{5} \frac{P_z}{G\omega} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{7} \frac{y^2}{r^2}\right) - \frac{6}{5} \frac{P_y}{G\omega} \frac{yz}{r^2}. \end{aligned} \right\} (d'_1)$$

3) Когда сечение является ложным эллипсом (овалом), кривая $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ заключена между эллипсом и описанным прямоугольником¹⁾; полагая $G' = G'' = G$, $\frac{\varepsilon G'}{E} = \frac{1}{10}$, имеем для случая воздействия только в направлении z :

$$\left. \begin{aligned} g'_{xy} &= -\frac{P_z}{5GJ} yz = -\frac{7}{10} \frac{P_z}{G\omega} \frac{y^2}{c^2}, \\ g'_{xz} &= \frac{2}{5} \frac{P_z}{GJ} (c^2 - z^2) = \frac{7}{5} \frac{P_z}{G\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \end{aligned} \right\} (d''_1)$$

где $J = \frac{2}{7} c^2 \omega$ и $\omega = 3,4960 bc$.

¹⁾ Mémoire sur la flexion, представленный 20 ноября 1854 г. Comptes rendus de l'Académie, т. XXXIX, стр. 1029.

4) Когда сечение является прямоугольником, стороны которого $2b, 2c$ параллельны осям y и z , то g'_{xy} и g'_{xz} выражаются сложными тригонометрическими рядами, которые могут быть приближенно сведены (конец § 40) к

$$\left. \begin{aligned} g'_{xy} &= \frac{3}{2} \frac{P_y}{G' \omega} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), & \text{если } c \sqrt{G'} \leq b \sqrt{G''}, \\ g'_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{P_z}{G'' \omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), & \text{если } b \sqrt{G''} \leq c \sqrt{G'}. \end{aligned} \right\} (d_1''')$$

Условия сопротивления разрушению для всех сечений, когда $g'_{xy}{}^0, g'_{xz}{}^0$ суть значения g'_{xy}, g'_{xz} в центре, т. е. при $y = 0, z = 0$, будут:

$$1 \geq \left(\frac{G' g'_{xy}{}^0}{T'}\right)^2 + \left(\frac{G'' g'_{xz}{}^0}{T''}\right)^2, \quad (d_1^{IV})$$

что дает приближенно: для прямоугольного сечения

$$\omega \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{P_y^2}{T'^2} + \frac{P_z^2}{T''^2}}, \quad (d_1^V)$$

или точно при $P_y = 0, \frac{\varepsilon G''}{E} = \frac{1}{10}$; для эллиптического сечения

$$\omega \geq \frac{P_z}{T''} \frac{4 + 1,6 \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}{3 + \frac{b^2 G''}{c^2 G'}}; \quad (d_1^{VI})$$

для кругового сечения $b^2 = c^2, G'' = G'$, или в более общем случае для эллиптического сечения при $b^2 G'' = c^2 G'$ и сечения в виде ложного эллипса (овала) $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$ при $G' = G''$ и произвольном отношении между b и c :

$$\left. \begin{aligned} \omega &\geq \frac{7}{5} \frac{P_z}{T''}, \\ \lim P_z &= \frac{5}{7} T'' \omega. \end{aligned} \right\} (d_1^{VII})$$

Для эллиптического и прямоугольного сечений (расчеты для них аналогичны, если вычислять по тригонометрической

формуле цитированного мемуара об изгибе) пользуются таблицей:

Для $\frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G''}} =$	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$
Сечение прямоугольное: $\omega \geq \frac{3}{2} \frac{P_z}{T''} k$, где $k =$	0,676	0,849	0,907	0,940	0,961
Сечение эллиптическое: $\omega \geq \frac{7}{5} \frac{P_z}{T''} k_1$, где $k_1 =$	0,899	0,942	0,977	1	1,015
$\frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G''}} =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	0
Сечение прямоугольное: $\omega \geq \frac{3}{2} \frac{P_z}{T''} k$, где $k =$	0,971	0,983	0,989	0,993	1
Сечение эллиптическое: $\omega \geq \frac{7}{5} \frac{P_z}{T''} k_1$, где $k_1 =$	1,028	1,035	1,040	1,043	1,050

D_2 . Если сечение произвольной формы находится в одном из тех положений, когда оно не может исказиться (§ 125), то

$$g'_{xy} = \frac{P_y}{G' \omega}, \quad g'_{xz} = \frac{P_z}{G'' \omega}. \quad (d_2)$$

Сопrotивление разрушению

$$\omega \geq \sqrt{\frac{P_y^2}{T'^2} + \frac{P_z^2}{T''^2}} \quad (d_2^1)$$

или

$$\lim P = T \omega, \quad (d_2^{11})$$

если $T' = T'' = T$ и $\sqrt{P_y^2 + P_z^2} = P$.

D_3 . Если есть сомнение, то надо взять выражения от (d_1) до (d_1^{111}) , которые учитывают искажение и дают большую уверенность, чем выражения от (d_2) до (d_2^2) , не учитывающие наличие искажения.

Е. Только изгиб.

(е) Наклон ψ плоскости действительного изгиба дается формулой

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{J}{J'} \operatorname{tg} \varphi.$$

Он отсчитывается между плоскостью действия сил, которая образует угол φ , и плоскостью xz наиболее легкого изгиба. Отклонение $\varphi - \psi$ имеет максимальное значение, когда

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{J'}{J}}.$$

Кривизна

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{M'}{E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{J^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{J'^2}}, \\ \frac{1}{\rho_z} &= \frac{\cos \psi}{\rho} = \frac{M' \cos \varphi}{EJ}, \\ \frac{1}{\rho_y} &= \frac{\sin \psi}{\rho} = \frac{M' \sin \varphi}{EJ'}. \end{aligned} \right\} \quad (e')$$

Стрела прогиба или наибольшая ордината изогнутой оси на расстоянии a от точки, где изгибающий момент $M' = Pa = a \sqrt{P_z^2 + P_y^2}$, будет

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{Pa^3}{3E} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{J^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{J'^2}} = \frac{a^3}{3E} \sqrt{\left(\frac{P_z}{J}\right)^2 + \left(\frac{P_y}{J'}\right)^2}, \\ f_z &= \frac{Pa^3 \cos \varphi}{3EJ} = \frac{P_z a^3}{3EJ}, \\ f_y &= \frac{Pa^3 \sin \varphi}{3EJ'} = \frac{P_y a^3}{3EJ'}. \end{aligned} \right\} \quad (e'')$$

Удлинения (положительные или отрицательные) волокон вследствие изгиба будут:

$$\partial_x = \frac{z \cos \psi + y \sin \psi}{\rho} = \frac{M' \cos \varphi}{EJ} z + \frac{M' \sin \varphi}{EJ'} y. \quad (e''')$$

Сопротивление разрушению

$$\left. \begin{aligned} R &\geq \max \left(\frac{M' \cos \varphi}{J} z + \frac{M' \sin \varphi}{J'} y \right), \\ R &\geq \max \left(\frac{P_z}{J} z + \frac{P_y}{J'} y \right) a; \end{aligned} \right\} \quad (e^{IV})$$

или

для прямоугольного сечения

$$\lim M' = \frac{4 Rb^2c^2}{3(b \cos \varphi + c \sin \varphi)^3},$$

для эллиптического сечения

$$\lim M' = \frac{\pi Rb^2c^2}{4 \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

(e^v)

Если имеем $J = J'$ или $\varphi = 0$, то эти формулы сводятся к следующим известным формулам (где $V = z \cos \varphi + y \sin \varphi$ — расстояние от какой-либо точки сечения до перпендикуляра к плоскости действия сил, проведенного через его центр; V' — наибольшее значение V):

$$\begin{aligned} (e_1, e'_1, e''_1, e'''_1, e^{IV}_1) \psi &= 0, \\ \frac{1}{e} &= \frac{M'}{EJ}, \quad \dot{t} = \frac{Pa^3}{3EJ}, \\ \partial_x &= \frac{M'}{EJ} V, \\ \lim M' &= \frac{RJ}{V'}. \end{aligned}$$

(e₂ и т. д.) Если φ равно прямому углу, то те же формулы имеют J' вместо J .

Примечание. Мы не приводим широко известные частные значения момента инерции J и отношения $\frac{J}{V'}$ для различных форм сечений.

Г. Изгиб вместе с продольным растяжением или сжатием. Справедливы те же формулы, что и для изгиба, но вместо (e''') и (e^{IV}) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \partial_x &= \pm \frac{P_x}{E\omega} + \frac{M' \cos \varphi}{EJ} z + \frac{M' \sin \varphi}{EJ} y, \\ R \geq \max \pm \frac{P_x}{\omega} + \frac{M' \cos \varphi}{J} z + \frac{M' \sin \varphi}{J'} y. \end{aligned} \right\} (f''') \text{ и } (f^{IV})$$

¹⁾ Эта формула дает результаты, весьма отличные от результатов, получаемых по формуле $M' = \frac{4 Rbc(b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)}{3(b \sin \varphi + c \cos \varphi)}$, данной в некоторых работах в предположении, что плоскость действительного изгиба всегда совпадает с плоскостью действия изгибающих сил.

Нижний из знаков \pm относится к случаю, когда P_x стремится создавать сжатие; но правую часть второго уравнения всегда следует брать положительной.

Г. Только кручение.

1) Случай равномерного строения в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} G' &= G'' \text{ (обозначается } G), \\ T' &= T'' \text{ (обозначается } T). \end{aligned}$$

Примечания: 1) В первой форме выражения для M_x и $\lim M_x$ наиболее удобны для пользования. Другие формы имеют главной целью сравнить значения для различных форм сечения при *равной площади* ω или при одинаковом количестве материала.

2) Предельное значение M_x всегда получается при подстановке в первое выражение M_x вместо $G\theta$ его значения, полученного из выражения g , равного $\frac{T}{G}$.

3) Нет необходимости, когда имеется только кручение, рассматривать, существует ли какое-нибудь сечение, вынужденное оставаться плоским или препятствовать искажению, так как значения $M_x = G\theta J_0$, $\lim M_x = \frac{TJ_0}{\text{наибольший радиус-вектор}}$, которые мы имели бы для этого особого сечения, всегда больше, чем нижеуказанные значения, пригодные для других сечений.

Г₁. Круговое сечение радиуса r .

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \pi r^2, \quad J = J' = \frac{\pi r^4}{4}, \\ J_0 &= \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{\omega^2}{6,2832}, \end{aligned} \right\} \quad (g_1)$$

$$M_x = G\theta \frac{\pi r^4}{2} = G\theta J_0, \quad \left. \right\} \quad (g'_1)$$

или

$$M_x = \frac{G\theta \omega^2}{2\pi} = \frac{G\theta \omega^2}{6,2832} = \frac{G\theta \omega^4}{4\pi^2 J_0} = \frac{G\theta}{39,4784} \frac{\omega^4}{J_0}, \quad \left. \right\}$$

$$g_{xy} = -\theta z, \quad g_{xz} = \theta y, \quad g = \theta r \text{ или } \gamma = 1, \quad (g''_1)$$

Сопротивление разрушению при кручении:

$$\lim M_x = \frac{\pi r^3}{2} T = \frac{T J_0}{r} = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{2 \sqrt{\pi}} = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{3,5449}. \quad (g_1''')$$

G₂. Эллиптическое сечение $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $b > c$.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \pi b c, \\ J &= \frac{\pi b^3 c}{4}, \\ J' &= \frac{\pi b^2 c}{4}, \\ J_0 &= \frac{\omega}{4} (b^2 + c^2) = \frac{\omega^2}{6,2832} \frac{2 b c}{b^2 + c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (g_2)$$

$$\begin{aligned} M_x &= G \theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = \frac{4 G \theta}{\frac{1}{J} + \frac{1}{J'}} = \frac{G \theta \omega^2}{3,1416 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)} = \\ &= \frac{G \theta \omega^4}{4 \pi^2 J_0} = \frac{G \theta}{39,4784} \frac{\omega^4}{J_0} \end{aligned} \quad (g_2')$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= \frac{-2 b^2 \theta}{b^2 + c^2} z, \\ g_{xz} &= \frac{2 c^2 \theta}{b^2 + c^2} y, \\ g &= \frac{2 b^2}{b^2 + c^2} \theta c \\ \gamma &= \frac{2}{1 + \frac{c^2}{b^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (g_2'')$$

или

$$\lim M_x = \frac{\pi b c^2}{2} T = \frac{2 J}{c} T = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{3,5449 \sqrt{\frac{b}{c}}}. \quad (g_2''')$$

G₃. Квадратное сечение. Сторона 2b:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 4b^2, \\ J &= J' = \frac{4}{3}b^4, \\ J_0 &= \frac{8}{3}b^4 = \frac{\omega^2}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (g_3)$$

$$\begin{aligned} M_x &= 2,249233 G \theta b^4 = 0,843462 G \theta J_0 = 0,8833 \frac{G \theta \omega^2}{2\pi} = \\ &= \frac{G \theta \omega^2}{7,1136} = \frac{G \theta}{42,6812} \frac{\omega^4}{J_0}. \end{aligned} \quad (g'_3)$$

$$\left. \begin{aligned} g &= 1,35063b \theta \text{ или } \gamma = 1,35063; \\ g_{xy} \text{ (для } z = b) &= g_{xz} \text{ (для } y = b) = \gamma' b \theta, \\ \text{где } \frac{\gamma'}{\gamma} &\text{ дано для каждого значения } \frac{y}{b} \text{ или } \frac{z}{b} \text{ во второй} \\ &\text{части заключительной таблицы (§ 138), в столбце} \\ &\frac{b \sqrt{G''}}{c \sqrt{G'}} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (g''_3)$$

$$\lim M_x = 1,66534 b^3 T = 0,6245 \frac{2J}{b} T = 0,7379 \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{4,8039}. \quad (g'''_3)$$

G₄. Прямоугольное сечение. Стороны 2b, 2c; b > c:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 4bc, \\ J &= \frac{4}{3}bc^3, \\ J' &= \frac{4}{3}b^3c, \\ J_0 &= \frac{4}{3}bc(b^2 + c^2) = \frac{\omega^2}{6 \frac{2bc}{b^2 + c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (g_4)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \mu G \theta bc^3 = \mu' G \theta \frac{16 b^3 c^3}{3(b^2 + c^2)} = \mu' \frac{4 G \theta}{\frac{1}{J} + \frac{1}{J'}} = \\ &= \frac{G \theta \omega^3}{\frac{16}{\mu} \frac{b}{c}} = \frac{G \theta}{\mu} \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{\omega^4}{J_0}, \end{aligned} \quad (g'_4)$$

где μ — коэффициент в пределах 2,249—5,333, взятый из заключительной таблицы, или $\mu = \frac{16}{3} - \lambda \frac{c}{b}$, причем λ берется из той же таблицы, но изменяется только от 3,08 до 3,36 или представляется приближенно и эмпирически посредством формулы

$$\lambda = 3,36 \left(1 - \frac{c^4}{12b^4} \right),$$

а μ' изменяется от 0,843 до 1 и берется из той же таблицы, но остается приблизительно постоянным и равным 0,85 (до $\frac{b}{c} = 2$).

$$g_{xy} \text{ (для } z = c) = -\gamma' c \theta;$$

$$g_{xz} \text{ (для } y = b) = \gamma'_1 b \theta; \quad g = \gamma c \theta; \quad (g''')$$

γ (между 1,35 и 2), $\frac{\gamma'}{\gamma}$ и $\gamma'_1 = \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \gamma_1$ берутся из заключительной таблицы (§ 138).

$$\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} b c^2 T = \frac{3}{8} \frac{\mu 2J}{\gamma c} T = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{8 \frac{\gamma}{\mu} \sqrt{\frac{b}{c}}}, \quad (g''')$$

где $\frac{\mu}{\gamma}$ получается из той же таблицы или же можно взять эмпирически и приближенно.

$$\lim M_x = \frac{40 b^2 c^2 T}{15 b + 9 c} = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{3 \left(\sqrt{\frac{b}{c}} + 0,6 \sqrt{\frac{c}{b}} \right)}. \quad (g''')$$

G₅. Сечение в виде равностороннего треугольника со стороной k .

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{3}}{4} k^2, \\ J_0 = 2J = 2J' &= \frac{k^4 \sqrt{3}}{48} = \frac{\omega^2 \sqrt{3}}{9}. \end{aligned} \right\} \quad (g_5)$$

$$M_x = \frac{3}{5} G J_0 \theta = 0,6 G J_0 \theta = \frac{G \theta \omega^2}{5 \sqrt{3}} = \frac{G \theta \omega^2}{8,685} = \frac{G \theta \omega^4}{45 J_0}. \quad (g'_5)$$

$$g_{xy} = 0 \quad \text{и} \quad g_{xz} = - \left(\frac{k}{4} - \frac{z^2}{k} \right) \theta \sqrt{3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{на стороне,} \\ \text{параллельной } y; \quad \gamma = 1,5. \end{array} \right\} \quad (g''_5)$$

$$\lim M_x = \frac{0,8 J_0 \sqrt{3}}{k} T = \frac{k^3}{20} T = \frac{2 \sqrt[4]{3}}{15} T \omega^{\frac{3}{2}} = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{5,6988}. \quad (g'''_5)$$

G₆. Квадратное криволинейное сечение с закругленными углами.

$$\frac{y^4 + z^4}{r_0^4} - 0,4 \frac{y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4}{r_0^4} = 0,6 \quad (\text{полярное уравнение}$$

$$\frac{r^2}{r_0^2} - 0,4 \frac{r^4}{r_0^4} \cos 4 \alpha = 0,6; \quad 2 r_0 - \text{наибольший диаметр,}$$

$$r_0 \sqrt{2} - \text{наименьший).}$$

$$\omega = 2,0636 r_0^2, \quad J_0 = 2 J = 2 J' = 0,7174 r_0^4 = 1,01085 \frac{\omega^2}{6}. \quad (g_6)$$

$$M_x = 0,5873 G \theta r_0^4 = 0,8186 G \theta J_0 = \frac{G \theta \omega^2}{7,2507} = \frac{G \theta \omega^4}{43,045 J_0}. \quad (g'_6)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{xy} = - \theta r \left(\sin \alpha + 0,8 \frac{r^2}{r_0^2} \sin 3 \alpha \right), \\ g_{xz} = \theta r \left(\cos \alpha - 0,8 \frac{r^2}{r_0^2} \cos 3 \alpha \right), \\ g = 0,7 \sqrt{2} \theta r_0 = 0,99 \theta r_0, \quad \gamma = 1,400. \end{array} \right\} \quad (g''_6)$$

$$\lim M_x = 0,5933 r_0^3 T = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{4,9967}. \quad (g'''_6)$$

G₇. Криволинейное квадратное сечение четвертой степени с острыми углами и вогнутыми сторонами приблизительно на $\frac{1}{22}$ стрелы прогиба,

$$(y^2 + z^2 + 2 yz \sqrt{2} - r_0^2) (y^2 + z^2 - 2 yz \sqrt{2} - r_0^2) = 0$$

$$\left(\text{или полярное уравнение } \frac{r^2}{r_0^2} - 0,5 \frac{r^4}{r_0^4} \cos 4 \alpha = 0,5 \right);$$

$2r_0$ — наибольший диаметр; $0,6436 \cdot 2r_0$ — наименьший диаметр.

$$\omega = 1,7628 r_0^2, \quad J_0 = 2 J = 2 J' = 0,5259 r_0^4 = 1,0155 \frac{\omega^2}{6}. \quad (g_7)$$

$$M_x = 0,4088 G \theta r_0^4 = 0,7783 G \theta J_0 = \frac{G \theta \omega^2}{7,5921} = \frac{G \theta}{45,34} \frac{\omega^4}{J_0}. \quad (g'_7)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= -\theta r \left(\sin \alpha + \frac{r^2}{r_0^2} \sin 3\alpha \right), \\ g_{xz} &= \theta r \left(\cos \alpha - \frac{r^2}{r_0^2} \cos 3\alpha \right), \\ g &= \theta r_0 \sqrt{2\sqrt{2} - 2} = 0,9102 \theta r_0, \quad \gamma = \sqrt{2} = 1,4142. \end{aligned} \right\} (g''_7)$$

$$\lim M_x = 0,4492 r_0^3 T = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{5,2103}. \quad (g'''_7)$$

G_8 . Сечение в виде звезды с четырьмя закругленными концами, с уравнением восьмой степени. Полярное уравнение

$$\frac{r^2}{r_0^2} - a \frac{r^4}{r_0^4} \cos 4\alpha + \frac{a}{4} \frac{r^8}{r_0^8} \cos 8\alpha = 1 - \frac{3a}{4},$$

где $a = \frac{48}{49} \frac{16}{17}$, $2r_0$ — наибольший диаметр; наименьший диаметр вдвое меньше и равен r_0 .

$$\omega = 1,2202 r_0^2, \quad J_0 = 2 J = 2 J' = 0,2974 r_0^4 = 1,1985 \frac{\omega^2}{6}. \quad (g_8)$$

$$M_x = 0,15983 G \theta r_0^4 = 0,5374 G \theta J_0 = \frac{G \theta \omega^2}{9,3152} = \frac{G \theta}{47,41} \frac{\omega^4}{J_0}. \quad (g'_8)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= -\theta r \left(\sin \alpha + 2a \frac{r^2}{r_0^2} \sin 3\alpha - a \frac{r^6}{r_0^6} \sin 7\alpha \right), \\ g_{xz} &= \theta r \left(\cos \alpha - 2a \frac{r^2}{r_0^2} \cos 3\alpha + a \frac{r^6}{r_0^6} \cos 7\alpha \right), \\ g &= 0,737695 \theta r_0, \quad \gamma = 1,4754. \end{aligned} \right\} (g''_8)$$

$$\lim M_x = 0,21667 T r_0^3 = \frac{T \omega^{\frac{3}{2}}}{6,2209}. \quad (g'''_8)$$

Г₉. Сечение другой формы, отличной от вышеуказанных. Если у нас нет времени построить замкнутую кривую, которая приближается к контуру данного сечения, давая надлежащие численные значения коэффициентам уравнений в переменных y и z или r и a § 91, то мы ограничимся измерением его площади ω и полярного момента J_0 . Далее по числу, на которое нужно будет разделить ω^2 для получения J_0 , также по форме контура (§ 115), выведем по аналогии с вышеприведенными формами приближенные значения численных коэффициентов, на которые нужно разделить $G \theta \omega^2$ или, скорее, величину $\frac{G \theta \omega^4}{J_0}$ для получения M_x и $T \omega^{\frac{3}{2}}$ для получения $\lim M_x$.

Н. Только кручение. Второй случай неодинакового строения, но при наличии трех плоскостей симметрии или главных плоскостей упругости, пересекающихся соответственно осям x, y, z .

Н₁. Сечение эллиптическое или круговое $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$M_x = \theta \frac{\pi b^3 c^3}{b^2 + c^2} = \frac{4 \theta}{\frac{1}{G'} + \frac{1}{G''}}. \quad (h_1)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} &= \frac{-2 \frac{b^2}{G'} \theta}{b^2 + \frac{c^2}{G''}} z, \\ g_{xz} &= \frac{2 \frac{c^2}{G''} \theta}{\frac{b^2}{G'} + c^2} y. \end{aligned} \right\} \quad (h'_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim M_x &= \frac{\pi b c^2}{2} T' = \frac{2J}{c} T', \\ &\text{если } \frac{b}{c} > \frac{T'}{T''}, \\ \text{или} &= \frac{\pi b^2 c}{2} T'' = \frac{2J'}{b} T'', \\ &\text{если } \frac{b}{c} < \frac{T'}{T''}. \end{aligned} \right\} \quad (h''_1)$$

Н₂. Прямоугольное или квадратное сечение. Стороны $2b, 2c$; $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} > 1$.

$$M_x = \mu G' \theta bc^3 = \mu' \theta \frac{16 b^3 c^3}{3 \left(\frac{b^2}{G'} + \frac{c^2}{G''} \right)} = \mu' \frac{4 \theta}{\frac{1}{G'J} + \frac{1}{G''J'}}, \quad (h_2)$$

где μ — коэффициент между 2,249 и 5,333, приведенный в заключительной таблице (§ 138), или $\mu = \frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}}$, где λ дается в той же таблице, но изменяется только между 3,08 и 3,36 или представляется эмпирически и приближенно посредством формулы $\lambda = 3,36 - 0,28 \frac{c^4 G'^2}{b^4 G''^2}$.

Коэффициент μ изменяется от 0,843 до 1, он дается также таблицей и остается приблизительно постоянным и равным 0,85 до $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}} = 2$.

$$\left. \begin{aligned} g_{xy} (\text{при } z = c) &= -\gamma' c \theta, & g_{xz} (\text{при } y = b) &= \gamma'_1 b \theta, \\ g_x (\text{при } y = 0, z = c) &= \gamma c \theta, & g_x (\text{при } y = b, z = 0) &= \gamma_1 b \theta, \end{aligned} \right\} (h_2)$$

где $\gamma, \gamma_1, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{\gamma'_1}{\gamma_1}$ даны в таблице.

$$\lim M_x = \text{наименьшей из двух величин} \left. \begin{aligned} &\frac{\mu}{\gamma} bc^2 G' \text{ и } \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} b^3 c T'' \end{aligned} \right\} (h_2')$$

Частные $\frac{\mu}{\gamma}, \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$ даются той же таблицей для каждого значения $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$.

1. Растяжение и поперечный сдвиг. Так как в этом случае (пункт А, формула (a'')) просто $E \partial_x = \frac{P_x}{\omega}$, а наибольшие значения $G' g'_{xy}, G'' g'_{xz}$ равны соответственно (пункт D) $\frac{P_y}{\omega}, \frac{P_z}{\omega}$, умноженным на 1, если сечение остается плоским, и на численные коэффициенты, зависящие от его формы, если сечение изгибается, то общая формула (a) сопротивления

разрыву при $\epsilon_1'' = \frac{1}{4}$ дает

$$\omega = \frac{3}{8} \omega' + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \omega'\right)^2 + \omega''^2},$$

где ω' и ω'' — площади, которые следует дать сечению, если деталь подвергалась соответственно только растяжению и только сдвигу или срезу. (i)

Отсюда получаем:

Для $\frac{\omega''}{\omega'} =$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1
$\frac{\omega}{\omega'} =$	1	1,083	1,175	1,319	1,554
Для $\frac{\omega''}{\omega''} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{\omega}{\omega''} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1

Примечание. Эта формула применима к малым болтам или заклепкам, одновременно растягиваемым и сжимаемым без изгиба.

Ж. Изгиб и поперечный сдвиг. Когда силы, создающие изгиб, имеют суммы составляющих в поперечном направлении, то изгиб в этом направлении сопровождается сдвигом, а сечения, первоначально плоские, стремятся изогнуться в виде гуська или в виде буквы S.

(j'), (j'') и (j''') Наклон φ плоскости изгиба, кривизна $\frac{1}{\rho}$, продольные удлинения ∂_x находятся, как в пункте E (только изгиб), по формулам (e), (e'') и (e''').

Стрела прогиба. Вместо (e'') возьмем для стрелы f и ее проекций f_z, f_y , чтобы учесть сдвиг, выражения:

$$\left. \begin{aligned} f_z &= \frac{M' \cos \varphi}{3EJ} \left(a^2 + \tau_z \frac{3E}{2G'} c^2 \right) = \frac{P_y a^3}{3EJ} \left(1 + \tau_z \frac{3E}{2G'} \frac{c^2}{a^2} \right), \\ f_y &= \frac{M' \sin \varphi}{3EJ'} \left(a^2 + \tau_y \frac{3E}{2G'} b^2 \right) = \frac{P_z a^3}{3EJ'} \left(1 + \tau_y \frac{3E}{2G'} \frac{b^2}{a^2} \right), \\ f &= \sqrt{f_z^2 + f_y^2}, \end{aligned} \right\} (j'')$$

где τ_z имеет следующие значения (когда $G' = G''$, $\varepsilon G = 0,1E$), а τ_y имеет те же значения, когда принимают b вместо c и c вместо b :

Прямоугольное сечение									Эллиптическое сечение	Круговое сечение
Для $\frac{c}{b} =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2	4	∞		
$\tau_z =$	0,68	0,85	0,91	0,94	0,96	0,98	1,0	1	$\frac{2c^2+0,8b^2}{3c^2+b^2}$	0,7

J_1 . Если ничто не препятствует плоскости сечений изгибаться в виде гуська, то мы вычислим сопротивление в предположении, что имели место только изгиб (пункт E) или только сдвиг (пункт D, формулы (d_1^{IV}) , (d_1^V) , (d_1^{VI}) , (d_1^{VII})), и примем для выбираемых размеров наибольший из результатов этого двойного вычисления.

J_2 . Если одно из сечений, наиболее подверженных опасности, т. е. с самым значительным изгибающим моментом M' , является сечением, плоскость которого не может изгибаться, то возьмем (пункт A, формулы (a), (a'), (a'')):

$$1 \geq \max \frac{3}{8} \frac{M'}{R} \left(\frac{\cos \varphi}{J} z + \frac{\sin \varphi}{J'} y \right) + \sqrt{\left[\frac{5}{8} \frac{M'}{R} \left(\frac{\cos \varphi}{J} z + \frac{\sin \varphi}{J'} y \right) \right]^2 + \left(\frac{P_y}{T'' \omega} \right)^2 + \left(\frac{P_z}{T'' \omega} \right)^2}. \quad (j_2)$$

Если сечение прямоугольное, то мы заменяем просто z на c , y на b и зачеркиваем знак *максимума*. (j₂)

Пример для случая $P_y = 0$, $\varphi = 0$:

$$1 = \frac{3}{8} \frac{b'c'^2}{bc^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{b'c'^2}{bc^2} \right)^2 + \left(\frac{b''c''}{bc} \right)^2},$$

где b' , c' — размеры, которыми задаются, если имеется только изгиб; $b'c'^2 = \frac{3M'}{4R}$;

$b''c''$ — то же, если имеется только сдвиг:

$$b''c'' = \frac{P_z}{4T''}.$$

(j₂^{II})

Отсюда для ширины $2b$ прямоугольной призмы, если задана полутолщина $c = c' = c''$, имеем:

$$b = \frac{3}{8} b' + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b'\right)^2 + b''^2}. \quad (j_2''')$$

Таким образом:

Для $\frac{b''}{b'} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1
имеем $\frac{b}{b'} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554
Для $\frac{b'}{b''} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
имеем $\frac{b}{b''} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

Для толщины $2c$ при заданной полуширине $b = b' = b''$:

Для $\frac{c''^2}{c'^2} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	
имеем $\frac{c}{c'} =$	1	1,050	1,193	1,255	1,285	1,372	
Для $\frac{c'^2}{c''^2} =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
имеем $\frac{c}{c''} =$	1,372	1,283	1,253	1,191	1,096	1,047	1

Эти формулы сопротивления следует применять только для очень коротких призм.

К. Изгиб и кручение.

К₁. Круговое сечение. Полагаем $G' = G''$; $T' = T''$ (обозначается T), т. е. ось симметрии строения параллельна оси тела:

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2}, \quad (k_1)$$

где r — заданный радиус сечения, r' — его значение только при изгибе, $r'^3 = \frac{4M'}{\pi R}$, r'' — то же только при кручении, $r''^3 = \frac{2M''}{\pi T}$.

Таким образом:

Для $\frac{r'^3}{r^3} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1
имеем $\frac{r^3}{r'^3} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554
Для $\frac{r''^3}{r^3} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
имеем $\frac{r^3}{r''^3} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

(k_1) То же сечение. Случай вращающегося цилиндрического вала, подверженного воздействию в противоположных направлениях двух шестерен или двух приводных ремней.

Та же формула (k_1) и та же таблица, когда берут вместо M'' выражение (322) § 129, а вместо M' — наибольшее из двух значений выражения (321) в месте расположения того или другого шкива. Мы будем принимать в расчет вес вала, пренебрегая сперва его влиянием, чтобы получить первое приближение для величины радиуса, а затем исправим вычисление.

То же круговое сечение. Случай, когда мы изменяем радиус сечения, чтобы вал имел *равное сопротивление*.

Формула (k_1) или

$$\pi r^3 = \frac{3}{8} \frac{4M'}{R} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{4M'}{R}\right)^2 + \left(\frac{2M''}{T}\right)^2} \quad (k_1')$$

даст различные значения этого радиуса, если подставить вместо M' его выражение (321) через расстояние x от каждого сечения до одного из концов.

То же круговое сечение. Стержень переменного радиуса, защемленный одним концом. К другому концу перпенди-

кулярно к длине стержня приложена изгибающая и скручивающая сила P ; сила действует посредством поперечного рычага длины k .

$$2R \frac{\pi r^3}{5P} = \frac{3}{5} x + \sqrt{x^2 + k^2}, \text{ где } x \text{ — расстояние от сечения до конца, где действует сила (полагаем } T = \frac{4}{5} R \text{).} \left. \vphantom{2R \frac{\pi r^3}{5P}} \right\} (k_1'')$$

K_2 . Общий случай прямоугольного сечения. Формулы (324) или (327) § 130, когда отыскивают максимум или положение опасной точки путем численного приближения, как в §§ 132 и 133.

То же прямоугольное сечение. Случай $\varphi = 0$, когда тело изгибается плашмя или в плоскости наиболее легкого изгиба; это происходит в том случае, если оно подвергается действию силы в этой плоскости или же когда оно чрезвычайно тонко:

$$bc^2 = \frac{3}{8} b'c'^2 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} b'c'^2\right)^2 + (b''c''^2)^2},$$

где $b'c'^2 = \frac{3M'}{4R}$ — значение, которое следует дать bc^2 , при наличии только изгиба,

$b''c''^2 = \frac{\gamma}{\mu} \frac{M''}{T'}$ — значение, которое следует дать bc^2 , при наличии кручения.

$$\left. \vphantom{bc^2} \right\} (k_2)$$

Таким образом:

Для $\frac{b'c'^2}{b''c''^2} =$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	1
имеем $\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1	1,048	1,083	1,175	1,319	1,554
Для $\frac{b'c'^2}{b''c''^2} =$	1	$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0
имеем $\frac{bc^2}{b'c'^2} =$	1,554	1,358	1,235	1,146	1,106	1

То же сечение. Прямоугольные призмы, испытывающие действие сил в плоскостях, образующих с гранями различные углы.

1) Квадратное сечение, или случай $b = c$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $1/2$; 1. См. таблицу результатов в § 132 (вторая таблица).

2) Прямоугольное сечение, одна из сторон которого вдвое больше другой, или случай $b = 2c$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $1/2$; 1; 2; ∞ .

См. третью таблицу в § 133.

K_3 . Эллиптическое сечение.

(k_3) Если призма или эллиптический цилиндр подвергаются действию сил плашмя или в плоскости наиболее легкого изгиба, то следует пользоваться той же формулой (K_2), как для прямоугольного сечения.

(k'_3) Если призма изогнута в положении на ребро или косо, то надо применять формулы (336), (333) § 134, отыскивая максимум путем численного приближения, как сделано в этом параграфе для случая $b = 2c$ при изгибе в положении на ребро.

(k''_3) И если имеет место последний случай ($b = 2c$ и изгиб в положении на ребро), то надо использовать вторую таблицу того же § 134.

K_4 . Другие сечения, кроме круга, прямоугольника и эллипса.

(k_4) Следует применять общую формулу (а) и формулу (а') пункта А, заимствуя в пункте Г сдвиги $g_{xy} = g''_{xy}$, $g_{xz} = g''_{xz}$ и исключая θ посредством выражений $M_x = M''$ того же пункта Г и находя максимум путем численного приближения.

Л. Одновременный изгиб, кручение, растяжение и сдвиг.

Надлежит применять общую формулу (а) пункта А, производя численное приближение для получения максимума.

Например, в случае кругового сечения, если пренебречь действием сдвигов, не зависящих от кручения, то для получения постоянного или переменного радиуса r надо решать численно уравнение (312) § 128:

$$(R \pi r^3 - P_x r - 4 M') \left(R \pi r^3 + \frac{1}{4} P_x r + M' \right) = 4 \left(\frac{R}{T} \right)^2 M'^2, \quad (1)$$

где продольная сила P_x и крутящий момент M'' постоянны для каждой части тела, а изгибающий момент M' изменяется от одного конца до другого. Задаем M' наибольшее значение, если хотим, чтобы радиус r был постоянным.

§ 137. Числовые примеры

Первый пример. Только изгиб. Прямоугольный брус, подвергающийся воздействию сил в косом направлении к его боковым граням. Дубовый прямоугольный горизонтальный брус длиной 3 м и сечением 0,30 на 0,10 м зашпелен одним концом так, что его боковые грани образуют углы 45° с горизонтом; на другом конце к нему приложен груз P .

Требуется определить: 1) предельное значение груза P , при котором его непрерывное действие не может ослабить материал и вызвать опасность разрушения через некоторое время; 2) величину и направление стрелы прогиба, т. е. поперечное перемещение оси бруска на конце, где действует сила.

Учитывая соотношение длины бруса к его двум другим измерениям, пренебрегают влиянием поперечного сдвига. Следует подставить в формулы E для случая только изгиба значения $a = 3, 2b = 0,3, 2c = 0,1, J = \frac{4}{3}bc^3 = 4c^4 = 0,000025, J' = \frac{4}{3}b^3c = 36c^4 = 0,000225, \cos \varphi = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и взять $E = 1\,200\,000\,000, R = 600\,000$, как это чаще всего делают¹⁾. Тогда по формуле (e^V) получим:

$$\lim Pa = \frac{4Rb^2c^2}{3(b \cos \varphi + c \sin \varphi)} = 3Rc^3 \sqrt{2} = 225 \sqrt{2} = 318,198.$$

Отсюда предельное значение груза $P = 106,066 \text{ кг}^2$). По

¹⁾ Лекции Морена по сопротивлению материалов, 1853, стр. 203, 169.

²⁾ В соответствии с формулой $\lim Pa = \frac{4Rbc(b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)}{3(b \sin \varphi + c \cos \varphi)}$, которую мы находим в различных работах и которая выведена в предположении, что плоскость изгиба всегда является плоскостью действия сил (§ 42), мы нашли бы $\lim Pa = 5Rc^3 \sqrt{2}$, или слишком большое число, относящееся к найденному, как 5 к 3.

формуле (е) $\operatorname{tg} \psi = \frac{J}{J'} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{9}$. Плоскость кривизны оси бруса наклонена только на $\frac{1}{9}$ к плоскости, проходящей первоначально через эту ось и параллельную малым боковым граням призмы¹⁾ (наклоненной в свою очередь на 45° к горизонту).

По формуле (е'') стрела равна

$$f = \frac{Pa^3}{4Ebc} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{c^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^4}} = \frac{Pa^3 \sqrt{41}}{108 Ec^4} = \frac{\bar{P} \sqrt{41}}{30000} = 0,00021344 P,$$

или если P равно предельному значению 106,066 кг, то $f = 0,0226 \text{ м}^2$.

Второй пример. Только кручение. Цилиндр с эллиптическим основанием, с одинаковым строением в поперечном направлении. Чугунный цилиндр длиной 5 м с эллиптическим основанием, имеющим диаметры 0,20 и 0,10 м, защемлен одним концом и подвергается на другом конце действию двух сил по 300 кг каждая, составляющих пару и действующих одновременно на плечо рычага в 1 м. Требуется определить: 1) кручение; 2) наибольший наклон волокна к элементу сечения; 3) предельное значение момента сил.

Имеем:

$$a = 5 \text{ м}; c = 0,05 \text{ м}; b = 0,10 \text{ м}; M_x = 600 \text{ кгм.}$$

Возьмем $G = 2\,000\,000\,000$ (Морен, стр. 442—443), $T = 2\,000\,000$ ($\frac{1}{11}$ от среднего значения усилий, которые произвели немедленное разрушение; там же, стр. 451).

¹⁾ Таким образом, плоскость изгиба, далеко не совпадающая с плоскостью действия сил при изгибе, составляет с ней угол приблизительно 39° .

²⁾ В соответствии с формулой $f = \frac{Pa^3}{3EJ''}$, которую мы находим в тех же работах, где $J'' = \frac{4}{3}(b^3c \cos^2 \varphi + bc^3 \sin^2 \varphi)$ — момент инерции сечения относительно горизонтали, проведенной через его центр, эта стрела была бы только $\frac{Pa^3}{60Ec^4}$, или очень малое число, относящееся к найденному, как $\frac{1}{60}$ к $\frac{\sqrt{41}}{108}$, или 1 к 3,56.

По формуле (g_2') получаем:

$$600 = 2\,000\,000\,000 \frac{3,1416 \cdot 0,05^3 \cdot 0,1^3}{0,05^2 + 0,1^2} \theta = 62\,832 \theta,$$

откуда $\theta = 0,00955$.

Затем из выражения $\theta = \frac{1}{a} \frac{2\pi}{360} \alpha$ находим угол поворота конца цилиндра, испытывающего действие момента:

$$\alpha = \frac{360 \alpha}{2\pi} \theta = 2^\circ, 73.$$

Формула (g_2'') дает

$$g = \frac{2(0,1)^2}{(0,05)^2 + (0,01)^2} 0,05 \theta = 0,08 \theta = 0,000764,$$

а из формулы (g_2''') имеем :

$$\lim M_x = \frac{3,1416 (0,05)^2 \cdot 0,10}{2} 2\,000\,000 = 785 \text{ кгм},$$

так что можно при плече рычага в 1 м приложить силы, доходящие до 392,5 кг каждая.

