Г. ВАГНЕР

ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

1

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Harvey M. Wagner

Department of Administrative Science Yale University;
Consultant to McKinsey and Company, Inc.

Principles of Operations Research

With Applications to Managerial Decisions

Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs,

New Jersey 1969

Г. ВАГНЕР

ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Том I

Перевод
с английского
Б. Т. Вавилова

Издательство «Мир»
Москва 1972

УДК 35.073.5

Книга Вагнера является одной из фундаментальных работ по исследованию операций. На русском языке она издается в трех томах.

В первом томе подробно изложены основные концепции исследования операций и рассмотрены методы оптимизации управляющих решений с помощью аппарата линейного программирования. Значительная часть книги посвящена обсуждению специфических приемов оптимизации на сетях. Особое внимание уделяется искусству построения моделей и анализу оптимальных решений на чувствительность. Приведено много примеров, которые помогают быстро освоить методы решения линейных оптимизационных задач.

Книга предназначена для специалистов, интересующихся операционными методами решения задач организационного управления. Она, несомненно, окажется полезной для математиков-прикладников, экономистов, специалистов по теории алгоритмизации, программистов, системотехников, а также различных категорий руководящих лиц как производственной, так и непроизводственной сферы деятельности. Студенты, специализирующиеся по исследованию операций или по смежным дисциплинам, могут использовать эту книгу в качестве учебного пособия.

Редакция литературы по вопросам новой техники

3-3-14

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Среди многочисленных проблем, возникновение которых обусловлено бурно развивающейся научно-технической революцией, пожалуй, наиболее важной является проблема совершенствования управления во всех звеньях народного хозяйства.

Современные промышленные предприятия и научно-производственные комплексы, научно-исследовательские и опытно-конструкторские центры, комбинаты бытового обслуживания и транспортно-экспедиционные агентства, т. е. самые разнообразные по характеру своей деятельности организации производственной и непроизводственной сферы, представляют собой сложные системы «человек — машина», эффективность функционирования которых существенно зависит от качества организационного управления этими системами. Чтобы добиться высокого качества управления такого рода системами, современному руководителю далеко не всегда бывает достаточно личного опыта, интуиции и организаторских способностей в их традиционном понимании. При формировании как стратегических, так и многих тактических решений руководитель вынужден учитывать многочисленные, нередко взаимно противоречивые соображения и опираться на сложные критерии эффективности путей достижения конечных целей. При решении широкого круга задач оптимизации управляющих решений неоценимую услугу оказывает руководителю исследование операций.

Основной особенностью операционной методологии является то, что поиск оптимального (по тому или иному критерию) управляющего решения всегда предполагает построение математической модели и использование для ее анализа математического аппарата. Это означает, что хотя бы некоторые данные, фигурирующие в формулировке задачи, должны иметь количественное выражение (по абсолютной или относительной шкале оценок). Соображения качественного характера учитываются при этом дополнительно и являются своеобразным фоном для используемой математической модели. Безусловно, при решении практических задач возможны ситуации, когда роль этого фона оказывается решающей, и руководитель, получив математическое решение, предпочитает положить его «под сукно» и действовать, опираясь на собственные, порой чисто интуитивные соображения.

Предшествующий построению математической модели всесторонний качественный и количественный анализ той или иной задачи организационного управления — неотъемлемая часть методологии исследования операций. Этот анализ осуществляется в соответствии с принципами системного подхода и предполагает выявление всех существенных элементов задачи и их взаимосвязей.

Проведение системного анализа каждой конкретной задачи, как правило, осуществляется операционной группой, состоящей из специалистов различных профилей: математиков, экономистов, психологов и т. д. Именно комплексный состав операционной группы обеспечивает всестороннее и наиболее полное изучение существа проблемы и позволяет увидеть различные ее аспекты.

Таким образом, методология исследования операций включает следующие наиболее существенные компоненты: системный анализ, моделирование и использование для решения задач организационного управления комплексных операционных групп.

Модели, как правило, представляют собой приближенное математическое описание процессов функционирования исследуемых систем. Они различаются как по характеру, так и по степени сложности. Существуют модели детерминистические и вероятностные (стохастические). Как те, так и другие обычно содержат подлежащую оптимизации (максимизации или минимизации) целевую функцию и некоторую совокупность ограничений. Физический смысл целевой функции зависит от существа оптимизационной задачи. В задачах производственно-экономического характера целевая функция чаще всего представляет собой подлежащую максимизации прибыль или подлежащие минимизации затраты (например, связанные с хранением запасов или с транспортировкой продукции к местам сбыта и др.) В моделях противоракетной обороны целевая функция может иметь смысл вероятности обнаружения и перехвата (или поражения) ракет противника и т. д. Фигурирующие в математической модели ограничения представляют собой систему соотношений, сужающих область допустимых значений так называемых управляемых переменных, т. е. тех измеримых величин (показателей и факторов), значения которых подлежат оптимизации. Выраженные через управляемые переменные целевая функция и ограничения и составляют математическую модель задачи организационного управления (или задачи оптимизации управляющего решения). При решении практических операционных задач находят эффективное применение различные классы оптимизационных моделей (линейные, нелинейные, динамические, целочисленные, имитационные) и методы оптимизации, основанные на использовании математического программирования.

Эффективность операционных методов анализа и решения задач оптимизации в сфере организационного управления существенно возрастает при использовании электронно-вычислительной техники. Применение ЭВМ позволяет решать сложные задачи, математическая постановка которых сопряжена с необходимостью рассмотрения «крупномасштабных» моделей, содержащих большое число (иногда до нескольких сотен) ограничений. Решение такого рода задач большой размерности без ЭВМ практически невозможно.

Для успешного решения практических задач совершенствования управления в сфере организационно-хозяйственной и государственно-административной деятельности нашей стране требуются соответствующие научные кадры, и в частности квалифицированные специалисты в области исследования операций. Решению проблемы подготовки операционных кадров в настоящее время уделяется у нас большое внимание. В последние годы организовано преподавание этой научной дисциплины в ряде высших учебных заведений. Особое значение приобретает проблема кадров в связи с планами создания в нашей стране большого количества автоматизированных систем управления (АСУ), предусматривающих комплексное использование современных научно-технических достижений.

С расширением масштабов и повышением уровня подготовки специалистов-операционистов, естественно, возрастают потребности в литературе по исследованию операций. В последнее время опубликован ряд серьезных работ советских и зарубежных специалистов в области исследования операций, теории управления и математического программирования. Однако потребности постоянно расширяющегося круга читателей еще полностью не удовлетворены — особенно нужны книги, которые соответствовали бы запросам читателей, стремящихся овладеть методологическими основами исследования операций при минимальных временных затратах на освоение математического аппарата. Оптимальным по такому критерию является предлагаемый вниманию читателей фундаментальный труд Г. Вагнера, одного из ведущих американских специалистов по исследованию операций. Эта книга почти одновременно была издана в США, Англии, Франции, Японии, Канаде, Италии и ФРГ. В ряде стран (в частности, в США, Канаде и Англии) она считается лучшим учебным пособием для студентов высших учебных заведений, готовящихся к операционной деятельности в прикладном плане.

На русском языке книга Г. Вагнера издается в трех томах.

В первом томе изложены методологические основы исследования операций и подробно рассмотрены методы решения оптимизационных задач с помощью аппарата линейного программирования. Приведены задачи оптимизации на сетях.

Во втором томе рассмотрены задачи организационного управления, для решения которых применяются главным образом методы динамического, нелинейного и целочисленного программирования.

Третий том посвящен проблемам оптимизации управляющих решений методами стохастического программирования (при использовании аппарата других видов математического программирования). Излагаются также принципы и методы имитационного моделирования. В заключительной главе тома затронуты общие вопросы организации операционных исследований и практического использования (внедрения) получаемых при этом результатов.

Вряд ли стоит навязывать читателю то или иное мнение относительно достоинств книги — он сам сможет их оценить. Хочется лишь сказать несколько слов о стилистических особенностях книги. Автор явно предпочел сухому академическому стилю изложения живой, образный. Такой колорит книги не наносит, однако, ни малейшего ущерба строгости изложения материала. Скорее, наоборот, он придает математическим построениям наглядность, весьма полезную для развития у читателя операционной интуиции и «конструктивной фантазии». Читатель, несомненно, обратит внимание на то, что названия фирм и организаций в книге явно вымышленные.

В конце каждой из глав приведено большое число упражнений. Эти упражнения, различные по степени трудности, чаще всего имеют непосредственную смысловую связь с рассматриваемыми задачами. Выполнение упражнений, бесспорно, будет способствовать более быстрому усвоению излагаемого материала и развитию операционной интуиции.

Наконец, следует отметить еще одну особенность книги, относящуюся к области терминологии. Автор иногда отступает от сложившихся традиций. Так, например, при изложении симплексного метода он использует термин «допустимое решение» вместо гораздо чаще встречающегося «допустимый план»; несколько иной смысл вкладывается им в понятие «базис» и т. д. Однако всем используемым в книге понятиям даны исчерпывающие определения.

Как уже отмечалось выше, книга может быть использована как учебник по операционным методам анализа и решения задач организационного управления, но она отнюдь не является пособием по математическому программированию. Поэтому, излагая математические методы, автор не всегда стремится к их формулировке в самом общем виде. Многие математические приемы анализа и решения оптимизационных задач объясняются лишь на конкретных примерах. Однако после внимательного ознакомления с такого рода «иллюстрациями», как правило, складывается достаточно полное представление об используемом математическом методе в целом. Это, несомненно, результат педагогического мастерства автора, сумевшего обеспечить простоту изложения материала и высокий научный уровень книги.

Есть все основания надеяться, что книга Вагнера будет с интересом встречена широким кругом советских читателей и окажет существенную помощь при подготовке высококвалифицированных операционистов.

Б. ВАВИЛОВ

ГЛАВА 1

Искусство и наука в организационном управлении

1.1. НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ТЕРМИНЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

Многим может показаться несколько парадоксальным, что одному только введению в научную дисциплину с весьма неопределенным названием «исследование операций» можно посвятить столь обширный труд, преследующий единственную цель — изложение общих принципов. Термин «исследование операций» возник во время второй мировой войны. Тогда он полностью соответствовал содержанию предмета. К сожалению, несмотря на то что теперь методы исследования операций находят значительно более широкое применение по сравнению с военными годами, данное название по-прежнему используется.

В настоящее время существует международная федерация, объединяющая различного рода научно-исследовательские организации, специализирующиеся в области исследования операций. Термин «исследование операций» можно встретить в названиях специальных подразделений, сформированных на многих промышленных предприятиях. То же самое можно сказать о соответствующих факультетах, организованных во многих ведущих университетах, упорно продолжающих культивировать это название. За положительные результаты в области исследования операций может быть присвоена соответствующая ученая степень. Интересы сохранения преемственности настолько велики, что название «исследование операций» вряд ли будет вытеснено каким-либо другим в ближайшем будущем. Поэтому, несмотря на то что данный термин не достаточно точно отражает суть дела, а порой даже вводит в заблуждение, к нему следует относиться с должным уважением. Он вполне это заслужил.

1.2. О ДРУГИХ НАЗВАНИЯХ

Термин «исследование операций» (operations research) имеет многочисленные синонимы, также получившие широкое распространение. В Англии более употребительным является выражение «операционные исследования» (operational research) [1]. Американцы часто используют термин «наука об управлении», популярность которого

[1]) Автор сравнивает термин «operational research», используемый главным образом в Англии, с американским термином «operations research». При переводе на русский язык между этими терминами, как правило, не делают различия, отдавая предпочтение выражению «исследование операций».— *Прим. перев.*

обусловлена существованием еще одной международной организации — Института научного управления. Упомянутая выше международная федерация, известная под названием «Общество по исследованию операций», и Институт научного управления регулярно устраивают совместные конференции, и нередко одни и те же лица являются членами обеих организаций. Разумеется, для тех, кто только приступает к изучению данного предмета, все эти разногласия, относящиеся к области семантики, могут иметь второстепенное значение.

Для удобства можно с достаточной степенью точности определить исследование операций как научный подход к решению задач организационного управления. При решении любой конкретной задачи применение методов исследования операций предполагает:

1) построение математических, экономических или статистических моделей для задач принятия решений и управления в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

2) изучение взаимосвязей, определяющих возможные последствия принимаемых решений, а также установление критериев эффективности, позволяющих оценивать относительное преимущество того или иного варианта действий.

Иногда полагают, что предметом исследования операций являются повседневно возникающие задачи управления деятельностью той или иной организации. Другими словами, считают, что речь идет об управленческих задачах, возникающих в ходе реализации некоторых ежедневно повторяемых «операций». Методы исследования операций действительно находят применение при решении некоторых задач такого типа. К их числу относятся, в частности, задачи, связанные с календарным планированием производства и управлением запасами, с эксплуатацией и ремонтом оборудования, а также задачи комплектования штатов на предприятиях коммунально-бытового обслуживания.

Однако методы исследования операций нередко используются для решения иного рода управленческих задач, имеющих лишь косвенное отношение к повседневным операциям. Задачи такого рода, как правило, связаны с планированием. К их числу относятся, в частности, задачи определения ассортимента выпускаемой продукции, разработки долгосрочных программ расширения производства, проектирования сети складских помещений в системе оптовой торговли, а также задачи освоения новых сфер производственной или коммерческой деятельности путем слияния с другими фирмами или путем приобретения последних.

Имеющее место несоответствие между термином «операция» и тем кругом задач, при решении которых используются методы излагаемой здесь научной дисциплины, вызывает явное сожаление. Но дело обстоит еще хуже. Когда мы говорим «исследование», то это порождает ложное впечатление «созерцательности» самого метода рассмотрения. Фактически же наблюдается совершенно противоположное. За последнее десятилетие применение методов исследования операций неоднократно подтверждало большие возможности этих методов и их высокую эффективность при решении практических задач управления. Соображения, изложенные в настоящей главе, должны явиться предварительным обоснованием практической ценности методов исследования операций. Чтобы окончательно в этом убедиться, необходимо внимательно ознакомиться по крайней мере с основными разделами данной книги.

Разумеется, в области исследования операций продолжаются фундаментальные теоретические разработки. Они проводятся главным образом в университетах, а также в различного рода научно-исследовательских лабораториях при государственно-административных и производственно-коммерческих организациях. В отличие от других наук серьезные теоретические достижения в области исследования операций сравнительно быстро находят практическое применение.

Управляющие решения в сложных ситуациях и в условиях неопределенности. Рассматриваемый предмет исследования лучше всего характеризуется термином «анализ управляющих решений». Именно задача принятия решений (или выбора способов действий) является главной для всех операционных исследований.

Анализ управляющих решений предполагает расчленение той или иной сложной проблемы на подпроблемы, легче поддающиеся логическому и интуитивному рассмотрению. Результаты тщательного исследования каждой из подпроблем надлежащим образом синтезируются, что позволяет глубже осмыслить исходную проблему в целом. Чем же объяснить возникновение управленческих задач сложного характера?

Одна из причин заключается в том, что в современной экономике производственно-технические, конъюнктурно-коммерческие и прочие факторы находятся в сложной взаимной зависимости. Так, например, план выпуска продукции того или иного предприятия должен учитывать спрос покупателей [1]), потребности в сырье, необходимые оборотные фонды, мощности оборудования, вероятность возникновения технических неполадок, а также ограничения производственно-технологического характера. Составление плана, который был бы одновременно и реальным, и экономически выгодным, является задачей далеко не легкой.

Другая причина сложности возникающих в практической деятельности управленческих задач состоит в том, что различные подразделения одной и той же организации могут (возможно, не всегда полностью осознанно) преследовать противоречивые цели, ответственность за принимаемые решения и административные полномочия

[1]) Который может измениться, если конкурирующие предприятия снизят цены на соответствующие товары.

часто сильно рассредоточены по различным структурным единицам, а внешние экономические факторы, от которых зависит деятельность рассматриваемой организации, могут содержать элементы неопределенности.

Операционный подход направлен на совершенствование самих процедур выработки управляющих решений. Степень успешности данного подхода измеряется чистой прибылью, получаемой за счет практической реализации результатов операционного исследования. Следует видеть различие между совершенствованием процедур принятия управляющих решений и совершенствованием процесса их исполнения, или, другими словами, между «хорошим решением» и «хорошим практическим результатом». Так, например, по некоторым соображениям, решение заключить пари на скачках может считаться (с экономической или моральной точки зрения) далеко не лучшим; однако, если пари тем не менее заключено, результат может оказаться (в случае выигрыша!) положительным. Анализ с целью выработки наиболее обоснованного решения важен потому, что в условиях, когда конечный результат не определен однозначно, на развитие событий можно влиять только принимаемым решением.

Характерные черты операционного подхода. Существует много различных методов решения управленческих задач, причем в большинстве своем эти методы схожи. По-видимому, трудно указать четкое различие между операционным подходом к решению задач организационного управления и теми способами принятия управляющих решений, которыми пользуются такие категории лиц, как инженеры-производственники, экономисты-плановики, бухгалтеры или специалисты по оценке экономической эффективности систем информационного обслуживания управленческого аппарата. Однако методы исследования операций обладают рядом специфических черт. Чтобы тот или иной подход к решению какой-либо конкретной задачи можно было квалифицировать как операционный, он должен содержать, в частности, следующие элементы:

1. *Ориентация на принятие решения.* Основные результаты анализа должны иметь непосредственное и полностью определенное отношение к выбору способа действий (т. е. стратегии или тактики).

2. *Оценка на основе критериев экономической эффективности.* Сравнение различных возможных вариантов действий должно основываться на количественных оценках, позволяющих однозначно определить полезность ожидаемого исхода для рассматриваемой организации. Количественные оценки для коммерческих фирм обычно предполагают использование таких измеримых величин, как расходы, доходы, наличные денежные средства, норма прибыли от дополнительных капиталовложений и пр. Надлежащую количественную оценку должны получить колебания рыночного спроса. В рекомендуемом решении должен быть достигнут оптимальный «баланс» с учетом всех этих нередко противоречивых факторов.

3. *Доверие к математической модели.* Процедуры обращения с упомянутыми выше параметрами должны быть определены настолько точно, чтобы любой специалист в области системного анализа смог их трактовать совершенно однозначно. Другими словами, опираясь на одни и те же данные, различные специалисты-аналитики должны получать одинаковые результаты.

4. *Необходимость использования ЭВМ.* Это условие отнюдь не является лишь желательным. Его, скорее, следует считать необходимым, что обусловливается либо сложностью используемых математических моделей и большими объемами данных, подлежащих обработке, либо громоздкостью вычислительных процедур, обеспечивающих те или иные системы управления и контроля.

В науку нужно верить. Ни одна организация не примет на вооружение методы исследования операций, пока не поверит в то, что к анализу задач организационного управления действительно применим научный подход. Это утверждение не так уж банально, как может показаться на первый взгляд. Чтобы положиться на теорию исследования операций, необходима убежденность в полезности системного подхода к организационному управлению, а такая убежденность присуща далеко не всем руководителям.

В наш век агитация за признание научного подхода (а операционный подход является научным) может показаться странной. Вряд ли у кого-нибудь может вызвать сомнение возможность применения научных методов при исследовании других реальных объектов и явлений (например, при исследовании физических явлений). В результате многовекового опыта физики и химики разработали эффективные методы лабораторного эксперимента. Что же касается научного подхода к решению серьезных организационно-управленческих проблем, то возможности его пока полностью не выявлены. Для признания эффективности операционных методов исследования необходим, как выразился (правда, в совершенно другой связи) поэт Колридж, «добровольный отказ от недоверия». Вот почему призыв поверить в науку здесь вовсе не звучит парадоксально.

Лишь в редких случаях фирма имеет возможность (а не исключено, что она никогда не будет иметь возможности) осуществить то, что, с точки зрения большинства людей, считалось бы настоящим научным экспериментом по проверке качества решения, полученного операционным методом. Рассмотрим, например, фирму, которая при реализации текущего годового плана намерена воспользоваться некоторой математической моделью. Поскольку экономическая «среда» фирмы с каждым годом изменяется, повторяемость ситуаций отсутствует и, следовательно, данная фирма никогда не сможет иметь неоспоримое доказательство того, что решение, полученное с помощью используемой ею модели, приводит к фактическому улучшению процедуры планирования по сравнению с общепринятым методом.

Обратимся к другому примеру. Допустим, что некоторая операционная модель предназначена для управления запасами. В этом случае при определении преимущества новой системы по сравнению с традиционным подходом к решению указанной проблемы также возникают существенные трудности. Можно было бы оценить результаты, получаемые операционным методом, ретроспективно, используя при этом данные, относящиеся к прошлому. Однако такого рода сравнение не явилось бы настоящим научным экспериментом, результаты которого можно было бы выразить через управляемые переменные. Действительно, во-первых, можно лишь *предположить*, что характеристики, относящиеся к прошлому, представляют интерес в связи с оценкой того, что произойдет в будущем. Во-вторых, если предлагаемое решение позволяет усовершенствовать процедуру обслуживания и если это усовершенствование оценено клиентурой, то спрос на обслуживание может возрасти. Другими словами, новая стратегия фирмы может привести к изменению внешних условий ее функционирования.

Таким образом, характеристики, имевшие место в прошлом, могут оказаться нетипичными для будущего, а поскольку система формирования управляющих решений сама влияет на внешнюю среду, то практически оказывается невозможным оперировать существующей и вновь создаваемой системами «параллельно». (Иногда оказывается возможным подчинить часть системы новому методу управления, а другой ее частью управлять по-старому. Нетрудно догадаться, что эксперимент такого рода также не является убедительным.)

Разумеется, прежде чем принять то или иное конкретное операционное решение, руководитель попытается различными способами (включая ретроспективный анализ) апробировать это решение, чтобы убедиться в его приемлемости. После же осуществления такого рода апробаций (даже в идеальных условиях) руководитель на определенном этапе вынужден будет признать очевидным, что научный подход имеет существенные достоинства. В связи с этим утверждением приведем в заключение три дополнительных замечания.

Во-первых, даже в том случае, когда фирма убеждена в ценности научного подхода к решению задач организационного управления, она может не согласиться с некоторыми частными результатами операционного исследования, поскольку не исключается, что тот или иной конкретный операционный проект может быть ошибочным по замыслу или плохим по исполнению.

Во-вторых, вера в науку вовсе не означает, что здравый смысл и интуицию следует игнорировать. Скорее наоборот, история науки изобилует примерами, когда важные открытия были сделаны либо случайно (т. е. ученые находили не то, что искали), либо с помощью интуиции и даже различного рода «фантастических» гипотез. Психологами еще не разработаны надежные методы, которые позволили бы вызывать вспышки творческого озарения. Однако большинство руководителей, успешно опирающихся в своей деятельности на интуицию, обладают одновременно высоким уровнем знаний и хорошо разбираются во всем, что связано с этой деятельностью. Таким образом, вопрос заключается не в том, чтобы установить, когда необходимо применять научные методы, а когда следует опираться на интуицию. Проблема заключается скорее всего в эффективном сочетании и того и другого.

В-третьих, трудности, связанные с доказательством того, что то или иное предлагаемое решение является наиболее рациональным из всех возможных, присущи не только исследованию операций. Из-за невозможности дублирования истории необходимо проявление доверия и по отношению к любому другому предлагаемому решению, включая вариант с сохранением статуса кво.

Прошлое, настоящее и будущее. Как уже отмечалось выше, термин «исследование операций» возник во время второй мировой войны. Однако зачатки научного мышления, характерного для операционных исследований, появились гораздо раньше. Так, например, некоторые, хотя и весьма примитивные, модели математического программирования были предложены еще в 1759 г. экономистом Куисни и в 1874 г. экономистом Вальрасом. Более сложные экономические модели, аналогичные упомянутым выше, были разработаны в 1937 г. фон Нейманом и в 1939 г. Канторовичем. Математические основы линейного программирования успешно разрабатывались еще на рубеже XIX и XX веков Жорданом (1873 г.), Минковским (1896 г.) и Фаркашем (1903 г.). Следует отметить также весьма серьезные результаты, полученные в области динамического программирования Марковым (1856—1922 гг.). Заслуживают внимания опубликованные в 20-е годы в различных журналах производственно-коммерческого и производственно-технологического профилей работы, имеющие отношение к проблеме управления запасами, а также самые первые исследования по теории массового обслуживания, предпринятые Эрлангом (1878—1929 гг.).

Несмотря на то что результаты этих первых поисковых работ получили признание и высокую оценку, математические модели как инструмент анализа управляющих решений стали использоваться лишь недавно. Чем это объясняется? Причину следует искать по крайней мере в следующих весьма важных обстоятельствах. Во-первых, начиная со второй мировой войны в производственно-коммерческой сфере резко возросла роль конкуренции. Руководители крупных корпораций теперь понимают, что совершенствование традиционно сложившихся способов накопления и обработки информации приводит к существенным экономическим выгодам. Во-вторых, огромные успехи в области электронно-вычислительной техники и широкое распространение быстродействующих электронно-вычислительных машин в значительной степени стимулируют совершенствование методов сравнения и оценки альтернативных вариантов управляющих решений.

Существует немало доводов, позволяющих утверждать, что число организаций, использующих в своей деятельности методы исследования операций, будет постоянно возрастать. В частности, новейшие достижения, связанные с разработкой электронно-вычислительных комплексов, функционирующих в режиме *разделения времени*, привели к тому, что ЭВМ вторгаются буквально в кабинеты руководителей. Представляется маловероятным, что в ближайшие несколько лет пультами управления, позволяющими осуществлять информационные запросы в любой момент времени, будут оборудованы рабочие места подавляющего большинства руководителей фирм. Однако ответственные за финансовые проблемы вице-президенты целого ряда производственных фирм уже сейчас имеют такие пульты управления, что дает им возможность производить сравнительную оценку основных альтернативных вариантов инвестирования.

1.3. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

Должно быть очевидным, что результаты только количественного анализа никогда не могут явиться полным основанием для принятия того или иного стратегического решения. Трудно, например, представить, что, подбирая кандидата на пост президента корпорации, совет директоров будет опираться на результаты манипулирования только числовыми данными, хотя некоторая информация количественного характера может при этом приниматься в расчет.

Вероятно, выглядит еще более очевидным, что даже в тех случаях, когда в процессе принятия управляющих решений количественный анализ играет основную роль, система, ориентированная на применение методов исследования операции, никогда не сможет выдать информацию в объеме, достаточном для выбора способа действий, независимо от того, насколько детализирована и усовершенствована модель системы. Следует иметь в виду, что такого рода системы могут действительно успешно функционировать лишь при условии, если наряду с количественным анализом они содержат элементы бихевиористического анализа. Это объясняется тем, что реальные системы в качестве неотъемлемого компонента содержат людей, т. е. представляют собой системы типа «человек — машина». И наконец, необходимо заметить, что сам процесс построения систем упомянутого выше типа предполагает ориентацию не только на логические операции с символами и числовыми данными, но и на обычный здравый смысл. Ниже все перечисленные затруднения, связанные с ограниченными возможностями количественного анализа, обсуждаются более подробно.

Решенные и нерешенные проблемы. Чтобы получить достаточно полное представление о том, каким образом различные операционные модели могут оказать помощь руководителю, необходимо ознакомиться с содержанием последующих глав. В данном же разделе ограничимся замечаниями общего характера.

Как уже отмечалось, опытный руководитель в самом начале создания операционной системы [1]) должен увидеть возможности моделирования. Однако этого, разумеется, недостаточно. Поскольку совладельцы корпорации считают своих управляющих ответственными за умелое руководство фирмой, последние должны постоянно практиковаться с целью приобретения управленческих навыков, принимая во внимание и те факторы, которые учитываются моделью. Тем или иным способом они должны контролировать систему с тем, чтобы убедиться в правильности ее основных элементов и, в частности, в том, что данная модель правильно используется в связи с анализом практических проблем организационного управления. (Управленческий персонал должен остерегаться ложного представления о том, что модель совпадает с реальностью и что вытекающие из нее следствия не подлежат сомнению.)

Внедрение новой операционной системы, вполне естественно, может привести к радикальным изменениям количества и содержания информации, представляемой руководству. В результате решения руководителей могут отличаться от решений, принимаемых при отсутствии такой информации. Однако при любых условиях нельзя отрицать, что решение принимает не модель, а сам руководитель.

Короче говоря, операционная модель сама по себе никогда не является достаточной для решения реальной задачи. Ее нельзя рассматривать полностью абстрагированной от суждений квалифицированных руководителей. Этот предел возможностей количественного анализа ситуаций неизменно проявляется в явном виде, ибо число вопросов, которые могут возникнуть у руководителей, поистине безгранично, тогда как число решений или ответов, которые можно получить, пользуясь одной моделью, всегда существенно ограничено.

Системы, предназначенные для людей. Все сказанное выше приводит к выводу, что для успешного внедрения операционной системы требуется нечто большее, чем построение правильной математической модели. Система, естественно, должна функционировать с учетом всех факторов организационной деятельности. В модели должны приниматься во внимание такие характеристики источников данных, которые определяют качество (достоверность и полноту) поставляемой информации. Следует также учитывать цели и квалификацию персонала, ответственного за сбор этой информации. В системе необходимо также учесть требования, предъявляемые к информации руководителями, оценивающими аналитические результаты, и особенно потребности в описательных и поясняющих сведениях.

[1]) Т. е. системы организационного управления, основанной на использовании операционных моделей принятия решений.— *Прим. перев.*

Большинство опытных операционистов-практиков умеют решать эти так называемые коммуникационные проблемы. Однако количественным методам анализа свойственно еще одно существенное ограничение. Предлагаемая операционная система почти никогда не согласуется полностью с существующими привычками и представлениями руководителей. Игнорирование этого обстоятельства чревато возникновением внутренних конфликтов, всяческих уверток со стороны управленческого персонала, а иногда и открытым саботажем новой системы. Так, например, для использования модели планирования деятельности фирмы может потребоваться разработка *реалистических прогнозов сбыта*. Вполне естественно предположить, что составление таких прогнозов должно, как правило, входить в обязанности руководителей отдела сбыта. Однако при сложившемся стиле работы отдела сбыта сотрудники этого подразделения могут оказаться не в состоянии сформулировать что-либо отличное от *желаемых показателей сбыта продукции*. В условиях, когда все устремления сбытовой организации направлены на то, чтобы установить цели по объему сбыта, а затем достичь эти цели, попытка вменить в обязанности этой организации не только формирование целей, но и разработку реалистических прогнозов сбыта может привести к возникновению острых конфликтных ситуаций.

Как же выйти из положения, если количественный анализ страдает такого рода ограниченностью? В настоящее время ученые-бихевиористы проводят широкие исследования с целью выявления эффективных средств, обеспечивающих успешную реализацию организационных изменений. Если эти работы дадут положительные результаты, то это, несомненно, окажет огромное влияние на сокращение сроков и повышение эффективности внедрения операционных систем.

Искусство в теории организационного управления. Практическое распространение количественных методов анализа пока что лимитируется способностями решения управленческих задач операционистами-профессионалами. Несмотря на то что операционные модели получают все большее признание, «типовое» применение этих моделей наблюдается крайне редко. Даже в тех областях принятия решений, где использование математических моделей прочно вошло в практику, от операциониста требуется большое искусство, чтобы построить модель, пригодную для применения в специфических условиях той или иной конкретной фирмы или компании. Построение моделей в значительной степени осуществляется, фигурально выражаясь, по индивидуальным заказам.

По всей видимости, в течение следующего десятилетия некоторые хорошо зарекомендовавшие себя операционные модели станут настолько общепринятыми, что методы их построения будут унифицированы так же, как и многие методы организации производства и бухгалтерского учета. Однако непрерывное расширение сферы применения количественных методов в тех областях, где они ранее не использовались, потребует в ближайшем будущем большой изобретательности и творческого подхода к решению управленческих задач.

Другими словами, для успешного применения теории организационного управления все еще необходима существенная доля «искусства». Это в свою очередь означает, что как руководитель, пользующийся результатами исследования операций, так и операционист-профессионал должны в известной степени владеть и практическим и научным аспектами предмета. Из учебного пособия, подобного этому, путем рассмотрения различного рода гипотетических примеров, а также постановки и решения некоторых простых задач можно почерпнуть определенное количество научных сведений и составить самое общее представление о творческой стороне исследования операций. Однако, к сожалению, книга может вооружить читателя лишь элементами операционного искусства.

Чтобы помочь читателю уяснить сущность взаимосвязи науки и искусства при практическом применении результатов исследования операций, полезно провести аналогию с творчеством художника. Знание научных основ химии красок, физиологии зрения, физики света, психологического восприятия цвета и законов перспективы помогает художнику в совершенстве овладеть искусством живописи. Эти знания отличают также истинного знатока живописи от случайного, хотя и впечатлительного, посетителя картинной галереи, имеющего обыкновение по воскресным дням заглядывать в музей. Понимание научных основ исследования операций по той же причине существенно не только для специалиста, работающего в этой области, но и для руководителя, стремящегося действительно эффективно использовать возможности этой дисциплины. Если современный деловой мир будет все более усложняться, то в роли случайного наблюдателя руководитель не сможет успешно поспевать за развитием этого мира. Примирившись с такой ролью, он рискует сам превратиться в конце концов в музейный экспонат.

1.4. ВАЖНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Тщательно проработав данное учебное пособие, читатель получит весьма полное представление о математическом аппарате исследования операций. Однако гораздо более ценным по сравнению со знанием отдельных вычислительных алгоритмов является приобретение способности к построению, исследованию и анализу математических моделей. *Построение моделей является квинтэссенцией операционного подхода к решению организационных задач.* В исследовании операций моделирование играет роль, аналогичную лабораторному эксперименту в естественных науках.

Построение модели помогает привести сложные и подчас неопределенные факторы, связанные с проблемой принятия решения, в логически стройную схему, доступную для детального анализа.

Такая модель позволяет выявить альтернативы решения задачи и оценить результаты, к которым они приводят, а также дает возможность определить, какие данные необходимы для оценки имеющихся альтернатив. В итоге это обеспечивает получение обоснованных выводов. Короче говоря, модель является средством формирования четкого представления о действительности.

Различные аспекты проблемы. Слово «модель» имеет несколько смысловых оттенков, каждый из которых оказывается существенным для исследования операций. Прежде всего «модель» может быть физической копией реального объекта. Примером таких моделей являются, скажем, уменьшенные модели самолетов и локомотивов. «Модель» может также означать идеализацию действительности, в которой часто отсутствуют некоторые детали. В качестве примера можно привести модель плана реконструкции городов. Наконец, применяется глагол «моделировать», означающий «определять результаты идеализированного представления». Это понятие вызывает в сознании представление о рекламных телепередачах, пытающихся в эффективной художественной форме продемонстрировать механизм того «чуда», когда покупатель оказывается «в лоне любви и счастья» сразу же после приобретения рекламируемого товара.

В исследовании операций модель, как правило, относится к классу математических моделей и обязательно является некоторым приближенным отображением действительности. Она должна строиться таким образом, чтобы отражать сущность проблемы организационного управления. В то же время модель должна быть достаточно свободной от несущественных деталей, что позволяет отыскивать более эффективное решение, которое можно реализовать на практике. Определение правильного баланса между степенью адекватности модели той действительности, которую она описывает, и возможностью получения из модели реализуемого решения в большинстве случаев представляет собой сложную задачу, и поэтому построение моделей может оказаться делом далеко не легким.

В построении операционных моделей можно обнаружить три широко распространенных и взаимосвязанных направления. В первом из них основное внимание сосредоточено на оптимизации. Первый шаг на пути *совершенствования* организационного управления заключается в поиске решений, оптимальных в смысле одного или нескольких заданных критериев. Определение оптимума, как правило, производится при наличии некоторых условий. Другими словами, значения управляемых переменных, фигурирующих в выражении для заданной целевой функции, обычно подчиняются ограничениям, вытекающим из «технических условий» задачи. Нередко модель содержит ограничения, отражающие динамические характеристики рассматриваемой задачи.

Второе направление связано с определением аналитических свойств математической модели, включая чувствительность оптимального решения к изменению значений параметров модели, структуру оптимального решения и его характеристики. В качестве примера можно привести модель, определяющую стратегию пополнения запасов. При рассмотрении такой модели обычно стремятся установить характер зависимости стратегии от прогноза спроса, точно определить правило, выражающее эту стратегию (например: «при уменьшении запаса до уровня n заказать новую партию»), а также стационарную частоту возникновения дефицитов и средний уровень запасов.

Третье направление анализа связано с определением в явном виде взаимосвязей, характеризующих систему, в которой должна использоваться модель. Одна из весьма сложных задач, возникающих при написании учебного пособия, состоит в отражении путей согласования модели с различными аспектами и особенностями функционирования той или иной системы организационного управления. Результаты операционного анализа должны быть увязаны с информационной, командно-распорядительной и регулирующей подсистемами организации. Эти результаты нельзя практически использовать независимо от условий существующей организационно-управленческой среды. Поэтому любой операционный проект следует рассматривать, по крайней мере частично, как итог системного исследования.

К проблеме выбора модели. Многие ученые, являющиеся первопроходцами в области применения современных операционных методов, до сих пор благополучно здравствуют и продолжают добиваться на этом поприще новых конструктивных результатов. Приходится лишь поражаться тому, что каждый из них способен исследовать почти все представляющие интерес проблемы организационного управления, с которыми он сталкивается, пользуясь каким-нибудь одним наиболее известным ему методом, например линейным или динамическим программированием, теорией управления запасами, имитационным моделированием и т. д. Успешность применения одного и того же математического метода или одной и той же логико-математической схемы к широкому кругу самых разнообразных по своей природе задач свидетельствует не только о выдающихся способностях этих первооткрывателей, но и об универсальности соответствующих подходов к решению управленческих задач.

Однако опыт показывает, что пример с учеными упомянутой выше категории весьма труден для подражания. В действительности большинство операционистов-практиков, столкнувшись со сложной организационно-управленческой проблемой, обычно не считают *очевидным*, что тот или иной конкретный математический метод (или какой-либо определенный тип моделирования) является явно наиболее эффективным для решения этой проблемы. Так, например, при решении таких задач, как выбор рынков сбыта той или иной фирмы, составление наиболее выгодной номенклатуры выпускаемой продукции, обоснование варианта капиталовложений или размещения предприятий и складских помещений, редко сразу же удается определить, какой из подходов (линейное программирование, динамическое программирование, имитационное моделирование и т. д.) окажется наиболее эффективным. Таким образом, при решении той или иной организационной проблемы естественно возникает вопрос, касающийся способа выбора (или построения) модели.

Не является большим секретом, что многое из излагаемого в учебниках относительно моделирования окутано ореолом таинственности. К великому сожалению, действительно невозможно предложить универсального рецепта, позволяющего безошибочно выбирать и строить математическую модель в любом конкретном случае. Однако по этому поводу не следует испытывать особого беспокойства. Практика показывает, что большинство студентов, получивших подготовку либо в области естественных или технических наук, либо в области математики, экономики или административного руководства в промышленно-коммерческой сфере, не испытывают особых затруднений при построении моделей при условии, если они имеют к этому склонность. К тому же в наши дни едва ли можно столкнуться с ситуацией, когда молодому специалисту приходится впервые применять методы исследования операций на практике в условиях отсутствия помощи со стороны опытного операциониста. Поэтому можно не сомневаться, что начинающий операционист, по крайней мере при использовании методов исследования операций в первый раз, будет работать под руководством квалифицированного руководителя.

1.5. ПРОЦЕСС КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

Представляется целесообразным дать описание основных этапов, типичных для процесса количественного анализа. Опытный специалист следует этим этапам почти автоматически, часто не задумываясь над присвоением им каких-либо особых названий. Впрочем, следует заметить, что элементы процесса количественного анализа не всегда четко дифференцированы, так что в любой момент времени может произойти совмещение элементов, относящихся к разным этапам. Однако для начинающего операциониста полезно ознакомиться со всеми этапами процесса по порядку, с тем чтобы научиться соответствующим образом планировать свои действия.

Прежде чем приступить к количественному анализу проблемы принятия управляющего решения, необходим ее тщательный качественный анализ. Цель этого первоначального диагностического этапа заключается в выявлении тех факторов, которые представляются наиболее важными. (Разумеется, последующий анализ может представить доказательства того, что в действительности некоторые из этих факторов не являются столь важными, как казалось вначале.) В частности, необходимо составить предварительное представление о содержательной стороне основных управляющих решений, о критериях оценки эффективности различных вариантов решений, а также о той схеме оценки и сравнения различных критериев, которая может быть использована при сравнении возможных альтернатив. При этом необходимо заранее «чувствовать», как относятся к рассматриваемой задаче руководители, занимающие ответственные посты и располагающие полномочиями принимать управляющие решения. В противном случае почти неизбежны различного рода неприятности. Действительно, без учета отношения руководящих лиц могут возникнуть затруднения при попытке получить одобрение найденного решения и при его практической реализации. Возможен и более печальный исход — результаты исследования вполне могут оказаться ошибочными или же не соответствующими поставленной цели.

Формулировка задачи. В результате предварительного диагностического анализа должны быть определены основные элементы проблемы. В частности, необходимо указать управляемые переменные (т. е. те переменные, значения которых задаются управляющим решением), неуправляемые переменные, а также ограничения, которым подчиняются переменные по условию задачи. Кроме того, следует сформулировать целевую установку проблемы, т. е. вложить конкретное содержание в требования по совершенствованию управляющего решения.

Формулируя задачу, необходимо установить также пределы возможностей анализа. Задачи организационного управления, как правило, таковы, что результаты их решения проявляются многократно. Одни из них приводят к определенному эффекту немедленно, последствия же других (возможно, в равной степени важные) проявляются лишь спустя некоторое время. При определении границ применимости анализа по тому или иному признаку руководствуются в основном здравым смыслом.

Построение модели. При построении модели уже требуется вникать в мельчайшие подробности задачи. На этом этапе необходимо определить надлежащие входные данные и дать общее представление о соответствующем информационном выходе. Следует также провести различие между статическими и динамическими структурными элементами задачи и попытаться представить в математической форме взаимосвязи между этими элементами. Некоторые из взаимозависимостей между теми или иными параметрами задачи можно записать в виде алгебраических соотношений, другие же допускают вероятностную интерпретацию.

Наряду с перечисленным выше необходимо также установить так называемый «временной горизонт», т. е. тот интервал времени (возможно, бесконечной протяженности в направлении будущего), в течение которого должны проявляться следствия организационно-управленческого решения. Это позволит произвести оценку принятых критериев эффективности различных возможных вариантов решений. Выбор планового периода влияет в свою очередь на характер тех ограничений, которым должны удовлетворять параметры модели, поскольку в случае весьма протяженного «планового горизонта», как правило, появляется возможность исключить из рассмотрения ограничения «краткосрочного характера».

Проведение анализа. Когда исходная модель построена и выявлены все факторы, которые определяются предысторией функционирования организации, техническими условиями и соображениями здравого смысла, переходят к нахождению математического решения. Поиск решения чаще всего предполагает определение таких значений управляемых переменных, которые обеспечивают оптимум по одной из целей и допустимые уровни качества функционирования системы с точки зрения других целей. Значительная часть содержащегося в данной книге материала посвящена изложению различных математических методов нахождения такого рода решений.

Как уже отмечалось ранее, чрезмерное усложнение и слишком большая степень детализации модели могут привести к тому, что возможности современных электронно-вычислительных машин окажутся недостаточными для решения соответствующих вычислительных задач. Если же модель слишком упрощена, решение может оказаться явно нереалистичным. Таким образом, чтобы в итоге достичь удовлетворительных результатов, не следует исключать необходимость повторного рассмотрения некоторых элементов на этапах формулирования проблемы, построения модели и ее анализа.

Основное внимание при анализе уделяется определению чувствительности решения к вариациям различных характеристик модели, и в частности к вариациям входных данных и структурных компонентов. Поскольку испытание на чувствительность является исключительно важным для обоснования приемлемости модели, при построении последней необходимо уделять особое внимание тому, чтобы в процессе анализа на чувствительность не возникло затруднений, обусловленных громоздкостью вычислительных процедур.

Внедрение результатов операционного исследования и совершенствование модели. К сожалению, большинство начинающих специалистов в области управления никак не могут усвоить, что процесс внедрения новой системы начинается с самого первого дня разработки операционного проекта. Не существует такого «момента рождения истины», когда операционист мог бы заявить: «Вот результаты моего исследования» — и услышать в ответ от руководящего лица, по заказу которого данное исследование предпринималось: «Ах, вот оно что! Теперь я все понимаю! Благодарю вас за полную гарантию правильности найденного решения!»

Последовательность мероприятий на стадии внедрения операционных систем подробно обсуждается в гл. 22. Здесь отметим лишь, что очень важно, чтобы те должностные лица, которые обязаны оказывать влияние на характер выводов, являющихся результатом операционного исследования, принимали непосредственное участие в работе группы, занимающейся анализом поставленной проблемы. В противном случае операционный проект скорее всего будет рассматриваться лишь как возбуждающее любопытство, но не внушающее особого доверия мероприятие.

При анализе проблем организационного управления операционные модели, как правило, имеют многократное применение. При этом каждый раз модель подлежит уточнению и дополнению с учетом вновь возникающих особенностей проблемы и текущей информации о состоянии системы. Высококвалифицированный операционист-практик прекрасно понимает, что используемая им модель будет применяться в течение длительного времени. Поэтому подробное описание модели, а также проекты ее совершенствования надлежащим образом документируются.

К вопросу об интерпретации полученных результатов. Ознакомившись с основными элементами процесса количественного анализа, следует оглянуться назад, пытаясь увидеть, к чему мы пришли в результате применения предложенной схемы.

Основное внимание уделяется математическому описанию функционирования сложной системы, а также сбору и накоплению необходимых данных. Модель по самой своей природе носит приближенный характер. С одной стороны, чтобы отразить все существенные стороны проблемы, модель необходимо в достаточной степени детализировать. С другой стороны, модель должна быть не настолько сложной, чтобы нахождение соответствующего решения оказалось слишком затруднительным. Компромисс между этими двумя требованиями достигается методом проб и ошибок. При этом в значительной степени учитываются результаты предварительного изучения системы, а также проводится глубокий и всесторонний анализ предлагаемой операционной модели на чувствительность.

В том случае, когда операционное исследование ориентировано на поиск оптимального плана, решение обычно заключается в определении наиболее «благоприятных» значений управляемых переменных, а также в получении информации, позволяющей оценить, во что может обойтись отклонение от этих значений. Если исследование операций применяется в связи с разработкой системы оперативного характера (например, системы управления запасами), то решение в этом случае представляет собой набор правил принятия управляющих решений. Эти правила нередко вводятся в состав соответствующих машинных программ. Применительно к системе управления запасами машинные программы позволяют анализировать относящиеся к прошлому данные на спрос, обеспечивают внесение корректив экспертного характера (в случае когда последние надлежащим образом формализованы), сигнализируют о моменте требуемого пополнения запасов и подсчитывают количество возобновляемых заказов.

Лишь в отдельных случаях операционное решение содержит точный прогноз относительно развития событий в будущем. Такого рода надежные предсказания представляли бы безусловный интерес. Однако при решении проблемы организационного управления основное внимание уделяется не разработке прогноза, а сложному вопросу выбора одного из нескольких возможных вариантов действий. Правильно построенная модель позволяет производить обоснованную сравнительную оценку возникающих альтернатив. Но возможна и такая ситуация, когда определение различия между допустимыми вариантами решений с точки зрения ожидаемого исхода представляется затруднительным.

Приведем следующий пример. Представим себе, что фирме нужно принять решение: открывать или не открывать новое промышленное предприятие в Европе. Пусть при этом строится операционная модель, учитывающая прогнозы сбыта, цен и доходов. Получаемое в результате решение может определить оптимальный уровень производственных мощностей. Если экономическая выгода в случае открытия нового промышленного предприятия оказывается относительно нечувствительной к диапазону разумных значений прогнозируемых показателей, фирма может поступить правильно, решив расширить свое производство. Более того, в данном случае ей *незачем* связывать себя выбором производственных мощностей. Последние определятся позднее, когда окажутся в наличии более точные прогнозы спроса.

1.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ «В МИНИАТЮРЕ»

Прежде чем попытаться объяснить все «как и почему» в связи с решением вопроса о важности количественного анализа в процессе решения задач организационного управления, рассмотрим несколько предельно упрощенных примеров операционных моделей. Поскольку единственная наша цель заключается в том, чтобы показать, как выглядят математические модели для принятия управляющих решений, мы не претендуем на реалистичность формулировок рассматриваемых задач. Более серьезные (с практической точки зрения) варианты такого рода проблем изложены в последующих главах.

Проблема «двух картошек». Фирма, специализирующаяся на производстве замороженных пищевых полуфабрикатов, выпускает три различных продукта (продукт 1, продукт 2 и продукт 3) [1], каждый из которых получается путем определенной обработки картофеля и подлежит соответствующей упаковке. В начале технологического процесса необработанный картофель сортируется по разме-

---

[1]) Будем считать, что продукт 1 представляет собой картофельные дольки, продукт 2 — картофельные кубики, а продукт 3 — картофельные «хлопья», используемые для приготовления пюре.

ру и качеству, после чего его распределяют по различным поточным линиям.

Фирма может закупить картофель у двух различных поставщиков. При этом объемы продуктов 1, 2 и 3, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, отличаются от объемов продуктов 1, 2 и 3, получаемых из того же количества картофеля второго поставщика. Соответствующие показатели приведены в таблице на рис. 1.1.

Продукт	Поставщик 1	Поставщик 2	Ограничения на объем выпускаемой продукции
1	0,2	0,3	1,8
2	0,2	0,1	1,2
3	0,3	0,3	2,4
Относительная прибыль	5	6	

Рис. 1.1. Выход продукции на единицу веса необработанного картофеля.

Из данной таблицы следует, что из 1 *т* картофеля поставщика 1 можно изготовить 0,2 *т* продукта 1, 0,2 *т* продукта 2 и 0,3 *т* продукта 3; остальные 0,3 *т* составляют отходы. У картофеля поставщика 2 аналогичные показатели по отношению к продукту 3 и к отходам совпадают с соответствующими показателями для предыдущего случая; однако процент выхода продукта 1 во втором случае оказывается более высоким.

Какое количество картофеля следует купить у каждого из поставщиков? Ответ частично зависит от «относительной» прибыли, получаемой фирмой в случае покупки картофеля у поставщика 1 и у поставщика 2. При этом относительная прибыль при покупке картофеля у поставщика 1 вычисляется путем вычитания из полной выручки в результате продажи фирмой всех видов продуктов, полученных из 1 *т* необработанного картофеля, закупленного у поставщика 1, стоимости 1 *т* картофеля. Аналогично определяется относительная прибыль фирмы, получаемая за счет покупки картофеля у поставщика 2. Цены на картофель у поставщика 1 и у поставщика 2 могут быть разными. (Мы используем термин *относительная прибыль*, поскольку пока не принимаются в расчет другие виды расходов. К их числу могут, в частности, относиться затраты, связанные с доставкой продукции к местам сбыта и с обслуживанием покупателей. Такого рода затраты имеют место лишь после получения готовой продукции. Они не имеют отношения к затратам во время покупки картофеля, и, следовательно, при принятии решения размещение поставщиков картофеля не учитывается.) Предположим, что относительная прибыль при закупке картофеля у поставщика 1 равна 5, а при закупке картофеля у поставщика 2 составляет 6. Из того факта, что относительная прибыль при закупке картофеля у поставщика 2 является более высокой, однако, вовсе не следует, что фирме следует произвести закупку всего требуемого ей количества картофеля у поставщика 2.

При принятии решения по закупке картофеля должны также учитываться по крайней мере два других фактора: максимальное количество каждого продукта, которое фирма может продать, и максимальное количество каждого из продуктов, которое фирма может изготовить при заданных условиях производства. Для простоты изложения допустим, что, учитывая оба эти фактора одновременно, мы получаем следующие ограничения [1]):

продукт 1 не может выпускаться в количестве, превышающем 1,8;
продукт 2 не может выпускаться в количестве, превышающем 1,2;
продукт 3 не может выпускаться в количестве, превышающем 2,4.

Эти ограничения математически можно сформулировать следующим образом.

Пусть P_1 и P_2 означают количество картофеля, которое будет закуплено у поставщиков 1 и 2 соответственно. Тогда значения P_1 и P_2 должны подчиняться следующим линейным неравенствам:

$$\begin{aligned}
&0{,}2P_1 + 0{,}3P_2 \leqslant 1{,}8 \quad \text{для продукта 1},\\
&0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 \leqslant 1{,}2 \quad \text{для продукта 2},\\
&0{,}3P_1 + 0{,}3P_2 \leqslant 2{,}4 \quad \text{для продукта 3},\\
&\quad P_1 \geqslant 0, \quad P_2 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Условия неотрицательности $P_1 \geqslant 0$ и $P_2 \geqslant 0$ приняты потому, что отрицательные значения этих величин (например, $P_1 = -4$) не имели бы физического смысла.

Все значения P_1 и P_2, удовлетворяющие условиям (1), представлены на рис. 1.2 заштрихованной областью. Заметим, что прямые линии, изображенные на рис. 1.2, являются графическим представлением уравнений, соответствующих предельным случаям ограничений (1), когда в каждом из них стоит знак равенства. Стрелка, проведенная от каждой из этих линий, указывает направление, определяемое знаком неравенства в соответствующем ограничении. Читателю предлагается объяснить, почему пара значений P_1 и P_2, одновременно удовлетворяющая ограничениям для продуктов 1 и 2, удовлетворяет также и ограничению для продукта 3.

[1]) Здесь использовались условные единицы измерения. На практике они означают некоторые конкретные единицы веса, например тонны.— *Прим. перев.*

Оптимальными являются такие значения P_1 и P_2, при которых относительная прибыль максимальна, если при этом выполняются условия (1). Таким образом, задача оптимизации сводится к максимизации выражения

$$5P_1 + 6P_2 \tag{2}$$

при наличии ограничений (1). В рассматриваемом примере решение может быть найдено графически, как показано на рис. 1.3.

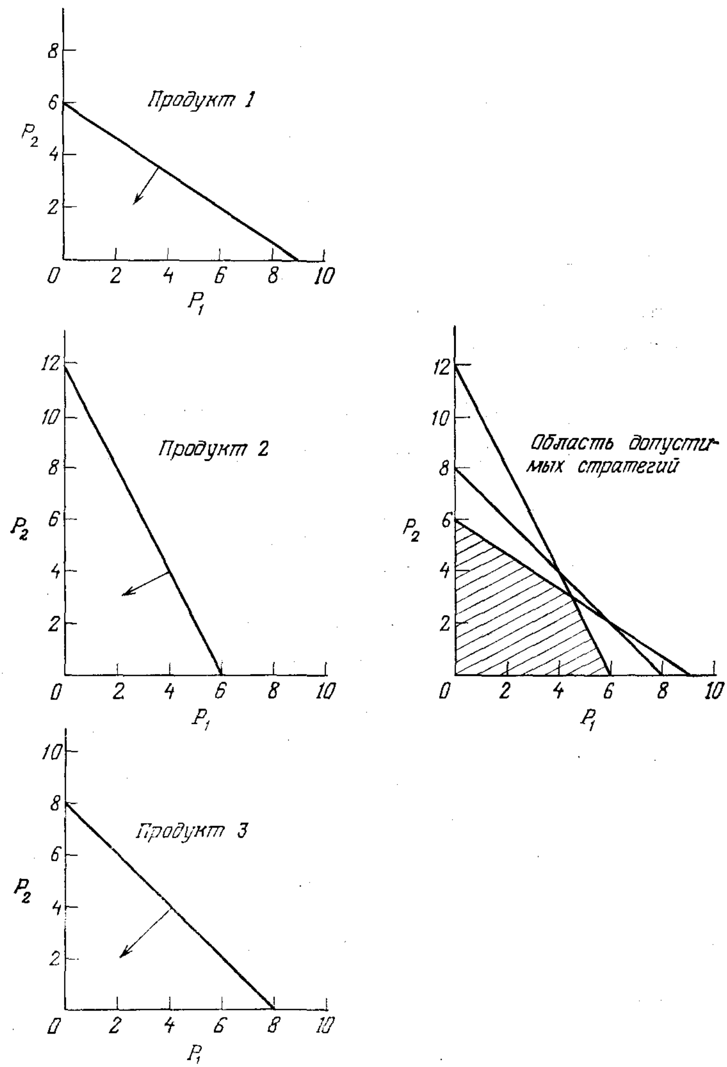


Рис. 1.2. Допустимые стратегии закупок.

Каждая из множества параллельных прямых, изображенных на этом рисунке, соответствует различным комбинациям значений P_1 и P_2, приводящим к одному и тому же значению линейной целевой функции $5P_1 + 6P_2$. Самая верхняя линия, содержащая точку в области допустимых с точки зрения условий (1) значений, определяет максимальное значение целевой функции. Оптимальное решение задается именно этой точкой. Легко убедиться графически, что в рассматриваемом случае оптимальное решение является единственным; оно находится на пересечении прямых, определяемых двумя первыми условиями (1). Следовательно, оптимальные значения P_1 и P_2 можно вычислить путем совместного решения двух линейных уравнений

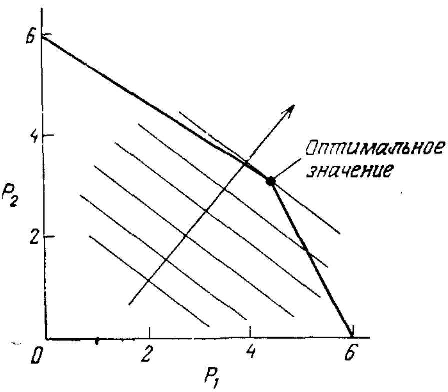


Рис. 1.3. Относительная прибыль.

$$0{,}2P_1 + 0{,}3P_2 = 1{,}8 \quad \text{для продукта 1,}$$

$$0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 = 1{,}2 \quad \text{для продукта 2.} \qquad (3)$$

Читатель без труда может убедиться, что оптимальные значения P_1 и P_2 равны 4,5 и 3 соответственно; значение целевой функции при этом равняется 40,5.

Рассмотренная задача служит иллюстрацией так называемой *модели линейного программирования*. В случаях практического применения линейного программирования количество ограничений обычно достигает нескольких сотен, а количество переменных — нескольких тысяч. Способы построения такого рода моделей, а также методы нахождения для них решения изложены в гл. 2—7.

Задача выбора кандидатуры на секретарскую работу. Лицо, занимающее административную должность, намерено подыскать себе нового секретаря и собирается обратиться в бюро найма с просьбой направить к нему для собеседования девушек, имеющих соответствующую подготовку. Прежний опыт подсказывает администратору, что в процессе собеседования удается определить, какими качествами будет обладать рассматриваемая кандидатура, работая в качестве секретаря,— отличными, достаточно хорошими или посредственными. По относительной шкале он оценивает первую категорию в 3 балла, вторую — в 2 и третью — в 1 балл. Предшествующий опыт позволяет администратору предположить, что вероятность заполучить для собеседования девушку с отличными для секретарской работы данными равняется 0,2, с достаточно хорошими данными — 0,5, а с посредственными — 0,3.

Администратор намерен рассмотреть не более трех кандидатур. К сожалению, в случае, если он не принимает девушку на работу сразу же после собеседования, девушка устраивается на другую работу. Следовательно, решение должно приниматься немедленно.

Если первая из кандидатур оценивается на отлично, администратор, естественно, берет ее к себе на работу немедленно. Если же она оказывается посредственной, администратор ничего не теряет,

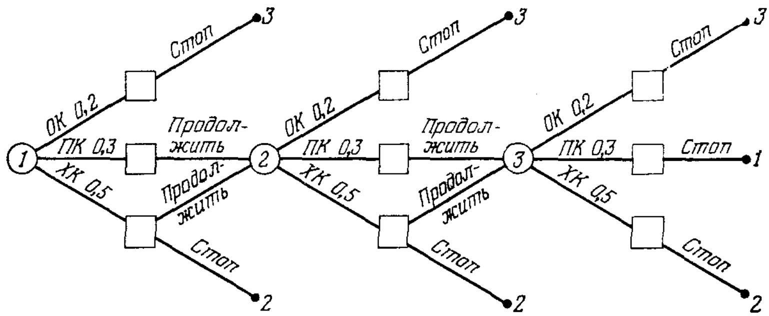


Рис. 1.4. Дерево альтернатив для задачи выбора девушки-секретаря. ОК — отличные качества; ХК — хорошие качества; ПК — посредственные качества.

решив рассмотреть следующую кандидатуру. Однако в случае, если первая кандидатура относится к категории, оцениваемой в 2 балла, возникает ситуация, когда администратор не уверен, как при этом поступить. Если воздержаться от решения остановить выбор на рассматриваемой кандидатуре, то потом не исключена возможность, что администратору придется довольствоваться лишь посредственным секретарем. Если же администратор даст положительный ответ, он потеряет возможность подыскать на секретарскую работу девушку с более высокими для этой роли данными. Если администратор примет решение рассмотреть другую кандидатуру, он может столкнуться с такой же проблемой в случае, если данные этой кандидатуры им будут оценены в 2 балла.

Проблему выбора удобно продемонстрировать с помощью так называемого *дерева альтернатив*, приведенного на рис. 1.4. Кружочками изображены кандидатуры, проходящие собеседование, а ветви, исходящие из узлов, служат для представления возможных исходов. На каждой ветви указана вероятность соответствующего исхода. Квадратики служат для представления актов принятия решений. Число в конце ветви, не имеющей продолжения, представляет собой оценку результата соответствующего выбора (по относительной шкале).

Задача нахождения оптимальной стратегии в связи с принятием решения при указанных выше условиях может быть решена с помощью так называемого *динамического программирования*, и в частности методом, известным под названием *обратная индукция*. Динамическому программированию и методам нахождения решений для соответствующего типа моделей посвящены гл. 8—12, а также гл. 17 и 18. Процедура решения в приведенном выше примере настолько проста, что нахождение оптимальной стратегии, как будет показано ниже, не вызывает никаких затруднений.

Предположим, что администратор проводит интервьюирование всех трех девушек и, следовательно, на работу оказывается принятой третья из них. Тогда ожидаемое значение оценки исхода с учетом его случайного характера равняется

$$3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 = 1{,}9. \tag{4}$$

Другими словами, средняя оценка кандидатуры, случайно подобранной для прохождения собеседования, равняется 1,9 балла. Допустим, что это значение правильно отражает оценку администратором данного случайного исхода. Проставим оценку 1,9 возле узла 3 на рис. 1.4.

Рассмотрим затем следующую ситуацию: допустим, что администратор рассматривает вторую кандидатуру и она оказывается достаточно хорошей. Если администратор принимает решение не рассматривать следующую кандидатуру (т. е. прекратить процесс выбора), то он достигает исхода с оценкой 2 балла. Если же администратор переходит к рассмотрению следующей (третьей) кандидатуры, он может надеяться лишь на исход с оценкой 1,9 балла. Следовательно, в случае, когда вторая из кандидатур оценивается в 2 балла, администратор должен прекратить процесс выбора. Таким образом, на ветви с надписью «Продолжить» в случае, когда вторая кандидатура оказывается достаточно хорошей, следует поставить знак $\times$. Это означает, что соответствующее данной ветви действие не должно предприниматься.

Теперь читатель подготовлен к тому, чтобы найти правильное решение в случае, когда достаточно хорошей оказывается первая кандидатура. Если бы администратор остановился на этой кандидатуре, то он достиг бы результата с оценкой 2 балла. Если же продолжить процесс выбора, то ожидаемая оценка случайного исхода второго или, возможно, третьего собеседования равняется

$$3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1{,}9 \cdot 0{,}3 = 2{,}17. \tag{5}$$

Здесь первое слагаемое относится к событию обнаружения у проходящей собеседование девушки отличных качеств (в этом случае ее берут на секретарскую работу); второе слагаемое относится к событию обнаружения у девушки достаточно хороших качеств (эту девушку берут на работу при условиях, рассмотренных выше);

наконец, третье слагаемое относится к событию обнаружения у проходящей собеседование девушки посредственных качеств с последующим переходом к рассмотрению третьего случайного события, исход которого, согласно (4), оценивается в 1,9 балла. Поскольку $2{,}17 > 2$, администратору следует воздержаться от решения принять на работу первую кандидатуру, если она окажется оцененной в 2 балла. Поставим оценку 2,17 возле узла 2 на рис. 1.4, а на ветви с надписью «Стоп» в случае, когда первая кандидатура относится к категории достаточно хороших, поставим знак $\times$.

Короче говоря, оптимальная стратегия выглядит следующим образом: процесс выбора ограничивается рассмотрением единственной кандидатуры лишь в том случае, когда первая из прошедших собеседование девушек оценивается на отлично, и продолжается после второго собеседования лишь в том случае, когда вторая из рассмотренных кандидатур оказывается посредственной. Полное математическое ожидание оценки исхода процесса интервьюирования при условии, что администратор действует оптимально, равняется

$$3 \cdot 0{,}2 + 2{,}17 \cdot 0{,}5 + 2{,}17 \cdot 0{,}3 = 2{,}336. \qquad (6)$$

Пояснить полученный результат предлагается читателю.

Запишем полученное значение для математического ожидания возле узла 1 на рис. 1.4. Поскольку полученное выше [см. (4)] число 1,9 также является математическим ожиданием оценки исхода в случае, когда администратор ограничивается рассмотрением единственной кандидатуры (после которого он берет ее на работу), то разность $2{,}336 - 1{,}9 = 0{,}436$ представляет собой приращение оценки вероятного исхода за счет использования возможностей двух собеседований.

Производственная задача «места и времени». Название этой задачи возникло в результате выявления нескольких различных толкований соответствующей математической модели. Одна из возможных интерпретаций связана с определением оптимальных объемов выпускаемой продукции для каждого промышленного предприятия, входящего в некоторое множество однотипных предприятий, за заданный интервал времени. Интерпретация другого рода сопряжена с определением оптимальных объемов продукции, выпускаемой одним предприятием в течение нескольких периодов времени. Возможна также интерпретация, вытекающая из рассмотрения задачи, представляющей собой комбинацию задач, упомянутых выше.

Начнем с варианта, когда решается задача первого типа. Пусть фирма, имеющая N промышленных предприятий, должна выпустить D единиц однородной продукции в течение заданного интервала времени. Следовательно, если обозначить через x_j объем продукции, выпускаемой на j-м промышленном предприятии, то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_N = D,$$
$$x_j \geqslant 0 \quad \text{для любого значения } j. \qquad (7)$$

Предположим, что стоимость производства x_j на j-ом промышленном предприятии задается выражением $(1/c_j)\,x_j^2$, где $c_j \geqslant 0$ определяются с учетом информации, относящейся к прошлому опыту фирмы. Таким образом, оптимальные значения x_j находятся из условия

$$\text{минимизации } \left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\ldots+\frac{x_N^2}{c_N}\right) \tag{8}$$

при наличии ограничения (7).

Эта задача оптимизации может быть решена методами динамического программирования, а также с помощью некоторых простых приемов нелинейного программирования, обсуждению которых посвящены гл. 14 и 15. Численные значения x_j легко получить с помощью интуитивно выведенной формулы

$$\text{Оптимальное значение } x_j=\frac{c_jD}{c_1+c_2+\ldots+c_N} \quad (j=1,\,2,\,\ldots,\,N), \tag{9}$$

откуда для соответствующей минимальной стоимости получаем

$$\frac{D^2}{c_1+c_2+\ldots+c_N} \quad \text{(оптимальная стратегия).} \tag{10}$$

Обратимся к случаю, когда решается задача второго типа. Пусть x_j — объем продукции, выпускаемой одним предприятием в течение j-го интервала времени. Заметим, что в этом случае рассматриваются лишь затраты, связанные с производством, и не учитываются издержки, обусловленные хранением продукции в интервале между началом первого и концом j-го периода (пока весь объем продукции D не будет полностью реализован). Принимая все это во внимание, можно найти оптимальное значение для x_j, если объемы продукции, относящиеся к предыдущим периодам, уже определены [не обязательно с помощью (9)]. При этом имеет место следующая формула:

$$\text{Условно-оптимальное значение } x_j=\frac{c_j\,(D-x_1-x_2-\ldots-x_{j-1})}{c_j+c_{j+1}+\ldots+c_N}\,. \tag{11}$$

Как нетрудно убедиться, если вычислять рекуррентным образом[1]) значения x_1, x_2, . . ., x_N, то формула (11) приведет к тем же значениям указанных параметров, что и формула (9).

Задача определения оптимального объема заказа. В гл. 9 и 19, а также в приложении II обсуждается целый ряд нашедших успешное практическое применение моделей управления запасами. Модель, рассматриваемая ниже, возможно, представляет собой простейшую модель такого рода. Принятые в ней конкретные допущения лишь иногда (причем весьма редко) имеют практический смысл. Тем не менее окончательное решение оказывается в достаточной степени близким к оптимальному для многих реальных ситуаций. Таким образом, его можно считать весьма хорошим приближением к тому, что имеет место на практике.

---

[1]) То есть последовательно, начиная с x_1.

Рассмотрим фирму, потребляющую (или продающую) определенного вида продукцию в объеме M единиц в неделю. Для простоты предположим, что относительно количества потребляемой продукции имеется полная определенность. Следовательно, если уровень запасов составляет kM единиц, то эти запасы будут исчерпаны ровно в k недель. Допустим далее, что норма потребления M (т. е. объем потребляемой в неделю продукции) не меняется со временем, так что данная фирма должна регулярно возобновлять заказы на пополнение запасов. Проблема принятия решения заключается в том, чтобы определить экономически наиболее выгодный объем заказа (т. е. экономически наиболее выгодное количество заказываемой продукции). Предположим, что время доставки продукции по заказу также точно известно. Таким образом, мероприятия, направленные на пополнение запасов, начинаются заранее с таким расчетом, чтобы заказанная продукция поступала точно в тот момент, когда уровень предыдущих запасов падает до нуля.

Обозначим объем заказа через Q. Тогда уровень запасов можно изобразить в виде «пилы», показанной на рис. 1.5. Заметим, что каждый раз, когда поступает пополнение, уровень запасов подскакивает до значения Q. Затем уровень падает со скоростью M единиц в неделю (этот процесс изображен на рис. 1.5 линиями, проведенными с наклоном).

Оптимальный объем заказа позволяет «сбалансировать» затраты, связанные с пополнением требуемой продукции, и расходы, связанные с хранением запасов. Предположим, например, что каждый очередной заказ сопряжен с некоторыми вполне определенными накладными расходами в размере K. Пусть при этом известна покупная цена c единицы заказываемой продукции. Допустим, наконец, что за хранение единицы продукции в течение недели взимается плата в размере h. Накладные расходы связаны с мероприятиями по размещению заказа и его реализации. С хранением приобретаемой продукции связаны расходы на складирование, страхование и использование складских помещений.

Пусть критерий экономической эффективности определяется средним значением суммарных затрат в расчете на одну неделю. Тогда доля затрат, связанная с накладными расходами, равняется $K\ (M/Q)$, так как в неделю происходит M/Q актов оформления заказов. Доля затрат, связанная с оплатой заказанной продукции, равняется cM, поскольку за одну неделю потребляется M единиц продукции. Наконец, доля расходов, связанных с хранением, определяется выражением $h\ (Q/2)$, так как средний уровень запасов равен $Q/2$, в чем легко убедиться с помощью графика на рис. 1.5. Складывая перечисленные выше компоненты, получаем

$$\text{Средние расходы за неделю} \equiv \text{СР} = \frac{KM}{Q} + cM + \frac{hQ}{2}. \qquad (12)$$

Экономически наиболее выгодный объем заказа, минимизирующий СР, определяется выражением

$$\text{Оптимальное значение } Q=\sqrt{\frac{2KM}{h}}. \qquad (13)$$

Эта формула может быть выведена путем решения уравнения, полученного в результате приравнивания нулю производной СР

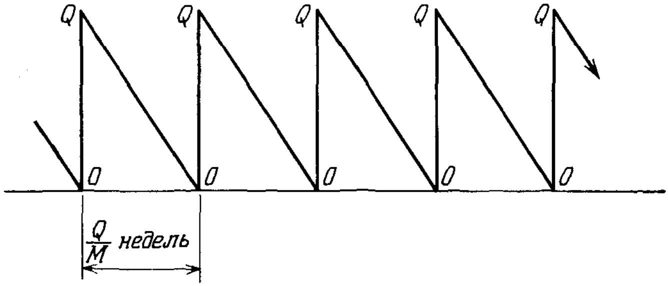


Рис. 1.5. Графическое представление уровня запасов.
M — норма потребления; Q — объем заказа.

по Q. Из нее следует, что оптимальный объем заказа в случае, когда норма потребления возрастает в 4 раза, лишь удваивается. Заметим также, что оптимальный объем заказа определяется *отношением* накладных расходов к затратам, связанным с хранением запасов.

Задача определения оптимальной сети телефонной связи. Предположим, что авиакомпания (назовем ее условно «Беспосадочный полет») открывает в пригородном торговом центре бюро предварительных заказов на авиабилеты. Любой желающий зарезервировать билет на самолет будет иметь возможность заказать билет по телефону. Авиакомпания пытается определить число линий телефонной связи, необходимое для обслуживания своих будущих клиентов. Подсчитать расходы, связанные с использованием телефонной сети и содержанием обслуживающего персонала, не составляет большого труда. Эти расходы, естественно, зависят от количества линий связи. Однако авиакомпания хочет провести сравнение уровней обслуживания для случаев с различным числом линий связи. В частности, предположим, что компания пытается определить ту долю времени, когда все линии будут заняты, а также среднее значение интервала времени, в течение которого линии полностью загружены. Такого рода анализ проводится в рамках *теории массового обслуживания*, изложению которой отведены гл. 20 и 21, а также приложение III. Для данной задачи можно было бы построить точную модель и подвергнуть ее строгому математическому анализу. Однако вместо этого покажем, как можно для определения показателей обслуживания использовать метод имитационного моделирования. Для простоты ограничимся пока изложением лишь элементарных приемов анализа, предоставляя читателю возможность подробно ознакомиться с имитационным методом в гл. 21.

Предположим, что авиакомпания располагает данными, определяющими статистическое распределение интервалов времени между последовательными телефонными звонками от клиентуры. В первом приближении допустим, что величины интервалов времени между любыми двумя последовательными звонками полностью независимы (это условие не может быть строго выполнено, если, например, клиент после того, как набрал номер и обнаружил, что линия занята, немедленно набирает тот же самый номер). Тогда для определения упомянутого выше статистического распределения удобно воспользоваться диаграммой, приведенной на рис. 1.6. При этом будем для простоты предполагать, что интервал между последовательными звонками клиентов никогда не превышает 5 *мин*.

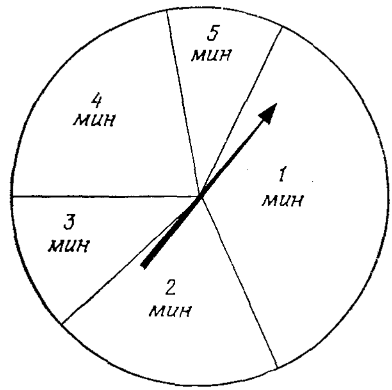


Рис. 1.6. Распределение интервалов времени, в течение которых линии телефонной связи не заняты.

Представим себе стрелку, закрепленную в центре диаграммы (такая диаграмма напоминает «колесо удачи», встречающееся на праздничных карнавалах). Поток телефонных звонков можно имитировать серией последовательных резких вращений этой стрелки. В результате будем иметь некоторую последовательность значений интервалов времени, в течение которых линии телефонной связи свободны.

Предположим также, что авиакомпании известно статистическое распределение интервалов времени, необходимых для разговора с клиентом. Допустим, что интервалы времени, когда линия занята, не зависят друг от друга, а также от интервалов времени, не занятых телефонными разговорами. Тогда для имитации интервалов времени, занятых обслуживанием, можно построить другую диаграмму, аналогичную изображенной на рис. 1.7.

Теперь можно приступить к имитации системы. Вначале предположим, что имеется единственная линия телефонной связи. Тогда в течение некоторого «истекшего» промежутка времени данная линия функционировала согласно имитационной модели, представленной на рис. 1.7. Моменты, когда набирался соответствующий номер телефона, обозначены крестиком. Эти моменты определяются путем последовательного вращения стрелки диаграммы, как объяснено выше. Линия телефонной связи становится занятой сразу же после первого звонка. Продолжительность периода времени, когда линия

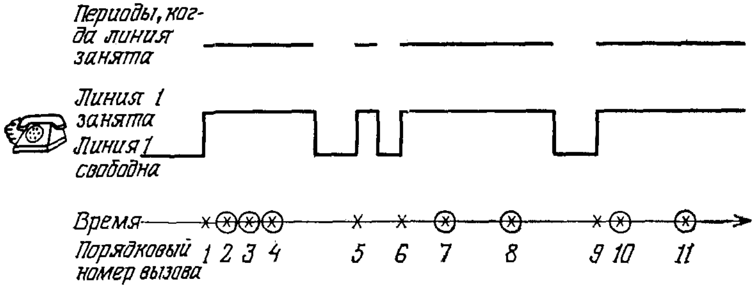


Рис. 1.7. Имитационная модель для одной линии телефонной связи.

занята, определяется путем вращения стрелки диаграммы (описание данной процедуры см. выше). Заметим, что телефонные звонки в моменты времени, отмеченные на рис. 1.7 кружочками, не достигают цели, так как единственная телефонная линия в это время оказывается занятой. Набрав и обработав данные за достаточно большой период имитации, можно получить весьма надежную оценку доли времени, когда линия связи будет занята, а также средней продолжительности времени телефонного обслуживания клиента.

Предположим теперь, что имеются две линии телефонной связи. В этом случае та же самая серия вызовов может привести к иной «имитационной картине» процесса телефонного обслуживания (рис. 1.8). Отметим, что теперь большее число звонков достигает цели. В данном случае период полной загрузки телефонной сети определяется интервалом времени, в течение которого оказываются занятыми обе линии связи одновременно. Заметим, что периоды полной загрузки телефонной сети во втором случае (рис. 1.8) гораздо

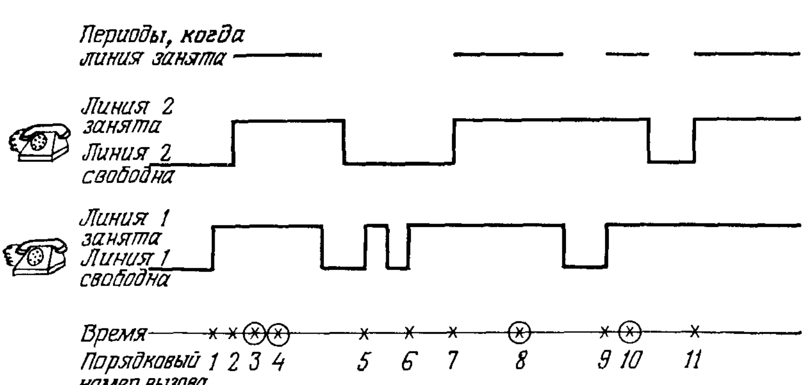


Рис. 1.8. Имитационная модель для двух линий телефонной связи.

короче, чем в первом (рис. 1.7). Нетрудно видеть, что изложенный метод можно применить для оценки уровня обслуживания при любом количестве линий телефонной связи.

Примечание. Приведенные выше примеры (как уже отмечалось в начале данного раздела) служат для иллюстрации некоторых методов построения математических моделей, используемых при анализе проблем принятия управляющих решений. Рассматривая эти примеры, мы не стремились быть «реалистичными». В последующих разделах данной книги изложены методы построения моделей, представляющих практический интерес, а также методы нахождения соответствующих оптимальных решений.

1.7. НА ПРЕДЕЛЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

В настоящее время почти каждая крупная корпорация имеет специалистов, ответственных за применение операционных методов при решении задач организационного управления. Специалисты этого профиля, как правило, входят в состав отдельных групп, имеющих «выход» на уровень руководства. Группа операционистов обычно представляет свои отчеты заведующему производственным отделом, главному бухгалтеру или руководителю планового отдела. Однако все чаще наблюдаются случаи, когда в обязанности специалистов в области исследования операций входит доклад непосредственно руководителям, ответственным за конкретные участки работы. Одновременно наблюдается заметное нарастание активности операционной деятельности в административном аппарате общегосударственного и регионального масштаба, а также в других организациях непроизводственной сферы. В данном разделе будет сделана попытка объяснить, почему науке управления сопутствует столь большой успех.

Достоинства рационального метода. Совершенно очевидно, что лицам, занимающим руководящие посты, постоянно приходится принимать решения. В той или иной конкретной ситуации операционная модель *может* привести к решению, в точности совпадающему с тем выводом, к которому опытный руководитель способен прийти основываясь исключительно на интуиции. Следовательно, преимущества, получаемые за счет применения методов исследования операций, следует оценивать с учетом их влияния на процесс управления в течение достаточно большого промежутка времени.

Правильный подход к такого рода оценке можно весьма точно выразить следующим вопросом: если фирма в процессе организационного управления не использует операционных методов анализа, то какие методы она использует и достигает ли она при этом неизменно хороших результатов? Организации, использующие операционные методы, даже в том случае, когда получаемые при этом результаты не в полной мере соответствуют первоначальным ожиданиям, обнаруживают, что анализ сложных проблем управления с помощью исследования операций надежнее, чем традиционными методами. Это достаточно убедительно подтверждается постоянно возрастающей финансовой поддержкой операционных исследований со стороны как частного, так и государственного секторов.

Независимо от того, насколько успешно справляются операционисты с той или иной конкретной задачей, достоинства метода системного анализа достаточно очевидны. К ним относятся следующие:

1. Особое внимание уделяется определению всевозможных пересечений и разветвлений альтернатив при принятии управляющих решений с учетом всех существенных характеристик системы. Типичным для операционного подхода является построение модели, синтезирующей те элементы функционирования, которые затрагиваются в процессе формирования управляющего решения. Каждая конкретная часть модели строится специалистами, наиболее компетентными в соответствующих вопросах.

2. Стимулируется выявление полного набора альтернатив при принятии управляющего решения. Число возможных вариантов действий, которые удается проанализировать при использовании математических методов и электронно-вычислительной техники, увеличивается на несколько порядков.

3. Фокусируется внимание на выявлении «узких мест» и на решении наиболее спорных вопросов. Данный метод реализуется по схеме «если верна гипотеза H и предпринимается действие A, то будет иметь место результат R». Метод создает благоприятную почву для более тесного кооперирования различных подразделений той или иной организации. В результате конфликты внутри организации можно классифицировать по признаку расхождения во мнениях относительно справедливости различных гипотез и допущений, используемых при анализе различных стратегий.

Весьма важные дополнительные преимущества операционного подхода состоят в том, что в ходе моделирования осуществляется сбор данных, определяется ценность информации, не используемой в модели, а также производится документирование фактического материала, который может потребоваться для анализа задач организационного управления в будущем.

Перечислив некоторые из достоинств системного подхода, присущего операционному методу, сразу же подчеркнем, что эти достоинства могут проявиться в большей или меньшей степени в зависимости от уровня мастерства, проявленного в процессе решения каждой конкретной задачи.

Способы достижения цели. В предыдущем разделе мы пытались ответить на вопрос, *почему* операционный подход оказывается эффективным при анализе проблем организационного управления. Обсудим теперь другой вопрос, каким образом удается реализовать те преимущества, о которых говорилось выше. Ниже дана классификация возможных путей достижения этой цели, предусматривающая следующие четыре (до некоторой степени произвольно сформулированные и частично взаимно пересекающиеся) способа совершенствования организационного управления:

1. *Улучшение качества управляющих решений.* Весьма часто операционные модели предписывают способы действия, более рациональные по сравнению с теми, которые определяются на основе интуиции. Ситуация может быть настолько сложной (вследствие запутанности взаимосвязей между различными вариантами решений; из-за больших объемов данных, имеющих отношение к той или иной операции; из-за неопределенности относительно уровня коммерческой (рыночной) активности и т. д.), что без помощи операционных методов анализа с применением электронно-вычислительной техники мозг человека оказывается не в состоянии аккумулировать все существенные в данной ситуации факторы.

В прошлом руководители обходились, конечно, без помощи исследования операций. Им ничего не оставалось делать. Но, как показывает опыт, с применением операционных моделей понимание проблем становится более глубоким и качество управляющих решений существенно улучшается. В отдельных случаях решения, разумеется, могут оказаться неверными. Однако более совершенные процедуры принятия управляющих решений уменьшают вероятность допустить ошибку.

2. *Улучшение качества координации.* Исследование операций нередко служило средством, помогающим «из беспорядка сделать порядок». Приведенный ниже пример, который заимствован из жизни, является своего рода иллюстрацией данного утверждения.

В периоды проведения кампаний по рекламированию продовольственных товаров объем сбыта существенно возрастает. Однако производственные мощности и поставки пищевых продуктов ограничены, а конъюнктура рынка часто оказывается неустойчивой. В результате этого в прошлом отдел сбыта и производственный отдел фирмы оказывались на противоположных полюсах (с точки зрения кооперирования). Операционная модель, предназначенная для решения проблемы планирования, становится тем инструментом, с помощью которого осуществляется координация мероприятий по сбыту при наличии ограничений, относящихся к сфере производства.

3. *Улучшение качества контроля.* Административному аппарату крупных организаций хорошо известно, что непрерывный «надзор» за исполнением управляющих решений рутинного характера обходится очень дорого. Методы исследования операций, синтезируя опыт прошлого с научным подходом к решению задач организационного управления, позволили определить стандартизированные и надежные процедуры контроля за текущей деятельностью и своевременного выявления нежелательных тенденций. Таким образом, руководители выиграли дополнительное время, которое они могут посвя-

тить более насущным проблемам. Лишь в отдельных случаях, когда возникают ненормальные ситуации, появляется необходимость контроля за ходом текущей работы. Наиболее распространенные приложения операционных методов, имеющие отношение к проблеме контроля, связаны с календарным планированием производства и с управлением запасами.

4. *Создание более совершенных систем.* Операционные исследования часто начинаются с анализа какой-нибудь частной проблемы принятия решения. Например, нужно решить, приобретать или не приобретать еще одно помещение для склада. Впоследствии предложенная методика анализа превращается в систему и может быть использована неоднократно. Таким образом, затраты, связанные с исследованием частной проблемы, могут породить более широкие перспективы извлечения прибылей, чем это предполагалось вначале.

Сферы применения. Применение операционных методов как в промышленности, так и в административно-государственном аппарате считается в настоящее время настолько обычным явлением и охватывает такой широкий спектр функций управления, что составление полного списка возможных приложений исследования операций представляется весьма затруднительным. Не претендуя на полноту перечня, отметим, однако, что операционные методы имеют многочисленные применения в таких отраслях промышленности, как авиационная, химическая, электронная, нефтеперерабатывающая, автомобильная, металлургическая, целлюлозобумажная, фармацевтическая, пищевая, а также в сферах деятельности страховых компаний, банков, сбытовых организаций, предприятий коммунального обслуживания и транспортных агентств.

В зависимости от сферы применения операционные исследования затрагивают проблемы добычи полезных ископаемых, выпуска промышленной продукции, транспортирования и складирования, определения места размещения и производственных мощностей промышленных предприятий, управления запасами, разработки производственных графиков, прогнозирования, получения новых видов продукции, сбыта, организации рекламы, финансовой деятельности, управления аппаратом министерства, слияния фирм, а также краткосрочного и долгосрочного планирования.

В прошлом операционные проекты в большинстве своем сводились к решению задач планирования на месяц, квартал или год, задач управления запасами, а также ряда других четко определенных задач организационного управления. После того как группе операционистов удавалось «продемонстрировать свои способности» при решении такого рода задач, фирма использовала возможности этой группы для анализа более сложных стратегических проблем (таких, как выбор участка для строительства нового промышленного объекта, приобретение новых рынков сбыта, создание филиалов фирм за границей и т. д.).

Исследование операций достигло больших успехов в области разработки методов долгосрочного стратегического планирования. Даже руководителям высшего уровня трудно объединить в одно целое все существенные факторы, подлежащие учету при составлении рационального долгосрочного плана. Операционный подход не только дает возможность преодолеть эту трудность, но и позволяет также разрабатывать планы с учетом случайных факторов. Другими словами, с помощью исследования операций можно построить полную стратегию, определяющую наиболее целесообразные способы действий при различных стечениях обстоятельств в будущем. Кроме того, результаты анализа могут подсказать способы получения и последующего использования необходимых данных относительно такого рода случайных ситуаций. Таким образом, операционная модель подсказывает, какие действия следует предпринять немедленно, а какие нужно отсрочить, с тем чтобы в свое время еще раз проанализировать ситуацию с учетом вновь возникших условий. Именно по перечисленным выше причинам советы директоров крупных корпораций относятся к проектам стратегических решений, полученным в результате комплексных операционных исследований, как к вполне обоснованным.

Полезные применения в некоммерческой сфере. Масштабы операционных исследований в государственных учреждениях, а также в организациях некоммерческого типа становятся поистине огромными. Начало длинному ряду военных приложений операционных методов было положено в годы второй мировой войны. В настоящее время методы исследования операций находят применение при решении проблем, связанных со здравоохранением, образованием и социальным обеспечением; с регулированием движения по автомагистралям и на авиалиниях; с мерами, направленными против загрязнения воздуха и открытых водоемов; с охраной общественного порядка и обеспечением противопожарной безопасности; с размещением школ и избирательных участков и надлежащим районированием населенных пунктов; с составлением годовых планов финансовых смет при реализации различного рода программ социально-бытового характера; с целым рядом других мероприятий.

Особая заслуга в стимулировании операционных исследований в административно-государственном секторе и в сфере коммунальных услуг принадлежит «РЭНД корпорэйшн» (находится в Санта-Моника). Многие основополагающие концепции и математические методы в области исследования операций возникли в связи с новаторскими предложениями и новыми идеями, исходящими от ученых, работающих в этой организации. В настоящее время имеется несколько других организаций, аналогичных «РЭНД корпорэйшн», которые обслуживают правительственные учреждения США. Существует ряд организаций (в том числе РЭНД), которые занимаются проблемами организационного управления в масштабах одного штата или одного города, а также разрабатывают проекты военного назначения.

Насколько отличаются операционные исследования, проводимые в государственном секторе, от тех исследований, которые выполняются в рамках частного сектора? Ответ зависит от того, какие аспекты исследования операций имеются в виду. Если говорить о таких характеристиках операционного метода, как стремление к количественному описанию исследуемых явлений и процессов, ориентация на получение экономической выгоды, значение, которое придается при исследовании операций построению моделей, наличие границ применимости метода исследования, а также «структура» описанной выше процедуры анализа той или иной задачи, то они в одинаковой степени присущи методам исследования операций, используемым как при решении задач в административно-государственной сфере, так и тех задач, с которыми сталкиваются в области коммунально-бытового обслуживания. Но существуют, оказывается, и заметные различия в методах решения упомянутых задач. Так, например, линейное программирование нашло широкое признание в промышленности; однако в области планирования деятельности государственных учреждений оно применяется лишь в редких случаях. Совершенно противоположная картина имеет место в случае имитационных моделей.

Иногда утверждают, что отсутствие четко определенных целевых функций, которые требовалось бы оптимизировать при решении проблем непроизводственной сферы, приводит к существенной разнице между характером операционных исследований в частном и государственном секторах. В сфере производства результаты операционных исследований чаще всего оцениваются той дополнительной экономической выгодой, которая может быть получена при практическом использовании полученного результата. Однако этот критерий при решении проблем организационного управления является далеко не единственным. Производственно-коммерческая деятельность всегда сопряжена с поиском компромисса между различными целями. Таким образом, отсутствие чисто экономического критерия (в виде дополнительной прибыли) оказывается менее существенным, чем это может показаться на первый взгляд.

Наиболее важное различие между частным и государственным секторами, вероятнее всего, связано с проблемой распределения административной ответственности. Крупные промышленные корпорации имеют сложную организационную структуру. При этом административные полномочия различных категорий должностных лиц не всегда четко определены. Однако по сравнению со структурой большинства государственных организаций структуры промышленных корпораций выглядят все же более простыми. Разница заключается в следующем. На предприятии промышленного или коммерческого типа никто не имеет права распорядиться ни одним долларом, пока не будет получена санкция высшего руководства фирмы. В государственном же секторе даже решения президента США подлежат контролю со стороны конгресса, т. е. становятся частично объектом коллективной ответственности. Однако следует иметь в виду, что «распыление» ответственности и полномочий *лишь затрудняет*, но *не* исключает применение операционных методов в непроизводственной сфере. Как показывает статистика, большое число операционных исследований было выполнено и нашло практическое применение именно в учреждениях административно-государственного типа, а также на предприятиях и в учреждениях, имеющих отношение к сфере коммунальных услуг.

1.8. О ЧЕМ НЕ СЛЕДУЕТ ЗАБЫВАТЬ...