Третий пример. Только кручение. Прямоугольный брус с неодинаковым строением в поперечном направлении. Пусть прямоугольный еловый брус имеет сечение 0,16 на 0,24 м и длину 9 м.

Требуется определить:

1) Какие силы, образующие пару и действующие посредством рычага в 1 м на один из концов, заставят его повернуться на два градуса относительно другого конца, который защемлен? 2) Каким будет тогда наибольший сдвиг? 3) Каково предельное значение этих сил?

Имеем:

$$a = 9; b = 0,12; c = 0,08; \text{ угол } \alpha = 2.$$

Обычно берут для этого материала приблизительно $G = 450\,000\,000$ и $T = 300\,000$. Но полагают, что удельные сопротивления сильнее в направлении наименьшего размера и что сравнение результатов различных опытов, сделанных над образцами одинакового происхождения, взятыми в одинаковом положении по отношению к осям деревьев, из которых их изготовляют, заставляет принять

$$\begin{aligned} G' &= 400\,000\,000, & G'' &= 500\,000\,000, \\ T' &= 250\,000, & T'' &= 350\,000, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\frac{b}{c} \sqrt{\frac{G''}{G'}} = 1,6770.$$

Нижеследующая таблица § 138 дает посредством интерполяции между строками 1,60 и 1,70 или 1,75:

$$\mu = 3,3484; \quad \mu' = 0,8513; \quad \gamma = 1,767; \quad \gamma_1 = 0,877;$$

$$\frac{\mu}{\gamma} = 1,893; \quad \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b_2 G''} = 1,360.$$

Итак, получим формулу (h_2):

$$M_x = \mu G' \theta b c^3,$$

$$M_x = 3,3484 \cdot 0,12 \cdot 0,08^3 \cdot 400\,000\,000 \theta = 82\,290 \theta.$$

Если бы у нас не было под рукой таблицы значений коэффициента μ , но мы помнили бы, что коэффициент μ' , который нужно подставить в формулу, найденную Коши, способен изменяться значительно меньше и равен приблизительно 0,85, то получили бы

$$M_x = 0,85 \frac{\frac{16}{3} \cdot 0,12^3 \cdot 0,08^3}{\frac{0,12^2}{400} + \frac{0,08^2}{500}} 1\,000\,000 \theta = 82\,190 \theta,$$

что не отличается заметно от предыдущего значения. Итак,

$$\theta = \frac{2\pi a}{360 a} = \frac{2\pi 2}{360 \cdot 9} = 0,0038785.$$

$M_x = 82\,290 \theta = 319,14$ кгм. Силы, которые следует приложить к плечу рычага, составляют 159,57 кг каждая.

По формуле (g_4'') находим сдвиг g_{xz} (посредине малой стороны $2c$) = $0,877 \cdot 0,12 \theta = 0,10524 \theta$ и сдвиг $-g_{xy}$ (посредине большой стороны $2b$) = $1,767 \cdot 0,08 \theta = 0,14136 \theta$. Так как отношение этих двух сдвигов больше, чем отношение частных $\frac{G''}{T''}$, $\frac{G'}{T'}$, то опасная точка, для которой $G'' g_{xz}$ или $-G' g_{xy}$ может превысить T'' или T' , находится посредине большей стороны.

Но если даже не входить в рассмотрение сдвигов, то положение этой точки будет дано наименьшим из двух чисел, полученных по формулам (h_2''), дающим предел M_x . Тогда имеем: по первой формуле (h_2'') $\lim M_x = 1,893 \times \times 0,12 \cdot 0,08^2 \cdot 250\,000 = 368 \text{ кгм}$ и по второй формуле $\lim M_x = 1,360 \cdot 0,08 \cdot 0,12^2 \cdot 350\,000 = 548 \text{ кгм}$.

Отсюда действительно следует, что опасная точка находится посредине стороны $2b$ и что нужно принять 368 кгм за предельное значение момента сил, которые создают кручение; это приводит к двум силам по 184 кг каждая.

Четвертый пример. Растяжение и поперечный сдвиг. Болт или заклепка. Маленький железный болт (или заклепка) испытывает после затягивания гайки (или после установки заклепки в горячем состоянии) растяжение в 1000 кг . На него в поперечном направлении действует сила 1200 кг , стремящаяся его разрушить путем среза (например, вследствие растяжений, которые испытывают соединяемые им листы).

Требуется определить сечение болта (или заклепки).

Если допустить, что каждый квадратный миллиметр мог бы выдержать максимальное растяжение 5 кг и усилие при срезе 4 кг , то следовало бы при одном лишь растяжении принять сечение 200 мм^2 , а при одном только срезе — сечение 300 мм^2 .

Итак, имеем по формуле (I) $\omega' = 200$, $\omega'' = 300$.

Болту (или заклепке) следует дать сечение

$$\omega = \frac{3}{8} 200 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} 200\right)^2 + 300^2} = 400 \text{ мм}^2,$$

т. е. его диаметр равен $0,02257 \text{ м}$.

Пятый пример. Одновременные изгиб и кручение. Трансмиссионный вал в машине.

Пусть (рис. 62 § 129) на горизонтальный вращающийся цилиндрический чугунный вал длиной 5 м насажены на расстоянии 1 м от каждого конца две шестерни или два приводных шкива, весящих 200 и 100 кг . На вторую шестерню диаметром 1 м по касательной действует сила сопротивления 2000 кг ; первая шестерня большего диаметра, так что сила, которая там приложена также касательно для преодоления трения, составляет только 1100 кг . Эти две силы действуют

в направлениях, составляющих с обеих сторон вертикальной плоскости, проходящей через ось, углы 45° .

Требуется определить диаметр вала, чтобы он сопротивлялся одновременному действию изгиба и кручения.

Нужно принять в формулах § 129, к которым нас отсылают формулы пункта К:

$$\begin{aligned} P &= 1100, \\ P' &= 2000, \\ \tilde{\omega} &= 200, \\ \tilde{\omega}' &= 100, \quad a = 5, \\ \alpha' &= \alpha'' = 1, \\ e' &= 0,50, \\ \cos \alpha &= \cos \alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos (\alpha + \alpha') &= 0. \end{aligned}$$

Пусть e'' (радиус второго подшипника) = 0,05; f (его коэффициент трения) = 0,10.

Для чугуна принимаем $R = 7\,500\,000$, $T = 2\,000\,000$ и придаем предварительно валу, толщина которого еще неизвестна, вес $\Pi = 500$ кг.

По формуле (322) находим скручивающий момент

$$M'' = P' e' + \frac{f p''}{\sqrt{1 + f^2}} R = 1000 + 0,005 R$$

и получаем для равнодействующей R сил, давящих на второй подшипник (по формуле, аналогичной формуле (321)):

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(P \frac{a'}{a} \right)^2 + \left(P' \frac{a - a''}{a} \right)^2 + \left(\tilde{\omega} \frac{a'}{a} + \tilde{\omega}' \frac{a - a''}{a} + \frac{\Pi}{2} \right)^2 + \\ &\quad + 2 P P' \frac{a'}{a} \frac{a - a''}{a} \cos (\alpha + \alpha') + \\ &\quad + 2 \left(\tilde{\omega} \frac{a'}{a} + \tilde{\omega}' \frac{a - a''}{a} + \frac{\Pi}{2} \right) \left(P \frac{a'}{a} \cos \alpha + P' \frac{a - a''}{a} \cos \alpha' \right) = \\ &= 220^2 + 800^2 + 370^2 + 2 \cdot 370 (220 + 800) \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= 1\,539\,024, \text{ или } R = 1239 \text{ кг}, \end{aligned}$$

а

$$M'' = 1006 \text{ кгм.}$$

Изгибающий момент M' имеет наибольшее из тех значений, которые получаются по формуле (321) при последовательной подстановке значений $x = a' = 1$ и $x = a - a'' = 4$ в выражения (320) составляющих моментов, которые туда входят. Так как этими двумя значениями являются $\sqrt{898\,596}$ и $\sqrt{2\,408\,891}$, то нужно взять второе. Итак, $M' = 1552 \text{ кгм.}$ Следовательно, для куба радиуса вала получили бы:

1) если он только изгибается,

$$r'^3 = \frac{4M'}{\pi R} = 0,00026348 \text{ (откуда } r' = 0,064 \text{ м);}$$

2) если он только скручивается,

$$r''^3 = \frac{2M''}{\pi T} = 0,00032022 \text{ (откуда } r'' = 0,068 \text{ м).}$$

Итак, кубу радиуса следует дать значение (формула (k_1))

$$r^3 = \frac{3}{8} r'^3 + \sqrt{\left(\frac{5}{8} r'^3\right)^2 + (r''^3)^2} = 0,000458886,$$

или

$$r = 0,07713 \text{ м.}$$

Вес вала с таким радиусом будет 729 кг. Замена этого числа числом 500 не повлияет в такой степени, чтобы потребовалось повторить вычисление.

Если для экономии материала мы пожелали бы изготовить вал равного сопротивления с переменным радиусом r , то формула (k_1') дала бы вместе с формулами (321) и (322)

$$\pi r^3 = \frac{3}{8} \frac{4M'}{7\,500\,000} + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \frac{4M'}{7\,500\,000}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 1006}{2\,000\,000}\right)^2},$$

$$M' = \sqrt{1561127 - 1098004x + 366522x^2 - 28079x^3 + 4356x^4},$$

где x — расстояние от произвольного сечения до первого подшипника.

§ 138. Таблица, относящаяся к кручению прямоугольных сдвиге в направлениях y, z сторон $2b, 2c$ оснований, а T', T'' — на единицу площади или $\frac{T'}{G'}, \frac{T''}{G''}$

Значения отношения $\frac{b\sqrt{G''}}{c\sqrt{G'}}$ (или $\frac{b}{c}$, когда упругость одинакова в поперечных направлениях)	Крутящий момент M_x		
	формула $M_x =$ $= \left(\frac{16}{3} - \lambda \frac{c\sqrt{G'}}{b\sqrt{G''}} \right) G' \theta b c^3$	формула $M_x = \mu G' \theta b c^3$	формула $M_x =$ $= \mu' \frac{4\theta}{\frac{1}{G'J} + \frac{1}{G''J'}} =$ $= \mu' \frac{16b^3c^3\theta}{3\left(\frac{b^3}{G'} + \frac{c^3}{G''}\right)}$
	значения λ	значения μ	значения μ'
1,00	3,08410	2,24923	0,84346
1,05	3,12256	2,35908	0,84353
1,10	3,15653	2,46374	0,84373
1,15	3,18554	2,56330	0,84403
1,20	3,21040	2,65788	0,84443
1,25	3,23196	2,74772	0,84492
1,30	3,25035	2,83306	0,84552
1,35	3,26632	2,91379	0,84611
1,40	3,28002	2,99046	0,84679
1,45	3,29171	3,06319	0,84889
1,50	3,30174	3,13217	0,84830
1,60	3,31770	3,25977	0,84996
1,70	3,32941	3,37486	0,85174
1,75	3,33402	3,42843	0,85267
1,80	3,33798	3,47890	0,85362
1,90	3,34426	3,57320	0,85559
2,00	3,34885	3,65891	0,85756
2,25	3,35564	3,84194	0,86266
2,50	3,35873	3,98984	0,86779
2,75	3,36023	4,11143	0,87283
3,00	3,36079	4,21307	0,87772
3,333	—	—	—
3,50	3,36121	4,37299	0,88687
4,00	3,36132	4,49300	0,89509
4,50	3,36133	4,58639	0,90231
5	3,36133	4,66162	0,90902
6	3,36133	4,77311	0,91982
6,667	3,36133	—	—
7	3,36133	4,85314	0,92854
8	3,36133	4,91317	0,93561
9	3,36133	4,95985	0,94145
10	3,36133	4,99720	0,94634
20	3,36133	5,16527	0,97091
50	3,36133	5,26611	0,98779
100	3,36133	5,29972	0,99380
∞	3,36133	5,33333	1,00000

призм, для которых G', G'' — коэффициенты упругости при наибольшие касательные усилия в этих двух направлениях — пределы для сдвигов g_{xy}, g_{xz}

Наибольший главный сдвиг		Предел для момента сил, если имеется только кручение (берется наименьший)	
посредине сторон $2b$ $-g_x = -g_{xy} = \gamma c \theta$	посредине сторон $2c$ $g_x = g_{xz} = \gamma_1 b \theta$	опасная точка посредине $2b$ $\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma} bc^2 \Gamma'$	опасная точка посредине $2c$ $\lim M_x = \frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''} b^2 c \Gamma''$
значения γ	значения γ_1	значения $\frac{\mu}{\gamma}$	значения $\frac{\mu}{\gamma_1} \frac{c^2 G'}{b^2 G''}$
1,35063	1,35063	1,66534	1,66534
1,39651	1,68954	
1,43956	1,71146	
1,47990			
1,51753	1,75363	
1,55268	1,13782	1,76970	1,54556
1,58544	1,7852	
1,61594	1,80316	
1,64430	1,81868	
1,67265			
1,69512	0,97075	1,84776	1,43402
1,73889	0,91489	1,87463	1,39180
1,77649			
1,79325	0,84098	1,91170	1,33107
1,80877	1,92334	
1,83643			
1,86012	0,73945	1,96703	1,15286
1,90546			
1,93614	0,59347	2,06072	1,07566
1,95687			
1,97087	2,13767	
—	0,44545	—	—
1,98672	2,20111	
1,99395	0,37121	2,25332	0,757
1,99724	2,29636	
1,99874	0,29700	2,33200	0,628
1,99974	2,38687	
—	0,22275	—	—
1,99995	2,42663	
1,99999	1,18564	2,45660	
2,00000	2,47993	
2,00000	0,14858	2,49860	
2,00000	0,07341	2,58264	
2,00000	2,63306	
2,00000	2,64986	
2,00000	0,00000	2,66667	

Главные сдвиги в других точках сторон $2b$, $2c$, кроме середины (для задач, когда одновременно имеется изгиб и кручение).

Имеем: $-g_{xy}$ (при $z = c$ или на сторонах $2b$) $= \gamma' c \theta$;
 g_{xz} (при $y = b$ или на сторонах $2c$) $= \gamma_1 b \theta$

Значения $\frac{\gamma'}{\gamma}$				
$\frac{y}{b}$ \diagdown $\frac{b\sqrt{G^*}}{c\sqrt{G^*}}$	1	1,5	2	4
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9932	0,9949	0,9962	0,9991
0,2	0,9750	0,9795	0,9846	0,9973
0,3	0,9429	0,9526	0,9639	0,9928
0,4	0,8963	0,9127	0,9321	0,9842
0,5	0,8333	0,8572	0,8857	0,9678
0,6	0,7510	0,7820	0,8196	0,9371
0,7	0,6447	0,6811	0,7260	0,8793
0,8	0,5063	0,5441	0,5916	0,7695
0,9	0,3185	0,3497	0,3896	0,5540
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Значения $\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$			
$\frac{z}{c}$ \diagdown $\frac{b\sqrt{G^*}}{c\sqrt{G^*}}$	1	2	4
0	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9932	0,9932	0,9933
0,2	0,9750	0,9729	0,9729
0,3	0,9429	0,9384	0,9383
0,4	0,8963	0,8887	0,8885
0,5	0,8333	0,8224	0,8220
0,6	0,7510	0,7369	0,7363
0,7	0,6447	0,6282	0,6278
0,8	0,5063	0,4892	0,4885
0,9	0,3185	0,3044	0,3040
1,0	0,0000	0,0000	0,0000



МЕМУАР
ОБ ИЗГИБЕ
ПРИЗМ





МЕМУАР ОБ ИЗГИБЕ ПРИЗМ,

о поперечных и продольных сдвигах, которые ему сопутствуют, когда изгиб не происходит равномерно или по дуге окружности, а также об искривлении первоначально плоских поперечных сечений

§ 1. Прежние исследования по теории изгиба

В связи с задачей разрушения призм при изгибе высказывается мнение, что теория сопротивления твердых тел основана Галилеем¹⁾, а затем сформулирована на правильной основе Мариоттом (Mariotte)²⁾, связавшим эту теорию с упругостью твердых тел, основной закон которой был открыт несколько ранее Робертом Гуком (R. Hooke)³⁾.

Галилей (Galilei), представляя себе горизонтальную прямоугольную призму разделенной на *волокна* или продольные элементы, полагал, что все они разрываются вместе и оказывают одинаковое сопротивление, когда под действием вертикальной силы одна часть призмы отделяется от другой, поворачиваясь, как он думал, относительно нижней стороны поперечного сечения в месте разрыва.

¹⁾ Diologo secondo, Giornata seconda, 1638, § 550, стр. 63, delle opere di Galileo Galilei.

²⁾ Traité du mouvement des eaux, ч. 5, речь 2-я, 1684 (посмертное).

³⁾ Лекции De potentia restitutiva or of Spring — небольшое произведение Роберта Гука, помещенное в Philosophical tracts and collections и опубликованное в 1678 г., т. е. два года спустя после его Description of Helioscopes, где он уже высказал в виде анаграммы *ceiinoosssttuv* свой знаменитый закон *ut tensio sic vis*, выражающий *пропорциональность* между удлинениями или сжатиями пружин и усилиями, которые их вызывают.

Мариотт (Mariotte), наоборот, считал, что волокна растягиваются и сжимаются перед разрушением, которое начинается у одного из волокон, и что до этого момента они сопротивляются в соответствии со степенью их растяжения или сжатия, величина которых предполагается пропорциональной расстоянию до волокон, не меняющих длины. Он поместил последние, а следовательно и ось вращения, посередине высоты сечения, по которому происходит разрыв, как это делают и в настоящее время. Но странно, что он затем допустил в выводах ошибку, которая состоит в одновременном изменении и плеча рычага, и силы с целью удвоения их произведения¹⁾. Он нашел момент сопротивлений «таким, как будто бы все части призмы растягивались», т. е. как будто вращение производилось бы относительно низа сечения, а не середины его. Это ему дало две трети результата Галилея, тогда как в соответствии со своим отправным положением он должен был получить только одну треть.

Удивительно, что спустя 20 лет Якоб Бернулли (J. Bernoulli), великий математик, автор первой теории упругих кривых, *также допуская сжатия* и предлагая свои собственные соображения, совершил в другой форме именно такую же ошибку, состоящую в удвоении момента сопротивлений. Это привело его даже к утверждению, что положение оси вращения совершенно безразлично²⁾.

Только в 1773 г. Кулон (Coulomb) в своем знаменитом труде, заложившем почти все основы теории прочности сооружений³⁾, исправил эту ошибку в вычислении. Помещая подобно Мариотту и Бернулли *линию неизменяемых волокон* посередине высоты сечения, полагаемого прямоугольным, он установил на основании очевидной леммы статики принцип, который должен служить для определения этой линии в случае сечений любой формы, а именно *равенство нулю полной алгебраической суммы продольных сопротивлений волокон*

¹⁾ Р. Гук, Лекции De potentia . . . , 13-й абзац статьи.

²⁾ Véritable hypothèse de résistance des solides avec la démonstration de la courbure des ressorts, lemme 4 (Académie des Sciences, 1705 или Jacobi Bernoulli, Opera omnia, т. II, стр. 976).

³⁾ Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes relatifs à l'architecture. Savants étrangers, 1773 (том опубликован в 1776 г.).

призмы, на которую оказывается воздействие только в поперечном направлении. Он дал точную величину суммы их моментов, вдвое меньшую против найденной Мариоттом в результате его ошибочных вычислений и Лейбницем (Leibnitz) ввиду его предположения, что неизменяемые волокна фактически находятся в нижней части сечения¹).

Кулон, впрочем, отчетливо отмечает, что если материал призмы не следует вплоть до своего разрушения закону пропорциональности между усилиями и удлинениями или сжатиями, то окончательная ось вращения может находиться не только посередине сечения. Но он отвергает мнение, будто она может находиться внизу, по той очевидной причине, что линия, не имеющая толщины, не может выдержать конечное давление.

Только в настоящем столетии его мемуар, на трех страницах которого, озаглавленных «Замечание о разрушении», содержится так много, был, наконец, изучен и понят. Однако это произошло не сразу. Так, Дюло (Duleau)²), давая то же выражение, что и Кулон, для суммы моментов сопротивлений и помещая таким же образом линию неизменяемых волокон (в прямоугольной призме), определял в общем случае положение этой линии из условия, «что сумма моментов сопротивлений сжатию равнялась бы сумме моментов сопротивления растяжениям». Это ошибочное правило привело бы его к положению, весьма далекому от истины для тех сечений, которые не делились бы этой линией на две симметричные половины. Барлоу (Barlow) в Англии сделал подобную же ошибку³), которую он чистосердечно признал и сам исправил в своей последней работе о прочности материалов⁴), сославшись на указание, сделанное ему Годкинсоном (Hodgkinson)⁵). Его искусный и ученый соотечественник

¹) *Demonstrationes novae de resistentiâ solidorum. Acta Eruditorum Lipsae, 1684, стр. 319.* Лейбниц ссылается на Мариотта, исследования которого были уже известны, но книга не была еще опубликована. (В подлиннике в этой ссылке опечатка — работа датирована 1784 г. — А. П.)

²) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, 1820, стр. 2 и 3.*

³) *An Essay on the Strength and Stress of timber, 1817, § 120.*

⁴) *A Treatise on the Strength of timber, cast iron, etc., 1837, § 40.*

⁵) *Mémoires de Manchester, т. IV, новая серия.*

Тредгольд (Tredgold), помещая *нейтральную ось* подобно Барлоу и Кулону в ее правильном положении для прямоугольных сечений, придумал своеобразный закон¹⁾, чтобы определить ее положение в сечениях иной формы. Тредгольд еще не понимал весьма простой закон равновесия составляющих сил в направлении, параллельном волокнам, упомянутый Кулоном.

Навьё (Navier) помещал некоторое время неизменяемые волокна подобно Галилею, Лейбницу и Жирару (Girard)²⁾ в нижней части сечения³⁾ и позволил себе высказать различные сложные соображения, от которых вынужден был вскоре отказаться⁴⁾. Наконец, он дал в 1824 г. в своих лекциях, отпечатанных по частям и опубликованных в 1826 г.⁵⁾, теорию вопроса в соответствии с принципом Кулона. Эта теория принята в настоящее время в сопротивлении материалов не только для разрушения при изгибе, но и для обычного изгиба без разрушения, для самых простых случаев которого в 1807 г. предложил формулы⁶⁾ известный физик Т. Юнг (Th. Young). Это стало затем предметом ряда прекрасных исследований Дюло и Дюпена (Dupin)⁷⁾.

В то же время Навьё высказал (на что Юнг указал между прочим) правильное мнение, что можно вывести формулы изгиба, чтобы предотвратить возможность *последующего разрыва* призмы, ограничивая надлежащим образом удлинения или усилия, которые в таком случае не перестают приблизительно следовать законам упругости и пропорциональности и на которых основываются эти формулы. Таким образом, нет необходимости в конечном счете располагать ось враще-

¹⁾ Essay on the Strength of cast iron, § 85 и Elementary principles of Carpentry.

²⁾ Traité analytique de la résistance des solides, 1798, стр. 2, 5, 7.

³⁾ Notes sur la Science des ingénieurs, de Belidor, 1818 и Lithographie des premières leçons, 1819—1820, прочитанные в Школе мостов и дорог.

⁴⁾ Traité de la construction des ponts de Gauthey, 1819.

⁵⁾ Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de mécanique à l'établissement des constructions et des machines.

⁶⁾ A Course of lectures on natural Philosophy, т. II, раздел IX. Эти формулы воспроизведены Робизоном (Robison) в «Британской энциклопедии».

⁷⁾ Expériences sur la force des bois. Journal de l'École Polytechnique, 1815, 17-я тетрадь.

ния в каком-либо другом положении, а не в том, в котором она находится при малой величине изгиба.

Мы не упоминаем здесь о других услугах, оказанных данной отрасли механики этим выдающимся ученым, который первым в 1821 г.¹⁾, т. е. именно в то время, когда он сомневался в формулировке приближенной теории Мариотта и Кулона, создал полную и точную теорию, дав общие формулы равновесия и внутреннего движения упругих твердых тел, на которых отныне должно основываться всякое точное исследование деформаций, вызываемых действием сил. Навье присоединил к этому теорию давлений или внутренних напряжений, введенную Коши (Cauchy) в 1822 г.²⁾ и рассмотренную несколько позднее Пуассоном (Poisson)³⁾, а также Ламе (Lamé) и Клапейроном (Clapeyron), которые в то время выполняли поручение за пределами Франции и не знали о ранее опубликованных работах в тот момент, когда они представляли свой превосходный мемуар 1828 г.⁴⁾, часть которого введена Ламе в его блестящие лекции по теории упругости⁵⁾.

§ 2. Принятая в настоящее время теория изгиба, вызванного неравномерным продольным растяжением волокон. Гипотезы, на которых она обычно основывается. Ненужность этих гипотез ввиду их неточности для вывода формул

Эта теория в том виде, как она обычно преподается, приводит к результатам, достаточно хорошо подтверждаемым экспериментом в самых обычных случаях. Она исходит из двух гипотез: 1) сечения, плоские и перпендикулярные к

1) Mémoires sur l'équilibre et la mouvement des solides élastiques. Прочитано 14 мая 1821 г. Mémoires (nouv.) de l'Institut, т. VII, 1827 и Société Philomathique, 1823.

2) Société Philomathique, январь 1823 г., стр. 10 и затем Exercices de Mathématiques, т. II, 1827.

3) Mémoires sur les corps élastiques. Прочитано 14 апреля 1828 г. и помещено в VIII томе l'Institut.

4) Mémoire sur l'équilibre intérieur des solides homogènes. Savants étrangers, 1829 и Journal de Crelle.

5) Leçons sur la théorie mathématique d'élasticité des corps solides, 1853.

ребрам призмы до ее изгиба, остаются и после изгиба *также плоскими и нормальными* к этим ребрам и волокнам или продольным элементам, которые становятся криволинейными; 2) волокна, одни растянутые, другие укороченные, *сопротивляются независимо*, как будто бы они представляли собой малые изолированные призмы, не оказывающие друг на друга никакого действия.

Из первой гипотезы следует, что малые части волокон, заключенные между двумя весьма близкими сечениями и совершенно равные до изгиба, *имеют после изгиба длину, пропорциональную их радиусам* или их расстояниям до линии, по которой пересекаются плоскости этих сечений. Таким образом, вводя обозначения:

- e — расстояние от этой линии до *неизменяемых* волокон, т. е. сохраняющих свою первоначальную длину, расстояние, обязательно одинаковое для всех указанных волокон,
- $e + z$ — расстояние от этой линии до какого-либо волокна (здесь z может быть положительным или отрицательным),
- ϑ — *удлинение* того же волокна или его относительное растяжение, положительное или отрицательное,
- p — *напряжение* — усилие на единицу поверхности малого поперечного сечения волокна,
- E — так называемый коэффициент или модуль упругости, — постоянное для данного материала призмы отношение напряжения к малому удлинению *при отсутствии боковых воздействий* на призму,

получаем для отношения новой длины какого-либо волокна к его прежней длине, равной длине неизменяемых волокон:

$$\frac{e+z}{e} = 1 + \frac{z}{e},$$

что дает для удлинения этого волокна

$$\vartheta = \frac{z}{e},$$

откуда (в соответствии со второй гипотезой)

$$p = E \frac{z}{e}. \quad (1)$$

Эти две гипотезы, данные нами в общепринятой формулировке, являются ошибочными, за исключением редкого случая *равномерного* изгиба или изгиба по дуге окружности под действием сил, создающих моменты на каждом конце призмы. Действительно, если внешние силы, действующие на конец призмы и изгибающие ее, имеют поперечную равнодействующую P , которая обязательно производит неравномерный изгиб от одного конца до другого, то для равновесия какой-либо части призмы, отделенной от другой ее части сечением ω , требуется, чтобы по этому сечению действовали внутренние силы, также поперечные, с такой же равнодействующей P^1); это может произойти, если только сечения перекашиваются и перестают быть повсюду нормальными к волокнам, которые, следовательно, несколько *сдвигаются* также относительно друг друга и создают при взаимодействии *род трения* или продольные натяжения, которые исключают абсолютную независимость волокон.

Но, несмотря на эти обстоятельства, формулы (1) могут быть справедливы: 1) если все сечения призмы *изгибаются и одинаково наклоняются* к волокнам, так как пересекаемые ими части волокон испытывают такие же удлинения, что и волокна, заключенные между плоскостями, остающимися нормальными; 2) если отношение $\frac{p}{\vartheta}$ напряжений к удлинениям волокон несколько не зависит от их *продольного* взаимодействия, аналогичного трению, так как отсутствия боковых сжатий достаточно для того, чтобы это отношение равнялось бы E , как будто волокна полностью независимы и изолированы друг от друга.

Итак, основные формулы (1)

$$\vartheta = \frac{z}{e}, \quad p = E \frac{z}{e},$$

если их можно узаконить подобным образом, легко приводят

¹⁾ Существование их не ускользнуло от Кулона (цитированный мемуар 1773 г., раздел VII, стр. 350), а Вика (Vicat) обратил на них особое внимание, назвав их равнодействующую *поперечной силой* (Recherches sur les phénomènes qui précèdent la rupture etc., Annales des Ponts et Chaussées, 1833, 2-е полугодие).

к решению различных частных случаев изгиба или, по крайней мере, всякого случая, который зависит от неравномерности продольных удлинений и не зависит от малых наклонов или *сдвигов*, величины которых должны быть найдены иначе. Действительно, если обозначим:

$d\omega$ — элемент сечения ω призмы $A\omega B$ или основание какого-либо из ее волокон, рассматриваемого как весьма тонкая призма,

M — полный момент относительно линии неизменяемых волокон сечения ω внешних сил, которые создают изгиб и действуют на часть ωB призмы (с самого начала *считается*, что эти силы не имеют никаких составляющих в продольном направлении, т. е. в направлении волокон), то равновесие части ωB призмы, нагруженной с одной стороны этими внешними силами, а с другой — растягивающими усилиями $p d\omega$, которые воздействуют на нее посредством волокон со стороны другой части $A\omega$ призмы, требует, как это заметил Кулон, чтобы продольные силы $p d\omega$ в сумме равнялись нулю, как и составляющие внешних сил по их направлениям, или чтобы $\int \frac{E}{e} z d\omega = 0$.

Нужно также, чтобы сумма моментов тех же сил $\int p d\omega \cdot z = \int \frac{E}{e} z^2 d\omega$ относительно линии неизменяемых волокон равнялась бы M . Отсюда получаем два равенства, которые вместе с равенствами (1) представляют итог первых шагов и усилий самых знаменитых ученых в течение двух веков:

$$\int z d\omega = 0, \quad \frac{E}{e} \int z^2 d\omega = M. \quad (2)$$

Первое равенство показывает, что линия неизменяемых волокон, перпендикулярная к плоскости изгиба, *проходит через центр тяжести сечения ω* .

Второе равенство служит для определения кривизны $\frac{1}{e}$ и, следовательно (когда сдвигами, о которых мы только что говорили, можно пренебречь), различных форм изогнутой оси призмы, которые уже могли определить теоретически, еще не зная правильного знаменателя $E \int z^2 d\omega$, Якоб Бер-

нулли¹⁾, Эйлер (Euler)²⁾ и Лагранж (Lagrange)³⁾ и которые были изучены Навье. Эти вопросы и в настоящее время являются предметом многочисленных и полезных исследований, выполненных с точки зрения различных способов приложения внешних сил, интенсивность и направление которых часто задавались только приближенно.

То же второе уравнение (2), написанное в виде

$$M = \frac{E \int z^2 d\omega}{z} \vartheta \quad \text{или} \quad M = \frac{\int z^2 d\omega}{z} p,$$

может быть доказано в последней форме без введения ρ и E при единственном допущении, что напряжение p в волокнах изменяется как линейная функция z . Это предположение является обобщением уравнения Кулона, относящегося только к прямоугольной призме, и служит для определения момента M в соответствии с экспериментально установленным пределом для значений p , при которых нет опасения даже за последующее разрушение. Но нужно отметить, что мы не получаем таким образом правильного условия сопротивления, так как сдвиги или наклоны волокон или сечений, о которых мы упоминали и которые не учитываются этими уравнениями, вызывают малые косые молекулярные смещения, которые, сочетаясь с продольными удлинениями ϑ , производят в различных направлениях несколько большие удлинения, и следует устанавливать предел для этих суммарных удлинений, а не для $\vartheta = \frac{p}{E}$.

Следует также обратить внимание, как указывал Персей (Persey)⁴⁾, на то, что изгиб может происходить лишь в плоскости главного момента внешних сил, так как эта *плоскость изгиба* расположена параллельно одной из двух главных осей инерции сечения ω . В любом другом случае нельзя

¹⁾ Curvatura laminae elasticae. Acta Eruditorum Lipsae, 1694 или Opera omnia, т. I, стр. 576 и цитированная выше Véritable hypothèse etc.

²⁾ Methodus inveniendi lineas, etc. Additamentum de curvis elasticis, 1744 и различные другие сочинения Эйлера.

³⁾ Sur la figure des colonnes, прежние Mémoires de Turin, т. I, 1770—1773.

⁴⁾ Литографированный курс в Школе прикладных наук в Меце, 4-е изд. (1834), §§ 42, 43.

пользоваться вышеуказанным уравнением моментов относительно линии, перпендикулярной к *плоскости изгиба*, которая не известна. Мы, впрочем, знаем, что вопрос в таком случае решается составлением *двух* уравнений моментов, а именно моментов относительно каждой из двух осей инерции сечения ω^1).

Но заметим, что в дальнейшем мы не будем предполагать последнего обстоятельства. Наши сечения всегда будут иметь одну из главных осей параллельной плоскости действия сил, которая неизменно будет совпадать с плоскостью изгиба.

§ 3. Предмет и краткое содержание этого мемуара

Итак, мы намерены внимательно исследовать посредством точного анализа, могут ли быть правильными две основные формулы (1) известной теории изгиба (несмотря на сказанное об ошибках при их обычном выводе), если это касается только определенных способов приложения и распределения сил на концах призмы, имеющих любые заданные результирующую и момент и производящих *равномерный или неравномерный* изгиб от одного конца к другому. Мы намерены в то же время оценить такие обстоятельства, опущенные этой теорией, как относительные сдвиги соседних сечений или смежных волокон и приобретаемую сечениями кривизну. Словом, полностью и точно решить задачу изгиба, по крайней мере для тех воздействий, которые дают простые результаты, служащие пределами сложных результатов при других способах приложения и распределения тех же внешних сил, с тем чтобы мы могли бы приближенно заменить в большинстве случаев сложные результаты простыми.

Для этого мы вначале установили (§§ 4—9) элементарным геометрическим способом (насколько это возможно) формулы для давлений в твердых упругих телах, соотношения, которые, как нам кажется, всегда существуют между коэффициентами формул для давлений (§ 7), влияния изменения

¹⁾ Comptes rendus de l'Académie, 30 октября и 6 ноября 1843 г., т. XVII, стр. 946 и 1024, цитируемый ниже Mémoire sur la torsion, § 42, Société Philomathique, 8 июля 1854 г. или журнал l'Institut, 15 ноября, № 1089.

плоскостей (§ 8) и определенные и неопределенные дифференциальные уравнения, связывающие перемещения точек и внешние силы (§§ 10, 11).

Так как трудности, непреодолимые при интегрировании в случае заданных сил, исчезают, когда имеем дело с заданными перемещениями, и значительно уменьшаются, когда принимают заданными одновременно часть сил и часть перемещений или их зависимости, разыскивая остальное, то это приводит к тому смешанному методу, который особенно удобен в изложенном вопросе и который мы применяли в другом месте¹). Используя его в случае простого растяжения (§ 12) и вновь напомнив прямое (§ 13), но лишь приближенное решение для случая изгиба, которое было предложено двумя блестящими математиками и послужило исходной точкой для наших исследований, мы устанавливаем принимаемые условия для нашей смешанной задачи (§ 14) и узнаем путем первого и простого интегрирования (§ 16), что ее решение сводится к решению уравнения в частных производных второго порядка при определенном условии, что никакое давление не действует на боковые поверхности призм в продольном направлении.

Второе интегрирование осуществляется до некоторой степени легко, когда контур имеет бесконечное число форм (§ 18), представленных четырехчленным алгебраическим уравнением, один из членов которого может иметь все возможные положительные степени, целые или дробные.

¹) Главным образом в мемуаре *Sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. Доложено 13 июня 1853 г., ин-квартио, 1855 или *Savants étrangers*, т. XIV.

Мы отсылаем к этому мемуару, чтобы воспользоваться основными его результатами или согласовать уже однажды определенные боковые сдвиги g с продольными удлинениями $\vartheta = \vartheta_0 + \frac{z}{\rho}$, единственно принимаемыми в расчет обычной теорией, чтобы получить наибольшие удлинения в косых направлениях (чаще всего выражаемые формулой $\frac{3}{8} \vartheta + \sqrt{\left(\frac{5}{8} \vartheta\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}$, данной уже в литографированном курсе 1837 г. и в *Comptes rendus*, т. XVII, стр. 948) и вывести отсюда условия сопротивления разрушению, которые мы сейчас не будем рассматривать.

Перемещения точек призмы, удлинения и сдвиги, стрела прогиба при изгибе с учетом указанных факторов, составляющие внутреннего или внешнего давления, определяющие способ распределения изгибающих сил, ординаты слегка искривленных сечений, бывших ранее плоскими, в таком случае (§§ 19—23) представляются целыми алгебраическими выражениями степени не выше третьей.

Мы можем посредством ряда эквидистантных разрезов легко наметить полную топографию этих поверхностей, каждая из которых является общей для множества контуров какой-то одинаковой степени, в числе которых находятся (если эта целая и дробная степень остается в пределах от 2 до 4) окружность или эллипс, которые мы получаем, обращая в нуль коэффициент при члене, делающем степень уравнения контура выше двух.

Упомянутые разрезы сводятся к параллельным прямым, и, следовательно, искривленная поверхность сечения будет цилиндрической с основанием в виде параболического гуська третьей степени, когда (§ 23) уравнение контура имеет девятую степень, представленную как $\frac{18}{2}$. Этот криволинейный контур мало отличается от прямоугольного контура с закругленными углами, если размер, перпендикулярный к плоскости изгиба, не превосходит размера, параллельного ей (§ 18).

Но когда сечение прямоугольное, последнее интегрирование можно произвести более точно посредством трансцендентных рядов с несколькими алгебраическими членами, преобразовав надлежащим образом (§§ 24, 25) два уравнения, на которые распадается определенное условие. Если довольствоваться приближительной оценкой, то можно отбросить эти ряды. Впрочем, можно составить численные таблицы, сохраняя те же ряды для различных величин отношения двух размеров основания призмы в виде параллелепипеда.

Помимо практического интереса, который представляет оценка того, что не учтено известными формулами изгиба, если мы не довольствуемся только обзором не всегда поддающихся интегрированию уравнений, эти примеры достаточно убедительны, чтобы вместе с аналогией, заимствованной из теории тепла (§ 30), утверждать, что при любой форме контура сечения существует способ распределения внешних

сил на крайних основаниях, для которого эти формулы точно дают напряжения в продольном направлении и возникающую при этом кривизну.

Таким образом, можно продолжать пользоваться этими известными формулами при достаточной длине призм по сравнению с размерами их оснований, чтобы сдвиги оказывали малое влияние, как и установить то, что может произойти от различия между действительным способом приложения и распределения сил на концах призмы и способом, стремящимся установиться внутри в точках, которые удалены от концов; так же как в вопросах, когда переменное состояние зависит от времени, а не от расстояния, это состояние становится все более и более независимым от первоначальных обстоятельств и более приближающимся к постоянному состоянию (§ 32).

Наконец, мы постараемся дать непосредственное, без анализа, и тем не менее строгое доказательство формул изгиба (§ 31).

Оно несколько длиннее того доказательства, которое основывается обычно на неверных и неточных гипотезах, но следует принять во внимание, что оно неизбежно охватывает множество существенных свойств, которые нужно также изучить, а именно поперечные сжатия, которые сопровождают продольные удлинения, и сдвиги, сопровождающие неравномерный изгиб. Следовательно, в курсах, не имеющих в своем составе аналитического изложения теории упругости, можно доказать эти формулы с их дополнениями без нарушения математических канонов, т. е. не смешивая рациональные принципы и необоснованные предположения, которые нельзя доказать даже приблизительно.

§ 4. Краткое разъяснение формул давлений внутри твердых упругих тел. Зависимости между давлениями в различных направлениях в одной точке

Мы называем давлением на одной из двух сторон воображаемой малой плоской грани внутри подобного тела *равнодействующую всех воздействий молекул, расположенных с этой стороны, на молекулы противоположной стороны, направления воздействий которых пересекают эту грань*. Эта равнодействующая рассматривается как положительная,

когда она является равнодействующей сил притяжения (т. е. представляет, собственно говоря, *напряжение* или *растяжение*).

Из этого следует, что равнодействующая воздействий на молекулы многогранного элемента со стороны молекул, расположенных вне его, может быть тождественно заменена равнодействующей давлений на всех его гранях, так как, если давления включают в себя, кроме того, воздействия внешних молекул на другие внешние молекулы, направленные по линиям, которые пересекают две грани, то эти посторонние действия уничтожаются попарно при образовании общей равнодействующей.