Ознакомление с методами исследования операций лучше всего начать с изучения линейных моделей оптимизации. Именно этим моделям посвящена гл. 2, а также ряд последующих глав. В процессе ознакомления с линейными моделями, а также с моделями других классов следует постоянно помнить о том, что количественный анализ, располагая большими возможностями, страдает все же известной ограниченностью (разд. 1.3 и 1.4). Это необходимо для того, чтобы правильно оценить сильные и слабые стороны методов исследования операций.

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Воспроизведите в памяти содержание основных этапов количественного анализа (разд. 1.5) и попытайтесь объяснить, каким образом предлагаемая схема рассмотрения могла бы быть использована при решении перечисленных ниже задач организационного управления. Изложите также ваши соображения относительно тех преимуществ, которые дает в связи с решением этих задач системный подход, а также относительно способов достижения поставленных целей (разд. 1.7) в каждом конкретном случае. Рассмотрите задачи организационного управления, связанные со следующими процессами:

а) нефтеразведка и бурение нефтяных скважин;

б) вырубка лесных участков;

в) размещение заказов на ряде прокатных станов большого металлургического комбината;

г) создание сети складских помещений для хранения консервированных продуктов питания;

д) размещение и определение производственной мощности горно-обогатительного комбината;

е) определение спроса на новую разновидность туалетного мыла путем проведения «рыночного эксперимента»;

ж) определение мест строительства продовольственных магазинов;

з) выбор трассы для автострады высшего класса;

и) определение количества и мест дислокации пожарных депо в крупном населенном пункте.

Контрольные упражнения, связанные с проблемой «двух картошек» (разд. 1.6). В упражнениях 2—5 требуется представить графически допустимые варианты закупок и соответствующие оптимальные решения, вычислить оптимальные значения P_1 и P_2, а также соответствующие значения целевой функции. При этом предполагается, что остаются без изменения все данные, приведенные на рис. 1.1, за исключением тех, которые специально оговорены ниже. Рассмотрите случаи, когда:

2. а) Имеет место одно из следующих ограничений: $P_1 = 1{,}7$, $P_1 = 1{,}9$;

б) имеет место одно из следующих ограничений: $P_2 = 1{,}1$, $P_2 = 1{,}3$;

в) имеют место ограничения $P_1 = 1{,}7$ и $P_2 = 1{,}1$;

г) имеют место ограничения $P_1 = 1{,}9$ и $P_2 = 1{,}3$;

д) имеет место одно из следующих ограничений: $P_3 = 2{,}5$, $P_3 = 2{,}3$, $P_3 = 2{,}1$, $P_3 = 1{,}5$.

3. а) Относительная прибыль в расчете на единицу веса в случае покупки картофеля у поставщика 2 составляет: 1) 7; 2) 8;

б) относительная прибыль в расчете на единицу веса в случае покупки картофеля у поставщика 1 составляет 4;

в) относительная прибыль в расчете на единицу веса в случае покупки картофеля у поставщика 1 составляет 6, а в случае покупки картофеля у поставщика 2 равняется 2;

г) относительная прибыль в расчете на единицу веса в случае покупки картофеля у поставщика 1 составляет 6, а в случае покупки картофеля у поставщика 2 равняется 3.

4. а) Из 1 *т* картофеля поставщика 1 можно приготовить 0,25 *т* продукта 1;

б) из 1 *т* картофеля поставщика 2 можно приготовить 0,2 *т* продукта 1;

в) из 1 *т* картофеля поставщика 1 можно приготовить 0,3 *т* продукта 3;

г) из 1 *т* картофеля поставщика 2 можно приготовить 0,15 *т* продукта 3.

5. Имеет место дополнительное ограничение

а) $P_1 \leqslant 4$;

б) $P_2 \leqslant 2{,}5$;

в) $P_1 \leqslant 4$ и $P_2 \leqslant 2{,}5$;

г) $P_1 \geqslant 5$;

д) $P_2 \geqslant 4$;

е) $P_1 \geqslant 5$ и $P_2 \geqslant 4$.

Контрольные упражнения, связанные с задачей выбора кандидатуры на секретарскую работу (разд. 1.6). В упражнениях 6—11 требуется начертить дерево альтернатив и найти оптимальную стратегию.

При этом предполагается, что сохраняются все данные, приведенные на рис. 1.4, за исключением тех, которые предопределены по условиям указанных ниже упражнений.

6. Администратор намерен рассмотреть не более четырех кандидатур. Каково приращение оценки исхода, если рассмотреть все кандидатуры, а не только первую из них? Каково приращение оценки исхода, если рассмотреть все четыре кандидатуры, а не только первые три?

7. Администратор намерен рассмотреть не более пяти кандидатур. Каково приращение оценки исхода, если рассмотреть все пять кандидатур вместо того, чтобы принять решение сразу же после первого собеседования?

8. По относительной шкале кандидатура с отличными качествами оценивается в 4 балла. Каково приращение оценки исхода, если вместо одного собеседования провести три?

9. а) Вероятность того, что рассматриваемая кандидатура окажется достаточно хорошей, равняется 0,2, а вероятность того, что она окажется посредственной, составляет 0,6. Каково приращение оценки исхода, если вместо одной кандидатуры рассмотреть три?

б) Вероятность того, что рассматриваемая кандидатура будет оценена на отлично, равняется 0,1, на хорошо — 0,4, а на посредственно — 0,5. Каково приращение оценки исхода, если вместо одной кандидатуры рассмотреть три?

10. а) Исход каждого собеседования оценивается в 0,15 балла.

б) Исход каждого собеседования оценивается в 0,15 балла, причем администратор намерен рассмотреть не более четырех кандидатур.

11. а) Чему равняется среднее число рассматриваемых кандидатур?

б) Чему равняется среднее число рассматриваемых кандидатур, если максимальное число кандидатур, отобранных для прохождения собеседования, не больше четырех? (Рекомендуется воспользоваться решением, полученным для упражнения 6.)

Контрольные упражнения, связанные с производственной задачей «места и времени» (разд. 1.6). В упражнениях 12—16 в качестве исходных данных приняты следующие:

$$D = 100, \quad N = 4, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = 4.$$

Частичные изменения данных отражены в каждом из указанных ниже упражнений.

Требуется найти оптимальное значение каждой переменной x_j и определить соответствующую минимальную стоимость при условиях, сформулированных ниже.

12. Данные, приведенные выше, остаются без изменения.

13. $D = 200$.

14. а) $c_1 = 3$; б) $c_4 = 2$; в) $c_1 = 3$, $c_4 = 2$; г) $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 2{,}5$.

15. а) $N = 5$, $c_5 = 5$; б) $N = 5$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 2$.

16. а) $x_2 = 36$; б) $x_2 = 4$.

Контрольные упражнения, связанные с задачей определения оптимального объема заказа (разд. 1.6). В упражнениях 17—20 предполагается, что если не оговорены специальные условия (свои для каждого конкретного случая), то следует принять: $M = 5$, $K = 90$, $h = 4$. Чтобы упростить вычисления, положите $c = 0$.

17. Определите экономически наиболее выгодный объем заказа, соответствующие средние расходы за неделю, а также интервал (исчисляемый неделями) между двумя последовательными заказами. Наряду с этим: 1) изобразите графически средние расходы за неделю как функцию объема заказа Q; 2) укажите на графике оптимальное значение Q и минимальные средние расходы за неделю; 3) изобразите графически (в виде «пилы», аналогичной той, которая представлена на рис. 1.4) уровни запасов, соответствующие оптимальной стратегии. Отдельно рассмотрите случаи, когда:

а) приведенные выше данные остаются без изменений;

б) $h = 16$;	д) $h = 16$, $K = 360$;
в) $K = 360$;	е) $h = 16$, $M = 20$;
г) $M = 20$;	ж) $K = 360$, $M = 20$.

18. а) Определите средние расходы за неделю, если объем заказа на 10% больше оптимального.

б) Определите средние расходы за неделю, если объем заказа на 10% меньше оптимального.

19. а) Определите *фактические* средние расходы за неделю, если при $h = 16$ оформляются заказы в объеме, который является оптимальным для $h = 4$.

б) Определите *фактические* средние расходы за неделю, если при $h = 4$ оформляются заказы в объеме, который является оптимальным для $h = 16$.

20. а) Определите *фактические* средние расходы за неделю, если при $M = 20$ оформляются заказы в объеме, который является оптимальным для $M = 5$.

б) Определите *фактические* средние расходы за неделю, если при $M = 5$ оформляются заказы в объеме, который является оптимальным для $M = 20$.

Контрольные упражнения, связанные с задачей определения оптимальной сети телефонной связи (разд. 1.6) (*задача авиакомпании* «Беспосадочный полет».) Допустим, что процедуры установления телефонной связи и обслуживания клиентуры по телефону можно имитировать следующим образом: если в результате бросания четырех монет выпадают четыре «орла», то временной интервал между двумя последовательными вызовами принимается равным 3 *мин*; если выпадает три «орла» — 2 *мин*, два «орла» — 1 *мин*, четыре «решки» (ни одного «орла») — 4 *мин*. Время обслуживания клиента по телефону (когда хотя бы одна линия связи не занята) определим с помощью бросания двух монет: если при этом выпадет два «орла», то время обслуживания примем равным 1 *мин*, если выпадет один «орел» — 2 *мин*; если не выпадет ни одного «орла» (т. е. выпадет две «решки») — 3 *мин*.

21. В каждом из приведенных ниже упражнений имитируется 20 вызовов. Требуется вычислить:

1) средний интервал между двумя последовательными звонками;

2) среднее время обслуживания, когда вызов достигает цели;

3) число вызовов, не достигших цели (из-за того что все линии оказывались занятыми);

4) долю времени, когда все линии заняты;

5) среднюю продолжительность времени, когда все линии заняты.

При выполнении вычислений следует исходить из следующих предположений:

1) вначале все линии свободны;

2) система прекращает функционировать 2 *мин* спустя после 20-го вызова (независимо от того, достиг он цели или не достиг);

3) в течение этого двухминутного интервала вызовы полностью отсутствуют.

Требуется также начертить диаграммы (аналогичные изображенным на рис. 1.6 и 1.7), позволяющие представить имитационный процесс графически. Предлагается рассмотреть варианты, когда имеется:

а) одна линия связи;

б) две линии связи;

в) три линии связи.

Для каждого варианта требуется:

г) вычислить среднее значение интервала времени между последовательными событиями, когда вызовы достигают цели;

д) вычислить среднее значение времени обслуживания в предположении, что все вызовы достигают цели.

ГЛАВА 2

Построение линейных оптимизационных моделей

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Линейное программирование, безусловно, относится к числу наиболее широко распространенных методов исследования операций, используемых при решении производственных и коммерческих задач. Действительно, имеются весьма серьезные основания утверждать, что этот метод является экономически наиболее эффективным.

Качественный анализ. Чтобы разобраться в особенностях данного этапа анализа, рассмотрим некоторые конкретные «операции», выполняемые каким-нибудь крупным промышленным предприятием с типовыми технологическими процессами (к числу предприятий такого рода можно, в частности, отнести нефтеперерабатывающие заводы, металлургические комбинаты, деревообрабатывающие комбинаты и т. п.). Рассмотрим, например, крупную нефтяную компанию. Наиболее важные управляющие решения в этом случае связаны со следующими процессами:

геологическая разведка с целью обнаружения нефтяных месторождений;

добыча сырой нефти (нефтесырья);

обмен сырой нефти, добываемой фирмой, на нефтесырье других нефтяных компаний;

дополнительная закупка сырой нефти;

доставка нефти на нефтеперегонные заводы;

крекинг и ректификация с целью получения различных нефтепродуктов для смешения (промежуточных продуктов);

получение многочисленных видов готовой продукции в результате соединения промежуточных нефтепродуктов (в различных комбинациях и пропорциях);

доставка (транспортировка) готовой продукции к местам сбыта.

Допустим, что принимается решение смонтировать на нефтеперегонном заводе дополнительную крекинг-установку. Это, естественно, отразится на производственных показателях данного предприятия. В равной степени существенным, однако, оказывается и то, что это решение, по всей вероятности, может определенным образом затронуть и все другие операции, перечисленные выше. Проектные показатели новой крекинг-установки могут отразиться на требованиях, предъявляемых к нефтесырью, повлиять на размещение источников сырой нефти, а также привести к пересмотру ассортимента выпускаемой нефтепродукции и к изменениям в сфере сбыта. Аналогичным образом увеличение (в том или ином районе) спроса на бензин сопряжено с пересмотром мощностных показателей нефтеперегонных заводов, с необходимостью заключения контрактов по обмену нефтесырьем с другими нефтяными компаниями и с определением тех районов, где следует сосредоточить основные усилия по обнаружению нефтяных месторождений.

В качестве другого примера рассмотрим фирму, которая, имея в своем распоряжении лесомассивы (лес на корню), производит заготовку и обработку древесины, выпускает широкий ассортимент различных изделий из дерева и продает готовую продукцию в различных географических районах. Как и в примере с нефтяной компанией, все стратегические решения рассматриваемой фирмы должны учитывать самое существенное ограничение, определяемое свойствами материала, используемого в качестве сырья. В данном случае существенным является то, что из одного бревна можно изготовить лишь ограниченное количество различных видов пиломатериалов. Чтобы получить прибыль, фирма должна рационально распределить различные сорта пиломатериалов по номенклатуре выпускаемой продукции (для каждого вида готовой продукции требуется определенный сорт пиломатериалов). Таким образом, ассортимент окончательной продукции должен быть таким, чтобы лесоматериалы использовались полностью. Однако даже при такой постановке вопроса остается значительная свобода выбора конкретной номенклатуры продукции, выпускаемой фирмой.

Несмотря на очевидные упрощения, приведенные примеры являются хорошей иллюстрацией проблем, с которыми приходится сталкиваться фирмам при принятии решений, связанных с распределением ресурсов. Реальные ситуации, как правило, оказываются более сложными. Поэтому научно-обоснованный экономический анализ последствий принятия того или иного решения связан с еще большими трудностями. Однако задачи именно такого рода успешно решались многими крупными фирмами с помощью линейных оптимизационных моделей, или, как их обычно называют, **моделей линейного программирования.**

Потенциальные возможности линейного программирования. Почему даже вполне преуспевающие компании прибегают к помощи математики? Разве управленческого опыта, интуиции и знания дела не достаточно для принятия правильных решений? Руководящие работники фирм, отвечающие за прибыльность предприятий, давно убедились в том, что успех дела в значительной степени определяется качеством комплексного планирования выполняемых фирмой операций. Редко можно встретить руководителя, который отрицал бы важность такого планирования. В то же время на больших предприятиях одна только регистрация фактических данных, необходимых для анализа сложных проблем организационного управления, сопряжена с огромными трудозатратами. Людские же ресурсы фирмы, которые можно было бы использовать для оценки экономической эффективности того или иного плана, ограничены.

Как будет показано ниже, линейное программирование позволяет резко увеличить аналитические возможности управляющего фирмы и его аппарата. Рассматриваемые здесь математические модели дают руководителю *возможность* проанализировать такой широкий спектр *возможных* планов распределения ресурсов, о каком он не мог ранее и мечтать. Однако, как уже отмечалось в гл. 1, важно отдавать себе отчет в том, что результаты такого анализа вовсе не подменяют опыт и интуицию руководителя. Скорее наоборот, эти результаты позволяют выявить четко определенные и исчерпывающие данные, необходимые руководителю для эффективного применения своих знаний.

Предварительные замечания. Цель данной главы заключается в том, чтобы познакомить читателя с рядом задач оптимизации, решение которых предполагает построение линейных моделей. Чтобы осуществить это, не отвлекаясь от главного, мы не будем касаться здесь методов численного решения задач линейного программирования. Эти методы подробно рассматриваются в гл. 4.

Каждому, кто хочет научиться применять линейное программирование на практике, придется рано или поздно примириться с тем обстоятельством, что реальные ситуации оказываются значительно более сложными, чем та ситуация, о которой шла речь в связи с проблемой «двух картошек» (гл. 1). В приведенных в конце данной главы упражнениях на построение линейных моделей рассматривается ряд других примеров «карликового» характера. Они дают возможность читателю приобрести дополнительные навыки в построении линейных моделей, а также в их графическом представлении. Однако, по-видимому, не имеет более смысла терять время на «миниатюрные» задачи, которые настолько просты, что могут ввести читателя в заблуждение. Необходимо привыкнуть (и чем быстрее, тем лучше) к моделям, содержащим более чем два-три ограничения. Поэтому предпочтение будет отдано рассмотрению более типичных (и более реалистических) задач линейного программирования.

Наряду с этим необходимо научиться формулировать достаточно сложные задачи в алгебраическом виде, поскольку при наличии всех необходимых данных графическое представление не вызывает особых затруднений. При практическом применении линейного программирования для получения численных решений возникает необходимость обращаться к помощи ЭВМ. Для использования же стандартных вычислительных программ требуется алгебраическая запись модели. Таким образом, необходимо умение переводить словесное описание задачи на язык математических символов.

В двух приведенных ниже примерах рассматриваются задача оптимального распределения ресурсов на промышленном предприятии, имеющем возможность использовать различные комбинации технологических процессов, и задача рационального составления комбикорма. В третьем примере исследуется задача составления жидких смесей. Этот пример содержит элементы подхода, рассмотренные в первых двух задачах, и, кроме того, характеризуется наличием дополнительных ограничений, определяемых технологией производства.

Модели, используемые во всех трех примерах, называются *статическими*, так как они предназначены для анализа управляющих решений, распространяющихся на единственный, заранее определенный интервал времени. Метод построения «мультивременных», или динамических, моделей излагается в разд. 2.6.

Важный класс моделей, используемых при решении так называемых *транспортных задач*, иллюстрируется на примере, приведенном в разд. 2.7. Многие сложные модели линейного программирования представляют собой комбинацию транспортной задачи и задачи «выбора компонентов» (для составления жидких смесей, для изготовления пищевых продуктов и т. д.). Кроме того, они могут быть «мультивременными», т. е. содержать элементы динамики.

Мы полагаем, что по мере ознакомления с материалом данной главы читатель, постоянно повышая уровень своих знаний, сам научится различать классы линейных моделей. По этой причине пояснения, содержащиеся в первых разделах, носят более подробный характер по сравнению с пояснениями, приведенными в конце главы. Читателю рекомендуется время от времени проверять справедливость некоторых высказываний, с тем чтобы убедиться в правильности понимания излагаемой здесь последовательности понятий, идей и представлений.

Схема проверки степени усвоения материала. При рассмотрении приведенных ниже примеров читателю рекомендуется задуматься над следующими вопросами:

1. Относительно чего должно быть принято основное управляющее решение? Какая проблема при этом решается?

2. Почему в реальной действительности условия, в которых приходится принимать управляющие решения, настолько сложны, что возникает необходимость в использовании линейной оптимизационной модели. Какие факторы, характеризующие эти условия, учитываются моделью, а какие из них не принимаются во внимание?

3. В чем состоит различие между решением, имеющим практическую ценность, и решением, которое не может быть реализовано? Чем отличается плохое решение от хорошего?

4. Как применить результаты проведенного анализа на практике? Какова интерпретация полученного решения? Каким образом можно (или нужно) было бы подправить или видоизменить результаты за счет факторов, не учтенных моделью в явном виде?

После рассмотрения примеров вновь обратимся к обсуждению вопросов, связанных с использованием моделей линейного программирования на современных предприятиях производственно-коммерческого типа.

2.2. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

На предприятии, выпускающем неоднородную продукцию, руководитель стремится определить, какими должны быть уровни производства для каждого продукта в течение некоторого наперед заданного периода. Эти уровни ограничены технологическими и другими («внутренними» для данного предприятия) условиями, заданными в виде линейных соотношений (равенств или неравенств). В рамках

	На единицу продукции A		На единицу продукции B		Имеется в наличии (всего)
	технологический процесс 1	технологический процесс 2	технологический процесс 3	технологический процесс 4	
Количество человеко-недель	1	1	1	1	$\leqslant 15$
Количество материала Y (в килограммах)	7	5	3	2	$\leqslant 120$
Количество материала Z (единица измерения — ящик)	3	5	10	15	$\leqslant 100$
Доход с единицы продукции (в долларах)	4	5	9	11	Максимизировать
Объем выпускаемой продукции	x_1	x_2	x_3	x_4	

Рис. 2.1. Задача фирмы «Мультиконвейер».

этих ограничений руководство данного предприятия пытается оптимизировать некоторую конкретную целевую функцию. В рассматриваемом здесь примере целью является получение максимальной прибыли. В последующих примерах будут фигурировать и другие цели (например, минимизация затрат).

Представим себе фирму (назовем ее условно «Мультиконвейер»), имеющую возможность реализовать от одного до четырех различных типов производственно-технологических процессов и обладающую правом выбора того или иного варианта. Технологические процессы первого и второго типов ориентированы на получение продукции A, а технологические процессы третьего и четвертого типов — на получение продукции B. Расходы, связанные с каждым из технологических процессов, определяются трудозатратами (измеряемыми в человеко-неделях), количеством (в единицах веса) потребляемого в течение недели материала Y и количеством (в ящиках) потребляемого в течение недели материала Z. Поскольку затраты, связанные с различными технологическими процессами, не одинаковы, прибыльность процессов оказывается разной даже в том случае, когда они используются для получения продукции одного и того же вида. При составлении производственного плана на неделю диапазон возможностей предпринимателя ограничен как за счет людских ресурсов, так и за счет потребляемого сырья (т. е. материалов Y и Z). Производственно-экономические показатели и все имеющиеся ограничения представлены на рис. 2.1.

Используя данные, приведенные на рис. 2.1, можно было бы сразу же приняться за построение линейной модели, как это было сделано в случае проблемы «двух картошек» в гл. 1. Однако на этот раз желательно «умерить пыл». Посмотрим прежде всего, какие допущения относительно технологии производства необходимо принять, чтобы обеспечить линейность модели.

Аксиомы линейности. Примем следующие два допущения, играющие исключительно важную роль при анализе (как в технологическом, так и в экономическом аспектах) упомянутых выше производственно-технологических процессов:

1. *Делимость.* Для каждого производственно-технологического процесса суммарное количество каждого из потребляемых ресурсов и соответствующая прибыль строго пропорциональны объему выпускаемой продукции (т. е. в расчете на единицу времени пропорциональны соответствующей производственной мощности, или, как говорят, уровню производственной активности). Другими словами, все показатели производственно-технологического процесса могут быть увеличены или уменьшены при сохранении их взаимной пропорциональности. Так, например, если увеличить вдвое все потребляемые ресурсы, то объем выпускаемой продукции и прибыль также возрастут вдвое. В частности, чтобы произвести в ходе технологического процесса 1 десять единиц продукции ($x_1 = 10$), необходимо затратить 10 человеко-недель, 70 *кг* материала Y и 30 ящиков материала Z; при этом прибыль составит 40 долл. Условие делимости предполагает также, что все производственно-экономические показатели могут принимать не только целочисленные, но и дробные значения. Например, с технологической точки зрения вполне допустимо положить $x_2 = 2{,}5$ или $x_4 = {}^{10}/_3$.

2. *Аддитивность.* Если значение каждой из управляемых переменных x_j определено (т. е. указан соответствующий уровень производственной активности), то полное количество каждого из потребленных ресурсов равняется сумме одноименных ресурсов, затраченных при реализации всех применявшихся технологических процессов, а полная прибыль равняется сумме прибылей, получаемых в результате реализации этих технологических процессов. Пример: в соответствии с таблицей на рис. 2.1 для производства единицы

продукции в ходе технологического процесса 1 и единицы продукции в ходе технологического процесса 3 требуются 2 человеко-недели, 10 *кг* материала Y и 13 ящиков материала Z; доход при этом составляет 13 долл.

Постулирование свойств делимости и аддитивности эквивалентно утверждению о том, что соответствующая математическая модель может быть представлена в виде линейных соотношений. В более определенной интерпретации сформулированные выше аксиомы означают, что применительно к фиксированному производственно-технологическому процессу доходы строго пропорциональны затраченным ресурсам, а непропорциональный эффект (технологического или экономического характера) оказывается невозможным. Как будет показано в гл. 13—15, с помощью надлежащих (более «сильных») математических методов нередко удается учесть в линейных моделях эффекты нелинейного характера. В реальных ситуациях сформулированные выше постулаты, позволяющие использовать линейные модели, могут оказаться справедливыми лишь приближенно (хотя, возможно, и с достаточной степенью точности). Во всех приведенных в данной главе примерах предполагается, что условия обоих постулатов выполняются.

В рассматриваемом примере имеется три линейных неравенства (ограничение на трудозатраты, ограничение на материал Y и ограничение на материал Z). Прибыль (подлежащая максимизации) задается линейным соотношением. Более конкретно задача сводится к следующему:

$$\text{максимизировать прибыль} \equiv \textbf{максимизировать} \; (4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &\leqslant 15 \quad \text{(человеко-недели)},\\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leqslant 120 \quad \text{(материал } Y),\\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leqslant 100 \quad \text{(материал } Z). \end{aligned} \tag{2}$$

Отрицательные значения уровней производства (объемов выпускаемой продукции), как, например, $x_1 = -4{,}2$, не имеют физического смысла; таким образом, потребуем, чтобы производство не было «отрицательным». Другими словами, будем считать, что каждая из управляемых переменных x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) либо равна нулю, либо принимает положительные значения, т. е. **неотрицательна:**

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \tag{3}$$

(О переменной, которая может принимать также и отрицательные значения, говорят, что она **не ограничена в знаке.**)

Задача организационного управления заключается в том, чтобы найти значения всех неизвестных x_j, удовлетворяющие соотношениям (2) и (3) и максимизирующие прибыль (1). Вообще говоря, такие значения не обязательно являются единственно возможными. Могут существовать **альтернативные оптимальные решения.**

Вместо того чтобы сразу же приступить к рассмотрению способа нахождения оптимального решения, отложим обсуждение этого вопроса. Соответствующие вычислительные процедуры изложены в гл. 4. При чтении гл. 4 и 5 будет полезно вновь обратиться к рис. 2.1. Пока же читателю можно лишь попытаться угадать оптимальное решение для только что построенной модели, с тем чтобы сопоставить эти догадки с ответом, полученным в гл. 4. В гл. 4 будет доказано следующее исключительно важное утверждение: любая задача линейного программирования, содержащая m ограничений (не считая условий неотрицательности переменных) и допускающая ограниченное (конечное) оптимальное решение, имеет по крайней мере одно наиболее выгодное решение, определяемое не более чем m управляемыми переменными при положительных значениях последних. Таким образом, в рассмотренном примере существует оптимальное решение, содержащее не более трех переменных.

Одновременно с желанием определить оптимальные значения для каждой неизвестной x_j у руководителя может возникнуть намерение выяснить, каким образом отразится на получаемой прибыли увеличение каждого из потребляемых ресурсов, совершенствование того или иного технологического процесса, изменение стоимости потребляемого сырья (и, следовательно, изменение прибыльности производственно-технологических процессов) или использование в процессе производства какого-либо другого ресурса, не являющегося дефицитным. При решении многих практических задач методом линейного программирования подобные вопросы оказываются важнее определения оптимальных значений каждой из переменных x_j. Методы такого рода *анализа на чувствительность* излагаются в гл. 5.

2.3. ЗАДАЧА РАЦИОНАЛЬНОГО СОСТАВЛЕНИЯ КОМБИКОРМА

Пусть крупная свиноферма (условно назовем ее «Суперрацион») имеет возможность покупать от одного до четырех различных видов зерна и приготавливать различные виды смесей (комбикормов). Различные зерновые культуры содержат разное количество питательных компонентов (ингредиентов). Допустим, что принимаются в расчет четыре компонента. (Все данные, относящиеся к рассматриваемой задаче, приведены в таблице на рис. 2.2.) Управляющим свинофермой установлено, что комбикорм для свиней должен удовлетворять по крайней мере некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности; он стремится определить, какая из всех возможных смесей является самой дешевой. Допустим, что период планирования [1]) в данном случае равен двум неделям, т. е. зерно

[1]) *Иногда используется термин «плановый горизонт».— Прим. перев.*

покупается в количестве, достаточном для прокорма имеющегося поголовья свиней в течение двух недель.

	Единица веса			Минимальные суммарные потребности на планируемый период
	зерна 1	зерна 2	зерна 3	
Ингредиент A	2	3	7	$\geqslant 1250$
Ингредиент B	1	1	0	$\geqslant 250$
Ингредиент C	5	3	0	$\geqslant 900$
Ингредиент D	0,6	0,25	1	$\geqslant 232{,}5$
Затраты в расчете на единицу веса (цена), долл.	41	35	96	Минимизировать
Количество (в единицах веса)	x_1	x_2	x_3	

Рис. 2.2. Задача оптимального составления комбикорма.

Предполагая, что имеют место свойства делимости и аддитивности, сформулируем рассматриваемую задачу в следующем виде:

$$\text{минимизировать затраты} \equiv \text{минимизировать} \quad (41x_1 + 35x_2 + 96x_3) \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 3x_2 + 7x_3 &\geqslant 1250, \\ 1x_1 + \quad 1x_2 \qquad\quad &\geqslant 250, \\ 5x_1 + \quad 3x_2 \qquad\quad &\geqslant 900, \\ 0{,}6x_1 + 0{,}25x_2 + 1x_3 &\geqslant 232{,}5, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{2}$$

Интерпретация соотношений (1) и (2) представляется читателю.

Следует заметить, что в реальной действительности рассматриваемая задача, так же как и задача распределения ресурсов, может содержать управляемые переменные в количестве, превышающем число ограничений. В предыдущем примере нулевые значения всех трех переменных ($x_j = 0$) являются допустимыми в том смысле, что при этом все условия, определяемые ограничениями, удовлетворяются. В рассматриваемом примере значения $x_1 = 625$, $x_2 = x_3 = 0$ являются допустимыми. Оптимальное же решение, оказывается, имеет следующий вид: $x_1 = 200$, $x_2 = 50$, $x_3 = 100$. При этом суммарные затраты минимальны и составляют 19 550 долл.

Управляющий свинофермой помимо значений для каждого из x_j, возможно, захочет получить некоторую дополнительную информацию, поскольку рассматриваемая модель может оказаться слишком упрощенным представлением реальной задачи. Так, например, управляющий может заинтересоваться, во сколько ему обойдется использование неоптимальных значений для некоторой конкретной переменной x_j; насколько содержание каждого ингредиента в оптимально составленной кормовой смеси превышает минимально необходимое содержание этого ингредиента; сколько удалось бы ему «сэкономить» за счет снижения минимума требований к содержанию различных ингредиентов в комбикорме; до какого уровня должна снизиться цена нового кормового продукта (например, четвертого вида зерна), когда стоит серьезно задуматься над возможностью его использования для приготовления комбикорма. Все эти вопросы относятся к области анализа на чувствительность.

2.4. ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ ЖИДКИХ СМЕСЕЙ

Еще один класс моделей, аналогичных рассмотренным выше, возникает при решении экономической проблемы, связанной с изготовлением смесей различных жидкостей (например, нескольких сортов сырой нефти, доведенных до расплавленного состояния различных металлов и пр.) с целью получения пользующихся спросом полуфабрикатов или готовой продукции. В отличие от предыдущих примеров, где приводились конкретные числовые данные, сформулируем задачу составления жидких смесей в общем виде, т. е. используя символические обозначения.

Представим себе фирму (назовем ее условно «Алхимик»), торгующую различного рода химическими продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов. Предположим, что эта фирма планирует изготовление смесей трех видов. В рамках ограничений технологического характера и при наличии сырья каждый из продуктов может быть получен путем использования по крайней мере одного из двух возможных химических компонентов. Обозначим подлежащие определению «уровни производственной активности» через x_{ij} (x_{ij} равно числу литров i-го химического компонента, используемого для получения j-го продукта). Будем предполагать, что $x_{ij} \geqslant 0$. В рассматриваемом ниже примере $i = 1, 2$, а $j = 1, 2, 3$.

Первая пара ограничений относится к объемам потребляемых химических компонентов:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant S_1,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant S_2, \qquad (1)$$

где S_i — объем i-го химического компонента, которым располагает фирма в начале планируемого периода. Первое из ограничений означает, что суммарное количество химического компонента 1, используемого для получения продуктов 1, 2 и 3, не может превышать S_1, т. е. имеющегося в наличии объема данного компонента [1]).

Вторая группа ограничений отражает требование, заключающееся в том, чтобы запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени удовлетворял имеющийся спрос на каждый из химических продуктов, т. е.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &\geqslant D_1, \\ x_{12} + x_{22} &\geqslant D_2, \\ x_{13} + x_{23} &\geqslant D_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где D_j — минимальные потребности покупателей в j-м продукте в течение планируемого периода. Будем считать, что волюметрические потери в процессе смешивания данных химических компонентов отсутствуют. Тогда первое ограничение в (2) означает, что суммарное количество продукта 1, получаемого путем смешивания химических компонентов 1 и 2, должно удовлетворять по крайней мере минимальный уровень спроса D_1 [2]).

Следующее ограничение связано с технологическими особенностями, которые необходимо принимать во внимание при приготовлении смеси первого типа (т. е. продукта 1). Допустим, что в каждом из используемых химических компонентов содержится некоторый определяющий ингредиент. Пусть, например, количество этого ингредиента в одном литре i-го химического компонента равняется a_i. Ограничение отражает требование, чтобы при изготовлении продукта 1 данный ингредиент содержался в пропорции, определяемой соотношением

$$\frac{a_1 x_{11} + a_2 x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geqslant r_1. \tag{3}$$

Ограничение аналогичного характера возможно и при получении продукта 2. Пусть оно имеет вид

$$\frac{b_1 x_{12} + b_2 x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \leqslant r_2, \tag{4}$$

т. е. имеет место ограничение сверху. Нетрудно убедиться, что с помощью ряда алгебраических преобразований соотношения (3) и (4) можно привести к нормальному *линейному* виду

$$\begin{aligned} (a_1 - r_1)\, x_{11} + (a_2 - r_1)\, x_{21} &\geqslant 0, \\ (b_1 - r_2)\, x_{12} + (b_2 - r_2)\, x_{22} &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) Второе ограничение в (1) интерпретируется аналогичным образом.— *Прим. перев.*

[2]) Два других ограничения в (2) интерпретируются аналогичным образом.— *Прим. перев.*

Наконец, может иметь место простое ограничение, определяемое некоторыми минимально допустимыми значениями отношения между объемами двух химических компонентов в процессе получения продукта 3:

$$\frac{x_{13}}{x_{23}} \geqslant r_3, \quad \text{или} \quad x_{13} - r_3 x_{23} \geqslant 0. \tag{6}$$

Обозначив через p_{ij} доход с единицы продукции x_{ij}, запишем **целевую функцию** в виде

$$p_{11}x_{11} + p_{12}x_{12} + p_{13}x_{13} + p_{21}x_{21} + p_{22}x_{22} + p_{23}x_{23}.$$

	Один литр						
	химического компонента 1 в продукте			химического компонента 2 в продукте			
	1	2	3	1	2	3	Ограничение
Наличие химического компонента 1	1	1	1				$\leqslant S_1$
Наличие химического компонента 2				1	1	1	$\leqslant S_2$
Спрос на продукт 1	1			1			$\geqslant D_1$
Спрос на продукт 2		1			1		$\geqslant D_2$
Спрос на продукт 3			1			1	$\geqslant D_3$
Технология получения продукта 1	$a_1 - r_1$			$a_2 - r_1$			$\geqslant 0$
Технология получения продукта 2		$b_1 - r_2$			$b_2 - r_2$		$\leqslant 0$
Технология получения продукта 3			1			$b_3 - r_3$	$\geqslant 0$
Доход в расчете на единицу продукции, долл.	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	Максимизировать
Уровень производственной активности (объем продукции, выпускаемой в течение запланированного периода)	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	

Рис. 2.3. Задача составления жидких смесей.

Следовательно, задача заключается в том, чтобы

$$\text{максимизировать доход} \equiv \text{максимизировать}$$
$$(p_{11}x_{11} + p_{12}x_{12} + p_{13}x_{13} + p_{21}x_{21} + p_{22}x_{22} + p_{23}x_{23}). \qquad (7)$$

Рассматриваемую модель, состоящую из соотношений (1) — (7), можно представить в компактном виде таблицей, приведенной на рис. 2.3. (Далее всюду в случае нулевых значений тех или иных показателей будем оставлять соответствующие ячейки таблицы, представляющей ту или иную модель, незаполненными.) Читателю предоставляется возможность самому ответить на вопрос, какую задачу намерен решить руководитель с помощью данной модели.

Внимательно просмотрев только что построенную модель, заметим, что ограничения, накладываемые на объемы потребляемого сырья, так же как и ограничения, определяемые уровнем спроса, подобны ограничениям, имевшим место в двух предыдущих задачах. Технологические ограничения носят несколько иной характер. Следует отметить, что для рассмотренной модели допустимых решений может и не существовать. Другими словами, значения S_i, D_j и r_j могут быть такими, что не окажется ни одного набора значений x_{ij}, которые удовлетворяли бы всем условиям задачи (т. е. ограничениям). Так, например, при $S_i = 5$ и $D_j = 10$ для всех значений i и j минимальный суммарный спрос при имеющихся запасах сырья не мог бы быть удовлетворен.

2.5. МНОГОСТОРОННИЙ КОММЕРЧЕСКИЙ АРБИТРАЖ

В сфере деятельности, связанной с валютными и биржевыми операциями, а также с коммерческими сделками контрактационного характера, возможны различного рода трансакции, позволяющие извлекать прибыль на разнице в курсе валют. Такого рода трансакции называются коммерческим *арбитражем*. Представим себе коммерсанта (условно назовем его коммерсантом N), имеющего возможность реализовать многосторонний коммерческий арбитраж. Предположим, что число валютных рынков, вовлеченных в трансакционную деятельность коммерсанта N, равняется шести, а максимальное число возможных трансакций равняется девяти. Подробные данные, характеризующие рассматриваемую задачу, приведены в таблице на рис. 2.4.

При трансакции x_1 продажа единицы валютного номинала (ценных бумаг) II позволяет приобрести r_{11} единиц валютного номинала I. При трансакции x_7 взамен единицы валютного номинала I можно получить r_{37} единиц валютного номинала III и r_{67} единиц валютного номинала VI. Остальные трансакции расшифровываются аналогично. Значения r_{ij}, разумеется, могут быть дробными. Заметим, что при любой трансакции x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) каждый из валютных номиналов можно обменять на валютный номинал I. Следует обратить внимание на **правило выбора знака** перед показателями, приведенными в таблице на рис. 2.4. Чтобы отличать куплю от продажи, будем соответственно использовать знаки плюс и минус перед показателями, характеризующими данную трансакцию.

	Тип трансакции									Возможности рынка
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Валютный номинал I	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	-1	-1			$\geqslant 0$
Валютный номинал II	-1					r_{26}			r_{29}	$\geqslant 0$
Валютный номинал III		-1					r_{37}	r_{38}		$\geqslant 0$
Валютный номинал IV			-1					-1	r_{49}	$\geqslant 0$
Валютный номинал V				-1				r_{58}		$\geqslant 0$
Валютный номинал VI					-1		r_{67}		-1	$\geqslant 0$
Размер трансакции	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	

Рис. 2.4. Многосторонний коммерческий арбитраж.

Рассмотрим идеализированный случай, когда все трансакции коммерсанта N выполняются одновременно и мгновенно. Ограничения определяются единственным требованием — трансакция возможна лишь при условии, если коммерсант N располагает наличными ценными бумагами. Другими словами, количество проданных ценных бумаг не должно превышать количество приобретенных. Легко убедиться, что на языке линейной алгебры упомянутые ограничения имеют вид

$$\begin{aligned} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 &\geqslant 0, \\ -x_1 + r_{26}x_6 + r_{29}x_9 &\geqslant 0, \\ -x_2 + r_{37}x_7 + r_{38}x_8 &\geqslant 0, \\ -x_3 - x_8 + r_{49}x_9 &\geqslant 0, \\ -x_4 + r_{58}x_8 &\geqslant 0, \\ -x_5 + r_{67}x_7 - x_9 &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 9.$$

Пусть целевая функция представляет собой чистый доход, выраженный в единицах валютного номинала I, т. е. задача состоит в том, чтобы

$$\text{максимизировать } (r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7). \tag{2}$$

В случае когда все левые части системы линейных неравенств равны нулю [как это имеет место в (1)], система линейных соотношений называется **однородной.** Заметим, что решение $x_j = 0$ для всех значений j является тривиальным допустимым решением, для которого чистый доход равен нулю. Допустим, что существует некоторый набор нетривиальных значений x_j, для которого чистый доход принимает положительное значение. Тогда вследствие однородности системы (1) kx_j $(j = 1, 2, \ldots, 9)$ также является допустимым решением при любых $k \geqslant 0$, а получаемый доход возрастает соответственно в k раз. Таким образом, если для данной модели существует хотя бы одно допустимое решение, то значение целевой функции может быть сделано произвольно большим. В этом случае мы говорим, что имеет место **неограниченное оптимальное решение.**

Мы ввели бы читателя в заблуждение, если бы стали утверждать, что приведенная выше модель как инструмент анализа действительно представляет большую практическую ценность. Если бы коммерсант попытался воспользоваться данной моделью в реальных условиях, то он должен был бы обладать способностью «засекать» разницу (несоответствие) в валютных курсах почти мгновенно, поскольку товарный рынок в такого рода ситуациях стремится сразу же внести соответствующие коррективы. Основная цель, которую мы преследовали, приводя только что рассмотренный пример, состоит в том, чтобы продемонстрировать существование почти реалистических задач, допускающих неограниченное оптимальное решение. Такие задачи представляют особый интерес для экономистов, пытающихся разобраться в наиболее важных особенностях мультивалютных рынков.

2.6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ (ПРИМЕР КОМПЛЕКСНОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ)

Каждую из рассмотренных выше моделей можно обобщить на тот случай, когда задача планирования носит мультивременной характер. Так, например, если в задаче распределения ресурсов (см. разд. 2.2) сырьевые и людские ресурсы, а также доход с единицы продукции меняются во времени, то задача оптимизации приобретает динамический характер. При этом она *не сводится* полностью к задаче оптимизации для последовательных периодов времени, рассматриваемых изолированно друг от друга. Аналогично, если, решая задачу рационального выбора ингредиентов для комбикорма, фермер допускает некоторое ослабление требований к составу пищевой смеси в течение одного периода, рассчитывая на соответствующую компенсацию в последующие периоды, и если цены на зерно с течением времени меняются, то возникает задача динамического планирования. Подобного рода обобщения возможны также для задачи составления жидких смесей и многостороннего коммерческого арбитража.

Общим для всех моделей этой категории является то, что текущие управляющие решения «проявляются» как в период, относящийся непосредственно к моменту принятия решения, так и в последующие периоды. Следовательно, наиболее важные экономические последствия проявляются в разные периоды, а не только в течение одного периода. Такого рода экономические последствия, как правило, оказываются существенными в тех случаях, когда речь идет об управляющих решениях, связанных с возможностью новых капиталовложений, увеличения производственных мощностей или обучения персонала с целью создания предпосылок для увеличения прибыльности предприятия или сокращения издержек в последующие периоды.

Количественный анализ. Представим себе автомобильную компанию (назовем ее условно «Гигант»), взявшую на себя обязательство поставлять свою продукцию в количестве S_t в течение каждого из периодов $t = 1, 2, \ldots, T$ на протяжении **интервала планирования**, состоящего из T периодов. Деятельность компании в любой из этих периодов заключается в том, чтобы:

1) использовать имеющуюся у нее рабочую силу для производства различных видов продукции в расчете на текущий спрос, а также на спрос в будущем;

2) создавать запасы с учетом будущих потребностей;

3) увеличивать или сокращать штаты рабочих;

4) практиковать неполную занятость (или временную незанятость) рабочей силы с расчетом на увеличение производства в последующие периоды.

Временное неиспользование части рабочей силы может быть экономически оправданным при условии, если увольнение, а затем прием на работу связаны с издержками, превышающими издержки, обусловленные временной незанятостью рабочих на ограниченном отрезке времени. (В реальной ситуации степень незанятости может проявиться в замедлении темпов производства или в снижении эффективности производства.) Метод линейной оптимизации применительно к этой задаче можно дополнить учетом влияния управляющих решений, принятых в период t, на характер ограничений как в данный, так и в последующие периоды. Временные связи могут быть представлены самым различным образом. Наличие опыта и изобретательности нередко позволяет при решении такого рода задач учитывать взаимное влияние не всех последующих периодов, включая данный период t, а лишь некоторого ограниченного ряда периодов, начиная с периода t. Ниже это утверждение будет подкреплено примером.

Прежде чем приступать к изложению деталей, сделаем следующее замечание: задача, к рассмотрению которой мы переходим, является наиболее громоздкой и наиболее сложной по сравнению со всеми задачами, приведенными выше. При ознакомлении с ней читателю не стоит слишком спешить. Он должен быть готов к повторному (и, возможно, неоднократному) чтению изложенного материала. Это окупится в полной мере, так как многие действительно важные практические задачи, решаемые с помощью линейного программирования, отображаются на динамические модели, структура которых аналогична структуре модели, приведенной ниже. Собственно именно этим определяется наш выбор. Уловив однажды особенности задачи, читатель сможет без всяких затруднений строить другие динамические модели.

В таблице, приведенной на рис. 2.5, содержатся все необходимые сведения для формулировки T-периодной задачи в целом путем

Переменные		e_t	s_t	x_t	y_t	d_t
Соотношения между параметрами в период t	Уровень сбыта	4	—25			
	Ограничение в рабочей силе	1		—1	1	10
Соотношения между параметрами в период $t+1$	Уровень сбыта		20			
	Ограничение в рабочей силе	—1				—9
Затраты в расчете на единицу показателя		c_t	i_t	h_t	f_t	n_t

Рис. 2.5. Взаимное влияние смежных периодов (задача фирмы «Гигант»).

указания взаимного влияния только t-го и $(t+1)$-го (т. е. смежных) периодов. Неотрицательными управляемыми переменными в период t являются следующие:

e_t — число рабочих, занятых в производстве в рассматриваемый момент времени (показатель уровня использования рабочей силы);

s_t — запас продукции в конце периода t в условных единицах (1 усл. ед. = 25 ед. продукции) (показатель уровня складских запасов);

x_t — увеличение численности рабочих в начале периода t (показатель пополнения рабочей силы);

y_t — уменьшение численности рабочих в начале периода t (показатель сокращения штатов);

d_t — число временно незанятых рабочих в рассматриваемый момент времени в условных единицах (1 усл. ед. = 10 раб.).

В каждый период необходимо учитывать два ограничения, которые в общем сводятся к тому, что:

1) каждый период характеризуется определенным *уровнем сбыта* S_t;

2) уровень производства определяется уровнем использования рабочей силы.

Переходя к более подробному анализу, следует указать на два способа обеспечения уровня сбыта S_t: 1) за счет «расхода» рабочей силы, используемой в рассматриваемый период и 2) за счет запасов готовой продукции, имеющих место в начале этого периода. Превышение объема произведенной в период t и заскладированной в начале этого периода готовой продукции над объемом сбыта S_t определяет уровень запасов в конце периода t. В столбце для e_t таблицы, приведенной на рис. 2.5, показано, что каждый рабочий производит за рассматриваемый период четыре единицы продукции. Уровень запаса s_t измеряется в условных единицах (одна условная единица равняется 25 единицам продукции). Следовательно, если $s_t = 1$, то к концу периода t остается 25 единиц продукции, а если $s_t = {}^2/_5$, то к концу этого периода остается 10 единиц продукции. В период $t+1$ на пересечении столбца для s_t и строки, характеризующей уровень сбыта, стоит число 20. Это означает, что за один период из каждых 25 единиц заскладированной продукции 5 единиц составляют складские потери. Следует обратить внимание на **правило выбора знака** перед показателями, фигурирующими в рассматриваемой таблице. Положительным числом в строке «уровень сбыта» задается приток продукции на склад, отрицательным — расход ранее заскладированной продукции.

Другая совокупность ограничений связана с использованием рабочей силы. После притока рабочей силы в начале периода t за счет резерва, оставшегося от предыдущего периода, могут иметь место дополнительное увеличение штатов, сокращение штатов или временная незанятость определенного числа рабочих. Правило выбора знака позволяет различать дополнительный приток рабочей силы, с одной стороны, и высвобождение людских ресурсов или их использование — с другой. Так, например, коэффициент при e_t в строке «ограничение в рабочей силе» в период t равен $+1$, что означает использование рабочей силы, а коэффициент -1 в аналогичной строке для периода $t+1$ означает приток рабочей силы за счет резерва, имевшего место в период t. Резерв рабочей силы в начале периода $t+1$ складывается из персонала, занятого в производстве, и персонала, не занятого в производстве в течение периода t. Однако, согласно данным таблицы на рис. 2.5, из 10 человек, оставшихся незанятыми в период t, только 9 могут быть использованы в период $t+1$. Причина такого рода «усушки» может заключаться в том, что 1 из 10 оказавшихся незанятыми рабочих принимает решение уволиться с данного предприятия.

Располагая данными, приведенными на рис. 2.5, можно приступить к построению исчерпывающей модели, используя методы, аналогичные тем, которые были описаны в предыдущих разделах. Полная информация, относящаяся к рассматриваемой задаче, приведена в таблице на рис. 2.6. Константа W_1 представляет собой число рабочих, имеющихся в распоряжении данной фирмы в начале периода 1 (до этого могли иметь место любые колебания численности персонала, работающего на фирме). Если фирма только начинает свою деятельность, положим $W_1 = 0$. Положительное значение W_1 можно интерпретировать как экзогенным образом сформированный дополнительный штат фирмы, т. е. резерв рабочей силы, образование которого не зависит от рассматриваемого здесь процесса оптимизации. Если фирмой «Гигант» принимается решение увеличивать свои штаты в последующие периоды, то в правых частях соответствующих уравнений для рабочей силы вместо нулей будут стоять положительные числа W_t ($t = 2, 3, \ldots, T$). Экзогенные сокращения резерва рабочей силы можно представить аналогично, используя отрицательные значения W_t.

С целью пояснения изложенных выше соображений запишем ряд соотношений, вытекающих из таблицы, приведенной на рис. 2.6:

уровень сбыта в период 1: $S_1 + 25s_1 = 4e_1$,

ограничение в рабочей силе в период 1: $e_1 + 10d_1 = W_1 + x_1 - y_1$,

уровень сбыта в период 3: $S_3 + 25s_3 = 20s_2 + 4e_3$,

ограничение в рабочей силе в период 3: $e_3 + 10d_3 = e_2 + 9d_2 + x_3 - y_3$,

уровень сбыта в период T: $S_T + 25s_T = 20s_{T-1} + 4e_T$,

ограничение в рабочей силе в период T: $e_T + 10d_T = e_{T-1} + 9d_{T-1} + x_T - y_T$.

Приведенные выше соотношения являются символической записью следующего утверждения: *суммарный расход ресурсов или продукции равняется суммарному объему соответствующих поставок*, или *входящий поток ресурсов или продукции равняется соответствующему исходящему потоку*. Так, например, соотношение для уровня сбыта в период 1 расшифровывается так: объем продукции, подлежащей поставке в период 1 (S_1), и запасы в конце периода 1 ($25s_1$) должны в сумме равняться полному объему продукции, произведенной за данный период ($4e_1$). Аналогично соотношение для уровня сбыта в период 3 означает, что полный объем продукции, подлежащей поставке в период 3 (S_3), и запасы готовой продукции в конце периода 3 ($25s_3$) должны в сумме составлять объем продукции, заскладированной в начале периода 2 ($20s_2$), плюс полный объем продукции, выпущенной в период 3 ($4e_3$). Наконец, соотношение для рабочей силы в конце периода 3 интерпретируется следующим образом: число рабочих, занятых в период 3 (e_3), плюс число не занятых в этот период рабочих ($10d_3$) равняется числу рабочих, занятых в производстве в предыдущий период (e_2), плюс число рабочих, не занятых, но входящих в период 2 в штаты фирмы ($9d_2$), плюс число вновь принятых в период 3 рабочих (x_3), минус число рабочих, уволенных с фирмы с период 3 (y_3).

e_1	s_1	x_1	y_1	d_1	e_2	s_2	x_2	y_2	d_2	e_3	s_3	x_3	y_3	d_3	e_4	s_4	x_4	y_4	d_4	...	e_T	s_T	x_T	y_T	d_T		Строка
4	−25																			...						$=S_1$	1
1		−1	1	10																						$=W_1$	2
	20				4	−25														...						$=S_2$	3
−1				−9	1		−1	1	10																	$=0$	4
						20				4	−25									...						$=S_3$	5
					−1				−9	1		−1	1	10												$=0$	6
											20				4	−25				...						$=S_4$	7
										−1				−9	1		−1	1	10							$=0$	8
		⋮					⋮					⋮											⋮			⋮	⋮
																				...	4	−25				$=S_T$	$2T-1$
																					1		−1	1	10	$=0$	$2T$
c_1	i_1	h_1	f_1	n_1	c_2	i_2	h_2	f_2	n_2	c_3	i_3	h_3	f_3	n_3	c_4	i_4	h_4	f_4	n_4	...	c_T	i_T	h_T	f_T	n_T	Минимизировать	
	7																										

Рис. 2.6. Пример динамического планирования производственной деятельности фирмы «Гигант».
e_t — уровень использования рабочей силы; s_t — уровень складских запасов; x_t — расширение штатов; y_t — сокращение штатов; d_t — число временно незанятых рабочих; S_t — уровень сбыта; W_t — экзогенное изменение резерва рабочей силы.

Построение целевой функции также не вызывает затруднений, а именно требуется

$$
\begin{aligned}
\text{минимизировать } [&(c_1e_1 + i_1s_1 + h_1x_1 + f_1y_1 + n_1d_1) + \\
&+ (c_2e_2 + i_2s_2 + h_2x_2 + f_2y_2 + n_2d_2) + \\
&+ (c_3e_3 + i_3s_3 + h_3x_3 + f_3y_3 + n_3d_3) + \\
&+ \dots + \\
&+ (c_Te_T + i_Ts_T + h_Tx_T + f_Ty_T + n_Td_T)].
\end{aligned} \tag{1}
$$

Такая форма записи является чрезвычайно неудобной. При построении моделей желательно избегать подобных громоздких формул, когда почленно, начиная с периода 1 и кончая периодом T, выписываются все компоненты целевой функции, имеющей вид суммы стоимостных характеристик для каждого из рассматриваемых периодов. Длинные выражения целесообразнее представлять в сжатой форме с помощью общепринятого знака суммы Σ (сигма), который часто будет встречаться ниже и особенно в разделах, посвященных статистическим методам. В частности, выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$
\text{минимизировать } \left[\sum_{t=1}^{T} (c_te_t + i_ts_t + h_tx_t + f_ty_t + n_td_t\right]. \tag{2}
$$

Приведенная на рис. 2.6 таблица дает достаточно полное представление о тех трудностях, которые возникают при составлении динамического (мультивременного) плана. Например, решение увеличить на тот или иной период число рабочих, занятых в производстве, естественно сразу же сказалось бы на соответствующих денежных затратах. Однако такое решение может привести к сокращению используемой на производстве рабочей силы в будущем, если планом предусматривается создание к концу этого периода определенных запасов. В точности так же экзогенное повышение уровня сбыта в тот или иной период может вызвать необходимость пересмотра планов относительно использования рабочей силы на протяжении целого ряда предшествующих периодов. Приведем еще один пример: политика временного неиспользования части рабочих на производстве может сложным образом отразиться на ситуации в будущем и привести к уменьшению потребностей в найме новых рабочих в последующий период. Читателю предоставляется случай самостоятельно ответить на вопрос, в чем мог бы руководитель фирмы видеть полезность рассмотренной выше модели.

► В начале данного раздела упоминалось о том, что возможны различные, но, разумеется, математически эквивалентные методы рассмотрения такого рода моделей. Проиллюстрируем это путем приведения соотношений, содержащихся в таблице на рис. 2.6, к другому имеющему физический смысл эквивалентному виду. Для этого проделаем следующие операции:

Сложим строку 1 со строкой 3; результат поместим в новую строку 3′.

Сложим новую строку 3′ со строкой 5; результат поместим в новую строку 5′.

Сложим новую строку 5′ со строкой 7; результат запишем в новую строку 7′ и т. д.

Аналогичные операции проделаем с четными строками, начиная со строки 2 и строки 4.

Результаты выполнения указанных операций приведены в таблице на рис. 2.7. Законность такого рода преобразований вытекает непосредственно из утверждения: *при сложении равенств получаем равенство*. Каждая из упомянутых выше операций сводилась к сложению левых и соответственно правых частей уравнений, в результате чего получилось новое уравнение с бо́льшим числом членов.

Ограничения на сбыт в этом случае выражаются через суммарный сбыт. В каждый период t^* суммарный сбыт плюс складские потери, плюс запасы в конце этого периода равняются полному объему произведенной продукции [строка $(2t^*-1)'$], т. е.

$$\sum_{t=1}^{t^*} S_t + 5\sum_{t=1}^{t^*-1} s_t + 25 s_{t^*} = 4\sum_{t=1}^{t^*} e_t. \tag{I}$$

Аналогично этому ограничение в рабочей силе в период t^* [строка $(2t^*)'$] состоит в том, что рабочая сила в начальный момент времени плюс суммарное количество рабочих, принятых на работу, равняется суммарному количеству рабочих, уволенных фирмой, плюс «усушка» за счет увольнения рабочих по собственному желанию в периоды незанятости, плюс состав, занятый в данный момент времени в производстве, плюс состав, входящий в штат фирмы, но в рассматриваемый момент времени не занятый в производстве, т. е.

$$W_1 + \sum_{t=1}^{t^*} x_t = \sum_{t=1}^{t^*} y_t + \sum_{t=1}^{t^*-1} d_t + e_{t^*} + 10 d_{t^*}. \tag{II}$$

Читателю рекомендуется закрепить навыки в выполнении такого рода преобразований на таблице, получаемой из таблицы на рис. 2.7, в случае, когда складские потери отсутствуют (т. е. когда число 20 в таблице, приведенной на рис. 2.5, заменено на число 25) и нет «усушки» рабочей силы за счет увольнения по собственному желанию в периоды незанятости (т. е. когда в таблице, приведенной на рис. 2.5, —9 заменено на —10). Дайте интерпретацию получаемых при этом уравнений, аналогичных только что приведенным (в словесной форме).

e_1	s_1	x_1	y_1	d_1	e_2	s_2	x_2	y_2	d_2	e_3	s_3	x_3	y_3	d_3	e_4	s_4	x_4	y_4	d_4	...	e_T	s_T	x_T	y_T	d_T		Строка
4	—25																									$=S_1$	1′
1		—1	1	10																...						$=W_1$	2′
4	—5				4	—25																				$=S_1+S_2$	3′
		—1	1	1	1		—1	1	10											...						$=W_1$	4′
4	—5				4	— 5				4	—25															$=S_1+...+S_3$	5′
		—1	1	1			—1	1	1	1		—1	1	10						...						$=W_1$	6′
4	—5				4	— 5				4	— 5				4	—25										$=S_1+...+S_4$	7′
		—1	1	1			—1	1	1	1		—1	1	1			—1	1	10	...						$=W_1$	8′
																							⋮			⋮	⋮
4	—5				4	— 5				4	— 5				4	— 5					4	—25				$=S_1+...+S_T$	$(2T-$ $-1)'$
		—1	1	1			—1	1	1			—1	1	1			—1	1	1	...	1		—1	1	10	$=W_1$	$(2T)'$
c_1	i_1	h_1	f_1	n_1	c_2	i_2	h_2	f_2	n_2	c_3	i_3	h_3	f_3	n_3	c_4	i_4	h_4	f_4	n_4	...	c_T	i_T	h_T	f_T	n_T	Минимизировать	

Рис. 2.7. Видоизмененная формулировка задачи фирмы «Гигант».

2.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ТОВАРНЫХ ПОСТАВОК НА ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Многие важные модели линейного программирования имеют так называемую **сетевую структуру**, которая приводит к очень простому табличному представлению. Типичный пример такого рода моделей и пояснения по поводу того, почему рассматриваемая задача эквивалентна сетевой, приводятся ниже. Укажем, однако, сразу же специфические особенности табличного представления таких моделей, с тем чтобы читатель мог с первого взгляда их распознавать.

Сетевая структура обладает той особенностью, что во всех ограничениях коэффициенты при управляемых переменных могут принимать одно из двух ненулевых значений, а именно $+1$ или -1 в соответствии с установленным правилом выбора знака. В тех случаях, когда возможны два значения, одно из них равняется $+1$, а другое -1. При наличии такой структуры задачу можно свести к оптимизации потоков однородной продукции на некоторой сети. Иногда для выявления сетевой структуры той или иной задачи уравнения соответствующей модели необходимо преобразовать. Подробному рассмотрению сетевых моделей посвящена гл. 6.

В порядке напоминания. В предыдущем разделе отмечалось, что использование знака суммирования $\sum$ в значительной степени сокращает количество записей в случае, когда имеют место длинные выражения. Это еще раз подтверждается на описанной ниже модели. Тем, кому не приходилось слушать лекции по статистике (или же приходилось, но слишком давно), необходимо освежить в памяти правила использования символа $\sum$. Попытаемся пояснить эти правила с помощью примеров. (Если читатель с ними знаком, он может перейти сразу же к рассмотрению предлагаемой модели.)

1. Пусть мы имеем сумму

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \ldots + c_nx_n.$$

С помощью знака $\sum$ данная сумма принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j,$$

где в качестве так называемого *индекса суммирования* может быть выбрана любая «удобная» буква. Так, например, приведенную выше сумму можно было бы записать, используя другой индекс:

$$\sum_{t=1}^{n} c_tx_t.$$

2. Выражение

$$c_1x_1 + d_1y_1 + c_2x_2 + d_2y_2 + \ldots + c_nx_n + d_ny_n$$

можно записать по-разному; в частности, возможны следующие два вида записи:

$$\sum_{t=1}^{n}(c_t x_t+d_t y_t) \quad \text{и} \quad \sum_{t=1}^{n} c_t x_t+\sum_{t=1}^{n} d_t y_t.$$

3. Допустим, что все коэффициенты c_j в приведенных выше выражениях равны между собой; пусть, например, $c_j = 5$. Тогда выражению

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + \ldots + 5x_n$$

можно придать следующий простой вид:

$$5\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

4. Рассмотрим выражение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Здесь коэффициент при каждом x_j обозначен через a_{ij}, где индекс i фиксирован, но не задан в виде конкретного числа. Данное выражение можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

5. Пусть суммирование проводится по двум индексам

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32}.$$

Заметим, что первый индекс принимает значения 1, 2 и 3, тогда как второй — значения 1 и 2, кроме того, имеют место все возможные комбинации этих индексов. Это так называемое *двойное суммирование* можно записать сокращенно в виде

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_{ij}.$$

Приведенные выше примеры исчерпывают почти все возможные варианты использования символа $\sum$ в данной книге.

Пример. Крупная молочная фирма (назовем ее «Кислое молоко») имеет m заводов, которые находятся в различных районах одного из штатов. Ежедневно производство молочной продукции на заводе i ($i = 1, 2, \ldots, m$) не превышает S_i литров. Чтобы удовлетворить имеющийся спрос, фирма должна ежедневно поставлять на каждый из n пунктов сбыта не менее D_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) литров свежей продукции. Экономическая задача заключается в том, чтобы определить, какие сливные пункты какими заводами следует обеспечить, чтобы транспортные издержки были минимальными.

Пусть x_{ij} — число литров молока, поставляемого на j-й сливной пункт i-м заводом, а c_{ij} — соответствующие транспортные расходы

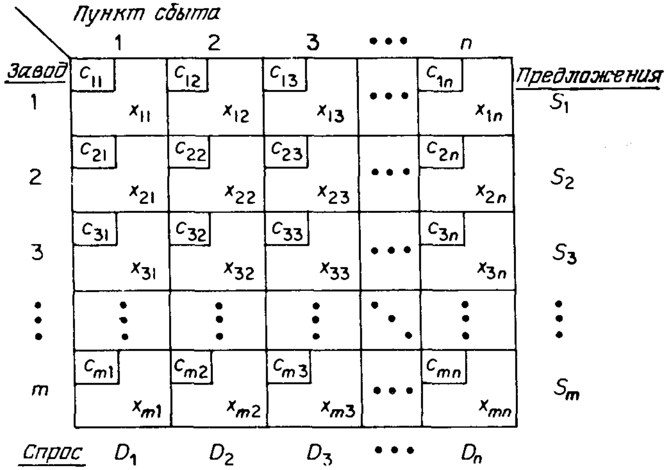


Рис. 2.8. Транспортное расписание.

в расчете на один литр. Математически задача формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i \quad (i=1, 2, \ldots, m) \quad \text{(для предложения)}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant D_j \quad (j=1, 2, \ldots, n) \quad \text{(для спроса)}, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m; \quad j=1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Читателю предоставляется возможность интерпретировать ограничения (2) и (3), а также записать (1), (2) и (3) для случая, когда $m=3$, $n=4$.

Удобное для использования табличное представление рассматриваемой ситуации дано на рис. 2.8. Если $\sum_{i=1}^{m} S_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} D_j$, так что полный спрос по крайней мере не превышает суммарного предложения (т. е. полного объема выпускаемой фирмой продукции), то всегда можно найти *допустимый* график перевозок, когда используется не более $m+n-1$ маршрутов. Как показано в гл. 6, при

Завод \ Пункт сбыта	1	2	3	4	Предложения
1	c_{11} 2	c_{12} 8	c_{13}	c_{14}	10
2	c_{21}	c_{22} 1	c_{23} 3	c_{24} 2	6
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34} 15	15
Спрос	2	9	3	17	

Рис. 2.9. Предварительное допустимое решение.

сформулированных выше условиях существует также *оптимальное* решение, причем такое, что используется не более чем $m + n - 1$ маршрутов.

Для построения одного из возможных графиков такого рода с числом маршрутов, не превышающим $m + n - 1$, следует начать с верхнего левого (или, как иногда говорят, с *северо-западного*) угла таблицы и распределять продукцию в объеме S_1 по пунктам сбыта (начиная с пункта, потребляемого D_1 литров), пока S_1 не будет пол-

		$x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ \dots\ x_{1n}$	$x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ \dots\ x_{2n}\ \dots$	$x_{m1}\ x_{m2}\ x_{m3}\ \dots\ x_{mn}$	
Поставки	1	1 1 1 ... —1			$\leqslant S_1$
	2		1 1 1 ... 1		$\leqslant S_2$
	.				.
	.		...		.
	.				.
	m			1 1 1 ... 1	$\leqslant S_m$
Спрос	1	—1	—1	—1	$\leqslant -D_1$
	2	—1	—1	—1	$\leqslant -D_2$
	3	—1	—1	—1	$\leqslant -D_3$
	.	.	.	.	.
	.	.	. ...	.	.
	.	.	.	.	.
	n	—1	—1	—1	$\leqslant -D_n$
		$c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ \dots\ c_{1n}$	$c_{21}\ c_{22}\ c_{23}\ \dots\ c_{2n}\ \dots$	$c_{m1}\ c_{m2}\ c_{m3}\ \dots\ c_{mn}$	Минимизировать

Рис. 2.10. Пример транспортной сети.

ностью исчерпано. Затем аналогичные действия проводятся с S_2 и т. д. Таблица на рис. 2.9 является иллюстрацией этой процедуры. Нет необходимости объяснять, что получаемый при этом пробный маршрутный график может оказаться (и, как правило, оказывается) далеко не оптимальным.

Эквивалентные сети. Умножим на —1 каждое из соотношений (3). При этом знаки неравенства изменят направление. В результате табличное представление модели станет таким, как показано на рис. 2.10.

Заметим, что в столбце под каждым x_{ij} содержатся лишь два ненулевых коэффициента: $+1$ и -1. Первый соответствует выпуску продукции на заводе i, а второй — поступлению продукции на пункт сбыта j. Заводы и пункты сбыта можно мысленно представить в виде некоторой совокупности точек геометрического пространства, или, если обратиться к терминологии теории сетей, в виде некоторого множества узлов. Тогда каждая переменная x_{ij} соответствует потоку вдоль ориентированной линии или дуги, соединяющей i-й и j-й узлы, а c_{ij} — затраты в расчете на единицу потока. Сеть для рассматриваемого примера приведена на рис. 2.11. Чтобы сделать сетевую модель полностью определенной, укажем объем продукции, выпускаемой каждым из заводов, а также уровень спроса на каждом пункте сбыта. В формулировке, типичной для транспортных моделей, задача заключается в том, чтобы распределить S_j, заданные в узлах с положительными значениями, по различным дугам так, чтобы при минимальных затратах удовлетворить «потребностям» узлов с отрицательными значениями. В научной литературе по организационному управлению такая задача часто называется *транспортной задачей Хитчкока — Купманса.*

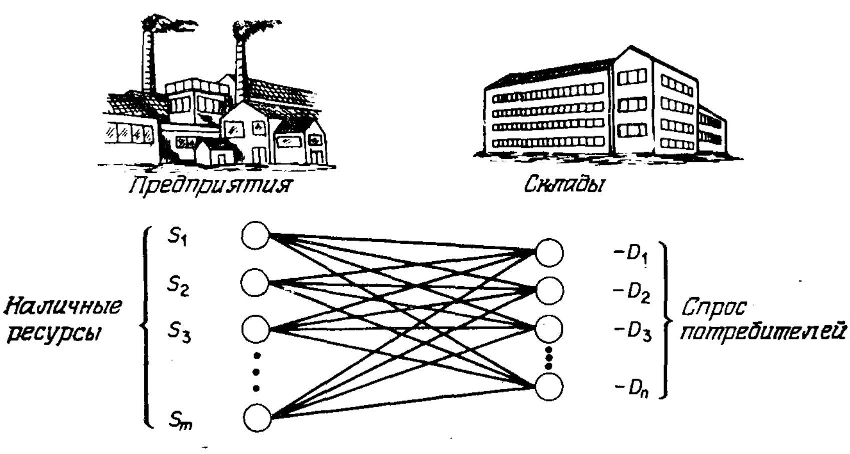


Рис. 2.11. Транспортная сеть.

Отличительной чертой сетевой модели, определяемой соотношениями (1) — (4), является то, что в случае, когда имеет место хотя бы одно допустимое решение, всегда существует оптимальное решение, для которого все x_{ij} принимают целочисленные значения (при условии, если S_i и D_j принимают целые значения). Более тщательно этот результат рассматривается в гл. 6. Вообще же говоря, сетевые модели, характеризующиеся наличием ассоциированных с различными дугами «выигрышей» и «проигрышей», не обладают свойством целочисленности оптимальных решений.

2.8. ЗАДАЧА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО МАРШРУТА

Перейдем к рассмотрению еще одной исключительно важной задачи сетевого характера (более подробно эта задача обсуждается в гл. 6 и 10). Пусть имеется сеть, наглядно представленная на рис. 2.12

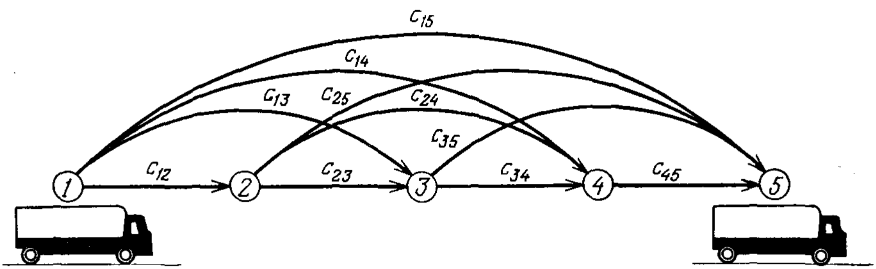


Рис. 2.12. Задача определения кратчайшего пути.

Отметим, что существует путь из каждого узла i ($i = 1, 2, 3, 4$) в любой другой узел j при условии, если $j > i$. Этот путь (или маршрут) может проходить либо по одной дуге, непосредственно соединяющей рассматриваемые узлы, либо по ряду дуг через промежуточные узлы, если $j - i > 1$. Так, например, путь от узла 1 к узлу 5 может быть прямым (вдоль дуги (1, 5)), «окольным» (вдоль (1, 3), (3, 5)) или же вдоль (1, 3), (3, 4), (4, 5). Аналогично можно указать возможные пути для любой другой пары узлов.

Допустим, что с перемещением вдоль каждой дуги (i, j) связаны соответственно затраты c_{ij}. Между значениями c_{ij} не устанавливается никакой определенной взаимной зависимости, а графическое изображение модели на рис. 2.12 сделано без учета длин дуг (i, j). Так, например, в конкретной задаче значение c_{15} могло бы быть либо меньше, либо больше значения $c_{13} + c_{35}$. Как правило, $c_{ij} \geqslant 0$; однако в рассматриваемом случае в таком предположении нет никакой необходимости.

Возникновение такого рода сети можно проиллюстрировать следующим образом. Представим себе фирму, занимающуюся перевозкой грузов. Предположим, что данной фирме необходимо взять в аренду на четыре года определенное количество транспортных средств. Фирма может удовлетворить свои потребности, взяв нужное количество транспортных средств в аренду ровно на четыре года (с начала первого года до начала пятого года). Соответствующие затраты c_{15} включают арендную плату, оплату за пробег и эксплуатационные расходы, связанные с использованием транспортных средств в течение четырех лет. Возможен другой вариант: фирма может арендовать дополнительное количество транспортных средств на срок с начала первого до начала третьего года, а затем взять в аренду другое количество транспортных средств на срок с начала третьего до начала пятого года. Во втором варианте затраты, включающие те же компоненты, что и в первом случае, равняются $c_{13} + c_{35}$. В большинстве случаев $c_{15} \neq c_{13} + c_{35}$. В поисках стратегии, обеспечивающей минимальные затраты, можно, естественно, рассмотреть и ряд других вариантов. В этом смысле сетевая модель, изображенная на рис. 2.12, является иллюстрацией задачи динамического планирования.

Вопросы, ответы на которые требуется дать в связи с рассмотрением сети, представленной на рис. 2.12, связаны с нахождением наилучшего маршрута из узла 1 в узел 5. Эти вопросы можно поставить в двух различных, хотя и взаимносвязанных вариантах:

1. Чему равняются *затраты* для самого дешевого маршрута от узла 1 до узла 5?

2. Какой *маршрут* от узла 1 до узла 5 сопряжен с наименьшими затратами?

Интуиция подсказывает, что, отвечая на один вопрос, мы одновременно получаем ответ и на другой вопрос. Однако, переходя к построению модели линейной оптимизации, мы будем искать ответ на каждый вопрос отдельно, а затем проанализируем взаимосвязь между сформулированными выше задачами. Начнем с первого вопроса.

Затраты, связанные с использованием наиболее дешевого маршрута. Пусть

y_i — затраты, связанные с использованием наиболее дешевого маршрута от узла i до узла 5, где i принимает одно из значений $i = 1, 2, 3, 4$.

Можно определить y_i, подсчитав затраты для *прямого* маршрута от узла 1 до узла j ($j > i$) и прибавив к ним затраты для *оптимального* маршрута от узла j до узла 5. Наименьшие из всех производимых при этом затрат определяют значение y_i. Математически это можно сформулировать следующим образом:

$$y_i = \underset{j=i+1,\ldots,5}{\text{минимум}} [c_{ij} + y_j] \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad y_5 \equiv 0. \tag{1}$$

В частности, для $i = 1$ имеем

$$y_1 = \text{минимум} [c_{12} + y_2,\ c_{13} + y_3,\ c_{14} + y_4,\ c_{15}]. \tag{2}$$

Таким образом, затраты в случае выбора наиболее дешевого маршрута от узла 1 до узла 5 можно определить, если известны затраты, связанные с использованием наиболее дешевых маршрутов от узла 2 до узла 5, от узла 3 до узла 5 и от узла 4 до узла 5. Следовательно, в этом случае задача сводится к сравнению затрат, связанных с использованием прямого маршрута от узла 1 до узла 5, с затратами при использовании маршрута от узла 1 через каждый из промежуточных маршрутов и выбору наилучшего пути от узла 1 до узла 5.

С точки зрения линейного программирования задача заключается в том, чтобы

$$\text{максимизировать } 1y_1 \tag{3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1y_1 &\leqslant c_{12} + 1y_2, \\ 1y_1 &\leqslant c_{13} + 1y_3, \\ 1y_1 &\leqslant c_{14} + 1y_4, \\ 1y_1 &\leqslant c_{15}. \end{aligned} \tag{4}$$

Эквивалентность (2), с одной стороны, и (3) — (4), с другой стороны, можно доказать следующим образом. По определению минимума в (2) значение y_1 не может превышать значение $c_{1j} + y_j$ при любом $j = 2, 3, 4, 5$. Ограничения (4) отражают именно это обстоятельство. Однако y_1 должно фактически равняться по крайней мере одному из значений $c_{1j} + y_j$ $(j = 2, 3, 4, 5)$, что обеспечивается требованием максимизации (3). Читателю предоставляется возможность убедиться, что это действительно так.

Значения y_i для $i = 2, 3, 4$, разумеется, являются неизвестными. Но если ограничиться сформулированными выше двумя вопросами, они и не представляют особого интереса. Каждое значение y_i $(i = 2, 3, 4)$ в (4) можно рассматривать как неизвестное при условии, если принять во внимание (1), что приводит к следующим ограничениям:

$$\left.\begin{aligned} 1y_2 &\leqslant c_{23} + 1y_3, \\ 1y_2 &\leqslant c_{24} + 1y_4, \\ 1y_2 &\leqslant c_{25} \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad i = 2; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} 1y_3 &\leqslant c_{34} + 1y_4, \\ 1y_3 &\leqslant c_{35} \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad i = 3; \tag{6}$$

$$1y_4 \leqslant c_{45} \quad \text{для} \quad i = 4. \tag{7}$$

Допустимо (хотя в этом нет никакой необходимости) усилить (7) путем замены знака неравенства на знак равенства. Ради симметрии оставим (7) в виде неравенства. Ответ на первый вопрос может быть найден путем решения задачи линейного программирования, представленной моделью (3) — (7). Заметим, что мы не требуем неотрицательности y_i. Если все $c_{ij} \geqslant 0$, условия неотрицательности можно ввести без нарушения общности рассмотрения, но даже в этом случае нет необходимости выписывать их в явном виде. Рассматриваемая модель линейной оптимизации представлена в компактном виде таблицей на рис. 2.13.

Необходимо отметить следующее: несмотря на то что оптимальное значение y_1, получаемое при решении (3) — (7), действительно определяет оптимальные затраты для маршрута от узла 1 до узла 5, значения y_i для $i = 2, 3, 4$ могут не соответствовать оптимальным затратам для маршрутов от узла i ($i = 2, 3, 4$) до узла 5. Причина этого заключается в том, что (5), (6) и (7) не являются полной системой соотношений, вытекающих из операции оптимизации (1). Пусть, например, $c_{15} = 1$, и предположим, что все остальные $c_{ij} > 1$. Тогда $y_1 = 1$ и $y_i = 0$ ($i = 2, 3, 4$) является решением (3) — (7). Но $y_i = 0$ для $i = 2$, 3, 4 не определяют затраты для самого дешевого маршрута от узла i до узла 5. Если же максимизировать $\sum_{i=1}^{4} y_i$, то получим оптимальные значения для всех y_i.

Дуги	y_1	y_2	y_3	y_4	
	1	—1			$\leqslant c_{12}$
	1		—1		$\leqslant c_{13}$
	1			—1	$\leqslant c_{14}$
	1				$\leqslant c_{15}$
		1	—1		$\leqslant c_{23}$
		1		—1	$\leqslant c_{24}$
		1			$\leqslant c_{25}$
			1	—1	$\leqslant c_{34}$
			1		$\leqslant c_{35}$
				1	$\leqslant c_{45}$
	1	0	0	0	Максимизировать

Рис. 2.13. Определение наиболее дешевого маршрута.

Дает ли нахождение оптимального решения для рассматриваемой модели ответ и на второй вопрос? Чтобы избежать громоздкого описания процедуры нахождения оптимального (т. е. связанного с минимальными издержками) маршрута, поясним суть метода на более простом примере. Как мы уже убедились, в случае оптимального решения по крайней мере одно из условий (4) может быть удовлетворено даже при замене знака неравенства на знак равенства. *Допустим*, что существует единственное неравенство такого типа, и предположим, что оно содержит c_{13} и y_3. Рассмотрим затем (6), т. е. ограничения для y_3. Снова *допустим*, что имеется единственное ограничение, которое удовлетворяется даже в том случае, когда в нем знак неравенства заменен на знак равенства. Предположим, что это именно то ограничение, которое содержит c_{35}. Тогда оптимальным является маршрут, проходящий вдоль (1, 3) и (3, 5).

Читателя может озадачить то обстоятельство, что, несмотря на сетевой характер рассматриваемой модели, табличное представление, приведенное на рис. 2.13, выглядит несообразующимся с сетевой моделью, описание которой дано в начале разд. 2.7. В частности, в каждом столбце таблицы на рис. 2.13 содержится более двух элементов, отличных от нуля. При более внимательном рассмотрении этой таблицы можно заметить, что по отношению к таблице, построенной для предыдущей задачи, она является *транспонированной*. С целью подтверждения этого высказывания обратимся к анализу модели, с тем чтобы получить прямой ответ на второй из сформулированных выше вопросов.

Маршрут, связанный с наименьшими затратами. Для решения задачи выбора маршрута требуется лишь несколько обобщить те идеи, которые служили основой при рассмотрении транспортной сетевой модели, описанной в разд. 2.7. Как и ранее, положим

$$x_{ij} = \text{интенсивность потока от узла } i \text{ до узла } j$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad j > i.$$

Наложим ограничение $x_{ij} \geqslant 0$. Для нахождения наилучшего маршрута (пути) рассмотрим единичный поток, исходящий из узла 1 и входящий в остальные узлы:

$$1x_{12} + 1x_{13} + 1x_{14} + 1x_{15} = 1. \qquad (8)$$

Будем считать, что все потоки, входящие в узлы 2, 3 и 4, должны вытекать из них с последующим втеканием в узел с более высоким порядковым номером:

$$\begin{aligned} -1x_{12} + 1x_{23} + 1x_{24} + 1x_{25} &= 0 \quad (\text{узел } 2),\\ -1x_{13} - 1x_{23} + 1x_{34} + 1x_{35} &= 0 \quad (\text{узел } 3),\\ -1x_{14} - 1x_{24} - 1x_{34} + 1x_{45} &= 0 \quad (\text{узел } 4). \end{aligned} \qquad (9)$$

Читателю предлагается самостоятельно интерпретировать каждое из ограничений (9).

В дополнение к приведенным выше можно было бы принять ограничение, заключающееся в том, что полный поток, входящий в узел 5, должен равняться единице. Однако это обстоятельство уже отражено условиями (8) и (9), что легко проверить путем суммирования правых и левых частей указанных ограничений. Следовательно, такое ограничение является *избыточным*.

Целевая функция имеет вид

$$\begin{aligned} c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{15}x_{15} &+ \\ + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{25}x_{25} &+ \\ + c_{34}x_{34} + c_{35}x_{35} &+ \\ + c_{45}x_{45}&, \end{aligned}$$

что с помощью знака $\sum$ можно записать кратко в виде двойной суммы

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} c_{ij}x_{ij}.$$

Задача заключается в том, чтобы

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{5} c_{ij}x_{ij}. \qquad (10)$$

Таким образом, необходимо найти неотрицательные значения x_{ij}, удовлетворяющие (8), (9) и (10). Табличное представление этой задачи приведено на рис. 2.14.

Теперь очевидно, что данная модель удовлетворяет условиям, характерным для сети: 1) в полную систему ограничений каждая

Узлы	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	
1	1	1	1	1							$=1$
2	-1				1	1	1				$=0$
3		-1			-1			1	1		$=0$
4			-1			-1		-1		1	$=0$
	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{34}	c_{35}	c_{45}	Минимизировать

Рис. 2.14. Выбор оптимального маршрута.

из переменных может входить либо с коэффициентом $+1$, либо с коэффициентом -1, а все другие значения коэффициентов исключены; 2) в том случае, когда какая-либо переменная фигурирует в ограничениях дважды, то один раз она входит с коэффициентом $+1$, а второй — с коэффициентом -1. Следовательно, среди оптимальных решений (8), (9) и (10) имеется по крайней мере одно целочисленное решение. В рассматриваемом примере свойство целочисленности приводит к тому, что каждая переменная x_{ij} принимает значение либо 0, либо 1. Читатель может убедиться в этом самостоятельно. Отсюда следует, что если (8), (9) и (10) допускают единственное решение, то это решение должно быть целочисленным. Для простоты рассмотрения *допустим*, что условие единственности выполняется. Предположим, что оптимальное решение имеет следующий вид: $x_{13} = x_{35} = 1$, $x_{ij} = 0$ для остальных значений i, j. Тогда оптимальный маршрут проходит вдоль дуг (1, 3) и (3, 5).

Решение для данной модели дает также ответ и на первый из двух поставленных выше вопросов. В рассмотренном частном случае затраты, связанные с использованием наиболее дешевого маршрута, определяются простой суммой $c_{13} + c_{35}$.

Двойственность. Теперь нетрудно установить взаимосвязь между двумя моделями, одна из которых представлена таблицей на рис. 2.13, а другая — таблицей на рис. 2..14. Строки в таблице на рис. 2.13 являются столбцами таблицы, приведенной на рис. 2.14. Вместе с тем вместо максимизации в первой задаче во второй задаче производится минимизация.

Желающие разобраться в тонкостях вопроса могут сделать попытку доказать, что если все $c_{ij} \geqslant 0$, то без нарушения схемы рассмотрения в соотношениях (8) и (9) можно заменить знаки равенства на знаки неравенства, противоположные знакам неравенства, фигурирующим в предыдущей модели. Как уже отмечалось ранее, в рассматриваемом примере можно также без нарушения степени общности ввести ограничение $y_i \geqslant 0$, имевшее место в предыдущем примере.

Возможность перехода от таблицы на рис. 2.13 к таблице на рис. 2.14 с помощью транспонирования есть проявление взаимной двойственности рассмотренных задач оптимизации. Мы вновь вернемся к этому вопросу в гл. 5. Пока же достаточно сказать, что каждой задаче линейного программирования можно сопоставить двойственную ей задачу, и, как будет показано ниже, решение одной из них автоматически обеспечивает решение другой, т. е. ей двойственной.

2.9. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Возможности практического применения линейного программирования для решения производственных задач кратко обсуждались в начале этой главы. Теперь после ознакомления с рядом миниатюрных моделей можно перейти к более подробному рассмотрению данного вопроса.

Вновь обратимся к примеру крупной нефтяной компании, реализующей все производственные и коммерческие процессы, начиная с добычи сырой нефти и кончая доставкой потребителю готовой продукции. Проблема использования линейных оптимизационных моделей на предприятиях именно такого характера заслуживает особого внимания по двум важным причинам. Во-первых, именно нефтяными компаниями в самых различных странах наиболее успешно применялись и продолжают применяться методы линейного программирования. Их опыт достаточно убедительно показывает, что использование математических моделей в целях планирования практически целесообразно и экономически выгодно. Во-вторых, нефтяные компании, ободренные первыми успехами, выступили инициаторами применения методов линейного программирования к решению широкого круга задач организационного управления и, таким образом, наглядно продемонстрировали методику эффективного применения научного подхода к решению управленческих задач в условиях экономической конкуренции.

Вновь проанализируем, как выглядит поточный процесс, начиная с добычи сырой нефти из земных недр и кончая продажей бензина на бензозаправочных станциях. С помощью линейных оптимизационных моделей удается облегчить нахождение правильных управляющих решений на всех ответственных этапах организации производства. В частности, разработаны модели для решения следующих задач:

1. Составление календарного плана эксплуатации источников сырой нефти, обеспечивающего максимальный доход при заданных мощностях оборудования и с учетом ограничений, обусловленных физическими условиями откачки.

2. Определение чистого дохода за счет обмена нефтесырьем с другими нефтекомпаниями при заданных характеристиках и местах дислокации нефтеперегонных заводов и при известных экономических показателях для процесса обработки сырой нефти, поставляемой по обмену.

3. Подсчет дополнительного дохода за счет увеличения объема разовых поставок готовой продукции (например, за счет производства определенного количества топлива для реактивных двигателей по правительственному контракту) при сохранении ранее установленных плановых показателей для других видов выпускаемой продукции.

4. Еженедельное составление наиболее экономичных (т. е. связанных с минимальными затратами) графиков крекинг-процессов и операций по составлению различного рода горючих смесей с учетом имеющегося в наличии нефтесырья, ограничений, связанных с числом действующих крекинг-установок и прочего оборудования, технических характеристик для каждого вида продукции (таких, как октановое число), а также заранее установленных требований на поставку готовой продукции и заданных транспортных условий.

5. Определение прибыли с капиталовложений на строительство дополнительной крекинг-установки с учетом всех производственно-экономических показателей существующих установок.

6. Составление такого маршрутного расписания перевозок готовой продукции с нефтеперегонных заводов к местам сбыта, которое сопряжено с минимальными транспортными расходами и учитывает различие в стоимостях производства различных видов продукции на различных нефтеперегонных заводах, разницу в расходах, связанных с погрузкой, и календарные вариации спроса.

7. Разработка сводного годичного плана, объединяющего наиболее важные управляющие решения, относящиеся к деятельности компании в целом.

Данный перечень далеко не полностью исчерпывает не только все возможные, но и наиболее важные применения линейного программирования к решению задач организационного управления той или иной нефтяной компании. Однако этот перечень достаточен для того, чтобы судить о возможностях применения рассматриваемого метода.

Поскольку каждая нефтяная компания обладает своими особенностями, такими, как географическое положение нефтеперегонных заводов и возрастные характеристики заводского оборудования, географическое положение рынков сбыта, запасы сырой нефти и т. д., модели линейного программирования различными нефтяными компаниями используются по-разному. Некоторые компании считают целесообразным иметь одну-две исчерпывающие модели, которые могут использоваться многократно для проведения различных видов анализа, указанных в приведенном выше перечне. Другие же компании для решения различных конкретных задач строят отдельные модели, различающиеся по степени сложности и детализации.

Следует, однако, отметить, что имеется ряд вполне сложившихся правил (канонов) использования моделей линейного программирования; эти правила являются хорошим ориентиром для тех, кто хочет понять методику применения методов линейной оптимизации в нефтяной промышленности. На многих нефтеперегонных заводах производятся расчеты в связи с составлением оптимального текущего плана-графика на каждую неделю или каждый месяц. Некоторые нефтяные компании обращаются к анализу с помощью линейного программирования только в тех случаях, когда предполагается заключение крупного соглашения относительно обмена с другими компаниями сырой нефтью или другими материалами. Все чаще нефтяные компании периодически пересматривают свои графики доставок, с тем чтобы выявить возможности экономии путем сокращения транспортных расходов, а также пытаются определить прибыльность привлечения новых или расширения имеющихся рынков сбыта. Ведущие фирмы используют линейные оптимизационные модели для оценки различных вариантов стратегий перспективного расширения производства (например, на пять лет вперед). На ряде крупнейших нефтяных компаний мира, как правило, имеется штат в 25—35 человек (а нередко в 2—3 раза больше), основная ответственность которых связана с применением линейного программирования к анализу важных управляющих решений.

Аналогичная тенденция намечается и в других отраслях производства, включая химическую промышленность, черную и цветную металлургию, деревообрабатывающую промышленность, пищевую промышленность, а также банковское дело. Область приложений линейного программирования охватывает производственное планирование, распределение заказов потребителей (клиентуры) по различным предприятиям, определение объема денежного обращения, составление графиков комплектования штатов и определение его состава, планирование закупок различных видов сырья и принятие решений относительно того, производить тот или иной вид продукции самим или покупать его. Некоторые фирмы используют линейное программирование в качестве инструмента контроля исполнения, позволяющего выявить динамику финансовой сметы на предприятии с флуктуирующим уровнем производственных мощностей, а также сравнивать фактические финансовые затраты с проектами финансовых смет, составленными на научной основе. Анализ с помощью линейной оптимизации часто проводится при решении частных задач. Так, например, рядом фирм линейное программирование использовалось для определения количества и мест дислокации складских помещений и новых промышленных объектов, для уточнения прибыльности отдельных профилей производственно-коммерческой деятельности, а также для разработки проектных мощностей дополнительных комплектов промышленного оборудования.