Из данного определения следует, что давление на малой грани A является равнодействующей давлений, испытываемых тремя ее проекциями X, Y, Z на три взаимно-перпендикулярные плоскости, проходящие через центр грани. В самом деле, число и полная интенсивность молекулярных воздействий, передающихся параллельно какой-либо прямой l через различные очень малые грани, имеющие одинаковый центр, очевидно, пропорциональны площади проекций этих граней на ту же плоскость P , перпендикулярную к прямой l , т. е. проекция A на всякую плоскость P имеет площадь, равную сумме площадей проекций X, Y, Z на ту же плоскость. Таким образом, поскольку давления возникают в результате сложения воздействий, проявляющихся по всем направлениям, постольку давления на P представляют собой то же самое, что и давления на X, Y, Z , сложенные вместе.

Эта теорема Коши называется *теоремой о проекциях плоскостей давления*.

Из этого же определения и замечания также следует, что если мы обозначим через

$$P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}; P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}; P_{zx}, P_{zy}, P_{zz}$$

составляющие давлений, приходящихся в той же точке на единицу поверхности малых плоскостей, перпендикулярных к прямоугольным осям x, y, z и имеющих одинаковый центр тяжести, то получаем:

$$P_{yz} = P_{zy}, P_{zx} = P_{xz}, P_{xy} = P_{yx}; \quad (3)$$

при этом первый индекс указывает плоскость, нормальную к одноименной оси, а второй — направление разложения.

В самом деле, число и полная интенсивность молекулярных воздействий, передающихся параллельно той же произвольной прямой l через две небольшие грани, *предполагаемые равновеликими* и соответственно перпендикулярными к u и z , представляют как бы их проекции на ту же плоскость, перпендикулярную к l , т. е. $\cos(l, u)$ и $\cos(l, z)$. Те же самые полные интенсивности воздействий при их разложении — на первой грани в направлении z и на второй в направлении u — дадут $\cos(l, u)$, $\cos(l, z)$ и $\cos(l, z)$, $\cos(l, u)$, т. е. то же самое. Таким образом, когда давления возникают в результате сложения одинаковых воздействий по всем направлениям l , то мы видим, что давление на первую малую грань, разложенное перпендикулярно ко второй, имеет такую же интенсивность, что и давление на вторую грань, разложенное перпендикулярно к первой, что действительно дает $p_{yz} = p_{zy}$, а следовательно, также и два других аналогичных соотношения.

Эта теорема *взаимности касательных составляющих* также дана Коши.

§ 5. Продолжение. Удлинения, сдвиги.

Линейные выражения для составляющих давления

Чтобы установить зависимости, которые могут связывать *нормальные составляющие* p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} и *касательные составляющие* p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} давлений, возникающих в упругом теле при относительных перемещениях его точек, с этими перемещениями, представим себе три малые материальные линии tx , ty и tz , проходящие через точку t тела и первоначально параллельные прямоугольным координатным осям, а затем превратившиеся при перемещениях в три слегка перекошенные по отношению друг к другу линии t_1x_1 , t_1y_1 и t_1z_1 .

Обозначим через

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z$$

удлинения, полученные этими малыми линиями или считаемые очень малыми относительные величины их положительных или отрицательных приращений длины, а через

$$\xi_{yz}, \xi_{zx}, \xi_{xy}$$

— малые наклоны, которые они принимают друг по отношению к другу, или изменения углов между этими линиями. Эти наклоны являются не чем иным, как косинусами полученных углов $y_1 m_1 z_1$, $z_1 m_1 x_1$, $x_1 m_1 y_1$, ставших слегка острыми при положительных величинах g . Такие величины мы будем называть *сдвигами*, так как, например, g_{yz} определяет сдвиг относительно друг друга материальных линий, параллельных либо оси y , либо оси z и расположенных на единичном расстоянии в плоскостях, параллельных yz .

Эти три удлинения и три сдвига почти одни и те же в окрестности точки m . Ясно, что если они известны, то их достаточно для определения изменений расстояния и относительного положения окружающих точек, как мы это действительно увидим далее из приведенных ниже выражений (6). Следовательно, если составляющие давлений p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , p_{zx} , p_{xy} являются функциями величин ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} , то, как мы полагаем, они равны нулю до этих изменений.

Все шесть очень малых величин ∂ и g должны входить в эти функции с одинаковыми показателями степени, так как они могут одновременно бесконечно уменьшаться, сохраняя тот же порядок величины и ту же степень влияния на относительные перемещения и давления. И поскольку имеются достаточно многочисленные опыты, где при некоторых из них, равных нулю, давления найдены пропорциональными другим величинам ∂ и g (*ut extensio sic vis*), то все эти функции должны быть линейными.

§ 6. Продолжение. Притяжения и отталкивания, функции молекулярных расстояний.

Теорема геометрического сложения сил и малых перемещений

Этот линейный вид составляющих давлений доказывается равным образом, если вместо ссылки на отдельные эксперименты, интерпретация которых может оказаться спорной, мы исходим из открытого также экспериментально общего принципа, на котором основаны наши определения, а именно:

«Материальные точки на незначительных расстояниях притягивают или отталкивают друг друга, причем их взаимодействия являются непрерывными функциями рас-

стояний». Пользуясь этим, можно найти в то же время зависимости между некоторыми из 36 коэффициентов в формулах, выражающих шесть составляющих p через θ и g .

В самом деле, выведем сначала в соответствии с изложенным принципом часто применяемую теорему:

Давление, вызванное малыми перемещениями, являющимися равнодействующими нескольких других перемещений, само является равнодействующей давлений, которые возникли бы порознь вследствие составляющих перемещений. Действительно, если посредством общего поступательного смещения и общего поворота, не изменяя ничего в относительных перемещениях, которые производят только молекулярные действия и давления, мы возвратим в прежнее положение небольшую часть тела, считая, что его точки весьма близки к первоначальному положению, а его нынешние линии связи весьма мало отличаются от прежних направлений, то, проектируя последние на первые, легко увидим, что малые изменения длины этих линий, вызванные полными или равнодействующими перемещениями, являются алгебраическими суммами изменений, вызванных частичными или составляющими перемещениями.

Итак, указанные молекулярные взаимодействия пропорциональны этим изменениям в силу предполагаемой непрерывности функций, которые определяют их интенсивность. следовательно, давления, т. е. равнодействующие молекулярных действий, вызванных полными перемещениями, являются равнодействующими давлений, возникших вследствие частичных перемещений¹⁾.

И наоборот, когда внутренние давления уравновешивают внешние силы, малые перемещения, произведенные некоторыми внешними силами, являются геометрическими равнодействующими малых перемещений, вызванных каждой из этих сил.

Из этого достоверно следует, что если точкам сообщить перемещения, эквивалентные удвоению, утроению и т. д. какого-либо перемещения, которое давало бы одинаковую

¹⁾ Эта теорема, доказанная таким способом, находится в литографированном курсе механики, прочитанном в 1837—1838 гг. в Школе мостов и дорог, § 12, и там же даны ее многочисленные применения в §§ 71—81.

величину для ∂_x и нуль для $\partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, то мы получим для p_{xx}, p_{yy} и т. д. вдвое, втрое больше того, что было бы произведено частичными перемещениями, и, следовательно, эти шесть составляющих находятся в линейной зависимости от ∂_x . Так как то же самое можно сказать о каждом другом ∂ или g , рассматривая их последовательно как существующие самостоятельно, то видим, что составляющие давления при их одновременном существовании являются линейными функциями удлинений и сдвигов.

§ 7. Продолжение. Число существенно различных коэффициентов. Его сокращение с тридцати шести до пятнадцати

Чтобы узнать относительные величины тридцати шести коэффициентов, на которые умножают эти шесть величин ∂

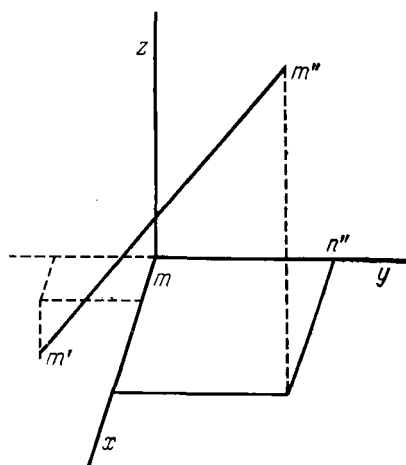


Рис. 1

и g в формулах для шести составляющих p , рассмотрим сначала простой случай, когда $\partial_x, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}$ равны нулю, а ∂_y, g_{xy} постоянны. Таким образом, материальные плоскости во всяком теле, перпендикулярные к оси y , смещаются по отношению друг к другу на одинаковую относительную величину ∂_y от их первоначальных расстояний и все одновременно повернуты на малый постоянный угол g_{xy} вокруг лирических, параллельных z , по которым они разрезают плоскость utz , перпенди-

кулярную к x . Линия r , соединяющая две какие-либо молекулы m', m'' (рис. 1) и имеющая, как мы полагаем, до перемещений проекции x, y, z , параллельные одноименным координатным осям, будет иметь после перемещений те же проекции x и z , проекция же y на ось y увеличится на $y\partial_y$ из-за смещений, пропорциональных ∂_y , и на xg_{xy} из-за поворотов

g_{xy} , что увеличит это расстояние $m'm''$ между двумя молекулами при проектировании на линию r до $(y \partial_y + x g_{xy}) \frac{y}{r}$.

Отсюда вытекает выражение взаимодействия $R(y \partial_y + x g_{xy}) \frac{y}{r}$ двух молекул m', m'' при перемещениях; здесь R является функцией r . Если эти молекулы находятся в числе тех, что расположены с обеих сторон плоской грани, перпендикулярной к x и имеющей очень малую площадь A , то получим составляющие Ap_{xx} , Ap_{xy} давления, которое передается через эту малую грань, взяв суммы Σ всех этих действий, последовательно разложенных в направлениях x и y или умноженных на косинусы углов линии r с осями x и y , которые равны $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, с точностью до очень малых произведений второго порядка, которыми можно пренебречь.

Из этого следует:

$$p_{xx} = \frac{\partial y}{A} \sum \frac{R}{r^2} xy^2 + \frac{g_{xy}}{A} \sum \frac{R}{r^2} x^2 y,$$

$$p_{xy} = \frac{\partial y}{A} \sum \frac{R}{r^2} y^3 + \frac{g_{xy}}{A} \sum \frac{R}{r^2} xy^2.$$

Отсюда видно, что коэффициент при ∂_y в p_{xx} равен коэффициенту при g_{xy} в p_{xy} . То же равенство будет иметь место, если ∂_x , ∂_z , g_{yz} , g_{zx} не равны нулю в силу принципа сложения давлений, вызванных различными составляющими перемещениями (см. предыдущий параграф).

Это равенство будет иметь место также в случае, если ∂_y и g_{xy} вместо того, чтобы быть постоянными во всем твердом теле, окажутся переменными, так как всегда полагают, что они изменяются весьма немного в малых частях этого тела, где на незначительных расстояниях проявляются взаимодействия, вызывающие давления.

Отсюда делаем вывод, попросту изменяя буквы и направления, что коэффициент при g_{xy} в p_{yx} будет таким же, как и коэффициент при ∂_x в p_{yy} , и, следовательно, коэффициент при ∂_x является таким же, что и коэффициент при ∂_y в p_{xx} , потому что, как мы знаем, p_{yx} одинаков с p_{xy} и должен иметь такие же коэффициенты.

Изменяя направления и ссылаясь на то, что $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$, можно установить и другие равенства.

Если обозначить различные коэффициенты одинаковой буквой a с двумя индексами, принадлежащими составляющей давления, и следующими за ними индексами соответствующих удлинений или сдвигов, удваивая для симметрии индексы при удлинениях и написав

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a_{xx \cdot xx} \partial_x + a_{xx \cdot yy} \partial_y + a_{xx \cdot zz} \partial_z + a_{xx \cdot yz} g_{yz} + \\ &\quad + a_{xx \cdot zx} g_{zx} + a_{xx \cdot xy} g_{xy}, \\ p_{yy} &= a_{yy \cdot xx} \partial_x + \dots, \quad p_{zz}, \quad p_{yz}, \quad p_{zx}, \quad p_{xy} = \\ &= \text{аналогичным выражениям,} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то можно заключить, что коэффициенты с четырьмя одинаковыми индексами будут равны при любом порядке их расположения, что сокращает число коэффициентов в этих формулах с тридцати шести до пятнадцати¹⁾.

Если в этом доказательстве мы пренебрегли влиянием первоначальных молекулярных действий, приписывая давления только новым воздействиям, возникающим при перемещениях, то сделали это с целью упрощения и для того, чтобы ясно видеть, что эти первоначальные действия исчезают, когда первоначальные давления считают равными нулю.

¹⁾ Эта теорема дана Коши, как и большая часть теории давлений. Он доказал ее, делая некоторые допущения и замены, от которых свободно элементарное доказательство, только что нами данное.

На стр. 222 т. III и особенно на стр. 138 т. IV его Exercices (1828 и 1829 гг.) имеется, по-видимому, двадцать один коэффициент вместо пятнадцати, так как Коши предполагал в этих двух местах, что уже в начальном положении существовали бы давления, шесть составляющих которых и являются именно этими дополнительными коэффициентами.

Члены в выражениях p_{xx} , p_{yy} , ..., содержащие эти давления, первоначальные или предшествующие перемещения, которые создают удлинения ∂ и сдвиги g , легко получаются, если воспользоваться теоремой, которая элементарно доказывается в Notes sur les pressions, помещенных 7 июля 1845 г. в Comptes rendus, т. XXI, стр. 24. Ими обычно пренебрегают в вопросах, относящихся к твердым телам, но их следует принимать в расчет в теории света и звука, так как рассматриваемые здесь силы, уже действующие в состоянии равновесия упругих жидкостей, могут иметь такое же и даже большее влияние по сравнению с влиянием сил, которые возникли бы при одних лишь колебаниях, в случае равенства нулю начальных напряжений.

Вышеизложенное предполагает, между прочим, что перемещения изменяются непрерывно от одной молекулы к другой или, иначе говоря, что в силу большого разнообразия и сложности размещения молекул и наличия их действий в различных направлениях мы могли бы заменить индивидуальные перемещения молекул средними перемещениями их групп, которые должны изменяться более упорядоченно или менее сложно, имея в виду компенсацию отклонений в различных направлениях. Возможность этой замены вообще признается и не вызывает сомнений для тел с беспорядочной кристаллизацией, *которыми единственно пользуются как материалами.*

Но эта замена, как заметил Коши, является до известной степени спорной для тел правильно кристаллизованных, все одинаковые малые группы атомов которых поворачивались бы одинаково по отношению к самим себе при общей деформации тела и создавали бы некоторую согласованную периодичность, которая противодействовала бы точной компенсации отклонений в разные стороны. Мы не думаем, что это обстоятельство, если оно имеет место, оказывает заметное влияние. Хотя оно относится только к телам, которыми мы не будем заниматься в этом мемуаре, однако, так как сомнения в равенстве коэффициента при g_{xy} в p_{xy} коэффициенту при ∂_y в p_{xx} еще не у всех рассеялись, то мы будем сохранять чаще всего независимость тридцати шести коэффициентов, что, как заметил Ламе, не делает обычно более сложным аналитическое решение задачи.

§ 8. Продолжение. Изменения осей и плоскостей, относительно которых рассматривают давления, удлинения и сдвиги

В § 4 показано, что малая грань A , перпендикулярная к какой-либо прямой r , испытывает равнодействующее давление, которое определяется через ее проекции $A \cos \hat{rx}$, $A \cos \hat{ry}$, $A \cos \hat{rz}$ на три плоскости, перпендикулярные к координатным осям x , y , z . Например, давление на первую проекцию имеет в тех же осях составляющие $A \cos \hat{rx} p_{xx}$, $A \cos \hat{rx} p_{xy}$, $A \cos \hat{rx} p_{xz}$.

Выписав также составляющие других давлений и разложив их соответственно другой прямой r' , получаем после сложения и деления на A следующую величину составляющей давления $p_{rr'}$ на единицу площади грани, перпендикулярной к r :

$$\begin{aligned} p_{rr'} = & (p_{xx} \cos \widehat{rx} + p_{yx} \cos \widehat{ry} + p_{zx} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'x} + \\ & + (p_{xy} \cos \widehat{rx} + p_{yy} \cos \widehat{ry} + p_{zy} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'y} + \\ & + (p_{xz} \cos \widehat{rx} + p_{yz} \cos \widehat{ry} + p_{zz} \cos \widehat{rz}) \cos \widehat{r'z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если мы даем последовательно r и r' направления трех новых взаимно-перпендикулярных линий x' , y' , z' , то получаем формулы, служащие для перехода от одной системы плоскостей давления к другой.

Что касается удлинений и сдвигов, то предположим сначала, что перемещение точек твердого тела принуждает его испытывать только общее удлинение ∂_x . Если первый конец o прямой $om = r$ неподвижен, а ее проекция oq на направление оси x равна $r \cos \widehat{rx}$, то второй конец m проделает путь $r \cos \widehat{rx} \partial_x$ параллельно оси x , что при проектировании пути mp на направление r , т. е. при умножении на $\cos \widehat{rx}$, дает для удлинения $r \partial_x \cos^2 \widehat{rx}$ и, следовательно, после деления на r приводит к относительному удлинению

$$\partial_r = \partial_x \cos^2 \widehat{rx}.$$

Если бы, далее, тело вместо удлинения испытывало сдвиг g_{yz} , так что все материальные плоскости, такие, как mrs , параллельные zx , повернулись бы на очень малый угол g_{yz} относительно линий их пересечений ps с плоскостью $хоу$, перпендикулярной к оси z , то при расстоянии mp от m до неподвижной плоскости $хоу$, равном $r \cos \widehat{rz}$, точка m проделает параллельно оси y путь $r \cos \widehat{rz} g_{yz}$. Таким образом, проектируя этот путь на направление $om = r$ и деля на первоначальную длину, получаем для относительного удлинения ∂_r , вызванного сдвигом g_{yz} на этой линии:

$$\partial_r = g_{yz} \cos \widehat{ry} \cos \widehat{rz}.$$

Пусть вторая линия $r' = om'$ составляет первоначально прямой угол с линией $r = ot$ (рис. 2). Примем для упрощения $r = r' = 1$. Только что предположенное нами общее относительное удлинение ∂_x вызывает перемещение концов m, m' двух малых линий $mn = \cos \widehat{rx} \partial_x$ и $m'n' = \cos \widehat{r'x} \partial_x$,

параллельных оси x . Если мы спроектируем первую линию mn на направление om' или r' , то получим малую величину, которая определяет уменьшение угла tom' при превращении его в угол pon' ; если же мы спроектируем вторую линию $m'n'$ на направление r или ot , мало отличающееся от направления on , то получим малую величину, на которую изменился бы почти прямой угол pot' при уменьшении и превращении его в угол pon' . Сумма этих двух проекций будет искажением, испытанным прямым углом tom' при превращении его в угол pon' или (§ 5) сдвигом $g_{rr'}$. Итак, для этого сдвига, произведенного удлинением ∂_x , получаем:

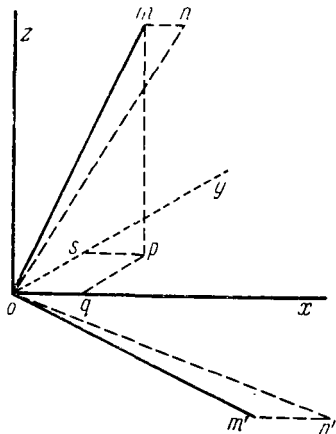


Рис. 2

$$g_{rr'} = 2 \partial_x \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'x}.$$

Если бы вместо удлинения ∂_x имели только сдвиг g_{yz} во всем теле, то два конца m, m' линий $r = 1$ и $r' = 1$ проделали бы параллельно оси y пути $g_{yz} \cos \widehat{rz}$ и $g_{yz} \cos \widehat{r'z}$. Складывая, как выше сказано, проекции первой из этих малых линий на r' и второй на r , получаем сдвиг $g_{rr'}$, являющийся результатом сдвига g_{yz} :

$$g_{rr'} = g_{yz} (\cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'y} + \cos \widehat{r'y} \cos \widehat{r'z}).$$

Если одновременно имеются удлинения и сдвиги $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, отнесенные к координатным осям x, y, z , то удлинение ∂_r и сдвиг $g_{rr'}$ после отбрасывания сил очень малых (величин второго порядка) будут получены суммиро-

ванием всего, что возникло вследствие этих различных изменений, взятых порознь. Итак, получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned} \partial_r &= \partial_x \cos^2 \widehat{rx} + \partial_y \cos^2 \widehat{ry} + \partial_z \cos^2 \widehat{rz} + g_{yz} \cos \widehat{ry} \cos \widehat{rz} + \\ &\quad + g_{zx} \cos \widehat{rz} \cos \widehat{rx} + g_{xy} \cos \widehat{rx} \cos \widehat{ry}, \\ g_{rr'} &= 2 \partial_x \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'x} + 2 \partial_y \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'y} + \\ &\quad + 2 \partial_z \cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'z} + g_{yz} (\cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'z} + \cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'y}) + \\ &\quad + g_{zx} (\cos \widehat{rz} \cos \widehat{r'x} + \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'z}) + \\ &\quad + g_{xy} (\cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'y} + \cos \widehat{ry} \cos \widehat{r'x}), \end{aligned} \right\} (6)$$

которые служат для того, чтобы изменять по желанию систему осей координат, соответственно которым берут удлинения и сдвиги, давая последовательно прямым r, r' направления трех новых взаимно-перпендикулярных линий x', y', z'^1 .

§ 9. Упрощение формул для составляющих давления в случае тел с различным строением

Если тело является *однородным*, то коэффициенты a в формулах (4) одинаковы во всех его точках в одинаковых направлениях осей координат, но могут изменяться вместе с направлениями осей.

Если по обе стороны плоскости, которую можно назвать *плоскостью симметрии строения* или, по Коши, *главной плоскостью упругости*²⁾, давления находятся в одинаковых соотношениях с перемещениями или могут быть выражены через величины $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$ формулами с теми же коэффициентами, то формулы (4) должны оставаться такими же, когда мы заменяем ось x на ее продолжение в противоположную сторону, а за плоскость берем плоскость yz .

¹⁾ Эти две формулы (6) находятся в цитированном мемуаре «О кручении», § 6. Они там выведены одновременно для всех членов способом, который может показаться более быстрым, но при котором менее понятна их структура.

²⁾ Comptes rendus, т. XXXVIII, стр. 329.

Итак, когда оси y и z остаются прежними, а $p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ не изменяются, нетрудно видеть, что то же самое происходит с p_{xx} и ∂_x , тогда как $p_{zx}, p_{xy}, g_{zx}, g_{xy}$ принимают противоположный знак, сохраняя ту же величину. Чтобы уравнения (4) оставались неизменными при подобной перемене знака, необходимо, чтобы g_{zx}, g_{xy} не входили в уравнения, дающие $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}$ и чтобы $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}$ не входили в уравнения, дающие p_{xz}, p_{xy} .

Отсюда следует, что при наличии в каждой точке однородного тела плоскости симметрии, перпендикулярной к оси x , получаем выражения следующего вида. Мы обозначили посредством тех же букв коэффициенты, число которых в соответствии со сказанным должно равняться пятнадцати, а не тридцати шести (4), так что штрихи будут уничтожены, если мы не берем под сомнение этот принцип:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \partial_x + f' \partial_y + e'' \partial_z + h g_{yz}, \\ p_{yy} &= f'' \partial_x + b \partial_y + d' \partial_z + k g_{yz}, \\ p_{zz} &= e' \partial_x + d'' \partial_y + c \partial_z + l g_{yz}, \\ p_{yz} &= h' \partial_x + k' \partial_y + l' \partial_z + d g_{yz}, \\ p_{zx} &= e g_{zx} + h'' g_{xy}, \\ p_{xy} &= h''' g_{zx} + f g_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если, кроме того, имеется плоскость симметрии, перпендикулярная к оси y , то эти уравнения должны будут оставаться прежними при одинаковом изменении знаков у величин p_{yz}, g_{yz}, p_{xy} и g_{xy} . В результате наши формулы примут вид

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= a \partial_x + f' \partial_y + e'' \partial_z, \\ p_{yy} &= f'' \partial_x + b \partial_y + d' \partial_z, \\ p_{zz} &= e' \partial_x + d'' \partial_y + c \partial_z \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} p_{yz} &= d g_{yz}, \\ p_{zx} &= e g_{zx}, \\ p_{xy} &= f g_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

откуда вытекает, что плоскость, перпендикулярная к z , будет, следовательно, тем самым плоскостью симметрии или главной плоскостью упругости, так что получим три главные плоскости, пересекающиеся параллельно осям x, y, z .

Кроме того, при одинаковых свойствах вокруг параллели tx к оси x , называемой в таком случае осью упругости,

получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{не только } b = c, \quad f = e, \quad f' = e'', \quad d'' = d', \\ \text{но и } \quad \quad \quad b = 2d + d'. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Эту последнюю зависимость $b = 2d + d'$ доказывают, взяв без изменения ось x и две новые оси y', z' , составляющие с прежними осями y и z угол β в плоскости yz , и полагая еще $p_{y'z'} = dg_{y'z'}$. В самом деле, если мы считаем для упрощения, что точка m , в которой пересекаются эти оси, остается неподвижной, и что перемещения других точек производят только общее удлинение ∂_z , т. е. что

$$p_{yy} = d' \partial_z, \quad p_{zz} = b \partial_z, \quad p_{yz} = 0,$$

то, учитывая давления, испытываемые малой гранью A , перпендикулярной к оси y' , и ее двумя проекциями $A \cos \beta$ и $A \sin \beta$ на плоскости, перпендикулярные к осям y и z , и приравнявая первое сумме двух других, после разложения всех трех давлений по z (или используя общую формулу преобразования (5) § 8 для $p_{yz} = 0$, $\cos \widehat{rx} = \cos \widehat{r'x} = 0$, $\cos \widehat{ry} = \cos \widehat{r'z} = \cos \beta$, $\cos \widehat{rz} = -\cos \widehat{r'y} = \sin \beta$) получаем:

$$p_{y'z'} = (p_{zz} - p_{yy}) \sin \beta \cos \beta = (b - d') \partial_z \sin \beta \cos \beta.$$

Если рассуждать подобно тому, как это было сделано в § 8 для нахождения $g_{rr'} = 2\partial_x \cos \widehat{rx} \cos \widehat{r'x}$, и рассмотреть общую формулу (6), то отсюда также следует:

$$g_{y'z'} = 2 \partial_z \sin \beta \cos \beta,$$

откуда для получения $p_{y'z'} = dg_{y'z'}$ необходимо иметь

$$b - d' = 2d,$$

т. е. последнюю из зависимостей (9).

Когда x является осью упругости, получаем:

$$\left. \begin{array}{l} p_{xx} = a \partial_x + e'' \partial_y + e'' \partial_z, \\ p_{yy} = e' \partial_x + (2d + d') \partial_y + d' \partial_z, \\ p_{zz} = e' \partial_x + d' \partial_y + (2d + d') \partial_z \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} p_{yz} = dg_{yz}, \\ p_{zx} = eg_{zx}, \\ p_{xy} = eg_{xy}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

Необходимые зависимости (9), которые мы только что установили между коэффициентами, являются достаточными, чтобы все осталось одинаковым относительно оси x .

В самом деле, эта одинаковость не мешает коэффициенту d при g_{yz} в p_{yz} отличаться от коэффициентов e при сдвигах g_{zx} , g_{xy} в p_{zx} , p_{xy} , равно как коэффициенту d' при ∂_z в p_{yy} отличаться от коэффициентов e' , e'' при ∂_x в p_{yy} и при ∂_z в p_{xx} , так что она не может требовать никакого другого равенства между коэффициентами, обозначенными различными буквами.

Применяя общие формулы преобразования (5) $p_{rr'} = \dots$ и (6) $\partial_r = \dots$, $g_{rr'} = \dots$, можно убедиться, что различные составляющие p_{xx} , $p_{y'y'}$, $p_{y'z'}$, $p_{z'x}$ выражены через ∂_x , $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$ с помощью тех же коэффициентов, что и составляющие p_{xx} , p_{yy} , p_{yz} , p_{zx} через ∂_x , ∂_y , ∂_z , g_{yz} . Это именно и является отличительным признаком одинаковой упругости по всем направлениям, составляющим одинаковый угол с осью x .

Если имеется также ось упругости, параллельная оси y , то надлежало бы по тем же соображениям иметь

$$d = e, \quad d' = e'' = e', \quad a = 2d + d' = 2e + e', \quad (11)$$

откуда следует, что имеется третья ось упругости, параллельная z . Даже произвольные прямые, проведенные в плоскостях xu' , xz' , т. е. все возможные прямые, проведенные через точку t , являются также осями упругости (по причине равенства коэффициентов, кроме вышеуказанных, когда берут две новые оси y' , z'). Тело в таком случае называется изотропным, т. е. обладающим одинаковой упругостью во всех направлениях.

Число коэффициентов сводится к двум e и e' и даже к одному, если (§ 7) не оспаривают равенства $e = e'$ коэффициенту при ∂_y в p_{xx} коэффициенту при g_{xy} в p_{xy} .

Но эксперименты Савара и простое рассмотрение характера охлаждения и отвердевания тел доказывают, что изотропия, как думает Реньо, является весьма редкой даже в литых металлах, в стекловатых и зернистых материалах. Таким образом, следует предположить неравномерность строения в различных направлениях; поэтому расхождения, которые можно найти между результатами экспериментов и формулами для изотропного тела с $e = e'$, несколько не противоречат принципу (§ 7) $a_{xx \cdot yy} = a_{xy \cdot xy} = a_{yy \cdot xx}$ и т. д. как для тел с равномерным, так и для тел с неравномерным строением,

**§ 10. Неопределенные дифференциальные уравнения
равновесия упругих твердых тел.
Выражения удлинений и сдвигов через
очень малые перемещения**

Условия внутреннего равновесия тела выражаются просто тремя уравнениями покоя для каждого элемента твердого тела с центром в какой-либо точке $m(x, y, z)$, если мы заменим воздействия окружающих его элементов давлениями на его гранях (§ 4).

Пусть:

x, y, z — три очень малых измерения этого элемента, считаемого прямоугольным параллелепипедом,

X, Y, Z — составляющие на единицу объема сил, которые могут действовать на материал, таких, как, например, сила тяжести.

Две грани x, y выделенного элемента, перпендикулярные к оси z , испытывают противоположные давления. Составляющие этих давлений, например, в направлении x различны: одна имеет немного большее, а другая немного меньшее значение, чем испытываемое параллельной гранью, проходящей через центр m , давление p_{zx} (на единицу площади). Их разность будет дифференциальным коэффициентом $\frac{dp_{zx}}{dz}$, умноженным на расстояние z между этими гранями, а также на их площадь xy . Таким образом, равнодействующая двух составляющих давления в направлении x будет

$$\frac{dp_{zx}}{dz} xyz.$$

Так как можно прийти к тому же выводу для разностей составляющих давлений в том же направлении x , действующих на четырех других гранях элемента, взятых попарно, то для элемента, испытывающего в противоположном оси x направлении действие силы $Xxyz$, получаем уравнение равновесия, все члены которого можно разделить на объем элемента xyz . Отсюда вытекает первое из трех следующих уравнений. Два других получаются таким же образом, если

мы выражаем равновесие по отношению к поступательным смещениям в направлениях осей y и z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} &= X, \\ \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{zy}}{dz} &= Y, \\ \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Все вышеуказанные формулы применяются в случае любых абсолютных и даже относительных величин перемещений удаленных друг от друга точек тела, если только

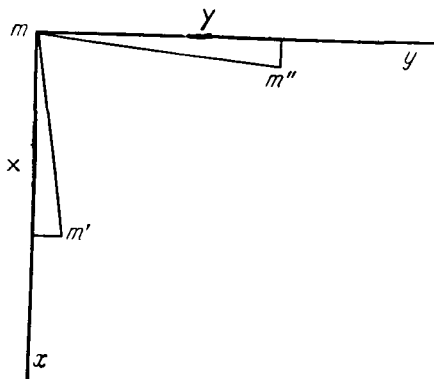


Рис. 3

относительные перемещения очень близких точек останутся весьма малыми или если малые расстояния изменяются только в очень незначительных пропорциях.

Для вычисления перемещений нужно выразить через перемещения удлинения и сдвиги. Чтобы упростить вычисления, нужно одновременно рассматривать только небольшие части тела, когда можно, следовательно, свести перемещения к очень малым посредством общего поступательного смещения и поворота.

Пусть в таком случае $x + u$, $y + v$, $z + w$ — координаты какой-либо точки m после перемещений, где x , y , z — перво-

начальные координаты, а u, v, w — малые перемещения точки t в направлениях осей x, y, z .

Если m', m'' (рис. 3) — две другие точки с первоначальными координатами соответственно $x + x, y, z$ и $x, y + y, z$, т. е. если $mm' = x, mm'' = y$ — две малые прямые, первоначально параллельные осям x и y , то новые координаты точек m, m', m'' будут:

$$\begin{aligned} m & \dots x + u, & y + v; \\ m' & \dots x + x + u + \frac{du}{dx}x, & y + v + \frac{dv}{dy}x; \\ m'' & \dots x + u + \frac{du}{dy}y, & y + y + v \frac{dv}{dy}y. \end{aligned}$$

Новая длина малой прямой mm' , оставшейся почти параллельной оси x , будет $x \left(1 + \frac{du}{dx}\right)$ и, следовательно, ее удлинение будет равно $\frac{du}{dx}x$.

И если принять $mm'' = mm'$ или $y = x$, то сумма проекций перемещений точки m'' на ось x и перемещений точки m' на ось y будет $\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)x$, так что в соответствии со сказанным в § 8 малое изменение первоначально прямого угла $m'mm''$, или сдвиг g_{xy} , будет $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$.

Поскольку при малых значениях u, v, w можно судить подобным же образом о других удлинениях и сдвигах, то имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \partial_x &= \frac{du}{dx}, & \partial_y &= \frac{dv}{dy}, & \partial_z &= \frac{dw}{dz}, \\ g_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, & g_{zx} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, & g_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Если мы подставим эти значения в формулы (4), (7), (8) и (10) для $p_{xx}, p_{yy}, \dots, p_{xy}$, то получим шесть выражений составляющих давления через очень малые перемещения точек рассматриваемого тела.

Если затем подставить эти значения p_{xx}, p_{yy}, \dots в три общих уравнения равновесия элемента твердого тела (12),

то получим три дифференциальных уравнения второго порядка, которые являются *неопределенными уравнениями* (т. е. применимыми для всех точек) задач, в которых идет речь об отыскании перемещений u, v, w .

§ 11. Определенные уравнения, удовлетворяющиеся только в точках поверхности

Неопределенные дифференциальные уравнения, о которых мы только что упоминали, должны интегрироваться так, чтобы их решения удовлетворяли геометрическим условиям неподвижности некоторых точек или некоторых линейных элементов, или граничных поверхностей тел, полагаемых закрепленными, или же удовлетворяли связям с расположенными рядом другими ранее рассмотренными телами или с другими частями того же тела.

Но эти решения должны удовлетворять также условиям статики, состоящим в том, что некоторые части граничных поверхностей подвергаются действию заданных сил.

Пусть Π — эти силы или *внешние давления* на единицу площади различных элементов поверхности, где они действуют; n — направления нормалей к этим элементам.

Проекцию какого-либо из тех же элементов на три плоскости, перпендикулярные к осям x, y, z , получим, умножая его площадь соответственно на $\cos \hat{nx}, \cos \hat{ny}, \cos \hat{nz}$; сумма составляющих в направлении x внешних давлений составит $p_{xx} \cos \hat{nx} + p_{yx} \cos \hat{ny} + p_{zx} \cos \hat{nz}$.

Проделав то же самое с суммами составляющих в направлениях y и z , получим для равновесия между внутренними и внешними давлениями в соответствии с теоремой проекций плоскостей давления (§ 4) соотношения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} \cos \hat{nx} + p_{yx} \cos \hat{ny} + p_{zx} \cos \hat{nz} &= \Pi \cos \hat{\Pi x}, \\ p_{xy} \cos \hat{nx} + p_{yy} \cos \hat{ny} + p_{zy} \cos \hat{nz} &= \Pi \cos \hat{\Pi y}, \\ p_{xz} \cos \hat{nx} + p_{yz} \cos \hat{ny} + p_{zz} \cos \hat{nz} &= \Pi \cos \hat{\Pi z}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Это *определенные* дифференциальные уравнения, куда мы подставим вместо p_{xx}, p_{yx}, \dots их выражения через удлинения и сдвиги ϵ , следовательно, через перемещения (см. предыдущий параграф).

**§ 12. Применение этих формул к растяжению призмы.
Сопровождающие его поперечные сжатия.
Коэффициент упругости**

Сначала мы рассмотрим этот простой случай, поскольку уже на нем видны важные особенности изгиба призм.

Предположим, что во всех точках однородного тела произвольной формы шесть составляющих давления p_{xx}, \dots, p_{xy} постоянны и равны заданным величинам. Шесть уравнений первой степени (4) или (7), или (8), или (10), которые устанавливают зависимости между ними и $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, дадут для этих последних величин постоянные значения во всем теле. Можно будет всегда в соответствии с (13) $\partial_x = \frac{du}{dx}, \dots, g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$ найти малые перемещения u, v, w , которые при этом удовлетворяли бы одновременно таким особым условиям, как неподвижность определенных точек и определенных элементов, считаемых закрепленными, так как нужно будет только приравнять u, v, w линейным функциям координат x, y, z и определить двенадцать коэффициентов в этих функциях.

Три уравнения внутреннего равновесия (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \frac{dp_{xy}}{dy} + \dots$, в которых правые части приравниваем нулю, пренебрегая весом, также удовлетворяются линейными функциями координат x, y, z .

Итак, если даны давления на поверхность тела, то можно найти внутренние давления. Они устанавливаются из условия, что все элементы объема находятся в равновесии и что уравнения (12) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \dots$ удовлетворены; задача, когда известны только эти внешние давления, полностью решается.

Предположим, например, что форма тела призматическая, что никакое давление не действует на его боковые грани, а его крайние основания испытывают на всех их элементах параллельно ребрам постоянное давление или растяжение с интенсивностью p на единицу поверхности. Таким образом, при расположении оси x в направлении тех же ребер другие составляющие давлений, кроме p_{xx} , равняются нулю на этих основаниях, как и на боковых гранях. Задача определения перемещений по этим данным будет решена,

если взять для u, v, w выражения, которые для всего тела удовлетворяют условиям: $p_{xx} = p, p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0, p_{zx} = 0, p_{xy} = 0$. Тогда составляющие давления будут иметь эти шесть значений как во внутренних точках, так и в точках на поверхности. Если приписать эти значения членам p_{xx}, \dots шести уравнений (4), то решение последних даст, если обозначить через $E, \epsilon, \epsilon', \dots$ значения тридцати шести (или пятнадцати) коэффициентов:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{p}{E}, & \partial_y &= -\epsilon \partial_x, & \partial_z &= -\epsilon' \partial_x, \\ g_{yz} &= \epsilon'' \partial_x, & g_{zx} &= \epsilon''' \partial_x, & g_{xy} &= \epsilon'''' \partial_x. \end{aligned}$$

Все удлинения и сдвиги пропорциональны продольному растяжению p .

Отношение продольного растяжения p к относительному продольному удлинению ∂_x называется *коэффициентом E упругости при растяжении*.

Если материал имеет в каждой точке плоскость симметрии, перпендикулярную к ребрам, то из уравнений (7) при $p_{zx} = 0, p_{xy} = 0$ следует, что $g_{zx} = 0, g_{xy} = 0$, т. е. *призма остается прямой*.

Если материал имеет три плоскости симметрии или главные плоскости, пересекающиеся по осям x, y, z , то, кроме того, получаем:

$$g_{yz} = 0.$$

Коэффициенты E, ϵ, ϵ' выражений (которые мы вновь повторяем)

$$\partial_x = \frac{p}{E}, \quad p = E \partial_x, \quad \partial_y = -\epsilon \partial_x, \quad \partial_z = -\epsilon' \partial_x \quad (15)$$

связаны с девятью (или шестью) коэффициентами первых трех уравнений (8)

$$\begin{aligned} p_{xx} &= a \partial_x + f' \partial_y + e'' \partial_z, \\ p_{yy} &= f'' \partial_x + b \partial_y + d' \partial_x, \quad p_{zz} = e' \partial_x + d'' \partial_y + c \partial_z \end{aligned}$$

тремя уравнениями

$$f'' - b \epsilon - d' \epsilon' = 0, \quad e' - d'' \epsilon - c \epsilon' = 0, \quad a - f' \epsilon - e'' \epsilon' = E, \quad (16)$$

которые в случае *изотропии* приводят к соотношениям

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{e'}{2e + 2e'}, \quad \frac{E}{e} = 2 + \frac{e'}{e' + e}$$

или

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5}{2}e, \quad (17)$$

если не оспаривают принципа (§ 7) равенства коэффициента e' при ∂_y в p_{xx} коэффициенту e при g_{xy} в p_{xy} . Таким образом, коэффициент упругости *растяжения* E в два с половиной раза больше коэффициента, который можно назвать *коэффициентом упругости при сдвиге*.

Всякое продольное удлинение сопровождается, как мы видим, поперечными сжатиями, которые находятся с первым в соотношениях ε , ε' , когда нет нормального бокового давления, т. е.

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0.$$

Эти соотношения ε , ε' , так же как и коэффициент E , *остались бы прежними, если p_{zx} , p_{xy} не равнялись нулю* или если имелись бы на боковых гранях продольные трения, превращающие прямоугольную призму в слегка перекошенную.

Все эти выводы применимы, несмотря на атмосферное давление, которое действует на боковые грани, как и на основания, если определяются перемещения, за исключением тех весьма малых перемещений, которые уже произведены атмосферным давлением в телах в их обычном состоянии¹⁾.

¹⁾ Мы абстрагировались от веса призмы. Если его вводят и если $\bar{\omega}$ является весом единицы объема призмы, то легко видеть, что для призмы высотой a , прикрепленной верхним основанием и растягиваемой весом p на единицу ее нижнего основания, при вертикальном положении оси x получаем:

$$u = \frac{1}{E} \left[px + \bar{\omega} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{\bar{\omega}}{2} (\varepsilon y^2 + \varepsilon' z^2) \right],$$

$$v = -\frac{\varepsilon}{E} [py + \bar{\omega}(a - x)y], \quad w = -\frac{\varepsilon'}{E} [pz + \bar{\omega}(a - x)z].$$

В самом деле, эти значения при подстановке в формулы (8) (для случая трех плоскостей упругости) и учете формул (16) дают

$$p_{xx} = p + \bar{\omega}(a - x), \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0,$$

§ 13. Применение общих формул Пуассоном¹⁾ и Коши²⁾ для приближенного решения задачи изгиба

Два знаменитых математика нашли в одном и том же году (1828), один для кругового цилиндра, другой для прямоугольной призмы, что известное выражение (2) для изгибающего момента общей теории

$$M = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$$

может рассматриваться как почти точное, «когда поперечные размеры очень малы», полагая, «что давления и удлинения в различных точках каждого сечения могут быть выражены в виде сходящихся рядов, расположенных соответственно по целым и положительным степеням поперечных координат», и отбрасывая в конце выкладок члены с высшими степенями.

Далее вкратце излагается их анализ, причем он распространяется на случай, когда вещество не является изотропным и имеет плоскости симметрии или упругости, перпендикулярные к ребрам призмы.

Примем x за ось призмы. Выразим для какого-либо из ее поперечных сечений ω нормальную составляющую давле-

откуда

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = \bar{\omega},$$

что является в этом случае первым из уравнений (12).

Считают, что прикрепленное основание может сжиматься и одновременно слегка искривляться, как и другие сечения, по эллиптическому параболоиду, ординатой которого является выражение

$$\frac{\bar{\omega}}{2E} (\epsilon y^2 + \epsilon' z^2).$$

Полагая $p = 0$ и меняя знак $\bar{\omega}$, получаем перемещения точек той же призмы с учетом ее веса, когда она установлена на нижнем основании.

¹⁾ Мемуар, прочитанный 14 апреля 1828 г., *Nouveaux Mémoires de l'Institut*, т. VIII, стр. 26.

²⁾ *Exercices de Mathématiques*, т. III, стр. 250, 256, 262, 358 и т. IV, стр. 26.

ния посредством нижеследующего ряда и предположим, что коэффициенты A_0, A_1, \dots , зависящие от x , имеют такие величины, что ряд обладает весьма быстрой сходимостью даже для самых больших значений поперечных координат y, z , так что каждый член очень мал по сравнению с членом, имеющим степень на две единицы меньше:

$$p_{xx} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \dots \\ \dots + A'_1 z + A'_2 y^2 z + A'_3 y^2 z^2 + \dots + A''_2 z^2 + A''_3 y z^2 + \dots \\ \dots + A'''_3 z^3 + \dots \quad (18)$$

Так как $\int y^m z^n d\omega$ равен нулю для всякого сечения, симметричного относительно осей y и z , когда один из двух показателей степени m или n нечетный, то для изгибающего момента или момента упругих сил относительно оси, проходящей через центр сечения ω параллельно оси y , получим выражение

$$M_y = \int p_{xx} z d\omega = \\ A'_1 \int z^2 d\omega + A'_3 \int y^2 z^2 d\omega + A'''_3 \int z^4 d\omega + \dots, \quad (19)$$

первый член которого значительно больше последующих.

Итак, обозначая, как обычно, в скобках с индексом нуль значение содержащейся в них величины при $y = 0, z = 0$, имеем:

$$A'_1 = \left(\frac{dp_{xx}}{dz} \right)_0; \quad (20)$$

исключая ∂_y, ∂_z из трех первых уравнений (7) $p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e''\partial_z + hg_{yz}$, $p_{yy} =$ и т. д. для случая наличия единственной плоскости упругости, а также обозначая через $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon''_1$ три функции их коэффициентов, аналогичные функциям $\varepsilon, \varepsilon'$ предыдущего параграфа, получаем:

$$p_{xx} = E \frac{du}{dx} + \varepsilon_1 p_{yy} + \varepsilon'_1 p_{zz} + \varepsilon''_1 p_{yz}, \quad (21)$$

откуда

$$\left(\frac{dp_{xx}}{dz} \right)_0 = A'_1 = E \left(\frac{d^2 u}{dx dz} \right)_0 + \varepsilon_1 \left(\frac{dp_{yy}}{dz} \right)_0 + \varepsilon'_1 \left(\frac{dp_{zz}}{dz} \right)_0 + \varepsilon''_1 \left(\frac{dp_{yz}}{dz} \right)_0. \quad (22)$$

Но второе и третье уравнения равновесия (12) $\frac{dp_{xy}}{dx} + \dots = 0$, $\frac{dp_{zx}}{dx} + \dots = 0$ после замены p_{xy} и p_{zx} их значениями (7), а g_{zx} , g_{xy} их значениями (13) и исключения величины $\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$ для получения $\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)$ дают

$$\frac{d^2 u}{dx dz} = - \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{e}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} \right) + \frac{h'''}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} \right), \quad (23)$$

где первый член правой части уравнения не что иное, как кривизна линии, у которой x — абсцисса, а w — очень малая ордината, так что если положить $y = 0$, $z = 0$, то получим:

$$- \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 = \frac{1}{\rho};$$

здесь ρ — радиус кривизны оси призмы, если, как мы полагаем, она изогнута в плоскости xz . Подставляя в (22) значение производной $\left(\frac{d^2 u}{dx dz} \right)_0$, которое вытекает из (23), и затем внося значение A'_1 в (19), получаем выражение изгибающего момента:

$$M_y = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega + A'_3 \int y^2 z^2 d\omega + A''_3 \int z^4 d\omega + \dots + \left[\varepsilon_1 \left(\frac{dp_{yy}}{dz} \right)_0 + \varepsilon'_1 \left(\frac{dp_{zz}}{dz} \right)_0 + \varepsilon''_1 \left(\frac{dp_{yz}}{dz} \right)_0 - \frac{Ee}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} \right)_0 + \frac{Eh'''}{ef - h'' h'''} \left(\frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} \right)_0 \right] \int z^2 d\omega. \quad (24)$$

Итак, если рассматривать p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} , выраженные посредством разложений, подобных разложению (18) для p_{xx} , то легко видеть, что в соответствии с условием равенства нулю давлений на боковых гранях призмы эти три составляющие будут всюду (внутри) иметь второй или четвертый порядок степени относительно y , z и частных значений этих координат на поверхности.

В самом деле, если ограничиться прямоугольным сечением со сторонами $2b$, $2c$ и обозначить через B (вместо A

в p_{xx}) коэффициенты разложения p_{yy} , то условие $p_{yy} = 0$ при $y = +b$ и $y = -b$ и любых z даст бесконечную последовательность уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_0 + B_2 b^2 + B_4 b^4 + \dots &= 0, \\ B_1 + B_3 b^2 + B_5 b^4 + \dots &= 0, \\ B'_1 + B'_3 b^2 + B'_5 b^4 + \dots &= 0, \\ B'_2 + B'_4 b^2 + B'_6 b^4 + \dots &= 0, \\ B''_2 + B''_4 b^2 + B''_6 b^4 + \dots &= 0, \\ B''_3 + B''_5 b^2 + B''_7 b^4 + \dots &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

откуда выводим, выражая коэффициенты $B_0, B_1, B'_1, B'_2, \dots$ через коэффициенты при членах высших степеней B_2, B_3, \dots и подставляя в разложение $p_{yy} = B_0 + B_1 y + B'_1 z + \dots$, что p_{yy} является, по крайней мере, функцией второй степени от y, b, z . То же самое получаем для p_{zz} как функции y, z, c . Что касается p_{yz} , которое должно обращаться в нуль на четырех гранях $y = \pm b, z = \pm c$, то найдем, что оно имеет четвертую степень относительно тех же координат или поперечных размеров, которые мы полагаем очень малыми. Подставляя в выражение (24) момента M_y разложения, найденные для p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} , или проще подставляя вместо $\left(\frac{dp_{yy}}{dy}\right)_0, \left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0$ значения $B_1 = -B_3 b^2 - B_5 b^4 - \dots, B'_1 = -B'_3 b^2 - B'_5 b^4 - \dots$, полученные непосредственно из второго и третьего уравнений (25), и значения, полученные подобным же способом для производных $\left(\frac{dp_{zz}}{dz}\right)_0, \left(\frac{dp_{yz}}{dy}\right)_0, \left(\frac{dp_{yz}}{dz}\right)_0$, увидим, что всякий член в выражении (24), за исключением первого, по крайней мере, четвертой степени и, следовательно, им можно пренебречь. Отсюда приближенно получим

$$M = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega. \quad (26)$$

Этот анализ в предположении, что мы оспариваем возможность разложения p_{xx}, p_{yy}, \dots в сходящиеся целые ряды по y, z , может всегда рассматриваться как доказывающий формулу (26) с несколько большим приближением и мень-

шими допущениями, чем обычная теория, так как последняя сводится прежде всего к предположению, что p_{yy} , p_{zz} повсюду равны нулю, а p_{xx} находится в линейной зависимости от z , тогда как в предыдущем анализе просто предполагается, что эти составляющие давления могут быть выражены посредством подобных рядов, и в конечном счете все сводится только к ликвидации всех членов, начиная с третьей, пятой и других нечетных степеней, при сохранении прочих. Это дает всегда определенную свободу действий, чтобы представить, по крайней мере, эмпирически еще неизвестный закон изменения основных величин. Следует также заметить, что тот же анализ, опирающийся на два точных уравнения внутреннего равновесия (12) при допущении, что поперечные действия волокон p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} должны быть повсюду очень малы; доказывает то, что обычная теория предполагает, а именно то, что удлинение ∂_x можно выразить посредством выражения $\partial_0 + \frac{z}{\rho}$ (∂_0 — постоянная величина), если изгиб производится в плоскости, параллельной оси z . Действительно, поскольку эти уравнения приближенно сводятся к

$$\frac{dp_{xz}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0,$$

то из первого получаем:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dz} \frac{du}{dx} = - \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Последняя величина является в достаточной мере постоянной и равной $-\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{\rho}$ во всех точках того же сечения ввиду малости его высоты по сравнению с радиусом ρ кривизны призмы в этом месте. Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{du}{dx} = \partial_x = \partial_0 + \frac{z}{\rho}$$

и, следовательно (по той же причине приближенного равенства нулю p_{yy} , p_{zz} , p_{yz})

$$p_{xx} = E \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right), \quad (27)$$

т. е. мы имеем все формулы обычной теории (§ 2).

§ 14. Принятые условия и уравнения нашей задачи о неравномерном изгибе призм

Итак, необходимо, как мы сказали в § 3, добиваться для оснований различной формы точных, а не предположительных решений задачи о перемещениях при изгибе, принимая в случае необходимости соответственно смыслу смешанного, или полуобратного, метода, о котором мы говорили в § 3, такие данные, чтобы то, что полностью или частично допущено без проверки в теории Мариотта и Кулона, действительно имело бы место, и изыскивая для этого нужные условия. Мы это сделали в уже цитированном мемуаре¹⁾ для чрезвычайной редкого случая равномерного, или кругового, изгиба, ограничившись указаниями для общего случая *неравномерного изгиба*, когда силы не сводятся к парам.

Чтобы исследовать этот последний случай, включающий и предыдущий, мы рассмотрим призму или какую-либо часть призмы (без учета ее веса), содержащуюся между двумя основаниями или двумя поперечными сечениями, и зададимся целью определить ее новое состояние равновесия после перемещения ее точек, принимая в качестве данных:

1) Часть перемещений или их соотношения, так как мы полагаем, что изгиб происходит в некоторой плоскости, и мы его характеризуем тем, что ось призмы, или прямая, соединяющая центры тяжести ее сечений, превращается в плоскую кривую и что удлинения ее *волокон* изменяются в поперечном направлении одинаковым образом с их взаимными расстояниями, определяемыми параллельно плоскости этой кривой.

2) Часть сил, так как мы полагаем, что те же волокна не оказывают друг на друга никакого давления в поперечном направлении или перпендикулярно к их длине, *имея возможность воздействовать друг на друга в продольном направлении*, что на боковых внешних гранях нет никаких сил, даже в продольном направлении; наконец, мы задаемся где-то произвольно равнодействующей и равнодействующим моментом внешних сил, относительно которых неизвестны только способы их приложения и распределения.

¹⁾ Sur la torsion, §§ 35, 36, 40.

К этому мы добавим не по необходимости, а для упрощения и для того, чтобы не примешивать пока к изгибу такие посторонние элементы, как общее поступательное смещение и общий поворот, растяжение оси, кручение (элементы, которые могут быть добавлены позднее в соответствии с теоремой сложения § 6):

3) Один из двух концов оси призмы остается неподвижным, так же как материальная плоскость центрального элемента соответствующего основания, а равно и бесконечно узкая продольная полоса плоскости, в которой происходит изгиб оси.

Таким образом, мы должны сначала определить, соответствуют ли эти данные друг другу, а затем найти величину перемещений, между которыми задаются только некоторые соотношения, и выяснить, каковы неизвестные силы, которые производят изгиб.

Примем, как обычно, за x ось еще не изогнутой призмы, за начало координат — ее неподвижный конец и за xz — плоскость изгиба этой оси. Назовем:

M — момент (в общем случае переменный, т. е. зависящий от x) внешних сил относительно параллелей к y , проходящих через центры сечений ω ; полную продольную составляющую этих сил полагаем равной нулю;

Pa — значение этого момента M при $x = 0$;

J — момент инерции $\int z^2 d\omega$ сечения;

ρ — радиус кривизны оси призмы (обычно переменный).

Когда взаимные расстояния между волокнами, спроектированными на плоскость изгиба xz , отличаются от их ординат z , то первое принятое условие выражается посредством соотношения $\partial_x = Cz + C'$, где C и C' — две постоянные величины для каждого сечения. Главное принятое условие относительно сил выражено посредством формул $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$, которые в соответствии с формулами § 8 изменения плоскостей достаточны для обращения в нуль всех нормальных усилий.

Предположим, что материал призмы имеет плоскости симметрии строения, перпендикулярные к ребрам или к оси, так что формулы (7) дают составляющие давления. Вторая, третья и четвертая формулы с нулем в левой части вместо

p_{yy} , p_{zz} , p_{yz} приводят, как в § 12, к

$$p_{xx} = E \partial_x, \quad \partial_y = -\varepsilon \partial_x, \quad \partial_z = -\varepsilon' \partial_x, \quad g_{yz} = \varepsilon'' \partial_x. \quad (28)$$

Подставляя вместо ∂_x значение $Cz + C'$, которое мы ему придаем, и формулируя уравнения равновесия относительно поступательного смещения в направлении x и поворота вокруг параллели к y , проведенной через центр сечения ω части призмы, заключенной между этим сечением и концом ее, противоположным началу координат, получаем:

$$0 = \int E (Cz + C') d\omega, \quad M = \int E (Cz + C') z d\omega,$$

откуда, так как $\int z d\omega = 0$ в силу свойства центра тяжести, имеем:

$$C' = 0, \quad C = \frac{M}{EJ}.$$

Таким образом, первое и второе принятые условия выражаются посредством формул:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon'' \frac{Mz}{EJ}, \quad (29)$$

которые при $p_{xx} = E \partial_x = E \frac{du}{dx}$, $\partial_x = Cz$, сводятся к выражениям:

$$p_{xx} = \frac{Mz}{J}, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad (30)$$

к которым нужно добавить третье принятое условие, устанавливая неподвижность точки и двух плоских элементов:

$$\left. \begin{array}{l} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{du}{dz} = 0 \quad \text{в начале} \\ \text{координат или при } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \\ v = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{на оси или при } y = 0, \quad z = 0, \\ \text{каким бы ни был } x. \end{array} \right\} \quad (31)$$

Речь идет об определении значений u, v, w , удовлетворяющих одновременно неопределенным уравнениям равновесия

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \dots,$$

которые относятся ко всем точкам твердого тела и сводятся при учете (30) к

$$\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{J} \frac{dM}{dx}, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0, \quad (32)$$

а также (но только для точек внешней поверхности) определенным уравнениям (14) $p_{xx} \cos \hat{nx} + p_{xy} \cos \hat{ny} + p_{xz} \cos \hat{nz} = \Pi \cos \hat{Px}, \dots$ только на тех частях поверхности, где известны давления Π , а именно на боковых гранях призмы, где они равны нулю.

Так как мы имеем для этих граней $\cos \hat{nx} = 0$, то второе и третье из уравнений (14) уже удовлетворяются при $p_{yy} = 0, p_{zz} = 0, p_{yz} = 0, \Pi = 0$, и только что написанное уравнение, ввиду того что $\cos \hat{ny} = -\frac{dz}{ds}, \cos \hat{nz} = \frac{dy}{ds}$, где ds — элемент дуги контура ω , сводится к уравнению

$$p_{xz} dy - p_{xy} dz = 0, \quad (33)$$

которое справедливо только в точках контуров сечений, что также можно было установить прямо, либо посредством теоремы проекций плоскостей давления § 4, либо непосредственно, если учесть, что всем молекулярным действиям, пересекающим элемент поверхности $dsdx$, соответствуют равные и параллельные действия, которые пересекают ту или другую из его проекций $dydx$ и $-dzdx$ и которые могут их заменить.

§ 15. Первые следствия заданных условий и соотношений

Второе и третье неопределенные уравнения (32) при учете выражений (7) для p_{xz}, p_{xy} приводят к $\frac{dg_{xy}}{dx} = 0, \frac{dg_{xz}}{dx} = 0$ или (формула (13)) к

$$\frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx dz} + \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (34)$$

При подстановке вместо $\frac{du}{dx}$ его значения (29) $\frac{Mz}{EJ}$, где момент M зависит только от x , вместо (34) имеем:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad -\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \quad (35)$$

Уже из выражения $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$ видно, что волокна после изгиба не имеют никакой кривизны в направлении оси y , т. е. проектируются на плоскость xz в виде прямых линий, и, таким образом, все они являются плоскими кривыми. Из уравнения $-\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$ видно, что их проекции на плоскость изгиба оси xz имеют почти одинаковую кривизну в точках, принадлежащих к тому же сечению ω , так как $-\frac{d^2 w}{dx^2}$ является приблизительно, как уже сказано, обратной величиной радиуса кривизны волокон.

Итак, обозначив этот радиус через ρ , имеем:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}, \quad p_{xx} = E \frac{z}{\rho}, \quad (36)$$

так что формулы обычной теории (1) и (2) составляют следствие принятых нами условий и правильны, когда последние выполняются.

Но первое уравнение равновесия (32) $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{J} \frac{dM}{dx}$ показывает, что когда момент M или кривизна $\frac{1}{\rho}$ являются переменными, то составляющие давления p_{xy} , p_{xz} и, следовательно, сдвиги g_{xy} , g_{xz} не могут сразу равняться нулю. Отсюда действительно следует (§ 2), что сечения наклоняются к волокнам.

Те же уравнения (34) $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ показывают, что, дифференцируя дважды по x уравнения (29) $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EJ}$, $\frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EJ}$, мы должны получить нуль в правых частях уравнения, откуда $\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$.

Таким образом, из наших допущений или *принятых условий* также следует, что момент внешних сил M может изменяться только линейно с координатой x , от которой он зависит, т. е. можно утверждать, так как мы назвали Pa заданное значение M при $x = 0$, что

$$M = P(a - x), \quad (37)$$

и постоянная a представляет собой абсциссу точки (которая может находиться на продолжении призмы), для которой этот переменный момент равен нулю.

Величина $-P$ является равнодействующей в направлении z внешних сил, которые создают изгиб, а также (для равновесия относительно поступательного смещения в боковом направлении) касательных давлений по сечениям ω . Таким образом, получаем:

$$\int_0^{\omega} p_{xz} d\omega = -P. \quad (38)$$

Частный случай равномерного изгиба, т. е. изгиба по дуге окружности, соответствует нулевому значению для P и бесконечному значению a , при этом их произведение Pa должно быть конечной величиной, равной моменту M . В этом случае момент постоянен от одного конца призмы до другого, поэтому x в формуле (37) надо отбросить, и силы, таким образом, сводятся к паре, а радиус кривизны $\rho = \frac{EJ}{M}$ (выражение (36)) также постоянен.

§ 16. Первое интегрирование

Первое интегрирование уравнений (29)

$$\frac{du}{dx} = \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dw}{dz} = -\varepsilon' \frac{Mz}{EJ}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \varepsilon'' \frac{Mz}{EJ}$$

при учете условий (31), дающих для u , v , w , $\frac{du}{dz}$ нулевые значения в начале координат и для v , $\frac{dv}{dz}$ нулевые значения повсюду на оси, и уравнения (35) $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ легко дает при

подстановке вместо M согласно (37) его значения $P(a - x)$ выражения:

$$\left. \begin{aligned} u &= P \frac{2ax - x^2}{2EJ} z + F(y, z), \\ v &= -P \frac{a - x}{2EJ} (2\epsilon yz - \epsilon'' z^2), \\ w &= g_0 x + P \frac{a - x}{2EJ} (\epsilon y^2 - \epsilon' z^2) - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EJ}. \end{aligned} \right\} (39)$$

Здесь g_0 — постоянная (которая представляет сдвиг g_{xz} в начале координат), $F(y, z)$ — функция, которая должна быть такой, чтобы

$$F = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, z = 0; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} f \frac{d^2 F}{dy^2} + (h'' + h''') \frac{d^2 F}{dydz} + e \frac{d^2 F}{dz^2} = \\ = P \frac{E - \epsilon f - \epsilon' e + \epsilon'' h''}{EJ} z + \epsilon \frac{h''' + h''}{EJ} Py \quad \text{везде}; \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(h'' - f \frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{dF}{dy} + P \frac{2\epsilon yz - \epsilon'' z^2}{2EJ} \right) + \\ + \left(e - h''' \frac{dz}{dy} \right) \left(\frac{dF}{dz} + g_0 + P \frac{\epsilon' z^2 - \epsilon y^2}{2EJ} \right) = 0 \quad (42) \end{aligned}$$

во всех точках контура сечения.

В самом деле, значение u дается непосредственно интегрированием (29) $\frac{du}{dx} = \frac{P(a - x)}{EJ} z$. Интегрирования уравнений (29) $\frac{dv}{dy} = -\epsilon \frac{Mz}{EJ}$, $\frac{dw}{dz} = -\epsilon' \frac{M}{EJ}$ дают $v = -\epsilon \frac{Myz}{EJ} + F(x, z)$, $w = -\epsilon' \frac{Mz^2}{2EJ} + f(x, y)$, что при подстановке в последнее уравнение (29) $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \epsilon'' \frac{Mz}{EJ}$ приводит к уравнению $-\epsilon \frac{My}{EJ} + \frac{d}{dy} f(x, y) = \epsilon'' \frac{Mz}{EJ} - \frac{d}{dz} F(x, y)$, которое не может быть удовлетворено, если M зависит только от x , без того, чтобы обе части уравнения не являлись одной и той же постоянной или функцией только x . Обозначая последнюю функцию через X и снова интегрируя, получаем

$F(x, z) = \frac{\varepsilon'' Mz^2}{2EJ} - Xz + \text{const.}$ Далее, $v = -\varepsilon \frac{Myz}{EJ} + \frac{\varepsilon'' Mz^2}{2EJ} - Xz + \text{const.}$ Выполняя условия (31) $v = 0$ и $\frac{dv}{dz} = 0$ при $y = 0$ и $z = 0$, видим, что величина X равна нулю, так же как и постоянная, что приводит к выражению (39) для v .

Что касается w , то, так как $X = -\varepsilon \frac{My}{EJ} + \frac{d}{dy} f(x, y)$ равно нулю, получаем $f(x, y) = \frac{\varepsilon My^2}{2EJ} + f_1(x)$; поэтому при $\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$ уравнение (35) $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$ дает $-\frac{M}{EJ} = \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} = \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2}$, откуда $f_1(x) = -\frac{1}{EJ} \iint M dx^2 = -P \frac{3ax^2 - x^3}{6EJ} + g_0 x$, где $g_0 = \text{const.}$, и, следовательно, получаем также значение (39) для w .

Что же касается условий, которым мы подчиняем функцию $F(y, z)$, то условия (40) вытекают из условий (31) $u = 0$ и $\frac{du}{dz} = 0$, относящихся к началу координат. Условия (41) и (42), или неопределенные и определенные дифференциальные уравнения, вытекают из подстановки в уравнения (32) $\frac{dp_{xy}}{dp} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\frac{z}{J} \frac{dM}{dx}$ и (33) $p_{xz} - p_{xy} \frac{dz}{dy} = 0$ выражений (7) $p_{xz} = \varepsilon g_{xz} + h'' g_{xy}$, $p_{xy} = h''' g_{xz} + f g_{xy}$ и (37) $M = P(a - x)$, причём в соответствии с выражениями (39) u, v, w имеем $g_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dF}{dz} + g_0 + P \frac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2EJ}$, $g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dF}{dy} + P \frac{2\varepsilon yz - \varepsilon'' z^2}{2EJ}$.

Полное решение поставленного вопроса с целью определения величины и направления всех перемещений и всех сил после установления соответствия принятых условий сводится, таким образом, к нахождению посредством интегрирования уравнения в частных производных второго порядка (41) функции F , зависящей от y, z , и значения постоянной g_0 , которые удовлетворяли бы условиям (40) и (42) для различных форм контуров сечений.

Можно уже судить (см. далее § 30), что это решение неизменно существует, так что принятые нами предположения совместимы, и что имеются, следовательно, всегда способы

распределения внешних сил на крайних основаниях, для которых изгиб совершается в вышеуказанных условиях.

Но следует дать несколько примеров полного определения перемещений u , v , w и оценки различных обстоятельств изгиба, некоторые из которых опускаются обычной теорией и должны быть приняты во внимание при ее использовании.

Мы ограничимся для этого случаем, когда строение материала имеет плоскости симметрии, перпендикулярные к осям y и z , помимо плоскостей симметрии, перпендикулярных к оси x . В таком случае

$$\left. \begin{aligned} h'' = 0, \quad h''' = 0, \quad \varepsilon'' = 0, \\ \text{откуда } p_{xy} = fg_{xy}, \quad p_{xz} = eg_{xz}, \quad g_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Чтобы сделать выражения более простыми или более симметричными, вводим обозначения:

$$\frac{\varepsilon f}{E} = \eta, \quad \frac{\varepsilon' e}{E} = \eta', \quad f = G, \quad e = G', \quad (44)$$

так что G и G' являются коэффициентами упругости при сдвиге в направлениях осей y и z . Получаем:

$$\left. \begin{aligned} u = P \frac{2ax - x^2}{2EJ} z + F(y, z), \quad v = -\eta P \frac{a-x}{GJ} yz, \\ w = g_0 x + P \frac{a-x}{2J} \left(\frac{\eta y^2}{G} - \frac{\eta' z^2}{G'} \right) - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EJ}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где g_0 — постоянная величина и $F(y, z)$ — функция, которые должны удовлетворять уравнению

$$G \frac{d^2 F}{dy^2} + G' \frac{d^2 F}{dz^2} = P \frac{1 - \eta - \eta'}{J} z \quad (\text{везде}) \quad (46)$$

и условиям

$$F = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \quad \text{в точках при } y = 0, \quad z = 0, \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} -G \left(\frac{dF}{dy} + \eta \frac{Pyz}{GJ} \right) dz + \\ + G' \left[\frac{dF}{dz} + g_0 + \frac{P}{2J} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) \right] dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

на контуре сечений.

§ 17. Распределение сил. Обстоятельства, сопровождающие неравномерный изгиб. Наклон и кривизна сечений. Взаимный наклон волокон. Полная стрела прогиба

Прежде чем произвести в некоторых случаях интегрирование (46) для определения F и g_0 , желательно дать несколько выражений, содержащих эти две величины, которые мы будем использовать в различных примерах.

Во-первых, *распределение* внутренних сил по какому-либо сечению или внешних сил по основаниям или крайним сечениям дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= P \frac{a-x}{J} z, & p_{xy} &= G \left(\frac{dF}{dy} + \eta \frac{Pyz}{GJ} \right), \\ p_{xz} &= G' \left[\frac{dF}{dz} + g_0 + \frac{P}{2J} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Во-вторых, *наклон* оси призмы к сечениям ω в плоскости xz при ее искривлении имеет значение (§ 5) $g_{xz} = \frac{p_{xz}}{G'}$ при $y = 0, z = 0$. Итак, в соответствии с (49) и (47) g_0 является постоянной величиной, так что этот наклон одинаков во всех сечениях.

В-третьих, уравнение искривленной поверхности сечений или поверхности, в которую превращается плоскость сечения ω , расположенного первоначально на расстоянии x от начала координат, получится, очевидно, следующим образом. Пусть x_1, y_1, z_1 являются координатами одной из точек искривленной поверхности. Тогда, заменяя в трех следующих уравнениях u, v, w их значениями (45)

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w$$

и исключая u и z , получаем искомое уравнение.

Ему можно придать простую форму. В самом деле, центральная точка этой поверхности, соответствующая $y = 0, z = 0$, будет иметь координаты

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = g_0 x - P \frac{3ax^2 - x^3}{6EJ}.$$

Переместим начало координат и возьмем новые прямоугольные координаты u', y', z' , из которых вторая y' параллельна y , а первая u' параллельна касательной к изогнутой оси призмы в этом месте, так что u' определяет расстояние от какой-либо точки сечения до нормальной плоскости $y'z'$, проведенной к этой оси через центральную точку; поскольку третье из только что написанных выражений дает после дифференцирования выражение $g_0 - P \frac{2ax - x^2}{2EJ}$ для малого угла $\hat{u}'x$ оси u' с осью x или x_1 , то, полагая $\cos \hat{y}'x_1 = 0$, а $\cos \hat{z}'x_1 = -\sin \hat{u}'x_1 = -g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EJ}$ в формуле преобразования $x_1 = x + u' \cos \hat{u}'x_1 + y' \cos \hat{y}'x_1 + z' \cos \hat{z}'x_1$, где $\cos \hat{u}'x_1$ можно заменить единицей, от которой он отличается только на величину второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} x + u' + \left(-g_0 + P \frac{2ax - x^2}{2EJ} \right) z' &= x_1 = \\ &= x + P \frac{2ax - x^2}{2EJ} z + F(y, z). \end{aligned}$$

Пренебрегая, как всегда, очень малыми величинами второго порядка, мы можем подставить y', z' вместо y, z и вывести общее уравнение искривленной поверхности сечения ω :

$$u' = g_0 z' + F(y', z'). \quad (50)$$

Так как это уравнение не содержит x , то видно, что все сечения при изгибе получают одинаковую кривизну, как и одинаковый наклон к оси призмы.

И это происходит, как мы сказали в § 2, потому, что различные волокна растягиваются именно так, как будто бы сечения оставались плоскими и нормальными к оси.

Следовательно, можно заметить, что у изогнутых волокон в месте их пересечения одним сечением не все касательные параллельны. Произвольное волокно составляет с центральным волокном малый угол. Будучи спроектирован на плоскостях xu и xz , этот угол превышает на $\frac{dv}{dx}$ и $\frac{dw}{dx}$ его значения при $y = 0, z = 0$, т. е. принимая во внимание формулу

$\frac{1}{\varrho} = P \frac{a-x}{EJ}$, вытекающую из (36) и (37), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \eta \frac{Pyz}{GJ} = -\varepsilon yz \frac{d \frac{1}{\varrho}}{dx} \\ \text{и} & \frac{P}{2J} \left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G} \right) = -\frac{\varepsilon y^2 - \varepsilon' z^2}{2} \frac{d \frac{1}{\varrho}}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Эти очень малые взаимные наклоны волокон зависят, как мы видим, от способности к изменению вдоль x их поперечных сжатий ∂_y, ∂_z и, следовательно, от изменения кривизны $\frac{1}{\varrho}$. От последней величины зависит продольное удлинение $\partial_x = \frac{z}{\varrho}$, с которым ∂y и ∂z связаны множителями $\varepsilon, \varepsilon'$. Этим объясняется различие между $\frac{du'}{dy'}$, $\frac{du'}{dz'}$ и наклонами g_{xy}, g_{xz} волокон к сечениям.

Наконец, можно найти значение (45) для $-w$ при $y = 0, z = 0, x = a$, называемое *стрелой прогиба* или поперечным перемещением оси призмы в точке $x = a$. Эта точка обычно является свободным концом призмы, где приложена сила P .

Обозначая стрелу прогиба через f , получим:

$$f = -g_0 a + \frac{Pa^3}{3EJ}. \quad (52)$$

Так как g_0 величина отрицательная, *стрела прогиба* несколько больше той, которую дает обычно применяемая формула $\frac{Pa^3}{3EJ}$.

Найдем теперь F и g_0 для различных форм контура.

§ 18. Кривые контуров сечений, для которых произвольная функция F полностью определяется через y и z .

Эллиптический контур и т. д.

Прежде чем определить вид F для случая прямоугольного сечения (см. §§ 24, 25), мы решим обратную задачу, чтобы узнать, для каких форм контура сечения эта функция имеет более простое выражение, а именно:

$$F(y, z) = A_0 y + Ay^2 + A' yz + A'' z^2 + By^3 + B' y^2 z + B'' yz^2 + B''' z^3 + Cy^4 + C' y^3 z + \dots$$

где A_0, A, A', \dots — постоянные. Мы не включили ни постоянный член, ни член первой степени относительно z , так как F и $\frac{dF}{dz}$ должны обращаться в нуль при $y = 0$ и $z = 0$.

Находим, подставляя это выражение в неопределенное уравнение (46), что для того, чтобы оно было удовлетворено при любом значении y и z , между коэффициентами должны быть соотношения, уменьшающие их число, откуда

$$\begin{aligned}
 F(y, z) = & A_0 y + A \left(y^2 - \frac{G}{G'} z^2 \right) + \\
 & + A' yz + B' \left(y^2 z - \frac{G}{3G'} z^3 \right) + \\
 & + B'' \left(yz^2 - \frac{G'}{3G} y^3 \right) + P \frac{1 - \eta - \eta'}{6G'J} z^3 + \\
 & + C \left(y^4 - 6 \frac{G}{G'} y^2 z^2 + \frac{G^2}{G'^2} z^4 \right) + C''' \left(yz^3 - \frac{G'}{G} y^3 z \right) + \dots \quad (53)
 \end{aligned}$$

Подставляя в определенное условие (48) $-G[\dots] dz + G'[\dots] dy = 0$, мы получим уравнение относительно y, z, dy, dz , являющееся дифференциальным уравнением всех кривых контуров, для которых $F(y, z)$ имеет целое выражение через y, z , так как это уравнение справедливо во всех точках контуров сечений.

Оно легко интегрируется в окончательном виде, когда сводят выражение (53) $F(y, z)$ к членам с $y^2 z$ и z^3 , достаточным для получения множества кривых различных степеней. Упрощая, берем в таком случае вместо единственно остающегося коэффициента B' другой неопределенный коэффициент m , связанный с B' соотношением

$$m = 1 - \eta - \frac{2GJ}{P} B',$$

что приводит формулу (53) к виду

$$F(y, z) = P \frac{m - \eta'}{6G'J} z^3 + P \frac{1 - m - \eta}{2GJ} y^2 z, \quad (54)$$

так что получаем, подставляя в определенное уравнение (48),

следующее дифференциальное уравнение различных контуров сечения:

$$- P \frac{1-m}{J} yzdz + \left(G' g_0 + P \frac{m}{2J} z^2 + G' P \frac{1-2\eta-m}{2GJ} y^2 \right) dy = 0. \quad (55)$$

Делаем его однородным, умножая на y и вводя обозначения

$$y^2 = y', \quad z^2 + \frac{2G'J}{mP} g_0 = z',$$

что позволяет разделить переменные, полагая $z' = ty'$.

Вычисляя интегралы, переходя от логарифмов к числам, умножая на y^2 и обозначая постоянную через C , имеем:

$$Cy^{\frac{m}{1-m}} + \frac{G'}{G} \frac{1-2\eta-m}{3m-2} y^2 + z^2 = - \frac{2G'J}{mP} g_0. \quad (56)$$

Это уравнение при $C = 0$ представляет собой эллипс.

Если мы дадим C другие значения, кроме нуля, и приравняем, следовательно, произвольную постоянную m различным величинам, то получим множество других кривых, симметричных относительно оси y . Они симметричны или несимметричны относительно оси z , смотря по тому, рассматриваем мы показатель степени $\frac{m}{1-m}$ как четный или как нечетный.

Его рассматривают как четный, каким бы ни было численное значение, целым или дробным, когда сохраняют у $y^{\frac{m}{1-m}}$ знак $+$, если y становится отрицательным. Это можно сделать для всякого нечетного показателя, такого, как 1 или $\frac{9}{10}$, заменяя их числами $\frac{2}{2}$ и $\frac{18}{20}$, или лучше $\frac{2N}{2N+1}$, $\frac{18N}{20N+1}$, где N — целое бесконечно большое число. Тот же показатель степени рассматривается как нечетный, когда меняют знак у $y^{\frac{m}{1-m}}$ на знак $-$, что позволено даже со всяким четным показателем, таким, как 2 или $\frac{4}{3}$, представив $y\sqrt{y^2}$, $y\sqrt[3]{y^{\frac{2}{3}}}$ вместо

y^2 и $y^{\frac{4}{3}}$ и принимая корень только положительным или же заменяя этот показатель другим: $\frac{2N+1}{N}$, $\frac{4N+1}{3N}$, от которого он отличается бесконечно мало.

Если назовем:

c — полуось этих кривых в направлении z или $-z$;

b — их полуось в направлении $+y$, так что при $y=0$ получается $z = \pm c$,

$$\text{при } z=0 \left\{ \begin{array}{l} y = +b \text{ всегда,} \\ \text{а также } y = -b, \text{ но только тогда,} \\ \text{когда } \frac{m}{1-m} \text{ рассматривается как четное,} \end{array} \right\} \quad (57)$$

то найдем для постоянной g_0 , полагая $y=0$, $z^2=c^2$, значение

$$g_0 = -\frac{mP}{2G'J} c^2 \quad (58)$$

и для постоянной C , полагая $y=b$, $z=0$, значение, которое будучи подставлено в уравнение кривой (56), придает ему следующий вид:

$$\left(1 - \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \frac{G' b^2}{Gc^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}} + \frac{1-2\eta-m}{3m-2} \frac{G' b^2}{Gc^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (59)$$

Когда $\frac{m}{1-m}$ рассматривается как четное, необходимо и достаточно, чтобы кривая или часть кривой, разрезающая ось y в точках $y = \pm b$, была бы замкнутой и способной, следовательно, служить контуром сечений призмы и чтобы $\frac{z}{c}$ имело вещественное значение, когда полагаем $\frac{y}{b} = 1 - \alpha$, где α — очень малое положительное число. Поскольку

$$\frac{z}{c} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-m} \left[m \left(1 + \frac{G' b^2}{Gc^2} \right) - (1-2\eta) \frac{G' b^2}{Gc^2} \right]},$$

то это условие сводится к тому, что (если $1-2\eta$

положительно)

$$\left. \begin{aligned} & m \text{ заключено между } \frac{1-2\eta}{1+\frac{Gc^2}{G'b^2}} \text{ и } 1, \\ \text{или} & \frac{m}{1-m} > \frac{1-2\eta}{\frac{Gc^2}{G'b^2} + 2\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Допустим, например, что $G' = G$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\frac{E}{G} = \frac{5}{2}$, откуда $\eta = \frac{1}{10}$, $1 - 2\eta = \frac{4}{5}$, т. е. m может быть любым числом, заключенным между $\frac{4b^2}{5(b^2+c^2)}$ и 1, или $\frac{m}{1-m}$ может быть всяким положительным числом, большим $\frac{4b^2}{b^2+5c^2}$; тогда уравнение (59) записывается в формулах:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } m = \frac{4b^2}{5(b^2+c^2)}, \quad \frac{m}{1-m} = \frac{4b^2}{b^2+5c^2} \text{ имеем} \\ \left(1 + \frac{2b^2}{5c^2-b^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{4b^2}{5c^2+b^2}} - \frac{2b^2}{5c^2-b^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{для } m = \frac{1}{2}, \quad \frac{m}{1-m} = 1 \text{ находим} \\ \left(1 + \frac{3b^2}{5c^2}\right) \sqrt{\frac{y^2}{b^2}} - \frac{3b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{для } m = \frac{2c^2+0,8b^2}{3c^2+b^2} \text{ член с } \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}} \text{ исчезает и} \\ \text{получаем эллипс } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{для } m = \frac{4}{5}, \quad \frac{m}{1-m} = 4 \text{ член с } \frac{y^2}{b^2} \text{ исчезает и} \\ \text{получаем ложный эллипс (овал) } \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{для } m = \frac{9}{10}, \quad \frac{m}{1-m} = 9 \text{ имеем} \\ \left(1 + \frac{b^2}{7c^2}\right) \sqrt{\frac{y^{18}}{b^{18}}} - \frac{b^2}{7c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ \text{для } m = 1, \quad \frac{m}{1-m} = 2\infty \text{ находим} \\ \left(1 + \frac{b^2}{5c^2}\right) \left(\frac{y^2}{b^2}\right)^\infty - \frac{b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

На рис. 4 изображена четвертая часть кривых, представленных этими уравнениями (61) при двух предположениях: $c = b$ и $c = 2b$. Смешанная линия, которая их охватывает, соответствует $m = 1$ или показателю $\frac{m}{1-m} = \infty$.