Критерий — экономическая выгода. Применение линейных оптимизационных моделей при решении практических задач производственно-коммерческого характера, естественно, сопряжено с определенными трудностями. Использование модели должно быть оправданным с точки зрения ее потенциального (прямого или косвенного) вклада в прибыльность предприятия. Основные затраты, сопряженные с применением описанного выше метода оптимизации, связаны с решением следующих задач:

1. *Определение и уточнение рамок анализа.* Лишь немногие руководители сразу же приходят к четкому пониманию того, что решение возникающих перед ними задач организационного управления равносильно решению задачи линейного программирования. Даже руководители, которые прошли тщательную подготовку по методике построения и анализа линейных оптимизационных моделей, затрудняются с первого взгляда определить, приведет ли метод линейного программирования к положительным результатам. Причина этого проста и заключается в том, что для выяснения возможностей отображения существа комплексной проблемы организационного управления на некоторую линейную модель требуется, как правило, квалифицированное проведение своего рода мысленного «эксперимента», основанного на использовании метода проб и ошибок. В частности, специалисту в области системного анализа необходимо прежде всего внимательно подойти к выбору критерия эффективности (т. е. целевой функции). В некоторых случаях он может апробировать **составные критерии**, т. е. рассмотреть несколько (возможно, даже несоизмеримых) целевых функций, чтобы выяснить, не приводят ли они к совершенно различным стратегиям. Он должен также соблюдать осторожность при формулировке тех ограничений, которые необходимо учитывать в процессе оптимизации. При этом возникает двойная опасность: с одной стороны, можно просмотреть какое-либо существенное для данной задачи ограничение, а с другой стороны, можно наложить такое количество ограничений, что оптимизация окажется невозможной. Опыт показывает, что опасности второго рода избежать труднее всего. Все это приводит к тому, что около

30% усилий в процессе применения линейного программирования при решении практических задач уходит на построение модели.

2. *Получение необходимых данных.* При решении практических задач планирования методом линейной оптимизации, как правило, приходится учитывать от 100 до 200 ограничений; при этом число неизвестных в 2—3 раза превышает число ограничений. Все чаще встречаются модели, число ограничений в которых лежит в интервале от 500 до 1000. Такого рода модели имеют место в тех случаях, когда составляется объединенный план для целого ряда промышленных предприятий (каждое из которых характеризуется отдельной моделью среднего масштаба) с целью разработки долгосрочной программы расширения производства. Получение данных, необходимых для моделирования, представляет собой задачу, по трудоемкости значительно превосходящую все другие указанные здесь задачи. Для ее выполнения вполне может понадобиться около 50% трудозатрат, связанных с практическим использованием линейного программирования.

3. *Нахождение и анализ пробных решений.* Как только модель с учетом всех фактических данных построена, необходимо выполнить вычисления с целью нахождения оптимального результата. Без быстродействующих электронно-вычислительных машин было бы практически невозможно находить решения для реалистических моделей линейного программирования применительно к задачам производственного характера. Что же касается ЭВМ, то они буквально в течение нескольких минут реализуют такое количество операций, для выполнения которых с помощью ручного счета потребовались бы десятилетия и даже столетия. Стоимость нахождения численных решений задач линейного программирования составляет в настоящее время самую незначительную долю суммарных затрат, связанных с применением методов линейной оптимизации.

4. *Проверка правильности решения и анализ решения на чувствительность. Видоизменение пробной модели при наличии соответствующих оснований.* Любая математическая модель для задачи организационного управления по существу является абстракцией. Следовательно, нет никакой гарантии, что первая же пробная модель приведет к практически полезному результату, если принять во внимание то обстоятельство, что большое число факторов не учитывается в *явном* виде в процессе анализа. Получаемое решение следует тщательно изучить с точки зрения здравого смысла. Кроме того, конечный результат должен быть подвергнут проверке на чувствительность, с тем чтобы выяснить, насколько существенно он зависит от точности представления тех или иных данных. Если эта зависимость весьма сильная, операционист может полагаться на результаты, полученные с помощью рассматриваемой им модели, лишь в том случае, если обеспечена требуемая точность представления исходных данных. Анализ на чувствительность подробно обсуждается в гл. 5.

Изучив примеры, рассмотренные в данной главе, и выполнив упражнения, приведенные ниже, читатель приобретет заметные навыки в отображении существенных характеристик, описывающих ту или иную сложную ситуацию, на математическую линейную оптимизационную модель. В последующих главах будут рассмотрены дополнительные примеры, в которых внимание будет акцентировано на ряде задач, обладающих специфической структурой.

Краткая характеристика последующих глав. В трех последующих главах излагаются основы линейного программирования. В гл. 3 в сжатой форме рассмотрен ряд алгебраических приемов, используемых при отображении словесной формулировки той или иной линейной программы на эквивалентное математическое представление. В этой главе иллюстрируются также геометрические интерпретации моделей линейного программирования. В гл. 4 изложен наиболее широко распространенный метод решения задач линейной оптимизации. Материал этой главы не только способствует дальнейшему углублению знаний в области линейного программирования, но и вводит читателя в круг специальных понятий, являющихся в этой области наиболее важными. Гл. 5 посвящена анализу чувствительности решений в окрестности оптимальных значений входных данных.

В гл. 6 и 7 основное внимание сосредоточено на моделях сетевого типа. Здесь обсуждается, каким образом специфический характер структуры сетевой задачи можно эффективно использовать как на стадии построения и анализа соответствующей модели, так и на стадии нахождения оптимального решения. Причины заинтересованности в ознакомлении со специальными вычислительными методами, применимыми именно к сетевым моделям, очевидны. Вспомним транспортную сетевую модель, рассмотренную в разд. 2.7. В реальной задаче число заводов вполне может оказаться равным, скажем, 25, а число сливных пунктов (пунктов сбыта) — равным 100. В результате модель содержала бы 2500 переменных. Если бы в этом случае вместо сетевого метода использовался один из методов, изложенных в гл. 4, вычисления, связанные с решением задачи, оказались бы чрезвычайно громоздкими и потребовали бы слишком много машинного времени.

В гл. 8—12 рассмотрены модели оптимизации, отражающие динамику явлений (процессов), и наиболее плодотворные идеи, связанные с их анализом. В некоторых простых, но тем не менее представляющих интерес ситуациях при рассмотрении задачи динамического характера можно (без серьезных осложнений для процедур нахождения решений) отбросить условие линейности соответствующих моделей.

Гл. 13 посвящена рассмотрению моделей, для которых *аксиома делимости* (разд. 2.2) не имеет места, т. е. управляемые переменные могут принимать только целочисленные значения. Наиболее общее изложение методов оптимизации, основанных на применении нелинейных моделей, содержится в гл. 14 и 15.

Начиная с гл. 16, вводится понятие неопределенности, которой придается вероятностный смысл. Стохастическая природа тех или иных структурных элементов модели чаще всего обусловливает необходимость лишь некоторых вполне очевидных обобщений методов, применяемых в случае анализа детерминированных моделей (рассматриваемых в главах, предшествующих гл. 16). Однако в ряде случаев вероятностный характер тех или иных элементов приводит к качественно новым ситуациям, требующим тщательного анализа.

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. В конце разд. 2.1 сформулированы вопросы, помогающие проверить степень усвоения пройденного материала. Попытайтесь ответить на эти вопросы применительно к примерам, изложенным в разд. 2.2—2.7.

2. Одна из причин того, что рассмотренные в данной главе модели описывают реальную действительность лишь приближенно, заключается в том, что постулаты делимости и аддитивности далеко не всегда оказываются строго справедливыми. Насколько удовлетворительными являются с этой точки зрения модели, рассмотренные в разд. 2.2—2.7?

3. *Фирма «Мультиконвейер»* (разд. 2.2). На графике, аналогичном графику, приведенному на рис. 1.3 (гл. 1, проблема «двух картошек»), требуется представить допустимые варианты производственной стратегии, указать оптимальную стратегию и вычислить соответствующее значение целевой функции *в предположении*, что имеется возможность реализовать только

а) технологические процессы 1 и 3 (так что $x_2 = x_4 = 0$);

б) технологические процессы 1 и 4 (так что $x_2 = x_3 = 0$);

в) технологические процессы 2 и 3 (так что $x_1 = x_4 = 0$);

г) технологические процессы 2 и 4 (так что $x_1 = x_3 = 0$).

4. *Фирма «Мультиконвейер»* (разд. 2.2).

а) Пусть $x_2 = x_3 = x_4 = 3$. Каково в этом случае наилучшее значение x_1?

б) Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = 3$. Каково в этом случае наилучшее значение x_4?

в) Пусть $x_1 = x_3$, а $x_2 = x_4 = 0$. Каково в этом случае наилучшее значение x_1 (и x_3)?

г) Пусть $x_2 = x_4$, а $x_1 = x_3 = 0$. Каково в этом случае наилучшее значение x_2 (и x_4)?

д) Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Каково в этом случае наилучшее значение x_1 (а также остальных x_j)?

5. *Свиноферма «Суперрацион»* (разд. 2.3). На графике, аналогичном графику, приведенному на рис. 1.3 (гл. 1, проблема «двух картошек»), требуется представить допустимые варианты закупок, указать оптимальный вариант и вычислить соответствующее значение целевой функции *в предположении*, что имеется возможность покупать только

а) зерно 1 и зерно 2 (так что $x_3 = 0$);

б) зерно 1 и зерно 3 (так что $x_2 = 0$);

в) зерно 2 и зерно 3 (так что $x_1 = 0$);

г) зерно 1 и зерно 2 при фиксированном объеме закупок зерна 3, а именно при $x_3 = 100$;

д) зерно 1 и зерно 3 при фиксированном объеме закупок зерна 2, а именно при $x_2 = 50$;

е) зерно 2 и зерно 3 при фиксированном объеме закупок зерна 1, а именно при $x_1 = 200$.

6. *Свиноферма «Суперрацион»* (разд. 2.3).

а) Пусть $x_2 = x_3 = 50$. Каково при этом наилучшее значение x_1?

б) Пусть $x_1 = x_2 = 200$. Каково при этом наилучшее значение x_3?

в) Пусть $x_1 = x_2$, а $x_3 = 0$. Каково в этом случае наилучшее значение x_1 (и x_2)?

г) Пусть $x_1 = x_3$, а $x_2 = 0$. Каково в этом случае наилучшее значение x_1 (и x_3)?

д) Пусть $x_2 = x_3$, а $x_1 = 0$. Каково при этом наилучшее значение x_2 (и x_3)?

е) Пусть $x_1 = x_2 = x_3$. Каково при этом наилучшее значение x_1 (а также x_2 и x_3)?

7. *Свиноферма «Суперрацион»* (разд. 2.3). Пусть оптимальное решение имеет следующий вид: $x_1 = 200$, $x_2 = 50$, $x_3 = 100$. Можно ли поднять уровень минимальных с точки зрения питательности требований по каждому из ингредиентов без увеличения суммарных расходов? Требуется дать аргументированный ответ.

8. *Фирма «Алхимик»* (разд. 2.4). Пусть $S_1 = S_2 = 100$, а $D_1 = D_2 = D_3 = 50$. Допустим, что $r_3 = 1$. Требуется либо привести по крайней мере одно допустимое решение, либо доказать, что допустимых решений не существует, если

а) $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 0{,}6$, $a_1 = 0{,}3$, $a_2 = 0{,}4$, $b_1 = 0{,}2$, $b_2 = 0{,}5$;
б) $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}6$, $a_1 = 0{,}3$, $a_2 = 0{,}4$, $b_1 = 0{,}2$, $b_2 = 0{,}5$;
в) $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 0{,}1$, $a_1 = 0{,}3$, $a_2 = 0{,}4$, $b_1 = 0{,}2$, $b_2 = 0{,}5$;
г) $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 0{,}6$, $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 0{,}6$, $b_1 = 0{,}2$, $b_2 = 0{,}5$;
д) $r_1 = 0{,}1$, $r_2 = 0{,}6$, $a_1 = 0{,}3$, $a_2 = 0{,}4$, $b_1 = 0{,}8$, $b_2 = 0{,}4$?

9. *Многосторонний коммерческий арбитраж* (разд. 2.5). Докажите, что существует неограниченное оптимальное решение, если

а) $r_{11} = 0{,}75$, $r_{26} = 2$;
б) $r_{11} = 2$, $r_{26} = 0{,}75$;
в) $r_{11} \cdot r_{26} > 1$.

10. *Автомобильная компания «Гигант»* (разд. 2.6). Объясните, каким образом руководящее лицо могло бы найти практическое применение такого рода модели планирования.

11. *Автомобильная компания «Гигант»* (разд. 2.6). Требуется записать в явном виде соотношения для уровня сбыта и ограничений в рабочей силе:

а) для периода 2;

б) для периода 4;

в) для периода $T - 1$.

12. *Автомобильная компания «Гигант»* (разд. 2.6). Предположим, что число периодов, на которые распространяется планирование, равняется четырем ($T = 4$). Пусть $W_1 = 0$, $S_1 = 100$, $S_2 = 200$, $S_3 = 100$, а $S_4 = 160$. Для упрощения вычислений будем считать, что складские потери отсутствуют и, следовательно, в таблице на рис. 2.6 вместо числа 20 должно стоять число 25. Допустим также, что не происходит «усушки» рабочей силы за счет увольнения по собственному желанию в периоды незанятости и, следовательно, в упомянутой таблице вместо -9 должно быть проставлено -10. Требуется составить такой план, чтобы:

а) Складские запасы в каждый период были минимальными.

б) Число принимаемых компанией на работу было минимальным. (Возможны ли в данном случае альтернативные планы? Дайте соответствующие пояснения.)

в) Выполните упражнения (а) и (б) для случая, когда $S_3 = 160$ и $S_4 = 240$.

13. *Транспортная сеть* (разд. 2.7). Требуется записать в явном виде все линейные ограничения (2) и (3) и целевую функцию (1) для транспортной задачи, если

а) $m = 2$, $n = 3$;

б) $m = 3$, $n = 2$;

в) $\imath = n = 3$;

г) $m = 3$, $n = 4$.

14. *Выбор оптимального транспортного маршрута* (разд. 2.8).

а) Определите наиболее дешевый маршрут от узла 1 до узла 5 (см. рис. 2.12) и затраты, связанные с использованием этого маршрута, если

$$\begin{array}{llll}
c_{12} = 2, & c_{13} = 10, & c_{14} = 16, & c_{15} = 20, \\
 & c_{23} = 9, & c_{24} = 14, & c_{25} = 17, \\
 & & c_{34} = 5, & c_{35} = 9, \\
 & & & c_{45} = 3.
\end{array}$$

б) С учетом результата выполнения предыдущего упражнения найдите допустимые решения задач линейного программирования, представленных таблицами на рис. 2.13 и 2.14.

15. *Выбор оптимального транспортного маршрута* (разд. 2.8). Рассмотрим сеть, аналогичную изображенной на рис. 2.12 и отличающуюся от нее наличием дополнительного узла 6. Пусть узел 6 связан соответствующими дугами с каждым узлом i (i = 1, 2, 3, 4, 5). Требуется дать полное графическое изображение этой сети и привести исчерпывающую запись модели линейного программирования, ориентированную на определение расходов, связанных с использованием наиболее дешевого маршрута от узла 1 до узла 6.

16. Требуется пояснить смысл следующих терминов:

модель линейного программирования;
делимость;
аддитивность;
неотрицательная переменная;
переменная, не ограниченная в знаке;
допустимое решение;
целевая функция;
оптимальное решение;
неограниченное оптимальное решение;
альтернативные оптимальные решения;
составные критерии;
анализ на чувствительность;
правило выбора знака;
мультивременная задача;
интервал времени, предусмотренный планом («протяженность планового горизонта»);
сеть;
избыточное ограничение;
однородная система линейных соотношений (уравнений, неравенств или смешанного типа).

УПРАЖНЕНИЯ НА ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

17. Фирма «Лесная пилорама» столкнулась с проблемой наиболее рационального использования ресурсов лесоматериалов, имеющихся в одном из принадлежащих этой фирме лесных массивов. В районе данного массива имеется лесопильный завод и фабрика, на которой изготавливают фанеру. Таким образом, лесоматериалы можно использовать как для производства пиломатериалов, так и для изготовления фанеры.

Чтобы получить 2,5 $м^3$ коммерчески реализуемых комплектов пиломатериалов, необходимо израсходовать 2,5 $м^3$ еловых и 7,5 $м^3$ пихтовых лесоматериалов. Для приготовления 100 $м^2$ фанеры требуется 5 $м^3$ еловых и 10 $м^3$ пихтовых лесоматериалов. Лесной массив содержит 80 $м^3$ еловых и 180 $м^3$ пихтовых лесоматериалов.

Согласно условиям поставок, в течение планируемого периода необходимо произвести по крайней мере 10 $м^3$ пиломатериалов и 1200 $м^2$ фанеры. Доход с 1 $м^3$ пиломатериалов составляет 16 долл., а со 100 $м^2$ фанеры — 60 долл.

Обозначим через L количество (в кубических метрах) производимых пиломатериалов, а через P — количество (в квадратных метрах) изготавливаемой фанеры.

а) Постройте для данной задачи линейную оптимизационную модель.

б) На графике, аналогичном приведенному на рис. 1.3 (гл. 1, проблема «двух картошек»), изобразите допустимые варианты решений и укажите среди множества допустимых решений оптимальное.

18. Фирме «Иерихонская сталь» предстоит решить, какое количество x_1 чистой стали и какое количество x_2 металлолома следует использовать для приготовления (из соответствующего сплава) литья для одного из своих заказчиков. Пусть производственные затраты в расчете на 1 *т* чистой стали равняются 3 усл. ед., а затраты в расчете на 1 *т* металлолома — 5 усл. ед. (последняя цифра больше предыдущей, так как использование металлолома сопряжено с его предварительной очисткой). Заказ предусматривает поставку не менее 5 *т* литья; при этом заказчик готов купить и большее количество литья, если фирма «Иерихонская сталь» поставит перед ним такие условия.

Предположим, что запасы чистой стали ограничены и не превышают 4 *т*, а запасы металлолома не превышают 6 *т*. Отношение веса металлолома к весу чистой стали в процессе получения сплава не должно превышать 7 : 8. Производственно-технологические условия таковы, что на процессы плавки и литья не может быть отведено более 18 *ч*; при этом на 1 *т* стали уходит 3 *ч*, а на 1 *т* металлолома — 2 *ч* производственного времени.

а) Постройте для данной задачи линейную оптимизационную модель.

б) На графике, аналогичном приведенному на рис. 1.3, представьте допустимые варианты сплавов и укажите среди них оптимальный вариант.

19. Фирма «Лакомка» выпускает четыре вида пищевых полуфабрикатов: полуфабрикат 1, полуфабрикат 2, полуфабрикат 3 и полуфабрикат 4. Каждый полуфабрикат состоит из ряда ингредиентов (таких, как крахмал, сахар, витамины и т. д.). Пусть индекс i указывает на порядковый номер ингредиента ($i = 1, 2, \ldots, I$). Обозначим через a_{ji} количество ингредиента i в одном килограмме полуфабриката j. Предположим, что максимальное количество ингредиента i, которым данная фирма располагает в течение ближайшего месяца, равняется M_i.

Доход, получаемый с одного килограмма полуфабриката j, обозначим через p_j. Через x_j обозначим число килограммов полуфабриката j, произведенного фирмой «Лакомка» в течение ближайшего месяца. Пусть за этот период должно быть произведено не менее 100 000 килограммов полуфабриката 1, 125 000 килограммов полуфабриката 2, 30 000 килограммов полуфабриката 3 и 500 000 килограммов полуфабриката 4.

Требуется показать, каким образом с помощью линейного программирования можно построить оптимальный план выпуска перечисленной выше продукции.

20. Фирмой «Супертранзистор» выпускаются радиоприемники трех различных моделей: модель A, модель B и модель C. Каждое изделие указанных моделей приносит доход в размере 8, 15 и 25 соответственно. Необходимо, чтобы фирма выпускала за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 приемников модели B и 75 приемников модели C.

Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. Так, в частности, в расчете на 10 приемников модели A требуется 3 *ч* для изготовления соответствующих деталей, 4 *ч* на сборку и 1 *ч* на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равняются 3,5, 5 и 1,5 *ч*, а на 10 приемников модели C — 5, 8 и 3. В течение ближайшей недели фирма может израсходовать на производство радиодеталей 150 *ч*, на сборку 200 *ч* и на упаковку 60 *ч*.

Для решения задачи производственного планирования требуется построить соответствующую модель линейного программирования.

21. Управляющий фирмы «Свежие нефтепродукты» пытается определить оптимальное распределение имеющейся в его распоряжении сырой нефти (различного сорта) по двум возможным технологическим процессам составления смесей. Технологический процесс 1 характеризуется следующими показателями: из одной единицы объема сырой нефти A и трех единиц объема сырой нефти B получается пять единиц объема бензина X и две единицы объема бензина Y. Технологический процесс 2 характеризуется другими показателями: из четырех единиц объема сырой нефти A и двух единиц объема сырой нефти B получается три единицы бензина X и восемь единиц бензина Y. Объемы продукции, выпускаемой при реализации технологических процессов 1 и 2, обозначим соответственно через x_1 и x_2.

Максимальное количество запасов сырой нефти A равняется 100 единицам объема, а сырой нефти B — 150 единицам объема. По условиям поставок требуется произвести не менее 200 единиц объема бензина X и 75 единиц объема бензина Y. Доходы с единицы объема продукции, получаемой с помощью технологических процессов 1 и 2, составляют p_1 и p_2 соответственно.

Данную задачу составления горючих смесей требуется сформулировать в виде моделей линейного программирования.

22. Авиакомпания «Небесный грузовик», обслуживающая периферийные районы страны, располагает 8 самолетами типа 1, 15 самолетами типа 2, 12 самолетами типа 3, которые она может использовать для выполнения рейсов в течение ближайших суток. Грузоподъемность (в тысячах тонн) известна: 45 для самолетов типа 1, 7 для самолетов типа 2, 4 для самолетов типа 3.

Авиакомпания обслуживает города A и B. Городу A требуется тоннаж в 20 000 *т*, а городу B — в 30 000 *т*. Избыточный тоннаж не оплачивается. Каждый самолет в течение дня может выполнить только один рейс.

Расходы, связанные с перелетом самолетов по маршруту «центральный аэродром — пункт назначения», указаны в приведенной ниже таблице:

	Тип 1	Тип 2	Тип 3
Город A	23	5	1,4
Город B	58	10	3,8

Обозначим через x_i ($i = 1, 2, 3$) число самолетов i-го типа, отправленных в город A, а через y_j ($j = 1, 2, 3$) число самолетов j-го типа, отправленных в город B.

а) Для данной транспортной задачи требуется построить модель линейного программирования.

б) Предлагается обсудить, является ли решение, полученное с помощью этой модели, оптимальным в реальных условиях.

23. Авиакомпании «Ночной полет» необходимо решить, какое количество топлива для реактивных самолетов следует закупить у фирм-поставщиков, если число последних равно трем и имеют место следующие требования и ограничения:

1) Заправка самолетов производится регулярно в четырех аэропортах.

2) Нефтяные компании констатируют следующие возможности поставки топлива в течение ближайшего месяца:

а) 2 500 000 *л* — нефтяная компания 1;

б) 5 000 000 *л* — нефтяная компания 2;

в) 6 000 000 *л* — нефтяная компания 3.

3) Авиакомпании требуется следующее количество топлива:

а) 1 000 000 *л* в аэропорту 1;

б) 2 000 000 *л* в аэропорту 2;

в) 3 000 000 *л* в аэропорту 3;

г) 4 000 000 *л* в аэропорту 4.

4) Стоимости 1 *л* реактивного топлива с учетом расходов, связанных с доставкой, имеют значения, приведенные в следующей таблице:

	Компания 1	Компания 2	Компания 3
Аэропорт 1	12	9	10
Аэропорт 2	10	11	14
Аэропорт 3	8	11	13
Аэропорт 4	11	13	9

В связи с оптимизацией относящегося к данной задаче управляющего решения требуется построить модель линейного программирования. Эквивалентна ли рассматриваемая задача транспортной задаче (задаче распределения потоков в сети)? Дать аргументацию.

24. Фирма «Нитроткань» производит определенного типа мелкие детали для промышленных изделий и продает их через своих посредников-оптовиков по фиксированной поставочной цене 2,50 долл. за штуку. Число посредников-оптовиков равняется пяти. Коммерческие прогнозы указывают на то, что объем месячных поставок составит: посреднику 1 — 3000 штук, посреднику 2 — 3000 штук, посреднику 3 — 10 000 штук, посреднику 4 — 5000 штук, посреднику 5 — 4000 штук.

Фирма располагает следующими производственными мощностями:
завод 1 — 5 000 деталей в месяц,
завод 2 — 10 000 деталей в месяц,
завод 3 — 12 500 деталей в месяц.

Себестоимость одной детали, изготовленной на заводе 1, равняется 1 долл., на заводе 2 — 0,90 долл., на заводе 3 — 0,80 долл.

Транспортные расходы (в долларах), связанные с доставкой одной детали в точки оптовой продажи, приведены ниже:

	Клиент 1	Клиент 2	Клиент 3	Клиент 4	Клиент 5
Завод 1	0,05	0,07	0,10	0,15	0,15
Завод 2	0,08	0,06	0,09	0,12	0,14
Завод 3	0,10	0,09	0,08	0,10	0,15

Требуется построить модель линейного программирования с целью определения оптимальных объемов продукции, подлежащих выпуску на каждом заводе данной фирмы, и количества деталей, поставляемых фирмой своим посредникам-оптовикам.

25. Полицейская служба «Шумгам-сити» имеет следующие минимальные потребности в количестве полицейских в различное время суток:

Время суток, часы	Порядковый номер периода	Минимальное число полицейских, требуемое в указанный период
2—6	1	20
6—10	2	50
10—14	3	80
14—18	4	100
18—22	5	40
22—2	6	30

При этом нужно иметь в виду, что период 1 следует сразу же за периодом 6.

Каждый полицейский работает восемь часов без перерыва. Обозначим через x_t число полицейских, ежедневно приступающих к работе в период t. Полицейская служба пытается составить служебное расписание на каждые сутки таким образом, чтобы обойтись минимальным числом полицейских, но не нарушая сформулированных выше условий (требований).

Чтобы составить такое расписание требуется построить соответствующую модель линейного программирования.

26. Авиакомпании «Перманентный рейс» требуется определить, сколько стюардесс следует принять на работу в течение шести месяцев при условии, если каждая из них, прежде чем приступить к самостоятельному выполнению обязанностей стюардессы, должна пройти предварительную подготовку. Потребности в количестве стюардессо-часов (с.-ч.) летного времени известны: в январе требуется 8000 с.-ч., в феврале — 9000, в марте — 8000, в апреле — 10 000, в мае — 9000, в июне — 12 000 с.-ч.

Подготовка стюардессы к выполнению своих обязанностей на регулярных авиалиниях занимает один месяц. Следовательно, прием на работу должен по крайней мере на один месяц опережать ввод стюардессы в строй. Кроме того, каждая обучаемая стюардесса должна в течение месяца, отведенного на ее подготовку, пройти 100-часовую практику непосредственно во время полетов. Таким образом, за счет каждой обучаемой стюардессы в течение месяца освобождается 100 *ч* рабочего времени, отведенного для уже обученных стюардесс.

Каждая полностью обученная стюардесса в течение месяца может иметь налет до 150 *ч*. Авиакомпания «Перманентный рейс» в начале января уже имеет 60 опытных стюардесс. Если ресурсы стюардессо-часов (летного времени) превышают месячные потребности авиакомпании, то стюардессы работают в режиме налета менее 150 *ч* в месяц. При этом ни одну из них не снимают с работы. Установлено также, что приблизительно 10% обученных стюардесс увольняются по собственному желанию по семейным или другим причинам.

Опытная стюардесса обходится авиакомпании в 800 долл., а обучаемая — в 400 долл. в месяц.

а) Для данной задачи требуется построить модель линейного программирования. Пусть x_i — число стюардесс, обучение которых начинается в i-м месяце, причем $x_0 = 60$. Обозначения для других управляемых переменных читатель должен ввести самостоятельно.

б) Приведенная выше формулировка задачи ориентирована на планирование на 6-месячный период. Изменится ли решение, если модифицировать условие задачи (и соответствующую модель) путем указания потребностей авиакомпании на июль месяц? Необходимо дать аргументированный ответ.

27. Фирма «Комфорт» производит холодильники, газовые плиты и кухонные раковины. В наступающем году ожидается следующий уровень сбыта:

	Кварталы			
	1	2	3	4
Холодильники	2000	1500	3000	1000
Газовые плиты	1500	1500	1000	1500
Кухонные раковины	1000	3000	1500	3000

Фирма разрабатывает производственный план, который был бы в состоянии удовлетворить указанный спрос. Кроме того, фирмой принято решение в конце каждого квартала иметь запасы в размере 1000 единиц каждого вида продукции. В начале первого квартала запасы отсутствуют.

В течение квартала фирма может израсходовать не более 8000 «приведенных часов» (п. ч.) рабочего времени. На изготовление холодильника требуется 0,5 п. ч., газовой плиты — 2 п. ч., кухонной раковины — 1,5 п. ч. В четвертом квартале холодильники не могут изготовляться, так как фирма планирует произвести в это время частичное переоборудование предприятия в связи с введением в действие новой конвейерной линии.

Допустим, что хранение каждой единицы продукции на складе в течение квартала обходится фирме в 5 усл. ед. Фирма разрабатывает производственный план с учетом поквартальных лимитов производственного времени, ориентируясь при этом на полное удовлетворение спроса. Она стремится также к минимизации издержек, связанных с хранением продукции на складе.

Обозначим через R_t, S_t и D_t соответственно количество холодильников, газовых плит и кухонных раковин, произведенных в период t. Обозначения для всех других переменных, необходимость в которых возникнет, предоставляется читателю. Требуется показать, каким образом рассматриваемая задача может быть решена путем построения модели линейного программирования.

28. *Фирма «Мультиконвейер»* (разд. 2.2). Допустим, что данные, фигурирующие в таблице на рис. 2.1, одинаковы для каждого из четырех следующих один за другим периодов времени. Предположим, что излишки (т. е. неиспользованную часть) материалов Y и Z можно складировать, причем расходы, связанные с хранением материала Y в течение одного периода, равняются h_Y, а расходы, связанные с хранением материала Z в течение одного периода, составляют h_Z. Видоизмененную таким образом задачу распределения ресурсов требуется сформулировать как задачу динамического планирования. Все необходимые обозначения читатель должен ввести самостоятельно.

29. *Фирма «Алхимик»* (разд. 2.4). Рассмотрим T последовательных интервалов времени (периодов), каждый из которых характеризуется показателями, указанными в таблице на рис. 2.3. Предполагается, что технологические условия остаются неизменными, а все прочие показатели (запасы химических компонентов, спрос на каждый вид продукции и доход в расчете на единицу продукции) в различные периоды оказываются разными. Как изменится модель, если:

1) излишки химических компонентов 1 и 2 можно складировать в течение одного периода, с тем чтобы использовать их (по необходимости) в последующие периоды;

2) продукты 1, 2 и 3, произведенные в течение того или иного периода, можно складировать, с тем чтобы реализовать их в последующие периоды. Все необходимые обозначения читатель может ввести самостоятельно.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

30. У фирмы «Гидрокран» имеется две фабрики: одна из них находится на Восточном побережье, другая — на Западном побережье. Чтобы различать эти фабрики, воспользуемся индексом i ($i = 1, 2$). Для простоты предположим, что обе фабрики выпускают водопроводные краны одного и того же типа. Фирмой разрабатывается календарный производственный план (план выпуска продукции) на два ближайших квартала (которые назовем условно период 1 и период 2). В каждый из этих периодов производственная мощность фабрики i равняется L_i.

Водопроводные краны доставляются фирмой на два пункта сбыта (пункт 1 и пункт 2). Чтобы различать эти пункты, воспользуемся индексом j ($j = 1, 2$). Минимальный спрос, удовлетворить который требуется через пункт j к концу периода t, равен R_{tj} ($t = 1, 2$; $j = 1, 2$).

Введем следующие обозначения:

x_i — количество водопроводных кранов, изготовленных на фабрике i и доставленных на пункты сбыта к концу первого квартала;

y_i — количество водопроводных кранов, изготовленных на фабрике i и доставленных на пункты сбыта к концу второго квартала;

s_i — количество водопроводных кранов, изготовленных на фабрике i и заскладированных в конце первого квартала;

z_{ij} — количество водопроводных кранов, доставленных с фабрики i на пункт j к концу первого квартала;

v_{ij} — количество водопроводных кранов, доставленных с фабрики i на пункт j к концу второго квартала;

w_j — количество водопроводных кранов, хранящихся на складе в пункте j в конце первого квартала.

Дополнительные обозначения читатель может ввести самостоятельно по мере необходимости.

Фирмой продиктовано следующее условие: суммарный объем продукции, выпускаемой в течение указанных двух кварталов фабрикой 1, должен составлять не менее 80% объема продукции, выпускаемой за этот период фабрикой 2. Поскольку возможности складских помещений ограничены, в конце первого квартала фабрикой i может быть заскладировано не более s_i водопроводных кранов.

Себестоимость водопроводного крана, изготовленного на фабрике i, равняется p_i. Расходы на хранение одного водопроводного крана, отправленного на склад в конце первого квартала фабрикой i, составляют k_i. Стоимость хранения одного крана, заскладированного в конце первого квартала в пункте j, равняется h_j. Перевозка одного водопроводного крана с фабрики i на пункт j обходится фирме в c_{ij}. Допустим, что по сравнению с интервалом времени в один квартал время, необходимое для транспортировки готовой продукции к пунктам сбыта, ничтожно мало (практически равно нулю), так что продукция, отправляемая на пункты сбыта в течение квартала, прибывает на эти пункты до истечения квартала.

Требуется показать, каким образом с помощью линейного программирования можно определить оптимальный уровень производства для каждой фабрики, а также построить оптимальный график перевозок готовой продукции с мест производства на пункты сбыта.

31. У компании «Стальлитье» имеется два горнообогатительных завода (будем их различать с помощью индекса r). Каждый из этих заводов перерабатывает железную руду, получая при этом два различных вида литого железа (будем их различать с помощью индекса s). Литое железо поставляется на три металлообрабатывающих завода (будем их различать с помощью индекса f). Каждый завод производит два вида продукции (индекс p). Фирма разрабатывает текущий план, стремясь минимизировать тоннаж железной руды, подлежащей переработке на горнообогатительных заводах, с учетом производственно-технологических условий и ограничений на уровень сбыта.

Пусть управляемыми переменными являются следующие:

x — суммарный тоннаж железной руды, перерабатываемой на горнообогатительных заводах;

y_{sfr} — суммарный тоннаж железной руды, перерабатываемой горнообогатительным заводом r на литье s-го сорта для отправки на металлообрабатывающий завод f;

z_{spf} — суммарный тоннаж литья s-го сорта, израсходованного для изготовления продукции p-го вида на металлообрабатывающем заводе f.

К числу технологических характеристик относятся следующие:

a_{sr} — вес литья s-го сорта, получаемого из 1 *т* железной руды на горнообогатительном заводе r;

b_{spf} — объем продукции p-го вида, получаемой из 1 *т* литья s-го сорта на металлообрабатывающем заводе f;

c_r — максимальное количество (в тоннах) железной руды, которое может быть переработано на горнообогатительном заводе r;

k_f — максимальное количество литья обоих сортов, которое может быть переработано в процессе получения обоих видов продукции на металлообрабатывающем заводе f;

D_p — спрос на продукцию p-го вида (в тоннах).

Производственно-технологические и коммерческие условия формулируются следующим образом:

1) суммарный тоннаж железной руды, перерабатываемой обоими горнообогатительными заводами, должен быть равен тому тоннажу, который расходуется для получения литья в объеме, предусмотренном для поставки металлообрабатывающим заводам обоими горнообогатительными заводами;

2) суммарный тоннаж железной руды, перерабатываемой на горнообогатительном заводе, ограничен производственными мощностями данного завода;

3) суммарный тоннаж литья, расходуемого металлообрабатывающим заводом для получения готовой продукции, должен равняться количеству литья, поставляемого на данный завод горнообогатительными заводами;

4) суммарный тоннаж литья, перерабатываемого на металлообрабатывающем заводе, ограничен производственными мощностями данного завода;

5) суммарный объем каждого вида продукции должен в точности соответствовать имеющемуся на него спросу.

Требуется:

а) построить для данной задачи модель линейного программирования;

б) доказать приемлемость используемой целевой функции или предложить другой, более удачный вариант.

32. Внутренняя телефонная сеть фирмы «Вавилон» при существующей конфигурации оказывается не в состоянии удовлетворить требованиям нормального функционирования в периоды ее максимальной загрузки. В данной сети (рис. 2.15) телефонные звонки поступают из точек 1 и 2 и адресованы в точки 5, 6 и 7; сигналы распространяются по линиям связи и коммутируются в точках 3 и 4.

Задача заключается в том, чтобы увеличить возможности телефонной сети при минимальных затратах. При этом речь идет не о наращивании пропускной способности сети до такой степени, чтобы даже в периоды максимальной загрузки все коммуникационные потребности фирмы были удовлетворены (это было бы связано со слишком большими затратами), а лишь о частичном совершенствовании существующей сети телефонной связи.

Обозначим через a_{ij} максимальную интенсивность телефонных вызовов, возникающих в точках i ($i = 1, 2$) и адресованных в точки j ($j = 5, 6, 7$). Пусть при этом C_{kj} означает существующую пропускную способность на линии между коммутатором k и абонентом j

($k = 3, 4$; $j = 5, 6, 7$). Через S_k обозначим существующую пропускную способность коммутатора k.

Введем также следующие обозначения:

x_{ikj} — число вызовов, возникающих в точке i, адресованных в точку j и проходящих через коммутатор k;

c_{kj} — дополнительная пропускная способность линии между коммутатором k и абонентом j;

s_k — дополнительная пропускная способность коммутатора k.

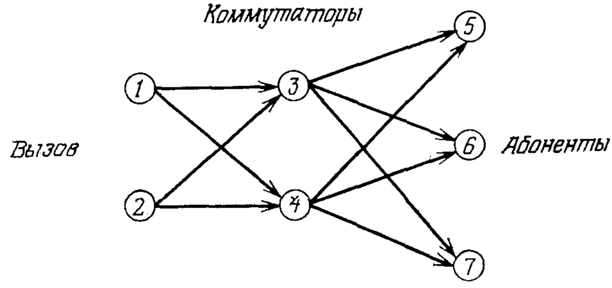


Рис. 2.15.

Имеют место следующие ограничения:

1) интенсивность вызовов, возникающих в точках 1 и 2 и адресованных в точки 5, 6 и 7, не может быть больше той, которая имеет место в периоды максимальной загрузки телефонной сети;

2) суммарное количество телефонных переговоров, обслуживаемых линией связи «коммутатор — абонент», ограничено пропускной способностью этой линии;

3) суммарное количество телефонных переговоров, обслуживаемых коммутатором, ограничено пропускной способностью последнего;

4) дополнительные пропускные способности линий связи и коммутаторов не должны превышать существующих.

Требование к уровню обслуживания формулируется следующим образом: отношение *суммарного* количества действительно реализуемых телефонных переговоров к *суммарному* количеству телефонных вызовов в период максимальной загрузки сети должно быть не менее f ($f < 1$).

Стоимость увеличения на одну единицу пропускной способности линии связи между коммутатором k и абонентом j равняется d_{kj}; стоимость увеличения на одну единицу пропускной способности коммутатора равняется d_k.

Требуется продемонстрировать возможности линейного программирования в связи с разработкой наиболее экономичного плана, предусматривающего увеличение пропускной способности линий связи и коммутаторов при наличии указанных выше ограничений.

ГЛАВА 3

Алгебраическое и геометрическое представления линейных оптимизационных моделей

3.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 был рассмотрен ряд линейных оптимизационных моделей. При этом в большинстве случаев ограничения записывались в форме, являющейся непосредственным отображением словесных описаний. Вопросы перехода от одной возможной математической записи той или иной задачи к другой, ей эквивалентной, обсуждались лишь весьма поверхностно. Не было подробно показано, с какой степенью гибкости следует подходить к выбору конкретной математической формулировки той или иной задачи. Ниже этим вопросам уделяется должное внимание.

Первые разделы данной главы посвящены изучению различных по форме, но математически эквивалентных представлений линейных ограничений. Излагаемые здесь методы представляют практический интерес по двум причинам. Во-первых, они помогают сформулировать любую конкретную задачу в таком виде, когда оказывается практически возможным нахождение ее численного решения с помощью математических приемов, изложенных в гл. 4 и 5. Во-вторых, они позволяют придать математической модели форму, облегчающую в дальнейшем применение для ее анализа мощных математических методов.

В конце данной главы рассматриваются наглядные геометрические представления линейных оптимизационных моделей. Разумеется, двумерных и трехмерных геометрических построений далеко не достаточно для решения задач большой размерности, встречающихся на практике. Тем не менее рассмотренные примеры способствуют развитию интуиции, помогающей анализировать модели линейного программирования.

Тем, кто стремится как можно быстрее познакомиться с численными методами решения задач линейного программирования, можно посоветовать перейти сразу же к изучению гл. 4. К материалу, изложенному в данной главе, можно вернуться позднее.

3.2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Математические представления, сформулированные для ряда моделей в гл. 2, можно обобщить следующим образом. Пусть x_j есть j-я управляемая переменная ($j = 1, 2, \ldots, n$). Требуется определить такие значения x_j, чтобы выражение

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

в зависимости от содержания задачи было максимизировано или минимизировано. На x_j наложен ряд ограничений, каждое из которых относится к одному из следующих типов:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant a,$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = b,$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqslant c.$$

Кроме того, может иметь место ограничение $x_j \geqslant 0$.

Задача оптимизации при такого вида ограничениях:

1) может не иметь ни одного допустимого решения, т. е. может не существовать таких значений переменных x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, которые удовлетворяли бы всем ограничениям;

2) может иметь единственное допустимое оптимальное решение;

3) может иметь несколько допустимых оптимальных решений;

4) может иметь такое допустимое решение, для которого целевая функция оказывается неограниченной, т. е. значение целевой функции может быть сделано сколь угодно большим для задачи максимизации или сколь угодно малым для задачи минимизации за счет выбора соответствующего допустимого решения [1]).

В гл. 2 на отдельных примерах было показано, что возможны различные представления линейных соотношений, характеризующих линейную оптимизационную модель. В частности, в модели, рассмотренной в разд. 2.7, знак неравенства в (3) был заменен на обратный после изменения знака каждой из фигурирующих в данной модели констант.

Переход от максимизации к минимизации. В линейном программировании любая задача максимизации может быть сведена к эквивалентной задаче минимизации (и наоборот), если одновременно с изменением «знака» оптимизации произвести изменение знаков перед всеми коэффициентами в выражении для целевой функции. Так, например, максимизация $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ эквивалентна минимизации $\sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j$. Если при этом V — оптимальное значение линейной формы $\sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j$, то $-V$ представляет собой оптимальное значение линейной формы $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$.

[1]) Такая ситуация может иметь место в задаче коммерческого арбитража, рассмотренной в разд. 2.5.

Переход к эквивалентной системе неравенств. Каждое из неравенств, фигурирующих в модели линейного программирования, можно записать в инверсивной форме, если учесть, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \quad \text{эквивалентно} \quad \sum_{j=1}^{n} (-a_j) x_j \geqslant -b. \tag{1}$$

Так, например, неравенство

$$1x_1 - 1x_2 \leqslant -4 \quad \text{эквивалентно неравенству}$$
$$-1x_1 + 1x_2 \geqslant 4.$$

Обращение неравенства в равенство. Любое фигурирующее в линейной модели неравенство можно представить в виде равенства, если ввести в рассмотрение новую неотрицательную переменную. ~~Это достигается~~ следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \quad \text{можно записать в виде} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + 1s = b, \quad \text{где} \quad s \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqslant b \quad \text{можно записать в виде} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - 1t = b, \quad \text{где} \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Переменную типа s в (2) принято называть **остаточной переменной**, а переменную типа t в (3) обычно называют **избыточной переменной** [1]).

Так, например, в задаче, рассмотренной в разд. 2.2, ограничение на количество имеющегося в наличии материала Y имело вид

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 120.$$

Эквивалентная форма представления для данного ограничения выглядит следующим образом:

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1y = 120, \quad \text{где} \quad y \geqslant 0.$$

Здесь y интерпретируется как *остаток* (или неиспользованная часть) материала Y, т. е. y является остаточной переменной.

Аналогично для модели, представленной в разд. 2.3, ограничение, относящееся к ингредиенту A, можно записать в виде

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 1a = 1250, \quad \text{где} \quad a \geqslant 0.$$

В этом случае a интерпретируется как мера *превышения* потребности в ингредиенте A, т. е. a является *избыточной* переменной.

Обращение равенств в неравенства. Любое линейное уравнение, а также любую систему линейных уравнений можно представить

---

[1]) Как правило, используется общее для обоих типов название «свободная переменная».— *Прим. перев.*

в виде некоторой совокупности линейных неравенств с помощью одного дополнительного ограничения. С целью пояснения этого утверждения заметим, что равенство $x = 8$ эквивалентно комбинации неравенств $x \leqslant 8$ и $x \geqslant 8$, которая в свою очередь может быть записана в виде пары неравенств $x \leqslant 8$ и $-x \leqslant -8$. Как нетрудно проверить графически, система уравнений $x = 1$, $y = 2$ эквивалентна комбинации неравенств $x \leqslant 1$, $y \leqslant 2$, $x + y \geqslant 3$, которую в свою очередь можно представить в виде $x \leqslant 1$, $y \leqslant 2$, $-x - y \leqslant -3$. Изложенные выше соображения допускают следующее обобщение:

$$\text{систему уравнений } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{4}$$

можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \leqslant \beta, \tag{5}$$

где

$$\alpha_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \quad \beta = -\sum_{i=1}^{m} b_i. \tag{6}$$

Таким образом, при $m = 1$ соотношения (5) сводятся к

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leqslant b_1, \quad -\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leqslant b_1. \tag{7}$$

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 \qquad &= 1, \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 &= -5. \end{aligned}$$

С помощью формул (5) и (6) нетрудно показать, что эта система эквивалентна следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 \qquad &\leqslant 1, \\ 2x_1 \qquad - 4x_3 &\leqslant -5, \\ -3x_1 - 1x_2 + 4x_3 &\leqslant 4. \end{aligned}$$

Переход от переменных, не имеющих ограничения в знаке, к неотрицательным переменным. Когда для некоторого j значение переменной x_j, фигурирующей в той или иной линейной модели, не ограничено в знаке, в процессе нахождения численного решения оказываются полезными следующие два типа преобразований. Преобразование первого типа заключается в следующем. Вначале выбирается одно из ограничений, содержащее переменную x_j и записанное в виде *равенства* (т. е. в виде линейного *уравнения*). Это всегда можно сделать (возможно, после обращения неравенства в равенство). Затем это уравнение *разрешается* относительно x_j и полученный результат подставляется во все остальные линейные ограничения, а также в выражение для целевой функции. После этого производятся упрощения путем приведения подобных членов.

Предположим, например, что в соотношении (1) переменная x_1 не ограничена в знаке. Тогда [после обращения (1) в равенство]

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right). \tag{8}$$

Правую часть соотношения (8) требуется теперь подставить вместо x_1 всюду, где только эта переменная фигурирует в модели. Легко убедиться, что полученные в результате такой подстановки соотношения сохраняют линейный характер и содержат все переменные, кроме x_1.

В процессе нахождения оптимального решения на соотношение, полученное в результате решения относительно x_j выбранного вначале уравнения, можно не обращать внимания. Это соотношение позволит вычислить x_j *после* того, как будет получено решение для остальных переменных.

Преобразование второго типа состоит в том, что x_j полагается равным разности двух неотрицательных переменных и затем эта разность подставляется вместо переменной x_j всюду, где она фигурирует. Другими словами, полагается

$$x_j \equiv x'_j - x''_j, \quad \text{где } x'_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad x''_j \geqslant 0. \tag{9}$$

Таким образом, данное преобразование увеличивает число переменных в модели, сохраняя линейность, имевшую место в исходных соотношениях. Правомерность подстановки (9) требует доказательства. Но поскольку это доказательство не сопряжено со сколько-нибудь значительными трудностями, читатель может справиться с ним самостоятельно.

Преобразование третьего типа, ~~тесно~~ связанное с соображениями, с помощью которых были получены соотношения (4) — (6), заключается в добавлении к каждой переменной x'_j, не имеющей ограничения в знаке, одной и той же неотрицательной переменной z с последующим обращением

$$x_j \equiv x'_j - z, \quad \text{где } x'_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad z \geqslant 0. \tag{I}$$

Пусть переменная x_j для $j = 1, 2, \ldots, k \leqslant n$ не ограничена в знаке. Тогда ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{II}$$

преобразуются к виду

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x'_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j - \alpha_i z = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{III}$$

где

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{IV}$$

Переход от переменных, значения которых ограничены снизу, к неотрицательным переменным. Когда x_j ограничена снизу некоторой константой $b_j \neq 0$, возможен переход к такой формулировке задачи линейного программирования, в которой вместо x_j фигурирует неотрицательная переменная x'_j. Это достигается с помощью преобразования

$$x_j \equiv b_j + x'_j, \quad \text{где} \quad x'_j \geqslant 0, \tag{10}$$

и последующей подстановки правой части соотношения (10) вместо переменной x_j всюду, где она фигурирует.

3.3. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В последующих главах мы убедимся, насколько удобно представлять *любую* линейную оптимизационную модель в компактном и полностью детерминированном виде. Различного рода преобразования, рассмотренные выше, вполне позволяют справиться с этой задачей, несмотря на то что в настоящее время существует большое разнообразие канонических форм, находящих практическое применение. Рассмотрим канонические представления следующих двух типов.

Любую задачу линейного программирования можно рассматривать как задачу

$$\text{максимизации} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Одновременно любую задачу линейного программирования можно свести к

$$\text{минимизации} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \quad b_i \geqslant 0, \tag{5}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Как правило (хотя вовсе не обязательно), в (5) имеет место неравенство $n > m$.

3.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В гл. 4 и 5 будет показано, что нахождение решений и количественный анализ задач линейного программирования возможны лишь в том случае, если определена *алгебраическая структура* соответствующих моделей. Лучшего понимания алгебраических свойств линейных оптимизационных моделей можно добиться с помощью геометрической интерпретации понятий, которые используются в линейном программировании. Мы обращаемся к помощи геометрии именно для того, чтобы глубже понять основные свойства линейных моделей. Во избежание неправильного толкования целей, которые при этом преследуются, еще раз подчеркнем, что геометрический подход оказывается малополезным для получения численных решений *практических* задач линейного программирования.

Существуют два вида геометрических представлений линейных оптимизационных моделей. Одно из этих представлений реализуется в так называемом *пространстве решений*. Именно такое представление рассматривается в данном разделе. Другое из них, известное под названием *представление в пространстве условий* [1]), для тех, кто только начинает знакомиться с линейным программированием, представляет меньший интерес. Его изложению отведен отдельный (повышенной трудности) разд. 3.6.

Представление в пространстве решений; двумерная задача. Такого рода представление уже встречалось в гл. 1 при рассмотрении проблемы «двух картошек». Желающим освежить в памяти некоторые детали, связанные с упомянутой проблемой, рекомендуется бегло просмотреть разд. 1.6. Мы же переходим к рассмотрению следующей задачи:

$$\text{максимизировать} \quad 12x_1 + 15x_2 \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \tag{2}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 10, \tag{3}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

[1]) Иногда используется термин «представление в пространстве ограничений».— *Прим. перев.*

Эта задача графически представлена на рис. 3.1. Заметим, что ограничения (2) и (3) изображены графически (прямые линии) как уравнения, полученные заменой фигурирующих в (2) и (3) неравенств на равенства. Соответствующие же неравенства изображены стрелками, направленными в сторону допустимых значений x_1 и x_2.

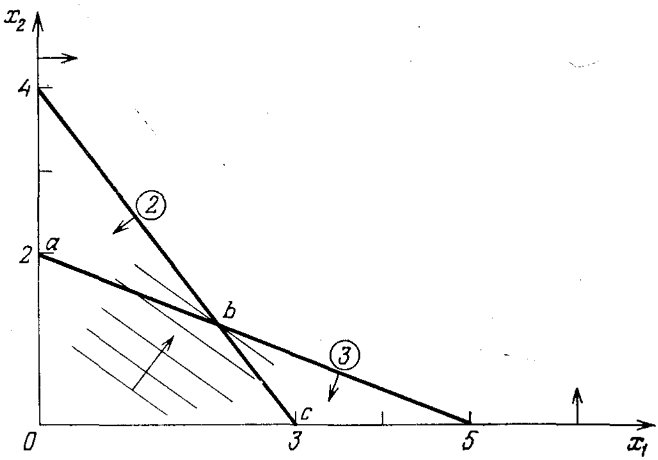


Рис. 3.1. Пространство решений.

Поскольку ни одна из этих переменных не может принимать отрицательных значений, область допустимых значений x_1 и x_2 ограничена, кроме того, осями координат. Таким образом, многоугольник $\overline{Oabc}$ содержит в себе область значений x_1 и x_2, удовлетворяющих всем имеющимся ограничениям. Множество точек, принадлежащих области, ограниченной $\overline{Oabc}$ (вместе с граничными точками), называется **множеством решений**. Это множество является **выпуклым**, т. е. любой отрезок, соединяющий две произвольным образом выбранные точки данного множества, лежит внутри или проходит вдоль границы $\overline{Oabc}$ (другими словами, принадлежит упомянутому множеству). Вершины O, a, b и c носят название **экстремальных точек** — они не могут принадлежать внутренней части ни одного из отрезков, соединяющих две различные точки рассматриваемого множества.

Параллельные прямые на рис. 3.1 являются графическим изображением различных значений целевой функции. Стрелка, пересекающая эти прямые, направлена в сторону возрастающих значений целевой функции. Оптимальное решение определяется экстремальной точкой b, для которой $x_1 = {}^{15}/_7$, $x_2 = {}^{8}/_7$, $12x_1 + 15x_2 = {}^{300}/_7$.

Альтернативные оптимальные решения. Если в выражении для целевой функции изменить коэффициенты (при этом на рис. 3.1 угол наклона параллельных линий по отношению к оси абсцисс также будет другим), то в результате точка, задающая оптимальное решение, может, естественно, переместиться. Однако *всегда* существует оптимальное решение, определяемое некоторой экстремальной точкой. Продемонстрируем справедливость этого утверждения на одном конкретном примере. Пусть имеет место некоторое

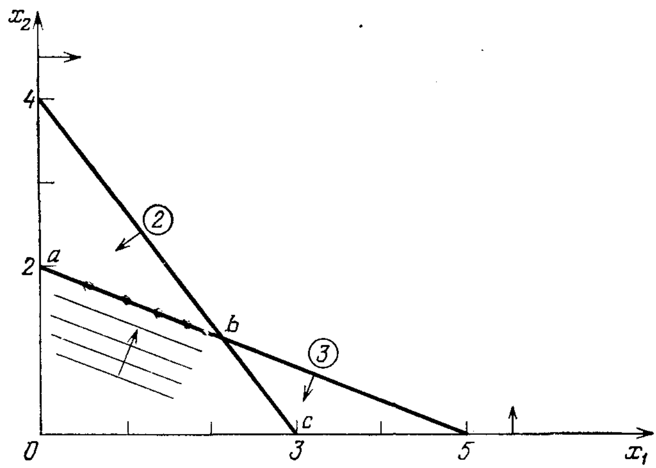


Рис. 3.2. Альтернативные оптимальные решения.

вполне определенное изменение угловых коэффициентов упомянутых выше параллельных прямых, а именно пусть требуется

$$\text{максимизировать} \quad 4x_1 + 10x_2 \tag{5}$$

при наличии тех же самых ограничений (2), (3) и (4).

В этом случае все точки (бесконечное множество точек), лежащие на отрезке $\overline{ab}$ (рис. 3.2), являются оптимальными. Следовательно, решение $x_1 = {}^{15}/_7$, $x_2 = {}^{8}/_7$ по-прежнему оптимально. Но теперь оптимальным является и решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. То же самое можно сказать и о любом положительно-взвешенном среднем двух указанных решений. При этом оптимальное значение целевой функции равняется 20.

Неограниченные оптимальные решения. В примере, графически представленном на рис. 3.3, рассматривается следующая модель:

$$\text{максимизировать} \quad -2x_1 + 6x_2 \tag{6}$$

при наличии ограничений

$$-1x_1 - 1x_2 \leqslant -2, \tag{7}$$

$$-1x_1 + 1x_2 \leqslant 1, \tag{8}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{9}$$

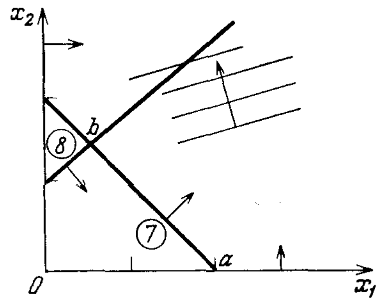


Рис. 3.3. Неограниченное оптимальное решение.

Эта задача имеет *неограниченное* множество решений. Нетрудно убедиться, что оно выпукло и что не существует экстремальных точек, кроме a и b. Для данной задачи значение целевой функции может быть сделано сколь угодно большим, т. е. для любого заданного значения целевой функции в пространстве решений всегда существует точка, в которой целевая функция принимает еще большее значение. Такая точка лежит на прямой, уравнение которой имеет вид $-1x_1 + 1x_2 = 1$.

Задача, не имеющая решения. Рассмотрим еще один пример (графически представленный на рис. 3.4). Пусть требуется

$$\text{максимизировать} \quad 1x_1 + 1x_2 \tag{10}$$

при наличии следующих ограничений:

$$-1x_1 + 1x_2 \leqslant -1, \tag{11}$$

$$1x_1 - 1x_2 \leqslant -1, \tag{12}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{13}$$

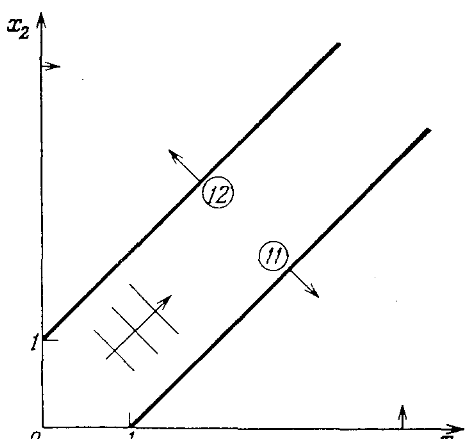


Рис. 3.4. Случай, когда не существует оптимального решения.

Легко убедиться графически (рис. 3.4), что данная задача не имеет ни одного допустимого решения.

Заключение. Результаты геометрического рассмотрения приведенных выше задач иллюстративного характера можно резюмировать следующим образом:

1. Если множество решений является непустым, то оно выпукло и может быть либо ограниченным, либо неограниченным.

2. Если множество решений является непустым, то оптимальное значение целевой функции может быть либо конечным, либо неограниченно большим. В случае когда оптимальное значение целевой функции конечно, оно соответствует экстремальной точке.

3.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

В данном разделе мы познакомимся с терминологией, используемой в случае геометрического представления пространства решений для моделей с n $(n > 2)$ переменными.

Пусть требуется решить следующую задачу линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при наличии следующих ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь n-мерное евклидово пространство, т. е. множество точек, каждая из которых задается с помощью n координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поскольку $x_j \geqslant 0$, рассмотрению подлежит только соответствующая область n-мерного евклидова пространства.

Каждому уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1\ \ 2, \ldots, m) \tag{4}$$

соответствует **гиперплоскость**, которая делит рассматриваемое n-мерное пространство на два **полупространства**. Переходом от (4) к неравенству (2) при каждом значении i определяется направление, указывающее, какое из двух полупространств содержит точки, удовлетворяющие соответствующему неравенству (2). Пересечение m гиперповерхностей, соответствующих полному набору уравнений (4), определяет множество допустимых решений. В случае когда это множество оказывается непустым, оно является выпуклым и полиэдральным. При этом грани полиэдра лежат на гиперплоскостях (4), а ребра и вершины — на пересечениях последних. Для простоты предположим, что полученное таким образом **выпуклое полиэдральное множество** n-мерно.

Целевую функцию можно также представить с помощью гиперплоскости в пространстве решений. Точнее выражаясь, множество всех точек n-мерного евклидова пространства, в которых линейная целевая функция принимает некоторое заданное значение, представляет собой гиперплоскость. Гиперплоскости, соответствующие различным значениям целевой функции, параллельны друг другу. Отсюда следует, что никакой точке, лежащей строго внутри множества решений, не может соответствовать оптимальное решение, так как всегда найдутся точки, которые лежат на гиперплоскостях, соответствующих бо́льшим значениям целевой функции. Следовательно, если значение целевой функции для оптимального решения является конечным, то оптимальное решение должно задаваться экстремальной точкой полиэдра, определяющего область допустимых решений. Если же n ($n \geqslant 2$) экстремальных точек являются оптимальными, то оптимальными являются также все точки, лежащие на ребрах и гранях, соединяющих эти экстремальные точки.

3.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ УСЛОВИЙ

Перейдем теперь к рассмотрению другого возможного геометрического представления задач линейного программирования. Любая линейная модель может быть изображена графически в m-мерном *пространстве условий*, где m равно числу ограничений (не считая условий неотрицательности переменных). Для этого запишем ограничения в виде одного векторного неравенства. Это всегда можно сделать, если учесть, что *набор коэффициентов* при любой переменной x_j (так же как и набор констант в правых частях ограничений) определяет вектор в m-мерном пространстве. Рассмотрим множество точек, получаемое перебором всех возможных сумм таких векторов, а также их произведений на произвольные неотрицательные числа. Это множество образует в **пространстве условий выпуклый полиэдральный конус.**

Модель допускает хотя бы одно решение, если вектор, заданный набором чисел, фигурирующих в правых частях ограничений, не выходит за пределы этого конуса. Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом: требуется найти векторы, которые: а) лежат внутри упомянутого конуса; б) дают в сумме вектор, определяемый набором констант, фигурирующих в правых частях ограничений; в) максимизируют (минимизируют) значение целевой функции. Идеи, которые легли в основу данного геометрического представления, иллюстрируются ниже на примерах, рассмотренных в разд. 3.4.

Ограниченное оптимальное решение. На рис. 3.5 показано пространство условий для следующей модели:

$$\text{максимизировать} \quad 12x_1 + 15x_2 \tag{1}$$

при ограничениях

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \tag{2}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 10, \tag{3}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Анализу этой модели посвящено начало разд. 3.4.

Чтобы сделать набор управляемых переменных модели полным, введем в рассмотрение остаточные переменные, после чего вместо (2), (3) и (4) будем иметь

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 \qquad &= 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + 1x_4 &= 10, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned} \tag{5}$$

За счет переменных x_3 и x_4 появляются два новых вектора, лежащих вдоль осей координат.

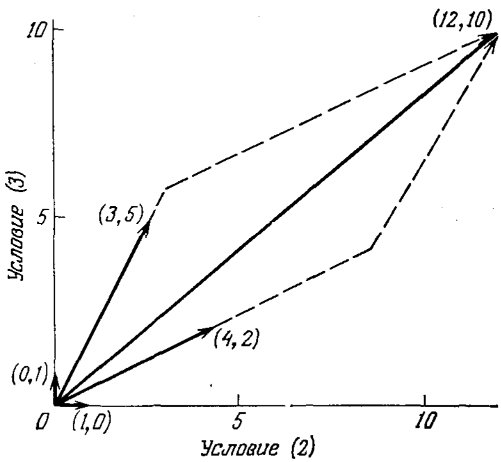


Рис. 3.5. Пространство условий.

После введения в рассмотрение остаточных переменных пространство условий становится тождественным полному неотрицательному квадранту двумерного пространства. Как показано на рис. 3.1, решение заключается в том, чтобы положить $x_1 = {}^{15}/_7$, $x_2 = {}^{8}/_7$. Действительно, сложив вектор (4, 2), умноженный на $x_1 = {}^{15}/_7$, с вектором (3, 5), умноженным на $x_2 = {}^{8}/_7$, получим вектор (12, 10):

$$\frac{15}{7}\cdot\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\frac{8}{7}\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\10\end{bmatrix}. \tag{6}$$

В соответствии с рис. 3.5 можно, разумеется, рассматривать и другие комбинации слагаемых: вектор (1, 0), умноженный на некоторое положительное число, с вектором (3, 5) или с вектором (0, 1); вектор (4, 2), умноженный на некоторое положительное число, с вектором (0, 1). Легко убедиться, что ни одна из этих комбинаций не может дать в сумме вектор (12, 10).

Альтернативные оптимальные решения. Пусть при тех же ограничениях (2), (3) и (4) требуется

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 10x_2,$$

что приводит к альтернативным оптимальным решениям. Представление модели в пространстве условий выглядит так же, как и в предыдущем случае (рис. 3.5).

Неограниченные оптимальные решения. Рассмотрим снова задачу:

$$\text{максимизировать } -2x_1 + 6x_2 \tag{7}$$

при ограничениях

$$-1x_1 - 1x_2 \leqslant -2, \tag{8}$$

$$-1x_1 + 1x_2 \leqslant 1, \tag{9}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{10}$$

В разд. 3.4 было показано, что для данной модели значение целевой функции можно сделать [за счет переменных x_1, x_2 и остаточной переменной в соотношении (8)] сколь угодно большим. На рис. 3.6 только что перечисленные переменные ассоциируются с векторами (—1, —1), (—1, 1) и (1, 0) соответственно. Если вначале сложить векторы (—1, —1) и (1, 0), а затем к полученному в результате вектору (0, —1) прибавить вектор (—1, 1), умноженный на $x_2 = 2$, то получим вектор (—2, 1). Действительно,

$$1\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Вектор, получаемый в результате операции сложения, на рис. 3.6 обозначен буквой a.

Аналогичным образом, если вначале к вектору 0,8·(—1, —1) прибавить вектор 0,6·(1, 0), а затем результирующий вектор (—0,2, —0,8) сложить с вектором 1,8·(—1, 1), то получим вектор (—2,1):

$$0{,}8\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}+0{,}6\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1{,}8\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Вектор, получаемый в результате операции сложения в этом случае, обозначен на рис. 3.6 буквой b. Существует бесконечное множество комбинаций векторов, коллинеарных векторам (—1, —1), (1, 0),

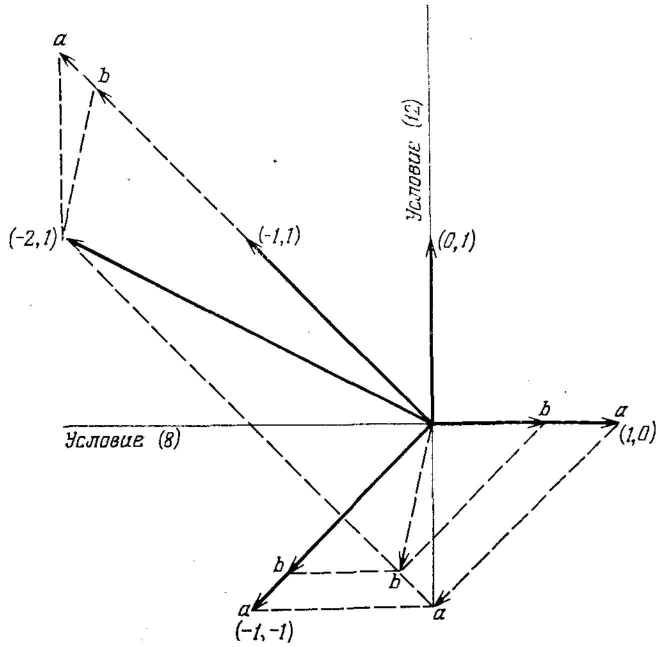


Рис. 3.6. Неограниченное оптимальное решение.

(—1, 1), сумма которых равна (—2, 1). При этом чем больше (в рассматриваемой комбинации) множитель при (—1, 1), тем большее значение принимает линейная форма $(-2x_1 + 6x_2)$.

Оптимизация. Графики, с помощью которых демонстрировалось представление линейных моделей в пространстве условий, не содержат никакой информации относительно целевой функции, точнее, относительно того, какие векторы следует выбрать, чтобы одновременно удовлетворить имеющимся ограничениям и оптимизировать значение целевой функции. Эту информацию можно представить графически путем введения в рассмотрение дополнительного измерения. Вернемся к задаче, сформулированной с помощью (1) — (4) (см. рис. 3.5). В этом случае третье (дополнительное) измерение возникает за счет присоединения к системе ограничений (2), (3) соотношения $Z = 12x_1 + 15x_2$. Таким образом, получаем следующий набор векторов: (1, 0, 0), (4, 2, 12), (3, 5, 15) и (0, 1, 0), образующих в трехмерном пространстве полиэдральный конус. Ограничивающий вектор имеет вид (12, 10, Z), где Z подлежит максимизации на множестве всех векторов, лежащих внутри конуса.

На рис. 3.7 эта ситуация представлена графически. Переходя к параметрическому представлению ограничивающего вектора (12, 10, Z), изобразим его в виде прямой линии, пересекающей конус и параллельной оси Z, представляющей третье (дополнительное) измерение. Для некоторых моделей пересечение прямой, являющейся параметрическим представлением ограничивающего вектора и коллинеарной оси Z, с поверхностью полиэдрального конуса наблюдается только один раз. Для некоторых же моделей такое пересечение вообще отсутствует. В последнем случае либо оптимальное решение является неограниченным, либо допустимых решений вообще не существует.

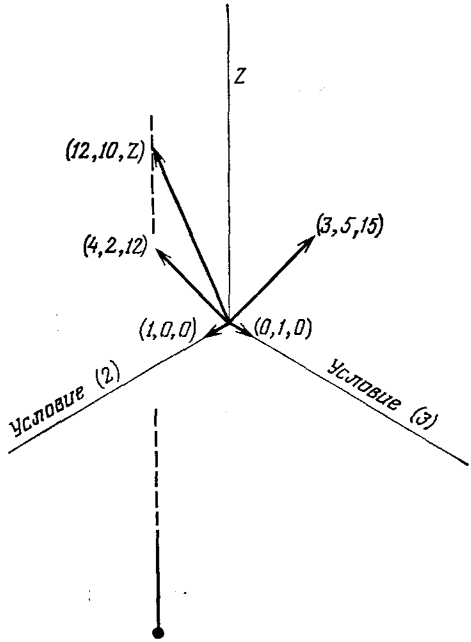


Рис. 3.7. Геометрическое представление целевой функции в пространстве условий.

Предположим, что упомянутое выше пересечение наблюдается дважды. В этом случае оптимальное решение определяется той точкой пересечения, которая соответствует большему значению Z. Эта точка, как правило, лежит на грани полиэдрального конуса, т. е. на плоскости, проходящей через конечные точки некоторой совокупности векторов. Оптимальное решение определяется значениями координат, задающих векторы этого множества.

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

1. Объясните смысл следующих терминов:
   переход от максимизации к минимизации;
   эквивалентная система неравенств;
   остаточная переменная;
   избыточная переменная;
   переменная, значение которой ограничено снизу;
   каноническая форма;

пространство решений;
множество (допустимых) решений;
выпуклое множество;
экстремальная точка в пространстве решений;
гиперплоскость;
полупространство;
выпуклое полиэдральное множество;
пространство условий (ограничений);
выпуклый полиэдральный конус.

В разд. 3.2 и 3.3 было показано, что существуют различные канонические представления одной и той же модели линейного программирования. В частности, рассматривались канонические формы, приведенные ниже.

Каноническая форма 1:

$$\text{максимизировать} \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при наличии ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Каноническая форма 2:

$$\text{минимизировать} \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при наличии ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \quad b_i \geqslant 0,$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

В упражнениях 2—5 требуется привести каждую из задач к канонической форме 1 и к канонической форме 2.

2. Требуется

$$\text{минимизировать} \ 3x_1 - 4x_2 + 1x_3$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} -1x_1 \qquad\quad &+ 5x_3 = 50, \\ 2x_1 - 3x_2 \quad &\qquad\ \geqslant 12 \end{aligned}$$

в предположении, что

а) $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3)$;
б) $x_1 \geqslant 4$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$;
в) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant -5$, $x_3 \geqslant 0$.

3. Требуется

$$\text{максимизировать } 1x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &\leqslant 7, \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &\leqslant -2, \\ 3x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 5, \\ 1x_2 - 1x_3 &\geqslant 1 \end{aligned}$$

в предположении, что

а) $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3)$;

б) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \leqslant 0$;

в) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 0$;

г) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, а переменная x_3 не ограничена в знаке;

д) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant -4$.

4. Требуется

$$\text{минимизировать } -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\quad - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &\geqslant 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 8x_4 &= -31, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 12, \end{aligned}$$

когда

а) каждая переменная $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, 3, 4)$;

б) $x_4 \leqslant 0$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

в) $x_4 \geqslant 2$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

г) $x_4 \geqslant -2$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

д) переменная x_4 не ограничена в знаке, а все остальные $x_j \geqslant 0$;

е) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant -6$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant -2$;

ж) $x_1 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, а x_2 и x_4 не ограничены в знаке.

5. Требуется

$$\text{максимизировать } -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &\geqslant -10, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 &= 7, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\geqslant 15, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 &= -11 \end{aligned}$$

в предположении, что

а) $x_j \geqslant 0$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$;

б) $x_1 \leqslant 0$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

в) $x_1 \geqslant 2$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

г) $x_1 \geqslant -2$, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

д) переменная x_1 не ограничена в знаке, а все остальные переменные $x_j \geqslant 0$;

е) $x_1 \geqslant -2$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant -3$;

ж) $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, а x_1 и x_4 не ограничены в знаке.

В упражнениях 6—20 требуется: 1) изобразить каждую модель графически в пространстве решений; 2) для каждого случая определить (графически) экстремальные точки; 3) показать на каждом графике точку, соответствующую оптимальному решению (или множество таких точек); 4) доказать (когда это возможно), что оптимальное решение является единственным; если единственность не имеет места, представить два других оптимальных решения; 5) вычислить для каждой задачи оптимальные значения x_1 и x_2, а также соответствующее значение целевой функции.

6. При наличии ограничений

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ 6x_1 + 4x_2 &\geqslant 24, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 2 \end{aligned}$$

а) минимизировать x_1;

б) минимизировать x_2;

в) максимизировать x_1;

г) максимизировать x_2;

д) минимизировать $x_1 + x_2$;

е) максимизировать $x_1 + x_2$;

I ж) максимизировать $-x_1+2x_2$;

з) максимизировать $x_1 - 2x_2$;

II и) максимизировать $-3x_1-2x_2$.

7. Повторите упражнение 6 при дополнительном ограничении $x_1 \leqslant 5$.

8. Повторите упражнение 6 при дополнительном ограничении $x_2 \leqslant 4$.

9. Повторите упражнение 6 при дополнительном ограничении $x_1 \leqslant 5$, $x_2 \leqslant 4$.

10. При наличии ограничений

$$\begin{aligned} -10x_1 - 15x_2 &\geqslant -150, \\ 5x_1 + 10x_2 &\geqslant 50, \\ x_1 - x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 2, \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

а) максимизировать x_1;

б) минимизировать x_1;

в) максимизировать x_2;

г) минимизировать x_2;

д) максимизировать $x_1 + x_2$;
е) минимизировать $x_1 + x_2$;
ж) максимизировать $x_1 + 3x_2$;
з) максимизировать $-2x_1 + x_2$;
и) максимизировать $-x_1 - 3x_2$;
к) максимизировать $-x_1 - 2x_2$.

11. Повторите упражнение 10, предположив, что $x_1 \geqslant 5$ (вместо $x_1 \geqslant 2$).

12. Повторите упражнение 10, предположив, что $x_1 \geqslant 15$ (вместо $x_1 \geqslant 2$).

13. Повторите упражнение 10, предположив, что $x_1 \geqslant 20$ (вместо $x_1 \geqslant 2$).

14. Повторите упражнение 10, предположив, что $x_2 \leqslant 5$ (вместо $x_2 \geqslant 0$).

15. Повторите упражнение 10, предположив, что $x_2 \geqslant 6$ (вместо $x_2 \geqslant 0$).

16. Повторите упражнение 10, принимая во внимание дополнительное ограничение $x_2 \geqslant 8$.

17. При наличии ограничений

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ -7x_1 + 8x_2 \leqslant 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18, \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 6 \end{gathered}$$

а) максимизировать x_1;
б) минимизировать x_1;
в) максимизировать x_2;
г) минимизировать x_2;
д) максимизировать $x_1 + x_2$;
е) минимизировать $x_1 + x_2$;
ж) максимизировать $3x_1 + 5x_2$;
з) минимизировать $3x_1 + 5x_2$;
и) максимизировать $-2x_1 - x_2$;
к) максимизировать $-x_1 - 2x_2$;
л) минимизировать $x_1 - 2x_2$;
м) минимизировать $2x_1 - x_2$.

18. Повторите упражнение 17, заменив ограничение $x_1 + x_2 \geqslant 5$ на ограничение $x_1 + x_2 \geqslant 6$.

19. Повторите упражнение 17, заменив ограничение $x_1 + x_2 \geqslant 5$ на ограничение $x_1 + x_2 \geqslant 4$.

20. Повторите упражнение 17, заменив условия $0 \leqslant x_1 \leqslant 4$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$ на условия $0 \leqslant x_1 \leqslant 4{,}5$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant 3$.

21. Изобразите графически в пространстве условий следующие ограничения:

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 1, \\ 1{,}5x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 1, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3). \end{gathered}$$

22. Изобразите графически в пространстве условий следующие ограничения:

$$\begin{gathered} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leqslant -1, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \leqslant 2, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{gathered}$$

ГЛАВА 4

Симплексный метод

4.1. В ПЕРСПЕКТИВЕ — ТЕОРИЯ

При нахождении решений для моделей линейного программирования применительно к реальным задачам процедуры ручного счета практически никогда не используются. Такого рода работа, как правило, осуществляется с помощью ЭВМ. Но тогда может возникнуть вполне законный вопрос: к чему углубляться в *теорию* линейного моделирования? Не достаточно ли одного умения строить линейные модели? Тому, кто еще не овладел основами линейного программирования, на эти вопросы трудно ответить убедительно. Однако значительный опыт по использованию методов линейного программирования при решении производственных задач подтвердил, что руководитель должен понимать излагаемые в данной главе принципы, чтобы добиться действительно эффективного и обоснованного применения этого инструмента организационного управления.

Изложенную выше точку зрения полезно пояснить с помощью следующей аналогии. При освоении основных элементов управления автомобилем (умение регулировать скорость, изменять направление движения и т. д.) не требуется больших умственных усилий. Однако, чтобы стать первоклассным водителем, необходимы определенные знания и умение применять их на практике. Например, нужно иметь представление о правилах эксплуатации аккумуляторной батареи — в противном случае можно допустить ошибку, оставив на продолжительное время включенным радиоприемник при выключенном зажигании. При движении по скользкому шоссе знание устройства тормозной системы поможет сохранить автомобиль управляемым во время заносов. В случае перегрева двигателя для принятия нужных мер необходимо понимание принципа действия радиатора. Таким образом, чтобы быть хорошим водителем, требуется не только умение управлять автомобилем в идеальных условиях. Чтобы оказаться в состоянии предупредить или обойти опасность всякий раз, когда это возможно, следует достаточно хорошо знать устройство автомобиля. С другой стороны, можно быть отличным водителем без той постоянной практики, какую имеют автомеханики.

Рассуждая по аналогии, следует заметить, что руководитель, упорно уклоняющийся от ознакомления с инструментом, играющим главную роль в практическом использовании методов исследования операций, поступает опрометчиво. Если он действительно намерен постоянно держать контроль в своих руках, ему нужно разобраться в сущности данного подхода и развить в себе определенную интуицию. Чтобы достигнуть надлежащего уровня знаний, требуются лишь весьма скромные усилия; при этом ни в коем случае не нужно становиться квалифицированным теоретиком.

Рассуждая о том, насколько может быть полезным изучение теоретических основ линейного программирования, можно задать и еще один весьма серьезный вопрос: имеется ли гарантия в том, что известные в настоящее время методы сохранят свою значимость и через несколько лет, особенно если учесть быстрые темпы развития прикладных наук? Относительно будущего можно, разумеется, лишь строить те или иные предположения. Однако история развития науки и техники должна послужить надежным ориентиром. В этой связи полезно снова обратиться к примеру с автомобилем. Достаточно одного беглого взгляда на автомобиль одной из наиболее типичных моделей раннего периода, чтобы узнать в нем *именно автомобиль*. Несмотря на многочисленные технические усовершенствования автомобильных конструкций, многое из того, что было положено в их основу, не претерпело существенных изменений.

Успехи в разработке методов решения для линейных оптимизационных моделей демонстрируют аналогичное явление. В результате научных исследований методы решения задач линейного программирования, основанные на использовании электронно-вычислительной техники, каждое десятилетие претерпевают значительные изменения. Тем не менее многие исходные принципы выдержали проверку временем и продолжают оставаться основой любого подхода к решению упомянутых задач. Эти принципы и являются предметом последующего рассмотрения.

4.2. ОБЩЕЕ ОЗНАКОМЛЕНИЕ С ЗАДАЧЕЙ

В этой главе рассматривается вычислительный метод, или *алгоритм*, позволяющий получать численные решения для линейных оптимизационных моделей. При этом задача заключается не только в том, чтобы установить последовательность действий, приводящих в итоге к тому или иному решению. Целью данного рассмотрения является разработка системного подхода, позволяющего анализировать и правильно интерпретировать любую конкретную модель со всеми имеющимися в ней сложными взаимосвязями. Эта цель представляется исключительно важной, так как при практическом применении линейного программирования всегда стремятся получить более содержательную информацию, нежели ответ в чисто числовом выражении. Как правило, желательно иметь точное представление о степени зависимости результата от входных параметров. Другими словами, необходимо знать, насколько *чувствительным* оказывается полученное решение к выбору исходных данных. Важность анализа на чувствительность очевидна, поскольку выбор параметров, характеризующих тот или иной процесс, часто основывается лишь на предварительных соображениях, а учитываемые ограничения оцениваются весьма приближенно. Кроме того, при предварительном рассмотрении некоторые из реально существующих ограничений могут не приниматься во внимание, а целевая функция может быть построена без учета ряда факторов, влияющих на конечный результат.

В равной степени важной является также другая цель данного рассмотрения. Она заключается в освоении принципов построения алгоритмов оптимизации. Приведенное в данной главе подробное описание так называемой *симплексной техники* позволит читателю получить надлежащее представление об алгоритмическом методе. Это в свою очередь будет способствовать развитию нужной интуиции и более глубокому усвоению подходов к изучению других моделей, рассмотрению которых посвящены последующие главы.

Прежде чем дать исчерпывающую формулировку симплексного алгоритма, целесообразно рассмотреть задачу в упрощенном виде, чтобы постепенно ввести читателя в курс дела. В противном случае можно запутаться в подробностях и недостаточно четко оттенить основные идеи, которые часто воспринимаются лишь интуитивно. Можно с уверенностью утверждать, что, закончив изучение данной главы, читатель разберется во всех деталях, которые необходимы для успешного применения рассматриваемого алгоритма к *любой* модели линейного программирования.

Предварительный анализ. Прежде чем приступить к изучению симплексного алгоритма, проведем краткий анализ одной простой модели линейного программирования, чтобы получить определенное представление о тех «препятствиях», которые приходится преодолевать с помощью различного рода технических приемов. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{максимизировать } 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 \tag{1}$$

при ограничениях

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 \qquad = 9, \tag{2}$$

$$1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \qquad + 1x_6 = 24, \tag{3}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Для начала попытаемся искать решение данной задачи, придав максимально возможное значение x_4, т. е. той переменной, которая входит в выражение для целевой функции с *наибольшим* коэффициентом. Легко убедиться, что это пробное значение x_4 равно $^{24}/_8 = 3$ и полностью определяется коэффициентами в уравнении (3). Целевая функция принимает при этом значение $9 \cdot 3 = 27$. Если рассмотреть другой случай, выбрав в качестве пробного решения максимальное значение x_3, которое, как нетрудно убедиться, равняется $^{24}/_4 = 6$, то целевая функция примет значение $7 \cdot 6 = 42$, т. е. большее по сравнению с предшествующим вариантом. Таким образом, из-за наличия ограничений использование лишь той переменной, которая обладает наибольшей удельной стоимостью, не всегда приводит к наилучшему результату.

Легко показать, что если $x_3 = 6$, то $x_5 = 3$. Поскольку целевая функция не зависит от x_3, можно попытаться улучшить решение, выбирая различные комбинации других переменных. Если бы не существовали некоторые простые правила, позволяющие сразу же исключить из рассмотрения заведомо неудовлетворительные решения, перебор различных пробных комбинаций даже для такой простой задачи, как сформулированная выше, был бы весьма утомительным.

Предположим, например, что оптимальное решение можно найти, задаваясь положительными значениями x_2 и x_3 при нулевых значениях x_1, x_4, x_5 и x_6. Необходимо проверить, является ли данное положение правильным. Это не представляет никаких трудностей. Необходимо лишь умение манипулировать соотношениями (2) и (3), используя обычные приемы элементарной алгебры, применяемые при решении системы, состоящей из двух линейных уравнений. В математике такой подход часто называют **методом исключения переменных** или **методом Гаусса.**

Предварительно перенесем x_1, x_4, x_5 и x_6 в уравнениях (2) и (3) в правые части:

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \tag{4}$$

$$2x_2 + 4x_3 = 24 - 1x_1 - 8x_4 \qquad - 1x_6. \tag{5}$$

Затем из (5) исключим x_2. Для этого достаточно умножить обе части уравнения (4) на 2 и полученный результат вычесть из (5). Выполнив указанные выше операции, получим

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \tag{6}$$

$$2x_3 = 6 + 1x_1 - 6x_4 + 2x_5 - 1x_6. \tag{7}$$

После этого произведем *нормировку* коэффициента при x_3 в уравнении (7). Для этого необходимо разделить обе части данного уравнения на 2. В результате будем иметь

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \tag{8}$$

$$1x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6. \tag{9}$$

Наконец, из (8) следует *исключить* x_3, что достигается вычитанием (9) из (8). В результате получим

$$x_2 = 6 - \frac{3}{2}x_1 + 2x_4 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6, \tag{10}$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6. \tag{11}$$

Сочетание нормировки с операцией исключения переменной иногда называют **поиском опорного плана.**

Согласно предположению, $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Теперь с помощью (10) и (11) находим $x_2 = 6$ и $x_3 = 3$. Легко показать, что при этом удовлетворяются уравнения (2) и (3). Для данного решения целевая функция принимает значение $3 \cdot 6 + 7 \cdot 3 = 39$. Вспомним, что выше уже рассматривалось решение $x_3 = 6$, для которого целевая функция принимает значение 42. Следовательно, только что предложенный вариант решения ($x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $x_2 = 6$ и $x_3 = 3$) не является оптимальным. Попытаемся найти простой способ, позволяющий проверить на оптимальность рассматриваемый набор значений переменных x_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) без каких бы то ни было *предварительных* проб.

Для этого подставим x_2 и x_3, заданные соотношениями (10) и (11), в выражение для целевой функции:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3\left(6 - \frac{3}{2}x_1 + 2x_4 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6\right) + \\ + 7\left(3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6\right) + 9x_4 = \\ = 39 + 1x_1 - 6x_4 + 1x_5 - 2x_6. \qquad (12) \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что если взять $x_1 > 0$ и $x_5 > 0$, то значение целевой функции превысит 39. Действительно, если обратиться к выражению (12), то легко убедиться, что при увеличении на единицу значения любой из этих переменных ровно на единицу возрастает значение целевой функции.

Предположим, что мы решили увеличивать значение x_1. Каков при этом допустимый предел? С помощью формул (10) и (11), представляющих собой преобразованные уравнения (2) и (3), можно показать, что при $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ увеличение значения x_1 на единицу приводит к уменьшению значения x_2 на $^3/_2$ и одновременному возрастанию значения x_3 на $^1/_2$. Однако допустимое решение [1]) должно удовлетворять условию $x_j \geqslant 0$. Следовательно, значение x_1 не может превышать 4, поскольку при $x_1 = 4$ значение x_2 обращается в нуль. При этом, согласно соотношению (12), соответствующее значение целевой функции равняется $39 + 1 \cdot 4 = 43$.

Продолжая поиск оптимального решения, рассмотрим теперь другой пробный вариант, предположив, что x_1 и x_3 могут принимать положительные значения, а значения всех других переменных равны нулю. Используя приемы, с помощью которых были получены уравнения (10) и (11), легко разрешить (2) и (3) относительно x_1 и x_3.

[1]) В отечественной литературе по линейному программированию, как правило, используется другая терминология: «план» вместо «решение», «опорный план» вместо «допустимое решение» и т. д.— *Прим. перев.*

В результате получим

$$x_1 = 4 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{4}{3} x_4 - \frac{4}{3} x_5 + \frac{1}{3} x_6, \qquad (13)$$

$$x_3 = 5 - \frac{1}{3} x_2 - \frac{7}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5 - \frac{1}{3} x_6. \qquad (14)$$

Полагая $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, получаем $x_1 = 4$ и $x_3 = 5$. При этом целевая функция принимает значение $2 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 43$. Отметим, что данное значение совпадает с тем, которое было получено с помощью (12), и является улучшенным по сравнению с предыдущим пробным вариантом.

С целью проверки рассматриваемого пробного варианта на оптимальность можно, как и в предыдущем случае, подставить (13) и (14) в выражение для целевой функции. В результате получим

$$43 - \frac{2}{3} x_2 - \frac{14}{3} x_4 - \frac{1}{3} x_5 - \frac{5}{3} x_6. \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться, что при *любом* положительном приращении переменных x_2, x_4, x_5 и x_6 целевая функция принимает значения, меньшие по сравнению с только что полученным. Следовательно, данное решение действительно является оптимальным.

Интуиция подсказывает, что идеи, изложенные в ходе проведенного выше анализа, можно привести в надлежащую систему и представить в виде некоторой совокупности правил. В результате этого должен появиться алгоритм, позволяющий обоснованно выбирать пробные варианты и устанавливающий критерий оценки степени оптимальности каждого из рассматриваемых пробных решений. Тем, кто стремится быстрее войти в курс дела, а также читателям, для которых алгоритм оптимизации является слишком непривычным понятием, рекомендуется временно опустить следующий раздел, с тем чтобы вернуться к нему после ознакомления с симплексным алгоритмом, описание которого дано в разд. 4.4. После усвоения упомянутого выше алгоритма вопросы, рассмотренные в следующем разделе, приобретут более важное значение. Однако тем, кто отдает предпочтение методу дедукции, следует продолжить изучение данной главы в предложенной здесь последовательности. При этом не нужно особенно беспокоиться, если излагаемый ниже материал покажется вначале довольно трудным для понимания. После проработки данной главы все неясности исчезнут.

4.3. АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ МЕТОД

В этой книге рассмотрены различные типы алгоритмов. Наиболее часто применяется метод итераций, когда при выборе каждого пробного решения, начиная с самого первого, с помощью некоторого заданного предписания определяют, как поступить далее: прекратить вычисления или перейти к следующему пробному варианту. Важно знать, в каких случаях предлагаемая схема вычислений действительно представляет собой алгоритм решения задачи.

Рассмотрим, например, процедуру, с помощью которой была решена простая задача, сформулированная в предыдущем разделе. Всякий раз, когда мы хотели проверить на оптимальность ту или иную конкретную пару переменных, однозначное определение их значений, удовлетворяющих всем имеющимся ограничениям, не вызывало никаких трудностей. Возможно, дело только в случайной удаче? Наряду с этим был предложен простой способ выявления возможностей улучшения пробного решения за счет использования других переменных. Всегда ли такой прием приводит к требуемому результату? Мы убедились, что попытка включить в пробное решение одну из неиспользованных переменных обусловливает исключение из него другой вполне определенной переменной, ранее фигурировавшей в пробном варианте. Является ли это правило замены абсолютно жестким? Оптимальное решение удалось найти весьма быстро. Можно ли утверждать, что это в порядке вещей?

Для усвоения симплексного метода, а также других алгоритмов, рассмотренных в последующих главах, полезно иметь представление о некоторых основных моментах, учитываемых при использовании любой вычислительной процедуры. Оценивая тот или иной вычислительный алгоритм, необходимо, в частности, рассмотреть следующие его характеристики:

1. **Полнота.** Являются ли правила, предписанные данным алгоритмом, совершенно однозначными? Существует ли практический способ построения первого пробного решения, позволяющего начать реализацию алгоритма? Сформулированы ли правила, описывающие рассматриваемый метод, настолько четко, чтобы человек или электронно-вычислительная машина могли следовать им, обладая лишь умением считывать информацию и не прибегая ни к каким дополнительным рассуждениям и умозаключениям?