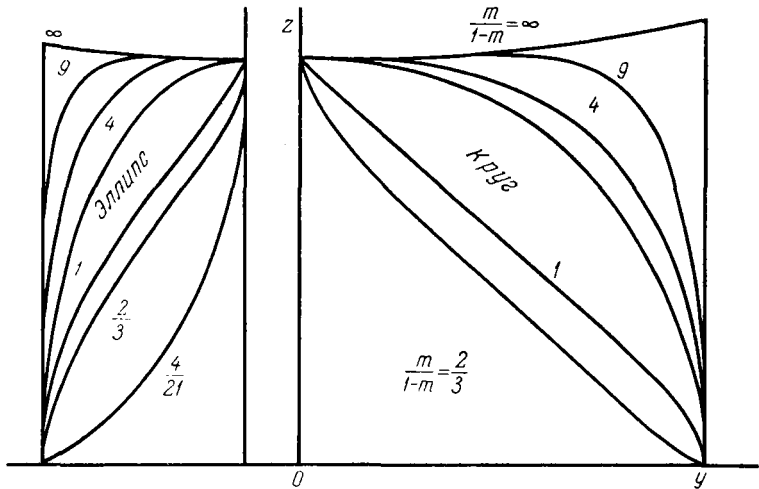


Рис. 4

Она состоит для значений $\frac{y^2}{b^2} < 1$ из частей двух ветвей гиперболы, имеющей уравнение

$$-\frac{b^2}{5c^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

и для значений $\frac{y^2}{b^2} = 1$ — из двух прямых $y = \pm b$, так как z становится неопределенным при $y^2 = b^2$. Этот смешанный контур близок к непрерывной кривой, получаемой при $\frac{m}{1-m} = 100$, или любому другому очень большому четному числу.

Когда полагаем $m = \frac{2}{3}$ или $\frac{m}{1-m} = 2$, уравнение (59) содержит два бесконечных члена, разность которых в виде конечной величины легко получить, подставляя сначала

вместо m дробь $\frac{2}{3}$, сложенную с бесконечно малой величиной, что дает трансцендентное уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - (1 - 6\eta) \frac{G' b^2}{G c^2} \frac{y^2}{b^2} \log \frac{y}{b} = 1,$$

представляющее собой кривую, слегка отличную от кривой $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Следовательно, *эллипс* получается не в том случае, когда полагаем показатель $\frac{m}{1-m} = 2$, а когда придаем, как мы сказали, m следующее значение, уничтожающее коэффициент при $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$:

$$m = \frac{2 G c^2 + (1 - 2\eta) G' b^2}{3 G c^2 + G' b^2}. \quad (62)$$

Каждый эллипс, соответствующий определенному отношению $\frac{b}{c}$ осей, является одной из кривых, оси которых $2b, 2c$ находятся между собой во всех возможных отношениях $\frac{b}{c}$ при одинаковом показателе $\frac{m}{1-m}$ лежащих в пределах 2 и $\frac{1}{2\eta} - 1$ (или для m между $\frac{2}{3}$ и $1 - 2\eta$). Таким образом, эллипс $b = c$, т. е. окружность, является частным случаем кривых, для которых имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad m &= \frac{2 G + (1 - 2\eta) G'}{3 G + G'}, \\ m &= \frac{7}{10}, \quad \frac{m}{1-m} = \frac{7}{3}, \quad \text{когда } G = G', \eta = \frac{1}{10}. \end{aligned} \right\} (63)$$

Эллипс $c = 2b$ представляет собой частный случай кривых, где $m = \frac{8,8}{13}$, $\frac{m}{1-m} = \frac{44}{21}$ и т. д. Также имеется, как мы увидим (§ 22), несколько общих свойств в каждом эллиптическом сечении в ряде других кривых, для которых m имеет то же значение.

Кривые ряда *ложных эллипсов* (овалов) $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, где показатель $\frac{m}{1-m} = 4$ или в общем случае равен $\frac{1}{2\eta} - 1$,

являются единственными, которые можно было бы вывести друг из друга, увеличивая или уменьшая в одинаковом отношении абсциссы y , но не изменяя ординат z .

Мы найдем свойство, заслуживающее особого внимания, также (§ 23) в кривых с показателем $\frac{m}{1-m} = 9$ и в более общем случае $\frac{1}{\eta} - 1$, трактуемом как четный.

Когда показатель $\frac{m}{1-m}$ трактуется как нечетный, так что $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{1-m}}$ становится отрицательным одновременно с y , то кривые уже несимметричны относительно оси z . Для того чтобы они были замкнутыми, необходимо, чтобы условие (60) всегда удовлетворялось. Но, кроме того, $\frac{1-2\eta-m}{3m-2}$ должно быть положительным, так как мы получаем для этого частного по существу положительное значение, полагая в уравнении (59) кривой $z = 0$, $y =$ какой-либо отрицательной величине $-b'$. Итак, для m и показателя $\frac{m}{1-m}$ следует иметь границы более узкие, чем указанные в формуле (60), а именно:

$$m \text{ между } 1 - 2\eta \text{ и } \frac{2}{3} \text{ или } \frac{m}{1-m} \text{ между } 2 \text{ и } \frac{1-2\eta}{2\eta},$$

т. е. между 2 и 4, когда $\eta = \frac{1}{10}$. Это условие необходимое, но еще недостаточное; нужно также, чтобы отношение $\frac{b}{c}$ оставалось в некоторых границах, которые зависят от значения, придаваемого m . Его верхней границей является значение, при котором уравнение (59) с $z = 0$ имеет два корня $\frac{y}{b} = 1$, так как в этом случае получаются две ветви кривой, пересекающиеся в точке $y = +b$, и эта кратная точка становится вершиной замкнутой кривой, когда $\frac{b}{c}$ принимают меньшее значение. Считая, что $\frac{y}{b} = 1$ удовлетворяет не только уравнению (59) при $z = 0$, но также и его производ-

ной по $\frac{y}{b}$, получаем для верхней границы выражение

$$\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G}{G'} \frac{m}{1 - 2\eta - m}}. \quad (64)$$

Нижняя граница того же отношения $\frac{b}{c}$ соответствует обычно верхней границе $\frac{b'}{c}$. Она получается, если записать, что то же уравнение (59) с $z = 0$ и с измененным знаком первого члена имеет два одинаковых корня или что производная его левой части обращается в нуль для того же неизвестного значения $\frac{y}{b} = \frac{b'}{b}$, как и непродифференцированная левая часть, что дает два уравнения, из которых легко исключить $\frac{b'}{b}$. Отсюда получаем условие

$$\left(1 - \frac{1 - 2\eta - m}{3m - 2} \frac{G' b^2}{G c^2}\right) \left(\frac{m}{1 - 2\eta - m} \frac{G c^2}{G' b^2}\right)^{\frac{m}{2-2m}} = \frac{2 - 2m}{3m - 2}, \quad (65)$$

служащее для определения путем численного подбора значения $\frac{b}{c}$, которое является нижним пределом для каждого значения m или показателя $\frac{m}{1-m}$.

Например, для $\frac{m}{1-m} = \frac{5}{2}$ или $m = \frac{5}{7}$, $1 - 2\eta = \frac{4}{5}$, $G' = G$ находим $\frac{5}{\sqrt{3}} = 2,886751$ и $1,05950$ для тех же границ $\frac{b}{c}$. Четыре следующих уравнения:

для $\frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,88675$	$-4 \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} + 5 \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $\frac{b'}{b} = 0,366 ;$	(66)
для $\frac{b}{c} = 2$	$-1,4 \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{5}{2}} + 2,4 \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $\frac{b'}{b} = 0,540 ;$	

$$\left. \begin{aligned}
 \text{для } \frac{b}{c} = 1,5 \quad & -0,35 \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1,35 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\
 & \frac{b'}{b} = 0,7735 ; \\
 \text{для } \frac{b}{c} = 1,05950 \quad & 0,326476 \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 0,673524 \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\
 & \frac{b'}{b} = 2,72385
 \end{aligned} \right\} (66)$$

представляют собой *овалы*, один из концов которых толще другого. Малый конец заостряется для первого и последнего уравнений.

Ось z проходит всегда только через центр тяжести сечений, ограниченных этими несимметричными контурами. Но это безразлично, ибо поскольку все волокна остаются в плоскостях, все ранее указанное также правильно, если мы возьмем за ось x какое-либо из волокон, которые не будут изменяться по длине.

§ 19. Способ приложения и распределения внешних сил, уточняющий для различных контуров обычные формулы изгиба, вызванного продольными удлинениями.

Значения величины центрального наклона g_0 .

Сечения эллиптические, круговые, в виде ложного эллипса и т. д.

Мы видим, что для призм с сечениями чрезвычайно разнообразной формы, контур которой представлен уравнением (59), задача §§ 3 и 14 получает полное решение, т. е. точки этих призм испытывают перемещения, удовлетворяющие условиям 1, 2, 3 § 14 или уравнениям (29), (30), которые *точно* приводят к обычным формулам для изгиба (36) или, лучше сказать, для части изгиба, происходящей только вследствие продольных удлинений. При кривизне оси, одинаковой или не одинаковой от одного до другого конца

призмы, если боковые грани не испытывают никакого воздействия, на крайние основания действуют силы, определенные выражениями (49). Эти выражения при подстановке (58) $\frac{-mPc^2}{2G'J}$ вместо g_0 и двучлена третьей степени (54) вместо $F(x, y)$ становятся такими:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= P \frac{a-x}{J} z, \quad p_{xy} = \frac{P(1-m)}{J} yz, \\ p_{xz} &= -mP \frac{c^2-z^2}{2J} + \frac{G'}{G} P \frac{1-2\eta-m}{2J} y^2. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Когда второе крайнее основание соответствует $x = a$, нормальная составляющая p_{xx} равна нулю во всех его точках и, таким образом, силы, которые производят изгиб, являются только касательными, а их равнодействующая $-P$ распределяется соответственно параболическим законам.

Например:

1) Для $m = \frac{4}{5}$, $\eta = \eta' = \frac{1}{10}$, т. е. для ложного эллипса $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, обозначенного цифрой 4 на рис. 67 § 18, где отношение осей $2b, 2c$ может быть произвольным, получим:

откуда

$$\left. \begin{aligned} F(y, z) &= \frac{Pz}{60GJ} (7z^2 + 3y^2), \quad g_0 = -\frac{2Pc^2}{5GJ}, \\ p_{xy} &= \frac{Pyz}{5J}; \quad p_{xz} = -2 \frac{c^2-z^2}{5J}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Момент инерции $J = 4 \int_0^b dy \int_0^c \sqrt{1 - \frac{y^4}{b^4}} z^2 dz = \frac{4c^3}{3} \int_0^b dy \times$
 $\times \left(1 - \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$ и площадь $\omega = 4 \int_0^b z dy = 4c \int_0^b dy \sqrt{1 - \frac{y^4}{b^4}}$ могут быть получены посредством эллиптического интеграла первого рода, если положить $\frac{y}{b} = \cos \varphi$.

Тогда их выражения принимают вид

$$\omega = \frac{4bc}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{2\sin^2\varphi - \sin^4\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$J = \frac{4bc^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{4\sin^4\varphi - 4\sin^6\varphi + \sin^8\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Эти два интеграла, рассматриваемых как неопределенные, сводятся соответственно к

$$\frac{2}{3} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} - \frac{2}{3} \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

$$\frac{4}{7} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} -$$

$$- \frac{4}{7} \cos\varphi \sin\varphi \left(1 + \sin^2\varphi - \frac{\sin^4\varphi}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi},$$

но вторые члены исчезают на пределах, поэтому, обозначая

по Лежандру $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$ через $F' \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ и замечая, что

значение этой величины равно 1,854074677301 (конец его таблицы II), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{8bc}{3\sqrt{2}} F' \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 3,496076 bc, & J &= \frac{2}{7} c^2 \omega = \\ & & &= 0,99888 bc^3, \\ \text{или приблизительно} & J = bc^3, \quad \omega = \frac{7}{2} bc, & \text{откуда} & \\ \text{почти точно} & & & \end{aligned} \right\} (69)$$

$$p_{xy} = \frac{P}{5bc^3} yz, \quad p_{xz} = -\frac{2P}{5bc} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

и

$$g_0 = -\frac{2P}{5G'bc} = -\frac{7}{5} \frac{P}{G'\omega}.$$

Соотношение $J = \frac{2c^2}{7} \omega$, которое является точным, можно получить из выражения (68) для p_{xz} , принимая в расчет (38) $\int p_{xz} d\omega = -P$.

То же самое соотношение $\int p_{xz} d\omega = -P$ для всех кривых (59) при всяком значении m и при обозначении момента инерции $\int y^2 d\omega$ через J' дает

$$m \frac{c^2 \omega - J}{2J} = 1 + \frac{1 - 2\eta - m}{2} \frac{G' J'}{GJ}, \quad (70)$$

что является общим свойством всех этих кривых.

2) Для $m = \frac{9}{10}$ или $\frac{18}{20}$, раз мы его представляем как четное (см. предыдущий параграф), что дает кривые, приближающиеся обычно к прямоугольнику со срезанными углами, принимая $\eta = \eta' = 0,1$ и $G = G'$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} F(y, z) &= \frac{2Pz^3}{15GJ}, \quad p_{xy} = \frac{Pyz}{10J}, \\ p_{xz} &= -\frac{9P}{20J} \left(c^2 - z^2 + \frac{y^2}{9} \right), \quad g_0 = -\frac{9Pc^2}{20G'J}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Посредством квадратур находим, что

$$\text{когда } b = c, \text{ то } \omega = 3,8218 c^2, \quad J = 1,2326 c^4 = \frac{\omega c^2}{3,1006},$$

$$g_0 = -1,3953 \frac{P}{G' \omega},$$

$$\text{когда } c = 2b, \text{ то } \omega = 3,7676 bc, \quad J = 1,1559 bc^3 = \frac{\omega c^2}{3,2596};$$

$$g_0 = -1,4668 \frac{P}{G' \omega}.$$

3) Для $m = 1 = \frac{2}{2}$ или для контура в виде смешанного четырехсторонника (см. предыдущий параграф), который охватывает другие фигуры с четным показателем, получаем:

$$\left. \begin{aligned} F(y, z) &= -\frac{3Pz}{20GJ} \left(z^2 + \frac{y^2}{3} \right), \quad p_{yx} = 0, \\ p_{xz} &= -\frac{P}{2J} \left(c^2 - z^2 + \frac{y^2}{5} \right), \quad g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'J}; \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

касательные усилия в направлении y равны нулю.

4) Для эллиптического контура, который представляет собой более сложный случай, потому что, как мы видели, его нельзя задать посредством значения m , не зависящего от отношения осей $\frac{b}{c}$, нужно взять для m значение (62), что, принимая во внимание формулы

$$\omega = \pi bc, \quad J = \frac{b}{c} \frac{1}{2} \int_0^c r^2 2\pi r dr = \pi \frac{bc^3}{4} = \frac{\omega c^3}{4}, \quad (73)$$

даёт

$$m = \frac{2Gc^2 + (1-2\eta)G'b^2}{3Gc^2 + G'b^2}, \quad g_0 = -\frac{mPc^2}{2G'J} = \frac{-2P}{G'\omega} \frac{2Gc^2 + (1-2\eta)G'b^2}{3Gc^2 + G'b^2}, \quad (74)$$

$$F(y, z) = \frac{(2-3\eta)Gc^2 + (1-2\eta-\eta')G'b^2}{3Gc^2 + G'b^2} \frac{2Pz^3}{3G'\omega c^2} + \frac{(1-3\eta)Gc^2 + \eta G'b^2}{3Gc^2 + G'b^2} \frac{2Py^2z}{G\omega c^2}, \quad (75)$$

$$p_{xy} = \frac{Gc^2 + 2\eta G'b^2}{3Gc^2 + G'b^2} \frac{4Pyz}{\omega c^2}, \quad \left. \begin{aligned} p_{xz} = -\frac{4P}{3\omega} \left[1 - \frac{z^2}{c^2} + \frac{(1-6\eta)G'b^2}{6Gc^2 + G'b^2} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} - 3\frac{y^2}{b^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Значение p_{xz} действительно даёт (38) $\int p_{xz} d\omega = -P$, так как $\int y^2 d\omega = \frac{\omega b^2}{4}$, что служит проверкой; таким образом, получаем $\int p_{xy} d\omega = 0$.

5) Для кругового контура в случае структуры материала, полагаемой одинаковой в двух поперечных направлениях, получаем $b = c$, $G = G'$, $\eta = \eta'$, $\omega = \pi c^2$, $J = \frac{\omega c^2}{4}$, откуда (выражения (74)—(76))

$$\left. \begin{aligned} m = \frac{3-2\eta}{4}, \quad g_0 = -\frac{(3-2\eta)Pc^2}{8GJ} = -\frac{(3-2\eta)P}{2G\omega} = \\ = -1,4 \frac{P}{G\omega}, \quad \text{если } \eta = \frac{1}{10}, \\ F(y, z) = \frac{P(1-2\eta)}{2G\omega c^2} (y^2 + z^2)z, \\ p_{xy} = \frac{P(1+2\eta)}{\omega c^2} yz, \quad p_{xz} = -P \frac{3-2\eta}{2\omega} \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) + \\ + P \frac{1-6\eta}{2\omega} \frac{y^2}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Мы нашли бы то же самое выражение $g_0 = -\frac{(3-2\eta)Pc^2}{8GJ} = -\frac{7}{10}\frac{Pc^2}{GJ}$ для всех сечений, представленных посредством $(1 - \frac{b^2}{c^2})\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1$, т. е. (см. предыдущий параграф) для всех контуров, определенных значением показателя $\frac{m}{1-m} = \frac{7}{3}$, рассматриваемого как четный, среди которых есть окружность, соответствующая отношению осей $\frac{b}{c} = 1$.

б) Если $G' = G$; $\eta' = \eta = 0,1$, то еще получаем:

$$\left. \begin{aligned} g_0 = -\frac{P}{G\omega} \frac{4c^2 + 1,6b^2}{3c^2 + b^2} = -1,368 \frac{P}{G\omega} \text{ для эллипса} \\ c = 1,5b; \\ \text{при } c = 2b; \quad g_0 = -1,354 \frac{P}{G\omega}. \end{aligned} \right\} (78)$$

Сравнивая эти значения g_0 для различных контуров, мы видим, что наклон оси к сечениям точно или почти точно равен $\frac{7}{5}$ наклону, который был бы, если сечение, наклоняясь, оставалось бы плоским или если g_{xz} было бы постоянным во всех точках, так что мы имели бы (уравнение (38)) $\omega p_{xz} = \omega G' g_{xz} = -P$.

§ 20. Те же контуры. Полная стрела прогиба при изгибе

Учитывая значение (58) для $g_0 = -\frac{m Pc^2}{2G'J}$, можно выражение стрелы прогиба при изгибе (52) записать в форме

$$-g_0 a + \frac{Pa^3}{3EJ} = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3m}{2} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2}\right).$$

При $G = G'$ имеем следующие значения стрелы

прогиба :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Для кругового сече-} \\
 \text{ния и всех сече-} \\
 \text{ний с } m = \frac{3-2\eta}{4} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{9-6\eta}{8} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2} \right) = \\
 = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{21}{8} \frac{c^2}{a^2} \right), \\
 \text{если } \eta = \frac{1}{10}, \quad \frac{E}{G'} = \frac{5}{2}.
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \text{Для эллиптического} \\
 \text{сечения и всех се-} \\
 \text{чений с} \\
 m = \frac{2c^2 + (1-2\eta)b^2}{3c^2 + b^2} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{6c^2 + 3(1-2\eta)b^2}{6c^2 + 2b^2} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2} \right) = \\
 = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{15c^2 + 6b^2}{6c^2 + 2b^2} \frac{c^2}{a^2} \right) id.
 \end{array} \right\} (79) \\
 \\
 \text{Для любого сечения} \\
 \text{типа ложного эл-} \\
 \text{липса четвертой} \\
 \text{степени} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{6}{5} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2} \right) = \\
 = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + 3 \frac{c^2}{a^2} \right) id.
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{каким} \\
 \text{бы ни} \\
 \text{было от-} \\
 \text{ношение} \\
 \frac{c}{b}.
 \end{array} \\
 \\
 \text{Для симметричного} \\
 \text{сечения степени} \\
 9 = \frac{18}{2} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{27}{20} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2} \right) = \\
 = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{27}{8} \frac{c^2}{a^2} \right) id.
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \right.$$

Второй член в скобках делает выражение стрелы прогиба *полным*, так как он представляет собой отношение, которым пренебрегают в обычной теории, где не принимают в расчет поперечные сдвиги или наклон сечений к оси.

§ 21. Те же контуры. Искривленные поверхности, образованные первоначально плоскими сечениями. Их обычная топография

Если в общем уравнении (50) $u' = g_0 z + F(y', z')$ поверхности, образованной вогнутыми сечениями, мы подставим вместо g_0 и функции F их значения (58) — $\frac{m P c^2}{2 G' J}$ и (54), относящиеся к призмам, сечения которых имеют контуры, дающие для F полином третьей степени (§ 18), то получим, освобождаясь для простоты от штрихов при y и z , выражение

$$u' = -\frac{P}{J} \left(\frac{m}{2G'} c^2 z - \frac{m-n'}{6G'} z^3 - \frac{1-\eta-m}{2G'} y^2 z \right). \quad (80)$$

Обозначим через u_m значение ординаты u' , которая соответствует $y = 0$, $z = -c$. Это значение в пределах сечения является обычно наибольшим. Получим:

$$u_m = \frac{2m + \eta'}{3} \frac{Pc^3}{2G'J}, \quad (81)$$

и уравнение поверхности можно записать в таком виде:

$$\frac{u'}{u_m} = -\frac{3m}{2m + \eta'} \frac{z}{c} + \frac{m - \eta'}{2m + \eta'} \frac{z^3}{c^3} + 3 \frac{G'}{G} \frac{1 - \eta - m}{2m + \eta'} \frac{y^2}{c^2} \frac{z}{c}. \quad (82)$$

Если дать $\frac{y}{c}$ и $\frac{z}{c}$ последовательно различные значения 0,1; 0,2; 0,3 и т. д., то получим соответствующие выражения для $\frac{u'}{u_m}$ и, следовательно, желаемое количество разрезов поверхности плоскостями, перпендикулярными либо к оси y , либо к оси z . Если распространить их надлежащим образом в направлении u' , то можно получить графически ряд разрезов эквидистантными плоскостями $u' = 0, 1u_m, u' = 0, 2u_m, \dots, u = u_m$, перпендикулярными к u' или к касательной к изогнутой оси призмы, способом более легким, чем решение уравнений этих разрезов относительно y . Проектируя их на одну из этих плоскостей, например на плоскость $u' = 0$, получаем полную *топографию* поверхности.

Ее разрез плоскостью $u' = 0$ нормален к оси призмы и состоит из прямой линии $z = 0$ *неизменяемых волокон* и кривой

$$\frac{G}{G'} \frac{1 - \eta - m}{m} \frac{y^2}{c^2} + \frac{m - \eta'}{3m} \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (83)$$

Эта кривая является окружностью (рис. 5), соответствующей случаю $m = 0,7$, $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$.

Чтобы хорошо понять форму поверхности, разрезы распространены за пределы контуров различных сечений, круговых или овальных, которым они соответствуют (см. следующий параграф). Когда $1 - \eta - m$ и $m - \eta'$ с одинаковым знаком или m находится между η' и $1 - \eta$ (или между 0,1 и 0,9 при $\eta = \eta' = 0,1$), то кривая является эллипсом. А другие разрезы параллельными плоскостями, все более и более удаляющимися от разреза $u' = 0$, являются замкну-

тыми кривыми, постепенно уменьшающимися и внутренними по отношению к предыдущим; они заключены между осью y и той или другой половиной эллипса, а именно между верхней половиной, соответствующей положительным значениям z при отрицательных значениях u' , и нижней

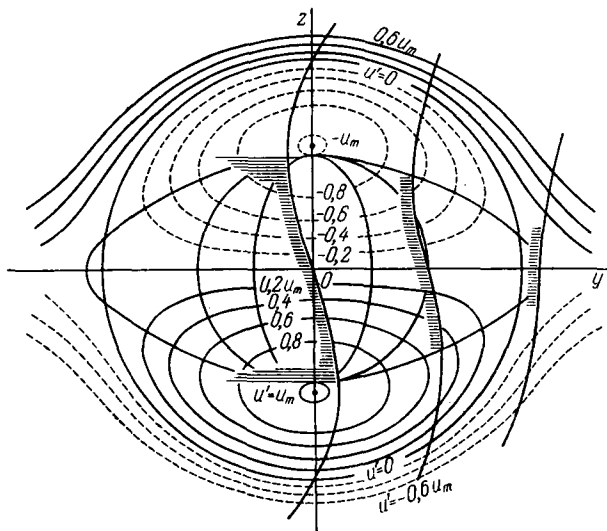


Рис. 5

половиной, соответствующей отрицательным значениям z при положительных значениях u' . Они сводятся в точку максимума, выходящую несколько за контур сечений для значений $\pm u'$, соответствующих $\frac{du'}{dy} = 0$, $\frac{du'}{dz} = 0$, т. е. для

$$y = 0, z = \pm c \sqrt{\frac{m}{m - \eta'}}, u' = \mp u_m \frac{2m}{2m + \eta'} \sqrt{\frac{m}{m - \eta'}}. \quad (84)$$

Те же плоскости разрезают также поверхность (82) по бесконечным кривым, расположенным вне половины эллипса (83) в противоположной стороне от замкнутой кривой; эти бесконечные кривые имеют с обеих сторон ось y в качестве асимптоты.

Последние кривые принадлежат обычно только к воображаемому продолжению поверхности вне контура сече-

ния, которое остается в эллипсе (83), охватывающем замкнутые кривые, за исключением довольно редких случаев, когда $b > c \sqrt{\frac{G'}{G} \frac{m}{1-\eta-m}}$, т. е. $b > c \sqrt{\frac{m}{0,9-m}}$, если $G = G'$, $\eta = 0,1$, как бывает, например, у концов наибольшего овального контура.

Когда $m > 1 - \eta$ и $> \eta'$ (или когда $m > 0,9$ при $\eta = \eta' = 0,1$), разрез $u' = 0$ состоит из прямой линии $z = 0$ и гиперболы, которая представлена в этом случае уравнением (83). Все другие разрезы являются бесконечными кривыми, части которых, заключенные в контуре сечения, обычно почти сливаются с прямыми, параллельными оси y .

В частном случае, при $m = 1 - \eta$, все разрезы сводятся к параллельным прямым (см. § 23).

Разрезы той же поверхности плоскостями $u'y$, т. е. плоскостями, перпендикулярными к z или параллельными одновременно линии неизменяемых волокон Oy и касательной u' к изогнутой оси, являются параболами с осью, параллельной этой касательной или расположенной в плоскости изгиба. Они не изображены на рисунке.

Можно также рассмотреть весьма замечательные разрезы той же поверхности косыми плоскостями, проходящими через ось y . Все эти разрезы, спроектированные на плоскость yz' , нормальную к оси призмы, являются концентрическими коаксиальными и подобными эллипсами, когда m (полагаемое больше η') меньше $1 - \eta$; они становятся гиперболами, когда $m > 1 - \eta$ (или когда m находится между 0,9 и 1 при $\eta = 0,1$). Это окружности при круговом сечении.

Но самыми интересными для механики являются разрезы той же искривленной поверхности плоскостью изгиба $u'z$ или xz и различными плоскостями $y = \text{const}$, которые ей параллельны.

Наметим и произведем три разреза $y = 0$, $y = c$, $y = 2c$, придавая u_m некоторое значение, чтобы сделать форму разрезов более наглядной.

Это кубические параболы, изогнутые в виде гуська, точка перегиба которого соответствует $z = 0$, т. е. находится на линии неизменяемых волокон; каждая половина этих кривых имеет в уменьшенном размере точно такую же форму, которую принимает изогнутая ось призмы, если она закреплена одним концом, а на другой ее конец действует только

перпендикулярная к оси сила P . Наибольшая ордината этих разрезов, начиная с $y = 0$, постепенно уменьшается: она обращается в нуль при $y = c \sqrt{\frac{G'}{G} \frac{m}{1 - \eta - m}}$, и далее, как видно из случая $m = c$, разрез изменяет свое положение относительно плоскости yz .

Полученные кривые действительно показывают, что сдвиг g_{xz} имеет наибольшее значение в центре ($y = 0, z = 0$).

Во всяком другом месте, за исключением этой точки, наклон $\frac{du'}{dz}$ разрезов относительно касательной к изогнутой оси не равен наклону g_{xz} волокна к сечению в направлении оси z : он отличается на малую величину, которая определяется из второго выражения (51), возникшего, как мы заметили в § 17, вследствие незначительных изменений поперечных сжатий от одного сечения к другому. Это объясняет также, почему максимум u' (выражение (84)) или разрез, превратившийся в точку, приходится несколько за пределами сечения, т. е. соответствует $z = \pm c \sqrt{\frac{m}{m - \eta}}$ вместо того, чтобы соответствовать вершинам $z = \pm c, y = 0$, для которых $g_{xz} = 0$ и волокно нормально к сечению.

§ 22. Продолжение. Случай, когда каждая искривленная поверхность сечений является общей для бесконечного числа контуров

Следует отметить, что искривленная поверхность является одинаковой для всех сечений, имеющих одинаковую ось $2c$ в направлении z , какой бы ни была его ось $2b$ в направлении оси y , если только постоянная m , которая входит в уравнение контура, имеет для всех контуров одинаковое значение, так как b , в отличие от c и m , не входит в общее уравнение этой поверхности (80). Для того чтобы поверхности имели одинаковую высоту u_m , а не только одинаковые разрезы, необходимо, чтобы сила P находилась в одинаковом соотношении $\frac{P}{J}$ с моментом инерции. Но это имеет место только в случае ложного эллипса (овала), уравнение которого $\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1-2\eta}{2\eta}} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ соответствует $m = 1 - 2\eta$, а кон-

туры сечений, плоскость которых искривляется одинаково, могут выводиться друг из друга (§§ 18, 23) при увеличении или уменьшении координат, параллельных оси y , в отношении различных осей $2b$.

§ 23. Подробное изложение вопроса для различных сечений. Окружность. Ложный эллипс (овал). Сечения с контуром девятой степени, которые искривляются точно по цилиндрической поверхности с основанием в виде кривой третьей степени, имеющей форму гуська

1) При круговом сечении, полагая $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$, получаем (выражения (77), (81), (82)):

$$m = 0,7, \quad u_m = \frac{Pc^3}{4GJ}, \quad \frac{u'}{u_m} = -1,4 \frac{z}{c} + 0,4 \frac{z}{c} + \frac{y^2 + z^2}{c^2}. \quad (85)$$

Рис. 5, данный в качестве примера в § 21, относится, как мы сказали, к этому случаю. Разрез искривленной поверхности плоскостью yz или $u' = 0$, нормальной к оси, является вместе с линией неизменяемых волокон $z = 0$ внешней *окружностью* к контуру сечения, и его уравнение приводится к

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{2} c^2,$$

а радиус равен $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1,87083$ радиуса сечения.

Максимальное значение (84) u' для части поверхности, соответствующей замкнутым кривым, составляет

$$u' = \mp \frac{1,4}{1,5} \sqrt{\frac{7}{6}} u_m = \mp 1,0081 u_m$$

при

$$z = \pm c \sqrt{\frac{7}{6}} = \pm 1,0801 c,$$

так что оно, как мы объяснили в § 21, несколько выходит за пределы сечения, наибольшая ордината которого $\mp z = c$.

Гусек, соответствующий разрезу поверхности плоско-стью изгиба xz при $y = 0$, имеет уравнение

$$u' = -u_m \left(\frac{7z}{5c} - \frac{2z^3}{5c^3} \right).$$

Та же поверхность разрезана косыми плоскостями, проходящими через линию неизменяемых волокон по кривым, имеющим проекции на плоскость yz , нормальную к оси призмы, в виде концентрических окружностей, поэтому сами эти кривые могут рассматриваться как те же окружности, ввиду малости наклона их плоскостей к плоскости yz . Деформация сечения, таким образом, состояла в том, что концентрические окружности, сохраняя свой контур, только слегка

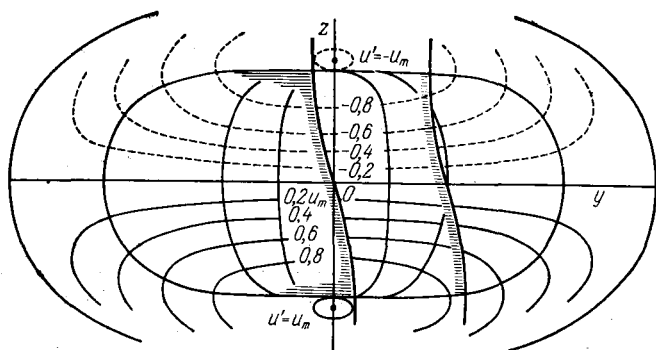


Рис. 6

и различным образом наклоняли свои плоскости, поворачиваясь вокруг линии неизменяемых волокон. При этом контур сечения оставался плоской кривой.

В соответствии с замечанием предыдущего параграфа та же самая искривленная поверхность подходит для всех контуров,

представленных уравнением $\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{14}{6}} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$

и имеющих одинаковую полуось c , если только $\frac{P}{J}$ остается также неизменным. В самом деле, без этого поверхности действительно имели бы те же разрезы, но с различной высотой, пропорциональной u_m , которая изменяется как $\frac{P}{J}$. Те из контуров, для которых b не превышает c или даже $\frac{3}{2}c$, отличаются весьма немного от эллипсов, имеющих такие же оси. Следовательно, эта поверхность подходит

также приближенно для эллиптических сечений, имеющих одинаковую полуось c и какие-либо полуоси b , которые меньше $1,5c$. Это, между прочим, было бы видно равным образом из построения поверхностей, относящихся к некоторым из этих эллиптических контуров, или поверхностей (50) $u' = g_0 z + F(y, z)$ с выражением (75) для F и со значениями c и b , о которых мы только что упоминали.

2) Когда мы рассматриваем сечения, имеющие контур в виде ложного эллипса (овала) $\frac{y^4}{b^4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, то свойство, о котором мы только что сообщили, проявляется не приближенно, а точно в соответствии с соображениями предыдущего параграфа. Следовательно, рис. 6, дающий для случая $\frac{m}{1-m} = 4$ или $m = 0,8$ форму искривленной поверхности, уравнение которой (при $G = G', \eta = \eta' = 0,1$)

$$\frac{u'}{u_m} = \frac{-24}{17} \frac{z}{c} + \frac{7}{17} \frac{z^3}{c^3} + \frac{3}{17} \frac{z}{c} \frac{y^2}{c^2} \quad \left(u_m = \frac{17}{30} \frac{Pc^3}{2GJ} \right), \quad (86)$$

подходит для всех ложных эллипсов (овалов), имеющих одинаковую полуось c и полуоси b желаемой величины, когда эти кривые принимают за контуры сечений призм, которые подвергаются изгибу.

Кривая, которая охватывает другие кривые, является эллипсом, представленным уравнением (83) $\frac{y^2}{8c^2} + \frac{7z^2}{24c^2} = 1$.

Часть разрезов $u' = \text{const}$, действительно заключенная в сечениях, является почти прямой, когда b не превышает c . Но она уже не прямая, когда $b = 2c$. Когда же получаем $b > 2,8284c$, т. е. больше большей полуоси эллипса, охватывающего (83) замкнутые кривые, или когда контур сечения выходит из этого эллипса, искривленная поверхность имеет с каждой стороны линии неизменяемых волокон участки, которые загибаются на краях так, что проходят с другой стороны плоскости yz .

3) Когда

$$m = 1 - \eta, \quad \frac{m}{1-m} = \frac{1-\eta}{\eta},$$

т. е. $m = \frac{9}{10}$ при $\eta = 0,1$ криволинейный контур имеет девятую степень, рассматриваемую как четная (§ 18), а все разрезы поверхности плоскостями $u' = \text{const}$ прямолинейны и

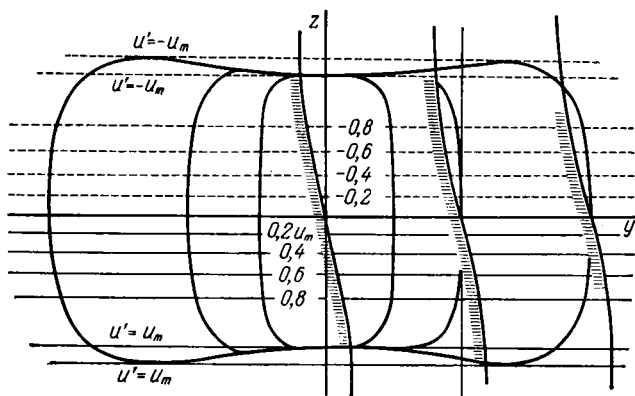


Рис. 7

параллельны между собой, как это видно на рис. 7, так как член с y^2z в этом случае исчезает, и уравнение поверхности (82) приводится к

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad \frac{u'}{u_m} &= -\frac{3-3\eta}{2-2\eta+\eta'} \frac{z}{c} + \frac{1-\eta-\eta'}{2-2\eta+\eta'} \frac{z^3}{c^3} \\ \frac{u'}{u_m} &= -\frac{27}{19} \frac{z}{c} + \frac{8}{19} \frac{z^3}{c^3}, \text{ если } \eta = \eta' = 0, 1, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

откуда получаем $z = \text{const}$ для каждого значения, придаваемого u' . Таким образом, плоскость сечения, контур которого определяется уравнением (59)

$$\left(1 + \frac{\eta}{1-3\eta} \frac{G' b^2}{Gc^2}\right) \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}} - \frac{\eta}{1-3\eta} \frac{G' b^2}{Gc^2} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

превращается в цилиндрическую поверхность с основанием в виде гуська или параболы третьей степени, представленной уравнением (87).

§ 24. Прямоугольная призма.

Преобразование неопределенных и определенных условий

Когда сечение прямоугольное, функция $F(y, z)$ (§ 16), так же как постоянная g_0 , а следовательно, и значения перемещений u , w , сдвигов и составляющих давления p_{xy} , p_{xz} могут быть получены только в виде трансцендентного ряда.

В самом деле, пусть стороны этого сечения $2b$ и $2c$ параллельны осям y и z . Условие (33) $p_{xz}dy - p_{yz}dz = 0$, выражающее равенство нулю продольных воздействий на боковых гранях, распадается на два других: $p_{xz} = 0$ или $g_{xz} = 0$ на гранях, параллельных xy , для которых $dz = 0$, и $p_{xy} = 0$ или $g_{xy} = 0$ на гранях, параллельных xz , для которых $dy = 0$. Таким образом, следует искать F и g_0 , чтобы удовлетворить (формулы (46) — (48)) уравнению

$$G \frac{d^2 F}{dy^2} + G' \frac{d^2 F}{dz^2} = P \frac{1 - \eta - \eta'}{J} z \text{ везде} \quad (88)$$

и условиям:

$$\left. \begin{aligned} F(y, z) = F(-y, z) \text{ также везде ввиду симметрии} \\ \text{фигуры и способа приложения сил,} \end{aligned} \right\} (89)$$

$$F = 0 \text{ и } \frac{dF}{dz} = 0 \text{ в точках } y = 0, z = 0,$$

$$\frac{dF}{dz} = -g_0 - P \frac{\eta' c^2}{2G' J} + P \frac{\eta y^2}{2G J}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } z = \pm c \text{ и любых } y \text{ в пределах между} \\ -b \text{ и } b, \end{aligned} \right\} (90)$$

$$\frac{dF}{dy} = -\eta P \frac{yz}{G J}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = \pm b \text{ и любых } z \text{ в пределах между} \\ -c \text{ и } c. \end{aligned} \right\}$$

Для этого можно пользоваться известными методами, если только мы предварительно сведем к нулю посредством преобразования правую часть одного из этих двух определенных уравнений (90). Этого достигают для второго уравнения и обращают в нуль одновременно правую часть неоп-

ределенного дифференциального уравнения (88), полагая

$$F(y, z) = F_1(y, z) + By^2z + B'z^3,$$

где F_1 — новая функция, B и B' — две постоянные, значения которых определяют, подставляя это выражение вместо $F(y, z)$ в (88) и во второе уравнение (90), чтобы произвести уничтожение указанных правых частей.