2. **Область применимости.** Для решения каких математических задач предназначен данный алгоритм? Насколько легко определить, попадает ли рассматриваемая конкретная задача в класс, покрываемый областью применимости метода? Можно ли утверждать, что заключительный пробный вариант, завершающий вычисления, всегда является точным решением задачи? Если это не так, можно ли доказать, что точное решение существует, и вскрыть причину допущенной ошибки?

3. **Свойства сходимости.** Всегда ли вычислительная процедура, определяемая данным алгоритмом, обеспечивает сходимость? Если сходимость имеет место, всегда ли она приводит к правильному решению? Исчерпывается ли данная процедура конечным числом итераций? Сколько итераций необходимо выполнить при решении той или иной практической задачи, чтобы получить требуемый резуль-

тат? Является ли сходимость равномерной? Если вычисления прекращены до того, как получено оптимальное решение, можно ли заключительное пробное решение считать достаточно хорошим с практической точки зрения?

4. Требования к вычислительным процедурам. Насколько сложными и трудоемкими оказываются вычисления, которые необходимо выполнить для получения надлежащего решения? При какой точности вычислений рассматриваемый метод приводит к удовлетворительным результатам?

Специалист в области исследования операций может получить ответы на многие из этих вопросов шаблонным путем. Однако при рассмотрении вопросов, касающихся уточнения свойств сходимости, требуется более тонкий анализ. Несмотря на то что проблема сходимости при применении алгоритмических методов является весьма сложной, ряд соображений, играющих в этой связи важную роль, можно пояснить на примере простой модели. В целях иллюстрации предположим, что при наличии определенных ограничений требуется максимизировать некоторую заданную целевую функцию. Именно так обстоит дело при решении задач линейного программирования. На приведенных ниже графиках (рис. 4.1) показано, как

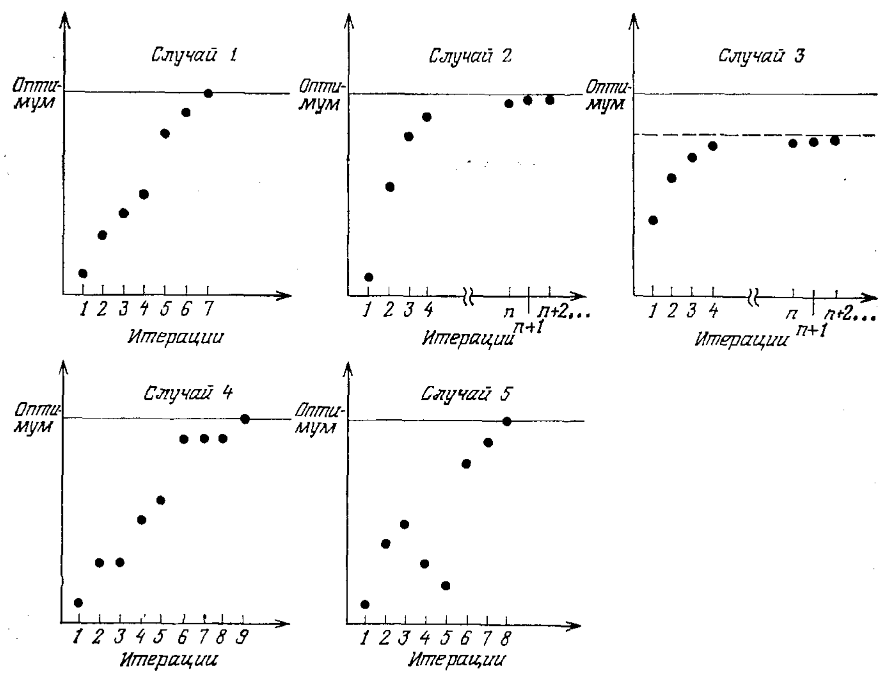


Рис. 4.1. Иллюстрация сходимости.

изменяется значение целевой функции при переходе от каждой заданной итерации к следующей для различных конкретных алгоритмов.

Случай 1. Улучшение значения целевой функции наблюдается при каждой итерации. Ряд пробных значений сходится к оптимальному решению после выполнения конечного числа итераций. В приведенном примере оптимум достигается на седьмой итерации.

Случай 2. Улучшение значения целевой функции наблюдается при каждой итерации, однако итерационный процесс содержит бесконечное число итераций. При этом каждый последующий пробный вариант несколько улучшает решение, но это улучшение с возрастанием номера итерации становится все менее и менее значительным. Другими словами, оптимальное решение достигается в данном случае лишь асимптотически.

Случай 3. Значение целевой функции улучшается при каждой итерации. Как и в предыдущем случае, итерационный процесс содержит бесконечное число итераций. Однако целевая функция стремится к некоторому значению, лежащему *ниже* оптимального.

Случай 4. Ряд пробных значений сходится к оптимальному за конечное число итераций, причем при каждой последующей итерации, по крайней мере, не происходит ухудшения предыдущего результата. Однако при некоторых итерациях значение целевой функции фактически не улучшается. Такого рода ситуация наблюдается при третьей, седьмой и восьмой итерациях.

Случай 5. Стабильной сходимости предшествует наблюдающееся при некоторых итерациях убывание значения целевой функции. На рис. 4.1 это имеет место при четвертой и пятой итерациях.

Таким образом, не любой алгоритм обеспечивает сходимость ряда пробных значений целевой функции к некоторому предельному значению за конечное число итераций. В тех случаях, когда сходимость имеет место, предел, к которому стремится целевая функция, не всегда совпадает с ее оптимальным значением. Кроме того, не при любом алгоритме каждая последующая итерация улучшает значение целевой функции.

4.4. ВВЕДЕНИЕ В СИМПЛЕКСНЫЙ АЛГОРИТМ

Для решения задач линейного программирования предложено немало различных алгоритмов. Однако наиболее эффективным среди них оказался алгоритм, рассмотренный ниже. При этом следует подчеркнуть, что при решении некоторых частных задач (как, например, задач, связанных с оптимизацией потоков в сетях) могут оказаться более эффективными другие алгоритмы. Методы решения ряда специфических задач обсуждаются в гл. 7.

Попытаемся весь ход рассуждений, обеспечивающий решение задачи, рассмотренной в разд. 4.2, описать в словесной форме. Упомянутая модель содержит два уравнения. Пробные решения выбирались следующим образом: допускалось, что две переменные принимают некоторые положительные значения, а остальные переменные предполагались тождественно равными нулю. Стремясь к обобщению, можно предположить, что в тех случаях, когда модель содержит m уравнений, для построения пробных решений используются m переменных, принимающих некоторые положительные значения при нулевых значениях остальных переменных. Вначале допустим, что решение существует, причем оптимальное значение целевой функции конечно [1]). В этом случае вычислительная процедура будет выглядеть следующим образом:

Шаг 1. Выберем m переменных, задающих допустимое пробное решение. Исключим эти переменные из выражения для целевой функции.

Шаг 2. Проверим, нельзя ли за счет одной из переменных, приравненной вначале к нулю, улучшить значение целевой функции, придавая ей отличные от нуля (причем положительные) значения. Если это возможно, перейдем к шагу 3. В противном случае прекратим вычисления.

Шаг 3. Найдем предельное значение переменной, за счет которой можно улучшить значение целевой функции. Увеличение значения этой переменной допустимо до тех пор, пока одна из m переменных, вошедших в пробное решение, не обратится в нуль. Исключим из выражения для целевой функции только что упомянутую переменную и введем в пробное решение ту переменную, за счет которой результат может быть улучшен.

Шаг 4. Разрешим систему m уравнений относительно переменных, вошедших в новое пробное решение. Исключим эти переменные из выражения для целевой функции. Вернемся к шагу 2.

Важно отметить, что при однозначном понимании данного предписания предложенный алгоритм действительно приводит к оптимальному решению для любой модели линейного программирования за конечное число итераций. Такой способ решения задач линейного программирования часто называют *симплексным алгоритмом.*

Обратимся вначале к одной простой задаче, не имеющей никаких «аномалий», и попытаемся с ее помощью получить общее представление о **симплексном методе.** К более подробному анализу данного метода вернемся несколько позже.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

[1]) Позднее эти ограничения будут сняты.

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + \ 1x_3 + \ 1x_4 &\leqslant 15,\\
7x_1 + 5x_2 + \ 3x_3 + \ 2x_4 &\leqslant 120,\\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leqslant 100,\\
x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Напомним, что данная модель рассматривалась в разд. 2.2 в связи с задачей распределения ресурсов, и, возможно, у читателя уже возникли некоторые предположения относительно ее оптимального решения.

Обозначим через x_0 значение целевой функции и введем в рассмотрение свободные переменные. В результате получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{array}{llr}
1x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 & = 0 & \text{(строка 0)},\\
\quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 & = 15 & \text{(строка 1)},\\
\quad 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \quad + 1x_6 & = 120 & \text{(строка 2)},\\
\quad 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \quad\quad + 1x_7 & = 100 & \text{(строка 3)},
\end{array}
\qquad (1)
$$

где *все* переменные могут принимать лишь неотрицательные значения. Заметим, что введение в рассмотрение переменной x_0 (строка 0) позволяет записать выражение для целевой функции в виде уравнения.

Задача шага 1 заключается в том, чтобы выбрать первоначальное допустимое решение системы уравнений (1). Существует множество таких решений, однако удобнее всего начать с $x_0 = 0$, $x_5 = 15$, $x_6 = 120$, $x_7 = 100$ при нулевых значениях остальных переменных. Другими словами, строится первое пробное решение с помощью только свободных переменных. Назовем его **исходным базисным решением** [1]), а переменные x_0, x_5, x_6, x_7 — **базисными переменными** или сокращенно **базисом**. Остальные переменные логично назвать **небазисными** [2]).

Термин «базис» (или «базисное решение») отражает здесь то обстоятельство, что в соответствии с числом линейных соотношений рассматриваемой модели решение содержит лишь четыре переменные, причем значения этих четырех переменных однозначно определяются константами, стоящими в правых частях уравнений (1). Следует подчеркнуть, что симплексный метод оперирует лишь *базисными* пробными решениями. Несмотря на ограничения, накладываемые на класс допустимых решений, этот метод позволяет получить оптимальное решение, если, разумеется, оно существует.

---

[1]) Вместо этого термина часто применяется другой — «исходный опорный план».— *Прим. перев.*

[2]) У ряда авторов можно встретить термин «внебазисные переменные».— *Прим. перев.*

Если под x_0 понимать прибыль, то только что предложенное пробное решение явно является не очень выгодным. Но его, несомненно, можно улучшить. Обратим внимание на коэффициенты при тех переменных, которые фигурируют в строке 0 и которые в предложенном выше пробном варианте не являются базисными (т. е. коэффициенты при x_1, x_2, x_3 и x_4). Легко убедиться, что каждый отрицательный коэффициент в этой строке определяет величину положительного приращения x_0 при увеличении значения соответствующей переменной на единицу. Интерпретация коэффициентов в строке 0 остается в силе на протяжении всей процедуры составления пробных решений. Таким образом, справедливо следующее положение.

Интерпретация коэффициентов в строке 0. Каждый коэффициент в строке 0 определяет положительное (если перед ним стоит знак минус) или отрицательное (если перед ним стоит знак плюс) приращение x_0 при увеличении на единицу соответствующей небазисной переменной.

Шаг 2 симплексного метода устанавливает следующее легко реализуемое правило, позволяющее определить, какие переменные должны войти в очередной пробный базис.

Симплекс-критерий I (максимизация). Если в строке 0 имеются небазисные переменные, коэффициенты при которых отрицательны, следует выбрать переменную (обозначим ее через x_j) с наибольшим абсолютным значением стоящего перед ней коэффициента, т. е. ту переменную, которая обеспечивает наибольшее удельное приращение значения целевой функции. В случае когда все небазисные переменные строки 0 имеют положительные или нулевые коэффициенты, оптимальное решение можно считать полученным.

В соответствии с *критерием I* в базис следует ввести переменную x_4. Каждое единичное приращение x_4 приводит к увеличению значения x_0 на 11. Совершенно очевидно, что чем больше значение x_4, тем сильнее возрастает значение x_0. Однако нужно помнить об ограничениях (1). Заметим, что увеличение значения x_4 возможно лишь за счет уменьшения значений базисных переменных в каждой строке, содержащей x_4 с положительным коэффициентом. Так, например, при увеличении x_4 на единицу

1) значение x_5 должно быть уменьшено на 1, чтобы удовлетворялось ограничение, приведенное в строке 1;

2) значение x_6 должно быть уменьшено на 2, чтобы удовлетворялось ограничение, приведенное в строке 2;

3) значение x_7 должно быть уменьшено на 15, чтобы удовлетворялось ограничение, приведенное в строке 3.

Сколь велико должно быть значение x_4, чтобы значение одной из выбранных вначале базисных переменных достигло своей нижней границы, т. е. нуля? Легко проверить, что такой предел для x_4 равняется $^{100}/_{15} = 6{,}67$; при этом $x_7 = 0$. Следовательно, в базис нужно включить x_4, исключив из него x_7.

Резюмируя изложенное выше, сформулируем следующее правило для шага 3.

Симплекс-критерий II. а) Рассмотрим отношения чисел, стоящих в правых частях (1), к соответствующим коэффициентам при новой базисной переменной x_j (не обращая внимание на отношения, в которых знаменатель равен нулю или представляет собой отрицательное число). б) Выберем отношение с наименьшим значением — в очередном пробном решении x_j приравнивается именно этому значению. Пусть наименьшее из всех отношений правых частей (1) к соответствующим коэффициентам при x_j соответствует переменной x_k, входившей в предыдущее решение; тогда в очередном пробном решении следует положить $x_k = 0$. Результаты вычислений приведены на рис. 4.2.

Базисные переменные	Рассматриваемое пробное решение	Коэффициенты при x_4	Значения отношений	Минимальное значение	Следующее пробное решение
x_0	0	−11	—		
x_5	15	1	15		
x_6	120	2	60		
x_7	100	15	6,66	6,66	$x_4=6{,}66,\ x_7=0$

Рис. 4.2. Итерация 1: включение x_4 в очередной базис (согласно критерию II).

Теперь, когда известно, что в пробном базисе x_7 следует заменить на x_4, перейдем к шагу 4. Перепишем соотношения (1) таким образом, чтобы в строке 3 коэффициент при x_4 был равен единице, а в строках 0, 1 и 2 — нулю. Процедуру, с помощью которой это достигается, называют операцией **замены базиса** или операцией **замены опорного плана**. Сначала разделим обе части уравнения в строке 3 на коэффициент при x_4, т. е. на 15:

$$
\begin{aligned}
&1x_0-4x_1-5x_2-9x_3-11x_4 &&= 0 \quad &&\text{(строка 0)},\\
&\quad 1x_1+1x_2+1x_3+1x_4+1x_5 &&= 15 \quad &&\text{(строка 1)},\\
&\quad 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4+1x_6 &&=120 \quad &&\text{(строка 2)},\\
&\quad \frac{1}{5}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3+1x_4+\frac{1}{15}x_7 &&=\frac{20}{3} \quad &&\text{(строка 3)}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В результате коэффициент при x_4 в строке 3 принял значение, равное единице. Следует отметить, что выполненная математическая операция является вполне законной, так как она заключалась в единственном действии — делении равных величин на одно и то же число. Обратим в нули коэффициенты при x_4 в строках 0, 1 и 2, действуя по следующей схеме:

1) умножить строку 3 на 11 и результат прибавить к строке 0;
2) умножить строку 3 на —1 и результат прибавить к строке 1;
3) умножить строку 3 на —2 и результат прибавить к строке 2.

Выполнив указанные выше действия, получим

$$
\begin{aligned}
&1x_0-\frac{9}{5}x_1-\frac{4}{3}x_2-\frac{5}{3}x_3 &&+\frac{11}{15}x_7=\frac{220}{3} &&\text{(строка 0)},\\
&\frac{4}{5}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+1x_5 &&-\frac{1}{15}x_7=\frac{25}{3} &&\text{(строка 1)},\\
&\frac{33}{5}x_1+\frac{13}{3}x_2+\frac{5}{3}x_3+1x_6 &&-\frac{2}{15}x_7=\frac{320}{3} &&\text{(строка 2)},\\
&\frac{1}{5}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3+1x_4 &&+\frac{1}{15}x_7=\frac{20}{3} &&\text{(строка 3)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Как и в предыдущем случае, проделанные математические операции являются вполне законными, поскольку они заключаются в умножении правых и левых частей рассматриваемых уравнений на константу и в последующем сложении правых и соответственно левых частей уравнений, полученных в результате выполнения первой операции. Следовательно, несмотря на то что система уравнений (3) выглядит иначе, нежели система (1), можно утверждать, что они эквивалентны. Удобство представления системы уравнений в виде (3) состоит в том, что, полагая $x_1=x_2=x_3=x_7=0$, можно сразу же определить значения переменных для нового пробного базисного решения (рис. 4.3).

x_0	220/3
x_5	25/3
x_6	320/3
x_4	20/3

Рис. 4.3. Второе пробное базисное решение.

Для нового базиса прибыль x_0 равняется 220/3; при этом численное значение прибыли для рассматриваемого пробного решения определяется по следующей формуле:

Прибыль для нового пробного решения = Прибыль при предыдущем пробном базисе + Значение новой базисной переменной × Удельный вклад новой базисной переменной в приращение прибыли [1]):

$$\frac{220}{3}=0+\frac{20}{3}\cdot 11.$$

Смысл критерия II становится теперь более ясным. Если бы вместо x_7 из первоначального базиса мы исключили x_5 (или x_6), то x_4, x_7 и x_6 (или x_5) приняли бы отрицательные значения, что противоречит предположению о том, что ни одна из переменных не может быть

[1]) См. строку 0 в системе уравнений (2).

отрицательной. Данное утверждение легко проверить с помощью простых вычислений.

Итерация 2. Завершив первую итерацию, следует вернуться к шагу 2, с тем чтобы определить, является ли полученное решение оптимальным. Если оптимум еще не достигнут, необходимо в соответствии с симплексным алгоритмом приступить к следующей итерации.

Согласно критерию I, возможность улучшить решение действительно существует. При этом в очередной базис выгодно включить либо x_1, либо x_2, либо x_3. На основании критерия I выбор падает на x_1, так как эта переменная обеспечивает наибольшее удельное приращение для значения целевой функции. Сделав данный выбор,

Базисные переменные	Рассматриваемое пробное решение	Коэффициенты при x_1	Значения отношений	Минимальное значение	Следующее пробное решение
x_0	220/3	9/5	—		
x_5	25/3	4/5	125/12	125/12	$x_1 = 125/12,\ x_5 = 0$
x_6	320/3	33/5	1600/99		
x_4	20/3	1/5	100/3		

Рис. 4.4. Итерация 2: включение x_1 в очередной базис (согласно критерию II).

следует перейти к вычислениям, предусмотренным шагом 3, используя при этом критерий II (рис. 4.4).

В соответствии с таблицей на рис. 4.4 в очередном пробном решении x_5 следует заменить на x_1. Теперь с учетом произведенной замены нужно соответствующим образом преобразовать систему уравнений (3). Вычислительную процедуру, позволяющую поменять пробный базис (см. шаг 4), можно реализовать в несколько приемов. Вначале выполним нормировку коэффициента при x_1 в строке 1:

$$\begin{array}{llr}
1x_0 - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 & + \frac{11}{15}x_7 = \frac{220}{7} & \text{(строка 0)},\\
\qquad 1x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 \qquad + \frac{5}{4}x_5 & - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} & \text{(строка 1)},\\
\frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 & + 1x_6 - \frac{2}{15}x_7 = \frac{320}{3} & \text{(строка 2)},\\
\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1x_4 & + \frac{1}{15}x_7 = \frac{10}{3} & \text{(строка 3)}.
\end{array} \qquad (4)$$

Затем, завершая операцию поиска очередного опорного плана, исключим x_1 из уравнений в строках 0, 1 и 3, действуя по следующей схеме:

1) умножить строку 1 на 9/5 и результат сложить со строкой 0;
2) умножить строку 1 на —33/5 и результат сложить со строкой 2;
3) умножить строку 1 на —1/5 и результат сложить со строкой 3.

В результате получим

$$
\begin{array}{ll}
1x_0 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{11}{12}x_3 + \frac{9}{4}x_5 + \frac{7}{12}x_7 = \frac{1105}{12} & \text{(строка 0)}, \\
1x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} & \text{(строка 1)}, \\
-\frac{7}{6}x_2 - \frac{13}{12}x_3 - \frac{33}{4}x_5 + 1x_6 + \frac{5}{12}x_7 = \frac{455}{12} & \text{(строка 2)}, \\
\frac{1}{6}x_2 + \frac{7}{12}x_3 + 1x_4 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{12}x_7 = \frac{55}{12} & \text{(строка 3)}.
\end{array} \qquad (5)
$$

Третье пробное базисное решение представлено на рис. 4.5. Заметим, что на каждой итерации коэффициент при переменной, не вошедшей в базис, определяет изменение базисных переменных, обусловленное единичным приращением соответствующей небазисной переменной (в случае если последнюю включить в пробное решение). Так, например, за счет единичного приращения x_1 в (3) значения x_5, x_6 и x_7 уменьшаются соответственно на $^4/_5$, $^{33}/_5$ и $^1/_5$. Правильность данного утверждения можно еще раз проверить на примере третьего пробного решения, для которого $x_1 = 125/12$. Следует отметить, что до включения в базис x_1 в системе уравнений (3) наше внимание привлекала другая переменная x_2. В результате же включения в базис x_1 произошло снижение «значимости» x_2 [см. (5)].

x_0	1105/12
x_1	125/12
x_6	455/12
x_4	55/12

Рис. 4.5. Третье пробное базисное решение.

Итерация 3. Завершив вторую симплекс-итерацию, снова рассмотрим коэффициенты при переменных в строке 0 с целью проверки полученного решения на оптимальность. Теперь мы видим, что решение может быть улучшено за счет x_3. Результаты вычислений, позволяющие выяснить, какая из переменных должна быть исключена из базиса, представлены на рис. 4.6. В соответствии с этой таблицей из числа базисных следует исключить переменную x_4, вошедшую в решение при первой итерации. В процессе применения симплексного метода случаи, когда та или иная переменная при некоторой итерации входит в пробное решение, а затем исключается из него при одной из последующих итераций, возникают нередко. Именно это обстоятельство мешает заранее определить максимальное число симплекс-итераций, которое приводило бы к решению любой задачи линейного программирования.

Базисные переменные	Рассматриваемое пробное решение	Коэффициенты при x_3	Значения отношений	Минимальное значение	Следующее пробное решение
x_0	1105/12	—11/12	—		
x_1	125/12	5/12	25		
x_6	455/12	—13/12	—		
x_4	55/12	7/12	55/7	55/7	$x_3=55/7,\ x_4=0$

Рис. 4.6. Итерация 3: включение x_3 в очередной базис (согласно критерию II).

Как и в предыдущих итерациях, пронормируем коэффициент при x_3 в строке 3 путем деления обеих частей соответствующего уравнения на $^7/_{12}$. Система уравнений примет вид

$$
\begin{aligned}
&1x_0 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{11}{12}x_3 + \frac{9}{4}x_5 + \frac{7}{12}x_7 = \frac{1105}{12} \quad &\text{(строка 0)},\\
&1x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} \quad &\text{(строка 1)},\\
&-\frac{7}{6}x_2 - \frac{13}{12}x_3 - \frac{33}{4}x_5 + 1x_6 + \frac{5}{12}x_7 = \frac{455}{12} \quad &\text{(строка 2)},\\
&\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} \quad &\text{(строка 3)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Теперь исключим x_3 из уравнений в строках 0, 1 и 2, действуя по следующей схеме:

1) умножить строку 3 на $^{11}/_{12}$ и результат сложить со строкой 0;
2) умножить строку 3 на $(-^5/_{12})$ и результат сложить со строкой 1;
3) умножить строку 3 на $^{13}/_{12}$ и результат сложить со строкой 2.

В результате получим

$$
\begin{aligned}
&1x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} \quad &\text{(строка 0)},\\
&1x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7} \quad &\text{(строка 1)},\\
&-\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + 1x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7} \quad &\text{(строка 2)},\\
&\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} \quad &\text{(строка 3)}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

При выполнении данной итерации была принята во внимание специфика вычислительной процедуры, предусмотренная критерием II. Если бы мы попытались исключить из пробного базиса переменную с отрицательным коэффициентом (таковой, согласно табл. на рис. 4.6, является x_6), то переменная x_3 могла бы принимать только отрицательные значения. По условию задачи это недопустимо. Следовательно, при наличии отрицательного коэффициента в той или иной строке процедура замены базиса должна выполняться с учетом соответствующего требования критерия II. Аналогично оказывается невозможным исключить базисную переменную из строки, в которую переменная, включенная в новое пробное решение, входит с нулевым коэффициентом. Попытка осуществить указанную операцию была бы сопряжена с делением на нуль, что невозможно.

Таким образом, критерий II гарантирует выполнение условия неотрицательности базисных переменных для любого пробного решения.

x_0	695/7
x_1	50/7
x_6	325/7
x_3	55/7

Рис. 4.7. Четвертое пробное базисное решение, являющееся оптимальным.

Итерация 4. В строке 0 системы уравнений (7) все коэффициенты положительны и, следовательно, согласно критерию I, полученное решение является оптимальным (рис. 4.7). Таким образом, на шаге 2 вычисления прекращаются. Остается убедиться, что значения переменных, приведенные на рис. 4.7, действительно удовлетворяют (1).

Резюме. В кратком изложении симплексный метод состоит в следующем:

Шаг 1. Выбирается исходный базис.

Шаг 2. Используется критерий I. Если рассматриваемое пробное решение не является оптимальным, осуществляется переход к шагу 3. В противном случае вычисления прекращаются.

Шаг 3. Выполняется процедура, предписанная критерием II.

Шаг 4. Сменяется базис, после чего возвращаются к шагу 2.

Вычислительные процедуры, выполняемые в соответствии с симплекс-алгоритмом, легко интерпретировать геометрически в пространстве решений. При этом каждый пробный базис соответствует вершине выпуклого полиэдрального множества допустимых решений. Переход от одного базиса к другому геометрически выглядит как переход от одной экстремальной точки к другой (причем смежной) экстремальной точке. Таким образом, можно утверждать, что поиск оптимального решения симплексным методом заключается *в последовательном восхождении вдоль ребер упомянутого многогранника от одной его вершины к соседней.*

Оптимальность. Доказательство того, что полученное решение действительно является оптимальным, не вызывает никаких трудностей. Поскольку соотношения (7) получены из исходных уравнений (1) с помощью элементарных алгебраических действий (умножение равных величин на одно и то же число и сложение равных величин с равными величинами), системы уравнений (1) и (7), несмотря на внешнее различие, представляют собой математическую формулировку одной и той же задачи. Предположим, что с самого начала мы имеем (7). После простого преобразования строки 0 целевую функцию можно записать в виде

$$x_0=\frac{695}{7}-\frac{3}{7}x_2-\frac{11}{7}x_4-\frac{13}{7}x_5-\frac{5}{7}x_7. \tag{8}$$

При *любом* отличном от нуля допустимом значении хотя бы одной из небазисных переменных x_2, x_4, x_5 или x_7 целевая функция принимает, согласно (8), значение, меньшее по сравнению с полученным выше, т. е. меньшее по сравнению с $^{695}/_7$.

Коэффициенты при переменных в окончательном варианте строки 0 иногда называют **скрытыми издержками.** Каждый коэффициент определяет отклонение значения целевой функции от оптимального при увеличении значения соответствующей небазисной переменной на единицу; при этом предполагается, что базис, построенный на заключительной итерации, остается допустимым [1]).

Положим, например, $x_2 = 1$. Это повлечет за собой снижение значения x_0 на $^3/_7$. При этом значения базисных переменных также изменятся, в чем можно убедиться с помощью соотношений, приведенных в строках 1, 2 и 3. Рассмотрим базисную переменную в строке 1 системы уравнений (7):

$$x_1=\frac{50}{7}-\frac{5}{7}x_2+\frac{5}{7}x_4-\frac{10}{7}x_5+\frac{1}{7}x_7. \tag{9}$$

Полагая $x_2 = 1$, мы уменьшаем значение x_1 на $^5/_7$.

Альтернативные оптимальные решения. В гл. 3 (рис. 3.2) было показано, что задача линейного программирования может иметь несколько оптимальных решений. Графическое рассмотрение для двумерного случая показало, что если линейная модель имеет более чем одно оптимальное решение, то она имеет бесконечное число оптимальных решений. Оказывается справедливым обобщение данного утверждения и на случай большего числа измерений.

Пытаясь разобраться, в силу чего это происходит, рассмотрим следующий пример. Предположим, что вместо (1) мы имеем другую модель, в которую входит новая переменная x_8. В строки системы

---

[1]) Коэффициенты при свободных переменных иногда называют *скрытыми ценами*; смысл этих коэффициентов подробно обсуждается в следующей главе.

уравнений (1) внесены следующие изменения:

$$\begin{aligned} &-2x_8 && \text{(строка 0)},\\ &+1x_8 && \text{(строка 1)},\\ &+9x_8 && \text{(строка 2)},\\ &+0{,}2x_8 && \text{(строка 3)}. \end{aligned} \tag{10}$$

С помощью простых вычислений можно показать, что на заключительной итерации мы будем иметь следующие дополнения к строкам системы уравнений (7):

$$\begin{aligned} &0x_8 && \text{(строка 0)},\\ &+\frac{9{,}8}{7}x_8 && \text{(строка 1)},\\ &+\frac{2{,}8}{7}x_8 && \text{(строка 2)},\\ &-\frac{2{,}8}{7}x_8 && \text{(строка 3)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что если x_8 включить в базис, то, согласно критерию II, x_1 выйдет из базиса и альтернативное оптимальное базисное решение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &x_0=\frac{695}{7}, && x_8=\frac{50}{9{,}8}=5{,}1,\\ &x_6=\frac{3045}{7\cdot(9{,}8)}=44{,}39, && x_3=\frac{679}{7\cdot(9{,}8)}=9{,}9 \end{aligned} \tag{12}$$

при $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$. Легко показать, что любое **положительно-взвешенное среднее** двух полученных оптимальных базисных решений также является альтернативно допустимым оптимальным решением

$$\begin{aligned} x_0&=\frac{695}{7},\\ x_1&=w\left(\frac{50}{7}\right)+(1-w)\,0,\\ x_3&=w\left(\frac{55}{7}\right)+(1-w)\,9{,}9,\\ x_6&=w\left(\frac{325}{7}\right)+(1-w)\,44{,}39,\\ x_8&=w\,(0)+(1-w)\,5{,}1, \end{aligned} \tag{13}$$

где w — **весовой коэффициент**, удовлетворяющий условию $0 < w < 1$ [1]).

[1]) Положим для примера $w = 0{,}5$ и вычислим с помощью (13) x_1, x_3, x_6 и x_8. Легко показать, что полученные значения этих переменных удовлетворяют исходным ограничениям и определяют оптимальное значение целевой функции, равное $^{695}/_{7}$.

Задачи линейного программирования большой размерности нередко имеют более двух альтернативных оптимальных базисных решений. Это обусловлено отсутствием двух или более небазисных переменных в строке 0 на этапе заключительной итерации. Существуют подробно разработанные методы определения *всех* оптимальных базисных решений. Любое положительно-взвешенное среднее альтернативных базисных решений также является решением. Отметим, что при этом *набор* переменных *не составляет* базиса. Данный набор содержит переменные в количестве, превышающем число ограничений, и, следовательно, одного перечисления переменных, вошедших в упомянутый набор, не достаточно для однозначного определения их численных значений.

Заключение. Можно с полным основанием утверждать, что оптимальное решение даже для такой простой задачи, как только что рассмотренная, не было вначале очевидным. В случае моделей большей размерности необходимость в системном подходе к получению оптимальных решений не требует аргументации. Обсудим теперь симплексный алгоритм с точки зрения тех четырех характеристик, которые изложены в разд. 4.3.

4.5. ПОЛНОТА АЛГОРИТМА

При некоторых итерациях вычислительные процедуры, предписанные симплекс-критериями I и II, в части, касающейся перехода от одного базиса к другому, могут оказаться неоднозначно определенными. Например, когда в результате оценки коэффициентов в строке 0 две или более двух переменных являются по критерию I в равной степени «перспективными» с точки зрения улучшения пробного решения, выбор одной из этих переменных осуществляется произвольным образом. Например, можно взять переменную с наименьшим значением индекса или переменную, которая по некоторым предварительным соображениям должна войти в базис на последней итерации.

Если, согласно критерию II, две или более двух переменных промежуточного базиса должны одновременно принять нулевые значения в силу включения в очередной базис новой переменной, из старого базиса исключению подлежит только одна из них. Другие из упомянутых переменных остаются в базисе, принимая при этом нулевые значения. Базис, получаемый в результате такой замены, называется **вырожденным.** Как показано в разд. 4.7, полное устранение неоднозначности в вычислительных процедурах сопряжено с большими трудностями теоретического характера. Пока специально не оговорены правила выбора переменных, подлежащих исключению из базиса, сходимость симплекс-алгоритма не может быть строго *доказана.* Однако многочисленные случаи применения симплексного метода приводят к заключению, что при решении любой *практиче-*

ской задачи правила выбора в случае неоднозначности можно не уточнять — вероятность того, что сходимость не будет обеспечена, оказывается совершенно незначительной.

Если на этапе применения критерия II при выполнении какой-либо итерации обнаруживается, что ни в одну из строк переменная, включенная в очередной базис, не входит с положительным коэффициентом, то оптимальное решение является неограниченным. В этом случае значение новой базисной переменной можно (без нарушения условия неотрицательности остальных переменных) выбирать сколь угодно большим, что приводит к неограниченному возрастанию значения целевой функции. Таким образом, сделанное ранее предположение относительно ограниченности оптимального значения целевой функции можно теперь отбросить. Симплексный алгоритм сам позволяет определять те случаи, когда оптимальное решение оказывается неограниченным. Чтобы учесть данное обстоятельство, формулировку критерия II следует надлежащим образом видоизменить.

Исходный базис. Вернемся к вопросу о выборе исходного базиса, позволяющем начать вычислительную процедуру в соответствии с симплексным алгоритмом. Поскольку в модели, рассмотренной в предыдущем разделе, каждое из ограничений имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad \text{где } b_i \geqslant 0, \tag{1}$$

введение в рассмотрение свободных переменных (по одной свободной переменной в каждом соотношении, задающем соответствующее ограничение) и включение только этих переменных в исходный базис позволяет просто выполнить шаг 1 (т. е. построение первого пробного решения). Как было показано в гл. 2, соотношением (1) не охватываются все возможные типы ограничений, встречающихся в линейных оптимизационных моделях. Однако анализ, проведенный в гл. 3, дает основание утверждать, что в задачах линейного программирования ограничения любого вида можно записать в форме

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad b_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Если при этом некоторая переменная входит только в i-е соотношение, причем с коэффициентом, равным единице (как это имеет место для каждой из свободных переменных), то ее можно включить в исходный базис. Однако в i-м соотношении такой переменной может не оказаться [1]. Тогда можно применить следующий прием.

---

[1]) Такая ситуация может, в частности, возникнуть в том случае, когда i-е уравнение линейно зависит от одного или нескольких других уравнений. (Например, если i-е уравнение представляет собой сумму двух других уравнений.)

Запишем ограничения в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + 1y_i = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad b_i \geqslant 0, \tag{3}$$

где $y_i \geqslant 0$. Выберем y_i в качестве базисной переменной, соответствующей i-му соотношению [1]. Переменную y_i называют **искусственной**, так как она появилась вследствие математического трюка, цель которого заключается в том, чтобы построить исходное пробное решение. Является ли использованный прием законным? Ответ будет положительным, если выполняется условие A.

Условие A. Чтобы окончательное решение имело смысл, каждая искусственная переменная y_i на заключительной симплекс-итерации должна обращаться в нуль.

Если ограничения таковы, что задача не имеет допустимых решений, удовлетворить условию A окажется невозможным: на последней симплекс-итерации по крайней мере одна из переменных y_i войдет в базис с положительным значением, что означает несовместность условий задачи. Таким образом, предположение о существовании допустимого решения, сформулированное в разд. 4.4, оказывается излишним. Если задача не имеет ни одного допустимого решения, то это можно определить с помощью симплексного алгоритма.

Итак, можно утверждать, что предписания относительно реализации симплексного алгоритма удовлетворяют требованиям полноты и определенности. Их можно запрограммировать, и они действительно переведены на язык машинных программ.

Следует отметить, что большинство современных машинных программ, реализующих симплексный алгоритм, составлено таким образом, что нет необходимости представлять каждое из ограничений в форме (2). Другими словами, все содержащиеся в модели ограничения могут быть использованы в их первоначальной записи. Добавление свободных и (если это необходимо) искусственных переменных, а также выполнение условия A обеспечиваются автоматически программным путем. Для некоторых программ пользователем может даже быть задан конкретный набор переменных, предназначенный для формирования исходного базиса. Этот прием называют **сдвигом стартовой точки**; он служит для сокращения числа требуемых итераций. Существуют другие (аналогичного характера) приемы, позволяющие предварительно определить те переменные, которые вероятнее всего войдут в базис на заключительной итерации. Умелое применение различного рода вычислительных «трюков», ускоряющих процесс сходимости, является одним из проявлений *искусства* практического использования симплексного алгоритма.

---

[1]) Для простоты мы предположили, что свободные переменные нужно ввести во все ограничения.

Метод «больших штрафов». Выполнение условия A можно обеспечить различными вычислительными приемами. Несмотря на то что эти приемы для специалистов в области исследования операций, вообще говоря, представляют определенный интерес, мы не будем углубляться в их изучение и ограничимся изложением одного простого и весьма грубого подхода.

Добавим к подлежащей максимизации целевой функции сумму всех искусственных переменных y_i с общим коэффициентом, значение которого выберем достаточно большим:

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} M y_i = 0. \tag{4}$$

Коэффициент M имеет смысл *отрицательной удельной прибыли*. Начнем реализацию алгоритма с исключения из (4) всех переменных y_i. С помощью формулы (3) получим

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = -M \sum_{i=1}^{m} b_i, \tag{5}$$

или в более удобной записи

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + M \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) x_j = -M \sum_{i=1}^{m} b_i. \tag{6}$$

Если существует хотя бы одно допустимое решение, то сам метод оптимизации автоматически приводит к тому, что в итоге все переменные y_i обращаются в нуль. (Следует, кстати, отметить, что если на некоторой итерации одна из переменных y_i оказывается исключенной из базиса, то при последующих итерациях необходимость в использовании этой переменной отпадает, т. е. при всех дальнейших вычислениях данная переменная не принимается во внимание.)

Предлагаемый метод можно пояснить с помощью простого примера. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad -3x_1 - 2x_2 \tag{7}$$

при ограничениях

$$1x_1 + 1x_2 = 10, \tag{8}$$

$$1x_1 \geqslant 4, \tag{9}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{10}$$

После добавления в (9) свободной переменной x_3 с коэффициентом -1 данная модель может быть записана в виде

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \quad \text{(строка 0)},\\ 1x_1 + 1x_2 \qquad &= 10 \quad \text{(строка 1)},\\ 1x_1 \qquad - 1x_3 &= 4 \quad \text{(строка 2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Введем теперь искусственные переменные y_1 и y_2 и положим $M = 10$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 10y_1 + 10y_2 &= 0 \quad \text{(строка 0)},\\ 1x_1 + 1x_2 + \ 1y_1 \qquad\quad &= 10 \quad \text{(строка 1)},\\ 1x_1 - 1x_3 \qquad + \ 1y_2 &= 4 \quad \text{(строка 2)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Приступая к вычислениям в соответствии с симплексным алгоритмом, прежде всего исключим из (12) y_1 и y_2 путем вычитания строк 1 и 2, умноженных на 10 ($M = 10$), из строки 0:

$$\begin{aligned} x_0 - 17x_1 - 8x_2 + 10x_3 \qquad\qquad &= -140 \quad \text{(строка 0)},\\ 1x_1 + 1x_2 \qquad + 1y_1 \qquad &= 10 \quad \text{(строка 1)},\\ 1x_1 \qquad - \ 1x_3 \qquad + 1y_2 &= 4 \quad \text{(строка 2)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Нахождение оптимального решения для рассматриваемой модели предлагается читателю.

4.6. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ

Многие задачи линейного программирования сводятся к минимизации некоторой линейной функции. Как установлено в разд. 3.2, задача минимизации переходит в задачу максимизации, если изменить знаки при всех коэффициентах в выражении для целевой функции. По отношению к полученной таким образом линейной форме критерий I (максимизация) по-прежнему оказывается применимым. Однако для целей дальнейшего рассмотрения представляется целесообразным сформулировать критерий I и на тот случай, когда решается задача минимизации при сохранении целевой функции в ее первоначальном виде.

Симплекс-критерий I (минимизация). Если в строке 0 имеются небазисные переменные, коэффициенты при которых положительны, то следует выбрать переменную (обозначим ее через x_j) с наибольшим положительным коэффициентом. В случае когда все небазисные переменные строки 0 имеют отрицательные или нулевые коэффициенты, оптимальное решение можно считать полученным.

Данную процедуру можно пояснить с помощью примера. Рассмотрим следующую тривиальную задачу линейного программирования:

$$\text{минимизировать} \quad -2x_1 + 3x_2 \tag{1}$$

при условиях

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 6, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 10. \tag{2}$$

Можно приступить к решению этой задачи, изменив вначале как знаки в выражении (1), так и «смысл» оптимизации, т. е. написав вместо (1):

$$\text{максимизировать} \quad 2x_1 - 3x_2. \tag{3}$$

При таком переходе оптимальные значения x_1 и x_2 не меняются. Тогда, действуя в соответствии с симплексным алгоритмом, изложенным в предыдущем разделе, мы начали бы итерационный процесс с рассмотрения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} x_0 - 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad &= 0 \quad (\text{строка } 0),\\ 1x_1 \qquad + 1x_3 \qquad &= 6 \quad (\text{строка } 1),\\ 1x_2 \qquad + 1x_4 &= 10 \quad (\text{строка } 2). \end{aligned} \tag{4}$$

При этом, согласно критерию I (максимизация), в базис вошла бы переменная x_1.

Однако, вместо того чтобы действовать по только что предложенной схеме, можно исходить непосредственно из (1) и после введения в рассмотрение переменной x_0 записать исходную систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} x_0 + 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad &= 0 \quad (\text{строка } 0),\\ 1x_1 \qquad + 1x_3 \qquad &= 6 \quad (\text{строка } 1),\\ 1x_2 \qquad + 1x_4 &= 10 \quad (\text{строка } 2). \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае был бы применим критерий I (минимизация) и на самой первой итерации переменная x_1 была бы выбрана в качестве базисной, так как в строке 0 коэффициент при x_1 равен $+2$.

При решении задачи минимизации никаких изменений в формулировке критерия II не требуется, поскольку целевое назначение последнего заключается лишь в том, чтобы обеспечить допустимость каждого базисного решения.

Об одном свойстве оптимальных решений. Подводя итог проведенного выше анализа симплексного метода, можно сделать следующие выводы:

1) симплексный алгоритм применим *ко всем* линейным оптимизационным моделям;

2) ответ, полученный в результате заключительной итерации, является точным решением задачи.

Мы *пока* не установили, может ли симплексный метод привести к решению любой задачи линейного программирования за конечное число итераций. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе. Однако если предположить, что сходимость имеет место, то оказывается справедливой следующая важная теорема.

Теорема о базисе. Если задача линейного программирования имеет конечное (ограниченное) оптимальное решение, то для нее существует базисное оптимальное решение.

Следует напомнить, что для линейной модели с m ограничениями базис представляет собой набор m переменных с *однозначно* определенными значениями, удовлетворяющими имеющимся ограничениям. При этом значения всех остальных переменных принимаются равными нулю.

Чтобы убедиться в том, что данная теорема действительно играет исключительно важную роль, рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что требуется найти решение задачи линейного программирования с 50 линейно независимыми ограничениями и 300 неизвестными. Если сформулированная выше теорема справедлива, то можно утверждать, что в данном случае существует оптимальное решение, содержащее не более чем 50 переменных (с положительными значениями). Введение в рассмотрение других переменных может улучшить оптимальное значение целевой функции, однако число переменных, требуемых для получения оптимального решения, не должно при этом превышать 50. Обратим внимание на то, что увеличение числа линейно независимых ограничений в той или иной модели приводит к расширению базиса. Следовательно, количество переменных, входящих в оптимальное решение, тем больше, чем больше ограничений содержит модель.

Откуда следует, что теорема о базисе справедлива? Доказательство данной теоремы представляется излишним по той простой причине, что симплексный метод дает рецепт *фактического построения* оптимального базисного решения.

Историческая справка. Формулируя теорему о базисе, мы исходили из самого факта справедливости симплексного метода. В работах по линейному программированию, относящихся к более раннему периоду, можно встретить доказательство данной теоремы, не опирающееся на практический метод построения оптимального решения (так называемая теорема о существовании). При этом наблюдалось обратное явление: теорема о базисе использовалась как средство обоснования симплексного метода, который трактовался как последовательный поиск в пределах множества наборов базисных переменных.

4.7. СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ

Доказательство сходимости обычно является наиболее трудной самостоятельной задачей, которая возникает при разработке любого алгоритма. Постараемся понять, чем это объясняется.

Мы убедились, что в процессе реализации симплекс-критериев I и II каждое последующее пробное решение оказывается допустимым, причем значение целевой функции при переходе от одного пробного решения к другому не ухудшается. Временно предположим, что на каждой итерации значение максимизируемой целевой функции строго возрастает. Одного этого предположения для доказательства сходимости ряда пробных значений к оптимальному за конечное число итераций недостаточно. Возрастание значения целевой функции при увеличении номера итерации может становиться все менее и менее значительным (см. случай 2 на рис. 4.1), и, что еще хуже, значение целевой функции может стремиться к пределу, лежащему ниже ее оптимального значения (см. случай 3 на рис. 4.1).

Однако мы можем опираться на другие (известные нам) характеристики рассматриваемого алгоритма. Как было показано, симплексный метод заключается в переходе от одного *базисного* решения к другому. Поскольку значения переменных для каждого пробного базиса определены однозначно, предположение относительно обязательного улучшения значения целевой функции при переходе от одного пробного варианта к другому исключает повторы в выборе пробных базисов. Число же базисных наборов ограничено и для n-мерной задачи с m ограничениями не может превышать число сочетаний из n по m, т. е. $\binom{n}{m} = n!/[m!\,(n-m)!]$. Следовательно, число итераций конечно, и решение, полученное на заключительной итерации, является оптимальным.

Можно ли считать доказанным, что сходимость всегда имеет место? К сожалению, нельзя. В предыдущем разделе наши рассуждения основывались на предположении, что при каждой очередной итерации значение целевой функции возрастает. Однако для многих линейных оптимизационных моделей увеличение значения целевой функции на некоторых итерациях *приостанавливается*. Это происходит следующим образом.

На одной из итераций при проверке по критерию II может обнаружиться, что среди всех отношений правых частей уравнений, задающих ограничения, к коэффициентам при новой базисной переменной наименьшее отношение равно нулю. (Такая ситуация может возникнуть в том случае, когда в результате включения в базис новой переменной на предыдущей итерации две или более двух переменных, входивших ранее в базис, обращаются в нуль. Таким образом, при рассматриваемой итерации значение по крайней мере одной *базисной* переменной оказывается равным нулю, т. е. базисное решение является вырожденным.) Отсюда следует, что новая базисная переменная принимает нулевое значение, а значения остальных переменных, так же как и значение целевой функции, не меняются. Реализация шага 4 в процессе замены базиса с необходимостью приводит к изменению коэффициентов в строке 0. Поэтому на этапе использования критерия II на следующей итерации наименьшее из всех отношений указанного выше типа оказывается строго положительным. Однако вполне возможна новая задержка в возрастании значения целевой функции. Такие ситуации могут возникать неоднократно, причем не исключено, что на каком-то этапе мы придем к одному из предыдущих базисных решений. В этом случае вычислительный процесс оказывается «зацикленным» и сходимость отсутствует.

Таким образом, сходимость за конечное число итераций была бы доказанной, если бы строго положительное приращение значения целевой функции было обеспечено при всех итерациях без исключения. Чтобы успокоить читателя, сразу же заверим его в том, что проблема сходимости разрешима. Если воспользоваться несколько более сложным (по сравнению с применяемым здесь) математическим аппаратом, то можно показать, что симплексный метод при надлежащем обращении с ним оказывается в состоянии обеспечить строгое возрастание значения целевой функции. Чтобы доказать наличие сходимости, необходимо несколько пересмотреть критерий II, с тем чтобы устранить неоднозначность процедуры исключения переменной из базиса в случае, когда оказываются допустимыми различные варианты выбора. Кроме того, следует надлежащим образом уточнить, что понимать под «строгим возрастанием значения целевой функции».

Вырожденность базиса практически не влияет на число итераций, требуемое для нахождения решения задачи линейного программирования. Опыт показывает, что при решении большинства практических задач число итераций, необходимое для получения окончательного результата, лежит в пределах от $1{,}5m$ до $3m$, где m — число ограничений (Данная оценка справедлива лишь в том случае, если исходный базис содержит только свободные или искусственные переменные.)

Как было показано на примере, приведенном в разд. 4.4, одна из переменных (в упомянутой задаче x_4) вначале была включена в базис, а затем из него выпала. Именно этим объясняется тот факт, что число итераций превышает число соотношений, задающих ограничения. Для развития интуитивного представления о том, что может произойти в процессе выполнения симплекс-итераций, полезно рассмотреть следующий пример:

$$\text{максимизировать} \quad 1y \tag{I}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z + 1u &= -2, \\ 3x \phantom{{}-6y} - 8z + 1v &= 6, \\ 15x - 6y - 12z + 1w &= 222, \\ 1x \phantom{{}-6y} + 4z + 1t &= 12, \end{aligned} \tag{II}$$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

На рис. 4.8 показана последовательность пробных решений. Заметим, что при переходе от первоначального решения к следующему переменная t заменяется на z, а при переходе от четвертого пробного решения к пятому в последнем вместо z появляется t. Наконец, при переходе от шестого пробного решения к седьмому t снова заменяется на z. Переменная z в исходном варианте в базис не входит. Затем она становится базисной. После этого ее снова

Пробное решение (порядковый номер)	Значения переменных						
	x	y	z	u	v	w	t
Начальное		1			6	216	12
2		7	3		30	216	
3	6	13	1,5			72	
4	6	25	1,5	24			
5	2	32		56			10
6		37		72	6		12
7		43	3	72	30		

Примечание: Целевая функция $=1y$.

Рис. 4.8. Пример медленной сходимости.

исключают из базиса. И наконец, переменная z опять оказывается в числе базисных. Переменная t вначале является базисной, потом выпадает из базиса, на следующей итерации вновь становится базисной, а затем выпадает из базиса окончательно. Обратим внимание также на то, что переменная x в третьем пробном решении заменяет v, а в шестом пробном варианте вместо x снова фигурирует v. В итоге после семи симплекс-итераций процесс сходимости завершается. (Следует отметить, что в данном случае значение целевой функции улучшается на каждой итерации.)

Пытаясь доказать сходимость симплекс-процедуры за конечное число итераций, мы констатировали лишь принципиальную возможность зацикливания. Пока не было дано ни одного примера, когда зацикливание в случае неоднозначности выбора новых базисных переменных, обусловленной вырожденностью базиса, действительно имеет место. Ниже приводится пример, иллюстрирующий именно такую ситуацию. (Ее удалось «сфабриковать» чисто искусственным путем.)

В этом примере используется следующее произвольным образом установленное правило выбора для критерия II. Если из базиса подлежат исключению сразу две переменные, то предпочтение отдается переменной с меньшим значением индекса. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{максимизировать } \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \qquad \text{(III)}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 &&= 0, \\ &\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \qquad + x_6 &&= 0, \qquad \text{(IV)} \\ &\qquad\qquad 1x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 &&= 1, \\ &x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 7). \end{aligned}$$

Последовательность пробных решений для данной модели показана на рис. 4.9. Критерий I при каждой из итераций интерпретируется

Пробное решение	Коэффициенты при переменных в строке 0							Базисные переменные, принимающие значения			Значение целевой функции
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	0	0	0	
Начальное	—3/4	150	—1/50	6	0	0	0	x_5	x_6	x_7	0
2	0	—30	—7/50	33	3	0	0	x_1	x_6	x_7	0
3	0	0	—2/25	18	1	1	0	x_1	x_2	x_7	0
4	1/4	0	0	—3	—2	3	0	x_3	x_2	x_7	0
5	—1/2	120	0	0	—1	1	0	x_3	x_4	x_7	0
6	—7/4	330	1/50	0	0	—2	0	x_5	x_4	x_7	0
7	—3/4	150	—1/50	6	0	0	0	x_5	x_6	x_7	0

Примечание: Оптимальным является решение $x_1 = {}^1/_{25}$, $x_3 = 1$, $x_5 = {}^3/_{100}$; при этом целевая функция принимает значение ${}^1/_{20}$.

Рис. 4.9. Пример зацикливания.

совершенно однозначно. Таким образом, переменная x_1 входит в исходный базис. Из-за наличия вырождения при первой итерации из базиса можно исключить либо x_5, либо x_6. В соответствии с только что предложенной уточненной формулировкой критерия II выбор падает на x_5. Заметим, что седьмое пробное решение тождественно первоначальному, и, следовательно, имеет место зацикливание. Обратим также внимание на то, что значение целевой функции после каждой итерации остается равным нулю, тогда как ее оптимальное значение составляет 0,05. Зацикливание можно устранить, если математически более строго определить правило выбора новой базисной переменной в тех случаях, когда имеет место неопределенность указанного выше типа.

4.8. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕДУРАМ

Для большинства практических задач модели линейного программирования содержат несколько десятков, а нередко несколько сотен ограничений. Следовательно, вопрос о трудоемкости вычислительных симплекс-процедур следует обсуждать с ориентацией на использование быстродействующих электронно-вычислительных машин. В предыдущих разделах дано описание основных этапов реализации рассматриваемого алгоритма. Любая машинная программа, составленная для симплексного метода, включает в том или ином виде все указанные выше этапы вычислительного процесса. Однако в рамках основных предписаний симплексного алгоритма структуры машинных программ могут варьироваться. Специфика вычислительных программ, определяемая различными нюансами их построения, может оказать решающее влияние на количество итераций, которые необходимо выполнить, чтобы обеспечить полную сходимость.

Некоторые вычислительные программы для ЭВМ построены по принципу, которым пользуются шахматисты: такого рода программы предусматривают перебор различных вариантов на несколько итераций вперед и выбирают наиболее выгодную стратегию для ряда (ближайших) операций перехода от одного базиса к другому. Такой способ программирования увеличивает объем вычислений на каждом шаге, но сокращает суммарное количество итераций, необходимое для нахождения окончательного решения. Другие программы строятся таким образом, чтобы при каждой итерации поиск в соответствии с критерием I ограничивался лишь некоторым подмножеством переменных. Когда возможности улучшения решения в пределах некоторого подмножества исчерпываются, осуществляется переход к рассмотрению другого подмножества. Вычислительный процесс заканчивается, когда оптимизационные возможности всех подмножеств оказываются полностью исчерпанными. Такой метод построения программ сокращает объем вычислений на каждой итерации, но может увеличить число итераций, обеспечивающих сходимость к предельному значению.

Таким образом, суммарное число вычислительных операций, необходимое для решения какой-либо конкретной задачи симплексным методом, как правило, в сильной степени зависит от используемых программ для ЭВМ. При решении практических задач число арифметических операций обычно достигает порядка нескольких миллионов. Как показывает опыт, трудоемкость вычислений возрастает в грубом приближении пропорционально кубу числа ограничений. Таким образом, для решения задачи, содержащей 200 уравнений, вероятнее всего, потребуется в 8 раз больше вычислений по сравнению с моделью, число уравнений в которой равняется 100.

Следует иметь в виду, что благодаря успехам в области электронно-вычислительной техники, а также в области программного обеспечения методов оптимизации, основанных на использовании линейных моделей, в настоящее время оказывается вполне возможным решение задач, содержащих несколько сотен ограничений. Новейшие научно-технические достижения еще более расширяют область применимости линейного программирования, позволяя рассматривать модели, число ограничений в которых превышает 1000.

Тем, кому приходилось искать ручным способом решения для систем, содержащих относительно небольшое число линейных уравнений (скажем, для систем, состоящих из пяти уравнений с пятью неизвестными), хорошо известно, что вычислительные погрешности, возникающие в процессе округления тех или иных чисел, могут накапливаться весьма быстро. Действительно, если при вычислениях сохранять только две или три значащие цифры, окончательный ответ может оказаться «слишком неточным» и поэтому не пригодным для использования. В случае же, когда число уравнений в системе велико (а именно с такой ситуацией мы сталкиваемся при практическом применении методов линейного программирования), опасность «потери точности» оказывается особенно серьезной. С учетом этих обстоятельств во многие машинные программы, предназначенные для реализации симплексного метода, вводят специальные процедуры контроля за погрешностями, появляющимися вследствие округления. Однако даже в этом случае требуемая точность не всегда обеспечивается. Поэтому при нахождении решения для той или иной линейной оптимизационной модели следует принимать надлежащие меры предосторожности. При этом рекомендуется проверять окончательный результат путем подстановки полученных численных значений в исходные уравнения, задающие ограничения.

Поскольку машинные коды могут вмещать лишь ограниченное количество значащих цифр, некоторые погрешности, появляющиеся в процессе вычислений за счет округления, неизбежны. Следовательно, при выполнении проверок в соответствии с критериями I и II на такого рода вычислительные погрешности необходимо делать поправки. Так, например, машинный код может остановить вычислительный процесс, как только все коэффициенты в строке 0 будут определены с точностью до 0,00001.

4.9. ТАБЛИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

При переходе от одного пробного решения к следующему мы каждый раз выписывали все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, фигурирующие в рассматриваемой модели. Однако это, с одной стороны, громоздко, а с другой — не вызвано никакой необходимостью, поскольку в процессе вычисления используются лишь *коэффициенты* при независимых переменных. Теперь, когда понятна простая логика симплексного алгоритма, объем сопутствующих записей можно существенно сократить, если весь вычислительный процесс представить в виде удобной таблицы, известной под названием **симплекс-таблицы.**

Таблицы на рис. 4.10 и 4.11 представляют собой описание двух различных подходов к решению задачи, которая в качестве примера приведена в разд. 4.4. В таблице, приведенной на рис. 4.10, столбцы, соответствующие базисным переменным, имеют настолько тривиальный смысл, что их без ущерба для однозначности понимания можно из упомянутой таблицы исключить. В результате получаем редуцированный вариант табличной записи, приведенный на рис. 4.11. В этом случае после каждой итерации необходимо вводить одну дополнительную строку, предназначенную для нового набора *небазисных* переменных.

Итерация	Базис	Пробные значения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Строка
1	x_0	0	—4	—5	—9	—11				0
	x_5	15	1	1	1	1	1			1
	x_6	120	7	5	3	2		1		2
	x_7	100	3	5	10	$\boxed{15}$			1	3
2	x_0	220/3	—9/5	—4/3	—5/3				11/15	0
	x_5	25/3	$\boxed{4/5}$	2/3	1/3		1		—1/15	1
	x_6	320/3	33/5	13/3	5/3			1	—2/15	2
	x_4	20/3	1/5	1/3	2/3	1			1/15	3
3	x_0	1105/12		1/6	—11/12		9/4		7/12	0
	x_1	125/12	1	5/6	5/12		5/4		—1/12	1
	x_6	455/12		—7/6	—13/12		—33/4	1	5/12	2
	x_4	55/12		1/6	$\boxed{7/12}$	1	—1/4		1/12	3
4	x_0	695/7		3/7		11/7	13/7		5/7	0
	x_1	50/7	1	5/7		—5/7	10/7		—1/7	1
	x_6	325/7		—6/7		13/7	—61/7	1	4/7	2
	x_3	55/7		2/7	1	12/7	—3/7		1/7	3

Рис. 4.10. Симплекс-таблица для задачи распределения ресурсов.

Итерация	Базис	Пробное решение	x_1	x_2	x_3	x_4	Строка
1	x_0	0	—4	—5	—9	—11	0
	x_5	15	1	1	1	1	1
	x_6	120	7	5	3	2	2
	x_7	100	3	5	10	$\boxed{15}$	3
			x_1	x_2	x_3	x_7	
2	x_0	220/3	—9/5	—4/3	—5/3	—11/15	0
	x_5	25/3	$\boxed{4/5}$	2/3	1/3	—1/15	1
	x_6	320/3	33/5	13/3	5/3	—2/15	2
	x_7	20/3	1/5	1/3	2/3	1/15	3
			x_5	x_2	x_3	x_7	
3	x_0	1105/12	9/4	1/6	—11/12	7/12	0
	x_1	125/12	5/4	5/6	5/12	—1/12	1
	x_6	455/12	—33/4	—7/6	—13/12	5/12	2
	x_4	55/12	1/4	1/6	$\boxed{7/12}$	1/12	3
			x_5	x_2	x_4	x_7	
4	x_0	695/7	13/7	3/7	11/7	5/7	0
	x_1	50/7	10/7	5/7	—5/7	—1/7	1
	x_6	325/7	—61/7	—6/7	13/7	4/7	2
	x_3	55/7	—3/7	2/7	12/7	1/7	3

Рис. 4.11. Редуцированная симплекс-таблица для задачи распределения ресурсов.

4.10. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В данной главе, так же как и в следующей, при изложении симплексного метода и различных его модификаций каждое из уравнений модели записывается в явном виде. Если воспользоваться матричными обозначениями, то математическая формулировка метода примет более компактный вид.

Матричная запись линейной модели выглядит следующим образом:

$$\text{максимизировать} \quad cx \tag{1}$$

при ограничениях

$$Ax \leqslant b, \tag{2}$$

$$x \geqslant 0. \tag{3}$$

В принятых обозначениях соответствующую симплекс-таблицу [1]) на этапе первой итерации можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 & \ldots & -c_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b & A_1 & A_2 & \ldots & A_n & U_1 & U_2 & \ldots & U_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $\left[{}^{0}_{U_i}\right]$ — столбец с единицей на пересечении с i-й строкой и с нулями на пересечении со всеми остальными строками. (Строке 0 в матрице (4) принято отводить самую верхнюю позицию.) В еще более компактном виде вместо (4) будем иметь

$$\begin{bmatrix} 0_{11} & -c & 0_{1m} \\ b & A & I_m \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где 0_{pq} — матрица с p строками и q столбцами, состоящая целиком из нулей, а I_m — m-мерная единичная матрица.

Выделим в (5) m столбцов, соответствующих пробному базису на этапе некоторой заданной итерации. Обозначим полученную таким образом матрицу через $\left[{}^{-c_B}_{B}\right]$. При этом первый столбец соответствует базисной переменной, фигурирующей в строке 1, второй столбец соответствует базисной переменной, фигурирующей в строке 2, и т. д. Тогда для данной итерации симплекс-таблица принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} c_B B^{-1} b & c_B B^{-1} A - c & c_B B^{-1} \\ B^{-1} b & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что матрица (6) получена из матрицы (5) путем умножения последней слева на

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0_{m1} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0_{m1} & B \end{bmatrix}^{-1}. \tag{7}$$

Симплекс-критерий I (максимизация) сводится к нахождению наибольшего по модулю отрицательного матричного элемента в $[c_B B^{-1} A - c_B B^{-1}]$, т. е. в строке 0 матрицы (6). Предположим,

[1]) Аналогичную таблице, приведенной на рис. 4.10.

что наибольший по модулю отрицательный матричный элемент в $[c_B B^{-1}A - c \quad c_B B^{-1}]$ соответствует x_j. Тогда, согласно критерию II, мы обращаемся в (6) к коэффициентам при x_j:

$$\begin{bmatrix} c_B B^{-1}A_j - c_j \\ B^{-1}A_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0j} \\ r_{1j} \\ \vdots \\ r_{mj} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Следует заметить, что если x_j представляет собой i-ю свободную переменную, то в (8) $c_j = 0$ и $A_j = U_i$. Допустим, что выбор по критерию II падает на строку k. Последующая вычислительная процедура, связанная с заменой базиса, сводится к умножению матрицы (6) слева на

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -r_{0j}/r_{kj} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -r_{1j}/r_{kj} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1/r_{kj} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & r_{mj}/r_{kj} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где отношения $-r_{mj}/r_{kj}$ фигурируют в $(k+1)$-м столбце матрицы E. Умножение (6) на (9) часто называют операцией **элементарного преобразования.**

Заметим, что значения $c_B B^{-1}$ для пробного базиса являются оптимальными, когда

$$c_B B^{-1}A - c \geqslant 0, \quad c_B B^{-1} \geqslant 0. \tag{10}$$

Соответствующее значение целевой функции при этом равняется

$$c_B B^{-1} b. \tag{11}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Решите приведенную в разд. 4.2 систему уравнений (2) и (3) относительно x_1 и x_3. Результат проверьте с помощью (14) и (15).

б) Подставьте в формулу для целевой функции полученные в п. а) выражения для x_1 и x_3. Результат сравните с выражением (15), приведенным в разд. 4.2.

В упражнениях 2—4 за основу берется модель, рассмотренная в разд. 4.4, с несколько измененными данными.

2. Какую из переменных следует включить в базис на первой симплекс-итерации, если подлежащая максимизации целевая функция имеет вид

а) $14x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$? в) $4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 11x_4$?

б) $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4$? г) $-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$?

3. Пусть на первой итерации в базис вошла переменная x_4. Какая переменная подлежит при этом исключению из базиса и каким будет новое значение x_4, если:

а) в правой части уравнения, соответствующего строке 2, стоит число 20? 12?

б) в правой части уравнения, соответствующего строке 3, стоит число 300? 75?

в) коэффициент при x_4 в строке 3 равен 20? 24? —15?

г) коэффициент при x_4 в строке 2 равен 24?

д) в правых частях уравнений в строках 1, 2 и 3 стоят соответственно числа 40, 60 и 20, а коэффициенты при x_4 в указанных строках равны соответственно —5, 10 и 2?

4. Пусть на первой итерации в базис вошла переменная x_4. Какими будут новые значения базисных переменных, если:

а) вместо x_7 из базиса исключить x_5?

б) вместо x_7 из базиса исключить x_6?

Являются ли значения, полученные в п. а) и б), допустимыми? Дайте соответствующие пояснения.

В упражнениях 5—14 за основу берется модель, рассмотренная в разд. 4.4. Данная модель варьируется путем изменения различных количественных характеристик. В каждом случае требуется найти оптимальное решение и соответствующее значение целевой функции. Каждую задачу прежде всего нужно тщательно продумать, поскольку может оказаться, что для получения решения вовсе не обязательно воспроизводить весь вычислительный процесс, изложенный в разд. 4.4.

5. Найдите оптимальное решение, если подлежащая максимизации целевая функция имеет вид

а) $4x_1 + \frac{33}{7}x_2 + 9x_3 + 10x_4$;

б) $5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$;

в) $5x_1 + \frac{33}{7}x_2 + 9x_3 + 10x_4$.

6. Найдите оптимальное решение, если:

а) в правой части уравнения в строке 2 стоит число 140;

б) в правой части уравнения в строке 2 стоит число 60;

в) в правой части уравнения в строке 1 стоит число 12;

г) в правой части уравнения в строке 1 стоит число 10;

д) в правой части уравнения в строке 1 стоит число 20.

7. Найдите оптимальное решение, предположив, что подлежащая максимизации целевая функция имеет вид $5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$, а в правой части уравнения в строке 1 стоит число 20.

8. Найдите оптимальное решение, если первое ограничение (до введения в рассмотрение свободной переменной) имеет вид $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leqslant 30$.

9. Найдите оптимальное решение, если:

а) коэффициент при x_2 в строке 3 равен 10;

б) коэффициент при x_4 в строке 3 равен 20;

в) коэффициент при x_2 в строке 2 равен 4;

г) коэффициент при x_4 в строке 2 равен 1;

д) коэффициент при x_1 в строке 2 равен 10;

е) коэффициент при x_3 в строке 2 равен 6.

10. Найдите оптимальное решение, если в строках 0, 1, 2 и 3:

а) коэффициенты при x_1 равны соответственно 40, 10, 70 и 30;

б) коэффициенты при x_2 равны соответственно 20, 4, 20 и 20;

в) коэффициенты при x_3 равны соответственно 90, 10, 30 и 100.

11. Решите задачу в предположении, что имеет место дополнительное требование $x_4 = 4$.

12. а) Рассмотрим переменную x_8, заданную соотношением (10) в разд. 4.4. Вычислите коэффициенты при x_8 на каждой из симплекс-итераций [см. (2) — (7) в разд. 4.4].

б) Проверьте справедливость соотношения (12) из разд. 4.4, если переменная x_8 на четвертой итерации включена в базис.

в) Пусть в соотношении (13) $w = 0{,}5$. Требуется найти оптимальные значения для x_1, x_3, x_6 и x_8, а также убедиться, что эти значения удовлетворяют исходным ограничениям и дают для значения целевой функции число, равное ${}^{695}/_{7}$.

13. Рассмотрим переменную x_8, заданную соотношением (10) в разд. 4.4. Требуется выяснить, будет ли решение улучшено в результате включения на четвертой итерации переменной x_8 в базис, если:

а) коэффициент при x_8 в строке 2 положить равным 8 вместо 9;

б) коэффициент при x_8 в строке 2 положить равным 10 вместо 9;

в) коэффициент при x_8 в строке 3 положить равным 1 вместо 0,2;

г) коэффициент при x_8 в строке 3 положить равным 0,1 вместо 0,2.

14. Предположим, что модель, рассмотренная в разд. 4.4, «расширена» за счет новой переменной z. Пусть на четвертой итерации коэффициенты при z в каждом из уравнений системы (7) равны —1. Каким будет оптимальное решение? Требуется показать, что имеет место решение, для которого целевая функция принимает значение, равное 100.

15. Рассмотрите модель, представленную соотношениями (7) — (10) в разд. 4.5. В каждом из приведенных ниже пунктов требуется применить метод больших штрафов с $M = 10$ и найти исходную систему уравнений, аналогичную (13). Рассмотрите следующие

варианты:

а) ограничение для x_2 имеет вид $x_2 \geqslant 2$;

б) вместо (8) имеет место ограничение $5x_1 + 6x_2 = 56$;

в) вместо (8) имеет место ограничение $-5x_1 + 6x_2 = 16$.

16. Пусть для принятой системы ограничений пробный базис, построенный только из свободных переменных, определяет некоторое допустимое решение. Какая переменная вводится в базис на первой симплекс-итерации, если подлежащая минимизации целевая функция имеет вид:

а) $4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 11x_4$?

б) $-4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 11x_4$?

в) $-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$?

г) $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$?

д) Пусть ответ на поставленный вопрос для каждого из этих четырех пунктов получен. Требуется определить, какая свободная переменная в каждом из указанных случаев выпадает из базиса при условии, что входящие в модель ограничения задаются строками 1, 2 и 3 системы уравнений (1), приведенной в разд. 4.4.

17. Объясните смысл следующих терминов:

алгоритм;
исключение переменной методом Гаусса;
сходимость;
базис и базисное решение;
базисная переменная;
небазисная переменная;
замена базиса;
поиск опорного плана;
скрытые издержки;
скрытые цены;
положительно-взвешенное среднее;
весовой коэффициент;
вырожденное базисное решение;
искусственная переменная;
коэффициент отрицательной прибыли;
зацикливание;
симплекс-таблица;
элементарное преобразование.

УПРАЖНЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

18. С помощью симплексного метода

$$\text{максимизировать} \quad 5P_1 + 6P_2$$

при ограничениях

$$0{,}2P_1 + 0{,}3P_2 \leqslant 1{,}8,$$
$$0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 \leqslant 1{,}2,$$
$$0{,}3P_1 + 0{,}3P_2 \leqslant 2{,}4,$$
$$P_1 \geqslant 0, \quad P_2 \geqslant 0.$$

19. С помощью симплексного метода решите следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + \ \ 0{,}6x_4 &\leqslant 10, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 0{,}25x_4 &\leqslant 12, \\ 7x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 &\leqslant 35, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

(Условие: для нахождения оптимального решения должно быть выполнено не более трех итераций.)

20. а) Используя симплексный метод,

$$\text{максимизировать} \quad 30x_1 + 23x_2 + 29x_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leqslant 26, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leqslant 7, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}$$

(Условие: для нахождения оптимального решения должно быть выполнено не более трех итераций.)

б) Решите задачу, сформулированную в п. а), заменив число 26 в правой части первого неравенства на 31, а число 7 в правой части второго неравенства на 20. (Условие: оптимальное решение должно быть получено с использованием не более трех итераций.)

21. С помощью симплексного метода

$$\text{максимизировать} \quad 60x_1 + 26x_2 + 15x_3 + 4{,}75x_4$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 20x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 1x_4 &\leqslant 20, \\ 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 &\leqslant 10, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

(Условие: число итераций, приводящее к оптимальному решению, должно быть не больше пяти.) При всех ли итерациях значение целевой функции возрастает? Является ли оптимальное решение единственным?

22. *Альтернативные оптимальные решения.*

а) Решите симплексным методом следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad 1x_1 + 1x_2$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leqslant 3, \\ 1x_1 \qquad &\leqslant 2, \\ 1x_2 &\leqslant 2, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

б) Положите коэффициенты при x_1 равными 10 вместо 1 как в ограничениях, так и в выражении для целевой функции. Найдите решение для видоизмененной таким образом модели с помощью симплексного метода.

в) Положите коэффициенты при x_2 равными 10 вместо 1 как в ограничениях, так и в выражении для целевой функции. Найдите решение для видоизмененной таким образом модели с помощью симплексного метода.

г) Объясните, исходя из каких соображений в пп. а) — в) можно сделать вывод о существовании альтернативных оптимальных решений. Используя формулы, аналогичные (13) из разд. 4.4, приведите выражения для *всех* оптимальных решений.

23. *Неограниченное оптимальное решение.* Пусть заданы ограничения

$$x_1 - x_2 \leqslant 1,$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 1,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Используйте симплексный метод для решения следующих задач:

а) максимизировать x_1;

б) максимизировать x_2;

в) максимизировать $x_1 + x_2$;

г) для каждого из пп. а) — в) укажите допустимое решение, при котором значение целевой функции равняется 100.

24. Рассмотрите ограничения, которые были приведены в упражнении 10 в конце гл. 3:

$$-10x_1 - 15x_2 \geqslant -150,$$

$$5x_1 + 10x_2 \geqslant 50,$$

$$x_1 - \quad x_2 \geqslant 0,$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

(В отличие от упомянутого упражнения вместо неравенства $x_1 \geqslant 2$ здесь берется более слабое условие $x_1 \geqslant 0$.) Требуется определить исходный базис, используя метод больших штрафов при $M = 10$, а также найти симплексным методом оптимальное решение следующих задач:

а) максимизировать $x_1 + x_2$;
б) минимизировать $x_1 + x_2$;
в) максимизировать $x_1 + 3x_2$;
г) максимизировать $-2x_1 + x_2$;
д) максимизировать $-x_1 - 3x_2$;
е) максимизировать $-x_1 - 2x_2$.

Установите, в каких случаях оптимальное решение *единственно*, и найдите альтернативные оптимальные решения, когда единственность не имеет места. (Замечание: в первое ограничение искусственную переменную вводить *не* следует.)

25. Рассмотрите ограничения, которые были приведены в упражнении 6 в конце гл. 3:

$$\begin{aligned} -x_1 + \ x_2 &\leqslant 1, \\ 6x_1 + 4x_2 &\geqslant 24, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 2. \end{aligned}$$

Требуется найти исходный базис, используя метод больших штрафов при $M = 10$, а также получить симплексным методом оптимальное решение следующих задач:

а) минимизировать x_1;
б) минимизировать $x + x_2$;
в) максимизировать $x_1 + x_2$;
г) максимизировать $-x_1 + 2x_2$;
д) максимизировать $x_1 - 2x_2$;
е) максимизировать $-3x_1 - 2x_2$.

Установите, в каких случаях оптимальное решение *единственно*, и найдите альтернативные оптимальные решения, когда единственность не имеет места.

26. Решите задачу 25, положив $x_1 \leqslant 5$.

27. Решите задачу 25, положив $x_2 \leqslant 4$.

28. В разд. 3.4 рассмотрена простая задача, не имеющая допустимых решений:

$$\text{максимизировать} \quad x_1 + x_2$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqslant -1, \\ x_1 - x_2 &\leqslant -1, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Используйте для решения данной задачи метод больших штрафов и покажите, к чему это приводит. Убедитесь, что условие A, сформулированное в разд. 4.5, не может быть удовлетворено ни при каких значениях M.

29. Решите задачу:

$$\text{максимизировать} \quad x_1 - x_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + \ x_3 &= 40, \\ x_1 + \ x_2 + 4x_3 &= 10, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j &= 1,\ 2,\ 3). \end{aligned}$$

Используя метод больших штрафов, найдите оптимальное решение при условии, что приведенная выше модель дополнена ограничением вида

а) $6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 50$;

б) $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 50$.

ГЛАВА 5

Анализ моделей на чувствительность и двойственная задача

5.1. АНАЛИЗ МОДЕЛИ ПОСЛЕ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В гл. 4 обсуждались вопросы, связанные с *техникой* нахождения оптимального решения задачи линейного программирования. Изложенные в ней сведения должны позволить читателю уяснить суть алгоритмического метода и разобраться (хотя бы в первом приближении) в структурных особенностях линейных моделей.

Однако была поставлена и другая задача: изложить методы, с помощью которых можно было бы системным образом проанализировать и четко уяснить взаимосвязи между всеми факторами, учитываемыми при решении той или иной практической задачи линейного программирования. Этим вопросам и посвящена данная глава.

Опытный руководитель, использующий при решении задач организационного управления методы линейного программирования, редко довольствуется лишь численными значениями управляемых переменных, при которых достигается оптимум, если та или иная модель не применялась им многократно и, следовательно, диапазон ее возможностей заранее не известен. В большинстве же случаев руководитель хочет знать, в каком интервале можно менять входные параметры без существенного отклонения от найденного оптимума и без значительного нарушения структуры базиса, формирующего оптимальное решение. Исследование, позволяющее ответить на эти вопросы, носит название **анализ модели на чувствительность** (или **анализ модели при известном оптимальном решении**).

На многие вопросы, связанные с анализом на чувствительность, легко ответить, располагая численными данными на заключительной симплекс-итерации. К числу таких вопросов относятся, в частности, следующие:

Останется ли решение оптимальным, если уменьшится удельный вклад в прибыль одной из базисных переменных?

К каким последствиям приведет сокращение объема ресурсов?

Что произойдет, если ввести в рассмотрение новую управляемую переменную?

Нахождение ответов на целый ряд других вопросов, возникающих в связи с анализом модели на чувствительность, нередко сопряжено со значительными трудностями, для преодоления которых может понадобиться помощь ЭВМ. Но даже при использовании ЭВМ анализ модели на чувствительность в значительной степени опирается на информацию относительно уже найденного оптимального решения и затрудняется всякий раз, когда рассматриваемая модель модифицируется.

В последующих разделах излагаются наиболее важные положения и принципы, которые лежат в основе анализа на чувствительность моделей линейного программирования. Предлагаемые здесь методы применимы к задачам

$$\text{максимизации } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\ldots, n). \tag{3}$$

Приемы, используемые при анализе модели на чувствительность, по своей сути весьма просты, хотя и отличаются некоторой громоздкостью. Чтобы не смущать читателя слишком длинными формулами, попытаемся разобраться в существе вопроса на примере, рассмотренном в разд. 4.4, т. е. для задачи распределения ресурсов [1]). Запишем для этой задачи исходную и «заключительную» системы уравнений, обозначив их соответственно через (I) и (F):

$$\begin{array}{lllllllll}
1x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 & & & & = 0 & \text{(строка 0)}, \\
\quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 & & & & = 15 & \text{(строка 1)}, \\
\quad 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & + 1x_6 & & & = 120 & \text{(строка 2)}, \\
\quad 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & & + 1x_7 & & = 100 & \text{(строка 3)}
\end{array} \tag{I}$$

и

$$\begin{array}{lllll}
1x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} & \text{(строка 0)}, \\
1x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7} & \text{(строка 1)}, \\
-\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + 1x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7} & \text{(строка 2)}, \\
\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} & \text{(строка 3)},
\end{array} \tag{F}$$

где x_0 подлежит максимизации.

Мы рекомендуем читателю записать системы уравнений (I) и (F) на отдельном листе бумаги и иметь их под рукой в процессе чтения следующего раздела.

---

[1]) См. также разд. 2.2.— *Прим. перев.*

5.2. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ

Прежде всего попытаемся выяснить, останется ли уже найденный допустимый оптимальный базис оптимальным, если изменить коэффициенты в выражении для целевой функции. При изменении этих коэффициентов полученное решение по-прежнему является допустимым. Следовательно, предположив, что данное решение можно «подправить», остается лишь продолжить предписанную симплексным методом вычислительную процедуру, начиная с заключительной итерации, уже выполненной в разд. 4.4.

Рассмотрим коэффициенты при небазисных переменных x_2 и x_4 в строке 0 системы уравнений (I). Интуиция подсказывает, что если уменьшить их «удельную прибыльность», рассматриваемый пробный базис останется оптимальным. Однако, если «прибыльность» x_2 и x_4 получит достаточно большое положительное приращение, решение можно будет подправить. При каком значении коэффициента при x_2 рассматриваемое решение становится неоптимальным?

Предположим, что коэффициент при x_2 получает неотрицательное приращение δ, т. е. становится равным $5+\delta$. Тогда строка 0 системы уравнений (I) принимает следующий вид:

$$1x_0 - 4x_1 - (5+\delta)\,x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0. \qquad (1)$$

При выполнении каждой симплекс-итерации мы прибавляли к строке 0 одну из остальных строк, предварительно умножив последнюю на некоторую константу. Следовательно, на заключительной итерации строка 0 системы уравнений (F) запишется в виде

$$1x_0 + \left(\frac{3}{7} - \delta\right) x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7}, \qquad (2)$$

что нетрудно проверить, вновь проделав все операции, перечисленные в разд. 4.4. Таким образом, член $-\delta x_2$ сохранится в строке 0 на любом этапе вычислений.

Мы видим, что если $\delta > {}^3/_7$, то коэффициент при x_2 в соотношении (2) принимает отрицательное значение. В этом случае, согласно *симплекс-критерию I* (максимизация), в очередное базисное решение вошла бы переменная x_2. Аналогично если бы коэффициент при x_4 принял значение, превышающее ${}^{11}/_7$, то пробное базисное решение перестало бы быть оптимальным.

Итак, коэффициенты при небазисных переменных в строке 0 на этапе заключительной итерации показывают, в каких пределах соответствующие коэффициенты в выражении для целевой функции могут принимать положительные приращения без нарушения оптимальности ранее полученного базиса [1]).

[1]) Здесь, как и всюду в этой главе, сохранение «оптимальности» понимается в том смысле, что оптимальное решение для модели с другими числовыми значениями констант (в частности, коэффициентов в выражении для целевой функции) строится на прежнем базисе.— *Прим. перев.*

Предположим, что существенным образом понизилась «прибыльность» переменной x_1 или переменной x_3, каждая из которых входит в базис. Представляется вполне возможным, что найденное базисное решение окажется при этом неоптимальным. Не является также очевидным, что при *увеличении* значений коэффициентов при x_1 и x_3 ранее полученное решение окажется неоптимальным. В каких пределах может меняться коэффициент при x_1 без ущерба для оптимальности полученного решения?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выполнить операции, аналогичные только что проделанным. При этом строка 0 системы уравнений (I) примет вид

$$1x_0 - (4 + \delta)\, x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 = 0, \tag{3}$$

а строка 0 в (F) запишется соответственно в виде

$$1x_0 - \delta x_1 + \frac{3}{7}\, x_2 + \frac{11}{7}\, x_4 + \frac{13}{7}\, x_5 + \frac{5}{7}\, x_7 = \frac{695}{7}\,. \tag{4}$$

Чтобы прийти к какому-либо выводу относительно того, в каких пределах можно варьировать δ, не нарушая оптимальности полученного решения, необходимо прежде всего обратить в нуль коэффициент при x_1 в строке 0. Это достигается обычным образом. Умножим на δ строку 1 в (F) и прибавим полученный результат к (4). В результате будем иметь

$$1x_0 + \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\,\delta\right) x_2 + \left(\frac{11}{7} - \frac{5}{7}\,\delta\right) x_4 + \left(\frac{13}{7} + \frac{10}{7}\,\delta\right) x_5 +$$
$$+ \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\,\delta\right) x_7 = \frac{695}{7} + \frac{50}{7}\,\delta \quad \text{(строка 0)}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что при выполнении условия

$$-\frac{3}{5} \leqslant \delta \leqslant \frac{11}{5} \tag{6}$$

полученное решение остается оптимальным. При $\delta \leqslant -3/5$ коэффициент при x_2 принимает отрицательное значение. В случае когда $\delta \geqslant 11/5$, отрицательным становится коэффициент при x_4. Следовательно, как только значение δ выходит за пределы интервала, заданного соотношением (6), прежний базис перестает быть оптимальным.

Анализ на чувствительность проводился пока путем варьирования значений коэффициента только при одной переменной (либо базисной, либо небазисной). Этот же прием анализа пригоден и в случае одновременного изменения значений коэффициентов при нескольких *базисных* переменных. При этом в соотношение, являющееся аналогом уравнения (5), войдет несколько переменных приращений δ_j, каждое из которых влияет на способ выбора нового базиса. Чтобы базис остался прежним, δ_j должны подчиняться определенным условиям, записанным в виде неравенств, аналогичных (6). Другими словами, в этом случае будем иметь вместо одного неравенства (6) систему неравенств, каждое из которых получается из условия неотрицательности коэффициентов при небазисных переменных.

Многие машинные программы, построенные на базе симплексного метода, автоматически обеспечивают так называемый **классификационный анализ (ранжировку)** коэффициентов в выражении для целевой функции. Существует также ряд стандартных программ, предусматривающих более тщательный анализ линейных моделей на чувствительность; при этом используются специальные вычислительные приемы, такие, как метод **присоединенных целевых функций** и **параметрическое программирование.**

Метод **присоединенных целевых функций** позволяет находить решения для некоторой последовательности линейных моделей, каждая из которых характеризуется своим собственным критерием эффективности. Машинная программа последовательно оптимизирует каждый из критериев, используя оптимальное базисное решение исходной задачи в качестве начального пробного решения.

При анализе, выполняемом методом параметрического программирования, в качестве целевой функции берется выражение

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta c_j^*)\, x_j, \tag{I}$$

где δ — параметр, варьируемый на некотором заданном интервале значений. В наиболее простом случае $c_j^* = 0$ для всех значений $j \neq j'$ и $c_{j'}^* = 1$, т. е. приходим к процедуре последовательного варьирования коэффициентов при неизвестных. Метод параметрического программирования позволяет также проверить, остается ли полученное решение оптимальным при некоторых *наперед заданных* вариациях коэффициентов в выражении для целевой функции. При проведении такого анализа c_j^* рассматривается как приращение c_j; при этом δ может принимать некоторую *наперед заданную* последовательность значений. После этого легко удается проверить, остается ли полученное базисное решение оптимальным при $\delta = 1$.

5.3. КОНСТАНТЫ В ПРАВЫХ ЧАСТЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Попытаемся теперь выяснить, остается ли допустимым полученный оптимальный базис, если изменить значения констант в правых частях соотношений, формирующих ту или иную модель линейного программирования. Если базис остается допустимым, то новое решение является оптимальным, так как коэффициенты при неизвестных в строке 0 не меняются.

Рассмотрим правую часть строки 2 системы уравнений (I). Произведем замену $120 \to 120 + \delta$. Заметим, что свободная переменная x_6, фигурирующая в указанной строке, входит в базис [см. (F)]. Следовательно, x_6 изменится на величину δ. Таким образом, ранее полученное решение остается допустимым, если $\delta \geqslant -{}^{325}/_7$ [см. строку 2 в (F)]. Читателю предлагается самостоятельно вычислить значение x_6 при $\delta = -{}^{325}/_7$ и дать интерпретацию полученного результата.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения в строке 1 системы уравнений (I). Произведем замену $15 \to 15 + \delta$. При каких значениях δ полученный базис остается допустимым?

Ответ на этот вопрос может быть получен, если при выполнении симплекс-итераций всюду учитывать произведенную замену. Заметим, однако, что на каждом этапе появление δ в правой части строки 1 сопровождается появлением переменной x_5 в левой части данной строки. Следовательно, на последней итерации будем иметь

$$\begin{array}{llr}
1x_0 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} + \frac{13}{7}\delta & \text{(строка 0)}, & \\
1x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7} + \frac{10}{7}\delta & \text{(строка 1)}, & \\
-\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + 1x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7} - \frac{61}{7}\delta & \text{(строка 2)}, & (1) \\
\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} - \frac{3}{7}\delta & \text{(строка 3)}. &
\end{array}$$

Полагая, как обычно, небазисные переменные x_2, x_4, x_5 и x_7 равными нулю, получим значения базисных переменных, которые определяются теперь через δ. Чтобы базис продолжал оставаться допустимым, константы в правых частях уравнений (1) должны иметь неотрицательные значения. Отсюда следует, что полученное пробное решение остается допустимым, если

$$-\frac{50}{10} \leqslant \delta \leqslant \frac{325}{61}. \tag{2}$$

Действительно, при $\delta < -{}^{50}/_{10}$ значение базисной переменной x_1 становится отрицательным; при $\delta > {}^{325}/_{61}$ отрицательное значение принимает базисная переменная x_6.

Положим $\delta = 1$, что можно интерпретировать как увеличение «ресурса» в строке 2 на единицу. С помощью соотношения в строке 0 системы уравнений (1) легко показать, что при этом значение целевой функции возрастет на ${}^{13}/_7$, причем значения всех базисных переменных останутся неотрицательными. Другими словами, при увеличении объема ресурсов на единицу дополнительная прибыль в оптимальном варианте составляет ${}^{13}/_7$.

Рассмотренный метод анализа можно обобщить на случай варьирования одновременно нескольких констант в правых частях ограничений, входящих в состав линейной модели. Произведем одновременно следующие замены:

$$\begin{aligned}
15 &\to (15 + \delta_1) \quad \text{в строке 1}, \\
120 &\to (120 + \delta_2) \quad \text{в строке 2}, \\
100 &\to (100 + \delta_3) \quad \text{в строке 3}.
\end{aligned}$$

Затем после выполнения всех операций, позволяющих перейти от системы (I) к системе (F), и обращения в нуль всех небазисных переменных, будем иметь

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{695}{7} + \frac{13}{7}\delta_1 \qquad\quad + \frac{5}{7}\delta_3,\\
x_1 &= \frac{50}{7} + \frac{10}{7}\delta_1 \qquad\quad - \frac{1}{7}\delta_3,\\
x_6 &= \frac{325}{7} - \frac{61}{7}\delta_1 + 1\delta_2 + \frac{4}{7}\delta_3,\\
x_3 &= \frac{55}{7} - \frac{3}{7}\delta_1 \qquad\quad + \frac{1}{7}\delta_3.
\end{aligned} \qquad (I)
$$

Коэффициенты при δ_i ($i = 1, 2, 3$) совпадают с коэффициентами при соответствующих свободных переменных в (F). Базис остается допустимым, если значения x_1, x_6 и x_3 неотрицательны. Следовательно, δ_1, δ_2 и δ_3 должны удовлетворять соответствующей системе неравенств.

Многие вычислительные программы, построенные на базе симплексного метода, автоматически выполняют классификационный анализ (ранжировку) констант, стоящих в правых частях ограничений, входящих в состав линейных моделей. Существуют также программы, позволяющие находить последовательность решений, соответствующих различным значениям констант в правых частях ограничений (этот способ аналогичен методу присоединенных целевых функций, описание которого приведено в предыдущем разделе). Кроме того, имеются машинные программы, построенные по принципу параметрического программирования: они позволяют находить конгруэнцию решений для множества моделей, получаемого из исходной модели заменой $b_i \to b_i + \delta b_i^*$ в правых частях ограничений. При этом δ рассматривается как некоторый параметр, принимающий ряд значений внутри заданного интервала.

5.4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Описанные выше методы оценки чувствительности оптимального решения вполне приемлемы, но носят узкий характер, т. е. позволяют решать лишь частные задачи анализа на чувствительность моделей линейного программирования. Разумеется, можно было бы разработать методы анализа, позволяющие произвести оценку чувствительности линейных оптимизационных моделей по отношению к вариациям коэффициентов a_{ij}, с тем чтобы определить, насколько «выгодно» дополнить базис новой переменной, а также проверить, в какой степени изменится решение, если ввести дополнительные ограничения.

Однако в теории линейного программирования существует понятие **двойственности**, которое позволяет унифицированным образом устанавливать взаимосвязи для всех приемов и методов анализа моделей на чувствительность. Для тех, кто не знаком с линейным программированием, понятие двойственности может показаться абстрактным и, следовательно, весьма непривычным. Только со временем это впечатление уступает место пониманию исключительной важности и полезности этого понятия.

Мы начнем с определения двойственности и сразу же приведем ряд примеров. В последующих разделах будет показано, каким образом двойственность используется при анализе на чувствительность моделей линейного программирования.

Исходная [1] **и двойственная задачи.** Рассмотрим две следующие задачи линейного программирования:

$$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

и

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j=1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$y_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Для определенности условно назовем первую задачу [соотношения (1) — (3)] **исходной**, а вторую [соотношения (4) — (6)] **двойственной** (по отношению к первой).

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие две задачи:

исходная задача:

$$\text{максимизировать } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \tag{7}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leqslant 16, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 25, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0; \end{gathered} \tag{8}$$

двойственная задача:

$$\text{минимизировать } 16y_1 + 25y_2 \tag{9}$$

[1] В ряде работ по линейному программированию вместо «исходная задача» используется другой термин — «основная задача». Иногда говорят также «прямая задача».— *Прим. перев.*

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 &\geqslant 4, \\ 1y_1 + 5y_2 &\geqslant 5, \\ 2y_1 + 3y_2 &\geqslant 9, \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Грубо говоря, двойственная задача — это на 90° повернутая исходная задача. Действительно,

1) j-й столбец, составленный из коэффициентов, фигурирующих в ограничениях исходной модели, совпадает с j-й строкой, составленной из коэффициентов, фигурирующих в ограничениях двойственной модели;

2) строка, составленная из коэффициентов в выражении для целевой функции, совпадает со столбцом, составленным из констант, фигурирующих в правых частях ограничений двойственной модели;

3) столбец, составленный из констант, фигурирующих в правых частях ограничений исходной модели, совпадает со строкой, составленной из коэффициентов в выражении для целевой функции двойственной модели;

4) направление знаков неравенства в исходной модели противоположно направлению знаков неравенства в двойственной модели; требование максимизации в исходной задаче в двойственной задаче заменено требованием минимизации.

Имеет место следующая важная теорема:

Теорема двойственности. а) Если и исходная и двойственная ей задачи имеют допустимые решения, то: 1) существует оптимальное решение x_j^* ($j = 1, 2, \ldots, n$) исходной задачи; 2) существует оптимальное решение y_i^* ($i = 1, 2, \ldots, m$) двойственной задачи; 3) имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*. \tag{11}$$

б) Если исходная (двойственная) задача допускает оптимальное решение, для которого значение целевой функции ограничено, то соответствующая ей двойственная (исходная) задача допускает оптимальное решение при том же значении целевой функции.

Приступая к доказательству утверждений, составляющих в совокупности теорему двойственности, покажем прежде всего, что *любое* допустимое решение задачи линейного программирования накладывает ограничение на оптимальное значение целевой функции соответствующей двойственной задачи.

Пусть переменные x_j удовлетворяют ограничениям исходной модели, а переменные y_i удовлетворяют ограничениям двойственной модели. Умножим каждое i-е ограничение исходной задачи на y_i, а каждое j-е ограничение двойственной задачи на x_j. Поскольку

$y_i \geqslant 0$ и $x_j \geqslant 0$, направление неравенств в результате указанных действий не изменится. Сложив отдельно правые и соответственно левые части всех соотношений, получаемых после выполнения указанных выше операций над ограничениями исходной модели, получим

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} b_i y_i. \tag{12}$$

Аналогично в результате почленного сложения правых и левых частей соотношений, получаемых после выполнения указанных выше операций над ограничениями двойственной модели, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{13}$$

(При сложении нескольких неравенств с одинаковым направлением знака неравенства, естественно, получаем неравенство с тем же направлением знака неравенства.)

Поскольку выражения в левых частях неравенств (12) и (13) совпадают, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{14}$$

Следовательно, значение целевой функции, соответствующее некоторому допустимому решению (включая оптимальное) задачи линейного программирования, не является независимым от значения целевой функции для *любого* допустимого решения (включая оптимальное) соответствующей двойственной задачи.

В частности, для исходной и двойственной задач, представленных соотношениями (7) — (10), имеем

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \leqslant 16y_1 + 25y_2 \tag{15}$$

для любых допустимых решений как исходной задачи, так и ей двойственной. Одно из допустимых решений исходной задачи имеет вид $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 8$; при этом целевая функция принимает значение, равное 72. Двойственная задача допускает решение $y_1 = 5$, $y_2 = 0$; значение целевой функции при этом равняется 80. Следовательно, оптимальное значение целевой функции как для исходной задачи, так и для двойственной лежит в интервале от 72 до 80.

Если задача линейного программирования имеет неограниченное оптимальное решение, то соответствующая двойственная задача не имеет ни одного допустимого решения. Допустим, например, что существует допустимое решение исходной задачи, для которого значение целевой функции оказывается *неограниченно* большим. Тогда двойственная задача не обладает ни одним допустимым решением. Если бы двойственная задача имела хотя бы одно допустимое решение, то возникло бы противоречие. В силу соотношения (14) решение двойственной задачи ограничивало бы сверху значение исходной целевой функции для *любого* допустимого решения исходной задачи. Но согласно сделанному предположению, значение исходной целевой функции может быть произвольно большим.

Обратим также внимание на то, что теорема двойственности позволяет проверить на оптимальность любое допустимое пробное решение исходной задачи. Если существует допустимое решение двойственной задачи, для которого значение целевой функции совпадает со значением целевой функции исходной задачи, то решения обеих задач являются оптимальными. Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из соотношения (14).

Одно из весьма любопытных следствий теоремы двойственности можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема о дополнительной нежесткости. Пусть x_j^* ($j = 1, 2, \ldots, n$) — решение исходной задачи, а y_i^* ($i = 1, 2, \ldots, m$) — решение соответствующей двойственной задачи. Оба решения являются оптимальными тогда и только тогда, когда

$$y_i^* \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\Big) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j^* \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\Big) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда вытекает, что всякий раз, когда модель содержит ограничение, имеющее вид строгого неравенства, соответствующая переменная в двойственной задаче принимает нулевое значение.

При формулировке исходной и двойственной задач [соотношения (1) — (6)] была использована удобная для записи каноническая форма. С помощью преобразований, рассмотренных в гл. 3, любую задачу линейного программирования можно представить либо в виде (1) — (3), либо в виде (4) — (6). Взаимосвязь между исходной и двойственной задачами еще более четко прослеживается, если воспользоваться следующими развернутыми каноническими формами представления:

а) Исходная задача:

$$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, h \leqslant m), \tag{II}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = h+1, h+2, \ldots, m), \tag{III}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k \leqslant n), \tag{IV}$$

$$x_j \text{ не имеет ограничения в знаке при } j = k+1, k+2, \ldots, n. \tag{V}$$

б) Двойственная задача:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (\mathrm{I}')$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \qquad (\mathrm{II}')$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n), \qquad (\mathrm{III}')$$

$$y_i \geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ h), \qquad (\mathrm{IV}')$$

y_i не имеет ограничения в знаке при $i = h+1, h+2, \ldots, m$. (V')

Теорема двойственности имеет место и в том случае, когда исходная и двойственная задачи записаны в приведенном выше каноническом виде. В этой связи полезно усвоить следующую схему соответствия:

Исходная задача	Двойственная задача
Максимизация	Минимизация
Константы в правых частях ограничений	Целевая функция
Целевая функция	Константы в правых частях ограничений
j-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	j-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
i-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	i-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
j-я неотрицательная переменная	j-е неравенство вида $\geqslant$
j-я переменная, не имеющая ограничения в знаке	j-е соотношение в виде равенства
i-е неравенство вида $\leqslant$	i-я неотрицательная переменная
i-е соотношение в виде равенства	i-я переменная, не имеющая ограничения в знаке

5.5. РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Казалось бы, настало время, когда следует задуматься о том, как ищется решение двойственной задачи. Но подобно небезызвестному мольеровскому герою, который пришел в восторг, узнав, что всю жизнь говорил прозой, не подозревая об этом, читателя может удивить заявление о том, что решение двойственной задачи давно уже найдено, хотя об этом никто и не догадывается.

Оптимальные значения переменных двойственной задачи.

а) Коэффициенты при свободных переменных в строке 0 на последней симплекс-итерации при решении задачи максимизации совпадают с оптимальными значениями переменных двойственной задачи.

б) Коэффициент при x_j в строке 0 на последней симплекс-итерации представляет собой разность между левой и правой частями j-го ограничения двойственной задачи, соответствующую оптимальному решению последней. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу распределения ресурсов [1]), решение которой дано в разд. 4.4:

$$\text{максимизировать} \quad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

при наличии следующих ограничений:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + \ \ 1x_3 + \ \ 1x_4 &\leqslant 15, \\ 7x_1 + 5x_2 + \ \ 3x_3 + \ \ 2x_4 &\leqslant 120, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leqslant 100, \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

Легко показать, что двойственная задача формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать} \quad 15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} 1y_1 + 7y_2 + \ \ 3y_3 &\geqslant 4, \\ 1y_1 + 5y_2 + \ \ 5y_3 &\geqslant 5, \\ 1y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geqslant 9, \\ 1y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geqslant 11, \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \quad y_3 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим коэффициенты при трех свободных переменных в строке 0 на заключительной симплекс-итерации [см. соотношения (F) в разд. 5.1]. Согласно утверждению, приведенному выше [см. п. а)], оптимальными значениями переменных двойственной задачи являются следующие:

$$y_1^* = \frac{13}{7}, \quad y_2^* = 0 \quad y_3^* = \frac{5}{7}. \tag{3}$$

---

[1]) Постановку задачи о распределении ресурсов см. в разд. 2.2.— *Прим. перев.*

Прежде всего убедимся, что выполняются условия (2):

$$
\begin{aligned}
&1\cdot\frac{13}{7}+3\cdot\frac{5}{7}=\frac{28}{7}\geqslant 4,\\
&1\cdot\frac{13}{7}+5\cdot\frac{5}{7}=\frac{38}{7}\geqslant 5,\\
&1\cdot\frac{13}{7}+10\cdot\frac{5}{7}=\frac{63}{7}\geqslant 9,\\
&1\cdot\frac{13}{7}+15\cdot\frac{5}{7}=\frac{88}{7}\geqslant 11.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Затем покажем, что значение целевой функции двойственной задачи совпадает со значением целевой функции исходной задачи

$$15\cdot\frac{13}{7}+120\cdot 0+100\cdot\frac{5}{7}=\frac{695}{7}\ . \tag{5}$$

Решение (3) должно быть оптимальным, поскольку удовлетворяются все ограничения и, кроме того, значения целевых функций исходной и двойственной задач совпадают.

Наконец, вычислим разность между левыми и правыми частями соотношений (4). Возьмем, например, второе и третье ограничения, для которых находим

$$
\begin{aligned}
&\frac{38}{7}-5=\frac{3}{7},\\
&\frac{63}{7}-9=0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

т. е. получаем соответственно коэффициенты при x_2 и x_3 в строке 0 системы уравнений (F), что согласуется с утверждением, сформулированным в п. б).

Опираясь на понятие двойственности, можно глубже понять суть симплексного метода. В частности, нетрудно убедиться, что коэффициенты при остаточных переменных в строке 0 на каждой итерации в процессе решения исходной задачи представляют собой пробные значения переменных двойственной задачи, что же касается других коэффициентов, фигурирующих в строке 0 после выполнения любой симплекс-итерации, то их можно интерпретировать как разность между левой и правой частями (2) при заданных пробных значениях двойственной задачи. Таким образом, *симплексный метод можно рассматривать как способ получения пробных решений двойственной задачи путем определения допустимых решений исходной задачи*. Как только удается найти допустимое решение этих двух задач, процесс итерации заканчивается.

Примечание. Изложенное выше объяснение того, как получаются оптимальные значения переменных двойственной задачи, относилось к случаю, когда все знаки неравенств имели вид ($\leqslant$). Допустим теперь, что мы имеем следующую задачу:

$$\text{максимизировать } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для простоты предположим, что оптимальный базис включает переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда оптимальные значения переменных двойственной задачи находятся путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Соотношения двойственности легко записать в матричном виде (разд. 4.10). В матричных обозначениях исходная и двойственная задачи принимают следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{максимизировать } cx & \text{минимизировать } yb \\ \text{при ограничениях} & \text{при ограничениях} \\ Ax \leqslant b, & yA \geqslant c, \\ x \geqslant 0, & y \geqslant 0. \end{array} \tag{I}$$

Как было показано в разд. 4.10, решение исходной задачи можно записать в виде

$$x_B = B^{-1}b. \tag{II}$$

Для соответствующего значения целевой функции имеем

$$c_B B^{-1} b, \tag{III}$$

а условия оптимальности выглядят следующим образом:

$$c_B B^{-1} A - c \geqslant 0, \quad c_B B^{-1} \geqslant 0. \tag{IV}$$

Чтобы убедиться в том, что оптимальное решение соответствующей двойственной задачи имеет вид

$$y_B = c_B B^{-1}, \tag{V}$$

достаточно заметить, что соотношения (IV) означают выполнение условий допустимости для двойственной задачи, а из (III) следует, что значения целевых функций исходной и двойственной задач совпадают. Заметим также, что если ограничения исходной задачи записаны в виде равенств, то соотношение (V) остается справедливым, причем y_B не обязательно должны удовлетворять условиям неотрицательности.

5.6. ПРОДОЛЖЕНИЕ АНАЛИЗА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

В разд. 5.4 мы утверждали, что теорема двойственности позволит лучше разобраться в анализе линейных моделей на чувствительность и освоить его практически. Попытаемся показать, что это действительно так. Начнем с повторения того, что уже излагалось в самом начале этой главы, стремясь при этом выявить те моменты анализа, которые связаны с понятием двойственности. Затем будут рассмотрены некоторые дополнительные вопросы, связанные с анализом линейных моделей на чувствительность.

Целевая функция. Обращаясь к примеру, рассмотренному в разд. 4.4, вспомним, что одно из ограничений двойственной задачи, соответствующее переменной x_2 исходной задачи, имеет вид

$$1y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geqslant 5. \tag{1}$$

Если коэффициент при x_2 в выражении для целевой функции положить равным $5 + \delta$, то в правой части соотношения (1) также будет стоять $5 + \delta$. Подставив в (1) оптимальные значения двойственной задачи, получим [с учетом замены $5 \to (5 + \delta)$]

$$1 \cdot \frac{13}{7} + 5 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{5}{7} \geqslant 5 + \delta, \tag{2}$$

или

$$\frac{3}{7} \geqslant \delta. \tag{3}$$

Таким образом, решение двойственной задачи остается допустимым, если δ не превышает $^3/_7$. Если же δ принимает значение, превышающее $^3/_7$, то это решение не является более допустимым и, следовательно, рассматриваемое решение исходной задачи не является более оптимальным. Это согласуется с результатом, полученным в разд. 5.2.

Константы в правых частях ограничений. В разд. 5.3 с помощью частного приема было показано, что коэффициент при остаточной переменной в строке 0, соответствующей оптимальному решению, определяет приращение объема ресурса, ассоциированное с этой переменной. В предыдущем же разделе было установлено, что оптимальное значение соответствующей переменной для двойственной задачи совпадает со значением указанного коэффициента. Учитывая эти два результата, приходим к следующему заключению.

Интерпретация переменных двойственной задачи. Оптимальное значение каждой переменной двойственной задачи определяет положительное или отрицательное приращение значения целевой функции за счет единичного приращения (положительного или отрицательного) значения константы в правой части соответствующего ограничения при условии, что рассматриваемый базис остается допустимым.

Такая интерпретация согласуется с основным соотношением (11) (см. теорему двойственности в разд. 5.4), которое означает, что

$$\begin{aligned}&\text{Оптимальное значение } x_0 = \\ &= \Sigma \text{ (Константы в правых частях ограничений)} \times \\ &\times \text{ (Оптимальные значения переменных двойственной задачи).}\end{aligned} \tag{4}$$

Оптимальные значения переменных двойственной задачи часто называют **скрытыми доходами.** В случае когда константы в правых частях ограничений задают объемы имеющихся ресурсов, скрытые доходы определяют вклад в прибыль, полученный за счет единицы каждого из ресурсов, в соответствии с видом оптимального решения исходной задачи. В задаче, рассмотренной в разд. 4.4, значение $^{13}/_7$ есть скрытый доход, соответствующий первому ограничению (ресурс — человеко-недели), значение нуль — скрытый доход, соответствующий второму ограничению (ресурс — объем материала Y), а значение $^5/_7$ — скрытый доход, соответствующий третьему ограничению (ресурс — объем материала Z). Таким образом, увеличив первый из указанных ресурсов на одну человеко-неделю, мы получаем дополнительную прибыль, равную $^{13}/_7$; каждый дополнительный фунт материала Z увеличивает прибыль на $^5/_7$. Увеличение же объема материала Y не приводит к увеличению прибыли. Чем это объясняется? Причина заключается в том, что запас материала Y превышает имеющиеся в нем потребности, что видно из того обстоятельства, что свободная переменная x_6 входит в оптимальный базис.

Это положение носит общий характер, т. е. избыточность ресурса приводит к тому, что в базис на последней симплекс-итерации входит свободная переменная с неотрицательным значением. Нулевого значения скрытого дохода в этом случае можно ожидать, поскольку увеличение заведомо *избыточного* ресурса не может увеличить прибыль. Именно такая ситуация и имеет место. Поскольку в базис входит свободная переменная, коэффициент при этой переменной в строке 0 на заключительной итерации равен нулю.

Интерпретируя значения переменных двойственной задачи как скрытый доход, мы приходим к более глубокому пониманию двойственности. Применительно к задаче, рассмотренной в разд. 4.4, каждая из переменных двойственной задачи может рассматриваться как потенциальная возможность получения дополнительной прибыли за счет соответствующего ресурса при условии, что фирма функционирует в оптимальном режиме. При этом соотношение (4) означает, что суммарный доход фирмы пропорционален объему имеющихся ресурсов. Коэффициенты a_{ij} интерпретируются как соответствующие нормы потребления i-го ресурса в j-м производственном процессе. Суммой $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i$ задается экономический эффект за счет j-го производственно-технологического процесса, вычисленный с учетом скрытого дохода. Ограничения двойственной задачи гарантируют строгую пропорциональность экономического эффекта затраченным усилиям, если имеет место оптимальный режим функционирования фирмы. Более того, при указанных условиях исключаются варианты решений, не оправданных с экономической точки зрения.

Рассмотрим пример, с помощью которого можно убедиться в том, что приведенная выше интерпретация переменных двойственной задачи оказывается правильной лишь при условии, что заданный пробный базис остается допустимым. Пусть требуется

$$\text{максимизировать} \quad -x_1 - x_2 \tag{I}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leqslant 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{II}$$

Решение $x_1 = x_2 = 0$, как легко проверить, является допустимым и, более того, оптимальным. В этом легко убедиться с помощью графического представления данной модели.

Введем в соотношения (II) свободные переменные x_3 и x_4. Тогда, предположив, что переменные x_3 и x_4 являются базисными, получаем $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, т. е. решение является вырожденным. Значения соответствующих переменных двойственной задачи $y_1 = y_2 = 0$. Легко далее показать, что строка 0 имеет при этом вид $x_0 + x_1 + x_2 = 0$, т. е. коэффициенты при небазисных переменных строго положительны. Если же выбрать в качестве базисных переменных x_1 и x_3, то в результате выполнения надлежащих преобразований получим $x_1 = 0$, $x_3 = 2$, а значения соответствующих переменных двойственной задачи равняются $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. При этом соотношение в строке 0 принимает вид $x_0 + 3x_2 + 1x_4 = 0$, т. е. значения коэффициентов при обеих небазисных переменных строго положительны. Следовательно, поскольку оптимальное решение приводит к вырожденному базису, возможны различные оптимальные решения (y_1, y_2), каждое из которых соответствует одному из оптимальных базисных решений. Предположим теперь, что второе ограничение в (II) имеет вид

$$-x_1 + 2x_2 \leqslant \delta_2. \tag{III}$$

Пусть δ_2 принимает бесконечно малое значение. Как при этом изменится значение исходной целевой функции? Если $\delta_2 > 0$, то решение $x_1 = x_2 = 0$ является по-прежнему оптимальным, и, следовательно, $y_2 = 0$ удовлетворяет условиям задачи. Но при $\delta_2 > 0$ базис, включающий переменные x_1 и x_3, оказывается недопустимым (x_1 принимает отрицательные значения). Если $\delta_2 < 0$, то $y_2 = 1$, так как решение является допустимым лишь при условии $x_1 > 0$.

Коэффициенты в соотношениях, задающих ограничения. Приступая к анализу на чувствительность по отношению к вариациям a_{ij}, предположим, что в модель вводится новая управляемая переменная. Насколько «выгодно» включить ее в базис? Наиболее простой способ получить ответ на этот вопрос заключается в том, чтобы проверить, удовлетворяются ли ограничения соответствующей двойственной задачи при заданных значениях ее переменных. Если эти ограничения не выполняются, то следует ввести в рассмотрение новую управляемую переменную.

Рассмотрим в качестве примера задачу распределения ресурсов, анализ которой проведен в разд. 5.1. Предположим, что вводится дополнительная переменная, причем дополнения к строкам имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &+1x_8 \quad (\text{строка } 1),\\ &+\frac{2}{7}x_8 \quad (\text{строка } 2),\\ &+17x_8 \quad (\text{строка } 3). \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть при переменной x_8 в выражении для целевой функции стоит коэффициент c_8. При каком значении c_8 целесообразно ввести в базис переменную x_8? Соответствующее соотношение двойственной задачи имеет вид

$$1y_1 + \frac{2}{7}y_2 + 17y_3 \geqslant c_8. \tag{6}$$

Подставив сюда полученные оптимальные значения переменных двойственной задачи, получим

$$1\cdot\frac{13}{7}+\frac{2}{7}\cdot 0+17\cdot\frac{5}{7}\geqslant c_8, \tag{7}$$

или

$$14 \geqslant c_8. \tag{8}$$

Следовательно, при $c_8 > 14$ переменную x_8 нужно включить в базис.

Предположим, что $c_8 = 20$. Тогда коэффициент при x_8 в строке 0 системы уравнений (F) равен $14 - 20 = -6$. Чему равняются коэффициенты при x_8 в других строках этой системы уравнений? Ответ на этот вопрос можно получить следующим образом.

Чтобы получить коэффициенты при x_8 в (5), в каждой строке берутся коэффициенты при x_5, x_6 и x_7, затем первый из них умножается на единицу, второй — на $^2/_7$, третий — на 17 и результаты перемножения складываются [см. систему уравнений (I)]:

$$\begin{aligned} &\left(1\cdot 1+\frac{2}{7}\cdot 0+17\cdot 0\right)x_8 = 1\,x_8 \quad (\text{строка } 1),\\ &\left(1\cdot 0+\frac{2}{7}\cdot 1+17\cdot 0\right)x_8 = \frac{2}{7}\,x_8 \quad (\text{строка } 2),\\ &\left(1\cdot 0+\frac{2}{7}\cdot 0+17\cdot 1\right)x_8 = 17x_8 \quad (\text{строка } 3). \end{aligned} \tag{IV}$$

Коэффициенты при x_8 в (F) определяются аналогично, т. е.

$$\left[1\cdot\frac{10}{7}+\frac{2}{7}\cdot 0+17\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right]x_8=-1x_8 \quad \text{(строка 1)},$$
$$\left[1\cdot\left(-\frac{61}{7}\right)+\frac{2}{7}\cdot 1+17\cdot\frac{4}{7}\right]x_8=\frac{9}{7}x_8 \quad \text{(строка 2)}, \qquad \text{(V)}$$
$$\left[1\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)+\frac{2}{7}\cdot 0+17\cdot\frac{1}{7}\right]x_8=2x_8 \quad \text{(строка 3)}.$$

Если x_j не входит в базис, то результат изменения коэффициентов a_{ij} при данной переменной в ограничениях модели определяется аналогичным образом. Так, например, переменная x_4 на заключительной симплекс-итерации для модели, рассмотренной в разд. 4.4, не входит в базис. Посмотрим, что получится, если в строке 3 коэффициент при этой переменной получит приращение δ. Легко убедиться, что в этом случае соответствующее ограничение двойственной задачи примет вид

$$1y_1+2y_2+(15+\delta)\,y_3\geqslant 11. \qquad (9)$$

Подставив сюда найденные оптимальные значения переменных двойственной задачи, получим

$$1\cdot\frac{13}{7}+2\cdot 0+(15+\delta)\cdot\frac{5}{7}\geqslant 11, \qquad (10)$$

или

$$\delta\geqslant-\frac{11}{5}. \qquad (11)$$

Таким образом, при $\delta<-{}^{11}/_{5}$ переменную x_4 следует ввести в базис.

Если x_j входит в базис, то анализ результатов изменения коэффициентов при этой переменной в ограничениях модели оказывается более сложным. Он связан с одновременным рассмотрением как исходной, так и двойственной задач. Такого рода анализ выходит за рамки данного курса; эти вопросы изложены в ряде более полных учебных пособий по линейному программир ванию.

5.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разд. 5.1—5.6 было показано, каким образом можно проверить чувствительность оптимального решения задачи линейного программирования по отношению к вариациям различных компонентов (элементов) модели. В частности, были рассмотрены:

1) способы нахождения интервалов изменения коэффициентов в выражении для целевой функции и каждой из констант, фигурирующих в правых частях ограничений, в которых сохраняется оптимальность полученного базисного решения при условии, что это решение является допустимым;

2) способы оценки экономического эффекта, получаемого за счет изменения исходных данных задачи линейной оптимизации;

3) метод, позволяющий пересмотреть ранее полученное оптимальное решение в случае, если вводятся новые управляемые переменные.

Технические приемы, с помощью которых выполняются все перечисленные виды анализа, представляют собой дальнейшее развитие симплексного метода. Что же касается концепции двойственности, то она служит надежным критерием правильности этих «технических приемов».

Двойственную формулировку допускает любая задача линейной оптимизации. Решая одну из взаимно двойственных задач, мы автоматически находим решение другой. По мере дальнейшего изучения основ исследования операций читатель с понятием двойственности будет встречаться неоднократно.

5.8. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ

Опираясь на взаимосвязь между исходной и двойственной моделями, можно построить еще один метод решения задачи линейного программирования. Рассмотрим такой алгоритм решения исходной задачи, для которого на каждой итерации, за исключением последней, решение оказывается недопустимым вследствие невыполнения условий неотрицательности переменных; соответствующее же решение *двойственной* задачи при каждой такой итерации является допустимым. Эта идея лежит в основе так называемого двойственного симплекс-алгоритма.

Можно привести по крайней мере два практических соображения относительно целесообразности ознакомления с двойственным симплексным алгоритмом. Одно из них заключается в том, что такой алгоритм позволяет в ряде случаев облегчить выбор исходного базиса без использования свободных (искусственных) переменных. В этом мы убедимся на примере, приведенном ниже. Второе соображение состоит в том, что данный алгоритм помогает выполнить некоторые виды анализа модели на чувствительность, что будет показано в следующем разделе.

Начнем ознакомление с двойственным симплексным алгоритмом с рассмотрения следующего примера.

Пусть требуется

$$\text{минимизировать} \quad 2x_1 + 1x_3 \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geqslant 5, \\ 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geqslant 8, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0 \end{gathered} \tag{2}$$

В данном случае удобно считать сформулированную выше задачу исходной, так что соответствующая двойственная задача имеет следующий вид:

$$\text{максимизировать} \quad 5y_1 + 8y_2 \tag{3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1y_1 + 1y_2 &\leqslant 2, \\ 1y_1 - 2y_2 &\leqslant 0, \\ -1y_1 + 4y_2 &\leqslant 1, \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Если, как обычно, обозначить через x_0 значение целевой функции и ввести в (2) свободные (избыточные) переменные, то исходная задача примет вид

$$\begin{aligned} 1x_0 - 2x_1 \qquad\quad - 1x_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \quad (\text{строка } 0), \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 \qquad\quad &= 5 \quad (\text{строка } 1), \\ 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 \qquad\quad - 1x_5 &= 8 \quad (\text{строка } 2). \end{aligned} \tag{5}$$

Если включить в первое пробное решение в качестве базисных переменных x_0, x_4 и x_5, то это решение окажется недопустимым, поскольку $x_4 = -5$, $x_5 = -8$ при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В результате получаем нулевое пробное значение для x_0. Однако из формул (1) и (2) следует, что в случае, если решение допустимо, $x_0 > 0$. Одновременно заметим, что для рассмотренного недопустимого решения коэффициенты в строке 0 удовлетворяют, согласно *симплекс-критерию I* (минимизация) [1]), условию оптимальности. Следовательно, можно утверждать, что выбранный исходный базис является *допустимым для двойственной задачи*. [Легко проверить, что решение $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ удовлетворяет ограничениям (4)]. Предлагаемый метод состоит в том, что на каждом этапе вычислений (за исключением последней итерации) находится допустимое решение двойственной задачи.

Описание метода. Двойственный симплекс-алгоритм строится по аналогии с симплексным алгоритмом, рассмотрению которого посвящена гл. 4. Прежде всего сформулируем правило, позволяющее определять переменную, подлежащую *исключению* из пробного базиса.

Двойственный симплекс-критерий I. Если базис содержит переменные, принимающие отрицательные значения, то исключению из базиса подлежит одна из этих переменных, а именно та переменная (скажем, x_k), значение которой максимально по модулю. Если все базисные переменные принимают неотрицательные значения, то данное решение является оптимальным.

[1]) См. разд. 4.6.

Чтобы можно было воспользоваться *критерием I*, перепишем соотношения (5) в следующем виде (что достигается путем умножения строк 1 и 2 на —1):

$$\begin{aligned} 1x_0 - 2x_1 \quad\quad - 1x_3 \quad\quad\quad\quad &= 0 \quad \text{(строка 0)},\\ - 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \quad\quad &= -5 \quad \text{(строка 1)}, \qquad (6)\\ - 1x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad\quad + 1x_5 &= -8 \quad \text{(строка 2)}. \end{aligned}$$

Согласно *критерию I*, исключаем из базиса переменную x_5, поскольку ее значение отрицательно и, кроме того, $|x_5| > |x_4|$.

Сформулируем теперь правило выбора переменной, подлежащей *включению* в базис. При этом важно помнить о том, что после перехода к новому базису соответствующее решение двойственной задачи

Небазисные переменные	x_1	x_2	x_3
Коэффициенты в строке 0	—2	0	—1
Коэффициенты в строке 2	—1	2	—4
Отношения	2	—	0,25
Наименьшее значение			0,25

Рис. 5.1. Итерация 1: двойственный симплекс-критерий II (из базиса исключается переменная x_5).

должно оставаться допустимым. После смены базиса коэффициенты в строке 0 должны быть по-прежнему отрицательными (или равными нулю).

Двойственный симплекс-критерий II (минимизация). а) Берутся отношения значений коэффициентов при небазисных переменных в строке 0 к соответствующим коэффициентам, фигурирующим в строке, содержащей переменную x_k, подлежащую исключению из базиса при очередной итерации (при этом в расчет не принимаются отношения, знаменатели в которых равны нулю или положительному числу).

б) Выбирается минимальное отношение, соответствующее некоторой переменной x_j. Именно эта переменная должна быть включена в очередной базис.

Результаты вычислений, предписанных критерием II, приведены в таблице на рис. 5.1. Видно, что в очередном пробном базисе x_5 следует заменить на x_3. Сама процедура замены ничем не отличается от той, которая применяется при использовании обычного симплексного метода. Выполним прежде всего нормировку коэффициента при x_3 в строке 2 путем деления правой и левой частей данной строки на —4; в результате получим

$$\begin{aligned}
&1x_0 - 2x_1 \qquad\quad - 1x_3 &&= 0 \quad \text{(строка 0)},\\
&\quad - 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &&= -5 \quad \text{(строка 1)},\\
&\quad \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 + 1x_3 \qquad - \frac{1}{4}x_5 &&= 2 \quad \text{(строка 2)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Затем исключим переменную x_3 из строк 0 и 1, при этом для получения

новой строки 0 сложим строки 2 и 0;

новой строки 1 сложим умноженную на —1 строку 2 со строкой 1.

В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
&1x_0 - \frac{7}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 \qquad\qquad - \frac{1}{4}x_5 &&= 2 \quad \text{(строка 0)},\\
&\quad - \frac{5}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 \qquad + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 &&= -7 \quad \text{(строка 1)},\\
&\quad \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 + 1x_3 \qquad - \frac{1}{4}x_5 &&= 2 \quad \text{(строка 2)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Соответствующее базисное решение имеет вид

$$x_0 = 2, \quad x_4 = -7, \quad x_3 = 2. \tag{9}$$

По мере возрастания «степени допустимости» решения значение целевой функции стремится к оптимальному.

Итерация 2. Обратившись снова к *критерию I*, приходим к заключению, что из базиса должна быть исключена переменная x_4. В таблице на рис. 5.2 приведены результаты вычислений, выполненных

Небазисные переменные	x_1	x_2	x_5
Коэффициенты в строке 0	—7/4	—2/4	—1/4
Коэффициенты в строке 1	—5/4	—2/4	1/4
Отношения	7/5	1	—
Наименьшее значение		*1*	

Рис. 5.2. Итерация 2: согласно критерию II, из базиса исключается переменная x_4.

согласно требованиям *критерия II*. Мы видим, что в очередной базис вместо x_4 должна войти переменная x_2. После выполнения операций, с помощью которых производится смена базиса, вместо (8) получаем

$$\begin{aligned}
&1x_0 - \frac{1}{2}x_1 \qquad\qquad - 1x_4 - \frac{1}{2}x_5 &&= 9 \quad \text{(строка 0)},\\
&\quad \frac{5}{2}x_1 + 1x_2 \qquad - 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 &&= 14 \quad \text{(строка 1)},\\
&\quad \frac{3}{2}x_1 \qquad + 1x_3 - 1x_4 - \frac{1}{2}x_5 &&= 9 \quad \text{(строка 2)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, базисное решение имеет вид

$$x_0 = 9, \quad x_2 = 14, \quad x_3 = 9. \tag{11}$$

После выполнения данной итерации значения всех базисных переменных оказываются неотрицательными и, следовательно, значения переменных (11) являются оптимальными для исходной задачи, заданной соотношениями (1) и (2). Оптимальные значения переменных двойственной задачи равняются взятым с обратными знаками коэффициентам при свободных переменных в строке 0, получаемой в результате выполнения последней (заключительной) итерации. Таким образом, $y_1 = -(-1) = 1$ и $y_2 = -(-^1/_2) = {}^1/_2$ есть оптимальное решение задачи, представленной соотношениями (3) и (4).

Максимизация. Рассмотренный выше алгоритм применим для решения задач минимизации, но его легко видоизменить, с тем чтобы приспособить к решению задач максимизации. На каждом этапе итерационного процесса коэффициенты при всех небазисных переменных в строке 0 принимают неотрицательные значения. *Двойственный симплекс-критерий I* остается без изменения, однако формулировка двойственного симплекс-критерия II изменится.

Двойственный симплекс-критерий II (максимизация). а) Берутся отношения текущих значений коэффициентов при небазисных переменных в строке 0 к соответствующим коэффициентам, фигурирующим в строке, содержащей переменную x_k, подлежащую исключению из базиса при очередной итерации (при этом не принимаются в расчет отношения, знаменатели в которых равны нулю или положительному числу).

б) Выбирается максимальное отношение (соответствующее некоторой переменной x_j). Именно эта переменная должна быть включена в очередной базис.

Особенности вычислительной процедуры. Здесь не обсуждаются свойства двойственного симплекс-алгоритма, как это было сделано при изложении симплексного метода в гл. 4. (Большинство положений пришлось бы просто повторить.) Однако для полноты рассмотрения коснемся вопроса о том, каким образом двойственный симплекс-алгоритм позволяет определить, в каких случаях исходная задача не имеет допустимых решений. Если на этапе использования *двойственного симплекс-критерия II* окажется, что значения *всех* коэффициентов в строке, содержащей переменную x_k, подлежащую исключению из базиса, не отрицательны, то исходная задача не имеет ни одного допустимого решения. (При этом соответствующая двойственная задача имеет неограниченное оптимальное решение.)

Обратим также внимание на одну особенность двойственного симплекс-алгоритма, которую можно рассматривать как недостаток последнего. Если итерационный процесс приостановить, не достигнув точки сходимости, то соответствующее данному этапу вычислений базисное решение исходной задачи оказывается *недопустимым*.

Двойственный симплекс-алгоритм используется при составлении многих современных машинных программ для решения задач линейной оптимизации. В соответствии с этими программами ЭВМ автоматически исследует ограничения и целевую функцию, с тем чтобы определить, можно ли в процессе вычислений воспользоваться двойственным симплекс-алгоритмом.

Сравнение основного и двойственного алгоритмов. Укажем взаимосвязи между двумя рассмотренными выше методами решения задач линейного программирования.

1) Оба метода основаны на переходе от одного базисного решения к другому, лежащему в его окрестности. При каждой итерации производится лишь единственная замена одного базиса другим.

2) На каждом этапе итерационного процесса разница между оптимальным и текущим (пробным) значениями целевой функции по крайней мере не увеличивается по сравнению с предыдущим этапом.

3) *Критерий I* как в первом, так и во втором методе позволяет уменьшить степень недопустимости пробных решений. В рамках симплекс-метода этот критерий устраняет недопустимость для решения двойственной задачи; двойственный симплекс-метод предусматривает правило устранения недопустимости для решения исходной задачи.

4) *Критерий II* как в первом, так и во втором методе позволяет сохранить степень допустимости пробных решений. В рамках симплексного метода базисные переменные остаются допустимыми для исходной задачи; при использовании двойственного симплекс-метода продолжают оставаться допустимыми коэффициенты в строке 0 двойственной модели.

В более сжатой формулировке можно утверждать, что:

1) Использование симплексного метода для решения задачи линейного программирования эквивалентно использованию двойственного симплекс-метода для решения соответствующей двойственной задачи.

2) Использование двойственного симплекс-метода для решения задачи линейного программирования эквивалентно использованию обычного симплексного метода для решения соответствующей двойственной задачи.

5.9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

При использовании линейного программирования для решения практических задач может возникнуть потребность в рассмотрении дополнительных ограничений после того, как получено предварительное решение для первоначальной модели. Иногда необходимость в учете дополнительных ограничений появляется после анализа всех следствий, вытекающих из характера полученного оптимального решения. В ряде других случаев некоторые ограничения, имевшие место в первоначальной формулировке задачи, сознательно опускают, чтобы облегчить вычисления. Опыт показывает, что объем вычислений при использовании симплексного метода возрастает *в грубом приближении* пропорционально кубу числа ограничений. Следовательно, устанавливая ограничения для исходной модели, следует быть весьма осмотрительным. Нередко заведомо известно, что некоторые из ограничений лишь в незначительной степени влияют (либо не влияют вообще) на вид оптимального решения. Такие ограничения (иногда их называют **второстепенными**) учитываются по мере необходимости на последующих этапах анализа.

Проверка выполнимости добавочного условия при известном решении исходной задачи представляет собой простейший случай анализа модели на чувствительность. Для этого достаточно подставить полученные оптимальные значения управляемых переменных в дополнительное условие и проверить, выполняется ли это условие. Если данное условие не выполняется, то для восстановления допустимости пробного решения можно воспользоваться двойственным симплекс-методом.

С целью иллюстрации вновь обратимся к задаче, сформулирован ной в разд. 4.4 (см. также разд. 5.1). Пусть система ограничений (I) (разд. 5.1) дополнена условием

$$14x_1 + 7x_3 + 1x_4 + 1x_8 = 150 \quad \text{(строка 4)}, \tag{1}$$

где $x_8 \geqslant 0$ — свободная переменная. С учетом оптимального базисного решения имеем

$$14 \cdot \frac{50}{7} + 7 \cdot \frac{55}{7} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot x_8 = 150, \tag{2}$$

или

$$x_8 = -5. \tag{3}$$

Значение x_8 отрицательно; следовательно, рассматриваемое решение дополнительному условию не удовлетворяет. Поэтому необходимо проделать следующее:

Дополним базис, построенный для первоначальной задачи, переменной x_8. С помощью обычной процедуры, используемой для замены текущего опорного плана, исключим из системы уравнений (I) базисные переменные x_1 и x_3, используя соотношения в строках 1 и 3 системы уравнений (F). Для этого умножим строку 1 на —14, строку 3 на —7, а затем сложим полученные соотношения с соотношением (1). В результате будем иметь

$$-12x_2 - 1x_4 - 17x_5 + 1x_7 + 1x_8 = -5. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь *двойственным симплекс-критерием II* (максимизация). Согласно этому критерию, в очередной базис вместо x_8 должна войти переменная x_2. После выполнения обычной вычислительной процедуры, применяемой при замене базиса, получаем допустимое и, следовательно, оптимальное решение для расширенной модели:

$$x_0 = \frac{8325}{84}, \quad x_1 = \frac{575}{84}, \quad x_6 = \frac{3930}{84}, \quad x_3 = \frac{650}{84}, \quad x_2 = \frac{35}{84}. \qquad (5)$$

Заметим, что во многих случаях для восстановления допустимости базиса требуется не одна, а несколько итераций, выполняемых по правилам, предписанным двойственным симплекс-алгоритмом. Совершенно очевидно, что описанный выше метод легко обобщить на тот случай, когда вводится сразу *несколько* дополнительных ограничений.

Еще одно замечание относительно констант в правых частях ограничений. При анализе на чувствительность относительно вариаций констант в правых частях ограничений (разд. 5.3 и 5.6) мы не установили, что следует предпринять в том случае, когда та или иная вариация приводит к тому, что оптимальное базисное решение перестает быть допустимым. В данном случае значение одной из базисных переменных оказывается отрицательным, и поэтому необходимо воспользоваться двойственным симплекс-алгоритмом, начиная с рассмотрения пробного решения, полученного на заключительной итерации для первоначальной модели.

Так, например, при анализе задачи, приведенной в разд. 5.1, было показано, что при замене правой части строки 1 на $15 + \delta$ оптимальный базис остается допустимым, если $-50/10 \leqslant \delta \leqslant 325/61$ [см. соотношение (2) в разд. 5.3]. Одновременно мы убедились, что в случае, когда это условие не выполняется, значение x_1 становится отрицательным. Чтобы снова построить допустимое решение, необходимо исключить из базиса переменную x_1 и с помощью *двойственного симплекс-критерия II* (максимизация) определить переменную, подлежащую включению в очередной базис.

5.10. ПЕРЕМЕННЫЕ, ЗНАЧЕНИЯ КОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНЫ СВЕРХУ

Во многих важных линейных оптимизационных моделях значение каждой из переменных ограничено сверху, т. е.

$$x_j \leqslant u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Поскольку шкала измерения для x_j может быть выбрана произвольно, без потери общности можно положить $u_j = 1$.

Неравенство (1) можно, разумеется, поставить в один ряд со всеми остальными ограничениями, имеющими место в той или иной задаче. Однако в силу простоты соотношения (1) удается построить такой метод решения, когда можно обойтись без расширения системы условий на n соотношений вида (1). Для построения такого метода требуется лишь несколько видоизменить правила, предписанные симплексным методом.

Соотношение (1) можно представить в виде

$$x_j + x'_j = 1, \quad \text{где} \quad x'_j \geqslant 0 \tag{2}$$

(при этом мы положили $u_j = 1$). В процессе выполнения итераций может возникнуть необходимость в исключении из системы уравнений переменной x_j с помощью подстановки

$$x_j = 1 - x'_j. \tag{3}$$

При такой подстановке x'_j входит в модель в явном виде. При последующих итерациях может возникнуть необходимость в исключении из системы уравнений переменной x'_j с помощью подстановки

$$x'_j = 1 - x_j. \tag{4}$$

При этом в модели вновь появляется в явном виде переменная x_j.

В тех случаях, когда производится подстановка (3) или (4), говорят, что имеет место подстановка, **эквивалентная ограничению сверху.**

Предлагаемый алгоритм основан на использовании *симплекс-критерия I* (максимизация) в его первоначальном варианте и следующей модификации *симплекс-критерия II*.

Симплекс-критерий II (при значениях переменных, ограниченных сверху). а) Рассматриваются отношения правых частей ограничений к тем коэффициентам при новых базисных переменных, значения которых *положительны*. Обозначим через r_1 наименьшее среди всех возможных отношений (соответствующее базисной переменной в строке k).

б) Отдельно рассматриваются отношения правых частей ограничений, равных единице, к тем коэффициентам при новых базисных переменных, значения которых *отрицательны*. Пусть r_2 — наименьшее среди всех отношений такого рода (соответствующее базисной переменной в строке k').

в) Пусть r — наименьшее из значений r_1 и r_2.

г) Если $r \geqslant 1$, то вместо описанной выше стандартной процедуры замены базиса производится подстановка типа (3) или (4).

д) В случае $r = r_1$ выполняется стандартная процедура замены базиса, модифицирующая строку k.

е) Если $r = r_2$, то выполняется стандартная процедура замены базиса, модифицирующая строку k'; затем в строке k' осуществляется замена $x_j \longleftrightarrow x'_j$ [см. (2)].

После выполнения заключительной итерации решение будет содержать либо x_j, либо x'_j. Если переменная x_j окажется небазисной, ее значение приравнивается нулю. Если же x_j войдет в базис, то ее пробное значение является оптимальным. Если переменная x'_j окажется небазисной, то оптимальное значение $x_j = 1$. Если в базис войдет x'_j, то оптимальное значение x_j равняется $1 - x'_j$. Ниже приводится пример на применение только что сформулированного критерия.

Задачи с ограниченными сверху переменными можно решать с помощью несколько видоизмененного двойственного симплекс-алгоритма. *Критерии I и II* остаются при этом без изменений; подстановка типа (3) или (4) производится по мере необходимости на различных этапах итерационного процесса. Читателю предоставляется возможность продемонстрировать эффективность такого алгоритма самостоятельно. Вычислительный процесс можно начать, выбрав в качестве пробного решения модифицированной задачи (за счет введения для переменных ограничений сверху) оптимальное решение (которое предполагается конечным) соответствующей задачи, в которой значения переменных не ограничены сверху, причем такое решение, которое не удовлетворяет дополнительным ограничениям, накладываемым на управляемые переменные.

Пример. Рассмотрим задачу:

$$\text{максимизировать} \quad 4x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 11x_4 \tag{5}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leqslant \frac{5}{2}, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leqslant \frac{275}{16}, \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{gathered} \tag{6}$$

В первое и второе соотношения введем свободные переменные x_5 и x_6 соответственно. Заметим, что верхняя граница для значений этих переменных не равна единице. Однако это нисколько не усложняет вычислительную процедуру.

Начальное базисное решение включает упомянутые выше свободные переменные; это решение приведено в таблице на рис. 5.3 (см. также разд. 4.9). Согласно *симплекс-критерию I* (максимизация), в очередной базис входит переменная x_4. Поскольку коэффициенты при x_4 не отрицательны,

$$r = r_1 = \min\left(\frac{5}{2},\ \frac{275}{15\cdot 16}\right) = \frac{275}{240} > 1. \tag{7}$$

Следовательно, согласно *симплекс-критерию II* (при значениях переменных, ограниченных сверху), необходимо произвести подстановку $x_4 = 1 - x_4'$ (итерация 2). При этом x_4' входит в очередное пробное решение, а пробные значения базисных переменных соответствующим образом изменяются.

На следующей итерации в базис вводится x_2. При этом снова все коэффициенты при x_2 оказываются неотрицательными и, следовательно,

$$r = r_1 = \min\left(\frac{3}{2},\ \frac{17}{5\cdot 16}\right) = \frac{17}{80}, \tag{8}$$

Номер итерации	Базис	Пробные значения	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_0	0	−4	10	−9	−11
	x_5	5/2	1	1	1	1
	x_6	257/16	3	5	10	−15
			x_1	x_2	x_3	x_4'
2	x_0	11	−4	−10	−9	11
	x_5	3/2	1	1	1	−1
	x_6	17/16	3	5	10	−15
			x_1	x_6	x_3	x_4'
3	x_0	105/8	−2	2	11	−19
	x_5	103/80	2/5	−1/5	−1	2
	x_2	17/80	3/5	1/5	2	−3
			x_1	x_6	x_3	x_2'
4	x_0	1449/80	−9/5	11/15	−5/3	19/3
	x_5	61/80	4/5	−1/15	1/3	−2/3
	x_4'	21/80	−1/5	−1/15	−2/3	1/3
			x_5	x_6	x_3	x_2'
5	x_0	1269/164	9/4	7/12	−11/12	29/6
	x_1	61/64	5/4	−1/12	5/12	−5/6
	x_4'	29/64	1/4	−1/12	−7/12	1/6
			x_5	x_6	x_4	x_2'
6	x_0	331/16	13/7	5/7	11/7	32/7
	x_1	9/16	10/7	−1/7	−5/7	−5/7
	x_3	15/16	−3/7	1/7	12/7	−2/7

Рис. 5.3. Сводная симплекс-таблица для задачи с ограниченными значениями переменных.

т. е. x_2 входит в базис вместо x_6. После обычной процедуры замены опорного плана получаем значения всех коэффициентов модели (как результат выполнения итерации 3).

На данном этапе необходимо ввести в базис переменную x_4'; при этом имеем

$$r_1 = \frac{103}{28 \cdot 0}, \quad r_2 = \frac{(17/18)-1}{-3}. \quad r = r_2 = \frac{21}{80}. \tag{9}$$

Следовательно, переменная x_4' (значение которой ограничено сверху) входит в базис вместо x_2. Значит, после замены базиса следует произвести подстановку $x_2 = 1 - x_2'$. Именно в этом заключается итерация 4.

Легко убедиться, что на итерации 5 вместо x_5 в базис войдет x_1, так как $r = r_1 < 1$. Можно показать, что следующий шаг будет заключаться в том, чтобы вместо x_4' ввести в базис x_3; при этом производится замена $x_4 = 1 - x_4'$, т. е. выполняется итерация 6, результаты которой также представлены в таблице на рис. 5.3. Оптимальные значения переменных x_1 и x_3 приведены на пересечении шестой составной строки и третьего столбца таблицы на рис. 5.3. Оптимальное значение x_2 равняется единице, так как переменная x_2' является небазисной.

При ознакомлении с таблицей, содержащей данные для всех итераций, следует обратить внимание на то, что x_4 входит вначале в решение как переменная, значение которой ограничено сверху, и, следовательно, должна быть произведена подстановка $x_4' = 1 - x_4$. Затем в базис вводится x_4'. На итерации 4 переменная x_4' исключается из базиса и, поскольку значение данной переменной ограничено сверху, производится замена $x_4' = 1 - x_4$ (рис. 5.3).

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

В упражнениях 1—7 за основу берется модель, рассмотренная в разд. 4.4. Исходная система уравнений (I) и система уравнений на этапе заключительной итерации (F) приведены в начале разд. 5.1. Тщательный анализ сформулированных ниже задач во многих случаях позволит найти требуемое решение, минуя целый ряд вычислений, предусмотренных симплексным алгоритмом.

1. а) Пусть коэффициент при x_2 в первоначальном выражении для целевой функции равен $4^6/_7$ (вместо 5). Требуется вычислить коэффициент при x_2 в строке 0 на каждой симплекс-итерации, а также показать, что после выполнения заключительной итерации коэффициент при x_2 в строке 0 принимает значение $^2/_7$ ($^3/_7 - ^1/_7$).

б) Рассмотрите упражнение п. а), положив коэффициент при x_2 в первоначальном выражении для целевой функции равным $5^1/_7$ (вместо 5).

в) Пусть коэффициент при x_4 в первоначальном выражении для целевой функции равен 10 (вместо 11). Требуется вычислить коэффициент при x_4 в строке 0 на каждой симплекс-итерации и, в частности, показать, что после выполнения заключительной итерации этот коэффициент равен $^4/_7$ ($^{11}/_7$ — 1).

г) Рассмотрите упражнение п. в), положив коэффициент при x_4 в первоначальном выражении для целевой функции равным 12 (вместо 11).

д) Пусть коэффициент при x_3 в первоначальном выражении для целевой функции равен $9 + \delta$. В каком интервале значений δ базисное решение, соответствующее (F), остается оптимальным? Какую переменную следует включить в базис в том случае, когда значение δ лежит вне найденного интервала (слева от предельного значения; справа от предельного значения)?

е) Пусть коэффициент при свободной переменной x_6 в первоначальном выражении для целевой функции равен δ. Ответьте на вопросы, поставленные в п. д).

2. Остается ли базисное решение, соответствующее (F), оптимальным, если подлежащая максимизации целевая функция (в ее первоначальной записи) имеет вид

а) $6x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 12x_4$?
б) $3^3/_4x_1 + 5^2/_7x_2 + 9x_3 + 12^3/_7x_4$?
в) $3^1/_2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 12x_4$?
г) $6^1/_2x_1 + 5^2/_7x_2 + 9x_3 + 11x_4$?
д) $4x_1 + 5^2/_7x_2 + 8x_3 + 12^3/_7x_4$?
е) $4x_1 + 5x_2 + 7^1/_2x_3 + 12x_4$?
ж) $4x_1 + 5x_2 + 13^1/_2x_3 + 12x_4$?
з) $4x_1 + 5^2/_7x_2 + 13x_3 + 12x_4$?

Для каждого из этих случаев определите, какую из переменных следует включить в очередной базис, если базисное решение для (F) оказывается неоптимальным.

3. Остается ли базисное решение, соответствующее (F), оптимальным, если максимизируемая целевая функция (в ее первоначальной записи) имеет вид

а) $7x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 18x_4$?
б) $8x_1 + 9x_2 + 15x_3 + 21x_4$?
в) $11x_1 + 16x_2 + 32x_3 + 46x_4$?
г) $12x_1 + 17x_2 + 33x_3 + 45x_4$?
д) $33x_1 + 50x_2 + 103x_3 + 163x_4$?

Для каждого из этих случаев определите, какую из переменных следует включить в очередной базис, если базисное решение, соответствующее (F), оказывается неоптимальным.

4. Пусть в первоначальном выражении для целевой функции коэффициент при x_1 равен $4 + \delta_1$, а коэффициент при x_3 равен $9 + \delta_3$.

а) С помощью приема, который был использован при выводе соотношений (5), а затем (6) в разд. 5.2, найдите неравенства для δ_1 и δ_3, определяющие интервалы вариаций δ_1 и δ_3, при которых базисное решение, соответствующее (F), продолжает оставаться оптимальным.

б) Изобразите графически область, определяемую неравенствами, полученными в п. а).

в) Пусть коэффициенты при x_1 и x_3 в первоначальном выражении для целевой функции равны соответственно c_1 и c_3. Как и в предыдущем случае, изобразите графически область изменения c_1 и c_3, такую, что для любой точки, лежащей внутри этой области, базисное решение, соответствующее (F), является оптимальным.

5. а) Пусть константа в правой части строки 2 системы уравнений (I) равна 100 (вместо 120). Требуется вычислить значения констант в правых частях всех строк на каждой симплекс-итерации и, в частности, убедиться, что после заключительной итерации константа в правой части строки 2 принимает значение ${}^{185}/_{7}$ $({}^{325}/_{7} - 20)$.

б) Рассмотрите упражнение п. а), положив константу в строке 2 системы уравнений (I) равной $120 - {}^{325}/_{7}$ (вместо 120).

в) Пусть константа в правой части строки 1 системы уравнений (I) равна 11 (вместо 15). Требуется вычислить значения констант в правых частях всех строк на каждой симплекс-итерации и убедиться в том, что базисное решение, соответствующее (F), является по-прежнему оптимальным.

г) Рассмотрите упражнение п. в), положив константу в строке 1 системы уравнений (I) равной 20 (вместо 15).

д) Пусть константа в правой части строки 1 системы уравнений (I) равна $15 + \delta$. Покажите, что базисное решение, соответствующее (F), остается допустимым, если $-{}^{5}/_{10} \leqslant \delta \leqslant {}^{325}/_{61}$ [см. соотношение (2) разд. 5.3].

е) Пусть константа в правой части строки 3 системы уравнений (I) равна $100 + \delta$. Для какого интервала значений δ базисное решение, соответствующее (F), остается допустимым?

6. Остается ли базисное решение, соответствующее (F), допустимым, если константы в правых частях строк 1, 2 и 3 принимают соответственно значения

а) 20, 110 и 130?
б) 25, 75 и 215?
в) 15, 30 и 185?
г) 18, 150 и 40?
д) 22, 150 и 80?

Для каждого из этих случаев определите оптимальные значения каждой переменной и соответствующее значение целевой функции, если базисное решение, соответствующее (F), остается допустимым. [В противном случае докажите, что базис на этапе (F) оказывается недопустимым.]

7. Пусть в правых частях строк 1 и 3 имеем соответственно $15 + \delta_1$ и $100 + \delta_3$.

а) Требуется найти неравенства для δ_1 и δ_3, определяющие интервалы вариаций δ_1 и δ_3, при которых базисное решение, соответствующее (F), остается допустимым.

б) Изобразите графически область, определяемую неравенствами, полученными в п. а).

в) Пусть в правых частях строк 1 и 3 имеем соответственно b_1 и b_3. Как и в предыдущем случае, изобразите графически область изменения b_1 и b_3, такую, что для любой точки, лежащей внутри этой области, базисное решение, соответствующее (F), остается допустимым.

г) Рассмотрите упражнение п. в), положив значение константы в правой части строки 2 равной

1) 121;

2) 119.

В упражнениях 8—11 за основу берется модель распределения ресурсов, рассмотренная в разд. 4.4. Эти упражнения служат для закрепления материала, изложенного в разд. 5.5.

8. Требуется сформулировать двойственную задачу при условии, что:

а) целевая функция (подлежащая максимизации) имеет вид

$$6x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 12x_4;$$

б) в правых частях строк 1, 2 и 3 имеем соответственно 25, 80 и 150;

в) коэффициенты при x_3 в строках 1, 2, 3 равны соответственно 1, 4 и 9;

г) коэффициенты при x_2 в строках 1, 2, 3 равны соответственно 1, 6 и —8, а в выражении для целевой функции вместо коэффициента 5 стоит коэффициент —3;

д) вводится дополнительная переменная z, коэффициенты при которой в строках 1, 2 и 3 равны соответственно 1, 1 и 18; коэффициент при z в выражении для целевой функции берется равным 13;

е) имеет место дополнительное ограничение

$$4x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 6x_4 \leqslant 50;$$

ж) имеют место все модификации исходной модели, указанные в п. а) — е);

з) требуется найти два допустимых решения и соответствующие значения целевой функции для двойственной задачи, представленной соотношениями (1) и (2) в разд. 5.5.

9. Повторите все симплекс-итерации, выполненные в разд. 4.4.

а) Чему равны пробные значения переменных двойственной задачи на каждом этапе итерационного процесса?

б) Возникают ли ситуации, когда соответствующее решение двойственной задачи перестает быть допустимым? Какие значения принимает при этом целевая функция двойственной задачи?

10. Найдите оптимальные значения переменных двойственной задачи, предположив, что базисное решение, соответствующее (F) в разд. 5.1, является оптимальным, а коэффициенты при x_1 и x_3 в выражении для целевой функции равняются соответственно

а) 7 и 14; г) 12 и 33;

б) 8 и 15; д) 33 и 103.

в) 11 и 32;

11. а) Пусть коэффициент при x_4 в выражении для целевой функции, рассмотренной в разд. 4.4, равен $9+\delta$. Определите верхний предел значений δ, при котором базисное решение, соответствующее (F) (разд. 5.1), перестает быть оптимальным. При этом следует воспользоваться тем ограничением соответствующей двойственной задачи, которое связано с x_4.

б) Найдите оптимальное значение целевой функции исходной задачи, если в правых частях строк 1, 2 и 3 имеем соответственно

16, 120 и 100 15, 120 и 101 16, 120 и 101 14, 121 и 101

14, 120 и 100 15, 120 и 99 14, 120 и 99 16, 119 и 99.

в) Пусть в правой части уравнения в строке 1 стоит $15+\delta$. Может ли значение целевой функции получить положительное приращение, превышающее $^{13}/_{7}\delta$ при $\delta > {}^{325}/_{61}$? Полученный результат оцените с «экономической» точки зрения (интерпретация модели дана в гл. 2).

г) Пусть коэффициент при x_2 в строке 3 равен $5+\delta$. В каких пределах может меняться δ, не нарушая оптимальности базисного решения, соответствующего (F)?

д) Пусть коэффициент при x_2 в строке 1 равен $1+\delta$. В каких пределах может меняться δ, не нарушая оптимальности базисного решения, соответствующего (F)?

е) Пусть в строки 1, 2 и 3 введена новая переменная z с коэффициентами 1, 1 и 18 соответственно. Чему равно наименьшее значение коэффициента при z в выражении для целевой функции, для которого базисное решение, соответствующее (F), продолжает оставаться оптимальным?

ж) Рассмотрите упражнение п. е), предположив, что коэффициент при z в строке 3 равен 16.

з) Чему равны коэффициенты при z в строках 1, 2 и 3 на заключительной итерации (F), если выполняются условия, сформулированные в п. е)? п. ж)?

и) Пусть коэффициент при x_1 в строке 3 равен $3+\delta$. Как найти интервал, в пределах которого может меняться δ, не нарушая оптимальности полученного базиса для (F)?

12. Возьмем за основу задачу, представленную соотношениями (1) и (2) разд. 5.8.

а) Какая переменная подлежит исключению из базиса на первой итерации, если: 1) константа в правой части второго соотношения (2) равна 10 (вместо 8)? 2) константа в правой части первого соотношения равна 10 (вместо 5)? 3) константа в правой части первого соотношения равна 15 (вместо 5), а константа в правой части второго соотношения равна 10 (вместо 8)?

б) Пусть при первой итерации из базиса исключается x_5. Требуется определить, какая переменная вводится в очередной базис и чему равняется ее новое значение, если коэффициенты при x_1, x_2 и x_3 в выражении для целевой функции равняются соответственно

$$1,\ 0 \text{ и } 2;\quad 8,\ 8 \text{ и } 8;\quad 4,\ 1 \text{ и } 3;\quad {}^1/_2,\ {}^1/_2 \text{ и } {}^1/_2.$$

в) Рассмотрите упражнение п. б), предположив дополнительно, что коэффициент при x_2 во втором соотношении (2) равен 2 (вместо —2).

г) Рассмотрите упражнение п. б), предположив, что коэффициент при x_3 во втором соотношении (2) равен 2 (вместо 4).

д) Как изменятся результаты, если при первой итерации из базиса исключается x_4, а не x_5?

13. Проверьте, останется ли допустимым базисное решение, соответствующее (F), если константу в правой части соотношения (1) разд. 5.9 положить равной:

а) 140;

б) 160;

в) 170.

В каждом случае найдите оптимальное решение.

14. Пусть константа в правой части соотношения, соответствующего строке 1 системы уравнений (I) (разд. 5.1), равна 5 (вместо 15). Требуется найти оптимальное решение. Для этого следует воспользоваться двойственным симплекс-алгоритмом, начав с рассмотрения системы уравнений (F), видоизмененной с учетом указанного выше условия.

15. Поясните значение следующих терминов:

анализ после получения оптимального решения;
анализ на чувствительность;
классификационный анализ;
присоединенные целевые функции;
параметрическое программирование;
двойственность;
исходная и двойственная задачи;
скрытые доходы (скрытая прибыль);
допустимое решение двойственной задачи;
второстепенные ограничения;
переменные, значения которых ограничены сверху.

УПРАЖНЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

16. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad -2x_1 - 1x_2 + 3x_3 - 2x_4$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 2x_4 &\leqslant 7 \quad (\text{ресурс } A),\\ -1x_1 - 2x_2 + 4x_3 \qquad &\leqslant 12 \quad (\text{ресурс } B),\\ -1x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\leqslant 10 \quad (\text{ресурс } C),\\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned} \tag{1}$$

Если ввести свободные переменные x_5, x_6 и x_7, то после выполнения последней симплекс-итерации получим

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{7}{5}x_1 \qquad\qquad + \frac{12}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{4}{5}x_6 \qquad &= 11 \quad (\text{строка } 0),\\ \frac{3}{10}x_1 + 1x_2 \qquad + \frac{4}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{10}x_6 \qquad &= 4 \quad (\text{строка } 1),\\ -\frac{1}{10}x_1 \qquad + 1x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{10}x_6 \qquad &= 5 \quad (\text{строка } 2),\\ \frac{1}{2}x_1 \qquad\qquad + 10x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 1x_7 &= 11 \quad (\text{строка } 3). \end{aligned} \tag{2}$$

а) Покажите, чему равняются оптимальные значения x_j и соответствующее значение целевой функции. Является ли оптимальное решение единственным?

б) Определите, в каких пределах могут меняться коэффициенты при небазисных переменных в выражении для целевой функции, не нарушая оптимальности базиса, полученного в результате выполнения п. а).

в) Рассмотрите упражнение п. б) для случая, когда варьируются коэффициенты при базисных переменных.

г) Пусть коэффициенты при x_2 и x_3 в выражении для целевой функции равняются соответственно $-1 + \delta_2$ и $3 + \delta_3$. Определите систему неравенств для δ_2 и δ_3, при выполнении которых базис, полученный в п. а), продолжает оставаться оптимальным. Изобразите графически область изменения δ_2 и δ_3, определяемую упомянутыми выше неравенствами.

д) Покажите, в каких интервалах могут меняться константы в правых частях соотношений (1), не нарушая оптимальности базиса, полученного в результате выполнения упражнения п. а).

е) Пусть в правых частях первых двух соотношений (1) имеем соответственно $7+\delta_1$ и $12+\delta_2$. Найдите неравенства для δ_1 и δ_2, при выполнении которых базис, полученный в п. а), продолжает оставаться допустимым. Изобразите графически область изменения δ_1 и δ_2, определяемую этими неравенствами.

ж) Сформулируйте для (1) двойственную задачу. Найдите оптимальные значения переменных двойственной задачи и соответствующее значение целевой функции для двойственной модели.

з) Дайте экономическую интерпретацию переменных двойственной задачи и поясните ее на численных примерах.

и) Исходя из ограничений, полученных для двойственной модели, определите, в каких интервалах могут меняться коэффициенты при небазисных переменных в выражении для целевой функции исходной задачи, не нарушая оптимальности решения, полученного в п. а).

к) Пусть вводятся новые управляемые переменные x_8 и x_9. Допустим, что коэффициенты при x_8 в соотношениях (1) равны соответственно 5, —3 и 1, а коэффициент при x_8 в выражении для целевой функции равен 2. Пусть коэффициенты при x_9 в соотношениях (1) равны соответственно —2, 10 и 12, а коэффициент при x_9 в выражении для целевой функции равен —4. Можно ли при этом улучшить решение, полученное в п. а)? Если можно, то покажите, каким образом это достигается. Если нельзя, покажите, что произойдет при включении в базис переменной x_9.

л) Вычислите коэффициенты при x_8 и x_9 в уравнениях (2).

м) Пусть коэффициент при x_1 в первом соотношении (1) равен $1+\delta$. Определите, в каких пределах можно изменять δ, не нарушая оптимальности решения, полученного в п. а).

н) Пусть коэффициент при x_1 во втором соотношении (1) равен $-1+\delta$. Определите, в каких пределах можно изменять δ, не нарушая оптимальности решения, полученного в п. а).

о) Рассмотрите упражнения п. м) и н) для случая, когда варьируется коэффициент при x_4.

17. В указанных ниже задачах а) — д) требуется:

найти оптимальные значения управляемых переменных и соответствующее значение целевой функции;

определить, в каких пределах могут меняться коэффициенты при переменных в выражении для целевой функции, не нарушая оптимальности базиса, полученного на заключительной симплекс-итерации;

определить, в каких пределах могут меняться значения констант в правых частях ограничений, не нарушая оптимальности базиса, полученного на заключительной симплекс-итерации;

сформулировать двойственную задачу;

определить оптимальные значения переменных и соответствующее значение целевой функции двойственной задачи;

определить, исходя из ограничений, фигурирующих в двойственной задаче, в каких пределах могут меняться коэффициенты при небазисных переменных в выражении для целевой функции, не нарушая оптимальности решения, полученного на заключительной симплекс-итерации.

Рассмотрите:

а) задачу, сформулированную в разд. 1.6 (см. также упражнение 18 в гл. 4);

б) задачу, сформулированную в упражнении 19 гл. 4;

в) задачу, сформулированную в упражнении 20 а) гл. 4;

г) задачу, сформулированную в упражнении 20 б) гл. 4;

д) задачу, сформулированную в упражнении 21 гл. 4.

18. Предположим, что после некоторой итерации при решении задачи линейного программирования получаются соотношения а) или б). Напомним, что x_0 максимизируется, а x_4, x_5, x_6 — свободные переменные, соответствующие первому, второму и третьему ограничениям (для ресурса A, для ресурса B и для ресурса C). Требуется:

найти оптимальное решение и проверить, является ли оно единственным;

определить дополнительную выгоду, полученную за счет единичного приращения каждого ресурса;

найти оптимальные значения переменных соответствующей двойственной задачи;

дать физическую интерпретацию переменных двойственной задачи и пояснить ее на численных примерах.

а)
$$
\begin{aligned}
&x_0 - 4x_2 - 1x_4 - 2x_6 = 100 && \text{(целевая функция)},\\
&- 1x_2 + 6x_4 + 1x_5 + 3x_6 = 12 && \text{(ресурс } A),\\
&1x_1 + 5x_2 + 10x_4 + 5x_6 = 20 && \text{(ресурс } B),\\
&1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 10x_6 = 10 && \text{(ресурс } C);
\end{aligned}
$$

б)
$$
\begin{aligned}
&x_0 - 2x_1 + 3x_2 - 1x_5 = 30 && \text{(целевая функция)},\\
&2x_1 - 2x_2 + 1x_4 + 4x_5 = 6 && \text{(ресурс } A),\\
&2x_1 + 1x_3 + 4x_5 = 12 && \text{(ресурс } B),\\
&4x_1 + 4x_2 - 6x_5 + x_6 = 16 && \text{(ресурс } C).
\end{aligned}
$$

19. Рассмотрите следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad -10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \tag{1}$$

при наличии ограничений

$$
\begin{gathered}
-1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leqslant 19,\\
-1x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 \leqslant 57,\\
x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).
\end{gathered} \tag{2}
$$

а) Сформулируйте двойственную задачу и покажите, что одним из допустимых ее решений является следующее:

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 5.$$

б) Воспользуйтесь результатами, полученными в п. а), и найдите оптимальное решение как исходной, так и двойственной задачи.

в) Введите в п. б) дополнительное ограничение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 20$. Найдите оптимальные решения исходной и двойственной задач.

20. Рассмотрите следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \quad -1x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 14x_4,$$

если

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leqslant 24,$$
$$-1x_1 + 1x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leqslant 4,$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

а) Сформулируйте двойственную задачу и покажите, что одним из ее допустимых решений является следующее:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 4.$$

б) Найдите оптимальное решение как исходной, так и двойственной задачи, используя результаты, полученные в п. а).

в) Введите в упражнение п. б) дополнительное ограничение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 8$ и найдите оптимальные решения исходной и двойственной задач.

21. В приведенных ниже упражнениях а) — г) за основу берется модель, рассмотренная в разд. 3.4. Требуется:

построить модель для двойственной задачи и изобразить ее графически в пространстве решений;

указать на графике одно из допустимых решений двойственной задачи;

вычислить соответствующие значения переменных и значение целевой функции двойственной задачи.

Рассмотрите:

а) соотношения (1) — (4);

б) соотношения (5) и (2) — (4);

в) соотношения (6) — (9);

г) соотношения (10) — (13).

22. Пусть x_1 и x_2 составляют оптимальный базис для моделей, приведенных в п. а) и б) упражнения 21. Требуется:

построить модели для соответствующих двойственных задач и найти их оптимальные решения;

определить, до какого предела могут возрастать значения c_3 и c_4, не нарушая структуры базиса.

Рассмотрите следующие задачи:

а) максимизировать $-1x_1 + 18x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$
при ограничениях

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 3,$$
$$-3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \leqslant 1,$$
$$x_j \leqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

б) максимизировать $-13x_1 + 24x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$
при ограничениях, указанных в п. а).

23. Каждая из приведенных ниже задач была решена в гл. 4 с помощью метода больших штрафов. Найдите для этих моделей оптимальные решения, используя двойственный симплекс-алгоритм. Рассмотрите:

а) упражнение 24 б);
б) упражнение 24 д);
в) упражнение 24 е);
г) упражнение 25 а);
д) упражнение 25 б);
е) упражнение 25 е);
ж) упражнение 28, в котором *минимизации* подлежит $x_1 + x_2$.

24. В каждом из приведенных ниже упражнений а) — в) используйте двойственный симплекс-алгоритм для нахождения оптимального решения соответствующей двойственной задачи. Рассмотрите задачи, сформулированные в упражнениях:

а) 19 гл. 4;
б) 20 а) гл. 4;
в) 20 б) гл. 4.

В каждом случае требуется показать, каким образом находится оптимальное решение исходной задачи, если известна система уравнений для двойственной задачи на последней итерации.

В каждом случае проведите сравнение пробных решений двойственной задачи, получаемых с помощью двойственного симплекс-алгоритма, с соответствующими пробными решениями исходной задачи, получаемыми обычным симплексным методом (гл. 4).

25. а) С помощью двойственного симплекс-алгоритма найдите решение задачи, представленной соотношениями (1) и (2) разд. 5.5.

б) Рассмотрим систему уравнений (I), приведенную в начале разд. 5.1. Введем в базис переменную x_4, исключив из него x_5. Требуется доказать, что получающиеся при этом пробные значения переменных двойственной задачи являются допустимыми. Являются ли допустимыми базисные переменные исходной задачи? В случае положительного ответа покажите, как выглядят оптимальные решения исходной и двойственной задач. Если ответ окажется отрицательным, найдите оптимальные решения исходной и двойственной задач, воспользовавшись двойственным симплекс-алгоритмом.

26. Рассмотрите задачу, сформулированную в упражнении 16. Требуется выяснить, остается ли оптимальное решение упомянутой выше задачи допустимым, если ввести дополнительное ограничение вида:

а) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 10$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 6$;

в) $x_2 + x_3 \leqslant 0$;

г) $x_2 + x_3 \leqslant -1$;

д) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 10$.

Найдите в каждом случае оптимальные решения исходной и двойственной задач.

27. Пусть требуется

$$\text{минимизировать } \sum_{t=1}^{T} y_t$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} y_T + y_1 &\geqslant r_1, \\ y_{t-1} + y_t &\geqslant r_t \quad (t = 2, 3, \ldots, T), \\ y_t &\geqslant 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, T). \end{aligned} \tag{1}$$

Данная модель уже рассматривалась в упражнении 30 гл. 2. Требуется:

а) записать в явном виде все соотношения (1) при $T = 5$, $r_1 = 8$, $r_2 = 7$, $r_3 = 10$, $r_4 = 10$ и $r_5 = 2$;

б) считая данную задачу двойственной, записать все соотношения для соответствующей исходной задачи;

в) найти (с помощью двойственного симплекс-алгоритма) оптимальное решение двойственной задачи и определить оптимальное решение соответствующей исходной задачи (*Примечание*: для этого потребуется не более пяти итераций);

г) найти (с помощью симплексного алгоритма) оптимальное решение исходной задачи и вычислить затем оптимальное решение соответствующей двойственной задачи (*Примечание*: для этого потребуется не более пяти итераций);

д) найти оптимальные решения исходной и двойственной задач в случае, когда $r_1 = 9$ (вместо 8).

28. Решите сформулированные ниже задачи, используя прием, рассмотренный в разд. 5.10:

а) максимизировать $5x_1 + 14x_2 + 24x_3 + 20x_4$
при ограничениях

$$\begin{gathered} 1x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4 \leqslant 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 4x_4 \leqslant 4, \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4); \end{gathered}$$

б) максимизировать $9x_1 + 1x_2 - 15x_3 - 5x_4$
при ограничениях

$$\begin{gathered} -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 1x_4 \leqslant 7, \\ 6x_1 + 16x_2 - 12x_3 - 2x_4 \leqslant 10, \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{gathered}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

29. *Двойственность и дополнительная «нежесткость».*

а) Докажите, что из теоремы двойственности вытекает теорема о дополнительной нежесткости.

б) Докажите, что из теоремы о дополнительной нежесткости вытекает теорема двойственности.

30. Покажите, каким образом теорема двойственности, доказанная в разд. 5.4 для случая, когда исходная и двойственная задачи имеют соответственно формулировки (1) — (3) и (4) — (6), может быть обобщена на тот случай, когда исходная и двойственная задачи имеют соответственно формулировки (I) — (V) и (I′) — (V′), приведенные в конце разд. 5.4.

31. Рассмотрите следующую задачу:

$$\text{максимизировать} \ \sum_{j=1}^{n} (c_j + \delta c_j^*)\, x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \delta b_i^* \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$
$$x_j \geqslant 0.$$

а) Пусть удалось найти оптимальное базисное решение для некоторого фиксированного значения δ (скажем, для $\delta = \overline{\delta}$). Требуется определить нижний и верхний пределы, в которых может меняться δ, не нарушая оптимальности базиса, полученного в случае, когда $\delta = \overline{\delta}$.

б) Полученный результат используйте для анализа модели, рассмотренной в разд. 4.4, где $\overline{\delta} = 0$, $c_1^* = -1$, $c_2^* = 0$, $c_3^* = 0$, $c_4^* = 2$, $b_1^* = 1$, $b_2^* = -20$, $b_3^* = 0$.

32. *Анализ модели на чувствительность.* Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\text{максимизировать} \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$
$$x_j \geqslant 0.$$

Пусть F — оптимальное значение целевой функции.

Допустим, что значения c_j, a_{ij}, b_i точно не заданы, но известно, что они лежат внутри следующих интервалов:

$$c_j^- \leqslant c_j \leqslant c_j^+, \quad a_{ij}^- \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}^+, \quad b_i^- \leqslant b_i \leqslant b_i^+.$$

Требуется найти значения F, соответствующие указанным выше граничным точкам.

33. *Двойственный симплекс-алгоритм.*

а) Пусть каждое из ограничений имеет вид неравенства. Требуется построить метод нахождения допустимого решения соответствующей двойственной задачи.

б) Пусть некоторые из ограничений представлены в виде равенств. Требуется разработать метод нахождения допустимого решения соответствующей двойственной задачи путем введения в рассмотрение искусственных переменных.

34. *Переменные, значения которых ограничены сверху.*

а) Покажите, каким образом можно модифицировать двойственный симплекс-алгоритм с тем, чтобы приспособить его к решению задач, управляемые переменные в которых ограничены сверху.

б) Примените этот метод для решения задачи, представленной соотношениями (5) и (6) разд. 5.10.

в) Примените этот метод для решения задач, сформулированных в п. а) и б) упражнения 28.

ГЛАВА 6

Оптимизация на сетях

6.1. ЗНАЧЕНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Сетевые оптимизационные модели, обычно являющиеся частными случаями моделей линейного программирования, важны в двух отношениях. Часто они относятся к задачам распределения продукции. Следовательно, модели этого класса имеют экономический смысл для многих промышленных фирм, располагающих несколькими предприятиями и хранящих запасы продукции на складах, размещенных в различных пунктах. Кроме того, математическая структура сетей идентична структуре других операционных моделей, на первый взгляд не имеющих с ними ничего общего. Однако указанные две причины не могут служить основанием для выделения сетевых моделей в качестве предмета специального изучения.

Важнейшей причиной, обусловливающей целесообразность такого выделения, являются особенности математических характеристик сетевых моделей. Используя эти особенности, можно существенно повысить эффективность процесса отыскания оптимальных решений задач, которые удается описать на «сетевом языке». В реальных примерах сетевые модели часто содержат тысячи операций (переменных) и сотни ограничений, в связи с чем применение эффективных алгоритмов становится не только выгодным, но просто необходимым. Наконец, исследуя сети, можно убедиться, что разнообразные, на первый взгляд совершенно непохожие операционные модели допускают применение общего глубокого метода анализа, что, несомненно, обеспечивает существенные преимущества.

В этой главе основное внимание уделяется построению сетевых моделей. Сначала рассматривается несколько примеров, относящихся к принятию плановых решений. Эти примеры наглядно показывают, почему «сетевой язык» является удобным графическим описанием задач оптимизации. Такое описание позволяет легко установить соответствие между элементами сети и элементами реальной задачи. В последующих примерах сетевое представление задач является чисто формальным. В этих примерах для установления терминологического соответствия сетевых понятий с реальными компонентами задач приходится пользоваться абстрактными аналогиями.

В гл. 7 излагаются в основном алгоритмы отыскания оптимальных решений на сетевых моделях.

6.2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача (или задача прикрепления поставщиков к потребителям) явилась одним из первых примеров оптимизации на линейных сетях. В настоящее время эта задача стала типовой для промышленных фирм, имеющих несколько предприятий, складов, рынков сбыта и оптовых баз. Модель применяется главным образом при решении плановых задач. В этом случае стратегические решения сводятся к выбору транспортных маршрутов, по которым продукция различных предприятий доставляется на несколько складов или в различные конечные пункты назначения. Пример такой задачи для фирмы «Кислое молоко» уже был приведен в разделе 2.7. Некоторые фирмы считают необходимым ежемесячно пересматривать свои планы распределения продукции, особенно в тех случаях, когда номенклатура их заказов часто существенно изменяется. Однако, как правило, фирмы составляют такие планы один раз в год.

Математическая постановка классической транспортной задачи имеет вид

$$\text{максимизировать} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i, \quad i=1, 2, \ldots, m \quad \text{(наличные ресурсы)}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant D_j, \quad j=1, 2, \ldots, n \quad \text{(спрос)}, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{для всех } i \text{ и } j. \tag{4}$$

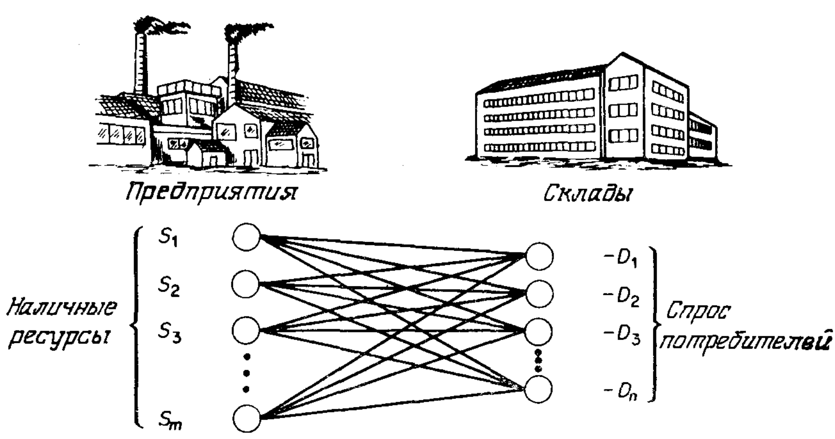


Рис. 6.1. Сеть транспортной задачи.

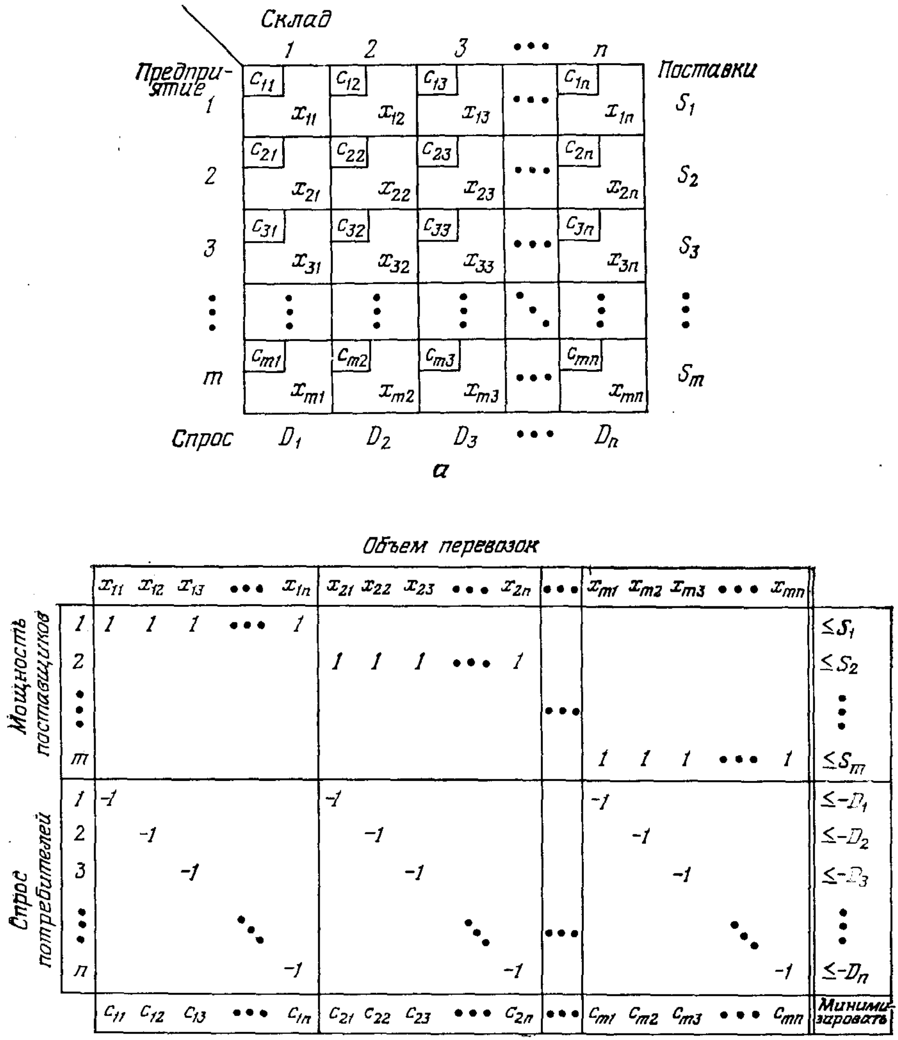


Рис. 6.2.

а — матрица условий транспортной задачи;
б — матричная форма записи постановки транспортной задачи.

Сеть и матрицы этой задачи приведены на рис. 6.1 и 6.2. (Возможно, полезно вновь обратиться к разд. 2.7, где впервые введена эта модель.)

В обычной интерпретации этой модели принято считать, что имеется m различных поставщиков (предприятий или пунктов отправления), располагающих некоторыми изделиями, которые они могут отправить n потребителям (в n пунктов назначения). В частности, предполагается, что предприятие i может отгрузить не более S_i изделий, а потребителю j требуется не менее D_j изделий. Величины S_i и D_j на рассматриваемом интервале времени или *плановом периоде* принимаются постоянными. Затраты на перевозку единицы груза из пункта отправления i в пункт назначения j равны c_{ij}. Целевой функцией является выбор плана перевозок для заданного интервала времени, минимизирующего общие транспортные затраты.

Один из важнейших результатов, полученных в теории транспортных сетей, состоит в том, что среди всех оптимальных решений задачи (1) — (4) существует по крайней мере одно решение, в котором все значения x_{ij} являются целочисленными, если все величины S_i и D_j — положительные целые числа, что будет всегда предполагаться в дальнейшем. Поэтому введение вместо условия (4) более сильного условия

$$x_{ij} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

не оказывает влияния на значение целевой функции (1). Более того, оптимальное решение задачи отыскивается при помощи симплексного метода. Все эти результаты продемонстрированы в гл. 7.

Если затраты, связанные с производством одного изделия, не одинаковы для различных предприятий, то они включаются в величины c_{ij}. Если в силу каких-либо физических причин или экономических соображений некоторое предприятие недоступно для определенного потребителя, то соответствующая величина x_{ij} исключается из задачи или, когда это более удобно, соответствующая величина c_{ij} принимается сколь угодно большой. Для упрощения рассуждений примем $c_{ij} \geqslant 0$. Тогда неравенства (3) можно переписать в виде равенств.

Чтобы задача имела допустимое решение, естественно, требуется, чтобы общие ресурсы (общая мощность) поставщиков были по крайней мере не меньше общего спроса потребителей, т. е. чтобы выполнялось условие $\sum\limits_{i=1}^{m} S_i \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} D_j$. Существует ряд ситуаций, когда можно ожидать, что общая мощность поставщиков превышает общий спрос потребителей. Так, например, величины S_i иногда соответствуют производственным *мощностям* предприятий i для определенного планового периода, а не количеству фактически выпущенной к началу этого периода продукции, предназначенной для распределения между потребителями. Однако при анализе обычной транспортной задачи и построении алгоритма ее решения удобно принять, что общая мощность поставщиков равна общему спросу потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j. \tag{6}$$

Применив простой формальный прием, можно без потери общности показать, что условие (6) всегда выполняется. С этой целью достаточно ввести фиктивного потребителя со спросом, равным $\sum_i S_i - \sum_j D_j$. Присвоим этому потребителю номер n и примем $c_{in} = 0$. Тогда величину x_{in} можно рассматривать как «фиктивную мощность поставщика i». Теперь суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей. Следовательно, пользуясь этим приемом, условия (2) также можно записать в виде равенств. Таким образом, в дальнейшем предполагается, что *выполняется условие* (6), *а ограничения* (2) *и* (3) *являются равенствами* (*если только специально не оговаривается что-либо иное*). Отсюда модель транспортной задачи принимает вид

$$\text{минимизировать} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{(предложение)}, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(спрос)}, \tag{9}$$

$$x_{ij} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad \text{для всех } i \text{ и } j, \tag{10}$$

где S_i и D_j — положительные целые числа, удовлетворяющие условию (6).

Применение модели. В математическом выражении модели (7) — (10) в неявном виде предполагается, что в качестве транспортируемого груза рассматривается только один вид продукции (так называемая однопродуктовая модель). Чем это объясняется? Дело в том, что при удовлетворении *требований* потребителей в модели не различаются источники поставок. Весь груз, поступающий в пункт назначения j, считается однородным в смысле удовлетворения ограничения по спросу.

Следует обратить особое внимание на допущение об однородности продукта, ибо может показаться, что в силу этого допущения модель имеет лишь весьма ограниченную практическую ценность. В самом деле, разве есть фирмы, имеющие несколько промышленных предприятий, которые распределяют между потребителями всего один вид продукции? Иногда такая «многопродуктовая» фирма, владеющая несколькими предприятиями, может разрабатывать отдельные планы перевозок для каждого из основных видов своей продукции. Однако, как правило, экономически выгодно ограничить число предприятий, снабжающих один склад или район сбыта. Поэтому большинство фирм пользуется планами распределения своей продукции, включающими в *явном виде* всю ее номенклатуру. Как можно легко себе представить, требуется немалая изобретательность, чтобы «подогнать» реальную распределительную задачу к условиям классической транспортной модели. Здесь нет возможности перечислить все приемы, позволившие успешно справиться с такой «подгонкой» на практике. Для пояснения основных понятий, которыми при этом пользуются, ниже приводится краткое описание одного из подходов к решению этой проблемы.

Пусть спрос на различные виды продукции в каждом пункте потребления j в течение планируемого периода известен. Примем в качестве единицы измерения общего количества требуемой продукции всех видов D_j какую-либо удобную общепринятую меру, например тонну. Точно так же будем измерять поставки S_i в тех же единицах. При вычислении величин c_{ij} предположим, что если предприятие i отправляет тонну продукции потребителю j, то эта тонна включает все виды продуктов, необходимых в пункте j в заданных пропорциях.

Возникает вопрос, насколько практически реализуемым и точным будет полученное числовое решение задачи. Чтобы разумно ответить на этот вопрос, нужно иметь в виду два обстоятельства. Прежде всего решение в сущности представляет собой некоторый *план* распределения продуктов в течение заданного интервала времени. Иными словами, модель обеспечивает прикрепление предприятий к пунктам назначения или поставщиков к потребителям. Числовые значения x_{ij} по самой своей природе являются приближенными, поскольку в большинстве реальных случаев значения D_j представляют собой лишь *прогнозы* потребностей на планируемый период. В связи с этим значения x_{ij}, полученные в решении, не являются фактическими значениями количества перевозимых продуктов, а служат только оценками величины будущих поставок. Далее, относительные достоинства полученного плана необходимо сравнить с любыми практически реализуемыми вариантами, которые может использовать фирма, в том числе, разумеется, с принятым планом перевозок. Учитывая эти соображения, многие фирмы существенно повысили свои доходы, приняв *план* перевозок, основанный на решении типовой транспортной задачи.