Отсюда следует:

$$2B = -\frac{\eta B}{GJ}, \quad 2GB + 6G'B' = \frac{P}{J}(1 - \eta').$$

Определяя значения B , B' и подставляя их в выражение $F(y, z)$ через $F_1(y, z)$, получаем:

$$F(y, z) = F_1(y, z) + P\frac{1-\eta'}{6G'J}z^3 - \frac{\eta P}{2GJ}y^2z, \quad (91)$$

где F_1 должно удовлетворять следующим неопределенным и определенным условиям:

$$G\frac{d^2F_1}{dy^2} + G'\frac{d^2F_1}{dz^2} = 0 \text{ везде,} \quad (92)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(-y, z) &= F_1(y, z) \quad \text{также везде,} \\ \text{а } F_1 &= 0, \quad \frac{dF_1}{dz} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad z = 0; \end{aligned} \right\} (93)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} &= -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \frac{\eta P}{GJ}y^2 \quad \text{при } z = \pm c \\ &\text{и любом значении } y \text{ в пределах от } -b \text{ до } b; \\ \frac{dF_1}{dy} &= 0 \quad \text{при } y = \pm b \text{ и любом значении } z \\ &\text{в пределах от } -c \text{ до } c. \end{aligned} \right\} (94)$$

§ 25. Интегрирование с помощью трансцендентного ряда

Мы удовлетворяем дифференциальному уравнению (92) $G\frac{d^2F_1}{dy^2} + G'\frac{d^2F_1}{dz^2} = 0$, взяв для F_1 сумму членов вида $Ae^{\alpha y}e^{\beta z}$, где q и q' связаны соотношением $Gq'^2 + G'q^2 = 0$. Отсюда $q' = \pm q\sqrt{\frac{G'}{G}}\sqrt{-1}$. Замена мнимой показательной

функции ее тригонометрическим выражением приводит к исчезновению $\sqrt{-1}$ посредством выбора других коэффициентов. Обозначая через Σ сумму, охватывающую все возможные значения q , имеем общий интеграл

$$F_1 = \Sigma e^{qz} \left(A_q \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}} + A'_q \sin qy \sqrt{\frac{G'}{G}} \right). \quad (95)$$

Для удовлетворения условия (93) $F(-y, z) = F(y, z)$ нужно, чтобы синусы исчезли или чтобы $A'_q = 0$. Чтобы получить $F_1 = 0$ при $y = 0, z = 0$, приравняем коэффициенты A_q членов с одинаковыми по величине, но противоположными по знаку q , что даст нам

$$F_1 = \Sigma A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \cos qy \sqrt{\frac{G'}{G}}. \quad (96)$$

Что касается третьего условия (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ при $y = 0, z = 0$, то оно может удовлетвориться одновременно с предыдущим, если установить некоторое соотношение между всеми коэффициентами A ; позднее оно послужит нам для определения постоянной g_0 .

Второе определенное условие (94)

$$\frac{dF_1}{dy} = 0 \text{ при } y = \pm b \text{ и любом значении } z$$

превратится, таким образом, в

$$\mp \Sigma q \sqrt{\frac{G'}{G}} A_q (e^{qz} - e^{-qz}) \sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0.$$

Его можно удовлетворить, взяв величины q такими, чтобы $\sin qb \sqrt{\frac{G'}{G}} = 0$, откуда

$$q = \frac{n\pi}{b} \sqrt{\frac{G'}{G}}, \quad (97)$$

где n —какое-либо целое число.

Это выражение нужно подставить вместо q в формулу (96) $F_1 = \Sigma \dots$ и использовать все значения n , включая сюда $n = 0$, без чего интеграл не был бы общим и не мог бы дать то, что мы ищем. Но в соответствии с его формой

можно ограничиться членами, отвечающими положительным значениям n , так как члены, образовавшиеся из одинаковых по величине значений, различающихся знаком, просто объединяются путем сложения коэффициентов. При дифференцировании n входит в качестве множителя под знаком суммы, поэтому следует применить этот знак только к значениям n , начиная с $n = 1$, написав за знаком \sum член для $n = 0$.

Для того чтобы увидеть, каков этот член, развернем эти две показательные функции для значений n или q , полагаемых сначала весьма малыми. Мы получим выражение $A_q(e^{qz} - e^{-qz}) = A_q \cdot 2qz$, которое будет конечным, если положить одновременно A_q бесконечным, а q равным нулю. Обозначив этот член через Kz , получим для нашего общего интеграла выражение

$$F_1 = Kz + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(e^{\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (98)$$

Тогда первое определенное условие (94) будет

$$\begin{aligned} K + \sum_1^{\infty} n \frac{\pi \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}} A_n \left(e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} = \\ = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \frac{\eta P}{GJ} y^2 \text{ } ^1). \end{aligned} \quad (99)$$

Для получения отсюда общего выражения A_n заметим, что когда мы хотим развернуть функцию $\varphi(y)$ в ряд по коси-

¹⁾ Заметим, что мы могли бы выполнить сразу условие (93) $\frac{dF_1}{dz} = 0$ при $y = 0$, $z = 0$ и оставить, напротив, условие $F_1 = 0$ для выполнения в дальнейшем, взяв $F_1 = \sum A_q(e^{qz} + e^{-qz}) \cos qy \sqrt{\frac{G}{G'}}$ вместо (96). Но тогда первый член определенного уравнения (99) принял бы двойной знак \pm , потому что разность двух показательных функций будет другого знака, когда полагают $z = -c$, а не $z = +c$: ведь тогда было бы невозможно приравнять первый член второму. Итак, из двух начальных условий $F_1 = 0$, $\frac{dF_1}{dz} = 0$ только первое $F_1 = 0$ может быть выполнено для каждого члена (или для пары чле-

нусам кратных дуг, которая подобно нашей $-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \eta \frac{P}{GJ} y^2$ не изменяется при перемене знака y и рассматривается в пределах от $y = -b$ до $y = b$, то нужно пользоваться формулой Эйлера¹⁾

$$\varphi(y) = \frac{1}{b} \int_0^b \varphi y' dy' + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\int_0^b \varphi y' \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' \right) \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (100)$$

постоянный член которой получается, как известно, при $n = 0$.

Итак,

$$\frac{1}{b} \int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} \right) dy' = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J},$$

$$\frac{1}{b} \int_0^b y'^2 dy' = \frac{b^3}{3}, \quad \frac{2}{b} \int_0^b \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} \right) \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^b y'^2 \cos \frac{n\pi y'}{b} dy' &= \left[\frac{y'^2 b}{n\pi} \sin \frac{n\pi y'}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2b}{n\pi} \left(\frac{-b}{n\pi} y' \cos \frac{n\pi y'}{b} + \frac{b^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi y'}{b} \right) \right]_0^b = \\ &= \frac{2b^3}{n^2 \pi^2} \cos n\pi = -2 \frac{(-1)^{n-1} b^3}{n^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

нов) ряда Σ . Затем должно быть выполнено второе условие $\frac{dF_1}{dz} = 0$, но другим способом — посредством совокупности этих членов.

Заметим также, что мы должны были бы удовлетворить части условий, придавая y вещественные показатели при e , а при z — мнимые показатели или множители дуг; но было бы невозможно выполнить второе определенное условие (94) $\frac{dF_1}{dy} = 0$ при бесконечном числе значений q , так как имеется только единственное значение q , а именно $q = 0$, которое приводит к нулю выражение $e^{qb} - e^{-qb}$.

Найденное тригонометрическое выражение является, таким образом, единственным подходящим из решений неопределенного дифференциального уравнения (92).

¹⁾ Disquisitio ulterior super seriebus, т. XI, 1798, Nova Acta Academiae Petropolitanae или Traité de mécanique Пуассона, 2-е изд., § 326, стр. 650.

откуда

$$-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \frac{\eta P}{GJ} y^2 = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} +$$

$$+ \frac{\eta P b^2}{3GJ} - \frac{\eta P}{GJ} \left(\frac{2b}{\pi}\right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Приравнивая это выражение левой части $K + \sum_1^{\infty} \dots$ (99) и сравнивая затем в обеих частях уравнения постоянные слагаемые, которые образуются из членов, соответствующих $n = 0$, и сравнивая таким же образом слагаемые, содержащие $\cos \frac{n\pi y}{b}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} K &= -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \frac{\eta P b^2}{3GJ}, \\ A_n &= -\frac{4b^3}{\pi^3} \sqrt{\frac{G'}{G}} \frac{\eta P}{GJ} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{1}{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{e b \sqrt{G'}} + e \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \end{aligned} \right\} (101)$$

Мы могли бы равным образом прийти к этим величинам подобно Эйлеру и Фурье (Fourier), считая неизвестной общую формулу разложения (100) и интегрируя сначала от 0 до b обе части определенного условия (99) $K + \sum \dots$, что уничтожило бы все члены \sum и дало бы в результате значение (101) для K , которое мы только что написали. Затем при интегрировании от 0 до b обеих частей того же уравнения (99), умноженных в этот раз на $dy \cos \frac{n\pi y}{b}$ (так как

$$\text{поскольку } \int_0^b dy \cos \frac{n\pi y}{b} = 0 \text{ и } \int_0^b \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n'\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 \\ \frac{b}{2} \end{cases}$$

в зависимости от того, отличается ли n' от n или $n' = n$), все члены как за знаком \sum , так и под знаком \sum исчезают, за исключением одного, который дает значение (101) для коэффициента A_n .

Подставляя выражения (101) вместо K и A_n в (98) $F_1 = Kz + \sum \dots$, получаем для искомой функции формулу

$$F_1(y, z) = \left(-g_0 - \frac{Pc^2}{2G'J} + \frac{\eta Pb^2}{3GJ} \right) z - \frac{\eta Pb^2}{GJ} \sqrt{\frac{G'}{G}} \frac{4}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{e^{\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} - e^{-\frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}}{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}}} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (102)$$

Но остается, как мы сказали, подчинить эту функцию последнему условию, а именно $\frac{dF_1}{dz} = 0$ при $y = 0, z = 0$.

Мы будем располагать для этого пока еще неопределенной постоянной g_0 , и это приведет нас к определению значения этого сдвига в начале координат. Следовательно, мы получим:

$$g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'J} \left[1 - \frac{G' 2 \eta b^2}{G 3c^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{2}{e^{\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}} \right) \right]. \quad (103)$$

§ 26. Выражения для перемещений точек прямоугольной призмы

Подставляя это значение g_0 в выражение (45) перемещения w , а также в только что написанное соотношение (102) для $F_1(y, z)$ и затем добавляя в соответствии с формулой (91) величину $P \frac{1-\eta'}{6G'J} z^3 - \frac{\eta P}{2GJ} y^2 z$, чтобы подставить значение $F(y, z)$ в u , мы окончательно получим значения трех перемещений в направлениях осей x, y, z , представляя, как обычно, в виде $\text{sh } a$ и $\text{ch } a$ гиперболические синусы и косинусы

$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$ и $\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$ аргумента α :

$$\left. \begin{aligned}
 u = & P \frac{2ax - x^2}{2EJ} z + (1 - \eta') \frac{Pz^3}{6G'J} - \eta \frac{Py^2 z}{2G'J} + \\
 & + \eta \frac{Pb^2 z}{G'J} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} - \\
 & - \eta \frac{Pb^3}{G'J} \sqrt{\frac{G'}{G}} \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}; \\
 v = & - \eta \frac{P(a-x)}{G'J} yz; \\
 w = & - \frac{Pc^2}{2G'J} \left[1 - \eta \frac{G'}{G} \frac{2b^3}{3c^2} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \right) \right] x - \\
 & - \frac{P}{2EJ} \frac{3ax^2 - x^3}{3} + P \frac{a-x}{2J} \left(\frac{ny^2}{G} - \frac{n'z^2}{G'} \right).
 \end{aligned} \right\} (104)$$

§ 27. Давления p_{xy} , p_{xz} . Проверка полученных результатов

Эти значения (104) u , v , w , очевидно, удовлетворяют четырем общим уравнениям (29) $\frac{du}{dx} = \frac{P(a-x)z}{EJ}$, $\frac{dv}{dy} = -\varepsilon \frac{du}{dx}$ и т. д. нашей задачи, условиям $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, а также и условию симметрии, в силу которого u и w остаются прежними, а v меняет знак, но не меняет величину, когда вместо y подставляют $-y$. Чтобы проверить другие условия, а именно (32) и (33), определяем сначала составляющие давления $p_{xy} = G \left(\frac{du}{dy} + \frac{dy}{dx} \right)$ и $p_{xz} = G' \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)$.

Мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} p_{xy} &= \frac{\eta P}{J} \frac{4b^3}{\pi^2} \sqrt{\frac{G'}{G}} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}; \\ p_{xz} &= -\frac{Pc^2}{2J} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) + \eta \frac{Pb^3}{3J} \frac{G'}{G} \left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}}\right). \end{aligned} \right\} (105)$$

Полученные выражения не зависят от x и поэтому удовлетворяют двум последним неопределенным условиям (32) $\frac{dp_{xy}}{dx} = 0$, $\frac{dp_{xz}}{dx} = 0$, также, как легко видеть, и первому уравнению $\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{J}$.

Что касается определенного условия (33) $p_{xz}dy - p_{xy}dz = 0$, которое, как мы сказали, распадается на $p_{xy} = 0$, при $y = \pm b$ и $p_{xz} = 0$ при $z = \pm c$, то, очевидно, первая часть выполняется, так как $\sin \frac{n\pi y}{b}$ обращается в нуль при $b = \pm y$.

Что же касается второй части, то выражение (105) для p_{xz} при $z = \pm c$ сводится к

$$p_{xz} = \frac{\eta Pb^3}{3J} \frac{G'}{G} \left(1 - \frac{3y^2}{b^2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}\right)$$

и обращается в нуль, потому что, как мы видели, в пределах $-b$ и b имеется равенство $y^2 = \frac{b^2}{3} - \frac{4b^2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{n\pi y}{b}$, которое можно проверить, кроме того, последовательным интегрированием обеих частей от 0 до b , умножив их в первый раз на dy и во второй раз на $dy \cos \frac{n\pi y}{b}$.

Если выражение (105) для p_{xz} умножить на dy и проинтегрировать от $-b$ до b , то \sum и даже два члена $1 - \frac{3y^2}{b^2}$ в

скобках исчезают, и таким образом, при делении на $2b$ остается для средней составляющей давления на каждой полосе, параллельной y , выражение

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b p_{xz} dy = -\frac{Pc^2}{2J} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad (106)$$

откуда, умножая его на $2bdz$ и снова интегрируя, получаем:

$$\int_0^{\omega} p_{xz} d\omega = \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b p_{xz} dy = -P,$$

что относится ко всем призмам (равенство (38), § 15), испытывающим действие сил с суммарной составляющей $-P$ в направлении z .

Что касается интеграла $\int p_{xy} d\omega = \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b p_{xy} dy$, то он

равен нулю, как и должно быть ввиду симметрии воздействия сил относительно плоскости xz . Это служит для проверки только что данных формул.

§ 28. Центральный сдвиг. Изогнутая ось. Стрела прогиба при изгибе

Центральный сдвиг $-g_0$ дан выражением (103). Вычисляя сумму ряда \sum при $\eta = 0,1$, мы нашли:

Для $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$-g_0 = \frac{Pc^2}{2G'J} \times$	0,67624	0,84918	0,90729	0,94031
Член $\frac{12}{\pi^2} \sum$, входящий в (103), имеет последовательно значения	0,69648	0,43442	0,21775	0,10464

Для $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}$	1,25	1,5	2	2,5	3
$-g_0 = \frac{Pc^2}{2G'J} \times$	0,96177	0,97101	0,98341	0,98934	0,99259
Член $\frac{12}{\pi^2} \sum$, входящий в (103), имеет последовательно значения					
	0,04785	0,02175	0,004537	0,000944	0,000196

Следовательно, величиной $\frac{12}{\pi^2} \sum$ можно пренебречь всякий раз, когда $c\sqrt{G}$ больше $b\sqrt{G'}$, т. е. взять

$$-g_0 = \frac{Pc^2}{2G'J} \left(1 - \frac{2\eta}{3} \frac{G'}{G} \frac{b^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2} \frac{P}{G'\omega} - \frac{\eta b^2}{c^2} \frac{P}{G\omega}. \quad (107)$$

Перемещения точек оси прямоугольной призмы являются значениями величин (104) u, v, w при $y = 0, z = 0$:

$$u = 0; \quad v = 0; \quad -w = -g_0 x + \frac{P}{2EJ} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right). \quad (108)$$

Третье из этих выражений дает общеизвестное уравнение изогнутой оси, если опустить первый член $-g_0 x$, добавленный нашим анализом.

Стрела прогиба, т. е. значение $-w$ при $x = a$, когда мы сможем свести $-g_0$ к выражению (107) (так как $\eta = \frac{\varepsilon G}{E}$ согласно (44)), будет

$$f = \left(\frac{Pc^2}{2G'J} - \eta \frac{Pb^2}{3GJ}\right) a + \frac{Pa^3}{3EJ} = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{E}{G'} \frac{c^2}{a^2} - \varepsilon \frac{b^2}{a^2}\right),$$

или при $\varepsilon = \frac{1}{4}, \frac{E}{G'} = \frac{5}{2}$

$$f = \frac{Pa^3}{3EJ} \left(1 + \frac{15c^2 - b^2}{4a^2}\right). \quad (109)$$

Обычная теория не принимает в расчет второй член в скобках.

§ 29. Искривленная поверхность, образованная первоначально плоскими прямоугольными поперечными сечениями

Если в общем уравнении (50) $u' = g_0 z + F(y, z)$ этой поверхности, отнесенной к плоскости, нормальной к изогнутой оси призмы, мы подставим вместо функции F ее значение, данное формулами (91) и (102), то g_0 исчезает, и мы получаем:

$$u' = -\frac{Pc^3}{2G'J} \left[\left(1 - \frac{2\eta}{3} \frac{b^2}{c^2} \frac{G'}{G} \right) \frac{z}{c} - \frac{1-\eta'}{3} \frac{z^3}{c^3} + \eta \frac{b^2 G'}{c^2 G} \frac{y^2 z}{b^2 c} + \right. \\ \left. + \eta \left(\frac{2}{\pi} \frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G}} \right)^3 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \frac{\operatorname{sh} n\pi \frac{z \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \cos n\pi \frac{y}{b}}{\operatorname{ch} n\pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}}} \right]. \quad (110)$$

Положительные значения u' соответствуют отрицательным значениям z и имеют ту же величину, что и отрицательные значения, соответствующие равным и положительным значениям z .

Обозначая, как в § 21, через u_m значение u' для $y = 0$ и $z = -c$ и через th гиперболический тангенс, получаем выражение

$$u_m = \frac{Pc^3}{2G'J} \left[\frac{2+\eta'}{3} - \frac{2\eta}{3} \frac{b^2 G'}{c^2 G} + \right. \\ \left. + \eta \left(\frac{2}{\pi} \frac{b \sqrt{G'}}{c \sqrt{G}} \right)^3 \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \operatorname{th} \frac{n\pi c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right]. \quad (111)$$

Принимая во внимание, что $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots = 0,901542677$, можно записать ряд \sum следующим образом:

$$0,9015427 - \left(1 - \operatorname{th} \pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) + \\ + \frac{1}{2^3} \left(1 - \operatorname{th} 2\pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) - \frac{1}{3^3} \left(1 - \operatorname{th} 3\pi \frac{c \sqrt{G}}{b \sqrt{G'}} \right) + \dots$$

При его вычислении обычно не требуется брать более двух членов со скобками $(1 - \text{th})$. Полагая $\eta = \eta' = 0,1$, получаем:

Для $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}$	0,5	1	1,5	
$u_m = \frac{Pc^3}{2G'J} \times$	0,602415	0,656498	0,677261	
Для $\frac{c\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}$	2	2,5	3	∞
$u_m = \frac{Pc^3}{2G'J} \times$	0,686241	0,690822	0,693454	0,700000

Таким же образом мы произвели более сложное вычисление отношения $\frac{-u'}{u_m}$ для ряда значений $\frac{y}{b}$ и $\frac{z}{c}$, возрастающих на одну десятую в случае $b = c$, $G = G'$. Достаточно взять от двух до девяти членов суммы \sum до значения $\frac{z}{c} = 0,9$ включительно, и если для $\frac{z}{c} = 1$ их нужно взять до 35, то вычисление сокращается при замене гиперболических тангенсов единицей после третьего члена суммы. Результаты вычислений даны в таблице на стр. 468.

Эти цифры послужили для построения рис. 8. Заштрихованные линии построены по абсциссам z и ординатам u' , взятым в столбцах $\frac{y}{b} = 0$ и $\frac{y}{b} = 1$, при произвольном выборе $BA = c$ и $Cc = u_m$ и повторении в обратном порядке этих кривых ниже $B'Vu$. Распространяя в направлении u' эти разрезы, так же как и промежуточные разрезы, полученные по цифрам из других столбцов, мы легко выводим из их пересечений с различными параллелями к CC' разрезы, изображенные на той же поверхности посредством ряда эквидистантных плоскостей $u' = \pm 0,2 u_m$, $u' = 0,4 u_m, \dots, u' = \pm u_m$, которые все спроектированы на первоначальную плоскость сечения с контуром в виде квадрата $AA'D'D$.

Значения $\frac{u'}{u_m}$ для случая $b = c$, $G = G'$, $\eta = \eta' = 0,1$

$\frac{\pm y}{b}$ $\frac{z}{c}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,1419	0,1429	0,1432	0,1437	0,1445	0,1455	0,1469	0,1485	0,1506	0,1533	0,1558
0,2	0,2829	0,2831	0,2837	0,2848	0,2863	0,2883	0,2910	0,2943	0,2983	0,3032	0,3088
0,3	0,4178	0,4181	0,4190	0,4205	0,4227	0,4257	0,4295	0,4344	0,4404	0,4476	0,4561
0,4	0,5448	0,5452	0,5463	0,5482	0,5510	0,5548	0,5598	0,5661	0,5740	0,5835	0,5948
0,5	0,6613	0,6617	0,6630	0,6651	0,6685	0,6730	0,6789	0,6865	0,6961	0,7078	0,7219
0,6	0,7648	0,7653	0,7667	0,7690	0,7726	0,7776	0,7842	0,7928	0,8039	0,8176	0,8344
0,7	0,8529	0,8533	0,8547	0,8571	0,8607	0,8658	0,8728	0,8821	0,8943	0,9098	0,9291
0,8	0,9230	0,9234	0,9246	0,9268	0,9302	0,9352	0,9421	0,9515	0,9642	0,9810	1,0028
0,9	0,9728	0,9731	0,9741	0,9759	0,9788	0,9831	0,9894	0,9982	1,0106	1,0278	1,0514
1,0	1,0000	1,0002	1,0008	1,0020	1,0040	1,0072	1,0122	1,0195	1,0303	1,0469	1,0700

Эти разрезы, как мы видим, почти прямолинейны и параллельны оси y до $u' = \frac{1}{2} u_m$, т. е. в той части, где сдвиги g_{xz} наибольшие. Затем они слегка изгибаются, поворачиваясь своей вогнутостью к этой оси, между тем как аналогичные

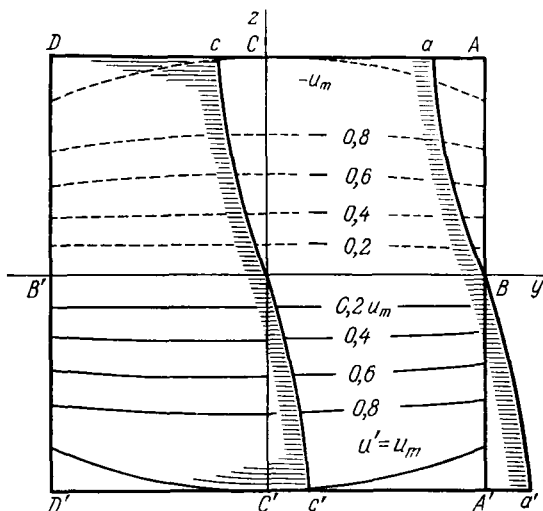


Рис. 8

разрезы поверхностей, в которые превращаются сечения второй и четвертой степеней, рассмотренные в §§ 18, 21 и 23, поворачиваются к оси своей выпуклостью. Это согласуется с тем, что мы видели (§ 23) для сечения девятой степени, приближающегося обычно к прямоугольнику с весьма закругленными углами, где все разрезы прямолинейны и параллельны.

Для прямоугольного сечения, где ширина b вдвое меньше высоты c , указанная параллельность наблюдается почти для всех разрезов.

Части выражения u , происходящие из тригонометрического ряда при $b < c$, оказывают малое влияние, так же как и другие члены, содержащие $\eta \frac{b^2}{c^2}$, приблизительно равные $\frac{b^2}{10 c^2}$. Тогда для практических целей выражения (110) и

(111) можно привести к виду

$$u' = -\frac{Pc^3}{2G'J} \left(\frac{z}{c} - \frac{1-\eta'}{3} \frac{z^3}{c^3} \right) = -\frac{3}{2} \frac{Pc}{G'\omega} \left(\frac{z}{c} - \frac{1-\eta'}{3} \frac{z^3}{c^3} \right),$$

откуда $u_m = \frac{Pc}{G'\omega} \left(1 + \frac{\eta'}{2} \right), \quad (112)$

что дает для разрезов вместо слегка искривленных линий, изображенных на рисунке, прямые, параллельные y , проходящие приблизительно через точки, соответствующие $y = \pm 0,7b$.

Таким образом, сечения можно часто рассматривать как приблизительно цилиндрическую поверхность с основанием в виде гуська, представленную уравнением (112)¹⁾.

§ 30. Сечения произвольной формы

Мы только что узнали, что определение перемещений u , v , w , удовлетворяющих кинематическим условиям при изгибе, установленным в § 14, определение, приводящее при первом интегрировании (§ 16) к необходимости нахождения функции F , которое посредством зависимости (91), применимой при всякой форме сечения, само сводится к определению функции F_1 , удовлетворяющей условиям:

$$\left. \begin{aligned} G \frac{d^2 F_1}{dy^2} + G' \frac{d^2 F_1}{dz^2} &= 0 \text{ везде,} \\ F = 0 \text{ и } \frac{dF_1}{dz} &= 0 \text{ в точках } y = 0, z = 0, \\ -G \frac{dF_1}{dy} \frac{dz}{dy} + G' \left(\frac{dF_1}{dz} + g_0 + \frac{Pz^2}{2G'J} - \frac{\eta Py^2}{GJ} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} (113)$$

на контуре сечения,

¹⁾ К этому результату мы придем непосредственно и просто в примечании к § 31 для призмы, одно из измерений основания которой $2b$ очень мало по сравнению с другим измерением $2c$. Мы этого достигли другим способом (за исключением члена с η' , которым пренебрегли) в §§ 40 и 44 уже цитированного нашего мемуара по кручению.

Мы снова отсылаем к тому же мемуару или к следующему § 31 для определения новой формы, которую принимают вследствие поперечных сжатий контуры сечений; эта форма не оказывает, между прочим, никакого влияния на их сопротивление.

можно произвести точно аналитическим способом для прямоугольных сечений, а также для сечений с криволинейным контуром чрезвычайно разнообразной формы (§§ 18, 19).

Это показывает, что для сечений совершенно произвольной формы точки призмы всегда могут иметь перемещения, удовлетворяющие тем же условиям, так как форма контуров может сильно влиять на трудность определения этих перемещений u , v , w , но не в такой степени, чтобы сделать это определение возможным или не возможным. Форма контура может осложнить аналитически последнее из условий (113), так как $\frac{dz}{dy}$ зависит от уравнения контура, но она не увеличивает числа условий, так как эти условия, выполняясь для некоторых сечений, должны по условиям равновесия выполняться и для всех других сечений. Это можно распространить на более общий случай уравнений (39) — (42). Они относятся к призме, имеющей только главные плоскости упругости, перпендикулярные к ее ребрам.

Это можно наглядно получить физическим сравнением. Разыскание функции F_1 , удовлетворяющей условиям (113), о чем мы только что упоминали, не что иное, как определение постоянных температур F_1 точек призмы или одного из ее слоев с конечной или бесконечно малой длиной, если бы мы сделали оба основания непроницаемыми и пропустили постоянные потоки тепла через боковые грани, параллельные осям y и z в различных точках контура сечений. При этом потоки должны находиться между собой в соотношениях, которым последнее уравнение (113) подчиняет дифференциальные коэффициенты $\frac{dF_1}{dy}$, $\frac{dF_1}{dz}$ (представляющие, как известно, эти потоки). Одни из этих потоков входящие, другие выходящие; те и другие равны друг другу не только в целом, но и порознь для одинаковых значений как y , так и z , если контур симметричный. Подобное состояние постоянства температур установится всегда, каким бы ни было их первоначальное распределение в призме.

Мы всегда могли бы получить его таким, чтобы $F_1 = 0$ при $y = 0$, $z = 0$, т. е. чтобы температура по термометру была бы нуль в центре сечения путем прибавления или вычитания одинакового числа градусов во всех точках, что не

помешает сохраниться прежнему состоянию, и мы могли бы располагать неопределенной величиной g_0 для того, чтобы при этом состоянии получить также $\frac{dF_1}{dz} = 0$ в том же центре.

Итак, заметим, что для всякой призмы установлен такой способ приложения и распределения на ее двух основаниях сил, имеющих данную равнодействующую и равнодействующий момент, при котором продольные удлинения волокон изменяются линейно или одинаково с расстоянием при переходе в поперечном направлении от одного волокна к другому, поскольку, когда рассматривают различные точки каждого волокна, поперечные сжатия находятся в таких соотношениях с удлинениями, что волокна не давят друг на друга перпендикулярно к их длине.

Иначе говоря, нужно, чтобы обычные формулы точно давали удлинения волокон и давления на сечениях также в продольном направлении, как и кривизну, вызванную неравенством удлинений. Таким образом, их всегда можно будет применять, если только к ним присоединить (посредством других формул, примеры которых мы привели) то, что опускает обычная теория, но чем не всегда можно пренебрегать, а именно действия, вызываемые относительными сдвигами сечений или волокон, чтобы получить путем их сложения полную величину стрелы прогиба при изгибе (§§ 20 и 28), так же как и наибольшие удлинения, которые имеют место в косом направлении и которые следует ограничить, чтобы гарантировать сцепление материала от всякого изменения, даже последующего (см. § 3 настоящего труда и гл. XII мемуара по кручению).

Эти способы приложения и распределения сил на основаниях призмы даны выражениями (49) § 17 для p_{xx} , p_{xy} , p_{xz} , причем два последних для любого вида F , а к первому выражению $p_{xx} = P \frac{a-x}{J} z$ добавляют постоянный член $\frac{Q}{\omega}$, когда кроме поперечной силы P имеется равномерно распределенное продольное растяжение Q , от которого мы абстрагировались для упрощения в § 14 и которое заставляет нас только присоединить величину $\frac{Q}{E\omega}$ к удлинениям $\frac{du}{dx}$. Рассуждая как в § 12 в силу общей теоремы (§ 6) сложения перемещений возникших под влиянием различных сил,

можно было бы легко изменить результаты и получить их для случая, когда боковые грани испытывали бы постоянное давление жидкости, действие которой не было бы вычислено заранее подобно действию атмосферного давления.

§ 31. Непосредственное доказательство известных формул изгиба призм, вызванного только их продольными удлинениями

Весьма желательно (§ 3) получить подобное доказательство этих формул (1), которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{z}{\rho}, \quad p = E \left(\vartheta_0 + \frac{z}{\rho} \right),$$

когда мы прибавляем к переменному удлинению $\frac{z}{\rho}$ общее удлинение ϑ_0 . Отсюда для случая, когда линия $z = 0$ проходит через центр тяжести, выводим выражения (2) для полного растягивающего усилия Q и для изгибающего момента M :

$$Q = E \omega \vartheta_0, \quad M = \frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$$

(§ 3). Это дает возможность ввести их в учебные курсы, которые не содержат предварительного обоснования дифференциальных и интегральных формул теории упругости, и отказаться от необоснованных и часто ошибочных гипотез.

Чтобы достичь этого, мы представим умозрительно, в каких условиях растянутые волокна призмы не оказывают друг на друга в боковом направлении никакого действия перпендикулярно к их длине или к ребрам призмы, что обязательно приведет к рассмотрению поперечных сжатий, сопровождающих в таком случае их продольные удлинения. Затем покажем, что очень малые основания этих волокон, сохраняя свою смежность, могут всегда быть одновременно изменены так, чтобы было выполнено условие равенства нулю нормального воздействия, когда продольные удлинения изменяются линейно или равномерно при переходе от одного волокна к другому в двух поперечных направлениях. Далее мы найдем, что если только оба крайних основания призмы испытывают продольные растяжения,

изменяющиеся в соответствии с этим линейным законом, при наличии или при отсутствии поперечных касательных сил, распределенных некоторым образом, то такое же воздействие непременно испытывают все другие сечения призмы, боковые грани которой не испытывают никакого внешнего воздействия. Следовательно, мы получаем (даже когда имеются постоянные боковые давления, подобные давлению жидкости) именно известные формулы изгиба, поддающиеся с приближением распространению на случай, когда силы, действующие на концах призмы, приложены и распределены несколько иначе. Эти формулы должны к тому же всегда дополняться менее простыми формулами, дающими сдвиг в тех случаях, когда влиянием его нельзя пренебрегать.

Итак, предположим, что упругое однородное тело мысленно разделено на элементы в виде совершенно одинаковых прямоугольных параллелепипедов, заменяя в случае необходимости обычно искривленные поверхности рядом малых плоскостей. Стороны этих элементов после воздействия внешних сил немного удлиняются или укорачиваются и даже обычно наклоняются по отношению друг к другу, образуя слегка косоугольные параллелепипеды.

Приближение или удаление всяких внутренних молекул по отношению к молекулам близлежащих элементов производит новые молекулярные действия, равнодействующие которых через различные грани контакта этих элементов представляют собой взаимные давления или растягивающие усилия. Величина и направление этих давлений или растягивающих усилий зависят от относительной величины малых удлинений или сжатий сторон, так же как от малых наклонов их друг к другу.

Если, например, стороны остаются прямоугольными и одна из них ab (рис. 9) становится $a'b'$ или удлиняется так, что стороны ac и ad не изменяются, когда молекулы m , n , p смежных элементов, которые участвовали в этом движении, примут новое положение m' , n' , p' , то все молекулы M внутренней части будут удаляться, но в большей мере от молекул m , n , расположенных за гранями A , B , перпендикулярными к увеличенному измерению ab , чем от молекул p , p' , расположенных за гранями, параллельными ab . Если измерение ab сжимается, а не растягивается,

то все расстояния между внутренними молекулами рассматриваемого элемента и молекулами вне его, наоборот, уменьшаются, но всегда в большей степени по граням A, B , чем по четырем другим граням.

Всякое удлинение элемента в направлении одного из его трех измерений вызывает, таким образом, силы притяжения и производит *растяжения или напряжения* по его шести граням, а всякое сжатие вызывает на тех же гранях

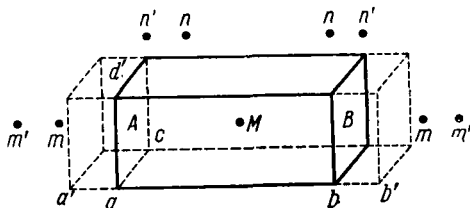


Рис. 9

силы отталкивания или, собственно говоря, *давления*. Но растяжения или сжатия, вызванные этими причинами и *отнесенные к единице площади граней*, более значительны на гранях, перпендикулярных к растянутым или сжатым измерениям элемента, чем на гранях, параллельных им. Изменяя растяжения или сжатия, мы можем дать им желаемую величину в пределах сцепления материала.

Кроме того, структура материала (зернистая, волокнистая, пластинчатая и т. д.) в соответствии с особенностями его молекулярного строения, хотя и предполагаемая одинаковой во всех точках однородного тела, может быть весьма неравномерной в различных направлениях, и растяжения или сжатия могут иметь более или менее косые направления на гранях, где они действуют, даже в том случае, когда элементы останутся прямоугольными; тем более эти направления становятся косыми, как мы только что заметили, если элементы превращаются в слегка косоугольные. Таким образом, эти составляющие воздействия могут даже иногда быть чисто *касательными* или сводиться к некоторым видам трения или сходного с ним прилипания на тех же гранях.

Это строение материала может быть между прочим таким, что всякое очень малое изменение малых призм AB ,

меняющее или не меняющее угол das между боковыми гранями, но не изменяющее перпендикулярности ребер ab к обоим основаниям A, B , действительно производит на эти основания только воздействия, *продольные* или параллельные ab , а на четыре боковые грани только воздействия *поперечные*, т. е. перпендикулярные к тем же ребрам. И всякий очень малый наклон ребер к основаниям вызывает только касательные действия, *продольные* на боковых

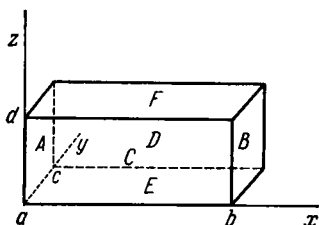


Рис. 10

гранях и *поперечные* на основаниях. Как нетрудно видеть, для этого достаточно, чтобы молекулы размещались с некоторой симметрией по отношению ко всем сечениям, поперечным или параллельным граням A, B , взятым за основания. Мы всегда будем предполагать этот вид молекулярного строения.

Если одновременно имеется растяжение элементов в одном или в двух направлениях и сжатие в другом или в двух других, то из теоремы сложения результатов действия сил и малых перемещений (теорема, доказательство которой мы здесь не приводим, дана в § 6) следует, что давления на различных гранях будут равнодействующими того, что было бы вызвано этими двумя последовательно произведенными видоизменениями. Из той же теоремы также следует, что два, три и т. д. малых равных изменения вызовут двойные, тройные и т. д. силы, т. е. что *силы пропорциональны малым изменениям как линейных размеров, так и углов.*

Итак, эти изменения могут находиться между собой в таких соотношениях, чтобы в направлении сквозь какие-либо грани, например боковые, имелось бы взаимное уничтожение сил или компенсация сил притяжения и отталкивания, так что эти четыре грани C, D, E, F элемента не испытывают ни давления, ни растягивающих усилий со стороны смежных элементов, тогда как другие грани, т. е. основания A, B , подвергаются каким угодно воздействиям. Пусть все углы элемента остаются прямыми, и мы получили на единицу длины удлинение ∂ в продольном направлении ab (рис. 10), удлинения — ∂' (или сжатия ∂') в поперечных

направлениях ac , ad и что в соответствии со строением материала всякое удлинение в одном направлении вызывает соответственно на единице площади перпендикулярных граней и на единице площади параллельных граней растягивающие усилия, равные этому удлинению, умноженному на два числа n и e для первых и только на e для вторых граней.

Получим: 1) на гранях A , B , перпендикулярных к ab , растягивающие усилия $ne\vartheta + e(-\vartheta') + e(-\vartheta')$; 2) на других гранях C , D , E , F растягивающие усилия $ne(-\vartheta') + e(-\vartheta') + e\vartheta$.

Если $\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{1}{n+1}$, то последние будут равны нулю, а первые, т. е. растягивающие усилия на основаниях, будут тогда иметь значение $(ne - \frac{2e}{n+1})\vartheta$.

Таким образом, если $n = 3$, то боковые волокна не будут испытывать никакого действия, когда поперечные сжатия ϑ' составят $\frac{1}{4}$ часть продольного удлинения ϑ . И растягивающие усилия на основаниях будут в таком случае равны продольному удлинению ϑ , умноженному на число $e(n - \frac{2}{n+1}) = \frac{5}{2}e$. Это то число, каким бы оно ни было в различных случаях, на которое нужно умножить относительное продольное растяжение призматического элемента, чтобы получить способную вызвать это растяжение силу, отнесенную к единице поверхности основания элемента, когда боковые грани не испытывают никакого воздействия перпендикулярно к ребрам; это число обычно называется коэффициентом упругости при растяжении материала в направлении ребер малой призмы.

Установив это, получаем призму из продольных призматических волокон с каким-либо основанием, разделенным двумя системами прямоугольных плоскостей, параллельных ее ребрам. Допустим, что эти волокна сами разделены на элементарные прямоугольные параллелепипеды плоскостями, перпендикулярными к тем же ребрам. По отношению к этим плоскостям молекулярное строение считается симметричным, что мы определили, анализируя воздействия, и что очень часто имеет место.

Если продольные удлинения волокон в точках, где они пересекают то же самое поперечное сечение ω призмы, изменяются только линейно в двух взаимноперпендикулярных, а также поперечных направлениях, т. е. увеличиваются или уменьшаются одинаково с расстояниями, вычисленными в этих двух направлениях на ω , то

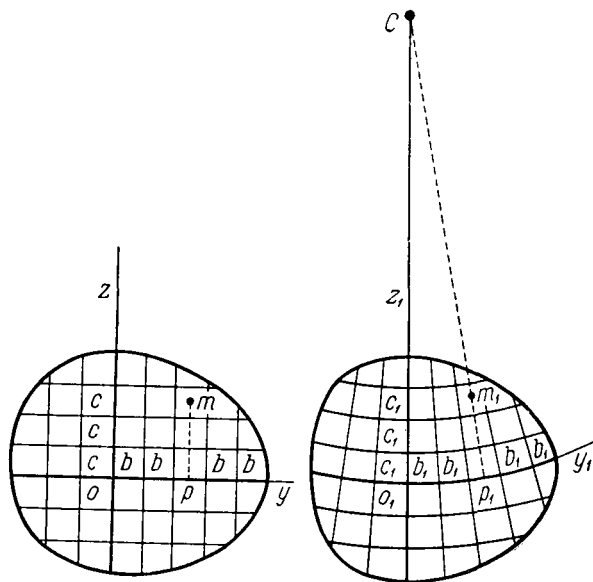


Рис. 11

можно будет всегда превратить их основания или маленькие прямоугольники, на которые разделено это сечение ω , в фигуры, которые без нарушения их смежности получат именно те формы и размеры, при которых боковые грани волокон не испытывали бы никакого давления перпендикулярно к ребрам.

В самом деле, допустим сначала для упрощения:

1) Материал одинаково симметричен относительно двух других систем плоскостей раздела надлежащим образом выбранных элементов или удлинения и сжатия их сторон

вызывают, как мы заметили, только давления, перпендикулярные к их граням.

2) Продольное удлинение изменяется только в одном из двух направлений oz линий, делящих сечение ω , и для какого-либо волокна, основание которого имеет центр в точке m , оно может быть представлено посредством отношения $\frac{z_1}{\rho}$, где ρ — постоянная, обязательно весьма большая по сравнению с z_1 , в которую превращается координата $mp = z$, т. е. положительное или отрицательное расстояние от m до линии ou , делящей сечение в другом направлении. Представим в виде ε и ε' постоянные отношения (в только что приведенном примере то и другое равны $\frac{1}{4}$), которые следует иметь между поперечными сжатиями в направлениях осей ou и oz и продольным удлинением волокна, чтобы боковые грани не испытывали ни нормальных растягивающих усилий, ни нормального давления. Затем опишем на плоскости дугу окружности o_1y_1 радиуса $o_1C = \frac{\rho}{\varepsilon}$ (рис. 11) и концентрические дуги c_1, c_1, c_1, \dots , малые расстояния между которыми o_1c_1, c_1c_1, \dots , равны первоначальным сторонам os, cs, cs, \dots элементов, уменьшенным в отношении ε' вследствие продольных удлинений элементов, т. е. умноженным на $1 - \varepsilon' \frac{z_1}{\rho}$. Если мы проведем из центра C радиусы к точкам, делящим дугу o_1y_1 на части o_1b_1, b_1b_1, \dots , равные сторонам ob, bb, \dots оснований тех же элементов в другом направлении, то разобьем плоскость на четырехсторонники, которые можно рассматривать как прямолинейные ввиду их малости; какой-либо один из них с центром m_1 на расстоянии m_1p_1 от дуги o_1y_1 получит в направлении дуг ширину, которая будет первоначальной шириной $bb = b_1b_1$ соответствующего элемента, поскольку $\frac{\rho}{\varepsilon} - m_1p_1$ равно $\frac{\rho}{\varepsilon}$ или поскольку $1 - \varepsilon \frac{m_1p_1}{\rho}$ равно 1.

Отсюда следует, что при $z_1 = m_1p_1$ малые четырехсторонники, соответствующие тому же числу прямоугольников, которые служили основаниями в элементах или волокнах, действительно имеют вследствие перемещений такие размеры, при которых боковые грани не испытывают нормальных давлений. Эти четырехсторонники должны иметь

такую форму, чтобы боковые грани не испытывали поперечных касательных воздействий, так как их углы остаются прямыми. Следствием сказанного является возможность взаимного превращения прямоугольников в четырехсторонники без нарушения смежности.

Построение, благодаря которому видна эта возможность, производится легко, если растяжения будут представлены посредством $\partial_0 + \frac{z_1}{\rho}$ вместо $\frac{z_1}{\rho}$ или если волокна, разрезающие ou , не будут неизменяемой длины. Тогда мы должны только взять центр c дуг на расстоянии $\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{1 - \varepsilon \partial}{1 + \partial}$ вместо $\frac{\rho}{\varepsilon}$ и точки деления b_1, b_1, \dots , первой дуги на расстояниях, равных первоначальным расстояниям ob, bb, bb, \dots , умноженным на $1 - \varepsilon \partial$, или же, изобразив фигуру, как если бы она имела постоянную $\partial_0 = 0$, мы сжали бы все малые четырехсторонники в отношении $\varepsilon \partial_0$ по дугам и в отношении $\varepsilon' \partial_0$ по радиусам, что не помешало бы им оставаться смежными.

Если удлинение изменяется линейно одновременно в двух направлениях oz и ou или если оно представлено посредством выражения $\partial_0 + \frac{z_1}{\rho} + \frac{y_1}{\rho^1}$, причем y_1 представляет собой расстояние от m до oz вдоль y , то можно сделать построение сначала так, как если бы оно сводилось к $\partial_0 + \frac{z}{\rho}$, а затем так, как если бы оно сводилось к $\frac{y_1}{\rho^1}$, и окончательно составить геометрически совокупность поперечных перемещений, найденных в соответствии с этими предположениями, что дает, как это легко видеть, сетку криволинейных четырехсторонников в двух направлениях, всегда ортогональных и удовлетворяющих таким образом желаемым условиям.

Но можно, пренебрегая разницей между $\frac{z_1}{\rho}$ и $\frac{z}{\rho}$ и между $\frac{y_1}{\rho^1}$ и $\frac{y}{\rho^1}$, а также другими очень малыми величинами второго порядка¹⁾, построить сетку другим способом, который имеет

¹⁾ Так как $dz_1 = dz \left(1 - \varepsilon' \frac{z_1}{\rho} \right)$, когда удлинение изменяется только в направлении оси z , то получаем, интегрируя, $\frac{z_1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon'} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon' z}{\rho}} \right) =$

преимущество, что он одинаково применим в обычном случае, когда материал призмы имеет плоскости симметрии только в виде поперечных сечений и когда, следовательно, равенство нулю взаимных поперечных действий волокон требует, чтобы стороны их прямоугольных оснований не только сжимались, но и обычно слегка наклонялись друг к другу на величину, пропорциональную продольным удлинениям¹⁾.

Так как тогда $\frac{dy_1 - dy}{dy}$ и $\frac{dz_1 - dz}{dz}$ представляют собой относительную величину сжатий сторон, а $\frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy}$ — малый наклон, который они принимают друг к другу, или уменьшение двух противоположных углов элементов поверхности, мы, очевидно, получим, если $\partial_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}$ — продольное удлинение, а ε'' — новая постоянная, выражения:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy \left[1 - \varepsilon \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right) \right], \\ dz_1 &= dz \left[1 - \varepsilon' \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right) \right], \\ \frac{dy_1}{dz} + \frac{dz_1}{dy} &= \varepsilon'' \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Если проинтегрировать первые два из этих уравнений, то к их интегралам нужно соответственно добавить произ-

$= \frac{z}{\rho} - \frac{\varepsilon'}{2} \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{\varepsilon'^2}{6} \frac{z^3}{\rho^3} - \dots$, что действительно приводится к $\frac{z}{\rho}$, если пренебречь $\frac{z^2}{\rho^2}$, т. е. очень малой величиной второго порядка.

¹⁾ Случай строения с одной плоскостью симметрии является более распространенным, чем исследованный нами аналитически, начиная с конца § 16. Ему соответствуют формулы (7) § 9. Равенство нулю поперечных воздействий p_{yy} , p_{zz} и p_{yz} на боковых гранях, т. е. гранях, параллельных x , действительно требует как в соответствии с этими формулами, так и просто по рассуждению, чтобы ∂_y , ∂_z и уменьшение угла g_{yz} или малый взаимный наклон сторон оснований элементов находились бы в постоянных отношениях с ∂_x независимо от наклонов g_{xy} , g_{xz} ребер к основаниям, так как эти наклоны производят на боковых гранях только касательные давления P_{xy} , P_{xz} .

вольные функции $f(z)$ и $f^*(y)$; при подстановке решений в третье уравнение оно принимает вид

$$f'(z) - \varepsilon' \frac{z}{\varrho} - \varepsilon'' \frac{z}{\varrho} = -f^{*'}(y) + \varepsilon \frac{y}{\varrho} + \varepsilon'' \frac{y}{\varrho} + \varepsilon'' \vartheta_0.$$

Соотношение удовлетворяется, если положить обе его части равными той же произвольной постоянной. Эта постоянная равна $\varepsilon'' \vartheta_0$, если мы считаем, чтобы абстрагироваться от общего поворота и поступательного смещения, что первый элемент линии ou остается неподвижным, так же как начало координат o , т. е. $\frac{dz_1}{dy} = 0$, $y_1 = 0$ и $z_1 = 0$ при $y = 0$, $z = 0$. Из этого следует: чтобы удовлетворить трем дифференциальным уравнениям (114), выражающим необходимые условия, при которых волокна не подвергались бы воздействиям в поперечных направлениях, необходимо иметь:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \varepsilon'' \vartheta_0 z + (1 - \varepsilon \vartheta_0) y + \frac{\varepsilon'' z^2 - 2 \varepsilon yz}{2 \varrho} + \frac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2 \varrho'}, \\ z_1 &= (1 - \varepsilon' \vartheta_0) z + \frac{\varepsilon'' y^2 - 2 \varepsilon' yz}{2 \varrho'} - \frac{\varepsilon' z^2 - \varepsilon y^2}{2 \varrho}, \end{aligned} \right\} (115)$$

так как эти условия вполне согласуются между собой; это дает положения точек новой сетки, образованной основаниями элементов, или две системы линий, которые их ограничивают. Следовательно, второе из выражений (115), если придавать z различные постоянные значения, дает уравнения слегка искривленных линий, в которые превращаются прямые, первоначально проведенные на сечении ω параллельно оси y . Это параболы, радиус кривизны которых почти постоянен и равен обратной величине производной $\frac{d^2 z_1}{dy^2} = \frac{\varepsilon}{\varrho} + \frac{\varepsilon''}{\varrho'}$ и которые, таким образом, почти сливаются при $\frac{1}{\varrho} = 0$ с найденными выше дугами окружности, радиусы которых могли рассматриваться как равные, имея в виду, что величина $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ считается значительно большей, чем z или z_1 . Первое выражение (115) дает то же для линий раздела, которые были первоначально параллельны оси z , т. е. для парабол или дуг окружности, радиус которых является

обратной величиной суммы $\frac{\varepsilon'}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''}{\varrho}$ и которые, как сказано выше, сводятся к прямым линиям при $\varepsilon'' = 0$, т. е. углы малых прямоугольников должны оставаться прямыми, если одновременно имеем $\frac{1}{\varrho} = 0$, или при зависимости продольного удлинения только от координаты z .

Итак, каждый раз (в соответствии с вышеизложенным), когда мы получим призму, строение которой представляет собой по отношению к поперечным сечениям такую симметрию, что изменение размеров ее волокон или продольных элементов и изменение углов ее оснований могли бы создавать на последних только продольные воздействия, а на боковых гранях только воздействия, параллельные тем же основаниям, если продольные удлинения этих волокон изменяются только линейно в двух поперечных направлениях в точках, где они пересекают какое-либо сечение, то основания продольных элементов могут всегда принимать без нарушения смежности такие формы, что волокна не оказывают друг на друга в боковом направлении никакого воздействия перпендикулярно к их длине¹⁾.

Эта лемма легко приводит нас к искомому доказательству известных формул изгиба для случая, когда они являются точными.

¹⁾ Мы можем видеть, что взаимное боковое воздействие волокон не может равняться нулю в поперечном направлении, если только их продольное удлинение не изменяется равномерно от одного волокна к другому вместе с взаимным расстоянием, измеренным, по крайней мере, в двух поперечных направлениях.

В самом деле, предположим сначала, что строение симметрично относительно каждой из трех систем плоскостей раздела элементов. Их углы должны оставаться прямыми, чтобы рассматриваемые воздействия равнялись нулю. Пусть $abcd$, $cdfe$ — основания двух смежных волокон на том же сечении ω после перемещений (рис. 12). Если стороны ac и ce , bd и df имеют одинаковую длину и остаются прямолинейными, то для того, чтобы их углы оставались прямыми после искривления других сторон, необходимо иметь одинаковую разницу в длине между противоположными сторонами ab и cd первого основания, как и между сторонами cd , ef второго основания. Такая же равноразность должна существовать, если ace , bdf становятся также слегка искривленными, сохраняя перпендикулярность к ab , cd , ef , так как их можно заменить пунктирными линиями, которые являются касательными к серединам c , d , а длина перпендикулярных сторон ab , fe изме-

Действительно, начнем с самого простого случая *равномерного*, или *кругового*, *изгиба*, когда продольные перемещения считаются такими, что все поперечные сечения оста-

нется не больше чем на величину такого порядка, которой можно пренебречь. Следует также иметь равномерность в другом направлении, т. е. между сторонами ac , bd , gh основания $abdc$ и основания $dbgh$ третьего волокна, смежного с первым при $ab = bg$, $cd = dh$.

Так как равномерностные линии были первоначально равными, то сжатия сторон оснований волокон должны изменяться линейно или равномерно с расстояниями в каждом из двух направлений раздела, чтобы волокна не оказывали друг на друга боковыми гранями никаких поперечных касательных воздействий.

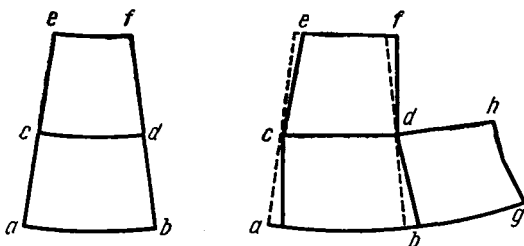


Рис. 12

Итак, чтобы они не оказывали на те же грани никакого воздействия, даже нормального, нужно, как мы видели выше для подобного строения, чтобы имелось некоторое постоянное соотношение между продольными удлинениями волокон и боковыми сжатиями в тех же двух направлениях.

Итак, чтобы волокна подобной призмы не подвергались действию перпендикулярно к их длине, *необходимо*, чтобы их продольные удлинения изменялись одинаково от одного волокна к другому в двух поперечных направлениях, параллельных пересечениям плоскостей симметрии строения.

Переходя к более общему случаю, когда имеется плоскость симметрии, только перпендикулярная к ребрам призмы, легко увидим, что три дифференциальных уравнения (114) не могут быть согласованы между собой или же удовлетворены посредством тех же значений y_1 и z_1 , зависящих от y и z , если мы добавляем члены, придающие вторые или высшие степени y или z трехчленам в скобках $\delta_0 + \frac{z}{\rho} + \frac{y}{\rho'}$, выражающим продольные удлинения. К ним можно добавить только член, зависящий от yz , не мешающий удлинению равномерно изменяться в направлении каждой из координат y , z и т. д.

ются плоскими и нормальными к волокнам, равномерно растянутым или сжатым от одного конца до другого и превратившимся в дуги окружности, центры которых находятся на одной прямой, являющейся общим пересечением новых плоскостей сечений. Таким образом, если ∂_0 — удлинение волокна, которое проходит через центры тяжести сечений, ρ — радиус волокна или расстояние до линии пересечения новых плоскостей, о которой мы говорили, а $\rho + z$ — радиус какого-либо другого волокна, то получаем для новой длины части этого волокна, равной первоначально единице, выражение $(1 + \partial_0) \frac{\rho + z}{\rho}$ и, следовательно, формулу

$$\partial_0 + \frac{z}{\rho}$$

для продольного удлинения (так как ∂_0 и $\frac{z}{\rho}$ считаются очень малыми и их произведением можно пренебречь). Предположим также, что относительные поперечные перемещения на всех сечениях ω таковы, что волокна не оказывают друг на друга в боковом направлении никакого поперечного действия, возможность чего нами только что доказана для случая, когда продольные удлинения выражаются подобной формулой.

Если мы обозначим через E число, только что названное коэффициентом упругости растяжения, то продольные усилия на элементах $d\omega$ сечений будут

$$Ed\omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right).$$

Действия на обоих крайних основаниях получат одинаковое выражение, а действия на боковых гранях призмы будут равны нулю.

Так как задача об определении малых относительных перемещений точек упругого тела полностью решается, когда даны внешние силы, которые на него действуют, то взаимно, *призма, боковые грани которой не испытывают никакого воздействия и к крайним основаниям которой приложены продольные усилия $Ed\omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, т. е. усилия (положительные или отрицательные), одинаковые на обоих основаниях в соответственных точках, нормальные к элементам*

$d\omega$, где они действуют и изменяющиеся линейно с той же поперечной координатой z , будет испытывать именно те перемещения, как продольные, так и поперечные, которые мы только что допустили, т. е. изгибание в виде дуги окружности в плоскости, параллельной ребрам и оси z , и продольные удлинения $\partial_0 + \frac{z}{\rho}$ повсюду, а следовательно повсюду внутри призмы одинаковые продольные усилия $E d\omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, как если бы эти волокна были изолированными. Таким образом, формулы обычной теории изгиба будут в этом случае точно соблюдены.

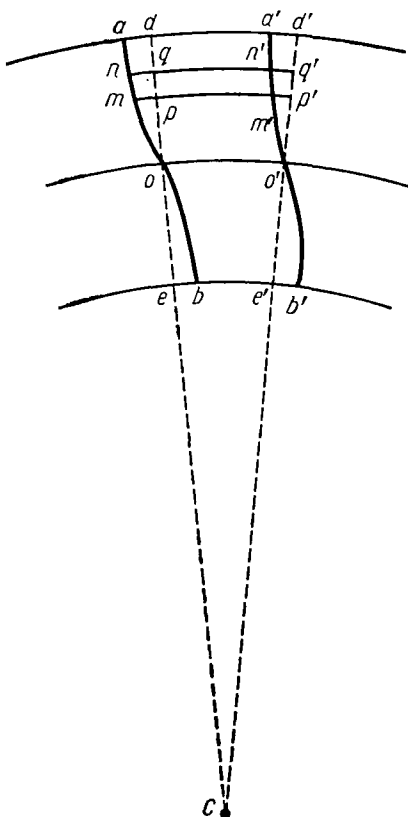


Рис. 13

Кроме того, волокна призмы будут испытывать поперечные сжатия $\varepsilon \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)$, $\varepsilon' \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)$ в направлениях, перпендикулярном и параллельном оси z , так что контур их сечений слегка изменит форму, определенную указанным выше рассуждением (и что можно заметить экспериментально, изгибая параллелепипед из каучука).

Перейдем теперь к более сложному и более обычному случаю изгиба по некруговой дуге, неравно-

мерность кривизны которой от одного конца призмы до другого определяется силами, действующими в поперечном направлении или касательно к сечениям.

Рассуждая иначе по сравнению с только что сказанным, мы выскажем гипотезы о перемещениях, допуская, что:

1) Различные сечения ω изгибаются и наклоняются к волокнам одинаково, так что части $mm'n'n$ волокон, находящиеся между двумя очень близкими сечениями aob , $a'o'b'$ (рис. 13) имеют после изгиба такую же длину, как и части $pp'q'q$, находящиеся между двумя плоскостями doe , $d'o'e'$, проведенными нормально к центральному волокну oo' , проходящему через центры тяжести o , o' сечений, и следовательно, продольные удлинения могут быть всегда представлены посредством выражения $\partial_0 + \frac{z}{\rho}$, где ∂_0 — удлинение волокна oo' , ρ — его радиус кривизны oC , а z — расстояние от какого-либо волокна до прямой o , проведенной через центр сечения параллельно линии пересечения s двух нормальных плоскостей.

2) Волокна сжимаются в боковом направлении (так как это оказывается возможным во всех случаях, когда удлинение имеет линейное выражение) так, что они не давят друг на друга перпендикулярно к их длине и, следовательно, продольное усилие на элементе $d\omega$ равно $Ed\omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\rho} \right)$; это не препятствует тем же волокнам иметь возможность оказывать друг на друга продольные воздействия, аналогичные трению, на их различных боковых гранях, таких, как mm' , nn' и т. д., в силу их малых *сдвигов* друг по отношению к другу или наклонов, которые принимают их ребра к основаниям $d\omega = mn$ или $m'n'$.

3) ∂_0 постоянно, так что различные сечения ω , уже подвергшиеся действию в касательном направлении со стороны тех поперечных сил, которые зависят от этих наклонов и которые мы называем постоянной равнодействующей P , полагаемой параллельной oC или z , подвергаются действию продольных сил, имеющих то же значение $E\omega \partial_0$; но мы получаем кривизну $\frac{1}{\rho}$, равномерно изменяющуюся от одного конца призмы до другого и равную $\frac{P(a-x)}{EJ}$, где J — момент инерции $\int z^2 d\omega$ сечения ω относительно линии o , а $P(a-x)$ — переменный момент вокруг той же линии o внешних сил, которые действуют на конец призмы; таким образом, эти силы находятся в равновесии по отношению к повороту ввиду наличия в том же сечении усилий

$Ed\omega\left(\partial_0 + \frac{z}{\rho}\right)$, так как полный момент этих усилий равен $\frac{E}{\rho} \int z^2 d\omega$.

4) Наконец, в соответствии с криволинейной формой aob , принятой всеми сечениями, продольные касательные действия на боковых *внешних* гранях призмы равняются нулю и на гранях mm' , nn' и т. д. какого-либо элемента волокна разности, которые дают эти касательные действия в силу того, что наклоны ребер к основаниям в m не такие же, как в n , а в m' не такие, как в n' и т. д., уравниваются именно разностью (возникшей вследствие изменения $\frac{1}{\rho}$) продольных усилий $Ed\omega\left(\partial_0 + \frac{z}{\rho}\right)$, которые действуют в противоположных направлениях на двух основаниях mn , $m'n'$ того же элемента.

Совместность первых трех этих допущений относительно перемещений сама по себе очевидна; и так как они обеспечивают либо равновесие относительно поступательного смещения, либо относительно общего поворота всякой пластинки, заключенной между двумя сечениями ω , то они согласуются также с четвертым допущением, выполнение которого сводится к тому, чтобы выбрать среди бесконечно большого числа форм, приписываемых искривленной поверхности изогнутых сечений, такую, которая создает равновесие *части* или каждого элемента пластинки в отдельности; эта форма должна всегда существовать, хотя бы мы могли ее определить для каждого случая только в результате более или менее сложного анализа, различные примеры которого мы указали выше¹⁾.

¹⁾ Эту форму можно определить непосредственно для простого случая, когда сечения, полагаемые прямоугольными, были бы достаточно узкими в направлении, перпендикулярном к плоскости изгиба oCo' , чтобы разрезы aob их искривленной поверхности могли бы рассматриваться как такие же разрезы всякой плоскостью, параллельной oCo' .

Действительно, если u' — перпендикуляр, опущенный из m на плоскость doe , перпендикулярную в свою очередь к касательной к центральному волокну в точке o , то $\frac{du'}{dz}$ есть наклон этой касательной к сечению в точке m . Но волокно или материальная линия mm' (рис. 13), первоначально параллельная центральному волокну, имеет

Если перемещения точек призмы таковы, как мы только что допустили, то ее боковые грани не будут испытывать никакого воздействия, а ее два крайних основания будут подвержены воздействию продольных сил $Ed\omega\left(\partial_0 + \frac{z}{\rho}\right)$ и сил касательных или поперечных, которые зависят от новой формы поверхностей первоначально плоских сечений.

теперь по отношению к нему небольшой наклон, вызванный тем, что сжатия в направлении z в сечении aob были $\epsilon'\left(\partial_0 + \frac{z}{\rho}\right)$, а в сечении

$a'o'b'$ были $\epsilon'\left[\partial_0 + z\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}mm'\right)\right]$, что приблизило точку m'

больше, чем точку m , к центральному волокну oo' на $\epsilon'\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}mm' \int_0^z z dz$,

и дает, таким образом, после деления на mm' и интегрирования

$-\frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}$ для наклона mm' по отношению к этому центральному

волокну; это дает в итоге $\frac{du'}{dz} - \frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}$ для наклона волокна mm'

к сечению ω , к которому оно было первоначально перпендикулярно.

Обозначая через G' коэффициент, на который нужно умножить этот наклон или этот *sдвиг*, чтобы получить на единицу площади сопротивление, которое он вызывает, а через $2b$ — малую ширину сечения, высота которого *доe* равна $2c$, получаем для равновесия относительно продольного поступательного смещения пластинки $mm'n'n$ шириной $2b$ условие

$$G' \cdot 2bdx \frac{d}{dz} \left(\frac{du'}{dz} - \frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{d\frac{1}{\rho}}{dx} \right) dz = -2bdz \frac{dE\left(\partial_0 + \frac{z}{\rho}\right)}{dz} dx,$$

или, так как $\frac{EJ}{\rho} = P(a-x)$, $\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx} = -\frac{P}{EJ} = -\frac{3P}{E\omega c^2}$, имеем:

$$G' \frac{d}{dz} \left(\frac{du'}{dz} + \frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2} \right) = \frac{3Pz}{\omega c^2},$$

откуда, интегрируя так, чтобы при $z = c$ наклон волокон к сечению $\frac{du'}{dz} + \frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2}$ был бы равен нулю:

$$G' \left(\frac{du'}{dz} + \frac{\epsilon'z^2}{2} \frac{3P}{E\omega c^2} \right) = \frac{3P(z^2 - c^2)}{2\omega c^2},$$

Так как относительные перемещения производятся единственным способом заданными внешними силами, то взаимно: *призма, боковые грани которой не подвергаются никакому воздействию и два крайних основания которой подвергаются одновременно: 1) в продольном направлении растяжениям (положительным или отрицательным), которые изменяются линейно или могут выражаться посредством*

$E d \omega \left(\partial_0 + \frac{z}{e_1} \right), E d \omega \left(\partial + \frac{z}{e_2} \right)$, где ∂_0 — постоянная, имеющая одинаковое значение на обоих основаниях, но $\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}$ имеют обычно различные значения, одно из которых может равняться нулю, а поперечная координата z вычисляется и направляется одинаковым образом на том и на другом основании; 2) в поперечном или касательном направлении действиям, которые имеют одинаковые величины и направления в соответственных точках этих двух оснований, расстояние между которыми мы обозначили через a , и равнодействующую P , составляющую с величиной $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right)$ определенное отношение, которое зависит от формы и величины сечений¹⁾

или, интегрируя снова так, чтобы $u' = 0$ при $z = 0$, имеем:

$$u' = - \frac{3Pc}{2G'\omega} \left[\frac{z}{c} - \left(1 - \frac{e'G'}{E} \right) \frac{z^3}{3c^3} \right],$$

как мы уже нашли в § 29, выражение (112).

Этот пример в случае необходимости был бы достаточным, чтобы убедиться в том, что задача для искривленной формы сечений, каким бы ни был контур, не требует условий больше, чем можно выполнить, и, следовательно, всегда имеет единственное решение.

¹⁾ Этим отношением является величина $E \int z^2 d\omega$ или в более общем виде

$$E \sqrt{\left(\int z^2 d\omega \right)^2 + \left(\int yz d\omega \right)^2},$$

так как $\frac{1}{a} \left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1} \right)$ не что иное, как величина, обозначенная в предыдущем примечании через $\frac{1}{dx} d \frac{1}{\rho}$. Если P_z и P_y — составляющие P в направлении z и в направлении другой координаты y , перпендикулярной к z , наконец, $a - x$ — расстояние от ω до второго конца призмы-

и от способа распределения действий; я утверждаю, что эта призма получит во всех ее частях продольные удлинения $\partial_0 + \frac{z}{\varrho}$, причем величины $\frac{1}{\varrho}$ изменяются равномерно по длине оси между ее крайними значениями $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$; элементы $d\omega$ каждого внутреннего сечения будут подвергаться нормальным или продольным усилиям $Ed \omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\varrho} \right)$ и точно таким же касательным действиям, как каждое из двух крайних оснований; равнодействующая этих сил должна давать момент (с плечом рычага, равным расстоянию от каждого основания до какого-либо сечения), способный уравновесить именно момент продольных воздействий относительно той же оси, проведенной на этом сечении через его центр.

Таким образом, для подобного способа воздействия мы точно получим известные формулы обычной теории изгиба призм, сопровождаемого растяжением центрального волокна; эти формулы дают, между прочим, как мы сказали, только часть перемещений, вызванных продольными удлинениями волокон, к которым нужно добавить, чтобы получить другие части и тем самым полные условия сопротивления, несколько более сложные формулы, которые могут быть получены только путем анализа и которые дают перемещения, вызванные малыми сдвигами пластинок или волокон друг по отношению к другу; этими перемещениями чаще всего ввиду их малости можно пренебречь, но в некоторых случаях они заметно увеличивают стрелу прогиба, так же как максимальное удлинение в косом направлении, которое следует ограничить, чтобы предотвратить разрушение.

то уравнения равновесия относительно поворота вокруг линий z , y , проходящих через o , имеют вид

$$- P_z(a - x) = \int Ed \omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\varrho} \right) z,$$

$$- P_y(a - x) = \int Ed \omega \left(\partial_0 + \frac{z}{\varrho} \right) y,$$

откуда

$$P_z = E \int z^2 d\omega \frac{d}{dx} \frac{1}{\varrho}; \quad P_y = E \int yz d\omega \frac{d}{dx} \frac{1}{\varrho}.$$

§ 32. Заключение. Общий обзор для случая, когда способ приложения и распределения внешних сил на концах призмы отличен от способа, дающего совершенно точные формулы в соответствии со смешанным методом

Если, как мы сказали в § 3, способ воздействия сил иной или если силы, имеющие на каждом конце одинаковую геометрическую равнодействующую и одинаковый равнодействующий момент, как и силы, о которых мы только что сказали, приложены и распределены другим способом, то вышеупомянутые результаты могут быть всегда использованы как весьма точно дающие состояние призмы, предположительно не испытывающей в промежутке между основаниями никакого внешнего воздействия.

В самом деле, если на двух каких-либо сечениях этой призмы, крайних или промежуточных, имеет место указанное распределение сил, то предыдущий анализ доказывает, что оно тем самым будет иметь место по тому же способу на всех промежуточных сечениях. Состояние, которое определяют эти формулы, представляет собой для различных рассматриваемых сечений, начиная с любого конца, то, чем является *установившееся* течение воды или состояние *равномерного* движения машины и т. д. для различных рассматриваемых мгновений, начиная с начального состояния. Это предельное состояние, которое само продолжается, раз оно уже где-то возникло, и к которому сводится действительное состояние изогнутой призмы, каким бы ни был способ приложения данных сил к концам призмы, по мере того как рассматриваются сечения, менее близкие к концам, так как здесь *установление* происходит в пространстве, а не во времени.

Мы уже имели повод сделать это замечание для различных случаев кручения и даже для случая растяжения призмы силами, приложенными к ее концам; соответствующая формула весьма проста и принята всеми, однако она подчинена, чтобы быть точной, условию определенного распределения растягивающих сил.

Является ли *сходимость* быстрой, т. е. действительно ли предельное внутреннее распределение возникает на очень малых расстояниях? Анализ не может еще это обнаружить

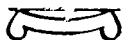
(§ 3), но многочисленные экспериментальные данные не позволяют в этом сомневаться. Если, например, мы сожмем клещами призму из каучука, то увидим, что произведенное вдавливание распространяется в обе стороны на расстояние, не превышающее наибольшую глубину вдавливания: за этими пределами оно кажется совершенно отсутствующим. Нечто подобное мы замечаем, растягивая поперек некоторую часть узкой полоски из того же материала. Обычно перемещения, произведенные в различных частях призмы силами, которые уравниваются посредством одной из ее частей, становятся совсем ничтожными вне этой части на очень малых расстояниях от точек, где проявляются силы.

Итак, какой бы ни была система сил, которые действуют на каждый конец призмы, чтобы ее изогнуть, скрутить, растянуть и т. д., эту систему всегда можно заменить двумя другими системами. Одна из систем состоит из сил, имеющих такую же геометрическую равнодействующую и такой же равнодействующий момент, как и заданные силы, но приложенных и распределенных так, чтобы вызывать перемещения, точно представленные формулами. Другая система составлена из сил, имеющих равнодействующую и момент, равные нулю, т. е. из сил, уравновешенных на очень короткой части призмы, сил, которыми можно пренебречь, как мы только что сказали, в отношении их действий на остальную часть этого тела.

Итак, можно рассматривать, по крайней мере для практических целей, перемещения, произведенные внешними силами, приложенными и распределенными некоторым образом на концах призм, как представленные формулами, полученными из дифференциальных уравнений упругого равновесия посредством метода, который мы называем смешанным и который дает точные значения в одном случае, а во всех других случаях быстро достигаемые пределы вне малых частей, на которые действуют силы и которые конструкторы всегда укрепляют и снабжают подкладками.

Таким образом, если нам удастся полностью аналитически определить внутреннее состояние призмы для сил, действующих некоторым образом на ее концах, то сказанное позволяет предвидеть, что чрезвычайно сложные фор-

мулы, к которым мы придем, опять сведутся к только что упомянутым нами формулам. Для того чтобы сделать применимыми эти сложные выражения, мы исключим члены, оказывающие малое влияние, но осложняющие формулы и выражающие быстро исчезающие действия систем сил, находящихся в равновесии, и ничего не добавляющие ни к равнодействующей, ни к полному моменту, которые только и нужно рассматривать для каждого конца.





ПЕРЕЧЕНЬ ТРУДОВ
Б.Сен-Венана

•

ЛИТЕРАТУРА
о Б.Сен-Венане
и его трудах





ПЕРЕЧЕНЬ ТРУДОВ Б. СЕН-ВЕНАНА

(в хронологическом порядке)

1. De l'emploi de la toile imperméable dans les fondations par immersion. — Ann. Ponts et Chauss., t. X, 1834, 1^{re} série, 1^{er} semestre, pp. 125—128.
2. Leçons de Mécanique appliquée faites par intérim par M. de Saint-Venant, 1837—1838, литогр., 76 стр.
3. Mémoire sur le calcul des effets des machines à vapeur, contenant des équations générales de l'écoulement permanent ou périodique des fluides. — Comptes rendus, t. VI, 1838, pp. 45—47, 201—205.
4. Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 942—954, 1020—1031.
5. Mémoire sur un mode d'interpolation applicable à des questions relatives au mouvement des eaux, et suppléant à l'intégration souvent impossible des équations aux dérivées partielles. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 1108—1115.
6. Mémoire sur la torsion des prismes à base rectangle et à base losange, et sur une petite correction numérique à faire subir en général, aux moments de torsion. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 1180—1190.
7. Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 1240—1243.
8. Sur la définition de la pression dans les corps fluides ou solides en repos ou en mouvement. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1843, pp. 134—138.
9. Intégration d'une équation différentielle qui se présente dans la théorie de la flexion des verges élastiques. — Liouville, Journ. Math. t. IX, 1844, pp. 191—192.
10. Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires. — Liouville, Journ. Math., t. IX, 1844, pp. 270—274, 310—312.
11. Note sur les flexions considérables des verges élastiques. — Liouville, Journ. Math., t. IX, 1844, pp. 275—284.
12. Note sur l'état d'équilibre d'une verge élastique à double courbure lorsque les déplacements éprouvés par ses points, par suite de l'action des forces qui la sollicitent, ne sont pas très-petits. — Comptes rendus, t. XIX, 1844, pp. 36—44, 181—187.

13. Sur les lignes courbes non planes. — Comptes rendus, t. XIX, 1844, pp. 547—555; Journ. de l'École polytechn., t. XVIII, 1845, pp. 1—76.
14. Dosage expéditif ou prompt reconnaissance de la quantité de chlore existant à l'état de chlorhydrates dans une liqueur saline. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1844, pp. 76—78.
15. Sur la question: «Si la matière est continue ou discontinue». — Soc. Philom. Proc. Verb., 1844, pp. 3—16.
16. Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides, lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité, ne peuvent cependant pas être considérés comme très-petits. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1844, pp. 26—28.
17. Sur la Sologne, son amélioration et son assainissement. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1844, pp. 90—92.
18. Note sur la pression dans l'intérieur des corps ou à leurs surfaces de séparation. — Comptes rendus, t. XXI, 1845, pp. 24—26.
19. Sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique. — Comptes rendus, t. XXI, 1845, pp. 620—625; Soc. Philom. Proc. Verb., 1845, pp. 110—113.
20. Sur le frottement de roulement, appelé aussi de deuxième espèce. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1845, pp. 83—87.
21. Sur la théorie de l'écoulement de l'air. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1845, pp. 101—104.
22. Note sur l'usage du calcul ou de l'analyse géométrique. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1845, pp. 110—113.
23. Sur la dérivation des eaux pluviales qui ravinent les sols en pente et qui entraînent leurs terres dans les vallées. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1845, pp. 120—122, 124—127.
24. Note sur la détermination expérimentale des forces retardatrices du mouvement des liquides. — Comptes rendus, t. XXII, 1846, pp. 307—309.
25. Sur la perte de force vive d'un fluide, aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement. — Comptes rendus, t. XXIII, 1846, pp. 147—149.
26. Théorèmes sur les moments cubiques d'aires quelconques par rapport à un point. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 1—3.
27. Solution d'un paradoxe proposé par d'Alambert aux géomètres. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 25—29.
28. Sur le frottement ou l'action latérale des fluides qui se meuvent uniformément et rectilignement dans les canaux ou les tuyaux prismatiques. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 49—52.
29. Recherches sur la résistance des fluides. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 72—75, 120—121.
30. Fait relatif à la vision. — Soc. Philom. Verb., 1846, pp. 99—100.
31. Théorèmes sur les forces vives décomposées. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 117—119.
32. Sur la dérivation des eaux pluviales qui entraînent les terres des sols en pente et qui inondent les vallées. — Soc. Philom. Proc. Verb., 1846, pp. 124—125.
33. Sur la torsion des prismes. — Comptes rendus, t. XXIV, 1847, pp. 485—488, 847—849; t. XXXVI, 1853, pp. 1028—1031.

34. Mémoire sur la théorie de la résistance des fluides. Solution du paradoxe proposé à ce sujet par d'Alambert aux géomètres. Comparaison de la théorie aux expériences. — *Comptes rendus*, t. XXIV, 1847, pp. 243—246.
35. Sur les mouvements relatifs à des systèmes quelconques. — *Nouv. Ann. Math.*, t. VIII, 1849, pp. 326—340.
36. Sur les vibrations tournantes des verges élastiques. — *Comptes rendus*, t. XXVIII, 1849, pp. 69—72.
37. Une méthode générale de réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. — *Soc. Philom. Proc. Verb.*, 1849, pp. 45—47.
38. Calcul approché de la vitesse, etc., sur les chemins de fer à air comprimé, spécialement sur le chemin du système de M. Andraud. — *Soc. Philom. Proc. Verb.*, 1849, pp. 79—82.
39. Institut national agronomique. Programme détaillé proposé pour le cours de génie rural. — Paris, Bachelier, 1850, 44 p.
40. Mémoire sur les formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes. — *Comptes rendus*, t. XXXI, 1850, pp. 283—286, 581—583; *Annales des mines*, t. XX, 1851, pp. 183—358.
41. Principes de Mécanique fondés sur la cinématique. Paris, 1851.
42. Sur les surfaces à la plus grande pente constante, ainsi que sur les lignes courbes parallèles, sur celles qu'on peut appeler anti-parallèles, et sur les lignes de faite et de thalweg des surfaces courbes en général. — *Soc. Philom. Proc. Verb.*, 1852, pp. 24—29.
43. Sur la forme à donner aux versoirs de charrue, et sur un moyen général de les représenter graphiquement et d'en dresser le project de manière à leur faire remplir les conditions voulus. — *Annales de l'Institut national agronomique*, nov. 1852.
44. De l'interprétation géométrique des clefs algébriques et des déterminants. — *Comptes rendus*, t. XXXVI, 1853, pp. 582—585.
45. Divers résultats relatifs à la torsion des prismes. — *Soc. Philom. Proc. Verb.*, 1853, pp. 28—31.
46. Preuve que les solutions données, au tome XIV des *Savants étrangers*, du problème de la torsion des prismes. . . , sont exactes, même lorsque l'angle de rotation. . . atteint des grandeurs quelconques. — Paris, Bachelier, 1853.
47. Solution du problème du choc transversal et de la résistance vive des barres élastiques appuyées aux extrémités. — *L'Institut*, t. XXII, 1854, pp. 61—63.
48. Influence retardatrice des herbes, des broussailles, des arbres, etc., sur l'écoulement des eaux. — *L'Institut*, t. XXII, 1854, pp. 179—181.
49. Conditions générales de résistance des solides à la rupture éloignée. — *L'Institut*, t. XXII, 1854, pp. 428—431.
50. Mémoires sur la flexion des prismes élastiques, sur les glissement qui l'accompagne lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. — *Comptes rendus*, t. XXXIX, 1854, pp. 1027—1031; *L'Institut*, t. XXII, 1854, pp. 220—221.
51. Divers résultats relatifs à la torsion d'un prisme à base de triangle équilatéral, à celle de deux prismes ou cylindres parallèles rendus solidaires, etc. — *L'Institut*, t. XXIII, 1855, pp. 248—250.