Остановимся вкратце на классификации сетевых моделей. Сетевые модели, рассматриваемые в этой и последующих главах, являются примерами задач линейного программирования. За исключением двух моделей, приведенных в конце этой главы, все они имеют структуру (7) — (10). Следовательно, с формальной точки зрения это разновидности классической транспортной задачи, хотя содержательно любой из примеров может не иметь ничего общего с реальной транспортировкой грузов. Класс транспортных задач можно разбить на подклассы, содержащие определенные важные модели, относительно которых принимаются некоторые дополнительные допущения. В качестве примера можно привести *задачу о назначениях* (название разъясняется в разд. 6.4), в которой принимается $n = m$, $S_i = D_j = 1$ для всех i и j. В свою очередь модели о назначениях охватывают задачи о кратчайшем (наиболее длинном) пути. Эти задачи рассматриваются в разд. 6.5 и 6.6. Чтобы избежать путаницы по мере проработки книги, следует постоянно учитывать дополнительные структурные допущения, принимаемые в каждой транспортной модели.

Ряд ограничивающих допущений транспортной модели, меняющих на первый взгляд ее свойства, можно легко модифицировать или устранить с помощью соответствующих преобразований. Представление о таких возможностях дается ниже на нескольких примерах.

Сезонные колебания спроса потребителей или мощности поставщиков. Транспортная модель описана как средство отыскания плана перевозок на определенный период времени, скажем на один год. В ряде случаев у фирмы может возникнуть потребность изменения своего плана перевозок в пределах этого интервала времени, чтобы учесть сезонные колебания спроса или изменения возможности поставки товаров. Если нельзя образовать запасов товаров в течение одного месяца для удовлетворения спроса в последующие месяцы, то фирме нужно просто решить 12 независимых транспортных задач, по одной на каждый месяц. Однако большинство фирм, работающих в условиях значительных сезонных колебаний, располагает возможностями создания запасов для удовлетворения ожидаемого спроса. Оптимальные сезонные запасы можно ввести в транспортную модель, непосредственно переопределив фигурирующие в ней величины.

Предположим, например, что фирме, имеющей два предприятия и трех потребителей, нужно разработать план распределения запасов на январь, февраль, . . ., декабрь, т. е. на каждый месяц. Допустим, что фирма применяет стратегию, предусматривающую отсутствие сезонных запасов на начало рассматриваемого года. Обозначим теперь через S_i, где $i = 1, 2, \ldots, 12$, запас продукции первого предприятия на год. Аналогично величины S_i, где $i = 13, 14, \ldots, 24$, обозначают запас продукции второго предприятия. Точно так же будем считать, что D_j, где $j = 1, 2, \ldots, 12$, есть спрос первого потребителя; D_j, где $j = 13, 14, \ldots, 24$, — спрос второго потребителя; D_j, где $j = 15, 26, \ldots, 36$,— спрос третьего потребителя. Введем условие $\sum_{i=1}^{24} S_i = \sum_{j=1}^{36} D_j$. (Это ограничение в случае необходимости можно ослабить.)

Некоторые величины x_{ij} нужно исключить из рассмотрения, чтобы избежать возможности поставок в середине года, используемых для удовлетворения спроса в начале года. Так, например, необходимо исключить величину $x_{6,25}$, представляющую собой поставки продукции, имеющейся у первого предприятия в июне, для удовлетворения спроса третьего потребителя в январе. При определении значений величин c_{ij} для оставшихся x_{ij} может возникнуть необходимость учета затрат на хранение запасов. Эти затраты отражают потери, непосредственно обусловленные созданием запасов, например стоимость аренды складских помещений или процент на краткосрочный кредит в случае, если пользуются банковским финансированием.

Ограничения по пропускным способностям. Иногда на переменные x_{ij} необходимо наложить дополнительные ограничения по пропускным способностям. Простейший вид таких ограничений определяется неравенством

$$x_{ij} \leqslant u_{ij}. \tag{I}$$

Если ограничения вида (I) добавляют к условиям (7) — (10), то модель часто называют **моделью транспортной задачи с ограничениями по пропускной способности или с ограниченными сверху переменными.** Ограничения по пропускной способности более общего вида накладываются на суммарные значения переменных x_{ij}, например учитываются возможности нескольких поставщиков и спрос всех потребителей или спрос нескольких потребителей при одном поставщике. Довольно часто введение этих дополнительных ограничений требует лишь несущественного увеличения объема вычислений для отыскания оптимального решения. Однако, естественно, могут встретиться ситуации, когда эти ограничения оказываются настолько жесткими, что в задаче вообще отсутствует допустимое решение.

Переменная мощность поставщиков. В некоторых ситуациях при решении задачи оптимизации величины S_i приходится рассматривать как *переменные*. При таких условиях транспортная модель оказывается частным случаем более общей задачи линейного программирования. Пользуясь более сложными алгоритмами, например алгоритмом декомпозиции, ~~описанным в~~ разд. 15.11, при отыскании численного решения все же удается использовать структурные свойства транспортной сетевой модели.

Другое важное обобщение классической транспортной модели связано с учетом возможности доставки изделия (продукта) поставщика i потребителю j по маршруту, проходящему через *промежуточный* пункт. Эта модификация подробно рассматривается в следующем разделе.

6.3. МОДЕЛЬ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПУНКТАМИ

Большое значение имеет обобщение классической транспортной модели путем включения в нее случаев, когда некоторые пункты служат для перевалки грузов. Так, например, промежуточные пункты часто встречаются в распределительных системах снабжения компаний, имеющих универсальные магазины во многих городах. Такие компании, как правило, имеют зональные оптовые базы, которые снабжают товарами более мелкие региональные склады, откуда товары в свою очередь поступают в розничную торговую сеть. Эти склады представляют собой промежуточные (перевалочные) пункты. Модель с промежуточными пунктами является эффективным средством выбора оптимального числа и географического размещения складов, поскольку анализ сетевой модели позволяет отыскивать план перевозок товаров, минимизирующий транспортные затраты при любой заданной схеме размещения складов. Кроме того, эта модель заслуживает изучения также и потому, что существуют другие операционные модели, эквивалентные в математическом смысле сетевым задачам с промежуточными пунктами.

Эта модель рассматривается здесь на гипотетическом примере, отражающем тем не менее реальный случай функционирования военных систем материально-технического снабжения. В предыдущем разделе сначала была дана математическая постановка задачи, затем следовало ее словесное описание с графическим представлением сети и табличной записью. Сейчас изложение ведется в обратном порядке, что позволяет приобрести практические навыки в построении моделей.

Задача об оптовых складах компании «Универсал». Компания имеет восемь крупных оптовых складов, размещенных в нескольких штатах. Отдел сбыта принял решение значительно снизить цену одного дорогостоящего изделия с целью ликвидации образовавшегося запаса этих изделий. Перед началом рекламной кампании руководство намерено разместить имеющиеся в наличии запасы на указанных восьми складах в соответствии с прогнозами сбыта в этих районах. Для осуществления этого плана необходимо перераспределить некоторую часть запасов.

На рис. 6.3 представлена схематическая карта. Пронумерованные узлы в кружочках соответствуют восьми складам. Положительное число, стоящее у номера склада, обозначает избыточное количество запасов, которое должно быть распределено в системе. Отрицательное число обозначает потребность данного склада в дополнительных запасах. Таким образом, на складах 1 и 4 имеется избыток запасов в количестве десяти и двух единиц соответственно, а на складах 3, 6 и 8 требуется три, одно и восемь дополнительных изделий. Запасы на складах 2, 5 и 7 должны оставаться неизменными.

Заметим, что изделие может транспортироваться через склады 2, 4, 5, 6 и 7, в связи с чем эти пункты называются *промежуточными*. Все другие склады называются *источниками*, если в них имеется избыток запасов, и *стоками*, если требуется дополнительный запас. Следовательно, склад 1 является источником, а склады 3 и 8 — стоками.

Значение величины $c_{ij} \geqslant 0$ соответствует затратам на перевозку одного изделия по указанному маршруту. При перевозке изделия со склада 1 на склад 6 общие транспортные затраты составляют $c_{12} + c_{25} + c_{56}$. Маршрут перевозки со склада 1 на склад 6 проходит через склады 2 и 5 в качестве промежуточных пунктов. Модель

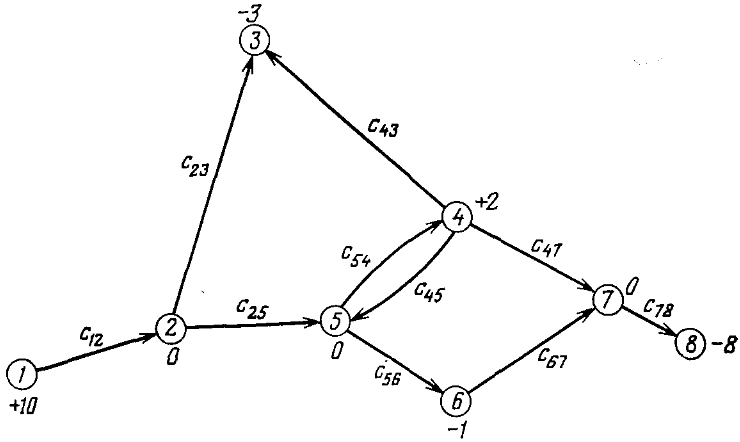


Рис. 6.3. Сеть маршрутов перевозок для задачи фирмы «Универсал».

допускает перевозки между складами 4 и 5 в обоих направлениях. Предположим в данном случае, что $c_{45} \neq c_{54}$ по следующей причине В момент отгрузки изделия у компании имеется возможность использовать собственный автотранспорт только на маршруте 4—5. Ей приходится нести более высокие расходы при перевозках в обратном направлении, так как она вынуждена пользоваться услугами наемного транспорта. Тщательно проанализировав схему, можно убедиться в том, что, пока не решена вся задача, нельзя исключить из рассмотрения ни один из возможных маршрутов перевозок между складами 4 и 5. В этом примере целью компании является перераспределение запасов при минимальных общих транспортных затратах.

Прежде чем перейти к формальному (математическому) выражению изложенного выше содержания задачи, опишем два способа перехода от задачи с промежуточными пунктами к классической транспортной задаче. Эти преобразования имеют вполне реальный практический смысл, ибо позволяют использовать широко распространенные программы решения на ЭВМ классических транспортных задач. Для этого необходимо только ввести в ЭВМ исходные данные задачи с промежуточными пунктами по одной из описываемых ниже форм. Установление эквивалентности между рассматриваемой задачей и классической транспортной задачей представляет интерес потому, что оно позволяет устранить трудности отыскания оптимального решения при условии целочисленности переменных.

Первый способ основан на определении *наиболее дешевых* маршрутов перевозки каждого изделия со склада 1, имеющего избыток запасов, на склады 3, 6 и 8, где их не хватает. Обозначим соответствующие минимальные затраты символами c_{13}, c_{16} и c_{18}. Переходя далее к складу 4, также имеющему избыточные запасы, найдем аналогично величины c_{43}, c_{46} и c_{48}. Теперь можно использовать матрицу классической транспортной задачи, представленную на рис. 6.4. Заметим, что в этой матрице уменьшенной размерности каждому

Пункт \ Пункт	3	6	8	Поставки
1	c_{13} 3	c_{16} 1	c_{18} 6	10
4	c_{43}	c_{46}	c_{48} 2	2
Спрос	3	1	8	

Рис. 6.4. Матрица сокращенной размерности задачи с промежуточными пунктами.

c_{ij} — минимальные затраты на перевозку единицы груза из пункта i в пункт j.

складу с избыточными запасами соответствует одна строка, а каждому складу, имеющему дефицит запасов,— один столбец. Промежуточные пункты в явном виде в этой матрице не фигурируют. Однако если самый дешевый маршрут перевозки изделия со склада 4 на склад 8 проходит через склад 7, то значение переменной $x_{48} = 2$ указывает, что шесть изделий со склада 4, предназначенных для склада 8, перевозятся через промежуточный склад 7.

Другой излагаемый ниже способ обладает рядом преимуществ по сравнению с первым при решении реальных задач большой размерности. В частности, при использовании этого способа не требуется определения всех наиболее дешевых маршрутов перевозок, что может быть сопряжено с большим объемом вычислений. Кроме того, в получающейся в результате классической транспортной задаче может содержаться меньшее число переменных. И наконец, пользуясь этим способом, легче учитывать ограничения по пропускным способностям каждого маршрута.

Для понимания сущности второго способа преобразования рассмотрите таблицу на рис. 6.5, построенную по сети рис. 6.3. Построение такой таблицы нужно осуществлять в следующем порядке:

а) Выделить строку для каждого *источника*. Значение S_i для источника определяется количеством поставляемых из него изделий.

б) Выделить столбец для каждого *стока*. Значение D_j для стока определяется потребностью в изделиях.

в) Выделить строку и столбец для каждого *промежуточного пункта*. Пусть T_k — чистый запас рассматриваемого пункта. Если в этом пункте имеется избыток запасов, то T_k — положительное число, если же в этом пункте требуется пополнение запасов, то T_k —

отрицательное число. Примем теперь, что для любого пункта k выполняются соотношения $S_k = T_k + B$ и $D_k = B$, где B — суммарные запасы, имеющиеся во *всех* пунктах.

г) Ввести величины x_{ij}, $i \neq j$, только для дуг, существующих в исходной сети. Для промежуточного пункта k ввести x_{kk} при $c_{kk} = 0$.

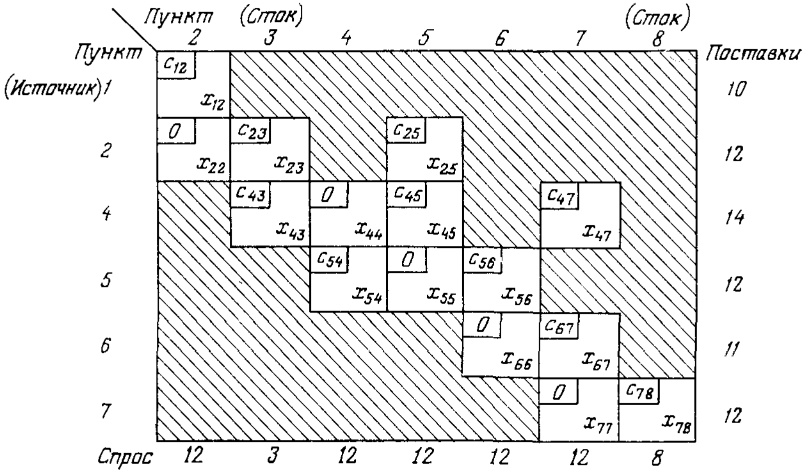


Рис. 6.5. Расширенная матрица задачи с промежуточными пунктами.
Примечание: $B = 10 + 2 = 12$.

Таким образом, правило а) относится к складу 1, правило б) — к складам 3 и 8. При $B = 12$ по правилу в) имеем $D_4 = 12$ и $S_4 = 2 + 12 = 14$; $D_5 = 12$ и $S_5 = 0 + 12 = 12$; $D_6 = 12$ и $S_6 = -1 + 12 = 11$.

Для преобразования (приведения) задачи с промежуточными пунктами к классической транспортной задаче вторым способом введена величина B, имеющая смысл фиктивного **буферного запаса** в каждом промежуточном пункте. Если таким пунктом является k, то B входит как в S_k, так и в D_k. Следовательно, сумма *всех* S_i остается равной сумме *всех* D_j. Значение S_k должно быть настолько велико, чтобы оно могло включать любое количество груза, проходящего через промежуточный пункт в оптимальном решении. Один из простых приемов, обеспечивающих выполнение этого условия, заключается в том, что величина B берется равной сумме запасов, имеющихся во *всех* пунктах. Тогда значение разности $B - x_{kk}$ представляет собой *общее количество* груза, перевезенного через промежуточный пункт k.

Допустимый план перевозок рассматриваемой задачи приведен в таблице на рис. 6.6. Внимательно рассмотрите эту таблицу. Начните с первой строки, отображающей размер запасов, которые имеются в источнике 1. Заметим, что десять изделий отгружаются в пункт 2.

Рассмотрите теперь строку и столбец, соответствующие пункту 2. Отметим, что $S_2 = D_2 = B = 12$, ибо пункт 2 является промежуточным и, следовательно, в нем отсутствует как избыток запасов, так и потребность в них. Поскольку в решение уже входит величина $x_{12} = 10$, необходимо принять $x_{22} = 2$, чтобы выполнялось условие $D_2 = 12$. Это в свою очередь означает, что десять изделий S_2 можно отгрузить из этого пункта. Они, как видно из таблицы, направляются в пункт 3, являющийся стоком, и пункт 5 — промежуточный.

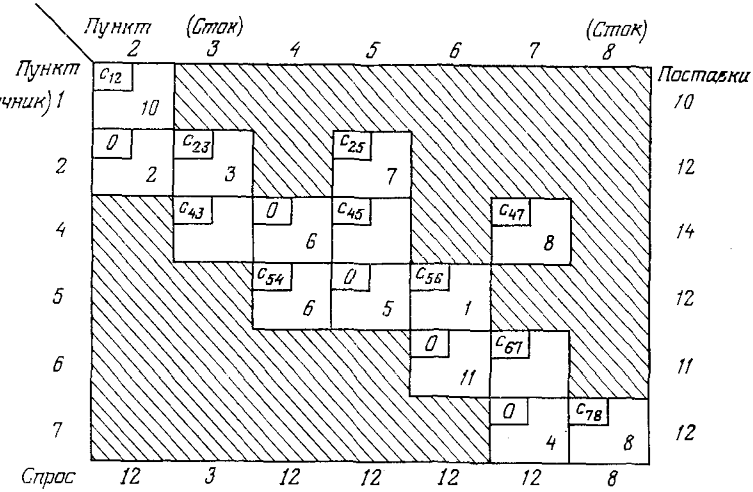


Рис. 6.6. Пример матрицы допустимых маршрутов перевозок.

Иначе говоря, десять изделий из пункта 1 отгружаются в пункты 3 и 5 и перевозятся через промежуточный пункт 2.

Переходя к пятому столбцу, можно увидеть, что семь изделий, поступающих в этот пункт, отгружаются затем в пункты 4 и 6. В частности, одно изделие поступает в пункт 6 из пункта 5.

Рассмотрите теперь строку и столбец для пункта 6. Поскольку $x_{56} = 1$ и $D_6 = 12$, должно выполняться условие $x_{66} = 11$. Следовательно, одно изделие, поступившее в пункт 6, далее не отправляется и остается в этом пункте.

Завершая анализ таблицы, убедитесь в том, что склад 1 отправляет три изделия на склад 3 через промежуточный пункт 2, одно изделие на склад 6 через пункты 2 и 5 и шесть изделий — на склад 8 через пункты 2, 5, 4 и 7. Склад 4 отправляет два изделия на склад 8 через пункт 7.

Математическая модель. Чтобы окончательно разобраться в модели с промежуточными пунктами, нужно теперь перейти к точной математической постановке задачи. Это формальное описание задачи удобно представить в виде матрицы, приведенной на рис. 6.7. Отметим, что для каждого склада (каждого узла сети) имеется одно уравнение. Кроме того, каждая дуга сети описывается одной переменной x_{ij}, представляющей собой количество груза, которое должно быть отправлено из пункта i в пункт j. Положительное число, стоящее справа от знака равенства, обозначает количество запасов, которое подлежит перераспределению. Отрицательное число соответствует потребности соответствующего склада в дополнительных

Объем перевозок

Пункты	x_{12}	x_{23}	x_{25}	x_{43}	x_{45}	x_{47}	x_{54}	x_{56}	x_{67}	x_{78}	
1	1										$=10$
2	-1	1	1								$=0$
3		-1		-1							$=-3$
4				1	1	1	-1				$=2$
5			-1		-1		1	1			$=0$
6								-1	1		$=-1$
7						-1			-1	1	$=0$
8										-1	$=-8$
	c_{12}	c_{23}	c_{25}	c_{43}	c_{45}	c_{47}	c_{54}	c_{56}	c_{67}	c_{78}	Минимизировать

Рис. 6.7. Пример матричной формы записи транспортной задачи с промежуточными пунктами.

запасах. Итак, матрица задачи линейного программирования (рис. 6.7) является непосредственным представлением сети, приведенной на рис. 6.3.

Заметим, что, тогда как матрица рис. 6.7 содержит всего 8 уравнений и 10 переменных, в расширенной матрице рис. 6.5, описывающей задачу с промежуточными пунктами, имеется 13 ограничений по строкам и столбцам и 15 переменных. Увеличение размерности матрицы на пять единиц объясняется наличием пяти промежуточных пунктов.

Далеко не очевидно, что задача оптимизации, представленная в таблице рис. 6.7, эквивалентна транспортной задаче, условия которой даны в таблице на рис. 6.5. Это соответствие можно показать следующим образом. Легко видеть, что строка, соответствующая складу 1 (источнику), и столбцы, соответствующие складам 3 и 8 (каждый из которых является стоком), эквивалентны ограничениям для складов, записанным в таблице на рис. 6.7. Таким образом, аналитические неясности возникают лишь относительно строк и столбцов, соответствующих промежуточным пунктам.

Рассмотрим один из таких пунктов, скажем 4. На рис. 6.5 ограничения по строке и столбцу транспортной таблицы имеют вид

$$x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{47} \qquad = 2 + B \quad \text{(поставки)}, \qquad \text{(I)}$$

$$x_{44} \qquad + x_{54} = B \quad \text{(спрос)}. \qquad \text{(II)}$$

Вычитая (II) из (I), получаем

$$x_{43} + x_{45} + x_{47} - x_{54} = 2, \qquad \text{(III)}$$

что является ограничением для пункта 4 на рис. 6.7. При условии, что значение B достаточно велико, любое решение системы уравнений, заданных табл. 6.7, является также допустимым решением системы, определяемой табл. 6.5. Для проверки справедливости этого утверждения рассмотрим снова промежуточный пункт 4. Допустим, что условие (III) выполняется. Не изменяя значений величин x_{ij}, положим $x_{44} = B - x_{54}$. Тогда выполняются оба условия (I) и (II). Отсюда при достаточно большом значении B имеем $x_{44} \geqslant 0$.

В заключение, чтобы показать эквивалентность этих постановок задачи, заметим, что, поскольку все $c_{kk} = 0$, любое допустимое решение в одной постановке можно также получить и в другой постановке при одном и том же значении целевой функции.

6.4. МОДЕЛЬ НАЗНАЧЕНИЙ

Задачу о назначениях можно кратко сформулировать следующим образом. Задано n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна c_{ij}. Нужно распределить исполнителей по работам, т. е. назначить одного исполнителя на каждую работу, таким образом, чтобы минимизировать общие затраты.

Почему эта задача представляет интерес? Одна из причин, разумеется, как всегда, заключается в том, что такую модель можно применить в реальных условиях, хотя ситуации, в которых она оказывается пригодной, встречаются и не столь уж часто. Один пример подобного рода описывается ниже. Гораздо более важная причина состоит в том, что эта задача позволяет установить существенную связь между задачами линейного программирования и так называемыми комбинаторными задачами. Последние относятся к ситуациям, в которых неизвестные переменные *должны* быть целочисленными. Задачи этого класса более подробно рассматриваются в гл. 8, 10 и 13.

Задача фирмы «Электрон». Фирма, выпускающая сложную электронную аппаратуру, получила заказ на несколько тысяч новых изделий, собирающихся из отдельных блоков. Руководство фирмы приняло решение разместить заказы на изготовление n блоков и выбрало n фирм-поставщиков, которые зарекомендовали себя ранее как производители высококачественной продукции. Каждый заказ настолько велик, что фирма-поставщик не может выполнить более одного заказа. Каждому поставщику предложено определить стоимость выполнения заказа, т. е. цену, по которой он готов поставить фирме различные блоки. Некоторые из запрошенных цен настолько велики, что явно свидетельствуют о нежелании отдельных поставщиков принять заказы на определенные блоки. Располагая этой информацией, фирма электронной аппаратуры должна заключить n контрактов на поставку ей n видов блоков, минимизировав при этом свои общие затраты на приобретение комплектующих узлов со стороны.

Математическая модель. Для постановки задачи о назначениях с использованием математического программирования определим переменные, описывающие задачу, следующим образом:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если заказ } i \text{ выполняется поставщиком } j,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть c_{ij} — стоимость соответствующего заказа. В примере фирмы «Электрон» индекс i определяет номер блока, а индекс j — номер поставщика.

При указанных условиях оптимизационная модель записывается следующим образом:

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{2}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad 1 \text{ для всех } i \text{ и } j. \tag{5}$$

Отметим, что модель назначений (2) — (5) является частным случаем классической транспортной модели, в которой $m = n$ и $S_i = D_j = 1$ [см. условия (7) — (10) в разд. 6.2]. Однако следует иметь в виду, что в приведенном выше примере, так же как и в большинстве случаев применения модели назначений, оптимизация перевозок или каких-либо других транспортных операций не рассматривается.

6.5. МОДЕЛЬ ВЫБОРА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

Подобно модели назначений, сущность модели выбора **кратчайшего пути** можно объяснить весьма просто. Пусть задана сеть, каждой дуге которой соответствует некоторое расстояние. Нужно найти кратчайший путь в заданный узел из любого другого узла сети. Эта задача на самом деле охватывает широкий круг важных приложений операционных моделей, включая замену оборудования и календарное планирование сложных комплексов. Поскольку эти конкретные приложения существенно отличаются друг от друга, сначала полезно усвоить основные понятия, фигурирующие в моделях этого класса, в самом общем виде.

Общее описание модели. Рассмотрим сеть, состоящую из множества **узлов**, некоторые пары которых соединены **ориентированными дугами** (т. е. отрезками, на которых задано направление). Пример такой сети приведен на рис. 6.8. Как правило, в сети выделяется один узел, называемый **выходом** (пунктом назначения, **конечным**). Задача заключается в отыскании кратчайшего пути в конечный узел по крайней мере из одного промежуточного узла, а иногда из всех остальных узлов. Величина c_{ij} определяет длину вдоль дуги, исходящей из узла i и входящей в узел j.

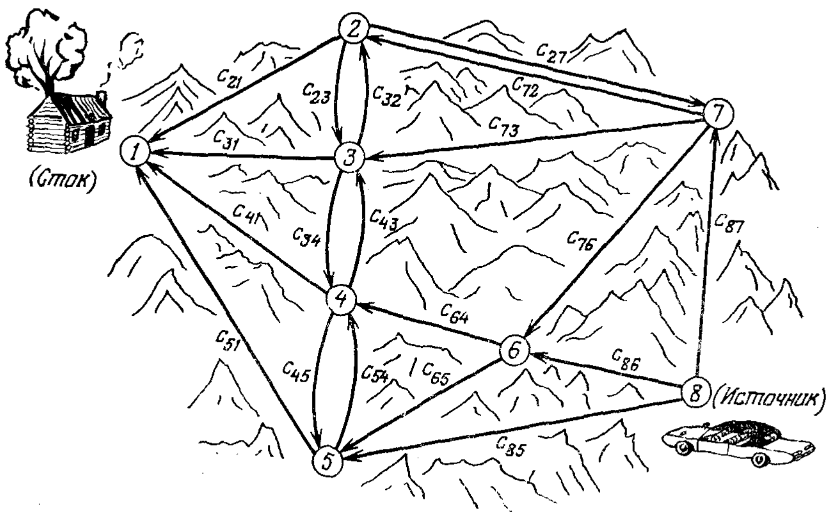


Рис. 6.8. Пример сетевой модели выбора кратчайшего пути.

В приложениях этой модели величина c_{ij} может измеряться в единицах, отличных от единиц длины. Так, например, c_{ij} может представлять собой стоимость переезда из узла i в узел j. В этом случае задача заключается в отыскании пути **минимальной стоимости**. Кроме того, c_{ij} может также определять время переезда из одного узла в другой. При этом требуется отыскать путь **минимальной продолжительности**.

Довольно часто в приложениях встречаются ситуации, когда c_{ij} не равно c_{ji}. Кроме того, некоторые узлы могут быть не связаны непосредственно, что можно формально учесть, положив $c_{ij} = \infty$. Как правило, в рассматриваемой модели так называемое **неравенство треугольника** $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$ не выполняется для всех возможных i, j и k.

Сеть, аналогичная сети, показанной на рис. 6.8, может содержать пути, являющиеся замкнутыми, или **циклы**. Это означает, что для двух или большего числа узлов можно найти путь, исходящий из некоторого узла и возвращающийся, т. е. входящий, в него же. В сети рис. 6.8 имеется много циклов, один из которых начинается в узле 2, проходит через узлы 7 и 3 и заканчивается вновь в узле 2. Если общая длина пути вдоль цикла отрицательна, то, многократно обходя этот цикл, можно достигнуть бесконечного отрицательного значения целевой функции.

Следовательно, если не наложить дополнительных ограничений, то переменные могут принять бесконечно большие значения. Исключим такую возможность, предположив, что *в случае, когда сеть содержит циклы, общая длина любого цикла неотрицательна.* Это условие вполне приемлемо для обычных операционных задач, в которых, как правило, все $c_{ij} \geqslant 0$.

От источника до стока. Предположим, что в задаче нужно найти оптимальный путь от единственного начального узла (источника) до конечного узла (стока). Легко показать, что эта задача в *математическом* смысле, т. е. формально, эквивалентна задаче о назначениях. Чтобы убедиться в этом на сети рис. 6.8 будем считать узел 1 конечным, а узел 8 начальным. Рассмотрим далее обычную транспортную задачу с промежуточными пунктами, в которой имеется избыточная единица запасов в узле 8 (источнике), требующаяся в узле 1 (стоке). Все остальные узлы сети считаются промежуточными пунктами.

Такая интерпретация приводит к данным в таблице рис. 6.9 условиям, соответствующим задаче о назначениях с буферным запасом $B = 1$. Отметим, что задача о кратчайшем пути является частным случаем задачи о назначениях, для которой коэффициенты целевой функции $c_{kk} = 0$ размещены в так называемой поддиагонали матрицы.

Математическая постановка задачи о кратчайшем пути имеет следующий вид:

$$\text{минимизировать} \sum_{(i,\, j) \in \text{сети}} \sum c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{(k,j) \in \text{сети}} x_{kj} - \sum_{(i,k) \in \text{сети}} x_{ik} = \begin{cases} 1, & k=s \quad \text{(источник)}, \\ 0, & \quad\quad\;\; \text{для всех остальных } k, \\ -1, & k=r \quad \text{(сток)}, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{для всех } (i,\ j) \in \text{сети}. \tag{3}$$

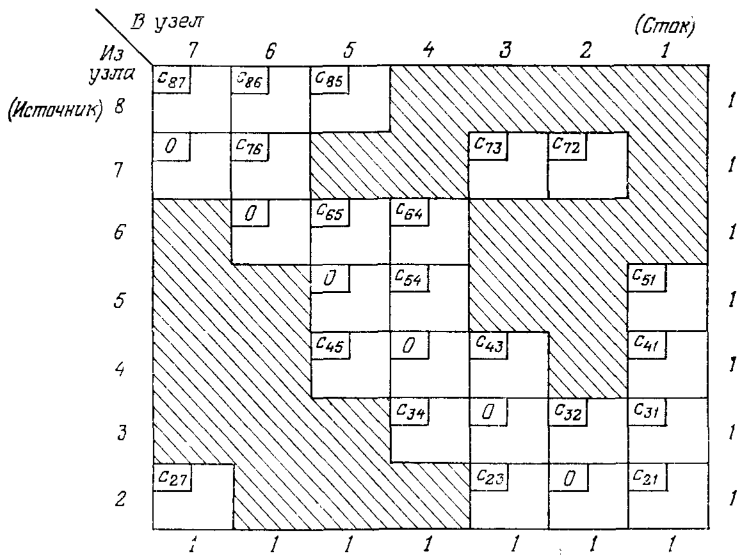


Рис. 6.9. Матричное представление условий задачи о кратчайшем пути.

Построим матрицу, соответствующую (1), (2) и (3) для примера рис. 6.8. В этой матрице содержится по одному уравнению для каждого узла и по одной переменной для каждой дуги. Так, для $k = s = 8$ в соответствии с (2) имеем

$$x_{85} + x_{86} + x_{87} = 1 \quad \text{(узел 8 — источник)}, \tag{4}$$

а для $k = 7$

$$x_{72} + x_{73} + x_{76} - x_{27} - x_{87} = 0 \quad \text{(узел 7)}. \tag{5}$$

Задачу о кратчайшем пути решить гораздо легче, чем общую задачу о назначениях. В гл. 7 приведен эффективный алгоритм решения задачи о кратчайшем пути.

Существуют многочисленные примеры практического применения задачи о кратчайшем пути. Напомним пример компании «Универсал», рассмотренный в разд. 6.3. В этом примере было показано, как можно подойти к транспортной модели с промежуточными пунктами, отыскав сначала маршрут минимальной стоимости из каждого узла, где имеется избыточный запас, в каждый узел, где требуется пополнение запасов. Затем, используя эти пути минимальной стоимости, находят оптимальное решение классической транспортной задачи. Рассмотрим теперь пример иного рода.

Замена оборудования. Транспортное агентство «Таксолюкс» разрабатывает план аренды транспортного оборудования на период

$n - 1$ лет. Агентство может выполнить свои обязательства по перевозке грузов, взяв в аренду новую транспортную единицу в начале года 1 и эксплуатируя ее до начала года $j \leqslant n$. Если $j < n$, то агентство заменяет эту единицу в начале года j и эксплуатирует новую до начала года k ($\leqslant n$) и т. д. Величина затрат c_{ij} ($1 \leqslant i < j \leqslant n$) включает арендную плату плюс ожидаемые расходы на ремонт

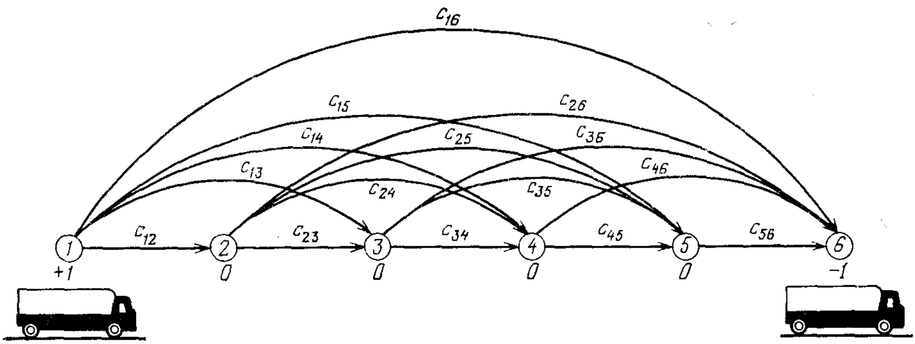


Рис. 6.10. Сеть замены оборудования, отображающая задачу фирмы «Таксолюкс».

и обслуживание оборудования, взятого в аренду в начале года i и замененного в начале года j. Сеть, описывающая эту задачу при $n = 6$, показана на рис. 6.10. В этой сети транспортная единица отправляется из узла 1 в узел 6. Каждый промежуточный пункт (узел), фигурирующий в оптимальном решении, соответствует году, когда должна произойти замена.

Отметим, что в сети рис. 6.10 отсутствуют циклы. Поэтому такая сеть называется **ациклической.** (Опишите эту сеть матрицей модели назначений, подобной матрице рис. 6.9. Упорядочите узлы по строкам 1, 2, . . ., 5 и по столбцам 2, 3, . . ., 6. Поскольку сеть ациклическая, то ниже поддиагонали в матрице отсутствуют допустимые элементы.) В гл. 7 будет приведен очень простой алгоритм определения кратчайшего пути в ациклической сети.

Задача компании «Новые просторы». Этот пример иллюстрирует универсальность задачи о кратчайшем пути. Как и в предыдущем примере, сеть является ациклической. Оба примера относятся к классу детерминированных, динамических, многошаговых моделей. Более подробно задачи такого класса описываются в гл. 10.

Строительная компания разрабатывает план капиталовложений на текущий год. Общий капитал, которым она располагает и который нужно распределить по различным объектам, составляет C сотен тысяч долларов. Рассматриваются n возможных объектов капиталовложений. Компания может вложить свои средства в любые из этих объектов. Единственным ограничением является объем наличного капитала. Минимальный объем капиталовложений, необходимый для приобретения объекта i, составляет p_i. Компания оценивает соответствующую приведенную к исходному моменту прибыль величиной v_{i0}. Однако если в этот объект вложить *дополнительно* k

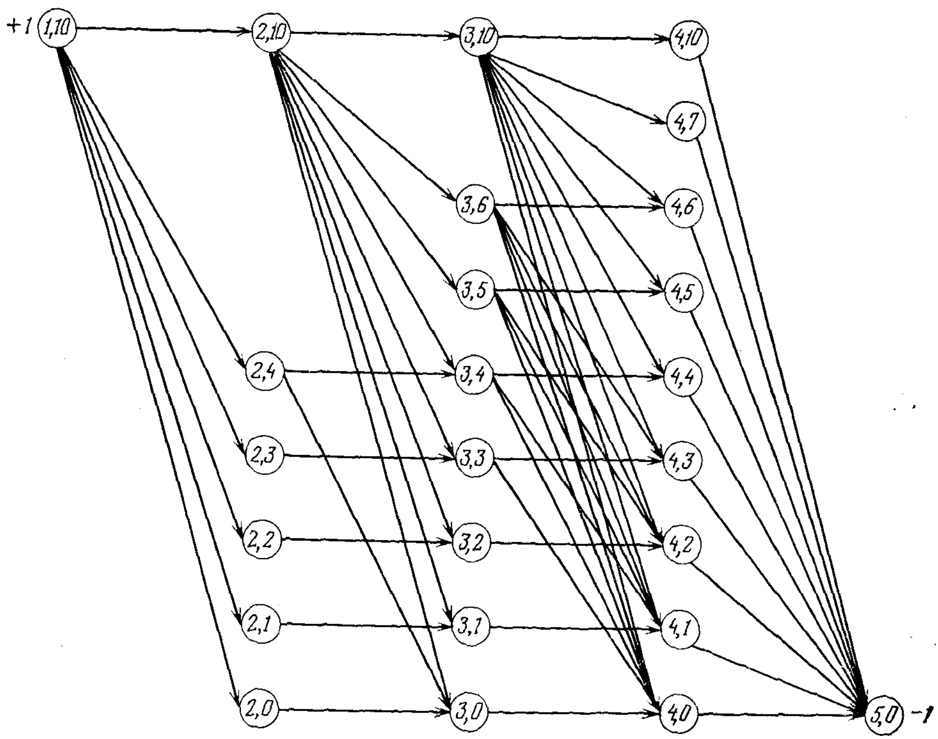


Рис. 6.11. Сеть, отображающая задачу компании «Новые просторы».

сотен тысяч долларов, то в результате приведенная прибыль будет оцениваться величиной v_{ik}. Предполагается, что $v_{i,k+1} \geqslant v_{i,k}$. Компания стремится так распределить капиталовложения по объектам, чтобы максимизировать общую приведенную к исходному моменту прибыль.

Для задания числовых параметров модели примем, что $C = 10$, $n = 4$, а минимальные объемы капиталовложений составляют соответственно $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $p_3 = 3$ и $p_4 = 1$. Пусть дополнительные капиталовложения можно распределять в объемах, кратных одной сотне тысяч долларов, так что $k = 1, 2, \ldots$. (В этом примере объект 4 можно рассматривать как капиталовложение в ценные бумаги, а не в земельный участок.) Сеть, описывающая рассматриваемый пример, приведена на рис. 6.11, а соответствующая ей матрица — на рис. 6.12.

	2,10	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	3,10	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	4,10	4,7	4,6	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	5,0	
1,10	0	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}																			1
2,10	0						0	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}	v_{26}											1
2,4		0								0				v_{20}											1
2,3			0								0														1
2,2				0								0													1
2,1					0								0												1
2,0						0								0											1
3,10							0								0	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	v_{37}		1
3,6								0									0			v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}		1
3,5									0									0			v_{30}	v_{31}	v_{32}		1
3,4										0									0			v_{30}	v_{31}		1
3,3											0									0			v_{30}		1
3,2												0									0				1
3,1													0									0			1
3,0														0									0		1
4,10															0									v_{49}	1
4,7																0								v_{46}	1
4,6																	0							v_{45}	1
4,5																		0						v_{44}	1
4,4																			0					v_{43}	1
4,3																				0				v_{42}	1
4,2																					0			v_{41}	1
4,1																						0		v_{40}	1
4,0																							0	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Рис. 6.12. Матричное представление условий задачи компании «Новые просторы».

Сеть строится следующим образом. Для каждого объекта капиталовложений вводится столбец узлов. В обозначении узла (i, c) символ i относится к номеру объекта. Величина c определяет объем капитала, который можно вложить в объект i при условии принятия определенных решений относительно вложений в уже рассмотренные объекты. Каждая дуга, исходящая из узла (i, c), соответствует конкретному решению по объекту i. Дуга входит в узел $(i + 1, c')$, где c' вычисляется как имеющийся капитал, который можно вложить в объект $i + 1$ при условии принятия вполне определенного решения по вложениям в объект i.

Рассмотрим для примера узел (3, 4). Если компания приняла решение вложить минимальный объем капитала в объект 1 и не вкладывать ничего в объект 2 *либо* не вкладывать ничего в объект 1 и вложить $p_2 + 2 = 4 + 2 = 600$ тыс. долл. в объект 2, то 400 тыс. долл. можно вложить в объект 3. Эти два решения отображаются дугами, *входящими* в узел (3, 4). Располагая 400 тыс. долл., компания может принять одно из следующих трех решений: а) не вкладывать ничего в объект 3; б) вложить в этот объект минимальный объем капитала $p_3 = 3$; в) вложить в этот объект капитал $p_3 + 1 = 4$, что исчерпывает возможности дальнейших вложений. Эти три возможных решения отображаются дугами, *исходящими* из узла (3, 4).

Таким образом, любой допустимый вариант распределения капиталовложений по объектам можно представить в виде проходящего через всю сеть «пути», который начинается в узле (1, 10) и заканчивается в узле (5, 0). Это означает, что весь наличный объем капитала должен быть полностью распределен между четырьмя объектами. Для проверки правильности понимания сети такого рода составьте несколько возможных планов распределения капиталовложений и найдите соответствующие этим планам пути в сетевой модели. Далее выберите несколько различных путей и определите соответствующие им варианты распределения капиталовложений.

В этой задаче длине дуги соответствует приведенная прибыль v_{ik} решения, отображаемого этой дугой. Подлежащая максимизации целевая функция имеет смысл приведенной прибыли, и, следовательно, задача состоит в отыскании в сети пути *максимальной длины*. Из предыдущих глав читателю уже известно, что, изменив знак целевой функции, задачу о максимальном пути можно элементарно преобразовать в задачу о кратчайшем пути. Таким образом, эти две задачи имеют в сущности одинаковую структуру. Поскольку сеть ациклическая, оптимальное значение целевой функции является конечным.

Описанная выше в содержательных понятиях модель формализуется следующим образом. Примем, что x_i — объем капитала, вложенного в объект i, и определим неубывающую функцию $h_i(x_i)$

выражением

$$h_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i < p_i, \\ v_{ik} & \text{при } x_i = p_i + k, \quad \text{где} \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Тогда модель записывается в виде

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i) \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant C, \tag{II}$$

$$x_i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ для любого } i. \tag{III}$$

В этом примере показано, как методы анализа сетей можно применить для решения задачи оптимизации нелинейной целевой функции в случае, когда на переменные наложено условие целочисленности и они подчиняются единственному ограничению.

Задача коммивояжера. Эта задача с несколько шуточным названием относится к следующей ситуации: коммивояжер (агент по сбыту) собирается посетить каждый из n городов по одному разу, выехав из города 1 и вернувшись в него же. Расстояние между городом i и городом j равно c_{ij}. Каков кратчайший маршрут коммивояжера?

Эта оптимизационная задача и различные ее модификации на самом деле возникают перед различными фирмами и агентствами, занимающимися доставкой товаров на дом и аналогичной деятельностью. Математическая модель этой задачи отображает также ситуации совершенно иного характера. Так, например, эта модель описывает условия производства мороженого, когда нужно найти оптимальный порядок изготовления различных сортов на одном и том же оборудовании. Примем, что c_{ij} представляют собой затраты времени на очистку и подготовку оборудования, когда сорт j изготовляется после сорта i. Величины c_{ij} могут изменяться в широком диапазоне, ибо сорта, мало отличающиеся друг от друга (скажем, ванильное мороженое и ванильное с шоколадной пудрой), можно выпускать друг за другом, лишь незначительно изменив технологию, т. е. затратив немного времени на переналадку оборудования, тогда как для последовательного выпуска некоторых других сортов требуются значительные затраты времени на очистку оборудования (например, если за шоколадным мороженым следует кокосовое). Разумеется, стремятся составить такой календарный план выпуска различных сортов мороженого, чтобы минимизировать затраты времени на переналадку оборудования.

Возвращаясь к исходной задаче, примем

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если в маршрут входит переезд из города } i \text{ в город } j\ (i\neq j),\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Предположим теперь, что для решения этой задачи применяется модель назначений (2) — (5), рассмотренная в предыдущем разделе, в которой исключены все x_{ii} и отыскивается маршрут минимальной длины, проходящий через все города. Ограничения задачи о назначениях обеспечивают включение в этот маршрут выезд из каждого города, а также прибытие в каждый город.

Даст ли оптимальное решение задачи о назначениях маршрут, которым может воспользоваться коммивояжер? К сожалению, оно может не содержать такого маршрута. Полученное решение может включать два или более *несвязанных* цикла. Так, например, не исключена возможность такого решения:

$$x_{12}=x_{23}=x_{31}=1 \quad \text{и} \quad x_{45}=x_{56}=\ldots=x_{n4}=1.$$

Следовательно, один маршрут проходит через города 1, 2 и 3 и совершенно независимый маршрут — через города 4, 5, . . ., n. Поэтому кажущееся весьма скромным дополнительное требование о том, чтобы маршрут содержал только один цикл, на самом деле существенно усложняет решение этой комбинаторной задачи, к которой мы вернемся в гл. 13.

6.6. КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ[1]

Рассматриваемая модификация задачи об отыскании **максимального пути** очень часто применяется для построения календарных планов реализации комплексных проектов, например строительства многоэтажных административных зданий, капитальных ремонтов сложного оборудования, программ научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ создания новых систем вооружения, планов выпуска на рынок сбыта новой продукции и т. п. Метод критического пути известен также под различными сокращенными названиями, среди которых наиболее распространены CPS, CPM и PERT. Этот метод развит в такой степени, что для полного изложения всех его модификаций и тонкостей потребовалась бы целая самостоятельная глава, что увело бы читателя от предмета, рассматриваемого в данной главе. Однако весьма полезно и поучительно познакомиться

[1]) В отечественной литературе принято более широкое понятие «сетевое планирование и управление» (СПУ). В СПУ входит не только решение самых различных по содержанию и формальным постановкам организационных задач, отличающихся от рассматриваемой здесь, но и построение реальных СПУ, ядром которых является сетевая модель.— *Прим. перев.*

с тем, как модель выбора максимального пути можно использовать для построения календарных планов. В описании этой модели имеется ряд упрощений, но основные структурные свойства при этом сохранены.

Задача компании «Блитцстрой». Компания должна реализовать проект строительства здания, состоящий из n операций (работ). Руководители комплекса оценили продолжительность выполнения

Операция	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительности операции
A	—	t_A
B	—	t_B
C	A	t_C
D	A	t_D
E	B, D	t_E
F	C, E	—

Рис. 6.13. Таблица, отражающая состав и взаимосвязи операций задачи компании «Блитцстрой».

каждой операции и установили последовательность операций, т. е. точно определили, какие операции обязательно должны быть закончены, чтобы могла начаться любая из операций, входящих в комплекс. Как будет показано ниже, для задания такой последовательности необходимо определить лишь те операции, которые *непосредственно* предшествуют каждой рассматриваемой операции. Руководству компании нужно выяснить, какова наименьшая возможная продолжительность реализации всего проекта, т. е. наиболее ранний из всех возможных сроков его завершения.

Предположим, что проект состоит из пяти операций A, B, C, D и E. Удобно ввести еще одну фиктивную операцию F, начинающуюся в момент завершения проекта. Последовательность операций и их продолжительность указаны в таблице на рис. 6.13. Так, операцию C нельзя начать, прежде чем не закончена операция A, а операция E не может начаться, пока не завершены *обе* операции B и D. Весь комплекс выполнен, как только закончены операции C и E.

При построении соответствующей математической модели примем, что переменными являются сроки начала операций. Введем лишь те переменные, которые необходимы для решения задачи. Заметим, что за время начала операций A и B можно принять момент 0, так как эти операции не имеют предшествующих. Аналогично можно считать, что операция C начинается в тот же момент, что и операция D, поскольку у обеих этих операций одна и та же непосредственно предшествующая, в данном случае операция A. Поэтому в модель включаются только следующие переменные:

y_{CD} — момент начала операций C и D;

y_E — момент начала операции E;

y_F — момент начала операции F.

Вспомним, что y_F на самом деле есть момент завершения всего комплекса.

Соответствующая модель линейного программирования имеет вид

$$\text{минимизировать} \quad y_F \tag{1}$$

при ограничениях

$$y_{CD} \geqslant t_A, \tag{2}$$

$$y_E \geqslant t_B, \tag{3}$$

$$y_E \geqslant t_D + y_{CD}, \tag{4}$$

$$y_F \geqslant t_C + y_{CD}, \tag{5}$$

$$y_F \geqslant t_E + y_E. \tag{6}$$

Неравенства (2) — (6) являются математической записью последовательности указанных выше операций (см. таблицу на рис. 6.13). Например, в силу (3) и (4) требуется, чтобы до начала операции E были обязательно завершены операции B и D. Срок окончания операции B равен просто t_B, а операции D — сроку ее начала плюс продолжительность. Заметим, что благодаря ограничениям (2) — (6) *нет необходимости в явном виде* вводить условие неотрицательности переменных. Следовательно, с формальной точки зрения переменные не ограничены по знаку.

y_{CD}	y_E	y_F	
1			$\geqslant t_A$
	1		$\geqslant t_B$
−1	1		$\geqslant t_D$
−1		1	$\geqslant t_C$
	−1	1	$\geqslant t_E$
			Минимизировать

Рис. 6.14. Матрица постановки исходной задачи компании «Блитцстрой».

Структура модели отражена в таблице на рис. 6.14. На первый взгляд эта таблица не имеет сетевой структуры, но более тщательный анализ показывает, что двойственная ей задача обладает всеми необходимыми характеристиками сетей. Выполнив несколько простых преобразований, указанных ниже в специальном разделе, можно показать, что двойственная задача является задачей о выборе максимального пути. Этот путь наибольшей длины называют **критическим**, поскольку увеличение продолжительности (или сдвиг срока окончания) любой операции, принадлежащей этому пути, приводит к такому же увеличению продолжительности всего комплекса. (Критический путь не обязательно является единственным.)

В реальных условиях, когда комплекс часто включает несколько сотен операций, специалист по СПУ, используя информацию, подобную приведенной в таблице на рис. 6.13, может сразу построить соответствующую сетевую модель. Однако алгоритм отыскания наиболее длинного пути в построенной ациклической сети по существу дает решение задачи, аналогичной задаче (1) — (6).

В более сложных постановках задач СПУ продолжительности операций рассматриваются в качестве переменных величин, на которые наложены определенные ограничения. В таких задачах определяются зависимости между общими затратами на реализацию

x_{01}	x_{02}	x_{12}	x_{13}	x_{23}	
1	1				$=1$
-1		1	1		$=0$
	-1	-1		1	$=0$
			-1	-1	$=-1$
t_A	t_B	t_D	t_C	t_E	Максимизировать

Рис. 6.15. Матрица постановки двойственной задачи компании «Блитцстрой».

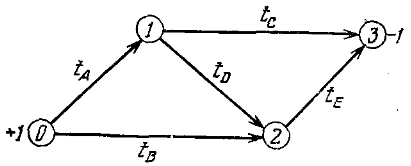


Рис. 6.16. Сеть двойственной задачи компании «Блитцстрой».

комплекса и его продолжительностью и отыскиваются варианты, минимизирующие либо продолжительность комплекса при заданных затратах, либо затраты при фиксированной продолжительности.

Выпишите три уравнения двойственной задачи, следующие из таблицы на рис. 6.14, и просуммируйте их: в результате получится четвертое избыточное уравнение. Вспомните, что соотношения двойственной задачи являются равенствами, поскольку переменные прямой задачи (рис. 6.14) не ограничены по знаку. Далее возьмите те же три уравнения и умножьте обе их части на —1, чтобы изменить знаки коэффициентов.

В итоге получится модель, приведенная в таблице на рис. 6.15, с избыточным уравнением, записанным в верхней строке. Соответствующая этим условиям сеть показана на рис. 6.16. В задаче требуется отыскать путь максимальной длины в ациклической сети. Эта задача структурно эквивалентна задаче об отыскании кратчайшего пути.

6.7. КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Рассматриваемый в этом разделе пример использования сетевых методов показывает, как иногда приходится изменять первоначальную постановку задачи, чтобы обнаружить ее сетевой эквивалент.

Фирма «Дик О'Браз» является подрядной ремонтной организацией, обеспечивающей набор рабочей силы и выполнение капитального ремонта химико-технологического оборудования. Типовой подряд часто требует найма тысячи и более человек, а его выполнение занимает от одной-двух недель до нескольких месяцев. Поскольку предприятия заказчиков нередко располагаются в отдаленных районах, фирме приходится организовывать переезд рабочих на расстояния порядка нескольких сотен километров. Текущие затраты фирмы включают стоимость перевозки рабочих, оплату их питания, жилья по месту размещения предприятия заказчика, а также заработную плату рабочих.

При выполнении обычного контракта на ремонт оборудования фирма может достаточно точно оценить количество бригад, требуемое ежедневно для производства работ в течение всего срока ремонта. Ежедневные потребности изменяются в столь широких пределах, что руководство фирмы, стремясь минимизировать текущие затраты, изменяет число бригад, привлекаемых для выполнения работ, на месте ремонта. Однако существуют статьи затрат, не зависящие от продолжительности пребывания бригады на рабочем месте. Они включают расходы на найм, транспортировку и обучение рабочих каждой новой бригады. Поэтому иногда считается экономически выгодным содержать несколько незанятых бригад, если известно, что дополнительная рабочая сила потребуется через несколько дней. Таким образом, при заключении каждого контракта фирма старается построить календарный план использования рабочей силы, минимизирующий общие затраты на ее содержание.

Для построения математической модели, с помощью которой можно получить оптимальный в указанном смысле календарный план, предположим, что ремонт начинается в начале периода 1 и заканчивается в *начале* периода n. Пусть x_{ij} — число бригад, приступающих к работе в начале периода i и заканчивающих работу в начале периода j (где $1 \leqslant i < j \leqslant n$), а $c_{ij} \geqslant 0$ — соответствующие общие текущие затраты на содержание этих бригад. Предположим, что величина c_{ij} возрастает, если увеличивается период использования рабочей силы, т. е.

$$c_{ij} \leqslant c_{hk} \quad \text{при} \quad h \leqslant i < j \leqslant k. \tag{1}$$

Примем далее, что R_k есть число бригад, действительно требующихся для выполнения заданного объема работы в течение периода k, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

При этих условиях ограничения задачи выражаются следующим образом:

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = R_1, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_{ij} \geqslant R_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n-2, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_{in} = R_{n-1} \tag{4}$$

$$\text{любая величина } x_{ij} = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

а подлежащая минимизации целевая функция имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{6}$$

Равенство (2) показывает, что общее число бригад, начинающих работать в период 1, удовлетворяет потребностям этого периода. В силу (1) нерационально, точнее экономически нецелесообразно, иметь резервные бригады в начальном периоде. Из соотношения (4) следует, что в последний период (n — 1) не допускается содержание

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	s_2	s_3	s_4		Строка
1	1	1	1	1														$=R_1$	1
	1	1	1	1	1	1	1	1							−1			$=R_2$	2
		1	1	1		1	1	1	1	1	1					−1		$=R_3$	3
			1	1			1	1		1	1	1	1				−1	$=R_4$	4
				1				1			1		1	1				$=R_5$	5
c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{45}	c_{46}	c_{56}	0	0	0	Минимизировать	

Рис. 6.17. Матрица задачи календарного планирования трудовых ресурсов компании «Дик О'Браз».

резервных бригад. Однако компания «Дик О'Браз» может признать целесообразным иметь в течение промежуточных периодов непосредственно на месте проведения ремонтных работ резервные бригады, что и отражается неравенством (3).

Модель полностью описывается таблицей на рис. 6.17, где $n = 6$. Неотрицательные дополнительные переменные s_k, $k = 2, 3, 4$, добавлены для преобразования неравенств (3) в равенства. Трудно уловить какую-либо связь между таблицей на рис. 6.17 и матрицей, отображающей сетевую модель. Однако интуиция, подкрепленная знаниями, подсказывает, что связь можно обнаружить, если преобразовать эту таблицу к другому эквивалентному виду. Треугольная структура матрицы позволяет найти ключ к преобразованию строк таблицы на рис. 6.17.

Возьмем строку 4 и вычтем ее из строки 5. Аналогично вычтем строку 3 из строки 4, строку 2 из строки 3 и строку 1 из строки 2. Полученные результаты показаны в строках 5', 4', 3' и 2' таблицы на рис. 6.18. Умножим далее строку 5 на —1, изменив тем самым знаки коэффициентов в правой части, и введем это избыточное уравнение в качестве строки 6' в таблицу на рис. 6.18.

Теперь задача приведена к виду транспортной задачи с промежуточными пунктами. Вследствие этого условие целочисленности (5) не приводит к каким-либо дополнительным трудностям при отыскании решения. Сеть этой задачи показана на рис. 6.19, где узел 1

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	s_2	s_3	s_4		Строка
1	1	1	1	1														$=R_1$	$1'=1$
−1					1	1	1	1							−1			$=R_2-R_1$	$2'=2-1$
	−1				−1				1	1	1				1	−1		$=R_3-R_2$	$3'=3-2$
		−1				−1			−1			1	1			1	−1	$=R_4-R_3$	$4'=4-3$
			−1				−1			−1		−1		1			1	$=R_5-R_4$	$5'=5-4$
				−1				−1			−1		−1	−1				$=-R_5$	$6'=-5$
c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{45}	c_{46}	c_{56}	0	0	0	Минимизировать	

Рис. 6.18. Эквивалентное матричное представление задачи календарного планирования трудовых ресурсов компании «Дик О'Браз» в сетевой постановке.

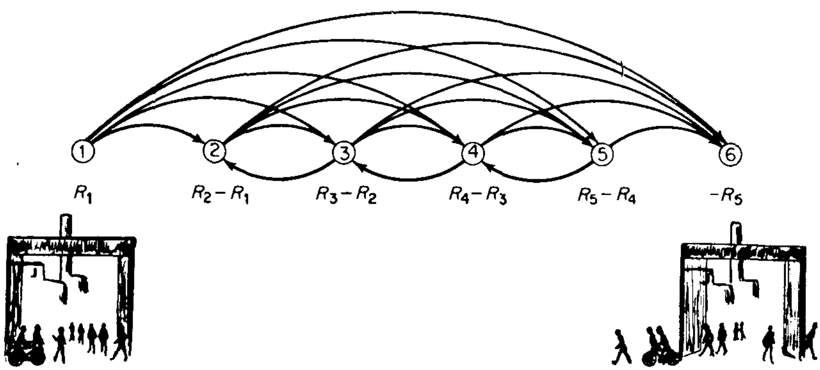


Рис. 6.19. Сеть, отображающая задачу **календарного планирования** трудовых ресурсов компании «Дик О'Браз».

является источником, а узел 6 — стоком. Все остальные узлы представляют собой промежуточные пункты. Матрица, соответствующая этой задаче, приведена на рис. 6.20. Объем буферного запаса можно принять равным

$$B = 0{,}5\,[R_1 + \sum_{k=2}^{5} |R_k - R_{k-1}| + R_5]\,. \qquad (7)$$

Заметим, что если не принимать никаких дополнительных допущений относительно R_k, то рассматриваемая задача *не является* задачей о кратчайшем пути и в матрице транспортной задачи рис. 6.20 под поддиагональю имеются элементы s_k. Однако если при $k = 1, 2, \ldots, 5$ величина $R_k = 1$, то можно исключить элементы s_k, ибо никакой экономии затрат при перевозке единицы груза из узла j в узел k, где $k < j$, не получается. Кроме того, в выражении (7) $B = 1$. Таким образом, в данном случае задача действительно упрощается и становится задачей о выборе кратчайшего пути в ациклической сети. Более того, полученная в результате сеть оказывается эквивалентной сети, рассмотренной в разд. 6.5 и приведенной

Узел \ Узел	2	3	4	5	6	
1	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	$\boxed{c_{13}}$ x_{13}	$\boxed{c_{14}}$ x_{14}	$\boxed{c_{15}}$ x_{15}	$\boxed{c_{16}}$ x_{16}	R_1
2	$\boxed{0}$ x_{22}	$\boxed{c_{23}}$ x_{23}	$\boxed{c_{24}}$ x_{24}	$\boxed{c_{25}}$ x_{25}	$\boxed{c_{26}}$ x_{26}	R_2-R_1+B
3	$\boxed{0}$ s_1	$\boxed{0}$ x_{33}	$\boxed{c_{34}}$ x_{34}	$\boxed{c_{35}}$ x_{35}	$\boxed{c_{36}}$ x_{36}	R_3-R_2+B
4		$\boxed{0}$ s_2	$\boxed{0}$ x_{44}	$\boxed{c_{45}}$ x_{45}	$\boxed{c_{46}}$ x_{46}	R_4-R_3+B
5			$\boxed{0}$ s_3	$\boxed{0}$ x_{55}	$\boxed{c_{56}}$ x_{56}	R_5-R_4+B
	B	B	B	B	R_5	

Рис. 6.20. Матрица условий сетевой постановки задачи календарного планирования трудовых ресурсов компании «Дик О'Браз».

на рис. 6.10, т. е. сети, отображающей задачу о замене оборудования. Другие особые случаи применения модели (2) — (6) рассматриваются в гл. 10.

6.8. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

В этой главе показано, как можно сформулировать ряд операционных задач в терминах оптимизации на сети. В данном разделе подводятся итоги того, что было изложено ранее, и даются общие определения понятий, используемых в сетевых моделях, а также приводится терминология, принятая для описания моделей этого класса.

Определения. Сеть (или **линейный граф**) состоит из множества **узлов** (или **вершин**, **точек**) и множества **дуг** (или **ребер**, **звеньев**), соединяющих различные пары узлов. На каждой дуге задана определенная ориентация (определено направление). Поэтому говорят, что сеть является **ориентированной**.

Для описания ориентированной сети можно воспользоваться простыми обозначениями. Пронумеруем узлы числами натурального ряда 1, 2, . . ., p и обозначим дугу, исходящую из узла i и входящую в узел j, парой номеров (i, j). Предположим, что между парой узлов допускается только одна дуга (i, j), и назовем некоторый объект, перемещающийся из узла i в узел j [т. е. по дуге (i, j)], **единичным потоком** по этой дуге. Сеть называется **двудольной**, если все ее узлы можно разбить на два подмножества G_1 и G_2, такие, что для любой дуги (i, j) узел i принадлежит G_1, а узел j — подмножеству G_2. Сеть транспортной задачи, показанная на рис. 6.1, является двудольной.

Во всех приведенных ранее в этой главе примерах единичный поток, выходящий из любого узла i и проходящий по дуге (i, j), остается единичным, входя в узел j. Иными словами, никакого уменьшения или увеличения потока не наблюдается. (Значение этого допущения рассматривается в следующем разделе.) Следовательно, структуру сети можно полностью задать матрицей (таблицей) структурных коэффициентов (подобной таблицам на рис. 6.2, 6.7, 6.15 и 6.18). Такая таблица называется **матрицей инциденций узлы — дуги**. Каждый узел отображается строкой этой матрицы, а каждая дуга — столбцом. Направление потока по дуге (i, j) указывает коэффициент 1 в строке, соответствующей узлу i, и коэффициент -1 в строке, соответствующей узлу j.

Последовательность дуг (*без учета* их ориентации), соединяющая узлы i и j, называется **путем** между этими узлами. Если $i = j$, то путь называется **контуром**. Сеть является **связной** при условии, что существует по крайней мере один путь между любой парой узлов. В большинстве приложений сетевые модели представляют собой связные линейные графы. Если все дуги пути, связывающего узлы i и j, ориентированы так, что единичный поток действительно может пройти по этому пути, то такой путь часто называется **ориентированной цепью**. (Следовательно, в этой главе вместо термина «путь» везде можно было бы пользоваться термином «ориентированная цепь».) Так, например, при первом методе преобразования задачи с промежуточными пунктами к виду классической транспортной задачи (образец приведенной матрицы задачи с промежуточными пунктами см. на рис. 6.4) необходимо найти все ориентированные цепи, ведущие из узлов с избыточными запасами в узлы, где имеется потребность в пополнении запасов. Ориентированная цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одном и том же узле, называется **ориентированным циклом**. **Ациклическая** сеть не содержит ни одного ориентированного цикла.

Дерево. Важным частным случаем сети является связная сеть, содержащая p узлов и $p - 1$ дуг. Сеть такой структуры носит название **дерева** и не содержит контуров. [Нарисуйте на листе бумаги шесть узлов ($p = 6$), разместив их случайным образом. Постройте далее связную сеть, используя для этого пять дуг. Поворачивая немного лист и прибегая в случае необходимости к помощи воображения, легко увидеть, что такой граф напоминает одну или несколько ветвей дерева. Что произойдет, если при построении такой сети попытаться включить в нее контур?] Рассмотрим для примера задачу отыскания кратчайших путей до некоторого узла (конечного пункта) из *всех* остальных узлов сети общего вида. Предположим, что все такие пути являются единственными, т. е. что из каждого узла в конечный ведет только один кратчайший путь. Решением задачи является множество ориентированных цепей, заканчивающихся в конечном узле. Если каждую дугу, не принадлежащую хотя бы одной из этих цепей, исключить из сети, то оставшиеся дуги образуют дерево. [Почему в результате получится связная сеть? Почему она не будет содержать контуров (циклов)? Почему в ней будет $p-1$ дуг?]

Общая постановка задачи. При определении сети целесообразно для рассматриваемого периода времени задать пропускные способности дуг $u_{ij} \geqslant 0$ по отношению к общему потоку, выходящему из узла i и входящему в узел j. В предыдущих разделах рассмотрены примеры, в которых значение каждой величины u_{ij} *в неявном виде* принималось равным либо бесконечности, либо нулю. В первом случае это означало, что никаких ограничений на величину потока по дуге не накладывается, а во втором — что поток непосредственно между узлами i и j не допускается.

Для характеристики сетей в прикладных оптимизационных задачах нужны еще два рода величин. К величинам первого рода относится чистый поток T_k из каждого узла k. Если значение T_k положительно, то из узла должно выходить на T_k единиц потока больше, чем входит в него, и наоборот, когда значение T_k отрицательно. Если же значение T_k равно нулю, то весь поток, входящий в узел, равен потоку, выходящему из него. Удобно и рационально принять

$$\sum_{k=1}^{p} T_k = 0. \tag{1}$$

Величинами второго ряда, которые необходимы для описания сетей, являются стоимости c_{ij} доставки единицы потока из узла i в узел j, т. е. стоимость единичного потока по дуге (i, j). Предполагается, что для любого ориентированного цикла в сети соответствующая сумма c_{ij} неотрицательна. Примем, что x_{ij} есть величина потока по дуге (i, j) в течение планового периода. Тогда весьма общей оптимизационной сетевой задачей, имеющей многочисленные практические приложения, является задача минимизации

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_{ij} \tag{2}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{p} x_{kj} - \sum_{i=1}^{p} x_{ik} = T_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{3}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij} \quad \text{для всех} \quad i \text{ и } j. \tag{4}$$

Ограничения (3) часто называют **уравнениями сохранения потока или уравнениями материального баланса.** Пользуясь методами, изложенными в этой главе, модель (1) — (4) всегда можно рассматривать как модель транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями.

В гл. 7 будет доказано следующее утверждение.

Теорема о целочисленности. Если все T_k и u_{ij} — целые, то значение (2) не возрастает при условии, что на каждую величину x_{ij} накладывается требование целочисленности.

Во всех случаях, когда задача линейного программирования имеет вид (1)— (4), она приводится к эквивалентной сетевой задаче. Иногда для приведения задачи к виду (1) — (4) приходится объединять уравнения, изменять знаки коэффициентов и вводить дополнительное соотношение либо рассматривать двойственную к исходной задачу. Однако после приведения задачи к такому виду каждое уравнение (3) соответствует узлу сети, каждая переменная x_{ij} — величине потока по дуге (i, j) и каждая величина c_{ij} — стоимости доставки единицы потока из узла i в узел j по дуге (i, j).

Модель задачи (1) — (4) иногда имеет несколько иной вид. Метод ее преобразования представляет достаточный практический интерес и в связи с этим заслуживает специального рассмотрения. Модификация обусловлена тем, что значение более чем одной величины T_k является либо строго положительным, либо строго отрицательным. Для исследования наиболее общего случая предположим, что имеется более одной величины T_k как со строго положительным, так и со строго отрицательным значением.

Введем два дополнительных фиктивных узла 0 и $p+1$. В каждый узел с положительным значением T_k проведем дугу $(0, k)$ с пропускной способностью $u_{0k} = T_k$. Из каждого узла с отрицательным значением T_k проведем дугу $(k, p+1)$ с пропускной способностью $u_{k,\, p+1} = -T_k$. Пусть F есть сумма положительных T_k. Тогда в модели (1) — (4) уравнения (3) заменяются следующими:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = F, \tag{I}$$

$$\sum_{j=1}^{p+1} x_{kj} - \sum_{i=0}^{p} x_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{II}$$

$$-\sum_{i=1}^{p} x_{i,\, p+1} = -F. \tag{III}$$

В результате получаем один источник (узел 0) и один сток (узел $p+1$), а все остальные узлы становятся промежуточными пунктами.

6.9. ОБОБЩЕННАЯ СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА

Можно ожидать, что теорема о целочисленности, приведенная в предыдущем разделе, не будет справедливой, если изменятся структурные свойства сети. Действительно, условия теоремы нарушаются, когда единичный поток, выходящий из узла i, становится равным $a_{ij} \geqslant 0$ при вхождении в узел j. При $a_{ij} > 1$ происходит **усиление** потока, а при $a_{ij} < 1$ — **уменьшение.** Матрица инциденций узлы — дуги для такой модели изменяется путем замены каждого элемента -1 на соответствующий элемент $-a_{ij}$.

В качестве примера применения обобщенной сетевой модели можно рассмотреть металлургическую фирму, имеющую несколько заводов. Ежемесячно вице-президент фирмы, ведающий вопросами производства, совместно со своим аппаратом определяет, как разместить заказы потребителей между предприятиями фирмы. Производственная мощность предприятия i составляет S_i тонн металла в месяц. Предприятия выпускают n различных видов продукции. В течение рассматриваемого месяца общая потребность в продукции вида j всех потребителей составляет D_j и также измеряется в тоннах. Поскольку предприятия различаются по оборудованию, «тонна условной мощности» на предприятии i, предназначенная для производства продукта вида j, дает a_{ij} тонн готовых изделий. Иными словами, «тонна условной мощности» на каждом предприятии на самом деле является стандартной единицей измерения, а различные значения величин a_{ij} характеризуют соответствующие «тонны условной мощности». Тонна изделий вида j, выпущенных предприятием i, обходится в c_{ij} долларов. Если предприятия размещены в различных географических пунктах, то в стоимость c_{ij} могут также входить различия в транспортных тарифах. Примем, что x_{ij} — количество «тонн условной мощности», выделенных на предприятии i для производства изделий вида j в течение рассматриваемого месяца. Тогда соответствующая математическая модель будет иметь вид

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geqslant D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{для всех } i \text{ и } j. \tag{4}$$

Если какое-либо изделие нельзя выпускать на предприятии i, то соответствующие величины x_{ij} в выражениях (1)— (4) нужно исключить.

		x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2n}	…	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	…	x_{mn}	
Поставщики	1	1	1	1	…	1												$\leqslant S_1$
	2						1	1	1	…	1							$\leqslant S_2$
	.																	.
	.											…						.
	.																	.
	m												1	1	1	…	1	$\leqslant S_m$
Потребители	1	$-a_{11}$					$-a_{21}$						$-a_{m1}$					$\leqslant -D_1$
	2		$-a_{12}$					$-a_{22}$						$-a_{m2}$				$\leqslant -D_2$
	3			$-a_{13}$					$-a_{23}$						$-a_{m3}$			$\leqslant -D_3$
	.				.					.						.		.
	.				.					.						.		.
	.				.					.		…				.		.
	n					$-a_{1n}$					$-a_{2n}$						$-a_{mn}$	$\leqslant -D_n$
		c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	c_{1n}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2n}	…	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	…	c_{mn}	Минимизировать

Рис. 6.21. Матрица обобщенной транспортной задачи.

Матрица этой задачи представлена в таблице на рис. 6.21. Следует отметить, что она мало отличается от матрицы классической транспортной задачи, показанной на рис. 6.2. В силу этого задачу линейного программирования (1) — (4) часто называют **обобщенной транспортной задачей** (или **взвешенной задачей размещения**).

6.10. МНОГОПРОДУКТОВАЯ СЕТЬ

Из рассмотрения классической транспортной задачи в разд. 6.2. ясно, что в формальной математической постановке этой задачи предполагается доставка лишь одного продукта. Был указан метод, с помощью которого условия многопродуктовой задачи можно достаточно хорошо аппроксимировать классической постановкой задачи. Однако в случае, когда необходимо рассмотреть доставку p различных продуктов в транспортной сети с промежуточными пунктами при *ограниченной пропускной способности*, причем структура запасов различных продуктов и потребности в них существенно различаются, задача может оказаться слишком сложной и ее не удается аппроксимировать однопродуктовой постановкой. В таких условиях ограниченная пропускная способность u_{ij} означает, что *суммарный* поток *всех* продуктов из узла i в узел j не должен превышать заданного значения. (Придумайте один-два примера, для которых справедливо это агрегированное ограничение.)

Чтобы оценить трудности, возникающие в многопродуктовой модели, рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 6.22. Сеть состоит

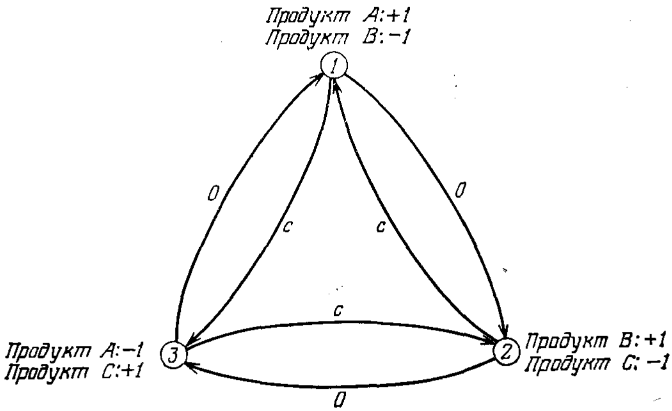


Рис. 6.22. Многопродуктовая сеть.

всего из трех узлов. Затраты по доставке продуктов по дугам (1, 2), (2, 3) и (3, 1) не учитываются, но за доставку единицы продукта по дугам (1, 3), (3, 2) и (2, 1) взымается плата в c денежных единиц. Одна единица продукта A имеется в наличии в узле 1 и требуется в узле 3. Аналогично единица продукта B имеется в узле 2 и требуется в узле 1, а единица продукта C имеется в узле 3 и нужна в узле 2. При отсутствии ограничений по пропускной способности оптимальное решение с нулевыми общими затратами сводится к перевозке каждого продукта из пункта отправки через промежуточный пункт в пункт назначения.

Предположим теперь, что максимальная пропускная способность каждой дуги ограничена одной единицей. Если это ограничение накладывается отдельно на каждый продукт, то предыдущее решение остается оптимальным. Но предположим, что такое ограничение наложено на *суммарный* поток *всех* продуктов, доставляемых по дуге. (Проверьте, насколько хорошо усвоен этот материал, построив матрицу этой задачи при последнем допущении. В каком отношении структура этой матрицы существенно отличается от структуры матрицы рис. 6.7?) Предыдущие маршруты доставки продуктов теперь не допустимы, ибо они предусматривали транспортировку двух единиц продуктов по дугам (1, 2), (2, 3) и (3, 1). Единственная оптимальная схема доставки продуктов сводится к отправке *полови-*

ны единицы каждого продукта по прежним маршрутам, а другой *половины* — непосредственно от источника в пункт назначения. Тогда соответствующие минимальные затраты на единицу продукта составят ${}^{3}/_{2}c$. Таким образом, объединение трех потоковых задач путем простого наложения общих ограничений по пропускной способности приводит к тому, что теорема о целочисленности, сформулированная в конце разд. 6.8, уже не выполняется. Вычислительные трудности, связанные с отысканием оптимальных потоков в таких сетях, также значительно возрастают.

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрите транспортную задачу (1) — (4) из разд. 6.2. Пусть число поставщиков $m = 4$, а число потребителей $n = 5$.

а) Запишите условия задачи, не пользуясь символом суммы, т. е. представьте целевую функцию и ограничения в подробной записи.

б) Изобразите сеть по образцу рис. 6.1, соответствующую условиям задачи, и постройте две таблицы, аналогичные таблицам на рис. 6.2.

2. *Избыточные поставки.* Рассмотрите транспортную задачу, в которой $S_1 = 5$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$ и $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$. Введите фиктивного потребителя и постройте таблицу, подобную таблице на рис. 6.2, *а*, в которой общие поставки равны суммарному спросу. Не забудьте указать коэффициенты затрат c_{ij} для фиктивного потребителя и величину его спроса D_j.

3. *Сезонные колебания предложения и спроса.* Предположим, что фирма, владеющая двумя предприятиями и имеющая трех собственных потребителей продукции этих предприятий, разрабатывает календарный план производства и снабжения на четыре плановых периода. Примем, что в течение периодов 1, 2, 3, 4 предприятие 1 располагает соответственно 4, 5, 6, 7 единицами продукции, а предприятие 2 располагает 8, 9, 10 и 11 единицами. Примем также, что спрос потребителя 1 в течение этих периодов составляет соответственно 3, 3, 10 и 10 единиц, потребителя 2 — 4, 2, 6 и 6 единиц и потребителя 3 — 2, 6, 4 и 4 единиц. Пусть затраты на доставку единицы продукции с предприятия i потребителю j равны c_{ij} в течение любого периода.

а) Сформулируйте задачу оптимизации в табличной форме, аналогичной таблице на рис. 6.2, *а*. Не забудьте указать, какие величины x_{ij} необходимо исключить.

б) Существует ли допустимое решение этого числового примера? Обоснуйте свой вывод. Сформулируйте общее правило, позволяющее определить, существует ли допустимое решение такой задачи.

в) Объясните, как изменить постановку задачи в случае, когда суммарные поставки превышают суммарный спрос.

г) Предположим, что на каждую единицу запаса, имеющегося в конце любого периода, приходятся h единиц затрат. Повлияет ли учет этих затрат на оптимальное решение задач п. а)? п. в)?

Упражнения 4—9 относятся к примеру фирмы «Универсал», показанному на рис. 6.3.

4. В каждом из указанных ниже пунктов определите, какие склады являются источниками, стоками и промежуточными (перевальными). Определите также, допускает ли полученная схема маршрутов перевозок удовлетворение спроса. Положим, что исключен маршрут

а) склад 4 — склад 5;
б) склад 5 — склад 4;
в) склад 6 — склад 7;
г) склад 2 — склад 5;
д) склад 4 — склад 7;
е) склад 4 — склад 3.

5. В каждом из указанных ниже пунктов определите, какие склады являются источниками, стоками и промежуточными. Положим, что добавлен маршрут

а) склад 7 — склад 4;
б) склад 6 — склад 8;
в) склад 8 — склад 6;
г) склад 3 — склад 4;
д) склад 1 — склад 3;
е) склад 3 — склад 1.

6. Для каждого из указанных ниже пунктов постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.4. Определите допустимое решение и укажите, следует ли из этого решения наличие единственного маршрута от поставщика к потребителю. Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.5, и определите на ней источники и стоки.

а) Избыточный запас в 10 единиц имеется на складе 1, запасы в 2 и 8 единиц требуются соответственно на складах 3 и 8. Ни на одном другом складе избытка запасов и потребностей в них нет.

б) Избыточные запасы в 10 и 4 единицы имеются соответственно на складах 1 и 5, запасы в 3, 2, 1 и 8 единиц требуются на складах 3, 4, 6 и 8. На остальных складах избытки запасов и потребности отсутствуют.

в) Избыточные запасы в 10, 1, 2 и 5 единиц имеются соответственно на складах 1, 2, 6 и 7, запасы в 3, 1, 6 и 8 единиц требуются на складах 3, 4, 5 и 8.

г) Рассмотрите упражнения всех предыдущих пунктов для случая отсутствия маршрута со склада 6 на склад 7. Укажите также, существует ли допустимое решение в этом случае.

7. а) Рассмотрите план перевозок, заданный матрицей на рис. 6.6. Объясните подробно, почему этот план предусматривает доставку трех единиц со склада 1 на склад 3 через склад (пункт) 2, одной единицы на склад 6 через пункты 2 и 5 и шести единиц на склад 8 через пункты 2, 5, 4 и 7, а также доставку двух единиц со склада 4 на склад 8 через пункт 7. Начертите схему маршрутов по образцу рис. 6.3.

б) Покажите, как изменится матрица на рис. 6.6, если со склада 1 отправляют шесть единиц на склад 8 через пункты 2, 5, 6 и 7.

в) Покажите, как изменится матрица на рис. 6.6, если со склада 1 вместо шести отправляют восемь единиц на склад 8, а со склада 4 — две единицы на склад 3 вместо склада 8.

г) Подробно объясните, какой план перевозок определит матрица на рис. 6.6, приняв

$$x_{12} = 10, \quad x_{22} = 2, \quad x_{25} = 10, \quad x_{43} = 3, \quad x_{44} = 11, \quad x_{54} = 1,$$
$$x_{55} = 2, \quad x_{56} = 9, \quad x_{66} = 3, \quad x_{67} = 8, \quad x_{77} = 4, \quad x_{78} = 8.$$

8. Добавьте маршруты со склада 3 на склад 2, со склада 3 на склад 4, со склада 5 на склад 3, со склада 7 на склад 6 и со склада 3 на склад 8. Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.7, для избыточных и требующихся запасов, указанных в пп. а), б), в) упражнения 6.

9. Предположим, что на складах 1, 4 и 5 имеется по одной единице избыточных запасов, а на складах 3, 7 и 8 требуется по одной единице. Избытка или дефицита запасов на складах 2 и 6 нет.

а) Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.4. Укажите, можно ли интерпретировать эту матрицу как матрицу задачи о назначениях.

б) Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.5. Укажите, можно ли интерпретировать эту матрицу как матрицу задачи о назначениях.

10. Объясните, каким образом классическую транспортную задачу можно преобразовать в задачу о назначениях. Проиллюстрируйте предлагаемый вами метод на примере двух поставщиков с мощностями $S_1 = 2$ и $S_2 = 3$ и двух потребителей со спросом $D_1 = 1$ и $D_2 = 4$.

11. а) Составьте матрицу, отображающую условия задачи (1) — (3) разд. 6.5 для примера выбора кратчайшего пути, показанного на рис. 6.8.

б) Примите все $c_{ij} \geqslant 0$. Покажите, что ограничения (2) можно выразить неравенствами вида $\geqslant$. Сформулируйте соответствующую двойственную задачу максимизации.

12. Рассмотрите пример выбора кратчайшего пути, показанный на рис. 6.8. Добавьте дуги из узла 4 в узел 7, из узла 6 в узлы 3 и 7, исключите дуги из узла 4 в узел 3, из узла 6 в узел 5 и из узла 7 в узел 2.

а) Начертите новую сеть, соответствующую этим изменениям, и постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.9.

б) Составьте матрицу для п. а), соответствующую условиям задачи (1) — (3) разд. 6.5.

в) Примите все $c_{ij} \geqslant 0$. Покажите, что ограничения (2) можно выразить неравенствами вида $\geqslant$. Сформулируйте соответствующую двойственную задачу максимизации.

13. Рассмотрите пример выбора кратчайшего пути (рис. 6.8). Добавьте дуги из узла 1 в узлы 3 и 4 и из узлов 5 и 6 в узел 8.

а) Постройте матрицу, аналогичную матрице рис. 6.9, приняв за сток узел 2, а за источник узел 7.

б) Составьте матрицу для п. а), соответствующую условиям задачи (1) — (3) разд. 6.5.

в) Примите все $c_{ij} \geqslant 0$. Покажите, что ограничения (2) можно записать в виде неравенств $\geqslant$. Сформулируйте далее соответствующую двойственную задачу максимизации.

14. *Задача о кратчайшем пути.* Рассмотрите задачу фирмы «Универсал», приведенную на рис. 6.3. Для каждого из указанных ниже пунктов начертите сеть, отображающую соответствующую задачу выбора кратчайшего пути, постройте матрицу, аналогичную матрице рис. 6.9, и составьте матрицу, соответствующую условиям задачи (1) — (3) разд. 6.5. Найдите кратчайший путь

а) от склада 1 до склада 3;

б) от склада 1 до склада 8;

в) от склада 4 до склада 8.

15. *Замена оборудования.* Рассмотрите пример фирмы «Таксолюкс», показанный на рис. 6.10.

а) Покажите на сети маршрут, соответствующий замене оборудования в начале 3-го и 5-го годов, в начале 2-го и 5-го годов, в начале 3-го и 4-го годов, только в начале 3-го года, только в начале 4-го года. Определите соответствующие затраты в течение всего планового периода.

б) Дайте матричное представление задачи по образцу рис. 6.9.

в) Опишите матрицу, соответствующую условиям задачи (1) — (3) разд. 6.5.

г) Допустим, что затраты на эксплуатацию и ремонт оборудования в течение одного, двух, трех, четырех и пяти последовательных периодов составляют соответственно 1, 3, 6, 10 и 15. Предположим также, что если аренда оборудования продолжается в течение одного, двух, трех, четырех или пяти последовательных периодов, то арендная плата составляет соответственно 5, 9, 13, 16 или 19. Эти арендные платежи увеличиваются на единицу в каждый период. Например, если оборудование взято в аренду в начале третьего периода и аренда продлена на один, два или три последовательных периода, то арендная плата составит соответственно 7, 11, 15. Вычислите каждое c_{ij} по этим данным.

д) Пусть все $c_{ij} \geqslant 0$. Покажите, что ограничения (2) можно записать в виде неравенств $\geqslant$. Сформулируйте соответствующую двойственную задачу максимизации.

16. *Замена оборудования.* Рассмотрите пример фирмы «Таксолюкс», показанный на рис. 6.10. Внесите необходимые изменения в сеть для случая, когда $n = 8$ и каждую единицу оборудования нужно эксплуатировать не менее трех лет.

17. *Календарное планирование методом критического пути.* Рассмотрите пример компании «Блитцстрой», приведенный в таблице на рис. 6.13. Предположим, что операции C непосредственно предшествуют операции A и D, операции D — операция B вместо операции A и операции E — только операция B.

а) Запишите задачу линейного программирования, соответствующую новым ограничениям.

б) Составьте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.14.

в) Постройте матрицу для соответствующей двойственной задачи, аналогичную матрице на рис. 6.15, и постройте сеть, подобную сети на рис. 6.16.

18. *Календарное планирование методом критического пути.* Таблица, описывающая условия задачи компании «Блитцстрой», показана на рис. 6.13. Сеть можно представить в другой форме следующим образом. Пусть узел S соответствует началу комплекса. Все дуги, исходящие из узла S, имеют нулевую длину. Пусть узел T соответствует завершению комплекса. Кроме того, каждая реальная операция сопоставляется одному узлу. Из узла i в узел j проводится дуга, если операция i непосредственно предшествует операции j. Длина дуги принимается равной t_i — продолжительности операции i. Любой операции, которая может начаться в момент начала комплекса, непосредственно предшествует операция S. Любая операция, за которой непосредственно не следуют операции, отличается тем, что она связана дугой с узлом T. Узел T выполняет ту же функцию, что и операция F в таблице на рис. 6.13, поэтому операцию F можно заменить узлом T.

а) Постройте сеть, соответствующую условиям таблицы рис. 6.13, в форме, описанной в данном упражнении [1]).

б) Сравните различные формы представления сети.

в) Начертите в сопряженной форме сеть, соответствующую условиям упражнения 17.

19. *Календарное планирование трудовых ресурсов.* Рассмотрите пример компании «Дик О'Браз», описанный в разд. 6.7. Пусть $n = 8$ и каждая бригада нанимается не менее чем на два периода.

а) Постройте матрицы, аналогичные матрицам на рис. 6.17 и 6.18.

б) Начертите сеть по образцу рис. 6.19.

в) Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.20.

20. *Календарное планирование трудовых ресурсов.* Рассмотрите пример компании «Дик О'Браз», описанный в разд. 6.7. Пусть $n = 9$

---

[1]) Эта форма представления сетей, в которой узлы отображают операции, называется сопряженной.— *Прим. перев.*

и каждая бригада нанимается не менее чем на один период, но не более чем на четыре. Выполните все пункты упражнения 19 при этих условиях.

21. *Календарное планирование трудовых ресурсов.* Предположим, что в модели разд. 6.7 величина $n = 6$. Обозначим заработную плату бригады в периоде k символом w_k, где

$$w_1 = 100, \quad w_2 = 150, \quad w_3 = 180, \quad w_4 = 200, \quad w_5 = 120.$$

Найм бригады, которая должна начать работать в периоде k, обходится в g_k единиц, где

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad g_3 = 3, \quad g_4 = 2, \quad g_5 = 1.$$

Расходы f_k, связанные с увольнением бригады в конце периода k, составляют

$$f_1 = 0{,}3, \quad f_2 = 0{,}5, \quad f_3 = 0{,}7, \quad f_4 = 0{,}4, \quad f_5 = 0{,}1.$$

Если бригада работает в течение t последовательных периодов, то затраты на транспорт, жилье, отдых и прочие затраты составляют h_t, где

$$h_1 = 12, \quad h_2 = 13, \quad h_3 = 14, \quad h_4 = 18, \quad h_5 = 25.$$

Вычислите значения всех коэффициентов c_{ij} целевой функции.

22. а) Изобразите произвольным образом на листе бумаги шесть точек (узлов). Постройте связную сеть, используя ровно пять дуг. Что произойдет, если при построении сети попытаться включить в нее контур (петлю)? Что получится, если добавить еще одну дугу?

б) Рассмотрите упражнение п. а), взяв семь узлов и шесть дуг.

23. Рассмотрите задачу отыскания кратчайших путей из всех узлов сети общего вида, содержащей p узлов, в конечный узел. Предположим, что эти кратчайшие пути являются единственными. Тогда решение будет представлять собой некоторое множество ориентированных путей, заканчивающихся в конечном узле. Упростите структуру сети, исключив из нее все дуги, не принадлежащие ни одному из найденных путей. Поясните, почему в результате получится связная сеть, почему она не содержит контуров и почему в ней имеется ровно $p - 1$ дуг.

24. *Многопродуктовая сеть.* Рассмотрите пример, приведенный на рис. 6.22. Составьте полную матрицу для этой модели с учетом ограничения, что *общий* поток *всех* продуктов по дуге не должен превышать единицы. В чем существенное отличие этой матрицы от матрицы рис. 6.7?

25. Объясните, как вы понимаете следующие термины:

транспортная задача;
транспортная задача с ограниченными пропускными способностями (ограниченными сверху значениями переменных);
промежуточный пункт;
источник;

сток;
буферный запас;
задача о назначениях;
задача о кратчайшем пути;
узел;
ориентированная дуга;
конечный узел;
цикл.

26. Объясните, как вы понимаете следующие термины:

задача о максимальном пути;
критический путь;
сеть (или линейный граф);
узел, вершина или точка;
дуга, ребро или звено;
двудольная сеть;
матрица инциденций узлы — дуги;
путь;
контур;
связная сеть;
ориентированная цепь;
ориентированный цикл;
ациклическая сеть;
дерево;
уравнения сохранения потока (или материального баланса);
усиление (или ослабление) потока;
обобщенная транспортная задача (или взвешенная распределительная) многопродуктовая сеть.

УПРАЖНЕНИЯ НА ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

27. Фирма «Всякая всячина», выпускающая лезвия для бритв, объявила о переходе к производству совершенно новых лезвий улучшенного качества. Реакция потребителей на проведенную фирмой рекламную кампанию оказалась вполне удовлетворительной. Фирма имеет два предприятия и три оптовых склада, размещенных в различных географических пунктах США. Лезвия на склады доставляются по железной дороге партиями. Выпуск лезвий в течение одного месяца на предприятиях 1 и 2 составляет $S_1 = 100$ и $S_2 = 200$ соответственно. Возможности сбыта на складах 1, 2 и 3 в течение этого месяца равны соответственно $D_1 = 150$, $D_2 = 200$ и $D_3 = 250$. Как видно, возможный сбыт, т. е. спрос, значительно превышает поставки, вследствие чего часть потребностей останется неудовлетворенной.

Предположим, что транспортные расходы на доставку одного вагона лезвий с предприятия i на склад j равны t_{ij} и что доход от сбыта этого вагона на складе j равен p_j. (Фирма может продавать свои лезвия по различным ценам в различных пунктах страны.)

а) Постройте транспортную модель с целевой функцией, тождественной прибыли. Укажите, каким образом вычисляется каждый коэффициент c_{ij}, входящий в целевую функцию.

б) Постройте соответствующую матрицу, аналогичную показанной на рис. 6.2, *а*. Обязательно проставьте значения всех S_i, D_j и c_{ij}.

28. Фирма «С дальним прицелом» должна выполнить обязательства по поставке $D_1, D_2, \ldots, D_N$ единиц своей продукции в течение

периодов 1, 2, . . ., N соответственно. При условии односменной работы объем продукции фирмы в течение периода t составляет m_t единиц. При этом прямые затраты на производство одной единицы равны p_t. Пользуясь сверхурочными, фирма может выпустить дополнительно e_t единиц при прямых затратах q_t на единицу, где $q_t > p_t$. Поскольку обязательства по поставкам меняются в значительных пределах, руководство фирмы полагает, что в отдельные периоды может потребоваться создание запасов с целью удовлетворения спроса в последующие периоды. Затраты на хранение единицы запаса к концу периода t составляют h_t денежных единиц.

а) Предполагая, что значения D_t, m_t и e_t являются целочисленными, постройте транспортную модель, позволяющую найти программу производства и хранения минимальной стоимости. Обязательно укажите, как вычисляется каждый коэффициент целевой функции.

б) Пользуясь решением, найденным в п. а), постройте матрицу, подобную показанной на рис. 6.2, *а*, при следующих числовых данных ($N = 4$):

$$D_1 = 12, \quad D_2 = 9, \quad D_3 = 18, \quad D_4 = 22,$$

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 8, \quad m_3 = 10, \quad m_4 = 12,$$

$$e_1 = 8, \quad e_2 = 6, \quad e_3 = 5, \quad e_4 = 4,$$

$$p_t = 10, \quad q_t = 15, \quad h_t = 1 \quad \text{при всех } t.$$

в) Предложите простое правило отыскания оптимального решения для такой модели, в которой величины p_t, q_t и h_t могут быть различными для различных периодов. Примените затем это правило при рассмотрении упражнения п. б).

29. Компания «Синбад-пароход» занимается морскими перевозками грузов из портов X и Y в порты A, B и C. Расписание движения судов на 15 дней приведено в следующей таблице:

Дата	3	4	6	6	9	9	10	10	10	13	15	15
Порт отправления	X	Y	X	Y	X	Y	X	X	Y	Y	Y	Y
Порт назначения	A	A	C	A	B	A	A	C	B	B	B	C

После прихода судна из порта отправления в порт назначения оно может вернуться в любой из портов отправления. Общая продолжительность рейса из порта в порт (в сутках) в обоих направлениях приведена в следующей таблице:

	A	B	C
X	2	3	2
Y	1	2	1

Предположим, что в день 1 три судна находятся в порту X и три — в порту Y. Пусть затраты, связанные с возвращением судна в порт X из портов A, B и C, равны соответственно p_A, p_B и p_C, а затраты, связанные с возвращением в порт Y, равны q_A, q_B и q_C.

Руководство компании «Синбад-пароход» стремится найти маршруты из портов A, B и C в порты X и Y, при которых минимизируются общие затраты. Покажите, как можно решить эту задачу, используя транспортную модель.

Пусть поставщик соответствует дате t, порту назначения i, т. е. в день t одно или более судов (в зависимости от приведенного выше расписания рейсов) прибывают в порт назначения i (порт A, B или C) и готовы отплыть в порт отправления (порт X или Y). Так, например, поскольку при $t = 6$ одно судно должно выйти из порта X в порт C и этот рейс имеет продолжительность два дня, то у поставщика имеется по крайней мере одно судно $(6 + 2,\ C)$.

Пусть потребитель соответствует дате t, порту отправления j, т. е. в день t одно или более судов (в зависимости от приведенного выше расписания рейсов) отплывают из порта отправления j (порт X или Y). Так, например, потребитель определяется парой $(9,\ X)$.

Заметим, что возникают ситуации, когда некоторые поставщики не могут удовлетворить спрос определенных потребителей. Например, поставщик $(6 + 2,\ C)$ не может удовлетворить спрос потребителя $(9,\ X)$, так как рейс из порта C в порт X занимает два дня.

Постройте матрицу транспортной задачи, описывающую структуру модели. Обязательно укажите соответствующие величины S_i, D_j и c_{ij}. Отметьте в матрице допустимое решение и интерпретируйте его, сопоставив с фактическим расписанием движения шести грузовых судов.

30. Рассмотрите вновь пример компании «Синбад-пароход» (упражнение 29). Предположим, что независимо от транспортных затрат фирма хочет найти *минимальное* число судов, необходимых для обеспечения принятого расписания рейсов. Покажите, как решить эту задачу, используя транспортную модель. Постройте матрицу транспортной задачи, определяющую структуру такой модели. Обязательно укажите соответствующие величины S_i, D_j и c_{ij}.

Попытайтесь определить допустимое решение по таблице для пяти (четырех) судов и дайте его интерпретацию, сопоставив с фактическим расписанием движения судов.

(*Указание*: введите фиктивного поставщика, располагающего большим числом судов, чем можно использовать для удовлетворения *любой* потребности, и фиктивного потребителя, способного принять любой избыток судов. Покажите, что целью является минимизация числа судов, удовлетворяющих потребности из пункта, соответствующего фиктивному поставщику.

31. Компания «Полиметалл» добывает руду на двух рудниках 1 и 2, перевозит ее на обогатительные фабрики 3 и 4, а затем отправляет готовый продукт в пункты 5, 6 и 7, где его продают. Схема всех этих пунктов и грузопотоков приведена на рис. 6.23.

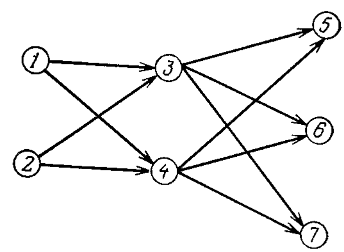


Рис. 6.23.

Пусть S_1 и S_2 соответствуют максимальной мощности поставщиков 1 и 2 соответственно, а D_5, D_6, D_7 — спросу в пунктах 5, 6 и 7 соответственно. Общие максимальные поставки превышают общий спрос.

Пусть m_i — стоимость единицы веса руды на руднике i ($i = 1, 2$), p_j — стоимость переработки единицы веса руды на фабрике j ($j = 3, 4$), s_{ij} — транспортные расходы на доставку единицы веса руды с рудника i на фабрику j ($i = 1, 2$ и $j = 3, 4$), а t_{jk} — транспортные расходы на доставку единицы с фабрики j в пункт k ($j = 3, 4$ и $k = 5, 6, 7$).

а) Постройте матрицу задачи с промежуточными пунктами, аналогичную матрице на рис. 6.4. Обязательно укажите подробно, как вычислить каждый коэффициент c_{ij} целевой функции.

б) Постройте полную матрицу задачи с промежуточными пунктами, аналогичную матрице на рис. 6.5. Обязательно укажите, как вычислить каждый коэффициент c_{ij} целевой функции в этом случае.

в) Постройте матрицу по образцу рис. 6.7. Используйте неравенства в тех случаях, когда общая мощность поставщиков превышает общий спрос потребителей.

32. Рассмотрите сеть с промежуточными пунктами, показанную на рис. 6.24, где положительное число, стоящее у узла, определяет мощность поставщика, а отрицательное — спрос потребителя. Отметим, что между любой парой узлов имеются по существу две дуги, т. е. допускается движение в обоих направлениях. Удельные затраты на перевозку грузов из узла i в узел j составляют c_{ij}, причем c_{ij} не обязательно равно c_{ji}.

а) Постройте матрицу по образцу рис. 6.4.

б) Постройте полную матрицу задачи с промежуточными пунктами по образцу рис. 6.5. Обязательно укажите значения поставок и спроса.

в) Укажите в матрице п. б) следующий план перевозок: пять единиц из узла 5 в узел 4 через узел 3, пять единиц из узла 2 в узел 4 через узлы 5 и 3, восемь единиц из узла 2 в узел 1 через узел 5, двенадцать единиц из узла 3 непосредственно в узел 1.

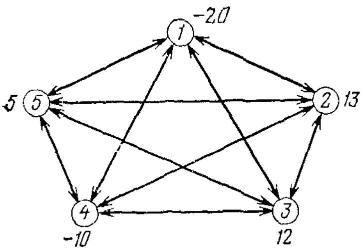


Рис. 6.24.

г) Найдите другой план перевозок, имеющий ту же стоимость, что и план, указанный в п. в).

д) Постройте матрицу по образцу рис. 6.7.

е) Постройте матрицу для п. д) таким образом, чтобы ограничения по поставкам имели вид неравенств $\leqslant$, а ограничения по спросу определялись неравенствами $\geqslant$. Сформулируйте далее соответствующую двойственную задачу *максимизации*.

33. Рассмотрите сеть с промежуточными пунктами, показанную на рис. 6.25. Положительное число, стоящее у узла, определяет

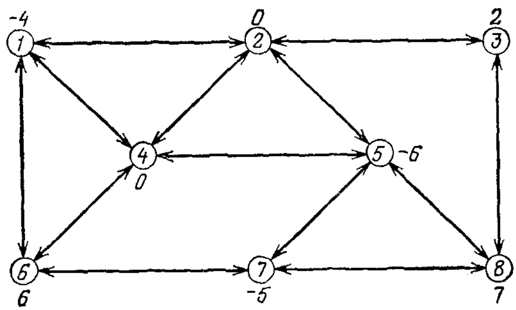


Рис. 6.25.

мощность поставщика, отрицательное — спрос потребителя, 0 — отсутствие спроса и поставок. Отметим, что между каждой парой связанных узлов перевозки допускаются в обоих направлениях. Удельные затраты на перевозку одного изделия из узла i в узел j равны c_{ij}, причем c_{ij} не обязательно равно c_{ji}.

а) Постройте матрицу задачи с промежуточными пунктами по образцу рис. 6.4. Покажите допустимое решение и определите, является ли оно единственным.

б) Постройте расширенную матрицу задачи с промежуточными пунктами по образцу рис. 6.5. Имеются ли в сети этой задачи источники и стоки? Обязательно проставьте в матрице значения мощности поставщиков и спроса потребителей.

в) В матрице п. б) укажите следующий план перевозок: две единицы из узла 3 в узел 1 через узлы 2 и 4, две единицы из узла 6 в узел 1 через узел 4, четыре единицы из узла 6 в узел 5 через узел 4, две единицы из узла 8 в узел 5 через узлы 3, 2 и 4, пять единиц из узла 8 в узел 7 через узлы 3, 2, 4 и 5.

г) Постройте матрицу этого плана перевозок по образцу рис. 6.7.

34. Фирма «Микродеталь» является владельцем мелкосерийного металлообрабатывающего завода. Дневной портфель заказов включает n деталей, каждая из которых может обрабатываться на n различных станках. Пусть t_{ij} — общая продолжительность обработки детали i на станке j (включая время наладки станка). Постройте оптимизационную модель, минимизирующую общую продолжительность выполнения всех заказов.

35. Требуется составить расписание занятий на факультете. В частности, нужно назначить n преподавателей в n групп. Ранее студенты заполнили анкеты с оценками преподавателей, и поэтому известно, в какой степени студентам нравятся преподаватели, которые вели у них занятия. (В некоторых случаях преподаватель никогда не проводил занятий в какой-либо группе, и поэтому приходится оценить, насколько этот преподаватель понравится студентам этой группы. В других случаях преподаватель не хочет или не может вести занятия в конкретной группе, так что следует исключить возможность назначения этого преподавателя в данную группу.)

а) Объясните, каким образом можно использовать математическую модель, чтобы максимизировать степень удовлетворения студентов преподавателями.

б) Считаете ли вы, что такой метод подходит для вуза?

36. При составлении расписания использования аудиторий в одном из гуманитарных институтов требуется выделить n аудиторий для n учебных групп. Некоторые возможности исключены по одной из следующих причин: численность группы превышает количество мест в аудитории, в нужное время аудитория занята, аудитория находится на слишком большом расстоянии от преподавательской. Предложите математическую модель, которая может оказать помощь в решении этой задачи.

37. Фирма «Усушка без утруски» имеет запасы продуктов, качество которых ухудшается при хранении, причем ухудшение качества оценивается недельными периодами хранения. Предположим, что текущие запасы фирмы составляют четыре единицы, занумерованные индексами $i = 1, 2, 3, 4$, срок хранения обозначается символом A_i. Фирма заключила следующий контракт на продажу этих продуктов. Одна партия должна быть поставлена через t_1 недель с начала отсчета, другая — через t_2 недель, третья — через t_3 недель и четвертая — через t_4 недель. Доход, получаемый фирмой за каждую партию, является функцией продолжительности хранения с момента поставки. Эта функция обозначается $R(A)$, где A — соответствующая продолжительность хранения.

Постройте оптимизационную модель, позволяющую фирме «Усушка без утруски» определить, какую партию направлять заказчику на каждую дату поставки, с тем чтобы максимизировать общий доход.

38. Компания «Трансконтинент» обслуживает авиалинию Нью-Йорк — Лос-Анжелес. Расписание движения самолетов включает много рейсов, часть которых является беспосадочными, а часть

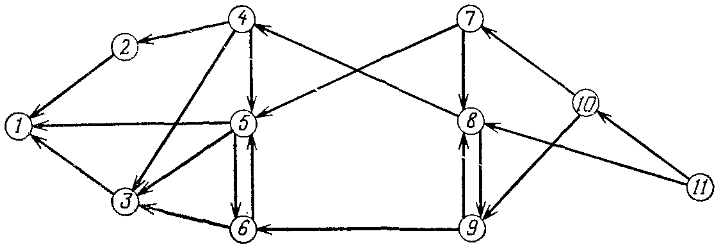


Рис. 6.26.

предусматривает посадки в промежуточных пунктах. Предположим, что ежедневно совершается N рейсов в обоих направлениях. Ежедневные рейсы из Нью-Йорка занумеруем индексами $i = 1, 2, \ldots, N$, а из Лос-Анжелеса — индексами $j = 1, 2, \ldots, N$. Если какой-либо реактивный самолет *многократно* выполняет рейс i из Нью-Йорка и рейс j из Лос-Анжелеса, то компания может рассчитать еженедельные простои таких самолетов. Эти простои определяются не только интервалом времени между прибытием самолета рейса i в Лос-Анжелес и вылетом самолета рейса j в Нью-Йорк, но и продолжительностью подготовки к полету машин рассматриваемой пары рейсов. Объясните, как можно применить математическую оптимизационную модель для определения таких спаренных рейсов между Нью-Йорком и Лос-Анжелесом, при которых минимизируется недельное время простоя всех самолетов, обслуживающих линию.

Как изменится постановка задачи, если самолет не обязательно назначается на один и тот же рейс из Нью-Йорка и Лос-Анжелеса?

39. Рассмотрите сеть, приведенную на рис. 6.26. Задача заключается в отыскании кратчайшего пути из узла 11 в узел 1. Примем, что c_{ij} — длина дуги (i, j).

а) Постройте матрицу, аналогичную матрице на рис. 6.9.

б) Постройте матрицу для п. а), соответствующую постановке задачи (1) — (3) разд. 6.5.

40. Рассмотрите снова сеть упражнения 39. Добавьте дугу из узла 1 в узел 11. Предположим, что нужно отыскать кратчайший путь из узла 9 в узел 3. Дайте ответы на вопросы, сформулированные в упражнении 39.

41. *Замена оборудования.* В одном из цехов металлообрабатывающего завода фирмы «Резвая фреза» работает дорогостоящий сверлильный станок, который по мере износа необходимо периодически заменять. Вице-президент фирмы, ведающий вопросами производства, разрешил установить новую модель станка, но при этом поручил начальнику цеха составить план замены на ближайшие семь лет, после чего станок больше не понадобится.

Пусть p_t — стоимость новой модели в период t, где

$$p_1 = 100, \quad p_2 = 105, \quad p_3 = 110, \quad p_4 = 115, \quad p_5 = 120,$$

$$p_6 = 125, \quad p_7 = 130,$$

в связи с чем приобретение станка в рассматриваемый период обходится в 100 единиц; v_k — остаточная стоимость станка, продаваемого по окончании k периодов эксплуатации, где

$$v_1 = 50,\ v_2 = 25,\ v_3 = 10,\ v_4 = 5,\ v_5 = 2,\ v_6 = 1,\ v_7 = 0.$$

Таким образом, если новый станок продать в конце периода 1, то фирма «Резвая фреза» получит доход в 50 единиц, если продать его в конце периода 2, то доход составит 25 единиц, и, наконец, если продать станок в конце периода 7, то доход будет равен нулю.

Примем, что r_k — затраты на эксплуатацию станка в течение k-го периода эксплуатации, где

$$r_1 = 30,\ r_2 = 40,\ r_3 = r_4 = 50,\ r_5 = 60,\ r_6 = 70,\ r_7 = 100.$$

а) Сформулируйте задачу о кратчайшем пути для определения оптимальной стратегии замены.

б) Постройте матрицу этой задачи, аналогичную матрице на рис. 6.9. Обязательно вычислите значение каждой величины c_{ij}.

в) Постройте матрицу, соответствующую задаче (1) — (3).

42. Компания «Утопия» намеревается применить метод критического пути для построения календарного плана двух комплексов. Постройте соответствующую модель линейного программирования для каждого комплекса. Постройте матрицу по образцу рис. 6.14 и сеть по образцу рис. 6.16. Для обозначения продолжительности операции j используйте везде символ t_j.

а)

Операция	Непосредственно предшествующие операции
A	—
B	—
C	A
D	A
E	$B,\ C$
F	$B,\ C$
G	$D,\ E$
H	F

б)

Операция	Непосредственно предшествующие операции
A	—
B	—
C	A
D	A
E	B
F	B
G	D
H	C, F

43. В упражнении 18 описан другой метод представления сетевой модели комплекса. Постройте сети, заданные в п. а) и б) упражнения 42, используя этот метод.

44. После отыскания критического пути в сети п. а) упражнения 42 руководству компании «Утопия» стало ясно, что для выполнения предусмотренного контрактом обязательства завершить комплекс к сроку T необходимо прибегнуть к сверхурочным работам.

В сетевой модели комплекса содержится шесть узлов, пронумерованных индексами $i = 1, 2, \ldots, 6$, где узел 1 соответствует началу комплекса, а узел 6 — окончанию. Пусть d_{ij} — минимально возможная продолжительность операции, отображаемой дугой (i, j); d_{ij} — известная постоянная величина, значение которой достигается при максимально возможном использовании сверхурочного времени. Примем, что управляемыми переменными задачи являются y_{ij} — интервал времени, определяемый разностью между продолжительностью операции (i, j), выполняемой без использования сверхурочных работ, и величиной d_{ij}; t_i — *ранний* срок начала любой операции, выходящей из узла i.

Переменные y_{ij} и t_i являются неизвестными оптимизационной задачи. Их значения должны удовлетворять условиям

$$t_i + d_{ij} + y_{ij} \leqslant t_j \quad \text{для любой дуги } (i, j).$$

Кроме того должно выполняться неравенство $t_6 \leqslant T$, обусловленное обязательством по контракту.

Если при выполнении операции, отображаемой дугой (i, j), сверхурочные в полной мере не используются, то $y_{ij} > 0$. Предположим, что при этом условии *экономия* затрат составляет $s_{ij}y_{ij}$.

а) Постройте для данной задачи линейную оптимизационную модель и запишите в явном виде выражение для целевой функции и систему ограничений.

б) Сформулируйте соответствующую двойственную задачу. Относится ли она к разряду сетевых задач? Если да, то объясните, из каких структурных компонент состоит эта задача.

45. Начертите сеть, соответствующую следующей матрице инциденций узлы — дуги:

а)

x_{12}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{52}	x_{53}	x_{54}
1	1					
−1		1	1	−1		
		−1			−1	
	−1		−1			−1
				1	1	1

б)

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{32}	x_{35}	x_{43}	x_{45}
1	1	1							
−1			1	1	1	−1			
	−1		−1			1	1	−1	
		−1		−1				1	1
					−1		−1		−1

46. Рассмотрите ограничения

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} - x_{41} \leqslant 6,$$
$$x_{12} + x_{32} \geqslant 5,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} - x_{14} \leqslant 4,$$
$$x_{14} + x_{34} \geqslant 2,$$
$$\text{все } x_{ij} \geqslant 0.$$

Начертите сеть, соответствующую этим ограничениям [*Указание*: преобразуйте неравенства в равенства, введя дополнительные (свободные) переменные. Добавьте далее дополнительное ограничение, соответствующее фиктивному узлу.]

47. Объясните, как преобразовать сеть с промежуточными пунктами, в которой ограничения пропускных способностей наложены на потоки в узлах, в эквивалентную (расширенную) сеть с промежуточными пунктами и ограничениями, наложенными на потоки по дугам. (*Указание*: замените каждый узел, соответствующий промежуточному пункту, двумя узлами, связанными дугой.)

48. *Задача фирмы «Общепитторг»*. Пусть фирме, обеспечивающей рестораны и кафе продуктами и предметами обслуживания посетителей, к началу дня j, где $j = 1, 2, \ldots, T$, требуется r_j чистых, выглаженных салфеток. Обычная стирка салфеток производится в течение суток, причем одна выстиранная и выглаженная салфетка обходится фирме B центов. Срочная стирка производится за ночь, и за одну чистую салфетку фирма платит C центов. Новые салфетки можно закупить по цене A центов за штуку. Главе фирмы нужно составить план покупки и стирки салфеток, минимизирующий общие затраты и удовлетворяющий потребностям в чистых салфетках.

Пусть x_j— число новых салфеток, купленных в день j; v_j — число неиспользованных чистых салфеток, оставшихся к концу дня; y_j — количество салфеток, отправленных в обычную стирку к концу дня; z_j — число салфеток, отправленных в срочную стирку в конце дня; s_j — число грязных салфеток, оставшихся к концу дня и не отправленных в стирку. Матрица условий этой задачи имеет вид

	x_j	v_j	y_j	z_j	s_j
Распределение чистых салфеток (день j)	-1	1			
Распределение грязных салфеток (день j)			1	1	1
Распределение чистых салфеток (день $j+1$)		-1		-1	
Распределение грязных салфеток (день $j+1$)					-1
Распределение чистых салфеток (день $j+2$)			-1		
Распределение грязных салфеток (день $j+2$)					
Затраты на одну салфетку	A	0	B	C	0

а) Постройте полную модель задачи при $T = 5$.

б) Начертите соответствующую сеть (*Указание*: введите избыточное ограничение, соответствующее фиктивному узлу.)

49. *Многопродуктовая сеть.* На рис. 6.27 представлена сеть с промежуточными пунктами, по которой могут осуществляться перевозки двух видов ресурсов: продукта 1 и продукта 2. Каждый продукт можно перевозить по любой дуге в обоих направлениях.

В узлах N_1 и N_2 имеется неограниченное количество продукта 1. Конечным пунктом поставки этого продукта является узел N_3. В узле N_4 имеется неограниченное количество продукта 2, конечным пунктом назначения которого является узел N_1. На пропускную способность дуги между узлами N_i и N_j наложено ограничение сверху b_{ij}. Интенсивность потока *обоих товаров в обоих направлениях* вдоль дуги между узлами N_i и N_j ограничена значением b_{ij}.

Каждая единица продукта 1, доставленная в конечный пункт назначения, стоит v_1, а каждая единица продукта 2 стоит при тех же условиях v_2. Задача заключается в отыскании допустимого потока продуктов по сети, имеющего максимальную общую стоимость. Эту задачу, как объясняется ниже в соответствующих пунктах, можно рассматривать с двух точек зрения.

а) Пусть x_{ijk} — величина потока продукта k из узла N_i в узел N_j; s_{ik} — количество продукта k, выходящее из узла N_i. Заметим, что в данном примере фигурируют только величины s_{11}, s_{21}, s_{42}. Запишите ограничения на величину потока каждого продукта через каждый узел, ограничения на дуговые потоки и целевую функцию.

б) Другой метод анализа сети сводится к выделению в явном виде всех цепей для обоих продуктов из каждого источника до каждого стока, проходящих через все возможные промежуточные узлы.

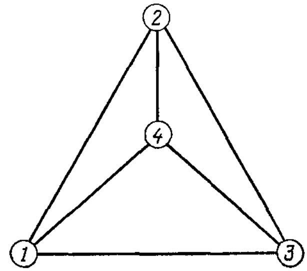


Рис. 6.27.

Пусть y_t — величина потока в цепи t. При прохождении единичного потока по цепи на каждой дуге, принадлежащей этой цепи, используется единица пропускной способности дуги. Следовательно, на каждую дугу накладывается ограничение по общей величине потока. Запишите ограничения на общую величину потока, проходящего по каждой дуге, и целевую функцию.

в) Сравните две формы постановки этой задачи.

50. Сформулируйте небольшую сетевую задачу в обобщенной форме, имеющую единственное решение, не являющееся целочисленным.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

51. В одном из родов войск рассматривается долгосрочная программа подготовки личного состава по нескольким специальностям. Для упрощения рассуждений предположим, что в начале планового периода по каждой специальности имеется M_i человек, где $i = 1, 2, 3$. Потребность в обученных солдатах специальности i на интервале t обозначим символом r_{it}. Для переобучения солдата с одной специальности на другую требуется один интервал. Можно также призвать в армию новобранца, на обучение которого требуется два интервала. Ограничений на число солдат, обучаемых каждой специальности в течение любого интервала, и на число призываемых на службу новобранцев не накладывается. Предложите сетевую оптимизационную модель, обеспечивающую отыскание эффективной программы призыва в армию, обучения и переобучения кадров.

52. Рассмотрите классическую транспортную задачу. В каждом из приведенных ниже пунктов введены дополнительные ограничения. Предложите способ модификации задачи, обеспечивающий переход к расширенной транспортной задаче в стандартной форме (по образцу рис. 6.2, *а*).

а) На каждую дугу наложено ограничение по пропускной способности $x_{ij} \leqslant c_{ij}$.

б) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant c$.

в) $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leqslant c$, где $n>3$.

53. Рассмотрите транспортную задачу с промежуточными пунктами и ограничениями по пропускной способности, где $x_{ij} \leqslant c_{ij}$. Предложите способ модификации задачи, позволяющий перейти к расширенной транспортной задаче в стандартной форме (по образцу рис. 6.2, *а*).

54. Рассмотрите пример полицейского управления города «Шумгам-сити» (упражнение 30 гл. 2) и общую постановку задачи (упражнение 27 гл. 5).

а) Покажите, что в случае, когда число периодов T является четным, задача эквивалентна сетевой. Начертите сеть, отображающую пример задачи города «Шумгам-сити».

б) Объясните, почему задача не эквивалентна сетевой постановке в случае, когда число периодов T является нечетным.

55. *Задача о назначениях для поточной линии «с узким местом».* Предположим, что каждый из n рабочих назначается на выполнение одной из n операций на одной поточной линии. Рабочий i, назначенный на выполнение операции j, может обработать a_{ij} изделий в единицу времени, причем $a_{ij} \geqslant 0$. Задача заключается в назначении рабочих на выполнение операций таким образом, чтобы максимизировать *производительность всей* поточной линии. «Узким местом» является тот рабочий, производительность которого минимальна. Следовательно, оптимизационная задача сводится к такому назначению рабочих по операциям, при котором производительность в «узком месте» максимальна.

а) Покажите, что решение этой задачи не зависит от числовых значений величин a_{ij}, а определяется лишь упорядочением (ранжировкой) этих величин.

б) При условии, что утверждение п. а) доказано, упорядочите величины a_{ij} и вычислите соответствующие величины $b_{ij}=1-2^{-m}$, где m — ранг (или приоритет) величины a_{ij}. Для простоты предположим, что все величины a_{ij} различны. Таким образом, минимальной величине a_{ij} соответствует $b_{ij}=1-2^{-1}$, величине второго порядка a_{ij} соответствует $b_{ij}=1-2^{-2}$, а максимальной величине a_{ij} соответствует $b_{ij}=1-2^{-n^2}$.

Покажите, что оптимальное решение задачи о назначениях с использованием величин b_{ij} является также решением задачи об «узком месте».

56. Рассмотрите постановку обобщенной оптимизационной сетевой задачи, данную в разд. 6.8. Пусть условия (1) и (3) имеют вид неравенств $\geqslant$. Покажите, как такую задачу можно представить в форме обобщенной сетевой задачи, в которой сумма T_k вновь равна нулю, а ограничения, определяющие условия неразрывности потока (условия сохранения), задаются, как и следует, равенствами.

ГЛАВА 7

Алгоритмы решения сетевых задач

7.1. СУЩНОСТЬ И ОЦЕНКА РАССМАТРИВАЕМЫХ ВОПРОСОВ

В предыдущих главах описано много приложений методов линейного программирования, включая важные примеры оптимизации на сетях. В гл. 4 отмечалось, что на практике чрезвычайно редко может встретиться случай, когда задачу линейного программирования удается решить вручную. Вместе с тем подчеркивалось, что для успешного применения метода линейной оптимизации необходимо понимать *основные* математические идеи, заложенные в алгоритмах отыскания оптимального решения. По этой причине читателю было предложено овладеть важнейшими понятиями, используемыми в симплексном алгоритме решения задач линейного программирования. В гл. 5 показана фундаментальная роль понятия двойственности для линейных моделей и приведены многочисленные примеры оценки чувствительности решений. К концу этой главы читатель получил ясное представление о широком круге задач, решаемых методом линейного программирования.

В гл. 6 было показано, что размерность реальных сетевых моделей настолько велика, что нетворческое применение симплексного алгоритма для решения соответствующих задач крайне нерационально, а в ряде случаев с учетом возможностей существующих для ЭВМ программ вообще оказывается невозможным. Приведенные в гл. 6 примеры подтверждают это положение, ибо наглядно показывают, что даже в самых элементарных сетевых задачах число переменных достаточно велико. В то же время подчеркивалось, что использование особой структуры сетевых задач позволяет значительно сократить объем требующихся для получения решения вычислений.

Здесь вполне правомерно поставить вопрос о целесообразности дальнейшего рассмотрения алгоритмов решения задач линейного программирования. Не разумнее ли сразу перейти к другим основным проблемам исследования операций? Остались ли еще какие-либо важные вопросы, требующие специального разъяснения? И если такие вопросы действительно имеются, то почему бы не отнести их к компетенции узких специалистов? На наш взгляд, имеются две основные причины рассмотрения здесь частных алгоритмов решения задач линейного программирования.

Чтобы понять первую причину, нужно исходить из того, что исследование операций развивается в направлении решения практических задач чрезвычайно большой размерности. Наличие быстродействующих ЭВМ и успехи в применении операционных методов решения организационных задач обеспечили непрерывное совершенствование систем централизованного планирования и управления, а также систем информационного обеспечения, функционирующих в масштабе целых корпораций и фирм. При этом, внедряя централизованное *планирование*, охватывающее все функции организации, фирме нет необходимости отказываться от стратегии децентрализованного принятия *оперативных* решений. Напротив, такой «интегрированный» подход позволяет получать данные, необходимые для обеспечения эффективного управления различными структурными подразделениями фирмы. Интегрированная система планирования дает возможность формировать непротиворечивые цели, отражающие как задачи, стоящие перед всей фирмой, так и ограничения, определяющие текущую деятельность отдельных ее подразделений.

Обеспечение практической реализуемости столь крупных по масштабам систем обусловливает необходимость разработки эффективных методов решения операционных задач. Этим методам будет уделяться в дальнейшем все большее внимание. Следовательно, читателю необходимо составить ясное представление о развитии методов (алгоритмов) решения задач и понять, что имеется в виду, когда речь идет об *использовании особых структурных свойств* модели. Чтобы достигнуть этой цели, нужно рассмотреть конкретные примеры. Приведенные в этой главе алгоритмы решения сетевых задач служат именно такой иллюстрацией.

Вторая причина рассмотрения здесь алгоритмов решения задач линейного программирования обусловлена их связью с динамическими и многошаговыми моделями детерминированного класса, изложенными в гл. 8—12. Алгоритмы отыскания кратчайшего пути (маршрута), приведенные в данной главе в самом общем виде, можно считать основой для получения решений задач на таких моделях.

В основе построения алгоритмов решения оптимизационных сетевых задач лежат четыре понятия. Одним из них является понятие двойственности, краткая повторная оценка которого дана в следующем разделе. Другое понятие — свойство треугольной структуры базиса — разъясняется в разд. 7.3. Третье понятие, рассматриваемое в разд. 7.6 и 7.7, связано с определением кратчайших путей. Наконец, четвертое понятие относится к максимизации общей величины потока в сети с промежуточными пунктами и ограниченными пропускными способностями, имеющей один источник и один сток. Поскольку задача о максимальном потоке нужна главным образом для построения более сложных алгоритмов, она обсуждается в приложении I.

7.2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Начнем с обсуждения классической транспортной модели, изложенной в гл. 6, т. е. со следующей задачи линейного программирования:

$$\text{минимизировать} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{(поставки)}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(спрос)}, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{при всех } i \text{ и } j, \tag{4}$$

где все S_i и D_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \quad \text{(общие поставки = общий спрос)}. \tag{5}$$

Как было показано в гл. 6, пользуясь довольно простыми приемами, можно преобразовать многие оптимизационные задачи на сетях в эквивалентную классическую транспортную задачу.

Если учесть соотношения (2), (3) и (5), то станет очевидным, что модель содержит избыточное ограничение: если любые $m + n - 1$ ограничений (2) и (3) удовлетворяются, то оставшееся ограничение также удовлетворяется. [Это можно строго показать, умножив каждое из ограничений (3) на -1, а затем сложив любые $m + n - 1$ ограничений и используя условие (5) для упрощения констант в правой части. Получаемое в итоге уравнение тождественно оставшемуся ограничению.] Следовательно, любое из уравнений спроса и поставок (2) или (3) можно без ущерба опустить. В итоге имеем модель, содержащую $m + n - 1$ *независимых* ограничений, вследствие чего в любое базисное решение входит именно такое число переменных.

Легко показать, что соответствующая двойственная задача линейного программирования записывается так:

$$\text{максимизировать} \sum_{i=1}^{m} S_i v_i + \sum_{j=1}^{n} D_j w_j \tag{6}$$

при ограничениях

$$v_i + w_j \leqslant c_{ij} \quad \text{при всех} \quad (i, j), \tag{7}$$

где величины v_i и w_j не ограничены по знаку.

Следствие теоремы двойственности и теоремы о дополняющей нежесткости, рассмотренных в гл. 5, заключается в том, что если величины x_{ij}^* при всех (i, j) удовлетворяют (2), (3) и (4), а величины

v_i^* и w_j^* удовлетворяют (7), а также если

$$x_{ij}^* (v_i^* + w_j^* - c_{ij}) = 0 \quad \text{при всех} \quad (i, j),$$

то набор величин x_{ij}^* является оптимальным решением транспортной задачи (1) — (4).

Исходя из этого, разработан ряд алгоритмов решения сетевых задач. Они основаны на общей идее, что на каждой итерации для пробных значений переменных x_{ij}, v_i и w_j всегда выполняются два из следующих трех условий: (I) допустимость исходной задачи, т. е. соотношения (2) — (4); (II) допустимость двойственной задачи (7); (III) условие дополнительной нежесткости. В симплексном алгоритме, рассматриваемом в разд. 7.3 и 7.4, на каждой итерации выполняются условия (I) и (III). Вычислительная процедура заканчивается, как только выполнено условие (II).

7.3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ[1])

Симплексный метод применяется здесь для решения транспортной задачи. Сначала дается краткая сводка некоторых основных положений, приведенных в гл. 4 и 5, а затем приводятся правила вычислений, иллюстрируемые конкретным числовым примером. В разд. 7.4 рассматриваются некоторые детали, связанные с применением метода.

Шаги симплексного алгоритма.

Шаг 1. Выбирается набор $m + n - 1$ маршрутов (дуг), являющийся исходным допустимым базисным решением.

Шаг 2. Проверяется, можно ли улучшить это решение, введя в него небазисную переменную. В случае положительного результата осуществляется переход *к шагу* 3, в противном случае — останов.

Шаг 3. Определяется, какой маршрут исключается из базиса, когда в него введена переменная, выбранная на *шаге* 2.

Шаг 4. Изменяются потоки остальных базисных маршрутов. Осуществляется переход *к шагу* 2.

Как будет показано в приведенном ниже примере, при решении транспортной задачи все четыре шага выполняются очень просто. Предположим, что модель приведена к виду классической транспортной задачи, описываемой матрицей размерности $m \times n$, которая приведена на рис. 7.1. Дальнейшее обсуждение относится именно к этой матрице. Начнем со словесного изложения алгоритма. Пусть читателя не смущает то обстоятельство, что некоторые подробности могут оказаться недостаточно ясными, поскольку пока что цель заключается в изложении общей логической схемы. Детальное описание всех шагов алгоритма приводится ниже.

---

[1]) Этот метод в отечественной литературе называется методом потенциалов.— *Прим. перев.*

Предположим, что имеется пробное допустимое базисное решение, содержащее $m + n - 1$ маршрутов. Если единичный поток направляется по небазисному маршруту, то для сохранения допустимости по соответствующим строке и столбцу матрицы рис. 7.1 необходимо снять единицу с базисного маршрута в той же строке и в том же столбце. Однако эти два изменения в свою очередь ведут к *единичным*

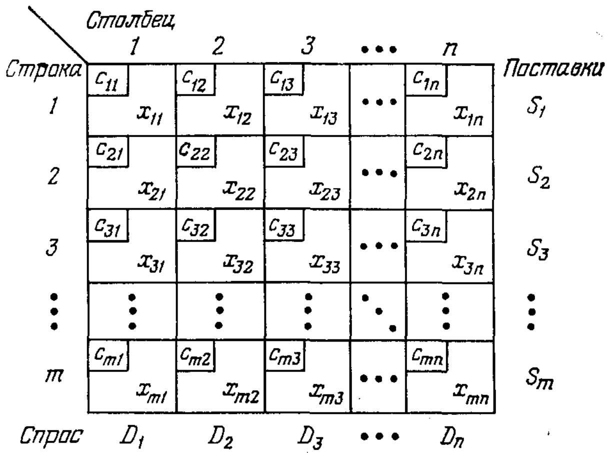


Рис. 7.1. Таблица условий транспортной задачи.

изменениям потоков по всем остальным базисным переменным. По причинам, которые вскоре станут очевидными, введение каждой новой переменной в базис обусловливает однозначную *схему* изменения базисных переменных.

Поэтому окончательные изменения можно оценить следующим образом: из общего увеличения затрат, обусловленного добавлением единичного потока как по новому маршруту, так и по соответствующим базисным маршрутам, вычесть общее уменьшение затрат, вызванное сокращением на единицу потока по остальным базисным маршрутам, однозначно определяемым схемой изменений. Если полученный результат улучшает значение целевой функции и новый маршрут вводится в решение, то схема изменений указывает также, сколько единиц потока можно направить по этому новому маршруту. В частности, различные потоки увеличиваются и уменьшаются в соответствии со схемой, пока не достигается такой уровень, при котором базисная переменная уменьшается до нуля и поэтому выводится из базиса.

Если бы метод проверки целесообразности введения небазисного маршрута в пробное решение был в действительности слишком утомительным, как это представляется из приведенного выше описания, то он в лучшем случае позволял бы лишь несущественно сократить симплекс-процедуру, рассмотренную в гл. 4. Однако, используя теорему двойственности и структуру сети, оценить любой небазисный маршрут можно гораздо проще.

В разд. 5.5, где обсуждалось решение двойственной задачи, было показано, что для заданного базисного решения значение переменной, определяемое введением единицы небазисной переменной, равно разности левой и правой частей ограничения двойственной задачи, относящегося к этой переменной. Таким образом, задача заключается в том, чтобы решить $m+n-1$ ограничений двойственной задачи, соответствующих текущему базису, т. е.

$$v_i + w_j = c_{ij} \quad \text{для каждой базисной переменной } x_{ij}, \tag{1}$$

а затем определить значения

$$v_i + w_j - c_{ij} \quad \text{для небазисной переменной } x_{ij}. \tag{2}$$

Величины, входящие в (2), соответствуют коэффициентам нулевой строки симплексной матрицы. Если значение (2) положительно, то небазисная переменная x_{ij} является «кандидатом» на введение в следующий базис. Если все значения (2) неположительны, то при условии, что решение допустимо как для прямой, так и для двойственной задачи, это текущее базисное решение является оптимальным.

Пример применения алгоритма. Рассмотрим транспортную задачу, условия которой приведены в матрице рис. 7.2. (Набросайте

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	2	3	11	7	6
2	1	0	6	1	1
3	5	8	15	9	10
Спрос	7	5	3	2	

Рис. 7.2. Пример условий транспортной задачи.

на листе бумаги ваши собственные соображения об оптимальном решении и вычислите значение целевой функции, соответствующее этому решению.)

Шаг 1 алгоритма требует определения исходного пробного базисного решения, содержащего $m+n-1 = 3+4-1 = 6$ действующих маршрутов. Предположим, что шесть единиц, имеющиеся у поставщика, которому соответствует строка 1, назначаются на самый дешевый маршрут (1, 1). При этом мощность поставщика полностью исчерпана, а для удовлетворения спроса потребителя, соответствующего столбцу 1, требуется еще одна единица. Аналогично выделим поставку в одну единицу по строке 2 на самый дешевый маршрут (2, 2). Далее поставки в десять единиц по строке 3 распределим по всем остальным маршрутам, где имеется неудовлетворенный спрос. В результате получается матрица рис. 7.3, для которой значение целевой функции равно 112. (Было ли предложенное решение лучше

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	[2] 6	[3]	[11]	[7]	6
2	[1]	[0] 1	[6]	[1]	1
3	[5] 1	[8] 4	[15] 3	[9] 2	10
Спрос	7	5	3	2	

Рис. 7.3. Исходное базисное решение. (Общие затраты $= 2\cdot 6 + 0\cdot 1 + 5\cdot 1 + 8\cdot 4 + 15\cdot 3 + 9\cdot 2 = 112$.)

этого? Ниже излагается метод, позволяющий сразу выбирать хорошее исходное решение.)

Шаг 2 алгоритма предусматривает оценку каждого неиспользованного маршрута для проверки того, улучшает ли единичный поток

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	[2] 6−1	[3] +1	[11]	[7]	6
2	[1]	[0] 1	[6]	[1]	1
3	[5] 1+1	[8] 4−1	[15] 3	[9] 2	10
Спрос	7	5	3	2	

Рис. 7.4. Схема изменений при добавлении единицы по маршруту (1, 2).

Оценка маршрута = Общее уменьшение затрат — Общее увеличение затрат $= (2 + 8) - (3 + 5) = 2$ на единицу.

по этим маршрутам значение целевой функции. Рассмотрим маршрут (1, 2). Как легко видеть из матрицы рис. 7.3, выделенная на этот маршрут единица *должна быть* изъята из потока по маршруту (1, 1). Тогда для удовлетворения спроса по столбцу 1 нужно доставить еще одну единицу по маршруту (3, 1). Эту единицу в свою очередь можно заимствовать с маршрута (3, 2). Схема изменений показана в таблице на рис. 7.4.

Приведет ли добавление единичного потока по маршруту (1, 2) к уменьшению значения целевой функции? При уменьшении потока по маршрутам (1, 1) и (3, 2) на единицу достигается экономия в 10 единиц (2 + 8). Однако этот эффект частично компенсируется за счет увеличения затрат на 8 (3 + 5) единиц, обусловленного добавлением единичного потока по маршрутам (1, 2) и (3, 1). Таким образом, чистое улучшение значения целевой функции равно 2 (10 — 8).

Рассуждая аналогичным образом, можно получить оценки для всех остальных небазисных маршрутов (рис. 7.5). Каждая оценка равна значению коэффициента при соответствующем x_{ij} в нулевой

Строка \ Столбец	1	2	3	4
1	$\boxed{2}$ $\underline{0}$	$\boxed{3}$ 2	$\boxed{11}$ 1	$\boxed{7}$ −1
2	$\boxed{1}$ −4	$\boxed{0}$ $\underline{0}$	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{1}$ $\underline{0}$
3	$\boxed{5}$ $\underline{0}$	$\boxed{8}$ $\underline{0}$	$\boxed{15}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ $\underline{0}$

Рис. 7.5. Оценки небазисных маршрутов в исходном решении. (Символ $\underline{0}$ проставлен для текущих базисных маршрутов.)

строке симплексной таблицы. Для проверки понимания процедуры вычисления оценок определите схему изменений при введении дополнительного единого потока по маршрутам (1, 3) и (2, 1), а также найдите, на сколько изменилось значение целевой функции.

Покажем теперь, что, для того чтобы получить оценки небазисных маршрутов, нет необходимости в каждом случае определять конкретную схему изменений. К такому же выводу можно прийти значительно быстрее, оценивая значения переменных двойственной задачи и сравнивая затем различия между левыми и правыми частями двойственных ограничений, соответствующих небазисным маршрутам. Структура сети позволяет легко реализовать этот прием. Опишем упрощенный алгоритм, в котором используется только таблица $m \times n$, содержащая коэффициенты c_{ij} (по образцу таблицы рис. 7.5). Однако для пояснения особенностей этого алгоритма рассмотрим сначала математические соотношения, на которых он базируется.

Система линейных равенств, из которых получают пробные значения переменных двойственной задачи, показана выше [формула (1)]. Применив эту систему к исходному решению (рис. 7.3), получим следующие шесть соотношений для базисных маршрутов двойственной задачи:

$$
\begin{array}{llll}
v_1 + w_1 & = 2 & \text{маршрут } (1,\ 1), & \\
v_2 + w_2 & = 0 & \text{маршрут } (2,\ 2), & \\
v_3 + w_1 & = 5 & \text{маршрут } (3,\ 1), & (3) \\
v_3 + w_2 & = 8 & \text{маршрут } (3,\ 2), & \\
v_3 + w_3 & = 15 & \text{маршрут } (3,\ 3), & \\
v_3 + w_4 & = 9 & \text{маршрут } (3,\ 4). &
\end{array}
$$

Заметим, что это система из шести уравнений с семью неизвестными. Для получения решения необходимо выбрать одну переменную и приписать ей произвольное значение. Допускается выбор любой переменной и разрешается приписывать ей любое «удобное» значение. Возьмем v_3, поскольку эта переменная входит в четыре соотношения, и примем для удобства ее значение равным нулю, т. е. $v_3 = 0$. Причиной появления в (3) «лишней» переменной является избыточность $m + n = 7$ ограничений на спрос и поставки. Приписывание переменной v_3 произвольного значения эквивалентно вычеркиванию строки 3 (уравнения поставки) с целью избавления от избыточности в $m + n$ соотношениях.

Отметим, что при $v_3 = 0$ чрезвычайно просто найти значения остальных переменных. В частности, можно вначале положить

$$\begin{aligned}
v_3 &= 0 \quad \text{(произвольно выбранное значение)},\\
w_4 &= 9 - v_3 = 9,\\
w_3 &= 15 - v_3 = 15,\\
w_2 &= 8 - v_3 = 8,\\
w_1 &= 5 - v_3 = 5,\\
v_2 &= 0 - w_2 = 0 - (8 - v_3) = -8,\\
v_1 &= 2 - w_1 = 2 - (5 - v_3) = -3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, зная значения переменных, найденные на предыдущем шаге, можно последовательно получить значения всех двойственных переменных. *При наличии сетевой структуры всегда можно реализовать такие последовательные шаги.*

Математический термин **триангуляция** используется для описания структуры, позволяющей последовательно отыскивать значения переменных, входящие в решение. Смысл этого термина становится ясным из рассмотрения структуры уравнений (3). Если исключить из них v_3 (т. е. принять $v_3 = 0$), то уравнения приобретают треугольный вид. Говорят, что система из m линейных уравнений с m неизвестными имеет **треугольную структуру**, если после возможной перегруппировки переменных и уравнений переменная, стоящая на первом месте в k-м уравнении, является также k-й неизвестной и не фигурирует ни в одном из уравнений, номер которого превышает k.

Свойство треугольной структуры выполняется и для системы уравнений (3) двойственной задачи после того, как выбрана *любая* двойственная переменная и ей приписано произвольное значение. Однако, чтобы сразу обнаружить это свойство у системы уравнений, нужно изменить последовательность переменных и уравнений. Так, например, если положить $v_1 = 0$, то остальные переменные можно упорядочить следующим образом: v_2, w_2, w_3, w_4, v_3, w_1, а для маршрутов выбрать последовательность: (2, 2), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 1), (1, 1). При этом *в явном виде выявляется* треугольная структура системы. Запишите систему в таком виде, чтобы можно было показать ее треугольную структуру.

Отметим также, что если в (4) приписать переменной v_3 значение, отличное от нуля, то каждая переменная v_i увеличится, а w_j уменьшится на эту величину. Таким образом, значение любой суммы $v_i + w_j$, так же как и пробное значение величины $v_i + w_j - c_{ij}$, не изменится.

Зная теорему двойственности, можно ожидать, что свойством треугольной структуры обладает также система уравнений, определяющих значения базисных переменных x_{ij}. Чтобы показать справедливость этого утверждения, запишите ограничения сохранения потока, исключив все маршруты, не вошедшие в базис, а также избыточное уравнение поставки, соответствующее строке 3 (что эквивалентно выбору v_3):

$$\begin{aligned}
&x_{11} &&= 6 \quad &&\text{(строка 1)},\\
&\quad x_{22} &&= 1 \quad &&\text{(строка 2)},\\
&x_{11} + x_{31} &&= 7 \quad &&\text{(столбец 1)},\\
&\quad x_{22} + x_{32} &&= 5 \quad &&\text{(столбец 2)},\\
&\qquad\qquad x_{33} &&= 3 \quad &&\text{(столбец 3)},\\
&\qquad\qquad\quad x_{34} &&= 2 \quad &&\text{(столбец 4)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что строка коэффициентов k-го уравнения здесь является столбцом коэффициентов при k-й переменной в (3) (не считая v_3). Если система (3) имеет структуру *верхнего* треугольника, то система (5) соответствует структуре *нижнего* треугольника. Последнюю можно легко решить, начав с переменной x_{11}. [Как можно перегруппировать переменные и ограничения (5), чтобы система обладала свойством **треугольной структуры** в смысле данного выше определения?]

Теперь можно получить оценку каждого маршрута, не входящего в базис, по формуле

$$v_i + w_j - c_{ij}. \tag{6}$$

Используя значения двойственных переменных, найденные в (4), можно найти следующие результаты:

$$\begin{aligned}
-3 + 8 - 3 &= 2 \quad &&\text{маршрут } (1, 2),\\
-3 + 15 - 11 &= 1 \quad &&\text{маршрут } (1, 3),\\
-3 + 9 - 7 &= -1 \quad &&\text{маршрут } (1, 4),\\
-8 + 5 - 1 &= -4 \quad &&\text{маршрут } (2, 1),\\
-8 + 15 - 6 &= 1 \quad &&\text{маршрут } (2, 3),\\
-8 + 9 - 1 &= 0 \quad &&\text{маршрут } (2, 4).
\end{aligned} \tag{7}$$

Каждое положительное число указывает на возможность уменьшения значения целевой функции. Следовательно, три маршрута позволяют улучшить решение, и нужно выбрать маршрут (1, 2), поскольку у него наибольшая оценка. Это в сущности эквивалентно *симплексному критерию I* (критерий минимизации).

На шаге 3 определяется величина потока, направляемого по маршруту (1, 2). Схема изменений базисных переменных исходного решения для этого маршрута уже установлена на рис. 7.4. Напомним, что потоки по маршрутам (1, 1) и (3, 2) уменьшаются и что текущие значения этих потоков равны соответственно 6 и 4. Следовательно, наибольшее допустимое увеличение потока по маршруту (1, 2) равно 4, вследствие чего маршрут (3, 2) из нового базиса исключается.

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	2	4			6
2		1			1
3	5		3	2	10
Спрос	7	5	3	2	

Рис. 7.6. Второе базисное решение. (Общие затраты = Общие затраты на предыдущем решении — Общая экономия = 112 — 2·(4) = 104.)

Эти вычисления эквивалентны вычислениям по *симплексному критерию II.*

На шаге 4 вносятся изменения в маршруты грузопотока, что дает в результате второе пробное базисное решение, показанное на рис. 7.6, при котором значение целевой функции равно 104.

Итерация 2. Вернемся вновь к *шагу* 2 с целью проверки того, является ли это решение оптимальным или возможно дальнейшее его улучшение. Двойственные соотношения при новом базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
&v_2 + w_2 &&= 0 \quad \text{маршрут } (2,\ 2),\\
&w_2 + v_1 &&= 3 \quad \text{маршрут } (1,\ 2),\\
&v_1 + w_1 &&= 2 \quad \text{маршрут } (1,\ 1),\\
&w_1 \qquad + v_3 && \ \ 5 \quad \text{маршрут } (3,\ 1),\\
&w_3 \qquad + v_3 &&= 15 \quad \text{маршрут } (3,\ 3),\\
&w_4 + v_3 &&= 9 \quad \text{маршрут } (3,\ 4).
\end{aligned} \tag{8}$$

Переменные и уравнения в (8) упорядочены таким образом, что треугольная структура системы при $v_3 = 0$ является очевидной. Покажите, что переменные в решении имеют значения

$$\begin{aligned}
v_3 &= 0,\\
w_4 &= 9,\\
w_3 &= 15,\\
w_1 &= 5,\\
v_1 &= 2 - w_1 = -3,\\
w_2 &= 3 - v_1 = 6,\\
v_2 &= 0 - w_2 = -6,
\end{aligned} \tag{9}$$

а оценки маршрутов равны

$$
\begin{aligned}
-3 + 15 - 11 &= 1 && \text{маршрут } (1,\ 3),\\
-3 + \ 9 - \ 7 &= -1 && \text{маршрут } (1,\ 4),\\
-6 + \ 5 - \ 1 &= -2 && \text{маршрут } (2,\ 1),\\
-6 + 15 - \ 6 &= 3 && \text{маршрут } (2,\ 3),\\
-6 + \ 9 - \ 1 &= 2 && \text{маршрут } (2,\ 4),\\
0 + \ 6 - \ 8 &= -2 && \text{маршрут } (3,\ 2).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Следовательно, в новое решение вводится маршрут (2, 3). Соответствующая схема изменений показана на рис. 7.7. Отметим, что все прежние базисные маршруты, кроме одного, претерпели изменения. (Может встретиться случай, когда все базисные маршруты

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	2−1	4+1			6
2		1−1	+1		1
3	5+1		3−1	2	10
Спрос	7	5	3	2	

Рис. 7.7. Схема изменений при добавлении единицы по маршруту (2, 3) в третьем решении. (Общие затраты = 104 — 1·3 = 101.)

изменяются.) Поток по маршрутам (2, 2), (1, 1) и (3, 3) уменьшается. Маршрут (2, 2) выводится из базиса прежде всего, когда общее изменение потока равно единице. Поэтому в данном случае величины, стоящие в таблице на рис. 7.7, представляют собой также потоки третьего пробного базиса.

Итерация 3. Упрощенный прием. Теперь, когда изложен метод получения оценок маршрутов на *шаге* 2 алгоритма, уже нет необходимости полностью выписывать двойственные уравнения для всех

Строка \ Столбец	1	2	3	4	v_i
1	$\boxed{2}$ $\underline{0}$	$\boxed{3}$ $\underline{0}$	$\boxed{11}$ 1	$\boxed{7}$ −1	−3
2	$\boxed{1}$ −5	$\boxed{0}$ −3	$\boxed{6}$ $\underline{0}$	$\boxed{1}$ −1	−9
3	$\boxed{5}$ $\underline{0}$	$\boxed{8}$ −2	$\boxed{15}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ $\underline{0}$	0
w_j	5	6	15	9	

Рис. 7.8. Оценки небазисных маршрутов в третьем решении.

базисных переменных. Упрощенный прием сводится к заполнению оценками таблицы размером $m \times n$. Сначала чертится таблица по образцу рис. 7.8 и проставляются значения всех c_{ij} в верхних малых клетках и символ $\underline{0}$ для каждого маршрута, входящего в базис при текущем решении. Все остальные элементы таблицы, включая v_i и w_j, не проставляются.

Далее выбирается любая величина v_i или w_j, и ей приписывается произвольное значение. Предположим, что, как и прежде, $v_3 = 0$. Тогда нужно проставить выбранное значение у соответствующей строки или столбца (в рассматриваемом примере оно проставлено

Рис. 7.9. Четвертое (оптимальное) базисное решение. (Общие затраты $= 101 - 1 \cdot 1 = 100$.)

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1		5	1		6
2			1		1
3	7		1	2	10
Спрос	7	5	3	2	

справа от строки 3). Строка или столбец просматривается с целью выявления базисных маршрутов. В строке 3 маршруты (3, 4), (3, 3) и (3, 1) принадлежат базису. Двойственное уравнение для каждого из этих маршрутов позволяет найти значение другой двойственной переменной. В рассматриваемом примере $w_4 = 9$, $w_3 = 15$, $w_1 = 5$. Эти значения записываются под соответствующими столбцами таблицы.

Описанная схема вычислений повторяется до тех пор, пока не будут найдены значения всех двойственных переменных. В этом примере можно выполнять вычисления в последовательности $v_2 = -9$, $v_1 = -3$, $w_2 = 6$.

Наконец, для каждого маршрута, не входящего в базис, вычисляется значение выражения $v_i + w_j - c_{ij}$ и полученный результат проставляется в таблице. Окончательно таблица принимает вид рис. 7.8, откуда видно, что лишь маршрут (1, 3) имеет «хорошую» оценку.

Для проверки степени усвоения описанных шагов алгоритма читателю предлагается составить схему изменений в случае, когда в базис вводится маршрут (1, 3). Покажите, что наибольшая возможная величина потока по этому маршруту равна единице, а новые потоки определяются величинами, проставленными на рис. 7.9.

Итерация 4. Проводятся вычисления, позволяющие оценить оптимальность полученного решения, и найденные результаты сравниваются с результатами, приведенными на рис. 7.10. Интересно, насколько близким к оптимальному оказалось решение, угаданное читателем в начале рассмотрения этого примера.

Если исходная задача относится к категории транспортных задач с промежуточными пунктами, то для каждого промежуточного узла k

получаемые расширенные матрицы содержат как строку i_k, так и столбец j_k. Соответственно рассматриваются две двойственные переменные v_{i_k} и w_{j_k}. Поскольку буферный запас B достаточно

Строка \ Столбец	1	2	3	4	v_i
1	−1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	−2	−4
2	−5	−2	$\underline{0}$	−1	−9
3	$\underline{0}$	−1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0
w_j	5	7	15	9	

Рис. 7.10. Оценки маршрутов в оптимальном решении.

велик, все величины $x_{i_k j_k}$ входят в каждый пробный базис. Следовательно, $v_{i_k} + w_{j_k} = 0$, и поэтому величины v_{i_k} и w_{j_k} в соответствующих строках и столбцах отличаются только по знаку.

7.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО СИМПЛЕКСНОМУ МЕТОДУ

Завершая изложение правил симплексного метода для решения транспортных задач, целесообразно привести некоторые дополнительные сведения.

Хотя рассмотренный алгоритм был назван «симплексным методом решения транспортных задач» и применялась соответствующая терминология, на самом деле в явном виде эквивалентность этого алгоритма симплексному методу не была показана.

Особая структура. Ранее уже неоднократно упоминалось, что транспортные задачи имеют особую структуру, которую можно выгодно использовать. Важным утверждением является следующая теорема.

Теорема о треугольном свойстве. Исключив любое из уравнений в избыточной системе ограничений транспортной задачи, получим, что каждый базис обладает треугольным свойством. Следовательно, поскольку все коэффициенты в ограничениях равны единице, для последовательного определения значений любого множества базисных переменных не требуется ни умножения, ни деления. Достаточно лишь сложения и вычитания.

Таким образом, при использовании симплексного метода для решения любой транспортной задачи на *шагах* 3 *и* 4 не нужно ни умножения, ни деления. Метод был изложен таким образом, что это свойство постоянно использовалось, и на него опирались, выполняя основные вычисления.

Оптимальность. Нижеследующие рассуждения показывают, что при завершении симплекс-процедуры действительно достигается оптимальное решение.

Заметим прежде всего, что, поскольку в любом решении транспортной задачи *все* поставки S_i должны быть распределены по маршрутам i-й строки, *одну и ту же константу* можно вычесть из каждой величины c_{ij}, стоящей в этой строке, не влияя на значения переменных, входящих в оптимальное решение. Аналогично можно уменьшить каждую величину c_{ij}, стоящую в j-м столбце. Допустим, что значение v_i, полученное в результате выполнения указанной операции, является константой для строки i, а значение w_j — константой для столбца j. Предположим далее, что в исходном выражении целевой функции значения коэффициентов c_{ij} заменены *новыми* значениями $c_{ij} - (v_i + w_j)$. В силу указанного выше соображения модель с исходными значениями c_{ij} и модель с *новыми* коэффициентами имеют одно и то же оптимальное решение.

Вспомним далее, что при завершении симплекс-процедуры выполняется неравенство

$$0 \leqslant c_{ij} - (v_i + w_j) \quad \text{для всех } (i,\ j) \in \text{сети}, \qquad (1)$$

поскольку величины в (1) являются просто элементами окончательной таблицы оценок, взятых с обратным знаком. Поэтому минимальное значение *новой* целевой функции не может быть меньше нуля, так как все новые коэффициенты целевой функции неотрицательны.

Наконец, заметим, что, поскольку для базисных маршрутов условие (1) выполняется как *равенство*, в окончательное решение входят лишь те маршруты, где *новые* коэффициенты затрат равны нулю. Следовательно, лучшего решения существовать не может.

Если для некоторого маршрута, не вошедшего в базис, имеется оценка с нулевым значением, то можно найти другое оптимальное решение, введя этот маршрут в базис в соответствии с *шагами* 3 *и* 4.

Целочисленность. Ранее уже несколько раз подчеркивалось, что если в транспортной модели принимается дополнительное ограничение в отношении целочисленности переменных:

$$\text{каждая величина} \quad x_{ij} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (2)$$

то оптимальное значение целевой функции не возрастает. Нижеследующее краткое рассуждение показывает справедливость этого утверждения. С помощью симплексного алгоритма всегда находят оптимальное решение любой задачи линейного программирования; для *транспортной* задачи он обеспечивает поиск *только* таких решений, которые удовлетворяют условию (2).

В основе этого рассуждения лежат следующие положения.

1) Поскольку транспортная модель имеет конечное оптимальное решение, существует оптимальное базисное решение.

2) Каждый базис имеет треугольную структуру.

3) Каждый коэффициент матрицы транспортной задачи равен либо 1, либо —1.

Таким образом, при последовательном определении базисных значений переменных x_{ij} используются только операции сложения и вычитания целых чисел.

Полнота. Если на *шаге* 2 более чем один маршрут имеет максимальную оценку, то можно выбрать любой из них произвольным образом. Если на *шаге* 3 поток становится равным нулю более чем по одному маршруту при введении в базис нового маршрута, то новый базис будет вырожденным. В новом базисе должны оставаться все маршруты с нулевым потоком, кроме одного. С практической точки зрения правило выбора маршрута, выводимого из базиса, не играет никакой роли. Однако, как было показано в гл. 4, трудности, связанные с вырожденностью, необходимо каким-то образом преодолеть, чтобы доказать, что симплексный метод сходится к решению за конечное число шагов.

Область применимости. Симплексный метод можно применить для решения любых сетевых задач, которые можно свести к виду транспортной модели. Заметим, что для выполнения шагов алгоритма коэффициенты c_{ij} не обязательно должны быть неотрицательными.

Сходимость. По самой природе транспортной задачи оптимальному решению должно соответствовать конечное значение целевой функции. Если на каждой итерации пробные решения улучшаются, то метод должен сходиться, поскольку значение целевой функции уменьшается всякий раз по крайней мере на единицу. Однако в случае вырожденности значение целевой функции может оставаться неизменным на нескольких итерациях и возникает опасность зацикливания.

Исключить возможность возникновения вырожденности в ходе вычислительного процесса всегда можно, изменив масштаб единицы и введя небольшие возмущения в поставки и спрос. Можно показать, что следующий прием обеспечивает достижение такого результата. Примем, что новые поставки равны nS_i при $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ и $nS_m + n$, а новые потребности равны $nD_j + 1$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда значение целевой функции будет уменьшаться на каждой итерации. Окончательный результат переводится обратно в исходные единицы путем деления значения каждой переменной x_{ij} на n и округления. При этом выполняются все ограничения по поставкам и спросу. Поскольку округленное решение допустимо и в него входят те же базисные маршруты, оно остается оптимальным.

Соотношение со стандартным симплексным методом. На рис. 7.11 приведена симплексная таблица, в которой отражены все итерации. Эта таблица соответствует матрице уменьшенной размерности, приведенной на рис. 4.11. Избыточность уже ликвидирована.

Заметим, что на любой итерации каждый коэффициент в строках 1—6 равен либо +1, либо —1, что объясняется сетевой структурой задачи. Структура коэффициентов в каждом столбце соответ-

Итерация	Базис	Значения целевой функции и переменных							Строка
			x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	
1	x_0	112	2	1	−1	−4	1		0
	x_{11}	6	1	1	1				1
	x_{22}	1				1	1	1	2
	x_{31}	1	−1	−1	−1	1			3
	x_{32}	4	$\boxed{1}$			−1	−1	−1	4
	x_{33}	3		1					5
	x_{34}	2			1		1	1	6
			x_{32}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{23}	x_{24}	
2	x_0	104	−2	1	−1	−2	3	2	0
	x_{11}	2	−1	1	1	1	1	1	1
	x_{22}	1				1	$\boxed{1}$	1	2
	x_{31}	5	1	−1	−1		−1	−1	3
	x_{12}	4	1			−1	−1	−1	4
	x_{33}	3		1			1		5
	x_{34}	2			1			1	6
			x_{32}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{24}	
3	x_0	101	−2	1	−1	−5	−3	−1	0
	x_{11}	1	−1	$\boxed{1}$	1		−1		1
	x_{23}	1				1	1	1	2
	x_{31}	6	1	−1	−1	1	1		3
	x_{12}	5	1				1		4
	x_{33}	2		1		−1	−1	−1	5
	x_{34}	2			1			1	6
			x_{32}	x_{11}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{24}	
4	x_0	100	−1	−1	−2	−5	−2	−1	0
	x_{13}	1	−1	1	1		−1		1
	x_{23}	1				1	1	1	2
	x_{31}	7		1		1			3
	x_{12}	5	1				1		4
	x_{33}	1	1	−1	−1	−1		−1	5
	x_{34}	2			1			1	6

Рис. 7.11. Симплекс-таблица.

ствует схеме изменений при введении небазисного маршрута. Легко видеть, что при такой структуре задача сводится только к операциям сложения и вычитания.

Транспортная задача с ограничениями пропускной способности. В случае когда накладываются дополнительно ограничения по пропускной способности $x_{ij} \leqslant u_{ij}$, к сетевой структуре легко приспособить метод с ограниченными сверху переменными, изложенный в разд. 5.10. Предположим, что все величины u_{ij} являются целыми числами.

Допустим, что на *шаге 3* поток по какому-либо небазисному маршруту должен быть увеличен. Тогда для определения наибольшей возможной величины потока нужно учесть ограничения пропускной способности на новом маршруте и на текущих базисных маршрутах с *увеличенным* потоком. Если любое из этих верхних ограничений достигается *до того*, как поток по какому-либо иному базисному маршруту станет равным нулю, то нужно принять соответствующий поток равным пропускной способности и считать его переменной, выводимой из базиса в следующем пробном решении.

На шаге 2 рассматривается также каждый небазисный маршрут с потоком, равным его пропускной способности. Если оценка маршрута оказывается отрицательной, то этот маршрут является кандидатом на уменьшение потока. Если он действительно выбирается, то процедура на *шаге 3* выполняется в обратном порядке, что отражает уменьшение потока. Пробное решение является оптимальным, когда поток по каждому небазисному маршруту равен нулю, если этот маршрут имеет неположительную оценку, и когда он равен пропускной способности, если маршрут имеет положительную оценку.

Алгоритм решения сетевой задачи с ограниченными сверху переменными дает оптимальные значения x_{ij}, являющиеся также целочисленными. Следует учитывать, что значения u_{ij} могут быть такими, что допустимое решение не будет существовать даже тогда, когда общие поставки равны общему спросу. Кроме того, необходимо достаточно осторожно выбирать исходное пробное решение, а именно оно должно содержать базисное множество маршрутов с потоками, не превышающими заданные ограничения по пропускной способности. Добиться выполнения этого условия не столь сложно, однако подробное изложение этого вопроса выходит за рамки данной книги.

Исходное базисное решение. При выборе исходного решения на *шаге 1* необходимо тщательно подойти к вопросу определения базиса, т. е. $m + n - 1$ маршрутов с потоками, *однозначно* задаваемыми величинами S_i и D_j. Обычно целесообразно провести предварительный анализ коэффициентов c_{ij}, помогающий выбрать удачный исходный базис.

При обсуждении оптимальности было показано, что из каждого коэффициента c_{ij} в строке или столбце можно вычесть некоторую константу, что не оказывает влияния на выбор оптимального решения. Кроме того, в случае когда оптимальные значения двойственных переменных v_i и w_j являются константами для строки i и столбца j, новые коэффициенты затрат неотрицательны, а потоки наблюдаются только по маршрутам с нулевыми коэффициентами затрат.

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Вычесть
1	0	1	9	5	$2(=c_{11})$
2	1	0	6	1	$0(=c_{22})$
3	0	3	10	4	$5(=c_{31})$

Рис. 7.12. Схема вычислений при приведении по строкам.

Строка \ Столбец	1	2	3	4
1	0	1	3	4
2	1	0	0	0
3	0	3	4	3
Вычесть	0	0	6	1

Рис. 7.13. Схема вычислений при приведении по столбцам и определении относительных затрат.

Эти соображения приводят к возможности использования следующей вычислительной процедуры:

1) Вычесть наименьший коэффициент c_{ij} строки i из всех остальных коэффициентов затрат в этой строке, что даст новый вектор коэффициентов.

2) Вычесть наименьшую компоненту этого нового вектора из всех элементов столбца j, вследствие чего получается таблица **относительных затрат**.

3) Выбрать исходный базис в соответствии с этой таблицей.

Эта схема иллюстрируется примером, приведенным в таблицах рис. 7.12 и 7.13. Чтобы гарантировать выбор некоторого базиса, нужно воспользоваться следующими правилами.

1) Выбрать маршрут (i, j) среди допустимых маршрутов и принять поток x_{ij} равным наименьшей из величин поставок $a_i \geqslant 0$ и спроса $r_j \geqslant 0$. Для первого из выбранных маршрутов $a_i = S_i$ и $r_j = D_j$.

2) Если $a_i < r_j$, вычеркнуть строку i и не выбирать каких-либо дополнительных маршрутов в этой строке. Уменьшить x_{ij} на величину, требуемую по столбцу j, и принять теперь r_j равным этому новому значению. Вернуться к *правилу 1*.

3) Если $a_i > r_j$, вычеркнуть столбец j и не выбирать каких-либо других маршрутов в этом столбце. Уменьшить x_{ij} на величину поставки, имеющейся в строке i, и принять теперь a_i равным этому новому значению. Вернуться к *правилу 1*.

4) Если $a_i = r_j$, останов при условии, что выбрано $m + n - 1$ маршрутов. В противном случае действовать либо по *правилу 2*, либо по *правилу 3*, но не по обоим одновременно. Однако если остается *только* строка i, то действовать по *правилу 3*, а если остается *толь-*

ко столбец j, то действовать по *правилу 2*. Исходное решение будет вырожденным.

Реализация этой вычислительной схемы приведена в качестве примера с вырожденным исходным решением в таблицах рис. 7.14

Правило	Вычисления
1	Выбрать $x_{11}=r_1=S_1=1$
3	Вычеркнуть столбец 1. Принять $a_1=7-1=6$
1	Выбрать $x_{12}=a_1=r_1=6$
4 (2)	Вычеркнуть строку 1. Принять $r_2=6-6=0$
1	Выбрать $x_{23}=a_2=r_3=2$
4 (2)	Вычеркнуть строку 2. Принять $r_3=2-2=0$
1	Выбрать $x_{32}=r_2=0$
4 (3)	Вычеркнуть строку 2. Принять $a_3=3-0=3$
1	Выбрать $x_{34}=a_3=r_4=3$
4 (3)	Вычеркнуть столбец 4. Принять $a_3=3-3=0$
1	Выбрать $x_{33}=a_3=0$
4	Останов ($p-1=3+4-1=6$ маршрутов)

Рис. 7.14. Выбор исходного базиса.

и 7.15. Для проверки усвоения материала читателю нужно выполнить операции, указанные на рис. 7.14 и в таблице на рис. 7.15.

Строка \ Столбец	1	2	3	4	Поставки
1	1	6			7
2			2		2
3		0	0	3	3
Спрос	1	6	2	3	

Рис. 7.15. Исходный базис.

Сеть общего вида. Двумя важными теоретическими свойствами — треугольной структурой всех базисных решений и существованием целочисленного оптимального решения — обладают сетевые модели, соответствующие задачам:

$$\text{минимизировать} \quad \sum_{(i,\, j) \in \text{сети}} \sum c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{(k,\, j) \in \text{сети}} x_{kj} - \sum_{(i,\, k) \in \text{сети}} x_{ik} = T_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p \ \text{(уравнения баланса в узлах)}, \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad (i, j) \in \text{сети}, \tag{3}$$

где

$$\sum_{k=1}^{p} T_k = 0 \text{ и каждая величина } T_k \text{ является целочисленной.} \quad (4)$$

При условии (4) в ограничениях (2) имеется избыточность, однако, исключив любое из уравнений баланса в (2), получаем набор $p-1$ независимых ограничений. Можно показать, что каждый базис для такого набора $p-1$ ограничений обладает треугольной структурой. Следовательно, поскольку все коэффициенты в (2) равны либо $+1$, либо -1, соответствующее решение является целочисленным.

Двойственная этой задаче записывается в виде

$$\text{максимизировать } \sum_{k=1}^{p} T_k y_k \quad (5)$$

при ограничениях

$$y_i - y_j \leqslant c_{ij} \quad \text{для всех } (i, j) \in \text{сети (ограничения для дуг)}, \quad (6)$$

где каждая величина y_k не ограничена по знаку. В силу треугольной структуры можно последовательно найти значения соответствующих двойственных переменных (выбрав некоторую переменную и приписав ей произвольное значение) при условии, что известно любое базисное решение.

Отметим также, что в случае, когда заданы $p-1$ независимых ограничений из (2), набор $p-1$ *базисных* переменных соответствует дереву (разд. 6.8) в сетевом представлении (2). Применение симплексного метода к такой сети можно пояснить следующим образом. Выберем перспективную дугу, добавляемую к пробному решению, которая разрушает соответствующую структуру дерева вследствие образования контура. Далее направим максимально возможный поток по этой дуге, изменив потоки по остальным дугам, принадлежащим контуру. Такое распределение потока в свою очередь приводит к исключению одной из дуг контура, в результате чего структура дерева восстанавливается.

7.5. ОЦЕНКА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

В гл. 5 было показано, что понятие двойственности является основным при анализе влияния изменений условий задачи на оптимальное решение. Важнейшие моменты, относящиеся к этому вопросу, вновь рассматриваются здесь применительно к транспортной задаче.

Целевая функция. При известных на последней итерации значениях v_i и w_j все пробные величины $v_i + w_j - c_{ij}$ являются неположительными. Отсюда следует, что каждая величина c_{ij} может быть столь же мала, как и сумма $v_i + w_j$, а текущее решение остается оптимальным. В числовом примере разд. 7.3, как видно из рис. 7.10, на последней итерации $v_1 = -4$, а $w_4 = 9$. Поэтому текущее значение коэффициента c_{14}, равное 7, может быть уменьшено до 5 ($= -4 + 9$) и при этом текущее решение остается оптимальным. Другими словами, пробная величина -2 ($= -4 + 9 - 7$) является наибольшим уменьшением c_{14}, при которой текущее оптимальное решение сохраняется неизменным.

Поставки и спрос. Пусть имеется невырожденное оптимальное решение, т. е. пусть по каждому базисному маршруту проходит по крайней мере одна единица потока. Предположим далее, что величина S_p увеличена на единицу, так что возникает избыточная мощность поставщика. Можно показать, что в новом оптимальном распределении этот *избыток* будет приписан источнику k, имеющему максимальное значение v_i, и что целевая функция увеличится на величину $[v_p - \max (v_i)] \leqslant 0$.

Так, например, на рис. 7.10 максимум $(v_i) = v_3 = 0$. Поэтому если $S_1 = 7$, то поток по маршруту (1, 3) увеличится на единицу, а поток по маршруту (3, 3) уменьшится на единицу, вследствие чего избыточная поставка останется в строке 3. Чистое уменьшение затрат составит -4 ($= 11 - 15 = v_1$) в предположении, что избыточная мощность поставщиков не связана ни с какими затратами. Покажите, что в случае, когда $S_2 = 2$, потоки можно изменить таким образом, чтобы чистое уменьшение затрат v_2 было равно -9.

Предполагая, как и прежде, что оптимальное решение невырожденно, допустим теперь, что имеет место единичное увеличение как S_i, так и D_j. Можно показать, что к целевой функции добавляется величина $v_i + w_j$, это вытекает из рассмотрения целевой функции двойственной задачи.

Пусть, например, $S_2 = 2$ и $D_1 = 8$. Тогда значение целевой функции становится равным $100 + (-9 + 5) = 96$. На первый взгляд кажется неожиданным, что *увеличение* плана перевозок на единицу потока может на самом деле привести к *уменьшению* общих транспортных затрат. Однако это происходит вследствие того, что затраты на единичное увеличение потока по маршрутам (3, 1) и (2, 3) с избытком компенсируются экономией от единичного уменьшения потока по маршруту (3, 3). Чистое уменьшение затрат составляет -4 ($= 5 + 6 - 15$). Схема изменений базисных переменных определяется путем рассмотрения эффекта, к которому приводит уменьшение потока по маршруту (i, j) на единицу. Покажите, что если вместо принятого ранее условия берется новое: $S_1 = 7$, $D_4 = 3$, то потоки можно изменить таким образом, что чистое увеличение целевой функции составит 5 ($= v_1 + w_4$).

7.6. КРАТЧАЙШИЙ МАРШРУТ В СЕТИ ОБЩЕГО ВИДА

В разд. 6.5 было приведено несколько примеров оптимизационных моделей, которые оказались эквивалентными модели отыскания кратчайшего маршрута (пути) в сети. Читателю рекомендуется вновь просмотреть стр. 227—230, чтобы освежить в памяти структуру этой модели и принятые в ней допущения. Здесь излагается метод решения, который, подобно симплексному алгоритму, опирается на понятие двойственности.

Предположим, что сеть содержит несколько маршрутов из узла s, являющегося источником, в узел r, рассматриваемый как сток, и нужно отыскать кратчайший маршрут. Математическая модель этой задачи была приведена в разд. 6.5. Теперь необходимо сформулировать двойственную задачу:

$$\text{максимизировать} \quad -y_r + y_s \tag{1}$$

при ограничениях

$$y_i - y_j \leqslant c_{ij} \quad \text{для всех} \quad (i,\ j) \in \text{сети}, \tag{2}$$

где все величины y_k не ограничены по знаку.

Алгоритм. При использовании алгоритма отыскиваются значения двойственных переменных.

1) На предварительном шаге принимается $y_r = 0$, а все остальные $y_k = \infty$.

2) Если в сети остается хотя бы одна дуга $(i,\ j)$, такая, что $y_i > c_{ij} + y_j$, то соответствующее значение y_i изменяется на $c_{ij} + y_j$. В противном случае — останов.

Таким образом, значения y_k последовательно уменьшаются, пока условие (2) не будет выполнено для *всех* дуг. Алгоритм сходится за конечное число шагов при условии, что сумма c_{ij} вдоль любого контура, содержащегося в сети, неотрицательна. (Скорость сходимости можно повысить, используя правило 2. Однако этот вопрос относится к разряду слишком специальных, чтобы имело смысл рассматривать его здесь.)

На самом деле с помощью этого алгоритма отыскиваются кратчайшие маршруты из всех узлов в конечный узел r. В частности, для определения кратчайшего пути *для любого* узла s находят дугу $(s,\ t)$, для которой $y_s - y_t = c_{st}$. Алгоритм гарантирует, что имеется по крайней мере одна такая дуга. Аналогично в узле t находят дугу $(t,\ u)$, такую, что $y_t - y_u = c_{tu}$. Продолжая двигаться по сети подобным образом, находят маршрут, приводящий в конечном счете в узел r. Отметим, что значение y_k равно длине кратчайшего маршрута из узла k в узел r. Хотя каждое значение y_k определено однозначно, из узла k может выходить более одного кратчайшего маршрута.

Пример. Алгоритм иллюстрируется на примере сети, приведенной на рис. 7.16. Это та же сеть, что была показана на рис. 6.8. Будем отыскивать кратчайшие пути в узел 1 из всех остальных узлов. Нагляднее всего работу алгоритма можно проследить, выполняя вычисления непосредственно на сети. Срисуйте поэтому сеть, показанную на рис. 7.16, на отдельный лист или делайте записи карандашом прямо на чертеже в книге.

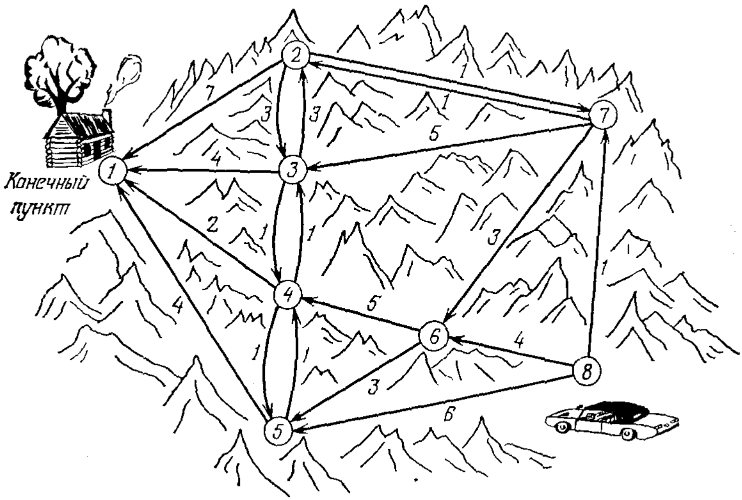


Рис. 7.16. Пример задачи о кратчайшем маршруте.

Начнем вычисления, проставив 0 у узла 1 и символ ∞ у всех остальных узлов. Можно выполнять вычисления в различном порядке. Один из них следующий:

$$
\begin{aligned}
c_{41} + y_1 &= 2 + 0 < \infty = y_4, && \text{поэтому примем } y_4 = 2,\\
c_{34} + y_4 &= 1 + 2 < \infty = y_3, && \text{поэтому примем } y_3 = 3,\\
c_{64} + y_4 &= 5 + 2 < \infty = y_6, && \text{поэтому примем } y_6 = 7,\\
c_{54} + y_4 &= 1 + 2 < \infty = y_5, && \text{поэтому примем } y_5 = 3,\\
c_{65} + y_5 &= 3 + 3 < 7 = y_6, && \text{поэтому примем } y_6 = 6,\\
c_{85} + y_5 &= 6 + 3 < \infty = y_8, && \text{поэтому примем } y_8 = 9,\\
c_{23} + y_3 &= 3 + 3 < \infty = y_2, && \text{поэтому примем } y_2 = 6,\\
c_{73} + y_3 &= 5 + 3 < \infty = y_7, && \text{поэтому примем } y_7 = 8,\\
c_{72} + y_2 &= 1 + 6 < 8 = y_7, && \text{поэтому примем } y_7 = 7,\\
c_{87} + y_7 &= 1 + 7 < 9 = y_8, && \text{поэтому примем } y_8 = 8.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При вычислении нового значения каждой величины y_k по формулам (3) нужно обязательно проставлять найденное значение у узла k на рисунке. Имеем

$$
\begin{gathered}
y_1 = 0, \quad y_2 = 6, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 2,\\
y_5 = 3, \quad y_6 = 6, \quad y_7 = 7, \quad y_8 = 8.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Необходимо обязательно убедиться в том, что значения переменных в (4) теперь удовлетворяют условию (2) для *всех* дуг сети. Тогда вычисления заканчиваются. На рис. 7.17 значения y_k проставлены

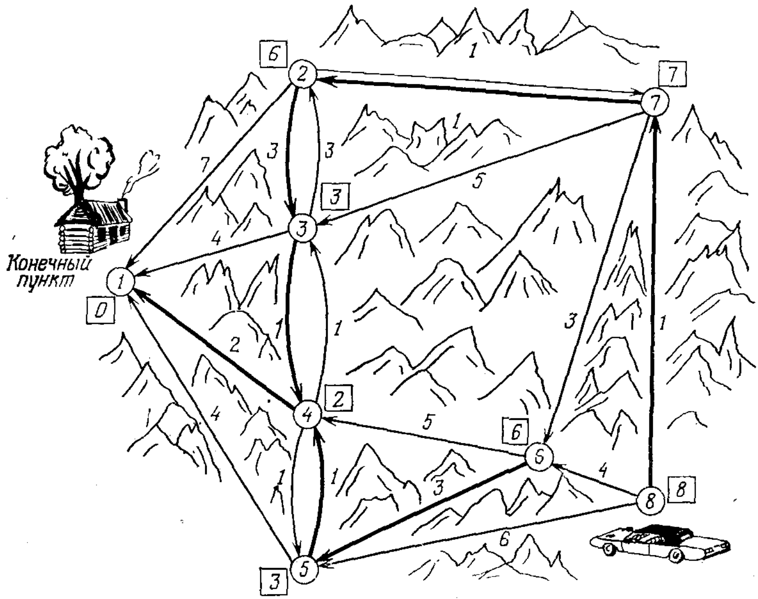


Рис. 7.17. Кратчайшие маршруты в узел 1.

в квадратах у каждого узла, а дуги, принадлежащие кратчайшим путям, выделены жирными линиями.

Если каждый оптимальный путь является единственным, то множество всех дуг, принадлежащих кратчайшим путям, образует дерево, определение которого дано в разд. 6.8.

Доказательство того, что конечное значение y_s действительно определяет длину *кратчайшего* пути из узла s в узел r, следует немедленно. По построению все двойственные ограничения (2) удовлетворяются. Соответствующее значение двойственной целевой функции равно

$$y_rT_r + y_sT_s = 0\,(-1) + y_s\,(1) = y_s. \tag{I}$$

Это значение определяет длину пути, по которому можно *достигнуть* узел r из узла s. Следовательно, найдены допустимые решения как прямой, так и двойственной задачи. Поскольку эти два решения имеют одинаковые значения целевой функции, путь должен быть оптимальным.

Краткая математическая запись условий, которым должны удовлетворять y_i, имеет вид

$$y_i = \min_{(i,j) \in \text{сети}} (c_{ij} + y_j) \quad \text{для всех } i \neq r, \tag{II}$$

где $y_r = 0$.

Иногда нужно вычислить кратчайшие пути между *каждой* парой узлов. Следующий метод позволяет эффективно решать эту задачу. Пусть

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{длина дуги } (i, j), \text{ если } (i, j) \in \text{сети}, \\ \infty, \text{ если } (i, j) \notin \text{сети и } i \neq j, \\ 0, \text{ если } i = j. \end{cases} \tag{III}$$

Рассмотрим сеть, состоящую только из узлов $1, 2, \ldots, q-1$ $(< p)$, и для этой усеченной сети положим

d_{ij} — кратчайшее расстояние между узлами i и j,

когда в сети содержатся только узлы $1, 2, \ldots, q-1$. (IV)

Аналогично примем

d_{ij}^* — кратчайшее расстояние между узлами i и j,

когда в сети содержатся узлы $1, 2, \ldots, q$. (V)

Тогда

$$d_{qj}^* = \min_{k=1,\, 2,\, \ldots,\, q-1} (c_{qk} + d_{kj}) \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, q-1, \tag{VI}$$

$$d_{iq}^* = \min_{k=1,\, 2,\, \ldots,\, q-1} (d_{ik} + c_{kq}) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, q-1, \tag{VII}$$

$$d_{qq}^+ = 0, \tag{VIII}$$

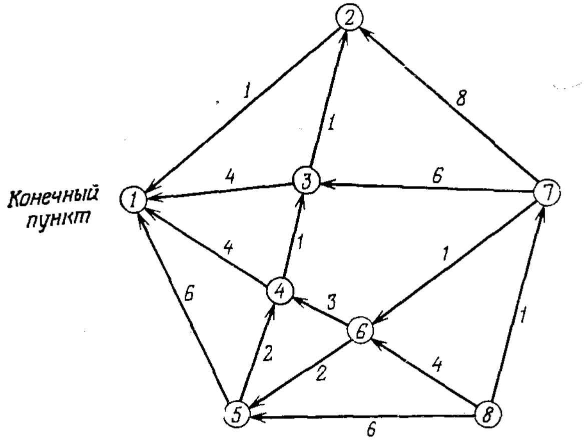
$$d_{ij}^* = \min (d_{ij},\ d_{iq}^* + d_{qj}^*) \quad \text{при} \quad i, j = 1, 2, \ldots, q-1. \tag{IX}$$

Начав с $q = 2$ и последовательно увеличивая значения q до $q = p$, выполняем поочередно шаги (VI) — (IX) (при $q = 2$, $d_{ij}^* = c_{ij}$ для $i, j = 1, 2$). Реализация алгоритма требует выполнения $p(p-1) \times \times (p-2)$ операций сложения.

7.7. КРАТЧАЙШИЙ МАРШРУТ В АЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

Алгоритм отыскания кратчайшего маршрута можно еще более упростить, если сеть является ациклической, ибо в этом случае двойственные переменные y_k можно определять рекуррентно, т. е. последовательно.

На предварительном шаге пронумеруем узлы сети от 1 до p таким образом, что если сеть содержит дугу (i, j), то $i > j$. Чтобы добиться выполнения этого условия, присвоим стоку или конечному узлу, т. е. узлу, не имеющему выходящих дуг, номер 1. Зачеркнем этот узел и все входящие в него дуги и не будем их рассматривать в дальнейшем при присвоении номеров. Возьмем *любой* другой узел, имеющий теперь *только входящие* в него дуги, и припишем ему номер 2. Зачеркнем этот узел *и* все входящие в него дуги и исключим их из рассмотрения при дальнейшем присвоении номеров. Будем



Р и с. 7.18. Пример задачи о кратчайшем маршруте на ациклической сети.

продолжать этот процесс до тех пор, пока все узлы не будут пронумерованы. Значения величин y_i будем определять в порядке нумерации узлов.

Алгоритм состоит из двух шагов

$$y_1 = 0 \quad \text{(конечный узел)}, \tag{1}$$

$$y_i = \min_{(i,\, j) \in \text{сети}} (c_{ij} + y_j) \quad \text{при } i = 2, 3, \ldots, p. \tag{2}$$

Для уяснения работы алгоритма, точнее рекуррентного соотношения (2), рассмотрим сеть, приведенную на рис. 7.18, где величины c_{ij} поставлены у каждой дуги. (Пронумеруйте узлы самостоятельно по изложенному выше правилу, чтобы убедиться, что нумерация на рисунке соответствует условию $i > j$.) В результате использования данного алгоритма получаем

$$y_1 = 0,$$
$$y_2 = \min (c_{21} + y_1)\ (1 + 0) = 1,$$
$$y_3 = \min (c_{31} + y_1,\ c_{32} + y_2) = \min (4 + 0,\ 1 + 1) = 2,$$
$$y_4 = \min (c_{41} + y_1,\ c_{43} + y_3) = \min (4 + 0,\ 1 + 2) = 3,$$
$$y_5 = \min (c_{51} + y_1,\ c_{54} + y_4) = \min (6 + 0,\ 2 + 3) = 5,$$
$$y_6 = \min (c_{64} + y_4,\ c_{65} + y_5) = \min (3 + 3,\ 2 + 5) = 6,$$
$$y_7 = \min (c_{72} + y_2,\ c_{73} + y_3,\ c_{76} + y_6) = \min (8 + 1,\ 6 + 2,\ 1 + 6) = 7,$$
$$y_8 = \min (c_{85} + y_5,\ c_{86} + y_6,\ c_{87} + y_7) = \min (6 + 5,\ 4 + 6,\ 1 + 7) = 8.$$

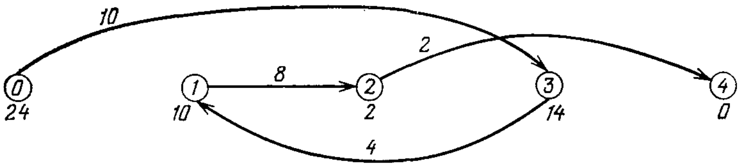


Рис. 7.19. Кратчайшие маршруты в ациклической сети.