52. Sur l'élasticité des corps, sur les actions entre leurs molécules, sur leurs mouvements vibratoires atomiques, et sur leur dilatation par la chaleur. — L'Institut, t. XXIII, 1855, pp. 440—442.
53. Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. — Liouville, Journ. Math., t. I, 1856, pp. 89—189.
54. Sur les conséquences de la théorie de l'élasticité en ce qui regarde la théorie de la lumière. — L'Institut, t. XXIV, 1856, pp. 32—34.
55. Sur la vitesse du son. — L'Institut, t. XXIV, 1856, pp. 212—216.
56. Sur la résistance des solides. — L'Institut, t. XXIV, 1856, pp. 457—459.
57. Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément. — Mém. Savants Etrang., t. XIV, 1856, pp. 233—560.
58. De l'aménagement des eaux pluviales pour améliorer le sol et pour prévenir les inondations. — Paris, V. Dalmont, 1856, 23 + 2 p.
59. Mémoire sur l'impulsion transversale et la résistance vive des barres élastiques appuyées aux extrémités. — Comptes rendus, t. XLV, 1857, pp. 204—208.
60. Sur la position des points dangereux ou les plus exposés, dans la torsion des prismes ou cylindres ayant des bases de forme variée. — L'Institut, t. XXVI, 1858, pp. 178—179.
61. Résultats relatifs à la torsion d'un cylindre ou d'un prisme quelconque autour d'un axe extérieur, parallèle à ses arêtes. — L'Institut, t. XXVI, 1858, p. 179.
62. Etablissement élémentaire des formules de la torsion des prismes élastiques. — Comptes rendus, t. XLVI, 1858, pp. 34—38.
63. Des conditions pour que six fonctions des coordonnées x, y, z , des points d'un corps élastique représentent des composantes de pression s'exerçant sur trois plans rectangulaires à l'intérieur de ce corps. — L'Institut, t. XXVIII, 1860, pp. 294—295.
64. Mémoires sur les divers genres d'homogénéité mécanique des corps solides élastiques, et principalement sur l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique, et sur l'homogénéité polaire ou sphérique. — Comptes rendus, t. L, 1860, pp. 930—934.
65. Sur le nombre des coefficients inégaux des formules donnant les composantes des pressions dans l'intérieur des solides élastiques. — Comptes rendus, t. LIII, 1861, pp. 1107—1112.
66. Mémoire sur l'influence retardatrice de la courbure dans les courants d'eau. — Comptes rendus, t. LIV, 1862, pp. 38—42.
67. Méthode pour la résolution, par approximations successives, des problèmes à deux inconnues posés ou non posés en équation. — Comptes rendus, t. LIV, 1862, pp. 845—848.
68. Sur la vitesse du son dans l'air. — Comptes rendus, t. LV, 1862, pp. 205—209.
69. Sur la détermination de l'état d'équilibre des tiges élastiques à double courbure. — Les Mondes, t. III, 1863, pp. 568—573.

70. Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope. — Comptes rendus, t. LVI, 1863, pp. 475—479, 804; Liouville, Journ. Math., t. VIII, 1863, pp. 257—295, 353—430.
71. Sur la théorie de la double réfraction. — Comptes rendus, t. LVII, 1863, pp. 387—391.
72. Sur les flexions et torsions que peuvent éprouver les tiges courbes sans qu'il y ait aucun changement dans la première ni dans la seconde courbure de leur axe ou fibre moyenne. — Comptes rendus, t. LVI, 1863, pp. 1150—1154.
73. Théorie de l'élasticité des corps, ou cinématique de leurs déformations. — Les Mondes, t. VI, 1864, pp. 607—608.
74. Mémoire sur les contractions d'une tige dont une extrémité a un mouvement obligatoire; et application au «frottement de roulement» sur un terrain uni et élastique. — Comptes rendus, t. LVIII, 1864, pp. 455—458.
75. Travail ou potentiel de torsion. Manière nouvelle d'établir les équations qui régissent cette sorte de déformation des prismes élastiques. — Comptes rendus, t. LIX, 1864, pp. 806—809; Phil. Mag., t. XXIX, 1865, pp. 61—64.
76. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité des corps solides et principalement sur l'homogénéité semi-polaire ou cylindrique, et les homogénéités polaire ou sphéronique et sphérique. — Liouville, Journ. Math., t. X, 1865, pp. 297—349.
77. Complément au Mémoire lu le 10 août 1857 sur l'impulsion transversale et la résistance vive des barres, verges ou poutres élastiques. — Comptes rendus, t. LX, 1865, pp. 42—47; t. LXI, 1865, pp. 33—37; t. LXII, 1866, pp. 130—134.
78. Théorème nouveau de mécanique, relatif aux forces vives vibratoires. Moyen pratique et élémentaire d'évaluer très approximativement, dans le plus grand nombre des cas, la flexion ou l'extension d'un système élastique, due à un choc. — Comptes rendus, t. LX, 1865, pp. 732—735.
79. Note sur les pertes apparentes de force vive dans le choc des pièces extensibles et flexibles, et sur un moyen de calculer élémentairement l'extension ou la flexion dynamique de celles-ci. — Comptes rendus, t. LXII, 1866, pp. 1195—1199.
80. Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour leur translation ultérieure; et, plus généralement, sur le mouvement longitudinal d'un système de plusieurs prismes. — Comptes rendus, t. LXIII, 1866, pp. 1108—1111; t. LXIV, 1867, pp. 1009—1013; Liouville, Journ. Math., t. XII, 1867, pp. 237—377; Les Mondes, t. XIII, 1867, pp. 69—72; t. XIV, 1867, pp. 206—211.
81. Notice sur la vie et les ouvrages de Pierre-Louis-Georges, comte du Buat, colonel du génie . . . auteur des «Principes d'hydraulique». — Lille, L. Danel, 1866, 84 p.; Mémoire de la Société des sciences de Lille, 1865, 3^e série, t. II.

82. Démonstration élémentaire: 1) de l'expression de la vitesse de propagation du son dans une barre élastique; 2) des formules nouvelles données, dans une communication précédente, pour le choc longitudinal de deux barres. — Comptes rendus, t. LXIV, 1867, pp. 1192—1195.
83. Sur le choc longitudinal de deux barres parfaitement élastiques et sur la proportion de leur force vive qui est perdue par la translation ultérieure. — Soc. Philom. Bull., t. 4, 1867, pp. 92—95.
84. Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes. — Liouville, Journ. Math., t. XIII, 1868, pp. 242—254.
85. Choc longitudinal de deux barres élastiques, dont l'une est extrêmement courte ou extrêmement roide par rapport à l'autre. — Comptes rendus, t. LXVI, 1868, pp. 650—653.
86. Solution, en termes finis, du problème du choc longitudinal de deux barres élastiques en forme de tronc de cône ou de pyramide. — Comptes rendus, t. LXVI, 1868, pp. 877—881.
87. Calcul du mouvement des divers points d'un bloc ductile, de forme cylindrique, pendant qu'il s'écoule sous une forte pression par un orifice circulaire; vues sur les moyens d'en rapprocher les résultats de ceux de l'expérience. — Comptes rendus, t. LXVI, 1868, pp. 1311—1324.
88. Solution du problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'un solide ductile ou d'un liquide contenu dans un vase pendant son écoulement par un orifice inférieur. — Comptes rendus, t. LXVII, 1868, pp. 131—137, 203—211, 278—282; t. LXVIII, 1869, pp. 221—237, 290—301.
89. Problème des remous, ou des gonflements produits jusqu'à de grandes distances dans les cours d'eau par les barrages qu'on y élève. — Soc. Philom. Bull., t. 5, 1868, pp. 9—17.
90. Note sur les valeurs que prennent les pressions dans un solide élastique isotrope, lorsque l'on tient compte des dérivées d'ordre supérieur des déplacements très-petits que leurs points ont éprouvés. — Comptes rendus, t. LXVIII, 1869, pp. 569—571.
91. Sur un potentiel de deuxième espèce, qui résout l'équation aux différences partielles du quatrième ordre exprimant l'équilibre intérieur des solides élastiques amorphes non isotropes. — Comptes rendus, t. LXIX, 1869, pp. 1107—1110.
92. Sur une détermination rationnelle par approximation de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 229—235, 281—286; Liouville, Journ. Math., t. XV, 1870, pp. 250—263.
93. Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 309—311.
94. Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée, contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de

- cette face du mur. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 717—724; Liouville, Journ. Math., t. XV, 1870, pp. 271—280.
95. Poussée des terres. Comparaison de ses évaluations au moyen de la considération rationnelle de l'équilibre limite, et au moyen de l'emploi du principe dit «de moindre résistance», de Moseley. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 894—897.
 96. Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique; et remarques sur les propagation du son et de la lumière, sur les *ressauts*, ainsi que sur la distinction des *rivières* et des *torrents*. — Comptes rendus, t. LXXI, 1870, pp. 186—195.
 97. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites ou l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. — Liouville, Journ. Math., t. XVI, 1871, pp. 308—316, 373—382; Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 473—480.
 98. Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. — Liouville, Journ. Math., t. XVI, 1871, pp. 275—307; Comptes rendus, t. LXXII, 1871, pp. 355—361, 391—394.
 99. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. — Comptes rendus, t. LXXIII, 1871, pp. 147—154, 237—240.
 100. Sur la houle et le clapotis. — Comptes rendus, t. LXXIII, 1871, pp. 521—528, 589—593.
 101. Sur la mécanique des corps ductiles. — Comptes rendus, t. LXXIII, 1871, pp. 1181—1184.
 102. Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses. — Annales de chimie, t. XXV, 1872, pp. 335—381.
 103. Du roulis sur mer houleuse, calculé en ayant égard à l'effet retardateur produit par la résistance de l'eau. — Cherbourg, Mem. Soc. Sci. Nat., t. XVI, 1872, pp. 5—66.
 104. Sur l'hydrodynamique des cours d'eau. — Comptes rendus, t. LXXIV, 1872, pp. 570—577, 649—657, 693—701, 770—774.
 105. Sur l'intensité des forces capables de déformer, avec continuité, des blocs ductiles cylindriques pleins ou évidés, et placés dans diverses circonstances. — Comptes rendus, t. LXXIV, 1872, pp. 1009—1015.
 106. Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques qui sont symétriques autour d'un même axe. — Comptes rendus, t. LXXIV, 1872, pp. 1083—1087.
 107. Partage de la force vive due à un mouvement vibratoire composé, en celles qui seraient dues aux mouvements pendulaires simples et isochrones composants, de diverses périodes et amplitudes. — Comptes rendus, t. LXXV, 1872, pp. 1425—1432, 1567—1572.
 108. Examen d'un essai de théorie de la poussée des terres contre les murs destinés à les soutenir. — Comptes rendus, t. LXXVII, 1873, pp. 234—241.
 109. De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de plastico-dynamique. — Comptes rendus, t. LXXXI, 1875, pp. 115—121.

110. Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps, et sur le coefficient des dilatations. — Comptes rendus, t. LXXXII, 1876, pp. 33—39.
111. Sur la constitution atomique des corps. — Comptes rendus, t. LXXXII, 1876, pp. 1223—1226.
112. Philosophie et enseignement des mathématiques. Sur la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. — Comptes rendus, t. LXXXIII, 1876, pp. 102—106, 256—257.
113. Accord des lois de mécanique avec la liberté de l'homme dans son action sur la matière. — Comptes rendus, t. LXXXIV, 1877, pp. 419—423.
114. Des paramètres d'élasticité des solides et de leur détermination expérimentale. — Comptes rendus, t. LXXXVI, 1878, pp. 781—785.
115. Sur la plus grande des composantes tangentielles de tension intérieur en chaque point d'un solide, et sur la direction des faces de ses ruptures. — Comptes rendus, t. LXXXVII, 1878, pp. 89—92.
116. Sur la dilatation des corps échauffés et sur les pressions qu'ils exercent. — Comptes rendus, t. LXXXVII, 1878, pp. 713—718.
117. Sur la torsion des prismes à base mixtiligne, et sur une singularité que peuvent offrir certains emplois de la coordonnée logarithmique du système cylindrique isotherme de Lamé. — Comptes rendus, t. LXXXVII, 1878, pp. 849—854, 893—899.
118. De la constitution des atomes. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2-e année, 1878.
119. Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion. — Comptes rendus, t. LXXXVIII, 1879, pp. 142—147.
120. Sur celle des déformations des corps soit élastiques, soit plastiques, soit fluides. — Comptes rendus, t. XC, 1880, pp. 53—56, 209.
121. Sur la mode de publication la plus favorable au progrès des études scientifiques. — Comptes rendus, t. XCIV, 1882, pp. 112—114.
122. Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. — Comptes rendus, t. XCIV, 1882, pp. 904—909, 1004—1008, 1139—1144.
123. Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considération du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. — Comptes rendus, t. XCV, 1882, pp. 359—365, 423—427.
124. Sur une évaluation, ou exacte ou d'une très-grande approximation, de la poussée des terres sablonneuses contre un mur destiné à les soutenir. — Comptes rendus, t. XCVIII, 1884, pp. 850—852.
125. Remarques relatives à la Note de M. Berthot sur les actions entre les molécules des corps. — Comptes rendus, t. XCIX, 1884, pp. 5—7.
126. Notice nouvelle sur la vie et les ouvrages du C^{te} Pierre-Louis-Georges du Buat, colonel du génie . . . — Caen, F. Le Blanc-Hardel, 1884, 35 p.; Mémoires de l'Académie des sciences, arts et belles lettres de Caen, 1884.
127. Sur le but théorique des principaux travaux de Henri Tresca. — Comptes rendus, t. CI, 1885, pp. 119—122.

128. Mouvements des molécules de l'onde dite *solitaire*, propagée à la surface de l'eau d'un canal. — Comptes rendus, t. CI, 1885, pp. 1101—1105, 1215—1218, 1445—1447.

РАБОТЫ, ВЫПОЛНЕННЫЕ СЕН-ВЕНАНОМ СОВМЕСТНО С ДРУГИМИ АВТОРАМИ

Saint-Venant, P. Michelot

Mémoire sur le calcul de la résistance d'un pont en charpente, et sur la détermination, ou moyen de l'analyse des efforts supportés dans les constructions existantes, des grandeurs des nombres constants qui entrent dans les formules de résistance des matériaux. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 1275—1277.

Saint-Venant, Laurent Wantzel

1. Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pression considérables. — Comptes rendus, t. VIII, 1839, pp. 294—298; Journ. de l'École polytechn., t. XVI, 1839, pp. 85—122.
2. Nouvelles expériences sur l'écoulement de l'air déterminé par des différences de pression considérables. — Comptes rendus, t. XVII, 1843, pp. 1140—1142.
3. Note sur l'écoulement de l'air. — Comptes rendus, t. XXI, 1845, pp. 366—369.

Saint-Venant, Flamant

1. Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée. — Comptes rendus, t. XCVII, 1883, pp. 127—133, 214—222, 281—290, 444—447.
2. Des vitesses que prennent, dans l'intérieur d'un vase, les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur, et des moyens simples qui peuvent être employés pour déterminer très approximativement les restes, numériques de séries doubles peu convergentes. — Comptes rendus, t. XCVII, 1883, pp. 1027—1031, 1105—1111.

ОТЗЫВЫ О РАБОТАХ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В АКАДЕМИЮ НАУК РАЗЛИЧНЫМИ АВТОРАМИ*)

1. Morin, Combes, Saint-Venant. — Rapport sur deux communications de M. Tresca, des 25 mai et 22 juin 1868, relatives à l'application des formules générales du mouvement des liquides à l'écoulement des solides ductiles. — Comptes rendus, t. LXVI, 1868, pp. 1305—1311.

*) По всем работам (кроме 14-й) Сен-Венан выступал в качестве докладчика от имени комиссии Академии наук.


2. Serret, Bonnet, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, présenté le 27 juillet 1868 et relatif à l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. — Comptes rendus, t. LXVI, 1868, pp. 187—289.
3. Combes, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur une communication de M. Vallès, faite le 21 décembre, sous ce titre: Expériences faites à l'écluse d'Aubois, pour déterminer l'effet utile de l'appareil à l'aide duquel M. de Caligny diminue dans une proportion considérable la consommation d'eau dans les canaux de navigation. — Comptes rendus, t. LXVIII, 1869, pp. 118—127.
4. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Maurice Lévy, relatif à l'hydrodynamique des liquides homogènes, particulièrement à leur écoulement rectiligne et permanent. — Comptes rendus, t. LXVIII, 1869, pp. 582—590.
5. Morin, Combes, Saint-Venant. — Rapport sur un complément, présenté par M. Tresca le 7 février 1870, à son Mémoire du 27 novembre 1864 relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 368—369.
6. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Maurice Lévy, présenté le 3 juin 1867, reproduit le 21 juin 1869 et intitulé: Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 217—228.
7. Delaunay, Bonnet, Jamin, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, présenté le 19 avril 1869, avec additions du 19 novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques. — Comptes rendus, t. LXX, 1870, pp. 360—367.
8. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Maurice Lévy, relatif aux équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles, au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur état. — Comptes rendus, t. LXXII, 1871, pp. 86—91.
9. Delaunay, Bertrand, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Kleitz intitulé: «Études sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, et application à l'hydrodynamique». — Comptes rendus, t. LXXIV, 1872, pp. 426—438.
10. Serret, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Félix Lucas, portant le titre: Théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels. — Comptes rendus, 1872, t. LXXIV, pp. 1463—1470.
11. Bonnet, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, présenté le 28 octobre 1872 et intitulé: «Essai sur la théorie des eaux courantes». — Comptes rendus, t. LXXVI, 1873, pp. 924—943.
12. Bonnet, Phillips, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire présenté le 19 juillet 1875, par Boussinesq, sous le titre: «Additions et éclaircissement à son „Essai sur la théorie des eaux courantes”». — Comptes rendus, t. LXXXI, 1875, pp. 464—466.

13. Tresca, Resal, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Lefort, présenté le 2 août 1875, et intitulé: «Examen critique des bases de calcul habituellement en usage pour apprécier la stabilité des ponts en métal à poutres droites prismatiques, et propositions pour l'adoption de bases nouvelles». — Comptes rendus, t. LXXXI, 1875, pp. 459—464.
14. Saint-Venant, Jamin, Puiseux, Resal. — Rapport sur un Mémoire de M. Félix Lucas, intitulé: «Vibrations calorifiques des solides homogènes». — Comptes rendus, t. LXXXII, 1876, pp. 1484—1486.
15. De la Gournerie, Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Popoff, intitulé: «Nouvelles recherches relatives à l'expression des conditions du mouvement des eaux dans les égouts». — Comptes rendus, t. LXXXVII, 1878, pp. 719—725.

ПОСМЕРТНЫЕ ИЗДАНИЯ ТРУДОВ Б. СЕН-ВЕНАНА

1. Des diverses manières de poser les équations du mouvement varié des eaux courantes. — Ann. Ponts et Chauss., t. 13, 1887, pp. 148—228.
2. Résistance des fluides: Considérations historiques, physiques et pratiques relatives au problème de l'action dynamique mutuelle d'un fluide et d'un solide, spécialement dans l'état de permanence supposé acquis par leurs mouvement. — Paris, Ac. Sci. Mém., 44, 1888, No 5, pp. 1—192, 271—273.
3. Mémoire sur la perte de force vive d'un fluide aux endroits où sa section d'écoulement augmente brusquement ou rapidement. — Paris, Ac. Sci. Mém., 44, 1888, No 5, pp. 193—243, 273.
4. Mémoire sur la prise en considération de la force centrifuge dans le calcul du mouvement des eaux courantes et sur la distinction des torrents et des rivières. — Paris, Ac. Sci. Mém., 44, 1888, No 5, pp. 245—269.
5. Courbes représentatives des lois du choc longitudinal et du choc transversal d'une barre prismatique. — Journ. de l'École polytechn., t. LIX, 1889, pp. 97—128.
6. Saint-Benezet, patron des ingénieurs. — Bourges, Tardy-Pigelet, 1889, 154 p.
7. (Совместно с Фламаном.) De la houle et du clapotis. — Ann. Ponts et Chauss., t. 15, 1888, pp. 705—809.





ЛИТЕРАТУРА О Б. СЕН-ВЕНАНЕ И ЕГО ТРУДАХ

1. Борзов И. Теория сопротивления призм кручению в связи с развитием общих начал теории упругости, СПб., 1884.
2. Boussinesq, Flamant. Notice sur la vie et les travaux de M. de Saint-Venant. — Ann. Ponts et Chauss., 1886, 6^e série, t. XII, № 67, pp. 583—595.
3. Phillips Ed. Notice sur M. de Saint-Venant et sur ses travaux. — Comptes rendus, 1886, t. CII, pp. 141—147.
4. Pearson K. M. Barré de Saint-Venant. — Nature, London—New York, vol. XXXIII, feb. 4, 1886, pp. 319—321.
5. Todhunter I., Pearson K. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, Cambridge, vol. I, 1886; vol. II, p. 1, 1893.
6. Борзов И. Памяти Сен-Венана, СПб., 1888.
7. Bertrand J. Éloges académiques. Nouvelle série. Paris, 1902.
8. Erim K. Sur le principe de Saint-Venant. — Proceeding of the Seventh International Congress for applied mechanics, London, 1948, vol. I, pp. 28—32.
9. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Принцип Сен-Венана и его использование в теории плит и оболочек. В кн.: «Расчет пространственных конструкций», вып. 1, сб. статей под ред. А. А. Уманского, М., Машстройиздат, 1950, стр. 329—342.
10. Timoshenko S. P. History of strength of materials with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
11. Schumann W. Sur différentes formes du principe de B. de Saint-Venant. — Comptes rendus, t. 238, № 9 (1^{er} Mars 1954), pp. 988—990.

12. Boley B. A. Application of Saint-Venant's principle in dynamical problems. — Journ. of Appl. Mech. New York, 1955, vol. 22, № 2, pp. 204—206.
13. Graviere J., Annonce de la Mort de M. de Saint-Venant. — Comptes Rendus, Janvier 1886, pp. 73—74.
14. Джанелидзе Г. Ю., Принцип Сен-Венана (к столетию принципа). — Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 192, 1958.
15. Тимошенко С. П., История сопротивления материалов, перевод с английского, ГТТИ, 1958.





СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Жизнь и научная деятельность Б. Сен-Венана	9

МЕМУАР О КРУЧЕНИИ ПРИЗМ

**с рассмотрением их изгиба, так же как и внутреннего
равновесия упругих твердых тел, и с практическими
формулами для расчета их сопротивления
одновременному действию различных сил**

Глава I. Предмет и введение	17
§ 1. Прямые и обратные решения задач о твердых упругих телах	17
§ 2. Смешанный, или полуобратный, метод	18
Глава II. Формулы внутреннего равновесия упругих твердых тел. Краткое напоминание об их обосновании для перемещений произвольной величины	20
§ 3. Средние перемещения малых молекулярных групп .	20
§ 4. Удлинения. Сдвиги	21
§ 5. Условия, при которых даже значительные перемещения точек упругих тел не изменяют их связности. Очень ма- лые сдвиги	23
§ 6. Зависимости между сдвигами и удлинениями в различ- ных направлениях. Изменение осей	24
§ 7. Различные сдвиги относительно прямой или в различ- ных направлениях относительно той же прямой. Главный сдвиг и т. д.	29
§ 8. Зависимости удлинений и сдвигов от весьма малых перемещений	32
§ 9. Давления. Их равнодействующая на различных грани- чных элемента. Их непрерывное изменение	35
§ 10. Соотношения между давлениями на различные грани, имеющие центр в одной точке	36

§ 11. Следствия. Изменение плоскостей давления. Плоскости, слегка наклоненные друг к другу	39
§ 12. Зависимость составляющих давления от удлинений и сдвигов	42
§ 13. Соображения о числе отличных друг от друга коэффициентов	45
§ 14. Однородные тела	50
§ 15. Тело с тремя плоскостями симметрии или главными плоскостями упругости	51
§ 16. Выбор осей координат с целью приведения к одной двух касательных составляющих давления. Коэффициент упругости при сдвиге	54
§ 17. Тело с одинаковой упругостью сдвига во всех направлениях, перпендикулярных к одной прямой или относительно этой прямой и во всех проходящих через нее плоскостях	56
§ 18. Тело, в котором имеется ось упругости	57
§ 19. Изотропное тело	60
§ 20. Соотношения между давлениями и внешними или объемными силами	61
§ 21. Неопределенные дифференциальные уравнения, справедливые во всех точках тела	63
§ 22. Определенные уравнения, справедливые только в некоторых точках	65
§ 23. Применение этих уравнений. Прямые, обратные и смешанные задачи	66
§ 24. Условия сопротивления последующему разрушению или прогрессирующему и опасному изменению строения тела	66
§ 25. Установление условий прочности. Опасные точки ..	72
§ 26. Условия прочности, когда сдвиги равны нулю или пренебрежимо малы в трех направлениях: x , y , z ..	73
§ 27. Условия прочности, когда рассматриваются только сдвиги	73
§ 28. Различные виды разрушений	75
Глава III. Применение теории в простом случае растяжения или сжатия призмы с произвольным основанием ..	77
§ 29. Постановка задачи. Предварительное решение другой задачи, обратной по отношению к первой	77
§ 30. Полное решение поставленной задачи	79
§ 31. Перемещения, не являющиеся очень малыми	83
§ 32. Более общая задача. Однородная призма без плоскости упругости	84
§ 33. Применение этих выводов на практике	85
Глава IV. Применение теории к изгибу призмы	88
§ 34. Изгиб по дуге окружности. Смешанный, или полуобратный, метод, которым мы воспользуемся	88
§ 35. Исследование выражений для перемещений	89
§ 36. Давления. Изгибающий момент	93

§ 37. Обобщение для случая, когда имеются продольные растяжения, равнодействующая которых не равна нулю и является постоянной	94
§ 38. Решение предложенной задачи определения перемещений по силам (обратная или отчасти обратная задача по отношению к только что решенной)	95
§ 39. Распространение этого решения на сколь угодно большой изгиб	96
§ 40. Неравномерный, или некруговой, изгиб	97
§ 41. Практические применения. Случай, когда сила или пара сил, изгибающая призму, действует в плоскости, параллельной одной из двух главных осей ее сечений	102
§ 42. Случай, когда плоскость действия изгибающих сил расположена косо по отношению к главным осям сечений. Определение плоскости действительного изгиба и кривизны. Условие сопротивления	104
§ 43. Новая форма контура сечения изогнутой призмы ..	107
§ 44. Криволинейная форма и наклон к оси первоначально плоских и нормальных сечений при неравномерном, или некруговом, изгибе	111
Глава V. О кручении призм. Общие дифференциальные уравнения	114
§ 45. Постановка задачи. Условия, относящиеся как к перемещениям, так и к силам. Геометрическое определение движения при кручении	114
§ 46. Обозначения, используемые в дальнейшем (вместе с обозначениями, приведенными в §§ 4, 6, 8, 11, 15, 18, 21, 22, 24, 27, 30, 36, 40)	115
§ 47. Характеристические уравнения кручения или выражения для условий относительно перемещений	117
§ 48. Выражения, относящиеся к силам, т. е. к внешним боковым давлениям	119
§ 49. Предполагаемая неподвижность одной из точек оси и т. д. Приведение к случаю очень малых перемещений	120
§ 50. Сдвиги. Крутящие моменты. Неопределенные и определенные уравнения	121
§ 51. Упрощения для первых решений. Одинаковая упругость при сдвиге. Равенство нулю изгибов, а также продольных и поперечных удлинений	123
Глава VI. Кручение призмы или цилиндра с эллиптическим основанием	125
§ 52. Определение продольных перемещений	125
§ 53. Сдвиги и крутящий момент	127
§ 54. Поперечные перемещения	127
§ 55. Давления, которые при этом возникают	128
§ 56. Решение задачи определения перемещений по данным силам	129
§ 57. Искривление сечения. Его влияние. Случай кругового сечения, когда искривление отсутствует	130

§ 58.	Практический случай	133
§ 59.	Кручение может иметь место только относительно оси призмы	138
§ 60.	Значительные перемещения, вызванные кручением	138
§ 61.	Наибольший сдвиг. Опасные точки	139
§ 62.	Сравнение с прежней теорией. Объяснение	140
§ 63.	Условие отсутствия разрушения или прочности сцепления	143
Глава VII. Общие выражения для интегралов неопределенного уравнения и вытекающие отсюда выражения сдвигов и крутящего момента		
§ 64.	Выражения в виде рядов показательных функций и синусов	145
§ 65.	Случай, когда сечение симметрично, а силы распределены симметрично по отношению к одной из двух осей y или z или по отношению к обоим осям	146
§ 66.	Целое многочленное выражение. Его запись в полярных координатах и распространение на произвольные показатели степени	148
§ 67.	Члены ряда, исчезающие при симметричном сечении. Члены, исчезающие при сечении, одинаковом в обоих направлениях y и z	152
Глава VIII. Кручение призмы с прямоугольным основанием 154		
§ 68.	Состояние рассматриваемого вопроса	154
§ 69.	Неопределенные и определенные уравнения	156
§ 70.	Решение этих уравнений	158
§ 71.	Сдвиги. Проверка	162
§ 72.	Касательные давления. Крутящий момент. Нормальные давления	163
§ 73.	Задача о перемещениях при заданных силах. Случай из практики	166
§ 74.	Первый пример. Случай, когда одна из сторон прямоугольника очень велика по сравнению с другой	167
§ 75.	Второй пример. Призма с основанием в виде квадрата	171
§ 76.	Искривленная поверхность сечений после кручения. Разрезы. Рельеф. Экспериментальное подтверждение	175
§ 77.	Крутящий момент для квадратной призмы	177
§ 78.	Экспериментальное подтверждение	178
§ 79.	Другой способ определения численного соотношения между сопротивлением квадратных призм и сопротивлением круговых цилиндров при одинаковом моменте инерции их оснований	182
§ 80.	Продолжение. Общее целое выражение крутящего момента для прямоугольной призмы	186
§ 81.	Относительные сдвиги волокон призмы с квадратным сечением	188
§ 82.	Опасные точки. Наибольший сдвиг	192

§ 83. Условие прочности квадратной призмы. Экспериментальное подтверждение	194
§ 84. Случай любого соотношения между двумя измерениями основания. Вычисление u при $\frac{b}{c} = 2$. Графики случаев, когда искривленное сечение делится на четыре или на восемь частей	196
§ 85. Крутящий момент для прямоугольных призм	199
§ 86. Сравнение с опытными данными	202
§ 87. Относительные сдвиги волокон для прямоугольных сечений. Наибольшие сдвиги для точек каждой из их сторон	205
§ 88. Опасная точка, в которой имеет место наибольший сдвиг. Опыты	209
§ 89. Уравнение отсутствия разрушения или прочности сцепления скрученной призмы. Наибольшие сдвиги	212

Глава IX. Кручение призм с другими основаниями, не в виде эллипса или прямоугольника

§ 90. Бесконечность числа видов уравнения контура сечения и выражений для продольного перемещения u	215
§ 91. Трансцендентные и алгебраические виды выражения u	217
§ 92. Симметричные алгебраические кривые. Кривые, одинаковые в двух направлениях	220
§ 93. Способы, с помощью которых уравнениям придают определенную форму и делают их однородными	221
§ 94. Симметричные и равные замкнутые кривые четвертой степени	223
§ 95. Нахождение этих кривых	225
§ 96. Кривые восьмой степени, симметричные и одинаковые в двух направлениях	228
§ 97. Условия, при которых эти кривые замкнуты	231
§ 98. Кривые восьмой степени, у которых наименьший диаметр равен половине наибольшего	233
§ 99. Кривые, представленные уравнениями, в которых радиус-вектор имеет отрицательные показатели степени. Кривые двенадцатой и шестнадцатой степеней и т. д.	236
§ 100. Сдвиги и крутящий момент в призмах, имеющих основания в виде кривых четвертой и восьмой степеней	238
§ 101. Вычисление крутящих моментов. Ничтожность влияния выступов сечения или ребер призм	241
§ 102. Топографические разрезы и рельеф искривленных поверхностей, в которые превращаются сечения	244
§ 103. Сдвиги, опасные точки и условия прочности для криволинейных квадратов четвертой степени	246
§ 104. Те же сдвиги и т. д. для криволинейного основания восьмой степени с выступающими ребрами	251
§ 105. Контур, неодинаковые относительно осей y и z . Несимметричные контуры. Призма с основанием в виде равностороннего треугольника. Заключение к главе	253

Глава X. Случаи, когда упругость при сдвиге неодинакова в направлениях двух поперечных осей	260
§ 106. Общие уравнения для продольного перемещения u	260
§ 107. Применение формул в случае эллиптического цилиндра или призмы. Частный случай, когда длина осей пропорциональна корням квадратным из упругостей при сдвиге в направлениях этих осей	261
§ 108. Продолжение. Условие прочности для такой же эллиптической призмы с неодинаковой упругостью	262
§ 109. Изменения в общих выражениях интегралов неопределенного уравнения главы VII, когда упругость при сдвиге неодинакова	264
§ 110. Прямоугольная призма с неодинаковой упругостью. Перемещения. Сдвиги. Крутящий момент	267
§ 111. Случай, когда $\sqrt{G'}$ очень мало сравнительно с $b\sqrt{G''}$	269
§ 112. Случай, когда $\frac{b}{c} = \sqrt{\frac{G'}{G''}}$	270
§ 113. Общий случай, когда стороны $2b$, $2c$ прямоугольника с неодинаковой упругостью находятся между собой в любом соотношении	272
§ 114. Призмы с другими основаниями (кроме эллипса и прямоугольника), аналогичными рассмотренным в главе IX	275
§ 115. Нормальность сечений, ставших искривленными, к ребрам, превратившимся в спирали	277
Глава XI. О кручении полых призм	279
§ 116. Полая эллиптическая призма	279
§ 117. Полая прямоугольная призма	281
§ 118. Полые призмы с другими основаниями	283
Глава XII. Случай одновременного кручения, изгиба, удлинений и поперечных сдвигов. Условия прочности при их одновременном воздействии	286
§ 119. Определение перемещений. Самое простое геометрическое сложение перемещений, вызванных различного рода усилиями	286
§ 120. Наложение перемещений, вызванных силами, производящими одновременно растяжение, изгиб и кручение призмы	289
§ 121. Общие условия прочности при различных воздействиях	291
§ 122. Более частные и более простые условия	293
§ 123. Простой и непосредственный вывод этих формул ...	296
§ 124. Формулы сопротивления в случае замены удлинений и сдвигов их выражениями через внешние силы, действующие на тело	298
§ 125. Видоизменения, касающиеся сдвигов, для некоторых особых сечений	302

§ 126.	Первое применение. Призма, испытывающая одновременно изгиб и поперечный сдвиг. Случай, когда наиболее подверженное опасности сечение может изгибаться	304
§ 127.	Та же призма. Случай, когда наиболее подверженное опасности сечение вынуждено оставаться плоским. Сомнительный случай	306
§ 128.	Цилиндр с круговым основанием, одновременно изгибаемый, скручиваемый и растягиваемый	311
§ 129.	Вращающийся вал, изгибаемый и скручиваемый посредством двух шестерен или двух приводных ремней. Консоль переменного диаметра, удовлетворяющая условию равного сопротивления	315
§ 130.	Прямоугольная призма, одновременно изогнутая и скрученная. Общие формулы	318
§ 131.	Та же прямоугольная призма. Случай ее изгибания в плоскости наиболее легкого изгиба, т. е. в плоскости, параллельной наименьшим сторонам $2c$ (см. § 133)	322
§ 132.	Призма с квадратным основанием, изогнутая в любой плоскости и одновременно скрученная	324
§ 133.	Призма с прямоугольным основанием, одна из сторон которого вдвое больше другой, изогнутая в любой плоскости, параллельной или наклоненной к ее граням, и одновременно скрученная	324
§ 134.	Одновременный изгиб и кручение призм с другими основаниями (кроме круга и прямоугольника). Эллиптический цилиндр	330
Глава XIII. Резюме этого мемуара, краткое повторение формул и практические правила, численные примеры 337		
§ 135.	Общее резюме	337
§ 136.	Краткое повторение формул и практические правила	344
§ 137.	Числовые примеры	369
§ 138.	Таблица, относящаяся к кручению прямоугольных призм	376

МЕМУАР ОБ ИЗГИБЕ ПРИЗМ,

о поперечных и продольных сдвигах, которые ему сопутствуют, когда изгиб не происходит равномерно или по дуге окружности, а также об искривлении первоначально плоских поперечных сечений

§ 1.	Прежние исследования по теории изгиба	381
§ 2.	Принятая в настоящее время теория изгиба, вызванного неравномерным продольным растяжением волокон. Гипотезы, на которых она обычно основывается. Ненужность этих гипотез ввиду их неточности для вывода формул	385

§ 3.	Предмет и краткое содержание этого мемуара	390
§ 4.	Краткое разъяснение формул давлений внутри твердых упругих тел. Зависимости между давлениями в различных направлениях в одной точке	393
§ 5.	Продолжение. Удлинения, сдвиги. Линейные выражения для составляющих давления	395
§ 6.	Продолжение. Притяжения и отталкивания, функции молекулярных расстояний. Теорема геометрического сложения сил и малых перемещений	396
§ 7.	Продолжение. Число существенно различных коэффициентов. Его сокращение с тридцати шести до пятнадцати	398
§ 8.	Продолжение. Изменения осей и плоскостей, относительно которых рассматривают давления, удлинения и сдвиги	401
§ 9.	Упрощение формул для составляющих давления в случае тел с различным строением	404
§ 10.	Неопределенные дифференциальные уравнения равновесия упругих твердых тел. Выражения удлинений и сдвигов через очень малые перемещения	408
§ 11.	Определенные уравнения, удовлетворяющиеся только в точках поверхности	411
§ 12.	Применение этих формул к растяжению призмы. Сопровождающие его поперечные сжатия. Коэффициент упругости	412
§ 13.	Применение общих формул Пуассоном и Коши для приближенного решения задачи изгиба	415
§ 14.	Принятые условия и уравнения нашей задачи о неравномерном изгибе призм	420
§ 15.	Первые следствия заданных условий и соотношений	423
§ 16.	Первое интегрирование	425
§ 17.	Распределение сил. Обстоятельства, сопровождающие неравномерный изгиб. Наклон и кривизна сечений. Взаимный наклон волокон. Полная стрела прогиба	429
§ 18.	Кривые контуров сечений, для которых произвольная функция F полностью определяется через y и z . Эллиптический контур и т. д.	431
§ 19.	Способ приложения и распределения внешних сил, уточняющий для различных контуров обычные формулы изгиба, вызванного продольными удлинениями. Значения величины центрального наклона g_0 . Сечения эллиптические, круговые, в виде ложного эллипса и т. д.	440
§ 20.	Те же контуры. Полная стрела прогиба при изгибе.	445
§ 21.	Те же контуры. Искривленные поверхности, образованные первоначально плоскими сечениями. Их обычная топография	446
§ 22.	Продолжение. Случай, когда каждая искривленная поверхность сечений является общей для бесконечного числа контуров	450

§ 23. Подробное изложение вопроса для различных сечений. Окружность. Ложный эллипс (овал). Сечения с контуром девятой степени, которые искривляются точно по цилиндрической поверхности с основанием в виде кривой третьей степени, имеющей форму гуська	451
§ 24. Прямоугольная призма. Преобразование неопределенных и определенных условий	455
§ 25. Интегрирование с помощью трансцендентного ряда	456
§ 26. Выражения для перемещений точек прямоугольной призмы	461
§ 27. Давления P_{xy} , P_{xz} . Проверка полученных результатов	462
§ 28. Центральный сдвиг. Изогнутая ось. Стрела прогиба при изгибе	464
§ 29. Искривленная поверхность, образованная первоначально плоскими прямоугольными поперечными сечениями	466
§ 30. Сечения произвольной формы	470
§ 31. Непосредственное доказательство известных формул изгиба призм, вызванного только их продольными удлинениями	473
§ 32. Заключение. Общий обзор для случая, когда способ приложения и распределения внешних сил на концах призмы отличен от способа, дающего совершенно точные формулы в соответствии со смешанным методом	492

ПЕРЕЧЕНЬ ТРУДОВ Б. СЕН-ВЕНАНА ЛИТЕРАТУРА О Б. СЕН-ВЕНАНЕ И ЕГО ТРУДАХ

Перечень трудов Б. Сен-Венана	497
Работы, выполненные Сен-Венаном совместно с другими авторами	505
Отзывы о работах, представленных в академию наук различными авторами	505
Посмертные издания трудов Б. Сен-Венана	507
Литература о Б. Сен-Венане и его трудах	508



Б. СЕН-ВЕНАН

Мемуар о кручении призм.

Мемуар об изгибе призм.

Редактор *И. К. Снитко.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *А. С. Бакулова.*

✱

Сдано в набор 25/УІІІ 1960 г. Подписано к печати 11/УІІ 1961 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 16,25. Усл. п. л. 26,65. Уч.-изд. л. 26,13. Тираж 3000 экз. Цена 1 р. 51 к.

✱

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

✱

Типография Академии Будапешт