Как и в предыдущем разделе, вычисления можно выполнять непосредственно на чертеже. Маршруты также определяются, как и прежде. Полученное в данном примере решение показано на рис. 7.19.

КОНТРОЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Выпишите полностью уравнения стандартной транспортной модели при $m = 2$ и $n = 3$, в которой общая мощность поставщиков равна общему спросу потребителей. [Используйте обозначения, принятые в (2), (3) и (5) разд. 7.2.] Покажите, что если сложить ограничения на мощность поставщиков из (2) для $i = 1$, 2 и из этой суммы вычесть ограничения на спрос из (3) для $j = 1$, 2, то получится ограничение на спрос для $j = 3$. Укажите, где используется допущение о равенстве мощности поставщиков спросу потребителей.

2. Выпишите полностью уравнения стандартной транспортной модели при $m = 4$ и $n = 3$. Сформулируйте также полностью соответствующую двойственную задачу линейного программирования, используя обозначения, принятые в (6) и (7) разд. 7.2.

3. При заданной модели исходной транспортной задачи (1) — (5), приведенной в разд. 7.2, покажите, что соответствующая двойственная задача записывается как (6) и (7).

4. Перегруппируйте двойственные переменные и двойственные равенства (3) в разд. 7.3 таким образом, чтобы наглядно была видна треугольная структура, когда указанная ниже двойственная переменная принимается равной нулю.

а) w_4.

б) w_1.

в) v_2.

5. а) Сгруппируйте переменные грузопотоков и равенства (5) в разд. 7.3 таким образом, чтобы была видна верхняя треугольная структура.

б) Рассмотрите упражнение п. а), когда равенство, соответствующее строке 3, записывается в явном виде, а равенство, соответствующее столбцу 4, исключается как избыточное.

в) Рассмотрите упражнение п. а), когда равенство, соответствующее строке 3, записывается в явном виде, а равенство, соответствующее столбцу 4, исключается как избыточное.

г) Рассмотрите упражнение п. а), когда равенство, соответствующее строке 3, записывается в явном виде, а равенство, соответствующее строке 2, исключается как избыточное.

6. Для каждого из указанных ниже небазисных маршрутов (рис. 7.3) найдите схему изменений по образцу рис. 7.4. Вычислите также соответствующую оценку дуги и подтвердите правильность полученного ответа данными, приведенными на рис. 7.5. Найдите, наконец, значения нового базисного решения при условии выбора заданного маршрута.

а) Маршрут (1, 3).
б) Маршрут (1, 4).
в) Маршрут (2, 1).
г) Маршрут (2, 3).
д) Маршрут (2, 4).

7. В каждом из указанных пунктов решите двойственные уравнения (3), приведенные в разд. 7.3, используя заданное значение выбранной двойственной переменной.

а) $v_3 = 1$. г) $w_4 = 1$.
б) $v_3 = -1$. д) $w_1 = 0$.
в) $w_4 = 0$. е) $w_1 = -1$.

ж) Докажите, что сумма $v_i + w_j$ при любом i и j имеет постоянное значение во всех п. а) — е). Объясните, чем это обусловлено.

8. *Правило северо-западного угла.* В разд. 2.7 было сформулировано следующее правило отыскания исходного решения любой транспортной задачи. Начать с левой верхней клетки таблицы, называемой иногда *северо-западным углом*, и распределить всю имеющуюся мощность поставщика S_1 по всем потребителям, начиная с D_1. Далее перейти к поставщику S_2, удовлетворяя в аналогичной последовательности оставшийся неудовлетворенным спрос потребителей. Продолжать распределение поставок по той же схеме.

а) Рассмотрите пример на рис. 7.2. Положите $S_2 = 2$ и $D_2 = 6$. Примените правило северо-западного угла для определения исходного решения. Вычислите соответствующее пробное значение целевой функции.

б) Измените пробное решение, найденное в п. а), положив $S_2 = 1$ и $D_2 = 5$ (значения, указанные на рис. 7.2). Не забывайте, что в базисном решении должно быть $m + n - 1$ маршрутов.

в) Укажите, как нужно изменить данную выше формулировку правила северо-западного угла, чтобы гарантировалось получение базисного решения, содержащего $m + n - 1$ маршрутов.

г) Примите на рис. 7.2 $S_1 = 7$, $S_2 = 5$ и $D_4 = 7$. Является ли допустимое решение, содержащее грузопотоки x_{11}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, x_{33}, x_{44}, базисным? Если ответ на этот вопрос отрицательный, то объясните почему и используйте данное объяснение в п. в). (*Указание*: проверьте, определяются ли *однозначно* допустимые значения x_{ij}.)

9. Для каждого из указанных ниже небазисных маршрутов (рис. 7.6) найдите схему изменений по образцу рис. 7.7. Вычислите также соответствующую оценку дуги и сравните полученный ответ с (10) в разд. 7.3. Покажите значения нового базисного решения, когда указанный маршрут действительно выбирается.

а) Маршрут (3, 2).

б) Маршрут (1, 4).

в) Маршрут (2, 4).

10. Постройте такое базисное решение для примера, где $m > 2$ и $n > 2$, в котором *каждый* базисный маршрут изменяется, когда вводится определенный небазисный маршрут. (*Указание*: положите $m = n$ и находите базисное решение, используя правило северо-западного угла, приведенное в упражнении 8.)

11. Допустим, что каждый из указанных ниже маршрутов выбран на итерации 3 (рис. 7.6). Продолжайте вычисления симплексным методом для отыскания оптимального решения. Используйте табличный метод по образцу рис. 7.8 для вычисления оценок дуг.

а) Маршрут (1, 3).

б) Маршрут (2, 4).

12. а) Объясните, почему, вычитая одну и ту же константу из каждой величины c_{ij} в заданной строке i, получаем новую задачу, имеющую те же оптимальные решения, что и исходная.

б) Рассмотрите транспортную модель, используемую для распределения изделий, выпускаемых на m предприятиях. Пусть p_i — производственные затраты, связанные с выпуском каждого изделия на предприятии i, а t_{ij} — транспортные затраты по перевозке каждого изделия с предприятия i на склад j. Предположим, что общая потенциальная производственная мощность всех предприятий равна общей потребности всех складов. Рассмотрев упражнение п. а), объясните, почему фактические значения p_i не влияют на оптимальное распределение. Изменится ли это объяснение, если общая производственная мощность превышает общий спрос? Если да, то почему?

13. В каждом из п. а) — д) определите, будет ли существовать другое оптимальное решение на рис. 7.10. В случае положительного ответа найдите такое базисное решение.

а) $c_{11} = 3$;

б) $c_{11} = 1$;

в) $c_{32} = 8$;

г) $c_{32} = 9$;

д) $c_{32} = 7$.

14. *Вырожденность*. В каждом из п. а), б), г) упражнения 8 примените симплексный транспортный алгоритм для отыскания оптимального решения и используйте исходное решение, полученное в указанном упражнении.

15. *Вырожденность*. В каждом из п. а) б), г) упражнения 8 примените метод изменения масштаба единиц, изложенный в разд. 7.4,

для снятия вырожденности. Решите задачу с введенными возмущениями транспортным симплексным методом и укажите, как найти оптимальное решение исходной задачи. Используйте данные и исходное решение упражнения 8.

16. Рассмотрите пример, приведенный на рис. 7.2. Примените транспортный симплексный метод для отыскания оптимального решения, начав с базиса

$$x_{11} = 2, \quad x_{12} = 4, \quad x_{22} = 1, \quad x_{31} = 5, \quad x_{33} = 3, \quad x_{34} = 2.$$

17. Решите задачу, указанную в упражнении 16, пользуясь стандартным симплексным методом, изложенным в гл. 4. (По собственному усмотрению можете использовать любую форму таблиц, приведенных в разд. 4.9.) Проверьте, что на каждой итерации любая переменная соответствует схеме изменений, имеющей место при введении соответствующего небазисного маршрута. (*Указание*: начните с исключения любого из уравнений как избыточного и разрешите оставшиеся уравнения относительно базисных значений x_{ij}, указанных в упражнении 16.)

18. Допустим, что в исходном базисном решении (рис. 7.3) вместо маршрута (2, 2) используется маршрут (2, 3). Найдите оптимальное решение с помощью транспортного симплексного метода. [Учтите, что этот исходный базис определяется из анализа относительных затрат (рис. 7.13).]

19. а) Рассмотрите метод определения относительных затрат, изложенный в разд. 7.4 и проиллюстрированный на рис. 7.13. Используйте этот метод сначала при вычислениях по столбцам, а затем при вычислениях по строкам. Совпадают ли полученные результаты с данными, указанными в таблице на рис. 7.13?

б) Покажите, что решение, приведенное на рис. 7.9, является оптимальным для задачи, в которой коэффициенты c_{ij} заданы таблицей на рис. 7.13. Выясните связь между значением оптимального решения, данным на рис. 7.9, и значениями c_{ij}, приведенными в таблице на рис. 7.13.

а) Покажите, что решение, представленное в таблице на рис. 7.9, является оптимальным для задачи, в которой коэффициенты c_{ij} определяются в п. а).

20. *Исходное базисное решение*. а) Выполните вычисления, указанные на рис. 7.14, 7.15.

б) Используйте последовательность выбора значений x_{ij}, показанную на рис. 7.14, для отыскания исходного базиса при следующих значениях мощности поставщиков и спроса потребителей:

$$S_1 = 3, \ S_2 = 4, \ S_3 = 5, \ D_1 = 3, \ D_2 = 1, \ D_3 = 4, \ D_4 = 4.$$

21. Рассмотрите задачу, приведенную на рис. 7.2. Вычислите минимальные значения указанных ниже коэффициентов в выражении для целевой функции (при неизменных остальных затратах), при которых решение, данное на рис. 7.9, остается оптимальным

а) c_{12}; г) c_{31};
б) c_{13}; д) c_{33};
в) c_{23}; е) c_{34}.

22. Предположим, что имеется оптимальное решение, в котором по каждому базисному маршруту доставляется по крайней мере одна единица (рис. 7.9). Допустим, что S_p увеличивается на единицу, вследствие чего возникает избыточная мощность поставщиков. Покажите, что в новом оптимальном распределении *избыток* будет приписан источнику k, имеющему максимальное значение v_i, и что к целевой функции добавляется величина $v_p - \max(v_i)$.

23. Рассмотрите пример, приведенный в разд. 7.3. Найдите новое оптимальное решение (используя анализ чувствительности предыдущего оптимального решения) и покажите, что общие затраты уменьшаются на величину $v_2 = -9$.

24. Рассмотрите оптимальное решение, показанное на рис. 7.9. В каждом из указанных ниже пунктов примените метод анализа чувствительности для отыскания нового оптимального решения и соответствующего значения целевой функции.

а) $S_1 = 7,\quad D_1 = 8$;
б) $S_1 = 7,\quad D_4 = 3$;
в) $S_2 = 2,\quad D_2 = 6$;
г) $S_2 = 2,\quad D_4 = 3$;
д) $S_3 = 10,\quad D_2 = 6$.

25. Рассмотрите оптимальное решение, показанное на рис. 7.9. Пусть в каждом из указанных ниже пунктов мощность поставщика i равна $S_i - \delta$, а спрос потребителя j равен $D_j - \delta$. Определите, насколько велико может быть значение δ, чтобы базис рис. 7.9 оставался оптимальным. Укажите также оптимальное решение при этом значении δ.

а) $S_1 - \delta$ и $D_2 - \delta$; г) $S_3 - \delta$ и $D_1 - \delta$;
б) $S_1 - \delta$ и $D_3 - \delta$; д) $S_3 - \delta$ и $D_3 - \delta$;
в) $S_2 - \delta$ и $D_3 - \delta$; е) $S_3 - \delta$ и $D_4 - \delta$.

26. Рассмотрите упражнение 25 для каждого из указанных ниже пунктов. [*Указание*: схема изменений базисных переменных такая же, как и в случае добавления единицы потока на маршруте (i, j).]

а) $S_1 - \delta$ и $D_1 - \delta$;
б) $S_1 - \delta$ и $D_4 - \delta$;
в) $S_2 - \delta$ и $D_1 - \delta$;
г) $S_3 - \delta$ и $D_2 - \delta$.

27. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.16. Вычеркните дуги из узла 4 в узел 3, из узла 6 в узел 5 и из узла 7 в узел 2. Добавьте дуги, соответствующие $c_{47} = 1$, $c_{63} = 3$ и $c_{67} = 1$.

а) Примените алгоритм, изложенный в разд. 7.6, для отыскания кратчайших маршрутов в узел 1 из всех остальных узлов и определите длину соответствующих маршрутов.

б) Насколько мало может быть значение c_{64}, чтобы ответ задачи п. а) оставался оптимальным?

в) Насколько велико может быть значение c_{34}, чтобы ответ задачи п. а) оставался оптимальным?

г) Насколько велико может быть значение c_{41}, чтобы ответ задачи п. а) оставался оптимальным?

28. Рассмотрите сеть, приведенную на рис. 7.16. Вычеркните дугу из узла 5 в узел 4. Добавьте дуги, соответствующие $c_{13} = 1$, $c_{14} = 2$, $c_{56} = 3$, и положите $c_{72} = 4$.

а) Примените алгоритм, изложенный в разд. 7.6, для отыскания кратчайших маршрутов в узел 2 из всех остальных узлов и определите длину соответствующих маршрутов. Если существует несколько оптимальных решений, то укажите каждое из них.

б) Пусть добавлена дуга из узла 8 в узел 3. Каково наименьшее значение c_{83}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

в) Пусть добавлена дуга из узла 8 в узел 1. Каково наименьшее значение c_{81}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

г) Пусть добавлена дуга из узла 5 в узел 2. Каково наименьшее значение c_{52}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

29. Пронумеруйте узлы по правилу (алгоритму), изложенному в начале разд. 7.7, чтобы показать, что узлам сети, показанной на рис. 7.18, приписаны правильные номера.

30. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.18. Вычеркните дуги c_{32} и c_{76}. Добавьте дугу, соответствующую $c_{74} = 5$.

а) Примените алгоритм, изложенный в разд. 7.7, для отыскания кратчайших путей из всех узлов в узел 1 и для определения длины этих путей. При наличии нескольких оптимальных решений укажите каждое из них.

б) Каково наименьшее значение c_{86}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

в) Пусть добавлена дуга из узла 8 в узел 3. Каково наименьшее значение c_{83}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

г) Пусть добавлена дуга из узла 8 в узел 2. Каково наименьшее значение c_{82}, при котором ответ задачи п. а) остается оптимальным?

31. Объясните, как вы понимаете термины «треугольная структура» или «свойство треугольной структуры», а также «относительные затраты».

Упражнения 32—42 относятся к материалу, содержащемуся в приложении I.

32. Примените в каждом из указанных ниже пунктов алгоритм отыскания максимального потока в сети рис. I.1, изложенный в разд. I.1. Начните вычисления с заданного исходного потока.

а) Единица потока из узла 0 через узлы 4, 5 и 6.

б) Единица потока из узла 0 через узлы 1, 2, 3, 5 и 6.

33. Рассмотрите пример, показанный на рис. I.1. Определите, можно ли увеличить максимальный поток при следующих условиях:

а) допускается поток в обоих направлениях между любой парой узлов, уже связанных дугой;

б) добавляется дуга из узла 1 в узел 6;

в) вносятся изменения, указанные в п. а), б).

34. Рассмотрите пример, показанный на рис. I.1. Предположим, что предельная пропускная способность u_{ij} дуги (i, j) равна $i + j$. (Таким образом, $u_{04} = 4$, $u_{36} = 9$, $u_{23} = 5$ и т. д.) Найдите максимальный поток и укажите схему оптимального потока.

35. *Разрез.* Рассмотрите пример, показанный на рис. I.1. Пусть C_0 — все ветвящиеся узлы, соответствующие рис. I.3, а C_{p+1} — остальные узлы.

а) Какие узлы принадлежат C_0?

б) Какова пропускная способность соответствующего разреза?

36. Рассмотрите упражнение 35 для случая максимального потока, найденного в упражнении 34.

37. Примените транспортный симплексный метод для решения задачи о назначениях, приведенной на рис. I.4, положив, что исходное базисное решение состоит из $x_{14} = x_{23} = x_{32} = x_{41} = 1$ и $x_{24} = x_{34} = x_{44} = 0$. (Для исходного решения принять $v_1 = 0$.)

38. Примените алгоритм отыскания максимального потока, изложенный в разд. I.2, для решения задачи о назначениях, приведенной на рис. I.4, приняв, что исходные значения v_i и w_j соответствуют значениям, определяемым исходным базисным решением, данным в упражнении 37 (при начальном $v_1 = 0$). Покажите на каждой итерации, как осуществляется просмотр (по образцу рис. I.16), и приведите окончательное решение на сети (по образцу рис. I.17).

39. Рассмотрите задачу о назначениях, приведенную на рис. I.4, и примите новые коэффициенты затрат равными $c_{ij} - v_i - w_j$, где v_i и w_j соответствуют значениям, принятым в исходном базисном решении упражнения 37 (начальное значение $v_1 = 0$). Примените теперь алгоритм минимальных затрат/максимального потока, описанный в разд. I.2, положив $v_i = w_j = 0$ и приняв на исходной итерации поток равным нулю. Вычертите на каждой итерации сеть по образцу рис. I.19 и кратчайший маршрут по образцу рис.I .20.

40. Рассмотрите задачу о назначениях, приведенную на рис. I.4. Примените в каждом пункте алгоритм отыскания кратчайшего маршрута, изложенный в разд. I.2, просматривая строки и столбцы в указанном порядке. На каждой итерации изобразите графически сеть и соответствующий кратчайший маршрут по образцу рис. I.24 и I.25.

а) Строка 1 и столбец 1, строка 2 и столбец 2, строка 3 и столбец 3, строка 4 и столбец 4.

б) Строка 4 и столбец 4, строка 3 и столбец 3, строка 2 и столбец 2, строка 1 и столбец 1.

в) Строка 1 и столбец 2, строка 2 и столбец 3, строка 3 и столбец 4, строка 4 и столбец 1.

41. Решите транспортную задачу, приведенную в разд. 7.3, используя алгоритм максимального потока, изложенный в разд. 1.3.

42. Объясните, как вы понимаете термины:

максимальный поток;
путь, усиливающий поток;
помеченный узел;
разрез;
разветвленный узел;
пропускная способность разреза;
разрыв.

УПРАЖНЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

43. Рассмотрите транспортную задачу при $m = 3$ и $n = 3$, где

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = 1, \quad &&c_{12} = 3, \quad &&c_{13} = 8,\\
&c_{21} = 10, \quad &&c_{22} = 4, \quad &&c_{23} = 5,\\
&c_{31} = 2, \quad &&c_{32} = 4, \quad &&c_{33} = 10.
\end{aligned}
$$

а) Пусть $S_1 = 4$, $S_2 = 4$, $S_3 = 8$; $D_1 = 2$, $D_2 = 4$, $D_3 = 10$. Примените транспортный симплексный метод отыскания оптимального решения.

б) Используя анализ чувствительности, определите, как изменится решение задачи п. а), если $S_1 = 5$ и $D_1 = 3$. Чему равно новое значение целевой функции?

в) Рассмотрите упражнение п. б) при $S_2 = 5$, $D_2 = 5$.

г) Каково наименьшее значение c_{22}, при котором решение задачи п. а) остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно коэффициента c_{12}.

д) Определите диапазон значений c_{23}, при которых решение задачи п. а) остается оптимальным. Сделайте то же самое для c_{33} и c_{32}.

44. Рассмотрите транспортную задачу при $m = 4$ и $n = 4$, где

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = 7, \quad &&c_{12} = 9, \quad &&c_{13} = 1, \quad &&c_{14} = 9,\\
&c_{21} = 22, \quad &&c_{22} = 25, \quad &&c_{23} = 16, \quad &&c_{24} = 23,\\
&c_{31} = 25, \quad &&c_{32} = 29, \quad &&c_{33} = 21, \quad &&c_{34} = 28,\\
&c_{41} = 12, \quad &&c_{42} = 14, \quad &&c_{43} = 6, \quad &&c_{44} = 15.
\end{aligned}
$$

а) Пусть $S_1 = 7$, $S_2 = 3$, $S_3 = 7$, $S_4 = 8$; $D_1 = 5$, $D_2 = 5$, $D_3 = 7$, $D_4 = 8$. Примените транспортный симплексный метод определения оптимального решения.

б) Используя анализ чувствительности, определите, как изменится решение задачи п. а), если $S_2 = 4$ и $D_4 = 9$. Каково новое значение целевой функции?

в) Рассмотрите упражнение п. б) при $S_3 = 8$ и $D_3 = 8$.

г) Каково наименьшее значение c_{11}, при котором решение задачи п. а) остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно c_{21} и c_{31}.

д) Определите диапазон значений c_{23}, при которых решение задачи п. а) остается оптимальным. Сделайте то же самое для c_{43} и c_{42}.

45. Рассмотрите транспортную задачу при $m = 4$ и $n = 4$, где

$$\begin{array}{llll} c_{11} = 5, & c_{12} = 7, & c_{13} = 7, & c_{14} = 10, \\ c_{21} = 4, & c_{22} = 5, & c_{23} = 8, & c_{24} = 13, \\ c_{31} = 13, & c_{32} = 15, & c_{33} = 14, & c_{34} = 21, \\ c_{41} = 18, & c_{42} = 20, & c_{43} = 24, & c_{44} = 31. \end{array}$$

а) Пусть $S_1 = 3$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 18$; $D_1 = 15$, $D_2 = 5$, $D_3 = 7$, $D_4 = 7$. Примените транспортный симплексный метод отыскания оптимального решения.

б) Используя метод анализа чувствительности, определите, как изменится решение задачи п.а), если $S_1 = 4$ и $D_1 = 16$. Каково новое значение целевой функции?

в) Рассмотрите упражнение п. б) при $S_2 = 5$ и $D_1 = 16$.

г) Рассмотрите упражнение п. б) при $S_1 = 4$ и $D_2 = 6$.

д) Каково наименьшее значение c_{44}, при котором решение задачи п. а) остается оптимальным?

е) Определите диапазон значений c_{33}, при которых решение задачи п. а) остается оптимальным. Сделайте то же самое для c_{23} и c_{34}.

46. *Задача авиакомпании «Ночной полет».*

а) Решите задачу, приведенную в упражнении 28 гл. 2.

б) Каково оптимальное значение целевой функции и какие изменения нужно внести в программу закупок, найденную в п. а), если дополнительно требуется 1 т горючего в аэропорту 1? в аэропорту 2? в аэропорту 3? в аэропорту 4?

в) Каково оптимальное значение целевой функции и какие изменения нужно внести в программу закупок, найденную в п. а), если дополнительно одну тонну горючего предлагает нефтяная компания 1? нефтяная компания 2? нефтяная компания 3?

г) Каково оптимальное значение целевой функции и какие изменения нужно внести в программу закупок, найденную в п. а), если нефтяная компания 1 дополнительно предлагает одну тонну горючего, требующегося в аэропорту 1? в аэропорту 2? в аэропорту 3? в аэропорту 4?

47. *Задача фирмы «Нитроткань».*

а) Решите задачу, приведенную в упражнении 29 гл. 2.

б) Какова цена дополнительной единицы мощности на каждом предприятии?

в) Какие затраты соответствуют дополнительной единице спроса у каждого оптовика?

г) Определите диапазон изменений прямых производственных издержек на каждом предприятии, в котором решение задачи п. а) остается оптимальным.

48. *Задача фирмы «С дальним прицелом».*

а) Примените транспортный симплексный метод для решения задачи, приведенной в упражнении 28 гл. 6. Обязательно определите объем выпуска продукции в течение каждого интервала и уровень запасов на конец каждого интервала.

б) Получено ли то же решение, что и в п. в) упражнения 28 гл. 6? Если нет, то соответствуют ли обоим решениям одинаковые общие затраты?

49. *Задача компании «Синбад-пароход».* Примените транспортный симплексный метод для решения задачи упражнения 29 гл. 6, где

$$p_A = 1, \quad p_B = 2, \quad p_C = 4,$$
$$q_A = 4, \quad q_B = 2, \quad q_C = 1.$$

Обязательно определите оптимальный маршрут для каждого судна.

50. *Задача компании «Синбад-пароход».* Примените транспортный симплексный метод для решения задачи упражнения 30 гл. 6. Обязательно определите оптимальный маршрут для каждого судна.

51. Рассмотрите приведенную в упражнении 32 гл. 6 сеть, в которой $c_{ij} = c_{ji}$ и

$$\begin{aligned} c_{12} = 14, \quad c_{13} = 4, \quad & c_{14} = 1, \quad c_{15} = 6, \\ c_{23} = 10, \quad & c_{24} = 13, \quad c_{25} = 5, \\ & c_{34} = 3, \quad c_{35} = 2, \\ & \qquad\qquad c_{45} = 8. \end{aligned}$$

а) Найдите оптимальное решение задачи, применив транспортный симплексный метод к соответствующей редуцированной матрице задачи с промежуточными пунктами, аналогичной матрице на рисунке 6.4. Обязательно найдите оптимальную схему маршрутов и определите, является ли она единственной.

б) Рассмотрите упражнение п.а), используя расширенную матрицу задачи с промежуточными пунктами, аналогичную матрице на рис. 6.5.

в) Каково наименьшее значение c_{45}, при котором текущее решение остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно c_{24}, c_{34}, c_{35}.

52. *Задача фирмы «Универсал».* Рассмотрите сеть, приведенную на рис. 6.3. Пусть $c_{12} = 1$, $c_{23} = 7$, $c_{25} = 3$, $c_{43} = 1$, $c_{45} = 3$, $c_{47} = 4$, $c_{54} = 2$, $c_{56} = 5$, $c_{67} = 3$, $c_{78} = 1$.

а) Примените транспортный симплексный метод к редуцированной матрице задачи с промежуточными пунктами, аналогичной матрице рис. 6.4. Обязательно определите оптимальную схему перевозок.

б) Примените транспортный симплексный метод к развернутой матрице задачи с промежуточными пунктами, аналогичной матрице рис. 6.5. Обязательно определите оптимальную схему перевозок.

в) Изменится ли решение, если исключить маршрут со склада 6 до склада 7? Если да, то каким образом?

г) Пусть введен дополнительный маршрут из узла 1 непосредственно в узел 3. Насколько малым может быть соответствующее значение c_{13}, чтобы решение задачи п. а) оставалось оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно значения c_{27} для прямого маршрута из узла 2 в узел 7.

53. Рассмотрите упражнение 52, используя данные по поставкам и спросу, приведенные в п. а) упражнения 6 гл. 6.

54. Рассмотрите упражнение 52, используя данные по поставкам и спросу, приведенные в п. б) упражнения 6 гл. 6.

55. Рассмотрите упражнение 52, используя данные по поставкам и спросу, приведенные в п. в) упражнения 6 гл. 6.

56. *Задача фирмы «Полиметалл».* Рассмотрите пример, приведенный в упражнении 31 гл. 6, где

$$S_1 = 10,\quad S_2 = 15,\quad D_5 = 8,\quad D_6 = 10,\quad D_7 = 2,$$
$$m_1 = 1,\quad m_2 = 2,\quad p_3 = 3,\quad p_4 = 5,$$
$$s_{13} = 1,\quad s_{14} = 1,\quad s_{23} = 6,\quad s_{24} = 3,$$
$$t_{35} = 1,\quad t_{36} = 1,\quad t_{37} = 3,\quad t_{45} = 3,\quad t_{46} = 2,\quad t_{47} = 1.$$

а) Найдите оптимальное решение задачи, применив транспортный симплексный метод к соответствующей редуцированной матрице задачи с промежуточными пунктами, аналогичной матрице рис. 6.4. Не забудьте определить оптимальную схему перевозок и поток товаров.

б) Рассмотрите упражнение п. а), используя расширенную матрицу задачи с промежуточными пунктами, аналогичную матрице рис. 6.5.

в) Каково оптимальное значение целевой функции и какие изменения вносятся в решение, если $S_1 = 11$? $S_1 = 9$? $S_{12} = 16$? $S_2 = 14$? $D_5 = 9$? $D_6 = 11$? $D_7 = 3$? $S_1 = 11$ и $D_7 = 3$? $S_2 = 16$ и $D_5 = 9$?

г) Каково наибольшее значение m_1, при котором решение задачи п. а) остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно m_2, p_3 и p_4.

д) Предположим, что товары можно перевозить с перевалкой в любом из узлов 5, 6 и 7 в любой узел при удельных затратах c_{kh}. Насколько малым может быть значение c_{kh} (где k и h равны 5, 6, 7 и $k \neq h$), чтобы решение задачи п. а) оставалось оптимальным?

57. Рассмотрите сеть, приведенную в упражнении 33 гл. 6, где $c_{ij} = c_{ji}$ и

$c_{12} = 15$, $c_{14} = 8$, $c_{16} = 55$, $c_{23} = 28$, $c_{24} = 5$, $c_{25} = 12$, $c_{38} = 6$, $c_{45} = 20$, $c_{46} = 48$, $c_{57} = 20$, $c_{58} = 7$, $c_{67} = 12$, $c_{78} = 10$.

а) Найдите оптимальное решение, применив транспортный симплексный метод к соответствующей редуцированной матрице задачи с промежуточными пунктами, аналогичной матрице рис. 6.4. Обязательно укажите оптимальные схемы перевозок.

б) Решите задачу п. а), взяв расширенную матрицу задачи с промежуточными пунктами, аналогичную матрице рис. 6.5.

в) Каковы наименьшие затраты по дуге между узлами 1 и 6, при которых решение задачи п. а) остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно дуги между узлами 4 и 6.

г) Предположим, что введен прямой маршрут между узлами 1 и 3. Каково наименьшее значение $c_{13} = c_{31}$, при котором решение задачи п. а) остается оптимальным? Ответьте на этот же вопрос относительно маршрута между узлами 4 и 7, когда $c_{47} = c_{74}$.

58. *Календарное планирование использования рабочей силы.* Рассмотрите пример, показанный на рис. 6.19, при данных о затратах, приведенных в упражнении 21 гл. 6. Пусть

$$R_1 = 10, \quad R_2 = 15, \quad R_3 = 9, \quad R_4 = 20, \quad R_5 = 12.$$

а) Примените транспортный симплексный метод к таблице, имеющей вид таблицы, приведенной на рис. 6.20. Обязательно укажите число бригад, начинающих работать в каждом интервале оптимального плана.

б) Каково оптимальное значение целевой функции и какие изменения вносятся в решение задачи п. а), если $R_1 = 11$? $R_2 = 14$? $R_1 = 11$ и $R_2 = 14$? $R_3 = 8$? $R_4 = 21$? $R_3 = 8$ и $R_4 = 21$?

59. а) Покажите, что если в транспортной модели каждый коэффициент целевой функции c_{ij} является целочисленным, то существуют оптимальные значения двойственных переменных, которые также целочисленны.

б) Докажите это утверждение для задачи (1) — (4), сформулированной в разд. 7.4 для сети общего вида.

60. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.20. Числа, проставленные над дугами, определяют расстояние между узлами, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

а) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

б) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 2 и определите их длину.

61. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.21. Числа, проставленные над дугами, определяют расстояние между узлами, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

а) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

б) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 3 и определите их длину.

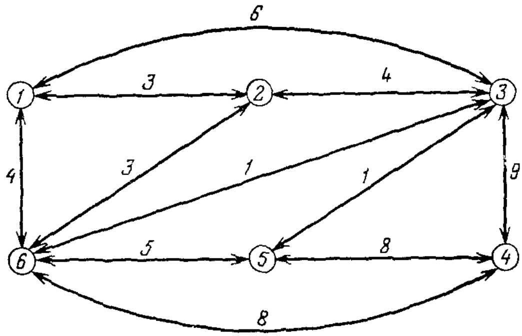


Рис. 7.20.

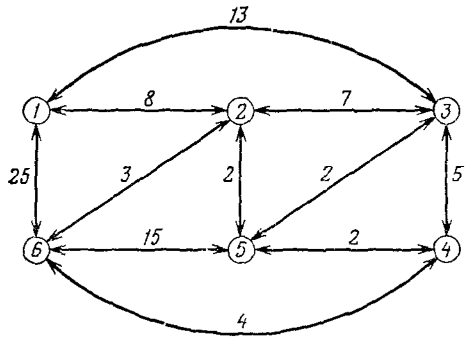


Рис. 7.21.

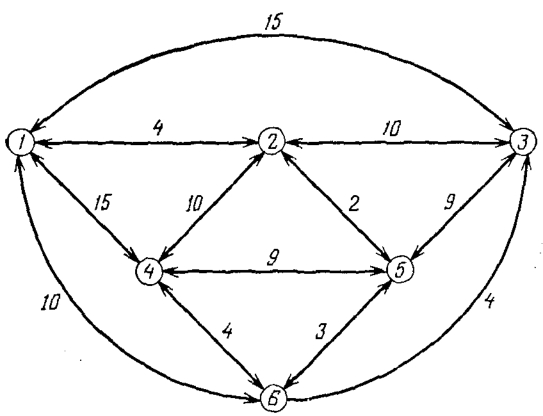


Рис. 7.22.

62. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.22. Числа, проставленные над дугами, определяют расстояние между узлами, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

а) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

б) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 3 и определите их длину.

63. Рассмотрите сеть, содержащую шесть узлов. Примем $c_{ij} = c_{ji}$ и будем считать, что дугам, допускающим движение в обоих направлениях, соответствуют следующие коэффициенты затрат:

$c_{12} = 15$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 8$, $c_{15} = 3$, $c_{16} = 10$, $c_{26} = 3$, $c_{36} = 5$, $c_{46} = 2$, $c_{23} = 9$, $c_{34} = 3$, $c_{45} = 4$, $c_{56} = 7$.

а) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

б) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 2 и определите их длину.

64. Примените в каждом из указанных ниже пунктов алгоритм, изложенный в разд. 7.6, для отыскания кратчайших маршрутов из каждого узла во все остальные и определите длину соответствующих маршрутов.

а) Сеть, приведенная в упражнении 60.

б) Сеть, приведенная в упражнении 61.

в) Сеть, приведенная в упражнении 62.

г) Сеть, приведенная в упражнении 63.

65. Рассмотрите сеть, показанную на рис. 7.23. Числа, проставленные над дугами, определяют соответствующую им длину c_{ij}. Если стрелки изображены на обоих концах дуги, то движение допускается в обоих направлениях и $c_{ij} = c_{ji}$.

а) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

б) Обсудите задачу отыскания максимальных маршрутов.

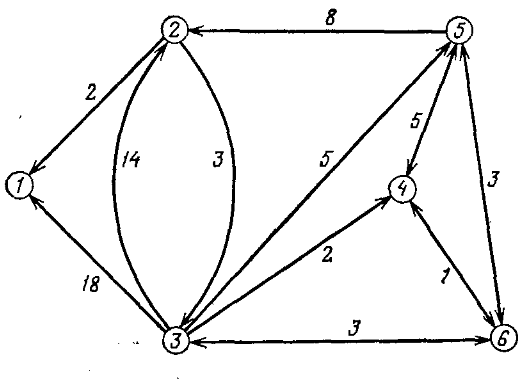


Рис. 7.23.

66. Рассмотрите ациклическую сеть (рис. 7.23), содержащую пять узлов и дугу из каждого узла i ($i = 2, 3, 4, 5$) в каждый узел j, где $j < i$. Пусть $c_{ij} = i + (i - j)^2$. Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов i в узел 1 и определите их длину.

67. Рассмотрите ациклическую сеть, показанную на рис. 7.24. Числа, проставленные над дугами, определяют их длину c_{ij}.

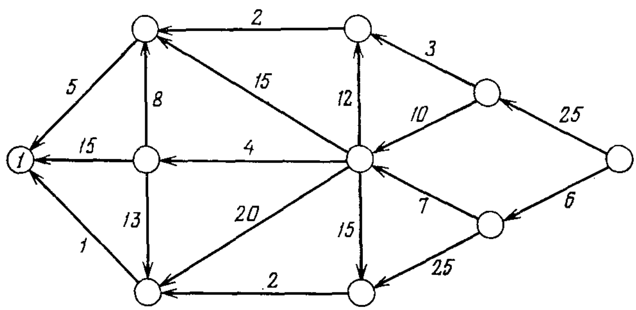


Рис. 7.24.

а) Пронумеруйте узлы с помощью алгоритма, изложенного в начале разд. 7.7.

б) Найдите кратчайшие маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

в) Найдите максимальные маршруты из всех узлов в узел 1 и определите их длину.

68. *Замена оборудования.* Примените алгоритм отыскания кратчайшего маршрута, изложенный в разд. 7.7, для решения задачи компании «Таксолюкс», приведенной в п. г) упражнения 15 гл. 6.

69. *Замена оборудования.* Рассмотрите задачу фирмы «Резвая фреза», приведенную в упражнении 41 гл. 6.

а) Примените алгоритм отыскания кратчайшего маршрута, изложенный в разд. 7.7, для определения оптимальной стратегии замены.

б) Определите диапазон изменения величины p_2 (стоимости новой модели на интервале 2), в котором стратегия, найденная в задаче п. а), остается оптимальной. Выполните это же задание для p_3, p_4, p_5.

в) Определите диапазон изменения величины r_2 (затрат на эксплуатацию единицы оборудования в течение второго последовательного интервала его использования), в котором стратегия, найденная в задаче п. а), остается оптимальной. Выполните это же задание для r_3, r_4, r_5.

70. *Замена оборудования.* Рассмотрите сеть, приведенную на рисунке 6.10. Дайте интерпретацию величин, последовательно вычисляемых с помощью алгоритма (1) — (2), изложенного в разд. 7.7, через величины, фигурирующие в этой сети.

71. Рассмотрите задачу, приведенную в упражнении 43, но при условии $S_i = D_j = 1$ для всех i и j.

а) Решите задачу транспортным симплексным методом.

б) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания максимального потока, изложенного в разд. I.2.

в) Решите задачу с помощью алгоритма минимальной стоимости/максимального потока, изложенного в разд. I.2.

г) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания кратчайшего маршрута, изложенного в разд. I.2.

72. Рассмотрите задачу, приведенную в упражнении 44, но при условии $S_i = D_j = 1$ для всех i и j.

а) Решите задачу транспортным симплексным методом.

б) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания максимального потока, изложенного в разд. I.2.

в) Решите задачу с помощью алгоритма минимальной стоимости/максимального потока, изложенного в разд. I.2.

г) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания кратчайшего маршрута, изложенного в разд. I.2.

73. Рассмотрите задачу, приведенную в упражнении 45, но при условии $S_i = D_j = 1$ для всех i и j.

а) Решите задачу транспортным симплексным методом.

б) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания максимального потока, изложенного в разд. I.2.

в) Решите задачу с помощью алгоритма минимальной стоимости/максимального потока, изложенного в разд. I.2.

г) Решите задачу с помощью алгоритма отыскания кратчайшего маршрута, изложенного в разд. I.2.

74. Решите транспортную задачу, приведенную в упражнении 43, пользуясь алгоритмом определения максимального потока, изложенным в разд. I.3.

75. Решите транспортную задачу, приведенную в упражнении 44, пользуясь алгоритмом определения максимального потока, изложенным в разд. I.3.

76. Решите транспортную задачу, приведенную в упражнении 45, пользуясь алгоритмом определения максимального потока, изложенным в разд. I.3.

УПРАЖНЕНИЯ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

Упражнения 77—81 относятся к транспортным задачам с промежуточными пунктами. Рассмотрите каждый пример на сети общего вида в соответствии с правилами (1) — (4), приведенными в конце разд. 7.4, и начертите соответствующую сеть. В некоторых задачах для соблюдения равенства (4) может оказаться необходимым введение фиктивного узла. Можно выполнять вычисления по симплексному методу непосредственно на сети, не прибегая к помощи как редуцированной, так и расширенной матрицы.

Прежде всего найдите исходное базисное решение. Добейтесь того, чтобы в нем использовалось $p - 1$ дуг, где p — число узлов сети, и чтобы сетевая модель не содержала замкнутых контуров. (Иными словами, выберите дерево, соответствующее допустимому базисному решению. В пробном решении по некоторым из выбранных дуг могут иметь место нулевые потоки.)

Далее с помощью $p - 1$ уравнений $y_i - y_j = c_{ij}$ вычислите соответствующие значения двойственных переменных y_k, $k = 1, 2, \ldots, p$; для каждого маршрута (i, j) в пробном базисном решении используется одно уравнение. (Примите $y_1 = 0$.) Проверьте, допустимо ли решение двойственной задачи, т. е. выполняется ли условие 4 разд. 7.4. Прекратите вычисления, если все двойственные ограничения удовлетворяются. Найденное при этом решение оптимально. В противном случае введите новый маршрут, соответствующий двойственному ограничению, нарушенному сильнее всего. Направьте такой поток по этому новому маршруту, чтобы один из маршрутов в предыдущем пробном решении не содержал потока и, следовательно, исключался из базиса. Повторите проверку на оптимальность. В случае необходимости продолжите вычисления по указанной схеме.

77. Решите задачу, приведенную в упражнении 51.

78. Решите задачу, приведенную в упражнении 52.

79. Решите задачу, приведенную в упражнении 56.

80. Решите задачу, приведенную в упражнении 57.

81. Решите задачу, приведенную в упражнении 58.

82. Объясните, как следует модифицировать изложенный выше алгоритм, чтобы учесть ограничения по пропускной способности $x_{ij} \leqslant u_{ij}$, где u_{ij} — положительные целые числа.

Решите указанные ниже задачи, пользуясь симплексным алгоритмом для транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями, рассмотренным в разд. 7.4.

83. Задача, приведенная в упражнении 43, при $u_{ij} = 2$ для всех i и j.

84. Задача, приведенная в упражнении 44, при $u_{ij} = 3$ для всех i и j.

85. Задача, приведенная в упражнении 45, при $u_{ij} = 5$ для всех i и j.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Алгоритмы решения сетевых задач

I.1. МАКСИМАЛЬНЫЙ ПОТОК В СЕТИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПРОПУСКНЫМИ СПОСОБНОСТЯМИ

Для разработки эффективных методов решения для сложных сетевых моделей важнейшую роль играет следующая задача: какова максимальная величина потока из источника в сток для заданной сети с ограниченными пропускными способностями дуг, в которой узел 0 является единственным источником, а узел $p-1$ является единственным стоком? Математически задача формулируется следующим образом:

$$\text{максимизировать} \quad F \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{(0,j)\in\text{сети}} x_{0j} = F, \quad k=0, \tag{2}$$

$$\sum_{(k,j)\in\text{сети}} x_{kj} - \sum_{(i,k)\in\text{сети}} x_{ik} = 0, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p, \tag{3}$$

$$-\sum_{(i,p+1)\in\text{сети}} x_{i,\ p+1} = -F,\ k=p+1, \tag{4}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij} \quad \text{для всех } (i,\ j) \in \text{сети}, \tag{5}$$

где u_{ij} — неотрицательные целые числа.

Для решения этой задачи можно использовать довольно простой метод. Чтобы основная идея алгоритма стала ясной, примем

$$u_{ij} = 1 \quad \text{для всех} \quad (i,\ j) \in \text{сети}. \tag{6}$$

Если освоить метод решения данной задачи при условии (6), то не возникнет никаких трудностей в понимании модификации алгоритма, требующейся для отыскания решения в общем случае.

Начнем с любого допустимого потока. Является ли поток максимальным или возможно его дальнейшее увеличение, можно определить следующим образом:

Шаг 1. Начиная с узла 0, поставить знак + на каждой дуге $(0,\ j)$ с нулевым потоком, а узел j пометить знаком $\vee$. Узел 0 пометить знаком $\vee$.

Шаг 2. Рассмотреть любой узел j, помеченный знаком $\vee$. Поставить знак + на каждой дуге $(j,\ k)$ с нулевым потоком, исходящей из узла j, *если* узел k не помечен, и пометить узел k знаком $\vee$. Затем проставить знак — на каждой дуге $(k,\ j)$ с ненулевым потоком, входящей в узел j, *если* узел k не помечен, и пометить узел k зна-

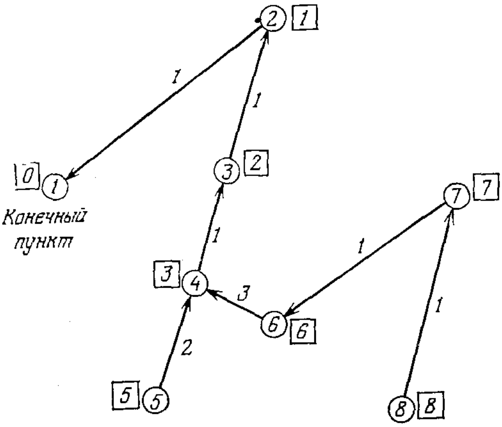


Рис. I.1. Пример задачи о максимальном потоке.

ком $\vee$. В конце шага 2 зачеркнуть знак $\vee$ у узла j, что указывает на то, что этот узел был также **просмотрен.**

Шаг 3. Повторять операции *шага* 2, пока не будет помечен узел $p+1$ или все помеченные узлы не будут просмотрены. Как только проставляется пометка у узла $p+1$, происходит **прорыв**, так как при этом обнаруживается **путь, увеличивающий поток**, из узла 0 в узел $p+1$. Этот путь можно выявить в явном виде с помощью знаков $+$ или $-$, проставленных на дугах, просматривая узлы в обратном направлении, начиная с узла $p+1$. Добавить единичный поток по каждой дуге, помеченной знаком $+$, и уменьшить на единицу поток по каждой дуге, помеченной знаком $-$. Вернуться к *шагу* 1. Однако, если по окончании *шага* 2 узел $p+1$ остается непомеченным, текущее решение определяет максимальный поток в сети.

Работа алгоритма иллюстрируется на примере, приведенном на рис. I.1. В исходном решении величина потока в сети равна двум единицам. Существует несколько вариантов реализации рассматриваемого алгоритма. Проследите за ходом излагаемого ниже варианта, делая легкие карандашные пометки на рисунке.

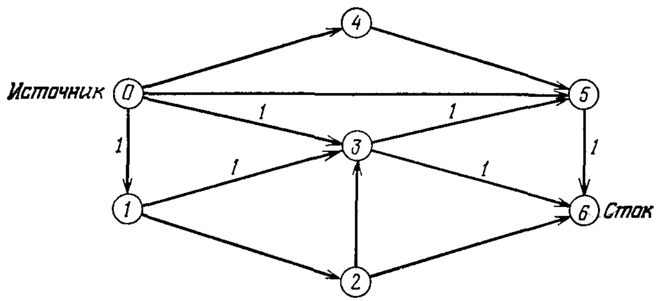
1) Просмотреть узел 0: поставить знак $+$ на дугах (0, 4) и (0, 5) и пометить узлы 4 и 5 знаком $\wedge$. Поставить знак $\wedge$ у узла 0.

2) Просмотреть узел 5: поставить знак $-$ на дуге (3, 5) и пометить узел 1 знаком $\wedge$. Поставить знак $\wedge$ у узла 5.

3) Просмотреть узел 3: поставить знак $-$ на дуге (1, 3) и пометить узел 3 знаком $\wedge$. Поставить знак $\wedge$ у узла 3.

4) Просмотреть узел 1: поставить знак $+$ на дуге (1, 2) и пометить узел 2 знаком $\wedge$. Поставить знак $\wedge$ у узла 1.

5) Просмотреть узел 2: поставить знак $+$ на дуге (2, 6) и пометить узел 6 знаком $\wedge$. Путь, увеличивающий поток, обнаружен.

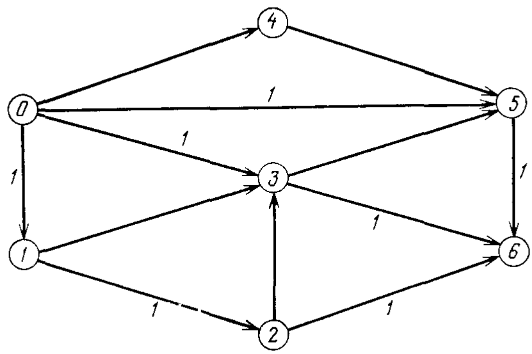


Поток = 2

Одна единица: 0 → 1 → 3 → 6

Одна единица: 0 → 3 → 5 → 6

Рис. I.2. Процесс просмотра сети.



Поток = 3

Одна единица: 0 → 1 → 2 → 6

Одна единица: 0 → 3 → 6

Одна единица: 0 → 5 → 6

Рис. I.3. Решение задачи о максимальном потоке.

Читателю предлагается сопоставить полученные результаты с рис. I.2. Таким образом, решение улучшается, если:

1) добавить единичный поток по дугам (2, 6) и (1, 2);

2) уменьшить на единицу поток по дугам (1, 3) и (3, 5);

3) добавить единичный поток по дуге (0, 5).

Новое решение приведено на рис. I.3. Повторив все шаги алгоритма, покажите, что теперь поток максимален. Последовательность просматриваемых узлов включает узлы 0, 4 и 5. Ни один другой узел пометить уже невозможно.

Чтобы снять ограничение (6) на пропускную способность дуг, в алгоритм вносятся следующие изменения. При просмотре сети на каждой исходящей ненасыщенной дуге, т. е. дуге, пропускная способность которой превышает величину дугового потока, ставится знак $+$. Далее, когда путь, увеличивающий поток, обнаруживается, по этому пути направляется максимально допустимый поток с учетом величины *недоиспользованной* пропускной способности каждой дуги, помеченной знаком $+$, и текущей величины дуговых потоков по каждой дуге, помеченной знаком —. Таким образом, при решении задачи о максимальном потоке (1) — (5) работа алгоритма заканчивается в соответствии со следующим правилом останова.

Правило останова. Поток по дуге, исходящей из просмотренного узла и входящей в помеченный узел, равен ее пропускной способности, а поток по дуге, исходящей из непомеченного узла и входящей в просмотренный узел, равен нулю.

На каждой итерации выполнение *шага 3* приводит либо к увеличению потока в сети на одну или более единиц, либо к останову. Вследствие этого алгоритм сходится за конечное число итераций, ибо максимальный допустимый поток ограничен сверху. Теперь остается только показать, что при завершении симплекс-процедуры решение действительно является оптимальным. С этой целью разобьем все узлы сети на два непересекающихся подмножества, скажем C_0 и C_{p+1}. Узел 0 включим в подмножество C_0, а узел $p+1$ — в подмножество C_{p+1}. Такое разбиение называется **разрезом. Пропускную способность разреза** определим как сумму пропускных способностей u_{ij} всех дуг, таких, что узел i принадлежит подмножеству C_0, а узел j — подмножеству C_{p+1}.

Пропускная способность разреза при *любом* разбиении узлов на указанные подмножества определяет верхнюю границу максимально возможной величины потока в сети. (Если пропускная способность разреза равна нулю, то узел 0 в буквальном смысле отделен от узла $p+1$ и поток из источника в сток оказывается невозможным.) Следовательно, если допустимый поток равен пропускной способности любого разреза, то он должен быть оптимальным. Кроме того, в силу ограничений (2), (3) и (4), определяющих условия сохранения потока, значение F в любом допустимом решении должно быть равно сумме потоков по всем дугам (i, j) минус сумма всех потоков по дугам (j, i), где узел i содержится в подмножестве C_0, а узел j — в подмножестве C_{p+1}.

Учитывая все эти замечания, легко доказать оптимальность. Рассмотрим некоторое допустимое решение при остановке алгоритма. Определим C_0 как подмножество всех просмотренных узлов, а C_{p+1} как подмножество всех остальных узлов. В соответствии с правилом останова поток из любого узла, принадлежащего подмножеству

C_{p+1}, в любой узел, принадлежащий подмножеству C_0, *равен нулю*. Поэтому общая величина потока в сети равна сумме потоков по всем дугам, исходящим из подмножества C_0 и входящим в подмножество C_{p+1}. *Всем* этим дугам соответствуют потоки, равные их пропускным способностям. Следовательно, общая величина потока в найденном решении равна пропускной способности разреза, и дальнейшее увеличение потока оказывается уже невозможным.

Приведенные рассуждения резюмируются в виде следующей важной теоремы.

Теорема о максимальном потоке/минимальном разрезе. Максимальная величина потока F в любой сети при условиях (2) — (5) равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего источник от стока.

Из этой теоремы вытекает следствие о том, что алгоритм дает целочисленные значения всех величин x_{ij}.

I.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Вспомним модель назначений, подробно рассмотренную в разд. 6.4:

$$\text{минимизировать} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{при всех} \quad i \text{ и } j. \tag{4}$$

В силу характера задачи допустимое решение содержит ровно n переменных, равных единице, тогда как любое *базисное* решение включает $n + n - 1$ переменных. Следовательно, при применении симплексного алгоритма решения сетевых задач к модели назначений (1) — (4) каждый базис содержит $n - 1$ нулевых переменных (маршрутов). Это обстоятельство приводит к выводу, что применение симплексного алгоритма не обеспечивает в полной мере учета особой структуры модели назначений. В данном разделе будут изложены три отличных от симплексного метода решения задачи о назначениях.

Первый метод основан на использовании алгоритма отыскания максимального потока, рассмотренного в предыдущем разделе; второй — на объединении алгоритмов отыскания максимального потока и кратчайшего маршрута. Третий метод еще глубже раскрывает связь между задачей о назначениях и задачей выбора кратчайшего маршрута. Эти методы иллюстрируются на примере, решение которого вначале определяется с помощью симплексного алгоритма, что дает базу для последующего их сравнения. Как будет показано в разд. I.3, преимуществом этих методов является также и то, что они достаточно просто обобщаются на сетевые оптимизационные модели других классов.

Симплексный алгоритм. Рассмотрим задачу о назначениях, условия которой приведены на рис. I.4. Если применить метод выбора исходного решения, изложенный в разд. 7.4, для вычисления относительных оценок, то получим значения, приведенные на рис. I.5. Исходный базис показан на рис. I.4. Отметим, что три маршрута (во второй строке) имеют нулевые значения переменных, что указывает на вырожденность. Можно проследить за всеми итерациями, рассмотрев рис. I.6—I.12, содержащие последовательности полученных оценок и пробные решения. Отметим также, что значение целевой функции не меняется вплоть до отыскания последнего решения.

$\boxed{2}$ 1	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$	$\boxed{0}$	1
$\boxed{10}$ 0	$\boxed{18}$ 1	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{9}$ 0	1
$\boxed{15}$	$\boxed{24}$	$\boxed{26}$ 1	$\boxed{10}$	1
$\boxed{12}$	$\boxed{25}$	$\boxed{27}$	$\boxed{8}$ 1	1
1	1	1	1	

Рис. I.4. Исходное базисное решение задачи о назначениях. (Общие затраты = 54.)

	$c_{ij}-v_i-w_j$				v_i
	1	1	4	0	0
	0	0	0	0	9
	4	5	5	0	10
	3	8	8	0	8
w_j	1	9	11	0	

Рис. I.5. Относительные оценки модели назначений: $c_{ij} - v_i - w_j$.

Метод, основанный на алгоритме максимального потока. Другой метод решения задачи о назначениях базируется на алгоритме отыскания максимального потока, который рассмотрен в предыдущем разделе. Кроме того, этот метод связан с соображениями, по сути дела близкими к идее отыскания хорошего исходного решения, которая изложена в разд. 7.4 (стр. 284).

Алгоритм сводится к следующим шагам.

Шаг 1. При заданных оценках строк v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и столбцов w_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, дающих неотрицательные относительные оценки $(c_{ij} - v_i - w_j) \geqslant 0$, определяется, существует ли допустимое решение, в которое входят *только* маршруты с *нулевыми* относительными оценками. В случае положительного ответа на этот вопрос — останов, так как решение оптимально. В противном случае осуществляется переход к *шагу 2.*

				v_i
$\boxed{2}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{15}$ −3	$\boxed{0}$ 1	−8
$\boxed{10}$ $\underline{0}$	$\boxed{18}$ $\underline{0}$	$\boxed{20}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ $\underline{0}$	0
$\boxed{15}$ 1	$\boxed{24}$ 0	$\boxed{26}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ 5	6
$\boxed{12}$ −3	$\boxed{25}$ −8	$\boxed{27}$ −8	$\boxed{8}$ $\underline{0}$	−1
w_j: 10	18	20	9	

Рис. I.6. Оценки маршрутов исходного решения модели назначений.

1				1
0	1	0		1
		1	0	1
			1	1
1	1	1	1	

Рис. I.7. Второе базисное решение задачи о назначениях. (Общие затраты = 54 — 5·0 = = 54.)

				v_i
$\boxed{2}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{15}$ −3	$\boxed{0}$ −4	−8
$\boxed{10}$ $\underline{0}$	$\boxed{18}$ $\underline{0}$	$\boxed{20}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ −5	0
$\boxed{15}$ 1	$\boxed{24}$ 0	$\boxed{26}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ $\underline{0}$	6
$\boxed{12}$ 2	$\boxed{25}$ −3	$\boxed{27}$ −3	$\boxed{8}$ $\underline{0}$	4
w_j: 10	18	20	4	

Рис. I.8. Оценки маршрутов второго решения задачи о назначениях.

1				1
	1	0		1
		1	0	1
0			1	1
1	1	1	1	

Рис. I.9. Третье базисное решение задачи о назначениях. (Общие затраты = 54 — 2·0 = = 54.)

				v_i
$\boxed{2}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{15}$ −1	$\boxed{0}$ −2	−6
$\boxed{10}$ −2	$\boxed{18}$ $\underline{0}$	$\boxed{20}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ −5	0
$\boxed{15}$ −1	$\boxed{24}$ 0	$\boxed{26}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ $\underline{0}$	6
$\boxed{12}$ $\underline{0}$	$\boxed{25}$ −3	$\boxed{27}$ −3	$\boxed{8}$ $\underline{0}$	4
w_j: 8	18	20	4	

Рис. I.10. Оценки маршрутов третьего решения задачи о назначениях.

	1			1
	0	1		1
		0	1	
1			0	1
1	1	1	1	

Рис. I.11. Оптимальное базисное решение задачи о назначениях. (Общие затраты = = 54 — 2·1 = 52.)

Шаг 2. Оценки v_i и w_j изменяются таким образом, чтобы относительная оценка по крайней мере одного нового маршрута была равна нулю. Возвращаются к *шагу 1.*

Подробности выполнения каждого шага поясняются на том же примере. *Шаг 1* всегда можно начать, используя значения оценок,

				v_i
$\boxed{2}$ −2	$\boxed{10}$ $\underline{0}$	$\boxed{15}$ −3	$\boxed{0}$ −4	−8
$\boxed{10}$ −2	$\boxed{18}$ $\underline{0}$	$\boxed{20}$ $\underline{0}$	$\boxed{9}$ −5	0
$\boxed{15}$ −1	$\boxed{24}$ 0	$\boxed{26}$ $\underline{0}$	$\boxed{10}$ $\underline{0}$	6
$\boxed{12}$ $\underline{0}$	$\boxed{25}$ −3	$\boxed{27}$ −3	$\boxed{8}$ $\underline{0}$	4
w_j: 8	18	20	4	

Рис. I.12. Оценки маршрутов оптимального решения задачи о назначениях.

				v_i
$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{15}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
$\boxed{10}$ 0	$\boxed{18}$ 0	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{9}$ 1	8
$\boxed{15}$ 3	$\boxed{24}$ 4	$\boxed{26}$ 4	$\boxed{10}$ 0	10
$\boxed{12}$ 2	$\boxed{25}$ 7	$\boxed{27}$ 7	$\boxed{8}$ 0	8
w_j: 2	10	12	0	

Рис. I.13. Относительные оценки маршрутов модели назначений: $c_{ij} - v_i - w_j$.

				v_i
$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{15}$ 3	$\boxed{0}$ 2	0
$\boxed{10}$ 0	$\boxed{18}$ 0	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{9}$ 3	8
$\boxed{15}$ 1	$\boxed{24}$ 2	$\boxed{26}$ 2	$\boxed{10}$ 0	12
$\boxed{12}$ 0	$\boxed{25}$ 5	$\boxed{27}$ 5	$\boxed{8}$ 0	10
w_j: 2	10	12	−2	

Рис. I.14. Измененные относительные оценки алгоритма максимального потока.

определяемые с помощью метода выбора исходного решения, который изложен в разд. 7.4. (В данном примере относительные оценки являются элементами таблицы на рис. I.5.) Однако для сравнения рассматриваемого метода с симплексным алгоритмом удобно начать со значений, приведенных в таблице на рис. I.13.

Алгоритм максимального потока используется на *шаге 1* для определения существования допустимого решения, содержащего только маршруты с нулевыми элементами таблицы на рис. I.13. Имеются упрощенные табличные приемы реализации этого алгоритма, но поскольку основной целью в данном случае является разъяснение эффективности алгоритма максимального потока для решения задачи о назначениях, в последующем изложении эти приемы, позволяющие сокращать объем вычислений, не применяются.

Сеть, содержащая маршруты (дуги) с нулевыми относительными оценками, соответствующими элементам таблицы на рис. I.13, построена на рис. I.15. Обозначения узлов r_i соответствуют строке i таблицы на рис. I.13, и аналогично обозначения k_j соответствуют столбцу j

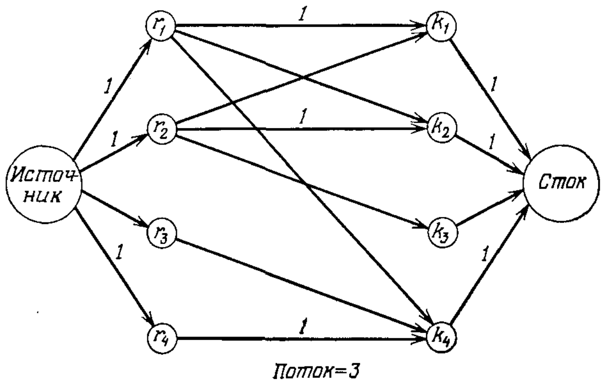


Рис. I.15. Поток в сети модели назначений.

этой таблицы. Все дуги, исходящие из источника и входящие в сток, имеют пропускную способность, равную единице, что соответствует ограничениям по строкам и столбцам задачи о назначениях.

Если бы максимальный поток в сети был равен четырем, то соответствующее этому потоку решение являлось бы оптимальным, поскольку единичный поток по дуге (r_i, k_j) означает, что $x_{ij} = 1$. Пробное решение, в котором величина потока равна трем, показано на рис. I.15. Алгоритм максимального потока реализован на рис. I.16, показывающем, что в такой сети поток увеличить нельзя. Поэтому необходимо перейти к *шагу 2*.

Рациональный путь изменения значений величин v_i и w_j заключается в следующем. Поскольку поток в сети, изображенной на рисунке I.16, максимален, но меньше четырех единиц, необходимо ввести по крайней мере одну новую дугу (r_i, k_j). Исходя из характера потокового алгоритма, целесообразно ограничиться только такими дугами, у которых узел r_i помечен, а узел k_j не помечен. Если ввести в сеть такую дугу, то шаги потокового алгоритма можно продолжить, что позволит просмотреть по крайней мере еще один узел k_j.

Однако, изменяя значения величин v_i и w_j, необходимо проявлять осмотрительность, чтобы не нарушить равенства $c_{ij} - v_i - w_j = 0$ для дуг, по которым в текущем решении проходит ненулевой поток, а также для дуг, помеченных знаком + в процессе просмотра сети. В противном случае может оказаться невозможным продолже-

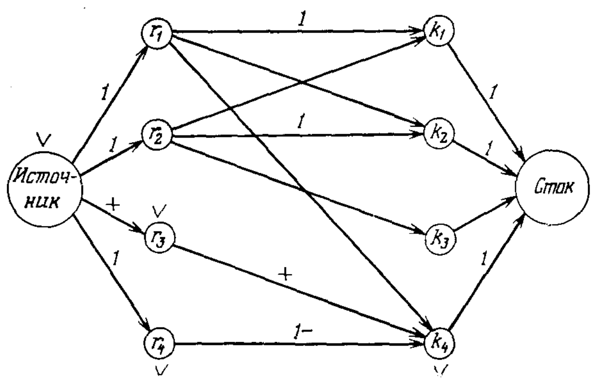


Рис. I.16. Просмотр сети для обнаружения возможности увеличения потока.

ние просмотра после реализации *шага 1* (рис. I.16). Кроме того, необходимо сохранить соотношение $c_{ij} - v_i - w_j \geqslant 0$ для всех i и j. Правило, обеспечивающее выполнение всех этих условий, формулируется следующим образом.

1) Прибавить величину $\bar{c}$ к v_i, если помечен узел r_i.

2) Вычесть величину $\bar{c}$ из w_j, если помечен узел k_j. (5)

Здесь

$\bar{c}$ — наименьшая относительная оценка для дуг между каждым помеченным узлом r_i и *непомеченным* узлом k_j. (6)

На рис. I.16 узлы r_3 и r_4 помечены, а узлы k_1, k_2, k_3 не помечены. Следовательно, в таблице на рис. I.13 нужно просмотреть элементы на пересечении строк 3 и 4 со столбцами 1, 2, 3, в результате чего получаем

$$\bar{c} = \min (3, 4, 4, 2, 7, 7) = 2 = c_{41}. \tag{7}$$

В таблице на рис. I.14 приведены измененные значения v_i и w_j, а также новые значения относительных оценок. Отметим, что теперь дуга (r_4, k_1) имеет относительную оценку, равную нулю, хотя дуге (r_1, k_4) соответствует положительная относительная оценка. Сеть, отображающая это решение, показана на рис. I.17. Алгоритм максимального потока на такой сети продолжает работать и помечаются узлы k_1, r_1, k_2, r_2, k_3 и, наконец, сток. Знаки + и — на дугах определяют путь, увеличивающий поток, который приводит к оптимальному решению, показанному на рис. I.18.

Повторим еще раз вкратце рассмотренный алгоритм. Начав с пробных значений v_i и w_j на *шаге 1*, нужно применить алгоритм максимального потока к соответствующей сети. Если полученная в результате величина общего потока в сети равна n, то решение оптимально

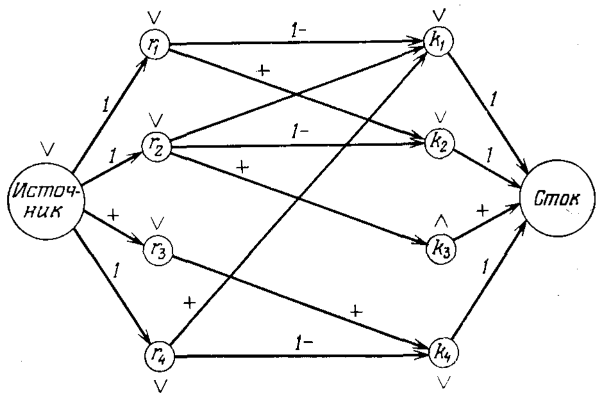


Рис. I.17. Измененная сеть.

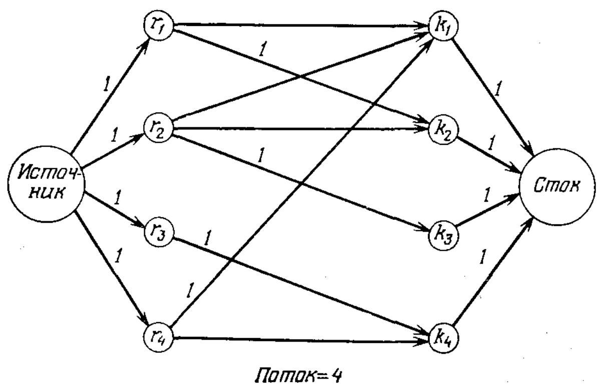


Рис. I.18. Окончательное решение.

и вычислительная процедура заканчивается. В противном случае следует перейти к *шагу 2*, на котором значения v_i и w_j изменяются в соответствии с правилами (5) и (6). Далее возвращаются к *шагу 1* и несколько измененной в результате выполнения этого шага сети, в которую введена по крайней мере одна новая дуга (в предположении, что соответствующий коэффициент c_{ij} для этой дуги равен $\bar{c}$), а некоторые *неиспользуемые* дуги могут быть исключены. Затем вновь возвращаются к алгоритму максимального потока, применяя его к схеме потока, полученной на предыдущем шаге. Вновь проверяют, равна ли величина потока, общего в сети, числу n и т. д.

Доказательство того, что решение, полученное при остановке алгоритма, является оптимальным, идентично доказательству оптимальности решения транспортной модели симплексным методом. Сходимость за конечное число итераций устанавливается, исходя из следующих соображений.

1. Всякий раз при реализации *шага 2* по крайней мере один узел оказывается просмотренным на последующем *шаге 1.* Поскольку число узлов в сети конечно, *шаг 2* в конце концов приводит к прорыву на последующем *шаге 1.*

2. Может иметь место лишь конечное число прорывов, так как каждый из них обусловливает увеличение потока, а величина общего потока в сети ограничена сверху.

Одним из следствий доказательства сходимости является то, что для получения решения не требуется применять *шаг 2* более чем $0{,}5\,(n^2 + 3n - 2)$ раз. Эта верхняя граница, как правило, намного превышает действительное число повторений *шага 2.* Вместе с тем следует подчеркнуть, что даже такая верхняя граница значительно меньше, чем (n^{2n-1}), которая является верхней оценкой сходимости симплексного алгоритма, выраженной через число возможных базисных решений.

Потоковый подход к решению задачи о назначениях несколько напоминает двойственный симплексный метод в том смысле, что на каждой итерации удовлетворяются двойственные ограничения, но допустимое решение не получается вплоть до последней итерации. Существенным отличием как от стандартного, так и от двойственного симплексного метода *является то, что при потоковом методе базисное решение не сохраняется.*

Метод минимальной стоимости/максимального потока. Чтобы приступить к *шагу 1* изложенного выше метода, нужно найти оценки v_i и w_j, такие, чтобы все относительные оценки $c_{ij} - v_i - w_j$ были неотрицательными. Без потери общности можно предположить, что все $c_{ij} \geqslant 0$, поскольку всегда можно прибавить некоторую положительную константу c^* к *каждому* коэффициенту c_{ij}. Тогда *шаг 1* изложенного ранее метода можно начать, положив $v_i = w_j = 0$. Если выполнить это условие, то оказывается, что последовательность получаемых решений содержит минимальную стоимость по сравнению со всеми остальными значениями при одной и той же величине потока в сети. Это обстоятельство позволяет изменить структуру алгоритма, что в свою очередь обеспечивает возможность обобщения потокового метода для решения более сложных сетевых задач. Смысл алгоритма заключается в том, чтобы увеличивать общую величину потока таким образом, чтобы это увеличение происходило при минимальных приращениях затрат. Так, если F единиц потока распределяются по сети, с помощью излагаемого метода отыскивается путь минимальной стоимости, увеличивающий поток, причем увеличение потока производится именно на этом пути. Метод отыскания пути минимальной стоимости основан на алгоритме выбора кратчайшего маршрута.

Алгоритм минимальной стоимости/максимального потока сводится к выполнению следующих шагов.

Шаг 1. Исходя из текущего решения, строится новая сеть следующим образом. В эту сеть включается каждая дуга, имеющая в исходной сети нулевой поток, и c_{ij} принимается за длину дуги,

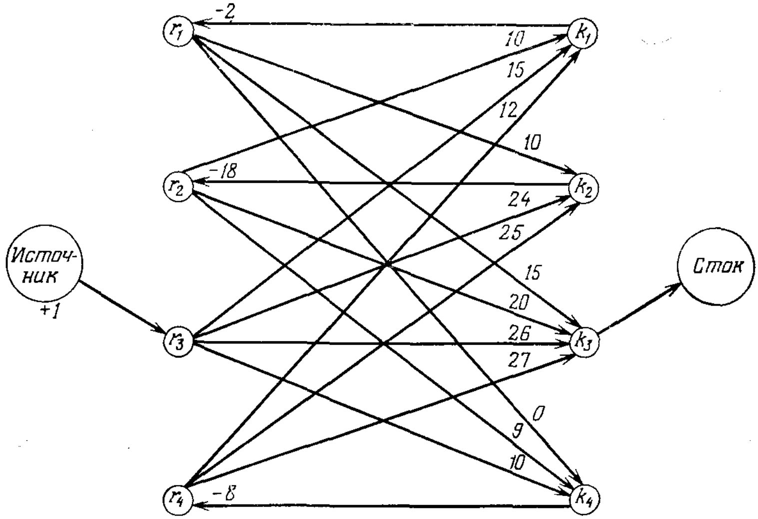


Рис. I.19. Сеть, соответствующая методу минимальной стоимости максимального потока.

Если между узлами r_i и k_j существует поток, то вводится дуга (k_j, r_i) и ее длина принимается равной $-c_{ij}$. При таком принципе построения сети можно увеличить поток из источника в сток по *любому* пути новой сети по сравнению с величиной потока в исходной сети.

Шаг 2. Найти кратчайший маршрут из источника в сток в новой сети. По стандартным правилам увеличить поток по этому маршруту (пути) в исходной сети. Если все ограничения модели назначений удовлетворяются, то вычислительная процедура заканчивается. В противном случае осуществляется переход к *шагу 1*.

Изложенный метод демонстрируется на примере рис. I.4. Предположим, что в результате применения алгоритма найдено решение минимальной стоимости для величины потока в три единицы. Это решение совпадает с рис. I.15, а его стоимость составляет 28 $(= 2 + 18 + 8)$.

Новая сеть, построенная на *шаге 1*, показана на рис. I.19. Отметим, что источник связан только с узлом r_3, а сток — только с узлом k_3, поскольку все остальные дуги являются насыщенными. Сеть

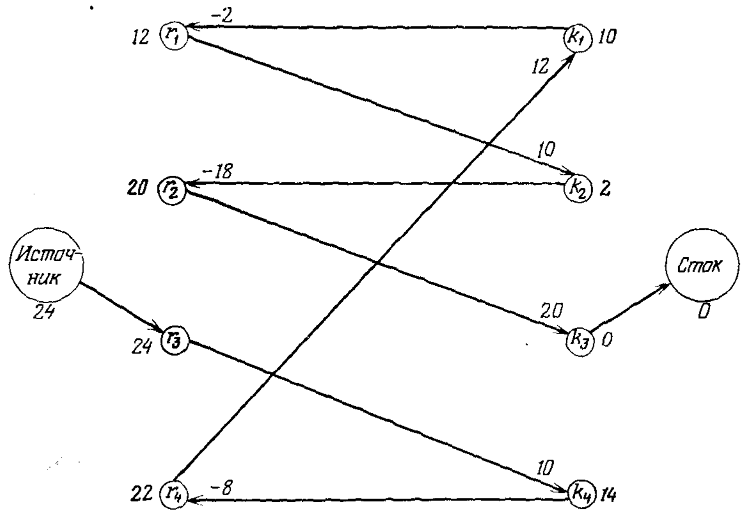


Рис. I.20. Кратчайший маршрут.

содержит дуги (k_1, r_1), (k_2, r_2) и (k_4, r_4), *так как в текущем решении* поток имеет противоположное направление. В текущем решении потоки по всем остальным дугам равны нулю.

Далее к этой сети применяется алгоритм выбора кратчайшего маршрута, изложенный в разд. 7.6, который приводит к результату, показанному на рис. I.20. Направление единичного потока по указанному маршруту дает оптимальное решение, согласующееся с рис. I.18. Отметим, что направление единичного потока по дуге (k_4, r_4) означает, что в исходной сети поток по дуге (r_4, k_4) должен быть снят. Поскольку длина кратчайшего пути равна 24, общая стоимость окончательного решения составляет 52 ($= 28 + 24$). Длина кратчайших маршрутов из каждого узла r_i является оптимальным значением $-v_i$, и аналогично длина кратчайшего маршрута из каждого узла k_j есть оптимальное значение w_j.

Метод кратчайшего маршрута. В разд. 6.5 было показано, как преобразовать задачу о выборе кратчайшего маршрута к виду задачи о назначениях. В этой главе изложен эффективный метод решения задачи о кратчайшем маршруте, *не требующий* такого преобразования. Покажем теперь, как можно решить задачу о назначениях путем приведения ее к виду задачи о кратчайшем маршруте с применением алгоритма выбора кратчайшего маршрута, который был приведен в разд. 7.6.

Общая идея алгоритма заключается в решении задачи о назначениях размерности 1×1, которая представляет собой тривиальную задачу. Полученный ответ используется далее для решения задачи

	Столбец 1	2	4	
Строка 1	2	10	0	1
2	10	18	9	1
4	12	25	8	1
	1	1	1	

Рис. I.21. Задача о назначениях размерности 3 × 3.

размерности 2 × 2, после чего продолжают действовать по той же схеме, добавляя на каждой итерации по одной строке и одному столбцу, пока не получают решения задачи размерности $n \times n$. При заданном решении задачи размерности $p \times p$ для формирования задачи размерности $(p+1) \times (p+1)$ можно выбрать любую из оставшихся строк и любой из оставшихся столбцов.

Как и прежде, этот метод поясняется на примере рис. I.4. Предположим, что решена задача размерности 3 × 3, в которую вошли строки 1, 2 и 4 и столбцы 1, 2 и 4 (таблица рис. I.4). Для удобства на рис. I.21 приведена соответствующая таблица, в которой обведенные кружками величины c_{ij} соответствуют оптимальному решению этой задачи. Отметим, что решение не отличается от решения, показанного на рис. I.15.

Для формирования задачи размерности 4 × 4 добавим оставшиеся третью строку и третий столбец таблицы на рис. I.4, в результате чего получим таблицу на рис. I.22. Вычислим далее относительные оценки $c_{ij} - v_i$, где $v_i = 0$ для новой строки, а остальные величины v_i являются значениями c_{ij} для оптимальных маршрутов в задаче размерности 3 × 3. Полученный результат приведен в таблице на рис. I.23. Отметим, что эта таблица имеет такой же вид, как и таблица задачи выбора кратчайшего маршрута, приведенная на рисунке 6.9. Сеть, в которой обозначения узлов соответствуют таблице на рис. I.23, показана на рис. I.24.

	Столбец 1	2	4	3	
Строка 3	15	24	10	26	1
1	2	10	0	15	1
2	10	18	9	20	1
4	12	25	8	27	1
	1	1	1	1	

Рис. I.22. Задача о назначениях размерности 4 × 4.

Узел \ Узел	1	2	3	4	v_i
0	15	24	10	26	0
1	0	8	−2	13	2
2	−8	0	−9	2	18
3	4	17	0	19	8

Рис. I.23. Относительные оценки маршрутов: $c_{ij} - v_i$.

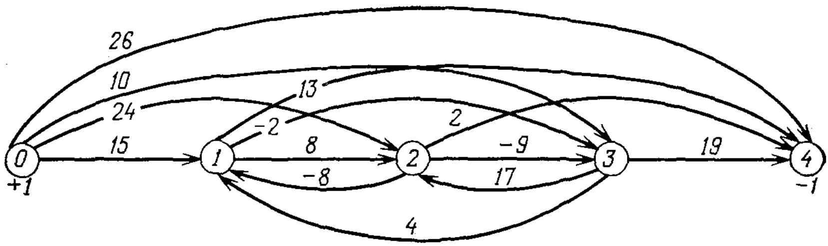


Рис. I.24. Сеть, соответствующая методу решения задачи о назначениях размерности 4 × 4.

Применим алгоритм выбора кратчайшего маршрута для отыскания наилучшего пути из узла 0 в узел 4 на сети, представленной на рис. I.24. Решение, показанное на рис. I.25, соответствует оптимальному решению исходной задачи о назначениях.

Чтобы показать эффективность предложенного метода, требуется доказать неотрицательность длины любого пути вдоль каждого контура, содержащегося в сети, где отыскивается кратчайший маршрут. Напомним, что это условие является обязательным для применения алгоритма отыскания кратчайшего маршрута. Анализируя рис. I.24, приходим к выводу, что единственными возможными контурами являются контуры, проходящие через узлы 1, 2 и 3, соответствующие строкам и столбцам задачи размерности 3 × 3. Как обычно, оптимальное решение задачи размерности 3 × 3 должно оставаться

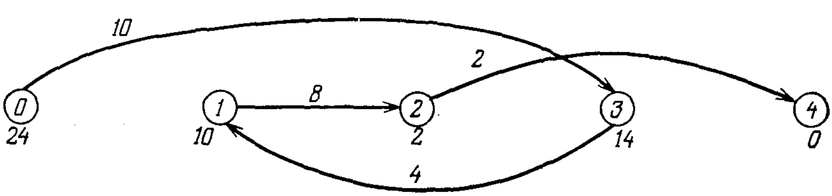


Рис. I.25. Кратчайший маршрут из узла 0 в узел 4.

оптимальным, если выразить его в относительных оценках таблицы на рис. I.23. Контур, проходящий через узлы 1, 2 и 3, равносилен некоторому решению задачи 3×3. Следовательно, ни один контур не может иметь отрицательной стоимости (длины), поскольку оптимальное решение задачи 3×3, приведенное в таблице на рис. I.23, имеет нулевую стоимость.

I.3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДРУГИХ КЛАССОВ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

Методы, изложенные в предыдущем разделе, легко обобщаются на другие классы сетевых оптимизационных задач.

Единственной модификацией, которая требуется для использования *метода максимального потока* при решении стандартных транспортных задач (разд. 6.2), является необходимость принять пропускную способность дуги, идущей из источника в узел r_i, равной S_i, и аналогично пропускную способность дуги, идущей из узла k_j в сток, нужно принять равной D_j. Для задач этого класса верхняя оценка числа повторений шага 2 определяется выражением

$$\sum_{i=1}^{m} S_i + \left(\sum_{i=1}^{m} S_i - 1\right)[\min(m, n) + 1]. \qquad (1)$$

Точно так же единственной существенной модификацией, требующейся для применения метода *минимальной стоимости/максимального потока* при решении оптимизационных сетевых задач общего вида (1) — (4) (см. разд. 6.8, стр. 246), является включение в *шаг 1* каждой дуги исходной сети, являющейся в текущем решении ненасыщенной. (Правило, касающееся узлов r_i и k_j, относится к любым узлам i и j, содержащимся в сети.) Как было указано в конце разд. 6.8, может возникнуть необходимость преобразования исходной сети к сети с одним источником и одним стоком.

Метод кратчайшего маршрута также можно обобщить для решения стандартных транспортных задач, в чем нет ничего неожиданного, ибо задачи этого класса эквивалентны задачам о назначениях.

Литература

Литература по общим вопросам исследования операций

КНИГИ

1. *Ackoff R. L.*, Progress in Operations Research, Vol. I, Wiley, 1961.
2. *Ackoff R. L.*, *Rivett P.*, A Manager's Guide to Operations Research, Wiley, 1963.
3. *Ackoff R. L.*, *Sasieni M. W.*, Fundamentals of Operations Research, Wiley, 1968; есть русский перевод: Акоф Р., Сасиени М., Основы исследования операций изд-во «Мир», 1971.
4. *Baumol W. J.*, Economic Theory and Operations Analysis, Prentice-Hall, 1963.
5. *Boot J. C. G.*, Mathematical Reasoning in Economics and Management Science, Twelve Topics, Prentice-Hall, 1967.
6. *Bowman E. H.*, *Fetter R. B.*, Analysis for Production and Operations Management, R. D. Irwin, 1967.
7. *Caar C. R.*, *Howe C. W.*, Quantitative Decision Procedures in Management and Economics-Deterministic Theory and Applications, McGraw-Hill, 1964.

7a. *Churchman C. W.*, The Systems Approach, Delacorte Press, 1968.

8. *Churchman C. W.*, *Ackoff R. L.*, *Arnoff E. L.*, Introduction to Operations Research, Wiley, 1957.
9. *Fishburn P. C.*, Decision and Value Theory, Wiley, 1964.
10. *Hertz D. B.*, *Eddison R. T.*, Progress in Operations Research, Vol. II, Wiley, 1964.
11. *Hertz D. B.*, New Power for Management-Computer Systems and Management Science, McGraw-Hill, 1969.
12. *Hillier F. S.*, *Lieberman G. J.*, Introduction to Operations Research, Holden-Day, 1967.
13. *Horowitz I.*, An Introduction to Quantitative Business Analysis, McGraw-Hill, 1965.
14. *Miller D. W.*, *Starr M. K.*, Executive Decisions and Operations Research, Prentice-Hill, 1960.
15. *Teichroew D.*, An Introduction to Management Science Deterministic Models, Wiley, 1964.
16. *Theil H.*, Optimal Decision Rules for Government and Industry, North Holland, 1964.

Литература к главам 2—5

КНИГИ

1. *Beale E. M. L.*, Mathematical Programming in Practice, Pitman, 1968.
2. *Charnes A.*, *Cooper W. W.*, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vol. I and II, Wiley, 1961.
3. *Dantzig G. B.*, Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, 1963.
4. *Dorfman R.*, *Samuelson P. A.*, *Solow R. M.*, Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill, 1958.
5. *Gale D.*, The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, 1960.

6. *Gaas S. I.*, Linear Programming: Methods and Applications, McGraw-Hill, 3rd ed., 1969.
7. *Graves R. L.*, *Wolfe P.*, Recent Advances in Mathematical Programming, McGraw-Hill, 1963.
8. *Hadley G.*, Linear Programming, Addison-Wesley, 1962.
9. *Karlin S.*, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Vol. I, Addison-Wesley, 1959.
10. *Koopmans T. C.*, Activity Analysis of Production and Allocation, Proceeding of a Conference, Wiley, 1951.
11. *Kuhn H. M.*, *Tucker A. W.*, Linear Inequalities and Related Systems, Princeton Univ. Press, 1956.
12. *Manne A. S.*, Scheduling of Petroleum Refinery Operations, Harvard Univ. Press, 1956.
13. *Manne A. S.*, *Markowitz H. M.*, Studies in Process Analysis Economy-Wide Production Capabilities, Wiley, 1963.
14. *Orchard-Hays W.*, Advanced Linear-Programming Computing Techniques, McGraw-Hill, 1968.
15. *Vajda S.*, Mathematical Programming, Addison-Wesley, 1961.

СТАТЬИ

16. *Bennett J. M.*, An Approach to Some Structured Linear Programming Problems, *Operations Research*, **14**, 636—645 (1966).
17. *Dantzig G. B.*, *Wolfe P.*, Decomposition Principle for Linear Programs, *Operations Research*, 8, 101—111 (1960).
18. *Fetter R. B.*, A Linear Programming Model for Long Range Capacity Planning, *Management Science*, **7**, 372—378 (1961).
19. *Gilmore P. C.*, *Gomory R. E.*, A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Prodlem, *Operations Research*, **9**, 849—859 (1961).
20. *Gilmore P. C.*, *Gomory R. E.*, A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem — Part II, *Operations Research*, **11**, 863—888 (1963).
21. *Gilmore P. C.*, *Gomory R. E.*, Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions, *Operations Research*, 13, 94—120 (1965).
22. *Lemke C. E.*, The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, 36—47 (1954).
23. *Quandt R. E.*, *Kuhn H. W.*, On Upper Bounds for the Number of Iterations in Solving Linear Programs, *Operations Research*, 12, 161—165 (1964).
24. *Sakarovitch M.*, *Saigal R.*, An Extension of Generalized Upper Bounding Techniques for Structured Linear Programs, *SIAM J. on Appl. Math.*, **15**, 906—914 (1967).
25. *Sharpe W. F.*, A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection, *Management Science*, 13, 499—510 (1967).
26. *Zionts S.*, The Criss-Cross Method for Solving Linear Programming Problems, *Management Science*, **15**, 426—445 (1969).
27. *Wagner H. M.*, A Linear Programming Solution to Dynamic Leontief Type Models, *Management Science*, 3, 234—254 (1957).
28. *Wagner H. M.*, The Dual Simplex Algorithm for Bounded Variables, *Naval Research Logistics Quarterly*, 5, 257—261 (1958).

Литература к главам 6, 7 и приложению I

1. *Ford L. R., Jr.*, *Fulkerson D. R.*, Flows in Networks, Princeton Univ. Press, 1962; русский перевод: *Форд Л.*, *Фалкерсон Д.*, Потоки в сетях, изд-во «Мир», 1966.

СТАТЬИ

2. *Balinski M. L., Gomory R. E.*, A Primal Method for the Assignment and Transportation Problems, *Management Science*, **10**, 578—593 (1964).
3. *Derman C., Klein M.*, Inventory Depletion Management, *Management Science*, **4**, 450—456 (1958).
4. *Eisemann K.*, The Generalized Stepping Stone Method for the Machine Loading Model, *Management Science*, **11**, 154—176 (1964).
5. *Farbey B. A., Land A. H., Murchland J. D.*, The Cascade Algorithm for Finding All Shortest Distances in a Directed Graph, *Management Science*, **14**, 19—28 (1967).
6. *Hoffman A. J., Markowitz H. M.*, A Note on Shortest Path, Assignment and Transportation Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, **10**, 375—379 (1963).
7. *Hu T. C.*, Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths, *SIAM J. on Appl. Math.*, **15**, 207—218 (1967).
8. *Hu T. C.*, A Decomposition Algorithm for Shortest Paths in a Network, *Operations Research*, **16**, 91—102 (1968).
9. *Jewell W. S.*, Warehousing and Distribution of a Seasonal Product, *Naval Research Logistics Quarterly*, **4**, 29—34 (1957).
10. *Jewell W. S.*, Optimal Flow through Networks with Gains, *Operations Research*, **10**, 476—499 (1962).
11. *Kelley J. E.*, Jr., Critical-Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis, *Operations Research*, **9**, 296—320 (1961).
12. *Klein M.*, A Primal Method for Minimal Cost Flows with Applications to the Assignment and Transportation Problems, *Management Science*, **14**, 205—220 (1967).
13. *Kuhn H. W.*, Variants of the Hungarian Method for Assignment Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, **3**, 253—258 (1956).
14. *Lagemann J. J.*, A Method for Solving the Transportation Problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, **14**, 89—99 (1967).
15. *Orden A.*, The Transhipment Problem, *Management Science*, **2**, 276—285 (1956).
16. *Pierskalla W. P.*, The Multidimansional Assignment Problem, *Operations Research*, **16**, 422—431 (1968).
17. *Pollack M., Wiebenson W.*, Solutions of the Shortest-Route Problem—A Review, *Operations Research*, **8**, 224—230 (1960).
18. *Prager W.*, On the Caterer Problem, *Management Science*, **3**, 15—23 (1956).
19. *Rao M. R., Zionts S.*, Allocation of Transportation Units to Alternative Trips — A Column Generation Scheme with Out-of-Kilter Subproblems, *Operations Research*, **16**, 52—63 (1968).
20. *Rothschild B., Whinston A., Kent J.*, Computing Two-Commodity Flows, *Operations Research*, **16**, 446—450 (1968).
21. *Szwarc W.*, The Initial Solution of the Transportation Problem, *Operations Research*, **8**, 727—729 (1960).
22. *Wagner H. M.*, On a Class of Capacitated Transportation Problems, *Management Science*, **5**, 304—318 (1959).
23. *Williams A. C.*, A Treatment of Transportation Problems by Decomposition, *SIAM J. on Appl. Math.*, **10**, 35—48 (1962).
24. *Yaspan A.*, On Finding a Maximal Assignment, *Operations Research*, **14**, 646—651 (1966).

Оглавление

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, Рижский пер., 2, Издательство «Мир».

Г. ВАГНЕР

Основы исследования операций

Том 1

Редактор *Л. ЯКИМЕНКО*
Художник *А. Шипов*
Художественный редактор *Ю. Урманчеев*
Технический редактор *Н. Иовлева*
Корректор *Л. Байкова*

Сдано в набор 31/VII 1972 г.
Подписано к печати 20/X 1972
Бумага тип. № 1 $60\times90^1/_{16}=10{,}5$ бум. л.
21 усл. печ. л.,
Уч.-изд. л. 21,75 Изд. № 20/6382.
Цена 1 р 78 к. Зак. 0622

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Главполиграфпрома Госкомитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли:
Москва, Трехпрудный пер., 9